ОТЗЫВ

члена диссертационного совета на диссертацию Мозоляко Павла Александровича на тему: «Дискретные модели граничного поведения гармонических функций», представленную на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Теория пространств аналитических и гармонических функций представляет собой обширный и активно развивающийся раздел современного анализа. Пространства аналитических функций и действующие в них операторы имеют многочисленные приложения в теории обработки сигналов, теории управления, теории случайных процессов, а также служат моделями для различных классов абстрактных линейных операторов (например, в модели Надя-Фойаша операторов сжатия в гильбертовом пространстве). Особую роль при изучении пространств аналитических функций играет описание их граничных свойств, то есть поведения элементов пространства вблизи границы области аналитичности/гармоничности. Здесь можно упомянуть классическую теорему Фату для пространств Харди или закон повторного логарифма Н.Г. Макарова – один из самых фундаментальных результатов теории функций конца 20-го века. Различные аспекты граничного поведения аналитических и гармонических функций изучались в работах таких выдающихся аналитиков как Л. Карлесон, У. Рудин, С.-Я. Чанг, Р. Фефферман, Д. Люкинг, А. Шилдс, В.Г. Мазья, Б. Коренблюм, Ж. Бургейн. Новые продвижения в этой области связаны с глубокими работами Ю. Любарского, Е. Малинниковой, П. Тома, А. Боричева, Х. Ортега-Серда, Д. Гирелы, П. Джонса, В.П. Хавина, Н. Аркоцци, Р. Рохберга, Э. Сойера, Б. Уика. Таким образом, тематика диссертации актуальна и является предметом постоянного внимания ведущих специалистов по теории функций.

Отметим, что в то время как граничное поведение (особенно для пространств в круге) в одномерном случае было практически исчерпывающим образом исследовано в 20-м веке, многомерные аналоги теории изучены в значительно меньшей степени. Диссертационная работа посвящена именно многомерному случаю, в ней решен целый ряд фундаментальных открытых вопросов теории, и, что не менее важно, развит новый подход к решению этих задач, связанный с дискретными моделями непрерывных задач и их сведению к задачам теории потенциала на графах – на так называемых d-деревьях, то есть на декартовых произведениях нескольких деревьев. Заметим, что этот случай принципиально сложнее случая обычных деревьев, изученного в работах предшественников.

Представленные в диссертации П.А. Мозоляко результаты относятся к трем тесно связанным между собой направлениям исследования граничного поведения гармонических функций. Первое из них – описание мер Карлесона (то есть мер μ, для которых ограничен оператор вложения рассматриваемого пространства в $L^p(\mu)$) для различных классов пространств аналитических/гармонических функций на полидиске, включающих в себя весовые пространства Харди-Соболева со степенными весами. Отметим, что описание структуры мер Карлесона для данного пространства содержит в себе почти полную информацию о граничном поведении функций из пространства. Вторая тема состоит в исследовании так называемых пространств роста гармонических

№ 33-06-1629 от 06.12.2023

функций и в описании функции из классов роста в терминах коэффициентов их всплеск-разложений. Третье направление, представленное в диссертации, – исследование нормальной вариации гармонических функций около границы области. В этой части диссертации результаты Ж. Бургейна и О'Нилла распространены на случай произвольных гладких областей. При этом основным аппаратом исследования по двум первым направлениям являются дискретные модели для соответствующих задач.

Далее мы более подробно обсудим основные результаты диссертации.

В главах 1 и 2 развита теория потенциала на d-деревьях, применяющаяся в дальнейшем. Основными результатами здесь являются некоторый аналог принципа максимума для весов типа произведения в размерности не выше 3 и сильное емкостное неравенство, представляющее собой оценку «слабого типа» для емкостей тех множеств, где значения весового оператора Харди велики.

В главе 3 эти результаты применены, с помощью предварительной дискретизации задачи, к изучению мер Карлесона для весовых пространств Харди-Соболева в полидиске. Основные результаты этой главы – описания мер Карлесона для аналитических (теорема 3.2.3) и гармонических (теорема 3.2.4) пространств.

В главе 4 найдено описание гармонических пространств роста в полупространстве в терминах частичных сумм всплеск-разложений (теорема 4.2.3), а в главе 5 доказаны оценки взвешенных усреднений функций из классов роста в липшицевых областях в духе закона повторного логарифма Н.Г. Макарова. Здесь опять ключевую роль играют методы дискретизации, в частности диадические мартингалы.

В главе 7 получены интересные обобщения классической теоремы М. Картрайт. Показано, что при определенных условиях регулярности на вес для гармонической в многомерном шаре функции из односторонней оценки автоматически следует двусторонняя. Нормальная вариация положительных гармонических функций исследована в главе 8. Основным результатом здесь является следующая теорема: если функция гармонична и положительна в области с C^2-гладкой границей, то множество точек конечной нормальной вариации этой функции сверхплотно на границе области. Этот результат представляет собой далеко идущее обобщение одной теоремы Бургейна.

Все вышеописанные результаты находятся на переднем крае мировых исследований в области математики и представляют собой значительные, а в некоторых случаях выдающиеся достижения в гармоническом анализе. Результаты диссертации опубликованы в престижных международных изданиях в области математики, таких как International Mathematics Research Notices, Mathematische Annalen, Revista Matematica Iberoamericana, Potential Analysis, Journal d'Analyse Mathematique, были доложены на многочисленных международных конференциях и хорошо известны среди специалистов.

Изложение в диссертации тщательно продумано, все утверждения снабжены подробными доказательствами. При этом, как правило, техническим деталям доказательства предшествует объяснение его идей и ключевых шагов. В то же время в диссертации имеется ряд опечаток и небрежностей оформления (неизбежных в работе такого объема). Приведем несколько замечаний:

1) На странице 6 сказано, что понятие меры Карлесона «возводится к знаменитой статье Л. Карлесона [21]». Конечно, здесь имеется в виду статья [19] (Ann. of Math., 1962), а не препринт [21].

2) В случае, когда формула разбивается на две (или более) строки, автор пишет знак (равно, меньше или равно и т.п.) в конце первой строки. Это неправильно, при разбиении необходимо начинать знаком вторую строку (или повторять его два раза).

3) На странице 13 в обсуждении общих ядер g имеется путаница в обозначениях. Сказано, что функция g задана на M x R^n, однако далее в обозначении g(x, y) предполагается, что x лежит в R^n, а y в M. В формуле (I.8b) функция в левой части, очевидно, зависит от y, а не от x.

4) В формулировке теоремы I.3 на стр. 20 участвует обозначение для дельта-срезанной энергии, определение которой появляется только на стр. 65.

5) На стр. 126 в формулировке Теоремы 4.2.3 пропущены первые слова «Пусть u – гармоническая в верхнем полупространстве», которые есть в ее же формулировке во введении (теорема I10).

Все это мелочи, не затрагивающие содержание диссертации и совершенно не влияющие на положительное впечатление от нее.

С учетом всего вышесказанного полагаю:

Содержание диссертации Мозоляко Павла Александровича на тему: «Дискретные модели граничного поведения гармонических функций» соответствует специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертация является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение.

Нарушений пунктов 9, 11 Порядка присуждения Санкт-Петербургским государственным университетом ученой степени кандидата наук, ученой степени доктора наук соискателем ученой степени мною не установлено.

Диссертация соответствует критериям, которым должны отвечать диссертации на соискание ученой степени доктора наук, установленным приказом от 19.11.2021 № 11181/1 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете» и рекомендована к защите в СПбГУ.

Член диссертационного совета

Доктор физико-математических наук
профессор РАН, профессор кафедры
математического анализа СПбГУ Баранов А.Д.

04.12.2023