Отзыв члена диссертационного совета, доктора физико-математических наук Ю.С. Белова на диссертационную работу П.А. Мозоляко "Дискретные модели граничного поведения гармонических функций", представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1 "Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация П.А. Мозоляко посвящена важной теме в гармоническом анализе - теории граничного поведения гармонических функций. Исследования в области гармонических функций составляют один из важнейших разделов математического анализа. Они находят свое применение в задачах математической физики (краевые задачи, спектральная теория дифференциальных уравнений), теории вероятностей (случайные блуждания, случайные аналитические функции), в различных разделах анализа (теория сигналов, теория всплесков) и других разделах математики.

Связь граничных значений со значениями гармонических функций внутри области, геометрия нулей аналитических и гармонических функций вблизи границы, рост гармонических функций - постоянный предмет исследований вот уже более 200 лет. Такие важные для всей математики результаты, как принцип максимума, существование некасательных пределов, теоремы о трех прямых, относятся к задачам о граничном поведении гармонических функций.

Диссертация П.А. Мозоляко посвящена как дискретным моделям так и классическим непрерывным задачам. Интерес к дискретным моделям значительно возрос в последние 40 лет. При этом иногда изучение дискретных моделей помогает решать непрерывные задачи (описание Карлесоновых мер, весовые неравенства для сингулярных интегральных операторов), а иногда свойства дискретного объекта кардинально отличаются от непрерывного, см., например, недавние результаты А. Логунова, Е. Малинниковой и М. Содина о дискретных гармонических функциях на квадратной решетке.

Первый круг задач, который изучается в диссертации - описание карлесоновых мер для гильбертовых пространств $\mathcal{H}$ гармонических и аналитических функций в полидиске и других областях. Мера μ называется карлесоновой если вложение пространства $\mathcal{H}$ в $L^2(\mu)$ ограничено. Серьезное изучение карлесоновых мер началось в конце 50х годов со знаменитой работы Карлесона, в которой были описаны все такие меры для классических пространств Харди. В настоящее время описания карлесоновых мер известны во многих классических пространствах аналитических функций одной

№ 33-06-1632 от 08.12.2023

переменной. Например, Стегенга описал карлесоновы меры в пространстве Дирихле, а Люкинг в пространстве Бергмана. С другой стороны, в старших размерностях известно гораздо меньше.

В диссертации получены описания карлесоновых мер для пространств Харди-Соболева в полидиске (аналитических и гармонических) в размерностях 2 и 3 (теоремы I.5, I.6). Как часто бывает, условия получены в виде серии тест-неравенств

$$\sum_{R\subset Q} \mu^2(T(R))w_s(R) \le C\mu(T(Q)),$$

где Q - произвольная диадическая ячейка, $T(Q)$- карлесонов тент, а суммирование ведется по диадическим ячейкам. Эти замечательные и очень трудные результаты представляют собой значительное продвижение в гармоническом анализе. Доказательства основаны на построении соответствующей дискретной модели полидиска и тонких оценках емкостей на графах. Так как большая часть стандартных емкостных оценок неверна в старших размерностях, автору пришлось разработать новые методы. Подобные оценки емкостей на графах интересны сами по себе. Отметим, что эти методы перестают работать в размерностях выше чем 3. Подробному изложению этих результатов посвящены первые три главы диссертации.

Второй круг вопросов посвящен пространствам гармонических функций с ограничением на рост вблизи границы. Такие пространства изучались в работах многих математиков в середине 20 века, в том числе Шилдса, Уильмса, Картрайт. В диссертации показано, что такие пространства могут быть описаны в терминах коэффициентов разложений по базису из всплесков (например, по всплескам Хаара). Степень гладкости базиса находится в прямой зависимости от свойств веса w. В доказательствах используется мартингальный подход. Также в диссертации получены (тесно связаные с всплеск-разложениями) результаты о гельдеровских классах на вещественной прямой. Эти результаты изложены в четвертой и пятой главах.

Третий круг вопросов диссертации относится к свойствах вариации гармонических функций вблизи границы. Один из первых возникших вопросов – описание точек на границе с конечной нормальной вариацией. В 1993-м году Бургейн показал, что для ограниченной аналитической функции множество точек с конечной вариацией не пусто. Автору диссертации удалось распространить этот результат на гладкие области в R^n. Более того, оказывается, что нормальная вариация конечна для некоторого сверхплотного множества. Для получения этого результата автор преодолел значительные технические трудности. Теоремы о нормальной вариации изложены в восьмой главе.

В диссертационной работе П.А. Мозоляко получены новые интересные результаты гармонического анализа. Эти результаты связаны между собой методами и идеями доказательств и в совокупности представляют собой важный вклад в современный математический анализ.

Содержание диссертации Павла Александровича Мозоляко на тему "Дискретные модели граничного поведения гармонических функций " соответствует специальности 1.1.1 "Вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Результаты диссертации опубликованы в ведущих математических журналах и хорошо известны специалистам. Нарушения пунктов 9, 11 Порядка присуждения Санкт-Петербургским государственным университетом ученой степени доктора наук соискателем ученой степени не установлено. Диссертация Павла Александровича Мозоляко "Дискретные модели граничного поведения гармонических функций "соответствует основным требованиям, установленным приказом N11181/1 от 19.11.2021 "О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете а соискатель Мозоляко Павел Александрович, вне всяких сомнений, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1 "Вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Член диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор факультета математики и компьютерных наук СПбГУ

/Ю.С. Белов/

08.12.2023