

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

Зинатуллин Эдуард Рустемович

Негауссова статистика полей в задачах квантовой оптики

Научная специальность 1.3.6. Оптика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук
Голубева Татьяна Юрьевна

Санкт-Петербург
2023

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Обзор литературы	10
1.1 Квантовые вычисления в непрерывных переменных	10
1.1.1 Понятие квантовых вычислений	10
1.1.2 Переход от дискретных переменных к непрерывным	12
1.1.3 Универсальность квантовых вычислений	13
1.2 Однонаправленные квантовые вычисления	15
1.2.1 Ресурсы для однонаправленных квантовых вычислений	16
1.2.2 Коды коррекции ошибок	18
1.2.3 Поверхностные коды	21
1.3 Негауссовы квантовые операции и состояния	24
1.3.1 Керровская нелинейность	24
1.3.2 Схема вычитания фотонов	25
1.3.3 Кубический фазовый затвор	27
1.3.4 Примеры гауссовых и негауссовых состояний	29
1.3.5 Критерии негауссовости и классификация негауссовых состояний	31
Глава 2. Ошибка перепутывающих операций в протоколе телепортации	35
2.1 Оригинальный протокол телепортации и его модификации с использованием преобразования CZ	36
2.1.1 Оригинальный протокол телепортации	36
2.1.2 Протокол телепортации с использованием преобразования CZ	37
2.1.3 Гибридная схема телепортации	40
2.2 Оценка весовых коэффициентов преобразования CZ	41
2.3 Реальное преобразование CZ в оптических схемах телепортации	44
2.3.1 Протокол телепортации с реальным преобразованием CZ	46
2.3.2 Гибридная схема телепортации с реальным преобразованием CZ	47
2.4 Заключение по главе 2	48
Глава 3. Уменьшение ошибки телепортации с использованием кубического фазового затвора	51

3.1	Протокол телепортации с кубическим фазовым затвором в представлении Гейзенберга	52
3.2	Протокол телепортации с кубическим фазовым затвором в представлении Шрёдингера	58
3.3	Заключение по главе 3	62
Глава 4. Сравнение негауссовых ресурсов в протоколах телепортации		64
4.1	Оригинальный протокол телепортации и его модификация с процедурой вычитания фотонов	64
4.2	Сравнение различных протоколов телепортации	68
4.3	Оценка роли негауссовых ресурсов	71
4.4	Заключение по главе 4	75
Глава 5. Однонаправленные квантовые вычисления с негауссовым ресурсом		77
5.1	Роль весовых коэффициентов кластерного состояния	78
5.1.1	Схема преобразования на линейном 4-х узловом взвешенном кластере	78
5.1.2	Универсальность преобразования с произвольными весовыми коэффициентами	81
5.1.3	Ошибка одномодового преобразования на взвешенном кластере	82
5.2	Одномодовые преобразования с кубическим фазовым затвором	86
5.2.1	Схема преобразования с кубическим фазовым затвором	87
5.2.2	Ошибка для преобразования с кубическим фазовым затвором	91
5.2.3	Оценка эффективности оптимизации однонаправленных квантовых вычислений	93
5.3	Двухмодовые преобразования с кубическим фазовым затвором	95
5.3.1	Преобразование CZ на взвешенном 4-х узловом кластере	95
5.3.2	Схема преобразования CZ с кубическим фазовым затвором	97
5.3.3	Модифицированный протокол телепортации с кубическим фазовым затвором	99
5.4	Заключение по главе 5	101
Заключение		104
Литература		106
Приложение А. Действия операторов		116
A.1	Controlled-Z	116
A.2	Оператор смещения	117
A.3	Кубический фазовый затвор	118
A.4	Оператор поворота фазы	118

Введение

В современной физике часто возникают задачи, которые оказываются сложны для решения на классическом компьютере. К таким задачам относятся, например, задача коммивояжера, задача моделирования реальной молекулы, задача факторизации больших целых чисел и многие другие. Эти задачи принадлежат к так называемому экспоненциальному классу задач, для которых объем вычислительных ресурсов, требующийся для их решения существующими алгоритмами, экспоненциально растет с числом входных данных. Иными словами, классический компьютер потратит неоправданно большой объем вычислительных ресурсов для решения таких задач. Желание эффективно решать задачи такого типа привели к созданию концепции квантовых вычислений [1, 2]. Благодаря заложенному в их основу квантовому параллелизму для некоторых задач из экспоненциального класса рост вычислительных ресурсов будет носить уже полиномиальный характер при решении с помощью квантовых алгоритмов (см., например, [3–5]).

На данный момент область квантовых вычислений и квантовый компьютер, как физическое устройство, проходят стадию своего интенсивного развития. Сейчас квантовые вычисления находятся в так называемой NISQ (Noisy Intermediate-Scale Quantum) эре [6]. Она характеризуется относительно небольшим числом элементарных логических единиц, на которых проводятся вычисления (кубитов) и высоким уровнем шумов в вычислительных схемах, приводящих к возникновению ошибок. Как следствие, мы не можем реализовать сложные квантовые алгоритмы на существующих квантовых компьютерах. Однако построение вычислительных схем с меньшим уровнем шумов или более устойчивых к их влиянию может изменить сложившуюся ситуацию. Ввиду этого, одной из главных задач на данном этапе развития квантовых вычислений является снижение уровня шумов.

Изначально сформировалась концепция квантовых вычислений для дискретных квантовых систем. Однако многие вычислительные протоколы в дискретных переменных носят вероятностный характер и требуют своего многократного повторения. Это явилось толчком к формированию альтернативного подхода квантовых вычислений в непрерывных переменных, когда системы, на которых производятся вычисления, описываются в бесконечномерном Гильбертовом пространстве. В отличие от дискретных переменных, вычисления в непрерывных переменных позволяют строить схемы, при каждом обращении к которым мы получаем значимый результат измерений (детерминированные схемы), но с некоторой ошибкой. Для достижения универсальных вычислений в непрерывных переменных необходимо уметь реа-

лизовывать три типа операций [7]: произвольные одномодовые гауссовы (линейные) операции, одну двухмодовую перепутывающую гауссову операцию и хотя бы одно одномодовое негауссово (нелинейное) преобразование. В нашей работе будут рассмотрены именно вычисления в непрерывных переменных.

Одной из перспективных моделей квантовых вычислений является модель однонаправленных квантовых вычислений [8]. В ее основе лежит один из главных принципов квантовой механики – измерительная процедура влияет на квантовую систему, а сам принцип однонаправленных квантовых вычислений берет свое начало от одного из базовых протоколов обработки квантовой информации – протокола телепортации [9, 10].

В качестве основного ресурса для вычислений в этой модели выступают многочастичные перепутанные квантовые состояния – кластерные состояния, которые в непрерывных переменных генерируются из набора сжатых осцилляторов. Если бы осцилляторы были сжаты идеально, то вычисления в такой модели выполнялись бы без ошибок. Однако невозможно получить идеально сжатые состояния, шумы от неидеально сжатых квадратур искажают результаты вычислений и приводят к возникновению ошибок. При этом, с увеличением числа совершаемых операций ошибки будут накапливаться. Именно это является главным фактором, ограничивающим рассматриваемую модель.

Экспериментально достижимого на данный момент сжатия оказывается недостаточно для осуществления универсальных квантовых вычислений. Максимальное экспериментально достижимое сжатие составляет -15 дБ [11], в то время как для осуществления отказоустойчивых квантовых вычислений (т.е. вычислений, способных уменьшать логические ошибки до заданного низкого уровня) требуется сжатие ресурсных осцилляторов выше -20.5 дБ [12]. Тем не менее требование к ресурсному состоянию можно понизить, используя вычислительные схемы, менее чувствительные к исходному сжатию ресурсных осцилляторов.

Одни из возможных методов построения таких схем – внедрение в схемы однонаправленных квантовых вычислений негауссовых операций. Для протокола телепортации существует метод уменьшения ошибки, основанный на процедуре условного вычитания фотонов [13, 14]. Возможность перенести этот метод на схемы однонаправленных квантовых вычислений выглядит заманчиво. Однако процедура вычитания фотонов носит вероятностный характер и схемы с ее использованием лишаются главного достоинства работы в непрерывных переменных – детерминированного выполнения операций. Отсюда вытекает вопрос, возможно ли использовать другие негауссовы операции, выполняемые детерминировано, такие как кубический фазовый затвор [15]?

Таким образом, вопрос о методах уменьшения ошибок в однонаправленных вычислениях остается открытым. Попутно, перед нами встает множество более мелких вопросов. Возможно ли добиться каких-либо улучшений, оставаясь в рамках гауссовых операций? Возможно ли понизить требования на сжатие ресурсных состояний используя негауссовы операции? Если да, то какие негауссовы операции дают больше всего преимуществ от их использования? Именно на эти вопросы мы и постараемся дать ответы в рамках нашего исследования.

Целью данной работы является выявление методов уменьшения ошибок элементарных гауссовых операций в схемах однонаправленных квантовых вычислений в непрерывных переменных.

Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Проанализировать роль перепутывающих операций в формировании ошибки телепортации и определить влияние на нее весовых коэффициентов перепутывающих операций.
2. Построить протокол телепортации, использующий для повышения точности детерминированную негауссову операцию. Определить величины параметров схемы, обеспечивающих корректную работу протокола.
3. Сравнить предложенный нами протокол с уже существующими протоколами телепортации с негауссовыми ресурсами и выявить наиболее перспективные для дальнейшего внедрения в схемы однонаправленных квантовых вычислений.
4. Перенести выявленные методы уменьшения ошибки на схемы универсальных квантовых вычислений. Проанализировать роль весовых коэффициентов кластерного состояния в формировании ошибки вычислений. Построить схемы произвольного одномодового гауссова преобразования и двухмодовой перепутывающей операции Controlled-Z (CZ), использующие для уменьшения ошибки негауссовы операции.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Использование преобразования CZ в качестве перепутывающей операции позволяет уменьшить ошибку телепортации не только для идеального преобразования CZ, но и для его оптической реализации.
2. Хотя формальное применение взвешенной операции CZ позволяет неограниченно уменьшать ошибку одной из квадратур телепортируемого состояния, анализ реальных конфигураций показывает, что сама процедура CZ является шумящей, так что итоговое уменьшение ошибки, которое можно ожидать от ее использования – в два раза.
3. Предложен протокол квантовой телепортации, позволяющий выполнять телепортацию с большей точностью, независимо уменьшая ошибки квадратур поля за счет двух различных механизмов: взвешенного преобразования CZ и кубического фазового затвора.
4. Предложенный протокол квантовой телепортации позволяет использовать кубический фазовый затвор с невысокой степенью нелинейности. Малость нелинейности может быть скомпенсирована за счет большой величины сдвига y -квадратуры ресурсного осциллятора перед применением кубического фазового затвора.
5. Использование кубического фазового затвора в схеме телепортации увеличивает верность телепортации в значительно более широкой области рабочего диапазона по сравнению с процедурой вычитания фотонов.

6. Оптимизация весовых коэффициентов кластерного состояния, используемого как ресурс для вычислений, позволяет уменьшить ошибку произвольных одномодовых гауссовых операций по сравнению с операциями на не взвешенном кластерном состоянии.
7. Одни и те же одномодовые преобразования могут выполняться при разных фазах гомодинных детекторов. Одна из фаз гомодина оказывается свободным параметром, который может быть использован для уменьшения ошибки.
8. Включение в ресурсное кластерное состояние негауссовых узлов, приготовленных с помощью кубического фазового затвора, позволяет существенно уменьшить ошибку преобразования. Для некоторых преобразований удастся снизить вероятность возникновения ошибки в 900 раз по сравнению с вычислениями на не взвешенном кластере без оптимизации фаз гомодинных детекторов.

Научная новизна:

1. Проанализирована зависимость качества телепортации от используемых перепутывающих преобразований. На основе этого предложен протокол телепортации, позволяющий уменьшить ошибку, оставаясь в рамках гауссовых преобразований.
2. Предложен протокол телепортации с негауссовым ресурсом, полученным с помощью кубического фазового затвора. Показано, что такой протокол телепортации может обеспечивать большую точность, чем оригинальный протокол.
3. Сформирован подход оптимизации весовых коэффициентов и фаз гомодинных детекторов, позволяющий снизить ошибку при выполнении произвольных одномодовых гауссовых операций.
4. Построены схемы произвольного одномодового гауссова преобразования и двухмодового преобразования Controlled-Z, снижающие ошибку преобразования за счет использования кубического фазового затвора.

Научная и практическая значимость. Предложенные в данной работе методы уменьшения ошибок гауссовых операций в модели однонаправленных квантовых вычислений в непрерывных переменных представляют интерес с точки зрения фундаментальной науки и вносят вклад в современную квантовую оптику и информатику. Использование предложенных нами подходов позволяет ослабить требование на сжатие вспомогательных осцилляторов, используемых как ресурс для вычислений. Результаты исследования могут быть использованы при практической реализации универсального квантового компьютера, являющегося необходимым инструментом для решения современных задач физики. Кроме того, предложенный протокол телепортации с кубическим фазовым затвором может быть использован в различных квантово-информационных приложениях, например, для реализации квантовых

повторителей, построения квантовых сетей, в протоколах обмена квантовым перепутыванием, а так же непосредственно в схемах квантовых вычислений.

Степень достоверности полученных в диссертации результатов обеспечивается корректным использованием методов квантовой механики и строгим физическим обоснованием всех приближений и предположений, используемых в работе. Для решения поставленных задач был использован хорошо зарекомендовавший себя математический аппарат квантовой электродинамики, а именно описание квантово механических систем в картинах Гейзенберга и Шредингера. Для оценки качества работы протоколов мы использовали среднеквадратичные флуктуации ошибки в каждой из квадратур при работе в картине Гейзенберга, и верность при работе в картине Шредингера. Результаты проведенных исследований были проанализированы в сравнении с работами ведущих исследовательских групп в данной области. Полученные результаты обсуждались с коллегами в рамках научных семинаров, школ и конференций, а также были опубликованы в ревьюируемых научных журналах, рекомендованных ВАК.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях, школах и семинарах:

- XI семинар Д. Н. Клышко (Москва, Россия, 8-10 июня, 2022).
- IV международная конференция "Фотоника и квантовые технологии" (Казань, Россия, 19-21 декабря, 2021).
- The 4th International School of Quantum Technologies (Voronovo, Moscow, Russia, 8-12 November, 2021).
- XII международный симпозиум по фотонному эхо и когерентной спектроскопии (ФЭКС-2021) (Казань, Россия, 25-30 октября, 2021)
- XXIV Объединенная международная молодежная научная школа "Когерентная оптика и оптическая спектроскопия" и "Квантовая информатика и квантовые сенсоры на основе алмазов" (г. Казань, Россия, 10-11 декабря, 2020).
- XII Международная конференция «Фундаментальные проблемы оптики» (ФПО – 2020) (Санкт-Петербург, Россия, 19-23 октября, 2020).
- International School on Quantum Computing (Sochi, Russia, September 14-21, 2020).
- 3rd International School on Quantum Technologies (Krasnaya Polyana, Russia, March 1-7, 2020).
- 2-я Российская школа по квантовым технологиям (Россия, Красная Поляна, 2–7 марта, 2019).

- Семинары Лаборатории Квантовой Оптики СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия, 2019–2023)

Личный вклад. Основные результаты, представленные в диссертации, получены автором лично; выбор общего направления исследования, обсуждение и постановка рассматриваемых задач осуществлялись совместно с научным руководителем.

Публикации. Основное содержание и результаты по теме диссертации представлены в следующих публикациях:

- E.R. Zinatullin, S.B. Korolev, and T.Yu. Golubeva. Teleportation protocols with non-Gaussian operations: conditional photon subtraction versus cubic phase gate // Phys. Rev. A, 2023, 107, 022422.
- E.R. Zinatullin, S.B. Korolev, A. D. Manukhova and T.Yu. Golubeva. Error of an arbitrary single-mode Gaussian transformation on a weighted cluster state using a cubic phase gate // Phys.Rev. A, 2022, 106, 032414.
- E.R. Zinatullin, S.B. Korolev, and T.Yu. Golubeva. Teleportation with a cubic phase gate // Phys. Rev. A, 2021, 104, 032420.
- E. Zinatullin, S. Korolev, T. Golubeva. Controlled-Z operation versus the beam-splitter transformation: Errors of entangled operations // Phys. Rev. A, 2021, 103, 062407.
- E.R. Zinatullin, K.S. Tikhonov, T.Yu. Golubeva and Yu.M. Golubev. The Effect of Diffraction on a Pulse of Squeezed Light in the Protocol of a Multimode Resonant Quantum Memory Based on a Thermal Atomic Ensemble // Opt. Spectrosc. 2020, 128 (9), 1458-1474.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и одного приложения. Полный объем диссертации составляет 119 страниц с 43 рисунками. Список литературы содержит 118 наименований.

Благодарности.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Татьяне Юрьевне Голубевой за бесценный багаж знаний и опыт, полученные в процессе работы и подготовки диссертации, а также за терпение и оказанную помощь. Особую благодарность автор выражает Юрию Михайловичу Голубеву, Ивану Вадимовичу Соколову, своему соавтору Сергею Борисовичу Королеву и всему дружному коллективу Лаборатории Квантовой Оптики СПбГУ за полезные дискуссии и помощь на всех этапах подготовки диссертации. Отдельна благодарность Кириллу Сергеевичу Тихонову за помощь в формировании крепкого фундамента в области квантовой оптики во время обучения в бакалавриате и магистратуре.

Автор выражает искреннюю благодарность своей семье, в особенности родителям – Наталье Сергеевне Зинатуллиной и Рустему Эдуардовичу Зинатуллину, за развитие тяги к физике и наукам в целом, а также Елизавете Николаевне Башмаковой за всестороннюю помощь, поддержку и активное содействие в написании настоящей диссертации.

Глава 1. Обзор литературы

1.1 Квантовые вычисления в непрерывных переменных

1.1.1 Понятие квантовых вычислений

В современном научном мире компьютер является неотъемлемым инструментом исследований. Он необходим при численных расчетах, обработке экспериментальных данных и визуализации полученных данных.

Компьютер – это устройство, способное преобразовывать входную информацию в выходную желаемым образом. Единицей информации, используемой в классическом компьютере, является бит, который может принимать два значения: 0 или 1. Любая информация может быть закодирована с помощью битовых строк, то есть последовательности нулей и единиц. Преобразование битовых строк выполняется с помощью логических элементов (гейтов), каждый из которых выполняет элементарную логическую операцию. Совокупность этих логических элементов реализует некоторое преобразование в зависимости от типа и порядка используемых элементов.

Однако, в физике часто встречаются задачи, которые оказываются сложны для решения на классическом компьютере. Чтобы определить, какие задачи являются “сложными”, а какие “простыми” в теоретической информатике введена классификация задач по уровням сложности в зависимости от объема задействованных вычислительных ресурсов (то есть времени и/или памяти компьютера). Если алгоритмы решения некоторой задачи требуют объем вычислительных ресурсов, который полиномиально зависит от числа входных данных, то такую задачу относят к полиномиальному классу сложности (P класс). К таким задачам относятся, например, сложение, умножение и деление целых чисел, умножение матриц. Если же объем вычислительных ресурсов, требующийся для решения задачи, экспоненциально растет с числом данных на входе, то задача относится к экспоненциальному классу сложности. Примером задач из этого класса являются задачи построения всех подмножеств заданного множества, задача коммивояжера, задача моделирования реальной молекулы и задача факторизации больших целых чисел. Если задачи из P класса с помощью существующих алгоритмов вычислений классический компьютер решает достаточно хорошо, то при решении задач из экспоненциального класса сложности он оказывается неэффективен. Конечно, классификация задач по уровням сложности не исчерпывается двумя классами (см., напри-

мер, [16, 17]), но мы здесь не будем останавливаться на этом вопросе подробнее, поскольку он напрямую не связан с поставленными задачами.

Для того чтобы иметь возможность эффективно решать задачи из экспоненциального класса сложности, была разработана концепция квантовых вычислений. Основа в формировании этой концепции была заложена Ю. М. Маниным [1] и Р. Фейнманом [2]. В самой природе квантовых объектов заложена возможность их одновременного существования в нескольких квантовых состояниях. Именно это свойство и лежит в основе квантового параллелизма. Первоначальные подходы к разработке квантовых компьютеров в качестве основной логической единицы использовали квантовый аналог классического бита — кубит [18, 19], который представляет собой дискретную двухуровневую квантовую систему. В отличие от классического бита, который может принимать только два значения 0 или 1, кубит может находиться в суперпозиции двух квантовых базисных состояний:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (1.1)$$

Здесь базисные состояния кубита, вслед за классическим битом, обозначены $|0\rangle$ и $|1\rangle$, а $|a|^2$ и $|b|^2$ имеют смысл вероятности обнаружить кубит в состояниях $|0\rangle$ и $|1\rangle$, соответственно. Как следствие, n кубитов могут одновременно находиться в 2^n состояниях, тогда как последовательность из n классических бит всегда будет находиться только в одном из возможных состояний. За счет этого достигается так называемый квантовый параллелизм вычислений, благодаря которому квантовый компьютер способен решать задачи из экспоненциального класса сложности за полиномиальное время [3–5]. В настоящее время идет активный поиск и классификация таких задач. Среди найденных, наиболее известны задача факторизации целых чисел (алгоритм Шора [3]), а также задача нахождения решения уравнения $f(x) = 1$, где f — это булева функция от n переменных (алгоритм Гровера [4]).

Однако всегда возникает вопрос, любая ли квантовая система может быть использована для экспериментальной реализации квантового компьютера? Если нет, то какие квантовые системы лучше всего подходят для этой цели? Согласно критериям ДиВинченцо [20], реализация квантового компьютера должна удовлетворять следующим требованиям:

1. Квантовая система, на которой проводятся вычисления, должна быть масштабируема и иметь четко выделенные кубиты.
2. Возможность подготавливать кубиты системы в некотором простом начальном состоянии (например $|000\dots 0\rangle$).
3. Квантовая система, используемая в качестве квантового компьютера, должна быть хорошо изолирована от взаимодействия с окружающей средой.
4. Необходимо иметь возможность проводить над системой последовательность контролируемых унитарных преобразований.

5. Возможность проводить проекционные измерения над кубитами системы.

Эти критерии во многом определили направление экспериментального развития квантовых вычислений.

1.1.2 Переход от дискретных переменных к непрерывным

Первоначально, сформировалась концепция квантовых вычислений в дискретных переменных. Это было естественно, поскольку кодирование информации для таких систем аналогично кодированию в классических вычислениях. Однако при работе с дискретными квантовыми системами возникает одна существенная трудность – их сложно генерировать детерминированно. Как следствие, многие вычислительные протоколы в дискретных переменных носят вероятностный характер и требуют своего многократного повторения. Это побудило ученых искать альтернативные пути развития квантовых вычислений.

Многие операции и системы в квантовой оптике определяются на бесконечномерном Гильбертовом пространстве. Подобные квантовые системы называют системами в непрерывных переменных. Главное преимущество квантовых систем в непрерывных переменных по сравнению с дискретными системами заключается в том, что их использование позволяет строить схемы, при каждом обращении к которым мы получаем значимый результат измерений (детерминированные схемы), но с некоторой ошибкой. Кроме того, в режиме непрерывных переменных могут быть реализованы многие основные операции квантовых коммуникационных протоколов, а именно подготовка, унитарное манипулирование и измерение перепутанных квантовых состояний. Так, перепутанное состояние в непрерывных переменных может быть эффективно получено с помощью средств линейной оптики и сжатого света, генерируемого за счет нелинейного оптического взаимодействия.

Основные протоколы обработки квантовой информации, включая квантовую телепортацию [9, 10], криптографию [21] и клонирование [22–25], также реализуются средствами линейной оптики. Так, например, протокол квантовой телепортации, изначально предложенный для дискретных квантовых систем [26], вскоре после этого был перенесен на системы с непрерывными переменными [9].

Все эти преимущества подтолкнули ученых к идее создания теории квантовых вычислений в непрерывных переменных, которая была впервые предложена Ллойдом и Бронштейном [7]. Однако при переходе от вычислений на дискретных системах к непрерывным возникает естественный вопрос: как закодировать информацию на таких системах? Кодирование информации в непрерывных переменных может происходить различными способами [15, 27, 28]. Наиболее распространенным является кодирование с помощью собственных состояний операторов квадратур \hat{x}_j и \hat{y}_j (индекс j обозначает номер подсистемы или моды), которые подчиняются коммутационному соотношению

$$[\hat{x}_j, \hat{y}_j] = \frac{i}{2}. \quad (1.2)$$

Собственные состояния этих операторов определяются как

$$\hat{x}_j|x\rangle_{x,j} = x|x\rangle_{x,j}, \quad \hat{y}_j|y\rangle_{y,j} = y|y\rangle_{y,j}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Оба набора собственных состояний являются ортонормированными

$${}_{x,j}\langle x|x'\rangle_{x,j} = \delta(x - x'), \quad {}_{y,j}\langle y|y'\rangle_{y,j} = \delta(y - y') \quad (1.4)$$

и обладают полнотой

$$\int dx|x\rangle_{x,j} {}_{x,j}\langle x| = \int dy|y\rangle_{y,j} {}_{y,j}\langle y| = \hat{I}. \quad (1.5)$$

Как следствие, любое квантовое состояние может быть выражено как суперпозиция этих базисных состояний. Соответственно, гейтами в такой модели вычислений будут выступать операции, преобразующие квадратуры квантовых систем.

Однако нельзя не упомянуть и сложности, возникающие при работе с непрерывными квантовыми системами. Поскольку мы работаем с бесконечномерными системами, то нам необходимо учитывать взаимодействие не только с интересующими нас модами, но и со всеми остальными. Как следствие, в системе возникают шумы, влияющие на результаты вычислений и приводящие к ошибкам. Чтобы бороться с этим недостатком были разработаны процедуры коррекции ошибок, о которых мы поговорим позднее.

В дальнейшем, говоря о квантовых вычислениях, мы будем иметь в виду вычисления в непрерывных переменных, если не будет указано иное.

1.1.3 Универсальность квантовых вычислений

Основной целью квантовой информатики и квантовых вычислений является достижение так называемых универсальных квантовых вычислений. Для квантовых вычислений в дискретных переменных это соответствует возможности выполнить любое унитарное преобразование над конечным числом переменных с любой степенью точности посредством многократного применения локальных операций (однокубитных и двухкубитных операций) [18,19].

Однако квантовые системы в непрерывных переменных существенно отличаются от дискретных систем. Действительно, определение произвольного унитарного преобразования даже над одной непрерывной переменной требует бесконечного числа параметров. Как следствие, обычно оно не может быть аппроксимировано конечным числом непрерывных операций. Тем не менее мы можем определить понятие универсальных вычислений в непрерывных переменных для различных подклассов преобразований. Примером такого подкласса может служить множество преобразований, гамильтонианы которых являются полиномиальными функциями квадратур $\{\hat{x}_j\}$ и $\{\hat{y}_j\}$. В общем случае набор операций над физическими системами, описываемыми непрерывными переменными, называется универсальным для определенного набора преобразований, если можно с произвольной точностью аппроксимировать любое преобразование в наборе посредством конечного числа применений операций [7].

Давайте покажем, что для введенного выше подкласса существует конечный универсальный набор операций (подробно см. [7, 29]). Идея доказательства строится на достаточно простых соотношениях, позволяющих определить преобразования каких гамильтонианов можно получить повторным применением преобразований из некоторого набора. Последовательно подействуем гамильтонианами \hat{H}_j , \hat{H}_k , $-\hat{H}_j$ и $-\hat{H}_k$ так, чтобы каждое действие длилось одинаковое время δt . Из формулы Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа можно получить, что

$$e^{-i\hat{H}_k\delta t} e^{-i\hat{H}_j\delta t} e^{i\hat{H}_k\delta t} e^{i\hat{H}_j\delta t} = e^{[\hat{H}_k, \hat{H}_j]\delta t^2} + O(\delta t^3). \quad (1.6)$$

В пределе $\delta t \rightarrow 0$ такое воздействие эквивалентно действию гамильтониана $-i[\hat{H}_k, \hat{H}_j]$ длительностью δt^2 . Также можно получить, что

$$e^{i\hat{H}_k\delta t/2} e^{i\hat{H}_j\delta t/2} e^{i\hat{H}_j\delta t/2} e^{i\hat{H}_k\delta t/2} = e^{i(\hat{H}_k + \hat{H}_j)\delta t} + O(\delta t^3). \quad (1.7)$$

В пределе $\delta t \rightarrow 0$ такое воздействие уже будет эквивалентно действию гамильтониана $\hat{H}_k + \hat{H}_j$ длительностью δt . Таким образом, если у нас есть возможность применять набор гамильтонианов $\{\pm\hat{H}_i\}$ можно построить любой гамильтониан, являющийся линейной комбинацией гамильтонианов вида $\pm i[\hat{H}_k, \hat{H}_j]$, $\pm[\hat{H}_l, [\hat{H}_k, \hat{H}_j]]$ и т.д.

Отсюда следует, что из набора простейших операторов $\{\pm\hat{x}_j, \pm\hat{y}_j\}$ возможно построить лишь линейные гамильтонианы вида $a\hat{x}_j + b\hat{y}_j + c$. Добавим к этому набору квадратичный гамильтониан фазовращателя

$$\hat{H}_{ps,j} = \frac{1}{2} (\hat{x}_j^2 + \hat{y}_j^2) \quad (1.8)$$

и гамильтониан сжатия

$$\hat{H}_{s,j} = \frac{1}{2} (\hat{x}_j\hat{y}_j + \hat{y}_j\hat{x}_j). \quad (1.9)$$

Тогда, с учетом их коммутационного соотношения $[\hat{H}_{ps,j}, \hat{H}_{s,j}] = i(\hat{x}_j^2 - \hat{y}_j^2)$, из набора $\{\hat{x}_j, \hat{y}_j, \hat{H}_{ps,j}, \hat{H}_{s,j}\}$ мы сможем получить любой одномодовый гамильтониан второй степени по \hat{x}_j и \hat{y}_j . Преобразования с гамильтонианами не выше второй степени называются гауссовыми, поскольку они не выводят гауссовы состояния из своего класса. Эволюция квадратур данными гамильтонианами всегда будет линейной.

Чтобы иметь возможность генерировать гамильтонианы более высокой степени, необходимо реализовать гамильтонианы отвечающие нелинейным процессам. Например, если мы возьмем кубические гамильтонианы \hat{x}_j^3 и \hat{y}_j^3 , то у нас будет возможность реализовать гамильтонианы любой степени по \hat{x}_j и \hat{y}_j . Это видно, если рассмотреть коммутационные соотношения

$$[\hat{x}_j^3, \hat{y}_j^m \hat{x}_j^n] = i\hat{y}_j^{m-1} \hat{x}_j^{n+2} + \text{слагаемые меньшего порядка}, \quad (1.10)$$

$$[\hat{y}_j^3, \hat{y}_j^m \hat{x}_j^n] = i\hat{y}_j^{m+2} \hat{x}_j^{n-1} + \text{слагаемые меньшего порядка}. \quad (1.11)$$

То есть действуя гамильтонианами \hat{x}_j^3 и \hat{y}_j^3 , мы можем получить гамильтонианы более высокого порядка. Это означает, что имея набор одномодовых гауссовых операций $\{\hat{x}_j, \hat{y}_j, \hat{H}_{ps,j}, \hat{H}_{s,j}\}$

и одну нелинейную (негауссову) одномодовую операцию, мы можем построить любой многочлен произвольного порядка по \hat{x}_j и \hat{y}_j с любой желаемой точностью.

Пока что мы говорили только об операциях, влияющих на одну квантовую подсистему (одномодовых операциях). Однако для вычислений нам необходимо, чтобы одна подсистема могла управлять состоянием другой. Для этого нам нужно уметь реализовывать как минимум одну двухмодовую перепутывающую гауссову операцию. В качестве такой операции может выступать преобразование CZ, гамильтониан которого имеет вид

$$\hat{H}_{CZ,jk} = 2g_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k. \quad (1.12)$$

Здесь g_{jk} – весовой коэффициент, отражающий силу взаимодействия двух систем. Комбинируя такую двухмодовую операцию с набором линейных одномодовых операций, мы можем получить полный набор линейных операций над всеми подсистемами. Дополнив этот набор нелинейной операцией, мы получим универсальный набор.

Таким образом для выполнения универсальных преобразований требуется уметь реализовывать три типа операций: произвольные одномодовые гауссовы операции, двухмодовую гауссову перепутывающую операцию и одну негауссову операцию.

1.2 Однонаправленные квантовые вычисления

Обсуждение в предыдущем разделе было посвящено так называемой гейтовой модели квантовых вычислений, когда над входными состояниями последовательно выполняются некоторые операции, аналогично классическим вычислениям. Однако модели квантовых вычислений не исчерпываются только гейтовой моделью. В нашей работе нас будет интересовать модель однонаправленных квантовых вычислений. Первоначально она была предложена для дискретных квантовых систем [30, 31], но впоследствии ее принцип был перенесен на вычисления в непрерывных переменных [8].

В основе модели однонаправленных квантовых вычислений лежит один из главных принципов квантовой механики – измерительная процедура влияет на квантовую систему. В связи с этим рассматриваемая модель не имеет какого-либо классического аналога. Схематично, процесс однонаправленных вычислений проиллюстрирован на рис. 1.1. В качестве ресурса для вычислений в рассматриваемой модели выступает многочастичное перепутанное квантовое состояние, которое с помощью некоторой двухмодовой операции перепутывается с входным состоянием. Затем в полученной системе необходимым образом проводят локальные измерения над ее отдельными подсистемами. При измерении состояние квантовой подсистемы проецируется на базис измерительного прибора. В многочастичной перепутанной системе это приводит к изменению состояния неизмеренных подсистем, а выбирая базис измерительного прибора, мы можем влиять на то, как именно оно изменится. В квантовой оптике в качестве процедуры локальных измерений чаще всего выступает гомодинное детектирование [32]. В общем случае, гомодинный детектор измеряет обобщенные квадратуры вида $\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$,

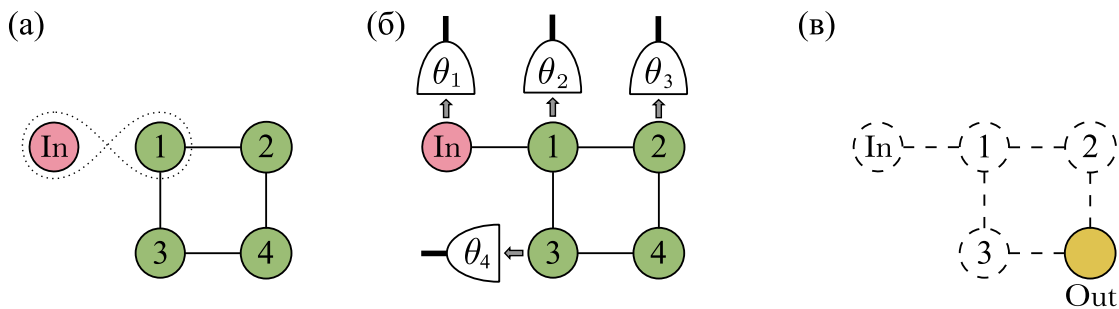


Рис. 1.1: Иллюстрация процесса однонаправленных квантовых вычислений. На рисунке подсистемы обозначены кругами, линии показывают перепутывание между отдельными подсистемами, θ_j – гомодинные детекторы. (а) Входное состояние **In** перепутывается с вспомогательной многочастичной системой **1-2-3-4**. (б) Проводятся локальные измерения над отдельными подсистемами. (в) Неизмеренная подсистема оказывается в некотором выходном состоянии **Out**, являющимся результатом вычислений.

где угол θ может быть выбран нами произвольным образом. Этот угол задает базис измерительного прибора. Таким образом, проводя локальные измерения над отдельными подсистемами, мы можем контролируемо преобразовывать входное состояние.

Принцип однонаправленных квантовых вычислений берет свое начало от одного из базовых протоколов обработки квантовой информации – протокола телепортации [9, 10]. Целью этого протокола является перенесение некоторого неизвестного квантового состояния с одной системы на другую. Для реализации такой передачи требуется вспомогательное двухмодовое перепутанное состояние. На первом этапе, необходимо перепутать входное состояние с одной из вспомогательных подсистем. Затем проводя в правильном базисе локальные измерения над входной и перепутанной с ней вспомогательной подсистемами, мы можем осуществить перенос входного состояния на неизмеренную квантовую систему. Можно сказать, что телепортация является вычислением с единичной матрицей преобразования. Подробнее протокол телепортации будет рассмотрен в разделе 2.1.1.

Таким образом, модель однонаправленных квантовых вычислений является обобщением протокола квантовой телепортации на системы более высокой размерности, где за счет выбора базиса локальных измерений происходит контролируемое преобразование входного состояния.

1.2.1 Ресурсы для однонаправленных квантовых вычислений

В предыдущем разделе мы обсудили, что основным ресурсом для однонаправленных квантовых вычислений являются многочастичные перепутанные состояния. Обычно в качестве таких состояний используют кластерные состояния, которые могут быть эффективно параметризованы математическим графом [33]. При этом узлы графа обозначают квантовые подсистемы, а ребра – перепутывание между ними. Существует множество способов реализации кластерных состояний в непрерывных переменных. Они могут быть реализованы на

световых полях [34–38], на атомных ансамблях [39], на смешанных (атомно-полевых) системах [40, 41] и оптомеханических системах [42].

Ценным свойством кластерных состояний в непрерывных переменных является то, что они обладают большим потенциалом с точки зрения их масштабируемости [43–48]. В основном этого удастся добиться за счет мультиплексирования по частотам и/или по времени. Например, в работе [48] авторы предлагают способ генерации масштабируемого двухмерного кластерного состояния, основанный на мультиплексировании во временной области. Им удалось экспериментально получить двухмерное кластерное состояние способное выполнять около 5000 операций над 5 входными данными.

Формально кластерные состояния в непрерывных переменных генерируются из набора квадратурно сжатых осцилляторов. В идеализированном случае, когда флуктуации в сжатой квадратуре полностью подавлены, операции в рассматриваемой модели выполняются без ошибок. Однако в реальности невозможно получить идеально сжатое состояние. Для генерации кластера используются осцилляторы с конечной степенью сжатия. Как результат, шумы от неидеально сжатых квадратур искажают результат операций и приводят к возникновению, так называемых, неустраняемых ошибок. При этом, с увеличением числа совершаемых операций ошибки будут накапливаться. Именно наличие этих ошибок является главным лимитирующим фактором рассматриваемой модели.

В работе [49] было показано, что с помощью однонаправленных квантовых вычислений в непрерывных переменных возможно осуществлять универсальные многомодовые гауссовы операции. Однако для достижения универсальных квантовых вычислений нам также необходимо уметь выполнять негауссову операцию. Для этих целей в схеме однонаправленных квантовых вычислений можно использовать негауссову измерительную процедуру, а именно измерение числа фотонов. Альтернативный подход заключается в использовании вспомогательных негауссовых состояний в качестве ресурса для вычислений.

Базовым ресурсом для однонаправленных квантовых вычислений является линейный 4-х узловой кластер. Его наличие оказывается необходимым и достаточным условием для реализации универсальных одномодовых гауссовых операций [49]. В связи с этим в нашей работе в качестве ресурса мы будем рассматривать именно такое кластерное состояние.

Следует отметить, что одна и та же операция может быть выполнена различными способами. Могут быть выбраны различные конфигурации ресурсного кластерного состояния, разные силы связи между узлами кластера, а также по-разному проводиться локальные измерения над подсистемами. Поэтому встает вопрос о том, как реализовать ту или иную операцию с минимальной ошибкой? Такого рода анализ позволяет минимизировать ошибки на уровне отдельных операций. Это оказывается полезным, поскольку, как мы увидим далее, возможно проводить коррекцию только малых ошибок.

Кроме того, нам необходимо уметь согласовывать различные операции во времени. В связи с этим, необходимым ресурсом для вычислений является квантовая память [50]. В основе этого устройства лежит принцип переноса квантово-статистических свойств света на

“долгоживущие” степени свободы другой физической системы, в качестве которой чаще всего выступает ансамбль атомов. В данном случае, требования к времени хранения памяти не очень высоки, поскольку нам требуются времена порядка времени выполнения операций. На таких временах можно не учитывать негативные эффекты, связанные с тепловым движением атомов [51, 52].

1.2.2 Коды коррекции ошибок

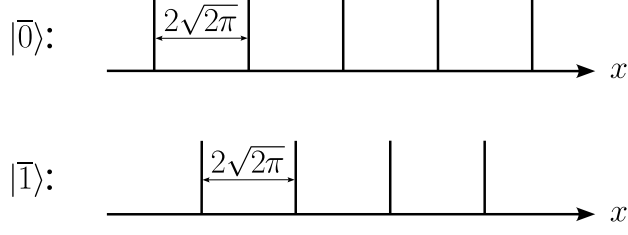
При обсуждении кластерных состояний в предыдущем разделе мы говорили, что конечная степень сжатия ресурсных осцилляторов, используемых для генерации кластерного состояния, является главным источником ошибок в схемах однонаправленных квантовых вычислений. Конечно, это не единственный источник ошибок. К ошибкам при выполнении операций могут приводить неточности в параметрах физических элементов, из которых собрана схема, неправильный подбор фаз локальных осцилляторов при гомодинировании, не полное совпадение временных и пространственных профилей взаимодействующих полей и т.д. Однако такие технические ошибки могут быть устранены нами, в то время как ошибки, связанные с конечной степенью сжатия осцилляторов являются принципиально неустранимыми. Наличие таких неустранимых ошибок в основном проявляется как смещение квадратур выходного состояния на случайные малые величины.

Для того, чтобы нивелировать этот недостаток, были созданы коды коррекции ошибок. Их идея заключается в том, чтобы кодировать информацию с помощью состояний, имеющих некоторые характерные свойства, не изменяемые корректируемым типом ошибок. Тогда благодаря этим свойствам мы можем получить информацию о том, как необходимо скомпенсировать ошибку. Здесь необходимо отметить, что ошибки сдвига квадратур относятся к гауссовому типу ошибок, то есть ошибок определяемых гауссовыми преобразованиями. Согласно No-Go теореме [53], гауссовы состояния не могут быть использованы для коррекции гауссовых ошибок в гауссовых состояниях. Таким образом, для процедуры коррекции ошибок нам необходимы негауссовы состояния.

Чтобы лучше понять суть метода коррекции ошибок, рассмотрим код коррекции ошибок смещения, предложенный Гринбергером, Китаевым и Пресскелом [15]. Идея этого кода заключается в том, чтобы кодировать информацию в виде состояний квантовых осцилляторов

$$|\bar{0}\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |2n\sqrt{2\pi}\rangle_x, \quad |\bar{1}\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |(2n+1)\sqrt{2\pi}\rangle_x, \quad (1.13)$$

называемых GKP состояниями. Они задают логические состояния кубитов. На фазовой плоскости состояния $|\bar{0}\rangle$ и $|\bar{1}\rangle$ имеют вид эквидистантных «гребенок» (см. рис. 1.2), при этом состояние $|\bar{0}\rangle$ будет сдвинуто относительно $|\bar{1}\rangle$ на величину $\sqrt{2\pi}$. Таким образом, если в результате вычислений произойдет ошибка сдвига, то сместится вся «гребенка» целиком. Если величина сдвига небольшая, то мы можем заметить ошибку и устранить ее.

Рис. 1.2: Схематическое изображение состояний $|\bar{0}\rangle$ и $|\bar{1}\rangle$.

Для коррекции ошибок кубитов, кодируемых этим методом, используются схемы, приведенные на рис. 1.3. Схема (а) позволяет устранять ошибку сдвига в x -квадратуре, а схема (б) – в y -квадратуре. Поскольку эти схемы работают аналогичным образом рассмотрим только схему (а).

Пусть входное состояния кубита имеет вид $|\bar{\psi}\rangle_1 = a|\bar{0}\rangle_1 + b|\bar{1}\rangle_1$. В результате вычислений в этом кубите произошла ошибка смещения по x -квадратуре на величину u , которая отражается действием оператора вида $e^{-2iu\hat{y}_1}$. Для коррекции ошибки требуется вспомогательная квантовая система в состоянии

$$|\bar{+}\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\bar{0}\rangle_2 + |\bar{1}\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n\sqrt{2\pi}\rangle_{x,2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |2n\sqrt{2\pi}\rangle_{y,2}. \quad (1.14)$$

Затем системы управляемым образом взаимодействуют друг с другом с помощью операции SUM(1). Эта операция преобразует квадратуры осцилляторов как [54]:

$$\hat{x}_{1,out} = \hat{x}_{1,in}, \quad \hat{y}_{1,out} = \hat{y}_{1,in} + \hat{y}_{2,in}, \quad (1.15)$$

$$\hat{x}_{2,out} = \hat{x}_{2,in} - \hat{x}_{1,in}, \quad \hat{y}_{2,out} = \hat{y}_{2,in}. \quad (1.16)$$

После действия SUM(1) системы окажутся в состоянии

$$e^{-2iu\hat{y}_1} |\bar{\psi}\rangle_1 |\bar{+}\rangle_2 \xrightarrow{SUM(1)} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \left(a |2n_1\sqrt{2\pi} + u\rangle_{x,1} + b |(2n_1 + 1)\sqrt{2\pi} + u\rangle_{x,1} \right) \times |n_2\sqrt{2\pi} + u\rangle_{x,2}. \quad (1.17)$$

Измеряя x -квадратуру второй системы мы получим $X_2 = u + m\sqrt{2\pi}$, где m – некоторое целое число. Тогда, чтобы провести коррекцию ошибки, нам необходимо сместить x -квадратуру на классическую величину $X_{cor} = R_{\sqrt{2\pi}}(X_2)$, где

$$R_s(z) \equiv z - s \left\lfloor \frac{z}{s} + \frac{1}{2} \right\rfloor. \quad (1.18)$$

Здесь $\lfloor \dots \rfloor$ обозначает целую часть числа.

Можно заметить, что такой код корректно работает только при $u < \sqrt{\pi/2}$, так как в противном случае мы не можем однозначно определить величину u . В работе [55] авторы провели оценку устойчивости такого кода коррекции и показали, что он является полностью устойчивым (то есть не накапливающим ошибку от числа операций), если величина ошибки будет меньше $\sqrt{2\pi}/6$.

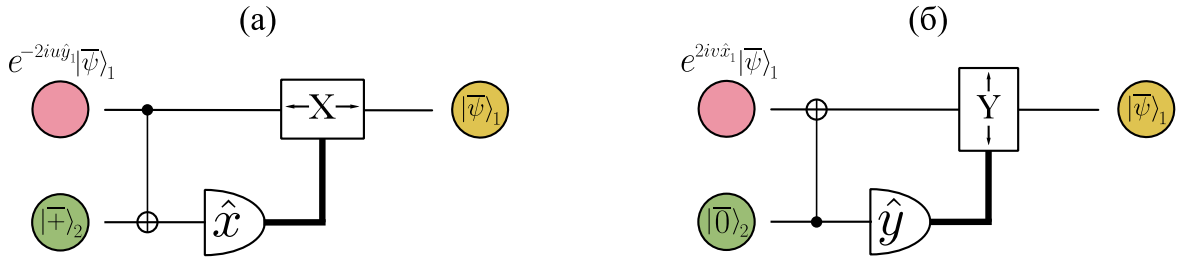


Рис. 1.3: Схемы коррекции ошибок: (а) – схема коррекции ошибок в x -квадратуре, (б) – схема коррекции ошибок в y -квадратуре. На рисунке: $|\bar{\psi}\rangle_1$ – корректируемое состояние; $|\bar{\mp}\rangle_2$ и $|\bar{0}\rangle_2$ – вспомогательные состояния; \hat{x} и \hat{y} – гомодинные детекторы, измеряющие соответствующие квадратуры; толстой линией обозначен классический канал по которому передаются результаты измерений на приборы X и Y , смещающие соответствующие квадратуры.

Ввиду невозможности достижения бесконечной степени сжатия, рассмотренные выше ГКР состояния невозможно получить экспериментально, они являются своего рода математической абстракцией. На практике используются приближенные к ним состояния. В этих состояниях каждый пик представляет собой гауссово распределение с конечной шириной, а высоты пиков имеют общую гауссову огибающую. Тем не менее, используя такие приближенные ГКР состояния, остается возможным осуществить процедуру коррекции ошибок. Так в работе [55] было теоретически продемонстрировано, что с помощью приближенных ГКР состояний можно успешно уменьшать квантовые ошибки так, что их влияние на результаты будет пренебрежимо мало. Кроме того, в работе [56], помимо влияния неидеальных состояний ГКР, было учтено влияние неидеальности перепутывающих преобразований. Авторы показали, что процедура коррекции ошибок осуществима даже в такой максимально приближенной к реальному эксперименту модели.

Такие коды могут быть адаптированы для однонаправленных квантовых вычислений. В работах [12, 57] авторы предлагают перепутывать неизмеряемые (выходные) узлы кластеров со вспомогательными осцилляторами в состояниях $|\bar{\mp}\rangle$ и $|\bar{0}\rangle$. Тогда, после проведения процедуры однонаправленных вычислений можно провести коррекцию ошибок смещения квадратур для выходных состояний, аналогично рассмотренной выше схеме.

Важно отметить, что сжатие, которое экспериментально достижимо на данный момент, оказывается недостаточным для осуществления универсальных квантовых вычислений. В работе [12] было показано, что для осуществления отказоустойчивых квантовых вычислений (т.е. вычислений, способных уменьшать логические ошибки до заданного низкого уровня) в кластерном состоянии требуется сжатие выше -20.5 дБ. В то же время, максимальное экспериментально достижимое сжатие составляет -15 дБ [11]. Однако, существуют методы, позволяющие существенно ослабить требование на сжатие.

1.2.3 Поверхностные коды

Главным фактором, ограничивающим работу протоколов коррекции ошибок является то, что при достаточно больших значениях ошибки сдвига мы не можем достоверно определить первоначальное состояние кубита до ошибки. Даже в идеальном случае при кодировании кубита с помощью ГКР состояний значения сдвигов не должны превышать $\sqrt{\pi/2}$. Проведение коррекции ошибок при значениях сдвига квадратур больших, чем максимально допустимые, приведет к возникновению ошибок в кубите. Так, при сдвиге по x -квadrатуре может возникнуть ошибка вида $a|\bar{0}\rangle + b|\bar{1}\rangle \rightarrow b|\bar{0}\rangle + a|\bar{1}\rangle$ (переворот бита), а при сдвиге по y -квadrатуре – ошибка вида $a|\bar{0}\rangle + b|\bar{1}\rangle \rightarrow a|\bar{0}\rangle - b|\bar{1}\rangle$ (переворот фазы). Если у нас будет инструмент, позволяющий отследить появление таких ошибок, то мы могли бы ослабить требования на величину ошибки сдвига. Таким ценным инструментом являются поверхностные коды.

Первоначально, идея поверхностных кодов возникла в рамках вычислений в дискретных переменных [58–61]. Но впоследствии была адаптирована для вычислительных схем в непрерывных переменных [62–65]. Чтобы лучше разобраться в работе поверхностных кодов, рассмотрим работу поверхностного ГКР-кода.

Поверхностные коды определены на двумерном квадратном массиве логических кубитов, кодируемых с помощью ГКР состояний, размером $d \times d$. На рис. 1.4 показана реализация поверхностного кода для массива кубитов с $d = 3$. Каждый из логических кубитов перепутывается с двумя вспомогательными осцилляторами в состояниях $|\bar{0}\rangle$ и $|\bar{+}\rangle$. С помощью этих вспомогательных осцилляторов над ним проводится процедура коррекции ошибок (см. раздел 1.2.2). После необходимо проверить, не произошли ли ошибки при процедуре коррекции.

Для этого, внутри каждой из «клеток», образованных логическими кубитами, в шахматном порядке помещают вспомогательные кубиты в состояниях $|\bar{0}\rangle$ и $|\bar{+}\rangle$ (см. рис. 1.4(б)). Эти кубиты перепутываются со всеми соседними с ними логическими кубитами и используются для измерения собственных значений операторов

$$\hat{S}_{X,k} = \hat{X}_a^\dagger \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d^\dagger, \quad \hat{S}_{Z,k} = \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d, \quad (1.19)$$

называемых стабилизаторами поверхностного кода X-типа и Z-типа, соответственно. Здесь

$$\hat{X}_k = e^{-i\sqrt{2\pi}\hat{y}_k}, \quad \hat{Z}_k = e^{i\sqrt{2\pi}\hat{x}_k}. \quad (1.20)$$

При этом, операторы \hat{X}_k и \hat{Z}_k , относящиеся к одному узлу антикоммутируют друг с другом:

$$\{\hat{X}_k, \hat{Z}_k\} = 0, \quad \{\hat{X}_k^\dagger, \hat{Z}_k\} = 0. \quad (1.21)$$

Стабилизаторы X-типа и Z-типа измеряются в шахматном порядке, при этом каждый из узлов будет участвовать в измерении двух стабилизаторов каждого типа. Для соседних стабилизаторов, имеющих два общих осциллятора, получаем что

$$[\hat{X}_a^\dagger \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d^\dagger, \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d] = \left((\hat{X}_a^\dagger \hat{Z}_a)(\hat{X}_b \hat{Z}_b) - (\hat{Z}_a \hat{X}_a^\dagger)(\hat{Z}_b \hat{X}_b) \right) \hat{X}_c \hat{X}_d^\dagger \hat{Z}_c \hat{Z}_d = 0. \quad (1.22)$$

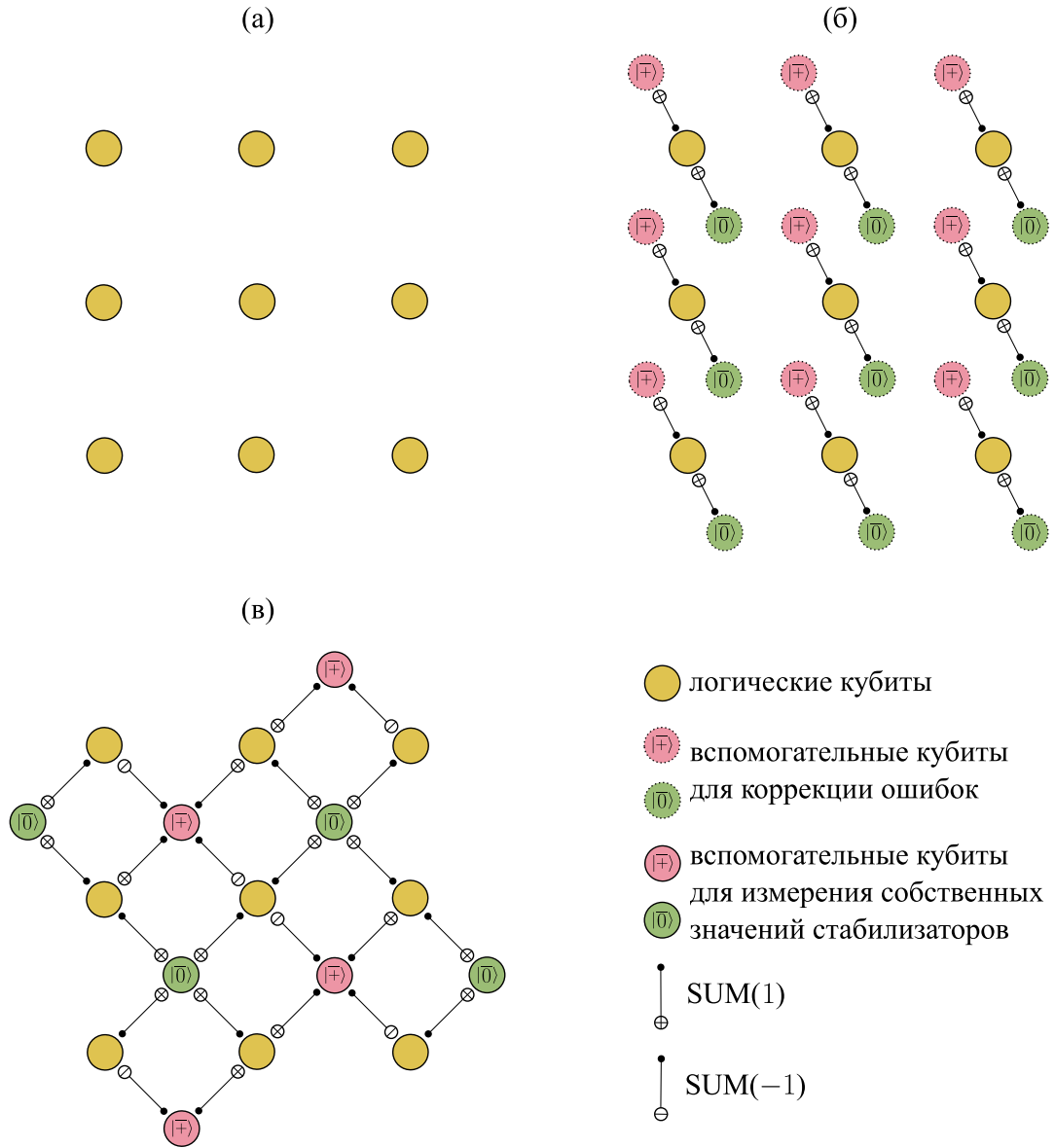


Рис. 1.4: Пример реализации поверхностного кода. (а) Массив логических кубитов 3 на 3 для вычислений. (б) Процедура коррекции ошибок. (в) Измерение собственных значений стабилизаторов X-типа и Z-типа.

Поскольку все стабилизаторы поверхностного кода коммутируют друг с другом, то мы можем одновременно провести измерения всех их собственных чисел.

Схемы измерения собственных чисел стабилизаторов $\hat{S}_{Z,k}$ и $\hat{S}_{X,k}$ с помощью вспомогательных кубитов показаны на рис. 1.5(а) и рис. 1.5(б), соответственно. По результатам гомодинных измерений X_k и Y_k мы определяем собственные числа стабилизаторов как

$$S_{X,k} = \begin{cases} +1, & |R_{2\sqrt{2\pi}}(Y_k)| = 0 \\ -1, & |R_{2\sqrt{2\pi}}(Y_k)| = \sqrt{2\pi} \end{cases}, \quad S_{Z,k} = \begin{cases} +1, & |R_{2\sqrt{2\pi}}(X_k)| = 0 \\ -1, & |R_{2\sqrt{2\pi}}(X_k)| = \sqrt{2\pi} \end{cases}, \quad (1.23)$$

где $R_s(z)$ определено как (1.18). Таким образом, для стабилизатора $S_{X,k}$ собственное число $+1$ соответствует тому, что вспомогательный кубит после перепутывания с логическими кубитами остался в состоянии $|+\rangle$, а собственное число -1 – перешел в состояние $|-\rangle$. Ана-

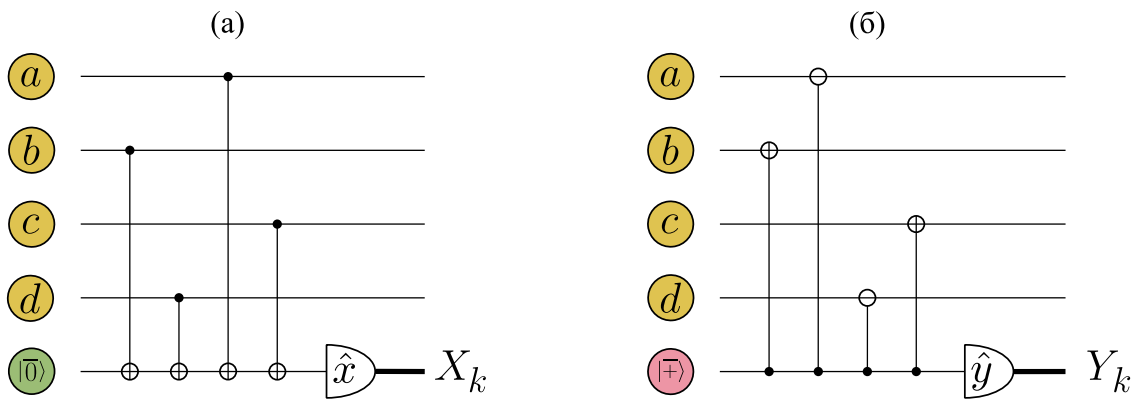


Рис. 1.5: (а) Схема измерения собственных значений стабилизатора Z-типа. (б) Схема измерения собственных значений стабилизатора X-типа.

логично для стабилизатора $S_{Z,k}$: $+1$ – остался в состоянии $|\bar{0}\rangle$, -1 – перешел в состояние $|\bar{1}\rangle$. Затем цикл повторяется снова, начиная с процедуры коррекции ошибок.

Состояния, являющиеся собственными состояниями всей группы стабилизаторов поверхностного кода, называются состояниями покоя. Существует огромное количество состояний покоя, которые можно выбрать с помощью измерений стабилизатора: если в массиве есть N вспомогательных кубитов для измерения стабилизаторов, то возможно 2^N состояний покоя. Если система находится в одном из состояний покоя, то в случае верной работы процедуры коррекции ошибок (когда ошибки сдвига не превышают порогового значения) при каждом цикле измерения собственных чисел стабилизаторов ее состояние будет оставаться неизменным, а набор измеряемых собственных чисел $\{S_{X,k}\}$ и $\{S_{Z,k}\}$ – постоянным.

Если после коррекции ошибок в одном из кубитов произойдет ошибка переворота бита, то измеряемые собственные числа стабилизаторов Z-типа, связанных с этим узлом, одновременно сменят свой знак на противоположный. Это служит сигналом о возникновении ошибки после процедуры коррекции. При этом, наличие такой ошибки никак не повлияет на стабилизаторы X-типа. И наоборот, если произойдет ошибка типа переворота фазы, то собственные значения стабилизаторов X-типа, связанные с этим кубитом, одновременно сменят свой знак, в то время как собственные значения стабилизаторов Z-типа не изменятся.

Если ошибки коррекции происходят достаточно редко, то сигналы об ошибке будут хорошо изолированы. Тогда возможно точно отследить в каких узлах и какого типа возникают ошибки после процедуры коррекции. Однако, если ошибки будут происходить часто, то задача идентификации ошибок будет более сложной и по мере увеличения частоты ошибок перестанет иметь однозначное решение. Это ограничивает способность поверхностного кода к обработке ошибок.

Таким образом, мы получаем в свои руки дополнительный инструмент для поиска ошибок вычислений. Так например, если каждый из логических кубитов массива будет перепутан с осциллятором, на котором мы проводим вычисления, то мы сможем «отлавливать» сбои в коррекции ошибок для таких осцилляторов. Иными словами, мы можем исправлять ошибки

сдвига на большие значения, чем при использовании только кодов коррекции ошибок. Это существенно снижает требование на сжатие для ресурсных состояний. Например, в работе [63] авторы показали, что в вычислительных схемах с использованием поверхностных кодов возможна отказоустойчивая квантовая коррекция ошибок при сжатии состояний ГКР выше 11,2 дБ. Также использование поверхностных кодов совместно с методами постселекции позволяет снизить требования на сжатие до -10 дБ [62].

1.3 Негауссовы квантовые операции и состояния

При обсуждении универсальности квантовых вычислений в разделе 1.1.3 мы показали, что для их реализации требуется хотя бы одна негауссова операция. Таким образом, негауссовы операции и состояния являются важным элементом квантовых вычислений в непрерывных переменных. Существует достаточно много различных типов негауссовых операций. Поэтому перед нами сразу же возникает целый ряд вопросов. Любая ли негауссова операция подходит для реализации универсальных квантовых вычислений? Как сравнивать негауссовы операции между собой? Существуют ли операции наиболее подходящие для реализации квантовых вычислений? К сожалению, на данный момент однозначного ответа на эти вопросы не существует.

В этом разделе мы рассмотрим основные негауссовы операции и состояния, встречающиеся в квантовой оптике, а также коснемся темы критериев негауссовости и классификации негауссовых состояний.

1.3.1 Керровская нелинейность

Исторически, первым нелинейным процессом, открытым в квантовой оптике, был эффект Керра, который проявляется как зависимость показателя преломления среды от интенсивности проходящего через нее света. Такой эффект наблюдается в средах с кубической нелинейной восприимчивостью. Эволюция квантового поля в среде с керровской нелинейностью описывается гамильтонианом вида

$$\hat{H}_{kerr} = \chi(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)^2, \quad (1.24)$$

где χ – действительный коэффициент, характеризующий степень нелинейности. Этот гамильтониан является гамильтонианом четвертой степени по квадратурам поля и относится к негауссовым, а потому может быть использован для получения гамильтонианов более высокой степени. В работе [7] было продемонстрировано, что керровская нелинейная эволюция и универсальный набор гауссовых операций являются достаточным набором операций для реализации универсальных квантовых вычислений.

Эффект Керра может проявляться в широком спектре физических систем: в стеклянных волноводах [66], на атомных ансамблях [67, 68], на одиночном атоме в высокодобротном

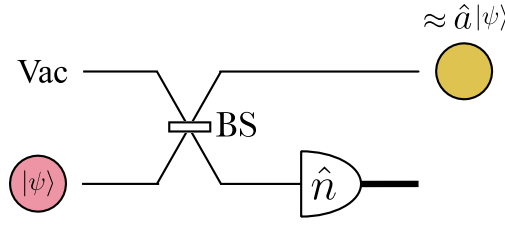


Рис. 1.6: Схема реализации условного вычитания фотонов из входного состояния $|\psi\rangle$. На рисунке: Vac – вакуумное состояние, BS – несимметричный светоделитель, \hat{n} – процедура измерения числа фотонов.

резонаторе [69], оптомеханических системах [70, 71], также в сверхпроводящих системах на джозефсоновских контактах [72]. Однако величина керровской нелинейности оказывается мала для нужд квантовой оптики. Реальных значений χ в оптическом диапазоне оказывается недостаточно для экспериментальной реализации негауссовых операций или генерации квантовых состояний, которые могут быть использованы как ресурс для вычислений.

1.3.2 Схема вычитания фотонов

Широко распространенным методом получения негауссовых состояний является процедура вычитания фотонов. В идеальном случае она соответствует действию оператора уничтожения \hat{a} на целевое квантовое состояние $|\psi_{in}\rangle$. Поскольку оператор \hat{a} является неунитарным, то такое действие приводит к появлению негауссового состояния (кроме тривиального случая, когда оператор \hat{a} действует на вакуумное состояние).

Однако невозможно напрямую реализовать действие оператора \hat{a} , поскольку этот оператор не является эрмитовым и, следовательно, не поддается наблюдению. Поэтому на практике, для получения таких состояний используют процедуру условного вычитания фотонов. Она реализуется с помощью схемы показанной на рис. 1.6.

Для того, чтобы описать эту процедуру, будет удобно перейти к разложению по состояниям Фока, которыми принято называть собственные состояния оператора числа частиц $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$:

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.25)$$

Эти состояния образуют полный ортонормированный набор, то есть

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{I}, \quad \langle m|n\rangle = \delta_{mn}. \quad (1.26)$$

Таким образом, целевое состояние $|\psi\rangle$, из которого мы хотим вычесть фотоны можно представить в виде разложения

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (1.27)$$

Оно отправляется на вход светоделителя с амплитудным коэффициентом отражения R (и амплитудным коэффициентом пропускания T). Второй канал светоделителя остается открытым и на него поступает вакуумное состояние. Преобразование состояний Фока на светоделителе для этого случая можно описать как

$$|n\rangle \rightarrow (-1)^k \sqrt{\frac{n!}{(n-k)!k!}} |R|^k |T|^{n-k} |n-k\rangle, \quad (1.28)$$

где k – число фотонов в отраженном луче (см. [73,74]). Затем в отраженном луче измеряется число фотонов. Поскольку мы не можем достоверно различить число задетектированных фотонов, то коэффициент R должен быть мал, чтобы вероятностью «отщепить» от входного состояния более одного фотона можно было пренебречь. В случае, если детектирование числа фотонов дает результат отличный от нуля, мы считаем, что процедура прошла успешно, и состояние на выходе будет описываться ненормированным вектором состояния

$$|\psi_{out}\rangle = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |R| |T|^{n-1} |n-1\rangle. \quad (1.29)$$

Видно, что такое состояние близко к желаемому состоянию $\hat{a}|\psi\rangle$. В противном случае, когда не произойдет детектирования фотонов, процедура вычитания фотонов не будет реализована.

Таким образом, реализация процедуры вычитания фотонов носит вероятностный характер. При этом, из-за того, что коэффициент отражения R должен быть мал, вероятность успешной реализации такой операции также будет мала. В этом заключается главный недостаток этого негауссового преобразования.

Однако, благодаря относительной простоте реализации, вычитание фотонов находит свое применение в широком спектре задач. Так, применение процедуры вычитания фотонов к двухмодовому сжатому вакууму позволяет увеличить степень перепутывания состояний [75–77], в частности это дает возможность увеличить верность телепортации квантовых состояний [13, 14]. Кроме того, условное вычитание фотонов часто рассматривается как инструмент для генерации других, более сложных, негауссовых состояний, используемых в протоколах квантовой оптики [78–82]. Например, в работе [82] авторы предлагают протокол для генерации произвольных негауссовых состояний. В основе этой схемы лежит протокол квантовой телепортации, где в качестве ресурса используется двухмодовое негауссово состояние, полученное следующим образом: к сжатым осцилляторам применяется процедура условного вычитания фотонов, затем состояния перепутываются с помощью симметричного светоделителя. При телепортации, негауссовость с ресурса переносится на входное состояние. Таким образом, проводя селекцию по результатам измерения числа фотонов, мы можем осуществлять контролируемое негауссово преобразование над входным состоянием. Далее выходное состояние снова отправляется на вход, процедура повторяется многократно. За счет многократного применения такой модифицированной телепортации и селекции по результатам измерений на каждом шаге, возможно генерировать негауссовы состояния

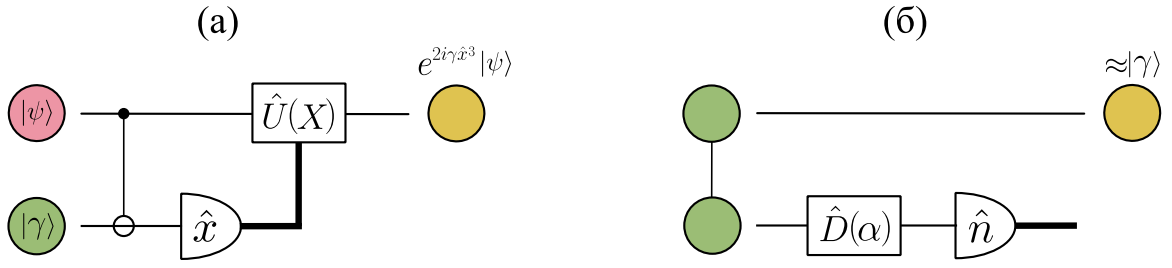


Рис. 1.7: (а) Схема реализации кубического фазового затвора с использованием вспомогательного состояния кубической фазы $|\gamma\rangle$. (б) Первая схема генерации состояний кубической фазы. На рисунке: $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$ – операция сдвига квадратур на величину α , \hat{n} обозначает процедуру измерения числа фотонов.

с заданными свойствами. Другим вариантом использования процедуры вычитания фотонов является получение негауссовых кластерных состояний [83], которые рассматриваются как потенциальный ресурс для универсальных квантовых вычислений.

1.3.3 Кубический фазовый затвор

Еще одно негауссово преобразование, часто фигурирующее в теоретических работах – кубический фазовый затвор, который описывается гамильтонианом третьей степени по операторам квадратур вида

$$\hat{H}_{CPG} = 2\gamma\hat{x}^3, \quad (1.30)$$

где γ – действительный коэффициент, характеризующий степень нелинейности преобразования. Как и в случае с керровской нелинейностью, такое негауссово преобразование совместно с универсальным набором гауссовых операций образуют набор операций, достаточный для реализации универсальных квантовых вычислений (см. раздел 1.1.3).

Идеальным состоянием кубической фазы называют квантовое состояние, имеющее вид

$$|\gamma\rangle = \int dx e^{i2\gamma x^3} |x\rangle_x, \quad (1.31)$$

где $|x\rangle_x$ – собственное состояние оператора x -квадратуры, определяемое соотношением (1.3). Кубический фазовый затвор может быть реализован не только как некоторый нелинейный физический процесс, но и за счет переноса негауссовой статистики со вспомогательного состояния кубической фазы $|\gamma\rangle$ на входную квантовую систему [15, 84, 85]. На рис. 1.7(а) приведена схема реализации кубического фазового затвора с использованием вспомогательного состояния кубической фазы. Рассмотрим внимательнее, как работает эта схема. Запишем произвольное входное состояние как $|\psi\rangle_1 = \int dx_1 \psi(x_1) |x_1\rangle_{x,1}$. Это состояние перепутывается со вспомогательным состоянием кубической фазы $|\gamma\rangle_2$ во втором канале с помощью преобразования SUM(-1), которое действует как $e^{2i\hat{x}_1\hat{y}_2}$. После этого происходит измерение x -квадратуры во втором канале, что соответствует проецированию второго осциллятора на

состояние $|X\rangle_{x,2}$, где X - измеренное значение x -квadrатуры. После таких действий состояние в первом канале будет:

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle_{1=x,2} \langle X|e^{2i\hat{x}_1\hat{y}_2}|\psi\rangle_1|\gamma\rangle_2 &= \iint dx_1 dx_2 \psi(x_1) e^{2i\gamma x_2^3} |x_1\rangle_{x,1} \langle X|x_2 - x_1\rangle_{x,2} \\ &= \int dx_1 \psi(x_1) e^{2i\gamma(x_1+X)^3} |x_1\rangle_{x,1} = e^{2i\gamma(\hat{x}_1+X)^3} |\psi\rangle_1 \end{aligned} \quad (1.32)$$

Чтобы избавиться от лишних зависящих от X слагаемых в операторной экспоненте, необходимо подействовать оператором вида

$$\hat{U}(X) = e^{2i\gamma(\hat{x}^3 - (\hat{x}+X)^3)} \quad (1.33)$$

Гамильтониан, отвечающий такому оператору, является гамильтонианом второй степени по операторам квадратур и может быть реализован средствами линейной оптики. Состояние на выходе схемы будет соответствовать действию кубического фазового затвора на входное состояние. Таким образом, возможность генерировать состояния кубической фазы и способность реализовать кубический фазовый затвор равносильны между собой.

Помимо создания универсального набора операций, кубический фазовый затвор может использоваться для реализации T-гейта на осцилляторах, закодированных с помощью GKP состояний [15] и для генерации других негауссовых состояний, таких как состояние кота Шредингера [86, 87]. Данное диссертационное исследование во многом посвящено возможностям использования кубического фазового затвора. Так, в главе 2.4 мы покажем, что кубический фазовый затвор может использоваться для повышения точности телепортации состояний в непрерывных переменных, а в главе 4.4 – для уменьшения ошибок произвольных одномодовых гауссовых операций.

Первая идея генерации кубических фазовых состояний была предложена Готтесманом, Китаевым и Прескиллом еще в 2001 году (см. рис. 1.7(б)). В качестве ресурса использовалось двухмодовое перепутанное состояние. Над одной из мод проводилась операция сдвига в фазовом пространстве на большую величину α , после проводилось измерение числа фотонов в этой моде. Такое измерение приводило к возникновению в неизмеренном канале состояния близкого к состоянию кубической фазы [15, 84, 88] (см. рис. 1.8). Однако, этот метод оказался тяжело реализуем экспериментально, поскольку для него требовалось выполнить операцию сдвига квадратур на величину, далекую от реально достижимой в эксперименте. Из-за этого кубический фазовый затвор долгое время оставался лишь абстрактным математическим преобразованием.

Тем не менее, за последние годы ситуация изменилась. Появляется все больше работ, посвященных новым методам генерации состояний кубической фазы и реализации самого кубического фазового затвора. К таким методам можно отнести: генерацию кубического фазового состояния как суперпозиции состояний Фока [89, 90]; получение кубических фазовых состояний с помощью процедуры вычитания фотонов [80, 82]; создание кубического фазового затвора на базе керровской нелинейности [91]; протоколы преобразования негауссовых трехжатых

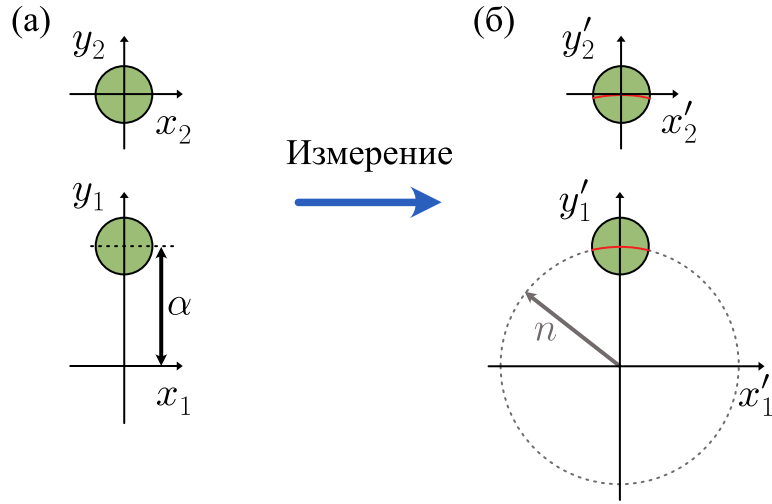


Рис. 1.8: Иллюстрация первого метода генерации состояния кубической фазы. (а) Два перепутанных состояния, одно из которых сдвинуто на большую величину α . (б) Измерение числа фотонов $\hat{n} \sim \hat{x}^2 + \hat{y}^2$ сдвинутого состояния приводит к возникновению в неизмеренном канале состояния близкого к состоянию кубической фазы.

состояний, генерируемых экспериментально, в состояния кубической фазы [92]; реализацию кубического фазового затвора в микроволновых цепях с джозефсоновскими контактами [93]; и генерацию кубического фазового состояния (а также других негауссовых состояний) в микроволновых резонаторах, управляемых сверхпроводящим кубитом [94]. Особенно значимых успехов удалось достичь в микроволновом диапазоне частот – именно в этом диапазоне впервые удалось сгенерировать кубическое фазовое состояние [94]. Таким образом, кубический фазовый затвор постепенно превращается из сугубо теоретического преобразования в реально существующее устройство.

1.3.4 Примеры гауссовых и негауссовых состояний

Говоря о негауссовых, операциях нельзя ни сказать о негауссовых состояниях, являющихся результатом их действия. Поэтому рассмотрим некоторые из негауссовых состояний, чаще всего встречающихся в задачах квантовой оптики.

Полезным инструментом при работе с негауссовыми состояниями является функция Вигнера (см., например, [95]), которая описывает распределение квазивероятности для некоторого квантового состояния в фазовом пространстве. Для квантового состояния с матрицей плотности $\hat{\rho}$ она определяется как

$$W(x, y) \equiv \frac{1}{\pi} \int d\xi e^{-2iy\xi} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{\rho} \left| x - \frac{1}{2}\xi \right. \right. \right\rangle. \quad (1.34)$$

Как мы расскажем ниже, анализ функции Вигнера играет важную роль при классификации негауссовых состояний.

Однако, прежде чем рассматривать негауссовы состояния, будет полезно вспомнить некоторые из гауссовых состояний.

А. Когерентное состояние

Из множества гауссовых состояний чаще всего, в рамках квантовой оптики, используется когерентное состояние, которое является собственным состоянием оператора уничтожения фотонов:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (1.35)$$

Такое состояние выступает ближайшим аналогом классического света. Формально оно может быть сгенерировано действием оператора сдвига $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$ на вакуумное состояние: $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle$.

В. Сжатое состояние

Другим важным классом состояний для квантовой оптики являются сжатые состояния, которые выступают основным ресурсом для однонаправленных квантовых вычислений. Формально они генерируются действием оператора сжатия на вакуумное состояние. Оператор сжатия имеет вид

$$\hat{S} = e^{i\frac{r}{2}(\hat{x}_j\hat{y}_j + \hat{y}_j\hat{x}_j)}, \quad (1.36)$$

где r – параметр сжатия, определяющий пропорциональное растяжение и сжатие квадратур относительно вакуумного состояния поля. Сжатые состояния могут быть представлены в виде разложения по собственным состояниям оператора x -квadrатуры $|x\rangle_x$ как

$$|r\rangle_s = \int dx \sqrt{\frac{2e^{2r}}{\pi}} \exp(-e^{2r}x^2) |x\rangle_x. \quad (1.37)$$

Теперь перейдем непосредственно к примерам негауссовых состояний.

С. Состояние Фока

В разделе 1.3.2 нами были введены состояния Фока, как собственные состояния оператора числа частиц (1.29). Они являются ярким примером негауссовых состояний, возникающих в квантовой оптике естественным образом, как собственные функции гамильтониана электромагнитного поля. Состояние Фока с номером n можно представить в виде разложения по собственным состояниям оператора x -квadrатуры как

$$|n\rangle = \int dx \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}n!}\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} H_n(\sqrt{2}x) |x\rangle_x, \quad (1.38)$$

где $H_k(x)$ – обозначает полином Эрмита с номером n . Функции Вигнера для состояний Фока с $n = 1$ и $n = 2$ показаны на рис. 1.9.

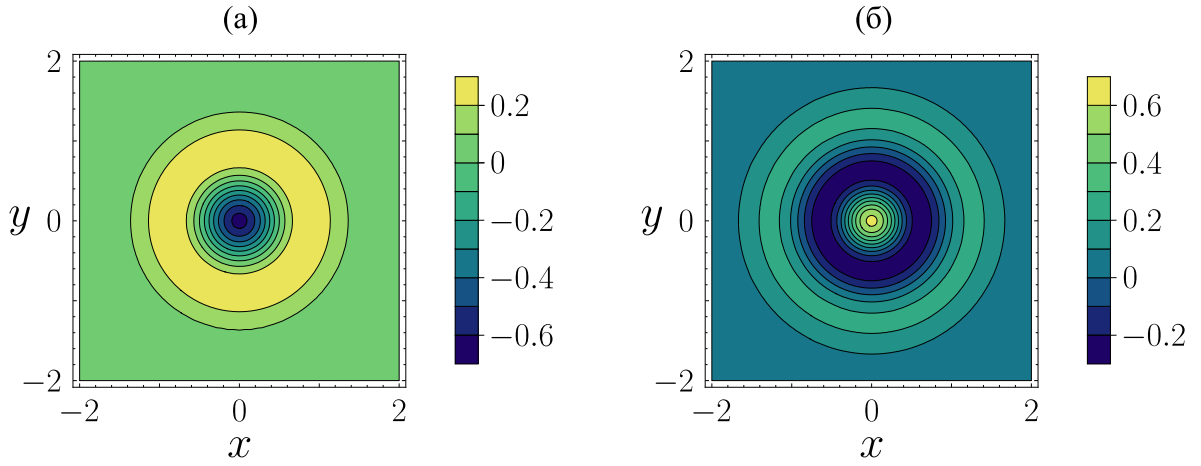


Рис. 1.9: Функция Вигнера состояний Фока (а) при $n = 1$, (б) при $n = 2$.

Д. Состояние кубической фазы

При обсуждении кубического фазового затвора мы уже упоминали идеальное кубическое фазовое состояние, которое определяется выражением (1.31). Формально оно генерируется действием кубического фазового затвора на идеально сжатое по y -квадратуре состояние. Однако, поскольку идеального сжатия невозможно достичь на практике, то в общем случае состояние кубической фазы определяется как

$$|\gamma, r\rangle = e^{2i\gamma\hat{x}^3} | -r \rangle_s, \quad (1.39)$$

где $| -r \rangle_s$ при $r > 0$ – сжатое по y -квадратуре состояние. На рис. 1.10(а) приведен пример функции Вигнера для состояния кубической фазы.

Е. Состояние кота Шредингера

Еще одним интересным негауссовым состоянием является состояние кота Шредингера. Оно представляет собой суперпозицию двух когерентных состояний $|\alpha\rangle$ и $| -\alpha\rangle$, и в общем случае записывается как

$$|\psi_{cat}\rangle = N_{cat} (|\alpha\rangle + e^{i\theta} | -\alpha\rangle), \quad (1.40)$$

где $N_{cat} = \left(2 + 2e^{-2|\alpha|^2} \cos \theta\right)^{-1/2}$ – нормировочный множитель, а θ – произвольный фазовый множитель. Состояние с $\theta = 0$ называется четным котом Шредингера, а с $\theta = \pi/2$ – нечетным. Пример функции Вигнера для состояния кота Шредингера показан на рис. 1.10(б).

1.3.5 Критерии негауссовости и классификация негауссовых состояний

Негауссовы состояния являются важным ресурсом для реализации универсальных квантовых вычислений. Однако множество негауссовых состояний крайне обширно и необходимо

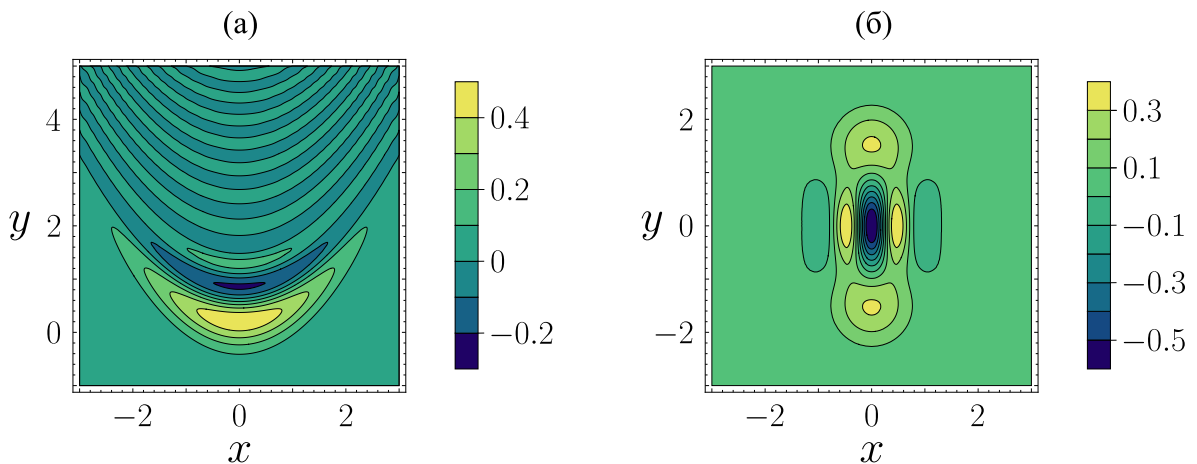


Рис. 1.10: (а) Функция Вигнера состояния кубической фазы $|\gamma, r\rangle$ при $\gamma = 0.1$ и $r = 1$. (б) Функция Вигнера состояния нечетного кота Шредингера $|\psi_{cat}\rangle$ при $\alpha = 1.5i$.

уметь различать какие из них будут полезны, как ресурс для вычислений, а какие нет. В связи с этим остро встает вопрос о классификации негауссовых состояний. На данный момент такая классификация находится в зачаточном состоянии и она не имеет такой четкой структуры, как классификация гауссовых состояний. Тем не менее, опираясь на различные критерии, возможно выделить классы состояний, которые могут быть нам полезны. Давайте более подробно остановимся на этой теме.

Чтобы определить множество негауссовых состояний, сначала определим какие состояния являются гауссовыми. К гауссовым состояниям относятся квантовые состояния, статистика которых может быть полностью описана с помощью первых двух моментов. Формально, любое гауссово состояние может быть получено из вакуумного действием гамильтониана не выше второй степени по операторам квадратур. В широком смысле негауссовы состояния – это все те состояния, которые не попадают в множество гауссовых.

Существует ряд негауссовых состояний, которые могут быть сгенерированы как смесь гауссовых. Такие состояния можно приготовить, применяя комбинацию гауссовых операций и классических случайных процессов. В то же время, негауссовы состояния, необходимые нам для вычислений, возникают в результате сильно нелинейных квантовых процессов, которые не могут быть описаны гамильтонианом второй степени по операторам квадратур. Поэтому выделяют множество, в которое входят все гауссовы состояния и негауссовы состояния, представляющие из себя их смесь:

$$\mathcal{G} \equiv \left\{ \hat{\rho} : \hat{\rho} = \int d\lambda p(\lambda) \hat{\rho}_G(\lambda) \right\}, \quad (1.41)$$

где $\hat{\rho}_G(\lambda)$ матрицы плотности чистых гауссовых состояний, характеризуемых набором параметров λ , а $p(\lambda)$ может быть произвольным распределением вероятностей. Состояния, которые не входят в множество \mathcal{G} , выделяют в отдельный класс – квантовые негауссовы состояния.

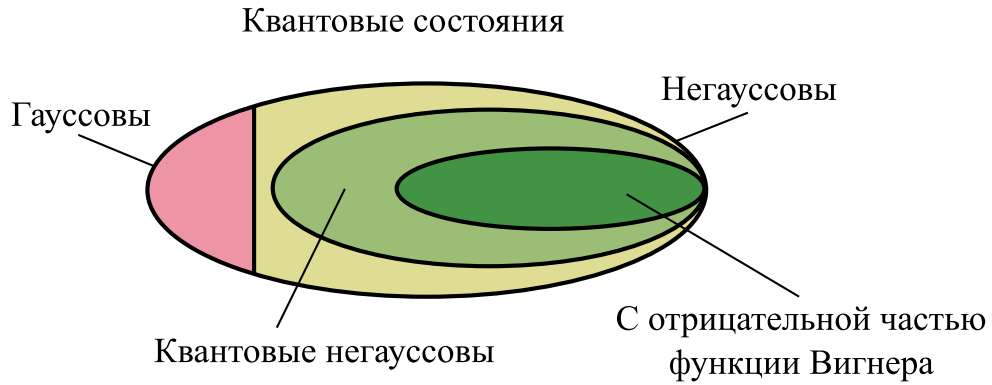


Рис. 1.11: Классификация негауссовых состояний.

В работах [96, 97] было показано, что квантовые состояния с положительно определенной функцией Вигнера могут эффективно симулироваться на классическом компьютере. Поэтому для квантовых вычислений необходимы состояния с отрицательной частью функции Вигнера. Чистые квантовые негауссовы состояния как раз обладают этим свойством. Однако существуют смешанные квантовые негауссовы состояния со строго положительной функцией Вигнера. Таким состоянием, к примеру, будет сильно зашумленное однофотонное состояние, представляющее собой смесь однофотонного состояния и вакуумного шума. На данный момент именно квантовые состояния с отрицательной частью функции Вигнера рассматриваются как основной ресурс для реализации универсальных квантовых вычислений.

Схематично, описанная выше классификация квантовых состояний показана на рис. 1.11. Иногда выделяют большее количество разных классов негауссовых состояний (см., например, [98]). Однако, мы не будем углубляться в эту тему, поскольку более детальная классификация уже не так важна для понимания вопроса в целом.

Введение классификации негауссовых состояний дает нам возможность сказать какие из них будут для нас полезны, однако не дает понять насколько полезны. Необходимо уметь сравнивать их между собой. Поэтому, на данный момент, идут активные исследования в области мер негауссовости квантовых состояний.

Поскольку все чистые негауссовы состояния имеют отрицательную часть функции Вигнера (или кратко – вигнеровскую отрицательность) и ее наличие является необходимым условием для достижения преимущества квантовых вычислений над классическими, то естественным образом возникли связанные с ней меры негауссовости. Такие меры должны отвечать нескольким требованиям. Во-первых, мера должна равняться нулю тогда и только тогда, когда функция Вигнера строго положительна. Во-вторых, мера должна оставаться постоянной при гауссовых унитарных преобразованиях над рассматриваемым состоянием. Первая предложенная мера, отвечающая этим требованиям – объем вигнеровской отрицательности [99]. Для квантового состояния с матрицей плотности $\hat{\rho}$ она определяется как

$$\mathcal{N}(\hat{\rho}) \equiv \iint dx dp |W(x, p)| - 1. \quad (1.42)$$

Главным недостатком этой меры является то, что она не аддитивна, то есть $\mathcal{N}(\hat{\rho}_1 \oplus \hat{\rho}_2) \neq \mathcal{N}(\hat{\rho}_1) + \mathcal{N}(\hat{\rho}_2)$. Чтобы обойти этот недостаток, была введена другая – логарифмическая отрицательность Вигнера [100–102]:

$$\mathcal{R}(\hat{\rho}) \equiv \ln \iint dx dp |W(x, p)|. \quad (1.43)$$

Такая мера уже аддитивна, однако наличие логарифма нарушает выпуклость меры. Общим недостатком мер негауссовости, основанных на вигнеровской отрицательности, является то, что они плохо отражают негауссовы характеристики смешанных состояний. Вдобавок, вигнеровскую отрицательность достаточно сложно связать с измеряемыми величинами [103].

Второй тип мер негауссовости связан с «расстоянием» от рассматриваемого негауссового состояния до множества \mathcal{G} всех гауссовых состояний и их смесей. Основным вопросом при построении таких мер является определение метрики на пространстве квантовых состояний. Чаще всего, в качестве такой метрики рассматривают квантовую относительную энтропию [100, 104–106]. На языке матриц плотности, относительная энтропия для состояния $\hat{\rho}$ относительно состояния $\hat{\sigma}$ определяется как

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}|\hat{\sigma}) \equiv \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) - \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\sigma}). \quad (1.44)$$

Тогда «расстояние» от рассматриваемого состояния $\hat{\rho}$ до ближайшего к нему состояния из множества \mathcal{G} будет

$$\mathcal{Q}(\hat{\rho}) \equiv \min_{\hat{\sigma} \in \mathcal{G}} \mathcal{S}(\hat{\rho}|\hat{\sigma}). \quad (1.45)$$

В отличие от мер негауссовости, связанных с вигнеровской отрицательностью, такой тип мер применим как к чистым, так и к смешанным состояниям. Однако, эту меру трудно интерпретировать с точки зрения применимости выделяемых ими состояний в тех или иных квантовых протоколах.

Таким образом, на данный момент не существует четких критериев, которые могли бы показать какие негауссовы состояния лучше всего подходят для реализации универсальных квантовых вычислений.

Глава 2. Ошибка перепутывающих операций в протоколе телепортации

В этой главе мы используем протокол квантовой телепортации как проверочный для сравнения двух различных перепутывающих операций: смешения сжатых квантовых состояний на светоделителе и преобразования Controlled-Z (CZ). Оба устройства являются базовыми в инструментарии преобразований линейной оптики, и любое обсуждение квантовых вычислительных протоколов оперирует этими элементами. Преобразование CZ является основным перепутывающим механизмом генерации кластерных состояний в непрерывных переменных [8, 36], а также в схемах однонаправленных вычислений на кластерных состояниях [8, 31].

Наше внимание привлек тот факт, что, если в «классической» схеме квантовой телепортации заменить светоделитель, перепутывающий два сжатых состояния света, устройством, осуществляющим преобразование CZ, то ошибка телепортации, связанная с конечностью сжатия исходного ресурса, окажется меньше. Это простое и наглядное построение поставило перед нами ряд вопросов: всегда ли преобразование CZ выигрывает перед преобразованием на светоделителе с точки зрения добавочных шумов? Имеют ли, в рамках современных экспериментальных возможностей, реализации CZ тоже преимущество, что и формальная математическая процедура? До какого предела возможно уменьшить шумы телепортации, используя вместо светоделителей устройства, осуществляющие преобразование CZ? И, наконец, в чем причина уменьшения или увеличения шума при использовании той или иной перепутывающей операции? В этой главе мы постараемся дать ответы на эти вопросы.

Кроме того, представленное рассмотрение позволяет обсудить такой аспект перепутывания как весовые коэффициенты [36]. Часто по умолчанию предполагают, что единичные весовые коэффициенты обеспечивают наилучшее перепутывание в системе. Мы покажем, что варьирование этого параметра - еще одна возможность снизить шумы в схеме телепортации.

Мы начнем изложение с хорошо известной схемы телепортации в непрерывных переменных, затем сравним результат с тем, что получается при замене светоделителей перепутывающим преобразованием CZ, имея ввиду произвольные значения весовых коэффициентов. Мы оценим ошибки двух схем и выберем наилучшие параметры, минимизирующие ошибки телепортации. Кроме того, мы обсудим одну из наиболее известных реализаций процедуры

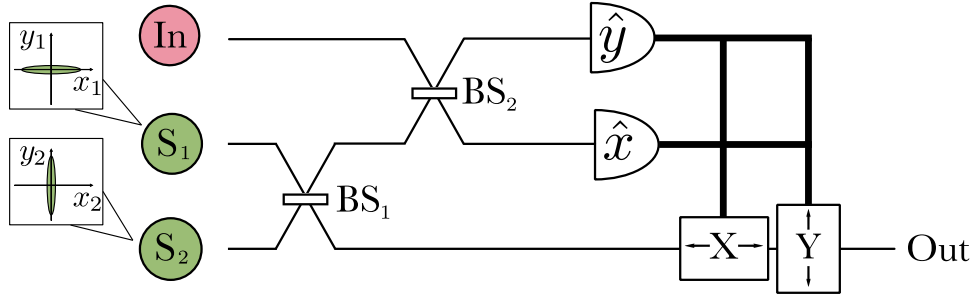


Рис. 2.1: Схема протокола телепортации. На схеме: In – входное (телепортируемое) состояние, S_1 и S_2 – осцилляторы, сжатые во взаимно ортогональных квадратурах; BS_1 и BS_2 – светоделители; \hat{x} и \hat{y} – гомодинные детекторы; X и Y – операции сдвига, смещающие соответствующие квадратуры полей в зависимости от результатов гомодинного измерения.

CZ, и посмотрим, как изменится ошибка телепортации при ее использовании. Результаты данной главы были впервые изложены мной в работе [107].

2.1 Оригинальный протокол телепортации и его модификации с использованием преобразования CZ

2.1.1 Оригинальный протокол телепортации

Мы начнем обсуждение с того, что напомним, как строится протокол телепортации в непрерывных переменных. Схема реализации этого протокола представлена на рис. 2.1. Два осциллятора, обозначенные как S_1 и S_2 на рисунке, сжаты во взаимно ортогональных квадратурах:

$$\hat{x}_1 = e^r \hat{x}_{0,1}, \quad \hat{y}_1 = e^{-r} \hat{y}_{0,1}, \quad (2.1)$$

$$\hat{x}_2 = e^{-r} \hat{x}_{0,2}, \quad \hat{y}_2 = e^r \hat{y}_{0,2}, \quad (2.2)$$

где $\hat{x}_{0,j}$ и $\hat{y}_{0,j}$ – квадратуры осциллятора j в вакуумном состоянии. Степень сжатия исходных состояний считается одинаковой и задается параметром r , определяющим пропорциональное растяжение и сжатие квадратур вакуумного состояния поля. Сжатые поля смешиваются на симметричном светоделителе BS_1 , что приводит к созданию перепутанного состояния:

$$\hat{a}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} ((\hat{x}_1 + \hat{x}_2) + i(\hat{y}_1 + \hat{y}_2)), \quad (2.3)$$

$$\hat{a}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} ((\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + i(\hat{y}_1 - \hat{y}_2)). \quad (2.4)$$

Полученное перепутанное состояние выступает в качестве квантового ресурса для телепортации.

Затем входное (телепортируемое) состояние перепутывается с полем в первом канале (см. рис. 2.1) с помощью симметричного светоделителя BS_2 . В результате, полевые операторы

уничтожения в каналах после светоделителя примут вид:

$$\hat{a}'_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\hat{x}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_1 + \hat{x}_2) \right) + i \left(\hat{y}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{y}_1 + \hat{y}_2) \right) \right), \quad (2.5)$$

$$\hat{a}''_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\hat{x}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_1 + \hat{x}_2) \right) + i \left(\hat{y}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{y}_1 + \hat{y}_2) \right) \right). \quad (2.6)$$

Далее, используя процедуру балансного гомодинного детектирования, измерим во входном канале y -квadrатуру поля, а в первом – x -квadrатуру:

$$\hat{i}_{in,y} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left(\hat{y}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{y}_1 + \hat{y}_2) \right), \quad (2.7)$$

$$\hat{i}_{1,x} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left(\hat{x}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_1 + \hat{x}_2) \right), \quad (2.8)$$

где β – амплитуда гомодина. Такое измерение, в силу запутанности ресурсного состояния, приведет к изменению значений квадратурных компонент поля во втором канале:

$$\hat{x}'_2 = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}\hat{x}_2 - \sqrt{2}\frac{i_{1,x}}{\beta}, \quad (2.9)$$

$$\hat{y}'_2 = \hat{y}_{in} + \sqrt{2}\hat{y}_1 - \sqrt{2}\frac{i_{in,y}}{\beta}. \quad (2.10)$$

Здесь операторы фототоков заменены на s -числа, соответствующие результатам конкретных измерений.

Наконец, последний этап процедуры телепортации заключается в смещении квадратур во втором канале на величины полученных фототоков так, чтобы компенсировать s -числовые слагаемые в выражениях (2.9) и (2.10). Тогда состояние на выходе схемы приобретает вид:

$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}\hat{x}_2 = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}e^{-r}\hat{x}_{0,2}, \quad (2.11)$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + \sqrt{2}\hat{y}_1 = \hat{y}_{in} + \sqrt{2}e^{-r}\hat{y}_{0,1}, \quad (2.12)$$

где вторые равенства учитывают сжатие исходных ресурсных осцилляторов (2.1) и (2.2).

2.1.2 Протокол телепортации с использованием преобразования CZ

Теперь модифицируем исходную схему телепортации, заменив два светоделителя на два преобразователя CZ (см. рис. 2.2), осуществляющих следующее действие:

$$\hat{C}_{Z,jk} = e^{2ig_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k}. \quad (2.13)$$

Здесь g_{jk} – так называемый весовой коэффициент преобразования, он может принимать любые положительные или отрицательные значения. Величина весового коэффициента показывает то, в каком отношении дисперсии y -квadrатур осцилляторов после перепутывания будут задаваться дисперсиями исходных осцилляторов, а знак весового коэффициента говорит о создании положительных или отрицательных корреляций (антикорреляций) между осцилляторами. Мы обсудим выбор и возможности управления значениями весовых коэффициентов

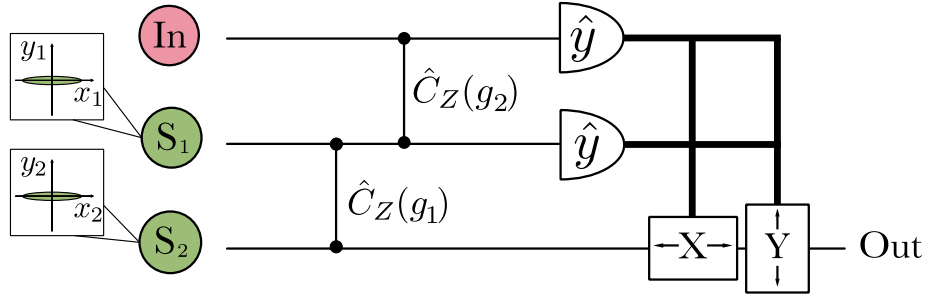


Рис. 2.2: Схема реализации телепортации с помощью двух преобразований CZ. На схеме: S1 и S2 – осцилляторы, сжатые по y -квадратуре; $\hat{C}_Z(g_j)$ – преобразования CZ с весовыми коэффициентами g_j .

ниже, а сейчас для общности предположим, что оба преобразования имеют различные весовые коэффициенты g_1 и g_2 .

Повторим проделанные выше выкладки для модифицированной схемы. В отличие от предыдущего случая, мы начнем с двух осцилляторов, сжатых по y -квадратуре (как это обычно делают при построении кластерных состояний с помощью операции CZ):

$$\hat{x}_1 = e^r \hat{x}_{0,1}, \quad \hat{y}_1 = e^{-r} \hat{y}_{0,1}, \quad (2.14)$$

$$\hat{x}_2 = e^r \hat{x}_{0,2}, \quad \hat{y}_2 = e^{-r} \hat{y}_{0,2}. \quad (2.15)$$

Применяя первое преобразование CZ, мы перепутываем два сжатых состояния. Действие преобразования CZ на амплитуды полей подробно показано в приложении A.1. Тогда амплитуды осцилляторов после преобразования могут быть записаны как

$$\hat{a}'_1 = \hat{x}_1 + i(\hat{y}_1 + g_1 \hat{x}_2), \quad (2.16)$$

$$\hat{a}'_2 = \hat{x}_2 + i(\hat{y}_2 + g_1 \hat{x}_1). \quad (2.17)$$

Далее с помощью второго преобразования CZ мы перепутываем осциллятор в первом канале с входным состоянием, которое мы хотим телепортировать. В результате мы получим:

$$\hat{a}'_{in} = \hat{x}_{in} + i(\hat{y}_{in} + g_2 \hat{x}_1), \quad (2.18)$$

$$\hat{a}''_1 = \hat{x}_1 + i(\hat{y}_1 + g_1 \hat{x}_2 + \hat{y}_2 \hat{x}_{in}). \quad (2.19)$$

Давайте теперь измерим y -квадратуры у входного и первого состояний:

$$\hat{i}_{in,y} = \hat{y}_{in} + g_2 \hat{x}_1, \quad (2.20)$$

$$\hat{i}_{1,y} = \hat{y}_1 + g_1 \hat{x}_2 + g_2 \hat{x}_{in}. \quad (2.21)$$

Заменяя фототоки на соответствующие результаты единичных измерений, решаем полученную систему относительно растянутых квадратур \hat{x}_1 и \hat{x}_2 . Тогда, подставляя полученное решение в (2.17), мы получим:

$$\hat{x}_{out} = -\frac{g_2}{g_1} \hat{x}_{in} - \frac{1}{g_1} \hat{y}_1 = -\frac{g_2}{g_1} \hat{x}_{in} - \frac{1}{g_1} e^{-r} \hat{y}_{0,1}, \quad (2.22)$$

$$\hat{y}_{out} = -\frac{g_1}{g_2} \hat{y}_{in} + \hat{y}_2 = -\frac{g_1}{g_2} \hat{y}_{in} + e^{-r} \hat{y}_{0,2}. \quad (2.23)$$

Здесь мы учли смещения квадратурных компонент на результаты измерений, а также выражения (2.14) и (2.15). Мы видим, что при $g_1 = -g_2 = g$ (что соответствует разным фазам двух преобразований CZ) мы получаем преобразование телепортации вида:

$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \frac{1}{g} e^{-r} \hat{y}_{0,1}, \quad (2.24)$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + e^{-r} \hat{y}_{0,2}. \quad (2.25)$$

Сравним полученный результат с выражениями (2.11) и (2.12), отвечающими оригинальной схеме телепортации. Отметим два важных факта:

1. При единичном значении весового коэффициента g схема с преобразованиями CZ обеспечивает более низкий уровень ошибок по сравнению с вариантом схемы, включающим светоделители. Уровень ошибок удобно характеризовать величиной среднеквадратичных флуктуаций ошибки в каждой квадратуре $\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \langle (\hat{x}_{out} - \hat{x}_{in})^2 \rangle$ и $\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \langle (\hat{y}_{out} - \hat{y}_{in})^2 \rangle$. Видно, что уровень ошибок, определяемых выражениями (2.11) и (2.12) в два раза выше, чем для схемы с преобразованиями CZ при $g_1 = -g_2 = 1$. В этом случае ошибки в x и y -квadrатурах совпадают.
2. Второй вариант схемы (с CZ) позволяет еще более снизить уровень ошибки в одной из квадратур, принципиально позволяя добиться нулевой ошибки при $g_1 = -g_2 \rightarrow \infty$.

Прежде чем переходить к обсуждению других вариантов схемы телепортации, интересно обсудить несимметричность описанной процедуры относительно весового коэффициента. Мы видим, что интервалы $(0, 1)$ и $(1, \infty)$, в некотором смысле, эквивалентны между собой. Выбор интервала показывает какой из исходных квадратур при перепутывании мы отдаем предпочтение. В случае, когда для нас важна вся информация о перепутываемых состояниях, то оба предельных случая $g = 0$ и $g \rightarrow \infty$ для нас будут одинаково плохи. Однако это не так, если у нас есть выделенные квадратуры осцилляторов. В нашей схеме на исходные растянутые x -квadrатуры переносится статистика телепортируемого состояния, в то время как неидеально сжатые y -квadrатуры являются источниками шумов. Выбором больших значений весовых коэффициентов мы выделяем квадратуры, несущие для нас полезную информацию. Таким образом в нашей схеме за счет больших значений весовых коэффициентов g мы можем подавить шумовую статистику одного из ресурсных осцилляторов.

Можно посмотреть на это и с другой точки зрения. Внутри самого преобразования CZ содержится дополнительный ресурс сжатия. Рассмотренная схема телепортации позволяет использовать этот ресурс и эффективно сжать дополнительно один из ресурсных осцилляторов. Более подробно вопрос о связи весовых коэффициентов и сжатия будет рассмотрен в разделе 2.2.

Полученные результаты указывают на существенное преимущество использования преобразования CZ по сравнению со смешением полей на светоделителе. Однако, говоря о преобразовании CZ, мы подразумеваем некое абстрактное устройство, выполняющее необходимую

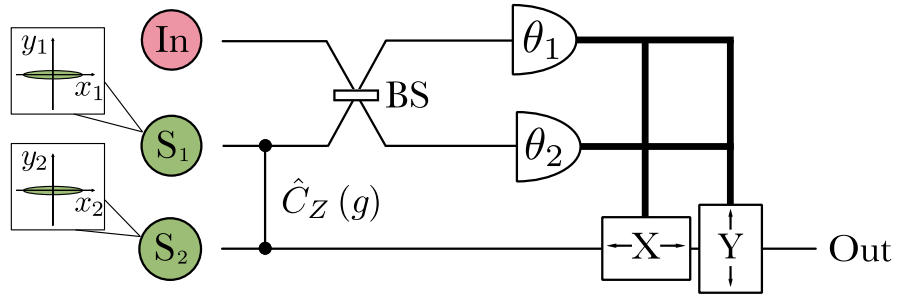


Рис. 2.3: Схема реализации телепортации с помощью преобразования CZ и светоделителя. На схеме: θ_1 и θ_2 — это фазы локальных осцилляторов, используемых при гомодинном детектировании.

нам операцию, в то время как светоделитель — вполне конкретная реализация процедуры перепутывания. В этом плане было бы более корректно сравнивать имеющиеся реализации преобразования CZ с результатами, которые нам обеспечивает светоделитель. Мы выполним такое сравнение ниже, а пока рассмотрим еще один вариант обсуждаемой схемы телепортации, в котором смещение сжатых полей осуществляется с помощью преобразования CZ, а входное состояние света примешивается с помощью светоделителя.

2.1.3 Гибридная схема телепортации

Рассмотрим смешанную конфигурацию схемы телепортации, в которой присутствуют и светоделитель и преобразование CZ. Пусть перепутывание сжатых полей осуществляется с помощью преобразования CZ с весовым коэффициентом g , а входное состояние света примешивается посредством симметричного светоделителя (см. рис. 2.3). Как и в случае со схемой телепортации с двумя преобразованиями CZ, ресурсные осцилляторы сжаты одинаково по y -квadrатуре и описываются выражениями (2.14) и (2.15). Проводя построения, аналогичные выполненным в предыдущем разделе, получим, что в этом случае перед детектированием поля преобразуются к виду:

$$\hat{a}'_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_{in} + \hat{x}_1) + \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{y}_{in} + \hat{y}_1 + g\hat{x}_2), \quad (2.26)$$

$$\hat{a}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_{in} - \hat{x}_1) + \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{y}_{in} - \hat{y}_1 - g\hat{x}_2), \quad (2.27)$$

$$\hat{a}'_2 = \hat{x}_2 + i(\hat{y}_2 + g\hat{x}_1). \quad (2.28)$$

Давайте теперь выполним гомодинные измерения в двух каналах — входном и первом. Описывая измерения, будем сохранять фазы гомодинов в виде свободных параметров:

$$\hat{i}_{in} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} (\cos \theta_1 (\hat{x}_{in} + \hat{x}_1) + \sin \theta_1 (\hat{y}_{in} + \hat{y}_1 + g\hat{x}_2)), \quad (2.29)$$

$$\hat{i}_1 = \frac{\beta}{\sqrt{2}} (\cos \theta_2 (\hat{x}_{in} - \hat{x}_1) + \sin \theta_2 (\hat{y}_{in} - \hat{y}_1 - g\hat{x}_2)). \quad (2.30)$$

Решая полученную систему относительно x -кватратур и подставляя это решение в (2.28) мы получим:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out} \\ \hat{y}_{out} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin \theta_-} \begin{pmatrix} -\frac{\cos \theta_- + \cos \theta_+}{g} & -\frac{\sin \theta_+}{g} \\ g \sin \theta_+ & g(\cos \theta_- - \cos \theta_+) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g} \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{g} & \frac{1}{g} \\ g & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{in}/\beta \\ i_1/\beta \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

где было введено обозначение $\theta_{\pm} = \theta_1 \pm \theta_2$. Здесь, как и прежде, последнее слагаемое связано с результатами измерений и может быть скомпенсировано. Для того, чтобы выполняемое преобразование стало преобразованием телепортации, нам нужно выбрать подходящие значения θ_1 и θ_2 . Если положить $\theta_2 = -\theta_1 = \pi/4$, то выражение (2.31) примет вид

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out} \\ \hat{y}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g} \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Видно, что полученный результат будет являться преобразованием телепортации только при $g = 1$. В противном случае вместо входного состояния мы получим состояние, к которому применено преобразование сжатия. Т.е. в этой схеме мы не имеем возможности варьировать весовой коэффициент для уменьшения шума. Мы видим, что полученное решение (2.32) будет иметь такую же ошибку, как и в предыдущем случае, только если в (2.24) положить весовой коэффициент g равным единице. Можно заключить, что такая смешанная схема обеспечивает меньшую ошибку, чем конфигурация с двумя светоделителями, однако она проигрывает конфигурации с двумя преобразованиями CZ.

2.2 Оценка весовых коэффициентов преобразования CZ

В прошлом разделе мы исследовали зависимость ошибки телепортации от значения весовых коэффициентов преобразования CZ, полагая что они могут принимать любые значения. Однако, на практике мы не можем реализовать сколь угодно большие g . Чтобы понять, какие ограничения накладываются на весовой коэффициент преобразования CZ, давайте рассмотрим то, как оно реализуется. Как известно преобразование CZ с весовым коэффициентом g переводит вектор входных кватратур в вектор выходных кватратур по следующему правилу:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out,1} \\ \hat{X}_{out,2} \\ \hat{Y}_{out,1} \\ \hat{Y}_{out,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g & 1 & 0 \\ g & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{x}_{in,2} \\ \hat{y}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,2} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Чтобы понять, как данное преобразование может быть реализовано экспериментально, нужно воспользоваться разложением Блоха-Мессия для матрицы CZ. Данное разложение имеет

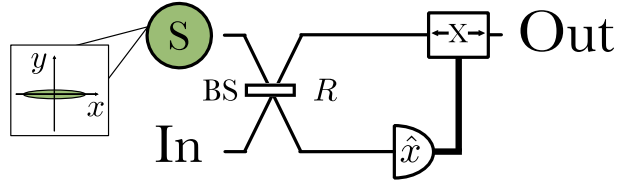


Рис. 2.4: Схема реализации ин-лайн сжатия.

следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g & 1 & 0 \\ g & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & r & 0 & 0 \\ r & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & r \\ 0 & 0 & r & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{s}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{s} \end{pmatrix} \\
 &\times \begin{pmatrix} r & t & 0 & 0 \\ t & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & t \\ 0 & 0 & t & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.34}
 \end{aligned}$$

где

$$r = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{1+s}}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{1+s}}, \quad s = \frac{1}{2} \left(2 + g^2 - g\sqrt{4+g^2} \right) \tag{2.35}$$

Здесь первая и последняя матрицы в разложении – это матрицы фазовращателей. Вторая и четвертая матрицы – матрицы светоделителей, а третья матрица – матрица сжатия. Так как мы рассматриваем случай, когда весовые коэффициенты g неотрицательны, то $s \in [0, 1]$.

Основной трудностью при практической реализации преобразования CZ является осуществление ин-лайн сжатия, то есть преобразования сжатия производимого над осциллятором внутри схемы вычислений. Для реализации такого преобразования обычно используют схему, представленную на рис. 2.4. В схеме сжатое состояние S смешивается с входным состоянием In (состоянием над которыми хотим произвести преобразования) на светоделителе BS с коэффициентом отражения R . Далее с помощью гомодинного детектора измеряется x -квadrатура состояния в нижнем канале. После этого результат измерения отправляется на устройство, смещающее квадратуры состояния в верхнем канале (прибор в схеме обозначен X) в зависимости от результата измерения в нижнем. Квадратуры выходного состояния Out можно представить в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{R}} & 0 \\ 0 & \sqrt{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1-R}\hat{y}_s \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

Из данного векторного выражения видно, что сжатой является квадратура $\sqrt{R}\hat{y}_{in}$, поскольку коэффициент отражения меняется в диапазоне $R \in [0, 1]$. Так как коэффициент сжатия s в выражении (2.35) меняется пределах $s \in [0, 1]$, то здесь и далее мы можем положить $s = R$, подразумевая, что за сжатие отвечает коэффициент отражения, представленный в схеме

на Рис. 2.4. Как мы видим, основным недостатком данной схемы реализации преобразования сжатия состоит в том, что существует ошибка, которая добавляется к преобразуемым квадратурам. Эта ошибка пропорциональна сжатой квадратуре вспомогательного осциллятора S . Чем больше сжата квадратура, тем лучше реализуется преобразование.

Давайте теперь оценим, какое сжатие должно быть у вспомогательных квантовых осцилляторов, чтобы использовать данную схему как составную часть преобразования CZ . Чтобы ошибка оставалась малой по сравнению с основным преобразованием, необходимо выполнение следующего требования:

$$(1 - R)\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle \ll R\langle\delta\hat{y}_{in}^2\rangle \quad (2.37)$$

или

$$10\lg [4\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle] \ll 10\lg \left[\frac{4R}{1 - R} \langle\delta\hat{y}_{in}^2\rangle \right]. \quad (2.38)$$

Здесь и далее в этом разделе для простоты мы будем рассматривать в качестве среднеквадратичных флуктуаций входного состояния – флуктуации когерентного состояния ($\delta\hat{y}_{in}^2 = 1/4$). Если само входное состояние уже является сжатым, то выполнить его сжатие еще труднее, и требования на операцию окажутся более жесткими. Надо понимать, что с помощью такой процедуры мы не можем реализовать большее сжатие, чем имеет ресурсный осциллятор.

Чтобы понять, какое сжатие мы можем реализовать экспериментально давайте запишем выражение в общем виде для произвольного g . Для этого учтем, что для положительных весовых коэффициентов $s = R$, и в выражение (2.38) мы подставим полученную связь между значениями коэффициента сжатия s и весового коэффициента g из (2.35). В результате окончательную зависимость величины весового коэффициента от степени сжатия вспомогательного осциллятора можно оценить следующим неравенством:

$$g < \frac{10^{-x/20}}{\sqrt{1 + 10^{x/10}}}, \quad (2.39)$$

где $x = 10 \log_{10} (4\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle)$. Для большей наглядности, неравенство (2.39) представлено на Рис. 2.5. На данный момент сжатие, которое было продемонстрировано экспериментально составляет -15 dB [11]. Учитывая тот факт, что ошибка должна быть малой по сравнению с основным преобразованием, можно говорить, что весовой коэффициент g может быть не больше 5. Именно такое значение мы можем рассматривать, как максимально возможное при текущих экспериментальных возможностях. Таким образом, согласно выражению (2.24) в схеме с двумя преобразованиями CZ мы можем уменьшить ошибку телепортации в одной из квадратур в 25 раз.

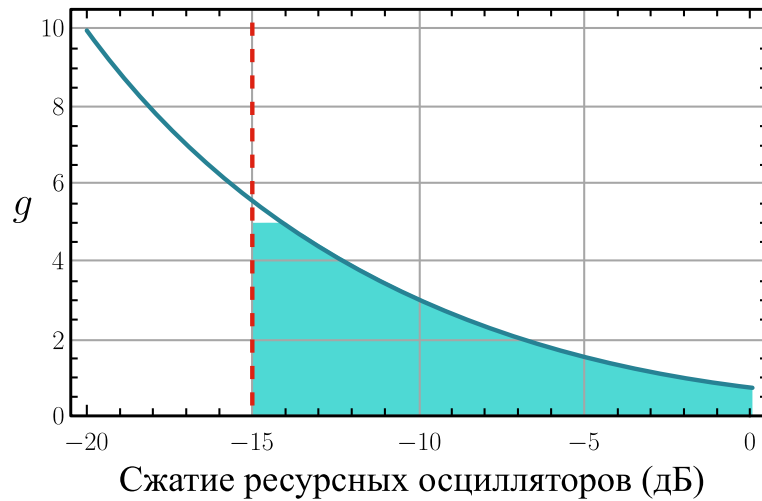


Рис. 2.5: График зависимости величины весового коэффициента преобразования CZ от дисперсии сжатого осциллятора, используемого для реализации данного преобразования. На графике синей сплошной линией обозначен график зависимости весового коэффициента от сжатия. Красной пунктирной линией обозначен предел сжатия экспериментально реализуемого на сегодняшний день.

2.3 Реальное преобразование CZ в оптических схемах телепортации

Давайте теперь перейдем от идеализированного преобразования CZ к его конкретной реализации.

До сих пор мы рассматривали идеальное преобразование CZ, которое реализуется без ошибок. Таким образом, единственная ошибка, которая влияла на результат в предыдущем разделе – это ошибка, связанная с конечной степенью сжатия ресурсных состояний. В реальности преобразование CZ само по себе вносит дополнительные ошибки. Давайте обсудим эти ошибки на примере оптической реализации преобразования CZ. Ее схема показана на рис. 2.6. Эта схема почти полностью повторяет схему, предложенную в работе [54] для экспериментальной реализации квантового преобразования SUM (аналога преобразования CNOT в непрерывных переменных). Здесь же мы немного модифицировали схему, добавив фазовращатели на входе первого канала и на выходе второго, так чтобы она реализовывала квантовое преобразование CZ.

Обсудим работу протокола оптической реализации CZ. Сначала фаза первого осциллятора, над которым осуществляется преобразование, поворачивается на $-\pi/2$, и входные состояния смешиваются на светоделителе BS₁ с коэффициентом отражения $R/(1+R)$. Затем к получившимся состояниям в каждом из каналов примешиваются вспомогательные осцилляторы S₃ и S₄ в сжатых состояниях. Такое смешение происходит на светоделителях BS₂ и BS₃ с амплитудным коэффициентом отражения R . Состояние в первом канале перепутывается со вспомогательным сжатым по x -квadrатуре осциллятором, а во втором – со сжатым

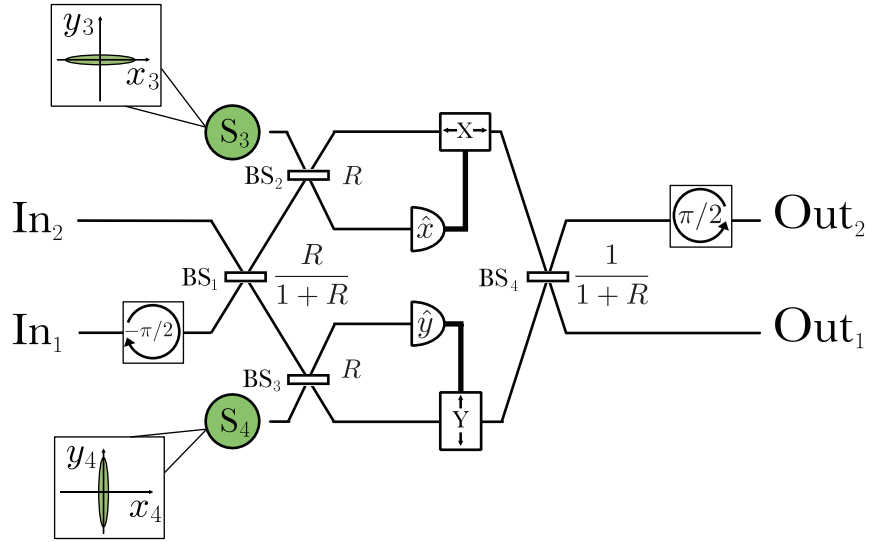


Рис. 2.6: Схема оптической реализации преобразования CZ.

по y -квadrатуре. Далее вспомогательные состояния измеряются гомодинными детекторами: в первом канале измеряется y -квadrатура, а во втором – x -квadrатура, и по результатам измерений смещаются квадратуры оставшихся осцилляторов. Для завершения операции CZ состояния, оставшиеся в каждом из каналов, смешиваются на светоделителе BS₄ с коэффициентом отражения $1/(1+R)$, и фаза второго состояния поворачивается на $\pi/2$. Как мы видим, схема задействует два вспомогательных сжатых осциллятора и четыре светоделителя, так что можно ожидать, что эти устройства будут вносить достаточно много дополнительного шума.

Представленная на рис. 2.6 схема реализует преобразование вида:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out,1} \\ \hat{x}_{out,2} \\ \hat{y}_{out,1} \\ \hat{y}_{out,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-R}{\sqrt{R}} & 1 & 0 \\ \frac{1-R}{\sqrt{R}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{x}_{in,2} \\ \hat{y}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,2} \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{1-R}{1+R}} \begin{pmatrix} -\hat{x}_4 \\ \hat{y}_3 \\ -\sqrt{R}\hat{y}_3 \\ -\sqrt{R}\hat{x}_4 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Здесь первый член соответствует идеальному преобразованию CZ с весовым коэффициентом $g = (1-R)/\sqrt{R}$. Второй член соответствует дополнительному шуму, вносимому вспомогательными сжатыми осцилляторами.

Давайте проверим какова будет ошибка телепортации при использовании в качестве перепутывающего преобразования данной реализации гейта CZ. Мы будем заранее предполагать, что оба преобразования CZ в схеме выполняются одинаковым образом, что, как мы убедились выше, является условием совпадения весовых коэффициентов и реализации процедуры телепортации.

2.3.1 Протокол телепортации с реальным преобразованием CZ

Если теперь с помощью преобразования (2.40) мы попытаемся реализовать схему с двумя преобразованиями CZ (обсуждающуюся в разделе 2.1.2) мы получим:

$$\hat{x}_{out} = -\hat{x}_{in} - \frac{\sqrt{R}}{1-R}\hat{y}_1 + \frac{R}{\sqrt{1-R^2}}\hat{x}_4 + \frac{1}{\sqrt{1-R^2}}\hat{y}_5, \quad (2.41)$$

$$\hat{y}_{out} = -\hat{y}_{in} + \hat{y}_2 + \sqrt{R}\frac{\sqrt{1-R}}{\sqrt{1+R}}(\hat{x}_6 - \hat{y}_3). \quad (2.42)$$

В полученных выражениях первые слагаемые отвечают желаемой телепортации входного состояния. Вторые члены (с индексами 1 и 2) возникают из-за конечного сжатия двух ресурсных осцилляторов в протоколе квантовой телепортации. Оставшиеся слагаемые (с индексами 3, 4, 5 и 6) являются следствием использования дополнительных сжатых осцилляторов в каждом из двух гейтов CZ. Давайте теперь рассмотрим ошибки, которые получаются в данных преобразованиях, а точнее их среднеквадратичные флуктуации. Здесь, как и прежде, мы предполагаем, что сжатые осцилляторы статистически независимы. Более того, мы предполагаем, что все осцилляторы сжаты одинаково. Учитывая все это, можно вывести следующие равенства:

$$\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \left(\frac{1 + (2-R)R^2}{(1-R)^2(1+R)} \right) \langle \delta \hat{e}_s^2 \rangle, \quad (2.43)$$

$$\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \left(\frac{1 + 3R - 2R^2}{1+R} \right) \langle \delta \hat{e}_s^2 \rangle. \quad (2.44)$$

Здесь $\langle \delta \hat{e}_s^2 \rangle$ обозначает среднеквадратичные флуктуации сжатой квадратуры ресурсных осцилляторов. Давайте отметим на графике среднеквадратичные флуктуации ошибок при заданном сжатии (см. рис. 2.7). На рисунке 2.7(а) построена зависимость среднеквадратичных флуктуаций ошибок в квадратурах телепортируемого осциллятора при оптической реализации преобразования CZ в зависимости от коэффициента отражения светоделителей R , на рисунке 2.7(б) построена та же величина в зависимости от весового коэффициента преобразования CZ. Для сравнения красной сплошной линией указан уровень шума при реализации телепортации в традиционной схеме со светоделителями. Все величины ошибок нормированы на среднеквадратичные флуктуации сжатой квадратуры ресурсных осцилляторов.

Как видно из (2.40), в данном случае коэффициент отражения светоделителя играет роль управляющего параметра (т. е. определяет величину весовых коэффициентов CZ). Однако, в отличие от выражений (2.24) и (2.25), от этого параметра будут зависеть ошибки обеих квадратур. Зависимость ошибки квадратур от весового коэффициента g качественно повторяет выражения (2.24) и (2.25). Из рисунка видно, что при увеличении параметра g (что соответствует уменьшению R) падает ошибка в x -кватратуре, а ошибка в y -кватратуре практически не меняется и не превосходит $2\langle \delta \hat{e}_s^2 \rangle$. Но в отличие от идеального случая ошибка x -кватратуры стремится к $\langle \delta \hat{e}_s^2 \rangle$, а не к нулю.

Таким образом, можно выделить область $R < 0.33$ (что соответствует $g > 2/\sqrt{3} \approx 1.15$), в которой оптическая схема с преобразованиями CZ имеет преимущество по сравнению с

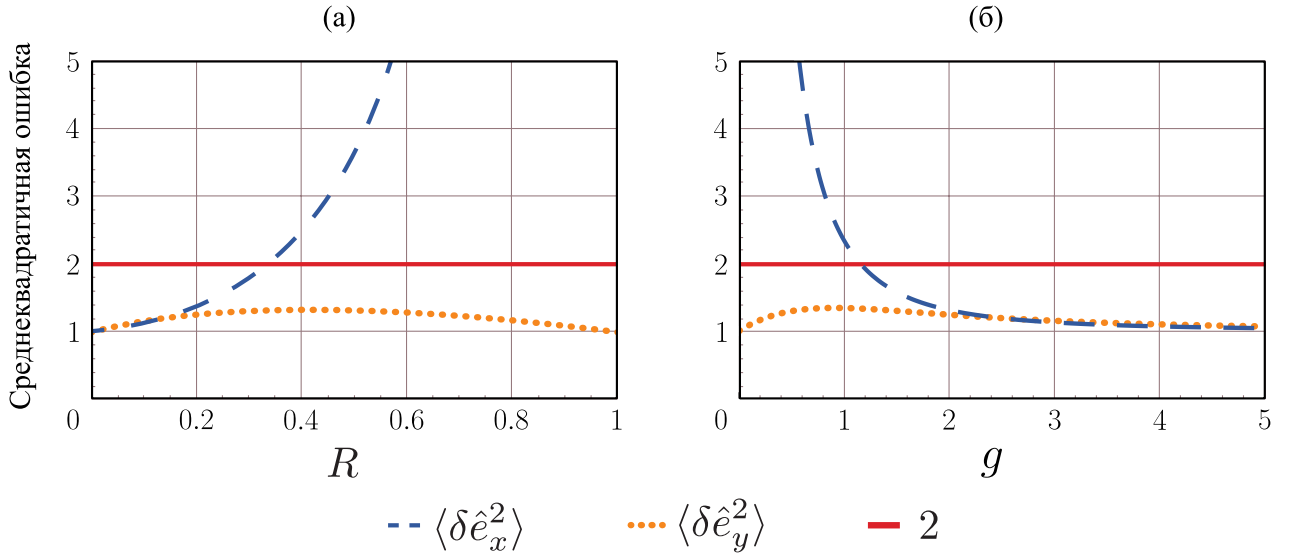


Рис. 2.7: Среднеквадратичные флуктуации ошибок в x и y -квadrатурах телепортируемого сигнала при оптической реализации преобразования CZ в зависимости от (а) коэффициента отражения светоделителей, используемых в протоколе CZ; (б) весового коэффициента преобразования CZ. Красной сплошной линией указан уровень шума при реализации телепортации в традиционной схеме со светоделителями. Величина ошибок нормирована на среднеквадратичные флуктуации сжатой квадратуры ресурсных осцилляторов.

исходным протоколом телепортации с двумя светоделителями, обеспечивая меньший уровень ошибки преобразования.

2.3.2 Гибридная схема телепортации с реальным преобразованием CZ

Теперь рассмотрим применение неидеального преобразования CZ (2.40) к смешанной схеме телепортации, обсуждавшейся в разделе 2.1.3. В этом случае мы получаем следующие выражения:

$$\hat{x}_{out} = \frac{\sqrt{R}}{1-R} \hat{x}_{in} - \frac{\sqrt{R}}{1-R} \hat{y}_1 + \frac{1}{\sqrt{1-R^2}} \hat{y}_3, \quad (2.45)$$

$$\hat{y}_{out} = \frac{1-R}{\sqrt{R}} \hat{y}_{in} + \hat{y}_2 + (1-2R) \sqrt{\frac{1-R}{R(1+R)}} \hat{x}_4. \quad (2.46)$$

Здесь вспомогательные осцилляторы с индексами 1 и 2 используются как ресурс для телепортации, а с индексами 3 и 4 – для реализации преобразования CZ. Как и прежде, только одно значение весового коэффициента $g = 1$ превращает рассматриваемую схему в схему телепортации, ему соответствует $R = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}) \approx 0.38$. Тогда мы получим

$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \hat{y}_1 + \sqrt{\frac{1}{10} (5 + 3\sqrt{5})} \hat{y}_3, \quad (2.47)$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + \hat{y}_2 + \sqrt{\frac{1}{10} (7\sqrt{5} - 15)} \hat{x}_4. \quad (2.48)$$

Среднеквадратичные флуктуации ошибок в данном случае задаются выражениями:

$$\langle \delta e_x^2 \rangle = \frac{3\sqrt{5}}{10} (1 + \sqrt{5}) \langle \delta e_s^2 \rangle \approx 2.17 \langle \delta e_s^2 \rangle, \quad (2.49)$$

$$\langle \delta e_y^2 \rangle = \frac{\sqrt{5}}{10} (7 - \sqrt{5}) \langle \delta e_s^2 \rangle \approx 1.07 \langle \delta e_s^2 \rangle. \quad (2.50)$$

Сравнивая полученный результат с выражением (2.32) с использованием идеального CZ мы видим, что ситуация значительно изменилась. Если при идеализированной реализации CZ ошибки в x и y -квadrатурах совпадали и были равны единице, то в рассматриваемой неидеальной реализации ошибка в x -квadrатуре оказывается больше двух, а в y -квadrатуре меньше. В таком случае нельзя однозначно говорить о преимуществе такой конфигурации схемы над исходной, содержащей два светоделителя. Это происходит из-за того, что в этой конфигурации существует ограничение на величину g , что не дает нам возможности в полной мере воспользоваться сжатием, содержащимся внутри преобразования CZ.

2.4 Заключение по главе 2

В этой главе мы провели сравнение двух перепутывающих преобразований: преобразования CZ и смешения сигналов на светоделителе. Мы проверили качество этих преобразований с точки зрения добавления ошибки на примере протокола телепортации. Мы показали, что использование преобразования CZ вносит меньше шумов, обеспечивая тем самым более высокое качество работы протокола. Данный вывод справедлив не только для идеального преобразования CZ, но и для оптической реализации гейта CZ в некотором диапазоне значений коэффициента отражения R . Мы показали, что выбор весовых коэффициентов преобразования CZ является дополнительным фактором управления шумами и в идеальном случае позволяет добиться нулевой ошибки в одной из квадратур.

Использование смешанной схемы телепортации, где ресурсное состояние получается с использованием преобразования CZ, а входное состояние примешивается посредством светоделителя, лишает нас возможности варьировать весовые коэффициенты, поскольку только одно значение заставляет работать протокол как телепортирующий. Теория предсказывает, что идеальная (не вносящая собственных шумов) схема CZ будет давать выигрыш в шумах по сравнению с традиционной схемой, однако рассмотренная оптическая реализация гейта не может рассматриваться как предпочтительная.

Таким образом, схемы телепортации, использующие преобразование CZ, позволяют обеспечить более высокую точность телепортации благодаря уменьшению уровня ошибок. Это связано с тем, что перепутывание с помощью симметричного светоделителя обеспечивает фиксированное отношение полезного сигнала к шуму, в то время как варьирование весовых коэффициентов в CZ, позволяет сделать это соотношение больше, чем для обычных светоделителей. Даже при рассмотрении неидеального преобразования CZ существуют значения параметров при которых количество шумов, привносимое вспомогательными сжатыми состо-

яниями, меньше, чем выигрыш полученный с помощью весовых коэффициентов. Поэтому создание более совершенных реализаций преобразования CZ может значительно повысить точность этих схем.

Рассмотренная нами оптическая реализация CZ не единственная. Первоначально, подход к реализации гейта CZ (и других подобных гейтов) был основан на эффекте квантового неразрушающего взаимодействия в нелинейных оптических средах [108]. Однако в оптическом диапазоне этот эффект достаточно слабый и эффективной реализации гейта CZ на таких физических системах создать не удалось. Наибольшее распространение получили реализации CZ, аналогичные рассмотренной нами, для которых требуются только элементы линейной оптики и вспомогательные сжатые осцилляторы [109–111]. Другой интересной реализацией преобразования CZ является схема, основанная на взаимодействии световых лучей внутри атомного ансамбля [112]. В такой схеме весовой коэффициент преобразования CZ определяется длительностью импульса и, как следствие, хорошо поддается варьированию. Оптимальное значение весовых коэффициентов в каждой конкретной схеме можно рассматривать как баланс между подавлением шума ресурсных состояний за счет дополнительного сжатия, содержащегося внутри преобразования CZ, и одновременным добавлением шума от физической реализации самого преобразования.

Отдельно стоит поговорить о сложности экспериментальной реализации, описанной нами схемы. Для реализации всего одного преобразования CZ нам потребуются два дополнительных источника света, пара гомодинных детекторов и четыре асимметричных светоделителя, с разными, но точно подобранными коэффициентами отражения. В своих оценках мы обсуждали только неустраняемые шумы, связанные с конечной степенью сжатия осцилляторов, используемых как в качестве ресурса, так и для создания гейта CZ. Однако, любое отклонение данной схемы от точного баланса может лишить нас обсуждаемого преимущества. Для других существующих реализаций операции CZ [109–112] ситуация обстоит не многим лучше. В то же время в традиционной схеме телепортации для осуществления перепутывания потребуется всего лишь пара симметричных светоделителей, которые найдутся практически в любой лаборатории.

Следует отметить, что вопрос увеличения точности телепортации может быть решен использованием негауссовых состояний в качестве ресурса. Мы обсудим в деталях этот подход в главах 2.4 и 3.3. Здесь же мы предлагаем способ, позволяющий увеличить точность телепортации оставаясь в рамках гауссовых операций, которые сравнительно проще в реализации.

Обобщая всё вышесказанное, во второй главе были раскрыты и обоснованы следующие положения, выносимые на защиту:

- Использование преобразования CZ в качестве перепутывающей операции позволяет уменьшить ошибку телепортации не только для идеального преобразования CZ, но и для его оптической реализации.

- Хотя формальное применение взвешенной операции CZ позволяет неограниченно уменьшать ошибку одной из квадратур телепортируемого состояния, анализ реальных конфигураций показывает, что сама процедура CZ является шумящей, так что итоговое уменьшение ошибки, которое можно ожидать от ее использования – в два раза.

Глава 3. Уменьшение ошибки телепортации с использованием кубического фазового затвора

В прошлой главе мы обсудили возможности уменьшения ошибок телепортации путем использования гауссовых операций, а именно заменой светоделителей в классической схеме телепортации на преобразование CZ. Однако, этот подход имеет свои ограничения: за счет весового коэффициента CZ мы можем подавлять ошибку только в одной из квадратур, в то время как ошибка в другой квадратуре остается неизменной. Именно на подавление ошибки телепортации в этой незатронутой квадратуре мы и направим свои усилия.

Один из вариантов повышения точности телепортации – это использование перепутанных негауссовых состояний в качестве ресурса для телепортации. В работах [13, 14] было показано, что в качестве такого ресурса может быть использован двухмодовый сжатый вакуум, к которому применяется процедура условного вычитания фотонов (см. раздел 1.3.2). Однако, эта процедура носит вероятностный характер, и ее использование в схемах приводит к потере главного преимущества работы в непрерывных переменных – детерминированности протоколов. Мы задались вопросом: какие еще негауссовы операции можно использовать для увеличения точности телепортации? Сможем ли мы получить какие-нибудь новые преимущества при их использовании? Возможно ли увеличить точность телепортации, оставаясь в рамках детерминированных процессов? В качестве исследуемого преобразования нами было выбрано преобразование кубической фазы (см. раздел 1.3.3).

В этой главе мы модифицируем протокол телепортации с двумя преобразованиями CZ, рассмотренный в разделе 2.1.2, путем добавления кубического фазового затвора, который служит для подготовки негауссовского ресурсного состояния. Сначала мы опишем процедуру телепортации на языке Гейзенберга и оценим качество работы протокола с точки зрения добавления ошибки при телепортации. Затем в следующем разделе мы еще раз опишем работу предлагаемой нами схемы, но уже на языке волновых функций без каких-либо приближений. Это позволит нам оценить верность телепортации для конкретных квантовых состояний и определить границы применимости предлагаемого подхода и его практическую реализуемость. Результаты, рассматриваемые в этой главе, впервые были получены мной в работе [113].

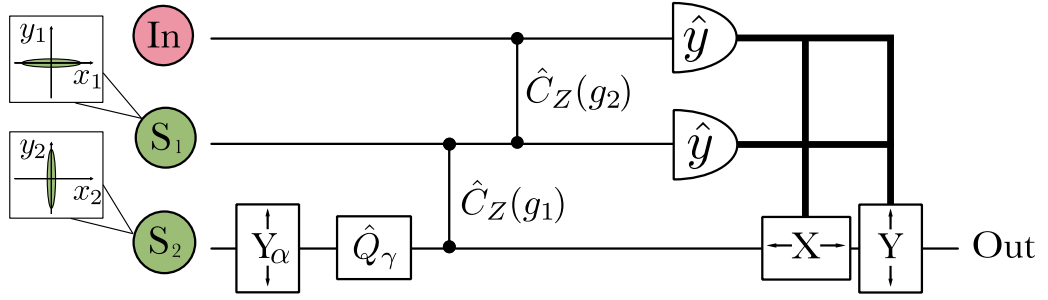


Рис. 3.1: Схема телепортации с использованием кубического фазового затвора. На схеме: In – входное (телепортируемое) состояние; S_1 и S_2 – осцилляторы, сжатые в ортогональных квадратурах; Y_α – обозначает смещение y -квадратуры на фиксированную величину α ; \hat{Q}_γ – кубический фазовый затвор с коэффициентом нелинейности γ ; $\hat{C}_Z(g_i)$ – преобразования CZ с весовыми коэффициентами g_i ; \hat{y} – гомодинные детекторы, измеряющие y -квадратуру поля в канале; X и Y обозначают устройства, смещающие соответствующие квадратуры полей в канале в зависимости от результатов детектирования.

3.1 Протокол телепортации с кубическим фазовым затвором в представлении Гейзенберга

Начнем с описания предлагаемой схемы телепортации, показанной на Рис. 3.1, в картине Гейзенберга. Два осциллятора на входе схемы, обозначенные на рисунке как S_1 и S_2 , сжаты в ортогональных направлениях и описываются квадратурными компонентами

$$\hat{x}_1 = e^r \hat{x}_{0,1}, \quad \hat{y}_1 = e^{-r} \hat{y}_{0,1}, \quad (3.1)$$

$$\hat{x}_2 = e^{-r} \hat{x}_{0,2}, \quad \hat{y}_2 = e^r \hat{y}_{0,2}, \quad (3.2)$$

где $\hat{x}_{0,j}$ и $\hat{y}_{0,j}$ – квадратуры осциллятора j в вакуумном состоянии. Мы проводим ряд манипуляций над вторым осциллятором. Сначала необходимо сместить его y -квадратуру. Оператор сдвига, смещающий y -квадратуру j -го осциллятора на действительную величину α , имеет вид

$$\hat{Y}_{\alpha,j} = e^{2i\alpha\hat{y}_j}. \quad (3.3)$$

Действие данного оператора на квадратуры осциллятора S_2 приводит к тому, что амплитуда поля преобразуются следующим образом (см. приложение A.2):

$$\hat{a}'_2 = \hat{x}_2 + i(\alpha + \hat{y}_2). \quad (3.4)$$

На следующем шаге мы действуем на этот осциллятор оператором кубического фазового затвора, который имеет вид

$$\hat{Q}_{\gamma,j} = e^{-2i\gamma\hat{y}_j^3}, \quad (3.5)$$

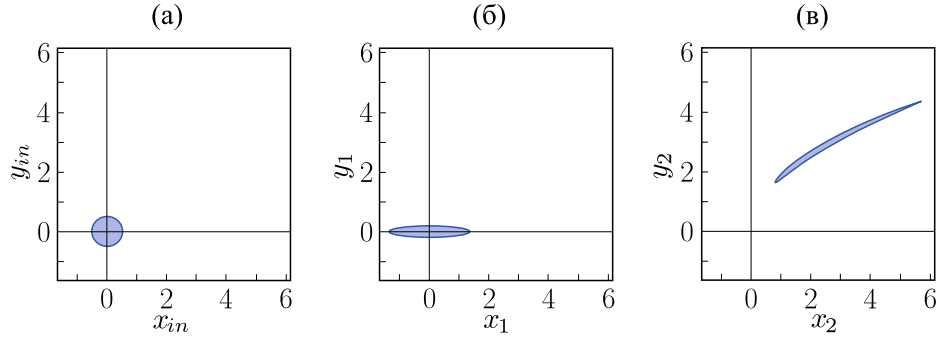


Рис. 3.2: Схематическое изображение областей неопределенности а) входного состояния; б) ресурсного состояния в первом канале; в) ресурсного состояния во втором канале после кубического фазового затвора.

где γ – действительный коэффициент, характеризующий степень нелинейности преобразования; а j – индекс осциллятора, на который действует кубический фазовый затвор. Действие этого оператора на квадратуры осциллятора показано в приложении А.3. После применения кубического фазового затвора осциллятор во втором канале перейдет в негауссово состояние, амплитуда которого описывается выражением

$$\hat{a}_2'' = \hat{x}_2 + 3\gamma(\alpha + \hat{y}_2)^2 + i(\alpha + \hat{y}_2). \quad (3.6)$$

Следует отметить, что при смещении на положительную величину α , удовлетворяющую условию $\alpha^2 \gg \langle \hat{y}_2^2 \rangle$, значения квадратур второго осциллятора будут лежать в первом квадранте фазовой плоскости. Схематичное изображение областей неопределенности каждого из трех осцилляторов в данном срезе схемы изображено на рис. 3.2. Отметим, что здесь и далее в качестве наглядного примера работы схемы мы выбрали входное (телепортируемое) состояние вакуумным. Эти области не являются результатом точного расчета и приведены в качестве наглядной иллюстрации. При их построении за основу берется область неопределенности вакуумного состояния. Затем, в зависимости от преобразований, проводимых над осцилляторами, эти области соответствующим образом искажаются.

После этого состояния в первом и втором каналах перепутываются с помощью преобразования CZ, действие которого описывается оператором (2.13). Весовой коэффициент первого преобразования CZ обозначим g_1 , тогда амплитуды осцилляторов после его применения примут вид (см. приложение А.1):

$$\hat{a}'_1 = \hat{x}_1 + i(\hat{y}_1 + g_1(\hat{x}_2 + 3\gamma(\alpha + \hat{y}_2)^2)), \quad (3.7)$$

$$\hat{a}'''_2 = \hat{x}_2 + 3\gamma(\alpha + \hat{y}_2)^2 + i(\alpha + \hat{y}_2 + g_1\hat{x}_1). \quad (3.8)$$

После этого преобразования область неопределенности осциллятора во втором канале растягивается по y -квadrатуре, но остается в первой четверти фазовой плоскости (см. рис. 3.3(б)). В то же время, область неопределенности осциллятора в первом канале сильно растянется по y -квadrатуре и сместится в верхнюю полуплоскость (см. рис. 3.3(а)).

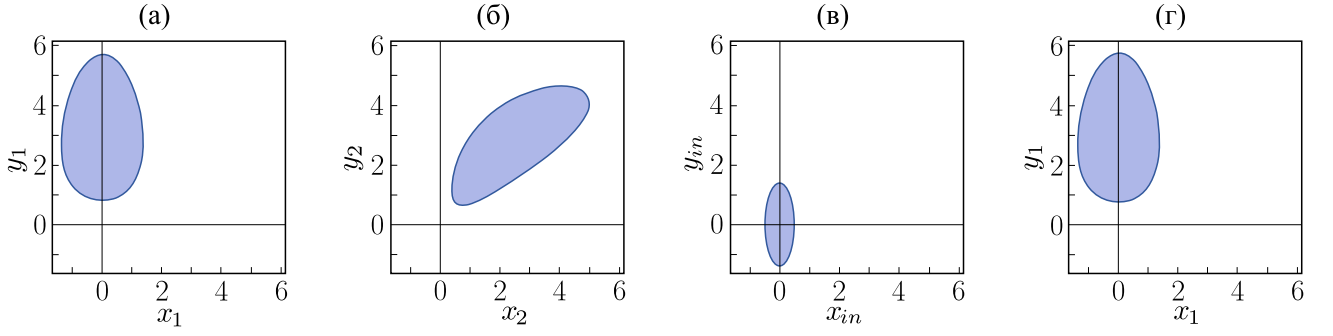


Рис. 3.3: Схематичные области неопределенности осцилляторов а) в первом канале после первого преобразования CZ; б) во втором канале после первого преобразования CZ; в) во входном канале после второго преобразования CZ; г) в первом канале после второго преобразования CZ.

Далее с помощью второго преобразования CZ с весовым коэффициентом g_2 перепутаем осциллятор в первом канале с входным состоянием, которое мы хотим телепортировать. В результате мы получим:

$$\hat{a}'_{in} = \hat{x}_{in} + i(\hat{y}_{in} + g_2\hat{x}_1), \quad (3.9)$$

$$\hat{a}''_1 = \hat{x}_1 + i(\hat{y}_1 + g_1(\hat{x}_2 + 3\gamma(\alpha + \hat{y}_2)^2) + g_2\hat{x}_{in}). \quad (3.10)$$

Как показано на рис. 3.3(в) и рис. 3.3(г), после второго преобразования CZ область неопределенности входного состояния будет растянута по y -квadrатуре, а область неопределенности состояния во втором канале практически не изменится. После измерим растянутые y -квadrатуры входного и первого осцилляторов. Соответствующие операторы фототоков будут равны

$$\hat{i}_{y,in} = \beta(\hat{y}_{in} + g_2\hat{x}_1), \quad (3.11)$$

$$\hat{i}_{y,1} = \beta(\hat{y}_1 + g_1(\hat{x}_2 + 3\gamma(\alpha + \hat{y}_2)^2) + g_2\hat{x}_{in}), \quad (3.12)$$

где β – амплитуда гомодина. В результате единичного измерения мы получаем некоторые значения фототоков $i_{y,in}$ и $i_{y,1}$, а измеренные значения квадратур при этом будут $Y_{in} = i_{y,in}/\beta$ и $Y_1 = i_{y,1}/\beta$, соответственно.

Такое измерение, в силу запутанности ресурсного состояния, приведет к изменению значений квадратурных компонент поля во втором канале:

$$\hat{x}_2''' = -\frac{g_2}{g_1}\hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g_1} + \frac{Y_1}{g_1}, \quad (3.13)$$

$$\hat{y}_2''' = -\frac{g_1}{g_2}\hat{y}_{in} + \frac{g_1 Y_{in}}{g_2} + \frac{1}{\sqrt{3\gamma}}\sqrt{\frac{Y_1}{g_1} - \frac{g_2}{g_1}\hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g_1} - \hat{x}_2}. \quad (3.14)$$

Здесь операторы измеряемых квадратур заменены на s -числа, соответствующие результатам конкретных измерений. Из-за того, что величина α достаточно велика, в выражении (3.14)

пропадает неоднозначность. Нам необходимо учитывать только положительные значения корня. В противном случае возникала бы ситуация, аналогичная описанной в работе [86]. Кроме того, опять же выбором величины α можно обеспечить выполнение условия

$$Y_1^2 \gg g_2^2 \langle \hat{x}_{in}^2 \rangle + \langle \hat{y}_1^2 \rangle + g_1^2 \langle \hat{x}_2^2 \rangle. \quad (3.15)$$

Если по каким-то причинам нам затруднительно увеличивать α так, чтобы указанное требование выполнялось, то мы можем здесь воспользоваться процедурой постселекции результатов измерений, отбрасывая Y_1 не удовлетворяющие требуемому условию. Тогда мы можем разложить корень в выражении (3.14) в ряд, сохранив только слагаемые первого порядка малости по $(g_2 \hat{x}_{in} + \hat{y}_1 + g_1 \hat{x}_2)/Y_1$:

$$\hat{y}_2''' = -\frac{g_1}{g_2} \hat{y}_{in} + \frac{g_1 Y_{in}}{g_2} + \frac{1}{\sqrt{3\gamma}} \left(\sqrt{\frac{Y_1}{g_1}} - \frac{g_2 \hat{x}_{in}}{2\sqrt{g_1 Y_1}} - \frac{\hat{y}_1}{2\sqrt{g_1 Y_1}} - \frac{\sqrt{g_1} \hat{x}_2}{2\sqrt{Y_1}} \right). \quad (3.16)$$

Обрывание ряда корректно в предположении малости всех моментов параметра разложения. Для гауссовых входных состояний достаточно выполнения неравенства (3.15). Отметим, что это требование ограничивает применимость протокола.

Для того, чтобы преобразование, описываемое выражениями (3.13) и (3.16) было преобразованием телепортации необходимо положить $g_1 = -g_2 \equiv g$. Чтобы завершить телепортацию необходимо сместить x -квadrатуру второго осциллятора на величину $-Y_1/g$, а y -квadrатуру – на величину $Y_{in} - \sqrt{Y_1/(3\gamma g)}$. Операторы определены аналогично (3.3). Тогда состояния на выходе схемы будут иметь вид

$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g}, \quad (3.17)$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + \frac{1}{2\sqrt{3\gamma Y_1}} \left(\sqrt{g} \hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{\sqrt{g}} - \sqrt{g} \hat{x}_2 \right). \quad (3.18)$$

В полученных выражениях первые слагаемые отвечают искомому эффекту телепортации. Остальные слагаемые – это шум, добавляемый к телепортируемому состоянию в ходе выполнения преобразования. Оценим величину этого шума и сравним результат с оригинальной схемой телепортации (см. раздел 2.1.1). Уровень ошибок удобно характеризовать величиной среднеквадратичных флуктуаций ошибки в каждой квадратуре $\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \langle (\hat{x}_{out} - \hat{x}_{in})^2 \rangle$, $\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \langle (\hat{y}_{out} - \hat{y}_{in})^2 \rangle$. Мы будем полагать, что осцилляторы статистически независимы. Тогда среднеквадратичные флуктуации ошибки будут задаваться выражениями

$$\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \frac{1}{g^2} \langle \hat{y}_1^2 \rangle, \quad (3.19)$$

$$\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \frac{1}{12\gamma Y_1} \left(g \langle \hat{x}_{in}^2 \rangle + \frac{1}{g} \langle \hat{y}_1^2 \rangle + g \langle \hat{x}_2^2 \rangle \right). \quad (3.20)$$

Для оценки величины ошибки мы заменим в формуле (3.20) измеренное значение квадратуры Y_1 на ее среднее значение, которое согласно выражению (3.12) будет $\langle \hat{y}_1 \rangle = \langle \hat{i}_{y,1}/\beta \rangle \approx 3g\gamma\alpha^2$. Основную ошибку в y -квadrатуру вносит слагаемое с \hat{x}_{in} , так как шумы в квадратурах \hat{y}_1 и \hat{x}_2

ресурсных осцилляторов подавлены. Таким образом ошибку в y -кватратуре можно оценить как

$$\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle \approx \frac{1}{36\gamma^2\alpha^2} \langle \hat{x}_{in}^2 \rangle. \quad (3.21)$$

Из выражения (3.19) мы видим, что подавление ошибки в x -кватратуре телепортируемого состояния пропорционально весовому коэффициенту преобразований CZ. Как было сказано выше, этот коэффициент теоретически может принимать сколь угодно большие значения. Возможности реального манипулирования весовым коэффициентом в схеме телепортации подробно исследованы в предыдущей главе. Выражение (3.21) показывает, что ошибка в y -кватратуре может быть подавлена путем увеличения сдвига α .

Стоит отметить три важных факта:

1. У нас возникает ограничение на возможность подавления шумов за счет негауссовости. Оно связано с физическим ограничением на предельную величину, на которую мы можем производить операцию сдвига. Однако, если в качестве телепортируемого состояния выступают вакуумные состояния или состояния с подавленными шумами (что является типичной ситуацией для приложений), это ограничение не будет играть существенной роли.
2. Мы можем независимо друг от друга уменьшать ошибку в одной из кватратур за счет весовых коэффициентов преобразования CZ, а в другой – благодаря негауссовому ресурсу. Также, за счет селекции по результатам измерений можно установить нижнюю границу точности телепортации, если это необходимо.
3. Особенностью нашего протокола является то, что для его работы возможно использование кубического фазового затвора с невысокой степенью нелинейности. Как видно из формулы (3.21) мы можем компенсировать малую величину γ за счет большой величины сдвига α . Это важное преимущество ввиду того, что увеличение γ является сложной экспериментальной задачей.

На рис. 3.4 показана зависимость оценки среднеквадратичной флуктуации ошибки y -кватратуры от величины сдвига α . Для расчетов было взято значение коэффициента нелинейности кубического фазового затвора $\gamma = 0.1$ [85]. Красным обозначены среднеквадратичные флуктуации ошибки для оригинальной схемы телепортации $\langle \delta \hat{e}_{or}^2 \rangle = 2e^{-2r} \langle \delta \hat{e}_{vac}^2 \rangle$ (см. раздел 2.1.1) при максимально возможном экспериментально достижимом на данный момент сжатии в -15 дБ [11]. Как мы видим из графика, при значениях $\alpha > 7$ предложенная нами схема будет выигрывать по сравнению с оригинальной схемой телепортации. Обратим внимание на то, что для малых α наши приближения будут неверны, поэтому зависимость показана пунктиром. В этой области значений сдвиги слишком малы и значения кватратур второго осциллятора не будут полностью лежать в первом квадранте фазовой плоскости. Это влечет за собой неоднозначность в формуле (3.14) и возникновение состояния наподобие

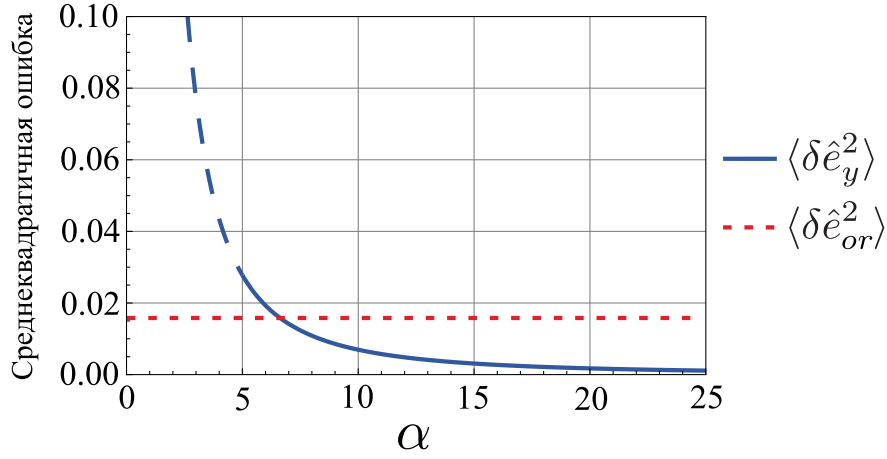


Рис. 3.4: Среднеквадратичная ошибка y -кватруры телепортированного состояния в зависимости от величины сдвига негауссова ресурса α . Красной пунктирной линией отмечен уровень ошибки телепортации в традиционной схеме. Степень сжатия ресурсных осцилляторов равна -15 дБ.

состояния кота шредингера [86], что в нашем случае приводит к быстрому росту среднеквадратичных флуктуаций ошибки.

Посмотрим, какая потребуется энергия, чтобы осуществить сдвиг на величину $\alpha = 20$. Для численной оценки возьмем длину волны лазера $\lambda = 430$ нм и коэффициент пропускания по интенсивности асимметричного светоделителя $\tau = 0.01$ (параметры взяты из статьи [114]). Амплитуда поля лазера, необходимая для осуществления такого сдвига

$$E = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \frac{\alpha}{\sqrt{\tau}}, \quad (3.22)$$

где ω – частота лазера, а V – объем, занимаемый импульсом лазера. Плотность энергии электромагнитной волны $w = \varepsilon_0 |E|^2$, тогда энергия лазерного импульса должна быть равна

$$W = \int_V \varepsilon_0 |E|^2 dv = \frac{hc\alpha^2}{2\lambda\tau} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 20^2}{2 \cdot 430 \cdot 10^{-9} \cdot 0.01} \approx 10^{-14} \text{ Дж}. \quad (3.23)$$

Необходимая мощность лазера оказывается относительно небольшой, поэтому описываемая нами процедура осуществима. Отметим, что существующее представление об экспериментальной сложности осуществления процедуры сдвига относится к другому диапазону значений α , отвечающему существенно большим величинам сдвигов. Для сравнения, при генерации кубического фазового состояния методом, описанным в статьях [15, 84, 88], требуются сдвиги порядка $\alpha = 10^{12}$. При аналогичных условиях это потребовало бы энергии импульсов порядка 10^7 Дж что, конечно, далеко от условий современного квантово-оптического эксперимента.

3.2 Протокол телепортации с кубическим фазовым затвором в представлении Шрёдингера

Картина Гейзенберга, использованная нами в предыдущем разделе, наглядна и позволяет достаточно просто оценить качество телепортации. Однако, она имеет ряд недостатков. Во первых, она не позволяет напрямую оценить качество телепортации конкретных квантовых состояний (получить выражения в терминах верности). Кроме того, нам пришлось прибегнуть к приближениям, ограничивающим применимость полученного нами результата. Также стоит упомянуть, что подход Гейзенберга может давать неверный результат при описании преобразований над негауссовыми ресурсами [86]. Имея ввиду все вышесказанное, мы повторим изложенную выше процедуру (см. рис. 3.1), воспользовавшись для ее описания картиной Шрёдингера, не прибегая к каким-либо приближениям.

Нам будет удобно разложить векторы состояний осцилляторов по набору собственных состояний оператора x -квадратуры – $\{|x_j\rangle\}$. Здесь и далее, индекс внутри вектора состояния будет обозначать подсистему, к которой он относится. В таком случае векторы состояний некоторого входного состояния $|\psi_{in}\rangle$ и сжатых ресурсных осцилляторов $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ могут быть представлены как

$$|\psi_{in}\rangle = \int dx_{in} \psi_{in}(x_{in})|x_{in}\rangle, \quad (3.24)$$

$$|\psi_1\rangle = \int dx_1 \psi_s(x_1; -r)|x_1\rangle, \quad (3.25)$$

$$|\psi_2\rangle = \int dx_2 \psi_s(x_2; r)|x_2\rangle. \quad (3.26)$$

Здесь для удобства мы ввели обозначение для волновой функции сжатого состояния с коэффициентом сжатия r :

$$\psi_s(x; r) = \sqrt[4]{\frac{2e^{2r}}{\pi}} \exp(-e^{2r} x^2). \quad (3.27)$$

При этом собственные состояния x и y -квадратур будут связаны друг с другом как

$$|x_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dy e^{-2ix_j y_j} |y_j\rangle, \quad |y_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx e^{2ix_j y_j} |x_j\rangle. \quad (3.28)$$

Повторим операции, которые мы совершали над состояниями в прошлом разделе. Сперва, аналогично выражению (3.4), мы смещаем y -квадратуру второго осциллятора на действительную величину α

$$|\psi'_2\rangle = e^{2i\alpha\hat{x}_2} |\psi_2\rangle = \int dx_2 e^{2i\alpha x_2} \psi_s(x_2; r) |x_2\rangle. \quad (3.29)$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что $|x_2\rangle$ являются собственными состояниями оператора сдвига $e^{2i\alpha\hat{x}_2}$. Поэтому в выражении (3.29) под знаком интеграла мы можем заменить оператор \hat{x}_2 на соответствующее собственное число x_2 . В дальнейшем мы будем пользоваться

аналогичными рассуждениями, заменяя операторы на числа. Если в (3.29) перейти к разложению по собственным состояниям оператора y -кватратуры, то действие оператора сдвига будет соответствовать смещению волновой функции осциллятора на величину α :

$$|\psi'_2\rangle = \int dy_2 \psi_s(y_2 - \alpha; -r) |y_2\rangle. \quad (3.30)$$

После этого мы применяем к этому осциллятору операцию кубического фазового затвора, действие которого описывается выражением (3.5). Тогда мы получим, что

$$|\psi''_2\rangle = e^{-2i\gamma\hat{y}_2^3} |\psi'_2\rangle = \int dy_2 e^{-2i\gamma y_2^3} \psi_s(y_2 - \alpha; -r) |y_2\rangle. \quad (3.31)$$

Перейдем обратно к разложению по собственным состояниям оператора x -кватратуры. Мы можем представить волновой вектор осциллятора во втором канале как

$$|\psi''_2\rangle = \int dx_2 \psi''_2(x_2; r) |x_2\rangle, \quad (3.32)$$

где его волновая функция задается выражением

$$\psi''_2(x; r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dy e^{2iy(x-\gamma y^2)} \psi_s(y - \alpha; -r). \quad (3.33)$$

Затем мы последовательно применяем два преобразования CZ (2.13) с весовыми коэффициентами g_1 и g_2 . Первое преобразование CZ перепутывает ресурсные осцилляторы (см. (3.7) и (3.8)), а второе перепутывает входное состояние с состоянием в первом канале (см. (3.9) и (3.10)). Кроме того, из раздела 3.1 мы знаем, что описываемое нами преобразование будет являться телепортацией только при условии $g_1 = -g_2 \equiv g$. Тогда после первого преобразования CZ получим, что

$$|\psi'_1, \psi'''_2\rangle = e^{2ig\hat{x}_1\hat{x}_2} |\psi_1\rangle \otimes |\psi''_2\rangle = \iint dx_1 dx_2 e^{2igx_1x_2} \psi_s(x_1; -r) \psi''_2(x_2; r) |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle, \quad (3.34)$$

а вектор состояния системы после второго преобразования CZ будет иметь вид

$$\begin{aligned} |\psi'_{in}, \psi''_1, \psi'''_2\rangle &= e^{-2ig\hat{x}_{in}\hat{x}_1} |\psi_{in}\rangle \otimes |\psi'_1, \psi'''_2\rangle = \\ &= \iiint dx_{in} dx_1 dx_2 e^{2igx_1(x_2-x_{in})} \psi_{in}(x_{in}) \psi_s(x_1; -r) \psi''_2(x_2; r) |x_{in}\rangle \otimes |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Далее мы измеряем y -кватратуры входного и первого осцилляторов, измеренные значения кватратур при этом равны Y_{in} и Y_1 , соответственно. Гомодинное измерение представляет собой операцию проецирования на собственные состояния y -кватратур, отвечающие измеренным значениям фототоков, то есть на состояние

$$|Y_{in}\rangle \otimes |Y_1\rangle = \frac{1}{\pi} \iint dx'_{in} dx'_1 e^{2i(x'_{in}Y_{in}+x'_1Y_1)} |x'_{in}\rangle \otimes |x'_1\rangle. \quad (3.36)$$

После измерения ненормированный вектор состояния второго осциллятора имеет вид

$$\begin{aligned} |\psi''_2\rangle &= \langle Y_{in} | \otimes \langle Y_1 | \psi'_{in}, \psi''_1, \psi'''_2\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iint dx_{in} dx_2 e^{-2ix_{in}Y_{in}} \psi_{in}(x_{in}) \psi_s(g(x_2 - x_{in}) - Y_1; r) \psi''_2(x_2; r) |x_2\rangle. \end{aligned} \quad (3.37)$$

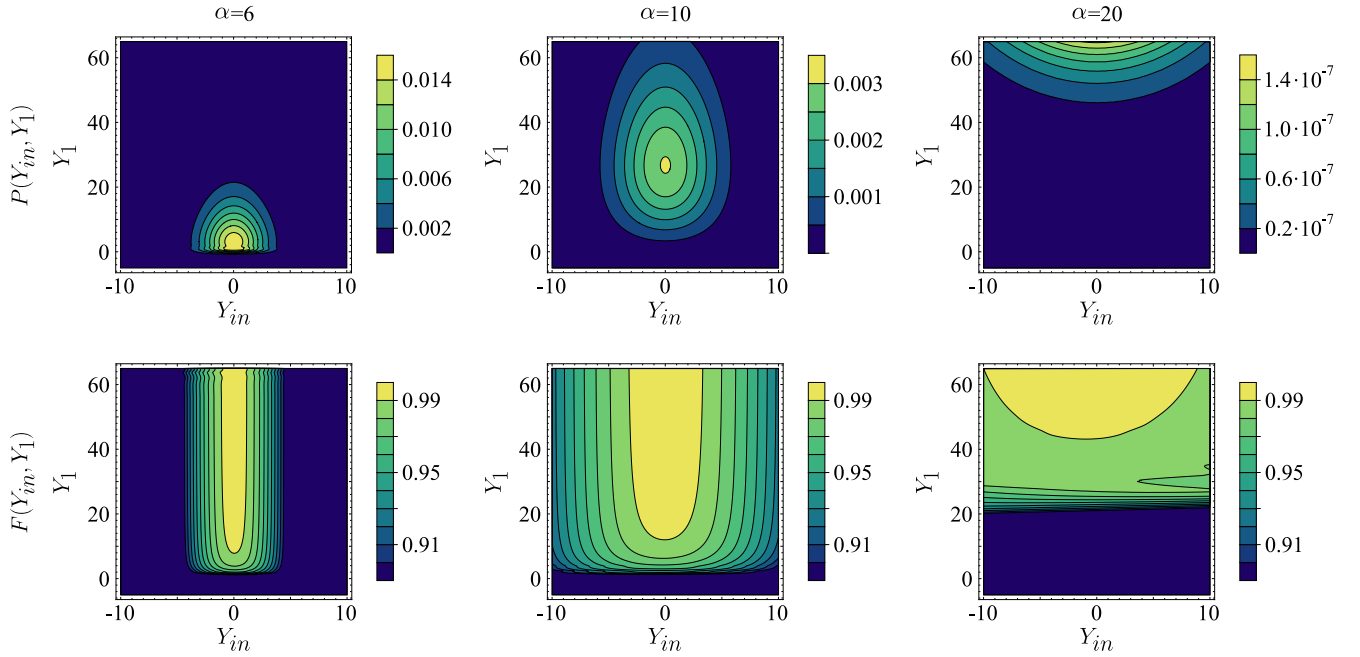


Рис. 3.5: Плотность вероятности измерения значений Y_{in} и Y_1 и значение верности в зависимости от Y_{in} и Y_1 при телепортации вакуумного состояния для сдвигов ресурсного негауссового состояния $\alpha = 6, 10, 20$.

Полученный вектор состояния необходимо нормировать на корень из плотности вероятности того, что при измерении квадратур \hat{y}_{in} и \hat{y}_1 будут получены значения Y_{in} и Y_1 :

$$P(Y_{in}, Y_1) = \langle \psi_2'' | \psi_2''' \rangle. \quad (3.38)$$

Как мы знаем из предыдущего раздела, для завершения процедуры телепортации необходимо сдвинуть x -квadrатуру второго осциллятора на величину $-Y_1/g$, а y -квadrатуру – на величину $Y_{in} - \sqrt{Y_1/(3\gamma g)}$. Таким образом вектор состояния телепортированного осциллятора будет иметь вид:

$$\begin{aligned} |\psi_{out}\rangle = & e^{-2i\frac{Y_1}{g}\hat{y}_2} e^{2i\left(Y_{in} - \sqrt{\frac{Y_1}{3\gamma g}}\right)\hat{x}_2} |\psi_2'''\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi P(Y_{in}, Y_1)}} \iint dx_{in} dx_2 e^{-2ix_{in}Y_{in}} e^{2i\left(Y_{in} - \sqrt{\frac{Y_1}{3\gamma g}}\right)x_2} \\ & \times \psi_{in}(x_{in}) \psi_s(g(x_2 - x_{in}); r) \psi_2''\left(x_2 + \frac{Y_1}{g}; r\right) |x_2\rangle. \end{aligned} \quad (3.39)$$

При этом подходе к анализу протокола у нас есть возможность оценить верность телепортации. Она определяется как

$$F = |\langle \psi_{out} | \psi_{in} \rangle|^2. \quad (3.40)$$

При расчетах, как и в предыдущем разделе, в качестве телепортируемого состояния мы, для начала, взяли вакуумное, а сжатие ресурсных осцилляторов мы положили равным -15 дБ. При телепортации нас будет интересовать случай, когда ошибки в обеих квадратурах примерно одинаковы. Согласно выражениям (3.19) и (3.21), это достигается при весовом коэффициенте преобразования CZ $g = 6\gamma\alpha e^{-r}$. Мы рассчитали плотность вероятности $P(Y_{in}, Y_1)$

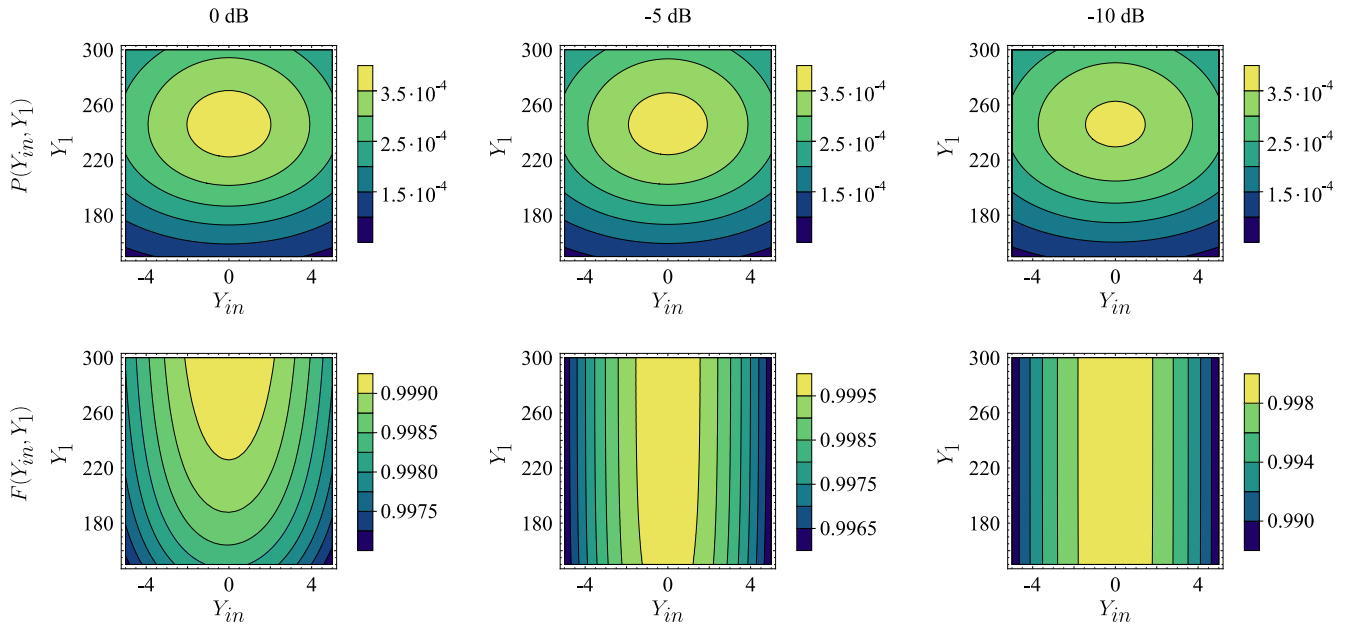


Рис. 3.6: Плотность вероятности измерения значений Y_{in} и Y_1 и значение верности в зависимости от Y_{in} и Y_1 при телепортации сжатых состояний для $\alpha = 20$. Сжатие входного состояния 0, -5 и -10 дБ.

измерения значений Y_{in} и Y_1 и значение верности $F(Y_{in}, Y_1)$ для сдвигов $\alpha = 6, 10, 20$ (см. рис. 3.5). В первом случае сдвиг слишком мал и использованные нами в предыдущем разделе приближения не будут выполняться. Из графиков видно, что вероятность успешной телепортации при значении $\alpha = 6$ мала: только в 13% случаев телепортация будет осуществляться с $F > 0.99$. При $\alpha = 10$ уже более чем в половине случаев (около 58%) верность телепортации будет $F > 0.99$. Однако, в этом случае все еще требуется дополнительная селекция по результатам измерений для обеспечения удовлетворительной работы протокола. Если увеличить значение сдвига до $\alpha = 20$, приближения из раздела 3.1 будут полностью выполняются и нам больше не будет требоваться дополнительная селекция по результатам измерения: более чем в 97% случаев протокол телепортации сработает с верностью $F > 0.99$.

Также мы выполнили расчеты для случая, когда на вход схемы подаются сжатые состояния, значение сдвига при этом было взято $\alpha = 20$. Результаты расчетов показаны на рис. 3.6. Как мы можем видеть, верность улучшается в центральной части, однако начинает быстрее спадать с увеличением $|Y_{in}|$. Поэтому в целом работа протокола немного ухудшается: для сжатия на входе -5 дБ около 80% актов телепортации будут выполняться с верностью $F > 0.99$, а для сжатия -10 дБ это значение составит 58%. Таким образом, телепортация сжатого состояния требует дополнительного увеличения величины сдвига α и весового коэффициента g для сохранения высокой эффективности работы протокола.

График, иллюстрирующий интегральную вероятность успешной телепортации вакуумного состояния с $F > 0.99$ в зависимости от смещения α , показан на рис. 3.7. Как мы видим, вероятность быстро растет с увеличением α . Таким образом, при достаточном значении α те-

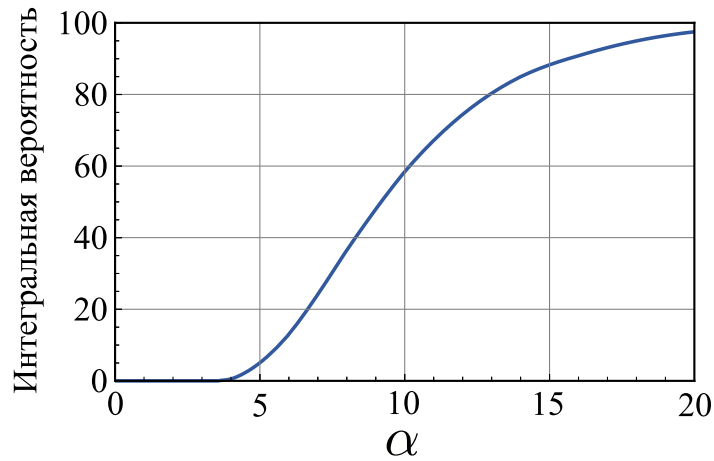


Рис. 3.7: Интегральная вероятность (в процентах) успешной телепортации вакуумного состояния с $F > 0.99$ в зависимости от величины смещения α .

телепортация состояния будет происходить с высокой верностью и не требует дополнительной селекции по результатам измерений. Величина α , при которой это достигается, относительно невелика и может быть реализована на практике.

3.3 Заключение по главе 3

В этой главе мы показали, что за счет использования кубического фазового затвора можно уменьшить ошибку телепортации в одной из квадратур. Мы продемонстрировали это, проанализировав нашу схему с точки зрения добавления ошибки при телепортации в картине Гейзенберга. Кроме того, мы описали схему в картине Шредингера и продемонстрировали, что для выполнения допущенных нами приближений требуется выполнить относительно небольшие сдвиги сжатого состояния до применения преобразования кубической фазы. Эти сдвиги возможно реализовать на практике. При необходимости, среднюю точность телепортации можно увеличить за счет селекции по результатам измерений. Селекция оказывается необходима, если нет возможности сдвинуть сжатое состояние на достаточную величину. Следует отметить, что для корректной работы протокола должно выполняться условие $\alpha^2 \gg \langle x_{in}^2 \rangle$. Это условие для входных состояний является основным ограничивающим фактором в применимости нашего протокола.

Стоит отметить, что схема допускает некоторые вариации. Например, переместив преобразования сдвига и кубический фазовый затвор из второго канала в первый и поменяв местами состояния осцилляторов на входе первого и второго каналов, можно добиться дополнительного уменьшения ошибки в x -квадратуре. При этом уменьшение ошибки в x -квадратуре будет происходить одновременно и благодаря весовым коэффициентам преобразования CZ и благодаря кубическому фазовому затвору. Но в тоже время, мы теряем возможность уменьшать ошибку y -квадратуры.

По сравнению со схемой телепортации с вычитанием фотонов [13, 14], наша схема обладает значительным преимуществом. При достаточном значении сдвига она работает детерминированным образом и не требует дополнительной селекции по результатам измерений. Также, у нас появляется дополнительный параметр, которым мы можем управлять – величина сдвига сжатого состояния, от которой зависит средняя ошибка в одной из квадратур. Стоит отметить, что естественным недостатком предложенной схемы является ее техническое усложнение. Основным элементом этой схемы является кубический фазовый затвор, практическая реализация которого все еще остается актуальной задачей. Кроме того, протокол предполагает использование перепутывающих гейтов CZ, практическое осуществление которых заметно сложнее, чем смешение полей на светоделителе (см., например, раздел 2.3).

Тем не менее, имея ввиду активную разработку гауссовых и негауссовых ресурсов, можно утверждать, что с появлением более совершенных способов реализации кубического фазового затвора предложенный протокол может дать существенный выигрыш по сравнению с традиционной схемой телепортации. Далее, в главе 4.4, мы покажем, как перенести предложенную здесь идею уменьшения ошибки на протокол однонаправленных вычислений.

Обобщая всё вышесказанное, в третьей главе были раскрыты и обоснованы следующие положения, выносимые на защиту:

- Предложен протокол квантовой телепортации, позволяющий выполнять телепортацию с большей точностью, независимо уменьшая ошибки квадратур поля за счет двух различных механизмов: взвешенного преобразования CZ и кубического фазового затвора.
- Предложенный протокол квантовой телепортации позволяет использовать кубический фазовый затвор с невысокой степенью нелинейности. Малость нелинейности может быть скомпенсирована за счет большой величины сдвига y -квadrатуры ресурсного осциллятора перед применением кубического фазового затвора.

Глава 4. Сравнение негауссовых ресурсов в протоколах телепортации

В предыдущей главе мы исследовали протокол телепортации, использующий негауссов ресурс, полученный с помощью кубического фазового затвора, для уменьшения ошибки телепортации. Мы показали, что при относительно небольшом сдвиге сжатого состояния до применения преобразования кубической фазы протокол не требует дополнительной постселекции по результатам измерений. Таким образом, можно говорить о преимуществе протокола телепортации с кубическим фазовым затвором по сравнению с протоколом с условным вычитанием фотонов с точки зрения сохранения детерминированности преобразований. Однако встает вопрос: какое из этих негауссовых преобразований позволяет лучше выполнить телепортацию и дает больший выигрыш относительно протоколов, использующих гауссов ресурс?

В этой главе мы сравним оригинальный протокол телепортации [9, 10], протокол телепортации с условным вычитанием фотонов [13, 14] и протокол телепортации с кубическим фазовым затвором (см. главу 2.4). Для этого мы оценим верность для каждого из протоколов при телепортации гауссового и негауссового состояний. В качестве телепортируемого гауссового состояния мы возьмем сжатое состояние, а негауссового – состояние кота Шредингера. Мы оценим какой вклад в верность телепортации вносит каждая из негауссовых операций. Такое сравнение позволит оценить, какая из них имеет больше перспектив для внедрения в схемы однонаправленных квантовых вычислений. Результаты данной главы были впервые изложены мной в работе [115].

4.1 Оригинальный протокол телепортации и его модификация с процедурой вычитания фотонов

Мы начнем обсуждение с того, что напомним как строится оригинальный протокол телепортации в непрерывных переменных. В главе 1.3.5 (см. раздел 2.1.1) мы обсуждали работу этого протокола в картине Гейзенберга, которая удобна для наглядной демонстрации работы протокола. Однако она не позволяет нам оценить качество телепортации для конкретных входных состояний. Поэтому мы еще раз рассмотрим оригинальный протокол телепортации,

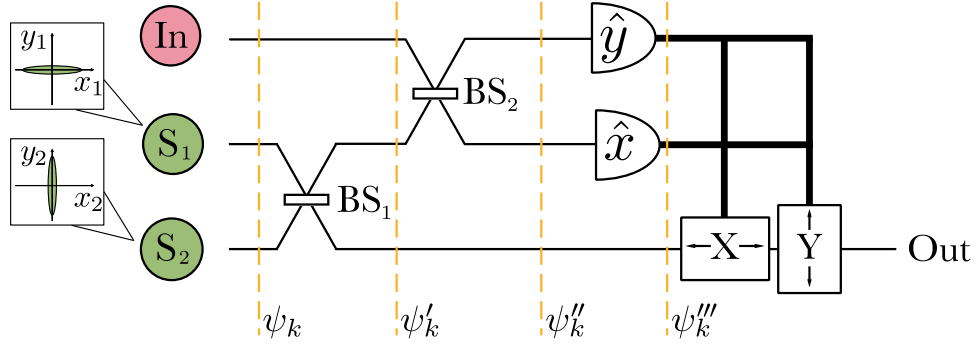


Рис. 4.1: Схема реализации протокола телепортации входного состояния In . На схеме: S_1 и S_2 – ресурсные осцилляторы, сжатые во взаимно ортогональных квадратурах; BS_1 и BS_2 – симметричные светоделители; \hat{y} и \hat{x} – гомодинные детекторы, измеряющие соответствующие квадратуры полей в каналах, X и Y обозначают устройства, смещающие соответствующие квадратуры полей в канале в зависимости от результатов детектирования.

но уже в представлении Шредингера. Ниже мы повторим рассуждения, изложенные авторами в статье [13]. Схема классического протокола телепортации показана на рис. 4.1. Здесь и далее, нижние индексы волновых функций будут указывать номера подсистем, которые они описывают; а верхние штрихи – указывать на момент времени, к которому они относятся.

Пусть входное состояние описывается волновой функцией в координатном представлении $\psi_{in}(x_{in})$, а перепутанные ресурсные осцилляторы (т.е. состояние осцилляторов S_1 и S_2 после первого светоделителя) описываются волновой функцией $\psi'_{1,2}(x_1, x_2)$. Второй светоделитель действует на квадратуры осцилляторов как

$$\hat{x}_{in} \rightarrow \frac{\hat{x}_{in} + \hat{x}_1}{\sqrt{2}}, \quad \hat{x}_1 \rightarrow \frac{\hat{x}_{in} - \hat{x}_1}{\sqrt{2}}. \quad (4.1)$$

Волновая функция системы при этом преобразуется следующим образом

$$\psi''_{in,1,2}(x_{in}, x_1, x_2) = \psi_{in} \left(\frac{x_{in} + x_1}{\sqrt{2}} \right) \psi'_{1,2} \left(\frac{x_{in} - x_1}{\sqrt{2}}, x_2 \right). \quad (4.2)$$

Затем измеряются квадратуры x_1 и y_{in} . Ненормированная волновая функция второго осциллятора после такого измерения примет вид

$$\psi_2'''(x_2; Y_{in}, X_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx_{in} e^{-2iY_{in}x_{in}} \psi_{in} \left(\frac{x_{in} + X_1}{\sqrt{2}} \right) \psi'_{1,2} \left(\frac{x_{in} - X_1}{\sqrt{2}}, x_2 \right), \quad (4.3)$$

где X_1 и Y_{in} – измеренные значения квадратур. Плотность вероятности того, что при измерении квадратур \hat{x}_1 и \hat{y}_{in} будут получены значения X_1 и Y_{in} , определяется выражением:

$$P(Y_{in}, X_1) = \int dx_2 |\psi_2'''(x_2; Y_{in}, X_1)|^2. \quad (4.4)$$

Для завершения процедуры телепортации остается сместить квадратуры во втором канале в зависимости от измеренных значений квадратур: x -квратуру – на величину $\sqrt{2}X_1$, а y -квратуру – на величину $\sqrt{2}Y_{in}$. Таким образом, волновая функция состояния на выходе

схемы будет задаваться выражением

$$\begin{aligned} \psi_{out}(x; Y_{in}, X_1) = & \frac{1}{\sqrt{\pi P(Y_{in}, X_1)}} \int dx_{in} e^{2iY_{in}(\sqrt{2}x - x_{in})} \psi_{in} \left(\frac{x_{in} + X_1}{\sqrt{2}} \right) \\ & \times \psi'_{1,2} \left(\frac{x_{in} - X_1}{\sqrt{2}}, x + \sqrt{2}X_1 \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Далее нам потребуется модифицировать этот протокол, добавив в него процедуру условного вычитания фотонов. Поэтому будет удобно перейти к разложению волновых функций по набору собственных функций состояний Фока:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{k-1}k!}\sqrt{\pi}} e^{-x^2} H_k(\sqrt{2}x), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (4.6)$$

где $H_k(x)$ – полиномы Эрмита. Тогда, волновая функция перепутанных ресурсных осцилляторов может быть представлена в виде

$$\psi'_{1,2}(x_1, x_2) = \sum_k c_k \varphi_k(x_1) \varphi_k(x_2), \quad (4.7)$$

где коэффициенты имеют вид

$$c_k = \sqrt{1 - q^2} q^k. \quad (4.8)$$

В этом разложении параметр q ($0 < q < 1$) отвечает за силу перепутывания и связан со сжатием исходных осцилляторов как

$$q = \tanh r. \quad (4.9)$$

Волновую функцию телепортируемого входного осциллятора мы также представим в виде суммы

$$\psi_{in}(x_{in}) = \sum_k c_k^{in} \varphi_k(x_{in}). \quad (4.10)$$

Если подставить разложения (4.7) и (4.10) в выражение (4.5), то волновую функцию состояния на выходе схемы можно записать в виде

$$\psi_{out}(x; Y_{in}, X_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi P(Y_{in}, X_1)}} e^{2\sqrt{2}iY_{in}x} \sum_{k,m} c_k c_m^{in} \varphi_k(x + \sqrt{2}X_1) D_{k,m}(Y_{in}, X_1). \quad (4.11)$$

Здесь введена с-числовая функция $D_{k,m}(Y_{in}, X_1)$, определенная выражениями:

$$D_{k,m}(Y_{in}, X_1) = 2\sqrt{2^{m-k}} e^{2iY_{in}X_1} e^{-Y_{in}^2 - X_1^2} (-iY_{in} - X_1)^{m-k} \sqrt{\frac{k!}{m!}} L_k^{m-k}(2Y_{in}^2 + 2X_1^2) \quad (4.12)$$

для $m \geq k$, и

$$D_{m,k}(Y_{in}, X_1) = (-1)^{m-k} D_{k,m}^*(Y_{in}, X_1) \quad (4.13)$$

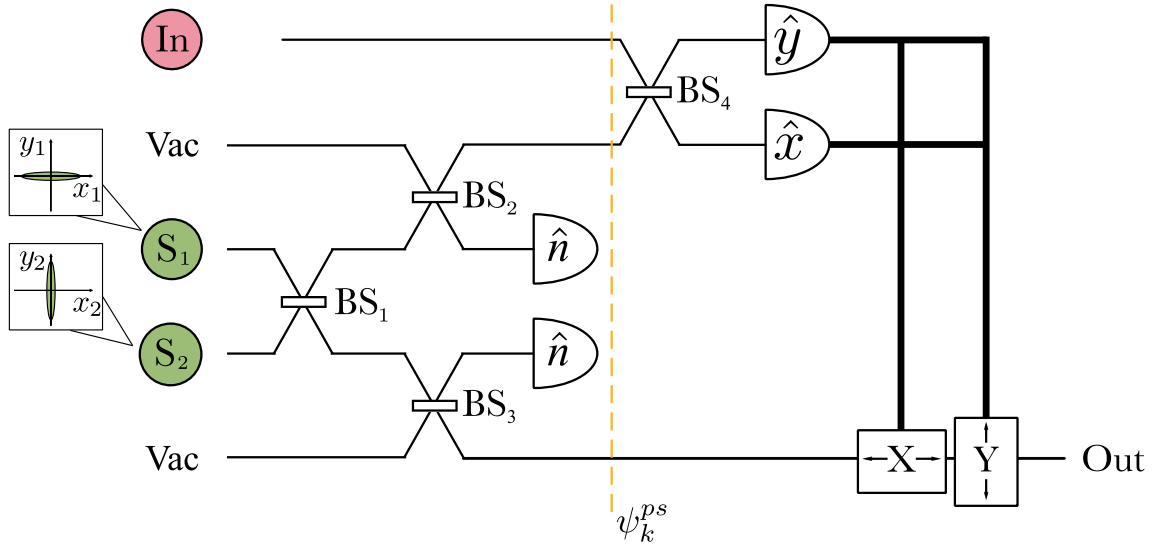


Рис. 4.2: Схема реализации протокола телепортации с ВФ. На схеме: Vac – обозначают открытые каналы; BS₁ и BS₄ – симметричные светоделители; BS₂ и BS₃ – светоделители с малым коэффициентом отражения; \hat{y} и \hat{x} – гомодинные детекторы; а \hat{n} – детекторы числа фотонов.

при $m < k$. В выражении (4.12) $L_k^m(x)$ – обобщенные полиномы Лагерра. Полученная форма записи преобразования телепортации будет удобна для модификации схемы добавлением процедуры условного вычитания фотонов.

В работе [13] авторы предложили модифицированный протокол телепортации (см. рис. 4.2). В этом протоколе в качестве ресурса для телепортации используется перепутанное негауссово состояние, которое получено из двухмодового сжатого вакуума путем вычитания фотонов в каждом из каналов. Процедура условного вычитания фотонов производится следующим образом: в канал помещается светоделитель с малым амплитудным коэффициентом отражения R (и амплитудным коэффициентом пропускания T) и в отраженном луче измеряется число фотонов. Такая операция над j -ым осциллятором преобразует состояние Фока $|k\rangle_j$ следующим образом

$$|k\rangle_j \rightarrow (-1)^n \sqrt{\frac{k!}{(k-n)!n!}} |R|^n |T|^{k-n} |k-n\rangle_j, \quad (4.14)$$

где n – число измеренных фотонов в отраженном импульсе (см. [73, 74]).

Успешной реализацией протокола будем считать случай, когда в каждом канале было задетектировано по одному фотону. Тогда, негауссово перепутанное ресурсное состояние может быть представлено в виде разложения

$$\psi_{1,2}^{ps}(x_1, x_2) = \sum_k c_k^{ps} \varphi_k(x_1) \varphi_k(x_2), \quad (4.15)$$

где коэффициенты задаются соотношением

$$c_k^{ps} = \sqrt{1 - q^2} \frac{(k+1)!}{k!} |R|^2 |T|^{2k} q^{k+1}. \quad (4.16)$$

Поскольку остальная часть схемы не отличается от классической схемы телепортации, выходное состояние описывается выражением (4.11) с точностью до замены $c_k \rightarrow c_k^{ps}$.

4.2 Сравнение различных протоколов телепортации

Теперь оценим работу каждого из протоколов для конкретных состояний на входе. Для этого мы рассчитаем верность телепортации, которая определяется как

$$F(Y_{in}, E_1) = \left| \int dx \psi_{out}^*(x; Y_{in}, E_1) \psi_{in}(x) \right|^2. \quad (4.17)$$

Здесь для оригинального протокола телепортации и телепортации с вычитанием фотонов измеряемая квадратура в первом канале – X_1 (т.е. $E_1 = X_1$), а для телепортации с кубическим фазовым затвором $E_1 = Y_1$.

Рассматриваемые нами протоколы имеют существенно разные рабочие области (т.е. разные диапазоны значений измеряемых квадратур). Чтобы иметь возможность сравнивать графики верности для разных протоколов необходимо совместить эти области. Для этого мы изменим масштаб осей измеряемых квадратур, центрировав их на начале координат и нормировав на значения дисперсий соответствующих квадратур:

$$\tilde{E}_j = \frac{E_j - \langle E_j \rangle}{\langle (E_j - \langle E_j \rangle)^2 \rangle}, \quad E_j = Y_{in}, X_1, Y_1. \quad (4.18)$$

Такое масштабирование кажется естественным, поскольку первые и вторые моменты плотностей вероятностей $P(\tilde{Y}_{in}, \tilde{E}_1)$ будут равны, и их отличия будут обусловлены только негауссовыми особенностями самих протоколов и телепортируемых состояний.

Обсудим параметры, взятые нами для расчетов. Сжатие ресурсных осцилляторов для всех протоколов мы возьмем одинаковым и равным -10 дБ. Такое сжатие достижимо в реальном эксперименте [11]. Для протокола телепортации с вычитанием фотонов при выборе коэффициента отражения светоделителей, используемых при реализации процедуры условного вычитания фотонов, необходимо соблюдать баланс между двумя факторами. С одной стороны, коэффициент отражения должен быть малым, чтобы мы могли пренебречь случаями, когда вычитается два и более фотонов (т.к. существующие детекторы фотонов не позволяют нам различить точное число пришедших фотонов). С другой стороны он не может быть очень маленьким, чтобы вероятность успешной реализации протокола не стремилась к нулю. Следуя авторам [13], мы возьмем $R = 0.05$, при этом вероятность успешного вычитания фотонов в обоих каналах составит около 0.4%. Теперь перейдем к параметрам преобразований, используемых в протоколе телепортации с кубическим фазовым затвором. Обычно, при реализации преобразования CZ требуются вспомогательные сжатые осцилляторы (см. главу 1.3.5). Мы будем считать, что сжатие этих осцилляторов такое же, как сжатие ресурсных осцилляторов (т.е. -10 дБ). Тогда весовой коэффициент преобразования CZ будет приблизительно $g = 3$ (см. раздел 2.2). Мы возьмем относительно небольшую нелинейность

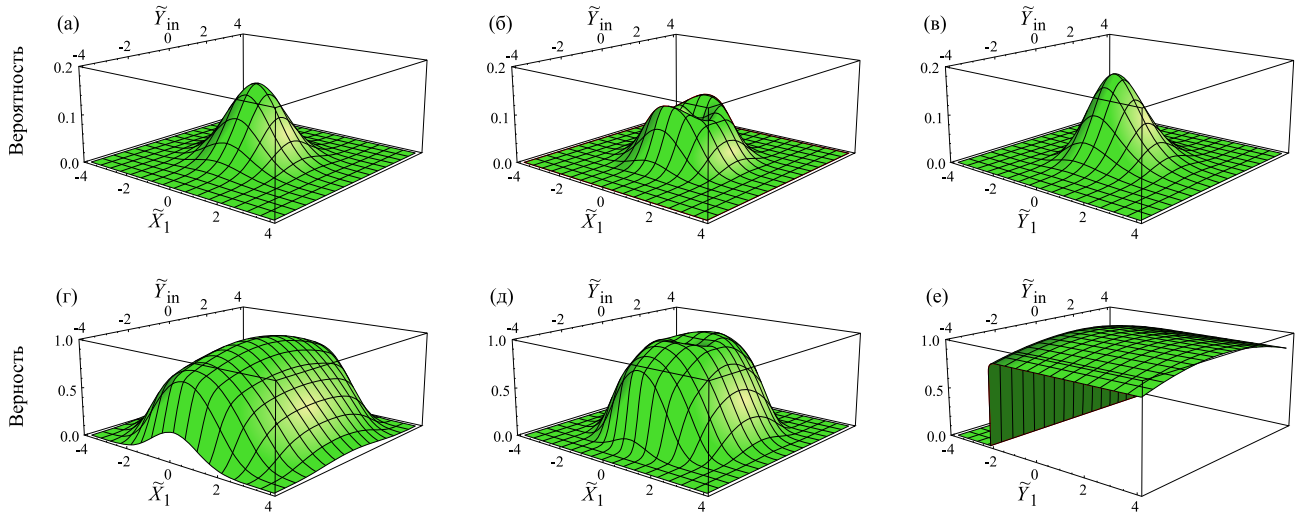


Рис. 4.3: Плотность вероятности измерения значений \tilde{X}_1 (или \tilde{Y}_1) и \tilde{Y}_{in} (а, б, в) и верность (г, д, е) при телепортации сжатого состояния для: (а, г) оригинального протокола; (б, д) протокола с вычитанием фотонов; (в, е) протокола с кубическим фазовым затвором.

самого кубического фазового затвора $\gamma = 0.1$ и сдвиг $\alpha = 7$. Небольшие значения нелинейности оцениваются как условно достижимые [89, 94], а сдвиг на небольшую величину не представляет экспериментальных сложностей (см. главу 2.4).

Представляет интерес оценка того факта, для какого типа состояний использование негауссова ресурса дает больший выигрыш, и какой из протоколов его обеспечивает. Для оценки работы протоколов мы рассмотрели случаи гауссова и негауссова входных состояний.

В качестве гауссова мы взяли сжатое по x -квадратуре состояние со сжатием -5 дБ. Плотность вероятности измерения значений \tilde{X}_1 (или \tilde{Y}_1) и \tilde{Y}_{in} и верность при телепортации этого состояния для всех анализируемых протоколов приведены на рис. 4.3. Сначала сравним оригинальный протокол и протокол с вычитанием фотонов. Для оригинального протокола плотность вероятности $P(\tilde{Y}_{in}, \tilde{X}_1)$ имеет вид гауссова распределения. В случае протокола телепортации с вычитанием фотонов в центре рабочей области для плотность вероятности $P(\tilde{Y}_{in}, \tilde{X}_1)$ возникает провал. Если сравнить верности для этих протоколов то мы видим, что для протокола с вычитанием фотонов в области наиболее вероятных значений измеренных квадратур значение верности немного возросло, но упало на краях рабочей области. Поэтому, затруднительно сказать однозначно, какая из схем оказалась эффективнее. В то же время, плотность вероятности $P(\tilde{Y}_{in}, \tilde{Y}_1)$ для протокола с кубическим фазовым затвором несимметрична по оси \tilde{Y}_1 и имеет хвост уходящий в область больших значений \tilde{Y}_1 . Именно в этой области достигаются максимальные значения верности телепортации. Можно заметить, что верность для этого протокола превосходит верность телепортации остальных протоколов практически во всей рабочей области.

В качестве негауссова входного состояния мы взяли нечетное состояние кота Шредингера, представляющее собой суперпозицию двух когерентных состояний. Волновая функция

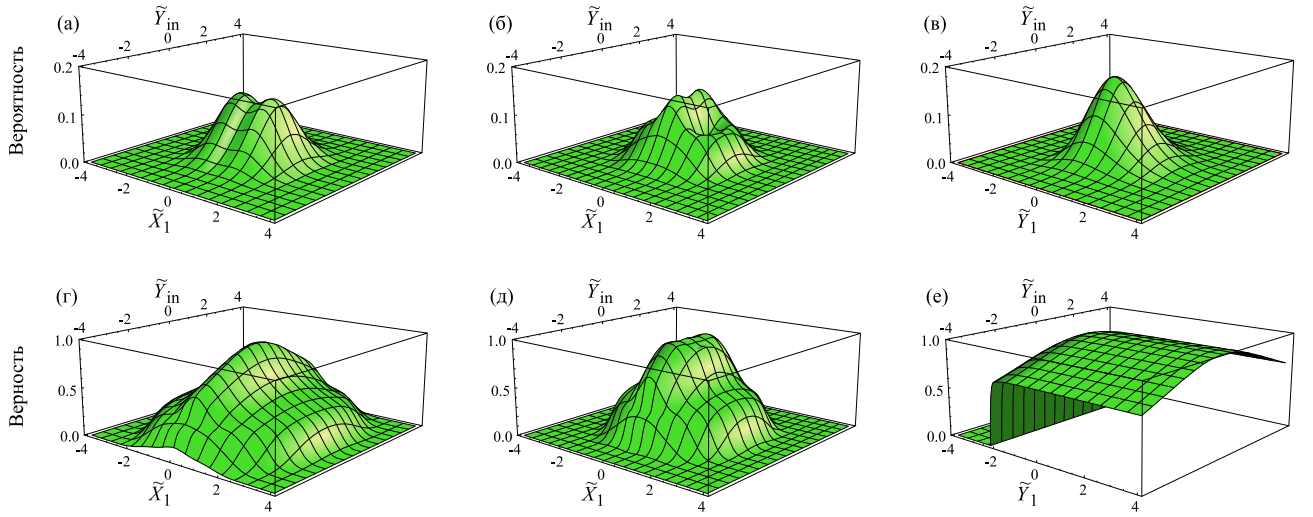


Рис. 4.4: Плотность вероятности измерения значений \tilde{X}_1 (или \tilde{Y}_1) и \tilde{Y}_{in} (а, б, в) и верность (г, д, е) при телепортации состояния кота Шредингера для: (а, г) оригинального протокола; (б, д) протокола с вычитанием фотонов; (в, е) протокола с кубическим фазовым затвором.

такого состояния имеет вид

$$\psi_{cat}(x) = \frac{1}{N_{cat}} (e^{2ibx} - e^{-2ibx}) e^{-x^2}, \quad (4.19)$$

где N_{cat} – нормировочный множитель. Для численных расчетов мы возьмем $b = 1.5$. На примере этого же состояния авторы работы [13] тестировали работу протокола с вычитанием фотонов. На рис. 4.4 показаны плотность вероятности измерения значений \tilde{X}_1 (или \tilde{Y}_1) и \tilde{Y}_{in} и верность телепортации состояния кота Шредингера для трех рассматриваемых протоколов. При сравнении оригинального протокола и протокола с вычитанием фотонов мы видим, что плотность вероятности $P(\tilde{Y}_{in}, \tilde{X}_1)$ для протокола с вычитанием фотонов возрастает в центральной части рабочей области. Также, для выбранного негауссова входного состояния верность телепортации для протокола с вычитанием фотонов заметно возросла в центральной части рабочей области. Таким образом, при телепортации состояния кота Шредингера протокол с вычитанием фотонов оказывается эффективнее, чем оригинальный протокол. Однако, как и для сжатого входного состояния, верность для протокола телепортации с кубическим фазовым затвором практически во всей рабочей области оказывается больше, чем для остальных протоколов. Плотность вероятности $P(\tilde{Y}_{in}, \tilde{Y}_1)$ для этого протокола при телепортации кота Шредингера имеет тот же вид, что и при телепортации сжатого состояния.

Чтобы объективно сравнить качество работы всех трех протоколов, для каждого из рассмотренных выше случаев рассчитаем интегральную верность телепортации

$$\langle F \rangle = \iint dY_{in} dE_1 P(Y_{in}, E_1) F(Y_{in}, E_1). \quad (4.20)$$

Результаты расчетов представлены на рис. 4.5. Мы можем видеть, что интегральная верность телепортации сжатого состояния для протокола с вычитанием фотонов немного больше, чем

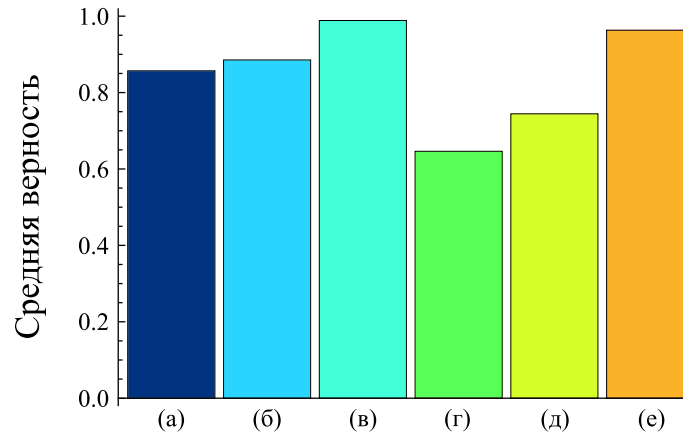


Рис. 4.5: Средняя верность телепортации сжатого состояния (а) оригинальным протоколом, (б) протоколом с вычитанием фотонов, (в) протоколом с кубическим фазовым затвором; и интегральная верность телепортации состояния кота Шредингера (г) оригинальным протоколом, (д) протоколом с вычитанием фотонов, (е) протоколом с кубическим фазовым затвором.

для оригинального протокола. Выигрыш для протокола с вычитанием фотонов становится заметнее при телепортации более сложного состояния кота Шредингера. Однако, интегральная верность для протокола телепортации с кубическим фазовым затвором существенно превосходит интегральные верности для остальных протоколов как для гауссова входного состояния, так и для негауссова.

Таким образом, в равных условиях протокол телепортации с кубическим фазовым затвором оказывается эффективнее, чем другие рассмотренные протоколы. Кроме того, он работает детерминированным образом, в то время как для протокола с вычитанием фотонов вероятность успешной реализации составит лишь 0.4% [13].

4.3 Оценка роли негауссовых ресурсов

В предыдущем разделе мы сравнили две схемы телепортации с негауссовыми ресурсами, одна из которых была предложена авторами в работе [13], а вторая предложена нами и описана в главе 2.4. Однако эти схемы отличаются друг от друга не только на уровне одного элемента, вносящего негауссовость. Схема с вычитанием фотонов содержит негауссовую операцию в каждом из ресурсных каналов, что приводит к равномерному уменьшению ошибки в обеих квадратурах телепортируемого состояния. В то же время, предложенный протокол телепортации с кубическим фазовым затвором содержит только одну негауссовую операцию. Однако, для создания перепутывания в нем используются преобразования CZ, увеличивающие степень перепутывания в системе. Это позволяет одновременно уменьшать ошибку телепортации в обеих квадратурах: в одной – за счет весовых коэффициентов CZ, в другой – за счет негауссова преобразования.

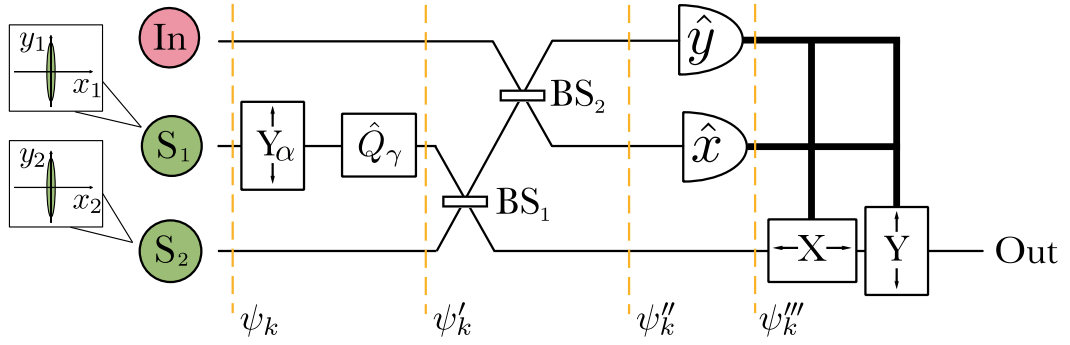


Рис. 4.6: Схема протокола телепортации со светоделителями и кубическим фазовым затвором.

Возникает вопрос, возможно ли отделить гауссовы процессы, влияющие на ошибку, от негауссовых, и сравнить между собой именно негауссовы ресурсы. Чтобы выяснить, какую роль в уменьшении ошибки играют негауссовы ресурсы, мы модифицируем протокол телепортации с кубическим фазовым затвором из главы 2.4, заменив в нем преобразования CZ на светоделители. При этом, как и прежде, одно из ресурсных состояний заменено на негауссово состояние, приготовленное с помощью кубического фазового затвора (см. рис. 4.6).

Получим выражение для волновой функции выходного состояния в такой схеме телепортации. Первоначально оба ресурсных осциллятора сжаты по x -квadrатуре и описываются волновыми функциями сжатого осциллятора:

$$\psi_s(x; r) = \sqrt[4]{\frac{2e^{2r}}{\pi}} \exp(-e^{2r} x^2). \quad (4.21)$$

где r – параметр сжатия. Мы будем полагать, что параметры сжатия ресурсных состояний равны между собой, и $r > 0$. В первом ресурсном канале последовательным применением операций сдвига по y -квadrатуре на $\alpha > 0$ и кубического фазового затвора, мы приготавливаем негауссово состояние. Волновая функция такого ресурсного осциллятора будет задаваться выражением

$$\psi'_1(x; r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dy e^{2iy(x-\gamma y^2)} \psi_s(y - \alpha; -r). \quad (4.22)$$

Подробно получение этой волновой функции описано в предыдущей главе в разделе 3.2. Поскольку далее параметр сжатия r будет одинаков для всех функций и мы не будем исследовать зависимость результатов от него, то в выкладках ниже мы опустим его.

С помощью светоделителей происходит перепутывание сначала ресурсных осцилляторов, а затем первого ресурсного и входного состояний. Действие светоделителей на квадратуры аналогично преобразованию (4.1). Волновая функция системы преобразуется следующим образом

$$\psi''_{in,1,2}(x_{in}, x_1, x_2) = \psi_{in} \left(\frac{x_{in} + x_1}{\sqrt{2}} \right) \psi'_1 \left(\frac{x_{in} - x_1}{2} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \right) \psi_s \left(\frac{x_{in} - x_1}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} \right). \quad (4.23)$$

Затем, как в обычном протоколе телепортации, измеряются квадратуры \hat{x}_1 и \hat{y}_{in} , измеренные значения квадратур будем обозначать X_1 и Y_{in} , соответственно. Ненормированная волновая функция второго осциллятора после такого измерения имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_2'''(x_2; Y_{in}, X_1) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx_{in} e^{-2iY_{in}x_{in}} \psi_{in} \left(\frac{x_{in} + X_1}{\sqrt{2}} \right) \\ &\times \psi_1' \left(\frac{x_{in} - X_1}{2} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \right) \psi_s \left(\frac{x_{in} - X_1}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Для завершения процедуры телепортации остается сместить квадратуры во втором канале в зависимости от измеренных значений квадратур: x -квратуру сместить на $\sqrt{2}X_1$, а y -квратуру на $\sqrt{2}Y_{in} - \sqrt{4|X_1|/(3\gamma)}$. Таким образом, волновая функция состояния на выходе примет вид:

$$\begin{aligned} \psi_{out}(x_2; Y_{in}, X_1) &= \frac{1}{\sqrt{\pi P(Y_{in}, X_1)}} \int dx_{in} e^{-2iY_{in}x_{in}} e^{2ix \left(\sqrt{2}Y_{in} - \sqrt{\frac{4|X_1|}{3\gamma}} \right)} \psi_{in} \left(\frac{x_{in} + X_1}{\sqrt{2}} \right) \\ &\times \psi_1' \left(\frac{x_{in} - 3X_1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \psi_s \left(\frac{x_{in} + X_1}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}; r \right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

где перед интегралом появился нормировочный множитель, восстанавливающий нормировку волновой функции и имеющий смысл плотности вероятности измерения значений X_1 и Y_{in} в первом и входном каналах, соответственно.

Для корректной оценки качества работы протоколов, входное состояние должно обладать двумя свойствами. Оно должно быть достаточно сложным (желательно, негауссовым), чтобы выигрыш от использования негауссовых состояний был заметнее. Также оно должно быть симметричным по обеим квадратурам. Второе требование необходимо, поскольку протокол телепортации с вычитанием фотонов уменьшает ошибку в обеих квадратурах, в то время как протокол с кубическим фазовым затвором – только в одной. Если состояние будет несимметричным, то верность телепортации будет сильно зависеть от поворота состояния в фазовом пространстве. То есть, если ошибка будет подавляться по квадратуре, которая слабо чувствительна к ее добавлению, то верность практически не изменится и наоборот. При использовании симметричных по квадратурам состояний, в качестве телепортируемых, подавление ошибки по обеим квадратурам будет вносить одинаковый вклад в увеличение верности. Состояние, обладающее этими двумя свойствами, позволит объективно сравнить выигрыш от негауссовых ресурсов. С учетом этих свойств, мы выбрали в качестве входного состояния первое состояние Фока, волновая функция которого определяется выражением (4.6). Также в протоколе телепортации с кубическим фазовым затвором мы увеличим значение сдвига до $\alpha = 15$, чтобы компенсировать отсутствие дополнительного сжатия в протоколе от преобразования CZ. При этом нелинейность самого кубического фазового затвора мы оставляем прежней.

Плотность вероятности измерения значений \tilde{X}_1 и \tilde{Y}_{in} и верность при телепортации первого состояния Фока оригинального протокола, протокола с вычитанием фотонов и протокола с

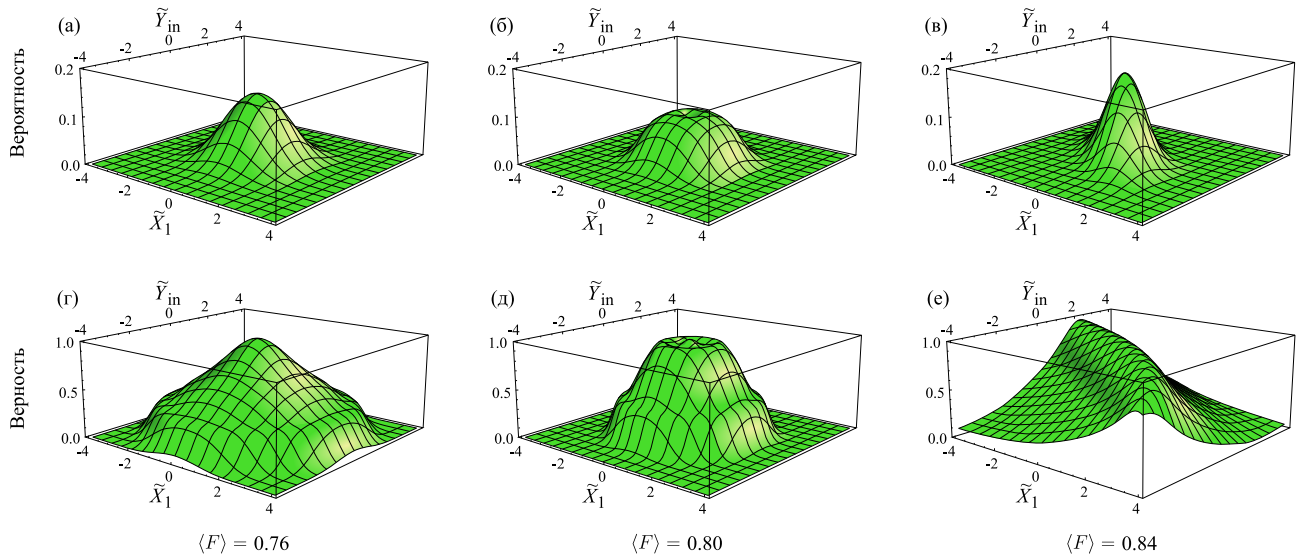


Рис. 4.7: Плотность вероятности измерения значений \tilde{X}_1 и \tilde{Y}_{in} (а, б, в) и верность (г, д, е) при телепортации первого состояния Фока для: (а, г) оригинального протокола; (б, д) протокола с вычитанием фотонов (в, е) протокола с кубическим фазовым затвором в схеме со светоделителями. Внизу приведена средняя верность для каждого из случаев.

кубическим фазовым затвором в схеме со светоделителями приведены на рис. 4.7. Если сравнить оригинальный протокол и протокол с вычитанием фотонов, то мы видим, что плотность вероятности $P(\tilde{Y}_{in}, \tilde{X}_1)$ для второго протокола в центре рабочей области становится меньше. В то же время верность телепортации протокола с вычитанием фотонов оказывается значительно выше в центре рабочей области, но быстрее спадает на ее краях. Как следствие, качество работы протокола в среднем становится лучше, что отражает увеличение средней верности телепортации. Для протокола телепортации с кубическим фазовым затвором вероятность $P(\tilde{Y}_{in}, \tilde{X}_1)$ оказывается вытянута на плоскости $(\tilde{Y}_{in}, \tilde{X}_1)$ вдоль параболы, обусловленной вспомогательным состоянием кубической фазы. Именно вдоль этого направления верность телепортации будет наибольшей. В итоге, средняя верность для этого протокола оказывается больше, чем для двух предыдущих. Несмотря на то, что кубический фазовый затвор влияет на ошибку только в одном канале, оставляя ее нетронутой во втором, выигрыш от использования кубического фазового затвора в протоколе телепортации превосходит выигрыш от использования условного вычитания фотонов.

Стоит отметить, что уменьшение степени сжатия ресурсных осцилляторов приведет к снижению качества работы протокола телепортации. При этом выигрыш от использования дополнительных негауссовых ресурсов будет существеннее. И наоборот, при достаточно высоком сжатии ресурсных осцилляторов, негауссовы операции будут играть не столь существенную роль.

4.4 Заключение по главе 4

В этой главе мы сравнили работу трех протоколов телепортации: оригинального протокола, протокола с вычитанием фотонов и протокола с кубическим фазовым затвором. На примере сжатого состояния и состояния кота Шредингера мы показали, что протокол с кубическим фазовым затвором позволяет достичь больших значений верности, чем остальные протоколы. Следует отметить, что верность телепортации в схеме с кубическим фазовым затвором практически не зависит от вида телепортируемого состояния, что заметно отличает ее от других протоколов. Кроме того, этот протокол работает детерминированным образом в отличие от протокола с условным вычитанием фотонов.

Стоит отметить, что реализация протокола телепортации с кубическим фазовым затвором является технически более сложной задачей, чем реализация других рассмотренных протоколов. Ключевой элемент этой схемы – кубический фазовый затвор, его практическая реализация до сих пор является вызовом для экспериментаторов. Кроме того, протокол предполагает использование перепутывающих преобразований CZ, практическое осуществление которых заметно сложнее, чем перепутывание полей на светоделителе (см. обсуждение в разделе 2.2). Тем не менее, сейчас ведется активная разработка гауссовых и негауссовых ресурсов. Кроме того, удалось достичь значительных успехов в генерации состояний кубической фазы [94]. Поэтому с появлением более совершенных способов реализации кубического фазового затвора и преобразования CZ предлагаемый нами протокол может дать существенный выигрыш по сравнению с другими схемами телепортации.

Важно также отметить, что для простоты изложения мы не учли ошибки, связанные с неидеальностью фотодетектирования. Однако мы учли несовершенства схем, связанные с использованием гауссовых ресурсов. Другими словами, несовершенства, возникающие из-за использования осцилляторов с конечной (неидеальной) величиной сжатия. Чтобы учет несовершенств данного типа был “наиболее честным”, во всех схемах нами рассматривались вспомогательные осцилляторы с одинаковой величиной сжатия.

Помимо этих несовершенств, в схеме присутствуют несовершенства, связанные с негауссовыми ресурсами. Как известно, в настоящее время такие ресурсы трудно реализовывать [116, 117]. В схеме с вычитанием фотонов трудность создания негауссовых состояний связана с использованием неидеальных детекторов числа фотонов. В работе [13] авторы обсуждают это несовершенство. Что касается другой схемы телепортации, отсутствие экспериментальных методов реализации кубического фазового затвора в оптическом диапазоне делает невозможным обсуждение подобных несовершенств, связанных с физической реализацией преобразования. Однако, состояние кубической фазы уже было детерминистически сгенерировано в микроволновой области излучения [94], что дает надежду на скорейшую реализацию кубического фазового затвора в оптической области. Возможность детерминированного выполнения этой негауссовой операции, в свою очередь, будет важным достоинством схемы с кубическим фазовым затвором над другими.

Таким образом, кубический фазовый затвор имеет больше перспектив для дальнейшего внедрения в схемы однонаправленных квантовых вычислений.

Обобщая всё вышесказанное, в четвертой главе было раскрыто и обосновано следующее положение, выносимое на защиту:

- Использование кубического фазового затвора в схеме телепортации увеличивает вероятность телепортации в значительно более широкой области рабочего диапазона по сравнению с процедурой вычитания фотонов.

Глава 5. Однонаправленные квантовые вычисления с негауссовым ресурсом

В предыдущих главах мы рассмотрели стратегии уменьшения ошибок в протоколе квантовой телепортации. В этой главе мы применим эти стратегии для уменьшения ошибок произвольных одномодовых гауссовых операций и двухмодовой гауссовой операции, необходимых для построения универсальных квантовых вычислений.

Первая предлагаемая здесь стратегия лежит в рамках гауссовых преобразований и сводится к варьированию весовых коэффициентов кластерного состояния, используемого как ресурс для квантовых вычислений. В главе 1.3.5 на примере протокола квантовой телепортации мы показали, что возможно уменьшить ошибку квантовой передачи сигнала, используя в качестве перепутывающей операции взвешенное преобразование CZ. Увеличение весовых коэффициентов позволило значительно уменьшить ошибку в одной из квадратур, оставаясь при этом в рамках гауссовых преобразований. Поэтому в первом разделе этой главы мы исследуем роль весовых коэффициентов кластерного состояния при формировании ошибки одномодовых преобразований.

Необходимо упомянуть о существовании No-Go теоремы [53], согласно которой гауссовы состояния не могут быть использованы для коррекции гауссовых ошибок (ошибок определяемых гауссовыми преобразованиями) в гауссовых состояниях. Предлагаемый нами метод не противоречит этой теореме. Мы снижаем ошибку преобразования не за счет дополнительной коррекции ошибок, а за счет уменьшения роли в преобразовании узлов, вносящих наибольший вклад в ошибку.

Второй метод уменьшения ошибки вычислений, рассматриваемый в этой главе – использование кластеров, содержащих негауссовы узлы. Метод уменьшения ошибки телепортации квантового состояния, основанный на использовании кубического фазового затвора [15], был предложен нами в главе 2.4. Имея ввиду базовый характер процедуры телепортации для однонаправленных квантовых вычислений, мы перенесли предлагаемый подход для создания ресурсного кластерного состояния, позволяющего выполнять операции с меньшими ошибками. При этом акцент был сделан на минимальном изменении ресурсного состояния (модифицируется только один узел), приводящем к максимальному уменьшению ошибки. Выбор в качестве негауссовой операции кубического фазового затвора связан с возможностью ее выполнения детерминированно, когда каждое измерение приводит к желаемому результату.

Это крайне важно для квантовых вычислительных схем и является важным достоинством вычислений в непрерывных переменных. Использование вероятностных процедур (таких как процедура вычитания фотона [13, 14]) лишило бы протокол этого достоинства.

В этой главе мы опишем схему преобразования на взвешенном 4-х узловом линейном кластере и продемонстрируем, что такое гауссово преобразование является произвольным при любых значениях весовых коэффициентов. То есть с помощью такой операции на взвешенном 4-х узловом кластере мы можем преобразовать любое входное гауссово состояние в любое другое гауссово состояние. Также мы оценим ошибки в рассматриваемой схеме и предложим варианты оптимизации ошибок преобразований для достижимых экспериментально значений весовых коэффициентов. Затем мы исследуем модифицированную схему, в которой при приготовлении кластерного состояния используется кубический фазовый затвор, оценим ошибки, возникающие в этой схеме, и проведем их оптимизацию. На основе расчета вероятности коррекции ошибки мы оценим эффективность предложенных нами оптимизаций. В последнем разделе мы покажем, что предложенный нами подход уменьшения ошибки с помощью кубического фазового затвора применим к гауссовым двухмодовым операциям. Основные результаты, рассматриваемые в данной главе, были впервые представлены мной в работе [118].

5.1 Роль весовых коэффициентов кластерного состояния

Принцип выполнения произвольного одномодового гауссового преобразования на невзвешенном линейном четырехузловом кластере хорошо известен [49, 88]. В разделе 1.2.1 мы обсуждали, что такой кластер является базовым ресурсом для однонаправленных квантовых вычислений. В данном разделе мы повторим аналогичные преобразования на взвешенном кластере, и покажем что такое преобразование является произвольным гауссовым для произвольных значений весовых коэффициентов. То есть варьирование весовых коэффициентов не сужает класс рассматриваемых преобразований и, обсуждая вычисления на взвешенном кластере, мы по-прежнему сможем выполнить любое требуемое преобразование. Кроме того, мы оценим ошибки в рассматриваемой схеме и предложим варианты оптимизации ошибок преобразований для достижимых экспериментально значений весовых коэффициентов.

5.1.1 Схема преобразования на линейном 4-х узловом взвешенном кластере

Как было показано в работе [49], преобразование на четырехузловом кластере является элементарным блоком всех гауссовых операций. Чтобы получить явное выражение для ошибки преобразования, начнем с построения самого кластерного состояния. Линейное кластерное состояние (рис. 5.1(a)) готовится из четырех сжатых по u -квадратуре осцилляторов. Как и прежде, квадратуры осциллятора с номером j описываются как

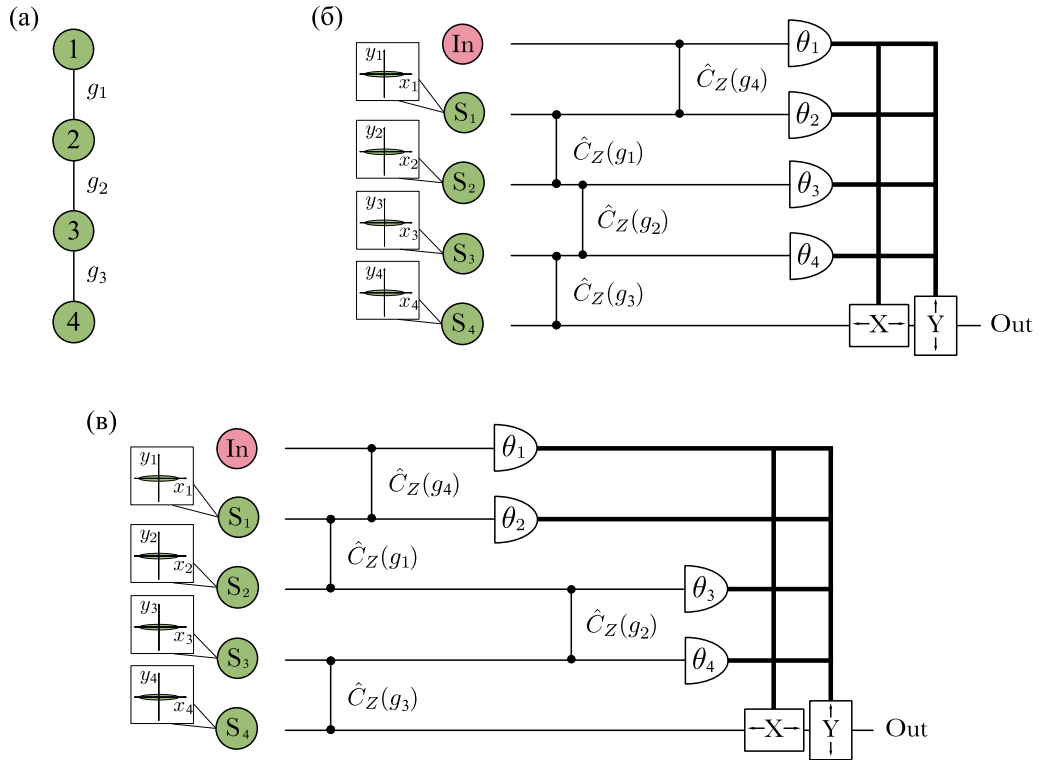


Рис. 5.1: (а) Структура кластерного состояния, используемого как ресурс для вычисления. (б) Схема реализации произвольного одномодового преобразования на линейном взвешенном 4-х узловом кластере. (в) Схема реализации произвольного одномодового преобразования на паре 2-х узловых кластеров. На схемах: In – входное состояние; S_j – сжатые ресурсные состояния; $\hat{C}_Z(g_j)$ – преобразование CZ с весовым коэффициентом g_j ; θ_j – фазы локальных осцилляторов, используемых при балансном гомодинном детектировании; X и Y – операции сдвига соответствующих квадратур в зависимости от результатов измерений.

$$\hat{x}_j = e^r \hat{x}_{0,j}, \quad \hat{y}_j = e^{-r} \hat{y}_{0,j}, \quad (5.1)$$

где введены такие же обозначения как в аналогичных выражениях выше (см. (2.1) и (3.1)). Перепутывание узлов кластера и примешивание к кластеру входного состояния будем осуществлять с помощью преобразования CZ, которое действует на осцилляторы j и k как

$$\hat{C}_{Z,jk} = e^{2ig_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k}. \quad (5.2)$$

Здесь g_{jk} – весовой коэффициент преобразования, он может принимать любые положительные или отрицательные значения. Подробно, роль весового коэффициента преобразования CZ обсуждалась нами в разделе 2.1.2. Поскольку знак весового коэффициента говорит только о создании положительных или отрицательных корреляций (антикорреляций) между осцилляторами, то далее в этой главе мы будем говорить о положительных весовых коэффициентах, имея ввиду, что их знак не влияет на уменьшение ошибки.

Все операции CZ коммутируют друг с другом. Кроме того, преобразование CZ, перепутывающее второй и третий ресурсные осцилляторы, коммутирует с гомодинными измерениями

над входным и первым ресурсным осцилляторами. Поэтому мы можем рассмотреть преобразование на 4-х узловом кластере (см. рис. 5.1(б)), как преобразование на паре 2-х узловых кластеров (см. рис. 5.1(в)) с их дальнейшим перепутыванием. Это значительно упростит анализ схемы.

Рассмотрим преобразование, осуществляемое на первой паре ресурсных состояний. Первый и второй ресурсные осцилляторы перепутываются преобразованием CZ с весовым коэффициентом g_1 , а состояние на входе перепутывается с первым ресурсным осциллятором аналогичным преобразованием с коэффициентом g_4 . Тогда амплитуды осцилляторов после преобразований примут вид

$$\hat{a}'_{in} = \hat{x}_{in} + i(\hat{y}_{in} + g_4\hat{x}_1), \quad (5.3)$$

$$\hat{a}'_1 = \hat{x}_1 + i(\hat{y}_1 + g_1\hat{x}_2 + g_4\hat{x}_{in}), \quad (5.4)$$

$$\hat{a}'_2 = \hat{x}_2 + i(\hat{y}_2 + g_1\hat{x}_1). \quad (5.5)$$

Затем мы проводим гомодинные измерения с фазами локальных осцилляторов θ_1 и θ_2 над входным и первым ресурсным осцилляторами, соответственно. При этом, операторы фототоков будут выражаться равенствами

$$\hat{i}_{in} = \beta \sin \theta_1 (\hat{y}_{in} + g_4\hat{x}_1) + \beta \cos \theta_1 \hat{x}_{in}, \quad (5.6)$$

$$\hat{i}_1 = \beta \sin \theta_2 (\hat{y}_1 + g_1\hat{x}_2 + g_4\hat{x}_{in}) + \beta \cos \theta_2 \hat{x}_1, \quad (5.7)$$

где β – амплитуда локальных осцилляторов гомодинных детекторов. Такие измерения, в силу запутанности ресурсного состояния, приведут к преобразованию квадратурных компонент второго осциллятора:

$$\hat{x}'_2 = \left(\frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} \right) \hat{x}_{in} + \frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \hat{y}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g_1} + \frac{i_{1,m}}{\beta g_1 \sin \theta_2} - \frac{i_{in,m} \cot \theta_2}{\beta g_1 g_4 \sin \theta_1}, \quad (5.8)$$

$$\hat{y}'_2 = -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} \hat{x}_{in} - \frac{g_1}{g_4} \hat{y}_{in} + \hat{y}_2 + \frac{i_{in,m} g_1}{\beta g_4 \sin \theta_1}. \quad (5.9)$$

Здесь операторы фототоков заменены на с-числа, соответствующие результатам конкретных измерений: $i_{1,m}$ и $i_{in,m}$. Перепишем это преобразование в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_2 \\ \hat{y}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} & \frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \\ -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} & -\frac{g_1}{g_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i_{1,m}}{\beta g_1 \sin \theta_2} - \frac{i_{in,m} \cot \theta_2}{\beta g_1 g_4 \sin \theta_1} \\ \frac{i_{in,m} g_1}{\beta g_4 \sin \theta_1} \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Хорошо известно, что такое гауссово преобразование не является произвольным при единичных весовых коэффициентах. Для обеспечения произвольности необходимо выполнить аналогичное преобразование еще раз на другой паре узлов. Поскольку нашей задачей является обеспечение произвольности при любых g_j , то ее отсутствие для $g_j = 1$ заведомо требует обогащения схемы.

Операция на второй паре узлов с точностью до весовых коэффициентов преобразования CZ повторяет операцию на первой паре узлов. Поэтому вторая часть схемы выполняет

преобразование аналогичное преобразованию (5.10), для которого входными данными будут квадратуры x'_2 и y'_2 . На выходе схемы c -числовые составляющие квадратур поля будут скомпенсированы по результатам измерений с помощью операций сдвига. Введем новые обозначения:

$$\cot \theta'_2 = \frac{\cot \theta_2}{g_4^2}, \quad \cot \theta'_4 = \frac{\cot \theta_4}{g_2^2}. \quad (5.11)$$

Отметим, что в новых переменных математическое выражение для преобразования вход-выход будет зависеть не от самих весовых коэффициентов, а от их отношения, что удобно для дальнейшего анализа. Таким образом, преобразование, осуществляемое нашей схемой имеет вид

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out} \\ \hat{y}_{out} \end{pmatrix} = U(\theta_1, \theta'_2, \theta_3, \theta'_4) \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \delta \hat{\mathbf{e}}_0(\theta_3, \theta'_4). \quad (5.12)$$

Здесь преобразование, осуществляемое над входным состоянием, описывается матрицей

$$U(\theta_1, \theta'_2, \theta_3, \theta'_4) = \begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_3 \cot \theta'_4 - 1}{g_3/g_2} & \frac{\cot \theta'_4}{g_3/g_2} \\ -\frac{g_3 \cot \theta_3}{g_2} & -\frac{g_3}{g_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_1 \cot \theta'_2 - 1}{g_1/g_4} & \frac{\cot \theta'_2}{g_1/g_4} \\ -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} & -\frac{g_1}{g_4} \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

а ошибка преобразования, связанная с конечной степенью сжатия ресурсных осцилляторов, описывается вектором

$$\delta \hat{\mathbf{e}}_0(\theta_3, \theta'_4) = \begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_3 \cot \theta'_4 - 1}{g_3/g_2} & \frac{\cot \theta'_4}{g_3/g_2} \\ -\frac{g_3 \cot \theta_3}{g_2} & -\frac{g_3}{g_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{y}_3 \\ \hat{y}_4 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Стоит отметить, что в рассмотренной схеме ошибка преобразования $\delta \hat{\mathbf{e}}_0$ зависит от углов θ_3 и θ'_4 . Это происходит из-за того, что ошибка от первой пары ресурсных осцилляторов преобразуется при измерении второй пары ресурсных осцилляторов.

5.1.2 Универсальность преобразования с произвольными весовыми коэффициентами

В первую очередь нам необходимо ответить на вопрос, является ли гауссово преобразование U произвольным, то есть можно ли с его помощью превратить любое гауссово состояние в любое другое гауссово состояние. В статье [49] было показано, что оно будет произвольным при единичных весовых коэффициентах преобразования CZ. Однако необходимо проверить сохраняется ли это свойство при произвольных ненулевых весовых коэффициентах. Для этого мы покажем что, возможно подобрать фазы локальных осцилляторов гомодинных детекторов таким образом, чтобы матрица $U(\theta_1, \theta'_2, \theta_3, \theta'_4)$ была равна любой наперед заданной произвольной симплектической матрице, то есть

$$U(\theta_1, \theta'_2, \theta_3, \theta'_4) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

где для коэффициентов матрицы должно выполняться условие

$$ad - bc = 1. \quad (5.16)$$

С учетом явного вида (5.13) матрицы U , уравнение (5.15) эквивалентно системе уравнений

$$\frac{g_2 g_4}{g_1 g_3} (\cot \theta_1 \cot \theta'_2 - 1) (\cot \theta_3 \cot \theta'_4 - 1) - \frac{g_1 g_2}{g_3 g_4} \cot \theta_1 \cot \theta'_4 = a, \quad (5.17)$$

$$\frac{g_2 g_4}{g_1 g_3} \cot \theta'_2 (\cot \theta_3 \cot \theta'_4 - 1) - \frac{g_1 g_2}{g_3 g_4} \cot \theta'_4 = b, \quad (5.18)$$

$$- \frac{g_3 g_4}{g_1 g_2} (\cot \theta_1 \cot \theta'_2 - 1) \cot \theta_3 + \frac{g_1 g_3}{g_2 g_4} \cot \theta_1 = c, \quad (5.19)$$

$$- \frac{g_3 g_4}{g_1 g_2} \cot \theta'_2 \cot \theta_3 + \frac{g_1 g_3}{g_2 g_4} = d. \quad (5.20)$$

Благодаря требованию на коэффициенты матрицы (5.16), любое из этих уравнений может быть получено из трех оставшихся. Таким образом в системе только три независимых уравнения на четыре переменные. Система (5.17)–(5.20) решается не единственным образом и одна из фаз может быть выбрана в качестве свободного параметра, который мы можем менять по своему усмотрению. Можно заметить, что при $\theta'_2 = \pi/2$ или $\theta_3 = \pi/2$ уравнение (5.20) превращается в равенство, фиксирующее значение d , и мы теряем возможность решить систему для произвольной матрицы. Поэтому фазы θ'_2 и θ_3 не подходят на роль свободного параметра. Из оставшихся двух фаз лучшим кандидатом на эту роль является фаза θ'_4 , так как от нее зависит ошибка преобразования. В перспективе, правильным выбором фазы θ'_4 мы сможем минимизировать ошибку преобразования.

Для некоторого произвольного фиксированного значения фазы θ'_4 решение системы (5.17)–(5.20) для остальных фаз существует и имеет вид

$$\cot \theta_1 = \frac{c}{d} + \frac{\left(\frac{g_1 g_3}{g_2 g_4} - d \right) \frac{g_3}{g_2}}{\left(\frac{g_3^2}{g_2^2} b + d \cot \theta'_4 \right) \frac{g_1}{g_4} d}, \quad (5.21)$$

$$\cot \theta'_2 = - \frac{g_1 g_2}{g_3 g_4} \left(\frac{g_3^2}{g_2^2} b + d \cot \theta'_4 \right), \quad (5.22)$$

$$\cot \theta_3 = \frac{d - \frac{g_1 g_3}{g_2 g_4}}{\frac{g_3^2}{g_2^2} b + d \cot \theta'_4}. \quad (5.23)$$

Таким образом, для любого произвольного фиксированного значения θ'_4 мы можем подобрать фазы локальных осцилляторов θ_1 , θ'_2 и θ_3 таким образом, чтобы матрица (5.13) была равна любой наперед заданной произвольной симплектической матрице. Это означает, что преобразование, заданное матрицей (5.13), является произвольным.

5.1.3 Ошибка одномодового преобразования на взвешенном кластере

Давайте оценим ошибки в рассматриваемой схеме однонаправленных вычислений. Для этого перейдем от вектора ошибок к вектору, состоящему из среднеквадратичных флукту-

аций ошибок $\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle$. Мы будем считать, что все исходные ресурсные осцилляторы статистически независимы и сжаты одинаковым образом, то есть $\langle \delta \hat{y}_j^2 \rangle \equiv \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ для $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда, вектор среднеквадратичных флуктуаций ошибок имеет вид

$$\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1^2} \left(\frac{\cot \theta_3 \cot \theta'_4 - 1}{g_3/g_2} \right)^2 + \left(\frac{\cot \theta'_4}{g_3/g_2} \right)^2 + \frac{1}{g_3^2} \\ \frac{1}{g_1^2} \left(\frac{g_3 \cot \theta_3}{g_2} \right)^2 + \frac{g_3^2}{g_2^2} + 1 \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (5.24)$$

Обратим внимание, что ошибки преобразования напрямую зависят от значения весовых коэффициентов g_1 и g_3 . С другой стороны, от отношения весовых коэффициентов g_3/g_2 зависит то, какое преобразование выполняет схема при конкретных значениях фаз. Поэтому имеет смысл сравнивать ошибки преобразования только при фиксированном отношении g_3/g_2 , то есть сравнивать ошибки одних и тех же преобразований. Чтобы добиться такого сравнения ошибок, давайте подставим в выражение (5.24) решения (5.21)–(5.23). В результате мы получим следующий вектор ошибок:

$$\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_3^2} + \left(\frac{g_2}{g_3} \right)^2 \cot^2 \theta'_4 + \frac{g_2^2 \left(b \frac{g_4}{g_1} + \frac{g_2}{g_3} \cot \theta'_4 \right)^2}{g_3^2 g_4^2 \left(b + d \left(\frac{g_2}{g_3} \right)^2 \cot \theta'_4 \right)^2} \\ 1 + \frac{1}{\left(\frac{g_2}{g_3} \right)^2} + \frac{\left(d \frac{g_2}{g_3} \frac{g_4}{g_1} - 1 \right)^2}{g_4^2 \left(b + d \left(\frac{g_2}{g_3} \right)^2 \cot \theta'_4 \right)^2} \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (5.25)$$

Данный вектор зависит от реализуемого преобразования (от величин d и b), от фазы θ'_4 и от величины весовых коэффициентов кластерного состояния g_1, g_2, g_3, g_4 .

Зависимость ошибки от весовых коэффициентов кластерного состояния означает, что для каждого преобразования (для определенных b и d) существует конфигурация кластера, вычисления на которой дают наименьшую ошибку. Эту особенность можно использовать для построения не универсальных вычислителей, а схем, решающих определенную задачу. Здесь и далее мы будем интересоваться ошибками универсальных квантовых вычислений, оставив за рамками рассмотрения вычислители для локальных задач (которые обычно называют квантовыми симуляторами). К сожалению, на практике при построении универсальных вычислителей мы не можем подбирать весовые коэффициенты под каждое преобразование, поскольку это требовало бы от нас каждый раз перестраивать схему генерации кластера. В реальности у нас есть кластерное состояние с фиксированными весовыми коэффициентами. Нам нужно подобрать весовые коэффициенты так, чтобы любое преобразование выполнялось с малой ошибкой. Дальнейшая наша цель – это выявление таких весовых коэффициентов.

Из выражения (5.25) мы видим, что, если наложить следующие требования на весовые коэффициенты: $g_1 \gg g_4, g_2 \gg g_3, g_3 \gg 1, g_4 \gg 1$, а θ'_4 приравнять $\pi/2$, то ошибка вычислений будет пропорциональна следующему вектору:

$$\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle, \quad (5.26)$$

То есть мы получим минимальную ошибку вычислений, которая к тому же не зависит от реализуемых преобразований (от b и d). К сожалению, в экспериментах мы не можем делать бесконечно большими весовые коэффициенты, поскольку это требование аналогично наличию бесконечного ресурса сжатия. На данный момент сжатие, которое было продемонстрировано экспериментально составляет -15 дБ [11]. В разделе 2.2 мы показали, что при таком сжатии ресурсных осцилляторов мы можем получать значения весовых коэффициентов в диапазоне $g \in [0, 5]$. Именно в этом диапазоне мы будем варьировать весовые коэффициенты при дальнейшей оптимизации. При таком ограничении, выполнение требований, приводящих к оценке (5.26) не достижимо, поэтому нам требуется проводить оптимизацию иначе. Однако, при этом нам стоит опираться на полученные выше соотношения.

Давайте теперь сравним ошибки при различных весовых коэффициентах. В качестве меры ошибок мы будем рассматривать $\|\cdot\|_\infty$ норму. Эта норма имеет вид $\|\langle \delta \hat{e}_0^2 \rangle\|_\infty = \max[\langle \delta \hat{e}_0^2 \rangle_1, \langle \delta \hat{e}_0^2 \rangle_2]$. Как мы уже обсуждали, чтобы минимизировать ошибку нам нужно потребовать выполнения следующих условий: $g_1 \gg g_4$, $g_2 \gg g_3$, $g_3 \gg 1$, $g_4 \gg 1$ и $\theta'_4 = \pi/2$. Из первых двух условий, можно заключить, что g_1 и g_2 должны быть выбраны максимальными, то есть $g_1 = g_2 = 5$. Из оставшихся условий следует, что величины g_3 и g_4 тоже должны быть достаточно велики (по сравнению с единицей), поэтому мы выбрали $g_3 = g_4 = 4$. Также как и раньше мы исследуем влияние весовых коэффициентов на ошибки преобразований при $\theta'_4 = \pi/2$. Следует отметить, что можно провести многомерную оптимизацию для нахождения глобального минимума ошибок вычислений. Однако, это вычислительно сложная задача. Кроме того, глобальный минимум может лежать за пределами допустимых значений весовых коэффициентов. В связи с этим мы ограничились подбором весовых коэффициентов состояния кластера, которые обеспечивают меньшую ошибку для большего количества операций.

Сравнивать ошибки, получаемые при вычислении на кластерном состоянии с выбранными весовыми коэффициентами ($g_1 = g_2 = 5$ и $g_3 = g_4 = 4$), мы будем сначала со случаем, когда используется невзвешенное кластерное состояние, то есть состояние у которого все весовые коэффициенты равны единицам ($g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 1$). Именно такое состояние очень часто рассматривается исследователями в качестве универсального состояния для реализации квантовых гауссовых преобразований [49, 88]. Ошибки вычислений при использовании этих двух кластерных состояний приведены на рис. 5.2. Мы видим, что при использовании взвешенного кластерного состояния с подобранными весовыми коэффициентами, ошибка всегда будет меньше, чем при таких же вычислениях на невзвешенном кластерном состоянии. Другими словами мы получили, что для вычисления лучше подходит взвешенное кластерное состояние с подобранными весовыми коэффициентами.

После того, как была произведена оптимизация ошибок за счет выбора весовых коэффициентов мы можем перейти к оптимизации за счет выбора фазы гомодинного детектора θ'_4 . До этого момента мы рассматривали лишь наиболее простой случай, когда $\theta'_4 = \pi/2$. Как следует из (5.26) этот случай является оптимальным, если весовые коэффициенты подчиняются

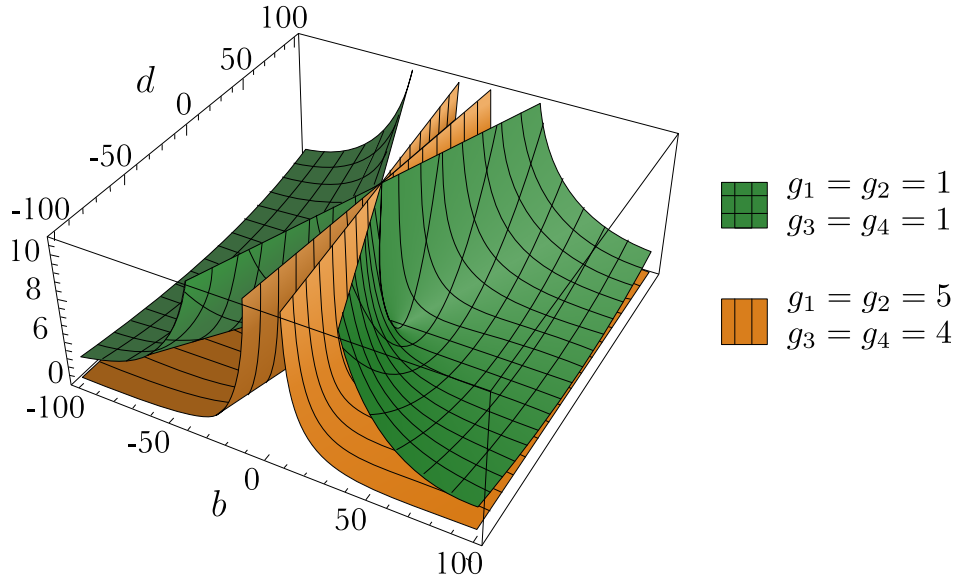


Рис. 5.2: Графики распределения ошибок $\|\langle \delta \hat{e}_0^2 \rangle\|_\infty / \langle \delta y_s^2 \rangle$ в зависимости от реализуемого одномодового преобразования, то есть в зависимости от b и d (см. выражение (5.15)). На графике представлены две поверхности ошибок соответствующие вычислениям на двух кластерных состояниях. Нижняя поверхность соответствует случаю вычислений на взвешенном оптимизированном кластерном состоянии ($g_1 = g_2 = 5, g_3 = g_4 = 4$). Верхняя поверхность соответствует ошибкам вычислений на невзвешенном кластерном состоянии ($g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 1$).

следующим условиям: $g_1 \gg g_4, g_2 \gg g_3, g_3 \gg 1, g_4 \gg 1$. В реальности весовые коэффициенты сильно ограничены по величине. Такое ограничение приводит к тому, что мы не можем достигнуть минимального предела ошибок (5.26). Это значит, что значение фазы $\theta'_4 = \pi/2$ не обязательно является оптимальным. Из выражения (5.25) следует, что подбирая фазу θ'_4 под каждое конкретное преобразование (т.е. под конкретные b и d) мы можем минимизировать величину ошибок. Именно такая оптимизация и была произведена нами.

Весь процесс оптимизации сводится к задаче поиска минимального значения функции $\|\langle \delta \hat{e}_0^2 \rangle\|_\infty = h(\theta'_4, b, d)$ по параметру θ'_4 в зависимости от b и d . В результате оптимизации мы получаем зависимость оптимальной фазы от преобразования, то есть $\theta'_{4,min} = f(b, d)$. На рис. 5.3 приведены поверхности ошибок вычислений на кластерном состоянии с весовыми коэффициентами $g_1 = g_2 = 5$ и $g_3 = g_4 = 4$, когда фаза $\theta'_4 = \pi/2$ и когда выполнена оптимизация фазы в зависимости от преобразования ($\theta'_4 = \theta'_{4,min} = f(b, d)$). Из рисунка видно, что ошибки одномодовых преобразований при оптимизированных значениях фазы θ'_4 всегда меньше, нежели ошибки при $\theta'_4 = \pi/2$. Другими словами, с помощью оптимизации фазы гомодинного детектора можно еще больше снизить ошибку любого одномодового преобразования.

Для демонстрации превосходства нашей оптимизированной схемы (с оптимизированными весовыми коэффициентами и оптимизированной фазой θ'_4) давайте сравним их со случаем вычислений на кластерном состоянии с одинаковыми и максимально большими весовыми коэффициентами ($g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 5$) при $\theta'_4 = \pi/2$. На рис. 5.4 приведены величины ошибок, получаемые при вычислениях в этих двух схемах. Из графика видно, что ошибка

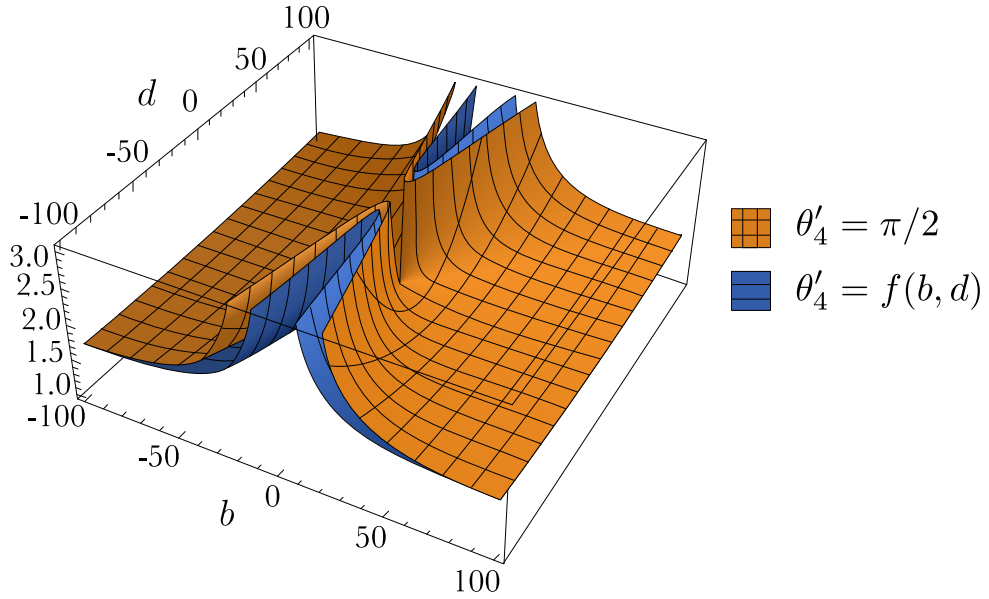


Рис. 5.3: Графики распределения ошибок одномодовых преобразований $\|\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle\|_\infty / \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ в зависимости от b и d (см. выражение (5.15)). Преобразования выполнены на кластерном состоянии с оптимизированными весовыми коэффициентами ($g_1 = g_2 = 5$, $g_3 = g_4 = 4$). На графике верхняя поверхность соответствует случаю, когда фаза гомодинного детектора выбрана постоянной $\theta'_4 = \pi/2$. Нижняя поверхность соответствует случаю, когда фаза подбирается под реализуемое преобразование (под b и d).

в оптимизированном случае меньше, чем ошибка получаемая при вычислении на кластере с максимальными весовыми коэффициентами. Здесь важно отметить, что для создания кластера с большим весовым коэффициентом требуется реализовать преобразование сжатия с большим коэффициентом сжатия (см. раздел 2.2). Для выполнения такого преобразования нам требуется дополнительный ресурс, без потери общности можно говорить о том, что требуется дополнительная энергия: чем больше коэффициент сжатия, тем больше энергии нужно. Все это значит, что для создания кластера с максимальными весовыми коэффициентами требуется больше энергии, нежели для создания оптимизированного кластерного состояния.

Таким образом, можно заключить, что грамотное использование имеющегося физическо-го ресурса (грамотное распределение весовых коэффициентов и подбор фаз при гомодинировании), помогает снизить ошибку квантовых вычислений.

5.2 Одномодовые преобразования с кубическим фазовым затвором

Как мы показали в предыдущем разделе, одномодовое гауссово преобразование на линейном 4-х узловом взвешенном кластере является произвольным. Также, за счет оптимизации весовых коэффициентов кластерного состояния, можно уменьшить ошибку этого преобразования. Однако, ошибка при выполнении части операций все еще остается очень большой.

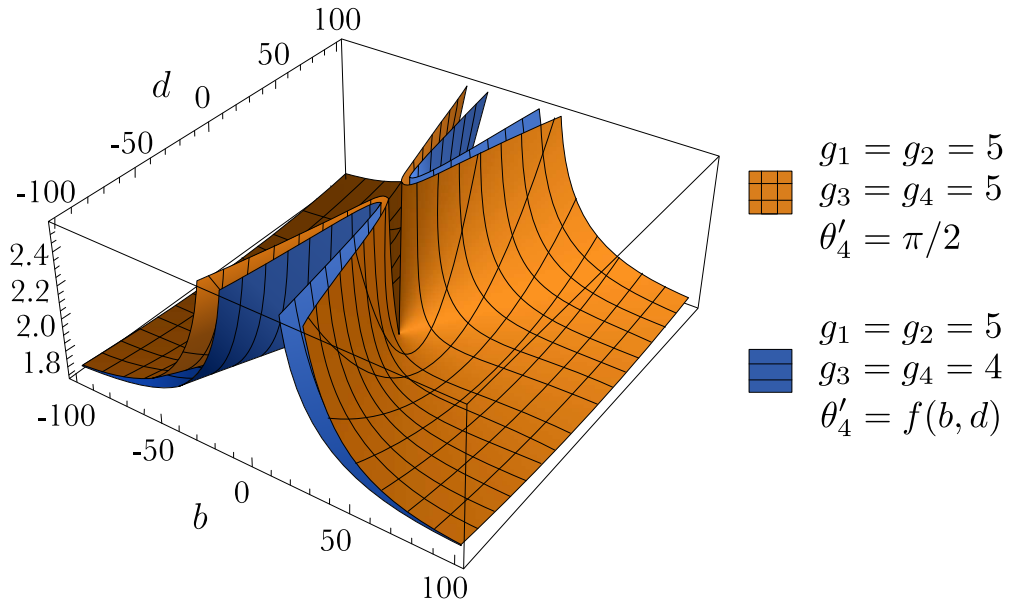


Рис. 5.4: Графики распределения ошибок одномодового преобразования $\|\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle\|_\infty / \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ в зависимости от b и d (см. выражение (5.15)). На графике, верхняя поверхность соответствует случаю вычислений на кластерном состоянии с весовыми коэффициентами $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 5$ и фазе $\theta'_4 = \pi/2$. Нижняя поверхность соответствует ошибке вычислений на кластерном состоянии с оптимизированными весовыми коэффициентами $g_1 = g_2 = 5$, $g_3 = g_4 = 4$ и оптимизированной фазой гомодинного детектора $\theta'_4 = f(b, d)$.

В главе 2.4 мы показали, что возможно уменьшить ошибку телепортации, за счет использования операции кубической фазы для приготовления негауссового ресурсного состояния. В этом разделе мы применим эту технику для уменьшения ошибки в схеме произвольного одномодового преобразования на 4-х узловом кластере.

5.2.1 Схема преобразования с кубическим фазовым затвором

Для того, чтобы дополнительно уменьшить ошибку преобразований, мы включим негауссово состояние в качестве второго узла кластера (рис. 5.5(а)). Из формулы (5.24) видно, что в выражении для ошибки x -квадратуры содержится слагаемое, зависящее от фазы θ'_4 , которое мы не можем подавить за счет весовых коэффициентов преобразования CZ. Оно возникает вследствие конечной степени сжатия второго ресурсного осциллятора, поэтому мы заменяем на негауссов ресурс именно второй узел.

В качестве ресурса для приготовления кластера, как и в предыдущей схеме, используются сжатые по y -квадратуре осцилляторы. Их квадратуры описываются выражением (5.1). Как показано на рис. 5.5(б), негауссов ресурс готовится путем последовательного применения ко второму ресурсному осциллятору операций поворота фазы на $\pi/2$:

$$\hat{R}_{\pi/2,2} = e^{i\frac{\pi}{2}\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2}, \quad (5.27)$$

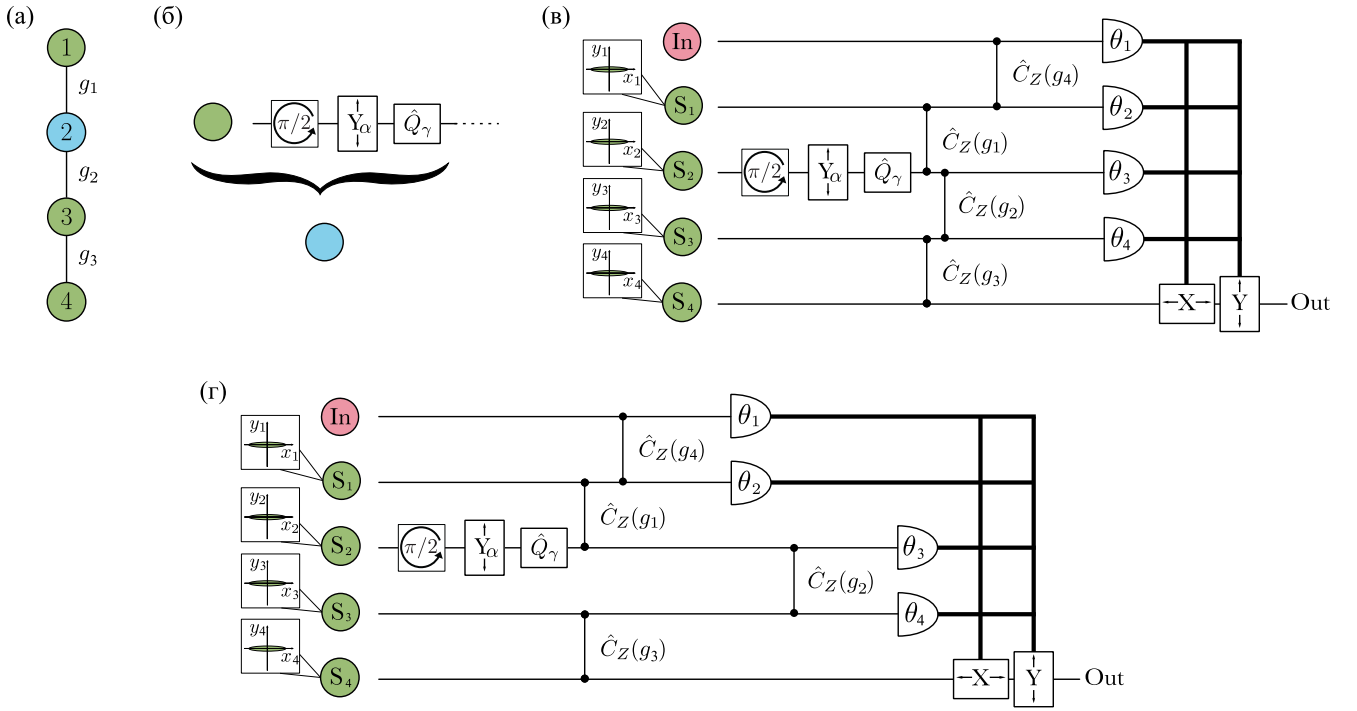


Рис. 5.5: (а) Структура кластерного состояния, используемого как ресурс для вычисления: зеленым показаны гауссовы узлы, голубым – негауссовы. (б) Схема приготовления негауссова ресурсного состояния. (в) Схема реализации произвольного одномодового гауссова преобразования на линейном взвешенном 4-х узловом кластере с использованием кубического фазового затвора. (г) Схема реализации произвольного одномодового гауссова преобразования на паре 2-х узловых кластеров с использованием кубического фазового затвора. На схемах: Y_α – операции сдвига y -квадратуры на величину α , \hat{Q}_γ – кубический фазовый затвор со степенью нелинейности γ .

сдвига по y -квадратуре на величину $\alpha > 0$ (3.3) и кубического фазового затвора (3.5). Таким образом второй ресурсный осциллятор перейдет в негауссово состояние, амплитуда которого описывается выражением

$$\hat{a}_2 = -\hat{y}_2 + 3\gamma(\alpha + \hat{x}_2)^2 + i(\alpha + \hat{x}_2). \quad (5.28)$$

Действие кубического фазового затвора деформирует область неопределенности сжатого по x -квадратуре состояния таким образом, что на фазовой плоскости образуется парабола. Однако, при смещении по y -квадратуре на положительную величину α , удовлетворяющую условию $\alpha^2 \gg \langle \hat{x}_2^2 \rangle$, значения квадратур второго осциллятора будут лежать в первом квадранте фазовой плоскости. Иными словами, на фазовой плоскости останется только одна из ветвей параболы. Более подробно мы рассматривали это в разделе 3.1.

Как и в прошлом разделе, начнем с анализа преобразования, осуществляемого на первой паре ресурсных состояний. Первый гауссов и второй негауссов ресурсные осцилляторы перепутываются преобразованием CZ с весовым коэффициентом g_1 , а состояние на входе перепутывается с первым ресурсным осциллятором преобразованием CZ с коэффициентом

g_4 . После перепутывания амплитуды осцилляторов описываются выражениями

$$\hat{a}'_{in} = \hat{x}_{in} + i(\hat{y}_{in} + g_4\hat{x}_1), \quad (5.29)$$

$$\hat{a}'_1 = \hat{x}_1 + i(\hat{y}_1 - g_1\hat{y}_2 + 3g_1\gamma(\alpha + \hat{x}_2)^2 + g_4\hat{x}_{in}), \quad (5.30)$$

$$\hat{a}'_2 = -\hat{y}_2 + 3\gamma(\alpha + \hat{x}_2)^2 + i(\alpha + \hat{x}_2 + g_1\hat{x}_1). \quad (5.31)$$

Мы видим, что первый ресурсный осциллятор теперь содержит нелинейность из негауссова осциллятора, вследствие перепутывания. Проведем гомодинные измерения с фазами локальных осцилляторов θ_1 и θ_2 над входным и первым ресурсным осцилляторами, соответственно. Операторы фототоков будут равны

$$\hat{i}_{in} = \beta \sin \theta_1 (\hat{y}_{in} + g_4\hat{x}_1) + \beta \cos \theta_1 \hat{x}_{in}, \quad (5.32)$$

$$\hat{i}_1 = \beta \cos \theta_2 \hat{x}_1 + \beta \sin \theta_2 (\hat{y}_1 - g_1\hat{y}_2 + 3g_1\gamma(\alpha + \hat{x}_2)^2 + g_4\hat{x}_{in}), \quad (5.33)$$

где β – амплитуда локальных осцилляторов гомодинных детекторов. Благодаря перепутыванию осцилляторов, такое измерение приведет к изменению значений квадратурных компонент поля второго осциллятора:

$$\hat{x}'_2 = \left(\frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} \right) \hat{x}_{in} + \frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \hat{y}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g_1} + \frac{i_{1,m}}{\beta g_1 \sin \theta_2} - \frac{i_{in,m} \cot \theta_2}{\beta g_1 g_4 \sin \theta_1}, \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}'_2 = & -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} \hat{x}_{in} - \frac{g_1}{g_4} \hat{y}_{in} + \frac{i_{in,m} g_1}{\beta g_4 \sin \theta_1} \\ & + \frac{1}{\sqrt{3\gamma}} \sqrt{\frac{i_{1,m}}{\beta g_1 \sin \theta_2} - \frac{i_{in,m} \cot \theta_2}{\beta g_1 g_4 \sin \theta_1} + \left(\frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} \right) \hat{x}_{in} + \frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \hat{y}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g_1} + \hat{y}_2}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Здесь, как и в прошлом разделе, операторы фототоков заменены на s -числа, соответствующие результатам конкретных измерений: $i_{1,m}$ и $i_{in,m}$. В отличие от аналогичных выражений (5.8) и (5.9) для гауссового кластера, из-за негауссового ресурса в выражении (5.35) для y -квадратуры возникает корень, который определяет ошибку преобразования. Отметим, что, как и в задаче телепортации, рассмотренной в разделе 3.1, благодаря большому сдвигу $\alpha > 0$, необходимо учитывать только положительное значение корня. С целью сокращения дальнейших выкладок, мы введем новую величину

$$I_m = \frac{i_{1,m}}{\beta g_1 \sin \theta_2} - \frac{i_{in,m} \cot \theta_2}{\beta g_1 g_4 \sin \theta_1}. \quad (5.36)$$

Мы можем разложить корень в выражении (5.35) в ряд по параметру

$$\frac{1}{I_m} \left[\left(\frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} \right) \hat{x}_{in} + \frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \hat{y}_{in} - \frac{\hat{y}_{s,1}}{g_1} + \hat{y}_{s,2} \right], \quad (5.37)$$

сохраняя только первый член в разложении:

$$\begin{aligned} \hat{y}'_2 = & -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} \hat{x}_{in} - \frac{g_1}{g_4} \hat{y}_{in} + \frac{i_{in,m} g_1}{\beta g_4 \sin \theta_1} + \sqrt{\frac{I_m}{3\gamma}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{12\gamma I_m}} \left[\left(\frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} \right) \hat{x}_{in} + \frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \hat{y}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g_1} + \hat{y}_2 \right]. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Обрывание ряда корректно в предположении малости всех моментов параметра разложения. Для гауссовых входных состояний достаточно выполнения неравенств

$$3\gamma\alpha^2 \gg \left(\frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} \right) \langle \hat{x}_{in} \rangle + \left(\frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \right) \langle \hat{y}_{in} \rangle, \quad (5.39)$$

$$(3\gamma\alpha^2)^2 \gg \left(\frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} \right)^2 \langle \hat{x}_{in}^2 \rangle + 2 \left(\frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} \right) \left(\frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \right) \langle \hat{x}_{in} \rangle \langle \hat{y}_{in} \rangle + \left(\frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \right)^2 \langle \hat{y}_{in}^2 \rangle + \frac{\langle \hat{y}_1^2 \rangle}{g_1^2} + \langle \hat{y}_2^2 \rangle. \quad (5.40)$$

Отметим, что это требование ограничивает применимость рассматриваемого протокола. Ниже мы обсудим в деталях насколько существенно это ограничение.

Таким образом, после измерений над осцилляторами во входном и первом каналах квадратуры второго осциллятора будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_2 \\ \hat{y}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12\gamma I_m}} & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} & \frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \\ -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} & -\frac{g_1}{g_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ \frac{\hat{y}_2}{\sqrt{12\gamma I_m}} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} I_m \\ \frac{i_{in,m}}{\beta g_2 \sin \theta_1} + \sqrt{\frac{I_m}{3\gamma}} \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Сравним полученное выражение с выражением (5.10) для преобразования на паре гауссовых ресурсных осцилляторов. Видно, что нелинейность кубического фазового затвора приводит к появлению дополнительной деформации (матрица перед квадратными скобками в правой части уравнения (5.41)). При этом коэффициент деформации зависит от измеренных значений фототоков, из-за чего мы не можем им управлять. Поэтому нам необходимо скомпенсировать эту деформацию. В противном случае она будет искажать результат, и мы не только не уменьшим ошибку преобразования, но и можем ее заметно увеличить.

Операция на второй паре узлов не содержит нелинейности, поэтому осуществляемое на ней преобразование с точностью до весовых коэффициентов аналогично преобразованию (5.10). На выходе схемы s -числовые составляющие квадратур поля будут скомпенсированы по результатам измерений с помощью операций сдвига. Также мы введем то же обозначение (5.11), что и в прошлом разделе. Тогда преобразование, осуществляемое над квадратурами входного осциллятора имеет вид

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out} \\ \hat{y}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_3 \cot \theta'_4 - 1}{g_3/g_2} & \frac{\cot \theta'_4}{g_3/g_2} \\ -\frac{g_3 \cot \theta_3}{g_2} & -\frac{g_3}{g_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12\gamma I_m}} & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_1 \cot \theta'_2 - 1}{g_1/g_4} & \frac{\cot \theta'_2}{g_1/g_4} \\ -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} & -\frac{g_1}{g_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ \frac{\hat{y}_2}{\sqrt{12\gamma I_m}} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_3}{g_3} \\ \hat{y}_4 \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

Теперь посмотрим, возможно ли скомпенсировать деформацию, возникающую из-за состояния кубической фазы. По сути, эта деформация приводит к искажению базиса осциллятора на выходе первой части схемы. Поэтому, зная результаты измерений в первой части схемы, у нас есть возможность убрать эту деформацию, скорректировав правильным образом базис измерений во второй части схемы. Для того, чтобы понять, как это сделать, перепишем

выражение (5.42), включив деформацию в матрицу второй части преобразования:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out} \\ \hat{y}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g_2}{g_3} \left[\left(\cot \theta_3 + \frac{1}{\sqrt{12\gamma I_m}} \right) \cot \theta_4 - 1 \right] & \frac{g_2}{g_3} \cot \theta_4 \\ -\frac{g_3}{g_2} \left(\cot \theta_3 + \frac{1}{\sqrt{12\gamma I_m}} \right) & -\frac{g_3}{g_2} \end{pmatrix} \\ \times \left[\begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2 - 1}{g_1/g_4} & \frac{\cot \theta_2}{g_1/g_4} \\ -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} & -\frac{g_1}{g_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ \frac{\hat{y}_2}{\sqrt{12\gamma I_m}} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_3}{g_3} \\ \hat{y}_4 \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

Если мы введем новую фазу θ'_3 , для которой будет выполняться соотношение

$$\cot \theta'_3 = \cot \theta_3 + \frac{1}{\sqrt{12\gamma I_m}}, \quad (5.44)$$

то преобразование над входным осциллятором будет определяться матрицей (5.13), зависящей от θ'_3 . Иными словами, по результатам измерений над входным и первым ресурсным осцилляторами мы можем подстроить фазу θ_3 таким образом, чтобы скомпенсировать дополнительную деформацию. То есть мы можем выполнить желаемое преобразование без искажения. В итоге, в модифицированной схеме преобразование, осуществляемое над входным состоянием совпадает с преобразованием в (5.12), но имеет другую ошибку:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out} \\ \hat{y}_{out} \end{pmatrix} = U(\theta_1, \theta'_2, \theta'_3, \theta'_4) \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \delta \hat{\mathbf{e}}(\theta'_3, \theta'_4). \quad (5.45)$$

Здесь матрица U определяется равенством (5.13), а ошибка задается выражением

$$\delta \hat{\mathbf{e}}_0(\theta'_3, \theta'_4) = \begin{pmatrix} \frac{\cot \theta'_3 \cot \theta'_4 - 1}{g_3/g_2} & \frac{\cot \theta'_4}{g_3/g_2} \\ -\frac{g_3 \cot \theta'_3}{g_2} & -\frac{g_3}{g_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ \frac{\hat{y}_2}{\sqrt{12\gamma I_m}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_3}{g_3} \\ \hat{y}_4 \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

Таким образом, ошибка преобразования зависит не только от фаз θ'_3 и θ'_4 , но и значения измеренной величины I_m .

Мы получили, что рассмотренная схема с кубическим фазовым затвором осуществляет то же преобразование что и схема с гауссовым кластером, рассмотренная в предыдущем разделе. Таким образом, нам не требуется обосновывать, что полученное состояние является произвольным. Однако ошибки этих двух преобразований существенно отличаются друг от друга. Далее мы сравним ошибки преобразования двух рассмотренных нами схем и оценим ограничения, возникающие в схеме с кубическим фазовым затвором.

5.2.2 Ошибка для преобразования с кубическим фазовым затвором

Теперь исследуем, как изменилась ошибка в модифицированной схеме с кубическим фазовым затвором. Как и в предыдущем разделе, мы будем считать, что гауссовы ресурсные состояния сжаты одинаковым образом ($\langle \delta \hat{y}_j^2 \rangle \equiv \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ для $j \in 1, 2, 3, 4$). В таком случае, вектор среднеквадратичных флуктуаций ошибки для этой схемы имеет вид

$$\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1^2} \left(\frac{\cot \theta'_3 \cot \theta'_4 - 1}{g_3/g_2} \right)^2 + \frac{1}{12\gamma I_m} \left(\frac{\cot \theta'_4}{g_3/g_2} \right)^2 + \frac{1}{g_3^2} \\ \frac{1}{g_1^2} \left(\frac{g_3 \cot \theta'_3}{g_2} \right)^2 + \frac{1}{12\gamma I_m} \frac{g_3^2}{g_2^2} + 1 \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (5.47)$$

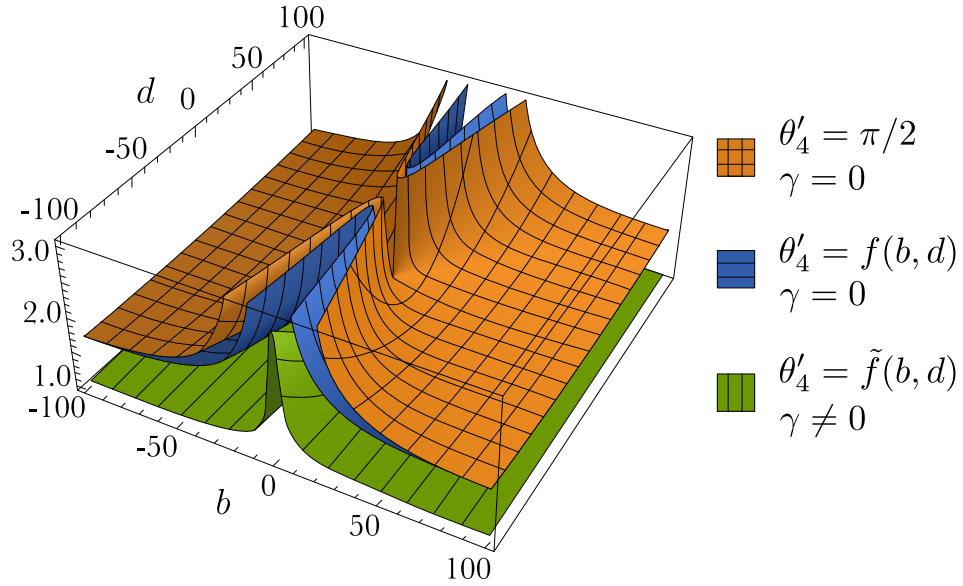


Рис. 5.6: Графики распределения ошибок одномодового преобразования $\|\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle\|_\infty / \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$. На графике представлены три поверхности ошибок в зависимости от реализуемого преобразования, то есть от величины b и d (см. выражение (5.15)). Все три поверхности рассчитаны для случая оптимизированных весовых коэффициентов ($g_1 = g_2 = 5$, $g_3 = g_4 = 4$). Оранжевая и синяя поверхности показывают ошибки для схемы без кубического фазового затвора ($\gamma = 0$): оранжевая поверхность соответствует случаю с фиксированным значением фазы $\theta'_4 = \pi/2$; синяя поверхность – случаю, когда по углу θ'_4 проводится оптимизация ($\theta'_4 = \tilde{f}(b, d)$). Зелёная поверхность показывает ошибку схемы, использующей кубический фазовый затвор ($\gamma \neq 0$), и когда по углу θ'_4 проводится оптимизация.

Сравнивая выражения (5.24) и (5.47), мы видим, что второе слагаемое в ошибках квадратур для схемы с кубическим фазовым затвором оказывается меньше в $12\gamma I_m$ раз. Среднее значение I_m пропорционально квадрату сдвига ресурсного состояния α , поэтому при достаточном сдвиге α мы можем значительно уменьшить вклад в ошибку от этих слагаемых.

Как и в прошлом разделе, мы рассмотрим норму $\|\cdot\|_\infty$ как меру ошибки преобразования. Для оценки в качестве значения величины I_m возьмем ее среднее значение, то есть $I_m = \langle I_m \rangle \approx 3\gamma\alpha^2$. В расчетах использовано относительно небольшое значение коэффициента преобразования кубической фазы $\gamma = 0.1$ [89, 94] и сдвиг $\alpha = 5\sqrt{5}$ (т.е. $12\gamma I_m = 45$). Такое значение сдвига удовлетворяет условию $\alpha^2 \gg \langle \hat{x}_{s,2}^2 \rangle$, требуемому для корректной работы протокола, и реализуемо на практике (см. раздел 3.1). На рис. 5.6 приведено сравнение поверхностей ошибок для схемы без использования кубического фазового затвора и с ним. Как мы можем видеть, ошибка схемы с кубическим фазовым затвором оказывается меньше для всего диапазона преобразований. Кроме того, существенно подавляется нарастание ошибки в окрестности $b = 0$. Таким образом, включение в кластер негауссового ресурса, полученного с помощью кубического фазового затвора, позволяет снизить ошибку одномодовых гауссовых преобразований.

Следует отметить одну важную особенность нашего протокола, которая заключается в том, что он может работать с кубическим фазовым затвором с низкой степенью нелинейности. Мы можем компенсировать малое значение γ за счет большого значения смещения α . Это важное преимущество, поскольку увеличение коэффициента преобразования кубической фазы γ является сложной экспериментальной задачей.

5.2.3 Оценка эффективности оптимизации однонаправленных квантовых вычислений

В предыдущих разделах мы показали, что однонаправленные вычисления на четырехузловом кластере состояния можно оптимизировать с помощью выбора весовых коэффициентов, а также использования негауссовых операций. При этом результатом такой оптимизации станет уменьшение ошибок в результатах вычислений. Важный вопрос, который осталось обсудить – насколько данные оптимизации эффективны? Какой выигрыш в уменьшении ошибок получается, если использовать все предложенные нами процедуры?

Чтобы ответить на эти вопросы, нам нужно в первую очередь понять, как получаемые ошибки сравнивать между собой и насколько существенный выигрыш от предложенных оптимизаций мы можем ожидать. Для этого необходимо вспомнить процедуру коррекции квантовых ошибок (см. раздел 1.2.2). При однонаправленных вычислениях, ошибка вычислений смещает квадратуры на небольшую величину, пропорциональную дисперсии сжатой квадратуры ресурсных осцилляторов. В работе [15] был предложен метод коррекции ошибок малых смещений квадратур с использованием ГКР-состояний. В работе [12] данный метод был теоретически применен к задаче коррекции ошибок однонаправленных вычислений. В работе [56] метод коррекции ошибок однонаправленных вычислений был уточнен с учетом шумов, присущих самой процедуре коррекции ошибок, т.е. неидеальности ГКР-состояний. Опуская все подробности теории, можно заключить, что вероятность того, что ошибка не будет скорректирована (т.е. испортит результаты вычислений) задается следующим выражением [56]:

$$P_{err}(x_{er}, y_{er}) = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sqrt{\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle} \left(x_{er} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sqrt{\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle} (y_{er} + \sqrt{5} + 1)} \right), \quad (5.48)$$

где $x_{er} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ – это величина среднеквадратичных флуктуаций ошибки в x -кватруре выходного осциллятора над которым произведено преобразование, а $y_{er} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ – среднеквадратичные флуктуации в y -кватруре. Аргументы функций erf определяются двумя факторами: дисперсий ошибок преобразования над каждой из квадратур (первые члены в знаменателях аргументов) и ошибкой, добавляемой процедурой коррекции ошибок. При этом последняя также представляет собой сумму двух вкладов: ошибку от выполнения операции SUM(1) и ошибку от уширения пиков ГКР-состояний. Отметим, что различие в ошибках x - и y -

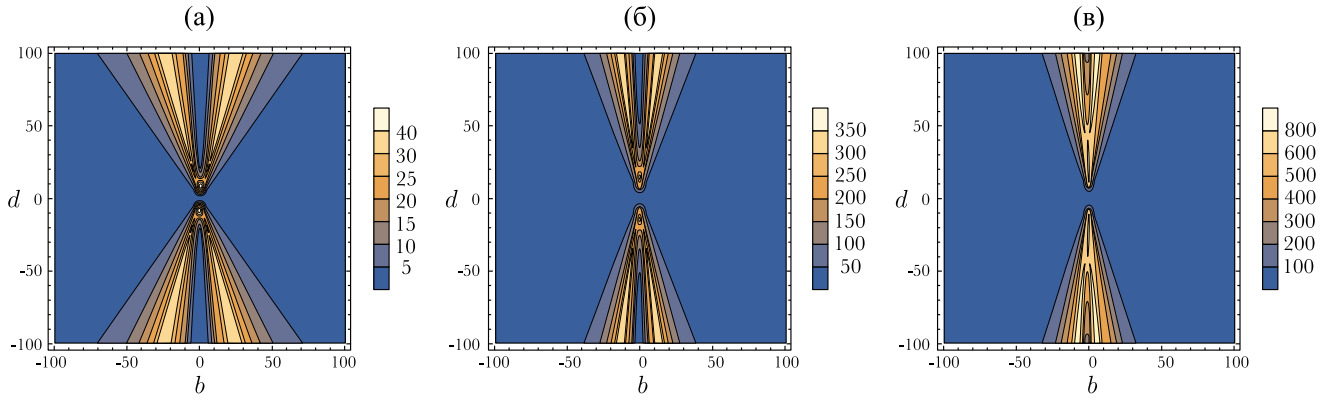


Рис. 5.7: Отношение вероятностей $P_{err}(x_{er}, y_{er})/P_{err}(x_{er}^{opt}, y_{er}^{opt})$ в зависимости от b и d (см. выражение (5.15)). Здесь $P_{err}(x_{er}, y_{er})$ вероятность неверной коррекции ошибок для не оптимизированных вычислений, а $P_{err}(x_{er}^{opt}, y_{er}^{opt})$ – для оптимизированных. На графике: а) Оптимизация выполняется только по весовым коэффициентам ($g_4 = g_3 = 4$, $g_2 = g_1 = 5$ и $\theta'_4 = \pi/2$). б) оптимизация произведена по весовым коэффициентам и фазе гомодинного детектора; в) произведена полная оптимизация и используется кубический фазовый затвор.

квадратур определяется последовательностью выполнения процедуры коррекции. Функция ошибки $\text{erf}(1/z)$ является монотонно убывающей, а значит чем больше значение среднеквадратичных флуктуаций ошибок в квадратурах, тем больше вероятность того, что ошибки не будут исправлены.

Как видно из определения функции $P_{err}(x_{er}, y_{er})$, она напрямую показывает качество вычислений и характеризует его масштаб. Соответственно, ее удобно использовать в качестве меры для сравнения оптимизированных и не оптимизированных вычислений и для оценки эффективности процедуры оптимизации. На рис. 5.7 представлены графики отношений вероятностей $P_{err}(x_{er}, y_{er})/P_{err}(x_{er}^{opt}, y_{er}^{opt})$, где $P_{err}(x_{er}, y_{er})$ вероятность неверной коррекции ошибок для не оптимизированных вычислений, а $P_{err}(x_{er}^{opt}, y_{er}^{opt})$ – для оптимизированных. Не оптимизированные вычисления соответствуют вычислениям на не взвешенном кластерном состоянии при $\theta'_4 = \pi/2$. В качестве оптимизированных вычислений мы рассмотрели те же три случая, что обсуждались выше на рис. 5.6: а) оптимизация по весовым коэффициентам ($g_4 = g_3 = 4$, $g_2 = g_1 = 5$) при $\theta'_4 = \pi/2$; б) оптимизация по весовым коэффициентам и фазе гомодинных измерений $\theta'_4 = f(b, d)$; в) оптимизация по весовым коэффициентам и фазе гомодинных измерений, а также с использованием кубического фазового затвора. Все графики рассчитаны для сжатия ресурсных осцилляторов в -15 дБ. Из графиков видно, что при оптимизации лишь по весовым коэффициентам вероятность ошибки для некоторых преобразований меньше в 45 раз. Если помимо оптимизации по весовым коэффициентам использовать оптимизацию по фазам гомодинного детектора, то вероятность ошибки удастся снизить в 400 раз. Если же мы будем использовать помимо оптимизации еще и кубический фазовый затвор, то вероятность возникновения ошибки для некоторых преобразований будет меньше в 900 раз. Отметим, что если для вычисления используются вспомогательные

ресурсные осцилляторы с меньшим сжатием, то выигрыш от процедуры оптимизации окажется еще более существенным.

Таким образом мы видим, что предложенная нами оптимизация работает весьма эффективно. С ее помощью можно снизить вероятность возникновения ошибки в результатах вычислений после процедуры коррекции на несколько порядков. Это означает, что данная оптимизированная схема вычислений более отказоустойчивая, а значит для реализации отказоустойчивых универсальных квантовых вычислений в данной схеме требуется меньшее сжатие, нежели было предложено ранее [12].

5.3 Двухмодовые преобразования с кубическим фазовым затвором

Как обсуждалось в разделе 1.1.3, еще одним необходимым элементом для реализации универсальных квантовых вычислений является двухмодовая операция. В отличие от одномодовых операций, нам не требуется уметь выполнять произвольную двухмодовую операцию, достаточно выполнить любую перепутывающую. В качестве реализуемого двухмодового преобразования, нами было выбрано преобразование CZ. Напомним, что в идеальном случае, преобразование CZ с весовым коэффициентом g преобразует квадратуры входных осцилляторов как

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out,1} \\ \hat{x}_{out,2} \\ \hat{y}_{out,1} \\ \hat{y}_{out,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g & 1 & 0 \\ g & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{x}_{in,2} \\ \hat{y}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,2} \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

Стоит отметить, что реализация преобразования CZ для двух произвольных входных состояний не эквивалентна по сложности перепутыванию сжатых осцилляторов или примешиванию входных состояний к кластеру с помощью преобразования CZ. В последнем случае нам необходимо организовать взаимодействие квантовых состояний с четко известными свойствами, что заведомо является более простой задачей с точки зрения ее физической реализации. В оптических системах, операцию CZ над узлами кластера часто заменяют правильно подобранными линейно-оптическими преобразованиями. Однако, операция CZ над произвольной парой состояний может быть выполнена с использованием уже сформированного кластера.

5.3.1 Преобразование CZ на взвешенном 4-х узловом кластере

Для начала, рассмотрим как преобразование CZ реализуется на взвешенном 4-х узловом кластере. Как и в случае одномодовых преобразований, ресурсом для приготовления кластера выступают сжатые по y -квadrатуре осцилляторы, квадратуры которых описываются выражением (5.1).

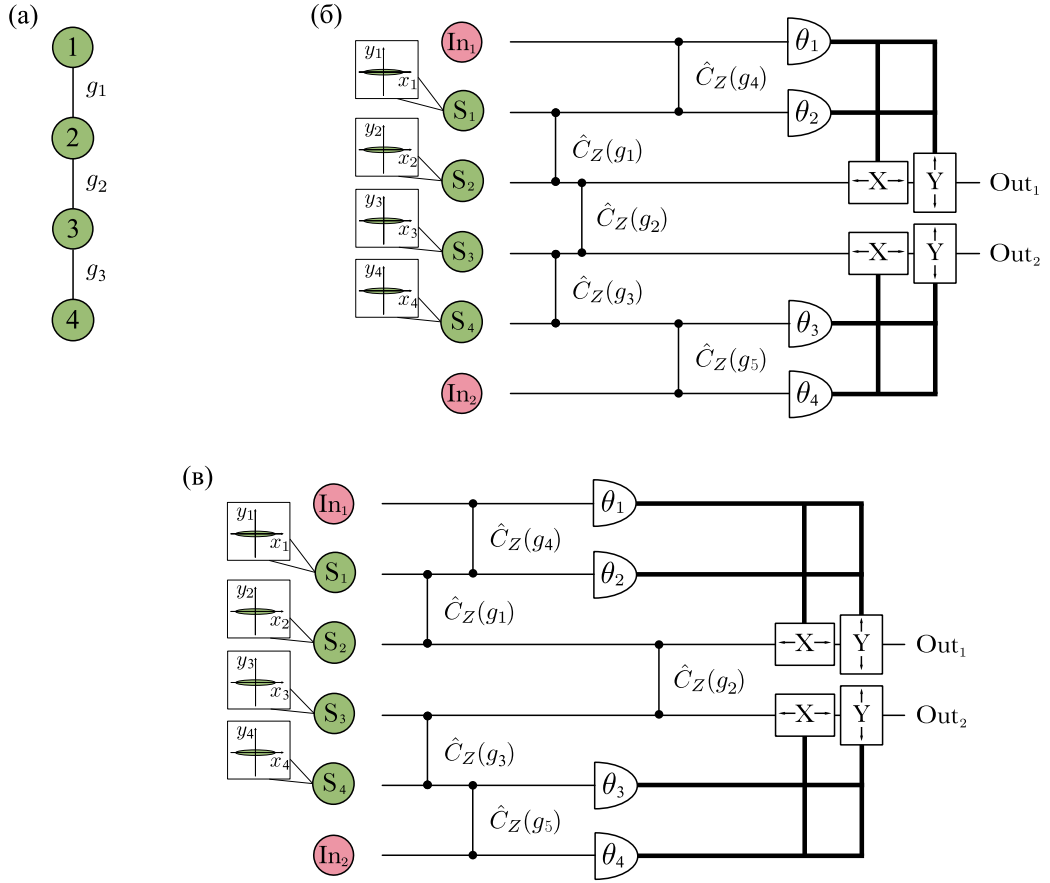


Рис. 5.8: (а) Структура кластерного состояния, используемого как ресурс. (б) Схема реализации преобразования CZ на линейном взвешенном 4-х узловом кластере. (в) Схема реализации преобразования CZ на паре 2-х узловых кластеров.

Все операции CZ коммутируют друг с другом, а преобразование CZ, перепутывающее второй и третий ресурсные осцилляторы, коммутирует со всеми гомодинными измерениями. Благодаря этому, мы можем свести преобразование на 4-х узловом кластере (см. рис. 5.8(б)), к преобразованию на паре 2-х узловых кластеров (см. рис. 5.8(в)) с их дальнейшим перепутыванием, как мы делали это для одномодовых преобразований. При этом операции на каждом из двухузловых кластеров совершают над одним из входных состояний преобразование (5.10). После чего, результаты этих преобразований перепутываются операцией CZ с весовым коэффициентом g_2 .

Рассматриваемая схема будет осуществлять над квадратурами входных осцилляторов преобразование (5.49) при условии, что $g_4 = -g_1$, $g_5 = -g_3$ и $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \pi/2$. Квадратуры выходных осцилляторов при этом будут задаваться выражением

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out,1} \\ \hat{x}_{out,2} \\ \hat{y}_{out,1} \\ \hat{y}_{out,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 1 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{x}_{in,2} \\ \hat{y}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{y}_1 \\ g_1 \\ -\hat{y}_4 \\ g_3 \\ \hat{y}_2 - g_2 \frac{\hat{y}_4}{g_3} \\ \hat{y}_3 - g_2 \frac{\hat{y}_1}{g_1} \end{pmatrix}. \quad (5.50)$$

Весовой коэффициент реализуемого таким образом преобразования CZ будет зависеть только от весового коэффициента кластерного состояния g_2 . Поскольку мы должны выполнять операцию CZ с фиксированным весовым коэффициентом, то g_2 не может выступать в качестве параметра оптимизации. Для простоты мы рассмотрим случай $g_2 = 1$.

Так же как и при оценке ошибок одномодовых операций, мы будем считать, что гауссовы ресурсные состояния сжаты одинаковым образом, то есть $\langle \delta \hat{y}_j^2 \rangle \equiv \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ для $j \in 1, 2, 3, 4$. Вектор среднеквадратичных флуктуаций ошибки для такой схемы преобразования CZ имеет вид

$$\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1^2} \\ \frac{1}{g_3^2} \\ 1 + \frac{1}{g_3^2} \\ 1 + \frac{1}{g_1^2} \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (5.51)$$

Таким образом, ошибка двухмодового преобразования будет уменьшаться при увеличении весовых коэффициентов g_1 и g_3 . В идеальном случае можно добиться нулевой ошибки в x -квadrатурах выходных состояний, однако ошибка в y -квadrатурах не может быть сделана меньше чем $\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$. При максимально достижимом значении сжатия -15 дБ значения весовых коэффициентов составляют $g_1 = g_3 = 5$ (см. раздел 2.2); тогда норма ошибки составит $\|\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle\|_\infty = 1.04 \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$.

Можно заметить, что рассмотренная реализация CZ содержит в себе две схемы телепортации, которые переносят входные состояния на второй и третий ресурсные осцилляторы. Ошибка преобразования будет напрямую зависеть от ошибки, с которой мы выполняем процедуру телепортации.

5.3.2 Схема преобразования CZ с кубическим фазовым затвором

Как мы выяснили в предыдущем разделе, увеличение весовых коэффициентов не дает возможности уменьшить ошибку в y -квadrатурах выходных состояний. Она не может быть сделана меньше чем дисперсия сжатой квадратуры ресурсных осцилляторов. Для того чтобы исправить это, мы используем тот же подход, что и для одномодовых операций. То есть мы заменим узлы кластера, вносящие наибольший вклад в ошибку, на негауссовы ресурсные состояния. Увеличение весовых коэффициентов не влияет на ошибку, вносимую вторым и третьим ресурсными осцилляторами, поэтому мы заменим именно их (см. рис. 5.9(а)). Сами негауссовы ресурсные состояния будут приготавливаться с помощью кубического фазового затвора точно таким же образом, как и в разделе 5.2.1.

Если перейти к эквивалентной схеме преобразования на паре двухузловых кластеров (рис 5.9(в)), то мы видим, что над каждым из входных состояний совершается преобразование (5.41). Как мы обсуждали в разделе 5.2.1, это преобразование содержит дополнительную деформацию, зависящую от результатов измерений. Но в отличие от схемы одномодовых

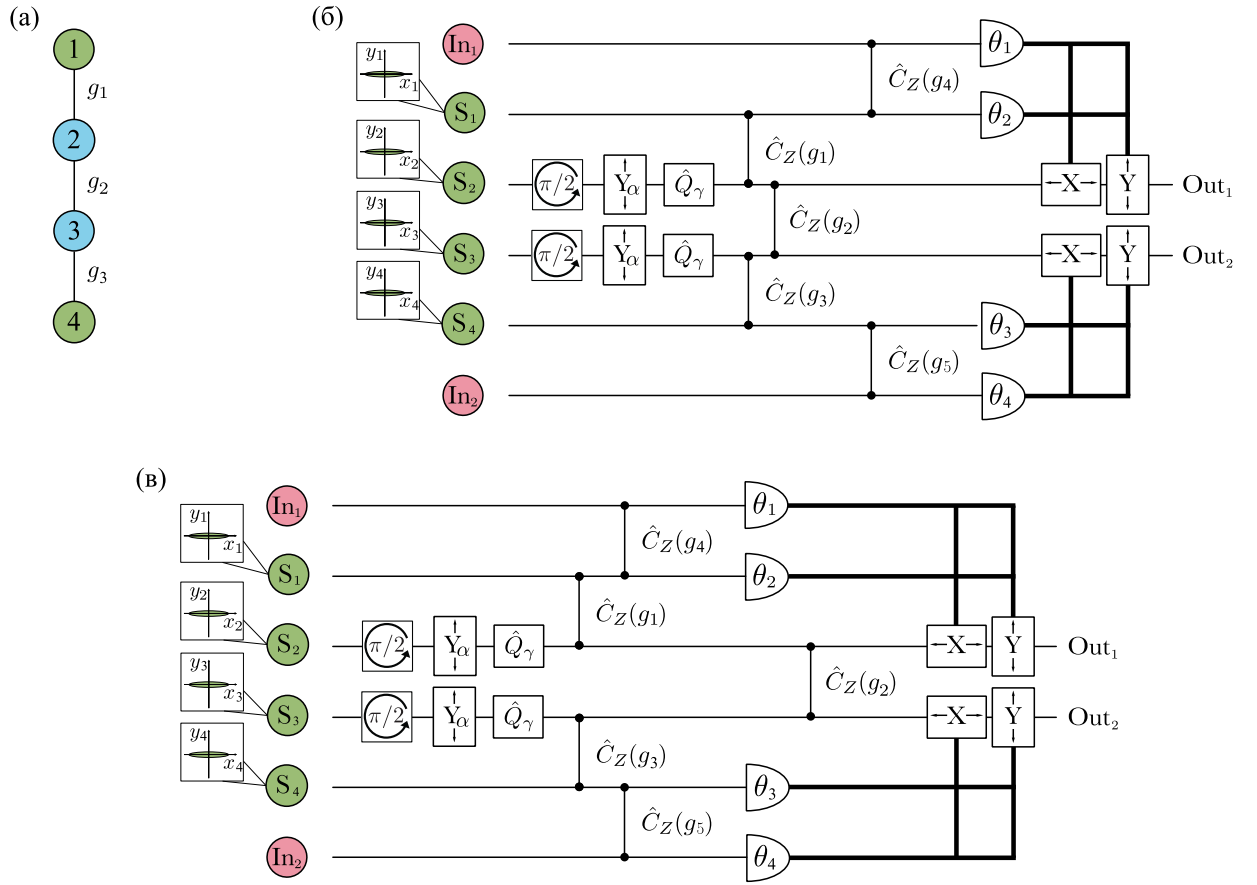


Рис. 5.9: (а) Структура кластерного состояния, используемого как ресурс для вычисления: зеленым показаны гауссовы узлы, голубым – негауссовы. (б) Схема реализации преобразования CZ на линейном взвешенном 4-х узловом кластере с использованием кубического фазового затвора. (в) Схема реализации преобразования CZ на паре 2-х узловых кластеров с использованием кубического фазового затвора.

операций мы не проводим управляемое преобразование над результатом (5.41) и не можем скорректировать эту деформацию в дальнейшем. Однако у нас есть возможность скомпенсировать искажение непосредственно при процедуре телепортации.

Рассмотрим как преобразуется входное состояние In_1 . Для того, чтобы телепортировать состояние In_1 на второй ресурсный осциллятор, необходимо взять $g_4 = -g_1$ и $\theta_2 = \pi/2$. Тогда квадратуры второго осциллятора после измерений будут определяться выражением

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_2 \\ \hat{y}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cot \theta_1 + \sqrt{\frac{g_1 \beta}{12\gamma i_{1,m}}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{y}_1 \\ g_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i_{1,m}}{\beta g_1} \\ \frac{i_{in,1,m}}{\beta g_2 \sin \theta_1} + \sqrt{\frac{i_{1,m}}{3\gamma \beta g_1}} \end{pmatrix}. \quad (5.52)$$

Обратим внимание, что значение фототока $i_{1,m}$ получается в результате измерений над состоянием в первом канале. Если мы выполним измерение над первым осциллятором раньше,

чем над входным, то мы сможем подстроить фазу θ_1 так, чтобы

$$\cot \theta_1 = -\sqrt{\frac{g_1 \beta}{12\gamma i_{1,m}}}. \quad (5.53)$$

Это дает нам возможность выполнить телепортацию без неконтролируемого искажения.

Таким образом, квадратуры на выходе такой схемы преобразования CZ будут определяться выражением

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out,1} \\ \hat{x}_{out,2} \\ \hat{y}_{out,1} \\ \hat{y}_{out,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 1 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{x}_{in,2} \\ \hat{y}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ -\frac{\hat{y}_4}{g_3} \\ \sqrt{\frac{g_1 \beta}{12\gamma i_{1,m}}} \left(\hat{y}_2 - \frac{\hat{y}_1}{g_1} \right) - g_2 \frac{\hat{y}_4}{g_3} \\ \sqrt{\frac{g_3 \beta}{12\gamma i_{4,m}}} \left(\hat{y}_3 - \frac{\hat{y}_4}{g_3} \right) - g_2 \frac{\hat{y}_1}{g_1} \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

Как мы можем видеть, входные квадратуры преобразуются так же, как и в схеме без негауссовых операций (см. выражение (5.50)), однако ошибки в y -квadrатурах существенно отличаются.

Оценим ошибки, возникающие в рассмотренной схеме. Сдвиги сжатых состояний при приготовлении негауссовых состояний мы будем считать одинаковыми и равными α . Для оценки мы возьмем значения измеряемых фототоков равными их средним значениям, то есть $i_{1,m} = \langle \hat{i}_{1,m} \rangle \approx 3\beta\gamma g_1 \alpha^2$ и $i_{4,m} = \langle \hat{i}_{4,m} \rangle \approx 3\beta\gamma g_3 \alpha^2$. Как и в прошлом разделе, мы возьмем $g_2 = 1$, а дисперсии сжатых квадратур ресурсных осцилляторов одинаковыми и равными $\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$. Тогда вектор среднеквадратичных флуктуаций ошибки будет иметь вид

$$\langle \delta \hat{e}_0^2 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1^2} \\ \frac{1}{g_3^2} \\ \frac{g_1 \beta}{12\gamma i_{1,m}} \left(1 + \frac{1}{g_1^2} \right) + \frac{1}{g_3^2} \\ \frac{g_3 \beta}{12\gamma i_{4,m}} \left(1 + \frac{1}{g_3^2} \right) + \frac{1}{g_1^2} \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1^2} \\ \frac{1}{g_3^2} \\ \frac{1}{36\gamma^2 \alpha^2} \left(1 + \frac{1}{g_1^2} \right) + \frac{1}{g_3^2} \\ \frac{1}{36\gamma^2 \alpha^2} \left(1 + \frac{1}{g_3^2} \right) + \frac{1}{g_1^2} \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (5.55)$$

Первое слагаемое в ошибках y -квadrатур оказывается обратно пропорционально измеренным значениям фототоков $i_{1,m}$ и $i_{4,m}$, которые растут с увеличением сдвига α . Для численной оценки возьмем весовые коэффициенты $g_1 = g_3 = 5$, а значение коэффициента нелинейности кубической фазы $\gamma = 0.1$ и сдвиг $\alpha = 5\sqrt{5}$ (т.е. такие же, как при оценке ошибок одномодовых преобразования). Тогда норма ошибки будет $\|\langle \delta \hat{e}_0^2 \rangle\|_\infty \approx 0.063 \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$, что в 16 раз меньше, чем в схеме без кубического фазового затвора.

Таким образом мы можем уменьшать вклады в ошибку преобразования от всех ресурсных осцилляторов: от одних – за счет весовых коэффициентов кластерного состояния, а от других – за счет использования кубического фазового затвора.

5.3.3 Модифицированный протокол телепортации с кубическим фазовым затвором

Как мы уже обсуждали, рассмотренная схема преобразования CZ содержит в себе две схемы телепортации. Однако протокол телепортации с кубическим фазовым затвором из преды-

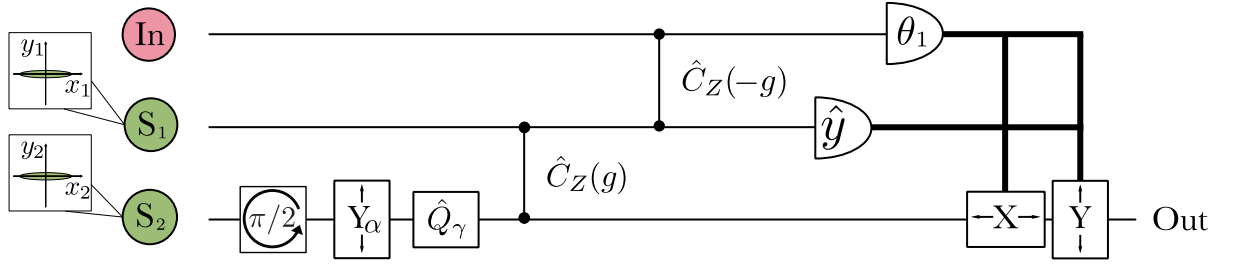


Рис. 5.10: Модифицированная схема телепортации с использованием кубического фазового затвора.

дущего раздела отличается от рассмотренного нами в главе 2.4. В этом модифицированном протоколе мы подстраиваем значение фазы θ_1 так, чтобы скомпенсировать неуправляемое искажение результатов телепортации. Схема протокола показана на рис. 5.10, а значение фазы определяется выражением

$$\cot \theta_1 = -\sqrt{\frac{g}{12\gamma Y_1}}. \quad (5.56)$$

где $Y_1 = i_{1,m}/\beta$ – измеренное значение y -квадратуры первого ресурсного осциллятора. Из выражения (5.52) следует, что квадратуры выходного состояния в таком случае имеют вид

$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g}, \quad (5.57)$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + \sqrt{\frac{g}{12\gamma Y_1}} \left(\hat{y}_2 - \frac{\hat{y}_1}{g} \right). \quad (5.58)$$

Чтобы характеризовать уровень ошибок, перейдем к величинам среднеквадратичных флуктуаций ошибки телепортации в каждой квадратуре: $\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \langle (\hat{x}_{out} - \hat{x}_{in})^2 \rangle$ и $\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \langle (\hat{y}_{out} - \hat{y}_{in})^2 \rangle$. Как и раньше, мы будем полагать, что $\langle \delta \hat{y}_j^2 \rangle \equiv \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ для $j = 1, 2$, а величину измеренной квадратуры оценим как ее среднее, то есть $Y_1 = \langle \hat{y}_1 \rangle \approx 3\gamma g \alpha^2$. Тогда среднеквадратичные флуктуации ошибки будут задаваться выражениями

$$\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \frac{1}{g^2} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle, \quad (5.59)$$

$$\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \frac{g}{12\gamma Y_1} \left(1 + \frac{1}{g^2} \right) \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle = \frac{1}{36\gamma^2 \alpha^2} \left(1 + \frac{1}{g^2} \right) \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (5.60)$$

Сравнивая эти выражения и выражения (3.19) и (3.20) из раздела 3.1, мы видим что в ошибке y -квадратуры отсутствует вклад от x -квадратуры входного состояния, которое было вызвано тем, что мы не компенсировали неуправляемое искажение. Именно это слагаемое вносило наибольший вклад в ошибку. Более того, именно зависимость ошибки от входного состояния была основным лимитирующим фактором предложенного ранее протокола. Здесь мы избавляемся от этого ограничения.

Зависимость для оценки среднеквадратичной флуктуации ошибки y -квадратуры от величины сдвига α показана оранжевым на рис. 5.11. При расчетах были взяты $\gamma = 0.1$, сжатие

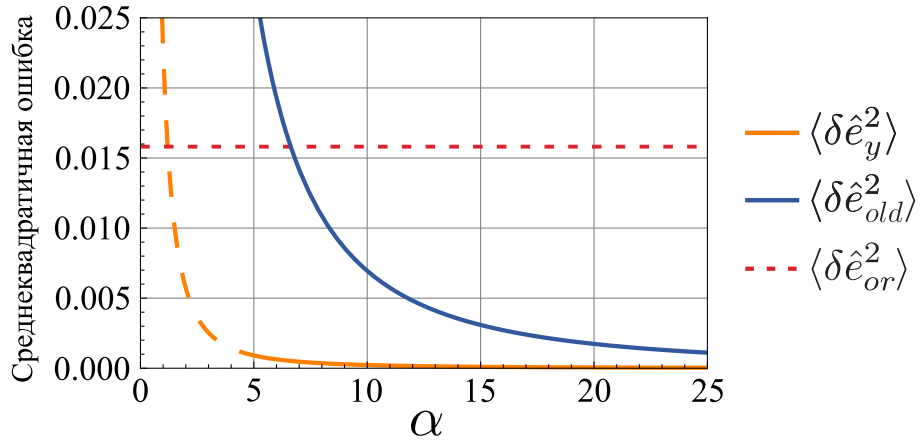


Рис. 5.11: Среднеквадратичная ошибка y -кватратуры телепортированного состояния в зависимости от величины сдвига негауссова ресурса α : оранжевым – для протокола с коррекцией фазы, синим – для протокола без коррекции фазы при телепортации вакуумного состояния. Красной пунктирной линией отмечен уровень ошибки телепортации в традиционной схеме. Степень сжатия ресурсных осцилляторов равна -15 дБ.

ресурсных осцилляторов -15 дБ и $g = 5$. Для сравнения, синим показана ошибка для схемы без коррекции фазы гомодина при телепортации вакуумного состояния для тех же параметров (см. раздел 3.1). Красным обозначены среднеквадратичные флуктуации ошибки для оригинальной схемы телепортации $\langle \delta \hat{e}_{or}^2 \rangle = 2\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ (см. раздел 2.1.1). Поскольку при малых α перестают выполняться приближения, в которых получены анализируемые выражения, то зависимость в этой области показана пунктиром. Как мы можем видеть, модифицированный протокол телепортации с кубическим фазовым затвором выигрывает по сравнению с оригинальным протоколом при любых α , достаточных для выполнения допущенных приближений.

Таким образом, правильный подбор фазы при гомодинных измерениях позволяет значительно уменьшить ошибку в протоколе телепортации с кубическим фазовым затвором.

5.4 Заключение по главе 5

В этой главе мы показали, что варьирование весовых коэффициентов кластерного состояния, используемого как ресурс для вычислений, позволяет уменьшить ошибку произвольных одномодовых гауссовых операций. В реальных экспериментах ресурс сжатия не бесконечен и требуется его правильное распределение в кластере. Мы продемонстрировали, что существенную роль в снижении ошибки играют отношения весовых коэффициентов. Грамотное распределение весовых коэффициентов позволяет снизить ошибку для большинства одномодовых гауссовых преобразований, затрачивая при этом меньшее количество энергии.

Для неуниверсальных преобразований (решающих конкретную задачу) возможно подобрать конфигурацию кластерного состояния, обеспечивающую наименьшую ошибку вычис-

лений. В общем случае, для универсальных преобразований, может быть поставлена задача многомерной оптимизации, позволяющая отыскать оптимальную конфигурацию кластера для вычислений. Однако, такая задача оказывается чрезвычайно сложна. Ее сложность определяется как размером кластера (т.е. числом подбираемых параметров), так и тем, что пространство преобразований, на котором мы проводим оптимизацию, имеет бесконечный размер. Тем не менее возможно подобрать весовые коэффициенты, обеспечивающие меньшую ошибку для большей части преобразований.

Еще одним полезным инструментом, оказывается оптимизация по фазам гомодина. В отличие от весовых коэффициентов, оптимальные фазы гомодина возможно подбирать под каждое конкретное преобразование. Такая стратегия позволяет уменьшить ошибку преобразования без использования какого-либо дополнительного физического ресурса.

Также, мы показали, что включение в ресурсное кластерное состояние негауссовых узлов, приготовленных с помощью кубического фазового затвора, позволяет дополнительно уменьшить ошибку как произвольных одномодовых преобразований, так и двухмодовой операции CZ. Для корректной работы протоколов необходимо совершать относительно небольшие смещения сжатого состояния перед применением кубического фазового затвора. Такие смещения могут быть легко реализованы на практике. Необходимо отметить, что практическая реализация кубического фазового затвора до сих пор остается вызовом для экспериментаторов. Однако, для микроволнового диапазона недавно была продемонстрирована генерация состояний кубической фазы [94]. Также ведется активный поиск подходящих систем для реализации негауссовых вентилях в оптике [80, 82, 85, 89–91].

Нами была продемонстрирована эффективность предложенных методов оптимизации. Мы показали, что можно существенно снизить вероятность неправильной коррекции ошибки, используя предложенные методы оптимизации. Это делает нашу схему более отказоустойчивой. Таким образом, предлагаемый нами метод может дать существенный выигрыш при реализации произвольных одномодовых гауссовых преобразований.

Важно отметить, что предложенная нами процедура оптимизации не зависит от способа генерации кластерного состояния и от кодирования входных состояний. Независимо от доступных экспериментальных ресурсов можно оптимизировать схему, чтобы минимизировать ошибку квантовых вычислений.

Кроме того, мы показали что методика корректирования фаз по результатам измерений, необходимая в схемах операций с кубическим фазовым затвором, применима и к исходному протоколу телепортации. Ее использование позволяет существенно уменьшить ошибку в протоколе телепортации.

Обобщая всё вышесказанное, в пятой главе были раскрыты и обоснованы следующие положения, выносимые на защиту:

- Оптимизация весовых коэффициентов кластерного состояния, используемого как ресурс для вычислений, позволяет уменьшить ошибку произвольных одномодовых гауссовых операций по сравнению с операциями на не взвешенном кластерном состоянии.
- Одни и те же одномодовые преобразования могут выполняться при разных фазах гомодинных детекторов. Одна из фаз гомодина оказывается свободным параметром, который может быть использован для уменьшения ошибки.
- Включение в ресурсное кластерное состояние негауссовых узлов, приготовленных с помощью кубического фазового затвора, позволяет существенно уменьшить ошибку преобразования. Для некоторых преобразований удастся снизить вероятность возникновения ошибки в 900 раз по сравнению с вычислениями на не взвешенном кластере без оптимизации фаз гомодинных детекторов.

Заключение

В представленной работе мы исследовали методы уменьшения ошибок в модели однонаправленных квантовых вычислений.

Так в второй главе, мы провели анализ роли перепутывающих преобразований в протоколе телепортации, который является основополагающим для рассматриваемой модели вычислений. Результаты данной главы позволяют понять, что использование преобразования CZ более перспективно с точки зрения снижения требования на сжатие ресурсных осцилляторов. Фактически, эта операция позволяет проводить преобразования с большим числом менее сжатых осцилляторов, оставаясь на том же уровне шума. Это особенно важно, имея ввиду экспериментальные сложности в достижении высокой степени сжатия.

В рамках третьей главы мы предложили протокол телепортации, в котором снижение ошибки достигается за счет использования кубического фазового затвора. Сравнение предложенного нами протокола телепортации с существовавшим ранее протоколом с условным вычитанием фотонов, проведенное в четвертой главе, показывает, что протокол с кубическим фазовым затвором позволяет достигнуть более высоких значений верности, оставаясь при этом в рамках детерминированных операций. Таким образом, результаты этой главы показывают, что кубический фазовый затвор имеет больше перспектив для внедрения в схемы однонаправленных квантовых вычислений, чем процедура условного вычитания фотонов.

В последней главе мы применили методы уменьшения ошибки, выявленные благодаря анализу протокола телепортации, для снижения требования на сжатие ресурсных осцилляторов для гауссовых операций в схемах однонаправленных квантовых вычислений. Мы предложили, метод оптимизации весовых коэффициентов кластерного состояния и фаз гомотинных детекторов, обеспечивающий выполнение произвольных одномодовых гауссовых операций с наименьшей ошибкой. Кроме того, мы показали, что внедрение негауссовых узлов, полученных с помощью кубического фазового затвора, позволяет значительно снизить ошибку как произвольных одномодовых гауссовых операций, так и двухмодовой гауссовой операции CZ. Таким образом мы уменьшаем ошибки гауссовых операций, в рамках которых может быть решен большой класс задач. В тоже время, кубический фазовый затвор возможно использовать в качестве негауссовой операции, необходимой для универсальных квантовых вычислений. То есть мы применяем одно негауссово преобразование сразу для нескольких целей. Возникает вопрос: можно ли использовать состояния, полученные с помощью этой операции, для коррекции ошибок? Этот вопрос пока остается открытым. Важно

отметить, что проведенный нами анализ не привязан к конкретной физической реализации, и полученные результаты могут быть применены для любых физических систем, описываемых непрерывными переменными. Результаты этой части диссертации могут оказаться полезными при экспериментальной реализации универсального квантового компьютера.

Данная работа не только дает ответы на поставленные нами вопросы, но и порождает ряд новых, ответы на которые только предстоит найти. Так например, возникает вопрос о влиянии ошибок, связанных с физической реализацией кубического фазового затвора. Он остается открытым, поскольку физическая реализация этой негауссовой операции в оптическом диапазоне частот до сих пор является вызовом для экспериментаторов. Еще одна задача, возникшая в ходе исследования, касается оптимизации весовых коэффициентов кластерного состояния. Мы показали, что возможно уменьшить ошибку преобразования за счет правильного подбора весовых коэффициентов, однако глобальная оптимизация кластерного состояния, обеспечивающая минимальные ошибки при произвольных гауссовых операциях, на сегодня не достижима для численного анализа. В то же время, предложенный нами метод оптимизации весовых коэффициентов может быть применен для уменьшения ошибок конкретных (неуниверсальных) алгоритмов вычислений. Это может быть одним из возможных вариантов дальнейшего развития нашего исследования. Наконец, важным вопросом является поиск методов эффективной генерации негауссовых состояний, пригодных для использования в протоколах коррекции ошибок. Дальнейшие исследования негауссовых операций и состояний, как мы надеемся, помогут нам пролить свет на эти и многие другие вопросы.

Литература

1. Манин Ю.И. // Советское Радио. 1980. Т. 39, № 8. с. 128.
2. Feynman Richard P. Simulating physics with computers // International Journal of Theoretical Physics. 1982. Т. 21, № 6-7. С. 467–488.
3. Shor Peter W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer // SIAM J. Comput. Philadelphia, PA, USA, 1997. Oct. Т. 26, № 5. С. 1484–1509.
4. Grover Lov K. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack // Physical review letters. 1997. Т. 79, № 2. с. 325.
5. Lomonaco Jr Samuel J, Kauffman Louis H. Quantum hidden subgroup problems: A mathematical perspective // arXiv preprint quant-ph/0201095. 2002.
6. Preskill John. Quantum computing in the NISQ era and beyond // Quantum. 2018. Т. 2. с. 79.
7. Lloyd Seth, Braunstein Samuel L. Quantum computation over continuous variables // Physical Review Letters. 1999. Т. 82, № 8. с. 1784.
8. Universal quantum computation with continuous-variable cluster states / Nicolas C Menicucci, Peter Van Loock, Mile Gu [и др.] // Physical review letters. 2006. Т. 97, № 11. с. 110501.
9. Vaidman Lev. Teleportation of quantum states // Physical Review A. 1994. Т. 49, № 2. с. 1473.
10. Braunstein Samuel L, Kimble H Jeff. Teleportation of continuous quantum variables // Physical Review Letters. 1998. Т. 80, № 4. с. 869.
11. Detection of 15 dB squeezed states of light and their application for the absolute calibration of photoelectric quantum efficiency / Henning Vahlbruch, Moritz Mehmet, Karsten Danzmann [и др.] // Physical review letters. 2016. Т. 117, № 11. с. 110801.
12. Menicucci Nicolas C. Fault-tolerant measurement-based quantum computing with continuous-variable cluster states // Physical review letters. 2014. Т. 112, № 12. с. 120504.

13. Opatrny T, Kurizki Gershon, Welsch D-G. Improvement on teleportation of continuous variables by photon subtraction via conditional measurement // *Physical Review A*. 2000. T. 61, № 3. с. 032302.
14. Cochrane PT, Ralph TC, Milburn GJ. Teleportation improvement by conditional measurements on the two-mode squeezed vacuum // *Physical Review A*. 2002. T. 65, № 6. с. 062306.
15. Gottesman Daniel, Kitaev Alexei, Preskill John. Encoding a qubit in an oscillator // *Physical Review A*. 2001. T. 64, № 1. с. 012310.
16. Arora Sanjeev, Barak Boaz. *Computational complexity: a modern approach*. Cambridge University Press, 2009.
17. Нильсен М, Чанг И. *Квантовые вычисления и квантовая информация*. М.: Мир, 2006. Т. 824.
18. DiVincenzo David P. Quantum computation // *Science*. 1995. T. 270, № 5234. С. 255–261.
19. Lloyd Seth. Quantum-mechanical computers // *Scientific American*. 1995. T. 273, № 4. С. 140–145.
20. DiVincenzo David P. Topics in quantum computers // *Mesoscopic electron transport*. 1997. С. 657–677.
21. Quantum key distribution using gaussian-modulated coherent states / Frédéric Grosshans, Gilles Van Assche, Jérôme Wenger [и др.] // *Nature*. 2003. T. 421, № 6920. С. 238–241.
22. Cerf Nicolas J, Iblisdir Sofyan. Optimal N-to-M cloning of conjugate quantum variables // *Physical Review A*. 2000. T. 62, № 4. с. 040301.
23. Cerf Nicolas J, Ipe A, Rottenberg Xavier. Cloning of continuous quantum variables // *Physical Review Letters*. 2000. T. 85, № 8. с. 1754.
24. Optimal cloning of coherent states with a linear amplifier and beam splitters / Samuel L Braunstein, Nicolas J Cerf, Sofyan Iblisdir [и др.] // *Physical Review Letters*. 2001. T. 86, № 21. с. 4938.
25. Fiurášek Jaromír. Optical implementation of continuous-variable quantum cloning machines // *Physical Review Letters*. 2001. T. 86, № 21. с. 4942.
26. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels / Charles H Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau [и др.] // *Physical review letters*. 1993. T. 70, № 13. с. 1895.

27. Bergmann Marcel, van Loock Peter. Quantum error correction against photon loss using multicomponent cat states // Physical Review A. 2016. T. 94, № 4. c. 042332.
28. Schlegel David S, Minganti Fabrizio, Savona Vincenzo. Quantum error correction using squeezed Schrödinger cat states // Physical Review A. 2022. T. 106, № 2. c. 022431.
29. Braunstein Samuel L, Van Loock Peter. Quantum information with continuous variables // Reviews of modern physics. 2005. T. 77, № 2. c. 513.
30. Raussendorf Robert, Briegel Hans J. A one-way quantum computer // Physical review letters. 2001. T. 86, № 22. c. 5188.
31. Nielsen Michael A. Cluster-state quantum computation // Reports on Mathematical Physics. 2006. T. 57, № 1. C. 147–161.
32. Leonhardt Ulf. Measuring the quantum state of light. Cambridge university press, 1997. T. 22.
33. Menicucci Nicolas C, Flammia Steven T, van Loock Peter. Graphical calculus for Gaussian pure states // Physical Review A. 2011. T. 83, № 4. c. 042335.
34. Ultracompact generation of continuous-variable cluster states / Nicolas C Menicucci, Steven T Flammia, Hussain Zaidi [и др.] // Physical Review A. 2007. T. 76, № 1. c. 010302.
35. Experimental generation of four-mode continuous-variable cluster states / Mitsuyoshi Yukawa, Ryuji Ukai, Peter Van Loock [и др.] // Physical Review A. 2008. T. 78, № 1. c. 012301.
36. Zhang Jing, Braunstein Samuel L. Continuous-variable Gaussian analog of cluster states // Physical Review A. 2006. T. 73, № 3. c. 032318.
37. Compact Gaussian quantum computation by multi-pixel homodyne detection / Giulia Ferrini, Jean-Pierre Gazeau, Thomas Coudreau [и др.] // New Journal of Physics. 2013. T. 15, № 9. c. 093015.
38. Full characterization of a highly multimode entangled state embedded in an optical frequency comb using pulse shaping / R Medeiros De Araújo, Jonathan Roslund, Yin Cai [и др.] // Physical Review A. 2014. T. 89, № 5. c. 053828.
39. Sun Li-hui, Chen Yan-qin, Li Gao-xiang. Creation of four-mode weighted cluster states with atomic ensembles in high-Q ring cavities // Optics express. 2012. T. 20, № 3. C. 3176–3191.
40. Controlled Logic Gate Based on a Four-Node Linear Hybrid Cluster State / KS Tikhonov, AD Manukhova, SB Korolev [и др.] // Optics and Spectroscopy. 2019. T. 127. C. 878–887.

41. Milne Darran F, Korolkova Natalia V. Composite-cluster states and alternative architectures for one-way quantum computation // *Physical Review A*. 2012. T. 85, № 3. с. 032310.
42. Houhou Oussama, Aissaoui Habib, Ferraro Alessandro. Generation of cluster states in optomechanical quantum systems // *Physical Review A*. 2015. T. 92, № 6. с. 063843.
43. Ultra-large-scale continuous-variable cluster states multiplexed in the time domain / Shota Yokoyama, Ryuji Ukai, Seiji C Armstrong [и др.] // *Nature Photonics*. 2013. T. 7, № 12. С. 982–986.
44. Wavelength-multiplexed quantum networks with ultrafast frequency combs / Jonathan Roslund, Renné Medeiros De Araujo, Shifeng Jiang [и др.] // *Nature Photonics*. 2014. T. 8, № 2. С. 109–112.
45. Chen Moran, Menicucci Nicolas C, Pfister Olivier. Experimental realization of multipartite entanglement of 60 modes of a quantum optical frequency comb // *Physical review letters*. 2014. T. 112, № 12. с. 120505.
46. Invited article: Generation of one-million-mode continuous-variable cluster state by unlimited time-domain multiplexing / Jun-ichi Yoshikawa, Shota Yokoyama, Toshiyuki Kaji [и др.] // *APL photonics*. 2016. T. 1, № 6. с. 060801.
47. Deterministic generation of a two-dimensional cluster state / Mikkel V Larsen, Xueshi Guo, Casper R Breum [и др.] // *Science*. 2019. T. 366, № 6463. С. 369–372.
48. Generation of time-domain-multiplexed two-dimensional cluster state / Warit Asavanant, Yu Shiozawa, Shota Yokoyama [и др.] // *Science*. 2019. T. 366, № 6463. С. 373–376.
49. Universal linear Bogoliubov transformations through one-way quantum computation / Ryuji Ukai, Jun-ichi Yoshikawa, Noriaki Iwata [и др.] // *Physical review A*. 2010. T. 81, № 3. с. 032315.
50. Quantum memories: a review based on the European integrated project “qubit applications (QAP)” / Christoph Simon, Mikael Afzelius, Jürgen Appel [и др.] // *The European Physical Journal D*. 2010. T. 58. С. 1–22.
51. Tikhonov Kirill, Golubeva Tania, Golubev Yuri. Atomic thermal motion effect on efficiency of a high-speed quantum memory // *The European Physical Journal D*. 2015. T. 69. С. 1–14.
52. The Effect of Diffraction on a Pulse of Squeezed Light in the Protocol of a Multimode Resonant Quantum Memory Based on a Thermal Atomic Ensemble / ER Zinatullin, KS Tikhonov, T Yu Golubeva [и др.] // *Optics and Spectroscopy*. 2020. T. 128. С. 1458–1474.
53. Niset Julien, Fiurášek Jaromír, Cerf Nicolas J. No-go theorem for Gaussian quantum error correction // *Physical review letters*. 2009. T. 102, № 12. с. 120501.

54. Demonstration of a quantum nondemolition sum gate / Jun-ichi Yoshikawa, Yoshichika Miwa, Alexander Huck [и др.] // Physical Review Letters. 2008. Т. 101, № 25. с. 250501.
55. Glancy Scott, Knill Emanuel. Error analysis for encoding a qubit in an oscillator // Physical Review A. 2006. Т. 73, № 1. с. 012325.
56. Korolev SB, Golubeva T Yu. Error correction of the continuous-variable quantum hybrid computation on two-node cluster states: Limit of squeezing // Physics Letters A. 2022. Т. 441. с. 128149.
57. Robust fault tolerance for continuous-variable cluster states with excess antisqueezing / Blayney W Walshe, Lucas J Mensen, Ben Q Baragiola [и др.] // Physical Review A. 2019. Т. 100, № 1. с. 010301.
58. Bravyi Sergey B, Kitaev A Yu. Quantum codes on a lattice with boundary // arXiv preprint quant-ph/9811052. 1998.
59. Topological quantum memory / Eric Dennis, Alexei Kitaev, Andrew Landahl [и др.] // Journal of Mathematical Physics. 2002. Т. 43, № 9. С. 4452–4505.
60. Surface codes: Towards practical large-scale quantum computation / Austin G Fowler, Matteo Mariantoni, John M Martinis [и др.] // Physical Review A. 2012. Т. 86, № 3. с. 032324.
61. Tomita Yu, Svore Krysta M. Low-distance surface codes under realistic quantum noise // Physical Review A. 2014. Т. 90, № 6. с. 062320.
62. High-threshold fault-tolerant quantum computation with analog quantum error correction / Kosuke Fukui, Akihisa Tomita, Atsushi Okamoto [и др.] // Physical review X. 2018. Т. 8, № 2. с. 021054.
63. Noh Kyungjoo, Chamberland Christopher. Fault-tolerant bosonic quantum error correction with the surface–Gottesman-Kitaev-Preskill code // Physical Review A. 2020. Т. 101, № 1. с. 012316.
64. Noh Kyungjoo, Chamberland Christopher, Brandão Fernando GSL. Low-overhead fault-tolerant quantum error correction with the surface-GKP code // PRX Quantum. 2022. Т. 3, № 1. с. 010315.
65. Fault-tolerant continuous-variable measurement-based quantum computation architecture / Mikkel V Larsen, Christopher Chamberland, Kyungjoo Noh [и др.] // Prx Quantum. 2021. Т. 2, № 3. с. 030325.
66. Stolen RH, Ashkin A. Optical Kerr effect in glass waveguide // Applied Physics Letters. 1973. Т. 22, № 6. С. 294–296.

67. Schmidt HetAIMAMOGLU, Imamoglu A. Giant Kerr nonlinearities obtained by electromagnetically induced transparency // *Optics letters*. 1996. Т. 21, № 23. С. 1936–1938.
68. Modified self-Kerr-nonlinearity in a four-level N-type atomic system / Jiteng Sheng, Xihua Yang, Haibin Wu [и др.] // *Physical Review A*. 2011. Т. 84, № 5. с. 053820.
69. Large Kerr nonlinearity with a single atom / S Rebic, SM Tan, AS Parkins [и др.] // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. 1999. Т. 1, № 4. с. 490.
70. Effective Hamiltonian approach to the Kerr nonlinearity in an optomechanical system / ZR Gong, H Ian, Yu-xi Liu [и др.] // *Physical Review A*. 2009. Т. 80, № 6. с. 065801.
71. Aldana Samuel, Bruder Christoph, Nunnenkamp Andreas. Equivalence between an optomechanical system and a Kerr medium // *Physical Review A*. 2013. Т. 88, № 4. с. 043826.
72. Josephson-junction-embedded transmission-line resonators: From Kerr medium to in-line transmon / J Bourassa, F Beaudoin, Jay M Gambetta [и др.] // *Physical Review A*. 2012. Т. 86, № 1. с. 013814.
73. Generating Schrödinger-cat-like states by means of conditional measurements on a beam splitter / Mohammed Dakna, Tiemo Anhut, T Opatrny [и др.] // *Physical Review A*. 1997. Т. 55, № 4. с. 3184.
74. Dakna M, Knöll L, Welsch D-G. Quantum state engineering using conditional measurement on a beam splitter // *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*. 1998. Т. 3. С. 295–308.
75. Increasing entanglement between Gaussian states by coherent photon subtraction / Alexei Ourjoumtsev, Aurelien Dantan, Rosa Tualle-Brouri [и др.] // *Physical review letters*. 2007. Т. 98, № 3. с. 030502.
76. Enhancing quantum entanglement by photon addition and subtraction / Carlos Navarrete-Benlloch, Raúl García-Patrón, Jeffrey H Shapiro [и др.] // *Physical Review A*. 2012. Т. 86, № 1. с. 012328.
77. Strategies for enhancing quantum entanglement by local photon subtraction / Tim J Bartley, Philip JD Crowley, Animesh Datta [и др.] // *Physical Review A*. 2013. Т. 87, № 2. с. 022313.
78. Generating optical Schrodinger kittens for quantum information processing / Alexei Ourjoumtsev, Rosa Tualle-Brouri, Julien Laurat [и др.] // *Science*. 2006. Т. 312, № 5770. С. 83–86.

79. Generation of large-amplitude coherent-state superposition via ancilla-assisted photon subtraction / Hiroki Takahashi, Kentaro Wakui, Shigenari Suzuki [и др.] // Physical review letters. 2008. Т. 101, № 23. с. 233605.
80. Repeat-until-success cubic phase gate for universal continuous-variable quantum computation / Kevin Marshall, Raphael Pooser, George Siopsis [и др.] // Physical Review A. 2015. Т. 91, № 3. с. 032321.
81. Generation of optical Schrödinger cat states by generalized photon subtraction / Kan Takase, Jun-ichi Yoshikawa, Warit Asavanant [и др.] // Physical Review A. 2021. Т. 103, № 1. с. 013710.
82. Wave-function engineering via conditional quantum teleportation with a non-Gaussian entanglement resource / Warit Asavanant, Kan Takase, Kosuke Fukui [и др.] // Physical Review A. 2021. Т. 103, № 4. с. 043701.
83. Tailoring non-Gaussian continuous-variable graph states / Mattia Walschaers, Supratik Sarkar, Valentina Parigi [и др.] // Physical review letters. 2018. Т. 121, № 22. с. 220501.
84. Ghose Shohini, Sanders Barry C. Non-Gaussian ancilla states for continuous variable quantum computation via Gaussian maps // Journal of Modern Optics. 2007. Т. 54, № 6. С. 855–869.
85. Implementation of a quantum cubic gate by an adaptive non-Gaussian measurement / Kazunori Miyata, Hisashi Ogawa, Petr Marek [и др.] // Physical Review A. 2016. Т. 93, № 2. с. 022301.
86. Sokolov IV. Schrödinger cat states in continuous variable non-Gaussian networks // Physics Letters A. 2020. Т. 384, № 29. с. 126762.
87. Baeva AV, Losev AS, Sokolov IV. Schrödinger cat states prepared by logical gate with non-Gaussian resource state: Effect of finite squeezing and efficiency versus monotones // Physics Letters A. 2023. с. 128730.
88. Quantum computing with continuous-variable clusters / Mile Gu, Christian Weedbrook, Nicolas C Menicucci [и др.] // Physical Review A. 2009. Т. 79, № 6. с. 062318.
89. Emulating quantum cubic nonlinearity / Mitsuyoshi Yukawa, Kazunori Miyata, Hidehiro Yonezawa [и др.] // Physical Review A. 2013. Т. 88, № 5. с. 053816.
90. Nonlinear squeezing for measurement-based non-gaussian operations in time domain / Shunya Konno, Atsushi Sakaguchi, Warit Asavanant [и др.] // Physical Review Applied. 2021. Т. 15, № 2. с. 024024.

91. Engineering a Kerr-based deterministic cubic phase gate via Gaussian operations / Ryotatsu Yanagimoto, Tatsuhiro Onodera, Edwin Ng [и др.] // Physical Review Letters. 2020. Т. 124, № 24. с. 240503.
92. Gaussian conversion protocols for cubic phase state generation / Yu Zheng, Oliver Hahn, Pascal Stadler [и др.] // PRX Quantum. 2021. Т. 2, № 1. с. 010327.
93. Universal gate set for continuous-variable quantum computation with microwave circuits / Timo Hillmann, Fernando Quijandría, Göran Johansson [и др.] // Physical review letters. 2020. Т. 125, № 16. с. 160501.
94. Robust preparation of Wigner-negative states with optimized SNAP-displacement sequences / Marina Kudra, Mikael Kervinen, Ingrid Strandberg [и др.] // PRX Quantum. 2022. Т. 3, № 3. с. 030301.
95. Шляйх Вольфганг Питер. Квантовая оптика в фазовом пространстве. Физматлит, 2005.
96. Mari Andrea, Eisert Jens. Positive Wigner functions render classical simulation of quantum computation efficient // Physical review letters. 2012. Т. 109, № 23. с. 230503.
97. Efficient simulation scheme for a class of quantum optics experiments with non-negative Wigner representation / Victor Veitch, Nathan Wiebe, Christopher Ferrie [и др.] // New Journal of Physics. 2013. Т. 15, № 1. с. 013037.
98. Walschaers Mattia. Non-Gaussian quantum states and where to find them // PRX Quantum. 2021. Т. 2, № 3. с. 030204.
99. Kenfack Anatole, Życzkowski Karol. Negativity of the Wigner function as an indicator of non-classicality // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. 2004. Т. 6, № 10. с. 396.
100. Resource theory of quantum non-Gaussianity and Wigner negativity / Francesco Albarelli, Marco G Genoni, Matteo GA Paris [и др.] // Physical Review A. 2018. Т. 98, № 5. с. 052350.
101. Takagi Ryuji, Zhuang Quntao. Convex resource theory of non-Gaussianity // Physical Review A. 2018. Т. 97, № 6. с. 062337.
102. The resource theory of stabilizer quantum computation / Victor Veitch, SA Hamed Mousavian, Daniel Gottesman [и др.] // New Journal of Physics. 2014. Т. 16, № 1. с. 013009.
103. Chabaud Ulysse, Emeriau Pierre-Emmanuel, Grosshans Frédéric. Witnessing wigner negativity // Quantum. 2021. Т. 5. с. 471.

104. Genoni Marco G, Paris Matteo GA, Banaszek Konrad. Quantifying the non-Gaussian character of a quantum state by quantum relative entropy // *Physical Review A*. 2008. T. 78, № 6. c. 060303.
105. Marian Paulina, Marian Tudor A. Relative entropy is an exact measure of non-Gaussianity // *Physical Review A*. 2013. T. 88, № 1. c. 012322.
106. Faithful measure of quantum non-Gaussianity via quantum relative entropy / Jiyong Park, Jaehak Lee, Kyunghyun Baek [и др.] // *Physical Review A*. 2019. T. 100, № 1. c. 012333.
107. Zinatullin ER, Korolev SB, Golubeva T Yu. Controlled-Z operation versus the beam-splitter transformation: Errors of entangled operations // *Physical Review A*. 2021. T. 103, № 6. c. 062407.
108. Grangier Philippe, Levenson Juan Ariel, Poizat Jean-Philippe. Quantum non-demolition measurements in optics // *Nature*. 1998. T. 396, № 6711. C. 537–542.
109. Filip Radim, Marek Petr, Andersen Ulrik L. Measurement-induced continuous-variable quantum interactions // *Physical Review A*. 2005. T. 71, № 4. c. 042308.
110. Demonstration of a controlled-phase gate for continuous-variable one-way quantum computation / Ryuji Ukai, Shota Yokoyama, Jun-ichi Yoshikawa [и др.] // *Physical review letters*. 2011. T. 107, № 25. c. 250501.
111. Gate sequence for continuous variable one-way quantum computation / Xiaolong Su, Shuhong Hao, Xiaowei Deng [и др.] // *Nature communications*. 2013. T. 4, № 1. c. 2828.
112. Continuous-variable controlled-Z gate using an atomic ensemble / Ming-Feng Wang, Nian-Quan Jiang, Qing-Li Jin [и др.] // *Physical Review A*. 2011. T. 83, № 6. c. 062339.
113. Zinatullin ER, Korolev SB, Golubeva T Yu. Teleportation with a cubic phase gate // *Physical Review A*. 2021. T. 104, № 3. c. 032420.
114. Demonstration of a universal one-way quantum quadratic phase gate / Yoshichika Miwa, Jun-ichi Yoshikawa, Peter van Loock [и др.] // *Physical Review A*. 2009. T. 80, № 5. c. 050303.
115. Zinatullin ER, Korolev SB, Golubeva T Yu. Teleportation protocols with non-Gaussian operations: Conditional photon subtraction versus cubic phase gate // *Physical Review A*. 2023. T. 107, № 2. c. 022422.
116. Arzani Francesco, Treppe Nicolas, Ferrini Giulia. Polynomial approximation of non-Gaussian unitaries by counting one photon at a time // *Physical Review A*. 2017. T. 95, № 5. c. 052352.

117. Measurement-based generation and preservation of cat and grid states within a continuous-variable cluster state / Miller Eaton, Carlos González-Arciniegas, Rafael N Alexander [и др.] // Quantum. 2022. Т. 6. с. 769.
118. Error of an arbitrary single-mode Gaussian transformation on a weighted cluster state using a cubic phase gate / ER Zinatullin, SB Korolev, AD Manukhova [и др.] // Physical Review A. 2022. Т. 106, № 3. с. 032414.

Приложение А. Действия операторов

Выясним, какое действие на амплитуды полей оказывает каждый из операторов, использованных в нашей работе. Для этого нам сперва требуется доказать одно вспомогательное равенство. Рассмотрим выражение вида

$$e^{-\alpha\hat{A}}\hat{B}e^{\alpha\hat{A}} = \sum_n \frac{(-\alpha\hat{A})^n}{n!} \hat{B} \sum_m \frac{(\alpha\hat{A})^m}{m!}. \quad (\text{A.1})$$

Перемножим ряды и сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями α :

$$e^{-\alpha\hat{A}}\hat{B}e^{\alpha\hat{A}} = \hat{B} + (\alpha\hat{B}\hat{A} - \alpha\hat{A}\hat{B}) + \left(\frac{\alpha^2}{2}\hat{A}^2\hat{B} - \alpha^2\hat{A}\hat{B}\hat{A} + \frac{\alpha^2}{2}\hat{B}\hat{A}^2 \right) + \dots \quad (\text{A.2})$$

Можно заметить, что слагаемые при одинаковых степенях α комбинируются в коммутаторы операторов:

$$\alpha(\hat{B}\hat{A} - \alpha\hat{A}\hat{B}) = -\alpha[\hat{A}, \hat{B}], \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\alpha^2}{2}(\hat{A}^2\hat{B} - 2\hat{A}\hat{B}\hat{A} + \hat{B}\hat{A}^2) = \frac{\alpha^2}{2}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]], \quad (\text{A.4})$$

...

Таким образом для любых операторов \hat{A} и \hat{B} будет справедливо соотношение

$$e^{-\alpha\hat{A}}\hat{B}e^{\alpha\hat{A}} = \hat{B} - \alpha[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\alpha^2}{2}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (\text{A.5})$$

Напомним, что операторы рождения и уничтожения подчиняются коммутационному соотношению

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (\text{A.6})$$

а операторы квадратур \hat{x} и \hat{y} введены таким образом, что для них выполняется коммутационное соотношение (1.2).

Теперь мы можем перейти к определению действия конкретных операторов.

A.1 Controlled-Z

Оператор преобразования CZ с весовым коэффициентом g_{jk} , действующий на j -ый и k -ый осцилляторы имеет вид (2.13). Рассмотрим действие этого оператора на квадратуру \hat{y}_j :

$$\hat{C}_{Z,jk}^\dagger \hat{y}_j \hat{C}_{Z,jk} = e^{-2ig_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k} \hat{y}_j e^{2ig_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k}. \quad (\text{A.7})$$

Это выражение, с учетом соотношения (A.5), можно представить в виде ряда

$$\hat{C}_{Z,jk}^\dagger \hat{y}_j \hat{C}_{Z,jk} = \hat{y}_j - 2ig[\hat{x}_j \hat{x}_k, \hat{y}_j] + \frac{(2ig)^2}{2} [\hat{x}_j \hat{x}_k, [\hat{x}_j \hat{x}_k, \hat{y}_j]] + \dots \quad (\text{A.8})$$

Найдем коммутаторы, входящие в этот ряд:

$$[\hat{x}_j \hat{x}_k, \hat{y}_j] = \hat{x}_j \hat{x}_k \hat{y}_j - \hat{y}_j \hat{x}_j \hat{x}_k = [\hat{x}_j, \hat{y}_j] \hat{x}_k = \frac{i}{2} \hat{x}_k, \quad (\text{A.9})$$

$$[\hat{x}_j \hat{x}_k, [\hat{x}_j \hat{x}_k, \hat{y}_j]] = \frac{i}{2} [\hat{x}_j \hat{x}_k, \hat{x}_k] = 0, \quad (\text{A.10})$$

....

Все последующие коммутаторы будут равны нулю. Тогда, действие преобразования CZ на квадратуру \hat{y}_j будет задаваться выражением

$$\hat{C}_{Z,jk}^\dagger \hat{y}_j \hat{C}_{Z,jk} = \hat{y}_j + g \hat{x}_k. \quad (\text{A.11})$$

Если повторить тоже для квадратуры \hat{x}_j то очевидно, что все коммутаторы в разложении, аналогичном разложению (A.8) будут равны нулю. Поэтому действие оператора CZ на квадратуру \hat{x}_j не изменяет ее, то есть

$$\hat{C}_{Z,jk}^\dagger \hat{x}_j \hat{C}_{Z,jk} = \hat{x}_j. \quad (\text{A.12})$$

A.2 Оператор смещения

В общем виде, оператор смещения квадратур на комплексную величину α имеет вид

$$\hat{D}_\alpha = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}. \quad (\text{A.13})$$

Рассмотрим действие этого оператора на комплексную амплитуду поля \hat{a}

$$\hat{D}_\alpha^\dagger \hat{a} \hat{D}_\alpha = e^{-(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})} \hat{a} e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}. \quad (\text{A.14})$$

Учитывая соотношение (A.5) мы можем представить (A.14) как

$$\hat{D}_\alpha^\dagger \hat{a} \hat{D}_\alpha = \hat{a} - [\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, \hat{a}] + \frac{1}{2} [\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, [\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, \hat{a}]] + \dots \quad (\text{A.15})$$

Определим значения коммутаторов, входящих в этот ряд:

$$[\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, \hat{a}] = \alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} - \alpha^* \hat{a} \hat{a} - \alpha \hat{a} \hat{a}^\dagger + \alpha^* \hat{a} \hat{a} = \alpha [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = -\alpha, \quad (\text{A.16})$$

$$[\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, [\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, \hat{a}]] = 0, \quad (\text{A.17})$$

....

Поскольку первый из коммутаторов равен числу, то все последующие коммутаторы будут равны нулю. Таким образом, действие оператора сдвига (A.13) на комплексную амплитуду поля \hat{a} будет иметь вид

$$\hat{D}_\alpha^\dagger \hat{a} \hat{D}_\alpha = \hat{a} + \alpha. \quad (\text{A.18})$$

A.3 Кубический фазовый затвор

Определим действие кубического фазового затвора, оператор которого задается выражением (3.5), на комплексную амплитуду поля. Для этого сначала рассмотрим, как он действует на оператор x -кватратуры:

$$\hat{Q}_\gamma^\dagger \hat{x} \hat{Q}_\gamma = e^{2i\gamma\hat{y}^3} \hat{x} e^{-2i\gamma\hat{y}^3}. \quad (\text{A.19})$$

Это выражение, с учетом соотношения (A.5), можно переписать как

$$\hat{Q}_\gamma^\dagger \hat{x} \hat{Q}_\gamma = \hat{x} + 2i\gamma[\hat{y}^3, \hat{x}] + \frac{(2i\gamma)^2}{2}[\hat{y}^3, [\hat{y}^3, \hat{x}]] + \dots \quad (\text{A.20})$$

Коммутаторы, входящие в этот ряд, равны:

$$[\hat{y}^3, \hat{x}] = \hat{y}^3 \hat{x} - \hat{x} \hat{y}^3 = \hat{y}^2 \hat{x} \hat{y} - \hat{x} \hat{y}^3 - \frac{i}{2} \hat{y}^2 = \hat{y} \hat{x} \hat{y}^2 - \hat{x} \hat{y}^3 - i \hat{y}^2 = -\frac{3i}{2} \hat{y}^2, \quad (\text{A.21})$$

$$[\hat{y}^3, [\hat{y}^3, \hat{x}]] = 0, \quad (\text{A.22})$$

...

То есть, все коммутаторы, кроме первого, будут равны нулю. Тогда мы получим, что действие кубического фазового затвора на x -кватратуру будет

$$\hat{Q}_\gamma^\dagger \hat{x} \hat{Q}_\gamma = \hat{x} + 3\gamma\hat{y}^2. \quad (\text{A.23})$$

Очевидно, что действие оператора (3.5) на y -кватратуру не меняет ее, то есть

$$\hat{Q}_\gamma^\dagger \hat{y} \hat{Q}_\gamma = \hat{y}. \quad (\text{A.24})$$

Поэтому действие кубического фазового затвора на комплексную амплитуду поля \hat{a} будет задаваться выражением

$$\hat{Q}_\gamma^\dagger \hat{a} \hat{Q}_\gamma = \hat{Q}_\gamma^\dagger (\hat{x} + i\hat{y}) \hat{Q}_\gamma = \hat{a} + 3\gamma\hat{y}^2. \quad (\text{A.25})$$

A.4 Оператор поворота фазы

Оператор поворота фазы на угол θ имеет вид

$$\hat{R}_\theta = e^{i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}. \quad (\text{A.26})$$

Посмотрим, как действует этот оператор на амплитуду \hat{a} , то есть рассмотрим

$$\hat{R}_\theta^\dagger \hat{a} \hat{R}_\theta = e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}} \hat{a} e^{i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}. \quad (\text{A.27})$$

С учетом соотношения (A.5) это выражение примет вид

$$\hat{R}_\theta^\dagger \hat{a} \hat{R}_\theta = \hat{a} - i\theta[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] + \frac{(i\theta)^2}{2!}[\hat{a}^\dagger\hat{a}, [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}]] + \dots \quad (\text{A.28})$$

Найдем значения каждого из коммутаторов, входящих в этот ряд:

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a} = -\hat{a}, \quad (\text{A.29})$$

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a}, [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}]] = -[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}, \quad (\text{A.30})$$

....

Каждый последующий коммутатор будет равен оператору \hat{a} , знак перед которым будет чередоваться.

Подставив полученные значения коммутаторов в выражение (A.28), можно выделить ряд, соответствующий разложению экспоненты с показателем $i\theta$. Таким образом, оператор поворота фазы действует на амплитуду \hat{a} , как

$$\hat{R}_\theta^\dagger \hat{a} \hat{R}_\theta = \left(1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \dots \right) \hat{a} = e^{i\theta} \hat{a}. \quad (\text{A.31})$$

SAINT-PETERSBURG UNIVERSITY

Manuscript copyright

Zinatullin Eduard Rustemovich

Non-Gaussian statistics of fields in quantum optics problems

Scientific Specialty 1.3.6. Optics

Dissertation is submitted for the degree
of Candidate of Physical and Mathematical Science
(Translation from Russian)

Thesis supervisor:
Dr. Sci. (Phys.-Math)
Golubeva Tatiana Yu.

Saint-Petersburg
2023

Contents

Introduction	123
Chapter 1. Literature review	129
1.1 Quantum computation in continuous variables	129
1.1.1 Concept of quantum computation	129
1.1.2 Transition from discrete variables to continuous ones	130
1.1.3 Universality of quantum computation	132
1.2 One-way quantum computation	134
1.2.1 Resources for one-way quantum computation	135
1.2.2 Error correction codes	136
1.2.3 Surface codes	139
1.3 Non-Gaussian quantum operations and states	142
1.3.1 Kerr non-linearity	142
1.3.2 Photon subtraction scheme	142
1.3.3 Cubic phase gate	144
1.3.4 Examples of Gaussian and non-Gaussian states	146
1.3.5 Criteria for non-Gaussianity and classification of non-Gaussian states	148
Chapter 2. Error of entangled operations in the teleportation protocol	152
2.1 Original teleportation protocol and its modifications using CZ gate	153
2.1.1 Original teleportation protocol	153
2.1.2 Teleportation protocol using CZ gate	154
2.1.3 Hybrid teleportation scheme	157
2.2 Estimation of CZ gate weight coefficients	158
2.3 Real CZ gate in optical teleportation scheme	160
2.3.1 Teleportation protocol with real CZ gate	162
2.3.2 Hybrid teleportation scheme with real CZ gate	163
2.4 Conclusion on chapter 2	164
Chapter 3. Decreasing the teleportation error using a cubic phase gate	166
3.1 Teleportation protocol with a cubic phase gate in the Heisenberg picture	167
3.2 Teleportation protocol with a cubic phase gate in the Schrödinger picture	172

3.3	Conclusion on chapter 3	176
Chapter 4. Comparison of non-Gaussian resources in teleportation protocols . .		179
4.1	Original teleportation protocol and its modification with a photon subtraction procedure	179
4.2	Comparison of different teleportation protocols	183
4.3	Evaluating the role of non-Gaussian resources	186
4.4	Conclusion on chapter 4	189
Chapter 5. One-way quantum computation with non-Gaussian resource		191
5.1	Role of cluster state weight coefficients	192
5.1.1	Transformation scheme on a linear four-node weighted cluster	192
5.1.2	Universality of the transformation with arbitrary weight coefficients	195
5.1.3	Single-mode transformation error on a weighted cluster	196
5.2	Single-mode transformation with cubic phase gate	200
5.2.1	Transformation scheme with a cubic phase gate	200
5.2.2	Error of transformation with cubic phase gate	204
5.2.3	Evaluating of the optimization efficiency of one-way quantum computation	206
5.3	Two-mode transformations with a cubic phase gate	207
5.3.1	CZ transformation on a weighted 4-node cluster state	208
5.3.2	CZ transformation scheme with cubic phase gate	210
5.3.3	Modified teleportation protocol with cubic phase gate	212
5.4	Conclusion on chapter 5	213
Conclusion		216
Bibliography		218
Appendix A. Actions of the operators		227
A.1	Controlled-Z	227
A.2	Displacement operator	228
A.3	Cubic phase gate	229
A.4	Phase shift operator	229

Introduction

In modern physics, there are often problems that prove difficult to solve on a classical computer. Such problems include, for example, the travelling salesman problem, the problem of modelling a real molecule, the problem of factorization of large integers and many others. These problems belong to the so-called exponential class of problems, for which the amount of computational resources required to solve them by existing algorithms increases exponentially with the number of input data. In other words, a classical computer would spend an unnecessarily large amount of computing resources on solving such problems. The desire to solve these types of problems efficiently led to the creation of the concept of quantum computation [1, 2]. Due to quantum parallelism underlying it, for some problems in the exponential class the growth of computational resources will already be polynomial when solving with quantum algorithms (see, e.g., [3–5]).

The field of quantum computation and the quantum computer, as a physical device, is currently undergoing a phase of intensive development. Quantum computation is now in what is known as the NISQ (Noisy Intermediate-Scale Quantum) era [6]. It is characterized by a relatively small number of logical units for computation (qubits) and a high level of noise in the computation schemes, leading to errors. As a result, we cannot implement complex quantum algorithms on existing quantum computers. However, building computation schemes that are less noisy or more tolerant of noise can change this situation. Therefore, one of the main challenges at this stage of quantum computation development is to decrease the level of noise.

The concept of quantum computation for discrete quantum systems was initially formed. However, many computational protocols in discrete variables are probabilistic and require multiple repetitions. This gave rise to an alternative approach to quantum computation in continuous variables, where the systems on which the computation is performed are described in infinite dimensional Hilbert space. Unlike discrete variables, computation in continuous variables allows us to construct schemes, which each time we refer to them, we get a meaningful measurement result (deterministic schemes), but with some error. To achieve universal computation in continuous variables, it is necessary to be able to implement three types of operations [7]: an arbitrary single-mode Gaussian (linear) transformation, one two-mode entangling Gaussian operation and at least one single-mode non-Gaussian (nonlinear) transformation. It is the computation in continuous variables that will be the focus of our work.

One promising model for quantum computing is the one-way quantum computation model [8]. It is based on one of the main principles of quantum mechanics – the measuring procedure affects

the quantum system. The principle of one-way quantum computation has its origins in one of the basic protocols of quantum information processing, the teleportation protocol [9, 10].

The main computational resource in this model are multi-particle entangled quantum states – cluster states that are generated from a set of squeezed oscillators in continuous variables. If the oscillators were ideally squeezed, the calculations in such a model would be performed without errors. However, it is not possible to obtain ideally squeezed states; noise from non-ideally squeezed quadratures distorts the computation results and leads to errors. At the same time, errors will accumulate as the number of operations is increased. This is the main factor limiting the considered model.

The currently experimentally achievable squeezing turns out to be insufficient for universal quantum computation. The maximum experimentally achievable squeezing is -15 dB [11], while the squeezing of resource oscillators above -20.5 dB [12] is required to perform fault-tolerant quantum computation (i.e. computations able to decrease logical errors to a given low level). However, the resource states requirement can be reduced by using computational schemes that are less sensitive to the initial squeezing of the resource oscillators.

One possible method of creating such schemes is to introduce non-Gaussian operations into one-way quantum computation schemes. For the teleportation protocol, there is an error decreasing method based on a conditional photon subtraction procedure [13]. The possibility of carrying this method over to one-way quantum computation schemes looks tempting. However, the photon subtraction procedure is probabilistic and schemes using it lose the main advantage of continuous variable operation, the deterministic execution of operations. Arise the question, is it possible to use other deterministic non-Gaussian operations, such as cubic phase gate [13]?

Thus, the question of methods for decreasing errors in one-way computation remains open. Along the way, a host of smaller issues come before us. Is it possible to make any improvements by remaining within Gaussian operations? Is it possible to reduce the requirements for squeezing of resource states using non-Gaussian operations? If yes, which non-Gaussian operations provide the most benefit from their use? For these questions, we try to answer in this research.

The purpose of this work is to identify methods for decreasing the errors of elementary Gaussian operations in one-way quantum computation schemes in continuous variables.

To achieve this goal, the following problems were set and solved:

1. We will analyse the role of entanglement operations in forming teleportation error and determine the effect of entanglement operation weight coefficients on it.
2. We will construct a teleportation protocol that uses a deterministic non-Gaussian operation to improve fidelity. We will determine the values of the scheme parameters that ensure correct operation of the protocol.

3. We will compare our proposed protocol with existing teleportation protocols with non-Gaussian resource and identify the most prospective ones for further implementation in one-way quantum computation schemes.
4. We will carry over the identified error decreasing methods to universal quantum computation schemes. We will analyse the role of cluster state weight coefficients in forming computation error. We will construct schemes for an arbitrary single-mode Gaussian transform and a two-mode Controlled-Z (CZ) entanglement operation, using non-Gaussian operations to reduce the error.

Thesis statements to be defended:

1. Using the CZ gate as an entanglement operation reduces the teleportation error not only for an ideal CZ transformation, but also for its optical implementation.
2. Although the formal application of the weighted CZ gate allows unlimited reduction of the error of one of the quadratures of the teleported state, analysis of real configurations shows us that the CZ transformation itself is noisy, so the resulting error reduction that can be expected from its use is a factor of two.
3. A quantum teleportation protocol is proposed that allows teleportation to be performed with greater accuracy by independently reducing field quadrature errors through two different mechanisms: weighted CZ transformation and cubic phase gate.
4. The proposed quantum teleportation protocol allows the use of a cubic phase gate with a low degree of nonlinearity. The small nonlinearity can be compensated by a large value of the y -quadrature displacement of the resource oscillator before the application of the cubic phase gate.
5. The use of the cubic phase gate in the teleportation scheme increases teleportation fidelity over a much wider working area than the photon subtraction procedure.
6. Optimizing the weight coefficients of the cluster state used as a computational resource decreases the error of arbitrary single-mode Gaussian transformations as compared to operations on the unweighted cluster state.
7. The same single-mode transformations can be performed with different homodyne detector phases. One of the homodyne phases turns out to be a free parameter that can be used to decrease the error.
8. The inclusion of non-Gaussian nodes prepared with a cubic phase gate in the resource cluster state can significantly decrease the transformation error. For some transformations it is possible to reduce the error probability by 900 times compared to computation on an unweighted cluster without optimizing the homodyne detector phases.

Scientific novelty:

1. We have analysed the dependence of teleportation quality on the entanglement transformations used. Based on it, we have proposed a teleportation protocol that allows us to decrease the error while remaining within the Gaussian transformations.
2. We proposed a teleportation protocol with a non-Gaussian resource generated by a cubic phase gate. We have shown that such a teleportation protocol can provide greater fidelity than the original protocol.
3. We have formed an approach to optimize the weight coefficients and phases of homodyne detectors to decrease the error in arbitrary single-mode Gaussian transformations.
4. We have constructed arbitrary single-mode Gaussian and two-mode Controlled-Z transformation schemes that decrease transformation error by using a cubic phase gate.

Scientific and practical significance. The methods proposed in this work for decreasing the errors of Gaussian transformations in a one-way quantum computation model in continuous variables are of interest from the point of view of basic science and contribute to modern quantum optics and computer science. Using the approaches we propose allows the squeeze requirement on auxiliary oscillators used as a computational resource. The results of the research can be used in the practical implementation of a universal quantum computer, which is an essential tool for solving modern physics problems. In addition, the proposed cubic phase gate teleportation protocol can be used in various quantum information applications, e.g. for implementing quantum repeaters, building quantum networks, in quantum entanglement swap protocols, as well as directly in quantum computing schemes.

The degree of reliability of the results obtained in the thesis is ensured by the correct use of quantum mechanics methods and rigorous physical justification of all approximations and assumptions used in the work. The well proven mathematical apparatus of quantum electrodynamics, namely the description of quantum mechanical systems in Heisenberg and Schrödinger pictures, has been used to solve the set problems. To estimate the quality of the protocols, we used the mean-square errors in each of the quadratures when operating in the Heisenberg picture, and fidelity when operating in the Schrödinger picture. The results of the research undertaken were analysed in comparison with the work of leading research groups in the field. The results were discussed with colleagues at scientific seminars, schools and conferences, and published in reviewed scientific journals recommended by Higher Attestation Commission of the Russian Federation.

Approbation of the research. The main results of the work were presented at the following scientific conferences, schools, and seminars:

- XI seminar by D. N. Klyshko (Moscow, Russia, June 8-10, 2022).
- IV International Conference “Photonics and Quantum Technologies” (Kazan, Russia, December 19-21, 2021).

- The 4th International School of Quantum Technologies (Voronovo, Moscow, Russia, 8-12 November, 2021).
- XII International Symposium on Photonic Echo and Coherent Spectroscopy (PECS-2021) (Kazan, Russia, October 25-30, 2021).
- XXIV Joint International Youth Scientific School “Coherent Optics and Optical Spectroscopy” and “Quantum Informatics and Quantum Sensors based on Diamonds” (Kazan, Russia, December 10-11, 2020).
- XII International Conference “Fundamental Problems of Optics” (FPO – 2020) (St. Petersburg, Russia, October 19-23, 2020).
- International School on Quantum Computing (Sochi, Russia, September 14-21, 2020).
- 3rd International School on Quantum Technologies (Krasnaya Polyana, Russia, March 1-7, 2020).
- 2nd Russian School of Quantum Technologies (Russia, Krasnaya Polyana, March 2–7, 2019).
- Seminars of the Laboratory of Quantum Optics of St. Petersburg State University (St. Petersburg, Russia, 2019–2023).

Personal contribution of the author. The main results presented in the thesis were obtained by the author personally; the choice of the general direction of the research, the discussion, and the setting of the tasks in question were carried out together with the supervisor.

Publications. The main contents and results of the thesis are presented in the following publications:

- E.R. Zinatullin, S.B. Korolev, and T.Yu. Golubeva. Teleportation protocols with non-Gaussian operations: conditional photon subtraction versus cubic phase gate // Phys. Rev. A, 2023, 107, 022422.
- E.R. Zinatullin, S.B. Korolev, A. D. Manukhova and T.Yu. Golubeva. Error of an arbitrary single-mode Gaussian transformation on a weighted cluster state using a cubic phase gate // Phys.Rev. A, 2022, 106, 032414.
- E.R. Zinatullin, S.B. Korolev, and T.Yu. Golubeva. Teleportation with a cubic phase gate // Phys. Rev. A, 2021, 104, 032420.
- E. Zinatullin, S. Korolev, T. Golubeva. Controlled-Z operation versus the beam-splitter transformation: Errors of entangled operations // Phys. Rev. A, 2021, 103, 062407.
- E.R. Zinatullin, K.S. Tikhonov, T.Yu. Golubeva and Yu.M. Golubev. The Effect of Diffraction on a Pulse of Squeezed Light in the Protocol of a Multimode Resonant Quantum Memory Based on a Thermal Atomic Ensemble // Opt. Spectrosc. 2020, 128 (9), 1458-1474.

Scope and structure of the work. The thesis consists of an Introduction, five Chapters, a Conclusion, and one Appendix. The thesis is 111 pages long, with 43 figures. The reference list contains 118 references.

Acknowledgements.

The author would like to express her deep gratitude to her research supervisor Tatiana Yurievna Golubeva for the invaluable knowledge and experience gained during the work and preparation of her thesis, as well as for her patience and assistance. The author would like to express special thanks to Yuri Mikhailovich Golubev, Ivan Vadimovich Sokolov, co-author Sergei Borisovich Korolev and the whole friendly team of the Quantum Optics Laboratory of St. Petersburg State University for helpful discussions and help at all stages of the preparation of this thesis. Special thanks to Kirill Sergeevich Tikhonov for helping to build a strong foundation in quantum optics during his undergraduate and graduate studies.

The author would like to express his sincere gratitude to his family, especially to his parents, Natalia Sergeevna Zinatullina and Rustem Eduardovich Zinatullin, for developing his passion for physics and sciences in general, and to Elizaveta Nikolaevna Bashmakova for her comprehensive help, support and active assistance in the writing of this thesis.

Chapter 1. Literature review

1.1 Quantum computation in continuous variables

1.1.1 Concept of quantum computation

In the modern scientific world, the computer is an indispensable research tool. It is essential for numerical calculations, processing of experimental data and visualization of the data obtained.

A computer is a device capable of transforming input information into output one in a desired way. The unit of information used in a classical computer is a bit, which can take two values: 0 or 1. Any information can be encoded using bit strings, i.e. sequences of zeros and ones. The conversion of bit strings is performed by using logical elements (gates), each performs an elementary logical operation. The combination of these logic elements realizes some conversion, depending on the type and order of the elements used.

In physics, however, there are often problems that prove difficult to solve on a classical computer. To determine which tasks are complex and which tasks are simple, theoretical computer science has introduced a classification of problems into levels of complexity depending on the amount of computing resources (i.e. computational time and/or memory) involved. If algorithms for solving a problem require an amount of computational resources that depends polynomially on the number of input data, such a problem belongs to the polynomial complexity class (P class). Such problems include, for example, addition of integers, multiplication, division and multiplication of matrices. If the amount of computational resources required to solve the problem exponentially increases with the number of data inputs, then the problem belongs to the exponential complexity class. Examples of problems in this class are the problem of constructing all subsets of a given set, the travelling salesman problem, the problem of modelling a real molecule and the problem of factorization of large integers. Whereas a classical computer solves problems of P class quite well using existing computational algorithms, it is ineffective in solving problems of exponential complexity class. Of course, the classification of problems by level of complexity is not limited to the two classes (see e.g. [14, 15]), but we will not elaborate on this issue here, as it is not directly related to the tasks at hand.

To be able to solve problems from an exponential class of complexity efficiently, the concept of quantum computing was developed. The basis for the formation of this concept was laid by J. M. Manin [1] and R. Feynman [2]. It is in the very nature of quantum objects to exist

simultaneously in several quantum states. It is this property that underlies quantum parallelism. Initial approaches to the development of quantum computers used the quantum analogue of the classical bit, the qubit [16,17], which is a discrete two-level quantum system, as the basic logical unit. Unlike the classical bit, which can only take on two values of 0 or 1, a cubit can be in a superposition of two quantum basis states:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (1.1)$$

Here the basis states of the cubit, following the classical bit, are denoted by $|0\rangle$ and $|1\rangle$, and $|a|^2$ and $|b|^2$ have the meaning of probabilities of detecting the cubit in the states $|0\rangle$ and $|1\rangle$, respectively. Therefore, n qubits can be in 2^n states simultaneously, while a sequence of n classical bits will always be in only one of the possible states. This achieves the so-called quantum parallelism of computation, due to a quantum computer can solve problems of exponential complexity class in polynomial time [3–5]. Currently, there is an active search for and classification of such problems. Among those found problem, the best known are the problem of factorization of integers (Shor’s algorithm [3]), and the problem of finding a solution to an equation $f(x) = 1$, where f is a Boolean function of n variables (Grover’s algorithm [4]).

However, the question always arises, can any quantum system be used to experimentally implement a quantum computer? If not, which quantum systems are best suited for this purpose? According to DiVincenzo’s criteria [18], a quantum computer implementation must meet the following requirements:

1. The quantum system on which the computation is performed must be scalable and have well-characterised qubits.
2. We should be able to prepare qubits of the system in some simple initial state (e.g. $|000\dots 0\rangle$).
3. A quantum system used as a quantum computer must be well isolated from interaction with the environment.
4. It must be possible to carry out a sequence of controlled unitary transformations over the system.
5. We must be able to make projection measurements over the qubits of the system.

These criteria have largely determined the direction of the experimental development of quantum computation.

1.1.2 Transition from discrete variables to continuous ones

Initially, the concept of quantum computing in discrete variables took shape. It was natural, as the coding of information for such systems is similar to that in classical computations. However, one significant difficulty arises when dealing with discrete quantum systems – they are difficult

to generate deterministically. As a result, many computational protocols in discrete variables are probabilistic and require multiple repetitions. It has led scientists to look for alternative ways of developing quantum computation.

Many operations and systems in quantum optics are defined on an infinite-dimensional Hilbert space. Such quantum systems are called systems in continuous variables. The main advantage of quantum systems in continuous variables over discrete systems is that they allow us to construct schemes that give us a meaningful measurement result each time we access them (deterministic schemes), but with some error. In addition, many basic operations of quantum communication protocols, such as preparation, unitary manipulation and measurement of entangled quantum states, can be implemented in the continuous variables' regime. Thus, the entangled state in continuous variables can be effectively generated by tools of linear optics and squeezed light generated by non-linear optical interaction.

Major quantum information processing protocols, including quantum teleportation [9,10], cryptography [19] and cloning [20–23], are also implemented by linear optics. For example, the quantum teleportation protocol, initially proposed for discrete quantum systems [24], was soon afterwards carried over to systems with continuous variables [9].

All these advantages encouraged scientists to develop a theory of quantum computing in continuous variables, which was first proposed by Lloyd and Braunstein [7]. However, when you move from computation on discrete systems to continuous ones, a natural question arises: how will you encode information on such systems? The encoding of information in continuous variables can occur in various ways [13,25,26]. The most common is to encode using eigenstates of quadrature operators \hat{x}_j and \hat{y}_j (index j denotes the subsystem or mode number), which obey the commutation relation

$$[\hat{x}_j, \hat{y}_j] = \frac{i}{2}. \quad (1.2)$$

The eigenstates of these operators are defined as

$$\hat{x}_j |x\rangle_{x,j} = x|x\rangle_{x,j}, \quad \hat{y}_j |y\rangle_{y,j} = y|y\rangle_{y,j}, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

Both sets of eigenstates are orthonormal

$${}_{x,j}\langle x|x'\rangle_{x,j} = \delta(x - x'), \quad {}_{y,j}\langle y|y'\rangle_{y,j} = \delta(y - y') \quad (1.4)$$

and have completeness

$$\int dx |x\rangle_{x,j} {}_{x,j}\langle x| = \int dy |y\rangle_{y,j} {}_{y,j}\langle y| = \hat{I}. \quad (1.5)$$

As a result, any quantum state can be represented as a superposition of these basis states. Accordingly, the gates in such a computation model will be the operations that transform quadratures of quantum systems.

However, it is impossible not to mention the difficulties encountered when working with continuous quantum systems. Since we are working with infinite dimensional systems, we need to

consider interactions not only with the modes of interest, but also with all other modes. As a consequence, noise is generated in the system, affecting computational results and leading to errors. To deal with this disadvantage, error correction procedures have been developed, which we will talk about later.

Hereinafter, when referring to quantum computation, we will be referring to computation in continuous variables, unless otherwise stated.

1.1.3 Universality of quantum computation

The main goal of quantum informatics and quantum computation is to achieve so-called universal quantum computation. For quantum computation in discrete variables, this corresponds to the ability to perform any unitary transformation over a finite number of variables with any degree of accuracy by multiple application of local operations (single-cube and two-cube operations) [16,17].

However, quantum systems in continuous variables are quite different from discrete systems. Indeed, defining an arbitrary unitary transformation even over a single continuous variable requires an infinite number of parameters. As a result, it cannot usually be approximated by a finite number of continuous operations. Nevertheless, we can define the notion of universal computation in continuous variables for various subclasses of transformations. An example of such a subclass is the set of transformations whose Hamiltonians are polynomial functions of quadratures $\{\hat{x}_j\}$ and $\{\hat{y}_j\}$. In general, a set of operations on physical systems described by continuous variables is called universal for a given set of transformations if any transformation in the set can be approximated with arbitrary accuracy by a finite number of applications of the operations [7].

Let's show that there is a finite universal set of operations for the subclass introduced above (see [7,27] for details). The idea of the proof is based on rather simple relations, allowing us to determine which Hamiltonian transformations can be obtained by multiple applying the transformations from some set. Let us sequentially act the Hamiltonians \hat{H}_j , \hat{H}_k , $-\hat{H}_j$ and $-\hat{H}_k$ so that each action lasts the same time δt . From the Baker-Campbell-Hausdorff relation, we can obtain that

$$e^{-i\hat{H}_k\delta t} e^{-i\hat{H}_j\delta t} e^{i\hat{H}_k\delta t} e^{i\hat{H}_j\delta t} = e^{[\hat{H}_k, \hat{H}_j]\delta t^2} + O(\delta t^3). \quad (1.6)$$

In the limit $\delta t \rightarrow 0$, such an action is equivalent to a Hamiltonian $-i[\hat{H}_k, \hat{H}_j]$ of duration δt^2 . It can also be obtained that

$$e^{i\hat{H}_k\delta t/2} e^{i\hat{H}_j\delta t/2} e^{i\hat{H}_j\delta t/2} e^{i\hat{H}_k\delta t/2} = e^{i(\hat{H}_k + \hat{H}_j)\delta t} + O(\delta t^3). \quad (1.7)$$

In the limit $\delta t \rightarrow 0$ such an action would be equivalent to the action of the Hamiltonian $\hat{H}_k + \hat{H}_j$ of duration δt . Thus, if we can apply a set of Hamiltonians $\{\pm\hat{H}_i\}$ we can construct any Hamiltonian which is a linear combination of Hamiltonians of $\pm i[\hat{H}_k, \hat{H}_j]$, $\pm[\hat{H}_l, [\hat{H}_k, \hat{H}_j]]$ etc.

It follows that only linear Hamiltonians of the form $a\hat{x}_j + b\hat{y}_j + c$ can be constructed from the set of simple operators $\{\pm\hat{x}_j, \pm\hat{y}_j\}$. Add to this set the quadratic Hamiltonian of the phase shifter

$$\hat{H}_{ps,j} = \frac{1}{2} (\hat{x}_j^2 + \hat{y}_j^2) \quad (1.8)$$

and the squeezing Hamiltonian

$$\hat{H}_{s,j} = \frac{1}{2} (\hat{x}_j\hat{y}_j + \hat{y}_j\hat{x}_j). \quad (1.9)$$

Then, given their commutative relation $[\hat{H}_{ps,j}, \hat{H}_{s,j}] = i(\hat{x}_j^2 - \hat{y}_j^2)$, from set $\{\hat{x}_j, \hat{y}_j, \hat{H}_{ps,j}, \hat{H}_{s,j}\}$ we can obtain any single-mode Hamiltonian of degree two on \hat{x}_j and \hat{y}_j . Transformations with Hamiltonians of degree two or less are called Gaussian transformations because they do not derive Gaussian states from its class. The evolution of quadratures by these Hamiltonians will always be linear.

To be able to generate higher degree Hamiltonians, it is necessary to realize Hamiltonians corresponding to non-linear processes. For example, if we take cubic Hamiltonians \hat{x}_j^3 and \hat{y}_j^3 , we have the possibility of realizing Hamiltonians of any degree by \hat{x}_j and \hat{y}_j . It can be seen by looking at the commutation relations

$$[\hat{x}_j^3, \hat{y}_j^m \hat{x}_j^n] = i\hat{y}_j^{m-1} \hat{x}_j^{n+2} + \text{lower order terms}, \quad (1.10)$$

$$[\hat{y}_j^3, \hat{y}_j^m \hat{x}_j^n] = i\hat{y}_j^{m+2} \hat{x}_j^{n-1} + \text{lower order terms}. \quad (1.11)$$

That is, by acting Hamiltonians \hat{x}_j^3 and \hat{y}_j^3 , we can get higher order Hamiltonians. This means that with a set of single-mode Gaussian operations $\{\hat{x}_j, \hat{y}_j, \hat{H}_{ps,j}, \hat{H}_{s,j}\}$ and one nonlinear (non-Gaussian) single-mode operation, we can construct any polynomial of arbitrary order by \hat{x}_j and \hat{y}_j with any desired accuracy.

So far, we have only discussed operations affecting a single quantum subsystem (single-mode operations). However, for computation, we need that one subsystem to be able to control the state of the other subsystems. To it, we need to be able to implement at least one two-mode Gaussian entanglement operation. Such an operation can be a CZ transformation, the Hamiltonian of which has the form

$$\hat{H}_{CZ,jk} = 2g_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k. \quad (1.12)$$

Here, g_{jk} is a weight coefficient representing the strength of the interaction between the two systems. By combining such a two-mode operation with a set of linear single-mode operations, we can obtain a complete set of linear operations on all subsystems. By supplementing this set with a non-linear operation, we get a universal set.

Thus, universal transformations require the ability to implement three types of operations: an arbitrary single-mode Gaussian operation, a two-mode Gaussian interaction operation and a single non-Gaussian operation.

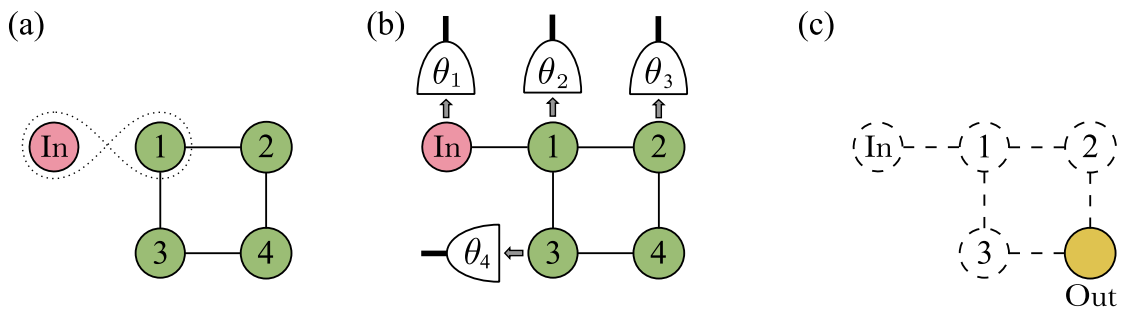


Figure 1.1: Illustration of the process of one-way quantum computation. In the figure the subsystems are indicated by circles, the lines show entanglement between individual subsystems, θ_j are homodyne detectors. (a) The input state **In** is entangled with the auxiliary multi-particle system **1-2-3-4**. (b) Local measurements are performed over individual sub-systems. (c) An unmeasured subsystem turns out to be in some output state **Out**, which is the result of computation.

1.2 One-way quantum computation

The discussion in the previous section dealt with the so-called gate model of quantum computation, where some operations are sequentially performed on the input states, similar to classical computations. However, quantum computing models are not limited to the gate model. In our work, we will be concerned with the one-way quantum computation model. It was initially proposed for discrete quantum systems [28,29], but its principle was later transferred to computation in continuous variables [8].

The one-way quantum computation model is based on one of the main principles of quantum mechanics – the measurement procedure affects the quantum system. In this respect, the model under consideration does not have any classical analogue. Schematically, the one-way computation process is illustrated in Fig. 1.1. The computational resource in the considered model is a multi-particle entangled quantum state, which is entangling with the input state by some two-mode operation. Then, in the resulting system, local measurements are carried out over its individual subsystems in the necessary way. During measurement, the state of the quantum subsystem is projected onto the basis of the measurement device. In a multi-particle entangled system, this leads to a change in the state of the unmeasured subsystems, and by choosing the basis of the measurement device, we can influence exactly how it will change. In quantum optics, homodyne detection [30] is the most common local measurement procedure. In general, the homodyne detector measures generalized quadrature of the form $\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$, where the angle θ can be chosen arbitrarily by us. This angle determines the basis of the measurement device. Thus, by making local measurements over individual subsystems, we can transform the input state in a controlled way.

The principle of one-way quantum computation has its origins in one of the basic protocols for quantum information processing, the teleportation protocol [9,10]. The goal of this protocol is to transfer some unknown quantum state from one system to another one. An auxiliary two-mode entangled state is required to realize such a transmission. In the first step, the input state must be

entangled with one of the auxiliary subsystems. Then, by carrying out local measurements over the input and entangled auxiliary subsystems in the correct basis, we can carry out a transfer of the input state to the unmeasured quantum system. Teleportation can be said to be a computation with a unit transformation matrix. The teleportation protocol will be discussed in more detail in Sec. 2.1.1.

Thus, the one-way quantum computation model is a generalization of the quantum teleportation protocol to higher dimensional systems, whereby selecting a basis of local measurements a controlled transformation of the input state is performed.

1.2.1 Resources for one-way quantum computation

In the previous section, we discussed that the main resource for one-way quantum computation is multi-particle entangled states. Usually, cluster states are used as such states, which can be efficiently parameterized by a mathematical graph [31]. In this case, the nodes of the graph denote quantum subsystems and the edges denote the entanglement between them. There are many ways to implement cluster states in continuous variables. They can be implemented on light fields [32–36], on atomic ensembles [37], on mixed (atomic-field) systems [38, 39] and on optomechanical systems [40].

A valuable property of cluster states in continuous variables is that they have great potential in terms of their scalability [41–46]. This is mainly achieved by frequency and/or time multiplexing. For example, in paper [46], the authors propose a method of generating a scalable two-dimensional cluster state based on multiplexing in the time domain. They were able to experimentally obtain a two-dimensional cluster state capable of performing around 5,000 operations on 5 input data.

Formally, cluster states in continuous variables are generated from a set of quadrature squeezed oscillators. In the idealized case, where the fluctuations in the squeezed quadrature are completely suppressed, the operations in the considered model are performed without errors. In reality, it is impossible to get an ideal squeezed state. Cluster generation uses oscillators with a finite degree of squeezing. As a result, noise from non-ideally squeezed quadratures distorts the result of operations and leads to so-called unrecoverable errors. At the same time, errors will accumulate as the number of operations is increased. It is the existence of these errors is the main limiting factor for the considered model.

In paper [47] it has been shown that it is possible to perform universal multimode Gaussian operations using one-way quantum computation in continuous variables. However, to achieve universal quantum computation, we also need to be able to perform a non-Gaussian operation. For this purpose, in a one-way quantum computation scheme, a non-Gaussian measurement procedure can be used, namely the measurement of the number of photons. An alternative approach is to use auxiliary non-Gaussian states as a resource for the computation.

The basic resource for one-way quantum computation is a linear four-node cluster state. Its presence turns out to be a necessary and sufficient condition for the realization of universal single-

mode Gaussian operations [47]. Therefore, in our work, we will consider this cluster state as a resource.

It should be noted that the same operation can be carried out in different ways. Different configurations of the resource cluster state and different strengths of entanglement between cluster nodes can be chosen, and local measurements over subsystems can be made in different ways. Therefore, the question arises about how to implement a particular operation with minimal error? This kind of analysis allows errors to be minimized at the level of individual operations. This is useful because, as we shall see later, only small errors can be corrected.

In addition, we need to be able to coordinate the different operations over time. In this regard, an essential resource for computation is quantum memory [48]. It is based on the principle of carrying the quantum-statistical properties of light to the long-lived degrees of freedom of another physical system, most often an ensemble of atoms. In this case, the requirements for memory storage time are not very high, since we need times of the order of operations' performance time. At such times, the negative effects associated with the thermal motion of the atoms [49, 50] can be neglected.

1.2.2 Error correction codes

When discussing cluster states in the previous section, we said that the finite degree of squeezing of the resource oscillators used to generate the cluster state is the main source of errors in one-way quantum computation schemes. Of course, this is not the only source of error. Errors in operations can be caused by: inaccuracies in the parameters of the physical elements from which the scheme is constructed, incorrect phase selection of local oscillators during homodyne measurement, incomplete coincidence of temporal and spatial profiles of the interacting fields, etc. However, such technical errors can be corrected by us, whereas errors associated with the finite degree of squeezing of the oscillators are fundamentally unrecoverable. The presence of such unrecoverable errors mostly appears as a displacement of the output state quadrature by random small values.

To compensate this disadvantage, error correction codes have been created. Their idea is to encode information using states that have some characteristic properties that are not changed by the error type to be corrected. These properties can give us information on how the error needs to be compensated for. It should be noted here that quadrature displacement errors are of the Gaussian type, that is, errors defined by Gaussian transformations. According to the No-Go theorem [51], Gaussian states cannot be used to correct for Gaussian errors in Gaussian states. Thus, we need non-Gaussian states for the error correction procedure.

To better understand the error correction method, we consider the code of displacement error correction proposed by Greenberger, Kitayev and Preskill [13]. The idea behind this code is to

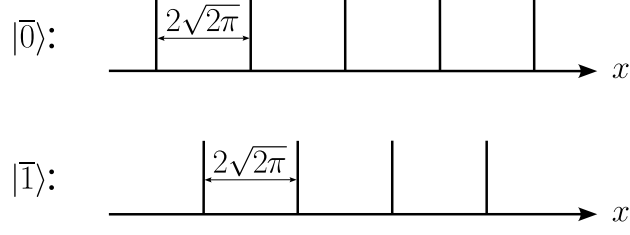


Figure 1.2: Schematic illustration of the states $|\bar{0}\rangle$ and $|\bar{1}\rangle$.

encode information in the form of quantum oscillator states

$$|\bar{0}\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| 2n\sqrt{2\pi} \right\rangle_x, \quad |\bar{1}\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| (2n+1)\sqrt{2\pi} \right\rangle_x, \quad (1.13)$$

called GKP states. They define the logical states of the qubits. On the phase plane, states $|\bar{0}\rangle$ and $|\bar{1}\rangle$ appear as equidistant “combs” (see Fig. 1.2), with state $|\bar{0}\rangle$ being displaced relative to state $|\bar{1}\rangle$ by the value of $\sqrt{2\pi}$. Thus, if a displacement error occurs as a result of the computation, the whole “combs” will be displaced. If the displacement value is small, we can detect the error and correct it.

The schemes shown in Fig. 1.3 are used to correct the qubit errors encoded by this approach. Scheme (a) allows us to correct the displacement error in the x -quadrature and scheme (b) in the y -quadrature. Since these schemes work similarly, consider only scheme (a).

Let the input state of the qubit have the form $|\bar{\psi}\rangle_1 = a|\bar{0}\rangle_1 + b|\bar{1}\rangle_1$. As a result of the computation, this qubit has a displacement error in the x -quadrature by the value u , which is expressed by the action of an operator of the form $e^{-2iu\hat{y}_1}$. To correct the error, we require an auxiliary quantum system in the state

$$|\bar{+}\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\bar{0}\rangle_2 + |\bar{1}\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| n\sqrt{2\pi} \right\rangle_{x,2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| 2n\sqrt{2\pi} \right\rangle_{y,2}. \quad (1.14)$$

The systems then interact with each other in a controllable way using the operation SUM(1). This operation transforms the oscillator quadrature as [52]:

$$\hat{x}_{1,out} = \hat{x}_{1,in}, \quad \hat{y}_{1,out} = \hat{y}_{1,in} + \hat{y}_{2,in}, \quad (1.15)$$

$$\hat{x}_{2,out} = \hat{x}_{2,in} - \hat{x}_{1,in}, \quad \hat{y}_{2,out} = \hat{y}_{2,in}. \quad (1.16)$$

After action SUM(1), the systems will be in a state

$$e^{-2iu\hat{y}_1} |\bar{\psi}\rangle_1 |\bar{+}\rangle_2 \xrightarrow{\text{SUM}(1)} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \left(a \left| 2n_1\sqrt{2\pi} + u \right\rangle_{x,1} + b \left| (2n_1+1)\sqrt{2\pi} + u \right\rangle_{x,1} \right) \times \left| n_2\sqrt{2\pi} + u \right\rangle_{x,2}. \quad (1.17)$$

Measuring the x -quadrature of the second system, we get $X_2 = u + m\sqrt{2\pi}$, where m is some integer. Then, to perform error correction, we need to displace the x -quadrature by the classical value $X_{cor} = R_{\sqrt{2\pi}}(X_2)$, where

$$R_s(z) \equiv z - s \left[\frac{z}{s} + \frac{1}{2} \right]. \quad (1.18)$$

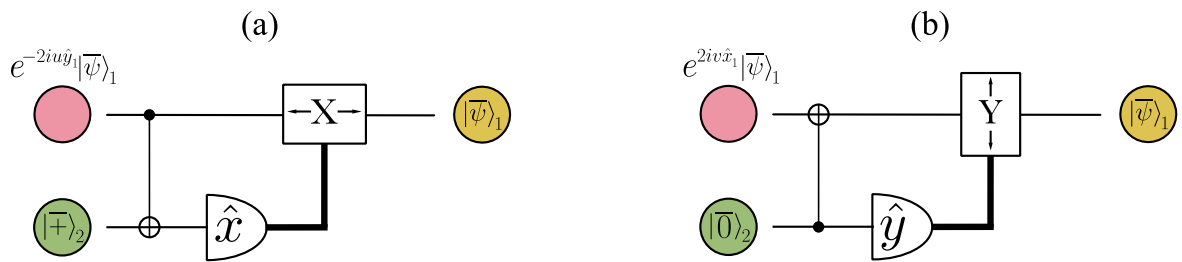


Figure 1.3: Error correction schemes: (a) – x -quadrature error correction scheme, (b) – y -quadrature error correction scheme. In the diagram: $|\bar{\psi}\rangle_1$ – corrected state, $|\bar{\nabla}\rangle_2$ and $|\bar{0}\rangle_2$ – auxiliary states, \hat{x} and \hat{y} – homodyne detectors that measure the corresponding quadrature, the thick line indicates the classical channel that transmits the measurements to devise X and Y that displace the corresponding quadratures.

Here, $\lfloor \dots \rfloor$ denotes the integer part of a number.

It can be seen that this code only works correctly with $u < \sqrt{\pi}/2$, otherwise we cannot unambiguously determine the value of u . In [53], the authors evaluated the stability of such a correction code and showed that it is fully stable (i.e. it does not accumulate error from the number of operations) if the error value is less than $\sqrt{2\pi}/6$.

Due to the impossibility of achieving an infinite degree of squeezing, the GKP states considered above cannot be obtained experimentally, they are a mathematical abstraction. In practice, states that approximate to them are used. In these states, each peak represents a Gaussian distribution with a finite width, and the peak heights have a common Gaussian envelope. Nevertheless, using such approximate GKP states, it is still possible to carry out an error correction procedure. Thus, in [53] it has been theoretically demonstrated that by using approximate GKP states one can successfully reduce quantum errors such that their effect on the results is negligible. In addition, in paper [54], besides the influence of non-ideal GKP states, the influence of non-ideality of entanglement transformations was considered. The authors have shown that the error correction procedure is feasible even in such a model, which is as close to a real experiment as possible.

Such codes can be adapted for one-way quantum computation. In papers [12, 55], the authors propose to entangle unmeasured (output) cluster nodes with auxiliary oscillators in states $|\bar{\nabla}\rangle$ and $|\bar{0}\rangle$. Then, after carrying out the one-way computation procedure, error correction of quadrature displacement for the output states can be carried out, similar to the scheme discussed above.

It is important to note that the squeezing that is experimentally achievable at the moment turns out to be insufficient to perform universal quantum computation. In [12], it was shown that the implementation of fault-tolerant quantum computation (i.e. computations able to decrease logical errors to a given low level) required squeezing in the cluster state above -20.5 dB. At the same time, the maximum experimentally achievable squeezing is -15 dB [11]. However, there are methods that can significantly reduce the squeezing requirement.

1.2.3 Surface codes

The main factor limiting the operation of error correction protocols is that if the displacement error is large enough, we cannot reliably determine the original state of the qubit before the error. Even in the ideal case, when encoding a qubit with GKP states, the displacement values should not exceed $\sqrt{\pi/2}$. Performing error correction at quadrature displacement values larger than the maximum allowable will result in qubit errors. So, a x -quadrature displacement can produce an error of type $a|\bar{0}\rangle + b|\bar{1}\rangle \rightarrow b|\bar{0}\rangle + a|\bar{1}\rangle$ (bit flip), while a y -quadrature displacement can produce an error of type $a|\bar{0}\rangle + b|\bar{1}\rangle \rightarrow a|\bar{0}\rangle - b|\bar{1}\rangle$ (phase flip). If we have a tool to track the occurrence of such errors, we could lower the requirements by the value of the displacement error. Surface codes are such a valuable tool.

Initially, the idea of surface codes originated within computation in discrete variables [56–59]. But it was later adapted for computational schemes in continuous variables [60–63]. To get a better understanding of how surface codes work, let us look at how a surface GKP code works.

The surface codes are defined on a two-dimensional square array $d \times d$ of logic qubits encoded with GKP states. Fig. 1.4 shows a surface code implementation for a qubit array with $d = 3$. Each of the logical qubits is entangled with two auxiliary oscillators in the states $|\bar{0}\rangle$ and $|\bar{+}\rangle$. With these auxiliary oscillators, an error correction procedure is carried out (see Sec. 1.2.2). Afterwards, we must check that no errors have occurred during the correction procedure.

To this, auxiliary qubits in states $|\bar{0}\rangle$ and $|\bar{+}\rangle$ are staggered inside each of the “cells” formed by the logic qubits (see Fig. 1.4(b)). These qubits are entangled with all neighbouring logical qubits and used to measure the eigenvalues of the operators

$$\hat{S}_{X,k} = \hat{X}_a^\dagger \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d^\dagger, \quad \hat{S}_{Z,k} = \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d, \quad (1.19)$$

which called X-type and Z-type surface code stabilizers respectively. Here

$$\hat{X}_k = e^{-i\sqrt{2\pi}\hat{y}_k}, \quad \hat{Z}_k = e^{i\sqrt{2\pi}\hat{x}_k}. \quad (1.20)$$

In this case, operators \hat{X}_k and \hat{Z}_k belonging to the same node anti-commutate with each other:

$$\{\hat{X}_k, \hat{Z}_k\} = 0, \quad \{\hat{X}_k^\dagger, \hat{Z}_k\} = 0. \quad (1.21)$$

The X-type and Z-type stabilizers are measured in staggered order, with each node participating in the measurement of two stabilizers of each type. For neighbouring stabilizers with two oscillators in common, we obtain that

$$[\hat{X}_a^\dagger \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d^\dagger, \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d] = \left((\hat{X}_a^\dagger \hat{Z}_a)(\hat{X}_b \hat{Z}_b) - (\hat{Z}_a \hat{X}_a^\dagger)(\hat{Z}_b \hat{X}_b) \right) \hat{X}_c \hat{X}_d^\dagger \hat{Z}_c \hat{Z}_d = 0. \quad (1.22)$$

Since all surface code stabilizers commute with each other, we can measure all their eigenvalues at the same time.

Schemes for measuring the eigenvalues of stabilizers $\hat{S}_{Z,k}$ and $\hat{S}_{X,k}$ using auxiliary qubits are shown in Fig. 1.5(a) and Fig. 1.5(b) respectively. From the homodyne measurements of X_k and

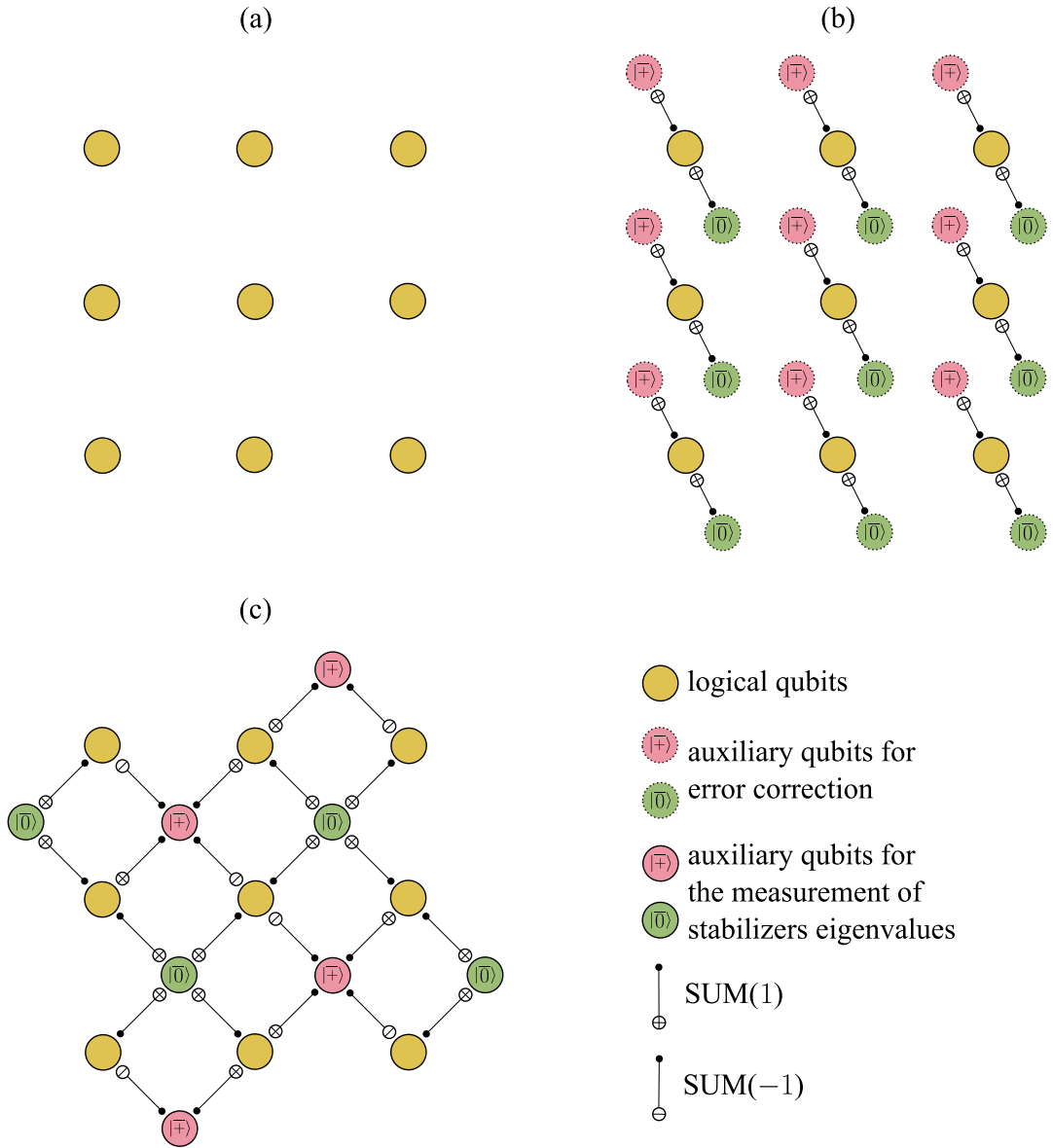


Figure 1.4: An example of a surface code implementation. (a) An array of 3 by 3 logical qubits for computation. (b) Error correction procedure. (c) Measurement of eigenvalues of X-type and Z-type stabilizers.

Y_k , we define the eigenvalues of the stabilizers as

$$S_{X,k} = \begin{cases} +1, & |R_{2\sqrt{2\pi}}(Y_k)| = 0 \\ -1, & |R_{2\sqrt{2\pi}}(Y_k)| = \sqrt{2\pi} \end{cases}, \quad S_{Z,k} = \begin{cases} +1, & |R_{2\sqrt{2\pi}}(X_k)| = 0 \\ -1, & |R_{2\sqrt{2\pi}}(X_k)| = \sqrt{2\pi} \end{cases}, \quad (1.23)$$

where $R_s(z)$ is defined as (1.18). Thus, for stabilizer $S_{X,k}$ the eigenvalue $+1$ corresponds that the auxiliary qubit has remained in state $|+\rangle$ after entanglement with the logical qubits, while the eigenvalue -1 corresponds that it has moved to state $|-\rangle$. Similarly, for stabilizer $S_{Z,k}$: $+1$ - remains in state $|\bar{0}\rangle$, -1 - goes to state $|\bar{1}\rangle$. The cycle is then repeated, starting with the error correction procedure.

The states that are the eigenstates of the entire group of surface code stabilizers are called quiescent states. There are a huge number of quiescent states that can be chosen with stabilizers

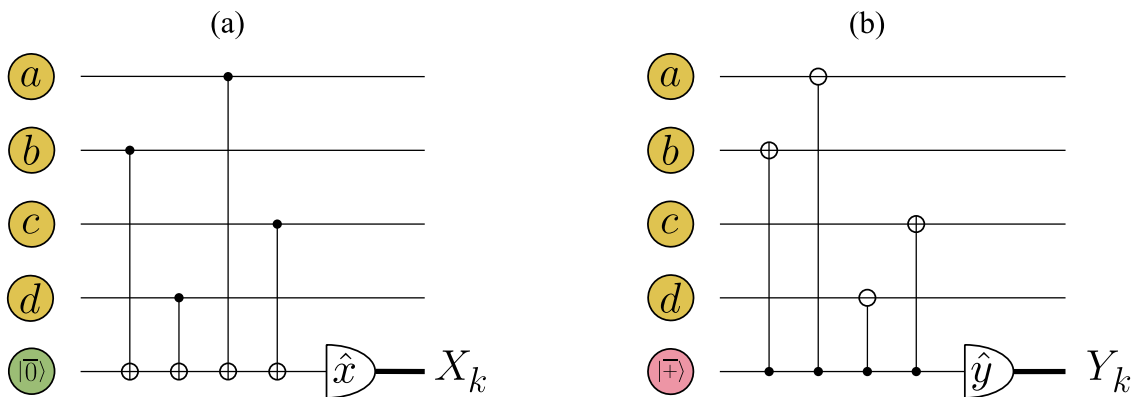


Figure 1.5: (a) Scheme for measuring the eigenvalues of a Z-type stabilizer. (b) Scheme for measuring the eigenvalues of a X-type stabilizer.

measurements: if the array has N of auxiliary qubits to measure stabilizers, then 2^N of quiescent states are possible. If the system is in one of the quiescent states, then if the error correction procedure works correctly (when the shift errors do not exceed the threshold value) at each cycle of the stabilizers eigenvalue measurements its state will remain unchanged, and the set of measured eigenvalues $\{S_{X,k}\}$ and $\{S_{Z,k}\}$ will remain the same.

If, after error correction, a bit flip error occurs in one of the qubits, the measured eigenvalues of the Z-type stabilizers associated with that node will simultaneously reverse their sign. It signals the occurrence of an error after the correction procedure. However, the presence of such an error will have no effect on the X-type stabilizers. In contrast, if a phase flip type error occurs, the eigenvalues of the X-type stabilizers associated with that qubit will simultaneously reverse their sign, while the eigenvalues of the Z-type stabilizers will remain unchanged.

If error of correction occurs rarely enough, the error signals will be well isolated. Then it is possible to trace what type of errors occur after the correction procedure and which nodes it occurs. However, if the errors are frequent, the error identification problem will become more complex and as the error frequency increases it will no longer have an unambiguous solution. This limits the ability of surface code to deal with errors.

Thus, we have an additional tool in our hands for finding computation errors. So, for example, if each of the logical qubits of an array is entangled with an oscillator on which we are performing computations, we will be able to “catch” error correction failures for such oscillators. In other words, we can correct displacement errors by larger values than with error correction codes alone. It significantly reduces the squeezing requirement for resource states. For example, in [61] the authors showed that fault-tolerant quantum error correction is possible in computational schemes using surface codes for GKP state squeezing above 11.2 dB. Also, the use of surface codes in combination with postselection techniques can reduce the squeezing requirements to -10 dB [60].

1.3 Non-Gaussian quantum operations and states

When discussing the universality of quantum computation in Sec. 1.1.3, we showed that it requires at least one non-Gaussian operation. Thus, non-Gaussian operations and states are an important element of quantum computation in continuous variables. There are many different types of non-Gaussian operations. Therefore, a number of questions immediately arise. Is any non-Gaussian operation suitable for implementing universal quantum computation? How do non-Gaussian operations compare with each other? Are there any operations best suited to implement quantum computation? Unfortunately, there is no clear answer to these questions at the moment.

In this section, we will consider the basic non-Gaussian operations and states occurring in quantum optics. We will also discuss the topic of criteria of non-Gaussianity and classification of non-Gaussian states.

1.3.1 Kerr non-linearity

Historically, the first non-linear process discovered in quantum optics was the Kerr effect, which appears as a dependence of the index of refraction of a medium on the intensity of light passing through it. This effect is observed in media with cubic non-linear susceptibility. The evolution of a quantum field in a medium with Kerr non-linearity is described by a Hamiltonian of the form

$$\hat{H}_{kerr} = \chi(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)^2, \quad (1.24)$$

where χ is the real coefficient characterizing the degree of non-linearity. This Hamiltonian is a fourth-degree one by field quadrature and is non-Gaussian, and therefore can be used to obtain higher-degree Hamiltonians. In [7] it has been demonstrated that Kerr non-linear evolution and a universal set of Gaussian operations are a sufficient set of operations to implement universal quantum computation.

The Kerr effect can appear in a wide range of physical systems: in glass waveguides [64], in atomic ensembles [65, 66], on a single atom in a high quality resonator [67], in optomechanical systems [68, 69], and in superconducting systems on Josephson junctions [70]. However, the value of the Kerr non-linearity turns out to be small for the needs of quantum optics. Real values of χ in the optical range are insufficient to experimentally realize non-Gaussian operations or generate quantum states that can be used as a resource for computation.

1.3.2 Photon subtraction scheme

A widespread method of obtaining non-Gaussian states is the photon subtraction procedure. Ideally, it corresponds to the action of the annihilation operator \hat{a} on the target quantum state $|\psi_{in}\rangle$. Since operator \hat{a} is non-unitary, such an action leads to a non-Gaussian state (except for the trivial case where operator \hat{a} acts on a vacuum state).

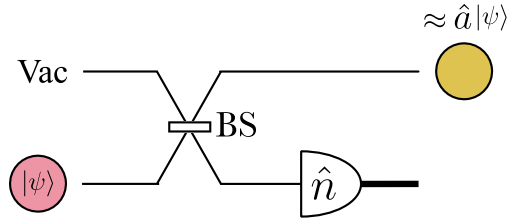


Figure 1.6: Scheme for the implementation of conditional photon subtraction from input state $|\psi\rangle$. In the diagram: Vac is vacuum state, BS is asymmetric beam splitter, \hat{n} is photon number measurement procedure.

However, it is not possible to directly implement the action of operator \hat{a} , as this operator is not hermitian and therefore not observable. In practice, a conditional photon subtraction procedure is used to obtain these states. It is implemented using the scheme shown in Fig. 1.6.

To describe this procedure, it will be convenient to pass on to a decomposition into Fock states, which are usually called eigenstates of the number-of-particles operator $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$:

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, 3\dots \quad (1.25)$$

These states are a complete orthonormal set, i.e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{I}, \quad \langle m|n\rangle = \delta_{mn}. \quad (1.26)$$

Thus, the target state $|\psi\rangle$ from which we want to subtract photons can be represented as a decomposition

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (1.27)$$

It is sent to the beam splitter input with an amplitude reflection coefficient R (and an amplitude transmission coefficient T). The second channel of the beam splitter remains open, and a vacuum state is sent to it. The Fock state transformation on the beam splitter for this case can be described as

$$|n\rangle \rightarrow (-1)^k \sqrt{\frac{n!}{(n-k)!k!}} |R|^k |T|^{n-k} |n-k\rangle, \quad (1.28)$$

where k is the number of photons in the reflected beam (see [71, 72]). The number of photons is then measured in the reflected beam. Since we cannot reliably differentiate the number of photons detected, the coefficient R must be small so that the probability of “detaching” more than one photon from the input state can be neglected. In the case where the photon number detection gives a result other than zero, we consider the procedure to have been successful, and the output state will be described by the non-normalised state vector

$$|\psi_{out}\rangle = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |R| |T|^{n-1} |n-1\rangle. \quad (1.29)$$

We can see that this state is close to the desired state $\hat{a}|\psi\rangle$. Otherwise, when photon detection does not occur, the photon subtraction procedure will not be implemented.

Thus, the implementation of the photon subtraction procedure is probabilistic. Because the reflection coefficient R must be small, the probability of such an operation succeeding would also be small. This is the main disadvantage of this non-Gaussian transformation.

However, photon subtraction finds its application in a wide range of problems, thanks to the relative simplicity of implementation. Thus, applying a photon subtraction procedure to a two-mode squeezed vacuum allows one to increase the degree of state entanglement [73–75], in particular it allows one to increase the fidelity of quantum state teleportation [76,77]. In addition, conditional photon subtraction is often seen as a tool for generating other, more complex, non-Gaussian states used in quantum optics protocols [78–82]. For example, in [82] the authors propose a protocol for generating arbitrary non-Gaussian states. This scheme is based on a quantum teleportation protocol that uses a two-mode non-Gaussian state as a resource, obtained as follows: a conditional photon subtraction procedure is applied to the squeezed oscillators, then the states are entangled using a symmetric beam splitter. When teleporting, the non-Gaussianity from the resource is carried to the input state. Thus, by performing a selection on the photon number measurement, we can perform a controlled non-Gaussian transformation over the input state. The output state is then sent back to the input and the procedure is repeated many times. By multiple applying this modified teleportation and selection from the results of measurements at each step, it is possible to generate non-Gaussian states with given properties. An alternative use of the photon subtraction procedure is to obtain non-Gaussian cluster states [83], which are considered as a potential resource for universal quantum computation.

1.3.3 Cubic phase gate

Another non-Gaussian transformation, often appearing in theoretical papers, is the cubic phase gate, which is described by a third order Hamiltonian in terms of quadrature operators:

$$\hat{H}_{CPG} = 2\gamma\hat{x}^3, \quad (1.30)$$

where γ is the real coefficient characterizing the degree of non-linearity of the transformation. As in the case of Kerr nonlinearity, such a non-Gaussian transformation combined with a universal set of Gaussian operations form a set of operations sufficient to implement universal quantum computation (see Sec. 1.1.3).

The ideal cubic phase state is a quantum state that has the form

$$|\gamma\rangle = \int dx e^{i2\gamma x^3} |x\rangle_x, \quad (1.31)$$

where $|x\rangle_x$ is an eigenstate of the x -quadrature operator, defined by Eq. (1.3). A cubic phase gate can be realized not only as some non-linear physical process, but also by carrying over non-Gaussian statistics from the auxiliary cubic phase state $|\gamma\rangle$ to the input quantum system [13,84,85].

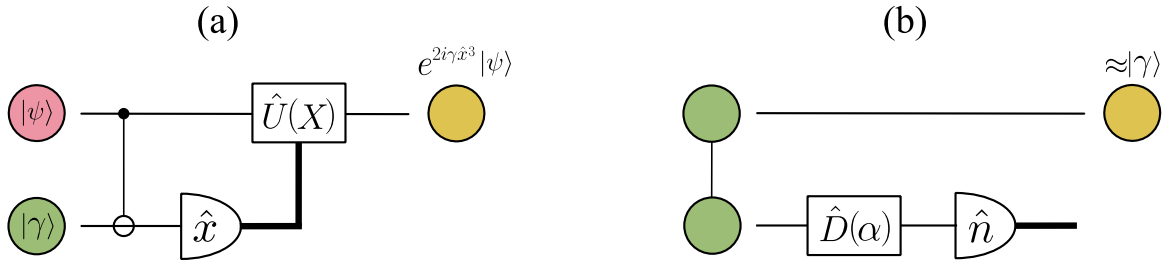


Figure 1.7: (a) Scheme for a cubic phase gate implementation using an auxiliary cubic phase state $|\gamma\rangle$. (b) The first scheme for generation of cubic phase states. In the diagram: $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$ is the quadrature displacement operation by α , \hat{n} denotes the procedure of the photon number measurement.

Fig. 1.7(a) shows a scheme of implementation of the cubic phase gate using the auxiliary cubic phase state. Let us have a closer look at how this scheme works. We will write an arbitrary input state as $|\psi\rangle_1 = \int dx_1 \psi(x_1) |x_1\rangle_{x,1}$. This state is entangled with the auxiliary cubic phase state $|\gamma\rangle_2$ in the second channel by means of the SUM(-1) transformation, which acts as $e^{2i\hat{x}_1\hat{y}_2}$. This is followed by a x -quadrature measurement in the second channel, which corresponds to projecting the second oscillator onto the $|X\rangle_{x,2}$ state, where X is the measured value of x -quadrature. After such actions, the state in the first channel will be:

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle_{1=x,2} \langle X| e^{2i\hat{x}_1\hat{y}_2} |\psi\rangle_1 |\gamma\rangle_2 &= \iint dx_1 dx_2 \psi(x_1) e^{2i\gamma x_2^3} |x_1\rangle_{x,1} \langle X|x_2 - x_1\rangle_{x,2} \\ &= \int dx_1 \psi(x_1) e^{2i\gamma(x_1+X)^3} |x_1\rangle_{x,1} = e^{2i\gamma(\hat{x}_1+X)^3} |\psi\rangle_1 \end{aligned} \quad (1.32)$$

To get rid of the unnecessary terms depending on X in the operator exponent, it is required to act an operator of the form

$$\hat{U}(X) = e^{2i\gamma(\hat{x}^3 - (\hat{x}+X)^3)} \quad (1.33)$$

The Hamiltonian corresponding to such an operator is a second degree Hamiltonian of quadrature operators and can be realized by linear optics. The output state of the scheme will correspond to the action of the cubic phase gate on the input state. Thus, the ability to generate cubic phase states and the ability to realize a cubic phase gate are equivalent to each other.

In addition to creating a universal set of operations, the cubic phase gate can be used to realize T-gates on oscillators encoded with GKP states [13] and to generate other non-Gaussian states, such as Schrödinger's cat state [86, 87]. This dissertation research is largely concerned with the possibilities of using a cubic phase gate. Thus, in Chapter 2.4 we show that the cubic phase gate can be used to improve the accuracy of state teleportation in continuous variables. In Chapter 4.4 we show that this gate can be used to reduce the errors of arbitrary single-mode Gaussian operations.

The first idea for generating cubic phase states was proposed by Gottesman, Kitayv and Preskill back in 2001 (see Fig. 1.7(b)). A two-mode entangled state was used as a resource. One

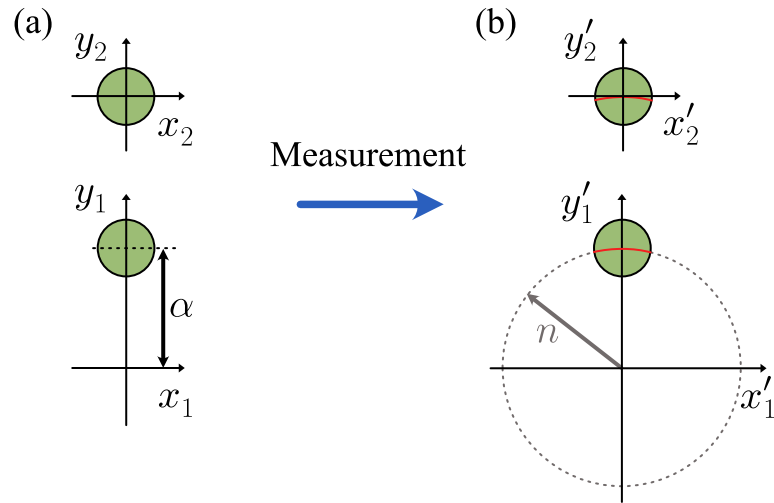


Figure 1.8: Illustration of the first method of generating a cubic phase state. (a) Two entangled states, one of them we displaced by a large value α . (b) Measuring the photon number $\hat{n} \sim \hat{x}^2 + \hat{y}^2$ of the displaced state generates a state close to the cubic phase state in the unmeasured channel.

of the modes was displaced in phase space by a larger value α and then the number of photons in this mode was measured. This measurement generated a state in the unmeasured channel close to a cubic phase state [13, 84, 88] (see Fig. 1.8). However, this method is difficult to implement experimentally, as it required a quadrature displacement operation of a value far removed from what is realistically achievable in the experiment. Due to it, the cubic phase gate has long remained only an abstract mathematical transformation.

Nevertheless, the situation has changed in the last few years. There are more and more works devoted to new methods of generating states of the cubic phase and the implementation of the cubic phase gate itself. Such methods include: generation of a cubic phase state as a superposition of Fock states [89, 90]; generation of cubic phase states using a photon subtraction procedure [80, 82]; creation of a cubic phase gate based on Kerr non-linearity [91]; protocols for converting non-Gaussian three-squeezed states generated experimentally to cubic phase states [92]; implementation of cubic phase gate in microwave circuits with Josephson junctions [93]; and generating cubic phase states (as well as other non-Gaussian states) in microwave resonators driven by a superconducting qubit [94]. Particularly significant progress has been made in the microwave range – it is in this range that the cubic phase state has been generated for the first time [94]. In this way, the cubic phase gate is gradually evolving from a purely theoretical transformation into a real-world device.

1.3.4 Examples of Gaussian and non-Gaussian states

We cannot discuss non-Gaussian operations without discussing the non-Gaussian states that result from their action. Therefore, let us consider some of the non-Gaussian states most often used in the problems of quantum optics.

A useful tool when dealing with non-Gaussian states is the Wigner function (see e.g. [95]), which describes the quasi-probability distribution for some quantum state in phase space. For a quantum state with density matrix $\hat{\rho}$ it is defined as

$$W(x, y) \equiv \frac{1}{\pi} \int d\xi e^{-2iy\xi} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{\rho} \left| x - \frac{1}{2}\xi \right. \right\rangle. \quad (1.34)$$

As we discuss below, Wigner function analysis plays an important role in classifying non-Gaussian states.

However, before considering non-Gaussian states, it will be useful to recall some of the Gaussian states.

A. Coherent state

Of the set of Gaussian states, the coherent state is most often used, within quantum optics. This state is the eigenstate of the photon annihilation operator:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (1.35)$$

This state acts as the nearest analogue of classical light. Formally, it can be generated by the action of the displacement operator $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$ on the vacuum state: $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle$.

B. Squeezed state

Another important class of states for quantum optics are squeezed states, acting as a major resource for one-way quantum computation. Formally, it is generated by the action of the squeezing operator on the vacuum state. The squeezing operator has the form

$$\hat{S} = e^{i\frac{r}{2}(\hat{x}_j\hat{y}_j + \hat{y}_j\hat{x}_j)}, \quad (1.36)$$

where r is the squeezing parameter, defining the proportional stretching and squeezing of the quadratures relatively to the vacuum state of the field. The squeezed states can be represented as a decomposition over the eigenstates of the x -quadrature operator $|x\rangle_x$ as

$$|r\rangle_s = \int dx \sqrt{\frac{2e^{2r}}{\pi}} \exp(-e^{2r}x^2) |x\rangle_x. \quad (1.37)$$

We now turn to examples of non-Gaussian states.

C. Fock state

In Sec. 1.3.2 we introduced Fock states as eigenstates of the particle number operator (1.29). They are a perfect example of non-Gaussian states arising naturally in quantum optics as eigenfunctions of the Hamiltonian of the electromagnetic field. The Fock state with number n can be represented as a decomposition over the eigenstates of the x -quadrature operator as

$$|n\rangle = \int dx \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}n!\sqrt{2\pi}}} e^{-x^2} H_n(\sqrt{2}x) |x\rangle_x \quad (1.38)$$

where $H_k(x)$ is the Hermite polynomial with index n . The Wigner functions for Fock states with $n = 1$ and $n = 2$ are shown in Fig. 1.9.

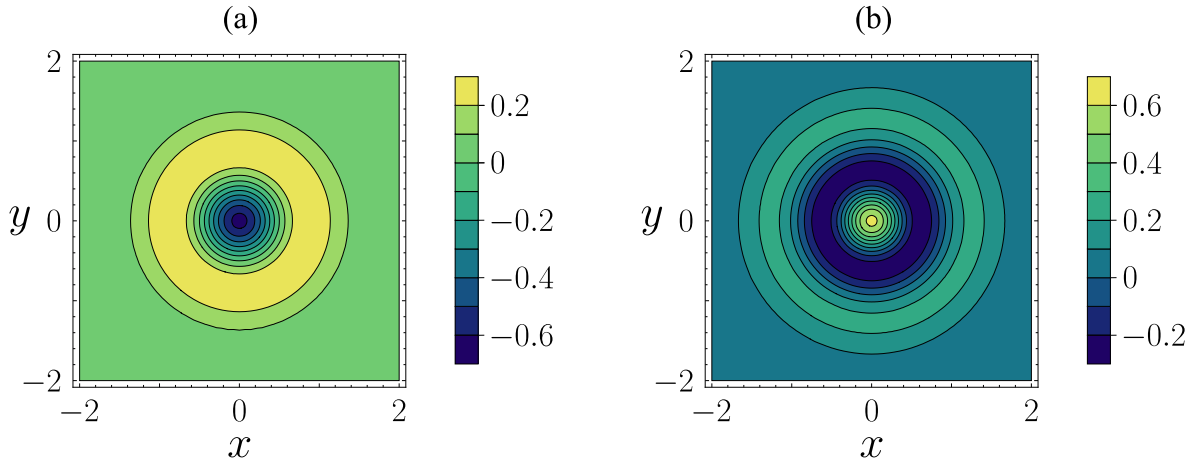


Figure 1.9: Wigner function of Fock states (a) at $n = 1$, (b) at $n = 2$.

D. Cubic phase state

When we discussed the cubic phase gate, we have already mentioned the ideal cubic phase state, which is defined by the Eq. (1.31). Formally, it is generated by the action of a cubic phase gate on an ideally squeezed in y -quadrature state. However, since perfect compression cannot be achieved in practice, the cubic phase state is generally defined as

$$|\gamma, r\rangle = e^{2i\gamma\hat{x}^3} | -r \rangle_s, \quad (1.39)$$

where $| -r \rangle_s$ при $r > 0$ is the state squeezed in y -quadrature. Fig. 1.10(a) shows an example of the Wigner function for a cubic phase state.

E. Schrödinger cat state

Another interesting non-Gaussian state is the Schrödinger cat state. It is a superposition of the two coherent states $|\alpha\rangle$ and $| -\alpha\rangle$, and is generally defined as

$$|\psi_{cat}\rangle = N_{cat} (|\alpha\rangle + e^{i\theta} | -\alpha\rangle), \quad (1.40)$$

where $N_{cat} = \left(2 + 2e^{-2|\alpha|^2} \cos \theta\right)^{-1/2}$ is the normalization factor and θ is an arbitrary phase factor. The state with $\theta = 0$ is called an even Schrödinger cat, and with $\theta = \pi/2$ an odd one. An example of the Wigner function for the Schrödinger cat state is shown in Fig. 1.10(b).

1.3.5 Criteria for non-Gaussianity and classification of non-Gaussian states

Non-Gaussian states are an important resource for implementing universal quantum computation. However, the set of non-Gaussian states is vast, and we must be able to distinguish which ones will be useful as a resource for calculations and which ones will not. This raises the question of the classification of non-Gaussian states. This classification is currently in its infancy and is

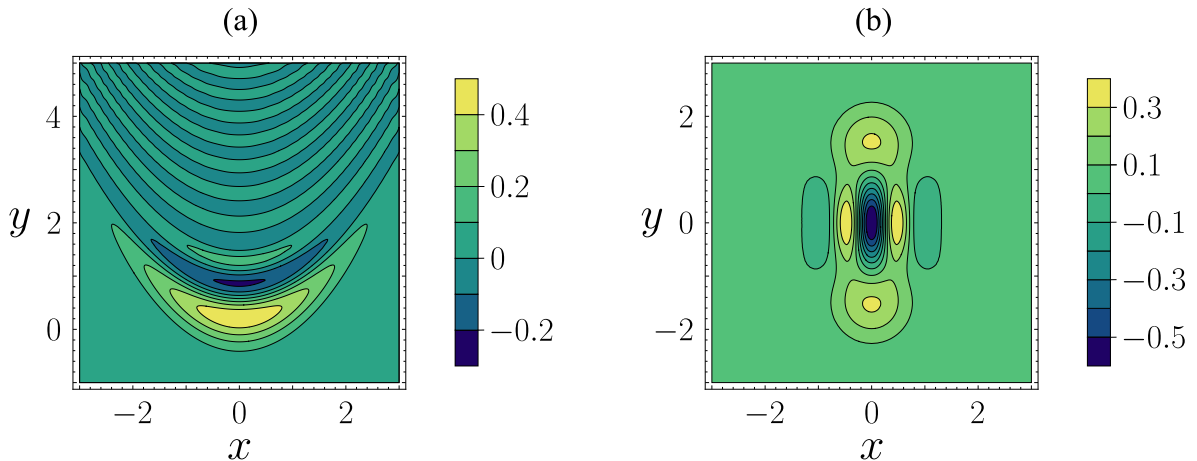


Figure 1.10: (a) Wigner function of the cubic phase state $|\gamma, r\rangle$ at $\gamma = 0.1$ and $r = 1$. (b) Wigner function of the odd Schrödinger cat state $|\psi_{cat}\rangle$ at $\alpha = 1.5i$.

not as well-structured as the classification of Gaussian states. Nevertheless, based on different criteria, it is possible to identify classes of states that may be useful to us. Let us focus on this subject in more detail.

To determine the set of non-Gaussian states, first define which states are Gaussian. Gaussian states include quantum states whose statistics can be fully described using the first two moments. Formally, any Gaussian state can be obtained from a vacuum state by the action of a Hamiltonian not exceeding the second order by quadrature operators. Broadly defined, non-Gaussian states are all those states that do not enter into the set of Gaussian states.

There are a number of non-Gaussian states that can be generated as a mixture of Gaussian states. Such states can be prepared by applying a combination of Gaussian operations and classical random processes. At the same time, the non-Gaussian states we need for the computations arise from strongly nonlinear quantum processes which cannot be described by a second-degree Hamiltonian by quadrature operators. Therefore, there is a set, which includes all Gaussian states and non-Gaussian states that are a mixture of them:

$$\mathcal{G} \equiv \left\{ \hat{\rho} : \hat{\rho} = \int d\lambda p(\lambda) \hat{\rho}_G(\lambda) \right\}, \quad (1.41)$$

where $\hat{\rho}_G(\lambda)$ is the density matrix of the pure Gaussian states characterized by the parameter set λ , and $p(\lambda)$ can be an arbitrary probability distribution. The states that are not included in the set \mathcal{G} form a separate class - quantum non-Gaussian states.

In [96, 97] it has been shown that quantum states with a positively defined Wigner function can be effectively simulated on a classical computer. Therefore, quantum computation requires states with the negative part of the Wigner function. Pure quantum non-Gaussian states have this property. However, there are mixed quantum non-Gaussian states with a strictly positive Wigner function. Such a state, for example, would be a highly noisy single-photon state, which is a mixture of a single-photon state and vacuum noise. It is currently the quantum states with

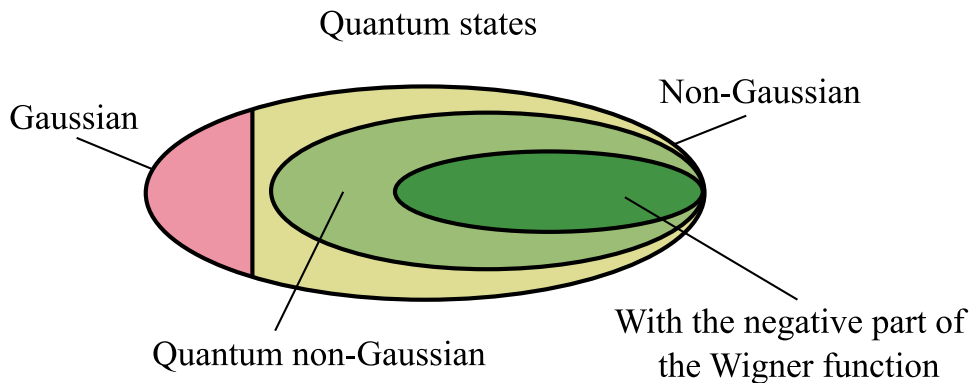


Figure 1.11: Classification of non-Gaussian states.

the negative part of the Wigner function that are seen as the main resource for the realization of universal quantum computation.

Schematically, the classification of quantum states described above is shown in Fig. 1.11. Sometimes more different classes of non-Gaussian states are identified (see e.g. [98]). However, we will not delve into this topic, as the more detailed classification is no longer as important to understanding the issue in general.

Introducing a classification of non-Gaussian states allows us to say which ones will be useful to us, but does not make it clear how useful they are. We need to be able to compare them to each other. Therefore, there is now active research into measures of non-Gaussianity of quantum states.

Since all pure non-Gaussian states have a negative part of the Wigner function (or Wigner negativity for short) and its presence is a necessary condition for achieving an advantage of quantum computations over classical ones, the associated measures of non-Gaussianity have naturally arisen. Such measures must satisfy several requirements. First, the measure must equal zero if and only if the Wigner function is strictly positive. Second, the measure must remain constant under Gaussian unitary transformations over the considered state. The first measure proposed to satisfy these requirements is the volume of Wigner negativity [99]. For a quantum state with a density matrix $\hat{\rho}$ it is defined as

$$\mathcal{N}(\hat{\rho}) \equiv \iint dx dp |W(x, p)| - 1. \quad (1.42)$$

The main disadvantage of this measure is that it is not additive, i.e. $\mathcal{N}(\hat{\rho}_1 \oplus \hat{\rho}_2) \neq \mathcal{N}(\hat{\rho}_1) + \mathcal{N}(\hat{\rho}_2)$. To avoid this disadvantage, another measure was introduced - the logarithmic Wigner negativity [100–102]:

$$\mathcal{R}(\hat{\rho}) \equiv \ln \iint dx dp |W(x, p)|. \quad (1.43)$$

Such a measure is additive, but the presence of a logarithm violates the convexity of the measure. A common disadvantage of non-Gaussianity measures based on Wigner negativity is that they poorly represent the non-Gaussian characteristics of mixed states. In addition, Wigner negativity is quite difficult to associate with measurable variables [103].

The second type of non-Gaussianity measure relates to the “distance” from the considered non-Gaussian state to the set \mathcal{G} of all Gaussian states and its mixtures. The main issue in constructing such measures is the definition of a metric on the space of quantum states. Most often, quantum relative entropy is taken as such a metric [100, 104–106]. In the language of density matrices, the relative entropy for state $\hat{\rho}$ in respect to state $\hat{\sigma}$ is defined as

$$\mathcal{S}(\hat{\rho}|\hat{\sigma}) \equiv \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) - \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\sigma}). \quad (1.44)$$

Then the “distance” from the considered state $\hat{\rho}$ to the nearest state from the set \mathcal{G} is

$$\mathcal{Q}(\hat{\rho}) \equiv \min_{\hat{\sigma} \in \mathcal{G}} \mathcal{S}(\hat{\rho}|\hat{\sigma}). \quad (1.45)$$

In contrast to the non-gaussianity measures associated with Wigner negativity, this type of measure is applicable to both pure and mixed states. However, this measure is difficult to interpret in terms of the applicability of identified by it states to particular quantum protocols.

Thus, there are currently no clear criteria to show which non-Gaussian states are best suited to implement universal quantum computation.

Chapter 2. Error of entangled operations in the teleportation protocol

In this chapter, we use a quantum teleportation protocol as a control to compare two different entangled operations: the mixing of squeezed quantum states on a beam splitter and a Controlled-Z (CZ) gate. Both operations are fundamental transformation tools of linear optics, and any discussion of quantum computation protocols should consider these elements. The CZ gate is the primary entanglement mechanism for generating cluster states in continuous variables [8, 34], as well as in one-way computing schemes on cluster states [8, 29].

Our attention was attracted by the fact that if, in the “classical” scheme of quantum teleportation, we replace the beam splitter that entangles two squeezed states of light with a device that performs the CZ transformation, then the teleportation error associated with the finite squeezing of the initial resource will be lower. This elementary and demonstrative construction posed some questions for us: does the CZ gate always outperform the beam splitter transformation in terms of added noise? Do, within the current experimental possibilities, CZ implementations have the same advantage as the formal mathematical procedure? To what extent is it possible to reduce teleportation noise using CZ gate devices instead of beam splitters? And finally, what is the reason for the noise decreasing or increasing when one applies one or another entangling operation? In this chapter, we will try to answer these questions.

Besides, the presented consideration allows us to discuss such an aspect of entanglement as weight coefficients [34]. It is often assumed by default that unity weight coefficients provide the best entanglement in the system. We will show that variation of this parameter is another opportunity to reduce the noise in the teleportation scheme.

We start with the well-known continuous variable teleportation scheme, then we compare the result with what is obtained by replacing the beam splitters with entangling CZ gates, bearing in mind arbitrary values of the weight coefficients. We will evaluate the errors of the two schemes, and the best parameters that minimize the teleportation errors will be selected. In addition, we will discuss one of the best known implementations of the CZ gate, and see how the teleportation error changes when using it. The results of this chapter were first outlined by me in the paper [107].

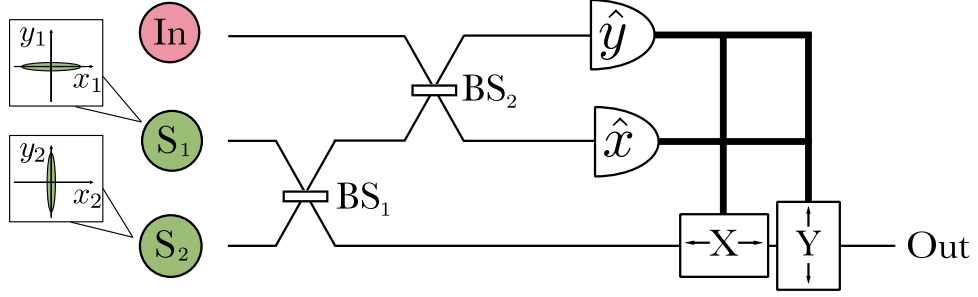


Figure 2.1: Scheme of teleportation protocol. In the diagram: In is input (teleported) state; S_1 and S_2 are oscillators squeezed in orthogonal quadratures; BS_1 and BS_2 are beam splitters; \hat{x} and \hat{y} are homodyne detectors; X and Y are displacement operations that shift the corresponding fields' quadratures depending on the results of the homodyne measurement.

2.1 Original teleportation protocol and its modifications using CZ gate

2.1.1 Original teleportation protocol

We will begin our discussion by recalling how the teleportation protocol in continuous variables is constructed. The scheme of the implementation of this protocol is shown in Fig. 2.1. The two oscillators, labelled S_1 and S_2 in the figure, are squeezed in orthogonal quadratures:

$$\hat{x}_1 = e^r \hat{x}_{0,1}, \quad \hat{y}_1 = e^{-r} \hat{y}_{0,1}, \quad (2.1)$$

$$\hat{x}_2 = e^{-r} \hat{x}_{0,2}, \quad \hat{y}_2 = e^r \hat{y}_{0,2}, \quad (2.2)$$

where $\hat{x}_{0,j}$ and $\hat{y}_{0,j}$ are quadratures of the oscillator j in vacuum state. The squeezing degree is assumed to be equal and is specified by the parameter r , which determines the proportional stretch and squeeze of the vacuum field quadratures. The squeezed fields are mixed on the symmetric beam splitter BS_1 , resulting in the entangled state:

$$\hat{a}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} ((\hat{x}_1 + \hat{x}_2) + i(\hat{y}_1 + \hat{y}_2)), \quad (2.3)$$

$$\hat{a}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} ((\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + i(\hat{y}_1 - \hat{y}_2)). \quad (2.4)$$

This entangled state acts as a quantum resource for teleportation.

The input (teleported) state is then entangled with the field in the first channel (see Fig. 2.1) using the symmetric beam-splitter BS_2 . As a result, the field annihilation operators in the channels after the beam splitter will take the form:

$$\hat{a}'_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\hat{x}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_1 + \hat{x}_2) \right) + i \left(\hat{y}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{y}_1 + \hat{y}_2) \right) \right), \quad (2.5)$$

$$\hat{a}''_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\hat{x}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_1 + \hat{x}_2) \right) + i \left(\hat{y}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{y}_1 + \hat{y}_2) \right) \right). \quad (2.6)$$

Then we measure the y -quadrature in the input channel and the x -quadrature in the first one using balanced homodyne detectors:

$$\hat{i}_{in,y} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left(\hat{y}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{y}_1 + \hat{y}_2) \right), \quad (2.7)$$

$$\hat{i}_{1,x} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left(\hat{x}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_1 + \hat{x}_2) \right), \quad (2.8)$$

where β is the homodyne amplitude. Due to the entanglement of the resource state, this measurement will lead to a change of the field quadratures in the second channel:

$$\hat{x}'_2 = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}\hat{x}_2 - \sqrt{2}\frac{\hat{i}_{1,x}}{\beta}, \quad (2.9)$$

$$\hat{y}'_2 = \hat{y}_{in} + \sqrt{2}\hat{y}_1 - \sqrt{2}\frac{\hat{i}_{in,y}}{\beta}. \quad (2.10)$$

Here the photocurrent operators are replaced by the c-numbers corresponding to the results of the given measurements.

Finally, the last step of the teleportation procedure is to displace the quadratures in the second channel by the values of the measured photocurrents to compensate for the c-number terms in Eqs. (2.9) and (2.10). Then the state at the output of the scheme takes the form:

$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}\hat{x}_2 = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}e^{-r}\hat{x}_{0,2}, \quad (2.11)$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + \sqrt{2}\hat{y}_1 = \hat{y}_{in} + \sqrt{2}e^{-r}\hat{y}_{0,1}, \quad (2.12)$$

where the second equalities take into account the squeezing of the initial resource oscillators (2.1) and (2.2).

2.1.2 Teleportation protocol using CZ gate

Let us now modify the original teleportation scheme by replacing the two beam splitters with two CZ gates (see Fig. 2.2) that act as follows:

$$\hat{C}_{Z,jk} = e^{2ig_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k}. \quad (2.13)$$

Here, g_{jk} is the so-called weight coefficient of transformation. It can take any positive or negative values. The value of the weight coefficient shows in what ratio the variances of the y -quadratures of the oscillators after entanglement will be given by the variances of the initial oscillators, and the sign of the weight coefficient indicates the creation of positive or negative correlations (anti-correlations) between the oscillators. Below, we will discuss how to choose and control the weight coefficients. For the sake of generality, let us assume now that gates have different weight coefficients, correspondingly g_1 and g_2 .

We now repeat the above derivations for the modified scheme. Unlike the previous case, we will start with two oscillators squeezed in y -quadratures (as usually done for construction of cluster

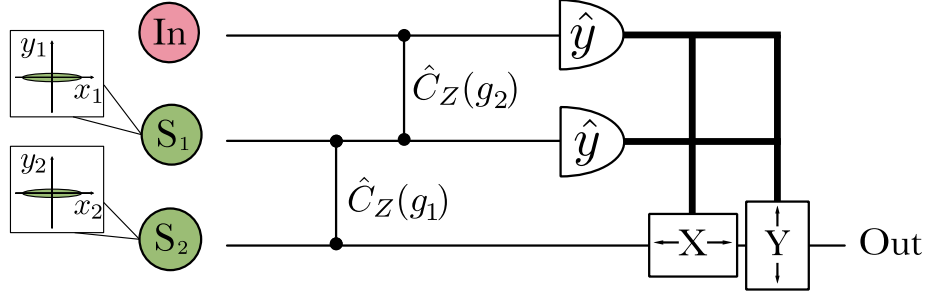


Figure 2.2: Scheme of the teleportation implementation using two CZ gates. In the diagram: S_1 and S_2 are oscillators squeezed in y -quadratures; $\hat{C}_Z(g_j)$ are CZ gates with weight coefficients g_j .

states with the help of CZ gates):

$$\hat{x}_1 = e^r \hat{x}_{0,1}, \quad \hat{y}_1 = e^{-r} \hat{y}_{0,1}, \quad (2.14)$$

$$\hat{x}_2 = e^r \hat{x}_{0,2}, \quad \hat{y}_2 = e^{-r} \hat{y}_{0,2}. \quad (2.15)$$

Applying the first CZ gate, we entangle the two squeezed states. The action of the CZ gate on the field amplitudes is shown in detail in appendix A.1. Then the oscillator amplitudes after this transformation can be written as

$$\hat{a}'_1 = \hat{x}_1 + i(\hat{y}_1 + g_1 \hat{x}_2), \quad (2.16)$$

$$\hat{a}'_2 = \hat{x}_2 + i(\hat{y}_2 + g_1 \hat{x}_1). \quad (2.17)$$

Next, applying the second CZ gate, we entangle the oscillator in the first channel with the input state that should be teleported. As a result, we get

$$\hat{a}'_{in} = \hat{x}_{in} + i(\hat{y}_{in} + g_2 \hat{x}_1), \quad (2.18)$$

$$\hat{a}''_1 = \hat{x}_1 + i(\hat{y}_1 + g_1 \hat{x}_2 + \hat{g}_2 \hat{x}_{in}). \quad (2.19)$$

Let us now measure the y -quadratures of the input and first states:

$$\hat{i}_{in,y} = \hat{y}_{in} + g_2 \hat{x}_1, \quad (2.20)$$

$$\hat{i}_{1,y} = \hat{y}_1 + g_1 \hat{x}_2 + g_2 \hat{x}_{in}. \quad (2.21)$$

After replacement of the photocurrents by the corresponding results of the single measurements, we solve the obtained equations with respect to stretched quadratures \hat{x}_1 and \hat{x}_2 . Then, substituting the solution into Eq. (2.17), we get

$$\hat{x}_{out} = -\frac{g_2}{g_1} \hat{x}_{in} - \frac{1}{g_1} \hat{y}_1 = -\frac{g_2}{g_1} \hat{x}_{in} - \frac{1}{g_1} e^{-r} \hat{y}_{0,1}, \quad (2.22)$$

$$\hat{y}_{out} = -\frac{g_1}{g_2} \hat{y}_{in} + \hat{y}_2 = -\frac{g_1}{g_2} \hat{y}_{in} + e^{-r} \hat{y}_{0,2}. \quad (2.23)$$

Here we took into account the displacements of the quadrature components on the measurement results and Eqs. (2.14) and (2.15). We see that at $g_1 = -g_2 = g$ (that corresponds to the different

phases of two transformations) we get the teleportation transformation of the form

$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \frac{1}{g} e^{-r} \hat{y}_{0,1}, \quad (2.24)$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + e^{-r} \hat{y}_{0,2}. \quad (2.25)$$

Let us compare the obtained result with the Eqs. (2.11) and (2.12) corresponding to the original teleportation scheme. We emphasize two important facts:

1. When the weight coefficient g equals unity, the scheme with CZ gates provides a lower error compared to the original teleportation scheme with two beam splitters. It is convenient to characterize the error level by the value of the mean-square errors in each quadrature $\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \langle (\hat{x}_{out} - \hat{x}_{in})^2 \rangle$ и $\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \langle (\hat{y}_{out} - \hat{y}_{in})^2 \rangle$. One can see that the error level determined by Eqs. (2.11) and (2.12) is two times higher than for the scheme with the CZ gates at $g_1 = -g_2 = 1$. In this case, the errors in x and y -quadratures coincide.
2. The second scheme (with CZ) allows us to further reduce the errors in one of the quadratures, in principle, admitting the reach of zero error at $g_1 = -g_2 \rightarrow \infty$.

Before going on to discuss other variants of the teleportation scheme, it is interesting to discuss the asymmetry of the described procedure with respect to the weight coefficient. We see that the intervals $(0, 1)$ and $(1, \infty)$ are, in a sense, equivalent to each other. The choice of interval indicates which of the initial quadrature we give preference to when entangled. In the case where all the information about the entangled states is important to us, then both limits $g = 0$ and $g \rightarrow \infty$ will be equally bad for us. However, this is not the case if we have dedicated quadratures of oscillators. In our scheme, the initial stretched x -quadratures carry the statistics of the teleported state, while the non-ideally squeezed y -quadratures are the sources of noise. By choosing large weight coefficients, we are dedicated quadratures that carry useful information for us. Thus, in our scheme, we can suppress the noise statistics of one of the resource oscillators due to large values of the weight coefficient g .

You can look at it from another perspective. The CZ gate itself contains an additional squeezing resource within it. The considered teleportation scheme allows this resource to be used and effectively squeezes one of the resource oscillators additionally. The relationship between weight coefficients and squeezing will be dealt with in more detail in Sec. 2.2.

The obtained results indicate a significant advantage of using the CZ gates over the entanglement of the fields with the beam splitters. However, talking about the CZ gate, we assumed some abstract device that performs the necessary operation, while the beam splitter is a specific implementation of the entangling procedure. In this regard, it would be correct to compare the available CZ gate realizations with the results that the beam splitter ensures. We will perform such a comparison below, but, for now, consider another teleportation scheme, in which the squeezed fields are entangled using the CZ gate and the input state of light is mixed using the beam splitter.

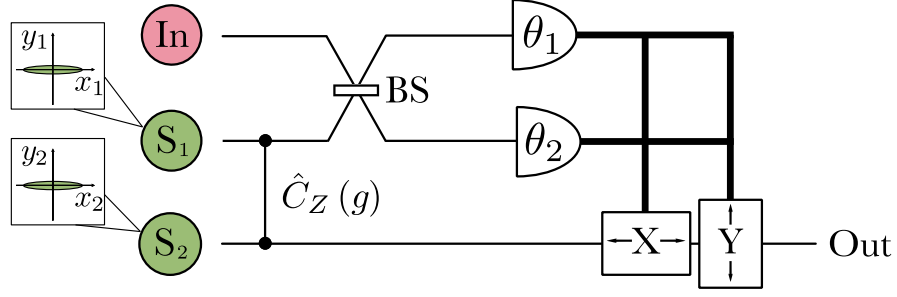


Figure 2.3: Scheme of the teleportation implementation using CZ gate and beam splitter. In the diagram, θ_1 and θ_2 are the phases of the local oscillators employed for homodyne detection.

2.1.3 Hybrid teleportation scheme

Let us consider a hybrid teleportation scheme where both a beam splitter and a CZ gate are present. We suppose the entangling of squeezed fields is carried out by the CZ gate with weight coefficient g and the input state of light is admixed by the symmetric beam splitter (see Fig. 2.3). As in the case of the teleportation scheme with two CZ gates, the resource oscillators are squeezed the same way in y -quadratures and are described by Eqs. (2.14) and (2.15). Carrying out derivations similar to those performed in the previous section, we find that, in this case, the fields are transformed to the form before detection:

$$\hat{a}'_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_{in} + \hat{x}_1) + \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{y}_{in} + \hat{y}_1 + g\hat{x}_2), \quad (2.26)$$

$$\hat{a}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}_{in} - \hat{x}_1) + \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{y}_{in} - \hat{y}_1 - g\hat{x}_2), \quad (2.27)$$

$$\hat{a}'_2 = \hat{x}_2 + i(\hat{y}_2 + g\hat{x}_1). \quad (2.28)$$

Now we perform homodyne detection in two channels – the input channel and the first one. When describing the measurements, we will keep the homodyne phases as free parameters:

$$\hat{i}_{in} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} (\cos \theta_1 (\hat{x}_{in} + \hat{x}_1) + \sin \theta_1 (\hat{y}_{in} + \hat{y}_1 + g\hat{x}_2)), \quad (2.29)$$

$$\hat{i}_1 = \frac{\beta}{\sqrt{2}} (\cos \theta_2 (\hat{x}_{in} - \hat{x}_1) + \sin \theta_2 (\hat{y}_{in} - \hat{y}_1 - g\hat{x}_2)). \quad (2.30)$$

Solving the system with respect to x -quadratures and substituting this solution into (2.28), we get

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out} \\ \hat{y}_{out} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin \theta_-} \begin{pmatrix} -\frac{\cos \theta_- + \cos \theta_+}{g} & -\frac{\sin \theta_+}{g} \\ g \sin \theta_+ & g(\cos \theta_- - \cos \theta_+) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g} \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{g} & \frac{1}{g} \\ g & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{in}/\beta \\ i_1/\beta \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

where $\theta_{\pm} = \theta_1 \pm \theta_2$. Here, as before, the last term is related to the results of the measurements and can be compensated. In order for the performed transformation to be a teleportation, we have to choose the appropriate values of θ_1 and θ_2 . If we put $\theta_2 = -\theta_1 = \pi/4$, then Eq. (2.31) is

turned into

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out} \\ \hat{y}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g} \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

One can see that the result obtained will only be a teleportation transformation when $g = 1$. Otherwise, instead of the input state, we obtain a state to which the squeezing transform is applied. Thereby, we cannot vary the weight coefficient to reduce the noise in this scheme. Thus, the solution (2.32) will have the same error as in the previous case, only if the weight coefficient g in (2.24) is also set equal to one. It can be concluded that such a hybrid scheme provides a lower error than the configuration with two beam splitters, but it loses to the configuration with two CZ gates.

2.2 Estimation of CZ gate weight coefficients

In the previous section, we investigated the dependence of the teleportation error on the value of the CZ gate weight coefficients, assuming that they can take any values. However, in practice, we cannot realize an arbitrarily large g . To understand what restrictions are imposed on the weight coefficients of the CZ transformation, let us consider at how it is implemented. As is known, the CZ gate with the weight coefficient g transforms the vector of input quadratures into the vector of output quadratures according to the rule:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out,1} \\ \hat{X}_{out,2} \\ \hat{Y}_{out,1} \\ \hat{Y}_{out,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g & 1 & 0 \\ g & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{x}_{in,2} \\ \hat{y}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,2} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

To understand how this transformation can be implemented experimentally, we need to use the Bloch-Messiah decomposition for the CZ matrix. It has the following form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g & 1 & 0 \\ g & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & r & 0 & 0 \\ r & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & r \\ 0 & 0 & r & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{s}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{s} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} r & t & 0 & 0 \\ t & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & t \\ 0 & 0 & t & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

where

$$r = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{1+s}}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{1+s}}, \quad s = \frac{1}{2} \left(2 + g^2 - g\sqrt{4+g^2} \right) \quad (2.35)$$

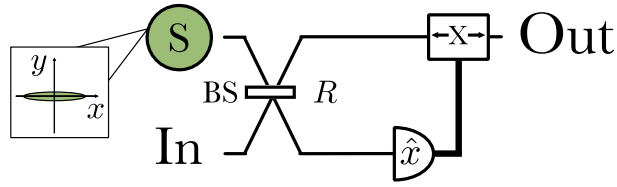


Figure 2.4: Implementation scheme of in-line squeezing.

Here, the first and last matrices describe the phase shifters. The second and fourth matrices describe the beam splitter transformation, and the third matrix describes the squeezing. Since we consider the case of non-negative weight coefficients g , then $s \in [0, 1]$.

The main difficulty in the practical implementation of the CZ gate is the in-line squeezing. The in-line squeezing is the squeezing transformation performed on the oscillator inside the computation scheme. To realize the such transformation, the scheme shown in Fig. 2.4 is usually applied. In this scheme, the squeezed state S is entangling with the input state In (the state we are transforming) on the beam splitter BS with a reflection coefficient R . Next, the x -quadrature of the state in the lower channel is measured using the homodyne detector. After that, the measurement result is sent to a device that displaces the quadratures of the state in the upper channel (the device is indicated X in the diagram) depending on the measurement result in the lower channel. The quadratures of the output state Out can be represented as:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{R}} & 0 \\ 0 & \sqrt{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1-R}\hat{y}_s \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

It can be seen from this expression that the quadrature $\sqrt{R}\hat{y}_{in}$ is squeezed, since the reflection coefficient is in the range $R \in [0, 1]$. Since the squeezing coefficient s in the Eq. (2.35) is in the range $s \in [0, 1]$, we can set $s = R$, implying that the reflection coefficient represented in the diagram in Fig. 2.4 is responsible for the squeezing. As we can see, the main bottleneck of this implementation of the squeezing transformation is that there is an error that is added to the transformed quadratures. This error is proportional to the squeezed quadrature of the auxiliary oscillator S . The more the quadrature is squeezed, the better the gate is realized.

We use the considered scheme as part of the CZ transformation. Let us estimate the squeezing of the auxiliary quantum oscillators required for this. For the error to remain small compared to the main transformation, the following requirement must be met:

$$(1 - R)\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle \ll R\langle\delta\hat{y}_{in}^2\rangle \quad (2.37)$$

or

$$10\lg [4\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle] \ll 10\lg \left[\frac{4R}{1-R}\langle\delta\hat{y}_{in}^2\rangle \right]. \quad (2.38)$$

Hereinafter in this section, for simplicity, we consider fluctuations of the coherent state ($\langle\delta\hat{y}_{in}^2\rangle = 1/4$) as a variance of the input state. If the input state itself is already squeezed, it is even more

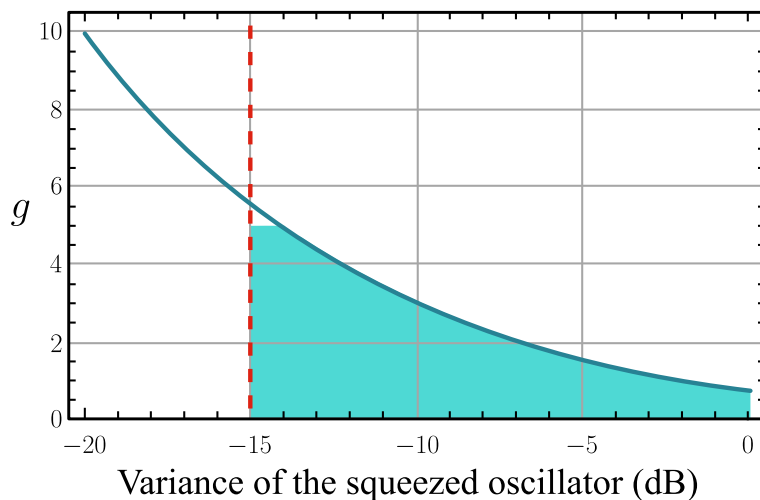


Figure 2.5: Graph of the dependence of the value of the CZ gate weight coefficient on the variance of the squeezed oscillator used to implement this transformation. On the graph: the blue solid line indicates the dependence of the weight coefficient on the variance of the squeezed state, the red dotted line indicates the squeezing limit experimentally implemented to date.

difficult to perform squeezing and the requirements for the operation will be more stringent. It should be understood that with this procedure we cannot realize more squeezing than the resource oscillator has.

To understand what kind of squeezing we can implement experimentally, we write the expression in a general form for an arbitrary g . To do this, we take into account equality $s = R$ for positive weight coefficients, and substitute the relationship (2.35) between the values of the squeezing ratio s and the weight coefficient g to the Eq. (2.38). As a result, the final dependence of the weight coefficient on the squeezing of the auxiliary oscillator can be estimated by the following inequality:

$$g < \frac{10^{-x/20}}{\sqrt{1 + 10^{x/10}}}, \quad (2.39)$$

where $x = 10 \log_{10} (4\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle)$. For greater clarity, the Eq. (2.39) is shown in Fig. 2.5. At the moment, the squeezing that has been experimentally demonstrated is -15 dB [11]. Given the fact that the error should be small compared to the main transformation, we can say that the weight coefficient g can be no more than 5. This is the value we can consider as the maximum possible with the current experimental possibilities. Thus, according to the Eq. (2.24) in a scheme with two CZ gates, we can reduce the teleportation error in one of the quadratures by a factor of 25.

2.3 Real CZ gate in optical teleportation scheme

Let us now move from the idealized CZ gate to its concrete realization.

Up to now, we considered the ideal CZ gate that itself was implemented without errors. This means that the error imposed by the finite squeezing degree of the resource states was the only

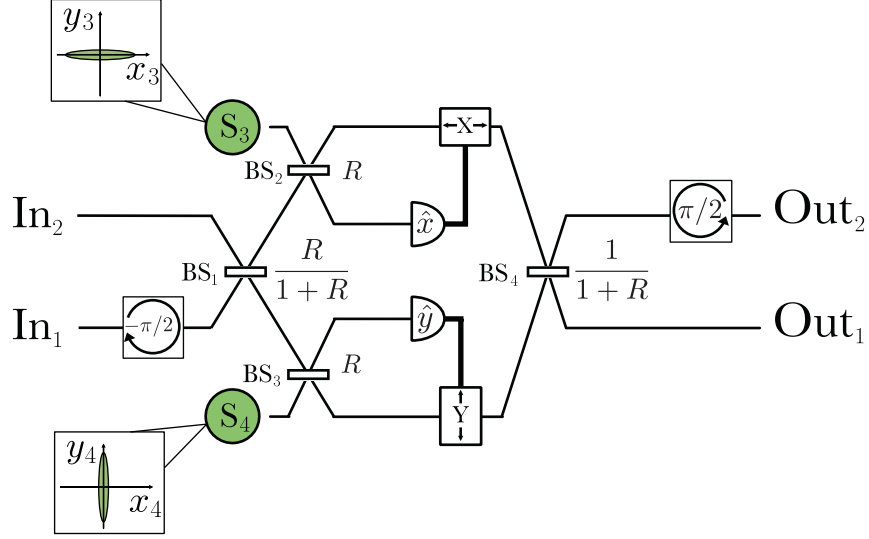


Figure 2.6: Scheme of optical CZ gate realization.

error that affected the results in the previous section. In reality, CZ gate itself is error prone. Let us discuss these errors using the example of an optical CZ gate implementation. Its scheme has been shown in Fig. 2.6. This circuit almost completely repeats the one proposed in [52] for the experimental implementation of the SUM gate (analog of CNOT gate in continuous variables). We slightly modified that scheme by adding two phase shifters at the input of the first channel and at the output of the second channel, to make it execute the CZ transform.

Let us consider the operation of the optical CZ gate realization. First, the phase of the first oscillator is rotated on $-\pi/2$ and two input states are mixed on the beam splitter BS₁ with a reflection coefficient $R/(1+R)$. Then, auxiliary oscillators S₃ and S₄ in squeezed states are entangled to the states in each of the channels. This mixing carried out on the beam splitters BS₂ and BS₃ with the amplitude reflection coefficient R . The oscillator in the first channel is entangled with the auxiliary oscillator squeezed in x -quadrature and, in the second one, with auxiliary oscillator squeezed in y -quadrature. Then, one of the states in each channel is measured by the homodyne detector: the y -quadrature is measured in the first channel and the x -quadrature in the second channel. The quadratures of the remaining oscillators are displaced according to the measurement values. To complete the CZ gate, the states are mixed on the beam splitter BS₄ with the reflectivity $1/(1+R)$, and the phase of the second state is rotated by $\pi/2$. As we can see, the scheme employs two auxiliary squeezed oscillators and four beam splitters, so one can expect these devices will introduce a fair amount of additional noise.

The circuit shown in Fig. 2.6 implements the following transformation:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out,1} \\ \hat{x}_{out,2} \\ \hat{y}_{out,1} \\ \hat{y}_{out,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-R}{\sqrt{R}} & 1 & 0 \\ \frac{1-R}{\sqrt{R}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{x}_{in,2} \\ \hat{y}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,2} \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{1-R}{1+R}} \begin{pmatrix} -\hat{x}_4 \\ \hat{y}_3 \\ -\sqrt{R}\hat{y}_3 \\ -\sqrt{R}\hat{x}_4 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Here the first term corresponds to the ideal transformation CZ with the weight coefficient $g = (1 - R)/\sqrt{R}$. The second term corresponds to the additional noise introduced by the auxiliary squeezed oscillators.

Let us check the level of the teleportation error when this CZ device is employed as an entangled gate. We will imply that both CZ gates in the scheme are identical. As we have seen above, this condition ensures the equality of the weight coefficients and the circuit implements a teleportation protocol.

2.3.1 Teleportation protocol with real CZ gate

If we now implement the teleportation with two CZ gates (discussed in Sec. 2.1.2) using transformation (2.40), we get

$$\hat{x}_{out} = -\hat{x}_{in} - \frac{\sqrt{R}}{1-R}\hat{y}_1 + \frac{R}{\sqrt{1-R^2}}\hat{x}_4 + \frac{1}{\sqrt{1-R^2}}\hat{y}_5, \quad (2.41)$$

$$\hat{y}_{out} = -\hat{y}_{in} + \hat{y}_2 + \sqrt{R}\frac{\sqrt{1-R}}{\sqrt{1+R}}(\hat{x}_6 - \hat{y}_3). \quad (2.42)$$

In the resulting equations, the first terms correspond to the desired teleportation of the input state. The second terms (with indices 1 and 2) arise because of the finite squeezing of two resource oscillators in the teleportation protocol. The remaining terms (with indices 3, 4, 5, and 6) are due to auxiliary squeezed oscillators in each of the two CZ gates. Now let us estimate the errors of this teleportation protocol, more precisely, their mean-square fluctuations. Here, as before, we assume squeezed oscillators to be statistically independent. Moreover, we suppose that all oscillators are squeezed equally. Taking all of these into account, the following equalities can be derived:

$$\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \left(\frac{1 + (2-R)R^2}{(1-R)^2(1+R)} \right) \langle \delta \hat{e}_s^2 \rangle, \quad (2.43)$$

$$\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \left(\frac{1 + 3R - 2R^2}{1+R} \right) \langle \delta \hat{e}_s^2 \rangle. \quad (2.44)$$

Here, $\langle \delta \hat{e}_s^2 \rangle$ denotes the mean-square fluctuations of the squeezed quadrature of the resource oscillators. Let's plot the mean-square error fluctuations for a given squeezing (see Fig. 2.7). Fig. 2.7(a) plots the dependence of the mean-square error fluctuations in the quadrature of the teleported oscillator in the optical implementation of the CZ transformation as a function of the beam splitter reflectance coefficient R . Fig. 2.7(b) plots the same value as a function of the CZ gate weight coefficient. For comparison, the solid red line indicates the noise level when teleportation is implemented in the original scheme with beam splitters. All error values are normalized to the mean-square fluctuations of the squeezed quadrature of the resource oscillators.

As can be seen from (2.40), in this case, the beam splitter reflection coefficient plays the role of the control parameter (that is, determines the value of the weight coefficients of CZ). However, we can see that, unlike Eqs. (2.24) and (2.25), the errors of both quadratures will rely on this

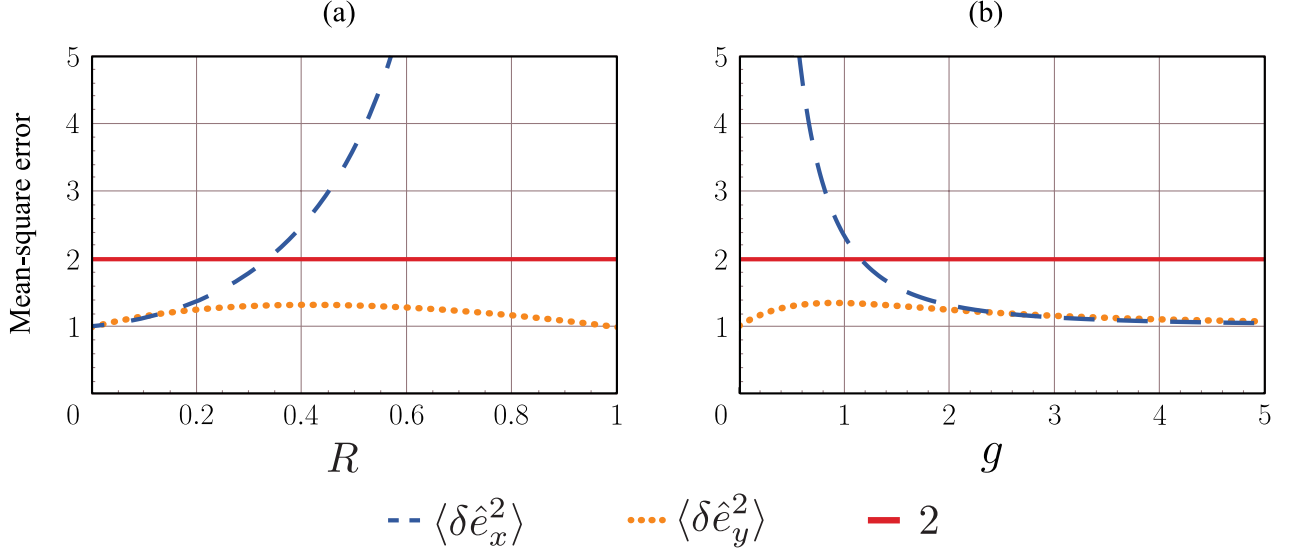


Figure 2.7: Mean-square error fluctuations of the x and y -quadratures of teleported signal with the optical implementation of the CZ gate, depending on (a) the reflection coefficient of the beam splitters used in the CZ transformations; (b) the CZ gate weight coefficient. The solid red line indicates the noise level of teleportation in the original scheme with the beam splitters. Error values are normalized to the mean-square fluctuations of the squeezed quadrature of the resource oscillators.

parameter. The dependence of the quadrature errors on the weight coefficient g qualitatively repeats the Eqs. (2.24) and (2.25). The figure shows that as the parameter g increases (which corresponds to a decrease in R), the error in the x -quadrature decreases, while the error in the y -quadrature is almost unchanged and does not exceed $2\langle \delta \hat{e}_s^2 \rangle$. But unlike the ideal case, the x -quadrature error tends to $\langle \delta \hat{e}_s^2 \rangle$ rather than zero.

Thus the region of $R < 0.33$ (corresponding to $g > 2/\sqrt{3} \approx 1.15$) can be revealed, where the optical scheme with CZ gates has an advantage over the original teleportation protocol with beam splitters, providing a lower error level.

2.3.2 Hybrid teleportation scheme with real CZ gate

Now we will apply the non-ideal CZ transformation (2.40) to the hybrid teleportation scheme discussed in Sec. 2.1.3. In this case, we get the following equations:

$$\hat{x}_{out} = \frac{\sqrt{R}}{1-R} \hat{x}_{in} - \frac{\sqrt{R}}{1-R} \hat{y}_1 + \frac{1}{\sqrt{1-R^2}} \hat{y}_3, \quad (2.45)$$

$$\hat{y}_{out} = \frac{1-R}{\sqrt{R}} \hat{y}_{in} + \hat{y}_2 + (1-2R) \sqrt{\frac{1-R}{R(1+R)}} \hat{x}_4. \quad (2.46)$$

Here the auxiliary oscillators with indices 1 and 2 are used as a resource for teleportation and those with indices 3 and 4 are used to implement the CZ gate. As before, the only one value of the weight coefficient $g = 1$ turns the considered scheme into the teleportation scheme, it corresponds

$R = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}) \approx 0.38$. Then we get

$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \hat{y}_1 + \sqrt{\frac{1}{10} (5 + 3\sqrt{5})} \hat{y}_3, \quad (2.47)$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + \hat{y}_2 + \sqrt{\frac{1}{10} (7\sqrt{5} - 15)} \hat{x}_4. \quad (2.48)$$

Then, mean-square errors are given as follows:

$$\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \frac{3\sqrt{5}}{10} (1 + \sqrt{5}) \langle \delta \hat{e}_s^2 \rangle \approx 2.17 \langle \delta \hat{e}_s^2 \rangle, \quad (2.49)$$

$$\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \frac{\sqrt{5}}{10} (7 - \sqrt{5}) \langle \delta \hat{e}_s^2 \rangle \approx 1.07 \langle \delta \hat{e}_s^2 \rangle. \quad (2.50)$$

Comparing the obtained result with (2.32) for ideal CZ gate, we notice that the situation has changed significantly. For the the non-ideal implementation under consideration the error in x -quadrature turns out higher than two, and the error in y -quadrature is lower than two, whereas for the ideal CZ gate these errors coincide and equal unity. In this case, the advantage of this protocol over the original one with two beam splitters cannot be argued clearly. This is because there is a limit to the value of g for this configuration, which prevents us from taking full advantage of the compression contained within the CZ transform.

2.4 Conclusion on chapter 2

In this chapter, we have compared two entangling transformations: CZ gate and mixing signals on the beam splitter. We tested the quality of these transformations in terms of adding an error under the teleportation protocol. We have shown that employing the CZ gate brings in lower noise, thus providing a higher quality of protocol performance. This conclusion is valid not only for an idealized CZ scheme but also for a real one, for example, for an optical CZ gate in some range of reflection coefficient R values. We have proven that the choice of the weight coefficients in CZ gate is a supportive factor in noise control and ideally it allows one to reach near the zero error in one of the quadratures.

Using the hybrid teleportation protocol, where the resource state is obtained by the CZ transform, and the input state is admixed on the beam splitter, makes us denied to vary the weight coefficients, since only one value converts the transformation into teleportation. The theory predicts that an ideal (no noise-introducing) CZ gate will give a gain in noise compared to the original teleportation scheme; however, the considered optical implementation of the CZ gate cannot be considered as preferable.

Thus, although teleportation circuits based on CZ transform are ensure higher accuracy of teleportation due to reduced errors. This is because entanglement with a symmetrical beam splitter provides a fixed ratio of useful signal to noise, while varying the weight coefficients of CZ, allows this ratio to be greater than for conventional beam splitters. Even when we consider a nonideal CZ transform, there is a range of parameters at which the amount of noise introduced

by the auxiliary squeezed states is less than the improvement provided by weight coefficients. Therefore, creating better implementations of the CZ gates can significantly improve the accuracy of these schemes.

The optical implementation of CZ that we have focused on in this paper is far from the only one. Initially, the approach to realizing the CZ transformation (and other similar gates) was based on the quantum non-destructive interaction effect in nonlinear optical mediums [108]. However, in the optical range this effect is rather weak and no effective implementation of a CZ gate on such physical systems could be created. CZ implementations similar to the one we considered, which only require linear optics and auxiliary squeezed oscillators [109–111], are the most common. Another interesting implementation of the CZ transformation is a scheme based on the interaction of light beams inside the atomic ensemble [112]. In this scheme, the CZ gate weight coefficient is determined by the pulse durations and, as a result, can be varied easily. The optimal value of the weight coefficients in each particular scheme can be considered as a balance between the reduction of noise from the resource states through the additional squeezing contained within the CZ transform and the simultaneous adding of noise from the physical implementation of the transform itself.

Separately, it is worth talking about the complexity of the experimental implementation of the scheme we have described. To implement just one CZ gate, we need two additional light sources, a pair of homodyne detectors, and four asymmetric beam splitters, with different but precisely matched reflectances. In the assessments above, we have estimated only the unavoidable noise associated with the finite squeezing degree of the oscillators used both as a resource and to create the CZ gate. However, any deviation of this scheme from the exact balance may deprive us of the discussed advantage. For other existing implementations of the CZ [109–112], the situation is not much better. At the same time, in the original teleportation scheme, only a pair of symmetrical beam-splitters, which can be found in almost any laboratory, are needed to effect entanglement.

It should be noted that the issue of increasing the fidelity of teleportation can be solved by using non-Gaussian states as a resource. We will discuss this approach in detail in the chapters 2.4 and 3.3. We propose here a method that allows one to increase the fidelity of teleportation while remaining within the framework of Gaussian operations, which are relatively easier to implement.

Summarizing all of the above, the following defences were identified and substantiated in chapter two:

- Using the CZ gate as an entanglement operation reduces the teleportation error not only for an ideal CZ transformation, but also for its optical implementation.
- Although the formal application of the weighted CZ gate allows unlimited reduction of the error of one of the quadratures of the teleported state, analysis of real configurations shows us that the CZ transformation itself is noisy, so the resulting error reduction that can be expected from its use is a factor of two.

Chapter 3. Decreasing the teleportation error using a cubic phase gate

In the last chapter we discussed the possibility of decreasing teleportation errors by using Gaussian operations, namely by replacing the beam splitters in the original teleportation scheme to a CZ gate. However, this approach has its limitations: due to the CZ weight coefficient, we can suppress the error in only one of the quadratures, while the error in the other quadrature remains unchanged. It is to reduction the teleportation error in this unaffected quadrature that we will direct our efforts.

One option to improve the accuracy of teleportation is to use entangled non-Gaussian states as the main resource. It has been shown in [76,77] that a two-mode squeezed vacuum, to which a conditional photon subtraction procedure is applied (see Sec. 1.3.2), can be used as such a resource. However, this procedure is probabilistic and its use in schemes results in the loss of a major advantage of working in continuous variables - the deterministic character of the protocols. We asked ourselves the following: What other non-Gaussian operations can be used to increase the accuracy of teleportation? Can we get any new benefits from using them? Is it possible to increase the accuracy of teleportation while remaining within the framework of deterministic processes? The cubic phase gate (see Sec. 1.3.3) was chosen as the transformation under study.

In this chapter, we modify the teleportation protocol with two CZ gates discussed in Sec. 2.1.2 by adding a cubic phase gate, which prepare a non-Gaussian resource state. We will first describe the teleportation procedure in the Heisenberg picture and evaluate the quality of teleportation in terms of adding a teleportation error. Then, in the next section, we once again describe the teleportation procedure, but this time in the Schrödinger picture without any approximations. It allows us to estimate the fidelity of the teleported state, and demonstrate the limits of applicability of the proposed approach and its practical feasibility. The results discussed in this chapter were first obtained by me in [113].

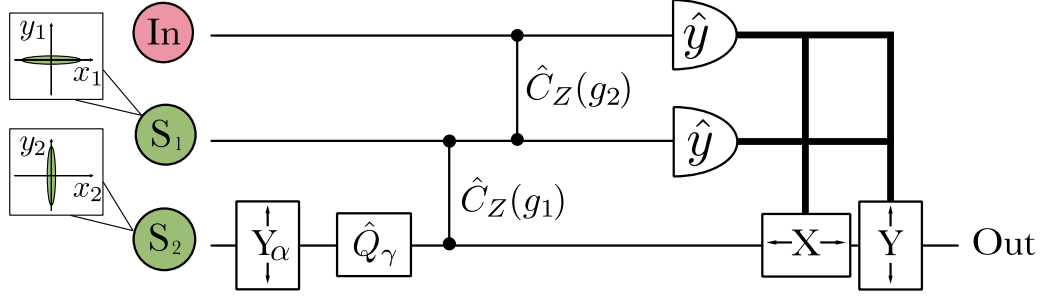


Figure 3.1: Teleportation scheme using a cubic phase gate. In the diagram, In is the input (teleported) state; S_1 and S_2 are oscillators squeezed in orthogonal quadratures; Y_α denotes the displacement of the y -quadrature by a fixed value α ; \hat{Q}_γ is a cubic phase gate with a conversion coefficient γ ; $\hat{C}_Z(g_i)$ is CZ transformations with weight coefficients g_i ; \hat{y} 's are homodyne detectors measuring the y -quadrature of the field in the channel; and X and Y denote devices that displace the corresponding quadratures of the fields in the channel, depending on the detection results.

3.1 Teleportation protocol with a cubic phase gate in the Heisenberg picture

Let us start with a description of the proposed teleportation scheme shown in Fig. 3.1, in the Heisenberg picture. Two oscillators at the input of the scheme, designated in the figure as S_1 and S_2 , are squeezed in orthogonal directions and are described by the following quadrature components:

$$\hat{x}_1 = e^r \hat{x}_{0,1}, \quad \hat{y}_1 = e^{-r} \hat{y}_{0,1}, \quad (3.1)$$

$$\hat{x}_2 = e^{-r} \hat{x}_{0,2}, \quad \hat{y}_2 = e^r \hat{y}_{0,2}, \quad (3.2)$$

where $\hat{x}_{0,j}$ and $\hat{y}_{0,j}$ are the quadratures of the j oscillator in the vacuum state. We are performing a series of manipulations on the second oscillator. First, we need to displace its y -quadrature. The displacement operator, which displaces the y -quadrature of the j th oscillator by the real number α , has the following form:

$$\hat{Y}_{\alpha,j} = e^{2i\alpha\hat{x}_j}. \quad (3.3)$$

The action of this operator on the quadrature of the oscillator S_2 results in the field amplitude being transformed as follows (see Appendix A.2):

$$\hat{a}'_2 = \hat{x}_2 + i(\alpha + \hat{y}_2). \quad (3.4)$$

In the next step, we act on this oscillator with a cubic phase gate operator, which has the form

$$\hat{Q}_{\gamma,j} = e^{-2i\gamma\hat{y}_j^3}, \quad (3.5)$$

where γ is the real coefficient characterizing the degree of non-linearity of the transformation; and j is the index of the oscillator that the cubic phase gate acts on. The action of this operator on

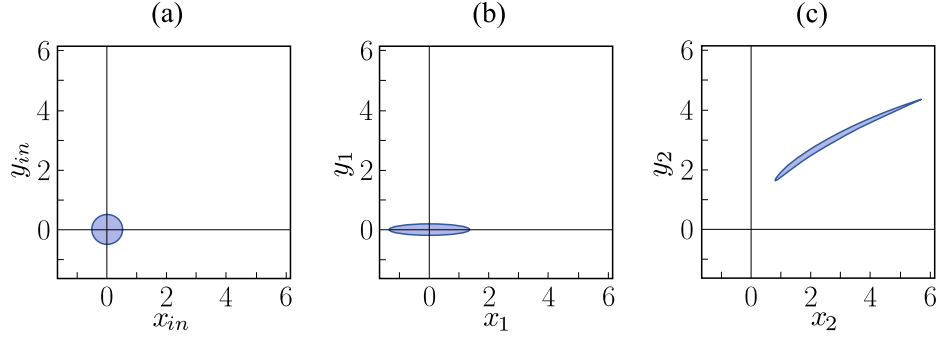


Figure 3.2: Schematic uncertainty regions for (a) the input state, (b) the resource state in the first channel, and (c) the resource state in the second channel after the cubic phase gate.

the quadratures of the oscillator is shown in the appendix A.3. After applying the cubic phase gate, the oscillator in the second channel will go to a non-Gaussian state, the amplitude of which is described by the equation

$$\hat{a}_2'' = \hat{x}_2 + 3\gamma(\alpha + \hat{y}_2)^2 + i(\alpha + \hat{y}_2). \quad (3.6)$$

It should be noted that, when displaced by a positive value α satisfying the condition $\alpha^2 \gg \langle \hat{y}_2^2 \rangle$, the quadrature values of the second oscillator will lie in the first quadrant of the phase plane. A schematic representation of the uncertainty regions for each of the three oscillators in this cut of the scheme is shown in Fig. 3.2. Note that here and below, as an illustrative example of the scheme operation, we choose the input (teleported) state as a vacuum one. These regions are not the result of an accurate calculation and are provided mainly for illustrative purposes. When constructing them, the uncertainty region of the vacuum state is taken as a base. Then, depending on the transformations carried out over the oscillators, these regions are distorted accordingly.

Then the states in the first and second channels are entangled using the CZ transformation, the action of which is described by the operator (2.13). The weight coefficient of the first transformation CZ is denoted by g_1 , and then the amplitudes of the oscillators after the transformation take the forms (see appendix A.1):

$$\hat{a}'_1 = \hat{x}_1 + i(\hat{y}_1 + g_1(\hat{x}_2 + 3\gamma(\alpha + \hat{y}_2)^2)), \quad (3.7)$$

$$\hat{a}'''_2 = \hat{x}_2 + 3\gamma(\alpha + \hat{y}_2)^2 + i(\alpha + \hat{y}_2 + g_1\hat{x}_1). \quad (3.8)$$

After this transformation, the uncertainty region of the oscillator in the second channel is stretched along the y -quadrature but remains in the first quadrant of the phase plane (see Fig. 3.3(b)). At the same time, the uncertainty region of the oscillator in the first channel is strongly stretched in the y -quadrature and is displaced to the upper half-plane (see Fig. 3.3(a)).

Next, using the second CZ gate with the weight coefficient g_2 , we entangle the state in the first channel with the input state we want to teleport. As a result, we get

$$\hat{a}'_{in} = \hat{x}_{in} + i(\hat{y}_{in} + g_2\hat{x}_1), \quad (3.9)$$

$$\hat{a}''_1 = \hat{x}_1 + i(\hat{y}_1 + g_1(\hat{x}_2 + 3\gamma(\alpha + \hat{y}_2)^2) + g_2\hat{x}_{in}). \quad (3.10)$$

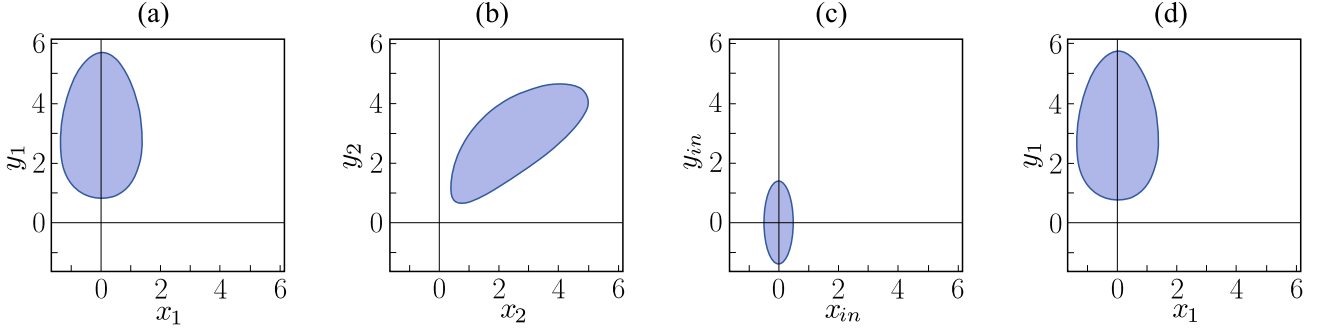


Figure 3.3: Schematic uncertainty regions of oscillators (a) in the first channel after the first CZ transformation, (b) in the second channel after the first CZ transformation, (c) in the input channel after the second CZ transformation, and (d) in the first channel after the second CZ transformation.

As shown in Figs. 3.3(c) and 3.3(d), after the second CZ transformation, the uncertainty region of the input state is stretched along the y -quadrature, and the state uncertainty region in the second channel practically does not change. After that, we measure the stretched y -quadratures of the input and first oscillators. The corresponding operators of photocurrents are equal to

$$\hat{i}_{y,in} = \beta(\hat{y}_{in} + g_2\hat{x}_1), \quad (3.11)$$

$$\hat{i}_{y,1} = \beta(\hat{y}_1 + g_1(\hat{x}_2 + 3\gamma(\alpha + \hat{y}_2)^2) + g_2\hat{x}_{in}), \quad (3.12)$$

where β is the amplitude of the homodyne. As a result of a single measurement, we obtain some values of the photocurrents $i_{y,in}$ and $i_{y,1}$, and the measured values of the quadratures are $Y_{in} = i_{y,in}/\beta$ and $Y_1 = i_{y,1}/\beta$, respectively.

Such a measurement, due to the entanglement of the resource state, leads to a change in the quadrature components of the field in the second channel:

$$\hat{x}_2''' = -\frac{g_2}{g_1}\hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g_1} + \frac{Y_1}{g_1}, \quad (3.13)$$

$$\hat{y}_2''' = -\frac{g_1}{g_2}\hat{y}_{in} + \frac{g_1 Y_{in}}{g_2} + \frac{1}{\sqrt{3\gamma}}\sqrt{\frac{Y_1}{g_1} - \frac{g_2}{g_1}\hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g_1} - \hat{x}_2}. \quad (3.14)$$

Here the operators of photocurrents are replaced by c-numbers corresponding to the results of specific measurements. Because the value of α is large enough, there is no ambiguity in Eq. (3.14). We only need to consider positive values of the root. Otherwise, a situation similar to the one described in paper [86] would arise. In addition, again by choosing the value α one can ensure the correctness of the condition

$$Y_1^2 \gg g_2^2\langle\hat{x}_{in}^2\rangle + \langle\hat{y}_1^2\rangle + g_1^2\langle\hat{x}_2^2\rangle. \quad (3.15)$$

If for some reason it is difficult to increase α so that the specified requirement is met, then one can use the procedure of postselection of measurement results discarding Y_1 values that do not

satisfy the required condition. Then we can decompose the square root in Eq. (3.14) in a series, keeping only the first term in the expansion in terms of $(g_2\hat{x}_{in} + \hat{y}_1 + g_1\hat{x}_2)/Y_1$:

$$\hat{y}_2''' = -\frac{g_1}{g_2}\hat{y}_{in} + \frac{g_1 Y_{in}}{g_2} + \frac{1}{\sqrt{3\gamma}} \left(\sqrt{\frac{Y_1}{g_1}} - \frac{g_2\hat{x}_{in}}{2\sqrt{g_1 Y_1}} - \frac{\hat{y}_1}{2\sqrt{g_1 Y_1}} - \frac{\sqrt{g_1}\hat{x}_2}{2\sqrt{Y_1}} \right). \quad (3.16)$$

The termination of the series is correct under the assumption that all moments of the expansion parameter are small. For Gaussian input states, it suffices to satisfy the inequality (3.15). Note that this requirement limits the protocol's applicability.

For the transformation described by Eqs. (3.13) and (3.16) to be a teleportation transformation, it is necessary to set $g_1 = -g_2 \equiv g$. To complete the teleportation, it is necessary to displace the x -quadrature of the second oscillator by $-Y_1/g$, and the y -quadrature by $Y_{in} - \sqrt{Y_1/(3\gamma g)}$. Operators are defined similarly to Eq. (3.3). Then the states at the output of the scheme will have the following form:

$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g}, \quad (3.17)$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + \frac{1}{2\sqrt{3\gamma Y_1}} \left(\sqrt{g}\hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{\sqrt{g}} - \sqrt{g}\hat{x}_2 \right). \quad (3.18)$$

In the resulting expressions, the first terms correspond to the desired teleportation effect. The rest of the terms are the noise added to the teleported state during the transformation. Let us estimate the magnitude of this noise and compare the result with the original teleportation scheme (see Sec. 2.1.1). It is convenient to characterize the error level by the magnitude of the mean-square errors of each quadrature $\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \langle (\hat{x}_{out} - \hat{x}_{in})^2 \rangle$, $\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \langle (\hat{y}_{out} - \hat{y}_{in})^2 \rangle$. Here we assume that the oscillators are statistically independent. The mean-square errors in our case are determined by equations:

$$\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \frac{1}{g^2} \langle \hat{y}_1^2 \rangle, \quad (3.19)$$

$$\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \frac{1}{12\gamma Y_1} \left(g \langle \hat{x}_{in}^2 \rangle + \frac{1}{g} \langle \hat{y}_1^2 \rangle + g \langle \hat{x}_2^2 \rangle \right). \quad (3.20)$$

To estimate the magnitude of the error, we replace in Eq. (3.20) the measured value of the quadrature Y_1 by its average value, which according to Eq. (3.12) will be equal to $\langle \hat{y}_1 \rangle = \langle \hat{i}_{y,1}/\beta \rangle \approx 3g\gamma\alpha^2$. The main error in the y quadrature is introduced by the term with \hat{x}_{in} , since the noise in the \hat{y}_1 and \hat{x}_2 quadratures of the resource oscillators is suppressed. Thus, the error in y -quadrature can be estimated as

$$\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle \approx \frac{1}{36\gamma^2\alpha^2} \langle \hat{x}_{in}^2 \rangle. \quad (3.21)$$

From Eq. (3.19), we see that the error suppression in the x -quadrature of the teleported state is proportional to the weight coefficient of the CZ gates. As mentioned above, this coefficient can theoretically take on arbitrarily large values. The possibilities of real manipulation of the weight coefficient in the teleportation scheme are studied in detail in previous chapter. Equation (3.21) shows that the error in the y -quadrature can be suppressed by increasing the displacement of α .

There are three important facts to note:

1. We have a limitation on the possibility of noise suppression due to non-Gaussian. It is associated with a physical restriction on the maximum value by which we can perform the displacement operation. However, if vacuum states or noise-suppressed states are used as the teleportable states (which is a typical situation for applications), this restriction will not play a significant role.
2. We can independently reduce the error in one of the quadratures due to the weight coefficients of the CZ gate and in the other due to the non-Gaussian resource. Also, owing to the selection based on the measurement results, it is possible to set the lower limit of the teleportation accuracy, if necessary.
3. A feature of our protocol is that it can operate using a cubic phase gate with a low degree of nonlinearity. As can be seen from Eq. (3.21), we can compensate for the small value of γ due to the large value of the displacement α . This is an important advantage because increasing γ is a complex experimental task.

Figure 3.4 shows the dependence of the magnitude of the mean-square error of the y -quadrature on the displacement value α . For calculations, the value of the nonlinearity coefficient of the cubic phase was taken as $\gamma = 0.1$ [85]. The red line denotes the mean-square error for the original teleportation scheme $\langle \delta \hat{e}_{or}^2 \rangle = 2e^{-2r} \langle \delta \hat{e}_{vac}^2 \rangle$ (see Sec. 2.1.1) at the maximum currently experimentally achievable squeezing degree of -15 dB [11]. As we can see from the graph, for values of $\alpha > 7$, our proposed scheme will outperform the classical teleportation scheme. Let us pay attention to the fact that for small α our approximations will be incorrect; therefore, the dependence is shown by a dashed line. In this range of values, the displacements are too small, and the quadrature values of the second oscillator will not completely lie in the first quadrant of the phase plane. This entails ambiguity in Eq. (3.14) and the emergence of a state like the Schrödinger's cat state [86], which in our case leads to a rapid increase in the error variances.

Let us see what energy is required to carry out the displacement by the value $\alpha = 20$. For a numerical estimate, we take the laser wavelength $\lambda = 430$ nm and the intensity transmittance of the asymmetric beam splitter $\tau = 0.01$ (the parameters are taken from Ref. [114]). The amplitude of the laser field required to implement such a displacement

$$E = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \frac{\alpha}{\sqrt{\tau}}, \quad (3.22)$$

where ω is the laser frequency, and V is the volume occupied by the laser pulse. The energy density of the electromagnetic wave $w = \varepsilon_0 |E|^2$; then the energy of the laser pulse should be equal to

$$W = \int_V \varepsilon_0 |E|^2 dv = \frac{hc\alpha^2}{2\lambda\tau} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 20^2}{2 \cdot 430 \cdot 10^{-9} \cdot 0.01} \approx 10^{-14} \text{ Дж}. \quad (3.23)$$

The required laser power turns out to be relatively small, so the procedure described by us is feasible. Note that the existing understanding of the experimental complexity of the displacement

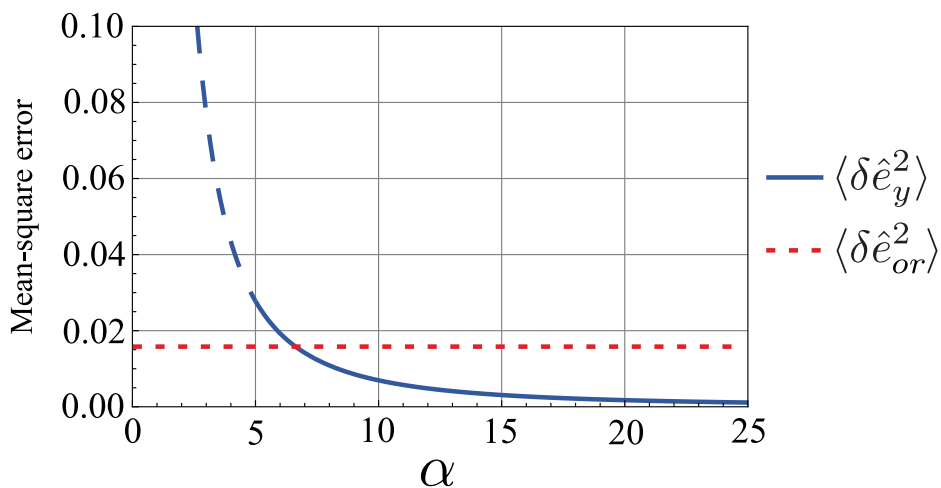


Figure 3.4: Value of the mean-square error of the teleported state y -quadrature depending on the displacement magnitude α of the non-Gaussian resource. The red dotted line marks the level of teleportation error in the original scheme. The squeezing degree of the resource oscillators is -15 dB.

procedure applies to a different range of values of α , corresponding to substantially larger displacement values. For comparison, when generating a cubic phase state by the method described in Refs. [13, 84, 88], displacement of the order of $\alpha = 10^{12}$ is required. Under similar conditions, this would require pulse energy of the order of 10^7 J, which, of course, is far from the conditions of a modern quantum-optical experiment.

3.2 Teleportation protocol with a cubic phase gate in the Schrödinger picture

The Heisenberg picture, which we used in the previous section, is illustrative and makes it easy to assess the quality of teleportation. However, it has several disadvantages. First, it does not allow us to directly assess the quality of teleportation of specific quantum states (to obtain expressions in terms of fidelity). In addition, we had to resort to approximations that limit the applicability of our result. It is also worth mentioning that the Heisenberg picture may give incorrect results when describing transformations over non-Gaussian resources [86]. Bearing in mind all of the above, we repeat the above procedure (see Fig. 3.1) but use the Schrödinger picture to describe it without resorting to any approximations.

It is convenient for us to decompose the oscillators state vectors in terms of the eigenstates of the x -quadrature operator $\{|x_j\rangle\}$. Here and further, the index inside the state vector will denote the subsystem to which it belongs. In this case, the vector state of some input state $|\psi_{in}\rangle$

and squeezed resource oscillators $|\psi_1\rangle$ and $|\psi_2\rangle$ can be represented as

$$|\psi_{in}\rangle = \int dx_{in} \psi_{in}(x_{in})|x_{in}\rangle, \quad (3.24)$$

$$|\psi_1\rangle = \int dx_1 \psi_s(x_1; -r)|x_1\rangle, \quad (3.25)$$

$$|\psi_2\rangle = \int dx_2 \psi_s(x_2; r)|x_2\rangle. \quad (3.26)$$

Here, for convenience, we introduce the notation for the wave function of the squeezed state with the squeezing coefficient r :

$$\psi_s(x; r) = \sqrt[4]{\frac{2e^{2r}}{\pi}} \exp(-e^{2r}x^2). \quad (3.27)$$

In doing so, the eigenstates of x and y quadratures are related to each other as

$$|x_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dy e^{-2ix_jy} |y_j\rangle, \quad |y_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx e^{2ix_jy} |x_j\rangle. \quad (3.28)$$

Let us repeat the operations that we performed on the states in the previous section. First, similar to Eq. (3.4), we displace the y -quadrature of the second oscillator by the classical value α :

$$|\psi'_2\rangle = e^{2i\alpha\hat{x}_2} |\psi_2\rangle = \int dx_2 e^{2i\alpha x_2} \psi_s(x_2; r) |x_2\rangle. \quad (3.29)$$

Here we have used the fact that $|x_2\rangle$ are eigenstates of the displacement operator $e^{2i\alpha\hat{x}_2}$. Therefore, in Eq. (3.29) under the integral sign, we can replace the operator \hat{x}_2 with the corresponding eigenvalue x_2 . In what follows, we use similar reasoning, replacing operators with numbers. If in Eq. (3.29) we proceed to the decomposition in terms of eigenstates of the y -quadrature operator, then the action of the displacement operator will correspond to the shift of the oscillator wave function by the value α :

$$|\psi'_2\rangle = \int dy_2 \psi_s(y_2 - \alpha; -r) |y_2\rangle. \quad (3.30)$$

After that, we apply the cubic phase gate to this oscillator, the action of which is described by Eq. (3.5). Then we get that

$$|\psi''_2\rangle = e^{-2i\gamma\hat{y}_2^3} |\psi'_2\rangle = \int dy_2 e^{-2i\gamma y_2^3} \psi_s(y_2 - \alpha; -r) |y_2\rangle. \quad (3.31)$$

Let us go back to the eigenstate decomposition of the x -quadrature operator. We can represent the state vector of the oscillator in the second channel as

$$|\psi''_2\rangle = \int dx_2 \psi''_2(x_2; r) |x_2\rangle, \quad (3.32)$$

where its wave function is given by the equation

$$\psi''_2(x; r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dy e^{2iy(x-\gamma y^2)} \psi_s(y - \alpha; -r). \quad (3.33)$$

Then we sequentially apply two transformations CZ (2.13) with weight coefficients g_1 and g_2 . The first CZ gate entangles resource oscillators (see Eqs. (3.7) and (3.8)), and the second entangles the input state with the state in the first channel (see Eqs. (3.9) and (3.10)). In addition, from the section 3.1, we know that the transformation we are describing will be a teleportation only under the condition $g_1 = -g_2 \equiv g$. Then after the first transformation CZ we get that

$$|\psi'_1, \psi''_2\rangle = e^{2ig\hat{x}_1\hat{x}_2}|\psi_1\rangle \otimes |\psi''_2\rangle = \iint dx_1 dx_2 e^{2igx_1x_2} \psi_s(x_1; -r) \psi''_2(x_2; r) |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle, \quad (3.34)$$

and the state vector of the system after the second CZ transformation will have the following form

$$\begin{aligned} |\psi'_{in}, \psi''_1, \psi'''_2\rangle &= e^{-2ig\hat{x}_{in}\hat{x}_1} |\psi_{in}\rangle \otimes |\psi'_1, \psi'''_2\rangle = \\ &= \iiint dx_{in} dx_1 dx_2 e^{2igx_1(x_2-x_{in})} \psi_{in}(x_{in}) \psi_s(x_1; -r) \psi'''_2(x_2; r) |x_{in}\rangle \otimes |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Next, we measure the y -quadratures of the input and first oscillators. In this case, the measured values of quadratures are equal to Y_{in} and Y_1 , respectively. Homodyne measurement is an operation of projecting onto the eigenstates of the y -quadrature, which correspond to the measured values of the photocurrents, i.e., onto state

$$|Y_{in}\rangle \otimes |Y_1\rangle = \frac{1}{\pi} \iint dx'_{in} dx'_1 e^{2i(x'_{in}Y_{in}+x'_1Y_1)} |x'_{in}\rangle \otimes |x'_1\rangle. \quad (3.36)$$

After the measurement, the non-normalized state of the second oscillator has the form

$$\begin{aligned} |\psi'''_2\rangle &= \langle Y_{in} | \otimes \langle Y_1 | \psi'_{in}, \psi''_1, \psi'''_2\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \iint dx_{in} dx_2 e^{-2ix_{in}Y_{in}} \psi_{in}(x_{in}) \psi_s(g(x_2 - x_{in}) - Y_1; r) \psi'''_2(x_2; r) |x_2\rangle. \end{aligned} \quad (3.37)$$

The resulting state vector must be normalized by the root of the probability density that when measuring the quadratures \hat{y}_{in} and \hat{y}_1 , the values Y_{in} and Y_1 will be obtained:

$$P(Y_{in}, Y_1) = \langle \psi'''_2 | \psi'''_2 \rangle. \quad (3.38)$$

As we know from the previous section, to complete the teleportation procedure, it is necessary to displace the x -quadrature of the second oscillator by the value of $-Y_1/g$ and the y -quadrature by the value of $Y_{in} - \sqrt{Y_1/(3\gamma g)}$. Thus, the vector of the teleported state will have the following form:

$$\begin{aligned} |\psi_{out}\rangle &= e^{-2i\frac{Y_1}{g}\hat{y}_2} e^{2i\left(Y_{in}-\sqrt{\frac{Y_1}{3\gamma g}}\right)\hat{x}_2} |\psi'''_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi P(Y_{in}, Y_1)}} \iint dx_{in} dx_2 e^{-2ix_{in}Y_{in}} e^{2i\left(Y_{in}-\sqrt{\frac{Y_1}{3\gamma g}}\right)x_2} \\ &\times \psi_{in}(x_{in}) \psi_s\left(g(x_2 - x_{in}); r\right) \psi'''_2\left(x_2 + \frac{Y_1}{g}; r\right) |x_2\rangle. \end{aligned} \quad (3.39)$$

With this approach to protocol analysis, we have the opportunity to assess the fidelity of teleportation. It is defined as

$$F = |\langle \psi_{out} | \psi_{in} \rangle|^2. \quad (3.40)$$

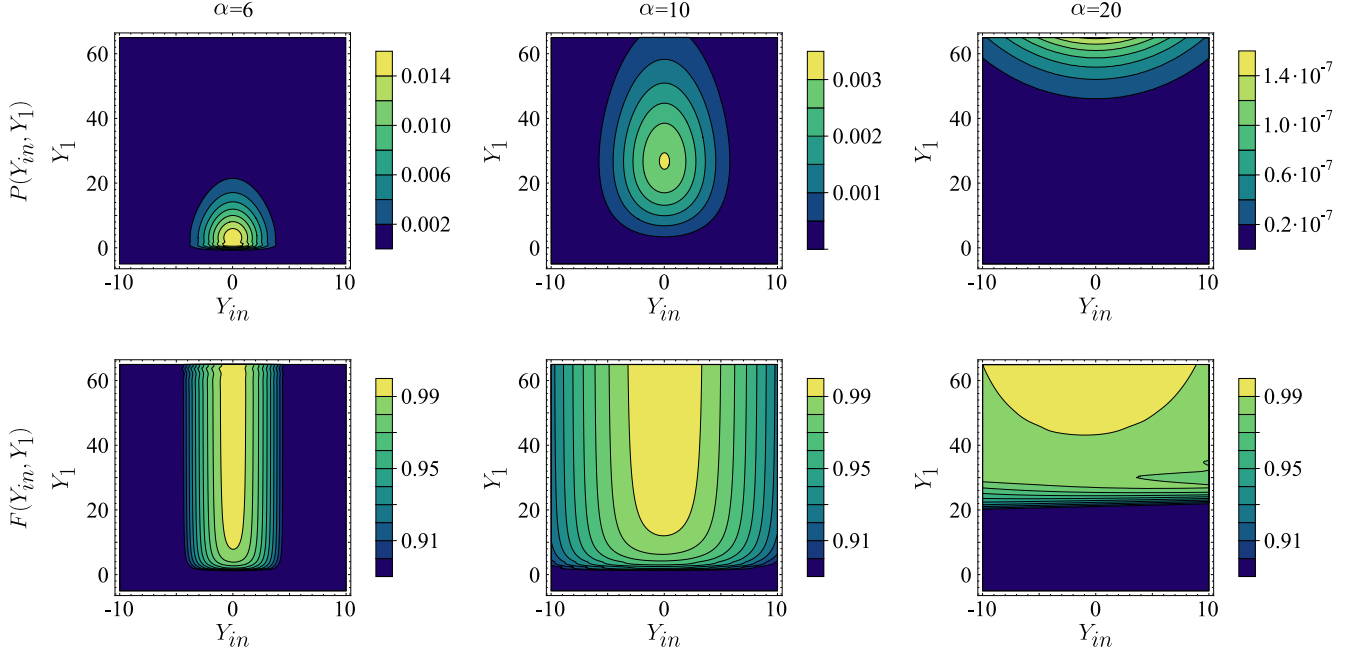


Figure 3.5: Probability density of measuring the values of Y_{in} and Y_1 and fidelity value depending on Y_{in} and Y_1 during teleportation of the vacuum state for displacement values of the resource non-Gaussian state $\alpha = 6, 10, 20$.

In the calculations, as in the previous section, we took the vacuum state as the teleported state, and we set the squeezing degree of the resource oscillators equal to -15 dB. When teleporting, we are interested in the case when the errors in both quadratures are approximately the same. According to Eqs. (3.19) and (3.21), this is achieved when the weight coefficient of the CZ gate is $g = 6\gamma\alpha e^{-r}$. We calculated the probability density $P(Y_{in}, Y_1)$ of measuring the values Y_{in} and Y_1 and the fidelity value $F(Y_{in}, Y_1)$ for the displacement values of $\alpha = 6, 10, 20$ (see Fig. 3.5). In the first case, the displacement is too small and the approximations we used in the previous section will not be valid. The graphs show that the probability of successful teleportation with a value of $\alpha = 6$ is small: in only 13% of cases, teleportation will be carried out with $F > 0.99$. With $\alpha = 10$, in more than half of the cases (about 58%), the fidelity of teleportation will be $F > 0.99$. However, in this case, the additional selection from the measurement results is still required to ensure the satisfactory operation of the protocol. If we increase the displacement value to $\alpha = 20$, the approximations from Sec. 3.1 will be fully fulfilled and we will no longer need additional selection based on the measurement results: in more than 97% of cases, the teleportation protocol will work with fidelity $F > 0.99$.

We also performed calculations for the case when squeezed states are sent to the input of the scheme. The results of these calculations for the displacement value $\alpha = 20$ are shown in Fig. 3.6. As we can see, the fidelity improves in the central part but begins to decline faster with increasing $|Y_{in}|$. Therefore, in general, the operation of the protocol deteriorates slightly: for squeezing of -5 dB, about 80% of teleportation acts will be with fidelity $F > 0.99$, and for squeezing of -10 dB

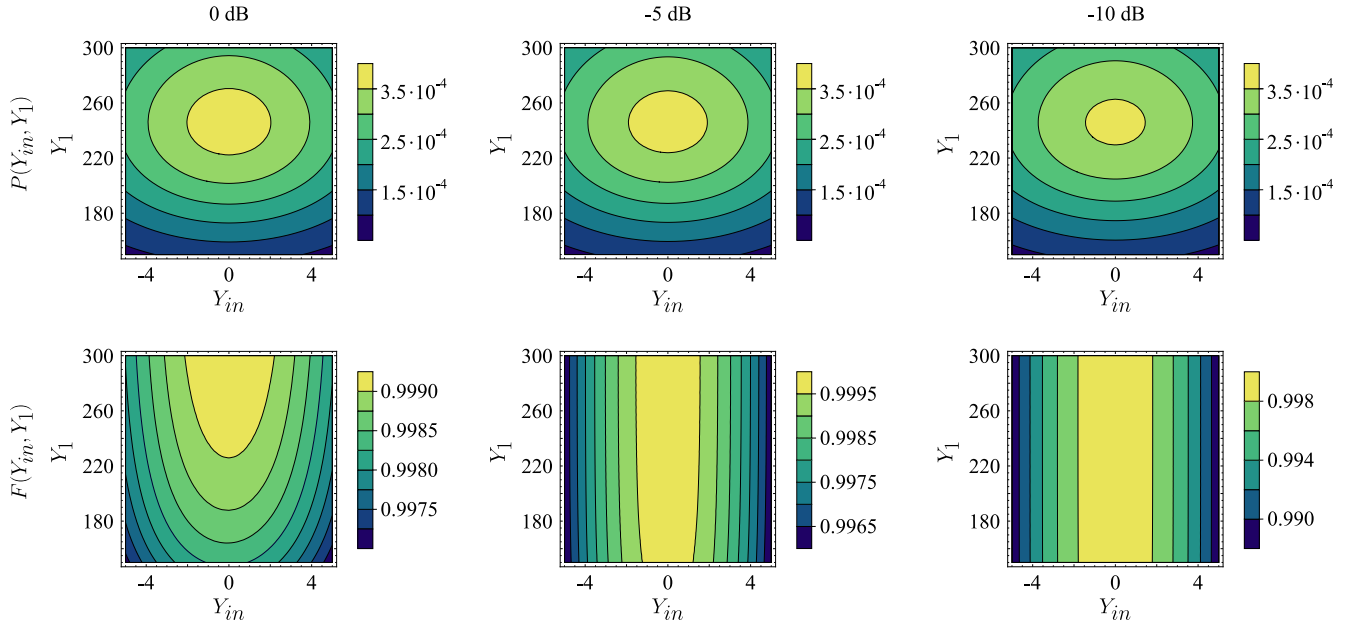


Figure 3.6: Probability density of measuring the values of Y_{in} and Y_1 and fidelity value depending on Y_{in} and Y_1 during teleportation of squeezed states for $\alpha = 20$. Squeezing of the input state: 0, -5 , and -10 dB.

this value will be 58%. Thus, teleportation of the squeezed state requires an additional increase in the displacement value α and the weight coefficient g to maintain the high efficiency of the protocol.

A graph illustrating the integral probability of successful teleportation with $F > 0.99$ depending on the displacement value α is shown in Fig. 3.7. As we can see, the probability increases rapidly as α increases. Thus, with a sufficient value of α , state teleportation will occur with high fidelity and no additional selection from the measurement results is required. The value of α at which this is achieved is relatively small and can be realized in practice.

3.3 Conclusion on chapter 3

In this chapter, we have shown that it is possible to reduce the teleportation error in one of the quadratures using a cubic phase gate. We have demonstrated this by analyzing our scheme in terms of adding a teleportation error in the Heisenberg picture. In addition, we have described the scheme in the Schrödinger picture and have demonstrated that, to fulfill the approximations made by us, it is necessary to perform relatively small displacements of the squeezed state before applying the cubic phase transformation. These displacements can be implemented in practice. If necessary, the average teleportation accuracy can be increased by selection based on the measurement results. This selection turns out to be necessary if it is not possible to displace the squeezed state by a sufficient value. It should be noted that for the protocol to work correctly, the condition $\alpha^2 \gg \langle x_{in}^2 \rangle$

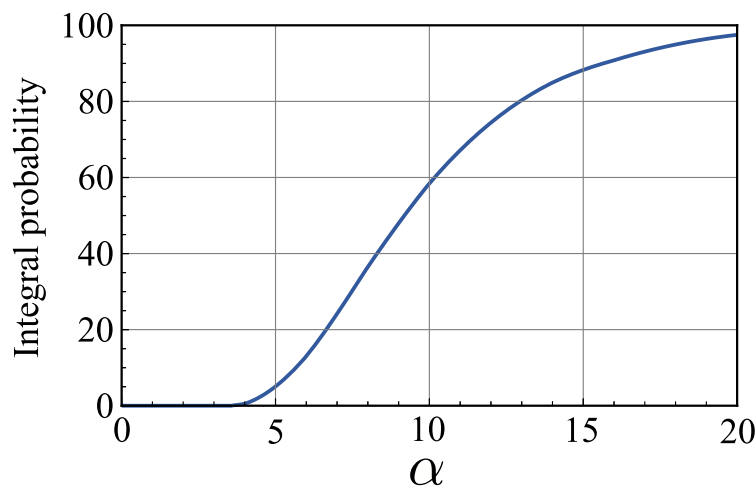


Figure 3.7: Integral probability (in percents) of successful teleportation of the vacuum state with $F > 0.99$ depending on the magnitude of the displacement value α .

should be satisfied. This condition on the input states is a limiting factor in the applicability of our protocol.

It is worth noting that the scheme allows for some variations. For example, by moving the displacement transformations and the cubic phase gate from the second channel to the first one and swapping the states of the oscillators at the input of the first and second channels, one can achieve an additional reduction in the error in the x -quadrature. In this case, the error reduction will occur simultaneously due to the weight coefficients of the CZ transformation and due to the cubic phase gate. But at the same time, we lose the ability to reduce the error in the y -quadrature.

Compared to the photon subtraction teleportation scheme [76,77], our scheme has a significant advantage. With a sufficient displacement value, it works deterministically and does not require additional selection based on the measurement results. Also, we have an additional parameter that we can control – the magnitude of the displacement of the squeezed state, on which the average error in one of the quadratures depends. It is worth noting that a natural drawback of the proposed scheme is its technical complication. Its main element is a cubic phase gate, the practical implementation of which is still an urgent task. In addition, the protocol involves the use of entanglement CZ gates, the practical implementation of which is noticeably more difficult than mixing fields at a beam splitter (see, for example, Sec. 2.3).

Nevertheless, bearing in mind the active development of Gaussian and non-Gaussian resources, it can be argued that with the advent of more advanced methods for implementing a cubic phase gate, the proposed protocol can give a significant gain in comparison with the original teleportation scheme. Next, in Chapter 4.4, we will show how to transfer the idea of error reduction proposed here to the one-way computation model.

Summarizing all of the above, the following defences have been identified and substantiated in chapter three:

- A quantum teleportation protocol is proposed that allows teleportation to be performed with greater accuracy by independently reducing field quadrature errors through two different mechanisms: weighted CZ transformation and cubic phase gate.
- The proposed quantum teleportation protocol allows the use of a cubic phase gate with a low degree of nonlinearity. The small nonlinearity can be compensated by a large value of the y -quadrature displacement of the resource oscillator before the application of the cubic phase gate.

Chapter 4. Comparison of non-Gaussian resources in teleportation protocols

In the previous chapter, we investigated a teleportation protocol that uses a non-Gaussian resource obtained using a cubic phase gate to reduce the teleportation error. We have shown that with a relatively small displacement of the squeezed state before applying the cubic phase transformation, the protocol does not require additional postselection about the measurement results. Thus, one can speak of an advantage of the teleportation protocol with a cubic phase gate in over the protocol with conditional photon subtraction in terms of preserving the determinacy of transformations. However, the question arises: which of these non-Gaussian transformations performs teleportation better and gives a greater gain relative to protocols that use a Gaussian resource?

In this chapter, we will compare the original teleportation protocol [9, 10], the teleportation protocol with photon subtraction [76, 77], and the teleportation protocol with cubic phase gate (see Chapter 2.4). For this purpose, we will evaluate the fidelity for each of the protocols when teleporting Gaussian and non-Gaussian states. As the Gaussian state, we will consider the squeezed state, and the non-Gaussian state will be the Schrödinger cat state. We will evaluate what contribution each of the non-Gaussian operations makes to the fidelity of teleportation. Such comparison will allow to estimate, which of non-Gaussian procedures has more perspectives for introduction into one-way quantum computation schemes. The results of this chapter were first presented by me in [115].

4.1 Original teleportation protocol and its modification with a photon subtraction procedure

We begin our discussion by recalling how the original teleportation protocol is constructed in continuous variables. In Chapter 1.3.5 (see Sec. 2.1.1), we discussed the operation of this protocol in a Heisenberg picture, which is convenient for clear demonstrating how the protocol works. However, it does not allow us to assess the quality of teleportation for specific input states. herefore, we will once again consider the original teleportation protocol, but in Schrödinger's representation. In the following, we will repeat the reasoning outlined by the authors in the

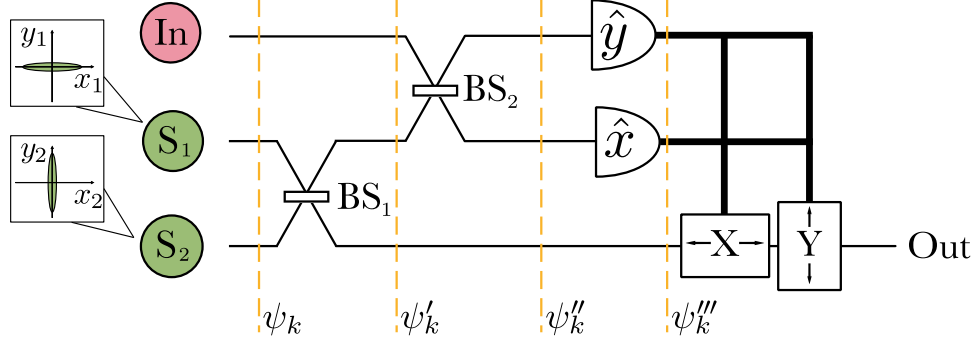


Figure 4.1: Teleportation scheme of the input state In. On the scheme: S_1 and S_2 are resource oscillators squeezed in orthogonal quadratures; BS_1 and BS_2 are symmetric beam splitters; \hat{y} and \hat{x} are homodyne detectors, measuring the corresponding field quadratures in channels, X and Y denote devices that displace the corresponding field quadratures in the channel depending on the detection results.

article [76]. The scheme of the classical teleportation protocol is shown in Fig. 4.1. Here and further, the lower indices of the wave functions will indicate the numbers of the subsystems they describe, the upper strokes will indicate the moment of time to which they relate.

Let the input state be described by the wave function in the coordinate representation $\psi_{in}(x_{in})$, and the entangled resource oscillators (i.e. after the first beam splitter) be described by the wave function $\psi'_{1,2}(x_1, x_2)$. The second beam splitter acts on the oscillators' quadrature as

$$\hat{x}_{in} \rightarrow \frac{\hat{x}_{in} + \hat{x}_1}{\sqrt{2}}, \quad \hat{x}_1 \rightarrow \frac{\hat{x}_{in} - \hat{x}_1}{\sqrt{2}}. \quad (4.1)$$

The wave function of the system is transformed as follows

$$\psi''_{in,1,2}(x_{in}, x_1, x_2) = \psi_{in} \left(\frac{x_{in} + x_1}{\sqrt{2}} \right) \psi'_{1,2} \left(\frac{x_{in} - x_1}{\sqrt{2}}, x_2 \right). \quad (4.2)$$

Then the quadratures x_1 and y_{in} are measured. The unnormalized wave function of the second oscillator after such a measurement takes the form

$$\psi'''_2(x_2; Y_{in}, X_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx_{in} e^{-2iY_{in}x_{in}} \psi_{in} \left(\frac{x_{in} + X_1}{\sqrt{2}} \right) \psi'_{1,2} \left(\frac{x_{in} - X_1}{\sqrt{2}}, x_2 \right), \quad (4.3)$$

where X_1 and Y_{in} are the measured quadrature values. The probability density that the measurement of the quadratures \hat{x}_1 and \hat{y}_{in} will yield values X_1 and Y_{in} is determined by the following expression:

$$P(Y_{in}, X_1) = \int dx_2 |\psi'''_2(x_2; Y_{in}, X_1)|^2. \quad (4.4)$$

To complete the teleportation procedure, it remains to displace the quadratures in the second channel by the measured quadrature values: x -quadrature by $\sqrt{2}X_1$ and y -quadrature by $\sqrt{2}Y_{in}$.

Thus, the wave state function at the output of the scheme is given by the expression

$$\begin{aligned} \psi_{out}(x; Y_{in}, X_1) &= \frac{1}{\sqrt{\pi P(Y_{in}, X_1)}} \int dx_{in} e^{2iY_{in}(\sqrt{2}x - x_{in})} \psi_{in}\left(\frac{x_{in} + X_1}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad \times \psi'_{1,2}\left(\frac{x_{in} - X_1}{\sqrt{2}}, x + \sqrt{2}X_1\right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Next, we will need to modify this protocol by adding a conditional photon subtraction procedure. With this in mind, it will be convenient to proceed to the decomposition of the wave functions by the set of Fock states:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{k-1}k!}\sqrt{\pi}} e^{-x^2} H_k(\sqrt{2}x), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (4.6)$$

where $H_k(x)$ are Hermite polynomials. Then, the wave function of the entangled resource oscillators can be represented as

$$\psi'_{1,2}(x_1, x_2) = \sum_k c_k \varphi_k(x_1) \varphi_k(x_2), \quad (4.7)$$

where the coefficients have the form

$$c_k = \sqrt{1 - q^2} q^k. \quad (4.8)$$

In this decomposition, the parameter q ($0 < q < 1$) is responsible for an entanglement strength and is related to the oscillators' squeezing as:

$$q = \tanh r. \quad (4.9)$$

We also represent the wave function of the teleported input oscillator as the sum

$$\psi_{in}(x_{in}) = \sum_k c_k^{in} \varphi_k(x_{in}). \quad (4.10)$$

If we substitute the decompositions (4.7) and (4.10) into the Eq. (4.5), we can write the expression for the wave function of the output state as

$$\psi_{out}(x; Y_{in}, X_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi P(Y_{in}, X_1)}} e^{2\sqrt{2}iY_{in}x} \sum_{k,m} c_k c_m^{in} \varphi_k(x + \sqrt{2}X_1) D_{k,m}(Y_{in}, X_1). \quad (4.11)$$

Here we introduced the c-numeric function $D_{k,m}(Y_{in}, X_1)$ defined by expressions:

$$D_{k,m}(Y_{in}, X_1) = 2\sqrt{2^{m-k}} e^{2iY_{in}X_1} e^{-Y_{in}^2 - X_1^2} (-iY_{in} - X_1)^{m-k} \sqrt{\frac{k!}{m!}} L_k^{m-k}(2Y_{in}^2 + 2X_1^2) \quad (4.12)$$

for $m \geq k$, and

$$D_{m,k}(Y_{in}, X_1) = (-1)^{m-k} D_{k,m}^*(Y_{in}, X_1) \quad (4.13)$$

for $m < k$. In Eq. (4.12) $L_k^m(x)$ are generalized Laguerre polynomials. The resulting form of the transformation will be convenient for modifying the scheme by photon subtraction.

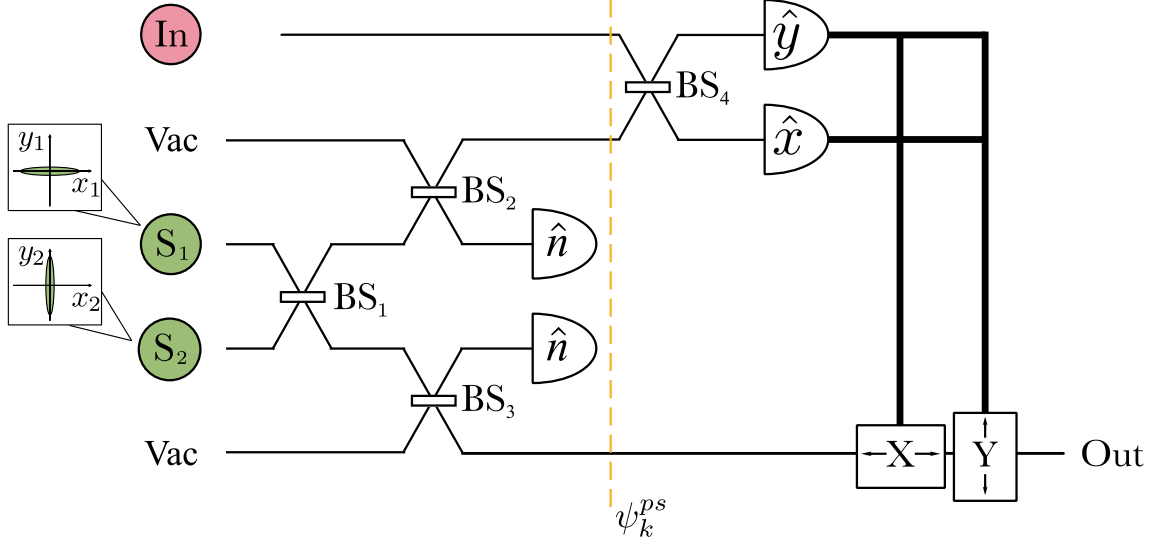


Figure 4.2: Teleportation scheme with the photon subtraction. On the scheme: open channels are designated as Vac; BS₁ and BS₄ are symmetric beam splitters; BS₂ and BS₃ are low-reflectance beam splitters; \hat{y} and \hat{x} are homodyne detectors, and \hat{n} are photon-number detectors.

In [76], the authors proposed a modified teleportation protocol (see Fig. 4.2). In this protocol, the entangled non-Gaussian state is used as a resource. This state is obtained from the two-mode squeezed vacuum by subtracting photons from each mode. The conditional photon subtraction procedure is performed as follows: a beam splitter with small amplitude reflection coefficient R (and amplitude transmittance T) is placed in the channel, then the number of photons is measured in the reflected beam. Such an operation on the j -th oscillator transforms the Fock state $|k\rangle_j$ as follows:

$$|k\rangle_j \rightarrow (-1)^n \sqrt{\frac{k!}{(k-n)!n!}} |R|^n |T|^{k-n} |k-n\rangle_j, \quad (4.14)$$

where n is the number of measured photons in the reflected beam (see [71, 72]).

A successful implementation of the protocol will be considered the case when one photon has been detected in each channel. Then, the non-Gaussian entangled resource state can be represented as the decomposition:

$$\psi_{1,2}^{ps}(x_1, x_2) = \sum_k c_k^{ps} \varphi_k(x_1) \varphi_k(x_2), \quad (4.15)$$

where the coefficients are given by the following relation:

$$c_k^{ps} = \sqrt{1-q^2} \frac{(k+1)!}{k!} |R|^2 |T|^{2k} q^{k+1}. \quad (4.16)$$

Since the rest of the scheme is the same as the original one, the Eq. (4.11) describes the output state up to changing $c_k \rightarrow c_k^{ps}$.

4.2 Comparison of different teleportation protocols

Let us evaluate the performance of each protocol for specific input states. To do this, we calculate the teleportation fidelity, which is defined as

$$F(Y_{in}, E_1) = \left| \int dx \psi_{out}^*(x; Y_{in}, E_1) \psi_{in}(x) \right|^2. \quad (4.17)$$

Here, for the original teleportation protocol and the teleportation with photon subtraction, the quadrature measured in the first channel is X_1 (i.e., $E_1 = X_1$), and for the teleportation with cubic phase gate $E_1 = Y_1$.

The protocols we consider have significantly different working areas (i.e. different ranges of measured quadrature values). To compare fidelity graphs for different protocols, it is necessary to combine these areas. To do this, we center and normalize the axes of the measured quadratures. We will normalize them by the variances values of the corresponding quadratures:

$$\tilde{E}_j = \frac{E_j - \langle E_j \rangle}{\langle (E_j - \langle E_j \rangle)^2 \rangle}, \quad E_j = Y_{in}, X_1, Y_1. \quad (4.18)$$

Such a scaling seems natural, since the first and second moments of the probability densities $P(\tilde{Y}_{in}, \tilde{E}_1)$ are equal, and their differences are due only to non-Gaussian features of the protocols themselves and the teleported states.

Let us briefly discuss the parameters we took for the calculations. We will take the squeezing of resource oscillators for all protocols the same and equal to -10 dB. Such squeezing is achievable in the real experiment [11]. For a teleportation protocol with photon subtraction, a balance between two factors should be maintained when selecting the reflection coefficient of the beam splitters used for photon subtraction. On the one hand, the reflection coefficient should be small so that cases of subtraction of two or more photons can be neglected (since existing photon detectors do not allow us to measure the exact number of photons that have arrived). On the other hand, it cannot be very small, so that the probability of successful protocol implementation does not tend to zero. Following the authors of [76], we take $R = 0.05$. In this case, the probability of successful photon subtraction in both channels is approximately 0.4%. Now let us turn to the parameters used in the teleportation protocol with cubic phase gate. Usually, an auxiliary squeezed oscillators (see Chapter 1.3.5) are required to implement the CZ transformation. We assume that the squeezing of these oscillators is the same as that of the resource ones (i.e., -10 dB). Then the weight coefficient of the CZ transformation can be taken approximately $g = 3$ (see Sec. 2.2). We take the relatively small nonlinearity of the cubic phase gate $\gamma = 0.1$, and the displacement $\alpha = 7$. Small values of nonlinearity are estimated as conditionally achievable [89, 94], and displacement by a small value does not represent experimental difficulties (see Chapter 2.4).

It is of interest to evaluate for which type of states the use of a non-Gaussian resource gives a greater gain and which of the protocols provides it. To evaluate the performance of the protocols, we considered the cases of Gaussian and non-Gaussian input states.

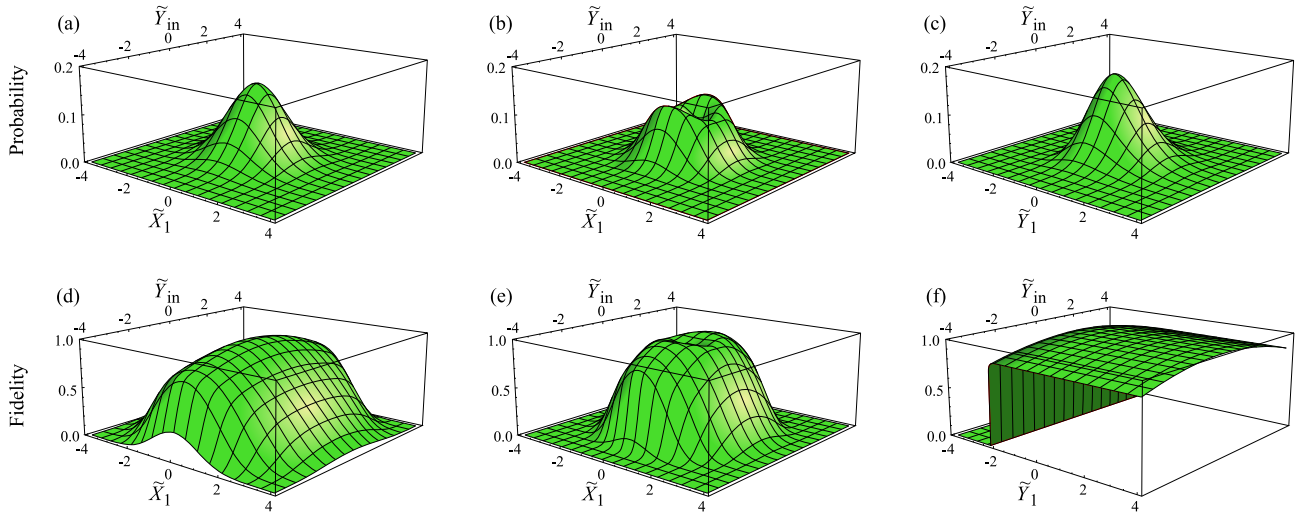


Figure 4.3: Probability densities of measuring the values \tilde{X}_1 (or \tilde{Y}_1) and \tilde{Y}_{in} (a, b, c) as well as fidelity (d, e, f) when teleporting a squeezed state for: (a, d) original protocol; (b, e) protocol with photon subtraction (c, f) protocol with cubic phase gate.

As a Gaussian one, we took a x -quadrature squeezed state with -5 dB squeezing. Fig. 4.3 shows the probability density of measuring the values \tilde{X}_1 (or \tilde{Y}_1) and \tilde{Y}_{in} as well as teleportation fidelity of this state for all analyzed protocols. Let us first compare the original protocol and the protocol with photon subtraction. For the original protocol, the probability density $P(\tilde{Y}_{in}, \tilde{X}_1)$ has the form of a Gaussian distribution. For the teleportation protocol with photon subtraction, the probability density $P(\tilde{Y}_{in}, \tilde{X}_1)$ has a dip in the center of the working area. Comparing the fidelities for these protocols, we see that the fidelity for the protocol with photon subtraction is slightly higher in the area of the most probable measured values, but less at the edges of this area. Therefore, it is difficult to say unequivocally which of the protocols turned out to be more effective. At the same time, the probability density $P(\tilde{Y}_{in}, \tilde{Y}_1)$ for the protocol with cubic phase gate is asymmetric along the \tilde{Y}_1 -axis. It has a tail going into the area with large values \tilde{Y}_1 . It is in this region that the maximum values of teleportation fidelity are achieved. It can be seen that the fidelity of the teleportation protocol with CPG exceeds the fidelity of the other protocols in almost the entire working area.

As a non-Gaussian input state, we took an odd Schrödinger cat state, which is a superposition of two coherent states. The wave function of such a state has the form

$$\psi_{cat}(x) = \frac{1}{N_{cat}} (e^{2ibx} - e^{-2ibx}) e^{-x^2}, \quad (4.19)$$

where N_{cat} is the normalization factor. For the calculations, we take $b = 1.5$. Using the same state, the authors of the paper [76] tested the operation of the protocol with photon subtraction. Fig. 4.4 shows the probability density of measuring the values \tilde{X}_1 (or \tilde{Y}_1) and \tilde{Y}_{in} as well as the teleportation fidelity of the Schrödinger cat state for the three protocols considered. When comparing the original teleportation protocol and the protocol with photon subtraction, we see that the probability density $P(\tilde{Y}_{in}, \tilde{X}_1)$ for the protocol with photon subtraction increases in the

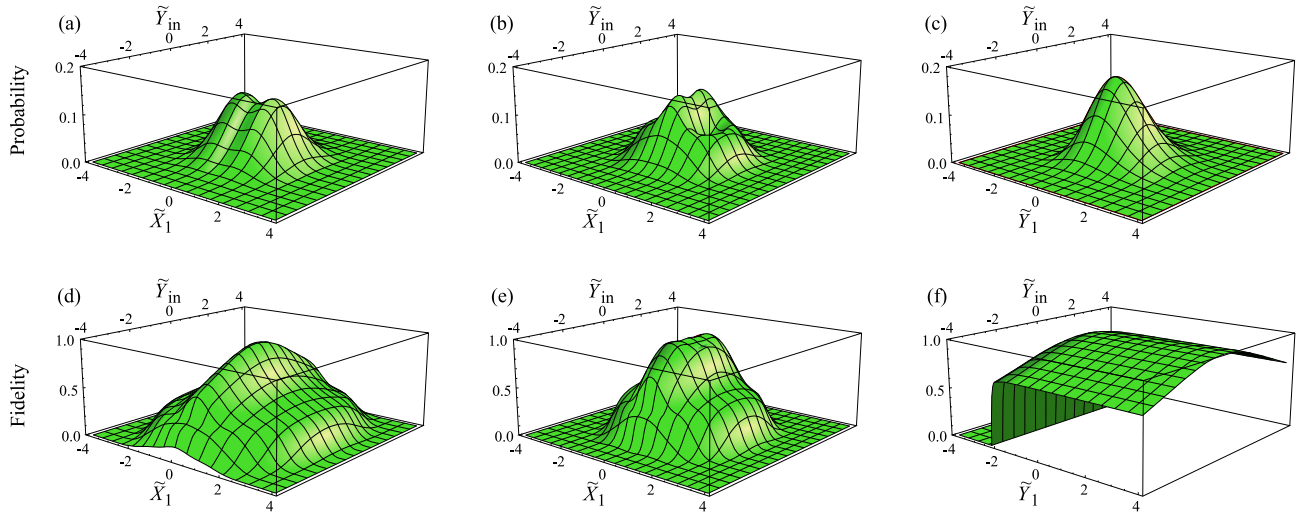


Figure 4.4: Probability densities of measuring the values \tilde{X}_1 (or \tilde{Y}_1) and \tilde{Y}_{in} (a, b, c) as well as fidelity (d, e, f) when teleporting a Schrödinger cat state for: (a, d) original protocol; (b, e) protocol with photon subtraction (c, f); protocol with cubic phase gate.

central part of the working area. Also, for the chosen non-Gaussian input state, the fidelity of the teleportation with photon subtraction increased significantly in the central part of the work area. Thus, when teleporting the Schrödinger cat state, the protocol with photon subtraction is more efficient than the original one. However, as well for the squeezed input state, the fidelity for the protocol with cubic phase gate is higher than for the others in almost the entire working area. For protocol with cubic phase gate, the probability density $P P(\tilde{Y}_{in}, \tilde{Y}_1)$ for Schrödinger's cat teleportation and squeezed state teleportation has the same form.

To objectively compare the quality of all three protocols, for each of the cases considered above, we calculate the averaged fidelity of teleportation:

$$\langle F \rangle = \iint dY_{in} dE_1 P(Y_{in}, E_1) F(Y_{in}, E_1). \quad (4.20)$$

The calculation results are shown in Fig. 4.5. We see that the averaged fidelity of squeezed state teleportation for the protocol with photon subtraction is slightly higher than for the original protocol. The gain for the protocol with photon subtraction becomes more noticeable when teleporting the more complex Schrödinger's cat state. However, the averaged fidelity for the protocol with cubic phase gate significantly exceeds the averaged fidelity for the other protocols for both the Gaussian input state and the non-Gaussian one.

Thus, under the same conditions, the teleportation protocol with cubic phase gate is more efficient than the other protocols considered. In addition, it works deterministic, while for the protocol with photon subtraction the probability of successful implementation is only 0.4% [76].

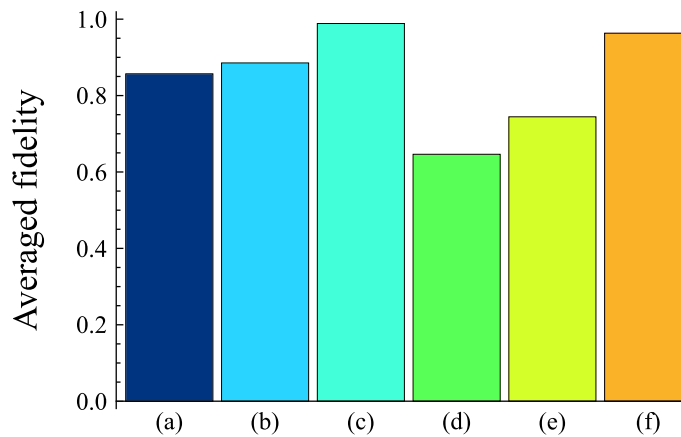


Figure 4.5: Averaged teleportation fidelity: (a) squeezed state teleportation by the original protocol; (b) squeezed state teleportation by the protocol with photon subtraction; (c) squeezed state teleportation by the protocol with cubic phase gate; (d) Schrödinger’s cat state teleportation by the original protocol; (e) Schrödinger’s cat state teleportation by the protocol with photon subtraction; (f) Schrödinger’s cat state teleportation by the protocol with cubic phase gate.

4.3 Evaluating the role of non-Gaussian resources

In the previous section, we compared two schemes with non-Gaussian resources, one proposed by the authors in [76] and the other proposed by us and described in Chapter 2.4. However, these schemes differ from each other not only at the single element introducing non-Gaussianity. The photon subtraction scheme contains a non-Gaussian operation in each of the resource channels, which leads to a uniform error reduction in both quadratures of the teleported state. At the same time, the proposed teleportation protocol with cubic phase gate contains only one non-Gaussian operation. However, to create entanglement, it uses CZ gates that increase the entanglement in the system. This allows to simultaneously reduce the teleportation error in both quadratures: in one due to weight coefficients of CZ gates, in the other due to the non-Gaussian transformation.

The question arises whether it is possible to separate the Gaussian processes affecting the error from the non-Gaussian ones, and compare exactly non-Gaussian resources with each other. To find out what role non-Gaussian resources play in error reduction, we modify the scheme from Chapter 2.4 by replacing the entangling CZ gates with beam splitters. As before, one of the resource states is replaced by the non-Gaussian state prepared using the CPG (see Fig. 4.6).

Let us obtain an expression for the wave function of the output state in such a teleportation scheme. Initially, both resource oscillators are x -quadrature squeezed and are described by the wave functions of the squeezed oscillator:

$$\psi_s(x; r) = \sqrt[4]{\frac{2e^{2r}}{\pi}} \exp(-e^{2r}x^2). \quad (4.21)$$

where r is the squeezing parameter. We will assume that the squeezing parameters of the resource states are equal to each other, and $r > 0$. In the first resource channel, by successive application

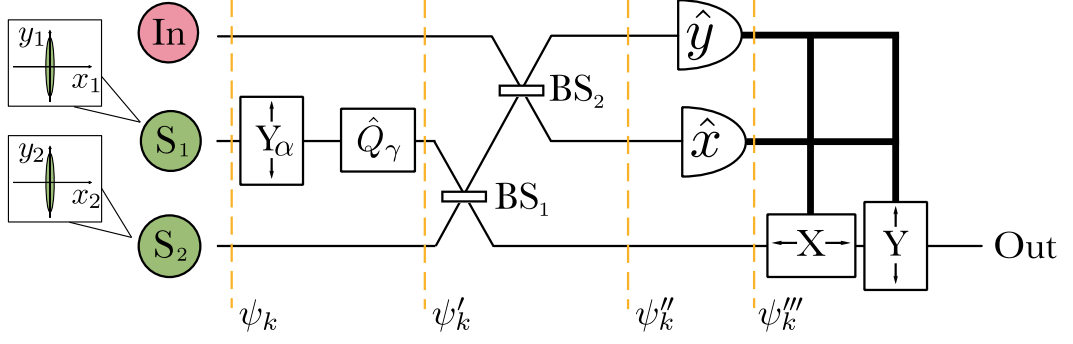


Figure 4.6: Teleportation scheme with beam splitters and cubic phase gate

of the y -quadrature displacement operations on $\alpha > 0$ and cubic phase gate, we prepare a non-Gaussian state. The wave function of such a resource oscillator will be given by the equation

$$\psi'_1(x; r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dy e^{2iy(x-\gamma y^2)} \psi_s(y - \alpha; -r). \quad (4.22)$$

The derivation of this wave function is described in detail in the previous chapter in Sec. 3.2. Since further on the squeezing parameter R will be the same for all functions, and we will not investigate the dependence of the results on it, we will omit it in the discussions below.

With the beam splitter, the resource oscillators are entangled first and then are entangled first resource and input states. The action of the beam splitters on the quadratures is similar to the transformation (4.1). The wave function of the system is transformed as follows

$$\psi''_{in,1,2}(x_{in}, x_1, x_2) = \psi_{in} \left(\frac{x_{in} + x_1}{\sqrt{2}} \right) \psi'_1 \left(\frac{x_{in} - x_1}{2} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \right) \psi_s \left(\frac{x_{in} - x_1}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} \right). \quad (4.23)$$

Then, as in the original teleportation protocol, \hat{x}_1 and \hat{y}_{in} quadratures are measured, X_1 and Y_{in} are measured quadrature values, respectively. The unnormalized wave function of the second oscillator after such a measurement has the form

$$\begin{aligned} \psi'''_2(x_2; Y_{in}, X_1) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx_{in} e^{-2iY_{in}x_{in}} \psi_{in} \left(\frac{x_{in} + X_1}{\sqrt{2}} \right) \\ &\times \psi'_1 \left(\frac{x_{in} - X_1}{2} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \right) \psi_s \left(\frac{x_{in} - X_1}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

To complete the teleportation procedure, it remains to displace the quadratures in the second channel according to the measured quadrature values: the x -quadrature displaced by $\sqrt{2}X_1$, and the y -quadrature by $\sqrt{2}Y_{in} - \sqrt{4|X_1|/(3\gamma)}$. Thus, the wave function of the state at the output takes the form:

$$\begin{aligned} \psi_{out}(x_2; Y_{in}, X_1) &= \frac{1}{\sqrt{\pi P(Y_{in}, X_1)}} \int dx_{in} e^{-2iY_{in}x_{in}} e^{2ix \left(\sqrt{2}Y_{in} - \sqrt{\frac{4|X_1|}{3\gamma}} \right)} \psi_{in} \left(\frac{x_{in} + X_1}{\sqrt{2}} \right) \\ &\times \psi'_1 \left(\frac{x_{in} - 3X_1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \psi_s \left(\frac{x_{in} + X_1}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}; r \right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

where a normalization factor appeared before the integral, restoring the normalization of the wave function and having the meaning of the probability density of measuring the values X_1 and Y_{in} in the first and input channels, respectively.

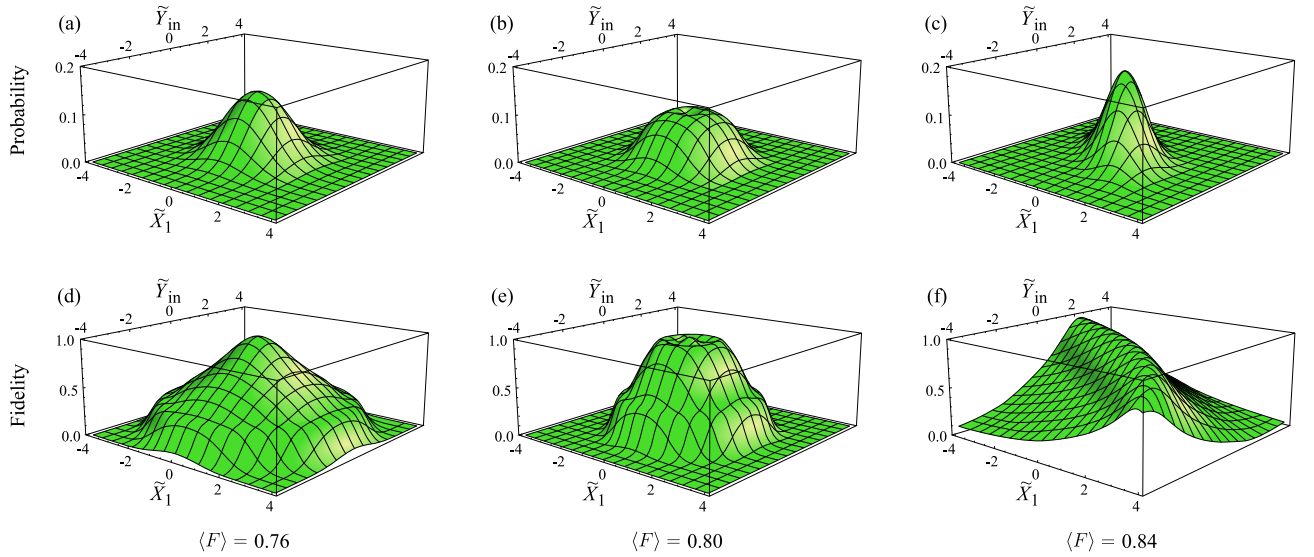


Figure 4.7: Probability densities of measurement values \tilde{X}_1 and \tilde{Y}_{in} (a, b, c) as well as fidelity (d, e, f) when teleporting the first Fock state for: (a, d) original protocol; (b, e) protocol with photon subtraction (c, f) protocol with cubic phase gate in a scheme with beam splitters. The average fidelity for each of the cases is given below.

To correctly evaluate the quality of the protocols, the input state should have two properties. It should be sufficiently complex (preferably non-Gaussian), so that the gain from using non-Gaussian states is more noticeable. It should also be symmetric in both quadratures. The second requirement is necessary because the teleportation protocol with photon subtraction reduces the error in both quadratures, while the protocol with cubic phase gate does only in one. If the state is asymmetric, then the fidelity of teleportation will depend heavily on the rotation of the state in phase space. That is, if the error is suppressed in the quadrature, which is weakly sensitive to its adding, fidelity will be almost unchanged and vice versa. When using quadrature symmetric states as teleported states, error reduction in both quadratures will contribute equally to the increase of fidelity. A state with such properties will allow us to objectively compare the gain from non-Gaussian resources. Given these properties, we have chosen as the input state the first Fock state whose wave function is defined by the Eq. (4.6). We also increase the displace value to $\alpha = 15$ in the teleportation protocol with cubic phase gate to compensate for the lack of additional squeezing from CZ transformation in the protocol. At the same time, we leave the nonlinearity of the cubic phase gate unchanged.

The \tilde{X}_1 and \tilde{Y}_{in} measurement probability densities and fidelity when teleporting the first Fock state for the original protocol, the protocol with photon subtraction and the protocol with cubic phase gate in the beam splitter scheme are shown in Fig. 4.7. If we compare the original protocol and the protocol with photon subtraction, we see that the probability density $P(\tilde{Y}_{in}, \tilde{X}_1)$ for the second protocol becomes lower in the centre of the working area. At the same time, the fidelity of the teleportation protocol with photon subtraction is much higher in the centre of the working

area, but drops off more rapidly at its edges. As a consequence, the quality of the protocol becomes better on average, reflecting an increase in the average fidelity of teleportation. For a teleportation protocol with a cubic phase gate, the probability $P(\tilde{Y}_{in}, \tilde{X}_1)$ is found to extend on the plane $(\tilde{Y}_{in}, \tilde{X}_1)$ along the parabola due to the auxiliary state of the cubic phase. It is along this direction that the fidelity of teleportation will be highest. As a result, the average fidelity for this protocol is higher than for the previous two. Despite the fact that the cubic phase gate affects the error in only one channel, leaving the error in the second channel untouched, the gain from using cubic phase gate in the teleportation protocol exceeds the gain from using photon subtraction.

It is worth noting that reducing the squeezing degree of resource oscillators will reduce the quality of the teleportation protocol. In this case, the gain from the use of additional non-Gaussian resources will be more significant. Conversely, at sufficiently high squeezing of resource oscillators, non-Gaussian operations will not play such a significant role.

4.4 Conclusion on chapter 4

In this chapter, we have compared the performance of three teleportation protocols: the original protocol, the protocol with photon subtraction, and the protocol with cubic phase gate. On the example of squeezed state and Schrödinger’s cat state, we have shown that the protocol with cubic phase gate allows to reach higher fidelity values, than the other protocols. It should be noted that teleportation fidelity in the scheme with cubic phase gate is almost independent of the type of teleported state. This distinguishes it noticeably from other protocols. In addition, the protocol with cubic phase gate works in a deterministic way, unlike the protocol with photon subtraction.

It is worth noting that the implementation of the teleportation protocol with the cubic phase gate is technically more difficult than implementing the other protocols considered. The key element of this scheme is the cubic phase gate, the practical implementation of which is still a challenge for experimenters. In addition, the protocol assumes confusion of the fields using CZ transformations. Such entanglement is more difficult to implement in practice than entanglement on a beam splitter (see discussion in 2.2). Nevertheless, Gaussian and non-Gaussian resources are currently being actively developed. In addition, it has made significant progress in the generation of cubic phase states [94]. Therefore, with the advent of better ways to implement the cubic phase gate and CZ transformation, our proposed protocol can give a significant advantage over other teleportation protocols.

It is also important to note that, for the sake of simplicity, we have omitted the errors associated with the non-ideality of photodetection. However, we have taken into account the imperfections of the schemes associated with the use of Gaussian resources. In other words, imperfections arising from the use of oscillators with a finite (non-ideal) squeezing degree. To take into account imperfections of this type most “honestly”, we have considered auxiliary oscillators with the same squeezing degree in all schemes.

In addition to these imperfections, the scheme contains imperfections associated with non-Gaussian resources. Currently, as it is known, such resources are difficult to implement in practice [116, 117]. In the photon subtraction scheme, the difficulty in creating non-Gaussian states is related to the use of non-ideal photon number detectors. In [76] the authors discuss this imperfection. The main problem of the other scheme is related to the lack of experimental methods for implementing a cubic phase gate in the optical range. However, such a gate is already deterministically realized in the microwave range [94], which gives hope for its soonest realization in the optical range as well. The ability to deterministically perform this non-Gaussian operation, in turn, will be an important advantage of a cubic phase gate scheme over others.

Thus, the cubic phase gate has more prospects for further implementation in one-way quantum computation schemes.

Summarizing all of the above, the following defence statement was developed and substantiated in chapter four:

- The use of the cubic phase gate in the teleportation scheme increases teleportation fidelity over a much wider working area than the photon subtraction procedure.

Chapter 5. One-way quantum computation with non-Gaussian resource

In previous chapters, we have considered strategies for reducing errors in the quantum teleportation protocol. In this chapter, we will apply these strategies to reduce the errors of arbitrary single-mode Gaussian operations and two-mode Gaussian operations necessary to achieve universal quantum computations.

The first strategy proposed here is to employ the Gaussian transformations and to vary the weight coefficients of the cluster state used as a resource for the quantum computation. In Chapter 1.3.5, based on the quantum teleportation protocol, we showed that it is possible to decrease the quantum signal transmission error by using the weighted CZ transformation as an entanglement operation. Increasing the weight coefficients made it possible to significantly decrease the error in one of the quadratures, whilst the transformation maintains Gaussian. Therefore, in first section, we study the impact of the cluster state weight coefficients on the single-mode operation errors.

It is necessary to mention that according to the No-Go theorem [51] Gaussian states cannot be used to correct Gaussian errors (determined by Gaussian transformations) in Gaussian states. The proposed method does not contradict this theorem. We reduce the computation error not by additional error correction, but by reducing the impact of the nodes that contribute the most errors.

The second strategy for decreasing the error is to use the clusters with non-Gaussian nodes. In the Chapter 2.4, we have shown that it is possible to reduce the errors in the teleportation protocol by using the states prepared with the cubic phase gate [13]. The teleportation protocol underlies the one-way quantum computation. Therefore, we have carried forward the proposed approach to create a resource cluster state to perform computation with fewer errors. At the same time, we place the emphasis on the minimum change in the resource state (modifying only one node) which would lead to a maximum error decrease. The choice of cubic phase gate as a non-Gaussian operation is related to the possibility of performing it deterministically, where each measurement leads to the desired result. This is important for the scalability of quantum computation schemes and is advantageous for computations with continuous variables. Probabilistic procedures (such as the photon subtraction [76, 77]) would deprive the protocol of this advantage.

In this chapter, we describe the transformation scheme on a weighted four-node linear cluster state and demonstrate its arbitrariness for any values of weight coefficients. That is, with such

an operation on a weighted four-node cluster, we can transform any input Gaussian state into any other Gaussian state. Also we estimate the errors in the considered scheme and proposed options for optimizing the transformation errors for experimentally achievable values of the weight coefficients. Then, we study a modified computation scheme in which a cubic phase gate is used to prepare the cluster state, estimate the errors in this scheme, and perform their optimization. We evaluate the efficiency of optimization of the computation proposed in the previous sections based on the calculation of the error correction probability. In the last section, we demonstrate that our approach of decreasing the error by using a cubic phase gate is applicable to Gaussian two-mode operations. The main results discussed in this chapter were first presented by me in [118].

5.1 Role of cluster state weight coefficients

The principle of performing an arbitrary single-mode Gaussian operations on an unweighted linear four-node cluster is well known [47, 88]. In Sec. 1.2.1, we discussed that such a cluster is a basic resource for one-way quantum computation. In this section, we will repeat similar transformations on a weighted cluster and demonstrate their arbitrariness for any values of the weight coefficients. That is, varying the weigh coefficients does not narrow the class of transformations under consideration, and by discussing calculations on a weighted cluster, we can still perform any required transformation. In addition, we will evaluate the errors in the scheme and propose options for optimizing the transformation errors for experimentally achievable values of the weight coefficients.

5.1.1 Transformation scheme on a linear four-node weighted cluster

As shown in paper [47], the transformation on a four-node cluster is the elementary unit of all Gaussian operations. To get an explicit expression for the transformation error, let us start with constructing the cluster state. The linear cluster state (Fig. 5.1(a)) is prepared from four oscillators squeezed in the y -quadrature. As before, the quadratures of the j -th oscillator are described as

$$\hat{x}_j = e^r \hat{x}_{0,j}, \quad \hat{y}_j = e^{-r} \hat{y}_{0,j}, \quad (5.1)$$

where the same notations as in the similar equations above (see Eq. (2.1) and Eq. (3.1)) are introduced. We will entangle the cluster nodes as well as mixing the input state to the cluster with the CZ gate, which acts on the j and k oscillators as

$$\hat{C}_{Z,jk} = e^{2ig_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k}. \quad (5.2)$$

Here g_{jk} is the transformation weight coefficient, it can take any positive or negative values. In detail, we discussed the role of the CZ transformation weight coefficient in Sec. 2.1.2. The sign of the weight coefficient indicates the creation of positive or negative correlations (anti-correlations)

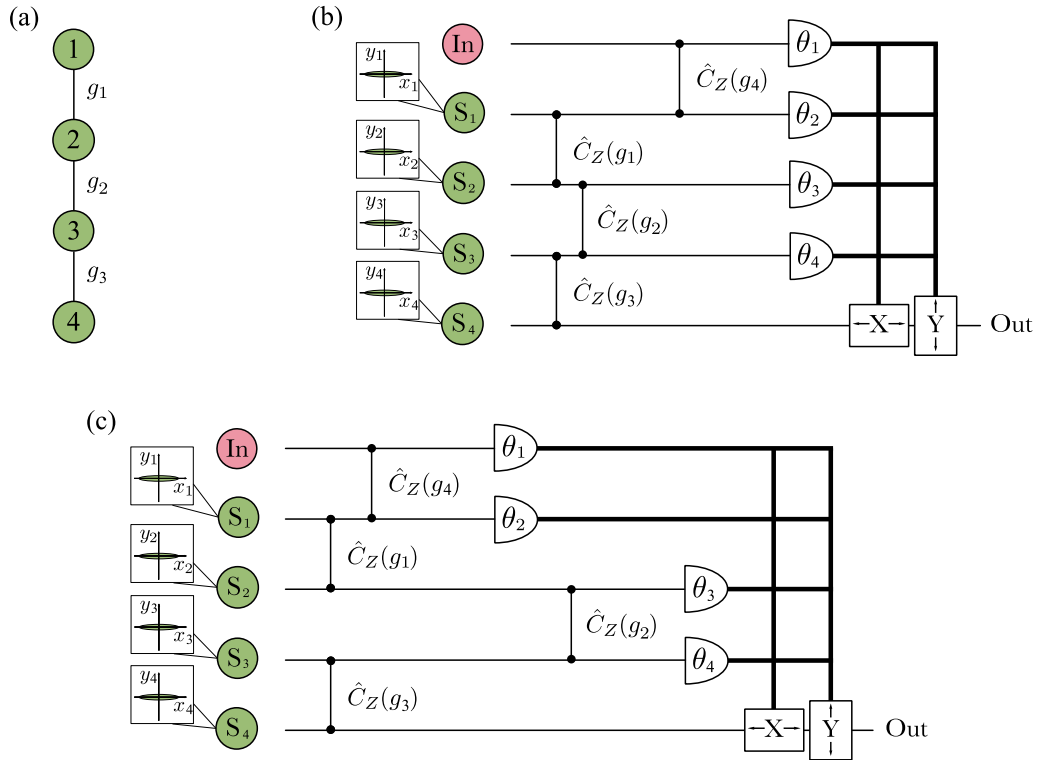


Figure 5.1: (a) Configuration of the cluster state used as a resource for computation. (b) Scheme for implementing of the arbitrary single-mode Gaussian operation on a linear weighted four-node cluster state. (c) Scheme of implementation of arbitrary single-mode Gaussian operation on a pair of two-node cluster states. In the diagram: In is the input state; S_j are squeezed states; $\hat{C}_Z(g_j)$ is the CZ transformation with weight coefficient g_j ; θ_j are the phases of the local oscillators employed for a balanced homodyne detection; and X and Y are operations that displace the corresponding quadratures of the fields in the channel, depending on the detection results.

between oscillators. Hereinafter, in the paper, we consider positive weight coefficients, bearing in mind that their sign does not influence the error decrease.

All CZ gates commute with each other. In addition, the CZ gate, which entangles the second and third resource oscillators, commutes with the homodyne measurements over the input and first resource oscillators. Thus, we can consider the transformation on a four-node cluster state (see Fig. 5.1(b)) as a transformation on a pair of two-node cluster states (see Fig. 5.1(c)). It simplifies the analysis of the scheme.

Let us consider the transformation performed on the first pair of resource states. The first and second squeezed oscillators are entangled using the CZ gate with the weight coefficient g_1 . The input state is entangled to the first resource oscillator by a similar operation with a weight

coefficient g_4 . As the result, the amplitudes of the oscillators take the following form:

$$\hat{a}'_{in} = \hat{x}_{in} + i(\hat{y}_{in} + g_4\hat{x}_1), \quad (5.3)$$

$$\hat{a}'_1 = \hat{x}_1 + i(\hat{y}_1 + g_1\hat{x}_2 + g_4\hat{x}_{in}), \quad (5.4)$$

$$\hat{a}'_2 = \hat{x}_2 + i(\hat{y}_2 + g_1\hat{x}_1). \quad (5.5)$$

We then perform homodyne measurements with the local oscillator's phases θ_1 and θ_2 over the input and first oscillators, respectively. It leads to the following equalities for the photocurrent operators:

$$\hat{i}_{in} = \beta \sin \theta_1 (\hat{y}_{in} + g_4\hat{x}_1) + \beta \cos \theta_1 \hat{x}_{in}, \quad (5.6)$$

$$\hat{i}_1 = \beta \sin \theta_2 (\hat{y}_1 + g_1\hat{x}_2 + g_4\hat{x}_{in}) + \beta \cos \theta_2 \hat{x}_1, \quad (5.7)$$

where β is the amplitude of the homodyne detector's local oscillator. Such measurements, due to the entanglement of the resource state, lead to a change in the quadrature components of the second oscillator:

$$\hat{x}'_2 = \left(\frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} \right) \hat{x}_{in} + \frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \hat{y}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g_1} + \frac{i_{1,m}}{\beta g_1 \sin \theta_2} - \frac{i_{in,m} \cot \theta_2}{\beta g_1 g_4 \sin \theta_1}, \quad (5.8)$$

$$\hat{y}'_2 = -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} \hat{x}_{in} - \frac{g_1}{g_4} \hat{y}_{in} + \hat{y}_2 + \frac{i_{in,m} g_1}{\beta g_4 \sin \theta_1}. \quad (5.9)$$

Here, we replaced the operators of photocurrents with c -numbers corresponding to the results of the given measurement: $i_{1,m}$ and $i_{in,m}$. Let us rewrite this transformation in a matrix form:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_2 \\ \hat{y}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} & \frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \\ -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} & -\frac{g_1}{g_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i_{1,m}}{\beta g_1 \sin \theta_2} - \frac{i_{in,m} \cot \theta_2}{\beta g_1 g_4 \sin \theta_1} \\ \frac{i_{in,m} g_1}{\beta g_4 \sin \theta_1} \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

It is well known that this Gaussian transformation is not arbitrary for the unit weight coefficients. To ensure arbitrariness, it is necessary to perform a similar operation again on another pair of nodes. Since our goal is to ensure arbitrariness for any g_j , and for $g_j = 1$ it is not arbitrary, the scheme needs to be complemented.

The operation on the second pair of nodes, up to weight coefficients of the CZ gate, repeats the operation on the first pair of nodes. Thus, the second part of the scheme operates similar to the transformation (5.10), where the input data are the quadratures x'_2 and y'_2 . At the output of the scheme, the c -number components of the quadratures of the field are compensated by displacement, depending on the values of the measured photocurrents. We introduce a new notation:

$$\cot \theta'_2 = \frac{\cot \theta_2}{g_4^2}, \quad \cot \theta'_4 = \frac{\cot \theta_4}{g_2^2}. \quad (5.11)$$

Note that in the new notation, the mathematical expression for the input-output transformation will depend not on the weight coefficients themselves, but on their ratio. It is convenient for further analysis. Thus, the operation carried out by our scheme has the form

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out} \\ \hat{y}_{out} \end{pmatrix} = U(\theta_1, \theta'_2, \theta_3, \theta'_4) \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \delta \hat{\mathbf{e}}_0(\theta_3, \theta'_4). \quad (5.12)$$

Here, the desired transformation performed on the input state is described by the matrix

$$U(\theta_1, \theta'_2, \theta_3, \theta'_4) = \begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_3 \cot \theta'_4 - 1}{g_3/g_2} & \frac{\cot \theta'_4}{g_3/g_2} \\ -\frac{g_3 \cot \theta_3}{g_2} & -\frac{g_3}{g_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_1 \cot \theta'_2 - 1}{g_1/g_4} & \frac{\cot \theta'_2}{g_1/g_4} \\ -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} & -\frac{g_1}{g_4} \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

and the transformation error associated with the finite squeezing of the oscillators is described by the vector

$$\delta \hat{\mathbf{e}}_0(\theta_3, \theta'_4) = \begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_3 \cot \theta'_4 - 1}{g_3/g_2} & \frac{\cot \theta'_4}{g_3/g_2} \\ -\frac{g_3 \cot \theta_3}{g_2} & -\frac{g_3}{g_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{y}_1 \\ g_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{y}_3 \\ g_3 \\ \hat{y}_4 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

It should be noted that in the scheme under consideration, the transformation error $\delta \hat{\mathbf{e}}_0$ depends only on the angles θ_3 and θ'_4 . This is because measuring the second pair of resource oscillators transforms the error from the first pair of resource oscillators.

5.1.2 Universality of the transformation with arbitrary weight coefficients

First, we need to find out if the Gaussian transformation U is arbitrary. That is, whether it can be used to transform any Gaussian state into any other Gaussian state. It was shown in [47] that the U will be arbitrary when weight coefficients of the CZ gate are unity. However, we need to check whether this property is preserved for arbitrary non-unity weight coefficients. To do this, we will show that it is possible to choose the phases of local oscillators of homodyne detectors in such a way that the matrix $U(\theta_1, \theta'_2, \theta_3, \theta'_4)$ is equal to any given arbitrary symplectic matrix, i.e.

$$U(\theta_1, \theta'_2, \theta_3, \theta'_4) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

where the coefficients of matrix satisfy the condition

$$ad - bc = 1. \quad (5.16)$$

Taking into account the explicit form (5.13) of the matrix U , the Eq. (5.15) is equivalent to the system of equations

$$\frac{g_2 g_4}{g_1 g_3} (\cot \theta_1 \cot \theta'_2 - 1) (\cot \theta_3 \cot \theta'_4 - 1) - \frac{g_1 g_2}{g_3 g_4} \cot \theta_1 \cot \theta'_4 = a, \quad (5.17)$$

$$\frac{g_2 g_4}{g_1 g_3} \cot \theta'_2 (\cot \theta_3 \cot \theta'_4 - 1) - \frac{g_1 g_2}{g_3 g_4} \cot \theta'_4 = b, \quad (5.18)$$

$$-\frac{g_3 g_4}{g_1 g_2} (\cot \theta_1 \cot \theta'_2 - 1) \cot \theta_3 + \frac{g_1 g_3}{g_2 g_4} \cot \theta_1 = c, \quad (5.19)$$

$$-\frac{g_3 g_4}{g_1 g_2} \cot \theta'_2 \cot \theta_3 + \frac{g_1 g_3}{g_2 g_4} = d. \quad (5.20)$$

Due to the condition (5.16) on the matrix coefficients, any one of these equations can be derived from the three remaining. Thus, there are only three independent equations in four variables. The system of Eqs. (5.17)–(5.20) is not uniquely solved, and one of the phases can be chosen as a free

parameter, which we can change. We can see that for $\theta'_2 = \pi/2$ or $\theta_3 = \pi/2$ the Eq. (5.20) turns into equality so that we lose the ability to solve the system for an arbitrary matrix. Therefore, the phases θ'_2 and θ_3 can not be chosen as a free parameter. Of the remaining two phases, the phase θ'_4 is the best candidate to be a free parameter, since the transformation error depends on it. In the future, with the right choice of the phase θ'_4 , we will be able to minimize the transformation error.

For some arbitrary fixed value of phase θ'_4 , the solution of the system (5.17)–(5.20) exists for the remaining phases and has the form

$$\cot \theta_1 = \frac{c}{d} + \frac{\left(\frac{g_1 g_3}{g_2 g_4} - d\right) \frac{g_3}{g_2}}{\left(\frac{g_3^2}{g_2^2} b + d \cot \theta'_4\right) \frac{g_1}{g_4} d}, \quad (5.21)$$

$$\cot \theta'_2 = -\frac{g_1 g_2}{g_3 g_4} \left(\frac{g_3^2}{g_2^2} b + d \cot \theta'_4 \right), \quad (5.22)$$

$$\cot \theta_3 = \frac{d - \frac{g_1 g_3}{g_2 g_4}}{\frac{g_3^2}{g_2^2} b + d \cot \theta'_4}. \quad (5.23)$$

Thus, for any arbitrary fixed value θ'_4 , we can choose the phases of the local oscillators θ_1 , θ'_2 , and θ_3 in such a way that the matrix (5.13) is equal to any given arbitrary symplectic matrix. This means that the transformation given by the matrix (5.13) is arbitrary.

5.1.3 Single-mode transformation error on a weighted cluster

Let us estimate the errors in the considered scheme of one-way computations. To do this, we pass from the error vector to one consisting of variances $\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle$. We assume resource oscillators to be statistically independent and squeezed equally, i.e. $\langle \delta \hat{y}_j^2 \rangle \equiv \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ for $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Then, the vector of variances has the form:

$$\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1^2} \left(\frac{\cot \theta_3 \cot \theta'_4 - 1}{g_3/g_2} \right)^2 + \left(\frac{\cot \theta'_4}{g_3/g_2} \right)^2 + \frac{1}{g_3^2} \\ \frac{1}{g_1^2} \left(\frac{g_3 \cot \theta_3}{g_2} \right)^2 + \frac{g_3^2}{g_2^2} + 1 \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (5.24)$$

Note that the transformation errors directly depend on the weight coefficients g_1 and g_3 . On the other hand, the ratio between weight coefficients g_3/g_2 determines which type of operation at certain phase values is performed. Therefore, it makes sense to compare the transformation errors only for a fixed ratio g_3/g_2 , i.e. to compare the errors of the same operations. To achieve it, let us substitute solutions (5.21)–(5.23) into Eq. (5.24). As a result, we get the error variance vector:

$$\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_3^2} + \left(\frac{g_2}{g_3} \right)^2 \cot^2 \theta'_4 + \frac{g_2^2 \left(b \frac{g_4}{g_1} + \frac{g_2}{g_3} \cot \theta'_4 \right)^2}{g_3^2 g_4^2 \left(b + d \left(\frac{g_2}{g_3} \right)^2 \cot \theta'_4 \right)^2} \\ 1 + \frac{1}{\left(\frac{g_2}{g_3} \right)^2} + \frac{\left(d \frac{g_2}{g_3} \frac{g_4}{g_1} - 1 \right)^2}{g_4^2 \left(b + d \left(\frac{g_2}{g_3} \right)^2 \cot \theta'_4 \right)^2} \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (5.25)$$

This vector depends on the implemented operation (on the values of d and b), on the phase θ'_4 and on the value of the weight coefficients of the cluster state g_1, g_2, g_3, g_4 .

The dependence of the error on the weight coefficients of the cluster state means that for each transformation (for each b and d) there is a cluster state configuration that yields the minimal error. One can use this feature to construct non-universal quantum calculators capable of solving specific tasks. Here and below, we will be interested in the errors of universal quantum computation. Therefore, we are leaving out of consideration calculators for local problems (which are usually called quantum simulators). Unfortunately, in practice, when building universal computer, we cannot choose weight coefficients for each transformation, since this would require us to rebuild the cluster generation scheme each time. In reality, we have a cluster state with fixed weight coefficients. We need to choose the weight coefficients so that any transformation have a small error. Our goal is to identify such weight coefficients.

From the Eq. (5.25), one can see that if we impose the conditions on the weight coefficients: $g_1 \gg g_4$, $g_2 \gg g_3$, $g_3 \gg 1$, $g_4 \gg 1$, and set θ'_4 equal to $\pi/2$, then the error will be proportional to the following vector:

$$\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle, \quad (5.26)$$

That is, we get the minimum computation error, which does not depend on the implemented operations (on b and d). Unfortunately, in experiments, we cannot make the weight coefficients infinitely large, since it require infinite squeezed resource states. At the moment, the squeezing that has been demonstrated experimentally is -15 dB [11]. In Sec. 2.2, we showed that with such squeezing of the resource oscillators, we can obtain values of weight coefficients in the range $g \in [0, 5]$. It is in this range that we will vary the weight coefficients for further optimization. With this limitation, the fulfilment of the requirements lead to the evaluation (5.26) is not achievable, so we need to optimize differently. However, at the same time, we should rely on the ratios obtained above.

Let us compare the errors with different weight coefficients. We consider the $\|\cdot\|_\infty$ norm as a measure of errors. This norm has the form $\|\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle\|_\infty = \max[\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle_1, \langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle_2]$. As we have discussed, to minimize the error, we need to require the conditions: $g_1 \gg g_4$, $g_2 \gg g_3$, $g_3 \gg 1$, $g_4 \gg 1$ and $\theta'_4 = \pi/2$. From the first two inequalities, we can conclude that g_1 and g_2 should be chosen as maximum, i.e. $g_1 = g_2 = 5$. It follows from the remaining conditions that g_3 and g_4 should be large enough (compared to unity), so we chose $g_3 = g_4 = 4$. As before, we investigate the effect of weight coefficients on transformation errors for $\theta'_4 = \pi/2$. It should be noted that one can carry out a multidimensional optimization to find the global minimum of computation errors. However, this is a computationally difficult problem. In addition, the global minimum may lie outside the admissible weight coefficients. In this regard, we limited ourselves to the selection of weight coefficients of the cluster state, which provides a smaller error for a larger number of operations.

We first compare the errors for computation on a cluster state with the optimized weight coefficients ($g_1 = g_2 = 5$ and $g_3 = g_4 = 4$) with the case when an unweighted cluster state is

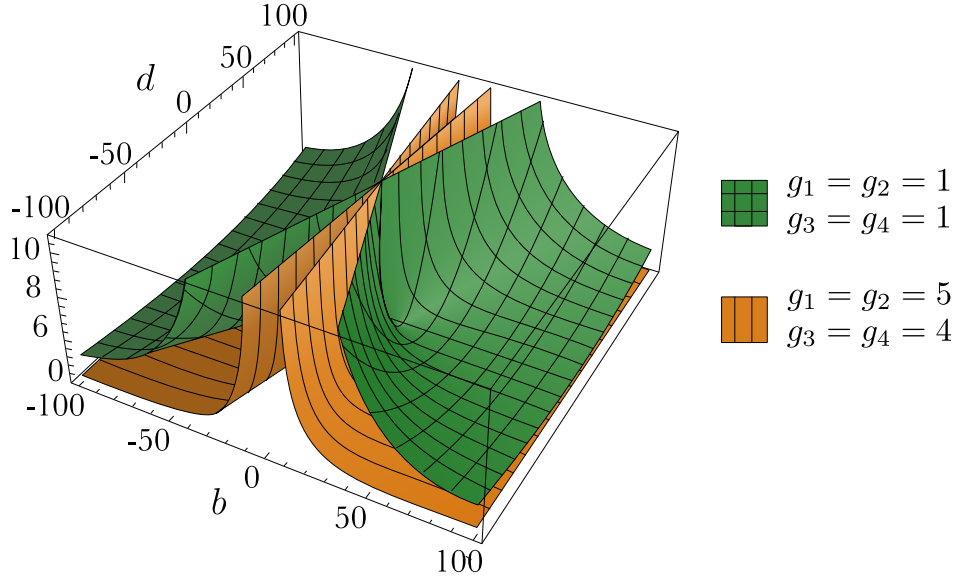


Figure 5.2: Distribution of errors $\|\langle\delta\hat{e}_0^2\rangle\|_\infty/\langle\delta\hat{y}_s^2\rangle$ depending on the implemented single-mode transformation, i.e. it depending on b and d (see Eq. (5.15)). The graph shows two error surfaces corresponding to computations on two cluster states. The lower surface corresponds to the case of computations on a weighted optimized cluster state ($g_1 = g_2 = 5, g_3 = g_4 = 4$). The upper surface corresponds to the computational errors on the unweighted cluster state ($g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 1$).

used, i.e. a cluster state with unit weight coefficients ($g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 1$). It is this state that is often considered by researchers as a universal state for implementing quantum Gaussian transformations [47,88]. Computation errors when using these two cluster states are shown in Fig. 5.2. One can see that using a weighted cluster state with optimized weight coefficients, the error will always be lower than with the same computation on an unweighted cluster state. In other words, we have found that a weighted cluster state with optimized weight coefficients is better suited for the computation.

After we made the optimization of errors due to the weight coefficients, we can proceed to optimization due to the phase θ'_4 of the homodyne detector. Until now, we have considered only the simplest case, when $\theta'_4 = \pi/2$. As follows from Eq. (5.26), this case is optimal if the weight coefficients obey the conditions: $g_1 \gg g_4, g_2 \gg g_3, g_3 \gg 1, g_4 \gg 1$. As we found out, in reality, the weight coefficients are very limited in value. This limitation means that we cannot achieve the minimum error limit (5.26). This means that the value of phase $\theta'_4 = \pi/2$ is not necessarily optimal. It follows from Eq. (5.25) that by selecting phase θ'_4 for each specific transformation (for specific b and d), we can minimize the errors. It is this optimization that was carried out by us below.

The optimization process consists in finding the minimum value of the function $\|\langle\delta\hat{e}_0^2\rangle\|_\infty = h(\theta'_4, b, d)$ by the parameter θ'_4 depending on b and d . As a result of the optimization, we obtain the dependence of the optimal phase on the operation, i.e. $\theta'_{4,min} = f(b, d)$. Fig. 5.3 shows the error surfaces of computation errors on the cluster state with weight coefficients $g_1 = g_2 = 5, g_3 = g_4 = 4$ when phase $\theta'_4 = \pi/2$ and when phase is optimized depending on the operation

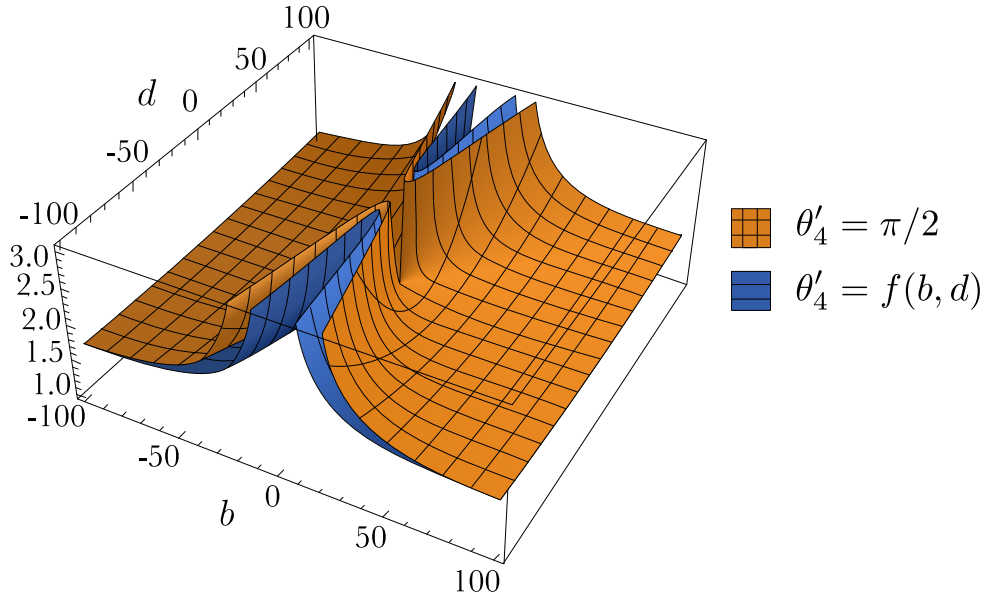


Figure 5.3: Distribution of single-mode transformation errors $\|\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle\|_\infty / \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ depending on b and d (see Eq. (5.15)). Transformations performed on the cluster state with optimized weight coefficients ($g_1 = g_2 = 5$, $g_3 = g_4 = 4$). On the diagram, the upper surface corresponds to the case when the phase of the homodyne detector is kept constant $\theta'_4 = \pi/2$. The lower surface corresponds to the case when the phase is optimised for the performed transformation (for b and d).

($\theta'_4 = \theta'_{4,min} = f(b, d)$). It can be seen from the figure that the errors of single-mode transformation at optimized phase θ'_4 are always smaller than the errors at $\theta'_4 = \pi/2$. In other words, the error of any single-mode operation can be further decreased by optimizing the phase of the homodyne detector.

To demonstrate the superiority of our optimized scheme (with optimized weight coefficients and optimized phase θ'_4), let us compare it with the case of computations on a cluster state with the maximum weight coefficients ($g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 5$) at $\theta'_4 = \pi/2$. Fig. 5.4 shows the errors obtained by transformations in these two schemes. It can be seen from the graph that the error in the optimized case of computations is less than the error obtained when using the cluster with maximum weight coefficients. It is important to note that to create a cluster with large weight coefficients, we need to implement a squeezing transformation with a large squeezing coefficient (see Sec. 2.2). To perform such a transformation, we need an additional resource. Without loss of generality, we can say that additional energy is required: the larger squeezing coefficient, the more energy is needed. All this means that it takes more energy to create a cluster with maximum weight coefficients than to create an optimized cluster state.

Thus, we can conclude that the smart use of the available physical resource (proper distribution of weight coefficients and smart choice of phases of the homodyne measurement) helps to reduce the quantum computation error.

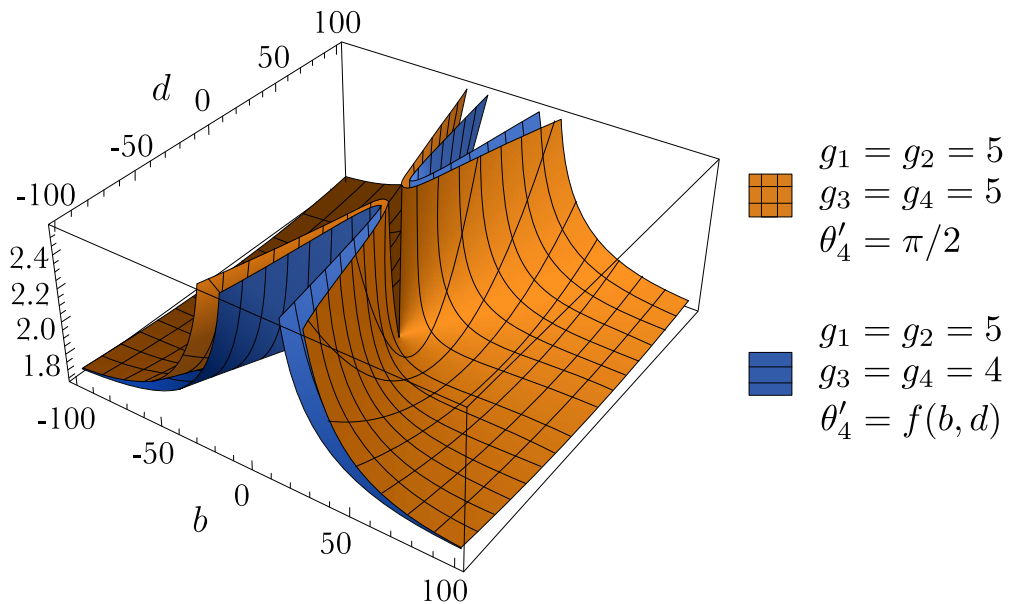


Figure 5.4: Distribution of single-mode transformation errors $\|\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle\|_\infty / \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ depending on b and d (see Eq. (5.15)). On the diagram, the upper surface corresponds to computations on the cluster state with weight coefficients $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 5$ and phase $\theta'_4 = \pi/2$. Lower surface corresponds to computations on the cluster state with optimized weight coefficients $g_1 = g_2 = 5$, $g_3 = g_4 = 4$ and optimized homodyne detector phase $\theta'_4 = f(b, d)$.

5.2 Single-mode transformation with cubic phase gate

As we have shown in the previous section, the single-mode Gaussian transformation on a linear 4-node weighted cluster state is arbitrary. Also, it is possible to reduce the error of this transformation by optimizing the weight coefficients of the cluster state. However, part of the operations still has significant errors.

In Chapter 2.4 we have shown that it is possible to reduce the teleportation error by using the cubic phase gate to prepare a non-Gaussian resource state. In this section, we will apply this technique to decrease the error of the arbitrary single-mode Gaussian transformation scheme on a 4-node cluster state.

5.2.1 Transformation scheme with a cubic phase gate

In order to further decrease the transformation error, we include the non-Gaussian state as the second node of the cluster (Fig. 5.5(a)). It can be seen from Eq. (5.24) that the expression for the x -quadrature error has a term depending on the phase θ'_4 . We cannot suppress this term by the CZ gate weight coefficients. It arises as a consequence of the finite squeezing of the second resource oscillator, which is why we replace the second node with a non-Gaussian resource.

As in the previous scheme, we use oscillators squeezed in y -quadrature as a resource for cluster state preparation. Their quadratures are described by the Eq. (5.1). As shown on Fig. 5.5(b), a

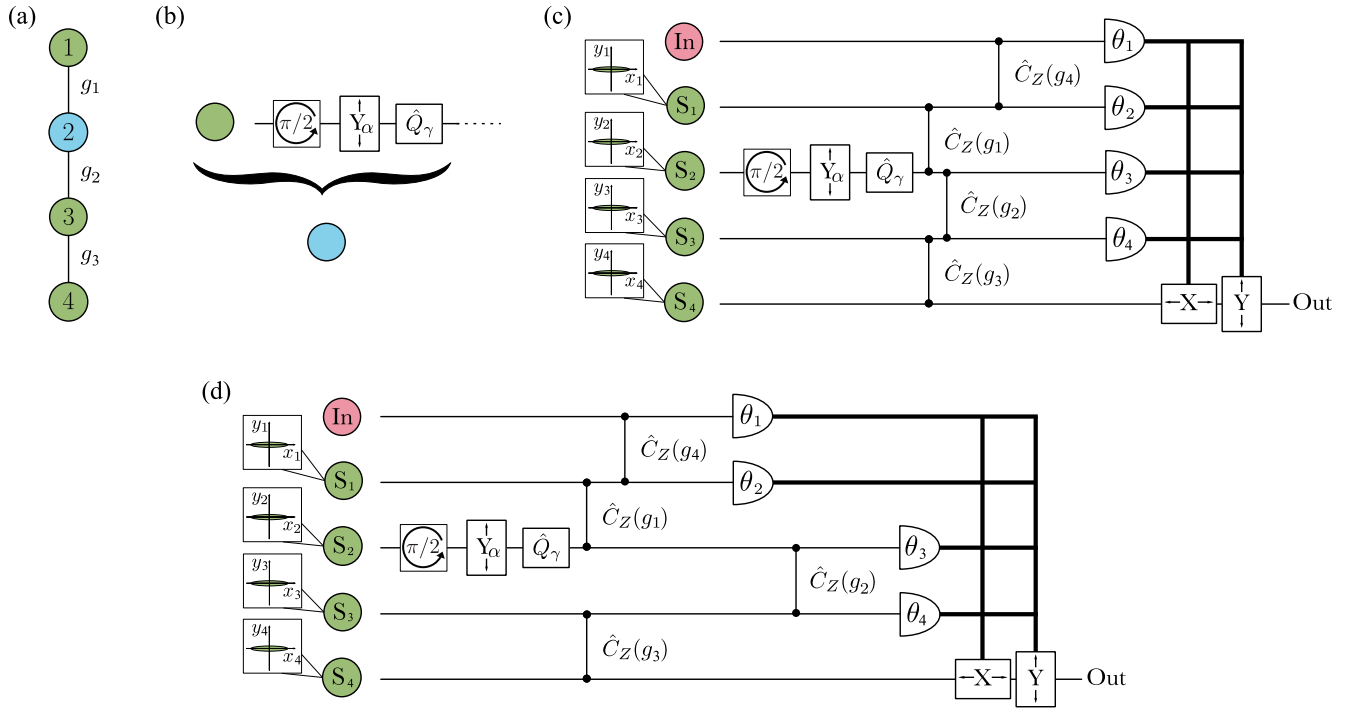


Figure 5.5: (a) Configuration of the cluster state used as a resource for computation: Gaussian nodes are shown in green, non-Gaussian nodes are shown in blue. (b) Scheme of preparing a non-Gaussian resource state. (c) Scheme for implementing the arbitrary single-mode Gaussian operation on a linear weighted four-node cluster state using a cubic phase gate. (d) Scheme of implementation of arbitrary single-mode Gaussian operation on a pair of two-node cluster states using a cubic phase gate. In the diagram: Y_α is operations that displace y -quadrature on a real value α , \hat{Q}_γ is the cubic phase gate with nonlinearity γ .

non-Gaussian resource is prepared by sequentially applying the phase shift on $\pi/2$:

$$\hat{R}_{\pi/2,2} = e^{i\frac{\pi}{2}\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2}, \quad (5.27)$$

y -quadrature displacement on $\alpha > 0$ (3.3) and a cubic phase gate (3.5). Thus, the second recourse oscillator will proceed to the non-Gaussian state, which amplitude is described by the equation

$$\hat{a}_2 = -\hat{y}_2 + 3\gamma(\alpha + \hat{x}_2)^2 + i(\alpha + \hat{x}_2). \quad (5.28)$$

The cubic phase gate action deforms the uncertainty region of the squeezed in x -quadrature state in such a way that a parabola is formed on the phase plane. However, when we displace y -quadrature by a positive value α that satisfies condition $\alpha^2 \gg \langle \hat{x}_2^2 \rangle$, the quadrature values of the second oscillator will lie in the first quadrant of the phase plane. In other words, only one of the branches of the parabola will remain on the phase plane. We discussed it in more detail in Sec. 3.1.

As in the previous section, let us start with the analysis of the transformation performed on the first pair of resource states. The first Gaussian and second non-Gaussian resource oscillators

are entangled using the CZ transformation with the weight coefficient g_1 , and the input state is entangled with the first resource oscillator by the CZ gate with a weight coefficient g_4 . After the entanglement, the amplitudes of the oscillators are described by the following equations:

$$\hat{a}'_{in} = \hat{x}_{in} + i(\hat{y}_{in} + g_4\hat{x}_1), \quad (5.29)$$

$$\hat{a}'_1 = \hat{x}_1 + i(\hat{y}_1 - g_1\hat{y}_2 + 3g_1\gamma(\alpha + \hat{x}_2)^2 + g_4\hat{x}_{in}), \quad (5.30)$$

$$\hat{a}'_2 = -\hat{y}_2 + 3\gamma(\alpha + \hat{x}_2)^2 + i(\alpha + \hat{x}_2 + g_1\hat{x}_1). \quad (5.31)$$

We can see that the first resource oscillator is now containing the nonlinearity from the non-Gaussian oscillator due to entanglement. We then perform homodyne measurements with the local oscillator's phases θ_1 and θ_2 over the input and first resource oscillators, respectively. The photocurrent operators will be equal to

$$\hat{i}_{in} = \beta \sin \theta_1 (\hat{y}_{in} + g_4\hat{x}_1) + \beta \cos \theta_1 \hat{x}_{in}, \quad (5.32)$$

$$\hat{i}_1 = \beta \cos \theta_2 \hat{x}_1 + \beta \sin \theta_2 (\hat{y}_1 - g_1\hat{y}_2 + 3g_1\gamma(\alpha + \hat{x}_2)^2 + g_4\hat{x}_{in}), \quad (5.33)$$

where β is the amplitude of the homodyne detector's local oscillator. Due to the entanglement of the resource state, such a measurement lead to a change in the quadrature components of the second oscillator field:

$$\hat{x}'_2 = \left(\frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} \right) \hat{x}_{in} + \frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \hat{y}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g_1} + \frac{i_{1,m}}{\beta g_1 \sin \theta_2} - \frac{i_{in,m} \cot \theta_2}{\beta g_1 g_4 \sin \theta_1}, \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}'_2 = & -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} \hat{x}_{in} - \frac{g_1}{g_4} \hat{y}_{in} + \frac{i_{in,m} g_1}{\beta g_4 \sin \theta_1} \\ & + \frac{1}{\sqrt{3\gamma}} \sqrt{\frac{i_{1,m}}{\beta g_1 \sin \theta_2} - \frac{i_{in,m} \cot \theta_2}{\beta g_1 g_4 \sin \theta_1} + \left(\frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} \right) \hat{x}_{in} + \frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \hat{y}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g_1} + \hat{y}_2}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Here, as in the previous section, we replaced the operators of photocurrents with c -numbers corresponding to the results of the given measurement: $i_{1,m}$ and $i_{in,m}$. In contrast to similar Eqs. (5.8) and (5.9) for a Gaussian cluster, due to a non-Gaussian resource a square root in Eq. (5.35) for y -quadrature arises that determines the transformation error. Note that, as for the teleportation considered in Sec. 3.1, due to the large displacement $\alpha > 0$, it is necessary to take into account only positive values of the square root. To simplify further equations, we introduce a new notation:

$$I_m = \frac{i_{1,m}}{\beta g_1 \sin \theta_2} - \frac{i_{in,m} \cot \theta_2}{\beta g_1 g_4 \sin \theta_1}. \quad (5.36)$$

We can decompose the square root in Eq. (5.35) in a series in terms of

$$\frac{1}{I_m} \left[\left(\frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} \right) \hat{x}_{in} + \frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \hat{y}_{in} - \frac{\hat{y}_{s,1}}{g_1} + \hat{y}_{s,2} \right], \quad (5.37)$$

keeping only the first term in the expansion:

$$\begin{aligned} \hat{y}'_2 = & -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} \hat{x}_{in} - \frac{g_1}{g_4} \hat{y}_{in} + \frac{i_{in,m} g_1}{\beta g_4 \sin \theta_1} + \sqrt{\frac{I_m}{3\gamma}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{12\gamma I_m}} \left[\left(\frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} \right) \hat{x}_{in} + \frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \hat{y}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g_1} + \hat{y}_2 \right]. \end{aligned} \quad (5.38)$$

The termination of the series is correct under the assumption that all moments of the expansion parameter are small. For Gaussian input states, it suffices to satisfy the inequalities

$$3\gamma\alpha^2 \gg \left(\frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} \right) \langle \hat{x}_{in} \rangle + \left(\frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \right) \langle \hat{y}_{in} \rangle, \quad (5.39)$$

$$(3\gamma\alpha^2)^2 \gg \left(\frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} \right)^2 \langle \hat{x}_{in}^2 \rangle + 2 \left(\frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} \right) \left(\frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \right) \langle \hat{x}_{in} \rangle \langle \hat{y}_{in} \rangle \\ + \left(\frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \right)^2 \langle \hat{y}_{in}^2 \rangle + \frac{\langle \hat{y}_1^2 \rangle}{g_1^2} + \langle \hat{y}_2^2 \rangle. \quad (5.40)$$

Note that this requirement limits the protocol's applicability. Below, we will discuss in detail how significant this limitation is.

Thus, after measurements over the oscillators in the input and first channels, the quadratures of the second oscillator take a form

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_2 \\ \hat{y}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12\gamma I_m}} & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} & \frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \\ -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} & -\frac{g_1}{g_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ \frac{\hat{y}_2}{\sqrt{12\gamma I_m}} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} I_m \\ \frac{i_{in,m}}{\beta g_2 \sin \theta_1} + \sqrt{\frac{I_m}{3\gamma}} \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Let us compare the resulting expression with the Eq. (5.10) for the transformation on a pair of Gaussian resource oscillators. One can see that the nonlinearity of the cubic phase gate leads to the appearance of an additional deformation (the matrix before the square brackets on the right side of the Eq. (5.41)). At the same time, the deformation coefficient depends on the measured values of the photocurrents, which is why we cannot control it. Therefore, we need to compensate for this deformation. Otherwise, it will distort the result, and not only will we not reduce the transformation error, but we can significantly increase the error.

The operation on the second pair of nodes does not contain nonlinearity, so it is similar to the transformation (5.10) up to weight coefficients. At the output of the scheme, the c -number components of the quadratures of the field are compensated by displacement, depending on the values of the measured photocurrents. In addition, we explore notation (5.11), as in the previous section. Then the transformation performed on the input oscillator has the form:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out} \\ \hat{y}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_3 \cot \theta'_4 - 1}{g_3/g_2} & \frac{\cot \theta'_4}{g_3/g_2} \\ -\frac{g_3 \cot \theta_3}{g_2} & -\frac{g_3}{g_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12\gamma I_m}} & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_1 \cot \theta'_2 - 1}{g_1/g_4} & \frac{\cot \theta'_2}{g_1/g_4} \\ -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} & -\frac{g_1}{g_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ \frac{\hat{y}_2}{\sqrt{12\gamma I_m}} \end{pmatrix} \right] \\ + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_3}{g_3} \\ \hat{y}_4 \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

Now let us find if it is possible to compensate for the deformation that occurs due to the presence of the cubic phase state. This deformation leads to a distortion of the oscillator basis at the output of the first part of the scheme. Therefore, knowing the measurement results in the first part of the scheme, we have the opportunity to remove this deformation by correcting the measurement basis in the second part of the scheme. For making it, we rewrite the Eq. (5.42), including the

deformation in the matrix of the second part of the protocol:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out} \\ \hat{y}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g_2}{g_3} \left[\left(\cot \theta_3 + \frac{1}{\sqrt{12\gamma I_m}} \right) \cot \theta_4 - 1 \right] & \frac{g_2}{g_3} \cot \theta_4 \\ -\frac{g_3}{g_2} \left(\cot \theta_3 + \frac{1}{\sqrt{12\gamma I_m}} \right) & -\frac{g_3}{g_2} \end{pmatrix} \\ \times \left[\begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2 - 1}{g_1/g_4} & \frac{\cot \theta_2}{g_1/g_4} \\ -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} & -\frac{g_1}{g_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ \frac{\hat{y}_2}{\sqrt{12\gamma I_m}} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_3}{g_3} \\ \hat{y}_4 \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

If we introduce the new phase θ'_3 that fulfils the relation

$$\cot \theta'_3 = \cot \theta_3 + \frac{1}{\sqrt{12\gamma I_m}}, \quad (5.44)$$

then the transformation over the input oscillator will be determined by the matrix (5.13) depending on θ'_3 . In other words, according to the measurements results on the input and the first resource oscillators, we can adjust the phase θ_3 to compensate for the additional deformation. Thus, we can perform the given operation without additional distortion. As a result, in the modified scheme, the transformation performed on the input state is the same as the transformation to Eq. (5.12), but it has a different error:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out} \\ \hat{y}_{out} \end{pmatrix} = U(\theta_1, \theta'_2, \theta'_3, \theta'_4) \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \delta \hat{\mathbf{e}}(\theta'_3, \theta'_4). \quad (5.45)$$

Here the matrix U is defined by the Eq. (5.13), and the error is given by

$$\delta \hat{\mathbf{e}}_0(\theta'_3, \theta'_4) = \begin{pmatrix} \frac{\cot \theta'_3 \cot \theta'_4 - 1}{g_3/g_2} & \frac{\cot \theta'_4}{g_3/g_2} \\ -\frac{g_3 \cot \theta'_3}{g_2} & -\frac{g_3}{g_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ \frac{\hat{y}_2}{\sqrt{12\gamma I_m}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_3}{g_3} \\ \hat{y}_4 \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

Thus, the conversion error depends not only on the phases θ'_3 and θ'_4 , but also on the measured value I_m .

We have found that the considered scheme with a cubic phase gate implements the same transformation as the scheme with a Gaussian cluster considered in the previous section. Thus, we do not need to justify the arbitrariness of this transformation. However, the errors of these two operations differ significantly from each other. Next, we compare the transformation errors of the two schemes and evaluate the limitations of the scheme with a cubic phase gate.

5.2.2 Error of transformation with cubic phase gate

Let us now investigate how the error in the modified scheme has changed. As in the previous section, we assume the Gaussian resource states to be squeezed equally ($\langle \delta \hat{y}_j^2 \rangle \equiv \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ for $j \in 1, 2, 3, 4$). Then, the variances of the error vector are following:

$$\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1^2} \left(\frac{\cot \theta'_3 \cot \theta'_4 - 1}{g_3/g_2} \right)^2 + \frac{1}{12\gamma I_m} \left(\frac{\cot \theta'_4}{g_3/g_2} \right)^2 + \frac{1}{g_3^2} \\ \frac{1}{g_1^2} \left(\frac{g_3 \cot \theta'_3}{g_2} \right)^2 + \frac{1}{12\gamma I_m} \frac{g_3^2}{g_2^2} + 1 \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (5.47)$$

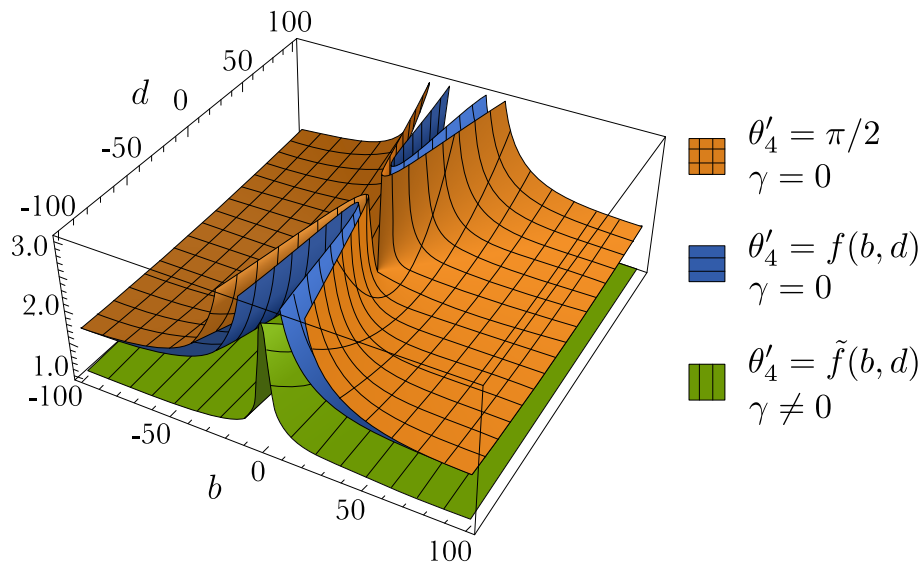


Figure 5.6: Distribution of single-mode transformation errors $\|\langle \delta \hat{e}_0^2 \rangle\|_\infty / \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$. The graph demonstrates three error distributions depending on the implemented operation, i.e. it depending on b and d (see Eq. (5.15)). All three distributions are calculated for optimized weight coefficients ($g_1 = g_2 = 5$, $g_3 = g_4 = 4$). The orange and blue surfaces correspond to errors for the scheme without a cubic phase gate ($\gamma = 0$): the orange surface corresponds to the case of a fixed phase value $\theta'_4 = \pi/2$, the blue surface corresponds to the case when the angle θ'_4 optimization is performed ($\theta'_4 = \tilde{f}(b, d)$). The green surface corresponds to the error of the scheme using the cubic phase gate ($\gamma \neq 0$) and θ'_4 is being optimized.

Comparing Eqs. (5.24) and (5.47), one can see that the second term in the expressions for quadrature errors is smaller in $12\gamma I_m$. The average value of I_m is proportional to the displacement α of resource state quadrature, therefore, with a sufficient displacement α , we can significantly decrease the contribution to the error from these terms.

As in the previous section, we consider the norm $\|\cdot\|_\infty$ as a measure of transformation errors. We estimate the value of I_m as its average value, i.e. $I_m = \langle I_m \rangle \approx 3\gamma\alpha^2$. We used a relatively small cubic phase gate coefficient $\gamma = 0.1$ [89,94] and the displacement $\alpha = 5\sqrt{5}$ (i.e. $12\gamma I_m = 45$) in the calculations. This displacement satisfies condition $\alpha^2 \gg \langle \hat{x}_{s,2}^2 \rangle$ required for the correct operation of the protocol and is implemented in practice (see Sec. 3.1). Fig. 5.6 demonstrates a comparison of error surfaces for a scheme without and with a cubic phase gate. One can see, that the error of the scheme with a cubic phase gate turns out to be smaller for the entire range of transformations. In addition, it suppresses the increase of the error in the vicinity of $b = 0$. Thus, the inclusion in the cluster of a non-Gaussian resource gotten using a cubic phase gate further reduces the computation error.

Let us remind that the proposed protocol can operate under the condition of low nonlinearity of the cubic phase gate. We can compensate for a small value of γ by a large value of displacement

α . This is an important advantage, since increasing the transformation coefficient γ of the cubic phase gate is a difficult experimental problem.

5.2.3 Evaluating of the optimization efficiency of one-way quantum computation

In the previous sections, we have shown that one-way computations on a four-node cluster state can be optimized by choosing weight coefficients as well as the use of non-Gaussian transformations. The optimization leads to decreasing of the computation errors. Now, we need to discuss how effective these optimizations are. What is the gain in decreasing errors if we apply all the proposed optimizations?

To answer these questions, we first need to understand how the resulting errors can be compared with each other and what advantages we can expect from the proposed optimization. To do this, we recall the quantum error correction procedure (see Sec. 1.2.2). In one-way quantum computations, the error displaces the quadrature of the state under computation by a small value proportional to the squeezed quadrature variance of the resource oscillator. In [13], the authors proposed a method for correcting errors of small quadrature displacements using the so-called GKP states. In paper [12], this method was theoretically applied to the problem of error correction of one-way computation. In [54], we refined the error correction method for one-way computations taking into account the noise inherent in the error correction procedure itself, i.e. non-ideal GKP states. Omitting all the theoretical details, we can conclude the probability that the error has not been corrected is as follows [54]:

$$P_{err}(x_{er}, y_{er}) = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sqrt{\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle} \left(x_{er} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\sqrt{\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle} (y_{er} + \sqrt{5} + 1)} \right), \quad (5.48)$$

where $x_{er}\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ is the error variance of x -quadrature of the output target oscillator, $y_{er}\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ is the error variance of the y -quadrature. The arguments of the functions erf are determined by two factors: the variances of the transformation errors of each quadrature (the first terms in the denominators of the arguments) and the error added when performing error correction. The latter factor is also the sum of two contributions: the error from the performing of operation SUM(1) and the error from the broadening of the GKP state peaks. Note that the order of the correction procedure determines the distinction of x - and y -quadrature errors. The error function $\operatorname{erf}(1/z)$ is monotonically decreasing, so the greater the value of error variance of quadratures, the more likely the errors have not been corrected.

As can be seen from the definition of the function $P_{err}(x_{er}, y_{er})$, it reveals the quality of computation and characterizes its scale. Accordingly, it is convenient to utilize this function as a measure for comparing optimized and non-optimized computations and for evaluating the efficiency of the optimization procedure. Fig. 5.7 demonstrates the ratios of the error proba-

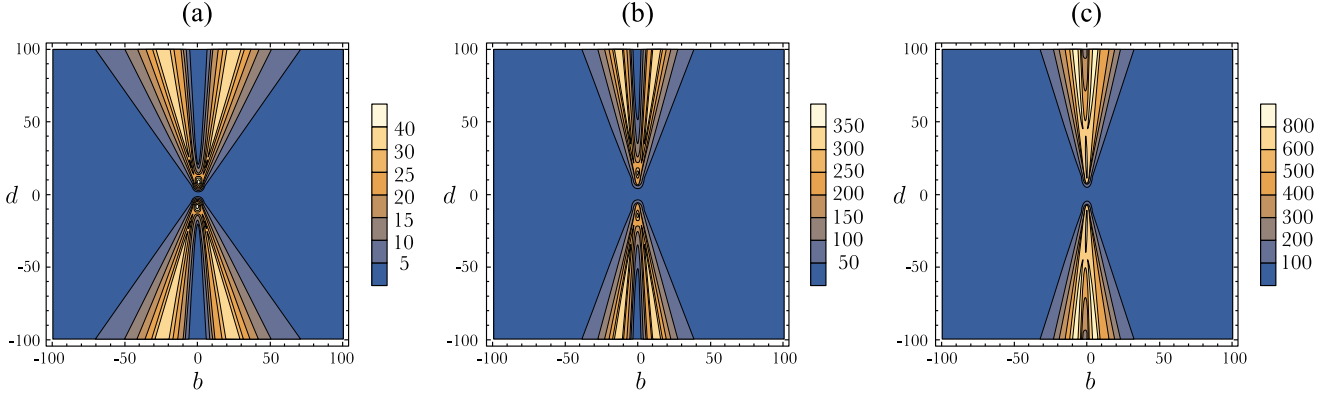


Figure 5.7: Ratios of the error probabilities $P_{err}(x_{er}, y_{er})/P_{err}(x_{er}^{opt}, y_{er}^{opt})$, depending on b and d (see Eq. (5.15)). Here $P_{err}(x_{er}, y_{er})$ is error probabilities of non-optimize computations, $P_{err}(x_{er}^{opt}, y_{er}^{opt})$ is error probabilities of optimize computations. On the diagram: a) optimization is performed by weight coefficients ($g_4 = g_3 = 4$, $g_2 = g_1 = 5$ and $\theta'_4 = \pi/2$); b) optimization is performed by weight coefficients and the phase of the homodyne detector; c) full optimization is performed, and cubic phase gate is used.

bilities $P_{err}(x_{er}, y_{er})/P_{err}(x_{er}^{opt}, y_{er}^{opt})$, where $P_{err}(x_{er}, y_{er})$ is the error probability of non-optimized computation, $P_{err}(x_{er}^{opt}, y_{er}^{opt})$ is the error probability of optimized computation. Non-optimized computations correspond to ones on the unweighted cluster state with $\theta'_4 = \pi/2$. Optimized computations correspond to ones discussed in Fig. 5.6: a) optimization by weight coefficients ($g_4 = g_3 = 4$, $g_2 = g_1 = 5$) and $\theta'_4 = \pi/2$; b) optimization by weight coefficients and by the phase of the homodyne measurement $\theta'_4 = f(b, d)$; c) optimization by weight coefficients, by the phase of homodyne detector, and using a cubic phase gate. All graphs are calculated for squeezing of -15 dB. When we perform the optimization only by weight coefficients, the error probability for some transformations becomes 45 times less. If, in addition, we perform optimization via the phases of the homodyne detector, the gain for some operations is 400 times. When we use a cubic phase gate and perform full optimization, the error probability for some transformations is 900 times smaller. Note that for resource oscillators with less squeezing, the benefit from the optimization procedure is even more significant.

Thus, the proposed optimization works very effectively. We can decrease the error probability in the results of computations after the correction procedure by several orders of magnitude. This means that the optimized computation scheme is more fault-tolerant. The faulttolerant universal quantum computation in the proposed scheme requires less squeezing than has been suggested earlier [12].

5.3 Two-mode transformations with a cubic phase gate

As discussed in Sec. 1.1.3, another necessary element for implementing universal quantum computation is the two-mode operation. Unlike single-mode operations, we don't need to be able

to perform an arbitrary two-mode operation, just perform any entanglement transformation. As a realized two-mode operation, we have chosen the CZ transformation. Recall that in the ideal case, the CZ transformation with weight coefficient g converts the quadrature of the input oscillators as

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out,1} \\ \hat{x}_{out,2} \\ \hat{y}_{out,1} \\ \hat{y}_{out,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g & 1 & 0 \\ g & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{x}_{in,2} \\ \hat{y}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,2} \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

It is worth noting that implementing a CZ transform for two arbitrary input states is not equivalent in complexity to entangling the squeezed oscillators or entangling of input states to a cluster using the CZ gate. In the last case, we need to organize the interaction of quantum states with well-known properties, which is obviously a simpler task in terms of its physical realization. In optical systems, the CZ operation over the cluster nodes is often replaced by properly matched linear-optical transformations. However, a CZ transformation on an arbitrary pair of states can be performed using an already formed cluster state.

5.3.1 CZ transformation on a weighted 4-node cluster state

First, consider how the CZ transformation is implemented on a weighted 4-node cluster. As in the case of single-mode transformations, the resource for preparing the cluster is the oscillators squeezed in y -quadrature, whose quadratures are described by Eq. (5.1).

All CZ gates commute with each other. In addition, the CZ gate, which entangles the second and third resource oscillators, commutes with all homodyne measurements. Thus, we can consider the transformation on a 4-node cluster state (see Fig. 5.8(b)) as a transformation on a pair of 2-node clusters (see Fig. 5.8(c)) with their further entanglement, as we did for the single-mode transformations. The operations on each of the two-node clusters perform a transformation (5.10) over one of the input states. After that, the results of these transformations are entangled by the CZ gate with a weight coefficient g_2 .

The scheme under consideration will implement a transformation (5.49) over the quadrature input oscillators provided that $g_4 = -g_1$, $g_5 = -g_3$ and $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \pi/2$. The quadrature of the output oscillators will be given by the equation

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out,1} \\ \hat{x}_{out,2} \\ \hat{y}_{out,1} \\ \hat{y}_{out,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 1 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{x}_{in,2} \\ \hat{y}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ -\frac{\hat{y}_4}{g_3} \\ \hat{y}_2 - g_2 \frac{\hat{y}_4}{g_3} \\ \hat{y}_3 - g_2 \frac{\hat{y}_1}{g_1} \end{pmatrix}. \quad (5.50)$$

The weight coefficient of the CZ transformation implemented in this way will depend only on the weight coefficient of the cluster state g_2 . Since we have to perform a CZ operation with a fixed

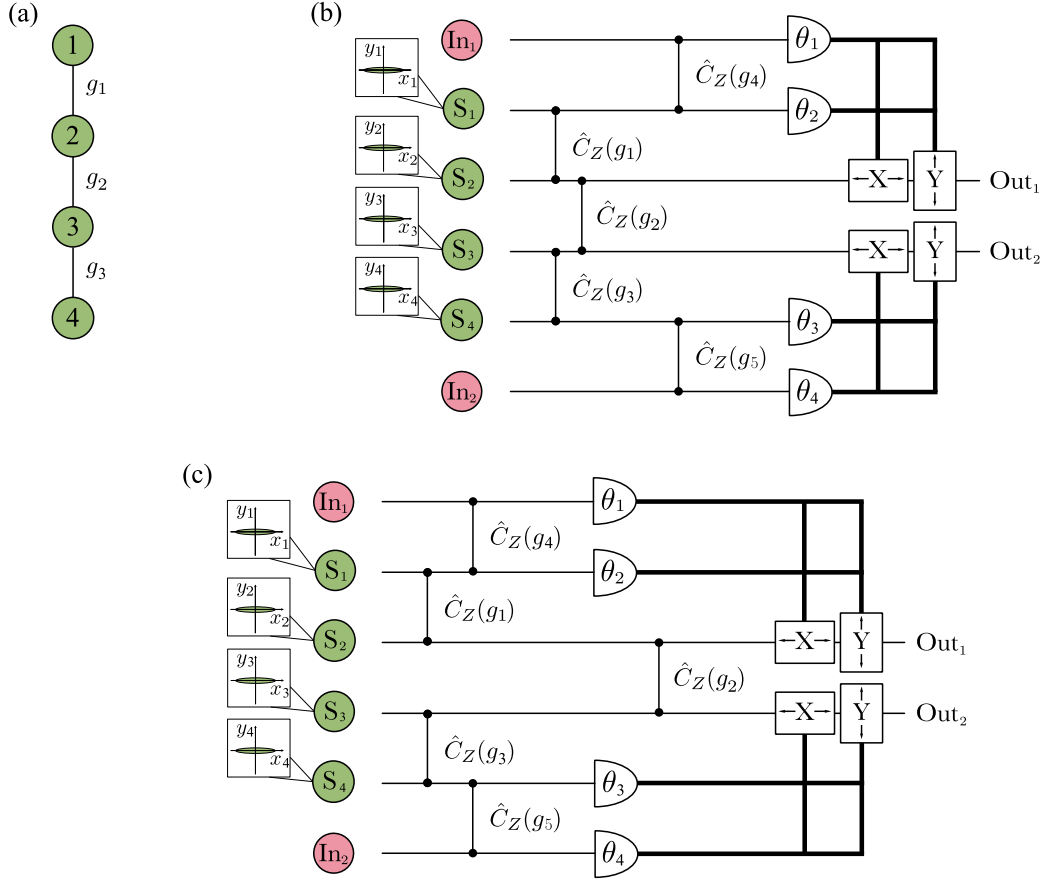


Figure 5.8: (a) Configuration of the cluster state used as a resource. (b) Scheme for implementing of the CZ transformation on a linear weighted four-node cluster state. (c) Scheme of implementation of the CZ transformation on a pair of two-node cluster states.

weight coefficient, g_2 cannot act as an optimization parameter. For simplicity, we will consider the case of $g_2 = 1$.

As with the single-mode transformation error estimation, we will assume that the Gaussian resource states are squeezed equally, i.e. $\langle \delta \hat{y}_j^2 \rangle \equiv \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ for $j \in 1, 2, 3, 4$. The error variances vector for such a CZ transformation scheme are following:

$$\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1^2} \\ \frac{1}{g_3^2} \\ 1 + \frac{1}{g_3^2} \\ 1 + \frac{1}{g_1^2} \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (5.51)$$

Thus, the error of the two-mode transformation will decrease as the weight coefficients g_1 and g_3 increase. Ideally, it is possible to achieve zero error in the x -quadrature of the output states, but the error in the y -quadrature cannot be lower than $\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$. At the maximum achievable squeezing value of -15 dB, the weight coefficients are $g_1 = g_3 = 5$ (see Sec. 2.2); then the error norm is $\|\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle\|_\infty = 1.04 \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$.

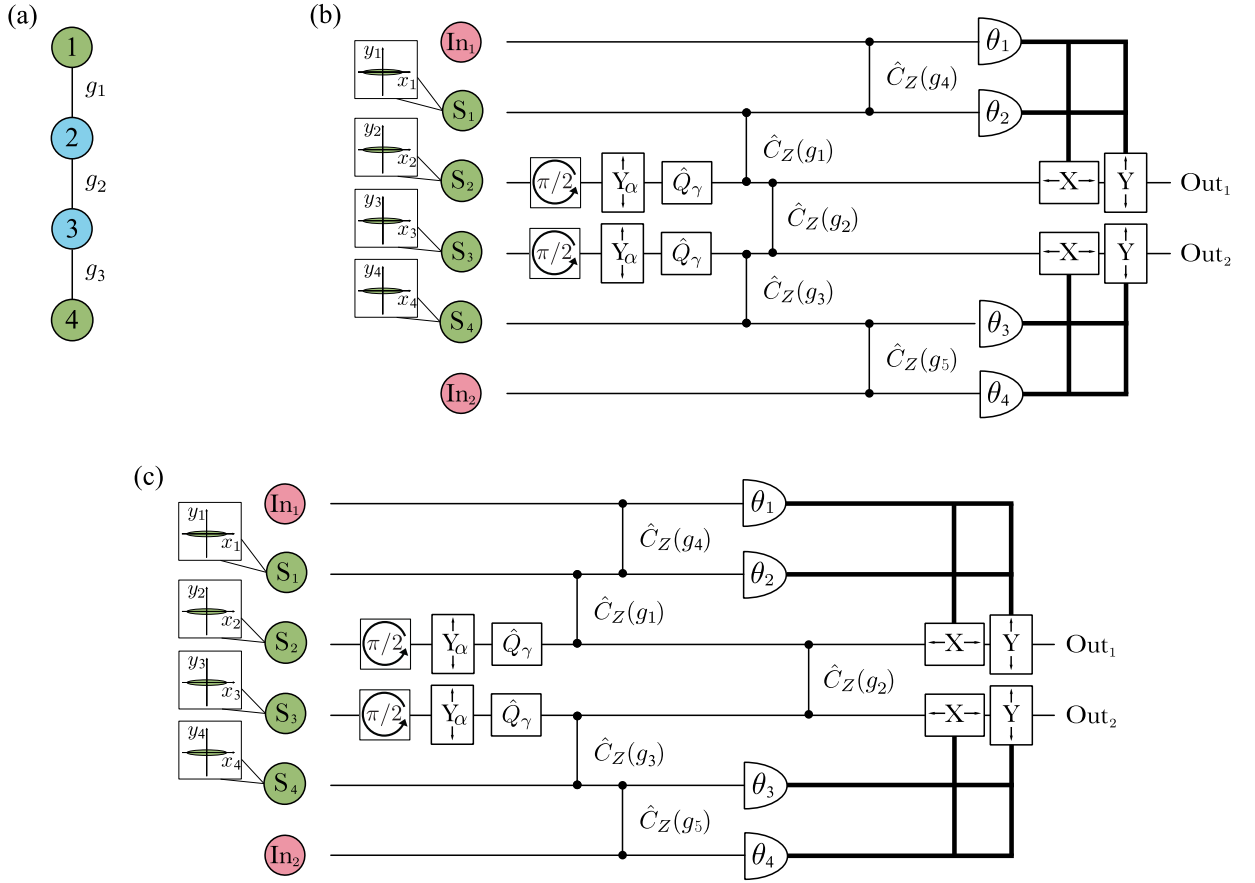


Figure 5.9: (a) Configuration of the cluster state used as a resource: Gaussian nodes are shown in green, nonGaussian nodes are shown in blue. (b) Scheme for implementing of the CZ transformation on a linear weighted four-node cluster state using a cubic phase gate. (c) Scheme of implementation of the CZ transformation on a pair of two-node cluster states using a cubic phase gate.

It can be seen that the considered CZ implementation includes two teleportation schemes that transfer the input states to the second and third resource oscillators. The transformation error will depend directly on the error with which we perform the teleportation procedure.

5.3.2 CZ transformation scheme with cubic phase gate

As we found out in the previous section, increasing the weight coefficients does not reduce the error in the y -quadratures of the output states. It cannot be made smaller than the variance of the squeezed quadrature of the resource oscillators. In order to fix it, we use the same method as we do for single-mode operations. That is, we will replace the cluster nodes contributing most to the error with non-Gaussian resource states. Increasing the weight coefficients does not affect the error introduced by the second and third resource oscillators, so we will replace them (see Fig. 5.9(a)). The non-Gaussian resource states will be prepared using a cubic phase gate in exactly the same way as in Sec. 5.2.1.

If we go to an equivalent transformation scheme on a pair of two-node clusters (Fig. 5.9(c)), we see that a transformation (5.41) is performed on each of the input states. As we discussed in Sec. 5.2.1, this transformation contains an additional deformation dependent on the measurement results. But unlike the single-mode operation scheme, we do not perform a controlled transformation over the result (5.41) and cannot correct for this deformation later. However, we do have the opportunity to compensate for the distortion directly during the teleportation procedure.

Consider how the input state In_1 is transformed. To teleport the state In_1 to the second resource oscillator, we must take $g_4 = -g_1$ and $\theta_2 = \pi/2$. Then the quadrature of the second oscillator after the measurements will be given by the equation

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_2 \\ \hat{y}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cot \theta_1 + \sqrt{\frac{g_1 \beta}{12\gamma i_{1,m}}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ \sqrt{\frac{g_1 \beta}{12\gamma i_{1,m}}} \left(\hat{y}_2 - \frac{\hat{y}_1}{g_1} \right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i_{1,m}}{\beta g_1} \\ \frac{i_{in,1,m}}{\beta g_2 \sin \theta_1} + \sqrt{\frac{i_{1,m}}{3\gamma \beta g_1}} \end{pmatrix}. \quad (5.52)$$

Note that the photocurrent value $i_{1,m}$ is obtained from measurements over the state in the first channel. If we measure over the first oscillator earlier than the input oscillator, we can adjust the phase of θ_1 so that

$$\cot \theta_1 = -\sqrt{\frac{g_1 \beta}{12\gamma i_{1,m}}}. \quad (5.53)$$

This allows us to perform teleportation without uncontrolled distortion.

Thus, the quadrature at the output of such a CZ transformation scheme will be determined by the equation

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out,1} \\ \hat{x}_{out,2} \\ \hat{y}_{out,1} \\ \hat{y}_{out,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 1 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{x}_{in,2} \\ \hat{y}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ -\frac{\hat{y}_4}{g_3} \\ \sqrt{\frac{g_1 \beta}{12\gamma i_{1,m}}} \left(\hat{y}_2 - \frac{\hat{y}_1}{g_1} \right) - g_2 \frac{\hat{y}_4}{g_3} \\ \sqrt{\frac{g_3 \beta}{12\gamma i_{4,m}}} \left(\hat{y}_3 - \frac{\hat{y}_4}{g_3} \right) - g_2 \frac{\hat{y}_1}{g_1} \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

As we can see, the input quadratures are transformed in the same way as in the scheme without non-Gaussian operations (see Eq. (5.50)), but the errors in the y -quadratures are significantly different.

Let us estimate the errors that occur in the scheme considered. We will assume the displacements of the squeezed states in the preparation of non-Gaussian states to be the same and equal to α . For estimation, we will consider the values of the measured photocurrents to be equal to its average values, i.e. $i_{1,m} = \langle \hat{i}_{1,m} \rangle \approx 3\beta\gamma g_1 \alpha^2$ and $i_{4,m} = \langle \hat{i}_{4,m} \rangle \approx 3\beta\gamma g_3 \alpha^2$. As in the previous section, we will assume $g_2 = 1$ and the variances of the squeezed quadratures of the resource oscillators are the same and equal to $\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$. Then the error variances vector have the form

$$\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_0^2 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1^2} \\ \frac{1}{g_3^2} \\ \frac{g_1 \beta}{12\gamma i_{1,m}} \left(1 + \frac{1}{g_1^2} \right) + \frac{1}{g_3^2} \\ \frac{g_3 \beta}{12\gamma i_{4,m}} \left(1 + \frac{1}{g_3^2} \right) + \frac{1}{g_1^2} \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1^2} \\ \frac{1}{g_3^2} \\ \frac{1}{36\gamma^2 \alpha^2} \left(1 + \frac{1}{g_1^2} \right) + \frac{1}{g_3^2} \\ \frac{1}{36\gamma^2 \alpha^2} \left(1 + \frac{1}{g_3^2} \right) + \frac{1}{g_1^2} \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (5.55)$$

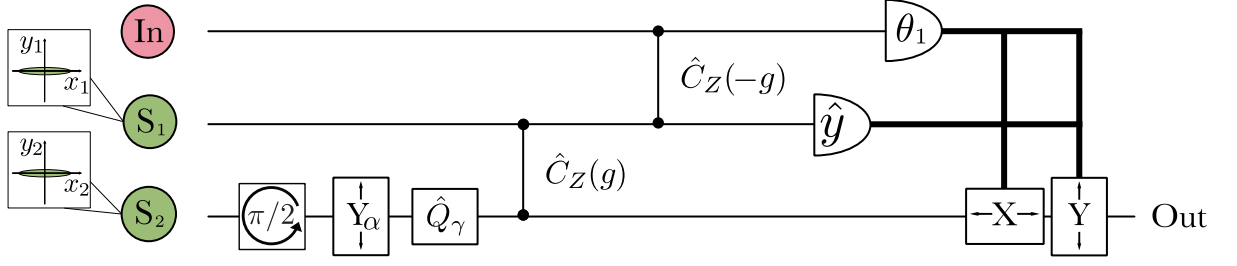


Figure 5.10: Modified teleportation scheme using a cubic phase gate.

The first term in the y -quadrature errors turns out to be inversely proportional to the measured photocurrents $i_{1,m}$ and $i_{4,m}$, which increase with increasing displacement α . For the numerical estimation, we take the weight coefficients $g_1 = g_3 = 5$ and the cubic phase nonlinearity coefficient value $\gamma = 0.1$ and displacement $\alpha = 5\sqrt{5}$ (i.e. the same as for single-mode transformation error estimation). Then the error norm will be $\|\langle \delta \hat{e}_0^2 \rangle\|_\infty \approx 0.063 \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$, which is 16 times less than the scheme without a cubic phase gate.

Thus, we can decrease the contributions to transformation error from all resource oscillators: from some by cluster state weight coefficients, and from others by using a cubic phase gate.

5.3.3 Modified teleportation protocol with cubic phase gate

As we have discussed, the CZ transformation scheme considered includes two teleportation schemes. However, the teleportation protocol with a cubic phase gate from the previous section differs from the one we discussed in the Chapter 2.4. In this modified protocol, we adjust the value of phase θ_1 to compensate for the uncontrolled distortion of the teleportation results. A scheme of the protocol is shown in Fig. 5.10 and the phase value is defined by the equation

$$\cot \theta_1 = -\sqrt{\frac{g}{12\gamma Y_1}}. \quad (5.56)$$

where $Y_1 = i_{1,m}/\beta$ is the measured value of y -quadrature of the first resource oscillator. From the Eq. (5.52) it follows that the quadrature of the output state in this case is

$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g}, \quad (5.57)$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + \sqrt{\frac{g}{12\gamma Y_1}} \left(\hat{y}_2 - \frac{\hat{y}_1}{g} \right). \quad (5.58)$$

To characterize the level of error, we turn to the value of the mean-square errors in each quadrature: $\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \langle (\hat{x}_{out} - \hat{x}_{in})^2 \rangle$ and $\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \langle (\hat{y}_{out} - \hat{y}_{in})^2 \rangle$. As before, we will assume that $\langle \delta \hat{y}_j^2 \rangle \equiv \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ is for $j = 1, 2$, and we will estimate the value of the measured quadrature as its average value, i.e. $Y_1 = \langle \hat{y}_1 \rangle \approx 3\gamma g \alpha^2$. The mean-square fluctuations of the error will then be given by the equations

$$\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \frac{1}{g^2} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle, \quad (5.59)$$

$$\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \frac{g}{12\gamma Y_1} \left(1 + \frac{1}{g^2} \right) \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle = \frac{1}{36\gamma^2 \alpha^2} \left(1 + \frac{1}{g^2} \right) \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (5.60)$$

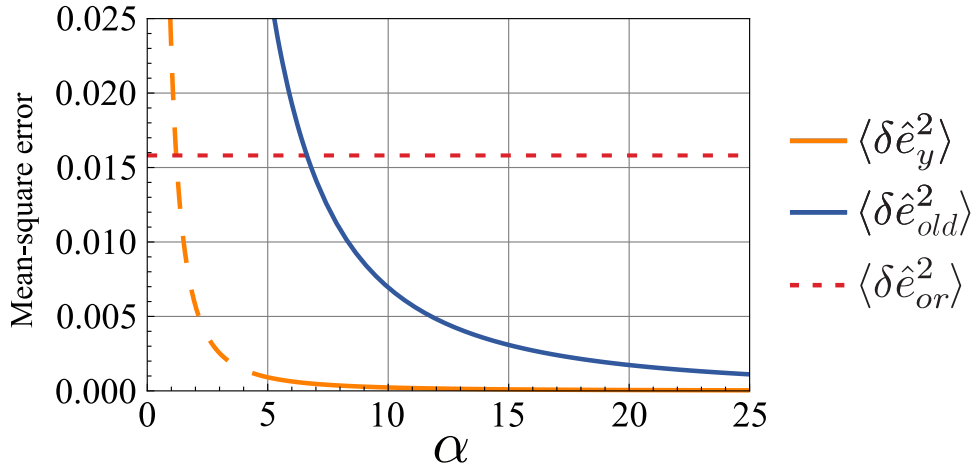


Figure 5.11: Value of the mean-square error of the teleported state y -quadrature depending on the displacement magnitude α of the non-Gaussian resource: in orange for the protocol with phase correction, in blue for the protocol without phase correction for vacuum state teleportation. The red dotted line marks the level of teleportation error in the original scheme. The squeezing degree of the resource oscillators is -15 dB.

Comparing these equations and Eqs. (3.19) and (3.20) from Sec. 3.1, we see that the y -quadrature error is absent a contribution from the x -quadrature input state, which was caused by our not compensating for the uncontrolled distortion. Moreover, it was the dependence of the error on the input state that was the main limiting factor of the previously proposed protocol. Here we get rid of this limitation.

The dependence for estimating the mean-square fluctuation error of the y -quadrature on the displacement value α is shown in orange in Fig. 5.11. For calculations, we assume $\gamma = 0.1$ and resource oscillator compression -15 dB and $g = 5$. For comparison, the error for a scheme without homodyne phase correction for vacuum state teleportation for the same parameters is shown in blue (see Sec. 3.1). Red indicates the mean-square error for the original teleportation scheme $\langle \delta \hat{e}_{or}^2 \rangle = 2\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ (see Sec. 2.1.1). Since at small α the approximations in which the analysed expressions are obtained are no longer valid, the dependence in this region is shown as a dashed line. As we can see, the modified teleportation protocol with a cubic phase gate gains over the original protocol for any α sufficient to perform the assumed approximations.

Thus, correct phase selection in homodyne measurements can significantly decrease the error in the teleportation protocol with a cubic phase gate.

5.4 Conclusion on chapter 5

In this chapter, we have shown that varying the weight coefficients of the cluster state, which used as a resource for computations, one can decrease the error of arbitrary single-mode Gaussian transformations. In real experiments, the squeezing resource is not infinite. Its proper distribution

in the cluster is required. We have shown that ratios of weight coefficients play a significant role in decreasing the error. Proper distribution of weight coefficients allows us to decrease the error for most of the single-mode Gaussian operations whilst spending less energy.

For non-universal operations (solving a concrete task), it is possible to select the cluster state configuration that provides minimal computation error. In the general case for universal transformations, a multidimensional optimization can be performed to find the optimal cluster configuration for the computation. However, such a optimization is proving extremely complex. Its complexity is determined both by the dimension of the cluster (i.e. the number of parameters to be adjusted) and by the infinite dimensions of the transformation space. Nevertheless, it is possible to select a weight coefficient which provides a minimal error for most of the operations.

Another useful tool is optimization by phases of homodyne measurements. Unlike the weight coefficients, we can choose the optimal phases for each specific operation. This strategy allows us to decrease the computation error without using any additional physical resources.

We have shown that the inclusion of non-Gaussian nodes prepared by cubic phase gates into the resource cluster state can further decrease the transformation error of both arbitrary single-mode transforms and the two-mode CZ operation. For proper work of the protocol, we need to make relatively small displacements of the squeezed state before applying the cubic phase gate. These displacements can be easily implemented in practice. It should be noted that the practical implementation of cubic phase gate is still a challenge for experimentalists. However, the generation of the cubic phase states has recently been demonstrated in the microwave frequency range [94]. There is also an active search for suitable systems for the implementation of non-Gaussian gates in optics [80, 82, 85, 89–91].

We have demonstrated the effectiveness of our optimization methods. We have shown that it is possible to significantly decrease the probability of wrong error correction using the proposed optimization methods. This, makes our scheme more fault-tolerant. Thus, the considered methods can give a significant benefit for arbitrary single-mode Gaussian transformations.

It is important, to note that the optimization procedure proposed by us does not depend on the way the cluster state was generated and on the encoding of the input states. Regardless of the available experimental resources, it is possible to optimize the scheme to minimize the quantum computation error.

In addition, we have shown that the methods for correcting phases based on measurement results required in cubic phase gate operation schemes also apply to the initial teleportation protocol. Its use significantly decreases the error in the teleportation protocol.

Summarizing all of the above, the following defence statement was developed and substantiated in chapter five:

- Optimizing the weight coefficients of the cluster state used as a computational resource decreases the error of arbitrary single-mode Gaussian transformations as compared to operations on the unweighted cluster state.

- The same single-mode transformations can be performed with different homodyne detector phases. One of the homodyne phases turns out to be a free parameter that can be used to decrease the error.
- The inclusion of non-Gaussian nodes prepared with a cubic phase gate in the resource cluster state can significantly decrease the transformation error. For some transformations it is possible to reduce the error probability by 900 times compared to computation on an unweighted cluster without optimizing the homodyne detector phases.

Conclusion

In this thesis, we have investigated methods for error reduction in a one-way quantum computation model.

Thus, in chapter two, we have analysed the role of entanglement transformations in the teleportation protocol, which is fundamental to the computational model under consideration. The results of this chapter make it clear that the use of the CZ transform is more prospective in terms of decreasing the squeezing requirement of the resource oscillators. In fact, this operation allows us to perform transformations with numerous less squeezed oscillators, while remaining at the same noise level. This is especially important, keeping in mind the experimental difficulties in achieving a high degree of squeezing.

In chapter three, we proposed a teleportation protocol in which error reduction is achieved by using a cubic phase gate. A comparison of our proposed teleportation protocol with a previously existing conditional photon subtraction protocol, carried out in chapter four, shows that the protocol with a cubic phase gate allows us to achieve higher fidelity values while remaining within the deterministic operations. Thus, the results of this chapter show that the cubic phase gate has more prospects for integration into one-way quantum computation schemes than the conditional photon subtraction procedure.

In the last chapter, we applied the error decreasing methods identified through analysis of the teleportation protocol to reduce the squeezing requirement on resource oscillators for Gaussian operations in one-way quantum computation schemes. We have proposed a method for optimizing the weight coefficients of cluster state and phase of homodyne detectors to enable arbitrary single-mode Gaussian operations with the lowest error. In addition, we have shown that the introduction of non-Gaussian nodes obtained with a cubic phase gate can significantly decrease the error of both the arbitrary single-mode Gaussian operation and the two-mode Gaussian operation CZ. In this way, we decrease the errors of Gaussian operations, within which a large class of problems can be solved. At the same time, it is possible to use the cubic phase gate as a non-Gaussian operation necessary for universal quantum computation. That is, we apply a one non-Gaussian transformation for several purposes at the same time. The question arises: can the states obtained by this operation be used to error correction? This question is still open. It is important to note that our analysis is not tied to a specific physical implementation, and the obtained results can be applied to any physical system described by continuous variables. The results of this part of the thesis may prove useful in the experimental implementation of a universal quantum computer.

This research not only provides answers to the questions we have posed, but also raises a number of new questions that have yet to be answered. So, for example, there is the question of the effect of errors associated with the physical implementation of the cubic phase gate. It remains open because the physical realization of this non-Gaussian operation in the optical frequency range is still a challenge for experimentalists. Another problem that arose during the study concerns the optimization of cluster state weight coefficients. We have shown that it is possible to reduce the transformation error by correct selection of weight coefficients, but a global optimization of the cluster state that provides minimal errors for arbitrary Gaussian operations is not achievable today for numerical analysis. At the same time, our proposed method for optimizing the weight coefficients can be applied to decrease the errors of specific (non-universal) calculation algorithms. This could be one possible way of developing our research further. Наконец, важным вопросом является поиск методов эффективной генерации негауссовых состояний, пригодных для использования в протоколах коррекции ошибок. Further research into non-Gaussian operations and states will hopefully help us to shed light on these and many other questions.

Bibliography

1. Манин Ю.И. // Советское Радио. 1980. Т. 39, № 8. с. 128.
2. Feynman Richard P. Simulating physics with computers // International Journal of Theoretical Physics. 1982. Т. 21, № 6-7. С. 467–488.
3. Shor Peter W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer // SIAM J. Comput. Philadelphia, PA, USA, 1997. Oct. Т. 26, № 5. С. 1484–1509.
4. Grover Lov K. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack // Physical review letters. 1997. Т. 79, № 2. с. 325.
5. Lomonaco Jr Samuel J, Kauffman Louis H. Quantum hidden subgroup problems: A mathematical perspective // arXiv preprint quant-ph/0201095. 2002.
6. Preskill John. Quantum computing in the NISQ era and beyond // Quantum. 2018. Т. 2. с. 79.
7. Lloyd Seth, Braunstein Samuel L. Quantum computation over continuous variables // Physical Review Letters. 1999. Т. 82, № 8. с. 1784.
8. Universal quantum computation with continuous-variable cluster states / Nicolas C Menicucci, Peter Van Loock, Mile Gu [и др.] // Physical review letters. 2006. Т. 97, № 11. с. 110501.
9. Vaidman Lev. Teleportation of quantum states // Physical Review A. 1994. Т. 49, № 2. с. 1473.
10. Braunstein Samuel L, Kimble H Jeff. Teleportation of continuous quantum variables // Physical Review Letters. 1998. Т. 80, № 4. с. 869.
11. Detection of 15 dB squeezed states of light and their application for the absolute calibration of photoelectric quantum efficiency / Henning Vahlbruch, Moritz Mehmet, Karsten Danzmann [и др.] // Physical review letters. 2016. Т. 117, № 11. с. 110801.
12. Menicucci Nicolas C. Fault-tolerant measurement-based quantum computing with continuous-variable cluster states // Physical review letters. 2014. Т. 112, № 12. с. 120504.

13. Gottesman Daniel, Kitaev Alexei, Preskill John. Encoding a qubit in an oscillator // *Physical Review A*. 2001. Т. 64, № 1. с. 012310.
14. Arora Sanjeev, Barak Boaz. *Computational complexity: a modern approach*. Cambridge University Press, 2009.
15. Нильсен М, Чанг И. *Квантовые вычисления и квантовая информация*. М.: Мир, 2006. Т. 824.
16. DiVincenzo David P. Quantum computation // *Science*. 1995. Т. 270, № 5234. С. 255–261.
17. Lloyd Seth. Quantum-mechanical computers // *Scientific American*. 1995. Т. 273, № 4. С. 140–145.
18. DiVincenzo David P. Topics in quantum computers // *Mesoscopic electron transport*. 1997. С. 657–677.
19. Quantum key distribution using gaussian-modulated coherent states / Frédéric Grosshans, Gilles Van Assche, Jérôme Wenger [и др.] // *Nature*. 2003. Т. 421, № 6920. С. 238–241.
20. Cerf Nicolas J, Iblisdir Sofyan. Optimal N-to-M cloning of conjugate quantum variables // *Physical Review A*. 2000. Т. 62, № 4. с. 040301.
21. Cerf Nicolas J, Ipe A, Rottenberg Xavier. Cloning of continuous quantum variables // *Physical Review Letters*. 2000. Т. 85, № 8. с. 1754.
22. Optimal cloning of coherent states with a linear amplifier and beam splitters / Samuel L Braunstein, Nicolas J Cerf, Sofyan Iblisdir [и др.] // *Physical Review Letters*. 2001. Т. 86, № 21. с. 4938.
23. Fiurášek Jaromír. Optical implementation of continuous-variable quantum cloning machines // *Physical Review Letters*. 2001. Т. 86, № 21. с. 4942.
24. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels / Charles H Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau [и др.] // *Physical review letters*. 1993. Т. 70, № 13. с. 1895.
25. Bergmann Marcel, van Loock Peter. Quantum error correction against photon loss using multicomponent cat states // *Physical Review A*. 2016. Т. 94, № 4. с. 042332.
26. Schlegel David S, Minganti Fabrizio, Savona Vincenzo. Quantum error correction using squeezed Schrödinger cat states // *Physical Review A*. 2022. Т. 106, № 2. с. 022431.
27. Braunstein Samuel L, Van Loock Peter. Quantum information with continuous variables // *Reviews of modern physics*. 2005. Т. 77, № 2. с. 513.

28. Raussendorf Robert, Briegel Hans J. A one-way quantum computer // Physical review letters. 2001. T. 86, № 22. c. 5188.
29. Nielsen Michael A. Cluster-state quantum computation // Reports on Mathematical Physics. 2006. T. 57, № 1. C. 147–161.
30. Leonhardt Ulf. Measuring the quantum state of light. Cambridge university press, 1997. T. 22.
31. Menicucci Nicolas C, Flammia Steven T, van Loock Peter. Graphical calculus for Gaussian pure states // Physical Review A. 2011. T. 83, № 4. c. 042335.
32. Ultracompact generation of continuous-variable cluster states / Nicolas C Menicucci, Steven T Flammia, Hussain Zaidi [и др.] // Physical Review A. 2007. T. 76, № 1. c. 010302.
33. Experimental generation of four-mode continuous-variable cluster states / Mitsuyoshi Yukawa, Ryuji Ukai, Peter Van Loock [и др.] // Physical Review A. 2008. T. 78, № 1. c. 012301.
34. Zhang Jing, Braunstein Samuel L. Continuous-variable Gaussian analog of cluster states // Physical Review A. 2006. T. 73, № 3. c. 032318.
35. Compact Gaussian quantum computation by multi-pixel homodyne detection / Giulia Ferrini, Jean-Pierre Gazeau, Thomas Coudreau [и др.] // New Journal of Physics. 2013. T. 15, № 9. c. 093015.
36. Full characterization of a highly multimode entangled state embedded in an optical frequency comb using pulse shaping / R Medeiros De Araújo, Jonathan Roslund, Yin Cai [и др.] // Physical Review A. 2014. T. 89, № 5. c. 053828.
37. Sun Li-hui, Chen Yan-qin, Li Gao-xiang. Creation of four-mode weighted cluster states with atomic ensembles in high-Q ring cavities // Optics express. 2012. T. 20, № 3. C. 3176–3191.
38. Controlled Logic Gate Based on a Four-Node Linear Hybrid Cluster State / KS Tikhonov, AD Manukhova, SB Korolev [и др.] // Optics and Spectroscopy. 2019. T. 127. C. 878–887.
39. Milne Darran F, Korolkova Natalia V. Composite-cluster states and alternative architectures for one-way quantum computation // Physical Review A. 2012. T. 85, № 3. c. 032310.
40. Houhou Oussama, Aissaoui Habib, Ferraro Alessandro. Generation of cluster states in optomechanical quantum systems // Physical Review A. 2015. T. 92, № 6. c. 063843.
41. Ultra-large-scale continuous-variable cluster states multiplexed in the time domain / Shota Yokoyama, Ryuji Ukai, Seiji C Armstrong [и др.] // Nature Photonics. 2013. T. 7, № 12. C. 982–986.

42. Wavelength-multiplexed quantum networks with ultrafast frequency combs / Jonathan Roslund, Renné Medeiros De Araujo, Shifeng Jiang [и др.] // *Nature Photonics*. 2014. T. 8, № 2. С. 109–112.
43. Chen Moran, Menicucci Nicolas C, Pfister Olivier. Experimental realization of multipartite entanglement of 60 modes of a quantum optical frequency comb // *Physical review letters*. 2014. T. 112, № 12. с. 120505.
44. Invited article: Generation of one-million-mode continuous-variable cluster state by unlimited time-domain multiplexing / Jun-ichi Yoshikawa, Shota Yokoyama, Toshiyuki Kaji [и др.] // *APL photonics*. 2016. T. 1, № 6. с. 060801.
45. Deterministic generation of a two-dimensional cluster state / Mikkel V Larsen, Xueshi Guo, Casper R Breum [и др.] // *Science*. 2019. T. 366, № 6463. С. 369–372.
46. Generation of time-domain-multiplexed two-dimensional cluster state / Warit Asavanant, Yu Shiozawa, Shota Yokoyama [и др.] // *Science*. 2019. T. 366, № 6463. С. 373–376.
47. Universal linear Bogoliubov transformations through one-way quantum computation / Ryuji Ukai, Jun-ichi Yoshikawa, Noriaki Iwata [и др.] // *Physical review A*. 2010. T. 81, № 3. с. 032315.
48. Quantum memories: a review based on the European integrated project “qubit applications (QAP)” / Christoph Simon, Mikael Afzelius, Jürgen Appel [и др.] // *The European Physical Journal D*. 2010. T. 58. С. 1–22.
49. Tikhonov Kirill, Golubeva Tania, Golubev Yuri. Atomic thermal motion effect on efficiency of a high-speed quantum memory // *The European Physical Journal D*. 2015. T. 69. С. 1–14.
50. The Effect of Diffraction on a Pulse of Squeezed Light in the Protocol of a Multimode Resonant Quantum Memory Based on a Thermal Atomic Ensemble / ER Zinatullin, KS Tikhonov, T Yu Golubeva [и др.] // *Optics and Spectroscopy*. 2020. T. 128. С. 1458–1474.
51. Niset Julien, Fiurášek Jaromír, Cerf Nicolas J. No-go theorem for Gaussian quantum error correction // *Physical review letters*. 2009. T. 102, № 12. с. 120501.
52. Demonstration of a quantum nondemolition sum gate / Jun-ichi Yoshikawa, Yoshichika Miwa, Alexander Huck [и др.] // *Physical Review Letters*. 2008. T. 101, № 25. с. 250501.
53. Glancy Scott, Knill Emanuel. Error analysis for encoding a qubit in an oscillator // *Physical Review A*. 2006. T. 73, № 1. с. 012325.
54. Korolev SB, Golubeva T Yu. Error correction of the continuous-variable quantum hybrid computation on two-node cluster states: Limit of squeezing // *Physics Letters A*. 2022. T. 441. с. 128149.

55. Robust fault tolerance for continuous-variable cluster states with excess antisqueezing / Blayney W Walshe, Lucas J Mensen, Ben Q Baragiola [и др.] // Physical Review A. 2019. Т. 100, № 1. с. 010301.
56. Bravyi Sergey B, Kitaev A Yu. Quantum codes on a lattice with boundary // arXiv preprint quant-ph/9811052. 1998.
57. Topological quantum memory / Eric Dennis, Alexei Kitaev, Andrew Landahl [и др.] // Journal of Mathematical Physics. 2002. Т. 43, № 9. С. 4452–4505.
58. Surface codes: Towards practical large-scale quantum computation / Austin G Fowler, Matteo Mariantoni, John M Martinis [и др.] // Physical Review A. 2012. Т. 86, № 3. с. 032324.
59. Tomita Yu, Svore Krysta M. Low-distance surface codes under realistic quantum noise // Physical Review A. 2014. Т. 90, № 6. с. 062320.
60. High-threshold fault-tolerant quantum computation with analog quantum error correction / Kosuke Fukui, Akihisa Tomita, Atsushi Okamoto [и др.] // Physical review X. 2018. Т. 8, № 2. с. 021054.
61. Noh Kyungjoo, Chamberland Christopher. Fault-tolerant bosonic quantum error correction with the surface–Gottesman-Kitaev-Preskill code // Physical Review A. 2020. Т. 101, № 1. с. 012316.
62. Noh Kyungjoo, Chamberland Christopher, Brandão Fernando GSL. Low-overhead fault-tolerant quantum error correction with the surface-GKP code // PRX Quantum. 2022. Т. 3, № 1. с. 010315.
63. Fault-tolerant continuous-variable measurement-based quantum computation architecture / Mikkel V Larsen, Christopher Chamberland, Kyungjoo Noh [и др.] // Prx Quantum. 2021. Т. 2, № 3. с. 030325.
64. Stolen RH, Ashkin A. Optical Kerr effect in glass waveguide // Applied Physics Letters. 1973. Т. 22, № 6. С. 294–296.
65. Schmidt HetAIMAMOGLU, Imamoglu A. Giant Kerr nonlinearities obtained by electromagnetically induced transparency // Optics letters. 1996. Т. 21, № 23. С. 1936–1938.
66. Modified self-Kerr-nonlinearity in a four-level N-type atomic system / Jiteng Sheng, Xihua Yang, Haibin Wu [и др.] // Physical Review A. 2011. Т. 84, № 5. с. 053820.
67. Large Kerr nonlinearity with a single atom / S Rebic, SM Tan, AS Parkins [и др.] // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. 1999. Т. 1, № 4. с. 490.

68. Effective Hamiltonian approach to the Kerr nonlinearity in an optomechanical system / ZR Gong, H Ian, Yu-xi Liu [и др.] // *Physical Review A*. 2009. Т. 80, № 6. с. 065801.
69. Aldana Samuel, Bruder Christoph, Nunnenkamp Andreas. Equivalence between an optomechanical system and a Kerr medium // *Physical Review A*. 2013. Т. 88, № 4. с. 043826.
70. Josephson-junction-embedded transmission-line resonators: From Kerr medium to in-line transmon / J Bourassa, F Beaudoin, Jay M Gambetta [и др.] // *Physical Review A*. 2012. Т. 86, № 1. с. 013814.
71. Generating Schrödinger-cat-like states by means of conditional measurements on a beam splitter / Mohammed Dakna, Tiemo Anhut, T Opatrny [и др.] // *Physical Review A*. 1997. Т. 55, № 4. с. 3184.
72. Dakna M, Knöll L, Welsch D-G. Quantum state engineering using conditional measurement on a beam splitter // *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*. 1998. Т. 3. С. 295–308.
73. Increasing entanglement between Gaussian states by coherent photon subtraction / Alexei Ourjountsev, Aurelien Dantan, Rosa Tualle-Brouri [и др.] // *Physical review letters*. 2007. Т. 98, № 3. с. 030502.
74. Enhancing quantum entanglement by photon addition and subtraction / Carlos Navarrete-Benlloch, Raúl García-Patrón, Jeffrey H Shapiro [и др.] // *Physical Review A*. 2012. Т. 86, № 1. с. 012328.
75. Strategies for enhancing quantum entanglement by local photon subtraction / Tim J Bartley, Philip JD Crowley, Animesh Datta [и др.] // *Physical Review A*. 2013. Т. 87, № 2. с. 022313.
76. Opatrny T, Kurizki Gershon, Welsch D-G. Improvement on teleportation of continuous variables by photon subtraction via conditional measurement // *Physical Review A*. 2000. Т. 61, № 3. с. 032302.
77. Cochrane PT, Ralph TC, Milburn GJ. Teleportation improvement by conditional measurements on the two-mode squeezed vacuum // *Physical Review A*. 2002. Т. 65, № 6. с. 062306.
78. Generating optical Schrodinger kittens for quantum information processing / Alexei Ourjountsev, Rosa Tualle-Brouri, Julien Laurat [и др.] // *Science*. 2006. Т. 312, № 5770. С. 83–86.
79. Generation of large-amplitude coherent-state superposition via ancilla-assisted photon subtraction / Hiroki Takahashi, Kentaro Wakui, Shigenari Suzuki [и др.] // *Physical review letters*. 2008. Т. 101, № 23. с. 233605.

80. Repeat-until-success cubic phase gate for universal continuous-variable quantum computation / Kevin Marshall, Raphael Pooser, George Siopsis [и др.] // *Physical Review A*. 2015. Т. 91, № 3. с. 032321.
81. Generation of optical Schrödinger cat states by generalized photon subtraction / Kan Takase, Jun-ichi Yoshikawa, Warit Asavanant [и др.] // *Physical Review A*. 2021. Т. 103, № 1. с. 013710.
82. Wave-function engineering via conditional quantum teleportation with a non-Gaussian entanglement resource / Warit Asavanant, Kan Takase, Kosuke Fukui [и др.] // *Physical Review A*. 2021. Т. 103, № 4. с. 043701.
83. Tailoring non-Gaussian continuous-variable graph states / Mattia Walschaers, Supratik Sarkar, Valentina Parigi [и др.] // *Physical review letters*. 2018. Т. 121, № 22. с. 220501.
84. Ghose Shohini, Sanders Barry C. Non-Gaussian ancilla states for continuous variable quantum computation via Gaussian maps // *Journal of Modern Optics*. 2007. Т. 54, № 6. С. 855–869.
85. Implementation of a quantum cubic gate by an adaptive non-Gaussian measurement / Kazunori Miyata, Hisashi Ogawa, Petr Marek [и др.] // *Physical Review A*. 2016. Т. 93, № 2. с. 022301.
86. Sokolov IV. Schrödinger cat states in continuous variable non-Gaussian networks // *Physics Letters A*. 2020. Т. 384, № 29. с. 126762.
87. Baeva AV, Losev AS, Sokolov IV. Schrödinger cat states prepared by logical gate with non-Gaussian resource state: Effect of finite squeezing and efficiency versus monotones // *Physics Letters A*. 2023. с. 128730.
88. Quantum computing with continuous-variable clusters / Mile Gu, Christian Weedbrook, Nicolas C Menicucci [и др.] // *Physical Review A*. 2009. Т. 79, № 6. с. 062318.
89. Emulating quantum cubic nonlinearity / Mitsuyoshi Yukawa, Kazunori Miyata, Hidehiro Yonezawa [и др.] // *Physical Review A*. 2013. Т. 88, № 5. с. 053816.
90. Nonlinear squeezing for measurement-based non-gaussian operations in time domain / Shunya Konno, Atsushi Sakaguchi, Warit Asavanant [и др.] // *Physical Review Applied*. 2021. Т. 15, № 2. с. 024024.
91. Engineering a Kerr-based deterministic cubic phase gate via Gaussian operations / Ryotatsu Yanagimoto, Tatsuhiro Onodera, Edwin Ng [и др.] // *Physical Review Letters*. 2020. Т. 124, № 24. с. 240503.

92. Gaussian conversion protocols for cubic phase state generation / Yu Zheng, Oliver Hahn, Pascal Stadler [и др.] // PRX Quantum. 2021. Т. 2, № 1. с. 010327.
93. Universal gate set for continuous-variable quantum computation with microwave circuits / Timo Hillmann, Fernando Quijandría, Göran Johansson [и др.] // Physical review letters. 2020. Т. 125, № 16. с. 160501.
94. Robust preparation of Wigner-negative states with optimized SNAP-displacement sequences / Marina Kudra, Mikael Kervinen, Ingrid Strandberg [и др.] // PRX Quantum. 2022. Т. 3, № 3. с. 030301.
95. Шляйх Вольфганг Питер. Квантовая оптика в фазовом пространстве. Физматлит, 2005.
96. Mari Andrea, Eisert Jens. Positive Wigner functions render classical simulation of quantum computation efficient // Physical review letters. 2012. Т. 109, № 23. с. 230503.
97. Efficient simulation scheme for a class of quantum optics experiments with non-negative Wigner representation / Victor Veitch, Nathan Wiebe, Christopher Ferrie [и др.] // New Journal of Physics. 2013. Т. 15, № 1. с. 013037.
98. Walschaers Mattia. Non-Gaussian quantum states and where to find them // PRX Quantum. 2021. Т. 2, № 3. с. 030204.
99. Kenfack Anatole, Życzkowski Karol. Negativity of the Wigner function as an indicator of non-classicality // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. 2004. Т. 6, № 10. с. 396.
100. Resource theory of quantum non-Gaussianity and Wigner negativity / Francesco Albarelli, Marco G Genoni, Matteo GA Paris [и др.] // Physical Review A. 2018. Т. 98, № 5. с. 052350.
101. Takagi Ryuji, Zhuang Quntao. Convex resource theory of non-Gaussianity // Physical Review A. 2018. Т. 97, № 6. с. 062337.
102. The resource theory of stabilizer quantum computation / Victor Veitch, SA Hamed Mousavian, Daniel Gottesman [и др.] // New Journal of Physics. 2014. Т. 16, № 1. с. 013009.
103. Chabaud Ulysse, Emeriau Pierre-Emmanuel, Grosshans Frédéric. Witnessing wigner negativity // Quantum. 2021. Т. 5. с. 471.
104. Genoni Marco G, Paris Matteo GA, Banaszek Konrad. Quantifying the non-Gaussian character of a quantum state by quantum relative entropy // Physical Review A. 2008. Т. 78, № 6. с. 060303.
105. Marian Paulina, Marian Tudor A. Relative entropy is an exact measure of non-Gaussianity // Physical Review A. 2013. Т. 88, № 1. с. 012322.

106. Faithful measure of quantum non-Gaussianity via quantum relative entropy / Jiyong Park, Jaehak Lee, Kyunghyun Baek [и др.] // *Physical Review A*. 2019. Т. 100, № 1. с. 012333.
107. Zinatullin ER, Korolev SB, Golubeva T Yu. Controlled-Z operation versus the beam-splitter transformation: Errors of entangled operations // *Physical Review A*. 2021. Т. 103, № 6. с. 062407.
108. Grangier Philippe, Levenson Juan Ariel, Poizat Jean-Philippe. Quantum non-demolition measurements in optics // *Nature*. 1998. Т. 396, № 6711. С. 537–542.
109. Filip Radim, Marek Petr, Andersen Ulrik L. Measurement-induced continuous-variable quantum interactions // *Physical Review A*. 2005. Т. 71, № 4. с. 042308.
110. Demonstration of a controlled-phase gate for continuous-variable one-way quantum computation / Ryuji Ukai, Shota Yokoyama, Jun-ichi Yoshikawa [и др.] // *Physical review letters*. 2011. Т. 107, № 25. с. 250501.
111. Gate sequence for continuous variable one-way quantum computation / Xiaolong Su, Shuhong Hao, Xiaowei Deng [и др.] // *Nature communications*. 2013. Т. 4, № 1. с. 2828.
112. Continuous-variable controlled-Z gate using an atomic ensemble / Ming-Feng Wang, Nian-Quan Jiang, Qing-Li Jin [и др.] // *Physical Review A*. 2011. Т. 83, № 6. с. 062339.
113. Zinatullin ER, Korolev SB, Golubeva T Yu. Teleportation with a cubic phase gate // *Physical Review A*. 2021. Т. 104, № 3. с. 032420.
114. Demonstration of a universal one-way quantum quadratic phase gate / Yoshichika Miwa, Jun-ichi Yoshikawa, Peter van Loock [и др.] // *Physical Review A*. 2009. Т. 80, № 5. с. 050303.
115. Zinatullin ER, Korolev SB, Golubeva T Yu. Teleportation protocols with non-Gaussian operations: Conditional photon subtraction versus cubic phase gate // *Physical Review A*. 2023. Т. 107, № 2. с. 022422.
116. Arzani Francesco, Treppe Nicolas, Ferrini Giulia. Polynomial approximation of non-Gaussian unitaries by counting one photon at a time // *Physical Review A*. 2017. Т. 95, № 5. с. 052352.
117. Measurement-based generation and preservation of cat and grid states within a continuous-variable cluster state / Miller Eaton, Carlos González-Arciniegas, Rafael N Alexander [и др.] // *Quantum*. 2022. Т. 6. с. 769.
118. Error of an arbitrary single-mode Gaussian transformation on a weighted cluster state using a cubic phase gate / ER Zinatullin, SB Korolev, AD Manukhova [и др.] // *Physical Review A*. 2022. Т. 106, № 3. с. 032414.

Appendix A. Actions of the operators

Let's find out what action each of the operators used in our work has on the amplitudes of the fields. To do it, we first need to prove one auxiliary equation. Consider an equation of the form

$$e^{-\alpha\hat{A}}\hat{B}e^{\alpha\hat{A}} = \sum_n \frac{(-\alpha\hat{A})^n}{n!} \hat{B} \sum_m \frac{(\alpha\hat{A})^m}{m!}. \quad (\text{A.1})$$

Let us multiply the series and group the terms with the same degree α :

$$e^{-\alpha\hat{A}}\hat{B}e^{\alpha\hat{A}} = \hat{B} + (\alpha\hat{B}\hat{A} - \alpha\hat{A}\hat{B}) + \left(\frac{\alpha^2}{2}\hat{A}^2\hat{B} - \alpha^2\hat{A}\hat{B}\hat{A} + \frac{\alpha^2}{2}\hat{B}\hat{A}^2 \right) + \dots \quad (\text{A.2})$$

It can be seen that the summands at equal degrees of α are combined into operator commutators:

$$\alpha(\hat{B}\hat{A} - \alpha\hat{A}\hat{B}) = -\alpha[\hat{A}, \hat{B}], \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\alpha^2}{2}(\hat{A}^2\hat{B} - 2\hat{A}\hat{B}\hat{A} + \hat{B}\hat{A}^2) = \frac{\alpha^2}{2}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]], \quad (\text{A.4})$$

...

Thus, for any operators \hat{A} and \hat{B} , the following equation will be valid:

$$e^{-\alpha\hat{A}}\hat{B}e^{\alpha\hat{A}} = \hat{B} - \alpha[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\alpha^2}{2}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (\text{A.5})$$

Recall that birth and annihilation operators obey the commutation equation

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (\text{A.6})$$

and the quadrature operators \hat{x} and \hat{y} are defined in such a way that the commutative relation (1.2) holds for them.

Now we can move on to defining the actions of specific operators.

A.1 Controlled-Z

The CZ gate operator with a weight coefficient of g_{jk} acting on the j and k oscillators has the form (2.13). Consider the action of this operator on the quadrature \hat{y}_j :

$$\hat{C}_{Z,jk}^\dagger \hat{y}_j \hat{C}_{Z,jk} = e^{-2ig_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k} \hat{y}_j e^{2ig_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k}. \quad (\text{A.7})$$

This equation, taking into account the Eq. (A.5), can be represented as a series

$$\hat{C}_{Z,jk}^\dagger \hat{y}_j \hat{C}_{Z,jk} = \hat{y}_j - 2ig[\hat{x}_j \hat{x}_k, \hat{y}_j] + \frac{(2ig)^2}{2} [\hat{x}_j \hat{x}_k, [\hat{x}_j \hat{x}_k, \hat{y}_j]] + \dots \quad (\text{A.8})$$

Let us find the commutators in this series:

$$[\hat{x}_j \hat{x}_k, \hat{y}_j] = \hat{x}_j \hat{x}_k \hat{y}_j - \hat{y}_j \hat{x}_j \hat{x}_k = [\hat{x}_j, \hat{y}_j] \hat{x}_k = \frac{i}{2} \hat{x}_k, \quad (\text{A.9})$$

$$[\hat{x}_j \hat{x}_k, [\hat{x}_j \hat{x}_k, \hat{y}_j]] = \frac{i}{2} [\hat{x}_j \hat{x}_k, \hat{x}_k] = 0, \quad (\text{A.10})$$

....

All subsequent commutators will be zero. Then, the action of CZ transformation to the quadrature \hat{y}_j will be given by the equation

$$\hat{C}_{Z,jk}^\dagger \hat{y}_j \hat{C}_{Z,jk} = \hat{y}_j + g \hat{x}_k. \quad (\text{A.11})$$

If we repeat the same for the quadrature \hat{x}_j , then it is obvious that all the commutators in the decomposition, similar to the decomposition (A.8), will be zero. Therefore, the action of the CZ operator on the quadrature \hat{x}_j does not change it, that is

$$\hat{C}_{Z,jk}^\dagger \hat{x}_j \hat{C}_{Z,jk} = \hat{x}_j. \quad (\text{A.12})$$

A.2 Displacement operator

In general, the quadratures' displacement operator by a complex value α has the form

$$\hat{D}_\alpha = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}. \quad (\text{A.13})$$

Consider the action of this operator on the complex field amplitude \hat{a}

$$\hat{D}_\alpha^\dagger \hat{a} \hat{D}_\alpha = e^{-(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})} \hat{a} e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}. \quad (\text{A.14})$$

Given the Eq. (A.5) we can represent (A.14) as

$$\hat{D}_\alpha^\dagger \hat{a} \hat{D}_\alpha = \hat{a} - [\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, \hat{a}] + \frac{1}{2} [\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, [\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, \hat{a}]] + \dots \quad (\text{A.15})$$

Let us define the values of the commutators included in this decomposition:

$$[\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, \hat{a}] = \alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} - \alpha^* \hat{a} \hat{a} - \alpha \hat{a} \hat{a}^\dagger + \alpha^* \hat{a} \hat{a} = \alpha [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = -\alpha, \quad (\text{A.16})$$

$$[\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, [\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, \hat{a}]] = 0, \quad (\text{A.17})$$

....

Since the first of the commutators is equal to a number, all subsequent commutators will be equal to zero. Thus, the action of the displacement operator (A.13) on the complex amplitude of the field \hat{a} will have the form

$$\hat{D}_\alpha^\dagger \hat{a} \hat{D}_\alpha = \hat{a} + \alpha. \quad (\text{A.18})$$

A.3 Cubic phase gate

Let us define the action of the cubic phase gate, whose operator is given by the Eq. (3.5), on the complex field amplitude. To do this, first consider how it acts on the x -quadrature operator:

$$\hat{Q}_\gamma^\dagger \hat{x} \hat{Q}_\gamma = e^{2i\gamma\hat{y}^3} \hat{x} e^{-2i\gamma\hat{y}^3}. \quad (\text{A.19})$$

This equation, given the relation (A.5), can be rewritten as

$$\hat{Q}_\gamma^\dagger \hat{x} \hat{Q}_\gamma = \hat{x} + 2i\gamma[\hat{y}^3, \hat{x}] + \frac{(2i\gamma)^2}{2}[\hat{y}^3, [\hat{y}^3, \hat{x}]] + \dots \quad (\text{A.20})$$

The commutators included in this decomposition are equal:

$$[\hat{y}^3, \hat{x}] = \hat{y}^3 \hat{x} - \hat{x} \hat{y}^3 = \hat{y}^2 \hat{x} \hat{y} - \hat{x} \hat{y}^3 - \frac{i}{2} \hat{y}^2 = \hat{y} \hat{x} \hat{y}^2 - \hat{x} \hat{y}^3 - i \hat{y}^2 = -\frac{3i}{2} \hat{y}^2, \quad (\text{A.21})$$

$$[\hat{y}^3, [\hat{y}^3, \hat{x}]] = 0, \quad (\text{A.22})$$

....

That is, all commutators except the first will be zero. Then we get that the action of the cubic phase gate on the x -quadrature is

$$\hat{Q}_\gamma^\dagger \hat{x} \hat{Q}_\gamma = \hat{x} + 3\gamma\hat{y}^2. \quad (\text{A.23})$$

Obviously, the action of the operator (3.5) on the y -quadrature does not change it, i.e.

$$\hat{Q}_\gamma^\dagger \hat{y} \hat{Q}_\gamma = \hat{y}. \quad (\text{A.24})$$

Therefore, the action of the cubic phase gate on the complex field amplitude \hat{a} will be given by the equation

$$\hat{Q}_\gamma^\dagger \hat{a} \hat{Q}_\gamma = \hat{Q}_\gamma^\dagger (\hat{x} + i\hat{y}) \hat{Q}_\gamma = \hat{a} + 3\gamma\hat{y}^2. \quad (\text{A.25})$$

A.4 Phase shift operator

The phase shift operator by angle θ is

$$\hat{R}_\theta = e^{i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}. \quad (\text{A.26})$$

Let us see how this operator acts on the amplitude \hat{a} , i.e. consider

$$\hat{R}_\theta^\dagger \hat{a} \hat{R}_\theta = e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}} \hat{a} e^{i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}. \quad (\text{A.27})$$

Given the relation (A.5), this equation would be

$$\hat{R}_\theta^\dagger \hat{a} \hat{R}_\theta = \hat{a} - i\theta[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] + \frac{(i\theta)^2}{2!}[\hat{a}^\dagger\hat{a}, [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}]] + \dots \quad (\text{A.28})$$

Find the values of each of the commutators included in this series:

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a} = -\hat{a}, \quad (\text{A.29})$$

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a}, [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}]] = -[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}, \quad (\text{A.30})$$

...

Each successive commutator will equal the operator \hat{a} , the sign of which will alternate.

Substituting the obtained values of the commutator into the Eq. (A.28), we can extract a series corresponding to the decomposition of the exponent with the index $i\theta$. Thus, the phase shift operator acts on the amplitude \hat{a} as

$$\hat{R}_\theta^\dagger \hat{a} \hat{R}_\theta = \left(1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \dots \right) \hat{a} = e^{i\theta} \hat{a}. \quad (\text{A.31})$$