ОТЗЫВ

члена диссертационного совета Александрова Алексея Борисовича о диссертации Улицкой Анастасии Юрьевны “Точные неравенства теории приближения пространствами сдвигов”, представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

В диссертации получен ряд точных оценок теории приближений в L_2-метрике. Диссертация состоит из трёх глав.

В первой главе речь идёт о приближении периодических функций пространствами сдвигов. Пусть L_2 обозначает пространство всех 2π-периодических функций f таких, что $f \in L_2([0, 2\pi])$.

С каждой функцией $B \in L_2$ и натуральным числом n можно связать пространство сдвигов $\mathbb{S}_{B,n}$, являющееся линейной оболочкой семейства $\{B(x - \frac{j\pi}{n})\}_{j=0}^{2n-1}$. Пусть $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$ обозначает линейную оболочку семейства $\{B(x - \frac{(j+1)\pi}{n}) - B(x - \frac{j\pi}{n})\}_{j=0}^{2n-2}$. Ясно, что $\mathbb{S}^{\times}_{B,n} \subset \mathbb{S}_{B,n}$ и $\dim \mathbb{S}_{B,n}/\mathbb{S}^{\times}_{B,n} \le 1$. Кроме того, в диссертации рассматриваются возрастающее семейство $\{\mathbb{S}_{B,n,m}\}_{m=1}^{n}$ подпространств пространства $\mathbb{S}_{B,n}$ и возрастающее семейство $\{\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\}_{m=1}^{n}$ подпространств пространства $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$. Определения этих подпространств здесь я выписывать не буду, а отмечу только, что $\mathbb{S}_{B,n,n} = \mathbb{S}_{B,n}$ и $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,n} = \mathbb{S}^{\times}_{B,n}$. Важную роль в диссертации играют также пространства $T_{n,m,Q,K}$, где $m, n \in \mathbb{N}$, $m \le n$, $Q \subset [1 - m, m] \cap \mathbb{Z}$, а K обозначает семейство целых чисел $\{\varkappa_l\}_{l \in Q}$. Пусть q обозначает количество элементов множества Q. Пространство $T_{n,m,Q,K}$ определяется как линейная оболочка семейства функций $\{e^{i(l+2n\varkappa_l)x}\}_{l \in Q}$.

Один из основных результатов первой главы даёт необходимое и достаточное условие для того, чтобы для любой функции f, представимой в виде $f = G \star \varphi + g$, где $G \in L_1$, причём $G \perp T_{n,m,Q,K}$, $\varphi \in L_2$ и $g \in T_{n,m,Q,K}$, выполнялись неравенства $E(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m})_2 \le |c^*_{2m-q}(G)| \cdot \|\varphi\|_{L_2}$, где $E(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m})_2$ обозначает наилучшее приближение функции f в пространстве L_2 подпространством $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$, а $\{|c^*_k(G)|\}_{k \ge 1}$ обозначает убывающую перестановку последовательности $\{|c_k(G)|\}_{k \in \mathbb{Z}}$ модулей коэффициентов Фурье функции G.

Показано также, что эта оценка величины $E(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m})_2$ в известном смысле не может быть улучшена. Это вытекает из некоторых результатов о поперечниках.

В первой главе получены также аналогичные результаты для пространств $\mathbb{S}_{B,n,m}$.

Остальная часть первой главы посвящена приложениям этих двух результатов. В частности, показано, что эти результаты содержат в себе целый ряд известных результатов теории приближений в L_2-метрике.

Вторая глава посвящена задачам аппроксимации в некоторых пространствах дифференцируемых функций, заданных на замкнутом ограниченном промежутке и удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Получены также результаты о приближении сплайнами.

Результаты второй главы сводятся к соответствующим аппроксимационным задачам для периодических функций, что позволяет использовать результаты первой главы.

В третьей главе рассматриваются вопросы, аналогичные вопросам первой главы, только вместо пространства L_2 периодических функций речь идёт о пространстве $L_2(\mathbb{R})$. В этой главе с каждой функцией $B \in L_2(\mathbb{R})$ и положительным числом σ связывается

33-06-1281 от 12.10.2023

пространство $\mathbb{S}_{B,\sigma}$ всех функций s, представимых в виде

$$s(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_j B(x - \frac{j\pi}{\sigma}), \text{ где } \beta = \{\beta_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}). \tag{1}$$

С каждым числом $\rho \in (0, \sigma]$ связывается подпространство $\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ пространства $\mathbb{S}_{B,\sigma}$, состоящее из функций вида (1) с последовательностью β, удовлетворяющей следующему условию:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_j e^{-\frac{i\pi j y}{\sigma}} = 0 \quad \text{при почти всех} \quad y \in (-\sigma, -\rho) \cup (\rho, \sigma).$$

С каждой измеримой на $\mathbb{R}$ функцией γ можно связать пространство $\mathfrak{F}_\gamma$, состоящее из всех функций $f \in L_2(\mathbb{R})$ таких, что $\widehat{f} = \gamma\widehat{\varphi}$ для некоторой функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$.

Для широкого класса функций γ с конечным числом точек разрыва получена необходимое и достаточное условия для справедливости следующей оценки:

$$E(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho})_2 \leq \gamma^*(\rho)\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где γ^* обозначает симметрично убывающую перестановку функции $|\gamma|$.

Пусть $\mathfrak{F}^1_\gamma$ обозначает множество всех функций $f \in \mathfrak{F}_\gamma$ таких, что $\widehat{f} = \gamma\widehat{\varphi}$ для некоторой функции φ из замкнутого единичного шара пространства $L_2(\mathbb{R})$.

В конце третьей главе для широкого класса функций γ с конечным числом точек разрыва доказано, что $\overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}(\mathfrak{F}^1_\gamma, L_2(\mathbb{R})) = \gamma^*(\rho)$, где $\overline{d_\nu}(X, L_2(\mathbb{R}))$ обозначает ν-поперечник по Колмогорову множества X в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Диссертация содержит целый ряд интересных результатов. Диссертация заслуживают высокой оценки. Изложение достаточно хорошо продумано, но у меня есть несколько мелких замечаний.

Список опечаток и замечаний.

Стр. 17, последняя строка. Два раза подряд написан предлог "в".

Стр. 31, 13-ая строка снизу. Должно быть $n \geq 2$ вместо $n \geq 3$.

Стр. 61, конец страницы. Там напоминается определение дробной производной по Вейлю. Здесь заодно неплохо было бы объяснить, что означает $(iy)^r$.

Стр. 62, первая выносная формула. Эта формула, как мне кажется, написана не достаточно аккуратно, хотя и нетрудно догадаться, что имеется в виду. Например, буква x в левой и в правой частях равенства используется совершенно в разных смыслах.

Стр. 62, формулировка теоремы 1. Написано: "Для любой функции $f \in \mathfrak{F}_\gamma$ вида (3.17)". Разве бывают функции $f \in \mathfrak{F}_\gamma$ не вида (3.17)? Не лучше было бы написать: "Для любой функции $f \in \mathfrak{F}_\gamma$"?

Стр. 74 Написано: " Пусть D_p – замкнутый единичный шар пространства $L_p(\mathbb{R})$". Но уже на странице 75 (формулировка теоремы C) без всяких пояснений используется другое обозначение (вместо D_2 написано $BL_2(\mathbb{R})$).

Разумеется, все эти замечания никак не могут повлиять на общий достаточно высокий уровень работы. Основные результаты диссертации своевременно опубликованы.

Диссертационная работа А. Ю. Улицкой "Точные неравенства теории приближения пространствами сдвигов" посвящена актуальной теме, на протяжении многих лет привлекающей к себе внимание специалистов. Все основные результаты диссертации приведены с полными доказательствами и являются новыми. Диссертация имеет теоретическое значение. Развитая в ней техника имеет самостоятельный интерес.

Диссертация Улицкой Анастасии Юрьевны на тему: “Точные неравенства теории приближения пространствами сдвигов” соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 19.11.2021 № 11181/1 “О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университет”, соискатель Улицкая Анастасия Юрьевна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Нарушения пунктов 9 и 11 указанного Порядка в диссертации не обнаружены.

Член диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор, ведущий научный сотрудник
Санкт-Петербургского отделения
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН

А. Б. Александров

Дата 02.10.2023

Подпись руки Александрова
Алексея Борисовича
удостоверяю.
Помощник директора
по кадрам Н А Зотова
02.10.2023

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук