САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Улицкая Анастасия Юрьевна

Точные неравенства теории приближения пространствами сдвигов

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель
доктор физико–математических наук
доцент О. Л. Виноградов

Санкт–Петербург
2023

Оглавление

Обозначения

В дальнейшем $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ — множества комплексных, вещественных, целых, неотрицательных целых и натуральных чисел соответственно; $[a:b] = [a,b] \cap \mathbb{Z}$. Если из контекста не следует противное, все рассматриваемые пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Если $p \in [1,+\infty)$, то L_p — пространство измеримых 2π-периодических функций f, для которых

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p\right)^{1/p} < +\infty;$$

L_∞ — пространство 2π-периодических существенно ограниченных функций с нормой $\|f\|_{L_\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{[0,2\pi]} |f|$. Аналогично определяются пространства $L_p[a,b]$ и $L_p(\mathbb{R})$.

Далее, при $p \in [1,+\infty]$ обозначим через $W_p^{(r)}$ пространство функций f из L_p, у которых $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in L_p$. Аналогично определяются пространства $W_p^{(r)}[a,b]$ и $W_p^{(r)}(\mathbb{R})$.

При $p \in [1,+\infty)$ также обозначим через $\ell_p(\mathbb{Z})$ пространство двусторонних последовательностей $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, для которых

$$\|a\|_{\ell_p(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^p\right)^{1/p} < +\infty.$$

Символом $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ обозначим пространство гладких финитных на $\mathbb{R}$ функций.

Символом $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ обозначается скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$;

$$E(f,\mathfrak{N})_p = \inf_{T\in\mathfrak{N}} \|f-T\|_p$$

— наилучшее приближение функции f в пространстве L_p множеством $\mathfrak{N} \subset L_p$. Наилучшее приближение в пространствах $L_p[a,b]$ и $L_p(\mathbb{R})$ определяется аналогично и обозначается так же.

Коэффициенты Фурье 2σ-периодической функции f, суммируемой на периоде, и дискретное преобразование Фурье набора $\{c_k\}_{k=0}^{2n-1}$ определяются равенствами

$$c_k(f) = \frac{1}{2\sigma}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} f(y)e^{-ik\frac{\pi}{\sigma}y}\,dy, \qquad \widehat{c}_l = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k e^{-\frac{ilk\pi}{n}}.$$

Запись $f(x) \sim \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\frac{\pi}{\sigma}x}$ означает, что ряд в правой части есть ряд Фурье функции f. Свёртка функций f и g из L_1 определяется равенством

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt,$$

при такой нормировке $c_k(f*g) = c_k(f)c_k(g)$.

Преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy}\,dx.$$

Для функций из $L_2(\mathbb{R})$ определение преобразования Фурье стандартным образом переносится с $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$.

Свёртка функций на оси определяется равенством

$$F*G(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} F(t)G(x-t)\,dt;$$

при такой нормировке $\widehat{F*G} = \widehat{F}\cdot\widehat{G}$.

При $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathbf{S}_{n,\mu}$ обозначается $2n$-мерное пространство 2π-периодических сплайнов порядка μ дефекта 1 по равномерному разбиению $\dfrac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, через $\mathcal{T}_{2n-1}$ — $(2n-1)$-мерное пространство тригонометрических многочленов степени не выше $n-1$. При $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$ через $\grave{\mathbf{S}}_{\sigma,\mu}$ обозначается пространство сплайнов порядка μ минимального дефекта с узлами $\dfrac{j\pi}{\sigma}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Символами f^e и f^o обозначаются соответственно чётная и нечётная части функции f, т.е.

$$f^e = \frac{f+f(-\cdot)}{2}, \qquad f^o = \frac{f-f(-\cdot)}{2}.$$

Напомним, что *n-поперечником по Колмогорову* множества A в нормированном пространстве X называется величина

$$d_n(A;X) = \inf_{X_n}\sup_{x\in A}\inf_{y\in X_n}\|x-y\|_X,$$

где первый инфимум берётся по всем подпространствам X_n пространства X размерности не выше n.

Введение

Диссертация посвящена установлению ряда точных неравенств для среднеквадратичного приближения различных классов функций пространствами сдвигов.

Диссертация состоит из трёх глав, разделённых на параграфы. Нумерация утверждений отдельная для каждого типа утверждений в каждой главе. При ссылках на утверждение другой главы первым указывается номер главы, например: теорема 1.2. Теоремы, не принадлежащие автору, имеют буквенную нумерацию. Нумерация формул в главах двойная и указывает на номер главы и номер формулы в главе, например: формула (2.3).

Первая глава посвящена точным оценкам среднеквадратичных приближений классов периодических свёрток пространствами сдвигов. Её результаты опубликованы в [8] и [18].

Для приближения тригонометрическими многочленами общеизвестно (см., например, [13, теорема 4.2.2]) неулучшаемое на классе $W_2^{(r)}$ неравенство

$$E(f, \mathcal{T}_{2n-1})_2 \leqslant \frac{1}{n^r} \|f^{(r)}\|_2. \tag{1}$$

Неравенство (1) точно даже в смысле теории поперечников, то есть константа $\frac{1}{n^r}$ не может быть уменьшена за счёт перехода к приближающему подпространству размерности не выше $2n$ (см., например, [13, теорема 8.1.3]). Его доказательство, основанное на равенстве Парсеваля, очень просто:

$$E^2(f, \mathcal{T}_{2n-1})_2 = 2\pi \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ |k|\geqslant n}} |c_k(f)|^2 = 2\pi \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ |k|\geqslant n}} \frac{\left|c_k(f^{(r)})\right|^2}{k^{2r}} \leqslant \frac{2\pi}{n^{2r}} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ |k|\geqslant n}} \left|c_k(f^{(r)})\right|^2 \leqslant \frac{1}{n^{2r}} \|f^{(r)}\|_2^2.$$

Аналогичные неравенства для приближений сплайнами были получены в [17] с помощью соотношений двойственности.

Естественным обобщением этого результата является рассмотрение вместо соболевских классов (свёрток с ядрами Бернулли) классов свёрток с другими суммируемыми ядрами. В настоящей главе дано полное описание пространств сдвигов, реализующих точную (в смысле поперечников) константу в неравенстве типа (1) для приближения классов периодических свёрток. Известные неравенства для приближения соболевских классов тригонометрическими многочленами и сплайнами являются частными случаями данного результата.

Отметим, что пространства, порождённые равноотстоящими сдвигами одной функции, играют важную роль в теории аппроксимации, теории всплесков и приложениях. Аппроксимативные свойства таких пространств изучались многими авторами; см., например, [22, 31, 39].

Кроме того, пространства сдвигов и, в частности, пространства тригонометрических многочленов и сплайнов зачастую оказываются экстремальными в тех или иных задачах аппроксимации. Из многочисленных результатов, относящихся к приближению в периодических пространствах C и L_1, отметим следующие. В 1937 году Фавар [23], а также Ахиезер и Крейн [1] построили линейный метод приближения $X_{n,r}$ со значениями в пространстве тригонометрических многочленов порядка не выше $n-1$, такой что для любой $f \in W_p^{(\infty)}$ при $p=\infty$ справедливо неравенство

$$\|f - X_{n,r}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\|f^{(r)}\|_p, \tag{2}$$

причём при любом $n \in \mathbb{N}$ константа

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l(r+1)}}{(2l+1)^{r+1}}$$

на классе $W_\infty^{(r)}$ не может быть уменьшена, даже если заменить левую часть на наилучшее приближение. Никольский [15] распространил соотношения (2) и утверждение об их точности на случай $p=1$. Для приближения соболевских классов сплайнами известны (см., например, [12, 13]) точные при $p = 1, \infty$ неравенства

$$E(f, \mathbf{S}_{2n,\mu})_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\|f^{(r)}\|_p,$$

$r \in \mathbb{N},\ \mu \in \mathbb{Z}_+,\ \mu \geqslant r-1.$

В работе [6] Виноградовым были получены точные неравенства типа (2) для приближения классов периодических свёрток с ядрами, не увеличивающими осцилляцию, пространствами сдвигов нечётной размерности в метриках C и L_1. Другие результаты, касающиеся точных оценок приближения пространствами сдвигов, можно найти, например, в монографии [34].

Прежде чем сформулировать основные теоремы главы, введём необходимые для этого обозначения.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $B \in L_1$. Обозначим через $\mathbb{S}_{B,n}$ пространство функций s, заданных на $\mathbb{R}$ и представимых в виде

$$s(x) = \sum_{j=0}^{2n-1}\beta_j B\left(x - \frac{j\pi}{n}\right), \tag{3}$$

а через $\mathbb{S}_{B,n}^{\times}$ — пространство функций из $\mathbb{S}_{B,n}$, представимых в виде (3) с дополнительным условием

$$\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^j\beta_j = 0.$$

Нетрудно показать (см. §1.1), что пространства $\mathbb{S}_{B,n}$ и $\mathbb{S}_{B,n}^{\times}$ совпадают с линейными оболочками наборов $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n}$ и $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n-1}$, где

$$\Phi_{B,l}(x) = \Phi_{B,n,l}(x) = \frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{2n-1} e^{\frac{ilj\pi}{n}} B\left(x - \frac{j\pi}{n}\right) \sim \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_{l+2n\nu}(B) e^{i(l+2n\nu)x}.$$

При $m \in [1:n]$ обозначим через $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ линейную оболочку набора $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-m}^{m-1}$, а через $\mathbb{S}_{B,n,m}$ — линейную оболочку набора $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-m}^{m}$.

Для $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $Q \subset [1-m:m]$ и набора целых чисел $K = \{\varkappa_l\}_{l\in Q}$ обозначим через $T_{n,m,Q,K}$ линейную оболочку набора $\{x \mapsto e^{i(l+2n\varkappa_l)x}\}_{l\in Q}$.

В главе устанавливаются аналоги неравенства (1) для приближения пространствами сдвигов классов функций f, представимых в виде

$$f = G * \varphi + g, \quad \varphi \in L_2,\ g \in T_{n,m,Q,K},$$

где $G \in L_1$, $G \perp T_{n,m,Q,K}$.

Из [34, теоремы IV.2.5 и IV.3.1] следует, что для рассматриваемого класса функций при $q = \dim T_{n,m,Q,K} \leqslant n$

$$d_n\bigl(\{G * \varphi + g \colon \|\varphi\|_2 \leqslant 1,\ g \in T\}; L_2\bigr) = |c^*_{n+1-q}(G)|,$$

где $|c^*_k(G)|$, $k \in \mathbb{N}$, — k-й в порядке невозрастания элемент последовательности $\{|c_l(G)|\}_{l\in\mathbb{Z}}$. Экстремальным подпространством в данном случае является сумма T и линейной оболочки набора $\{x \mapsto e^{ik_jx}\}_{j=1}^{n-q}$, где номера $k_1, \ldots, k_{n-q}$ таковы, что $|c_{k_j}(G)| = |c^*_j(G)|$, $j = 1, \ldots, n-q$.

В данной главе указывается широкий класс других экстремальных подпространств, а также описываются все пространства сдвигов, для приближения которыми указанного класса функций справедлива оценка вида (1) с точной константой.

Основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $Q \subset [1-m:m-1]$, $q = \operatorname{card} Q$, $K = \{\varkappa_l\}_{l\in Q} \subset \mathbb{Z}$, $B \in L_2$, $G \in L_1$, $G \perp T_{n,m,Q,K}$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Для любой функции f, представимой в виде*

$$f = G * \varphi + g, \quad \varphi \in L_2,\ g \in T_{n,m,Q,K},$$

выполняется неравенство

$$E\bigl(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\bigr)_2 \leqslant |c^*_{2m-q}(G)|\|\varphi\|_2.$$

2. *Коэффициенты Фурье функций B и G удовлетворяют следующим условиям.*

   2.1. *Для любого $l \in Q$ имеем $c_{l+2n\varkappa_l}(B) \neq 0$ и $c_{l+2nk}(B) = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\varkappa_l\}$.*

   2.2. *Для любой пары $(l,k) \in \bigl([1-n:-m] \cup Q \cup [m:n]\bigr) \times \mathbb{Z}$ выполняется неравенство $|c_{l+2nk}(G)| \leqslant |c^*_{2m-q}(G)|$.*

2.3. Для каждого $l \in [1-m : m-1] \setminus Q$ существует не более одного номера $k_l \in \mathbb{Z}$, для которого $|c_{l+2nk_l}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$. Причём если такой номер k_l существует, то выполнены следующие условия.

2.3.1. $c_{l+2nk_l}(B) \neq 0$.

2.3.2. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ из того, что $|c_{l+2nk}(G)| = |c^*_{2m-q}(G)|$, следует, что $c_{l+2nk}(B) = 0$.

2.3.3.

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m-q}(G)|}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2} \geqslant 0.$$

Следующая теорема даёт легко проверяемое условие, достаточное для выполнения пункта 2.3.3 теоремы 1.1.

Теорема 1.3. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $Q \subset [1-m : m-1]$, $q = \operatorname{card} Q$, $K = \{\varkappa_l\}_{l\in Q} \subset \mathbb{Z}$, $B, G \in L_2$, $G \perp T_{n,m,Q,K}$ и коэффициенты Фурье функций B и G удовлетворяют следующим условиям.*

1. *Для любого $l \in Q$ $c_{l+2n\varkappa_l}(B) \neq 0$ и $c_{l+2nk}(B) = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\varkappa_l\}$.*

2. *Для любой пары $(l,k) \in \big([1-n : -m] \cup Q \cup [m : n]\big) \times \mathbb{Z}$ выполняется неравенство $|c_{l+2nk}(G)| \leqslant |c^*_{2m-q}(G)|$.*

3. *Для каждого $l \in [1-m : m-1] \setminus Q$ существует не более одного номера $k_l \in \mathbb{Z}$, для которого $|c_{l+2nk_l}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$. Причём если такой номер k_l существует, то выполнены следующие условия.*

   3.1. $c_{l+2nk_l}(B) \neq 0$, и для всех $k \in \mathbb{Z}$

   $$|c_{l+2nk}(B)| \leqslant \frac{|c_{l+2nk_l}(B)|}{|c_{l+2nk_l}(G)|} |c_{l+2nk}(G)|.$$

   3.2. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ из того, что $|c_{l+2nk}(G)| = |c^*_{2m-q}(G)|$, следует, что $c_{l+2nk}(B) = 0$.

   3.3.

   $$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m-q}(G)|}} \frac{1}{1 - \frac{|c^*_{2m-q}(G)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2}} \geqslant 0.$$

Тогда для любой функции f, представимой в виде

$$f = G * \varphi + g, \quad \varphi \in L_2,\ g \in T_{n,m,Q,K},$$

выполняется неравенство

$$E\big(f, \mathbb{S}^\times_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c^*_{2m-q}(G)| \|\varphi\|_2.$$

Утверждения, аналогичные теоремам 1.1 и 1.3 справедливы и для приближения пространствами $\mathbb{S}_{B,n,m}$.

Отметим частный случай теоремы 1.3 для приближения классов свёрток с симметрично убывающей последовательностью модулей коэффициентов Фурье без внеинтегрального члена.

Следствие 1.6. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B, G \in L_2$, причём коэффициенты Фурье функций B и G удовлетворяют следующим условиям.*

1.

$$|c_k(G)| = |c_{-k}(G)| \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N},$$
$$|c_0(G)| \geqslant \ldots \geqslant |c_{m-1}(G)| > |c_m(G)| > |c_{m+1}(G)| \geqslant |c_{m+2}(G)| \geqslant \ldots.$$

2. Для всех $l \in [1-m : m-1]$ $c_l(B) \neq 0$,

$$|c_{l+2nk}(B)| \leqslant \frac{|c_l(B)|}{|c_l(G)|}|c_{l+2nk}(G)| \quad \text{при всех } k \in \mathbb{Z},$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - \left|\frac{c_m(G)}{c_{l+2nk}(G)}\right|^2} \geqslant 0.$$

Тогда для любой функции f, представимой в виде

$$f = G * \varphi, \quad \varphi \in L_2,$$

выполняются неравенства

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2,$$
$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2.$$

Помимо этого, в главе указана широкая совокупность ядер, удовлетворяющих условиям теоремы 1.3, а также приведены примеры экстремальных приближающих подпространств.

Вторая глава посвящена экстремальным приближающим подпространствам в задачах среднеквадратичной аппроксимации различных классов дифференцируемых функций, заданных на отрезке и удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Её результаты опубликованы в [7].

В [24] Флоатер и Санде рассматривали задачу среднеквадратичной аппроксимации трёх классов функций из $W_2^{(r)}[0,1]$, определяемых некоторыми граничными условиями. При несколько изменённой нормировке (которой мы далее будем придерживаться) эти классы суть

$$H_0^r = \{u \in W_2^{(r)}[0,\pi] \colon u^{(k)}(0) = u^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < r, \quad k \text{ чётно}\},$$
$$H_1^r = \{u \in W_2^{(r)}[0,\pi] \colon u^{(k)}(0) = u^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < r, \quad k \text{ нечётно}\},$$
$$H_2^r = \left\{u \in W_2^{(r)}\left[0, \frac{\pi}{2}\right] : u^{(k)}(0) = u^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leqslant k, l < r, \quad k \text{ чётно}, l \text{ нечётно}\right\}.$$

Рассмотрим множества

$$
\begin{aligned}
A_i^r &= \{u \in H_i^r \colon \|u^{(r)}\|_{L_2[0,\pi]} \leqslant 1\}, \quad i = 0, 1,\\
A_2^r &= \left\{u \in H_2^r \colon \|u^{(r)}\|_{L_2\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \leqslant 1\right\},\\
A^r &= \{u \in W_2^{(r)}[0,1] \colon \|u^{(r)}\|_{L_2[0,1]} \leqslant 1\}.
\end{aligned}
$$

В первой работе, посвящённой поперечникам [30] (см. также перевод [10, с. 186–189]), Колмогоров нашёл поперечники классов A^r и A_1^1 и указал экстремальные приближающие подпространства. Для A_1^1 это линейная оболочка системы косинусов

$$
\{1,\ x \mapsto \sqrt{2}\cos \pi x,\ \ldots,\ x \mapsto \sqrt{2}\cos \pi(n-1)x\}.
$$

Мелкман и Микелли [33] показали, что для класса A^r существуют два экстремальных подпространства сплайнов степени $r-1$ и $2r-1$. Этим и другим вопросам теории поперечников посвящена монография [34].

Флоатер и Санде вычислили поперечники классов A_i^r и указали экстремальные подпространства, состоящие из тригонометрических функций: для A_0^r, A_1^r, A_2^r они суть соответственно

$$
\operatorname{span}\{x \mapsto \sin kx\}_{k=1}^n, \quad \operatorname{span}\{x \mapsto \cos kx\}_{k=0}^{n-1}, \quad \operatorname{span}\{x \mapsto \sin(2k-1)x\}_{k=1}^n.
$$

Кроме того, авторы доказали, что для классов A_i^r существуют экстремальные сплайновые пространства, которые определяются следующим образом.

Пусть $P_0 = P_1 = \pi$, $P_2 = \pi/2$, τ — вектор узлов, расположенных на $(0, P_i)$ и различных. Обозначим через $S_{d,\tau,i}$ пространства сплайнов степени d дефекта 1 на $[0, P_i]$ и рассмотрим их n-мерные подпространства

$$
\begin{aligned}
S_{d,0} &= \{s \in S_{d,\tau_0,0} \colon s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d, \quad k \text{ чётно}\},\\
S_{d,1} &= \{s \in S_{d,\tau_1,1} \colon s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d, \quad k \text{ нечётно}\},\\
S_{d,2} &= \left\{s \in S_{d,\tau_2,2} \colon s^{(k)}(0) = s^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leqslant k, l \leqslant d \quad k \text{ чётно, } l \text{ нечётно}\right\},
\end{aligned}
$$

где векторы узлов τ_i при $i = 0, 1, 2$ задаются формулами

$$
\tau_0 = \begin{cases} \left\{\frac{k\pi}{n+1}\right\}_{k=1}^n, & d \text{ нечётно},\\ \left\{\frac{k\pi}{n+1} + \frac{\pi}{2(n+1)}\right\}_{k=0}^n, & d \text{ чётно},\end{cases}
$$

$$
\tau_1 = \begin{cases} \left\{\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right\}_{k=0}^{n-1}, & d \text{ нечётно},\\ \left\{\frac{k\pi}{n}\right\}_{k=1}^{n-1}, & d \text{ чётно},\end{cases}
$$

$$
\tau_2 = \begin{cases} \left\{\frac{k\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2(2n+1)}\right\}_{k=0}^{n-1}, & d \text{ чётно},\\ \left\{\frac{k\pi}{2n+1}\right\}_{k=1}^n, & d \text{ нечётно}.\end{cases}
$$

В [24] было доказано, что для всех $d \geqslant r-1$ пространства сплайнов $S_{d,i}$ являются оптимальными приближающими пространствами для классов A_i^r, $i = 0,1,2$. Часть этих результатов для пространств A_0^r была получена Флоатером и Санде ранее в [25].

Как мы видим, узлы в каждом из пространств $S_{d,i}$ равноотстоящие, однако конкретный вид вектора узлов определяется чётностью d. В данной главе мы показываем, что классы A_i^r имеют экстремальные сплайновые приближающие пространства с обоими типами узлов, указанными в определении τ_i. Разумеется, в случае узлов τ_i при противоположных чётностях d необходимо добавить или, наоборот, ослабить граничные условия, чтобы размерность полученного пространства равнялась n. Кроме того, мы указываем широкую совокупность других экстремальных подпространств в рассматриваемой задаче.

Наша техника заключается в сведении задачи к периодической и применении результатов главы 1.

Рассмотрим следующие классы функций:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{H}_0^r &= \{u \in W_2^{(r)} \colon u \text{ нечётна}\},\\
\widetilde{H}_1^r &= \{u \in W_2^{(r)} \colon u \text{ чётна}\},\\
\widetilde{H}_2^r &= \left\{u \in W_2^{(r)} \colon u \text{ нечётна, } u\left(\cdot + \frac{\pi}{2}\right) \text{ чётна}\right\}.
\end{aligned}
$$

Полагая

$$
\widetilde{A}_i^r = \{u \in \widetilde{H}_i^r \colon \|u^{(r)}\|_2 \leqslant 1\}, \quad i = 0,1,2,
$$

мы получаем, что

$$
\begin{gathered}
d_n(\widetilde{A}_0^r; L_2) = d_n(A_0^r; L_2[0,\pi]), \quad d_n(\widetilde{A}_1^r; L_2) = d_n(A_1^r; L_2[0,\pi]),\\
d_n(\widetilde{A}_2^r; L_2) = d_n\left(A_2^r; L_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right).
\end{gathered}
$$

Таким образом, упомянутые выше задачи для непериодических классов могут быть сведены к аналогичным для периодической ситуации, в которой применимы результаты главы 1.

Рассмотрим m-мерные подпространства $\mathbb{S}_{B,n,m}^{\times}$:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^0 &= \operatorname{span}\{\Phi_{B,l}^o\}_{l=1}^m \qquad \text{при } m+1 \leqslant n,\\
\widetilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^1 &= \operatorname{span}\{\Phi_{B,0}\} \oplus \operatorname{span}\{\Phi_{B,l}^e\}_{l=1}^{m-1} \qquad \text{при } m \leqslant n,\\
\widetilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^2 &= \operatorname{span}\{\Phi_{B,2l-1}^o\}_{l=1}^m \qquad \text{при } 2m+1 \leqslant n.
\end{aligned}
$$

Следующая теорема даёт условия экстремальности подпространства $\widetilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^0$ для класса $\widetilde{H}_0^r$.

Теорема 2.2. *Пусть $r,n,m \in \mathbb{N}$, $m+1 \leqslant n$, а коэффициенты Фурье функции $B \in L_2$ удовлетворяют следующим условиям.*

1. *Для любого $l \in [1:m]$ существует $\gamma_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такое, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ верно $c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B)$.*

2. *Для всех* $\nu \in \mathbb{N}$ *верно* $c_{2n\nu}(B) = c_{-2n\nu}(B)$.

3. *Для всех* $l \in [1:m]$ *будет* $c_l(B) \neq 0$ *и*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{(m+1)^{2r}}} \geqslant 0.$$

Тогда для любой функции $u \in \widetilde{H}_0^r$ *выполняется неравенство*

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r}\|u^{(r)}\|_2.$$

Аналогичные теоремы справедливы для классов $\widetilde{H}_1^r$ и $\widetilde{H}_2^r$.

Кроме того, в главе приведены примеры функций B, для которых справедлива теорема 2.2 и аналогичные ей теоремы для классов $\widetilde{H}_1^r$ и $\widetilde{H}_2^r$, а также описаны сплайновые экстремальные подпространства, обобщающие результаты [24].

Третья глава посвящена точным неравенствам для оценки наилучшего среднеквадратичного приближения классов свёрток пространствами сдвигов на оси. Результаты этой главы опубликованы в [37] и [19].

В настоящей главе, как и в первой, устанавливаются аналоги неравенства (1), но для приближения в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Среди работ, посвящённых точным значениям приближений классов функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, отметим следующие. Оценка (1) для приближения целыми функциями экспоненциального типа и её точность очевидны и общеизвестны. В [17] получен аналог неравенства (1) для приближений сплайнами на прямой и отмечено без доказательства, что оно точно в смыле средних поперечников (определение будет дано позже). Поперечники соболевских классов найдены в [14]. Там же можно найти результаты об экстремальности пространств целых функций экспоненциального типа и сплайнов. Для приближения классов свёрток с суммируемым ядром точные значения средних поперечников и экстремальные подпространства, состоящие из функций с носителем преобразования Фурье в заданном ограниченном множестве, найдены в [32].

В пространствах C и L_1 на оси точные неравенства для приближения пространствами сдвигов были получены линейными методами Виноградовым [4, 5].

Чтобы сформулировать основные результаты главы, введём необходимые обозначения.

Пусть $\sigma > 0$, $B \in L_2(\mathbb{R})$. Обозначим

$$\Phi_{B,\sigma}(x,y) = \frac{1}{2\sigma}\sum_{j\in\mathbb{Z}} B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right) e^{i\frac{j\pi}{\sigma}y}.$$

Обозначим через $\mathbb{S}_{B,\sigma}$ пространство функций s, заданных на вещественной оси и представимых в виде

$$s(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right), \quad \beta \in \ell_2(\mathbb{Z}). \tag{4}$$

При $0<\rho<\sigma$ обозначим через $\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ пространство функций s из $\mathbb{S}_{B,\sigma}$, имеющих вид (4) и удовлетворяющих дополнительному условию

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\beta_j e^{-i\frac{j\pi}{\sigma}y}=0 \quad \text{для почти всех} \quad \rho<|y|\leqslant\sigma$$

(сходимость ряда понимается в $L_2[-\sigma,\sigma]$). При $\rho=\sigma$ под $\mathbb{S}_{B,\sigma,\sigma}$ будем понимать $\mathbb{S}_{B,\sigma}$.

Для заданной почти всюду на $\mathbb{R}$ комплекснозначной функции γ обозначим через T_γ множество функций $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$, для которых произведение $\gamma\widehat{\varphi}$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R})$. Далее, через $\mathfrak{F}_\gamma$ обозначим пространство функций f, преобразование Фурье которых имеет вид

$$\widehat{f}=\gamma\widehat{\varphi}, \quad \varphi\in T_\gamma. \tag{5}$$

По определению $\mathfrak{F}_\gamma$ — подпространство $L_2(\mathbb{R})$.

Отметим два частных случая пространств $\mathfrak{F}_\gamma$.

1. Если γ есть преобразование Фурье некоторой функции $G\in L_1(\mathbb{R})$, то $\mathfrak{F}_\gamma$ есть класс свёрток с ядром G. В этом случае T_γ есть всё пространство $L_2(\mathbb{R})$.

2. Если $\gamma(y)=\frac{1}{(iy)^r}$, $r\geqslant 1$, то $\mathfrak{F}_\gamma$ есть пространство Соболева $W_2^{(r)}(\mathbb{R})$. Пространство T_γ в этом случае состоит из r-х производных функций из $W_2^{(r)}(\mathbb{R})$.

Заметим, что здесь и далее, если не оговорено иное, r необязательно целое.

Пусть A — подмножество $\mathbb{R}$ конечной меры Лебега. Его симметризацией называется интервал $A^*=\left(-\frac{\operatorname{mes}A}{2},\frac{\operatorname{mes}A}{2}\right)$.

Для заданной на $\mathbb{R}$ функции f с вещественными или комплексными значениями, такой что $f(x)\to 0$ при $x\to\infty$, через f^* обозначим симметрично убывающую перестановку функции $|f|$, то есть

$$f^*(x)=\int\limits_0^\infty \chi_{\{x\in\mathbb{R}\colon |f(x)|>t\}^*}(t)\,dt.$$

Следующая теорема даёт описание всех пространств сдвигов, для приближения которыми класса $\mathfrak{F}_\gamma$ справедлива точная оценка типа (1).

Теорема 3.1. *Пусть $0<\rho\leqslant\sigma$, $B\in L_2(\mathbb{R})$, множество $Q\subset\mathbb{R}$ пусто или конечно, а функции $\left\{B\left(\cdot-\frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образуют систему Рисса в $L_2(\mathbb{R})$. Предположим также, что функция $\gamma\colon\mathbb{R}\setminus Q\to\mathbb{C}$ удовлетворяет следующим условиям:*

- *γ непрерывна на $\mathbb{R}\setminus Q$, $\quad\gamma(y)\to 0$ при $y\to\infty$;*
- *для всех $q\in Q$ $\;|\gamma(y)|\to\infty$ при $y\to q$.*

Тогда следующие утверждения равносильны.

1. Для любой функции $f\in\mathfrak{F}_\gamma$ вида (5) выполняется неравенство

$$E\big(f,\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2\leqslant\gamma^*(\rho)\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{6}$$

2. Функции $\widehat{B}$ и γ удовлетворяют следующим условиям.

2.1. Для почти всех $y \in (-\sigma, \sigma) \setminus (-\rho, \rho)$ и всех $k \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство $|\gamma(y + 2k\sigma)| \leqslant \gamma^*(\rho)$.

2.2. Для почти всех $y \in (-\rho, \rho)$ существует не более одного номера $k_y \in \mathbb{Z}$, для которого $|\gamma(y + 2k_y\sigma)| > \gamma^*(\rho)$. Причём если такой номер k_y существует, то выполнены следующие условия.

2.2.1. $\widehat{B}(y + 2k_y\sigma) \neq 0$.

2.2.2. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ из того, что $|\gamma(y + 2k\sigma)| = \gamma^*(\rho)$, следует, что $\widehat{B}(y + 2k\sigma) = 0$.

2.2.3.

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |\gamma(y+2k\sigma)|\neq\gamma^*(\rho)}} \frac{|\widehat{B}(y + 2k\sigma)|^2}{|\gamma(y + 2k\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2} \geqslant 0.$$

Константа $\gamma^*(\rho)$ в правой части неравенства (6) точная.

Как и в первой главе, доказано легко проверяемое условие, достаточное для выполнения неравенства (6). Сформулируем частный случай этого условия для классов свёрток с симметрично убывающим модулем преобразования Фурье.

Следствие 3.5. *Пусть $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$, $G \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, функции $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образуют систему Рисса в $L_2(\mathbb{R})$ и преобразования Фурье функций B и G удовлетворяют следующим условиям.*

1. Функция $|\widehat{G}|$ симметрично убывает и непостоянна в окрестности точек $-\rho$ и ρ.

2. Для почти всех $y \in (-\rho, \rho)$ будет $\widehat{B}(y) \neq 0$,

$$|\widehat{B}(y + 2k\sigma)| \leqslant \frac{|\widehat{B}(y)|}{|\widehat{G}(y)|}|\widehat{G}(y + 2k\sigma)| \quad \text{при всех } k \in \mathbb{Z},$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - \frac{|\widehat{G}(\rho)|^2}{|\widehat{G}(y+2k\sigma)|^2}} \geqslant 0.$$

Тогда для любой функции f, представимой в виде

$$f = G * \varphi, \quad \varphi \in L_2(\mathbb{R}),$$

выполняется неравенство

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant |\widehat{G}(\rho)| \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Помимо этого, в главе указаны примеры приближаемых классов функций и приближающих подпространств, удовлетворяющих условиям основной теоремы.

Последний параграф главы посвящён средним поперечникам. Впервые вопрос об изучении усреднённых характеристик классов (вообще говоря, случайных) функций был поставлен Шенноном [21] и Колмогоровым и Тихомировым [11]. Аналогичная характеристика — средняя размерность — для подпространств функций на прямой, основанная на поперечнике по Колмогорову, была предложена Тихомировым [16]. В дальнейшем вопросы средней размерности и средних поперечников изучались Магарил-Ильяевым [14], Динь Зунгом [9] и другими.

Чтобы сформулировать основные результаты параграфа, напомним определение средней размерности и среднего поперечника по Колмогорову, следуя обозначениям из [14].

Пусть D_p — замкнутый единичный шар пространства $L_p(\mathbb{R})$. Для $A>0$ и заданной на $\mathbb{R}$ функции f обозначим

$$P_A f(t) = \begin{cases} f(t), & |t|<A, \\ 0, & |t|>A. \end{cases}$$

Пусть H — подпространство $L_p(\mathbb{R})$, $p\in[1,+\infty]$. При $\varepsilon, A>0$ положим

$$K(\varepsilon, A, H) = K(\varepsilon, A, H, L_p(\mathbb{R})) = \min\{n\in\mathbb{Z}_+ \colon d_n(P_A(H\cap D_p), L_p(\mathbb{R}))<\varepsilon\}.$$

Величина

$$\overline{\dim}\, H = \overline{\dim}\,(H, L_p(\mathbb{R})) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \varliminf_{A\to+\infty} \frac{K(\varepsilon, A, H, L_p(\mathbb{R}))}{2A}$$

называется *средней размерностью* H в $L_p(\mathbb{R})$.

Пусть $p\in[1,+\infty]$. *Средним ν-поперечником по Колмогорову* множества X в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ называется величина

$$\overline{d_\nu}(X; L_p(\mathbb{R})) = \inf_{X_\nu} \sup_{x\in X} \inf_{y\in X_\nu} \|x-y\|_{L_p(\mathbb{R})},$$

где первый инфимум берётся по всем подпространствам X_ν пространства $L_p(\mathbb{R})$ средней размерности не выше ν.

Символом $\mathfrak{F}^1_\gamma$ обозначим множество функций $f\in\mathfrak{F}_\gamma$, у которых в представлении

$$\widehat{f} = \gamma\widehat{\varphi}, \quad \varphi\in T_\gamma,$$

функция φ удовлетворяет условию $\|\varphi\|_2\leqslant 1$.

В следующей теореме вычислен средний поперечник класса $\mathfrak{F}^1_\gamma$.

Теорема 3.3. *Пусть $\rho>0$, множество $Q\subset\mathbb{R}$ пусто или конечно, а комплекснозначная функция γ удовлетворяет следующим условиям:*

- *γ непрерывна на $\mathbb{R}\setminus Q$, $\quad \gamma(y)\to 0$ при $y\to\infty$;*
- *для всех $q\in Q$ $\ |\gamma(y)|\to\infty$ при $y\to q$.*

Тогда

$$\overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}\big(\mathfrak{F}^1_\gamma, L_2(\mathbb{R})\big) = \gamma^*(\rho).$$

Эта теорема вместе с результатом [38] о средней размерности пространств сдвигов приводит к следующему утверждению о точности неравенства (6) в смысле средних поперечников.

Следствие 3.9. *Если в условиях теоремы 3.1* $\rho = \sigma$ *и ряд*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right|$$

сходится равномерно относительно x *на любом отрезке, то неравенство* (6) *точно в смысле средних поперечников, то есть константа в правой части не может быть уменьшена за счёт перехода к другому приближающему подпространству средней размерности не выше* $\frac{\sigma}{\pi}$.

Глава 1.

Приближение классов периодических свёрток пространствами сдвигов

1.1. Введение

Для приближения тригонометрическими многочленами общеизвестно (см., например, [13, теорема 4.2.2]) неулучшаемое на классе $W_2^{(r)}$ неравенство

$$E(f, \mathcal{T}_{2n-1})_2 \leqslant \frac{1}{n^r} \|f^{(r)}\|_2. \tag{1.1}$$

Неравенство (1.1) точно даже в смысле теории поперечников, то есть константа $\frac{1}{n^r}$ не может быть уменьшена за счёт перехода к приближающему подпространству размерности не выше $2n$ (см., например, [13, теорема 8.1.3]).

Аналогичные неравенства для приближений сплайнами были получены в [17] с помощью соотношений двойственности.

Естественным обобщением данного результата является рассмотрение вместо соболевских классов (свёрток с ядрами Бернулли) классов свёрток с другими суммируемыми ядрами.

В настоящей главе даётся полное описание всех пространств, порождённых равноотстоящими сдвигами одной функции и реализующих точную (в смысле поперечников) константу в неравенстве типа (1.1). Необходимое и достаточное условие экстремальности формулируется в терминах коэффициентов Фурье ядра свёртки G и функции B, порождающей пространство сдвигов. Помимо этого, даны легко проверяемые достаточные условия экстремальности и приведены примеры приближаемых классов функций и приближающих подпространств, удовлетворяющих этим условиям. Известные неравенства для приближения тригонометрическими многочленами и сплайнами являются частными случаями описанных результатов.

Результаты главы опубликованы в в [8] и [18].

1.2. Пространства сдвигов

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $B \in L_1$. Обозначим через $\mathbb{S}_{B,n}$ пространство функций s, заданных на $\mathbb{R}$ и представимых в виде

$$s(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j B\left(x - \frac{j\pi}{n}\right), \tag{1.2}$$

а через $\mathbb{S}_{B,n}^{\times}$ — пространство функций из $\mathbb{S}_{B,n}$, представимых в виде (1.2) с дополнительным условием

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \beta_j = 0. \tag{1.3}$$

Подставляя в (1.2) разложение функции B в ряд Фурье, получаем

$$s(x) \sim \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l(B) e^{il\left(x-\frac{j\pi}{n}\right)} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l(B)\widehat{\beta}_l e^{ilx} \sim \sum_{l=0}^{2n-1} \widehat{\beta}_l \Phi_{B,l}(x), \tag{1.4}$$

где

$$\Phi_{B,l}(x) = \Phi_{B,n,l}(x) = \frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{2n-1} e^{\frac{ilj\pi}{n}} B\left(x - \frac{j\pi}{n}\right) \sim \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_{l+2n\nu}(B) e^{i(l+2n\nu)x}.$$

Ясно, что $\Phi_{B,l} = \Phi_{B,l+2n}$, а условие (1.3) равносильно $\widehat{\beta_n} = 0$. Таким образом, пространства $\mathbb{S}_{B,n}$ и $\mathbb{S}_{B,n}^{\times}$ совпадают с линейными оболочками наборов $\{\Phi_{B,l}\}_{l=0}^{2n-1}$ (или, что то же самое, $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n}$) и $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n-1}$. При $m \in [1:n]$ обозначим через $\mathbb{S}_{B,n,m}^{\times}$ линейную оболочку набора $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-m}^{m-1}$, а через $\mathbb{S}_{B,n,m}$ — линейную оболочку набора $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-m}^{m}$.

Функции $\Phi_{B,l}$ ортогональны: $\langle \Phi_{B,l}, \Phi_{B,j}\rangle_{L_2} = 0$ при $l \neq j$, а

$$\frac{1}{2\pi}\|\Phi_{B,l}\|_2^2 = D_{B,l} = D_{B,n,l} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |c_{l+2n\nu}(B)|^2.$$

Линейная независимость наборов $\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{n}\right)\}_{j=0}^{2n-1}$ и $\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{n}\right)\}_{j=1-n}^{n-1}$ равносильна тому, что функции $\Phi_{B,l}$ ненулевые при $l \in [1-n:n]$ и $l \in [1-n:n-1]$ соответственно. В этом случае системы $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n}$ и $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n-1}$ образуют ортогональные базисы в пространствах $\mathbb{S}_{B,n}$ и $\mathbb{S}_{B,n}^{\times}$. Ортонормированные базисы образуют функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi D_{B,l}}}\Phi_{B,l}$.

Коэффициенты Фурье $\zeta_{B,l}(f)$ функции $f \in L_1$ по системе $\{\Phi_{B,l}\}$ выражаются через коэффициенты Фурье f по тригонометрической системе формулой

$$\zeta_{B,l}(f) = \frac{1}{2\pi D_{B,l}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)} e^{-i(l+2n\nu)t}\,dt = \frac{1}{D_{B,l}}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(f).$$

Если функция $\Phi_{B,l}$ нулевая, договоримся считать $\zeta_{B,l}(f) = 0$. Выразим наилучшее приближение функции $f \in L_2$ пространством $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ через коэффициенты Фурье:

$$E^2\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 = \left\| f - \sum_{l=1-m}^{m-1} \zeta_{B,l}(f)\Phi_{B,l} \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \left\| \sum_{l=1-m}^{m-1} \zeta_{B,l}(f)\Phi_{B,l} \right\|_2^2 =$$
$$= 2\pi \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_l(f)|^2 - \sum_{l=1-m}^{m-1} \frac{1}{D_{B,l}} \left| \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)} c_{l+2n\nu}(f) \right|^2 \right). \qquad (1.5)$$

Аналогичная формула справедлива и для $E(f, \mathbb{S}_{B,n,m})_2$.

Если B есть ядро Дирихле

$$D_{n-1}(t) = \sum_{k=1-n}^{n-1} e^{ikt},$$

то $\mathbb{S}_{B,n} = \mathbb{S}^{\times}_{B,n} = \mathcal{T}_{2n-1}$, $\mathbb{S}_{B,n,m} = \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m} = \mathcal{T}_{2m-1}$, $\Phi_{B,n} = 0$, а $\Phi_{B,l}$ при $|l| < n$ суть обычные экспоненты. Если же $B = D_n$, то $\mathbb{S}_{B,n}$ есть сумма $\mathcal{T}_{2n-1}$ и линейной оболочки функции $x \mapsto \cos nx$.

В случае, когда B есть B-сплайн

$$B_{n,\mu}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}k} - 1}{i\frac{\pi}{n}k} \right)^{\mu+1} e^{ikt}, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+$$

(здесь и далее при $k = 0$ дробь считается равной 1), получаем, что $\mathbb{S}_{B,n}$ — это пространство сплайнов $\mathbf{S}_{n,\mu}$. Функции

$$\Phi_{B_{n,\mu},l}(x) = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}l} - 1}{i\frac{\pi}{n}} \right)^{\mu+1} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i(l+2n\nu)x}}{(l+2n\nu)^{\mu+1}},$$

образующие в нём ортогональный базис, называются *экспоненциальными сплайнами* (по принятому соглашению $\Phi_{B_{n,\mu},0}(x) = 1$). Линейную оболочку системы $\{\Phi_{B_{n,\mu},l}\}_{l=1-n}^{n-1}$ обозначим через $\mathbf{S}^{\times}_{n,\mu}$. Экспоненциальные сплайны, вообще говоря, непериодические, введены в рассмотрение Шёнбергом, основы теории и исторические комментарии содержатся в [35]. Ортогональность периодических экспоненциальных сплайнов отмечалась многими авторами; по-видимому, самые ранние работы на эту тему — [26, 28]. Пространства $\mathbf{S}^{\times}_{n,\mu}$ и $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$ рассматривались Виноградовым [2, 6].

1.3. Основные результаты

Для $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $Q \subset [1-m : m]$ и набора целых чисел $K = \{\varkappa_l\}_{l\in Q}$ обозначим через $T_{n,m,Q,K}$ линейную оболочку набора $\{x \mapsto e^{i(l+2n\varkappa_l)x}\}_{l\in Q}$.

Далее нам понадобится условие, при котором $T_{n,m,Q,K}$ является подпространством пространства сдвигов.

Лемма 1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $Q \subset [1-m : m-1]$, $K = \{\varkappa_l\}_{l\in Q} \subset \mathbb{Z}$, $B \in L_1$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *$T_{n,m,Q,K}$ — подпространство $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$.*

2. *Для любого $l \in Q$ $c_{l+2n\varkappa_l}(B) \neq 0$ и $c_{l+2nk}(B) = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\varkappa_l\}$.*

Аналогичное утверждение верно для $\mathbb{S}_{B,n,m}$ при $Q \subset [1-m:m]$.

Доказательство. Утверждение $2 \Rightarrow 1$ сразу же следует из определения функций $\Phi_{B,l}$. Докажем импликацию $1 \Rightarrow 2$. Пусть $e^{i(l+2n\varkappa_l)\cdot} \in \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ для всех $l \in Q$. Тогда по формуле (1.4) для некоторого набора $\{\beta_j\}$ имеем

$$e^{i(l+2n\varkappa_l)x} \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\beta}_j c_j(B) e^{ijx}.$$

Следовательно,

$$\widehat{\beta}_j c_j(B) = \begin{cases} 1, & j = l + 2n\varkappa_l, \\ 0, & j \neq l + 2n\varkappa_l. \end{cases}$$

Отсюда $c_{l+2n\varkappa_l}(B) \neq 0$, $\widehat{\beta}_{l+2n\varkappa_l} \neq 0$. Ввиду $2n$-периодичности $\widehat{\beta}$ при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\varkappa_l\}$ будет $\widehat{\beta}_{l+2nk} \neq 0$, а тогда $c_{l+2nk}(B) = 0$, то есть верно утверждение 2.

Доказательство для $\mathbb{S}_{B,n,m}$ аналогично. □

Следующая общая теорема даёт критерии экстремальности подпространства $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ в терминах коэффициентов Фурье функций B и G.

Теорема 1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $Q \subset [1-m:m-1]$, $q = \operatorname{card} Q$, $K = \{\varkappa_l\}_{l\in Q} \subset \mathbb{Z}$, $B \in L_2$, $G \in L_1$, $G \perp T_{n,m,Q,K}$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Для любой функции f, представимой в виде*

$$f = G * \varphi + g, \quad \varphi \in L_2,\ g \in T_{n,m,Q,K}, \tag{1.6}$$

выполняется неравенство

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c^*_{2m-q}(G)|\|\varphi\|_2. \tag{1.7}$$

2. *Коэффициенты Фурье функций B и G удовлетворяют следующим условиям.*

   2.1. *Для любого $l \in Q$ имеем $c_{l+2n\varkappa_l}(B) \neq 0$ и $c_{l+2nk}(B) = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\varkappa_l\}$.*

   2.2. *Для любой пары $(l,k) \in \big([1-n:-m] \cup Q \cup [m:n]\big) \times \mathbb{Z}$ выполняется неравенство $|c_{l+2nk}(G)| \leqslant |c^*_{2m-q}(G)|$.*

   2.3. *Для каждого $l \in [1-m:m-1] \setminus Q$ существует не более одного номера $k_l \in \mathbb{Z}$, для которого $|c_{l+2nk_l}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$. Причём если такой номер k_l существует, то выполнены следующие условия.*

      2.3.1. *$c_{l+2nk_l}(B) \neq 0$.*

2.3.2. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ из того, что $|c_{l+2nk}(G)| = |c^*_{2m-q}(G)|$, следует, что $c_{l+2nk}(B) = 0$.

2.3.3.

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m-q}(G)|}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2} \geqslant 0.$$

Доказательство. Из первого утверждения теоремы следует, что $T_{n,m,Q,K}$ содержится в $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$, а тогда по лемме 1 верно утверждение 2.1. С другой стороны, из второго утверждения теоремы по лемме 1 тоже следует, что $T_{n,m,Q,K}$ — подпространство $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$. Поэтому в неравенстве (1.7) достаточно рассматривать функции f, у которых в представлении (1.6) $g = 0$. Тогда, учитывая (1.5), неравенство (1.7) можно переписать в виде

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{j+2n\varkappa_j\}_{j\in Q}} \bigl|c_l(G)\bigr|^2\bigl|c_l(\varphi)\bigr|^2 - \sum_{l\in[1-m:m-1]\setminus Q} \frac{1}{D_{B,l}} \left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(G)c_{l+2n\nu}(\varphi)\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant |c^*_{2m-q}(G)|^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} \bigl|c_l(\varphi)\bigr|^2.$$

Отсюда видно, что если для некоторой пары $(l,\nu) \in \bigl([1-m : m-1]\setminus Q\bigr)\times\mathbb{Z}$ верно $|c_{l+2n\nu}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$, то для выполнения этого неравенства необходимо, чтобы $c_{l+2n\nu}(B) \neq 0$. Действительно, если $c_{l+2n\nu}(B) = 0$, то неравенство нарушается для функции $\varphi(x) = e^{i(l+2n\nu)x}$ (в комплексном пространстве L_2). В вещественном случае имеем $|c_{l+2n\nu}(G)| = |c_{-l-2n\nu}(G)|$ и из того, что $c_{l+2n\nu}(B) = 0$, следует, что $c_{-l-2n\nu}(B) = 0$, так что неравенство будет нарушаться для $\varphi(x) = \cos((l+2n\nu)x+\alpha)$. Поэтому далее считаем, что для любой пары $(l,\nu) \in \bigl([1-m:m-1]\setminus Q\bigr)\times\mathbb{Z}$ из того, что $|c_{l+2n\nu}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$, следует, что $c_{l+2n\nu}(B) \neq 0$.

Представив суммы в виде повторных, перепишем неравенство в виде

$$\sum_{l=1-n}^{n} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ k\neq\varkappa_l \text{ при } l\in Q}} |c_{l+2nk}(G)|^2|c_{l+2nk}(\varphi)|^2 - \sum_{l\in[1-m:m-1]\setminus Q} \frac{1}{D_{B,l}} \left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(G)c_{l+2n\nu}(\varphi)\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant |c^*_{2m-q}(G)|^2 \sum_{l=1-n}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_{l+2nk}(\varphi)|^2.$$

Поскольку в l-м слагаемом участвуют коэффициенты только с номерами $l+2n\nu$, последнее неравенство равносильно системе

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_{l+2nk}(G)|^2|c_{l+2nk}(\varphi)|^2 - \frac{1}{D_{B,l}} \left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(G)c_{l+2n\nu}(\varphi)\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant |c^*_{2m-q}(G)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_{l+2nk}(\varphi)|^2, \quad l \in [1-m:m-1]\setminus Q,$$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{\varkappa_l\}} |c_{l+2nk}(G)|^2|c_{l+2nk}(\varphi)|^2 \leqslant |c^*_{2m-q}(G)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_{l+2nk}(\varphi)|^2, \quad l \in Q,$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_{l+2nk}(G)|^2 |c_{l+2nk}(\varphi)|^2 \leqslant |c^*_{2m-q}(G)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_{l+2nk}(\varphi)|^2,$$
$$l \in [1-n:-m]\cup[m:n].$$

Неравенства для $l \in [1-n : -m] \cup [m : n]$ и $l \in Q$ выполняются тогда и только тогда, когда выполнено условие 2.2 (заметим, что для $l \in Q$ $c_{l+2n\varkappa_l}(G) = 0$ в силу ортогональности функции G пространству $T_{n,m,Q,K}$). Поскольку неравенство для $l \in [1-m : m-1] \setminus Q$ очевидно в случае, если $|c_{l+2nk}(G)| \leqslant |c^*_{2m-q}(G)|$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, далее рассматриваем только те $l \in [1-m : m-1] \setminus Q$, для которых $|c_{l+2nk}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$ хотя бы для одного номера k. В этом случае первое неравенство системы означает, что квадратичная форма

$$\langle A_l u, u\rangle_{\ell_2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2\right)|u_k|^2 - \frac{1}{D_{B,l}}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(G)u_\nu\right|^2$$

неположительна. Здесь $u \in \ell_2$, а оператор $A_l \colon \ell_2 \to \ell_2$ определён формулой

$$(A_l u)_k = \left(|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2\right)u_k - \frac{c_{l+2nk}(B)\overline{c_{l+2nk}(G)}}{D_{B,l}} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(G)u_\nu.$$

Неположительность квадратичной формы оператора A_l равносильна неположительности всех его собственных чисел, то есть тому, что система уравнений

$$\begin{gathered}\left(|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2 - \lambda\right)u_k - \\ -\frac{c_{l+2nk}(B)\overline{c_{l+2nk}(G)}}{D_{B,l}} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(G)u_\nu = 0, \quad k\in\mathbb{Z}\end{gathered} \tag{1.8}$$

не имеет нетривиальных решений $\{u_k\}$ для положительных λ, то есть не имеет положительных корней λ при $u \neq \mathbb{O}$.

Заметим, что если существуют два различных номера $k, k' \in \mathbb{Z}$, для которых выполнено $|c_{l+2nk}(G)| = |c_{l+2nk'}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$, то система (1.8), очевидно, имеет положительный корень $\lambda = |c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2$.

Если $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(G)u_\nu = 0$, то

$$\left(|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2 - \lambda\right)u_k = 0$$

при всех $k \in \mathbb{Z}$. При каждом положительном λ выражение в скобках может обнулиться разве что для одного номера $k' \in \mathbb{Z}$, откуда $u_k = 0$ при всех $k \neq k'$. Поэтому $u_{k'} \neq 0$, а тогда $c_{l+2nk'}(B) = 0$, чего, как мы показали, не может быть при $|c_{l+2nk'}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$.

Следовательно, $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(G)u_\nu \neq 0$, а тогда и

$$|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2 - \lambda \neq 0,$$

ни для каких $k \in \mathbb{Z}$, поскольку условие $|c_{l+2nk}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$ влечёт $c_{l+2nk}(B) \neq 0$. Деля равенство (1.8) на $|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2 - \lambda$, умножая на $\overline{c_{l+2nk}(B)}c_{l+2nk}(G)$ и суммируя по всем целым k, получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2nk}(B)}c_{l+2nk}(G)u_k -$$
$$-\frac{1}{D_{B,l}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2|c_{l+2nk}(G)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2 - \lambda}\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(G)u_\nu\right) = 0,$$

что равносильно

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |c_{l+2n\nu}(B)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2|c_{l+2nk}(G)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2 - \lambda}.$$

Перенеся члены в одну часть и приведя к общему знаменателю, преобразуем уравнение к виду

$$\Psi_l(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2 - \lambda} = 0. \tag{1.9}$$

Обозначим $\Pi = \{k \in \mathbb{Z}\colon |c_{l+2nk}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|\}$. Поскольку $G \in L_1$, в силу теоремы Римана–Лебега множество Π конечно. Предположим, что Π содержит хотя бы два элемента. Заметим, что все положительные нули знаменателей из (1.9) различны, так как для $k, k' \in \Pi$, $k \neq k'$, $|c_{l+2nk}(G)| \neq |c_{l+2nk'}(G)|$. Пусть λ_1 и λ_2 — два последовательных положительных нуля знаменателей из (1.9). Ясно, что на (λ_1, λ_2) функция Ψ_l непрерывна и строго возрастает от $-\infty$ к $+\infty$, поэтому $\Psi_l(\lambda^*) = 0$ для некоторого $\lambda^* \in (\lambda_1, \lambda_2)$. Далее считаем, что неравенство $|c_{l+2nk_l}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$ выполняется для единственного номера $k_l \in \mathbb{Z}$.

Если условие 2.3.2 не выполнено, то есть $|c_{l+2nk'}(G)| = |c^*_{2m-q}(G)|$ для некоторого номера $k' \in \mathbb{Z}$, но $c_{l+2nk'}(B) \neq 0$, то, поскольку на интервале $\big(0, |c_{l+2nk_l}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2\big)$ функция Ψ_l непрерывна и строго возрастает от $-\infty$ к $+\infty$, уравнение (1.9) имеет положительный корень. Если же условие 2.3.2 выполнено, то уравнение (1.9) можно переписать в виде

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m-q}(G)|}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2 - \lambda} = 0.$$

При $\lambda > |c_{l+2nk_l}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2$ все знаменатели в левой части последнего равенства отрицательны, а на $\big(0, |c_{l+2nk_l}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2\big)$ она строго возрастает по λ к $+\infty$. Поэтому отсутствие у неё положительных корней равносильно её неотрицательности при $\lambda = 0$, то есть условию 2.3.3. $\square$

Замечание 1. Неравенство (1.7) обращается в равенство на функциях вида $G * e^{il\cdot}$, где $l \in \{k \in \mathbb{Z}\colon |c_k(G)| = |c^*_{2m-q}(G)|\}$, и их линейных комбинациях. Как отмечалось во введении, оно точно даже в смысле теории поперечников.

Стандартным приёмом неравенство (1.7) можно усилить.

Следствие 1. *Если в условиях пункта 2 теоремы 1 функция B имеет вид $B = G * D + h$*

для некоторых $D \in L_2$, $h \in T_{n,m,Q,K}$, *то для любой функции* f *вида* (1.6) *выполняется неравенство*

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c^*_{2m-q}(G)| E\big(\varphi, \mathbb{S}^{\times}_{D,n,m}\big)_2.$$

Доказательство. Пусть $s = \sum\limits_{l=1-m}^{m-1} \zeta_{D,l}(\varphi)\Phi_{D,l}$ — элемент наилучшего приближения функции φ пространством $\mathbb{S}^{\times}_{D,n,m}$. Положим $\tilde{s} = G * s$. Заметим, что, поскольку $G \perp T_{n,m,Q,K}$, из условия 2.1 теоремы 1 следует, что для всех $l \in Q$ выполняется условие $c_{l+2n\varkappa_l}(h) \neq 0$. Поэтому

$$\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m} = \mathbb{S}^{\times}_{G*D,n,m} \oplus \mathbb{S}^{\times}_{h,n,m} = \mathbb{S}^{\times}_{G*D,n,m} \oplus T_{n,m,Q,K}.$$

Поскольку операции сдвига и свёртки коммутируют, $\tilde{s} \in \mathbb{S}^{\times}_{G*D,n,m}$, и, следовательно, $\tilde{s} \in \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$. Применяя теорему 1 к функции $f - \tilde{s} = G * (\varphi - s) + g$, получаем

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 = E\big(f - \tilde{s}, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c^*_{2m-q}(G)| \|\varphi - s\|_2 = |c^*_{2m-q}(G)| E\big(\varphi, \mathbb{S}^{\times}_{D,n,m}\big)_2.$$

□

Для приближения пространством $\mathbb{S}_{B,n,m}$ справедлив следующий аналог теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $Q \subset [1-m:m]$, $q = \operatorname{card} Q$, $K = \{\varkappa_l\}_{l \in Q} \subset \mathbb{Z}$, $B \in L_2$, $G \in L_1$, $G \perp T_{n,m,Q,K}$. *Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Для любой функции* f*, представимой в виде*

   $$f = G * \varphi + g, \quad \varphi \in L_2,\ g \in T_{n,m,Q,K},$$

   выполняется неравенство

   $$E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c^*_{2m+1-q}(G)| \|\varphi\|_2.$$

2. *Коэффициенты Фурье функций* B *и* G *удовлетворяют следующим условиям.*

   2.1. *Для любого* $l \in Q$ *имеем* $c_{l+2n\varkappa_l}(B) \neq 0$ *и* $c_{l+2nk}(B) = 0$ *при всех* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\varkappa_l\}$.

   2.2. *Для любой пары* $(l,k) \in \big([1-n:-m] \cup Q \cup [m+1:n]\big) \times \mathbb{Z}$ *выполняется неравенство* $|c_{l+2nk}(G)| \leqslant |c^*_{2m+1-q}(G)|$.

   2.3. *Для каждого* $l \in [1-m:m] \setminus Q$ *существует не более одного номера* $k_l \in \mathbb{Z}$*, для которого* $|c_{l+2nk_l}(G)| > |c^*_{2m+1-q}(G)|$. *Причём если такой номер* k_l *существует, то выполнены следующие условия.*

      2.3.1. $c_{l+2nk_l}(B) \neq 0$.

      2.3.2. *Для любого* $k \in \mathbb{Z}$ *из того, что* $|c_{l+2nk}(G)| = |c^*_{2m+1-q}(G)|$*, следует, что* $c_{l+2nk}(B) = 0$.

2.3.3.
$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m+1-q}(G)|}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2-|c^*_{2m+1-q}(G)|^2}\geqslant 0.$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, получаем, что требуемое неравенство равносильно системе

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{l+2nk}(G)|^2|c_{l+2nk}(\varphi)|^2-\frac{1}{D_{B,l}}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(G)c_{l+2n\nu}(\varphi)\right|^2\leqslant$$
$$\leqslant|c^*_{2m+1-q}(G)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{l+2nk}(\varphi)|^2,\quad l\in[1-m:m]\setminus Q,$$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{\varkappa_l\}}|c_{l+2nk}(G)|^2|c_{l+2nk}(\varphi)|^2\leqslant|c^*_{2m+1-q}(G)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{l+2nk}(\varphi)|^2,\quad l\in Q,$$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{l+2nk}(G)|^2|c_{l+2nk}(\varphi)|^2\leqslant|c^*_{2m+1-q}(G)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{l+2nk}(\varphi)|^2,$$
$$l\in[1-n:-m]\cup[m+1:n].$$

Дальнейшее рассуждение аналогично изложенному в доказательстве теоремы 1. □

Сформулируем частные случаи теоремы 1, когда $T_{n,m,Q,K}$ есть $\{0\}$ и пространство констант.

Следствие 2. *Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $m\leqslant n$, $B\in L_2$, $G\in L_1$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. Для любой функции f, представимой в виде

$$f=G*\varphi,\quad \varphi\in L_2,$$

выполняется неравенство

$$E\bigl(f,\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\bigr)_2\leqslant|c^*_{2m}(G)|\|\varphi\|_2.$$

2. Коэффициенты Фурье функций B и G удовлетворяют следующим условиям.

2.1. Для любой пары $(l,k)\in\bigl([1-n:-m]\cup[m:n]\bigr)\times\mathbb{Z}$ выполняется неравенство $|c_{l+2nk}(G)|\leqslant|c^*_{2m}(G)|$.

2.2. Для каждого $l\in[1-m:m-1]$ существует не более одного номера $k_l\in\mathbb{Z}$, для которого $|c_{l+2nk_l}(G)|>|c^*_{2m}(G)|$. Причём если такой номер k_l существует, то выполнены следующие условия.

2.2.1. $c_{l+2nk_l}(B)\neq 0$.

2.2.2. Для любого $k\in\mathbb{Z}$ из того, что $|c_{l+2nk}(G)|=|c^*_{2m}(G)|$, следует, что $c_{l+2nk}(B)=0$.

2.2.3.

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m}(G)|}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2-|c^*_{2m}(G)|^2}\geqslant 0.$$

Следствие 3. *Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $m\leqslant n$, $B\in L_2$, $G\in L_1$, причём функция G ортогональна константам. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Для любой функции f, представимой в виде*

$$f=G*\varphi+c,\quad \varphi\in L_2,\ c\in\mathbb{C}\ \text{или}\ \mathbb{R},$$

выполняется неравенство

$$E\big(f,\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2\leqslant|c^*_{2m-1}(G)|\|\varphi\|_2.$$

2. *Коэффициенты Фурье функций B и G удовлетворяют следующим условиям.*

   2.1. $c_0(B)\neq 0$, *и* $c_{2nk}(B)=0$ *при всех* $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

   2.2. *Для любой пары* $(l,k)\in\big([1-n:-m]\cup\{0\}\cup[m:n]\big)\times\mathbb{Z}$ *выполняется неравенство* $|c_{l+2nk}(G)|\leqslant|c^*_{2m-1}(G)|$.

   2.3. *Для каждого* $l\in[1-m:m-1]\setminus\{0\}$ *существует не более одного номера* $k_l\in\mathbb{Z}$, *для которого* $|c_{l+2nk_l}(G)|>|c^*_{2m-1}(G)|$. *Причём если такой номер* k_l *существует, то выполнены следующие условия.*

      2.3.1. $c_{l+2nk_l}(B)\neq 0$.

      2.3.2. *Для любого* $k\in\mathbb{Z}$ *из того, что* $|c_{l+2nk}(G)|=|c^*_{2m-1}(G)|$, *следует, что* $c_{l+2nk}(B)=0$.

      2.3.3.

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m-1}(G)|}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2-|c^*_{2m-1}(G)|^2}\geqslant 0.$$

Замечание 2. По теореме 2 утверждения, аналогичные следствиям 2 и 3, справедливы и для приближения пространством $\mathbb{S}_{B,n,m}$.

Если последовательность модулей коэффициентов Фурье функции G симметрично убывает, то утверждения следствий 2 и 3 упрощаются.

Следствие 4. *Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $m\leqslant n$, $B\in L_2$, $G\in L_1$, причём коэффициенты Фурье функции G удовлетворяют условиям*

$$|c_k(G)|=|c_{-k}(G)|\quad \text{при всех}\ k\in\mathbb{N},$$
$$|c_0(G)|\geqslant\ldots\geqslant|c_{m-1}(G)|>|c_m(G)|>|c_{m+1}(G)|\geqslant|c_{m+2}(G)|\geqslant\ldots.$$

Тогда следующие утверждения равносильны.

1. *Для любой функции f, представимой в виде*

$$f = G * \varphi, \quad \varphi \in L_2,$$

выполняется неравенство

$$E\bigl(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\bigr)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2. \tag{1.10}$$

2. *Для всех $l \in [1-m : m-1]$ $c_l(B) \neq 0$ и*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c_m(G)|^2} \geqslant 0.$$

Следствие 5. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B \in L_2$, $G \in L_1$, причём коэффициенты Фурье функции G удовлетворяют условиям*

$$|c_0(G)| = 0, \quad |c_k(G)| = |c_{-k}(G)| \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N},$$
$$|c_1(G)| \geqslant \ldots \geqslant |c_{m-1}(G)| > |c_m(G)| > |c_{m+1}(G)| \geqslant |c_{m+2}(G)| \geqslant \ldots.$$

Тогда следующие утверждения равносильны.

1. *Для любой функции f, представимой в виде*

$$f = G * \varphi + c, \quad \varphi \in L_2,\ c \in \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{R},$$

выполняется неравенство

$$E\bigl(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\bigr)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2. \tag{1.11}$$

2. *Коэффициенты Фурье функций B и G удовлетворяют следующим условиям.*

   2.1. *Для всех $l \in [1-m : m-1]$ $c_l(B) \neq 0$.*

   2.2. *$c_{2nk}(B) = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

   2.3. *Для всех $l \in [1-m : m-1] \setminus \{0\}$*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c_m(G)|^2} \geqslant 0.$$

Замечание 3. Поскольку в условиях следствия 4 и следствия 5

$$|c^*_{2m}(G)| = |c^*_{2m+1}(G)| = |c_m(G)| \quad \text{и} \quad |c^*_{2m}(G)| = |c^*_{2m-1}(G)| = |c_m(G)|$$

соответственно, по теореме 2 левые части неравенств (1.10) и (1.11) можно заменить на $E\bigl(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\bigr)_2$.

1.4. Достаточные условия

Дадим условия, достаточные для выполнения пунктов 2.3.3 теорем 1 и 2.

Теорема 3. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $Q \subset [1-m : m-1]$, $q = \operatorname{card} Q$, $K = \{\varkappa_l\}_{l \in Q} \subset \mathbb{Z}$, $B, G \in L_2$, $G \perp T_{n,m,Q,K}$ *и коэффициенты Фурье функций* B *и* G *удовлетворяют следующим условиям.*

1. *Для любого* $l \in Q$ $c_{l+2n\varkappa_l}(B) \neq 0$ *и* $c_{l+2nk}(B) = 0$ *при всех* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\varkappa_l\}$.

2. *Для любой пары* $(l,k) \in \big([1-n : -m] \cup Q \cup [m : n]\big) \times \mathbb{Z}$ *выполняется неравенство* $|c_{l+2nk}(G)| \leqslant |c^*_{2m-q}(G)|$.

3. *Для каждого* $l \in [1-m : m-1] \setminus Q$ *существует не более одного номера* $k_l \in \mathbb{Z}$, *для которого* $|c_{l+2nk_l}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$. *Причём если такой номер* k_l *существует, то выполнены следующие условия.*

   3.1. $c_{l+2nk_l}(B) \neq 0$, *и для всех* $k \in \mathbb{Z}$
$$|c_{l+2nk}(B)| \leqslant \frac{|c_{l+2nk_l}(B)|}{|c_{l+2nk_l}(G)|}|c_{l+2nk}(G)|. \tag{1.12}$$

   3.2. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ *из того, что* $|c_{l+2nk}(G)| = |c^*_{2m-q}(G)|$, *следует, что* $c_{l+2nk}(B) = 0$.

   3.3.
$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)| \neq |c^*_{2m-q}(G)|}} \frac{1}{1 - \frac{|c^*_{2m-q}(G)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2}} \geqslant 0.$$

Тогда для любой функции f, *представимой в виде*
$$f = G * \varphi + g, \quad \varphi \in L_2,\ g \in T_{n,m,Q,K},$$
выполняется неравенство
$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c^*_{2m-q}(G)| \|\varphi\|_2.$$

Доказательство. Достаточно проверить условие 2.3.3 теоремы 1, остальные условия второго пункта теоремы 1 совпадают с условиями доказываемой теоремы. Поскольку при $k \neq k_l$ все знаменатели в 2.3.3 отрицательны, пользуясь неравенствами (1.12) и условием 3.3, имеем
$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)| \neq |c^*_{2m-q}(G)|}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{|c_{l+2nk_l}(B)|^2}{|c_{l+2nk_l}(G)|^2} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)| \neq |c^*_{2m-q}(G)|}} \frac{1}{1 - \frac{|c^*_{2m-q}(G)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2}} \geqslant 0.$$

□

Аналогичное утверждение справедливо и для приближения пространством $\mathbb{S}_{B,n,m}$.

Теорема 4. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $Q \subset [1-m : m]$, $q = \operatorname{card} Q$, $K = \{\varkappa_l\}_{l \in Q} \subset \mathbb{Z}$, $B, G \in L_2$, $G \perp T_{n,m,Q,K}$ *и коэффициенты Фурье функций* B *и* G *удовлетворяют следующим условиям.*

1. *Для любого* $l \in Q$ $c_{l+2n\varkappa_l}(B) \neq 0$ *и* $c_{l+2nk}(B) = 0$ *при всех* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\varkappa_l\}$.

2. *Для любой пары* $(l, k) \in \big([1-n : -m] \cup Q \cup [m+1 : n]\big) \times \mathbb{Z}$ *выполняется неравенство* $|c_{l+2nk}(G)| \leqslant |c^*_{2m+1-q}(G)|$.

3. *Для каждого* $l \in [1-m : m] \setminus Q$ *существует не более одного номера* $k_l \in \mathbb{Z}$, *для которого* $|c_{l+2nk_l}(G)| > |c^*_{2m+1-q}(G)|$. *Причём если такой номер* k_l *существует, то выполнены следующие условия.*

   3.1. $c_{l+2nk_l}(B) \neq 0$, *и для всех* $k \in \mathbb{Z}$

$$|c_{l+2nk}(B)| \leqslant \frac{|c_{l+2nk_l}(B)|}{|c_{l+2nk_l}(G)|} |c_{l+2nk}(G)|.$$

   3.2. *Для любого* $k \in \mathbb{Z}$ *из того, что* $|c_{l+2nk}(G)| = |c^*_{2m+1-q}(G)|$, *следует, что* $c_{l+2nk}(B) = 0$.

   3.3.

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}: \\ |c_{l+2nk}(G)| \neq |c^*_{2m+1-q}(G)|}} \frac{1}{1 - \frac{|c^*_{2m+1-q}(G)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2}} \geqslant 0.$$

Тогда для любой функции f, *представимой в виде*

$$f = G * \varphi + g, \quad \varphi \in L_2,\ g \in T_{n,m,Q,K},$$

выполняется неравенство

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c^*_{2m+1-q}(G)| \|\varphi\|_2.$$

Отметим частные случаи теорем 3 и 4, ограничившись для краткости утверждениями для ядер с симметрично убывающей последовательностью модулей коэффициентов Фурье.

Следствие 6. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B, G \in L_2$, *причём коэффициенты Фурье функций* B *и* G *удовлетворяют следующим условиям.*

1.

$$|c_k(G)| = |c_{-k}(G)| \quad \textit{при всех } k \in \mathbb{N},$$
$$|c_0(G)| \geqslant \ldots \geqslant |c_{m-1}(G)| > |c_m(G)| > |c_{m+1}(G)| \geqslant |c_{m+2}(G)| \geqslant \ldots.$$

2. *Для всех* $l \in [1-m : m-1]$ $c_l(B) \neq 0$,

$$|c_{l+2nk}(B)| \leqslant \frac{|c_l(B)|}{|c_l(G)|} |c_{l+2nk}(G)| \quad \textit{при всех } k \in \mathbb{Z},$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-\left|\frac{c_m(G)}{c_{l+2nk}(G)}\right|^2} \geqslant 0.$$

Тогда для любой функции f, представимой в виде

$$f = G * \varphi, \quad \varphi \in L_2,$$

выполняются неравенства

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2,$$

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2.$$

Следствие 7. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B, G \in L_2$, причём коэффициенты Фурье функций B и G удовлетворяют следующим условиям.*

1.

$$|c_0(G)| = 0, \quad |c_k(G)| = |c_{-k}(G)| \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N},$$
$$|c_1(G)| \geqslant \ldots \geqslant |c_{m-1}(G)| > |c_m(G)| > |c_{m+1}(G)| \geqslant |c_{m+2}(G)| \geqslant \ldots.$$

2. Для всех $l \in [1-m : m-1]$ $c_l(B) \neq 0$.

3. $c_{2nk}(B) = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

4. Для всех $l \in [1-m : m-1] \setminus \{0\}$

$$|c_{l+2nk}(B)| \leqslant \frac{|c_l(B)|}{|c_l(G)|} |c_{l+2nk}(G)| \quad \text{при всех } k \in \mathbb{Z},$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-\left|\frac{c_m(G)}{c_{l+2nk}(G)}\right|^2} \geqslant 0. \tag{1.13}$$

Тогда для любой функции f, представимой в виде

$$f = G * \varphi + c, \quad \varphi \in L_2,\ c \in \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{R},$$

выполняются неравенства

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2,$$

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2.$$

Замечание 4. Для теорем 2 – 4 и следствий 2 – 7 справедливы аналоги замечания 1 и следствия 1, формулировки которых мы для краткости опускаем.

Далее будем предполагать, что функция B удовлетворяет условиям 1 и 3.1 теоремы 3 (или соответствующим им условиям теоремы 4 или следствий 6 – 7).

Дадим условия, при которых свёртка функций, удовлетворяющих условиям теоремы 3, также удовлетворяет этим условиям.

Следующее утверждение является следствием [20, неравенство 2.11.2], однако для полноты картины мы приведём его независимое доказательство.

Лемма 2. *Пусть* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *две последовательности положительных чисел. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_k}+\frac{1}{y_k}} \leqslant \frac{1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\right)^{-1}+\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k\right)^{-1}}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{x_k}+\frac{1}{y_k}} \leqslant \frac{1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^{-1}+\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)^{-1}}. \tag{1.14}$$

Утверждение леммы получается отсюда предельным переходом при $n \to \infty$.

Неравенство (1.14) докажем индукцией по n.

При $n = 1$ оно обращается в равенство, а при $n = 2$ непосредственные вычисления показывают, что оно равносильно неравенству

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \geqslant 0.$$

Пусть неравенство (1.14) верно для номера $n \geqslant 3$; докажем, что оно верно и для номера $n + 1$. По индукционному предположению

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\frac{1}{x_k}+\frac{1}{y_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{x_k}+\frac{1}{y_k}} + \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}}+\frac{1}{y_{n+1}}} \leqslant \frac{1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^{-1}+\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)^{-1}} + \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}}+\frac{1}{y_{n+1}}}.$$

Применяя к наборам $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k, x_{n+1}\right)$ и $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k, y_{n+1}\right)$ неравенство для $n = 2$, получаем требуемое. □

Лемма 3. *Пусть функции* $G_1, G_2 \in L_2$ *удовлетворяют условию*

3.3' Для каждого $l \in [1-m : m-1] \setminus Q$ *и* $i = 1, 2$ *существует не более одного номера* $k_l(G_i) \in \mathbb{Z}$, *для которого выполняется неравенство* $|c_{l+2nk_l(G_i)}(G_i)| > |c^*_{2m-q}(G_i)| \neq 0$. *Причём если такой номер* $k_l(G_i)$ *существует, то*

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G_i)|\neq|c^*_{2m-q}(G_i)|}} \frac{1}{1-\frac{|c^*_{2m-q}(G_i)|^2}{|c_{l+2nk}(G_i)|^2}} \geqslant 0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда если справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \{k \in \mathbb{Z} \colon |c_k(G_1)| > |c^*_{2m-q}(G_1)|\} &= \{k \in \mathbb{Z} \colon |c_k(G_2)| > |c^*_{2m-q}(G_2)|\}, \\ \{k \in \mathbb{Z} \colon |c_k(G_1)| = |c^*_{2m-q}(G_1)|\} &= \{k \in \mathbb{Z} \colon |c_k(G_2)| = |c^*_{2m-q}(G_2)|\}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

то функция $G = G_1 * G_2$ также удовлетворяет условию 3.3'.

Доказательство. Обозначим $L = \{k \in \mathbb{Z}\colon |c_k(G)| \neq |c^*_{2m-q}(G)|\}$. Заметим, что из соотношений (1.15) следует, что $|c^*_{2m-q}(G)| = |c^*_{2m-q}(G_1)||c^*_{2m-q}(G_2)|$,

$$L = \{k \in \mathbb{Z}\colon |c_k(G_1)| \neq |c^*_{2m-q}(G_1)|\} = \{k \in \mathbb{Z}\colon |c_k(G_2)| \neq |c^*_{2m-q}(G_2)|\}$$

и $k_l(G_1) = k_l(G_2) = k_l(G)$ для всех $l \in [1-m : m-1] \setminus Q$.

Положим

$$u_k = \frac{|c^*_{2m-q}(G_1)|^2}{|c_{l+2nk}(G_1)|^2}, \quad v_k = \frac{|c^*_{2m-q}(G_2)|^2}{|c_{l+2nk}(G_2)|^2}.$$

Тогда для $l \in [1-m : m-1] \setminus Q$ имеем $0 < u_{k_l} < 1$, $0 < v_{k_l} < 1$, а при $k \in \mathbb{Z} \setminus \{k_l\}$ $u_k \geqslant 1$, $v_k \geqslant 1$. Требуемое неравенство для функции G равносильно неравенству

$$\frac{1}{1 - u_{k_l} v_{k_l}} \geqslant \sum_{k \in L \setminus \{k_l\}} \frac{1}{u_k v_k - 1},$$

а условие 3.3' для G_1 и G_2 можно переписать в виде

$$u_{k_l} \geqslant 1 - \left(\sum_{k \in L \setminus \{k_l\}} \frac{1}{u_k - 1} \right)^{-1}, \quad v_{k_l} \geqslant 1 - \left(\sum_{k \in L \setminus \{k_l\}} \frac{1}{v_k - 1} \right)^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{1 - u_{k_l} v_{k_l}} \geqslant \frac{1}{\left(\sum\limits_{k \in L \setminus \{k_l\}} \frac{1}{u_k - 1} \right)^{-1} + \left(\sum\limits_{k \in L \setminus \{k_l\}} \frac{1}{v_k - 1} \right)^{-1}}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{k \in L \setminus \{k_l\}} \frac{1}{u_k v_k - 1} \leqslant \sum_{k \in L \setminus \{k_l\}} \frac{1}{u_k + v_k - 2}.$$

Применяя лемму 2 к $x_k = \frac{1}{u_k - 1}$, $y_k = \frac{1}{v_k - 1}$, $k \in L \setminus \{k_l\}$, получаем требуемое. □

Замечание 5. Из леммы 3 следует, что функция $G = G_1 * G_2$, где G_1 и G_2 удовлетворяют условиям теоремы 3 и соотношениям (1.15), также удовлетворяет условиям теоремы 3. По индукции это утверждение верно для свёртки конечного числа функций G_j, а с помощью предельного перехода оно получается и для счётного набора ядер G_j.

Замечание 6. Если обе функции G_1 и G_2 удовлетворяют условиям следствия 6 (следствия 7), то, поскольку для них выполняются соотношения (1.15), по лемме 3 функция $G = G_1 * G_2$ также удовлетворяет условиям следствия 6 (следствия 7). Если же функция G_1 удовлетворяет условиям следствия 6, а функция G_2 — условиям следствия 7, то, поскольку $G_1 * G_2 = \widetilde{G_1} * G_2$, где

$$c_k(\widetilde{G_1}) = \begin{cases} c_k(G_1), & k \neq 0, \\ 0, & k = 0, \end{cases}$$

и $\widetilde{G_1}$ удовлетворяет условиям следствия 7, по лемме 3 функция $G = G_1 * G_2$ также удовлетворяет условиям следствия 7. Аналогично предыдущему замечанию получаются утверждения для свёрток конечного и счётного набора ядер.

1.5. Примеры

Приведём примеры ядер G, удовлетворяющих условиям следствий 6 и 7 для всех $m \leqslant n$. Трудность при этом может состоять лишь в проверке неравенства (1.13).

Пример 1. Рассмотрим функцию G с коэффициентами Фурье вида

$$|c_k(G)| = \begin{cases} \frac{1}{|k|^\alpha}, & k \neq 0, \\ 0, & k = 0, \end{cases} \quad \alpha \geqslant 1.$$

Пусть $l \in [1-m : m-1] \setminus \{0\}$. Проверим, что для G выполняется неравенство (1.13), которое в данном случае имеет вид

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - \frac{|l+2nk|^{2\alpha}}{m^{2\alpha}}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - \left|\frac{l}{m} + 2\frac{n}{m}k\right|^{2\alpha}} \geqslant 0.$$

Обозначим $\frac{l}{m} = y$, $\frac{n}{m} = b$; тогда $|y| < 1$, $b \geqslant 1$. Покажем, что

$$\Psi_{y,b}(\alpha) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - |y + 2kb|^{2\alpha}} \geqslant 0.$$

Очевидно возрастание $\Psi_{y,b}(\alpha)$ по b. Поэтому достаточно доказать неравенство

$$\Psi_y(\alpha) = \Psi_{y,1}(\alpha) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - |y + 2k|^{2\alpha}} \geqslant 0.$$

Поскольку $\Psi_y(\alpha)$ чётна по y, можно ограничиться значениями $y \in [0, 1)$. Ясно, что

$$\Psi_y(1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - (y + 2k)^2} = \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{y + 2k + 1} - \frac{1}{y + 2k - 1} \right) = 0$$

при всех y. Покажем, что для всех $y \in [0, 1)$ Ψ_y строго возрастает на $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Группируя члены с номерами k и $-k-1$, находим

$$\Psi_y(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - (y + 2k)^{2\alpha}} + \frac{1}{1 - (2 - y + 2k)^{2\alpha}} \right).$$

Поскольку в последней сумме строгое возрастание по α всех слагаемых с номерами $k \geqslant 1$ очевидно, достаточно проверить, что для всех $y \in [0, 1)$ функция $\varphi_y(\alpha) = \frac{1}{1-y^{2\alpha}} + \frac{1}{1-(2-y)^{2\alpha}}$ неубывающая. Так как возрастание $\varphi_0(\alpha) = 1 + \frac{1}{1-2^{2\alpha}}$ очевидно, можно считать, что $y \in (0, 1)$.

Обозначим $y = 1 - t$, $t \in (0, 1)$. Тогда неравенство

$$\varphi'_y(\alpha) = \frac{2y^{2\alpha} \ln y}{\left(1 - y^{2\alpha}\right)^2} + \frac{2(2-y)^{2\alpha} \ln(2-y)}{\left(1 - (2-y)^{2\alpha}\right)^2} \geqslant 0$$

равносильно неравенству

$$(1-t)^{2\alpha} \ln(1-t) \left(1 - (1+t)^{2\alpha}\right)^2 + (1+t)^{2\alpha} \ln(1+t) \left(1 - (1-t)^{2\alpha}\right)^2 \geqslant 0.$$

Имеем

$$\begin{gathered}
(1-t)^{2\alpha} \ln(1-t) \left(1 - (1+t)^{2\alpha}\right)^2 + (1+t)^{2\alpha} \ln(1+t) \left(1 - (1-t)^{2\alpha}\right)^2 = \\
= (1-t^2)^{2\alpha} \left(\ln(1-t) \left((1+t)^{-2\alpha} - 2 + (1+t)^{2\alpha}\right) + \ln(1+t) \left((1-t)^{-2\alpha} - 2 + (1-t)^{2\alpha}\right)\right) = \\
= (1-t^2)^{2\alpha} \left(\ln(1-t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(C^k_{-2\alpha} + C^k_{2\alpha}\right) t^k - 2\right) + \right. \\
\left. + \ln(1+t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(C^k_{-2\alpha} + C^k_{2\alpha}\right) (-t)^k - 2\right)\right) = \\
= (1-t^2)^{2\alpha} \left(\ln(1-t) \sum_{k=2}^{\infty} \left(C^k_{-2\alpha} + C^k_{2\alpha}\right) t^k + \ln(1+t) \sum_{k=2}^{\infty} \left(C^k_{-2\alpha} + C^k_{2\alpha}\right) (-t)^k\right) = \\
= (1-t^2)^{2\alpha} \sum_{k=2}^{\infty} \left(C^k_{-2\alpha} + C^k_{2\alpha}\right) \left(\ln(1-t) + (-1)^k \ln(1+t)\right) t^k = (1-t^2)^{2\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t),
\end{gathered}$$

где

$$\begin{aligned}
\psi_k(t) = {} & \left(C^{2k}_{-2\alpha} + C^{2k}_{2\alpha}\right) \left(\ln(1-t) + \ln(1+t)\right) t^{2k} + \\
& + \left(C^{2k+1}_{-2\alpha} + C^{2k+1}_{2\alpha}\right) \left(\ln(1-t) - \ln(1+t)\right) t^{2k+1}.
\end{aligned}$$

Покажем, что при всех $k \in \mathbb{N}$ $\psi_k > 0$. Поскольку для $x > 0$ и целых $n \geqslant 2$ выражение $C^n_{-x} + C^n_x$ положительно при чётных n и отрицательно при нечётных n, имеем

$$\begin{gathered}
\psi_k(t) = -\left(C^{2k}_{-2\alpha} + C^{2k}_{2\alpha}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{t^{2l+2k}}{l} - 2\left(C^{2k+1}_{-2\alpha} + C^{2k+1}_{2\alpha}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{t^{2l+2k}}{2l-1} > \\
> -\left(C^{2k}_{-2\alpha} + C^{2k}_{2\alpha} + C^{2k+1}_{-2\alpha} + C^{2k+1}_{2\alpha}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{t^{2l+2k}}{l} = -\left(C^{2k+1}_{-2\alpha+1} + C^{2k+1}_{2\alpha+1}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{t^{2l+2k}}{l} > 0.
\end{gathered}$$

Замечание 7. Так как Ψ_y строго возрастает на $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, а в единице равна нулю для всех y, при $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ будет $\Psi_y(\alpha) < 0$ и условие (1.13) для функции G с такими значениями параметра α не выполняется для $m = n$.

Известно (см., например, [13, §1.5.1]), что всякую функцию $f \in W_2^{(r)}$ можно представить в виде $f = d_r * f^{(r)} + c_0(f)$, где

$$d_r(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{ikt}}{(ik)^r}$$

— периодическое ядро Бернулли. Обратно, для всякой функции $f \in L_2$, представимой в виде $f = d_r * \varphi + c$ для некоторых $\varphi \in L_2$, $\varphi \perp 1$, и $c \in \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, будет $c = c_0(f)$ и почти всюду на $\mathbb{R}$ верно $f^{(r)} = \varphi$. Поэтому из примера 1 по следствию 7 получается следующее утверждение.

Следствие 8. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, а функция $B \in L_2$ такова, что*

$$\begin{aligned}
c_l(B) &\neq 0 \quad \textit{при всех} \;\; l \in [1-m : m-1], \\
c_{2nk}(B) &= 0 \quad \textit{при всех} \;\; k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\
|c_{l+2nk}(B)| \leqslant \left| \frac{l}{l+2nk} \right|^r &|c_l(B)| \quad \textit{при всех} \;\; l \in [1-m : m-1] \setminus \{0\},\; k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Тогда для любой функции $f \in W_2^{(r)}$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 &\leqslant \frac{1}{m^r} \|f^{(r)}\|_2, \\
E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2 &\leqslant \frac{1}{m^r} \|f^{(r)}\|_2.
\end{aligned}$$

Замечание 8. Отметим, что в следствии 8 значение r необязательно целое. В связи с этим напомним, что дробная производная по Вейлю функции $f \in L_2$ определяется через коэффициенты Фурье:

$$c_k(f^{(r)}) = (ik)^r c_k(f), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Сформулируем также известные результаты для приближений тригонометрическими многочленами и сплайнами, упомянутые во введении и получающиеся как частные случаи следствия 8 и замечания 4; при этом ограничимся формулировками для $m = n$.

Следствие 9. *Пусть $r, n \in \mathbb{N}$. Тогда для любой функции $f \in W_2^{(r)}$ выполняется неравенство*

$$E(f, \mathcal{T}_{2n-1})_2 \leqslant \frac{1}{n^r} E(f^{(r)}, \mathcal{T}_{2n-1})_2.$$

Следствие 10. *Пусть $\mu \in \mathbb{Z}_+$, $r, n \in \mathbb{N}$, $\mu + 1 \geqslant r$. Тогда для любой функции $f \in W_2^{(r)}$ выполняются неравенства*

$$\begin{aligned}
E\big(f, \mathbf{S}^{\times}_{n,\mu}\big)_2 &\leqslant \frac{1}{n^r} E\big(f^{(r)}, \mathbf{S}^{\times}_{n,\mu-r}\big)_2, \\
E\big(f, \mathbf{S}_{n,\mu}\big)_2 &\leqslant \frac{1}{n^r} E\big(f^{(r)}, \mathbf{S}_{n,\mu-r}\big)_2.
\end{aligned}$$

(При $\mu + 1 = r$ величины $E\big(f^{(r)}, \mathbf{S}^{\times}_{n,\mu-r}\big)_2$ и $E\big(f^{(r)}, \mathbf{S}_{n,\mu-r}\big)_2$ следует трактовать как $\|f^{(r)}\|_2$.)

Пример 2. Проверим выполнение условия (1.13) для функции G с коэффициентами Фурье вида $|c_k(G)| = \dfrac{1}{(1+a^2k^2)^{\alpha}}$, где $\alpha \in \mathbb{N}$ или $\alpha + \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Пусть $l \in [1-m : m-1]$. По замечанию 6 достаточно рассмотреть случай $\alpha = \frac{1}{2}$, то есть доказать неравенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 - \dfrac{1 + a^2(l+2nk)^2}{1 + a^2 m^2}} \geqslant 0.$$

Поскольку

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1-\dfrac{1+a^2(l+2nk)^2}{1+a^2m^2}}=\frac{1+a^2m^2}{a^2m^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1-\dfrac{(l+2nk)^2}{m^2}},$$

требуемое неравенство следует из предыдущего примера для $\alpha=1$.

Пример 3. Проверим выполнение условия (1.13) для функции G с коэффициентами Фурье вида $|c_k(G)|=e^{-\beta|k|^\gamma}$, где $\gamma\geqslant 2$, $\beta>0$. Пусть $l\in[1-m:m-1]$. Пользуясь неравенством из примера 1 для $\alpha=\frac{\gamma}{2}$ и соотношениями $1-e^{-x}<x,\ e^x-1>x$, справедливыми для всех $x>0$, получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1-\dfrac{e^{-2\beta m^\gamma}}{e^{-2\beta|l+2nk|^\gamma}}}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1-e^{2\beta(|l+2nk|^\gamma-m^\gamma)}}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1-e^{2\beta m^\gamma\left(\left|\frac{l}{m}+2\frac{n}{m}k\right|^\gamma-1\right)}}=$$
$$=\frac{1}{1-e^{-2\beta m^\gamma\left(1-\left|\frac{l}{m}\right|^\gamma\right)}}-\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{e^{2\beta m^\gamma\left(\left|\frac{l}{m}+2\frac{n}{m}k\right|^\gamma-1\right)}-1}>$$
$$>\frac{1}{2\beta m^\gamma\left(1-\left|\frac{l}{m}\right|^\gamma\right)}-\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{2\beta m^\gamma\left(\left|\frac{l}{m}+2\frac{n}{m}k\right|^\gamma-1\right)}=\frac{1}{2\beta m^\gamma}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1-\left|\frac{l}{m}+2\frac{n}{m}k\right|^\gamma}\geqslant 0.$$

Замечание 9. Рассмотрим случай $m=n$ при $\gamma\in(0,1)$. Обозначая $y=\frac{l}{n}$, получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1-\dfrac{e^{-2\beta n^\gamma}}{e^{-2\beta|l+2nk|^\gamma}}}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1-e^{2\beta n^\gamma(|y+2k|^\gamma-1)}}=$$
$$=\frac{1}{1-e^{2\beta n^\gamma(y^\gamma-1)}}+\frac{1}{1-e^{2\beta n^\gamma((2-y)^\gamma-1)}}+\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\}}\frac{1}{1-e^{2\beta n^\gamma(|y+2k|^\gamma-1)}}.$$

Последняя сумма непрерывна по y, а все её члены отрицательны. Для выделенных слагаемых при $y\to 1$ имеем

$$\frac{1}{1-e^{2\beta n^\gamma(y^\gamma-1)}}+\frac{1}{1-e^{2\beta n^\gamma((2-y)^\gamma-1)}}\to 1+\frac{\gamma-1}{2\beta\gamma n^\gamma},$$

что меньше нуля для $\beta<\frac{1-\gamma}{2\gamma n^\gamma}$. Отсюда следует, что для таких значений параметра β условие (1.13) не выполняется при достаточно больших n.

Выведем одно важное обобщение примеров 1 – 3.

Класс Лагерра–Пойа $\mathcal{E}_2$ состоит из всех функций ψ вида

$$\psi(z)=Ce^{-\alpha z^2+\delta z}z^r\prod_{j=1}^{\infty}(1-a_jz)e^{-a_jz},$$
$$C\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\quad \alpha\geqslant 0,\quad \delta,a_j\in\mathbb{R},\quad r\in\mathbb{Z}_+,\quad \sum_{j=1}^{\infty}a_j^2<\infty. \tag{1.16}$$

Класс $\mathcal{E}_{2,\varnothing}$ состоит из тех функций из $\mathcal{E}_2$, у которых в представлении (1.16) $r=0$ и $\alpha+\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j^2>0$, а класс $\mathcal{E}_{2,\{0\}}$ — из тех, у которых $r\in\mathbb{N}$.

Пусть $\nu_c(\varphi)$ — число существенных перемен знака периодической вещественнозначной функции φ на периоде, то есть

$$\nu_c(\varphi) = \sup S^-[\varphi(t_1), \varphi(t_2), \ldots, \varphi(t_n)],$$

где $S^-[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — число перемен знака набора вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (нулевые члены вычёркиваются), а супремум берётся по всем $n \in \mathbb{N}$ и всевозможным упорядоченным наборам $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $t_i \in [0, 2\pi]$ (см. [29, § I.3]). Пусть также $J = \varnothing$ или $J = \{0\}$, $\mathcal{J}_\varnothing = \{0\}$, $\mathcal{J}_{\{0\}}$ — множество постоянных. Класс CVD_J состоит из вещественнозначных функций $K \in L_1$ таких, что для любых функций $a \in \mathcal{J}_J$ и $\varphi \perp \mathcal{J}_J$ будет

$$\nu_c\left(a + \varphi * K\right) \leqslant \nu_c(\varphi).$$

О функциях из CVD_J говорят, что они *не увеличивают осцилляцию.*

Известно [34, теорема III.4.8], что если $\psi \in \mathcal{E}_{2,J}$, то функция

$$G(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{ikt}}{\psi(ik)} + c_\psi, \quad c_\psi = \begin{cases} \frac{1}{\psi(0)}, & J = \varnothing, \\ 0, & J = \{0\}, \end{cases} \tag{1.17}$$

принадлежит CVD_J.

Поскольку для для функции G, определённой формулой (1.17),

$$|c_k(G)| = \frac{1}{|C|} e^{-\alpha k^2} \frac{1}{|k|^r} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + a_j^2 k^2}}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

$$|c_0(G)| = \begin{cases} \frac{1}{|C|}, & J = \varnothing, \\ 0, & J = \{0\}, \end{cases}$$

из примеров 1 – 3 и замечания 6 получаем следующее утверждение.

Следствие 11. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, функция G определена формулой* (1.17), *а функция $B \in L_2$ удовлетворяет следующим условиям.*

1. *Для всех $l \in [1 - m : m - 1]$ $c_l(B) \neq 0$.*

2. *Если $J = \{0\}$, то $c_{2nk}(B) = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

3. *Для всех $l \in [1 - m : m - 1] \setminus J$*

$$|c_{l+2nk}(B)| \leqslant \frac{|c_l(B)|}{|c_l(G)|} |c_{l+2nk}(G)| \quad \textit{при всех } k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда для любой функции f, представимой в виде

$$f = G * \varphi + c, \quad \varphi \in L_2,\, c \in \mathcal{J}_J,$$

выполняются неравенства

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)|\|\varphi\|_2,$$

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)|\|\varphi\|_2.$$

Следующий пример показывает, что для ядра Пуассона условие (1.13) выполнено, вообще говоря, не всегда.

Пример 4. Рассмотрим функцию G, коэффициенты Фурье которой имеют вид $|c_k(G)| = e^{-\alpha|k|}$, $\alpha > 0$, и найдём значения параметра α, для которых при всех $l \in [1-m : m-1]$ выполняется условие (1.13):

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - \dfrac{e^{-2\alpha m}}{e^{-2\alpha|l+2nk|}}} \geqslant 0.$$

Очевидно убывание левой части последнего неравенства по m, поэтому достаточно рассмотреть случай $m = n$. Обозначим $\frac{l}{n} = y$, $\beta = 2\alpha n$; тогда $|y| < 1$, $\beta > 0$, а для выполнения требуемого неравенства необходимо и достаточно, чтобы

$$\Psi_\beta(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - e^{\beta(|y+2k|-1)}} \geqslant 0.$$

Поскольку Ψ_β чётна, можно ограничиться значениями $y \in [0, 1)$. Покажем, что Ψ_β строго возрастает на $[0, 1)$. Тогда выполнение условия (1.13) для всех $l \in [1-n : n-1]$ равносильно неравенству $\Psi_\beta(0) \geqslant 0$, то есть условию (1.13) для $l = 0$. Группируя члены с номерами k и $-k-1$, получаем

$$\Psi_\beta(y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y),$$

где

$$\varphi_k(y) = \frac{1}{1 - e^{\beta(2k+y-1)}} + \frac{1}{1 - e^{\beta(2k+1-y)}}.$$

Достаточно доказать для всех $k \in \mathbb{N}$ неравенство

$$\varphi_k'(y) = \frac{\beta e^{\beta(2k+y-1)}}{\big(1 - e^{\beta(2k+y-1)}\big)^2} - \frac{\beta e^{\beta(2k+1-y)}}{\big(1 - e^{\beta(2k+1-y)}\big)^2} > 0,$$

которое равносильно

$$e^{\beta(2k+y-1)}\left(1 - e^{\beta(2k+1-y)}\right)^2 - e^{\beta(2k+1-y)}\left(1 - e^{\beta(2k+y-1)}\right)^2 > 0.$$

Имеем

$$e^{\beta(2k+y-1)}\left(1-e^{\beta(2k+1-y)}\right)^2-e^{\beta(2k+1-y)}\left(1-e^{\beta(2k+y-1)}\right)^2=$$
$$=e^{4\beta k}\left(\left(e^{-\frac{\beta}{2}(2k+1-y)}-e^{\frac{\beta}{2}(2k+1-y)}\right)^2-\left(e^{-\frac{\beta}{2}(2k+y-1)}-e^{\frac{\beta}{2}(2k+y-1)}\right)^2\right)=$$
$$=4e^{4\beta k}\left(\operatorname{sh}^2\left(\frac{\beta}{2}(2k+1-y)\right)-\operatorname{sh}^2\left(\frac{\beta}{2}(2k+y-1)\right)\right)=$$
$$=2e^{4\beta k}\left(\operatorname{ch}(\beta(2k+1-y))-\operatorname{ch}(\beta(2k+y-1))\right)=4e^{4\beta k}\operatorname{sh}(2\beta k)\operatorname{sh}(\beta(1-y))>0.$$

Так как функция

$$\Psi_\beta(0)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-e^{\beta(2k-1)}}+\frac{1}{1-e^{\beta(2k+1)}}\right)$$

непрерывна и строго возрастает по β на $(0,+\infty)$ от $-\infty$ до 1, неравенство $\Psi_\beta(0)\geqslant 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\beta\geqslant\beta^*$, где β^* — корень уравнения

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-e^{\beta(2k-1)}}+\frac{1}{1-e^{\beta(2k+1)}}\right)=0.$$

Таким образом, для функции G условие (1.13) выполняется для всех $\alpha\geqslant\frac{\beta^*}{2n}$, причём при $m=n$ эта граница точная.

Теперь опишем семейство функций B, удовлетворяющих условиям следствий 6 и 7 при фиксированном ядре G.

Примерами функций B, удовлетворяющих условиям следствия 6 для всех $m\leqslant n$, могут служить функции с коэффициентами Фурье вида $c_k(B)=c_k(G)\gamma_k$, где $\gamma_l\neq 0$ при $l\in[1-m:m-1]$ и $|\gamma_{l+2nk}|\leqslant|\gamma_l|$ для всех $(l,k)\in[1-m:m-1]\times\mathbb{Z}$ таких, что $c_{l+2nk}(G)\neq 0$. Если γ_k суть коэффициенты Фурье функции $K\in L_1$, то такая функция B есть $G*K$. В частности, в качестве K можно взять любую функцию из L_1, удовлетворяющую условию 1 следствия 6.

Примерами функций B, удовлетворяющих условиям следствия 7 для всех $m\leqslant n$, могут служить функции с коэффициентами Фурье вида

$$c_k(B)=\begin{cases}c_k(G)\gamma_k, & k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\\ \gamma, & k=0,\end{cases}$$

где $\gamma\neq 0$, $\gamma_l\neq 0$ при $l\in[1-m:m-1]\setminus\{0\}$, $\gamma_{2nk}=0$ для всех $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ таких, что $c_{2nk}(G)\neq 0$, и $|\gamma_{l+2nk}|\leqslant|\gamma_l|$ для всех $(l,k)\in([1-m:m-1]\setminus\{0\})\times\mathbb{Z}$ таких, что $c_{l+2nk}(G)\neq 0$. Если γ_k суть коэффициенты Фурье функции $K\in L_1$, то такая функция B есть $G*K+\gamma$. В частности, в качестве K можно взять среднее Стеклова любой функции $K_1\in L_1$, удовлетворяющей условию 1 следствия 6 или следствия 7, то есть функцию $K_1*B_{n,\mu}$, $\mu\in\mathbb{Z}_+$.

Глава 2.

Приближение классов дифференцируемых функций на отрезке

2.1. Введение

В [24] Флоатер и Санде рассматривали задачу среднеквадратичной аппроксимации трёх классов функций из $W_2^{(r)}[0,1]$, определяемых некоторыми граничными условиями. При несколько изменённой нормировке (которой мы далее будем придерживаться) эти классы суть

$$
\begin{aligned}
H_0^r &= \{u \in W_2^{(r)}[0,\pi] \colon u^{(k)}(0) = u^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < r, \quad k \text{ чётно}\},\\
H_1^r &= \{u \in W_2^{(r)}[0,\pi] \colon u^{(k)}(0) = u^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < r, \quad k \text{ нечётно}\},\\
H_2^r &= \left\{u \in W_2^{(r)}\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \colon u^{(k)}(0) = u^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leqslant k, l < r, \quad k \text{ чётно}, l \text{ нечётно}\right\}.
\end{aligned}
$$

Флоатер и Санде вычислили поперечники множеств

$$
\begin{aligned}
A_i^r &= \{u \in H_i^r \colon \|u^{(r)}\|_{L_2[0,\pi]} \leqslant 1\}, \quad i = 0, 1,\\
A_2^r &= \left\{u \in H_2^r \colon \|u^{(r)}\|_{L_2\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \leqslant 1\right\}
\end{aligned}
$$

и привели примеры экстремальных подпространств. А именно, они показали, что

$$
d_n(A_0^r) = \frac{1}{(n+1)^r}, \quad d_n(A_1^r) = \frac{1}{n^r}, \quad d_n(A_2^r) = \frac{1}{(2n+1)^r},
$$

а пространства

$$
\operatorname{span}\{x \mapsto \sin kx\}_{k=1}^n, \quad \operatorname{span}\{x \mapsto \cos kx\}_{k=0}^{n-1}, \quad \operatorname{span}\{x \mapsto \sin(2k-1)x\}_{k=1}^n \tag{2.1}
$$

являются экстремальными для A_0^r, A_1^r и A_2^r соответственно. Отметим, что для пространства A_1^1 соответствующий результат был получен Колмогоровым [30]. Кроме того, авторы доказали, что для классов A_i^r существуют экстремальные сплайновые пространства, которые определяются следующим образом.

Пусть $P_0 = P_1 = \pi$, $P_2 = \pi/2$, τ — вектор узлов, расположенных на $(0, P_i)$ и различных. Обозначим через $S_{d,\tau,i}$ пространства сплайнов степени d дефекта 1 на $[0, P_i]$ и рассмотрим их n-мерные подпространства

$$\begin{aligned}
S_{d,0} &= \{s \in S_{d,\tau_0,0} \colon s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d, \quad k \text{ чётно}\},\\
S_{d,1} &= \{s \in S_{d,\tau_1,1} \colon s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d, \quad k \text{ нечётно}\},\\
S_{d,2} &= \left\{s \in S_{d,\tau_2,2} \colon s^{(k)}(0) = s^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leqslant k, l \leqslant d, \quad k \text{ чётно}, l \text{ нечётно}\right\},
\end{aligned}$$

где векторы узлов τ_i при $i = 0, 1, 2$ задаются формулами

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= \begin{cases} \left\{\frac{k\pi}{n+1}\right\}_{k=1}^{n}, & d \text{ нечётно},\\ \left\{\frac{k\pi}{n+1} + \frac{\pi}{2(n+1)}\right\}_{k=0}^{n}, & d \text{ чётно}, \end{cases}\\
\tau_1 &= \begin{cases} \left\{\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right\}_{k=0}^{n-1}, & d \text{ нечётно},\\ \left\{\frac{k\pi}{n}\right\}_{k=1}^{n-1}, & d \text{ чётно}, \end{cases}\\
\tau_2 &= \begin{cases} \left\{\frac{k\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2(2n+1)}\right\}_{k=0}^{n-1}, & d \text{ чётно},\\ \left\{\frac{k\pi}{2n+1}\right\}_{k=1}^{n}, & d \text{ нечётно}. \end{cases}
\end{aligned}$$

В [24] было доказано, что для всех $d \geqslant r-1$ пространства сплайнов $S_{d,i}$ являются оптимальными приближающими пространствами для классов A_i^r, $i = 0, 1, 2$.

Как мы видим, узлы в каждом из пространств $S_{d,i}$ равноотстоящие, однако конкретный вид вектора узлов определяется чётностью d. В данной главе мы показываем, что классы A_i^r имеют экстремальные сплайновые приближающие пространства с обоими типами узлов, указанными в определении τ_i. Разумеется, в случае узлов τ_i при противоположных чётностях d необходимо добавить или, наоборот, ослабить граничные условия, чтобы размерность полученного пространства равнялась n.

В данной главе мы сводим задачу для функций на отрезке к аналогичной для периодических функций и, используя результаты главы 1, получаем серию экстремальных подпространств для непериодической ситуации, в том числе полученных в [24].

Результаты главы опубликованы в [7].

2.2. Вспомогательные результаты

Следующая лемма дает описание свойств симметрии пространств сдвигов в терминах коэффициентов Фурье.

Лемма 1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B \in L_1$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Из включения $s \in \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ следует $s(-\cdot) \in \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$.*

2. Для каждого $l \in [0 : m-1]$ *существует* $\gamma_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *такое, что* $\gamma_0 \in \{-1, 1\}$ *и*

$$c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B) \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Первое утверждение означает, что для всех $l \in [1-m : m-1]$ выполняется включение $\Phi_{B,l}(-\cdot) \in \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$. Заменяя для удобства l на $-l$, перепишем включение в виде равенства

$$\Phi_{B,-l}(-x) = \sum_{j=1-m}^{m-1} \gamma_j \Phi_{B,j}(x)$$

для некоторых γ_j. Поскольку $\Phi_{B,j}$ ортогональна $\Phi_{B,-l}(-\cdot)$ при $j \neq l$, имеем

$$\Phi_{B,-l}(-x) = \gamma_l \Phi_{B,l}(x).$$

Приравнивая коэффициенты Фурье функций в обеих частях последнего равенства, приходим к (2.2). Меняя l на $-l$ и k на $-k$, получаем соотношение $c_{l+2nk}(B) = \gamma_{-l} c_{-l-2nk}(B)$. Если $\gamma_l = 0$ для некоторого l, то $c_{l+2nk}(B) = c_{-l-2nk}(B) = 0$ и равенства выполнены для для любого γ_l. Следовательно, можно считать, что $\gamma_l \neq 0$.

С другой стороны, если равенство (2.2) выполнено при некотором l, для которого $\gamma_l \neq 0$, то оно также верно при $-l$ для $\frac{1}{\gamma_l}$. Поэтому достаточно рассматривать лишь $l \in [0 : m-1]$.

Полагая $l = 0$, получаем, что $c_{-2nk}(B) = \gamma_0 c_{2nk}(B)$ для всех k. Замена k на $-k$ даёт $c_{2nk}(B) = \gamma_0 c_{-2nk}(B)$. Если $c_{2nk}(B) = 0$ для всех k, можно положить $\gamma_0 = 1$. Если же $c_{2nk}(B) \neq 0$ для некоторого k, то также $c_{-2nk}(B) \neq 0$ и, следовательно, $\gamma_0 = \pm 1$. $\square$

Заметим, что все чётные функции (в частности, ядро Дирихле) удовлетворяют второму условию леммы 1 с $\gamma_l = 1$ для всех l.

Для B-сплайна имеем $\gamma_l = e^{-i\frac{\pi}{n}l(\mu+1)}$, а для сдвинутого B-сплайна $\widetilde{B}_{n,\mu} = B_{n,\mu}\big(\cdot - \frac{\pi}{2n}\big)$ из равенства $c_k(\widetilde{B}_{n,\mu}) = e^{-\frac{ik\pi}{2n}} c_k(B_{n,\mu})$ следует, что $\gamma_l = e^{-\frac{il\pi\mu}{n}}$.

Напомним, что символами f^e и f^o обозначаются соответственно чётная и нечётная части функции f.

Замечание 1. При $l \in [1 : m-1]$ имеем $\Phi^e_{B,-l} = \gamma_l \Phi^e_{B,l}$, $\Phi^o_{B,-l} = -\gamma_l \Phi^o_{B,l}$. Отсюда следует, что пространство $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ представимо в виде

$$\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m} = \operatorname{span}\{\Phi_{B,0}\} \oplus \operatorname{span}\{\Phi^e_{B,l}\}_{l=1}^{m-1} \oplus \operatorname{span}\{\Phi^o_{B,l}\}_{l=1}^{m-1}. \tag{2.3}$$

Замечание 2. Если $s \in \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$, то $s(\cdot + \pi) \in \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ и, поскольку

$$\Phi_{B,l}(x+\pi) = (-1)^l \Phi_{B,l}(x),$$

справедливы равенства

$$\Phi^e_{B,l}(\pi - x) = (-1)^l \Phi^e_{B,l}(x), \quad \Phi^o_{B,l}(\pi - x) = (-1)^{l+1} \Phi^o_{B,l}(x).$$

Следующая теорема является частным случаем следствия 1.5 для пространства Соболева, то есть для $G = d_r$.

Теорема 1. *Пусть $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B \in L_2$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. Для любой функции $f \in W_2^{(r)}$ выполняется неравенство

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r}\|f^{(r)}\|_2. \tag{2.4}$$

2. Коэффициенты Фурье функции B удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} c_l(B) &\neq 0 \quad \text{при всех} \quad |l| \in [\,0 : m-1], \\ c_{2n\nu}(B) &= 0 \quad \text{при всех} \quad \nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}}} &\geqslant 0 \quad \text{при всех} \quad |l| \in [1 : m-1]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

В дальнейшем нам понадобится простое следствие теоремы 1 для функций с нулевым средним.

Следствие 1. *Пусть $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B \in L_2$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. Для любой функции $f \in W_2^{(r)}$ такой, что $c_0(f) = 0$, выполняется неравенство

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r}\|f^{(r)}\|_2.$$

2. Для всех $|l| \in [1 : m-1]$ будет $c_l(B) \neq 0$ и

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}}} \geqslant 0.$$

Доказательство. Для $g \in L_2$ положим $g_0(x) = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} c_{2n\nu}(g)e^{i2n\nu x}$. Ясно, что неравенство (2.4) на всём классе $W_2^{(r)}$ равносильно системе

$$E\big(f_0, \mathbb{S}^{\times}_{B_0,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r}\|f_0^{(r)}\|_2,$$

$$E\big(f - f_0, \mathbb{S}^{\times}_{B-B_0,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r}\|(f-f_0)^{(r)}\|_2.$$

(1) $\implies$ (2). Рассмотрим функцию $\widetilde{B} \in L_2$, для которой $c_0(\widetilde{B}) = 1$, $c_{2n\nu}(\widetilde{B}) = 0$ для всех $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $c_k(\widetilde{B}) = c_k(B)$ при $k \neq 2n\nu$. Для всякой $f \in W_2^{(r)}$ имеем

$$E\Big(f_0, \mathbb{S}^{\times}_{\widetilde{B}_0,n,m}\Big)_2 \leqslant \|f_0 - c_0(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{m^r}\|f_0^{(r)}\|_2, \tag{2.6}$$

$$E\Big(f - f_0, \mathbb{S}^{\times}_{\widetilde{B}-\widetilde{B}_0,n,m}\Big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r}\|(f-f_0)^{(r)}\|_2. \tag{2.7}$$

Неравенство (2.6) очевидно, поскольку пространство $\mathbb{S}^{\times}_{\widetilde{B}_0,n,m}$ содержит константы, а (2.7) выполнено по условию. Следовательно, верно (2.4), а коэффициенты Фурье функции $\widetilde{B}$ удовлетворяют второму условию теоремы 1. По определению $\widetilde{B}$ то же самое верно и для $c_k(B)$ при $k \neq 2n\nu$.

(2) $\implies$ (1). Пусть $f \in W_2^{(r)}$, $c_0(f) = 0$, а $\widetilde{B}$ определена как выше. По теореме 1 неравенство (2.4) выполнено для $\widetilde{B}$, а из (2.6) и (2.7) следует, что оно также верно для B. $\square$

2.3. Основные результаты

Рассмотрим следующие классы функций:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{H}_0^r &= \{u \in W_2^{(r)} \colon u \text{ нечётна}\},\\
\widetilde{H}_1^r &= \{u \in W_2^{(r)} \colon u \text{ чётна}\},\\
\widetilde{H}_2^r &= \left\{u \in W_2^{(r)} \colon u \text{ нечётна, } u\left(\cdot + \frac{\pi}{2}\right) \text{ чётна}\right\}.
\end{aligned}
$$

Очевидно, каждая функция из $\widetilde{H}_i^r$ принадлежит H_i^r. Обратно, в силу граничных условий в определении классов H_i^r 2π-периодизация нечётного продолжения функции $u \in H_0^r$ на отрезок $[-\pi, 0]$ принадлежит $\widetilde{H}_0^r$. Аналогично 2π-периодизация чётного продолжения функции $u \in H_1^r$ на отрезок $[-\pi, 0]$ есть функция из $\widetilde{H}_1^r$. Последовательно продолжая $u \in H_2^r$ до чётной (относительно $\pi/2$) функции на $[0, \pi]$ и до нечётной функции на $[-\pi, \pi]$, после 2π-периодизации получаем функцию из $\widetilde{H}_2^r$.

Поэтому, полагая

$$
\widetilde{A}_i^r = \{u \in \widetilde{H}_i^r \colon \|u^{(r)}\|_2 \leqslant 1\}, \quad i = 0, 1, 2,
$$

мы получаем, что

$$
\begin{aligned}
d_n(\widetilde{A}_0^r; L_2) &= d_n(A_0^r; L_2[0, \pi]) = \frac{1}{(n+1)^r},\\
d_n(\widetilde{A}_1^r; L_2) &= d_n(A_1^r; L_2[0, \pi]) = \frac{1}{n^r},\\
d_n(\widetilde{A}_2^r; L_2) &= d_n\left(A_2^r; L_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \frac{1}{(2n+1)^r}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, упомянутые во введении задачи для непериодических классов могут быть сведены к аналогичным для периодической ситуации, в которой применима теорема 1. Мы будем формулировать наши результаты для периодических классов (обозначаемых с волнами).

Замечание 3. Пусть S — замкнутое подпространство L_2, которое вместе с каждой функцией s содержит $s(-\cdot)$. Тогда элемент наилучшего приближения любой функции $u \in \widetilde{H}_0^r$ в L_2

пространством S нечётен. Действительно, пусть $\|u-s\|_2 = \inf\limits_{T\in\mathsf{S}} \|f-T\|_2$, тогда

$$\|u-s\|_2 \leqslant \left\|u - \frac{s-s(-\cdot)}{2}\right\|_2 = \left\|\frac{u-s}{2} + \frac{u+s(-\cdot)}{2}\right\|_2 = \left\|\frac{u-s}{2} + \frac{-u(-\cdot)+s(-\cdot)}{2}\right\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\|u-s\|_2 + \|u(-\cdot)-s(-\cdot)\|_2\right) = \|u-s\|_2.$$

Это означает, что все неравенства в цепочке обращаются в равенства. В частности, имеем $\|u-s\|_2 = \|u-s^o\|_2$. По единственности элемента наилучшего приближения в L_2 получаем, что s нечётна.

Аналогично, элемент наилучшего приближения любой функции $u\in\widetilde{H}_1^r$ пространством S чётен. Если, кроме того, пространство S инвариантно относительно сдвига на π, то элемент наилучшего приближения $u\in\widetilde{H}_2^r$ пространством S удовлетворяет тем же условиям симметрии, что и сама функция u.

Рассмотрим m-мерные подпространства $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m} &= \operatorname{span}\{\Phi^o_{B,l}\}_{l=1}^m \qquad \text{при } m+1\leqslant n,\\
\widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,m} &= \operatorname{span}\{\Phi_{B,0}\}\oplus\operatorname{span}\{\Phi^e_{B,l}\}_{l=1}^{m-1} \qquad \text{при } m\leqslant n,\\
\widetilde{\mathcal{S}}^2_{B,n,m} &= \operatorname{span}\{\Phi^o_{B,2l-1}\}_{l=1}^m \qquad \text{при } 2m+1\leqslant n.
\end{aligned}$$

Следующие три теоремы дают достаточные условия экстремальности этих пространств.

Теорема 2. *Пусть $r,n,m\in\mathbb{N}$, $m+1\leqslant n$, а коэффициенты Фурье функции $B\in L_2$ удовлетворяют следующим условиям.*

1. *Для любого $l\in[1:m]$ существует $\gamma_l\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ такое, что для всех $k\in\mathbb{Z}$ верно $c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B)$.*

2. *Для всех $\nu\in\mathbb{N}$ верно $c_{2n\nu}(B) = c_{-2n\nu}(B)$.*

3. *Для всех $l\in[1:m]$ будет $c_l(B)\neq 0$ и*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{(m+1)^{2r}}} \geqslant 0.$$

Тогда для любой функции $u\in\widetilde{H}_0^r$ выполняется неравенство

$$E\big(u,\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r}\|u^{(r)}\|_2. \tag{2.8}$$

Доказательство. Поскольку всякая функция из $\widetilde{H}_0^r$ имеет нулевое среднее, а B удовлетворяет условиям второго пункта следствия 1, имеем неравенство

$$E\big(u,\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m+1}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r}\|u^{(r)}\|_2. \tag{2.9}$$

По лемме 1 пространство $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m+1}$ вместе с каждой функцией содержит ее чётную и нечётную части. Поэтому элемент наилучшего приближения функции $u \in \widetilde{H}^r_0$ пространством $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m+1}$ нечётен. Отсюда следует, что пространство $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m+1}$ в левой части (2.9) можно заменить на его подпространство, состоящее только из нечётных функций. Поскольку по условию 2 функция $\Phi_{B,0}$ чётна, из разложения (2.3) следует, что искомое приближающее подпространство совпадает с $\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}$. $\square$

Теорема 3. *Пусть $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, а коэффициенты Фурье функции $B \in L_2$ удовлетворяют следующим условиям.*

1. *Для любого $l \in [1 : m-1]$ существует $\gamma_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такое, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ верно $c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B)$.*
2. *Для всех $l \in [0 : m-1]$ $c_l(B) \neq 0$.*
3. *Для всех $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $c_{2n\nu}(B) = 0$.*
4. *Для всех $l \in [1 : m-1]$*
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}}} \geqslant 0.$$

Тогда для любой функции $u \in \widetilde{H}^r_1$ выполняется неравенство
$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r}\|u^{(r)}\|_2. \tag{2.10}$$

Доказательство. Применяя теорему 1 к $u \in \widetilde{H}^r_1$, получаем неравенство
$$E\big(u, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r}\|u^{(r)}\|_2.$$

Аналогично доказательству теоремы 2 пространство $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ в левой части последнего неравенства может быть заменено на подпространство его чётных функций, то есть на $\widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,m}$. $\square$

Теорема 4. *Пусть $r, n, m \in \mathbb{N}$, $2m+1 \leqslant n$, а коэффициенты Фурье функции $B \in L_2$ удовлетворяют следующим условиям.*

1. *Для любого $l \in [1 : 2m]$ существует $\gamma_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такое, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ верно $c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B)$.*
2. *Для всех $\nu \in \mathbb{N}$ $c_{2n\nu}(B) = c_{-2n\nu}(B)$.*
3. *Для всех $l \in [1 : 2m]$ будет $c_l(B) \neq 0$ и*
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{(2m+1)^{2r}}} \geqslant 0.$$

Тогда для любой функции $u \in \widetilde{H}_2^r$ выполняется неравенство

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^2_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(2m+1)^r}\|u^{(r)}\|_2. \tag{2.11}$$

Доказательство. Так как $\widetilde{H}_2^r$ — подпространство $\widetilde{H}_0^r$, по теореме 2 имеем

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,2m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(2m+1)^r}\|u^{(r)}\|_2.$$

Поскольку для u выполняется равенство $u = u(\pi - \cdot)$, приближающее пространство $\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,2m}$ может быть заменено на подпространство функций, удовлетворяющих этому условию. По замечанию 2 оно совпадает с $\widetilde{\mathcal{S}}^2_{B,n,m}$. □

Замечание 4. Легко показать, что в условиях теоремы 4 пространство $\operatorname{span}\{\Phi^e_{B,2l-1}\}_{l=1}^m$ экстремально для класса функций, получаемого из H_2^r переменой ролей k и l (или соответствующей заменой условий симметрии в определении $\widetilde{H}_2^r$).

Замечание 5. Отметим, что условия теорем 2–4 инвариантны относительно сдвига B на $\frac{\pi}{2n}$.

Замечание 6. Неравенства (2.8), (2.10) и (2.11) обращаются в равенства на функциях $x \mapsto \sin(m+1)x$, $x \mapsto \cos mx$ и $x \mapsto \sin(2m+1)x$ соответственно.

Оценки из теорем 2–4 можно усилить стандартным способом, заменив правую часть неравенств на наилучшие приближения.

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы 2 $B \in W_2^{(r)}$.*

1. *Если r чётно, то для любой $u \in \widetilde{H}_0^r$ выполняется неравенство*

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B^{(r)},n,m}\big)_2.$$

2. *Если r нечётно, то для любой $u \in \widetilde{H}_0^r$ выполняется неравенство*

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \operatorname{span}\{\Phi^e_{B^{(r)},l}\}_{l=1}^m\big)_2.$$

Доказательство. При чётном r обозначим через s элемент наилучшего приближения функции $u^{(r)}$ пространством $\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B^{(r)},n,m}$, а при нечётном r — пространством $\operatorname{span}\{\Phi^e_{B^{(r)},l}\}_{l=1}^m$. Поскольку $c_0(s) = 0$, для функции s определена 2π-периодическая r-я первообразная, обозначим ее s_r. Для каждого $l \in [1:m]$ имеем

$$\big(\Phi^o_{B,l}\big)^{(r)} = \begin{cases} \Phi^o_{B^{(r)},l}, & r \text{ чётно}, \\ \Phi^e_{B^{(r)},l}, & r \text{ нечётно}, \end{cases}$$

откуда следует, что $s_r \in \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}$. Применяя теорему 2 к функции $u - s_r$, получаем

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}\big)_2 = E\big(u - s_r, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r}\|u^{(r)} - s\|_2 =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{(m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B^{(r)},n,m}\big)_2, & r \text{ чётно},\\ \frac{1}{(m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \operatorname{span}\{\Phi^e_{B^{(r)},l}\}_{l=1}^m\big)_2, & r \text{ нечётно}. \end{cases}$$

□

Следующие два утверждения доказываются аналогично предыдущему.

Следствие 3. *Пусть в условиях теоремы 3* $B \in W_2^{(r)}$.

1. *Если r чётно, то для любой $u \in \widetilde{H}_1^r$ выполняется неравенство*

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r} E\big(u^{(r)}, \operatorname{span}\{\Phi^e_{B^{(r)},l}\}_{l=1}^{m-1}\big)_2.$$

2. *Если r нечётно, то для любой $u \in \widetilde{H}_1^r$ выполняется неравенство*

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r} E\big(u^{(r)}, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B^{(r)},n,m-1})_2.$$

Следствие 4. *Пусть в условиях теоремы 4* $B \in W_2^{(r)}$.

1. *Если r чётно, то для любой $u \in \widetilde{H}_2^r$ выполняется неравенство*

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^2_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(2m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \widetilde{\mathcal{S}}^2_{B^{(r)},n,m}\big)_2.$$

2. *Если r нечётно, то для любой $u \in \widetilde{H}_2^r$ выполняется неравенство*

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^2_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(2m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \operatorname{span}\{\Phi^e_{B^{(r)},2l-1}\}_{l=1}^m\big)_2.$$

2.4. Примеры

В предыдущей главе (следствие 1.8) мы привели легко проверяемое условие, достаточное для выполнения неравенства (2.5) (и, следовательно, соответствующих условий теорем 2–4). А именно, неравенство (2.5) справедливо для всех функций B, удовлетворяющих условию

$$|l + 2nk|^r |c_{l+2nk}(B)| \leqslant |l|^r |c_l(B)| \quad \text{для всех } |l| \in [1 : m-1],\ k \in \mathbb{Z}.$$

В частности, функции с коэффициентами вида

$$c_k(B) = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}k} - 1}{i\frac{\pi}{n}k}\right)^{\mu+1} \eta_k, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+,\ \mu + 1 \geqslant r,$$

где $|\eta_{l+2nk}| \leqslant |\eta_l|$ и $\eta_l \neq 0$ при $|l| < n$, удовлетворяют этому условию при всех $m \leqslant n$. Для $\eta_k = 1$ эта формула определяет B-сплайн. Если η_k суть коэффициенты Фурье функции $K \in L_1$, то B есть среднее Стеклова порядка $\mu + 1$ от K. Например, в качестве K можно взять ядро Пуассона ($\gamma_k = e^{-\alpha|k|}$, $\alpha > 0$), ядро теплопроводности ($\gamma_k = e^{-\alpha k^2}$, $\alpha > 0$), ядра некоторых дифференциальных операторов ($\gamma_k = \frac{1}{P(ik)}$, P — многочлен, все нули которого вещественны), обобщенное ядро Бернулли ($\gamma_k = |k|^{-s} e^{-i\beta \operatorname{sign} k}$, $s > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$); в последних двух примерах полагаем $\gamma_0 = 1$.

Беря в теоремах 2–4 в качестве B ядро Дирихле соответствующего порядка, мы получаем экстремальные подпространства тригонометрических многочленов (2.1).

Теперь опишем сплайновые пространства, возникающие в теоремах 2–4, и покажем, что результаты [24] следуют из этих теорем.

Напомним, что для рассматриваемых пространств периодических функций $\widetilde{H}_i^r$ их ограничения на $[0, \pi]$ (при $i = 1, 2$) или $[0, \pi/2]$ (при $i = 2$) обозначаются через H_i^r.

1. Заменим в теореме 2 n на $n + 1$ и положим $m = n$, $B = B_{n+1,d}$. Тогда пространство $\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n+1,n}$ есть n-мерное подпространство нечётных сплайнов из $\mathbb{S}^{\times}_{B,n+1}$. Рассмотрим пространство $Q_{d,1}$ сплайнов s с узлами $\left\{\frac{k\pi}{n+1}\right\}_{k=1}^{n}$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < d, \quad k \text{ чётно.}$$

Его размерность равна n для нечётных d и $n+1$ для чётных d. Следовательно, при нечётном d имеем $\mathcal{S}^0_{B,n+1,n} = Q_{d,1} = S_{d,0}$. Для чётного d пространство $\mathcal{S}^0_{B,n+1,n}$ есть n-мерное подпространство $Q_{d,1}$.

2. Заменим в теореме 2 n на $n + 1$ и положим $m = n$, $B = B_{n+1,d}\bigl(\cdot - \frac{\pi}{2(n+1)}\bigr)$. Тогда пространство $\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n+1,n}$ есть n-мерное подпространство нечётных сплайнов из $\mathbb{S}^{\times}_{B,n+1}$. Рассмотрим пространство $Q_{d,2}$ сплайнов s с узлами $\left\{\frac{k\pi}{n+1} + \frac{\pi}{2(n+1)}\right\}_{k=0}^{n}$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d, \quad k \text{ чётно.}$$

Его размерность равна n для чётных d и $n+1$ для нечётных d. Заметим, что точки 0 и π не являются узлами. Следовательно, при чётном d имеем $\mathcal{S}^0_{B,n+1,n} = Q_{d,2} = S_{d,0}$. Для нечётного d пространство $\mathcal{S}^0_{B,n+1,n}$ есть n-мерное подпространство $Q_{d,2}$.

3. Положим в теореме 3 $m = n$, $B = B_{n,d}$. Тогда пространство $\widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,n}$ есть n-мерное подпространство чётных сплайнов из $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$. Рассмотрим пространство $Q_{d,3}$ сплайнов s с узлами $\left\{\frac{k\pi}{n}\right\}_{k=1}^{n-1}$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < d, \quad k \text{ нечётно.}$$

Его размерность равна n для чётных d и $n+1$ для нечётных d. Следовательно, при чётном d имеем $\mathcal{S}^1_{B,n,n} = Q_{d,3} = S_{d,1}$. Для нечётного d пространство $\mathcal{S}^1_{B,n,n}$ есть n-мерное подпространство $Q_{d,3}$.

4. Положим в теореме 3 $m = n$, $B = B_{n,d}\bigl(\cdot - \frac{\pi}{2n}\bigr)$. Тогда пространство $\widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,n}$ есть n-

мерное подпространство чётных сплайнов из $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$. Рассмотрим пространство $Q_{d,4}$ сплайнов s с узлами $\left\{\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}\right\}_{k=0}^{n-1}$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0)=s^{(k)}(\pi)=0,\quad 0\leqslant k\leqslant d,\quad k \text{ нечётно}.$$

Его размерность равна n для нечётных d и $n+1$ для чётных d. Заметим, что точки 0 и π не являются узлами. Следовательно, при нечётном d имеем $\mathcal{S}^1_{B,n,n}=Q_{d,4}=S_{d,1}$. Для чётного d пространство $\mathcal{S}^1_{B,n,n}$ есть n-мерное подпространство $Q_{d,4}$.

5. Заменим в теореме 4 n на $2n+1$ и положим $m=n$, $B=B_{2n+1,d}$. Рассмотрим пространство $Q_{d,5}$ сплайнов s с узлами $\left\{\frac{k\pi}{2n+1}\right\}_{k=1}^{n}$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0)=s^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad 0\leqslant k<d,\ 0\leqslant l\leqslant d,\quad k \text{ чётно, } l \text{ нечётно}.$$

Его размерность равна n для нечётных d и $n+1$ для чётных d. Следовательно, при нечётном d имеем $\mathcal{S}^2_{B,2n+1,n}=Q_{d,5}=S_{d,2}$. Для чётного d пространство $\mathcal{S}^2_{B,2n+1,n}$ есть n-мерное подпространство $Q_{d,5}$.

6. Заменим в теореме 4 n на $2n+1$ и положим $m=n$, $B=B_{2n+1,d}\left(\cdot-\frac{\pi}{2(2n+1)}\right)$. Рассмотрим пространство $Q_{d,6}$ сплайнов s с узлами $\left\{\frac{k\pi}{2n+1}+\frac{\pi}{2(2n+1)}\right\}_{k=0}^{n-1}$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0)=s^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad 0\leqslant k\leqslant d,\ 0\leqslant l<d,\quad k \text{ чётно, } l \text{ нечётно}.$$

Его размерность равна n для чётных d и $n+1$ для нечётных d. Следовательно, при чётном d имеем $\mathcal{S}^2_{B,2n+1,n}=Q_{d,6}=S_{d,2}$. Для нечётного d пространство $\mathcal{S}^2_{B,2n+1,n}$ есть n-мерное подпространство $Q_{d,6}$.

Беря в теоремах 2–4 другие значения m и n и B-сплайн (сдвинутый или нет) в роли функции B, можно получить и другие экстремальные подпространства сплайнов с равноотстоящими узлами.

Глава 3.

Приближение классов свёрток пространствами сдвигов на оси

3.1. Введение

В настоящей главе доказан ряд точных неравенств для оценки наилучшего среднеквадратичного приближения различных классов функций пространствами сдвигов на оси. В частности, получены условия, необходимые и достаточные для справедливости неравенства

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,\sigma}\big)_2 \leqslant \widehat{G}^*(\sigma)\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

точного на классе функций f, представимых в виде $G * \varphi$, $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, для $G \in L_1(\mathbb{R})$. Здесь $\widehat{G}^*$ — симметрично убывающая перестановка функции $|\widehat{G}|$. Кроме того, получены критерии экстремальности пространств сдвигов в смысле средних поперечников, что означает, что константа в неравенстве для оценки наилучшего приближения не может быть уменьшена за счёт перехода к другому приближающему подпространству той же средней размерности. В частности, для рассматриваемого в работе класса функций вычислен средний поперечник. Таким образом, мы не только указываем широкую совокупность экстремальных приближающих подпространств, но также даём полное описание экстремальных пространств, порождённых равноотстоящими сдвигами одной функции.

Метод доказательства основывается на получении континуального аналога разложения по базисам в пространствах сдвигов и нахождения с его помощью явного выражения для наилучшего приближения, что позволяет применить технику, использованную в первой главе.

Результаты главы опубликованы в [37] и [19].

3.2. Анализ Фурье в пространствах сдвигов

Пусть $\sigma > 0$, $B \in L_2(\mathbb{R})$. Обозначим

$$\Phi_{B,\sigma}(x,y) = \frac{1}{2\sigma}\sum_{j\in\mathbb{Z}} B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right) e^{i\frac{j\pi}{\sigma}y}, \tag{3.1}$$

$$D_{B,\sigma}(y) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{B}(y+2\nu\sigma)\right|^2. \tag{3.2}$$

Определение $\Phi_{B,\sigma}$ корректно, поскольку при почти всех $x \in \mathbb{R}$ ряд в правой части (3.1) сходится в $L_2[-\sigma,\sigma]$.

Выделим несколько свойств функций $\Phi_{B,\sigma}$. Заметим, что они во многом схожи со свойствами преобразования Зака (см., например, [27, §8.2]).

Ф1. $\Phi_{B,\sigma} \in L_2\left(\left[0,\frac{\pi}{\sigma}\right] \times [-\sigma,\sigma]\right)$ *и*

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\int_{-\sigma}^{\sigma} |\Phi_{B,\sigma}(x,y)|^2\,dy\,dx = \frac{1}{2\sigma}\|B\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Доказательство. Поскольку для почти всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется включение $\left\{B\left(x-\frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$, получаем, что $\Phi_{B,\sigma}(x,\cdot) \in L_2[-\sigma,\sigma]$ при почти всех x. Кроме того, по равенству Парсеваля имеем

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} |\Phi_{B,\sigma}(x,y)|^2\,dy = \frac{1}{2\sigma}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|B\left(x-\frac{j\pi}{\sigma}\right)\right|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\int_{-\sigma}^{\sigma} |\Phi_{B,\sigma}(x,y)|^2\,dy\,dx = \frac{1}{2\sigma}\int_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|B\left(x-\frac{j\pi}{\sigma}\right)\right|^2 dx = \frac{1}{2\sigma}\|B\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

□

Ф2. *Справедливы соотношения*

$$\Phi_{B,\sigma}(x,y+2\sigma) = \Phi_{B,\sigma}(x,y), \quad \Phi_{B,\sigma}\left(x+\frac{\pi}{\sigma},y\right) = e^{i\frac{\pi}{\sigma}y}\Phi_{B,\sigma}(x,y),$$
$$\overline{\Phi_{B,\sigma}(x,y)} = \Phi_{B,\sigma}(x,-y).$$

Данное свойство очевидно. Кроме того, из него следует, что функция $\Phi_{B,\sigma}$ полностью определяется своими значениями на прямоугольнике $\left[0,\frac{\pi}{\sigma}\right] \times [-\sigma,\sigma]$.

Ф3. *В* $L_2\left(\left[0,\frac{\pi}{\sigma}\right]\times[-\sigma,\sigma]\right)$ *справедливо равенство*

$$\Phi_{B,\sigma}(x,y)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{B}(y+2\nu\sigma)e^{i(y+2\nu\sigma)x}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Отметим сперва, что аналогично доказательству свойства Ф1 получается равенство

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{B}(y+2\nu\sigma)e^{i(y+2\nu\sigma)x}\right|^2dx\,dy=\frac{1}{2\sigma}\|B\|^2_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{3.4}$$

Действительно, поскольку $\left\{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)\right\}_{\nu\in\mathbb{Z}}\in\ell_2(\mathbb{Z})$ для почти всех $y\in\mathbb{R}$, по равенству Парсеваля при почти всех $y\in\mathbb{R}$ имеем

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{B}(y+2\nu\sigma)e^{i(y+2\nu\sigma)x}\right|^2dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{B}(y+2\nu\sigma)e^{2i\nu\sigma x}\right|^2dx=\frac{\pi}{\sigma}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{B}(y+2\nu\sigma)\right|^2.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{B}(y+2\nu\sigma)e^{i(y+2\nu\sigma)x}\right|^2dx\,dy=\frac{\pi}{\sigma}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{B}(y+2\nu\sigma)\right|^2dy=$$

$$=\frac{\pi}{\sigma}\|\widehat{B}\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\frac{1}{2\sigma}\|B\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Пусть $B_n\in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$, $B_n\to B$ в $L_2(\mathbb{R})$. Для почти всех $x,y\in\mathbb{R}$ положим

$$g_n(t)=e^{iyt}B_n(x-t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Тогда $g_n\in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$,

$$\widehat{g_n}(\xi)=e^{i(y-\xi)x}\widehat{B_n}(y-\xi),\quad \xi\in\mathbb{R},$$

и по формуле суммирования Пуассона имеем

$$\Phi_{B_n,\sigma}(x,y)=\frac{1}{2\sigma}\sum_{j\in\mathbb{Z}}g_n\left(j\frac{\pi}{\sigma}\right)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{g_n}(2j\sigma)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{B_n}(y+2j\sigma)e^{i(y+2j\sigma)x}.$$

По свойству Ф1 и равенству (3.4), переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем требуемое. □

Напомним, что набор $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ элементов гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется *системой Рисса* в $\mathcal{H}$ с постоянными $A_1,A_2>0$, если для любого $\beta\in\ell_2(\mathbb{Z})$ ряд $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}\beta_jf_j$ сходится в $\mathcal{H}$ и

$$A_1\|\beta\|^2_{\ell_2(\mathbb{Z})}\leqslant\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\beta_jf_j\right\|^2_{\mathcal{H}}\leqslant A_2\|\beta\|^2_{\ell_2(\mathbb{Z})}. \tag{3.5}$$

Если же выполнено только правое неравенство в (3.5), то говорят, что $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ является *си-*

стемой Бесселя.

Замечание 1 ([36, теорема 1.1.6]). Пусть $B \in L_2(\mathbb{R})$. Система функций $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образует систему Рисса в $L_2(\mathbb{R})$ с постоянными A_1, A_2 тогда и только тогда, когда для почти всех $y \in (-\sigma, \sigma)$ выполняется неравенство

$$A_1 \leqslant \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{B}(y+2\nu\sigma)\right|^2 \leqslant A_2,$$

то есть функции $D_{B,\sigma}$ и $\dfrac{1}{D_{B,\sigma}}$ принадлежат $L_\infty[-\sigma,\sigma]$.

Ф4. *Пусть система функций* $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *бесселева в* $L_2(\mathbb{R})$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt = 2\pi D_{B,\sigma}(y), \tag{3.6}$$

где сходимость интеграла в левой части понимается в $L_2[-\sigma,\sigma]$.

Доказательство. Действительно, при $n \in \mathbb{N}$ по формулам (3.3), (3.2) имеем

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\left|\int\limits_{-n}^{n} B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y)\right|^2 dy =$$

$$= \int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\left|\int\limits_{-n}^{n} B(t)\overline{\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{B}(y+2\nu\sigma)e^{i(y+2\nu\sigma)t}}\,dt - 2\pi\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{B}(y+2\nu\sigma)\right|^2\right|^2 dy =$$

$$= 4\pi^2\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-n}^{n} B(t)e^{-i(y+2\nu\sigma)t}\,dt - \widehat{B}(y+2\nu\sigma)\right)\right|^2 dy.$$

Почленное скалярное умножение во втором равенстве законно, поскольку ряд (3.3) сходится в $L_2[-n,n]$ относительно x. Отсюда по неравенству Коши–Буняковского получаем

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\left|\int\limits_{-n}^{n} B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y)\right|^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi^2\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|\widehat{B}(y+2\nu\sigma)|^2\right)\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-n}^{n} B(t)e^{-i(y+2\nu\sigma)t}\,dt - \widehat{B}(y+2\nu\sigma)\right|^2\right) dy \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi^2\|D_{B,\sigma}\|_{L_\infty[-\sigma,\sigma]}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-n}^{n} B(t)e^{-i(y+2\nu\sigma)t}\,dt - \widehat{B}(y+2\nu\sigma)\right|^2 dy =$$

$$= 4\pi^2\|D_{B,\sigma}\|_{L_\infty[-\sigma,\sigma]}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-n}^{n} B(t)e^{-iyt}\,dt - \widehat{B}(y)\right|^2 dy \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Конечность величины $\|D_{B,\sigma}\|_{L_\infty[-\sigma,\sigma]}$ следует из замечания 1. $\square$

Обозначим через $\mathbb{S}_{B,\sigma}$ пространство функций s, заданных на вещественной оси и представимых в виде

$$s(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right), \quad \beta \in \ell_2(\mathbb{Z}). \tag{3.7}$$

Замечание 2. Если функции $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образуют систему Рисса в $L_2(\mathbb{R})$, то для всякой функции s вида

$$s(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right)$$

включения $s \in L_2(\mathbb{R})$ и $\beta \in \ell_2(\mathbb{Z})$ равносильны. В таком случае $\mathbb{S}_{B,\sigma}$ — подпространство $L_2(\mathbb{R})$.

При $0 < \rho < \sigma$ обозначим через $\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ пространство функций s из $\mathbb{S}_{B,\sigma}$, имеющих вид (3.7) и удовлетворяющих дополнительному условию

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j e^{-i\frac{j\pi}{\sigma}y} = 0 \quad \text{для почти всех} \quad \rho < |y| \leqslant \sigma$$

(сходимость ряда понимается в $L_2[-\sigma,\sigma]$). При $\rho = \sigma$ под $\mathbb{S}_{B,\sigma,\sigma}$ будем понимать $\mathbb{S}_{B,\sigma}$.

Замечание 3. Если функции $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образуют систему Рисса в $L_2(\mathbb{R})$, то для всех $0 < \rho \leqslant \sigma$ пространства $\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ замкнуты в $L_2(\mathbb{R})$ (см., например, [36, теорема 1.1.2]).

Пусть функция $s \in \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ имеет вид (3.7). Положим

$$\zeta_{B,\sigma}(s,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j e^{-i\frac{j\pi}{\sigma}y}.$$

Ясно, что $\zeta_{B,\sigma}(s) \in L_2[-\sigma,\sigma]$. Кроме того, при почти всех $\rho < |y| \leqslant \sigma$ имеем $\zeta_{B,\sigma}(s,y) = 0$. Отсюда по равенству Парсеваля для произведения двух функций получаем следующее представление функции s:

$$s(x) = \int_{-\rho}^{\rho} \zeta_{B,\sigma}(s,y)\Phi_{B,\sigma}(x,y)\,dy. \tag{3.8}$$

Обратно, если функция s определяется формулой

$$s(x) = \int_{-\rho}^{\rho} \zeta(y)\Phi_{B,\sigma}(x,y)\,dy$$

для некоторой $\zeta \in L_2[-\rho,\rho]$, то $s \in \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ и для неё в представлении (3.7)

$$\beta_j = \frac{1}{2\sigma}\int_{-\rho}^{\rho} \zeta(y) e^{i\frac{j\pi}{\sigma}y}\,dy, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

В случае, когда функция B есть B-сплайн

$$\widetilde{B}_{\sigma,\mu}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{\sigma}y} - 1}{i\frac{\pi}{\sigma}y} \right)^{\mu+1} e^{ixy}\, dy,$$

пространство $\mathbb{S}_{B,\sigma}$ совпадает с пространством сплайнов $\mathbf{S}_{\sigma,\mu}$. Соответствующие ему функции $\Phi_{B,\sigma}$ называются *экспоненциальными сплайнами* (см. [35]).

В общем случае формула (3.8) есть континуальный аналог разложения по базису, обобщающему экспоненциальные сплайны, в конечномерных пространствах сдвигов периодических функций (см. главу 1).

Замечание 4. Известно (см. [36, предложение 1.1.9]), что $s \in \mathbb{S}_{B,\sigma}$ тогда и только тогда, когда преобразование Фурье функции s имеет вид $\widehat{s}(y) = \widehat{B}(y)\zeta_{B,\sigma}(s,y)$ для некоторой $\zeta_{B,\sigma}(s) \in L_2[-\sigma,\sigma]$. По определению пространства $\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ включение $s \in \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ равносильно тому, что преобразование Фурье функции s имеет вид $\widehat{s}(y) = \widehat{B}(y)\zeta_{B,\sigma}(s,y)$, где $\zeta_{B,\sigma}(s) \in L_2[-\sigma,\sigma]$, $\zeta_{B,\sigma}(s,y) = 0$ при почти всех $\rho < |y| \leqslant \sigma$.

Далее будем предполагать, что функции $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образуют систему Рисса в $L_2(\mathbb{R})$.

Обозначим через $\mathbb{S}^1_{B,\sigma,\rho}$ пространство функций $s \in \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$, у которых в представлении (3.7) $\beta \in \ell_1(\mathbb{Z})$. Ясно, что $\mathbb{S}^1_{B,\sigma,\rho}$ плотно в $\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$.

Лемма 1. *Если $s \in \mathbb{S}^1_{B,\sigma,\rho}$, то*

$$\zeta_{B,\sigma}(s,y) = \frac{1}{2\pi D_{B,\sigma}(y)} \int\limits_{\mathbb{R}} s(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\, dt, \tag{3.9}$$

где сходимость интеграла в правой части понимается в $L_2[-\sigma,\sigma]$.

Доказательство. Заметим сперва, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, выполняется неравенство

$$\left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int\limits_{a}^{b} B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\, dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y) \right|^2 dy \right)^{1/2} \leqslant \sqrt{2\pi}\|D_{B,\sigma}\|^{1/2}_{L_\infty[-\sigma,\sigma]}\|B\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Действительно, аналогично доказательству свойства Φ4 имеем оценку

$$\left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int\limits_{a}^{b} B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\, dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y) \right|^2 dy \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\|D_{B,\sigma}\|^{1/2}_{L_\infty[-\sigma,\sigma]} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{a}^{b} B(t)e^{-iyt}\, dt - \widehat{B}(y) \right|^2 dy \right)^{1/2},$$

откуда по теореме Планшереля следует требуемое неравенство.

Для $n \in \mathbb{N}$ по формулам (3.7), (3.6), свойству Ф2 и неравенству Минковского имеем

$$\left(\int_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int_{-n}^{n} s(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y)\zeta_{B,\sigma}(s,y) \right|^2 dy \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_{-\sigma}^{\sigma} \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j \int_{-n}^{n} B\left(t - \frac{j\pi}{\sigma}\right) \overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y)\zeta_{B,\sigma}(s,y) \right|^2 dy \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_{-\sigma}^{\sigma} \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j \int_{-n-\frac{j\pi}{\sigma}}^{n-\frac{j\pi}{\sigma}} B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}\left(t + \frac{j\pi}{\sigma}, y\right)}\,dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y)\zeta_{B,\sigma}(s,y) \right|^2 dy \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_{-\sigma}^{\sigma} \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j e^{-i\frac{j\pi}{\sigma}y} \left(\int_{-n-\frac{j\pi}{\sigma}}^{n-\frac{j\pi}{\sigma}} B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y) \right) \right|^2 dy \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\beta_j| \left(\int_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int_{-n-\frac{j\pi}{\sigma}}^{n-\frac{j\pi}{\sigma}} B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y) \right|^2 dy \right)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Почленный переход к пределу законен, поскольку для каждого $j \in \mathbb{Z}$ по свойству Ф4 выражение в скобках стремится к нулю, а в силу суммируемости β и замечания в начале доказательства справедлива оценка

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\beta_j| \left(\int_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int_{-n-\frac{j\pi}{\sigma}}^{n-\frac{j\pi}{\sigma}} B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y) \right|^2 dy \right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2\pi}\|D_{B,\sigma}\|_{L_\infty[-\sigma,\sigma]}^{1/2} \|B\|_{L_2(\mathbb{R})} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\beta_j| < \infty.$$

Почленное интегрирование по конечному промежутку законно, поскольку для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{-n}^{n} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\beta_j| \left| B\left(t - \frac{j\pi}{\sigma}\right) \right| |\Phi_{B,\sigma}(t,y)|\,dt = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\beta_j| \int_{-n}^{n} \left| B\left(t - \frac{j\pi}{\sigma}\right) \right| |\Phi_{B,\sigma}(t,y)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\beta_j| \left(\int_{-n}^{n} \left| B\left(t - \frac{j\pi}{\sigma}\right) \right|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-n}^{n} |\Phi_{B,\sigma}(t,y)|^2\,dt \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \|B\|_{L_2(\mathbb{R})} \left(\int_{-n}^{n} |\Phi_{B,\sigma}(t,y)|^2\,dt \right)^{1/2} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\beta_j| < \infty.$$

□

Для элементов пространств сдвигов справедлив следующий аналог теоремы順Планшереля.

Лемма 2. *Если* $S, s \in \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$, *то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |s(x)|^2 dx = 2\pi \int\limits_{-\rho}^{\rho} |\zeta_{B,\sigma}(s,y)|^2 \, D_{B,\sigma}(y)\, dy, \tag{3.10}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} S(x)\overline{s(x)}\, dx = 2\pi \int\limits_{-\rho}^{\rho} \zeta_{B,\sigma}(S,y)\overline{\zeta_{B,\sigma}(s,y)} D_{B,\sigma}(y)\, dy. \tag{3.11}$$

Доказательство. Докажем формулу (3.10). Достаточно доказать равенство для $s \in \mathbb{S}^1_{B,\sigma,\rho}$, по непрерывности оно будет верно и для $s \in \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$.

Пользуясь (3.8) и (3.9), имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |s(x)|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}} s(x)\overline{s(x)}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \overline{s(x)} \int\limits_{-\rho}^{\rho} \zeta_{B,\sigma}(s,y)\Phi_{B,\sigma}(x,y)\, dy\, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\rho}^{\rho} \zeta_{B,\sigma}(s,y) \int\limits_{-n}^{n} \overline{s(x)}\Phi_{B,\sigma}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\rho}^{\rho} \zeta_{B,\sigma}(s,y) \overline{\int\limits_{-n}^{n} s(x)\overline{\Phi_{B,\sigma}(x,y)}\, dx}\, dy = 2\pi \int\limits_{-\rho}^{\rho} |\zeta_{B,\sigma}(s,y)|^2 \, D_{B,\sigma}(y)\, dy.$$

Предельный переход под знаком интеграла законен по лемме 1.

Смена порядка интегрирования законна, потому что для любого $n \in \mathbb{N}$ функция

$$(x,y) \mapsto \overline{s(x)}\zeta_{B,\sigma}(s,y)\Phi_{B,\sigma}(x,y)$$

суммируема на $[-n,n] \times [-\sigma,\sigma]$. Действительно,

$$\int\limits_{-n}^{n} |s(x)| \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\zeta_{B,\sigma}(s,y)|\, |\Phi_{B,\sigma}(x,y)|\, dy\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\zeta_{B,\sigma}(s,y)|^2 dy\right)^{1/2} \int\limits_{-n}^{n} |s(x)| \left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\Phi_{B,\sigma}(x,y)|^2\, dy\right)^{1/2} dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\zeta_{B,\sigma}(s,y)|^2 dy\right)^{1/2} \left(\int\limits_{-n}^{n} |s(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{-n}^{n}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\Phi_{B,\sigma}(x,y)|^2 dy\, dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Равенство (3.11) стандартным образом выводится из (3.10). □

Преобразование Фурье и частичный интеграл Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ относительно системы $\Phi_{B,\sigma}$ определим равенствами

$$\zeta_{B,\sigma}(f,y) = \frac{1}{2\pi D_{B,\sigma}(y)} \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt, \tag{3.12}$$

$$J_{B,\sigma,\rho}(f,x) = \int\limits_{-\rho}^{\rho} \zeta_{B,\sigma}(f,y)\Phi_{B,\sigma}(x,y)\,dy, \quad 0<\rho\leqslant\sigma.$$

Покажем, что интеграл в правой части (3.12) сходится в $L_2[-\sigma,\sigma]$. Для этого достаточно доказать, что последовательность

$$\left\{ y \mapsto \int\limits_{-n}^{n} f(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt \right\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{3.13}$$

фундаментальна в $L_2[-\sigma,\sigma]$. Возьмём $\varepsilon>0$. Поскольку последовательность

$$\left\{ y \mapsto \int\limits_{-n}^{n} f(t)e^{-iyt}\,dt \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

сходится в $L_2(\mathbb{R})$, существует такой номер $N\in\mathbb{N}$, что для всех $n,k\in\mathbb{N}$, $n>k>N$, выполняется неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_{[-n,n]\setminus[-k,k]} f(t)e^{-iyt}\,dt \right|^2 dy < \frac{\varepsilon}{\|D_{B,\sigma}\|_{L_\infty[-\sigma,\sigma]}}.$$

Тогда для таких n и k имеем оценку

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int\limits_{-n}^{n} f(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt - \int\limits_{-k}^{k} f(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt \right|^2 dy = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int\limits_{[-n,n]\setminus[-k,k]} f(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt \right|^2 dy =$$

$$= \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left| \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)} \int\limits_{[-n,n]\setminus[-k,k]} f(t)e^{-i(y+2\nu\sigma)t}\,dt \right|^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant \|D_{B,\sigma}\|_{L_\infty[-\sigma,\sigma]} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \left| \int\limits_{[-n,n]\setminus[-k,k]} f(t)e^{-i(y+2\nu\sigma)t}\,dt \right|^2 \right) dy =$$

$$= \|D_{B,\sigma}\|_{L_\infty[-\sigma,\sigma]} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_{[-n,n]\setminus[-k,k]} f(t)e^{-iyt}\,dt \right|^2 dy < \varepsilon.$$

Это и означает, что последовательность (3.13) фундаментальна в $L_2[-\sigma,\sigma]$.

Поскольку $1/D_{B,\sigma} \in L_\infty[-\sigma,\sigma]$, получаем, что $\zeta_{B,\sigma}(f) \in L_2[-\sigma,\sigma]$, откуда следует, что $J_{B,\sigma,\rho}(f) \in \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ и, в частности, $J_{B,\sigma,\rho}(f) \in L_2(\mathbb{R})$.

Кроме того, для $f \in L_2(\mathbb{R})$ и $s \in \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ по формулам (3.8) и (3.12) получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\overline{s(t)}\,dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{-n}^{n} f(t)\overline{s(t)}\,dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{-n}^{n} f(t)\int\limits_{-\rho}^{\rho}\overline{\zeta_{B,\sigma}(s,y)\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dy\,dt =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\rho}^{\rho}\overline{\zeta_{B,\sigma}(s,y)}\int\limits_{-n}^{n} f(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt\,dy = 2\pi\int\limits_{-\rho}^{\rho}\overline{\zeta_{B,\sigma}(s,y)}\zeta_{B,\sigma}(f,y)D_{B,\sigma}(y)\,dy,$$

а по равенству (3.11)

$$\int\limits_{\mathbb{R}} J_{B,\sigma,\rho}(f,t)\overline{s(t)}\,dt = 2\pi\int\limits_{-\rho}^{\rho}\overline{\zeta_{B,\sigma}(s,y)}\zeta_{B,\sigma}(f,y)D_{B,\sigma}(y)\,dy.$$

Отсюда следует, что $f - J_{B,\sigma,\rho}(f) \perp \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$, то есть $J_{B,\sigma,\rho}(f)$ — ортогональная проекция f на $\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$. Кроме того,

$$2\pi\int\limits_{-\rho}^{\rho}|\zeta_{B,\sigma}(f,y)|^2\,D_{B,\sigma}(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}}|J_{B,\sigma,\rho}(f,x)|^2\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx. \tag{3.14}$$

Выразим новое преобразование Фурье и наилучшее приближение пространством сдвигов через тригонометрическое преобразование Фурье.

Лемма 3. *Если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то*

$$\zeta_{B,\sigma}(f) = \frac{1}{D_{B,\sigma}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{B}(\cdot+2k\sigma)}\widehat{f}(\cdot+2k\sigma) \quad \textit{в} \quad L_2[-\sigma,\sigma], \tag{3.15}$$
$$E^2(f,\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho})_2 = 2\pi\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}(y)\right|^2dy - \int\limits_{-\rho}^{\rho}\frac{1}{D_{B,\sigma}(y)}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{B}(y+2k\sigma)}\widehat{f}(y+2k\sigma)\right|^2dy\right). \tag{3.16}$$

Доказательство. По формулам (3.12), (3.3) и неравенству Коши–Буняковского

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\left|\zeta_{B,\sigma}(f,y) - \frac{1}{D_{B,\sigma}(y)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{B}(y+2k\sigma)}\widehat{f}(y+2k\sigma)\right|^2dy =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\left|\frac{1}{D_{B,\sigma}(y)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{B}(y+2k\sigma)}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-n}^{n}f(t)e^{-i(y+2k\sigma)t}dt - \widehat{f}(y+2k\sigma)\right)\right|^2dy \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-n}^{n}f(t)e^{-i(y+2k\sigma)t}dt - \widehat{f}(y+2k\sigma)\right|^2dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-n}^{n} f(t) e^{-iyt} dt - \widehat{f}(y) \right|^2 dy = 0.$$

По свойствам ортогональной проекции

$$E^2(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho})_2 = \|f - J_{B,\sigma,\rho} f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} - \|J_{B,\sigma,\rho} f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Отсюда по теореме Планшереля и формулам (3.14) и (3.15)

$$E^2(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho})_2 = 2\pi \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \widehat{f}(y) \right|^2 dy - 2\pi \int\limits_{-\rho}^{\rho} \left|\zeta_{B,\sigma}(f,y)\right|^2 D_{B,\sigma}(y)\, dy =$$

$$= 2\pi \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left| \widehat{f}(y) \right|^2 dy - \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{1}{D_{B,\sigma}(y)} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2k\sigma)} \widehat{f}(y+2k\sigma) \right|^2 dy \right).$$

□

Отметим, что анализ Фурье в пространствах сплайнов был построен Виноградовым в [3], где использовался для получения точного неравенства Джексона.

3.3. Основные результаты

Для заданной почти всюду на $\mathbb{R}$ комплекснозначной функции γ обозначим через T_γ множество функций $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, для которых произведение $\gamma\widehat{\varphi}$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R})$. Далее, через $\mathfrak{F}_\gamma$ обозначим пространство функций f, преобразование Фурье которых имеет вид

$$\widehat{f} = \gamma\widehat{\varphi}, \quad \varphi \in T_\gamma. \tag{3.17}$$

По определению $\mathfrak{F}_\gamma$ — подпространство $L_2(\mathbb{R})$.

Отметим два частных случая пространств $\mathfrak{F}_\gamma$.

1. Если γ есть преобразование Фурье некоторой функции $G \in L_1(\mathbb{R})$, то $\mathfrak{F}_\gamma$ есть класс свёрток с ядром G. В этом случае T_γ есть всё пространство $L_2(\mathbb{R})$.

2. Если $\gamma(y) = \frac{1}{(iy)^r}$, $r \geqslant 1$, то $\mathfrak{F}_\gamma$ есть пространство Соболева $W_2^{(r)}(\mathbb{R})$. Пространство T_γ в этом случае состоит из r-х производных функций из $W_2^{(r)}(\mathbb{R})$.

Заметим, что здесь и далее, если не оговорено иное, r необязательно целое. В связи с этим напомним, что дробная производная функции f по Вейлю определяется через преобразование Фурье:

$$\widehat{f^{(r)}}(y) = (iy)^r \widehat{f}(y).$$

Пусть A — подмножество $\mathbb{R}$ конечной меры Лебега. Его симметризацией называется интервал $A^* = \left(-\frac{\operatorname{mes} A}{2}, \frac{\operatorname{mes} A}{2}\right)$.

Для заданной на $\mathbb{R}$ функции f с вещественными или комплексными значениями, такой что $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$, через f^* обозначим симметрично убывающую перестановку функции $|f|$, то есть

$$f^*(x) = \int_0^\infty \chi_{\{x\in\mathbb{R}\colon |f(x)|>t\}^*}(t)\,dt.$$

Отметим, что из непрерывности f следует непрерывность f^*.

Теорема 1. *Пусть $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$, множество $Q \subset \mathbb{R}$ пусто или конечно, а функции $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образуют систему Рисса в $L_2(\mathbb{R})$. Предположим также, что функция $\gamma\colon \mathbb{R}\setminus Q \to \mathbb{C}$ удовлетворяет следующим условиям:*

- *γ непрерывна на $\mathbb{R}\setminus Q$, $\quad \gamma(y) \to 0$ при $y \to \infty$;*
- *для всех $q \in Q$ $\ |\gamma(y)| \to \infty$ при $y \to q$.*

Тогда следующие утверждения равносильны.

1. Для любой функции $f \in \mathfrak{F}_\gamma$ вида (3.17) выполняется неравенство

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \gamma^*(\rho)\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{3.18}$$

2. Функции $\widehat{B}$ и γ удовлетворяют следующим условиям.

2.1. Для почти всех $y \in (-\sigma,\sigma)\setminus(-\rho,\rho)$ и всех $k \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство $|\gamma(y+2k\sigma)| \leqslant \gamma^*(\rho)$.

2.2. Для почти всех $y \in (-\rho,\rho)$ существует не более одного номера $k_y \in \mathbb{Z}$, для которого $|\gamma(y+2k_y\sigma)| > \gamma^*(\rho)$. Причём если такой номер k_y существует, то выполнены следующие условия.

2.2.1. $\widehat{B}(y+2k_y\sigma) \neq 0$.

2.2.2. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ из того, что $|\gamma(y+2k\sigma)| = \gamma^*(\rho)$, следует, что $\widehat{B}(y+2k\sigma) = 0$.

2.2.3.

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\colon\\ |\gamma(y+2k\sigma)|\neq\gamma^*(\rho)}} \frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2} \geqslant 0.$$

Константа $\gamma^*(\rho)$ в правой части неравенства (3.18) точная.

Доказательство. Учитывая (3.16) и (3.17), неравенство (3.18) можно переписать в виде

$$\int_{\mathbb{R}} |\gamma(y)|^2|\widehat{\varphi}(y)|^2dy - \int_{-\rho}^{\rho} \frac{1}{D_{B,\sigma}(y)}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)}\gamma(y+2\nu\sigma)\widehat{\varphi}(y+2\nu\sigma)\right|^2 dy \leqslant$$
$$\leqslant (\gamma^*(\rho))^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(y)|^2dy.$$

Отсюда видно, что для выполнения этого неравенства нужно, чтобы для почти всех $y \in (-\rho, \rho)$ из того, что $|\gamma(y + 2\nu_y\sigma)| > \gamma^*(\rho)$ для некоторого номера $\nu_y \in \mathbb{Z}$, следовало $\widehat{B}(y + 2\nu_y\sigma) \neq 0$. Действительно, пусть существует такое множество $A \subset (-\rho, \rho)$, mes $A > 0$, что для каждого его элемента y при некотором $\nu_y \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство $|\gamma(y + 2\nu_y\sigma)| > \gamma^*(\rho)$, но $\widehat{B}(y + 2\nu_y\sigma) = 0$. Для $\varepsilon > 0$ обозначим

$$Q_\varepsilon = \begin{cases} \varnothing, & Q = \varnothing, \\ \bigcup\limits_{q\in Q} (q - \varepsilon, q + \varepsilon), & Q \neq \varnothing. \end{cases}$$

Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ множество $A \backslash Q_\varepsilon$ удовлетворяет тем же условиям, что и A. Кроме того, если $\widehat{\varphi} = \chi_{A\backslash Q_\varepsilon}$, то $\varphi \in T_\gamma$, а потому требуемое неравенство нарушается для $\widehat{\varphi} = \chi_{A\backslash Q_\varepsilon}$.

Представив интеграл по $\mathbb{R}$ в виде суммы интегралов по промежуткам длины 2σ, перепишем неравенство в виде

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma(y + 2k\sigma)|^2 |\widehat{\varphi}(y + 2k\sigma)|^2 dy -$$
$$- \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{1}{D_{B,\sigma}(y)} \left| \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y + 2\nu\sigma)} \gamma(y + 2\nu\sigma) \widehat{\varphi}(y + 2\nu\sigma) \right|^2 dy \leqslant$$
$$\leqslant (\gamma^*(\rho))^2 \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(y + 2k\sigma)|^2 dy.$$

Последнее неравенство равносильно системе

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma(y + 2k\sigma)|^2 |\widehat{\varphi}(y + 2k\sigma)|^2 \leqslant (\gamma^*(\rho))^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(y + 2k\sigma)|^2,$$
$$\text{для почти всех } y \in (-\sigma, \sigma) \setminus (-\rho, \rho),$$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma(y + 2k\sigma)|^2 |\widehat{\varphi}(y + 2k\sigma)|^2 - \frac{1}{D_{B,\sigma}(y)} \left| \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y + 2\nu\sigma)} \gamma(y + 2\nu\sigma) \widehat{\varphi}(y + 2\nu\sigma) \right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (\gamma^*(\rho))^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(y + 2k\sigma)|^2 \quad \text{для почти всех } y \in (-\rho, \rho).$$

Действительно, из системы, очевидно, следует неравенство (3.18). Обратно, предположим, что неравенство (3.18) выполнено, но хотя бы одно из неравенств системы нарушается, то есть существует $A \subset (-\sigma, \sigma)$, $\operatorname{mes} A > 0$, такое что для всех $y \in A$ какое-то из неравенств системы не выполнено. Как и выше, получаем, что то же самое верно для множества $A \setminus Q_\varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$ и для $\widehat{\varphi} = \chi_{A\backslash Q_\varepsilon}$ имеем $\varphi \in T_\gamma$, а тогда неравенство (3.18) нарушается для $\widehat{\varphi} = \chi_{A\backslash Q_\varepsilon}$.

С помощью аналогичных рассуждений получаем, что первое неравенство системы выполняется тогда и только тогда, когда выполнено условие 2.1. Второе неравенство системы очевидно для тех $y \in (-\rho, \rho)$, для которых $|\gamma(y + 2k\sigma)| \leqslant \gamma^*(\rho)$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому далее рассматриваем лишь те $y \in (-\rho, \rho)$, для которых $|\gamma(y+2k\sigma)| > \gamma^*(\rho)$ хотя бы для одного номера k. Кроме того, можно считать, что $y + 2k\sigma \notin Q$ ни для какого $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $\{\widehat{\varphi}(y+2k\sigma)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ может быть любым элементом пространства $\ell_2(\mathbb{Z})$. В этом случае требуемое неравенство равносильно тому, что квадратичная форма

$$\begin{aligned}\langle A_y u, u\rangle_{\ell_2(\mathbb{Z})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(|\gamma(y+2k\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2\right) |u_k|^2 - \\ - \frac{1}{D_{B,\sigma}(y)} \left| \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)} \gamma(y+2\nu\sigma) u_\nu \right|^2\end{aligned}$$

неположительна. Здесь $u \in \ell_2(\mathbb{Z})$, а оператор $A_y \colon \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$ определён формулой

$$\begin{aligned}(A_y u)_k = \left(|\gamma(y+2k\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2\right) u_k - \\ - \frac{\widehat{B}(y+2k\sigma)\overline{\gamma(y+2k\sigma)}}{D_{B,\sigma}(y)} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)} \gamma(y+2\nu\sigma) u_\nu.\end{aligned}$$

Поскольку оператор A_y компактен, неположительность его квадратичной формы равносильна неположительности всех его собственных чисел, то есть тому, что система уравнений

$$\begin{gathered}\left(|\gamma(y+2k\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2 - \lambda\right) u_k - \\ - \frac{\widehat{B}(y+2k\sigma)\overline{\gamma(y+2k\sigma)}}{D_{B,\sigma}(y)} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)} \gamma(y+2\nu\sigma) u_\nu = 0, \quad k \in \mathbb{Z}\end{gathered} \tag{3.19}$$

не имеет положительных корней λ при $u \neq \mathbb{O}$.

Заметим, что если существуют два различных номера $k, k' \in \mathbb{Z}$, для которых

$$|\gamma(y+2k\sigma)| = |\gamma(y+2k'\sigma)| > \gamma^*(\rho),$$

то система (3.19), очевидно, имеет положительный корень

$$\lambda = |\gamma(y+2k\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2$$

при

$$\begin{gathered}u_k = \frac{1}{\overline{\widehat{B}(y+2k\sigma)}\gamma(y+2k\sigma)}, \quad u_{k'} = -\frac{1}{\overline{\widehat{B}(y+2k'\sigma)}\gamma(y+2k'\sigma)}, \\ u_l = 0 \quad \text{при } l \in \mathbb{Z} \setminus \{k, k'\}.\end{gathered}$$

Пусть двух таких номеров не существует. Если

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)} \gamma(y+2\nu\sigma) u_\nu = 0,$$

то

$$\left(|\gamma(y+2k\sigma)|^2-(\gamma^*(\rho))^2-\lambda\right)u_k=0$$

при всех $k\in\mathbb{Z}$. При каждом положительном λ выражение в скобках может обнулиться разве что для одного номера; обозначим его k'. Тогда $u_k=0$ при всех $k\neq k'$, и поэтому $u_{k'}\neq 0$. Отсюда следует, что $\widehat{B}(y+2k'\sigma)=0$, чего, как мы показали, не может быть при $|\gamma(y+2k'\sigma)|>\gamma^*(\rho)$.

Следовательно, $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)}\gamma(y+2\nu\sigma)u_\nu\neq 0$, а тогда и

$$|\gamma(y+2k'\sigma)|^2-(\gamma^*(\rho))^2-\lambda\neq 0$$

поскольку $\widehat{B}(y+2k'\sigma)\neq 0$. Деля равенство (3.19) на

$$|\gamma(y+2k\sigma)|^2-(\gamma^*(\rho))^2-\lambda,$$

умножая на $\overline{\widehat{B}(y+2k\sigma)}\gamma(y+2k\sigma)$ и суммируя по всем целым k, получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{B}(y+2k\sigma)}\gamma(y+2k\sigma)u_k-$$
$$-\frac{1}{D_{B,\sigma}(y)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2-(\gamma^*(\rho))^2-\lambda}\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)}\gamma(y+2\nu\sigma)\right)=0,$$

что равносильно

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{B}(y+2\nu\sigma)\right|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2|\gamma(y+2\nu\sigma)|^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2-(\gamma^*(\rho))^2-\lambda}.$$

Перенеся члены в одну часть и приведя к общему знаменателю, преобразуем уравнение к виду

$$\Psi_y(\lambda)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2-(\gamma^*(\rho))^2-\lambda}=0. \tag{3.20}$$

Обозначим $\Pi=\{k\in\mathbb{Z}\colon|\gamma(y+2k\sigma)|>\gamma^*(\rho)\}$. Так как $\gamma(y)\to 0$ при $y\to\infty$, множество Π конечно. Предположим, что Π содержит хотя бы два элемента. Заметим, что все положительные нули знаменателей из (3.20) различны, так как для $k,k'\in\Pi$, $k\neq k'$, выполняется неравенство $|\gamma(y+2k\sigma)|\neq|\gamma(y+2k'\sigma)|$. Пусть λ_1 и λ_2 — два последовательных положительных нуля знаменателей из (3.20). Ясно, что на (λ_1,λ_2) функция Ψ_y непрерывна и строго возрастает от $-\infty$ к $+\infty$, поэтому $\Psi_y(\lambda^*)=0$ для некоторого $\lambda^*\in(\lambda_1,\lambda_2)$. Далее считаем, что $|\gamma(y+2k\sigma)|>\gamma^*(\rho)$ для единственного номера $k_y\in\mathbb{Z}$.

Если условие 2.2.2 не выполнено, то есть $|\gamma(y+2k'\sigma)|=\gamma^*(\rho)$ для некоторого номера $k'\in\mathbb{Z}$, но $\widehat{B}(y+2k'\sigma)\neq 0$, то, поскольку на интервале $(0,|\gamma(y+2k_y\sigma)|^2-(\gamma^*(\rho))^2)$ функция Ψ_y непрерывна и строго возрастает от $-\infty$ к $+\infty$, уравнение (3.20) имеет положительный корень. Если же условие 2.2.2 выполнено, то уравнение (3.20) можно переписать в виде

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |\gamma(y+2k\sigma)|\neq\gamma^*(\rho)}} \frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2-(\gamma^*(\rho))^2-\lambda}=0.$$

При $\lambda > |\gamma(y+2k_y\sigma)|^2-(\gamma^*(\rho))^2$ все знаменатели в левой части последнего равенства отрицательны, а на $(0,|\gamma(y+2k_y\sigma)|^2-(\gamma^*(\rho))^2)$ она строго возрастает по λ к $+\infty$. Поэтому отсутствие у неё положительных корней равносильно её неотрицательности при $\lambda=0$, то есть условию 2.2.3.

Покажем, что неравенство (3.18) точное. Предположим, что (3.18) верно с заменой константы $\gamma^*(\rho)$ на некоторое $K<\gamma^*(\rho)$. С помощью тех же рассуждений, что и выше, приходим к тому, что такое неравенство равносильно условиям пункта 2 с заменой $\gamma^*(\rho)$ на K. Покажем, что такие условия не могут выполняться. Действительно, рассмотрим множество $A_K=\{y\colon |\gamma(y)|>K\}$. Поскольку $K<\gamma^*(\rho)$, получаем, что $\operatorname{mes} A_K>2\rho$. С другой стороны, из пунктов 2.1 и 2.2 следует, что

$$A_K\subset\{y+2k_y\sigma\colon y\in(-\rho,\rho),\quad k_y\in\mathbb{Z}\text{ единствен для каждого } y\}.$$

Следовательно, должно выполняться условие $\operatorname{mes} A_K\leqslant 2\rho$. Таким образом, константу $\gamma^*(\rho)$ в неравенстве (3.18) уменьшить нельзя. □

Вопрос точности неравенства (3.18) в смысле средних поперечников рассматривается в конце главы.

Стандартным способом теорему 1 можно усилить.

Следствие 1. *Если в условиях пункта 2 теоремы 1 преобразование Фурье функции B имеет вид $\widehat{B}=\gamma\widehat{\psi}$ для некоторой $\psi\in T_\gamma$, то для любой функции f вида* (3.17) *выполняется неравенство*

$$E\bigl(f,\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\bigr)_2\leqslant\gamma^*(\rho)E\bigl(\varphi,\mathbb{S}_{\psi,\sigma,\rho}\bigr)_2.$$

Доказательство. Пусть s — элемент наилучшего приближения функции φ пространством $\mathbb{S}_{\psi,\sigma,\rho}$. По замечанию 4

$$\gamma\widehat{s}=\gamma\widehat{\psi}\zeta=\widehat{B}\zeta,$$

где $\zeta\in L_2[-\sigma,\sigma]$, $\zeta(y)=0$ для почти всех $\rho<|y|\leqslant\sigma$. Отсюда получаем, что $\gamma\widehat{s}$ есть преобразование Фурье некоторой функции из $\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$; обозначим её $\widetilde{s}$. Применяя теорему 1 к функции $f-\widetilde{s}$, получаем

$$E\bigl(f,\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\bigr)_2=E\bigl(f-\widetilde{s},\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\bigr)_2\leqslant\gamma^*(\rho)\|\varphi-s\|_{L_2(\mathbb{R})}=\gamma^*(\rho)E\bigl(\varphi,\mathbb{S}_{\psi,\sigma,\rho}\bigr)_2.$$

□

Сформулируем частный случай теоремы 1 для приближения классов свёрток.

Следствие 2. *Пусть* $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$, $G \in L_1(\mathbb{R})$ *и функции* $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *образуют систему Рисса в* $L_2(\mathbb{R})$. *Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Для любой функции* f, *представимой в виде*

$$f = G * \varphi, \quad \varphi \in L_2(\mathbb{R}),$$

выполняется неравенство

$$E\bigl(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\bigr)_2 \leqslant \widehat{G}^*(\rho)\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

2. *Преобразования Фурье функций* B *и* G *удовлетворяют следующим условиям.*

2.1. *Для почти всех* $y \in (-\sigma, \sigma) \setminus (-\rho, \rho)$ *и всех* $k \in \mathbb{Z}$ *выполняется неравенство* $|\widehat{G}(y + 2k\sigma)| \leqslant \widehat{G}^*(\rho)$.

2.2. *Для почти всех* $y \in (-\rho, \rho)$ *существует не более одного номера* $k_y \in \mathbb{Z}$, *для которого* $|\widehat{G}(y + 2k_y\sigma)| > \widehat{G}^*(\rho)$. *Причём если такой номер* k_y *существует, то выполнены следующие условия.*

2.2.1. $\widehat{B}(y + 2k_y\sigma) \neq 0$.

2.2.2. *Для любого* $k \in \mathbb{Z}$ *из того, что* $|\widehat{G}(y + 2k\sigma)| = \widehat{G}^*(\rho)$, *следует, что* $\widehat{B}(y + 2k\sigma) = 0$.

2.2.3.
$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |\widehat{G}(y+2k\sigma)|\neq\widehat{G}^*(\rho)}} \frac{|\widehat{B}(y + 2k\sigma)|^2}{|\widehat{G}(y + 2k\sigma)|^2 - (\widehat{G}^*(\rho))^2} \geqslant 0.$$

Если модуль преобразования Фурье функции G симметрично убывает, то формулировка следствия 2 упрощается.

Следствие 3. *Пусть* $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$, $G \in L_1(\mathbb{R})$, *функции* $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *образуют систему Рисса в* $L_2(\mathbb{R})$, *а функция* $|\widehat{G}|$ *симметрично убывает и непостоянна в окрестности точек* $-\rho$ *и* ρ. *Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Для любой функции* f, *представимой в виде*

$$f = G * \varphi, \quad \varphi \in L_2(\mathbb{R}),$$

выполняется неравенство

$$E\bigl(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\bigr)_2 \leqslant |\widehat{G}(\rho)|\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

2. *Для почти всех* $y \in (-\rho, \rho)$ *будет* $\widehat{B}(y) \neq 0$ *и*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{B}(y + 2k\sigma)|^2}{|\widehat{G}(y + 2k\sigma)|^2 - |\widehat{G}(\rho)|^2} \geqslant 0.$$

Доказательство. Как отмечалось в начале параграфа, для классов свёрток с суммируемым ядром G имеем $\gamma = \widehat{G}$, а T_γ есть всё пространство $L_2(\mathbb{R})$. Поскольку $|\widehat{G}|$ симметрично убывает, получаем, что $\gamma^*(\rho) = |\widehat{G}(\rho)|$, пункт 2.1 следствия 2 выполняется автоматически, а номер k_y из пункта 2.2 равен нулю для всех y. Условие непостоянства функции $|\widehat{G}|$ в окрестности точек ρ и $-\rho$ вместе с симметричным убыванием влечёт, что для всех $y \in (-\rho, \rho)$

$$\{k \in \mathbb{Z}\colon |\gamma(y + 2k\sigma)| = \gamma^*(\rho)\} = \{k \in \mathbb{Z}\colon |\widehat{G}(y + 2k\sigma)| = |\widehat{G}(\rho)|\} = \varnothing.$$

Поэтому второе утверждение следствия 2 принимает указанный вид. $\square$

Аналогичным образом из теоремы 1 получается следующее утверждение для приближения соболевских классов функций.

Следствие 4. *Пусть $r \geqslant 1$, $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$ и функции $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образуют систему Рисса в $L_2(\mathbb{R})$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. Для любой функции $f \in W_2^{(r)}(\mathbb{R})$ выполняется неравенство

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \frac{1}{\rho^r}\|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

2. Для почти всех $y \in (-\rho, \rho)$ будет $\widehat{B}(y) \neq 0$ и

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{B}(y + 2k\sigma)|^2}{\frac{1}{(y+2k\sigma)^{2r}} - \frac{1}{\rho^{2r}}} \geqslant 0.$$

3.4. Достаточные условия

Дадим условие, достаточное для выполнения пункта 2.2.3 теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$, множество $Q \subset \mathbb{R}$ пусто или конечно, функции $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образуют систему Рисса в $L_2(\mathbb{R})$, а функция $\gamma\colon \mathbb{R} \setminus Q \to \mathbb{C}$ такова, что*

- *γ непрерывна на $\mathbb{R} \setminus Q$, $\quad \gamma(y) \to 0$ при $y \to \infty$;*
- *для всех $q \in Q$ $\ |\gamma(y)| \to \infty$ при $y \to q$.*

Предположим также, что функции $\widehat{B}$ и γ удовлетворяют следующим условиям.

1. *Для почти всех $y \in (-\sigma, \sigma) \setminus (-\rho, \rho)$ и всех $k \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство $|\gamma(y + 2k\sigma)| \leqslant \gamma^*(\rho)$.*
2. *Для почти всех $y \in (-\rho, \rho)$ существует не более одного номера $k_y \in \mathbb{Z}$, для которого $|\gamma(y + 2k_y\sigma)| > \gamma^*(\rho)$. Причём если такой номер k_y существует, то выполнены следующие условия.*

2.1. $\widehat{B}(y+2k_y\sigma)\neq 0$ *и для всех* $k\in\mathbb{Z}$

$$|\widehat{B}(y+2k\sigma)|\leqslant\frac{|\widehat{B}(y+2k_y\sigma)|}{|\gamma(y+2k_y\sigma)|}|\gamma(y+2k\sigma)|. \tag{3.21}$$

2.2. Для любого $k\in\mathbb{Z}$ *из того, что* $|\gamma(y+2k\sigma)|=\gamma^*(\rho)$, *следует, что* $\widehat{B}(y+2k\sigma)=0$.

2.3.

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |\gamma(y+2k\sigma)|\neq\gamma^*(\rho)}}\frac{1}{1-\frac{(\gamma^*(\rho))^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2}}\geqslant 0. \tag{3.22}$$

Тогда для любой функции $f\in\mathfrak{F}_\gamma$ *вида* (3.17) *выполняется неравенство*

$$E\big(f,\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2\leqslant\gamma^*(\rho)\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Доказательство. Достаточно проверить условие 2.2.3 теоремы 1, остальные условия второго пункта теоремы 1 совпадают с условиями доказываемой теоремы. Поскольку при $k\neq k_y$ все знаменатели отрицательны, пользуясь неравенствами (3.21) и условием 2.3, имеем

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |\gamma(y+2k\sigma)|\neq\gamma^*(\rho)}}\frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2-(\gamma^*(\rho))^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{|\widehat{B}(y+2k_y\sigma)|^2}{|\gamma(y+2k_y\sigma)|^2}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |\gamma(y+2k\sigma)|\neq\gamma^*(\rho)}}\frac{1}{1-\frac{(\gamma^*(\rho))^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2}}\geqslant 0. \qquad \square$$

Замечание 5. Ряд в левой части (3.22) сходится тогда и только тогда, когда для некоторого $A>0$ выполняется условие $\gamma\chi_{\mathbb{R}\setminus(-A,A)}\in L_2(\mathbb{R})$. Поскольку в левой части (3.22) только одно положительное слагаемое, расходиться этот ряд может только к $-\infty$.

Отметим частный случай теоремы 2 для классов свёрток с симметрично убывающим модулем преобразования Фурье ядра.

Следствие 5. *Пусть* $0<\rho\leqslant\sigma$, $B\in L_2(\mathbb{R})$, $G\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$, *функции* $\left\{B\left(\cdot-\frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *образуют систему Рисса в* $L_2(\mathbb{R})$ *и преобразования Фурье функций* B *и* G *удовлетворяют следующим условиям.*

1. *Функция* $|\widehat{G}|$ *симметрично убывает и непостоянна в окрестности точек* $-\rho$ *и* ρ.

2. *Для почти всех* $y\in(-\rho,\rho)$ *будет* $\widehat{B}(y)\neq 0$,

$$|\widehat{B}(y+2k\sigma)|\leqslant\frac{|\widehat{B}(y)|}{|\widehat{G}(y)|}|\widehat{G}(y+2k\sigma)|\quad \text{при всех } k\in\mathbb{Z},$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1-\frac{|\widehat{G}(\rho)|^2}{|\widehat{G}(y+2k\sigma)|^2}}\geqslant 0. \tag{3.23}$$

Тогда для любой функции f, представимой в виде

$$f = G * \varphi, \quad \varphi \in L_2(\mathbb{R}),$$

выполняется неравенство

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant |\widehat{G}(\rho)| \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Далее будем предполагать, что функция B удовлетворяет условию 2.1 теоремы 2 (или соответствующему ему условию следствия 5).

Дадим условия, при которых произведение функций γ, удовлетворяющих условиям теоремы 2, также удовлетворяет этим условиям.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 1.3, но для полноты изложения мы приведём её доказательство.

Лемма 4. *Пусть функции γ_1 и γ_2 удовлетворяют следующему условию.*

2.3' Для почти всех $y \in (-\rho, \rho)$ и $i = 1, 2$ существует не более одного номера $k_y(\gamma_i) \in \mathbb{Z}$, для которого $|\gamma_i(y + 2k_y(\gamma_i))| > |\gamma_i^*(\rho)|$. Причём если такой номер $k_y(\gamma_i)$ существует, то

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}: \\ |\gamma_i(y+2k\sigma)| \neq \gamma_i^*(\rho)}} \frac{1}{1 - \frac{(\gamma_i^*(\rho))^2}{|\gamma_i(y+2k\sigma)|^2}} \geqslant 0, \quad i = 1, 2. \tag{3.24}$$

Тогда если справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{R}\colon |\gamma_1(z)| > \gamma_1^*(\rho)\} &= \{z \in \mathbb{R}\colon |\gamma_2(z)| > \gamma_2^*(\rho)\}, \\ \{z \in \mathbb{R}\colon |\gamma_1(z)| = \gamma_1^*(\rho)\} &= \{z \in \mathbb{R}\colon |\gamma_2(z)| = \gamma_2^*(\rho)\}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

то функция $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$ также удовлетворяет условию 2.3'.

Доказательство. Для почти всех $y \in (-\rho, \rho)$ обозначим

$$L_y = \{k \in \mathbb{Z}\colon |\gamma(y + 2k\sigma)| \neq \gamma^*(\rho)\}.$$

Заметим, что из соотношений (3.25) следует, что

$$\gamma^*(\rho) = \gamma_1^*(\rho)\gamma_2^*(\rho),$$

$$L_y = \{k \in \mathbb{Z}\colon |\gamma_1(y + 2k\sigma)| \neq \gamma_1^*(\rho)\} = \{k \in \mathbb{Z}\colon |\gamma_2(y + 2k\sigma)| \neq \gamma_2^*(\rho)\}$$

и $k_y(\gamma_1) = k_y(\gamma_2) = k_y(\gamma)$ для почти всех $y \in \mathbb{R}$.

Для почти всех $y \in (-\rho, \rho)$ положим

$$u_k = u_k(y) = \frac{(\gamma_1^*(\rho))^2}{|\gamma_1(y + 2k\sigma)|^2}, \quad v_k = v_k(y) = \frac{(\gamma_2^*(\rho))^2}{|\gamma_2(y + 2k\sigma)|^2}.$$

Тогда для почти всех $y \in (-\rho, \rho)$ имеем $0 < u_{k_y} < 1$, $0 < v_{k_y} < 1$, а для всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{k_y\}$

$u_k \geqslant 1$, $v_k \geqslant 1$. Требуемое неравенство (3.24) для функции γ равносильно неравенству

$$\frac{1}{1-u_{k_y}v_{k_y}} \geqslant \sum_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{u_k v_k - 1}, \tag{3.26}$$

а условие (3.24) для γ_1 и γ_2 можно переписать в виде

$$u_{k_y} \geqslant 1 - \Bigg(\sum_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{u_k-1}\Bigg)^{-1}, \quad v_{k_y} \geqslant 1 - \Bigg(\sum_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{v_k-1}\Bigg)^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{1-u_{k_y}v_{k_y}} \geqslant \frac{1}{\Bigg(\sum\limits_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{u_k-1}\Bigg)^{-1} + \Bigg(\sum\limits_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{v_k-1}\Bigg)^{-1}}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{u_k v_k - 1} \leqslant \sum_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{u_k + v_k - 2},$$

поэтому для доказательства неравенства (3.26) достаточно показать, что

$$\sum_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{u_k + v_k - 2} \leqslant \frac{1}{\Bigg(\sum\limits_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{u_k-1}\Bigg)^{-1} + \Bigg(\sum\limits_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{v_k-1}\Bigg)^{-1}}.$$

Применяя лемму 1.2 к $x_k = \frac{1}{u_k-1}$, $y_k = \frac{1}{v_k-1}$, $k \in L_y \setminus \{k_y\}$, получаем требуемое. □

Замечание 6. По индукции утверждение леммы 4 верно для конечного произведения функций γ_j, а с помощью предельного перехода утверждение получается и для счётного набора γ_j.

3.5. Примеры

Приведём примеры функций γ, удовлетворяющих условиям теоремы 2 для всех $\rho \leqslant \sigma$.

1. $|\gamma(y)| = \dfrac{1}{|y|^r}$, $\quad r \geqslant 1$.

В частности, отсюда следует достаточное условие экстремальности пространств сдвигов для соболевских классов функций на прямой.

Следствие 6. *Пусть $r \geqslant 1$, $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$, функции $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образуют систему Рисса в $L_2(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье функции B удовлетворяет следующим условиям.*

Для почти всех $y \in (-\rho, \rho)$ $\widehat{B}(y) \neq 0$ и

$$|y + 2k\sigma|^r |\widehat{B}(y + 2k\sigma)| \leqslant |y|^r |\widehat{B}(y)| \quad \textit{при всех } k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда для любой функции $f \in W_2^{(r)}(\mathbb{R})$ выполняется неравенство

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \frac{1}{\rho^r}\|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

2. $|\gamma(y)| = \dfrac{1}{(1+a^2y^2)^\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{N}$ или $\alpha + \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. $|\gamma(y)| = e^{-\beta|y|^\delta}$, где $\delta \geqslant 2$, $\beta > 0$.

Соответствующие неравенства (3.22) для таких функций γ были фактически доказаны в главе 1 (примеры 1.1–1.3), поэтому в настоящей главе приводятся без доказательства. Из примера 1.4 также следует, что для преобразования Фурье ядра Пуассона $\gamma(y) = e^{-\alpha|y|}$, $\alpha > 0$, условие (3.22) выполняется, вообще говоря, не для всех α.

Выведем одно важное следствие примеров 2 и 3.

Функция K, заданная почти везде на $\mathbb{R}$, называется *вполне положительной*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и почти всех вещественных x_k и t_j, таких что

$$x_1 < \ldots < x_n, \quad t_1 < \ldots < t_n,$$

определитель матрицы $\big(K(x_k - t_j)\big)_{k,j=1}^n$ неотрицателен. Далее, через $\nu(\varphi)$ обозначим число существенных перемен знака вещественнозначной функции φ, то есть

$$\nu(\varphi) = \sup S^-[\varphi(t_1), \varphi(t_2), \ldots, \varphi(t_n)],$$

где $S^-[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — число перемен знака набора вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (нулевые члены вычёркиваются), а супремум берётся по всем $n \in \mathbb{N}$ и всевозможным упорядоченным наборам вещественных чисел $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ (см. [29, § I.3]). Говорят, что функция $K \in L_1(\mathbb{R})$ *не увеличивает осцилляцию*, если $\nu(\varphi * K) \leqslant \nu(\varphi)$ для любой $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$.

Теорема A ([29, § I.5]). *Пусть $K \in L_1(\mathbb{R})$ — ненулевая функция. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *K вполне положительна.*

2. *K почти везде неотрицательна и не увеличивает осцилляцию.*

3. *Преобразование Фурье функции K имеет вид $\widehat{K}(z) = \dfrac{1}{\psi(iz)}$, где ψ — функция класса Лагерра–Пойа, то есть*

$$\psi(z) = Ce^{-\alpha z^2 + \delta z}\prod_{k=1}^{\infty}(1 - a_k z)e^{-a_k z},$$

$$C > 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \delta, a_k \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty.$$

Таким образом, поскольку для вполне положительной функции $K \in L_1(\mathbb{R})$ модуль преобразования Фурье имеет вид

$$|\widehat{K}(z)| = \frac{1}{C} e^{-\alpha z^2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + a_k^2 z^2}}, \quad z \in \mathbb{R},$$

(с теми же условиями на параметры, что в теореме A), из примеров 2 и 3 по замечанию 6 получается следующее утверждение.

Следствие 7. *Пусть* $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$, *функции* $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *образуют систему Рисса в* $L_2(\mathbb{R})$ *и функция* $K \in L_1(\mathbb{R})$ *вполне положительна. Тогда для любой функции* f, *представимой в виде*

$$f = K * \varphi, \quad \varphi \in L_2(\mathbb{R}),$$

выполняется неравенство

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant |\widehat{K}(\rho)| \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Предположим, что функция G удовлетворяет неравенству (3.23), а $|\widehat{G}|$ симметрично убывает и непостоянна в окрестности точек $-\rho$ и ρ. Тогда примерами функций B, удовлетворяющих условиям следствия 5 для всех $\rho \leqslant \sigma$, могут служить функции с преобразованиями Фурье вида

$$\widehat{B}(y) = \widehat{G}(y)\psi(y),$$

где функция ψ удовлетворяет следующим условиям:

- для некоторых $A, B > 0$ при почти всех $y \in (-\sigma, \sigma)$ верно

$$A \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi(y + 2k\sigma)|^2 \leqslant B;$$

- при почти всех $y \in (-\rho, \rho)$ верно $\psi(y) \neq 0$ и $|\psi(y + 2k\sigma)| \leqslant |\psi(y)|$ для всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Если ψ есть преобразование Фурье функции $K \in L_1(\mathbb{R})$, то такая функция B есть $G * K$. В частности, в качестве K можно взять любую функцию из $L_1(\mathbb{R})$, модуль преобразования Фурье которой симметрично убывает и непостоянен в окрестности точек $-\rho$ и ρ.

Примерами функций B, удовлетворяющих условиям следствия 6 для всех $\rho \leqslant \sigma$, могут служить функции с преобразованием Фурье вида

$$\widehat{B}(y) = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{\sigma}y} - 1}{i\frac{\pi}{\sigma}y}\right)^{\mu+1} \psi(y), \quad \mu \in \mathbb{Z}_+,\ \mu + 1 \geqslant r,$$

где функция ψ удовлетворяет тем же условиям. Если ψ есть преобразование Фурье функции $K \in L_1(\mathbb{R})$, то такая функция B есть среднее Стеклова порядка $\mu + 1$ от K.

В частности, отсюда следует неравенство для приближения функций из $W_2^{(r)}(\mathbb{R})$ сплайнами. Сформулируем данное утверждение.

Следствие 8. *Пусть $r \geqslant 1$, $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$, $\mu + 1 \geqslant r$. Тогда для любой функции $f \in W_2^{(r)}(\mathbb{R})$ выполняется неравенство*

$$E\big(f, \grave{\mathbf{S}}_{\sigma,\mu}\big)_2 \leqslant \frac{1}{\sigma^r} \|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Если же $r \in \mathbb{N}$, то для любой функции $f \in W_2^{(r)}(\mathbb{R})$ справедливо неравенство неравенство

$$E\big(f, \grave{\mathbf{S}}_{\sigma,\mu}\big)_2 \leqslant \frac{1}{\sigma^r} E\big(f^{(r)}, \grave{\mathbf{S}}_{\sigma,\mu-r}\big)_2.$$

Утверждение следствия 8 для $r \in \mathbb{N}$ получено в [17], а для нецелых r является новым.

3.6. Средние поперечники

Напомним определение средней размерности и среднего поперечника по Колмогорову, следуя обозначениям из [14].

Пусть D_p — замкнутый единичный шар пространства $L_p(\mathbb{R})$. Для $A > 0$ и заданной на $\mathbb{R}$ функции f обозначим

$$P_A f(t) = \begin{cases} f(t), & |t| < A, \\ 0, & |t| > A. \end{cases}$$

Величина

$$d_n(Y; X) = \inf_{X_n} \sup_{x \in Y} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X,$$

где первый инфимум берётся по всем подпространствам X_n пространства X размерности не выше n, называется *n-поперечником по Колмогорову* множества Y в нормированном пространстве X.

Пусть H — подпространство $L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty]$. При $\varepsilon, A > 0$ положим

$$K(\varepsilon, A, H) = K(\varepsilon, A, H, L_p(\mathbb{R})) = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ \colon d_n(P_A(H \cap D_p), L_p(\mathbb{R})) < \varepsilon\}.$$

Величина

$$\overline{\dim}\, H = \overline{\dim}\,(H, L_p(\mathbb{R})) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \varliminf_{A \to +\infty} \frac{K(\varepsilon, A, H, L_p(\mathbb{R}))}{2A}$$

называется *средней размерностью* H в $L_p(\mathbb{R})$.

Известно (см. [14, лемма 2.1]), что средняя размерность пространства сплайнов $\grave{\mathbf{S}}_{\sigma,\mu}$ и пространства целых функций степени не выше σ в $L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty]$, равняется $\frac{\sigma}{\pi}$. Кроме того, из [38, теорема 1] следует, что если ряд

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right) \right|$$

сходится равномерно относительно x на любом отрезке, то

$$\overline{\dim}\, \mathbb{S}_{B,\sigma} = \frac{\sigma}{\pi}.$$

Пусть $p \in [1, +\infty]$. *Средним ν-поперечником по Колмогорову* множества X в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ называется величина

$$\overline{d_\nu}(X; L_p(\mathbb{R})) = \inf_{X_\nu} \sup_{x \in X} \inf_{y \in X_\nu} \|x - y\|_{L_p(\mathbb{R})},$$

где первый инфимум берётся по всем подпространствам X_ν пространства $L_p(\mathbb{R})$ средней размерности не выше ν.

Из [32, теорема 6] следует, что для класса функций

$$W_2^G(\mathbb{R}) = \{f \in L_2(\mathbb{R})\colon f = G * \varphi,\ \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1,\ G \in L_1(\mathbb{R})\}$$

справедливо

$$\overline{d_{\frac{\sigma}{\pi}}}(W_2^G(\mathbb{R}); L_2(\mathbb{R})) = \widehat{G}^*(\sigma).$$

Отметим, что в [32, теорема 6] авторы также требуют выполнения условия $G \in L_2(\mathbb{R})$, однако в доказательстве оно не используется.

Для соболевских классов функций на прямой при натуральных r справедливо равенство

$$\overline{d_{\frac{\sigma}{\pi}}}(W_2^{(r)}(\mathbb{R}); L_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{\sigma^r}$$

(см. [14, теорема 4.2]).

Получим обобщение данных результатов на класс $\mathfrak{F}_\gamma$. Для этого введём несколько обозначений.

Для $A \subset \mathbb{R}$ через $\mathfrak{B}_A(\mathbb{R})$ обозначается пространство функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, для которых $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset A$.

Символом $\mathfrak{F}_\gamma^1$ обозначим множество функций $f \in \mathfrak{F}_\gamma$, у которых в представлении

$$\widehat{f} = \gamma \widehat{\varphi}, \quad \varphi \in T_\gamma, \tag{3.27}$$

функция φ удовлетворяет условию $\|\varphi\|_2 \leqslant 1$.

Нам также понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Теорема B ([9, теорема 1]). *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — измеримое по Жордану множество конечной меры Лебега. Тогда*

$$\overline{\dim}\,(\mathfrak{B}_A(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = \frac{\operatorname{mes} A}{2\pi}.$$

Теорема C ([32, теорема 5]). *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — измеримое по Жордану множество конечной меры Лебега, причём $\dfrac{\operatorname{mes} A}{2\pi} > \nu > 0$. Тогда*

$$\overline{d_\nu}\big(\mathfrak{B}_A(\mathbb{R}) \cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})\big) = 1.$$

Теорема 3. *Пусть $\rho > 0$, множество $Q \subset \mathbb{R}$ пусто или конечно, а комплекснозначная функция γ удовлетворяет следующим условиям:*

- *γ непрерывна на $\mathbb{R}\setminus Q$,* $\quad \gamma(y)\to 0$ *при* $y\to\infty$*;*

- *для всех* $q\in Q$ $\ |\gamma(y)|\to\infty$ *при* $y\to q$*.*

Тогда

$$\overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}\big(\mathfrak{F}^1_\gamma, L_2(\mathbb{R})\big) = \gamma^*(\rho).$$

Доказательство. 1. Оценка сверху. Обозначим

$$A_\rho = \{y\in\mathbb{R}\colon |\gamma(y)| > \gamma^*(\rho)\}.$$

Покажем, что для почти всех ρ множества A_ρ измеримы по Жордану. Действительно, граница множества A_ρ содержится в множестве

$$B_\rho = \{y\in\mathbb{R}\colon |\gamma(y)| = \gamma^*(\rho)\},$$

которое может иметь ненулевую меру лишь для не более чем счётного множества значений ρ. Кроме того, ясно, что $\operatorname{mes} A_\rho \leqslant 2\rho$. Возьмём $\varepsilon>0$ и рассмотрим измеримое по Жордану множество $A\supset A_\rho$, для которого $\operatorname{mes} A < \operatorname{mes} A_\rho + 2\pi\varepsilon$. Тогда по теореме C

$$\overline{\dim}\,(\mathfrak{B}_A(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = \frac{\operatorname{mes} A}{2\pi} \leqslant \frac{\rho}{\pi} + \varepsilon.$$

Для $f\in\mathfrak{F}^1_\gamma$ вида (3.27) обозначим через Γ_f такую функцию из $\mathfrak{B}_A(\mathbb{R})$, для которой $\widehat{\Gamma_f} = \widehat{f}\chi_A = \gamma\widehat{\varphi}\chi_A$. Поскольку $|\gamma|\leqslant\gamma^*(\rho)$ на $\mathbb{R}\setminus A$, имеем

$$E\,(f,\mathfrak{B}_A(\mathbb{R}))_2^2 \leqslant \|f-\Gamma_f\|_2^2 = 2\pi\|\widehat{f}-\widehat{\Gamma_f}\|_2^2 = 2\pi\int\limits_{\mathbb{R}\setminus A} |\gamma|^2|\widehat{\varphi}|^2 \leqslant (\gamma^*(\rho))^2\|\varphi\|_2^2.$$

Отсюда в силу произвольности ε следует, что

$$\overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}\big(\mathfrak{F}^1_\gamma, L_2(\mathbb{R})\big) \leqslant \gamma^*(\rho).$$

2. Оценка снизу. Для $\varepsilon>0$ обозначим через A_ε измеримое по Жордану подмножество множества

$$\{y\in\mathbb{R}\colon |\gamma(y)| > \gamma^*(\rho)-\varepsilon\},$$

мера которого больше 2ρ. По теореме B средняя размерность $\mathfrak{B}_{A_\varepsilon}(\mathbb{R})$ больше $\dfrac{\rho}{\pi}$, а по теореме C

$$\overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}\big(\mathfrak{B}_{A_\varepsilon}(\mathbb{R})\cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})\big) = 1.$$

Покажем, что $\mathfrak{F}^1_\gamma$ содержит шар радиуса $\gamma^*(\rho)-\varepsilon$ пространства $\mathfrak{B}_{A_\varepsilon}(\mathbb{R})$, то есть для любой $f\in\mathfrak{B}_{A_\varepsilon}(\mathbb{R})$, $\|f\|_2\leqslant\gamma^*(\rho)-\varepsilon$, существует $\varphi\in T_\gamma$, такая что $\|\varphi\|_2\leqslant 1$ и $\widehat{f}=\gamma\widehat{\varphi}$. Действительно, для $f\in\mathfrak{B}_{A_\varepsilon}(\mathbb{R})$ положим $\widehat{\varphi} = \dfrac{\widehat{f}}{\gamma}$. Тогда, очевидно, $\varphi\in T_\gamma$ и $\widehat{f}=\gamma\widehat{\varphi}$. Кроме того, поскольку

$|\gamma| > \gamma^*(\rho) - \varepsilon$ на A_ε, имеем

$$\|\varphi\|_2^2 = 2\pi\|\widehat{\varphi}\|_2^2 = 2\pi \int\limits_{A_\varepsilon} \left|\frac{\widehat{f}}{\gamma}\right|^2 \leqslant \frac{2\pi}{(\gamma^*(\rho)-\varepsilon)^2} \int\limits_{A_\varepsilon} |\widehat{f}|^2 = \frac{1}{(\gamma^*(\rho)-\varepsilon)^2}\|f\|_2^2 \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}\big(\mathfrak{F}_\gamma^1, L_2(\mathbb{R})\big) \geqslant \overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}\big(\mathfrak{B}_{A_\varepsilon}(\mathbb{R}) \cap (\gamma^*(\rho)-\varepsilon)BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})\big) = \\ = (\gamma^*(\rho)-\varepsilon)\overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}\big(\mathfrak{B}_{A_\varepsilon}(\mathbb{R}) \cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})\big) = \gamma^*(\rho) - \varepsilon.\end{gathered}$$

В силу произвольности ε получаем, что

$$\overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}\big(\mathfrak{F}_\gamma^1, L_2(\mathbb{R})\big) \geqslant \gamma^*(\rho).$$

$\square$

Теорема 3 вместе с утверждением о средней размерности пространств сдвигов влечёт следующее утверждение.

Следствие 9. *Если в условиях теоремы 1, теоремы 2 или следствий 2-5* $\rho = \sigma$ *и ряд*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right|$$

сходится равномерно относительно x *на любом отрезке, то неравенство* (3.18) *(или аналогичное ему неравенство теоремы 2 или следствий 2–5) точно в смысле средних поперечников, то есть константа в правой части не может быть уменьшена за счёт перехода к другому приближающему подпространству средней размерности не выше* $\frac{\sigma}{\pi}$.

Для $\rho \neq \sigma$ условия, при которых $\overline{\dim}\,\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho} = \dfrac{\rho}{\pi}$, неизвестны.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем.

1. В первой главе дано полное описание пространств сдвигов, реализующих точную (в смысле поперечников) константу в неравенстве для оценки наилучшего среднеквадратичного приближения классов периодических свёрток. Полученные результаты обобщают известные классические неравенства для приближения соболевских классов периодических функций тригонометрическими многочленами и сплайнами.

2. Во второй главе найдена широкая совокупность экстремальных приближающих подпространств для классов дифференцируемых функций, заданных на отрезке и удовлетворяющих некоторым граничным условиям. В частности, доказана экстремальность пространств сплайнов с равноотстоящими узлами различного вида.

3. В третьей главе доказаны точные неравенства для приближения классов свёрток пространствами сдвигов на оси. Получено полное описание пространств сдвигов, для которых выполняются эти неравенства, а также вычислены средние поперечники приближаемых классов функций. В частности, указаны условия, при которых полученные неравенства точны в смысле средних поперечников.

Полученные результаты могут быть полезны при решении родственных задач теории приближения.

Литература

[1] *Ахиезер Н., Крейн М.* О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // Докл. АН СССР. 1937. т. 15. с. 107–111.

[2] *Виноградов О. Л.* Аналог сумм Ахиезера–Крейна–Фавара для периодических сплайнов минимального дефекта // Проблемы математического анализа. 2003. вып. 25. с. 29–56.

[3] *Виноградов О. Л.* Точное неравенство типа Джексона — Черныха для приближений сплайнами на оси // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. т. 7 (65). вып. 1. с. 15–27.

[4] *Виноградов О. Л.* Точные константы приближений классов сверток с семейством ядер с особенностью пространствами сдвигов // Алгебра и анализ. 2020. т. 32. вып. 2. с. 45–84.

[5] *Виноградов О. Л.* Точные константы приближений классов сверток с суммируемым ядром пространствами сдвигов // Алгебра и анализ. 2018. т. 30. вып. 5. с. 112–148.

[6] *Виноградов О. Л.* Точные неравенства для приближений классов периодических сверток пространствами сдвигов нечетной размерности // Мат. заметки. 2009. т. 85. вып. 4. с. 569–584.

[7] *Виноградов О. Л., Улицкая А. Ю.* Оптимальные подпространства для среднеквадратичных приближений классов дифференцируемых функций на отрезке // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. т. 7 (65). вып. 3. с. 404–417.

[8] *Виноградов О. Л., Улицкая А. Ю.* Точные оценки среднеквадратичных приближений классов дифференцируемых периодических функций пространствами сдвигов // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. т. 5 (63). вып. 1. с. 22–31.

[9] *Динь Зунг.* Средняя ε-размерность класса функций $B_{G,p}$ // Мат. заметки. 1980. т. 28. вып. 6. с. 727–736.

[10] *Колмогоров А. Н.* Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985.

[11] *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // УМН. 1959. т. 14. вып. 2 (86). с. 3–86

[12] *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984.

[13] *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.

[14] *Магарил-Ильяев Г. Г.* Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой // Мат. сборник. 1991. т. 182. вып. 11. с. 1635–1656.

[15] *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946. т. 10. с. 207–256.

[16] *Тихомиров В. М.* Об аппроксимативных характеристиках гладких функций // Труды конференции по дифференциальным уравнениям и вычислительной математике. Новосибирск: Наука, 1980. с. 183–188.

[17] *Сунь Юншен, Ли Чунь.* Наилучшее приближение некоторых классов гладких функций на действительной оси сплайнами высшего порядка // Мат. заметки. 1990. т. 48. вып. 4. с. 100–109.

[18] *Улицкая А. Ю.* Точные оценки среднеквадратичных приближений классов периодических свёрток пространствами сдвигов // Алгебра и анализ. 2020. т. 32. вып. 2. с. 201–228.

[19] *Улицкая А. Ю.* Точные оценки среднеквадратичных приближений классов свёрток пространствами сдвигов на оси // Сибирский математический журнал. 2023. т. 64. вып. 1. с. 184–203.

[20] *Харди Г. Г, Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: ИЛ, 1948.

[21] *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетики. М.: ИЛ, 1963.

[22] *de Boor C., DeVore R., Ron A.* Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$ // Trans. Am. Math. Soc. 1994. vol. 341 (2). p. 787–806.

[23] *Favard J.* Sur les meilleurs procêdês d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonomêtriques // Bull. Sci. Math. 1937. vol. 61 (2). p. 209–224, 243–256.

[24] *Floater M. S., Sande E.* Optimal spline spaces for L^2 n-width problems with boundary conditions // Constructive Approximation. 2018. vol. 50. p. 1–18.

[25] *Floater M. S., Sande E.* Optimal spline spaces of higher degree for L^2 n-widths // Journal of Approximation Theory. 2017. vol. 216. p. 1–15.

[26] *Golomb M.* Approximation by periodic spline interpolants on uniform meshes // Journal of Approximation Theory. 1968. vol. 1. p. 26–65.

[27] *Gröchenig K.* Foundations of Time–Frequency Analysis. Boston: Birkhäuser, 2001.

[28] *Kamada M., Toriachi K., Mori R.* Periodic spline orthonormal bases // Journal of Approximation Theory. 1988. vol. 55. p. 27–34.

[29] *Karlin S.* Total positivity. Vol. 1. Stanford: Stanford University Press, 1968.

[30] *Kolmogorov A.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. Math. 1936. vol. 37. p. 107–110.

[31] *Kolomoitsev Yu., Skopina M.* Approximation by multivariate quasi-projection operators and Fourier multipliers // Applied Mathematics and Computation. 2021. vol. 400. 125955.

[32] *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M.* On exact values of n-widths in a Hilbert space // Journal of Approximation Theory. 2001. vol. 108. no. 1. p. 97–117.

[33] *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Spline spaces are optimal for L^2 n-widths // Illinois Journal of Mathematics. 1978. vol. 22. no. 4. p. 541–564.

[34] *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag, 1985.

[35] *Schoenberg I. J.* Cardinal Spline Interpolation. Philadelphia: SIAM, 2 ed., 1993.

[36] *Skopina M., Krivoshein A., Protasov V.* Multivariate wavelet frames. Singapore: Springer, 2016.

[37] *Ulitskaya A. Yu.* Fourier analysis in spaces of shifts // Journal of Mathematical Sciences. 2022. vol. 266. p. 603–614.

[38] *Vinogradov O. L.* Average dimension of shift spaces // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. vol. 39. no. 5. p. 717–721.

[39] *Vinogradov O. L.* Structural characterization of deviations of quasi-projectors on the real line // J. Math. Anal. Appl. 2021. vol. 500, no. 1. 125115.

SAINT PETERSBURG UNIVERSITY

Manuscript

Anastasiia Iurevna Ulitskaia

Sharp inequalities for approximation by spaces of shifts

1.1.1. Real, complex and functional analysis

Dissertation of the Candidate of Science in Physics and Mathematics

Translation from Russian

Scientific advisor
Doctor of Sciences in Physics and Mathematics
docent O. L. Vinogradov

Saint Petersburg
2023

Contents

Notation

In what follows, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ are the sets of complex, real, integer, nonnegative integer, and natural numbers, respectively; $[a:b] = [a,b] \cap \mathbb{Z}$. Unless otherwise follows from the context, all the functional spaces under consideration can be real or complex.

If $p \in [1,+\infty)$, then L_p is the space of measurable, 2π-periodic functions f satisfying the inequality

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p\right)^{1/p} < +\infty;$$

L_∞ is the space of 2π-periodic essentially bounded functions with the norm $\|f\|_{L_\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{[0,2\pi]} |f|$. The spaces $L_p[a,b]$ and $L_p(\mathbb{R})$ are defined similarly.

Further, for $p \in [1,+\infty]$ denote by $W_p^{(r)}$ the space of functions f in L_p, such that $f^{(r-1)}$ is locally absolutely continuous and $f^{(r)} \in L_p$. The spaces $W_p^{(r)}[a,b]$ and $W_p^{(r)}(\mathbb{R})$ are defined similarly.

For $p \in [1,+\infty)$ also denote by $\ell_p(\mathbb{Z})$ the space of two-sided sequences $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ for which

$$\|a\|_{\ell_p(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^p\right)^{1/p} < +\infty.$$

The space of compactly supported infinitely differentiable functions on $\mathbb{R}$ is denoted by $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$.

The symbol $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ denotes the inner product in the Hilbert space $\mathcal{H}$;

$$E(f,\mathfrak{N})_p = \inf_{T\in\mathfrak{N}} \|f-T\|_p$$

is best approximation of f in L_p by the set $\mathfrak{N} \subset L_p$. Best approximation in the spaces $L_p[a,b]$ and $L_p(\mathbb{R})$ is defined similarly and denoted by the same symbol.

The Fourier coefficients of a 2σ-periodic function f, summable on a period, and the discrete Fourier transform of the set $\{c_k\}_{k=0}^{2n-1}$ are defined by the equalities

$$c_k(f) = \frac{1}{2\sigma}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} f(y)e^{-ik\frac{\pi}{\sigma}y}\,dy, \qquad \widehat{c_l} = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k e^{-\frac{ilk\pi}{n}}.$$

The notation $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ means that the series on the right-hand side is the Fourier series of f. The convolution of functions f and g in L_1 is defined as follows:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt.$$

With such a normalization, we have $c_k(f * g) = c_k(f)c_k(g)$.

The Fourier transform of the function $f \in L_1(\mathbb{R})$ is defined by the formula

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy}\,dx.$$

The definition of the Fourier transform of $f \in L_2(\mathbb{R})$ is extended from $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ standardly.

The convolution of two functions on the axis is defined by

$$F * G(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} F(t)G(x-t)\,dt;$$

with such a normalization, we have $\widehat{F * G} = \widehat{F} \cdot \widehat{G}$.

For $n \in \mathbb{N}$ and $\mu \in \mathbb{Z}_+$, let $\mathbf{S}_{n,\mu}$ denote the $2n$-dimensional space of 2π-periodic splines of degree μ and defect 1 with knots at the points $\frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\mathcal{T}_{2n-1}$ is the $(2n-1)$-dimensional space of trigonometric polynomials of degree at most $n-1$. For $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$, let $\grave{\mathbf{S}}_{\sigma,\mu}$ be the space of splines of degree μ and minimal defect with knots at the points $\frac{j\pi}{\sigma}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Symbols f^e and f^o denote even and odd part of the function f, respectively, i.e.

$$f^e = \frac{f + f(-\cdot)}{2}, \qquad f^o = \frac{f - f(-\cdot)}{2}.$$

Recall that the *Kolmogorov n-width* of the set A in the normed space X is defined by

$$d_n(A; X) = \inf_{X_n} \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X,$$

where the external lower bound is taken over all subspaces X_n of the space X, whose dimension does not exceed n.

Introduction

The dissertation is devoted to finding a number of sharp inequalities for mean square approximation of several classes of functions by spaces of shifts.

The dissertation consists of three chapters subdivided into sections. Statement numbering is individual for every type of statements in the chapter. In references to the assertion of another chapter, the first symbol is a chapter number, for example: Theorem 1.2. Theorems that do not belong to the author are marked by letters. Numbering of formulas in chapters is double and refers to a chapter number and a number of the formula in the chapter, for example: formula (2.3).

The first chapter is devoted to sharp estimates of mean square approximations of periodic convolution classes by spaces of shifts. Its main results are published in [8] and [18].

For the approximation by trigonometric polynomials, it is known (see, for example, [13, Theorem 4.2.2]) that the following inequality cannot be improved in the class $W_2^{(r)}$:

$$E(f, \mathcal{T}_{2n-1})_2 \leqslant \frac{1}{n^r} \|f^{(r)}\|_2. \tag{1}$$

Inequality (1) is sharp even in a sense of widths; i.e., the constant $\frac{1}{n^r}$ cannot be decreased by passing to an approximating subspace of dimension not higher than $2n$ (see, for example, [13, Theorem 8.1.3]). This inequality can be proved very easily using Parseval's identity:

$$E^2(f, \mathcal{T}_{2n-1})_2 = 2\pi \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ |k|\geqslant n}} |c_k(f)|^2 = 2\pi \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ |k|\geqslant n}} \frac{\left|c_k(f^{(r)})\right|^2}{k^{2r}} \leqslant \frac{2\pi}{n^{2r}} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ |k|\geqslant n}} \left|c_k(f^{(r)})\right|^2 \leqslant \frac{1}{n^{2r}} \|f^{(r)}\|_2^2.$$

Similar inequalities for spline approximations were obtained in [17] by means of duality relations.

Natural generalization of this result consists of considering classes of convolutions with other summable kernels instead of Sobolev classes (convolutions with Bernoulli kernel). In this chapter, we give a complete description of all spaces, generated by equidistant shifts of a single function and providing a sharp (in the sense of widths) constant in the inequality of type (1) for approximation of periodic convolution classes. Well-known inequalities for approximation by trigonometric polynomials and splines are particular cases of these results.

Note that spaces generated by shifts of a single function play a significant role in approximation theory, wavelets theory, and applications. Approximative properties of such spaces are of wide interest; see, for example [22, 31, 39].

Moreover, spaces of shifts and, in particular, trigonometric polynomials and splines often become optimal approximating subspaces in various problems of approximation theory. Among numerous results related to approximation in periodic spaces C and L_1, let us mention the following. In 1937, Favard [23] and Akhiezer and Krein [1] constructed a linear approximation method $X_{n,r}$ with values in the space of trigonometric polynomials of degree at most $n-1$ such that for every $f \in W_p^{(\infty)}$ for $p = \infty$ the following inequality holds:

$$\|f - X_{n,r}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \|f^{(r)}\|_p; \tag{2}$$

and proved that for every $n \in \mathbb{N}$ the constant

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l(r+1)}}{(2l+1)^{r+1}}$$

on the class $W_\infty^{(r)}$ cannot be reduced, even if the left-hand side is replaced by best approximation. Nikolsky [15] extended estimates (2) and the claim of their sharpness to the case $p = 1$. It is well-known (see, for example, [12, 13]), that for approximation of Sobolev classes by splines for $p = 1, \infty$ the following inequalities are sharp:

$$E(f, \mathbf{S}_{2n,\mu})_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \|f^{(r)}\|_p,$$

$r \in \mathbb{N},\ \mu \in \mathbb{Z}_+,\ \mu \geqslant r - 1.$

In [6], Vinogradov obtained sharp inequalities of type (2) for approximation of classes of periodic convolutions with kernels that do not increase oscillation by spaces of shifts of odd dimension in C and L_1 metrics. Other results regarding sharp estimates of approximation by spaces of shifts can be found, for example, in [34].

Before formulating main results of the chapter, we need to introduce necessary notation.

For $n \in \mathbb{N}$ and $B \in L_1$, let $\mathbb{S}_{B,n}$ be the space of functions s defined on $\mathbb{R}$ and representable in the form

$$s(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j B\left(x - \frac{j\pi}{n}\right), \tag{3}$$

and $\mathbb{S}_{B,n}^{\times}$ be the space of functions in $\mathbb{S}_{B,n}$ that can be represented as (3) with the additional condition

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \beta_j = 0.$$

It is easy to show (see §1.1) that the spaces $\mathbb{S}_{B,n}$ and $\mathbb{S}_{B,n}^{\times}$ coincide with the linear spans of the sets $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n}$ and $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n-1}$, respectively, where

$$\Phi_{B,l}(x) = \Phi_{B,n,l}(x) = \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} e^{\frac{ilj\pi}{n}} B\left(x - \frac{j\pi}{n}\right) \sim \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_{l+2n\nu}(B) e^{i(l+2n\nu)x}.$$

For $m \in [1:n]$, denote by $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ the linear span of the set $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-m}^{m-1}$; the linear span of the set $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-m}^{m}$ is denoted by $\mathbb{S}_{B,n,m}$.

For $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $Q \subset [1-m:m]$ and a subset of integer numbers $K = \{\varkappa_l\}_{l\in Q}$, denote by $T_{n,m,Q,K}$ the linear span of the set $\{x \mapsto e^{i(l+2n\varkappa_l)x}\}_{l\in Q}$.

In this chapter, we establish the analogs of inequality (1) for approximation of classes of functions f representable in the form

$$f = G * \varphi + g, \quad \varphi \in L_2,\ g \in T_{n,m,Q,K},$$

where $G \in L_1$, $G \perp T_{n,m,Q,K}$, by spaces of shifts.

It follows from [34, Theorems IV.2.5 and IV.3.1] that for the class of functions under consideration and $q = \dim T \leqslant n$, we have

$$d_n\big(\{G * \varphi + g\colon \|\varphi\|_2 \leqslant 1,\ g \in T\}; L_2\big) = |c^*_{n+1-q}(G)|,$$

where $|c^*_k(G)|$, $k \in \mathbb{N}$, is the k-th therm of the sequence $\{|c_l(G)|\}_{l\in\mathbb{Z}}$ arranged in non-increasing order. In this case, the optimal subspace is the sum of T the linear span of the set $\{x \mapsto e^{ik_jx}\}_{j=1}^{n-q}$, where the numbers $k_1, \dots, k_{n-q}$ satisfy the conditions $|c_{k_j}(G)| = |c^*_j(G)|$, $j = 1, \dots, n-q$.

In this chapter, we obtain a wide set of another optimal subspaces and also give a complete description of all spaces of shifts which provide estimate of form (1) with a sharp constant for the class of functions under consideration.

The main result of the chapter is the following theorem.

Theorem 1.1. *Let $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $Q \subset [1-m:m-1]$, $q = \operatorname{card} Q$, $K = \{\varkappa_l\}_{l\in Q} \subset \mathbb{Z}$, $B \in L_2$, $G \in L_1$, $G \perp T_{n,m,Q,K}$. Then the following statements are equivalent.*

1. *For every function f representable in the form*

$$f = G * \varphi + g, \quad \varphi \in L_2,\ g \in T_{n,m,Q,K},$$

the following inequality holds:

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c^*_{2m-q}(G)| \|\varphi\|_2.$$

2. *The Fourier coefficients of B и G satisfy the following conditions.*

   2.1. *For every $l \in Q$, we have $c_{l+2n\varkappa_l}(B) \neq 0$ and $c_{l+2nk}(B) = 0$ for all $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\varkappa_l\}$.*

   2.2. *For every pair $(l,k) \in \big([1-n:-m] \cup Q \cup [m:n]\big) \times \mathbb{Z}$, we have $|c_{l+2nk}(G)| \leqslant |c^*_{2m-q}(G)|$.*

   2.3. *For every $l \in [1-m:m-1] \setminus Q$ there exists not more than one number $k_l \in \mathbb{Z}$ for which $|c_{l+2nk_l}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$. Moreover, whenever such a number k_l exists, the following conditions are satisfied.*

2.3.1. $c_{l+2nk_l}(B) \neq 0$.

2.3.2. For every $k \in \mathbb{Z}$*, the equality* $|c_{l+2nk}(G)| = |c^*_{2m-q}(G)|$ *implies* $c_{l+2nk}(B) = 0$.

2.3.3.

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m-q}(G)|}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2} \geqslant 0.$$

The following theorem gives an easily verifiable condition that is sufficient for the fulfillment of claim 2.3.3 of Theorem 1.1.

Theorem 1.3. *Let* $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $Q \subset [1-m : m-1]$, $q = \operatorname{card} Q$, $K = \{\varkappa_l\}_{l\in Q} \subset \mathbb{Z}$, $B, G \in L_2$, $G \perp T_{n,m,Q,K}$ *and suppose that the Fourier coefficients of* B *and* G *satisfy the following conditions.*

1. *For every* $l \in Q$*, we have* $c_{l+2n\varkappa_l}(B) \neq 0$ *and* $c_{l+2nk}(B) = 0$ *for all* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\varkappa_l\}$.

2. *For every pair* $(l,k) \in \big([1-n : -m] \cup Q \cup [m : n]\big) \times \mathbb{Z}$*, we have* $|c_{l+2nk}(G)| \leqslant |c^*_{2m-q}(G)|$.

3. *For every* $l \in [1-m : m-1] \setminus Q$ *there exists not more than one number* $k_l \in \mathbb{Z}$ *for which* $|c_{l+2nk_l}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$*. Moreover, whenever such a number* k_l *exists, the following conditions are satisfied.*

   3.1. $c_{l+2nk_l}(B) \neq 0$ *and for all* $k \in \mathbb{Z}$*, we have*

   $$|c_{l+2nk}(B)| \leqslant \frac{|c_{l+2nk_l}(B)|}{|c_{l+2nk_l}(G)|} |c_{l+2nk}(G)|.$$

   3.2. For every $k \in \mathbb{Z}$*, the equality* $|c_{l+2nk}(G)| = |c^*_{2m-q}(G)|$ *implies* $c_{l+2nk}(B) = 0$.

   3.3.

   $$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m-q}(G)|}} \frac{1}{1 - \frac{|c^*_{2m-q}(G)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2}} \geqslant 0.$$

Then for every function f *representable in the form*

$$f = G * \varphi + g, \quad \varphi \in L_2,\ g \in T_{n,m,Q,K},$$

the following inequality holds:

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c^*_{2m-q}(G)| \|\varphi\|_2.$$

Assertions similar to Theorems 1.1 and 1.3 hold true for approximation by the spaces $\mathbb{S}_{B,n,m}$.

Let us formulate a particular case of Theorem 1.3 for approximation of convolution classes with kernels that have symmetrically decreasing sequence of absolute values of the Fourier coefficients and do not have a term outside the integral.

Corollary 1.6. *Let $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B, G \in L_2$ and suppose that the Fourier coefficients of B and G satisfy the following conditions.*

1. $|c_k(G)| = |c_{-k}(G)|$ *for all* $k \in \mathbb{N}$,

$$|c_0(G)| \geqslant \ldots \geqslant |c_{m-1}(G)| > |c_m(G)| > |c_{m+1}(G)| \geqslant |c_{m+2}(G)| \geqslant \ldots.$$

2. For every $l \in [1-m : m-1]$, *we have* $c_l(B) \neq 0$,

$$|c_{l+2nk}(B)| \leqslant \frac{|c_l(B)|}{|c_l(G)|}|c_{l+2nk}(G)| \quad \textit{for all } k \in \mathbb{Z},$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - \left|\frac{c_m(G)}{c_{l+2nk}(G)}\right|^2} \geqslant 0.$$

Then for every function f representable in the form

$$f = G * \varphi, \quad \varphi \in L_2,$$

the following inequalities hold:

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2,$$

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2.$$

In addition, the chapter contains a wide set of kernels satisfying the conditions of Theorem 1.3, as well as examples of optimal approximating subspaces.

The second chapter is devoted to optimal approximating subspaces in problems of mean square approximation of several classes of differentiable functions defined on a segment and subject to certain boundary conditions. Its main results are published in [7].

In [24] Floater and Sande studied the L_2 approximation of three classes of functions in $W_2^{(r)}[0,1]$, defined by certain boundary conditions. With slightly different scaling (which we hereafter adhere to) these classes are given by

$$\begin{aligned}
H_0^r &= \{u \in W_2^{(r)}[0,\pi] \colon u^{(k)}(0) = u^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < r, \quad k \text{ is even}\},\\
H_1^r &= \{u \in W_2^{(r)}[0,\pi] \colon u^{(k)}(0) = u^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < r, \quad k \text{ is odd}\},\\
H_2^r &= \left\{u \in W_2^{(r)}\left[0, \frac{\pi}{2}\right] : u^{(k)}(0) = u^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leqslant k, l < r, \quad k \text{ is even, } l \text{ is odd}\right\}.
\end{aligned}$$

Consider the sets

$$\begin{aligned}
A_i^r &= \{u \in H_i^r\colon \|u^{(r)}\|_{L_2[0,\pi]} \leqslant 1\}, \quad i = 0, 1,\\
A_2^r &= \left\{u \in H_2^r\colon \|u^{(r)}\|_{L_2\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \leqslant 1\right\},\\
A^r &= \{u \in W_2^{(r)}[0,1]\colon \|u^{(r)}\|_{L_2[0,1]} \leqslant 1\}.
\end{aligned}$$

In the first work on widths [30] (see also [10, p. 186–189]), Kolmogorov calculated the widths of the classes A^r и A_1^1 and indicated optimal approximating subspaces. For A_1^1, it is a linear span of the cosine system

$$\{1,\ x \mapsto \sqrt{2}\cos\pi x,\ \ldots,\ x \mapsto \sqrt{2}\cos\pi(n-1)x\}.$$

Melkman and Micchelli [33] showed that for A^r, there exist two optimal subspaces of splines of degree $r-1$ and $2r-1$. This and other problems of theory of widths are the focus of [34].

Floater and Sande calculated the values of widths of the sets A_i^r and described optimal subspaces consisting of trigonometric polynomials: for A_0^r, A_1^r, A_2^r, they are

$$\operatorname{span}\{x \mapsto \sin kx\}_{k=1}^n, \quad \operatorname{span}\{x \mapsto \cos kx\}_{k=0}^{n-1}, \quad \operatorname{span}\{x \mapsto \sin(2k-1)x\}_{k=1}^n,$$

respectively. In addition, the authors proved that the spaces A_i^r admit optimal spline subspaces, which are defined as follows.

Let $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$ be a knot vector such that $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m < P_i$, where $P_0 = P_1 = \pi$ and $P_2 = \pi/2$. Denote by $S_{d,\tau,i}$ the space of splines of degree d and defect 1 on $[0, P_i]$ and consider its n-dimensional subspaces defined by

$$\begin{aligned}
S_{d,0} &= \{s \in S_{d,\tau_0,0}\colon s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d, \quad k \text{ is even}\},\\
S_{d,1} &= \{s \in S_{d,\tau_1,1}\colon s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d, \quad k \text{ is odd}\},\\
S_{d,2} &= \left\{s \in S_{d,\tau_2,2}\colon s^{(k)}(0) = s^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leqslant k, l \leqslant d, \quad k \text{ is even}, l \text{ is odd}\right\},
\end{aligned}$$

where the knot vectors τ_i for $i = 0, 1, 2$ are given as

$$\tau_0 = \begin{cases} \left\{\frac{k\pi}{n+1}\right\}_{k=1}^n, & d \text{ is odd},\\ \left\{\frac{k\pi}{n+1} + \frac{\pi}{2(n+1)}\right\}_{k=0}^n, & d \text{ is even}, \end{cases}$$

$$\tau_1 = \begin{cases} \left\{\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right\}_{k=0}^{n-1}, & d \text{ is odd},\\ \left\{\frac{k\pi}{n}\right\}_{k=1}^{n-1}, & d \text{ is even}, \end{cases}$$

$$\tau_2 = \begin{cases} \left\{\frac{k\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2(2n+1)}\right\}_{k=0}^{n-1}, & d \text{ is even},\\ \left\{\frac{k\pi}{2n+1}\right\}_{k=1}^n, & d \text{ is odd}. \end{cases}$$

It was proved in [24] that for any $d \geqslant r-1$ the spline spaces $S_{d,i}$ are optimal n-dimensional spaces for the set A_i^r, $i = 0, 1, 2$. Some of these results for the spaces A_0^r were obtained by Floater and

Sande earlier in [25].

As we can see, all the spaces $S_{d,i}$ have equidistant knots, but the form of the knot vector is determined by the degree d. In this chapter, we show that the classes A_i^r admit optimal spline subspaces with both types of knots indicated in the definition of τ_i independently of the degree. Of course, boundary conditions should be relaxed or some extra conditions should be added in the remaining cases to ensure the dimension to equal n. Moreover, we indicate a wide set another optimal subspaces in the problem under consideration.

Our technique consists in reducing the problem to periodic one and applying the results of Chapter 1.

Consider the following functional classes:

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_0^r &= \{u \in W_2^{(r)} \colon u \text{ is odd}\},\\
\widetilde{H}_1^r &= \{u \in W_2^{(r)} \colon u \text{ is even}\},\\
\widetilde{H}_2^r &= \left\{u \in W_2^{(r)} \colon u \text{ is odd, } u\left(\cdot + \frac{\pi}{2}\right) \text{ is even}\right\}.
\end{aligned}$$

Putting

$$\widetilde{A}_i^r = \{u \in \widetilde{H}_i^r \colon \|u^{(r)}\|_2 \leqslant 1\}, \quad i = 0, 1, 2,$$

we derive to

$$d_n(\widetilde{A}_0^r; L_2) = d_n(A_0^r; L_2[0,\pi]), \quad d_n(\widetilde{A}_1^r; L_2) = d_n(A_1^r; L_2[0,\pi]),$$
$$d_n(\widetilde{A}_2^r; L_2) = d_n\left(A_2^r; L_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

Therefore, the problems for nonperiodic classes, mentioned at the beginning, can be reduced to similar for periodic situation, where the results of Chapter 1 are appliable.

Consider the following m-dimensional subspaces of $\mathbb{S}_{B,n,m}^{\times}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^0 &= \operatorname{span}\{\Phi_{B,l}^o\}_{l=1}^m \qquad \text{for } m+1 \leqslant n,\\
\widetilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^1 &= \operatorname{span}\{\Phi_{B,0}\} \oplus \operatorname{span}\{\Phi_{B,l}^e\}_{l=1}^{m-1} \qquad \text{for } m \leqslant n,\\
\widetilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^2 &= \operatorname{span}\{\Phi_{B,2l-1}^o\}_{l=1}^m \qquad \text{for } 2m+1 \leqslant n.
\end{aligned}$$

The following theorem gives the conditions for optimality of the subspace $\widetilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^0$ for the class $\widetilde{H}_0^r$.

Theorem 2.2. *Let $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m+1 \leqslant n$, and suppose that the Fourier coefficients of a function $B \in L_2$ satisfy the following conditions.*

1. *For any $l \in [1:m]$ there exists $\gamma_l \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ such that for all $k \in \mathbb{Z}$ $c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B)$.*

2. *For all $\nu \in \mathbb{N}$, $c_{2n\nu}(B) = c_{-2n\nu}(B)$.*

3. For all $l \in [1:m]$, we have $c_l(B) \neq 0$ and

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{(m+1)^{2r}}} \geqslant 0.$$

Then for any $u \in \widetilde{H}_0^r$,

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r}\|u^{(r)}\|_2.$$

Similar theorems are true for $\widetilde{H}_1^r$ and $\widetilde{H}_2^r$.

In addition, we give examples of functions B satisfying the conditions of Theorem 2.2 and similar statements for the classes $\widetilde{H}_1^r$ and $\widetilde{H}_2^r$; and also describe optimal spline subspaces generalizing the results of [24].

The third chapter is devoted to sharp inequalities for best mean square approximation of classes of convolutions by spaces of shifts on the axis. Its main results are published in в [37] and [19].

In this chapter, similarly to the first one, we obtain analogs of inequality (1), but for approximation in $L_2(\mathbb{R})$.

Among works on sharp approximations of functional classes in $L_2(\mathbb{R})$ we will note the following. Estimate (1) for approximation by entire functions of exponential type and its sharpness are obvious and well-known. In [17], the analog of (1) was obtained for approximation by splines; it was also observed without proof that the inequality is sharp in the sense of average widths (the definition will be given later). Average widths of Sobolev classes were calculated in [14]. Results on optimality of spaces of entire functions of exponential type and splines can be found therein. For approximation of classes of convolutions with summable kernel, the values of average widths and optimal subspaces consisting of functions with their Fourier transform located in a given bounded set, can be found in [32].

In the spaces C and L_1 on the axis, sharp inequalities for approximation by spaces of shifts were obtained by Vinogradov using linear methods [4, 5].

To formulate the main results of the chapter, we introduce the following notation.

Let $\sigma > 0$, $B \in L_2(\mathbb{R})$. Put

$$\Phi_{B,\sigma}(x,y) = \frac{1}{2\sigma}\sum_{j\in\mathbb{Z}} B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right) e^{i\frac{j\pi}{\sigma}y}.$$

Denote by $\mathbb{S}_{B,\sigma}$ the space of functions s defined on $\mathbb{R}$ and representable in the form

$$s(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right), \quad \beta \in \ell_2(\mathbb{Z}). \tag{4}$$

For $0 < \rho < \sigma$, let $\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ be the space of functions s in $\mathbb{S}_{B,\sigma}$ that can be represented as (4) with the additional condition

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j e^{-i\frac{j\pi}{\sigma}y} = 0 \quad \text{for almost all} \quad \rho < |y| \leqslant \sigma$$

(convergence of the series is interpreted in $L_2[-\sigma,\sigma]$). When $\rho=\sigma$, by $\mathbb{S}_{B,\sigma,\sigma}$ we mean $\mathbb{S}_{B,\sigma}$.

Given a complex-valued function γ defined almost everywhere on $\mathbb{R}$, denote by T_γ the set of functions $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ for which the product $\gamma\widehat{\varphi}$ also belongs to $L_2(\mathbb{R})$. Next, denote by $\mathfrak{F}_\gamma$ the space of functions f whose Fourier transform has the form

$$\widehat{f} = \gamma\widehat{\varphi}, \quad \varphi \in T_\gamma. \tag{5}$$

By definition, $\mathfrak{F}_\gamma$ is a subspace of $L_2(\mathbb{R})$.

Note the two particular cases of $\mathfrak{F}_\gamma$.

1. If γ is the Fourier transform of some $G \in L_1(\mathbb{R})$, then $\mathfrak{F}_\gamma$ is the class of convolutions with kernel G. In this case, T_γ is the whole $L_2(\mathbb{R})$.

2. If $\gamma(y) = \frac{1}{(iy)^r}$, $r \geqslant 1$, then $\mathfrak{F}_\gamma$ is the Sobolev space $W_2^{(r)}(\mathbb{R})$. In this case, T_γ consists of the rth derivatives of functions in $W_2^{(r)}(\mathbb{R})$.

Observe that, in what follows, r need not be integer unless specified otherwise.

Let A be a subset in $\mathbb{R}$ of finite Lebesgue measure. The symmetrization of A is the interval $A^* = \left(-\frac{\operatorname{mes} A}{2}, \frac{\operatorname{mes} A}{2}\right)$.

Given a real- or complex-valued function f on $\mathbb{R}$ with $f(x) \to 0$ as $x \to \infty$, denote by f^* the symmetrically decreasing rearrangement of $|f|$, i.e.

$$f^*(x) = \int_0^\infty \chi_{\{x\in\mathbb{R}:\, |f(x)|>t\}^*}(t)\, dt.$$

The following theorem gives a description of all spaces of shifts that provide sharp estimate of type (1) for approximation of the class $\mathfrak{F}_\gamma$.

Theorem 3.1. *Suppose that $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$, the set $Q \subset \mathbb{R}$ is empty or finite, and the functions $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ constitute a Riesz system for $L_2(\mathbb{R})$. Suppose also that $\gamma\colon \mathbb{R}\setminus Q \to \mathbb{C}$ satisfies the conditions:*

- *γ is continuous on $\mathbb{R}\setminus Q$, $\quad \gamma(y) \to 0$ as $y \to \infty$;*
- *$|\gamma(y)| \to \infty$ as $y \to q$ for all $q \in Q$.*

Then the following statements are equivalent.

1. *For every function $f \in \mathfrak{F}_\gamma$ of the form (3.17) the following inequality holds:*

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \gamma^*(\rho)\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{6}$$

2. *The functions $\widehat{B}$ and γ satisfy the following conditions.*

2.1. For almost every $y \in (-\sigma,\sigma)\setminus(-\rho,\rho)$ and all $k\in\mathbb{Z}$, the inequality $|\gamma(y+2k\sigma)| \leqslant \gamma^*(\rho)$ holds.

2.2. For almost all $y\in(-\rho,\rho)$ there exists at most one number $k_y\in\mathbb{Z}$ for which we have $|\gamma(y+2k_y\sigma)| > \gamma^*(\rho)$. Moreover, whenever such a number k_y exists, the following conditions are satisfied.

2.2.1. $\widehat{B}(y+2k_y\sigma)\neq 0$.

2.2.2. For every $k\in\mathbb{Z}$ the equality $|\gamma(y+2k\sigma)| = \gamma^*(\rho)$ implies $\widehat{B}(y+2k\sigma)=0$.

2.2.3.

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |\gamma(y+2k\sigma)|\neq\gamma^*(\rho)}} \frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2-(\gamma^*(\rho))^2} \geqslant 0.$$

The constant $\gamma^*(\rho)$ on the right-hand side of inequality (6) is sharp.

As in the first chapter, we prove an easily verifiable condition that is sufficient for the fulfillment of (6). Let us formulate a particular case of this condition for classes of convolutions whose kernel has a symmetrically decreasing absolute value of the Fourier transform.

Corollary 3.5. *Assume that $0<\rho\leqslant\sigma$, $B\in L_2(\mathbb{R})$, $G\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$, while the functions $\left\{B\left(\cdot-\frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ form a Riesz system for $L_2(\mathbb{R})$, and the Fourier transforms of B and G satisfy the following conditions.*

1. *$|\widehat{G}|$ decreases symmetrically and is nonconstant in some neighborhoods of $-\rho$ and ρ.*

2. *For almost every $y\in(-\rho,\rho)$ we have $\widehat{B}(y)\neq 0$,*

$$|\widehat{B}(y+2k\sigma)| \leqslant \frac{|\widehat{B}(y)|}{|\widehat{G}(y)|}|\widehat{G}(y+2k\sigma)| \quad \text{при всех } k\in\mathbb{Z},$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-\frac{|\widehat{G}(\rho)|^2}{|\widehat{G}(y+2k\sigma)|^2}} \geqslant 0.$$

Then every function f representable as

$$f = G*\varphi, \quad \varphi\in L_2(\mathbb{R}),$$

satisfies the inequality

$$E\big(f,\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant |\widehat{G}(\rho)|\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

In addition, we provide examples of approximated classes of functions and approximating subspaces satisfying the conditions of the main Theorem.

The last section of the chapter is devoted to average widths. For the first time, the problem of investigation of averaged characteristics of (in general, random) functional classes was opened up by Shannon [21] and Kolmogorov and Tikhomirov [11]. Similar characteristics — average dimension — for subspaces of functions on the axis is based on the Kolmogorov n-width and was introduced by Tikhomirov [16]. Further problems of average dimension and average widths were studied by Magaril-Il'yaev [14], Dinh Dung [9] and others.

To formulate the main results of the section, recall the definitions of average dimension and average width in the sense of Kolmogorov using the notations of [14].

Let D_p be the closed unit ball in $L_p(\mathbb{R})$. For $A > 0$ and a function f on $\mathbb{R}$, we put

$$P_A f(t) = \begin{cases} f(t), & |t| < A, \\ 0, & |t| > A. \end{cases}$$

Let H be a subspace in $L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty]$. For $\varepsilon, A > 0$, we put

$$K(\varepsilon, A, H) = K(\varepsilon, A, H, L_p(\mathbb{R})) = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : d_n(P_A(H \cap D_p), L_p(\mathbb{R})) < \varepsilon\}.$$

The value

$$\overline{\dim}\, H = \overline{\dim}\,(H, L_p(\mathbb{R})) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \varlimsup_{A \to +\infty} \frac{K(\varepsilon, A, H, L_p(\mathbb{R}))}{2A}$$

is called the *average dimension* of H in $L_p(\mathbb{R})$.

Let $p \in [1, +\infty]$. The *average Kolmogorov ν-width* of the set X in $L_p(\mathbb{R})$ is defined by

$$\overline{d_\nu}(X; L_p(\mathbb{R})) = \inf_{X_\nu} \sup_{x \in X} \inf_{y \in X_\nu} \|x - y\|_{L_p(\mathbb{R})},$$

where the first infimum is taken over all subspaces X_ν in $L_p(\mathbb{R})$ of average dimension at most ν.

Denote by $\mathfrak{F}^1_\gamma$ the set of $f \in \mathfrak{F}_\gamma$ such that φ in the representation

$$\widehat{f} = \gamma \widehat{\varphi}, \quad \varphi \in T_\gamma,$$

satisfies the condition $\|\varphi\|_2 \leqslant 1$.

In the following theorem, the value of the average widths of $\mathfrak{F}^1_\gamma$ is calculated.

Theorem 3.3. *Suppose that $\rho > 0$, a set $Q \subset \mathbb{R}$ is empty or finite, and a complex–valued function γ satisfies the following conditions:*

- *γ is continuous on $\mathbb{R} \setminus Q$, $\quad \gamma(y) \to 0$ as $y \to \infty$;*
- *$|\gamma(y)| \to \infty$ as $y \to q$ for all $q \in Q$.*

Then

$$\overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}\big(\mathfrak{F}^1_\gamma, L_2(\mathbb{R})\big) = \gamma^*(\rho).$$

This theorem with the result of [38] on average dimension of spaces of shifts leads to the following statement about sharpness of equality (6) in the sense of average widths.

Corollary 3.9. *If under the assumptions of Theorem 3.1, we have $\rho = \sigma$ and the series*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right) \right|$$

converges uniformly with respect to x *on every segment then inequality* (6) *is sharp in the sense of the average widths; i.e., the constant on the right-hand side cannot be decreased by passing to another approximating subspace of average dimension at most* $\frac{\sigma}{\pi}$.

Chapter 1.

Approximation of classes of periodic convolutions by spaces of shifts

1.1. Introduction

For the approximation by trigonometric polynomials, it is known (see, for example, [13, Theorem 4.2.2]) that the following inequality cannot be improved in the class $W_2^{(r)}$:

$$E(f, \mathcal{T}_{2n-1})_2 \leqslant \frac{1}{n^r}\|f^{(r)}\|_2. \tag{1.1}$$

Inequality (1.1) is sharp even in a sense of widths; i.e., the constant $\frac{1}{n^r}$ cannot be decreased by passing to an approximating subspace of dimension not higher than $2n$ (see, for example, [13, Theorem 8.1.3]).

Similar inequalities for spline approximations were obtained in [17] by means of duality relations.

Natural generalization of this result consists of considering classes of convolutions with other summable kernels instead of Sobolev classes (convolutions with Bernoulli kernel). In this chapter, we give a complete description of all spaces, generated by equidistant shifts of a single function and providing a sharp (in the sense of widths) constant in the inequality of type (1.1) for approximation of periodic convolution classes. Necessary and sufficient conditions of optimality are formulated in terms of the Fourier coefficients of the convolution kernel G and the function B generating the shift space. In addition, we provide easily verifiable sufficient conditions and give examples of approximated classes of functions and approximating subspaces satisfying these conditions. Well-known inequalities for approximation by trigonometric polynomials and splines are particular cases of these results.

Main results of the chapter are published in [8] and [18].

1.2. Spaces of shifts

For $n \in \mathbb{N}$ and $B \in L_1$, let $\mathbb{S}_{B,n}$ be the space of functions s defined on $\mathbb{R}$ and representable in the form

$$s(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j B\left(x - \frac{j\pi}{n}\right), \tag{1.2}$$

and $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$ be the space of functions in $\mathbb{S}_{B,n}$ that can be represented as (1.2) with the additional condition

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \beta_j = 0. \tag{1.3}$$

Substituting the Fourier series expansion of B into (1.2), we obtain

$$s(x) \sim \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l(B) e^{il\left(x-\frac{j\pi}{n}\right)} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l(B)\widehat{\beta}_l e^{ilx} \sim \sum_{l=0}^{2n-1} \widehat{\beta}_l \Phi_{B,l}(x), \tag{1.4}$$

where

$$\Phi_{B,l}(x) = \Phi_{B,n,l}(x) = \frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{2n-1} e^{\frac{ilj\pi}{n}} B\left(x - \frac{j\pi}{n}\right) \sim \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_{l+2n\nu}(B) e^{i(l+2n\nu)x}.$$

Clearly, $\Phi_{B,l} = \Phi_{B,l+2n}$, and condition (1.3) is equivalent to $\widehat{\beta_n} = 0$. Thus, the spaces $\mathbb{S}_{B,n}$ and $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$ coincide with linear spans of the sets $\{\Phi_{B,l}\}_{l=0}^{2n-1}$ (or, equivalently, $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n}$) and $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n-1}$. For $m \in [1 : n]$, denote by $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ the linear span of the set $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-m}^{m-1}$; the linear span of the set $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-m}^{m}$ is denoted by $\mathbb{S}_{B,n,m}$.

Note that the functions $\Phi_{B,l}$ are orthogonal: $\langle \Phi_{B,l}, \Phi_{B,j}\rangle_{L_2} = 0$ for $l \neq j$ and

$$\frac{1}{2\pi}\|\Phi_{B,l}\|_2^2 = D_{B,l} = D_{B,n,l} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |c_{l+2n\nu}(B)|^2.$$

The linear independence of the sets $\{B(\cdot - \frac{j\pi}{n})\}_{j=0}^{2n-1}$ and $\{B(\cdot - \frac{j\pi}{n})\}_{j=1-n}^{n-1}$ is equivalent to the fact that the functions $\Phi_{B,l}$ are nonzero for $l \in [1-n : n]$ and $l \in [1-n : n-1]$, respectively. In this case, the systems $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n}$ and $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n-1}$ form orthogonal bases in the spaces $\mathbb{S}_{B,n}$ and $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$. Orthonormal bases are constituted by the functions $\frac{1}{\sqrt{2\pi D_{B,l}}}\Phi_{B,l}$.

The Fourier coefficients $\zeta_{B,l}(f)$ of the function $f \in L_1$ with respect to the system $\{\Phi_{B,l}\}$ are expressed in terms of the trigonometric Fourier coefficients of f as

$$\zeta_{B,l}(f) = \frac{1}{2\pi D_{B,l}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B) e^{-i(l+2n\nu)t}}\, dt = \frac{1}{D_{B,l}} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)} c_{l+2n\nu}(f).$$

If the function $\Phi_{B,l}$ is zero, it is assumed that $\zeta_{B,l}(f) = 0$. Let us express the best approximation of $f \in L_2$ by the space $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ in terms of the Fourier coefficients:

$$E^2\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 = \left\| f - \sum_{l=1-m}^{m-1} \zeta_{B,l}(f)\Phi_{B,l} \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \left\| \sum_{l=1-m}^{m-1} \zeta_{B,l}(f)\Phi_{B,l} \right\|_2^2 =$$
$$= 2\pi \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_l(f)|^2 - \sum_{l=1-m}^{m-1} \frac{1}{D_{B,l}} \left| \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)} c_{l+2n\nu}(f) \right|^2 \right). \tag{1.5}$$

A similar formula is true for $E(f, \mathbb{S}_{B,n,m})_2$.

When B is the Dirichlet kernel

$$D_{n-1}(t) = \sum_{k=1-n}^{n-1} e^{ikt},$$

we have $\mathbb{S}_{B,n} = \mathbb{S}^{\times}_{B,n} = \mathcal{T}_{2n-1}$, $\mathbb{S}_{B,n,m} = \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m} = \mathcal{T}_{2m-1}$, $\Phi_{B,n} = 0$, and for $|l| < n$, the functions $\Phi_{B,l}$ are ordinary exponents. If $B = D_n$, then $\mathbb{S}_{B,n}$ is the sum of $\mathcal{T}_{2n-1}$ and the linear span of the function $x \mapsto \cos nx$.

If B is the B-spline

$$B_{n,\mu}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}k} - 1}{i\frac{\pi}{n}k} \right)^{\mu+1} e^{ikt}, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+$$

(henceforth, the fraction is assumed to equal 1 whenever $k = 0$), we find that $\mathbb{S}_{B,n}$ is the space of splines $\mathbf{S}_{n,\mu}$. The functions

$$\Phi_{B_{n,\mu},l}(x) = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}l} - 1}{i\frac{\pi}{n}} \right)^{\mu+1} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i(l+2n\nu)x}}{(l+2n\nu)^{\mu+1}},$$

which form an orthogonal basis in this space, are called *exponential splines* (by convention, we have $\Phi_{B_{n,\mu},0}(x) = 1$). The linear span of the system $\{\Phi_{B_{n,\mu},l}\}_{l=1-n}^{n-1}$ is denoted by $\mathbf{S}^{\times}_{n,\mu}$. In more general nonperiodic situation exponential splines were introduced by Schoenberg; the basics of the theory and historical remarks can be found in [35]. The orthogonality of periodic exponential splines was noted by many authors; apparently, the earliest studies on this topic were [26, 28]. The spaces $\mathbf{S}^{\times}_{n,\mu}$ and $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$ were considered by Vinogradov [2, 6].

1.3. Main results

For $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $Q \subset [1-m : m]$ and a subset of integer numbers $K = \{\varkappa_l\}_{l\in Q}$, denote by $T_{n,m,Q,K}$ the linear span of the set $\{x \mapsto e^{i(l+2n\varkappa_l)x}\}_{l\in Q}$.

Further, we need a condition under which $T_{n,m,Q,K}$ is a subspace of the space of shifts.

Lemma 1. *Let $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $Q \subset [1-m : m-1]$, $K = \{\varkappa_l\}_{l\in Q} \subset \mathbb{Z}$, $B \in L_1$. Then the following statements are equivalent.*

1. *$T_{n,m,Q,K}$ is a subspace of $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$.*

2. *For every $l\in Q$, we have $c_{l+2n\varkappa_l}(B)\neq 0$ and $c_{l+2nk}(B)=0$ for all $k\in\mathbb{Z}\setminus\{\varkappa_l\}$.*

   A similar assertion is also valid for $\mathbb{S}_{B,n,m}$, when $Q\subset[1-m:m]$.

Proof. The claim $2\Rightarrow 1$ follows directly from the definition of the functions $\Phi_{B,l}$. Let us prove the assertion $1\Rightarrow 2$. Let $e^{i(l+2n\varkappa_l)\cdot}\in\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ for all $l\in Q$. Then by (1.4), for some set $\{\beta_j\}$, we have:

$$e^{i(l+2n\varkappa_l)x}\sim\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{\beta}_j c_j(B)e^{ijx}.$$

Therefore,

$$\widehat{\beta}_j c_j(B)=\begin{cases}1, & j=l+2n\varkappa_l,\\ 0, & j\neq l+2n\varkappa_l.\end{cases}$$

This yields $c_{l+2n\varkappa_l}(B)\neq 0$, $\widehat{\beta}_{l+2n\varkappa_l}\neq 0$. Since $\widehat{\beta}$ is $2n$-periodic, for all $k\in\mathbb{Z}\setminus\{\varkappa_l\}$, we have $\widehat{\beta}_{l+2nk}\neq 0$ and thus $c_{l+2nk}(B)=0$, i.e., statement 2 is true.

The proof for $\mathbb{S}_{B,n,m}$ goes exactly the same way. □

The following general theorem provides criteria of optimality of the space $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ in terms of the Fourier coefficients of the functions B and G.

Theorem 1. *Let $n,m\in\mathbb{N}$, $m\leqslant n$, $Q\subset[1-m:m-1]$, $q=\operatorname{card}Q$, $K=\{\varkappa_l\}_{l\in Q}\subset\mathbb{Z}$, $B\in L_2$, $G\in L_1$, $G\perp T_{n,m,Q,K}$. Then the following statements are equivalent.*

1. *For every function f representable in the form*

$$f=G*\varphi+g,\quad \varphi\in L_2,\ g\in T_{n,m,Q,K},\tag{1.6}$$

   the following inequality holds:

$$E\big(f,\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2\leqslant|c^*_{2m-q}(G)|\|\varphi\|_2.\tag{1.7}$$

2. *The Fourier coefficients of B u G satisfy the following conditions.*

   2.1. *For every $l\in Q$, we have $c_{l+2n\varkappa_l}(B)\neq 0$ and $c_{l+2nk}(B)=0$ for all $k\in\mathbb{Z}\setminus\{\varkappa_l\}$.*

   2.2. *For every pair $(l,k)\in\big([1-n:-m]\cup Q\cup[m:n]\big)\times\mathbb{Z}$, we have $|c_{l+2nk}(G)|\leqslant|c^*_{2m-q}(G)|$.*

   2.3. *For every $l\in[1-m:m-1]\setminus Q$ there exists not more than one number $k_l\in\mathbb{Z}$ for which $|c_{l+2nk_l}(G)|>|c^*_{2m-q}(G)|$. Moreover, whenever such a number k_l exists, the following conditions are satisfied.*

      2.3.1. *$c_{l+2nk_l}(B)\neq 0$.*

      2.3.2. *For every $k\in\mathbb{Z}$, the equality $|c_{l+2nk}(G)|=|c^*_{2m-q}(G)|$ implies $c_{l+2nk}(B)=0$.*

2.3.3.
$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m-q}(G)|}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2-|c^*_{2m-q}(G)|^2} \geqslant 0.$$

Proof. It follows from the first proposition of the theorem that $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ contains $T_{n,m,Q,K}$; then, by Lemma 1, condition 2.1 is true. On the other hand, by Lemma 1, the second statement of the theorem also implies that $T_{n,m,Q,K}$ is a subspace of $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$. Therefore, in inequality (1.7), it suffices to consider functions f with $g=0$ in representation (1.6). Then, in view of (1.5), inequality (1.7) can be rewritten as

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{j+2n\varkappa_j\}_{j\in Q}} \bigl|c_l(G)\bigr|^2\bigl|c_l(\varphi)\bigr|^2 - \sum_{l\in[1-m:m-1]\setminus Q}\frac{1}{D_{B,l}}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(G)c_{l+2n\nu}(\varphi)\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant |c^*_{2m-q}(G)|^2\sum_{l\in\mathbb{Z}}\bigl|c_l(\varphi)\bigr|^2.$$

It can be seen from here that, if for some pair $(l,\nu)\in\bigl([1-m:m-1]\setminus Q\bigr)\times\mathbb{Z}$, we have $|c_{l+2n\nu}(G)|>|c^*_{2m-q}(G)|$, then the fulfillment of this inequality requires $c_{l+2n\nu}(B)\neq 0$. Indeed, if $c_{l+2n\nu}(B)=0$, the inequality is not satisfied for $\varphi(x)=e^{i(l+2n\nu)x}$ (in the complex space L_2). In the real case, $|c_{l+2n\nu}(G)|=|c_{-l-2n\nu}(G)|$ and $c_{l+2n\nu}(B)=0$ yields $c_{-l-2n\nu}(B)=0$; therefore, the inequality is not satisfied for $\varphi(x)=\cos((l+2n\nu)x+\alpha)$. Thus, hereinafter we assume that for every pair $(l,\nu)\in\bigl([1-m:m-1]\setminus Q\bigr)\times\mathbb{Z}$, the inequality $|c_{l+2n\nu}(G)|>|c^*_{2m-q}(G)|$ implies $c_{l+2n\nu}(B)\neq 0$.

Representing the sums as iterated ones, we can rewrite the inequality as

$$\sum_{l=1-n}^{n}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ k\neq\varkappa_l\ \text{при}\ l\in Q}} |c_{l+2nk}(G)|^2|c_{l+2nk}(\varphi)|^2 - \sum_{l\in[1-m:m-1]\setminus Q}\frac{1}{D_{B,l}}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(G)c_{l+2n\nu}(\varphi)\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant |c^*_{2m-q}(G)|^2\sum_{l=1-n}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{l+2nk}(\varphi)|^2.$$

Since the l-th term contains coefficients only with subscripts $l+2n\nu$, this inequality is equivalent to the system

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{l+2nk}(G)|^2|c_{l+2nk}(\varphi)|^2 - \frac{1}{D_{B,l}}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(G)c_{l+2n\nu}(\varphi)\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant |c^*_{2m-q}(G)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{l+2nk}(\varphi)|^2,\quad l\in[1-m:m-1]\setminus Q,$$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{\varkappa_l\}}|c_{l+2nk}(G)|^2|c_{l+2nk}(\varphi)|^2\leqslant|c^*_{2m-q}(G)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{l+2nk}(\varphi)|^2,\quad l\in Q,$$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{l+2nk}(G)|^2|c_{l+2nk}(\varphi)|^2\leqslant|c^*_{2m-q}(G)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{l+2nk}(\varphi)|^2,$$
$$l\in[1-n:-m]\cup[m:n].$$

The inequalities for $l \in [1-n : -m] \cup [m : n]$ and $l \in Q$ are satisfied if and only if condition 2.2 is fulfilled (for $l \in Q$, we have $c_{l+2n\varkappa_l}(G) = 0$ due to orthogonality of the function G to the space $T_{n,m,Q,K}$). Since the inequality for $l \in [1-m : m-1] \setminus Q$ is obvious when for all $k \in \mathbb{Z}$ $|c_{l+2nk}(G)| \leqslant |c^*_{2m-q}(G)|$, hereinafter we consider only those $l \in [1-m : m-1] \setminus Q$ for which we have $|c_{l+2nk}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$ at least for one number k. In this case, the first inequality of the system means that the quadratic form

$$\langle A_l u, u\rangle_{\ell_2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2\right) |u_k|^2 - \frac{1}{D_{B,l}} \left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)} c_{l+2n\nu}(G) u_\nu\right|^2$$

is nonpositive. Here $u \in \ell_2$, and the operator $A_l \colon \ell_2 \to \ell_2$ is defined by

$$(A_l u)_k = \left(|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2\right) u_k - \frac{c_{l+2nk}(B)\overline{c_{l+2nk}(G)}}{D_{B,l}} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)} c_{l+2n\nu}(G) u_\nu .$$

The nonpositivity of the quadratic form of A_l is equivalent to the nonpositivity of all its eigenvalues, i.e., to the fact that the system of equations

$$\begin{gathered}\left(|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2 - \lambda\right) u_k - \\ - \frac{c_{l+2nk}(B)\overline{c_{l+2nk}(G)}}{D_{B,l}} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)} c_{l+2n\nu}(G) u_\nu = 0, \quad k \in \mathbb{Z}\end{gathered} \tag{1.8}$$

has no positive solutions $\{u_k\}$ for positive λ, or, equivalently, does not have positive roots λ for $u \neq \mathbb{O}$.

Note that if there exist two distinct numbers $k, k' \in \mathbb{Z}$ for which $|c_{l+2nk}(G)| = |c_{l+2nk'}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$, then system (1.8), clearly, has the positive root $\lambda = |c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2$.

If $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)} c_{l+2n\nu}(G) u_\nu = 0$, we have

$$\left(|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2 - \lambda\right) u_k = 0$$

for all $k \in \mathbb{Z}$. For each positive λ, the expression in brackets can be zero at most for one number $k' \in \mathbb{Z}$, which yields $u_k = 0$ for all $k \neq k'$. Hence, $u_{k'} \neq 0$ and then $c_{l+2nk'}(B) = 0$, which, as we have shown, cannot be fulfilled if $|c_{l+2nk'}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$.

Consequently, $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2n\nu}(B)} c_{l+2n\nu}(G) u_\nu \neq 0$ and thus

$$|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2 - \lambda \neq 0$$

for any $k \in \mathbb{Z}$, because $c_{l+2nk}(B) \neq 0$ when $|c_{l+2nk}(G)| > |c^*_{2m-q}(G)|$. Dividing equality (1.8) by $|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-q}(G)|^2 - \lambda$, multiplying by $\overline{c_{l+2nk}(B)} c_{l+2nk}(G)$ and summing over all integer k, we obtain:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{c_{l+2nk}(B)} c_{l+2nk}(G) u_k -$$

$$-\frac{1}{D_{B,l}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{|c_{l+2nk}(B)|^2|c_{l+2nk}(G)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2-|c^*_{2m-q}(G)|^2-\lambda}\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(G)u_\nu\right)=0,$$

which is equivalent to

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|c_{l+2n\nu}(B)|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{|c_{l+2nk}(B)|^2|c_{l+2nk}(G)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2-|c^*_{2m-q}(G)|^2-\lambda}.$$

Moving the terms to one side and reducing to a common denominator, we rearrange the equation into the form

$$\Psi_l(\lambda)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2-|c^*_{2m-q}(G)|^2-\lambda}=0. \tag{1.9}$$

Denote $\Pi=\{k\in\mathbb{Z}\colon |c_{l+2nk}(G)|>|c^*_{2m-q}(G)|\}$. Since $G\in L_1$, by the Riemann–Lebesgue theorem, the set Π is finite. Suppose Π contains at least two elements. Note that all positive zeros of denominators in (1.9) are distinct, because for $k,k'\in\Pi$, $k\neq k'$, we have the relation $|c_{l+2nk}(G)|\neq|c_{l+2nk'}(G)|$. Let λ_1 and λ_2 be two consecutive positive zeros of denominators in (1.9). It is clear that the function Ψ_l is continuous and strictly increasing from $-\infty$ to $+\infty$ on the interval (λ_1,λ_2). Therefore, $\Psi_l(\lambda^*)=0$ for some $\lambda^*\in(\lambda_1,\lambda_2)$. Hereafter, we assume that the inequality $|c_{l+2nk_l}(G)|>|c^*_{2m-q}(G)|$ holds for exactly one number $k_l\in\mathbb{Z}$.

If condition 2.3.2 is not satisfied, i.e., for some $k'\in\mathbb{Z}$, we have $|c_{l+2nk'}(G)|=|c^*_{2m-q}(G)|$ and $c_{l+2nk'}(B)\neq 0$, then, since the function Ψ_l is continuous and strictly increasing from $-\infty$ to $+\infty$ on the interval $(0,|c_{l+2nk_l}(G)|^2-|c^*_{2m-q}(G)|^2)$, equation (1.9) has a positive root. If condition 2.3.2 is fulfilled, equation (1.9) can be rewritten as

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m-q}(G)|}}\frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2-|c^*_{2m-q}(G)|^2-\lambda}=0.$$

When $\lambda>|c_{l+2nk_l}(G)|^2-|c^*_{2m-q}(G)|^2$, all the denominators on the left-hand side of the last equation are negative, while on $(0,|c_{l+2nk_l}(G)|^2-|c^*_{2m-q}(G)|^2)$ it strictly increases to $+\infty$ with respect to λ. Therefore, the absence of positive roots here is equivalent to its nonnegativity for $\lambda=0$, i.e., to inequality 2.3.3. $\square$

Remark 1. Clearly, inequality (1.7) turns into equality for functions of the form $G*e^{il\,\cdot}$, where $l\in\{k\in\mathbb{Z}\colon |c_k(G)|=|c^*_{2m-q}(G)|\}$, and their linear combinations. As mentioned in the Introduction, the inequality is sharp even in a sense of widths.

Inequality (1.7) can be strengthened in a standard way.

Corollary 1. *If under the assumptions of the second proposition of Theorem 1 the function B is of the form $B=G*D+h$ for some $D\in L_2$, $h\in T_{n,m,Q,K}$, then for every function f of the form* (1.6) *the following inequality holds:*

$$E\big(f,\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2\leqslant|c^*_{2m-q}(G)|E\big(\varphi,\mathbb{S}^{\times}_{D,n,m}\big)_2.$$

Proof. Let $s = \sum_{l=1-m}^{m-1} \zeta_{D,l}(\varphi)\Phi_{D,l}$ be an element of the best approximation of the function φ by the space $\mathbb{S}^{\times}_{D,n,m}$. Denote $\tilde{s} = G * s$. Note that, since $G \perp T_{n,m,Q,K}$, condition 2.1 of Theorem 1 implies $c_{l+2n\varkappa_l}(h) \neq 0$ for all $l \in Q$. Therefore,

$$\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m} = \mathbb{S}^{\times}_{G*D,n,m} \oplus \mathbb{S}^{\times}_{h,n,m} = \mathbb{S}^{\times}_{G*D,n,m} \oplus T_{n,m,Q,K}.$$

Since convolution commutes with translation, we have $\tilde{s} \in \mathbb{S}^{\times}_{G*D,n,m}$, and hence $\tilde{s} \in \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$. Applying Theorem 1 to the function $f - \tilde{s} = G * (\varphi - s) + g$, we obtain:

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 = E\big(f - \tilde{s}, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c^*_{2m-q}(G)| \|\varphi - s\|_2 = |c^*_{2m-q}(G)| E\big(\varphi, \mathbb{S}^{\times}_{D,n,m}\big)_2.$$

□

The following analog of Theorem 1 is valid for approximation by the space $\mathbb{S}_{B,n,m}$.

Theorem 2. *Let $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $Q \subset [1-m : m]$, $q = \operatorname{card} Q$, $K = \{\varkappa_l\}_{l \in Q} \subset \mathbb{Z}$, $B \in L_2$, $G \in L_1$, $G \perp T_{n,m,Q,K}$. Then the following statements are equivalent.*

1. *For every function f representable in the form*

$$f = G * \varphi + g, \quad \varphi \in L_2,\ g \in T_{n,m,Q,K},$$

the following inequality holds:

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c^*_{2m+1-q}(G)| \|\varphi\|_2.$$

2. *The Fourier coefficients of B u G satisfy the following conditions.*

   2.1. *For every $l \in Q$, we have $c_{l+2n\varkappa_l}(B) \neq 0$ and $c_{l+2nk}(B) = 0$ for all $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\varkappa_l\}$.*

   2.2. *For every pair $(l, k) \in \big([1-n : -m] \cup Q \cup [m+1 : n]\big) \times \mathbb{Z}$, we have $|c_{l+2nk}(G)| \leqslant |c^*_{2m+1-q}(G)|$.*

   2.3. *For every $l \in [1-m : m] \setminus Q$ there exists not more than one number $k_l \in \mathbb{Z}$ for which $|c_{l+2nk_l}(G)| > |c^*_{2m+1-q}(G)|$. Moreover, whenever such a number k_l exists, the following conditions are satisfied.*

      2.3.1. $c_{l+2nk_l}(B) \neq 0$.

      2.3.2. *For every $k \in \mathbb{Z}$, the equality $|c_{l+2nk}(G)| = |c^*_{2m+1-q}(G)|$ implies $c_{l+2nk}(B) = 0$.*

      2.3.3.
$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}: \\ |c_{l+2nk}(G)| \neq |c^*_{2m+1-q}(G)|}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m+1-q}(G)|^2} \geqslant 0.$$

Proof. Using the same argument as in the proof of Theorem 1, we obtain that the desired inequality is equivalent to the system

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{l+2nk}(G)|^2|c_{l+2nk}(\varphi)|^2-\frac{1}{D_{B,l}}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\overline{c_{l+2n\nu}(B)}c_{l+2n\nu}(G)c_{l+2n\nu}(\varphi)\right|^2\leqslant$$
$$\leqslant|c^*_{2m+1-q}(G)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{l+2nk}(\varphi)|^2,\quad l\in[1-m:m]\setminus Q,$$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{\varkappa_l\}}|c_{l+2nk}(G)|^2|c_{l+2nk}(\varphi)|^2\leqslant|c^*_{2m+1-q}(G)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{l+2nk}(\varphi)|^2,\quad l\in Q,$$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{l+2nk}(G)|^2|c_{l+2nk}(\varphi)|^2\leqslant|c^*_{2m+1-q}(G)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{l+2nk}(\varphi)|^2,$$
$$l\in[1-n:-m]\cup[m+1:n].$$

The remaining part of the proof goes exactly the same way as in Theorem 1. □

Let us state the following special cases of Theorem 1, when $T_{n,m,Q,K}$ is $\{0\}$ and the space of constants.

Corollary 2. *Let $n,m\in\mathbb{N}$, $m\leqslant n$, $B\in L_2$, $G\in L_1$. Then the following statements are equivalent.*

1. *For every function f representable in the form*

$$f=G*\varphi,\quad \varphi\in L_2,$$

the following inequality holds:

$$E\big(f,\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2\leqslant|c^*_{2m}(G)|\|\varphi\|_2.$$

2. *The Fourier coefficients of B u G satisfy the following conditions.*

   2.1. For every pair $(l,k)\in\big([1-n:-m]\cup[m:n]\big)\times\mathbb{Z}$, we have $|c_{l+2nk}(G)|\leqslant|c^*_{2m}(G)|$.

   2.2. For every $l\in[1-m:m-1]$ there exists not more than one number $k_l\in\mathbb{Z}$ for which $|c_{l+2nk_l}(G)|>|c^*_{2m}(G)|$. Moreover, whenever such a number k_l exists, the following conditions are satisfied.

   2.2.1. $c_{l+2nk_l}(B)\neq 0$.

   2.2.2. For every $k\in\mathbb{Z}$, the equality $|c_{l+2nk}(G)|=|c^*_{2m}(G)|$ implies $c_{l+2nk}(B)=0$.

   2.2.3.

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m}(G)|}}\frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2-|c^*_{2m}(G)|^2}\geqslant 0.$$

Corollary 3. *Let $n,m\in\mathbb{N}$, $m\leqslant n$, $B\in L_2$, $G\in L_1$ and suppose that G is orthogonal to constants. Then the following statements are equivalent.*

1. For every function f representable in the form

$$f = G * \varphi + c, \quad \varphi \in L_2,\ c \in \mathbb{C} \text{ or } \mathbb{R},$$

the following inequality holds:

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c^*_{2m-1}(G)| \|\varphi\|_2.$$

2. The Fourier coefficients of B и G satisfy the following conditions.

2.1. $c_0(B) \neq 0$ and $c_{2nk}(B) = 0$ for all $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

2.2. For every pair $(l, k) \in \big([1-n : -m] \cup \{0\} \cup [m : n]\big) \times \mathbb{Z}$, we have $|c_{l+2nk}(G)| \leqslant |c^*_{2m-1}(G)|$.

2.3. For every $l \in [1-m : m-1] \setminus \{0\}$ there exists not more than one number $k_l \in \mathbb{Z}$ for which $|c_{l+2nk_l}(G)| > |c^*_{2m-1}(G)|$. Moreover, whenever such a number k_l exists, the following conditions are satisfied.

2.3.1. $c_{l+2nk_l}(B) \neq 0$.

2.3.2. For every $k \in \mathbb{Z}$, the equality $|c_{l+2nk}(G)| = |c^*_{2m-1}(G)|$ implies $c_{l+2nk}(B) = 0$.

2.3.3.

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}: \\ |c_{l+2nk}(G)| \neq |c^*_{2m-1}(G)|}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c^*_{2m-1}(G)|^2} \geqslant 0.$$

Remark 2. By Theorem 2, analogs of Corollaries 2 and 3 are also true for approximation by the space $\mathbb{S}_{B,n,m}$.

If the sequence of absolute values of the Fourier coefficients of G is symmetrically decreasing, the statements of Corollaries 2 and 3 can be simplified.

Corollary 4. *Let $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B \in L_2$, $G \in L_1$ and suppose that the Fourier coefficients of the function G satisfy the conditions*

$$|c_k(G)| = |c_{-k}(G)| \quad \text{for all } k \in \mathbb{N},$$
$$|c_0(G)| \geqslant \ldots \geqslant |c_{m-1}(G)| > |c_m(G)| > |c_{m+1}(G)| \geqslant |c_{m+2}(G)| \geqslant \ldots.$$

Then the following statements are equivalent.

1. For every function f representable in the form

$$f = G * \varphi, \quad \varphi \in L_2,$$

the following inequality holds:

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2. \tag{1.10}$$

2. For every $l \in [1-m : m-1]$, we have $c_l(B) \neq 0$ and

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c_m(G)|^2} \geqslant 0.$$

Corollary 5. *Let $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B \in L_2$, $G \in L_1$ and suppose that the Fourier coefficients of the function G satisfy the conditions*

$$|c_0(G)| = 0, \quad |c_k(G)| = |c_{-k}(G)| \quad \text{for all } k \in \mathbb{N},$$
$$|c_1(G)| \geqslant \ldots \geqslant |c_{m-1}(G)| > |c_m(G)| > |c_{m+1}(G)| \geqslant |c_{m+2}(G)| \geqslant \ldots.$$

Then the following statements are equivalent.

1. For every function f representable in the form

$$f = G * \varphi + c, \quad \varphi \in L_2,\ c \in \mathbb{C} \text{ or } \mathbb{R},$$

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2. \tag{1.11}$$

2. The Fourier coefficients of B and G satisfy the following conditions.

2.1. For every $l \in [1-m : m-1]$, we have $c_l(B) \neq 0$.

2.2. $c_{2nk}(B) = 0$ for all $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

2.3. For every $l \in [1-m : m-1] \setminus \{0\}$, we have

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2 - |c_m(G)|^2} \geqslant 0.$$

Remark 3. Since under the assumptions of Corollary 4 and Corollary 5

$$|c^*_{2m}(G)| = |c^*_{2m+1}(G)| = |c_m(G)| \quad \text{and} \quad |c^*_{2m}(G)| = |c^*_{2m-1}(G)| = |c_m(G)|,$$

respectively, by Theorem 2, the left-hand sides of (1.10) and (1.11) can be substituted for $E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2$.

1.4. Sufficient conditions

In this section, we give sufficient conditions for the fulfillment of claims 2.3.3 in Theorems 1 and 2.

Theorem 3. *Let $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $Q \subset [1-m : m-1]$, $q = \operatorname{card} Q$, $K = \{\varkappa_l\}_{l\in Q} \subset \mathbb{Z}$, $B, G \in L_2$, $G \perp T_{n,m,Q,K}$ and suppose that the Fourier coefficients of B and G satisfy the following conditions.*

1. For every $l \in Q$, we have $c_{l+2n\varkappa_l}(B) \neq 0$ and $c_{l+2nk}(B) = 0$ for all $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\varkappa_l\}$.

2. *For every pair* $(l,k)\in\big([1-n:-m]\cup Q\cup[m:n]\big)\times\mathbb{Z}$, *we have* $|c_{l+2nk}(G)|\leqslant|c^*_{2m-q}(G)|$.

3. *For every* $l\in[1-m:m-1]\setminus Q$ *there exists not more than one number* $k_l\in\mathbb{Z}$ *for which* $|c_{l+2nk_l}(G)|>|c^*_{2m-q}(G)|$. *Moreover, whenever such a number* k_l *exists, the following conditions are satisfied.*

   3.1. $c_{l+2nk_l}(B)\neq 0$ *and for all* $k\in\mathbb{Z}$, *we have*

$$|c_{l+2nk}(B)|\leqslant\frac{|c_{l+2nk_l}(B)|}{|c_{l+2nk_l}(G)|}|c_{l+2nk}(G)|. \tag{1.12}$$

   3.2. *For every* $k\in\mathbb{Z}$, *the equality* $|c_{l+2nk}(G)|=|c^*_{2m-q}(G)|$ *implies* $c_{l+2nk}(B)=0$.

   3.3.
$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\|c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m-q}(G)|}}\frac{1}{1-\frac{|c^*_{2m-q}(G)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2}}\geqslant 0.$$

Then for every function f *representable in the form*

$$f=G*\varphi+g,\quad \varphi\in L_2,\ g\in T_{n,m,Q,K},$$

the following inequality holds:

$$E\big(f,\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2\leqslant|c^*_{2m-q}(G)|\|\varphi\|_2.$$

Proof. It suffices to check condition 2.3.3 of Theorem 1; the remaining conditions of the second proposition of Theorem 1 coincide with those of desired one. Since all the denominators are negative for $k\neq k_l$, we have by relations (1.12) and 3.3

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\|c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m-q}(G)|}}\frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2-|c^*_{2m-q}(G)|^2}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{|c_{l+2nk_l}(B)|^2}{|c_{l+2nk_l}(G)|^2}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\|c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m-q}(G)|}}\frac{1}{1-\frac{|c^*_{2m-q}(G)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2}}\geqslant 0.$$

□

Similar statement for approximation by the space $\mathbb{S}_{B,n,m}$ is also true.

Theorem 4. *Let* $n,m\in\mathbb{N}$, $m\leqslant n$, $Q\subset[1-m:m]$, $q=\operatorname{card}Q$, $K=\{\varkappa_l\}_{l\in Q}\subset\mathbb{Z}$, $B,G\in L_2$, $G\perp T_{n,m,Q,K}$ *and suppose that the Fourier coefficients of* B *and* G *satisfy the following conditions.*

1. *For every* $l\in Q$, *we have* $c_{l+2n\varkappa_l}(B)\neq 0$ *and* $c_{l+2nk}(B)=0$ *for all* $k\in\mathbb{Z}\setminus\{\varkappa_l\}$.

2. *For every pair* $(l,k) \in \big([1-n:-m] \cup Q \cup [m+1:n]\big) \times \mathbb{Z}$, *we have* $|c_{l+2nk}(G)| \leqslant |c^*_{2m+1-q}(G)|$.

3. *For every* $l \in [1-m:m] \setminus Q$ *there exists not more than one number* $k_l \in \mathbb{Z}$ *for which* $|c_{l+2nk_l}(G)| > |c^*_{2m+1-q}(G)|$. *Moreover, whenever such a number* k_l *exists, the following conditions are satisfied.*

   3.1. $c_{l+2nk_l}(B) \neq 0$ *and for all* $k \in \mathbb{Z}$ *we have*

$$|c_{l+2nk}(B)| \leqslant \frac{|c_{l+2nk_l}(B)|}{|c_{l+2nk_l}(G)|}|c_{l+2nk}(G)|.$$

   3.2. *For every* $k \in \mathbb{Z}$, *the equality* $|c_{l+2nk}(G)| = |c^*_{2m+1-q}(G)|$ *implies* $c_{l+2nk}(B) = 0$.

   3.3.

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m+1-q}(G)|}} \frac{1}{1-\frac{|c^*_{2m+1-q}(G)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2}} \geqslant 0.$$

Then for every function f *representable in the form*

$$f = G * \varphi + g, \quad \varphi \in L_2,\ g \in T_{n,m,Q,K},$$

the following inequality holds:

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c^*_{2m+1-q}(G)|\|\varphi\|_2.$$

Let us state the following special cases of Theorems 3 and 4, restricting ourselves for brevity to assertions for kernels with symmetrically decreasing sequence of absolute values of the Fourier coefficients.

Corollary 6. *Let* $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B, G \in L_2$ *and suppose that the Fourier coefficients of* B *and* G *satisfy the following conditions.*

1. $|c_k(G)| = |c_{-k}(G)|$ *for all* $k \in \mathbb{N}$,

$$|c_0(G)| \geqslant \ldots \geqslant |c_{m-1}(G)| > |c_m(G)| > |c_{m+1}(G)| \geqslant |c_{m+2}(G)| \geqslant \ldots.$$

2. *For every* $l \in [1-m:m-1]$, *we have* $c_l(B) \neq 0$,

$$|c_{l+2nk}(B)| \leqslant \frac{|c_l(B)|}{|c_l(G)|}|c_{l+2nk}(G)| \quad \text{for all } k \in \mathbb{Z},$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-\left|\frac{c_m(G)}{c_{l+2nk}(G)}\right|^2} \geqslant 0.$$

Then for every function f representable in the form

$$f = G * \varphi, \quad \varphi \in L_2,$$

the following inequalities hold:

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2,$$

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2.$$

Corollary 7. *Let $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B, G \in L_2$ and suppose that the Fourier coefficients of B and G satisfy the following conditions.*

1. $|c_0(G)| = 0$, $|c_k(G)| = |c_{-k}(G)|$ *for all* $k \in \mathbb{N}$,

$$|c_1(G)| \geqslant \ldots \geqslant |c_{m-1}(G)| > |c_m(G)| > |c_{m+1}(G)| \geqslant |c_{m+2}(G)| \geqslant \ldots .$$

2. *For every* $l \in [1-m : m-1]$, *we have* $c_l(B) \neq 0$.

3. $c_{2nk}(B) = 0$ *for all* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

4. *For every* $l \in [1-m : m-1] \setminus \{0\}$, *we have*

$$|c_{l+2nk}(B)| \leqslant \frac{|c_l(B)|}{|c_l(G)|} |c_{l+2nk}(G)| \quad \text{for all } k \in \mathbb{Z},$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 - \left| \frac{c_m(G)}{c_{l+2nk}(G)} \right|^2} \geqslant 0. \tag{1.13}$$

Then for every function f representable in the form

$$f = G * \varphi + c, \quad \varphi \in L_2,\ c \in \mathbb{C} \text{ or } \mathbb{R},$$

the following inequalities hold:

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2,$$

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2.$$

Remark 4. Theorems 2–4 and Corollaries 2–7 admit analogs of Remark 1 and Corollary 1, which are omitted here for brevity.

In what follows, we assume that the function B satisfies conditions 1 and 3.1 of Theorem 3 (or the corresponding conditions of Theorem 4 or Corollaries 6,7).

Now we formulate the conditions under which the convolution of two functions satisfying the requirements of Theorem 3 also possesses these properties.

The following statement is a corollary of [20, inequality 2.11.2], but, for completeness, we provide its independent proof.

Lemma 2. *Let* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *and* $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ *be sequences of positive numbers. Then the following inequality holds:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_k} + \frac{1}{y_k}} \leqslant \frac{1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\right)^{-1} + \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k\right)^{-1}}.$$

Proof. It suffices to show that for every $n \in \mathbb{N}$, the inequality

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{x_k} + \frac{1}{y_k}} \leqslant \frac{1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^{-1} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)^{-1}}. \tag{1.14}$$

is fulfilled. The claim of the lemma is derived from here by passing to the limit as $n \to \infty$.

The proof of inequality (1.14) is by induction on n.

For $n = 1$, it turns into equality, and for $n = 2$, direct calculations demonstrate that it is equivalent to the inequality

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \geqslant 0.$$

Assume that inequality (1.14) holds for a number $n \geqslant 3$; let us prove that it is also valid for $n + 1$. By the induction hypothesis, we have

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\frac{1}{x_k} + \frac{1}{y_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{x_k} + \frac{1}{y_k}} + \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{y_{n+1}}} \leqslant \frac{1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^{-1} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)^{-1}} + \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{y_{n+1}}}.$$

Applying the inequality for $n = 2$ to the sets $(\sum_{k=1}^{n} x_k, x_{n+1})$ and $(\sum_{k=1}^{n} y_k, y_{n+1})$, we get the desired one. $\square$

Lemma 3. *Let the functions* $G_1, G_2 \in L_2$ *satisfy the following conditions.*

3.3' or every $l \in [1 - m : m - 1] \setminus Q$ *and* $i = 1, 2$ *there exists not more than one number* $k_l(G_i) \in \mathbb{Z}$ *for which* $|c_{l+2nk_l(G_i)}(G_i)| > |c^*_{2m-q}(G_i)| \neq 0$. *Moreover, whenever such a number* $k_l(G_i)$ *exists, we have*

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}: \\ |c_{l+2nk}(G_i)| \neq |c^*_{2m-q}(G_i)|}} \frac{1}{1 - \frac{|c^*_{2m-q}(G_i)|^2}{|c_{l+2nk}(G_i)|^2}} \geqslant 0, \quad i = 1, 2.$$

Then, if the conditions

$$\begin{aligned} \{k \in \mathbb{Z} \colon |c_k(G_1)| > |c^*_{2m-q}(G_1)|\} &= \{k \in \mathbb{Z} \colon |c_k(G_2)| > |c^*_{2m-q}(G_2)|\}, \\ \{k \in \mathbb{Z} \colon |c_k(G_1)| = |c^*_{2m-q}(G_1)|\} &= \{k \in \mathbb{Z} \colon |c_k(G_2)| = |c^*_{2m-q}(G_2)|\}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

are satisfied, the function $G = G_1 * G_2$ *also possesses property* $3.3'$.

Proof. Denote $L=\{k\in\mathbb{Z}\colon |c_k(G)|\ne|c^*_{2m-q}(G)|\}$. Note that relations (1.15) imply

$$|c^*_{2m-q}(G)|=|c^*_{2m-q}(G_1)||c^*_{2m-q}(G_2)|,$$

$$L=\big\{k\in\mathbb{Z}\colon |c_k(G_1)|\ne|c^*_{2m-q}(G_1)|\big\}=\big\{k\in\mathbb{Z}\colon |c_k(G_2)|\ne|c^*_{2m-q}(G_2)|\big\},$$

and $k_l(G_1)=k_l(G_2)=k_l(G)$ for all $l\in[1-m:m-1]\setminus Q$.

Put

$$u_k=\frac{|c^*_{2m-q}(G_1)|^2}{|c_{l+2nk}(G_1)|^2},\quad v_k=\frac{|c^*_{2m-q}(G_2)|^2}{|c_{l+2nk}(G_2)|^2}.$$

Then for $l\in[1-m:m-1]\setminus Q$, we have $0<u_{k_l}<1$, $0<v_{k_l}<1$, and for $k\in\mathbb{Z}\setminus\{k_l\}$, conversely, $u_k\geqslant 1$, $v_k\geqslant 1$. The desired inequality for G is equivalent to

$$\frac{1}{1-u_{k_l}v_{k_l}}\geqslant\sum_{k\in L\setminus\{k_l\}}\frac{1}{u_kv_k-1},$$

while property 3.3' for G_1 and G_2 can be rewritten as

$$u_{k_l}\geqslant 1-\Bigg(\sum_{k\in L\setminus\{k_l\}}\frac{1}{u_k-1}\Bigg)^{-1},\quad v_{k_l}\geqslant 1-\Bigg(\sum_{k\in L\setminus\{k_l\}}\frac{1}{v_k-1}\Bigg)^{-1}.$$

This implies that

$$\frac{1}{1-u_{k_l}v_{k_l}}\geqslant\frac{1}{\Bigg(\sum\limits_{k\in L\setminus\{k_l\}}\frac{1}{u_k-1}\Bigg)^{-1}+\Bigg(\sum\limits_{k\in L\setminus\{k_l\}}\frac{1}{v_k-1}\Bigg)^{-1}}.$$

On the other hand,

$$\sum_{k\in L\setminus\{k_l\}}\frac{1}{u_kv_k-1}\leqslant\sum_{k\in L\setminus\{k_l\}}\frac{1}{u_k+v_k-2}.$$

Applying Lemma 2 to $x_k=\frac{1}{u_k-1}$, $y_k=\frac{1}{v_k-1}$, $k\in L\setminus\{k_l\}$, we derive to the claim of Lemma 3. $\square$

Remark 5. It follows from Lemma 3 that the function $G=G_1*G_2$, where G_1 and G_2 satisfy the conditions of Theorem 3 and relations (1.15), also satisfies conditions of Theorem 3. By induction, this statement holds for finite number of functions G_j, and by passing to the limit, it also remains true for countable set of kernels G_j.

Remark 6. If both of the functions G_1 and G_2 satisfy the conditions of Corollary 6 (Corollary 7), then, since relations (1.15), hold for them, by Lemma 3, the function $G=G_1*G_2$ also satisfies the conditions of Corollary 6 (Corollary 7). If the function G_1 satisfies the conditions of Corollary 6, and the function G_2 satisfies the conditions of Corollary 7, then, since $G_1*G_2=\widetilde{G_1}*G_2$, where

$$c_k(\widetilde{G_1})=\begin{cases}c_k(G_1), & k\ne 0,\\ 0, & k=0,\end{cases}$$

and $\widetilde{G}_1$ satisfies the conditions of Corollary 7, by Lemma 3, the function $G = G_1 * G_2$ also satisfies the conditions of Corollary 7. Similarly to the previous Remark, we obtain the statements for convolutions of finite and countable sets of kernels.

1.5. Examples

In this section, we provide examples of kernels G satisfying the conditions of Corollaries 6 and 7 for all $m \leqslant n$. The only difficulty appears in verification of inequality (1.13).

Example 1. Consider the function G with the Fourier coefficients of the form

$$|c_k(G)| = \begin{cases} \frac{1}{|k|^\alpha}, & k \neq 0, \\ 0, & k = 0, \end{cases} \qquad \alpha \geqslant 1.$$

For $l \in [1-m : m-1] \setminus \{0\}$, let us check that G satisfies inequality (1.13), which on this occasion is of the form

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - \frac{|l+2nk|^{2\alpha}}{m^{2\alpha}}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - \left|\frac{l}{m} + 2\frac{n}{m}k\right|^{2\alpha}} \geqslant 0.$$

Denote $\frac{l}{m} = y$, $\frac{n}{m} = b$; then $|y| < 1$, $b \geqslant 1$. Now we show that

$$\Psi_{y,b}(\alpha) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - |y + 2kb|^{2\alpha}} \geqslant 0.$$

Clearly, the function $\Psi_{y,b}(\alpha)$ increases with respect to b. So, it suffices to prove the inequality

$$\Psi_y(\alpha) = \Psi_{y,1}(\alpha) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - |y + 2k|^{2\alpha}} \geqslant 0.$$

Since $\Psi_y(\alpha)$ is even with respect to y, we can restrict ourselves to considering only $y \in [0, 1)$. It is clear that

$$\Psi_y(1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - (y+2k)^2} = \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{y + 2k + 1} - \frac{1}{y + 2k - 1} \right) = 0$$

for all y. Let us show that for every $y \in [0, 1)$, the function Ψ_y strictly increases on $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Combining terms with numbers k and $-k-1$, we find

$$\Psi_y(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - (y+2k)^{2\alpha}} + \frac{1}{1 - (2 - y + 2k)^{2\alpha}} \right).$$

In the last sum, all terms with numbers $k \geqslant 1$ are, evidently, strictly increasing with respect to α; so, it suffices to prove that the function $\varphi_y(\alpha) = \frac{1}{1-y^{2\alpha}} + \frac{1}{1-(2-y)^{2\alpha}}$ is nondecreasing for all $y \in [0, 1)$. Since an increase of $\varphi_0(\alpha) = 1 + \frac{1}{1-2^{2\alpha}}$ is obvious, we can assume $y \in (0, 1)$. Put $y = 1 - t$, $t \in (0, 1)$.

Then the inequality
$$\varphi_y'(\alpha) = \frac{2y^{2\alpha}\ln y}{(1-y^{2\alpha})^2} + \frac{2(2-y)^{2\alpha}\ln(2-y)}{(1-(2-y)^{2\alpha})^2} \geqslant 0$$
is equivalent to
$$(1-t)^{2\alpha}\ln(1-t)\left(1-(1+t)^{2\alpha}\right)^2 + (1+t)^{2\alpha}\ln(1+t)\left(1-(1-t)^{2\alpha}\right)^2 \geqslant 0.$$

We have
$$\begin{aligned}
&(1-t)^{2\alpha}\ln(1-t)\left(1-(1+t)^{2\alpha}\right)^2 + (1+t)^{2\alpha}\ln(1+t)\left(1-(1-t)^{2\alpha}\right)^2 = \\
&= (1-t^2)^{2\alpha}\left(\ln(1-t)\left((1+t)^{-2\alpha}-2+(1+t)^{2\alpha}\right)+\ln(1+t)\left((1-t)^{-2\alpha}-2+(1-t)^{2\alpha}\right)\right)= \\
&= (1-t^2)^{2\alpha}\left(\ln(1-t)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{-2\alpha}^k+C_{2\alpha}^k\right)t^k-2\right)+\right. \\
&\quad \left. +\ln(1+t)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{-2\alpha}^k+C_{2\alpha}^k\right)(-t)^k-2\right)\right) = \\
&= (1-t^2)^{2\alpha}\left(\ln(1-t)\sum_{k=2}^{\infty}\left(C_{-2\alpha}^k+C_{2\alpha}^k\right)t^k+\ln(1+t)\sum_{k=2}^{\infty}\left(C_{-2\alpha}^k+C_{2\alpha}^k\right)(-t)^k\right) = \\
&= (1-t^2)^{2\alpha}\sum_{k=2}^{\infty}\left(C_{-2\alpha}^k+C_{2\alpha}^k\right)\left(\ln(1-t)+(-1)^k\ln(1+t)\right)t^k = (1-t^2)^{2\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t),
\end{aligned}$$

where
$$\begin{aligned}
\psi_k(t) = &\left(C_{-2\alpha}^{2k}+C_{2\alpha}^{2k}\right)\left(\ln(1-t)+\ln(1+t)\right)t^{2k}+ \\
&+\left(C_{-2\alpha}^{2k+1}+C_{2\alpha}^{2k+1}\right)\left(\ln(1-t)-\ln(1+t)\right)t^{2k+1}.
\end{aligned}$$

Let us show that $\psi_k > 0$ for all $k \in \mathbb{N}$. For $x > 0$ and integer $n \geqslant 2$, the expression $C_{-x}^n + C_x^n$ is positive when n is even, and is negative when n is odd; therefore, we have
$$\begin{aligned}
\psi_k(t) = &-\left(C_{-2\alpha}^{2k}+C_{2\alpha}^{2k}\right)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{t^{2l+2k}}{l} - 2\left(C_{-2\alpha}^{2k+1}+C_{2\alpha}^{2k+1}\right)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{t^{2l+2k}}{2l-1} > \\
&> -\left(C_{-2\alpha}^{2k}+C_{2\alpha}^{2k}+C_{-2\alpha}^{2k+1}+C_{2\alpha}^{2k+1}\right)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{t^{2l+2k}}{l} = -\left(C_{-2\alpha+1}^{2k+1}+C_{2\alpha+1}^{2k+1}\right)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{t^{2l+2k}}{l} > 0.
\end{aligned}$$

Remark 7. Since Ψ_y strictly increases on $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ and equals 1 at 0 for any y, we have $\Psi_y(\alpha) < 0$ for $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, and condition (1.13) for the function G with such values of the parameter α is not fulfilled for $m = n$.

It is known (see, for example, [13, §1.5.1]) that any function $f \in W_2^{(r)}$ can be represented as $f = d_r * f^{(r)} + c_0(f)$, where
$$d_r(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{e^{ikt}}{(ik)^r}$$
is the periodic Bernoulli kernel. Conversely, for any function $f \in L_2$, representable in the form

$f = d_r * \varphi + c$ for some $\varphi \in L_2$, $\varphi \perp 1$, and $c \in \mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$, we have $c = c_0(f)$ and $f^{(r)} = \varphi$ almost everywhere on $\mathbb{R}$. Therefore, by Corollary 7, Example 1 yields the following statement.

Corollary 8. *Let $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$ and suppose that the function $B \in L_2$ possesses the following properties:*

$$\begin{aligned} c_l(B) &\neq 0 \quad \textit{for all} \quad l \in [1-m : m-1], \\ c_{2nk}(B) &= 0 \quad \textit{for all} \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ |c_{l+2nk}(B)| \leqslant \left|\frac{l}{l+2nk}\right|^r &|c_l(B)| \quad \textit{for all} \quad l \in [1-m : m-1] \setminus \{0\},\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Then for every function $f \in W_2^{(r)}$, the following inequalities hold:

$$\begin{aligned} E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 &\leqslant \frac{1}{m^r} \|f^{(r)}\|_2, \\ E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2 &\leqslant \frac{1}{m^r} \|f^{(r)}\|_2. \end{aligned}$$

Remark 8. Note that in Corollary 8 r is not necessarily integer. In this regard, recall that the Weyl fractional derivative is defined in terms of the Fourier coefficients:

$$c_k(f^{(r)}) = (ik)^r c_k(f), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Now we formulate well-known results for approximation by trigonometric polynomials and splines, which were mentioned in the Introduction and can be derived as particular cases of Corollary 8 and Remark 4; here, we restrict ourselves to the cases for $m = n$.

Corollary 9. *Let $r, n \in \mathbb{N}$. Then for every function $f \in W_2^{(r)}$, the following inequality holds:*

$$E(f, \mathcal{T}_{2n-1})_2 \leqslant \frac{1}{n^r} E(f^{(r)}, \mathcal{T}_{2n-1})_2.$$

Corollary 10. *Let $\mu \in \mathbb{Z}_+$, $r, n \in \mathbb{N}$, $\mu + 1 \geqslant r$. Then for every function $f \in W_2^{(r)}$, the following inequalities hold:*

$$\begin{aligned} E\big(f, \mathbf{S}^{\times}_{n,\mu}\big)_2 &\leqslant \frac{1}{n^r} E\big(f^{(r)}, \mathbf{S}^{\times}_{n,\mu-r}\big)_2, \\ E\big(f, \mathbf{S}_{n,\mu}\big)_2 &\leqslant \frac{1}{n^r} E\big(f^{(r)}, \mathbf{S}_{n,\mu-r}\big)_2. \end{aligned}$$

(For $\mu + 1 = r$, the values $E\big(f^{(r)}, \mathbf{S}^{\times}_{n,\mu-r}\big)_2$ and $E\big(f^{(r)}, \mathbf{S}_{n,\mu-r}\big)_2$ should be interpreted as $\|f^{(r)}\|_2$.)

Example 2. Let us check the fulfillment of condition (1.13) for the function G with the Fourier coefficients of the form $|c_k(G)| = \dfrac{1}{(1 + a^2k^2)^\alpha}$, where $\alpha \in \mathbb{N}$ or $\alpha + \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Let $l \in [1-m : m-1]$. By Remark 6, it suffices to consider the case $\alpha = \frac{1}{2}$, i.e., to prove the

inequality

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-\dfrac{1+a^2(l+2nk)^2}{1+a^2m^2}} \geqslant 0.$$

Since

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-\dfrac{1+a^2(l+2nk)^2}{1+a^2m^2}} = \frac{1+a^2m^2}{a^2m^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-\dfrac{(l+2nk)^2}{m^2}},$$

the desired relation follows from the previous example for $\alpha = 1$.

Example 3. Let us check the fulfillment of condition (1.13) for the function G with the Fourier coefficients of the form $|c_k(G)| = e^{-\beta|k|^\gamma}$, where $\gamma \geqslant 2$, $\beta > 0$. Let $l \in [1-m : m-1]$. Using the inequality from Example 1 for $\alpha = \frac{\gamma}{2}$ and the relations $1-e^{-x} < x,\ e^x - 1 > x$, which hold for every $x > 0$, we get:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-\dfrac{e^{-2\beta m^\gamma}}{e^{-2\beta|l+2nk|^\gamma}}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-e^{2\beta(|l+2nk|^\gamma - m^\gamma)}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-e^{2\beta m^\gamma\left(\left|\frac{l}{m}+2\frac{n}{m}k\right|^\gamma-1\right)}} =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\beta m^\gamma\left(1-\left|\frac{l}{m}\right|^\gamma\right)}} - \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{e^{2\beta m^\gamma\left(\left|\frac{l}{m}+2\frac{n}{m}k\right|^\gamma-1\right)}-1} >$$

$$> \frac{1}{2\beta m^\gamma\left(1-\left|\frac{l}{m}\right|^\gamma\right)} - \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{2\beta m^\gamma\left(\left|\frac{l}{m}+2\frac{n}{m}k\right|^\gamma-1\right)} = \frac{1}{2\beta m^\gamma}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-\left|\frac{l}{m}+2\frac{n}{m}k\right|^\gamma} \geqslant 0.$$

Remark 9. Now consider the case $m = n$ for $\gamma \in (0,1)$. Putting $y = \frac{l}{n}$, we get:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-\dfrac{e^{-2\beta n^\gamma}}{e^{-2\beta|l+2nk|^\gamma}}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-e^{2\beta n^\gamma(|y+2k|^\gamma-1)}} =$$

$$= \frac{1}{1-e^{2\beta n^\gamma(y^\gamma-1)}} + \frac{1}{1-e^{2\beta n^\gamma((2-y)^\gamma-1)}} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\}} \frac{1}{1-e^{2\beta n^\gamma(|y+2k|^\gamma-1)}}.$$

The last sum in continuous with respect to y, and all its terms are negative. For selected terms when $y \to 1$, we have:

$$\frac{1}{1-e^{2\beta n^\gamma(y^\gamma-1)}} + \frac{1}{1-e^{2\beta n^\gamma((2-y)^\gamma-1)}} \to 1 + \frac{\gamma-1}{2\beta\gamma n^\gamma},$$

which is less than zero for $\beta < \frac{1-\gamma}{2\gamma n^\gamma}$. This implies that for such values of the parameter β, condition (1.13) is not fulfilled for sufficiently large n.

Now we derive one significant generalization of Examples 1–3.

The *Laguerre–Polya class* $\mathcal{E}_2$ consists of all functions ψ of the form

$$\begin{gathered}\psi(z)=Ce^{-\alpha z^2+\delta z}z^r\prod_{j=1}^{\infty}(1-a_jz)e^{-a_jz},\\ C\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\quad \alpha\geqslant 0,\quad \delta,a_j\in\mathbb{R},\quad r\in\mathbb{Z}_+,\quad \sum_{j=1}^{\infty}a_j^2<\infty.\end{gathered}\tag{1.16}$$

The class $\mathcal{E}_{2,\varnothing}$ consists of the functions in $\mathcal{E}_2$ with $r=0$ in (1.16) and $\alpha+\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2>0$, while the class $\mathcal{E}_{2,\{0\}}$ consists of those with $r\in\mathbb{N}$.

Denote by $\nu_c(\varphi)$ the number of essential sign changes of a periodic real-valued function φ on the period, i.e.

$$\nu_c(\varphi)=\sup S^-[\varphi(t_1),\varphi(t_2),\ldots,\varphi(t_n)],$$

where $S^-[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ is the number of sign changes of the set of real numbers $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ (zero terms are omitted), and the upper bound is taken over all $n\in\mathbb{N}$ and all ordered sets $t_1<t_2<\ldots<t_n$, $t_i\in[0,2\pi]$ (see. [29, § I.3]). Take $J=\varnothing$ or $J=\{0\}$ and put $\mathcal{J}_\varnothing=\{0\}$, while $\mathcal{J}_{\{0\}}$ is a set of constants. The class CVD_J consists of the real-valued functions $K\in L_1$ such that

$$\nu_c\left(a+\varphi*K\right)\leqslant\nu_c(\varphi).$$

for all functions $a\in\mathcal{J}_J$ and $\varphi\perp\mathcal{J}_J$. The functions in CVD_J are called *cyclic variation diminishing.*

It is known [34, Theorem III.4.8] that, if $\psi\in\mathcal{E}_{2,J}$, then the function

$$G(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{e^{ikt}}{\psi(ik)}+c_\psi,\quad c_\psi=\begin{cases}\frac{1}{\psi(0)}, & J=\varnothing,\\ 0, & J=\{0\},\end{cases}\tag{1.17}$$

belongs to CVD_J.

Since for the function G defined by (1.17), we have

$$\begin{gathered}|c_k(G)|=\frac{1}{|C|}e^{-\alpha k^2}\frac{1}{|k|^r}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+a_j^2k^2}},\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\\ |c_0(G)|=\begin{cases}\frac{1}{|C|}, & J=\varnothing,\\ 0, & J=\{0\},\end{cases}\end{gathered}$$

Examples 1–3 and Remark 6 imply the following statement.

Corollary 11. *Let $n,m\in\mathbb{N}$, $m\leqslant n$, and let the function G be defined by* (1.17). *Suppose that $B\in L_2$ satisfies the following conditions.*

1. *For every $l\in[1-m:m-1]$, we have $c_l(B)\neq 0$.*

2. *If $J=\{0\}$, then $c_{2nk}(B)=0$ for all $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.*

3. For every $l \in [1-m : m-1] \setminus J$,

$$|c_{l+2nk}(B)| \leqslant \frac{|c_l(B)|}{|c_l(G)|}|c_{l+2nk}(G)| \quad \textit{for all } k \in \mathbb{Z}.$$

Then for every function f representable in the form

$$f = G * \varphi + c, \quad \varphi \in L_2,\, c \in \mathcal{J}_J,$$

the following inequalities hold:

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2,$$

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)| \|\varphi\|_2.$$

The next example shows that for the Poisson kernel, condition (1.13), generally speaking, is not always satisfied.

Example 4. Consider the function G with the Fourier coefficients of the form $|c_k(G)| = e^{-\alpha|k|}$, $\alpha > 0$. Let us find all values of the parameter α such that for every $l \in [1-m : m-1]$, condition (1.13) is fulfilled, i.e., the following inequality holds:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - \dfrac{e^{-2\alpha m}}{e^{-2\alpha|l+2nk|}}} \geqslant 0.$$

A decrease of the left-hand side of the last inequality with respect to m is obvious, so it suffices to consider the case $m = n$. Put $\frac{l}{n} = y$, $\beta = 2\alpha n$; then $|y| < 1$, $\beta > 0$, and for the fulfillment of the desired inequality, it is necessary and sufficient that

$$\Psi_\beta(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - e^{\beta(|y+2k|-1)}} \geqslant 0.$$

Since Ψ_β is even, we can restrict ourselves to considering $y \in [0,1)$. Let us show that Ψ_β is strictly increasing on $[0,1)$. Then the fulfillment of condition (1.13) for all $l \in [1-n : n-1]$ is equivalent to the inequality $\Psi_\beta(0) \geqslant 0$, i.e., to condition (1.13) for $l = 0$. Combining terms with numbers k and $-k-1$, we get

$$\Psi_\beta(y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y),$$

where

$$\varphi_k(y) = \frac{1}{1 - e^{\beta(2k+y-1)}} + \frac{1}{1 - e^{\beta(2k+1-y)}}.$$

Now it suffices to prove that for all $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_k'(y) = \frac{\beta e^{\beta(2k+y-1)}}{\big(1 - e^{\beta(2k+y-1)}\big)^2} - \frac{\beta e^{\beta(2k+1-y)}}{\big(1 - e^{\beta(2k+1-y)}\big)^2} > 0,$$

which is equivalent to

$$e^{\beta(2k+y-1)}\left(1-e^{\beta(2k+1-y)}\right)^2-e^{\beta(2k+1-y)}\left(1-e^{\beta(2k+y-1)}\right)^2>0.$$

We have:

$$\begin{gathered}
e^{\beta(2k+y-1)}\left(1-e^{\beta(2k+1-y)}\right)^2-e^{\beta(2k+1-y)}\left(1-e^{\beta(2k+y-1)}\right)^2=\\
=e^{4\beta k}\left(\left(e^{-\frac{\beta}{2}(2k+1-y)}-e^{\frac{\beta}{2}(2k+1-y)}\right)^2-\left(e^{-\frac{\beta}{2}(2k+y-1)}-e^{\frac{\beta}{2}(2k+y-1)}\right)^2\right)=\\
=4e^{4\beta k}\left(\operatorname{sh}^2\left(\frac{\beta}{2}(2k+1-y)\right)-\operatorname{sh}^2\left(\frac{\beta}{2}(2k+y-1)\right)\right)=\\
=2e^{4\beta k}\left(\operatorname{ch}(\beta(2k+1-y))-\operatorname{ch}(\beta(2k+y-1))\right)=4e^{4\beta k}\operatorname{sh}(2\beta k)\operatorname{sh}(\beta(1-y))>0.
\end{gathered}$$

Since the function

$$\Psi_\beta(0)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-e^{\beta(2k-1)}}+\frac{1}{1-e^{\beta(2k+1)}}\right)$$

is continuous and strictly increasing from $-\infty$ to 1 with respect to β on $(0,+\infty)$, the inequality $\Psi_\beta(0)\geqslant 0$ is satisfied if and only if $\beta\geqslant\beta^*$, where β^* is a root of the equation

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-e^{\beta(2k-1)}}+\frac{1}{1-e^{\beta(2k+1)}}\right)=0.$$

Therefore, the function G possesses property (1.13) for all $\alpha\geqslant\frac{\beta^*}{2n}$; moreover, for $m=n$, this bound is sharp.

Now we describe the set of functions B satisfying the conditions of Corollaries 6 and 7 for a fixed kernel G.

Among examples of functions B satisfying the conditions of Corollary 6 for all $m\leqslant n$ are the functions with coefficients of the form $c_k(B)=c_k(G)\gamma_k$, where $\gamma_l\neq 0$ for $l\in[1-m:m-1]$ and $|\gamma_{l+2nk}|\leqslant|\gamma_l|$ for all $(l,k)\in[1-m:m-1]\times\mathbb{Z}$ such that $c_{l+2nk}(G)\neq 0$. If γ_k are the Fourier coefficients of the function $K\in L_1$, then such function B is $G*K$. In particular, any function in L_1 satisfying condition 1 of Corollary 6 may be taken as K.

Examples of functions B satisfying the conditions of Corollary 7 for all $m\leqslant n$ are the functions with coefficients of the form

$$c_k(B)=\begin{cases}c_k(G)\gamma_k, & k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\\ \gamma, & k=0,\end{cases}$$

where $\gamma\neq 0$, $\gamma_l\neq 0$ for $l\in[1-m:m-1]\setminus\{0\}$, $\gamma_{2nk}=0$ for all $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ such that $c_{2nk}(G)\neq 0$, and $|\gamma_{l+2nk}|\leqslant|\gamma_l|$ for all $(l,k)\in([1-m:m-1]\setminus\{0\})\times\mathbb{Z}$ such that $c_{l+2nk}(G)\neq 0$. If γ_k are the Fourier coefficients of the function $K\in L_1$, then such function B is $G*K+\gamma$. In particular, the Steklov average of any function $K_1\in L_1$ satisfying condition 1 of Corollary 6 or Corollary 7 may be taken as K, i.e., the function $K=K_1*B_{n,\mu}$, $\mu\in\mathbb{Z}_+$.

Chapter 2.

Approximation of classes of differentiable functions on a segment

2.1. Introduction

In [24] Floater and Sande studied the L_2 approximation of three classes of functions in $W_2^{(r)}[0,1]$, defined by certain boundary conditions. With slightly different scaling (which we hereafter adhere to) these classes are given by

$$\begin{aligned}
H_0^r &= \{u \in W_2^{(r)}[0,\pi] \colon u^{(k)}(0) = u^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < r, \quad k \text{ is even}\},\\
H_1^r &= \{u \in W_2^{(r)}[0,\pi] \colon u^{(k)}(0) = u^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < r, \quad k \text{ is odd}\},\\
H_2^r &= \left\{u \in W_2^{(r)}\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \colon u^{(k)}(0) = u^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leqslant k,l < r, \quad k \text{ is even, } l \text{ is odd}\right\}.
\end{aligned}$$

Floater and Sande calculated the values of widths of the sets

$$\begin{aligned}
A_i^r &= \{u \in H_i^r \colon \|u^{(r)}\|_{L_2[0,\pi]} \leqslant 1\}, \quad i = 0,1,\\
A_2^r &= \left\{u \in H_2^r \colon \|u^{(r)}\|_{L_2\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \leqslant 1\right\}
\end{aligned}$$

and described optimal subspaces for A_i^r. Specifically, they showed that

$$d_n(A_0^r) = \frac{1}{(n+1)^r}, \quad d_n(A_1^r) = \frac{1}{n^r}, \quad d_n(A_2^r) = \frac{1}{(2n+1)^r},$$

and the spaces

$$\operatorname{span}\{x \mapsto \sin kx\}_{k=1}^{n}, \quad \operatorname{span}\{x \mapsto \cos kx\}_{k=0}^{n-1}, \quad \operatorname{span}\{x \mapsto \sin(2k-1)x\}_{k=1}^{n} \tag{2.1}$$

are optimal for A_0^r, A_1^r, and A_2^r, respectively. The result for A_1^1 was proved by Kolmogorov [30]. In addition, the authors proved that the spaces A_i^r admit optimal spline subspaces, which are defined as follows.

Let $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m)$ be a knot vector such that $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m < P_i$, where $P_0 = P_1 = \pi$

and $P_2 = \pi/2$. Denote by $S_{d,\tau,i}$ the space of splines of degree d and defect 1 on $[0, P_i]$ and consider its n-dimensional subspaces defined by

$$S_{d,0} = \{s \in S_{d,\tau_0,0}\colon s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d, \quad k \text{ is even}\},$$
$$S_{d,1} = \{s \in S_{d,\tau_1,1}\colon s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d, \quad k \text{ is odd}\},$$
$$S_{d,2} = \left\{s \in S_{d,\tau_2,2}\colon s^{(k)}(0) = s^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leqslant k, l \leqslant d, \quad k \text{ is even}, \ l \text{ is odd}\right\},$$

where the knot vectors τ_i for $i = 0, 1, 2$ are given as

$$\tau_0 = \begin{cases} \left\{\frac{k\pi}{n+1}\right\}_{k=1}^{n}, & d \text{ is odd},\\ \left\{\frac{k\pi}{n+1} + \frac{\pi}{2(n+1)}\right\}_{k=0}^{n}, & d \text{ is even},\end{cases}$$
$$\tau_1 = \begin{cases} \left\{\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right\}_{k=0}^{n-1}, & d \text{ is odd},\\ \left\{\frac{k\pi}{n}\right\}_{k=1}^{n-1}, & d \text{ is even},\end{cases}$$
$$\tau_2 = \begin{cases} \left\{\frac{k\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2(2n+1)}\right\}_{k=0}^{n-1}, & d \text{ is even},\\ \left\{\frac{k\pi}{2n+1}\right\}_{k=1}^{n}, & d \text{ is odd}.\end{cases}$$

It was proved in [24] that for any $d \geqslant r-1$ the spline spaces $S_{d,i}$ are optimal n-dimensional spaces for the set A_i^r, $i = 0, 1, 2$.

As we can see, all the spaces $S_{d,i}$ have equidistant knots, but the form of the knot vector is determined by the degree d. In this chapter, we show that the classes A_i^r admit optimal spline subspaces with both types of knots indicated in the definition of τ_i independently of the degree. Of course, boundary conditions should be relaxed or some extra conditions should be added in the remaining cases to ensure the dimension to equal n.

In this chapter, we reduce the problem for the functions on a segment to the similar one for periodic functions. Using the results of Chapter 1, we obtain a set of optimal subspaces in nonperiodic situation, incuding the results of [24].

The results of the chapter are published in [7].

2.2. Preliminary results

The following Lemma describes symmetry properties of spaces of shifts in terms of Fourier coefficients.

Lemma 1. *Let $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B \in L_1$. Then the following statements are equivalent.*

1. *The inclusion $s \in \mathbb{S}_{B,n,m}^{\times}$ implies $s(-\cdot) \in \mathbb{S}_{B,n,m}^{\times}$.*

2. *For every $l \in [0 : m-1]$ there exists $\gamma_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ such that $\gamma_0 \in \{-1, 1\}$ and*

$$c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B) \quad \text{for all } k \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

Proof. The first statement means that $\Phi_{B,l}(-\cdot) \in \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ for all $l \in [1-m : m-1]$. Replacing l with $-l$ for convenience, rewrite the inclusion as

$$\Phi_{B,-l}(-x) = \sum_{j=1-m}^{m-1} \gamma_j \Phi_{B,j}(x)$$

for some γ_j. Since $\Phi_{B,j}$ is orthogonal to $\Phi_{B,-l}(-\cdot)$ for $j \neq l$, we have

$$\Phi_{B,-l}(-x) = \gamma_l \Phi_{B,l}(x).$$

Equating the Fourier coefficients, we get (2.2). Replacing l with $-l$ and k with $-k$, we also have $c_{l+2nk}(B) = \gamma_{-l} c_{-l-2nk}(B)$. If $\gamma_l = 0$ for some l, then $c_{l+2nk}(B) = c_{-l-2nk}(B) = 0$ and the equalities are trivially satisfied with an arbitrary γ_l. So, we can take $\gamma_l \neq 0$.

On the other hand, if (2.2) is valid for a number l with $\gamma_l \neq 0$, it is also valid for a number $-l$ with $\frac{1}{\gamma_l}$. So, it is sufficient to consider $l \in [0 : m-1]$.

Putting $l = 0$, we conclude that $c_{-2nk}(B) = \gamma_0 c_{2nk}(B)$ for all k. Replacing k by $-k$, we also have $c_{2nk}(B) = \gamma_0 c_{-2nk}(B)$. If $c_{2nk}(B) = 0$ for all k, we can take $\gamma_0 = 1$. If $c_{2nk}(B) \neq 0$ for some k, then $c_{-2nk}(B) \neq 0$ for the same k, and so $\gamma_0 = \pm 1$. $\square$

Note that all even functions (and, in particular, the Dirichlet kernel) satisfy the second condition of Lemma 1 with $\gamma_l = 1$ for all l.

For the B-spline, we have $\gamma_l = e^{-i\frac{\pi}{n}l(\mu+1)}$, and for the shifted B-spline $\widetilde{B}_{n,\mu} = B_{n,\mu}(\cdot - \frac{\pi}{2n})$, the identity $c_k(\widetilde{B}_{n,\mu}) = e^{-\frac{ik\pi}{2n}} c_k(B_{n,\mu})$ yields $\gamma_l = e^{-\frac{il\pi\mu}{n}}$.

Recall that the symbols f^e and f^o denote even and odd part of f, respectively.

Remark 1. For $l \in [1 : m-1]$, we have $\Phi^e_{B,-l} = \gamma_l \Phi^e_{B,l}$ and $\Phi^o_{B,-l} = -\gamma_l \Phi^o_{B,l}$. Therefore, the space $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ can be represented as

$$\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m} = \operatorname{span}\{\Phi_{B,0}\} \oplus \operatorname{span}\{\Phi^e_{B,l}\}_{l=1}^{m-1} \oplus \operatorname{span}\{\Phi^o_{B,l}\}_{l=1}^{m-1}. \tag{2.3}$$

Remark 2. If $s \in \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$, then $s(\cdot + \pi) \in \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ and, since $\Phi_{B,l}(x+\pi) = (-1)^l \Phi_{B,l}(x)$, we have

$$\Phi^e_{B,l}(\pi - x) = (-1)^l \Phi^e_{B,l}(x), \quad \Phi^o_{B,l}(\pi - x) = (-1)^{l+1} \Phi^o_{B,l}(x).$$

The following theorem is a particular case of Corollary 1.5 for the Sobolev space, i.e., for $G = d_r$.

Theorem 1. *Let $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, and $B \in L_2$. Then the following statements are equivalent.*

1. For any function $f \in W_2^{(r)}$, the following inequality holds:

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r} \|f^{(r)}\|_2. \tag{2.4}$$

2. The Fourier coefficients of B satisfy the conditions

$$
\begin{aligned}
c_l(B) \neq 0 \quad &\text{for all} \quad |l| \in [0 : m-1],\\
c_{2n\nu}(B) = 0 \quad &\text{for all} \quad \nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\\
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}}} \geqslant 0 \quad &\text{for all} \quad |l| \in [1 : m-1].
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Further, we need a simple corollary of Theorem 1 for functions with zero mean

Corollary 1. *Let $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, and $B \in L_2$. Then the following statements are equivalent.*

1. For any function $f \in W_2^{(r)}$ such that $c_0(f) = 0$, the following inequality holds:

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r}\|f^{(r)}\|_2.$$

2. For all $|l| \in [1 : m-1]$ we have $c_l(B) \neq 0$ and

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}}} \geqslant 0.$$

Proof. For $g \in L_2$, put $g_0(x) = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} c_{2n\nu}(g)e^{i2n\nu x}$. Obviously, the inequality (2.4) on the whole class $W_2^{(r)}$ is equivalent to the system

$$E\big(f_0, \mathbb{S}^{\times}_{B_0,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r}\|f_0^{(r)}\|_2,$$

$$E\big(f - f_0, \mathbb{S}^{\times}_{B-B_0,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r}\|(f-f_0)^{(r)}\|_2.$$

(1) $\Longrightarrow$ (2). Let $\widetilde{B} \in L_2$ be such a function that $c_0(\widetilde{B}) = 1$, $c_{2n\nu}(\widetilde{B}) = 0$ for all $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, and $c_k(\widetilde{B}) = c_k(B)$ for $k \neq 2n\nu$. For any $f \in W_2^{(r)}$ we have

$$E\Big(f_0, \mathbb{S}^{\times}_{\widetilde{B}_0,n,m}\Big)_2 \leqslant \|f_0 - c_0(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{m^r}\|f_0^{(r)}\|_2, \tag{2.6}$$

$$E\Big(f - f_0, \mathbb{S}^{\times}_{\widetilde{B}-\widetilde{B}_0,n,m}\Big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r}\|(f-f_0)^{(r)}\|_2. \tag{2.7}$$

Inequality (2.6) is trivial because $\mathbb{S}^{\times}_{\widetilde{B}_0,n,m}$contains constants, while (2.7) holds due to assumption. So, (2.4) is valid. The Fourier coefficients of $\widetilde{B}$ satisfy the second condition of Theorem 1. By the definition of $\widetilde{B}$, so the same holds for $c_k(B)$ when $k \neq 2n\nu$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Let $f \in W_2^{(r)}$, $c_0(f) = 0$, and suppose that $\widetilde{B}$ is defined as above. Be Theorem 1, inequality (2.4) is fulfilled for $\widetilde{B}$, so, by (2.6) and (2.7), this implies that it is also true for B. $\square$

2.3. Main results

Consider the following functional classes:

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_0^r &= \{u \in W_2^{(r)} \colon u \text{ is odd}\},\\
\widetilde{H}_1^r &= \{u \in W_2^{(r)} \colon u \text{ is even}\},\\
\widetilde{H}_2^r &= \left\{u \in W_2^{(r)} \colon u \text{ is odd, } u\left(\cdot + \frac{\pi}{2}\right) \text{ is even}\right\}.
\end{aligned}$$

Evidently, every function $u \in \widetilde{H}_i^r$ belongs to H_i^r. Conversely, according to the boundary conditions in the definition of the classes H_i^r, the 2π-periodization of the odd extension of $u \in H_0^r$ to the interval $[-\pi, 0]$ belongs to $\widetilde{H}_0^r$. Similarly, the 2π-periodization of the even extension of $u \in H_1^r$ to the interval $[-\pi, 0]$ is in $\widetilde{H}_1^r$. Consecutively extending $u \in H_2^r$ to an even (with respect to $\pi/2$) function on $[0, \pi]$ and to an odd function on $[-\pi, \pi]$, after 2π-periodization we get a function belonging to $\widetilde{H}_2^r$.

Therefore, putting

$$\widetilde{A}_i^r = \{u \in \widetilde{H}_i^r \colon \|u^{(r)}\|_2 \leqslant 1\}, \quad i = 0, 1, 2,$$

we derive

$$\begin{aligned}
d_n(\widetilde{A}_0^r; L_2) &= d_n(A_0^r; L_2[0,\pi]) = \frac{1}{(n+1)^r},\\
d_n(\widetilde{A}_1^r; L_2) &= d_n(A_1^r; L_2[0,\pi]) = \frac{1}{n^r},\\
d_n(\widetilde{A}_2^r; L_2) &= d_n\left(A_2^r; L_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \frac{1}{(2n+1)^r}.
\end{aligned}$$

Thus, we can reduce problems for nonperiodic classes to those for periodic classes and apply Theorem 1. We will formulate our results for periodic classes (denoted with tildes).

Remark 3. Let S be a closed subspace of L_2 such that the condition $s \in \mathsf{S}$ implies $s(-\cdot) \in \mathsf{S}$. Then an element of best approximation of any function $u \in \widetilde{H}_0^r$ in L_2 by the space S is odd. Indeed, if $\|u - s\|_2 = \inf\limits_{T \in \mathsf{S}} \|f - T\|_2$, we can write

$$\begin{aligned}
\|u - s\|_2 \leqslant \left\| u - \frac{s - s(-\cdot)}{2} \right\|_2 = \left\| \frac{u - s}{2} + \frac{u + s(-\cdot)}{2} \right\|_2 = \left\| \frac{u - s}{2} + \frac{-u(-\cdot) + s(-\cdot)}{2} \right\|_2 \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{2} \left(\|u - s\|_2 + \|u(-\cdot) - s(-\cdot)\|_2 \right) = \|u - s\|_2.
\end{aligned}$$

This means that all the inequalities in this chain turn into equalities. In particular, we have $\|u - s\|_2 = \|u - s^o\|_2$. By the uniqueness of an element of best approximation in L_2, we conclude that s is odd.

For the same reason, an element of best approximation of any function $u \in \widetilde{H}_1^r$ by the space S is even. If, in addition, the space S is invariant under the shift by π, an element of best approximation of $u \in \widetilde{H}_2^r$ by the space S possesses the same symmetry properties as the function u itself.

Consider the following m-dimensional subspaces of $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m} &= \operatorname{span}\{\Phi^o_{B,l}\}_{l=1}^m \qquad \text{for } m+1 \leqslant n,\\
\widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,m} &= \operatorname{span}\{\Phi_{B,0}\} \oplus \operatorname{span}\{\Phi^e_{B,l}\}_{l=1}^{m-1} \qquad \text{for } m \leqslant n,\\
\widetilde{\mathcal{S}}^2_{B,n,m} &= \operatorname{span}\{\Phi^o_{B,2l-1}\}_{l=1}^m \qquad \text{for } 2m+1 \leqslant n.
\end{aligned}$$

In the following three theorems we give sufficient conditions of extremality of these spaces.

Theorem 2. *Let $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m+1 \leqslant n$, and suppose that the Fourier coefficients of a function $B \in L_2$ satisfy the following conditions.*

1. *For any $l \in [1:m]$ there exists $\gamma_l \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ such that for all $k \in \mathbb{Z}$ $c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B)$.*

2. *For all $\nu \in \mathbb{N}$, $c_{2n\nu}(B) = c_{-2n\nu}(B)$.*

3. *For all $l \in [1:m]$, we have $c_l(B) \neq 0$ and*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{(m+1)^{2r}}} \geqslant 0.$$

Then for any $u \in \widetilde{H}^r_0$,

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r}\|u^{(r)}\|_2. \tag{2.8}$$

Proof. Since every $u \in \widetilde{H}^r_0$ has zero mean and B satisfies the conditions of the second proposition of Corollary 1, we can write

$$E\big(u, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m+1}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r}\|u^{(r)}\|_2. \tag{2.9}$$

By Lemma 1, the space $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m+1}$ contains each function s with its odd and even parts. Thus, an element of best approximation of $u \in \widetilde{H}^r_0$ by the space $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m+1}$ is odd. This impies that the space $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m+1}$ on the left-hand side of (2.9) can be substituted for its subspace consisting of odd functions. Since $\Phi_{B,0}$ is even (by condition 2), it follows from decomposition (2.3) that the desired approximating subspace coincides with $\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}$. □

Theorem 3. *Let $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, and suppose that the Fourier coefficients of a function $B \in L_2$ satisfy the following conditions.*

1. *For any $l \in [1:m-1]$ there exists $\gamma_l \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ such that $c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B)$ for all $k \in \mathbb{Z}$.*

2. *For all $l \in [0:m-1]$, $c_l(B) \neq 0$.*

3. *For all $\nu \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $c_{2n\nu}(B) = 0$.*

4. *For all* $l \in [1:m-1]$, *we have*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}}} \geqslant 0.$$

Then for any $u \in \widetilde{H}_1^r$,

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r}\|u^{(r)}\|_2. \tag{2.10}$$

Proof. Applying Theorem 1 to $u \in \widetilde{H}_1^r$, we can write

$$E\big(u, \mathbb{S}^\times_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r}\|u^{(r)}\|_2.$$

Using the same argument as in the proof of Theorem 2, we conclude that the space $\mathbb{S}^\times_{B,n,m}$ on the left-hand side of the last inequality can be substituted for the subspace of even functions, i.e. for $\widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,m}$. □

Theorem 4. *Let* $r, n, m \in \mathbb{N}$, $2m+1 \leqslant n$, *and suppose that the Fourier coefficients of a function* $B \in L_2$ *satisfy the following conditions.*

1. *For any* $l \in [1:2m]$ *there exists* $\gamma_l \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *such that for all* $k \in \mathbb{Z}$ $c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B)$.

2. *For all* $\nu \in \mathbb{N}$, $c_{2n\nu}(B) = c_{-2n\nu}(B)$.

3. *For all* $l \in [1:2m]$, *we have* $c_l(B) \neq 0$ *and*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{(2m+1)^{2r}}} \geqslant 0.$$

Then for any $u \in \widetilde{H}_2^r$,

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^2_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(2m+1)^r}\|u^{(r)}\|_2. \tag{2.11}$$

Proof. Because $\widetilde{H}_2^r$ is a subspace of $\widetilde{H}_0^r$, by Theorem 2, for every $u \in \widetilde{H}_2^r$, we have

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,2m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(2m+1)^r}\|u^{(r)}\|_2.$$

Since u satisfies the equality $u = u(\pi - \cdot)$, we can restrict the space $\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,2m}$ to a subspace of functions possessing this property. By Remark 2, we obtain that the desired subspace coincides with $\widetilde{\mathcal{S}}^2_{B,n,m}$. □

Remark 4. It follows easily that under the assumptions of Theorem 4 the space span $\{\Phi^e_{B,2l-1}\}_{l=1}^m$ is extremal for the set defined by interchanging the roles of k and l in H_2^r (or, equivalently, the symmetry conditions in $\widetilde{H}_2^r$).

Remark 5. Note that the conditions of Theorems 2–4 are invariant under the shift of B by $\frac{\pi}{2n}$.

Remark 6. Inequalities (2.8), (2.10), and (2.11) turn into equalities for the functions $x \mapsto \sin(m+1)x$, $x \mapsto \cos mx$ and $x \mapsto \sin(2m+1)x$, respectively.

The estimates from Theorems 2–4 can be strengthened in a standard way by replacing their right-hand sides with best approximations.

Corollary 2. *Let $B \in W_2^{(r)}$ under the assumptions of Theorem 2.*

1. *If r is even, then for any $u \in \widetilde{H}_0^r$,*

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B^{(r)},n,m}\big)_2.$$

2. *If r is odd, then for any $u \in \widetilde{H}_0^r$,*

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \operatorname{span}\{\Phi^e_{B^{(r)},l}\}_{l=1}^m\big)_2.$$

Proof. If r is even, denote by s an element of best approximation of the function $u^{(r)}$ by the space $\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B^{(r)},n,m}$. For odd r, let s be an element of best approximation of $u^{(r)}$ by the space $\operatorname{span}\{\Phi^e_{B^{(r)},l}\}_{l=1}^m$. Since $c_0(s) = 0$, the function s has 2π-periodic rth primitive, which we denote by s_r. For any $l \in [1:m]$,

$$\big(\Phi^o_{B,l}\big)^{(r)} = \begin{cases} \Phi^o_{B^{(r)},l}, & r \text{ is even}, \\ \Phi^e_{B^{(r)},l}, & r \text{ is odd}, \end{cases}$$

and hence $s_r \in \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}$. Applying Theorem 2 to the function $u - s_r$, we obtain

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}\big)_2 = E\big(u - s_r, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r}\|u^{(r)} - s\|_2 =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{(m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B^{(r)},n,m}\big)_2, & r \text{ is even}, \\ \frac{1}{(m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \operatorname{span}\{\Phi^e_{B^{(r)},l}\}_{l=1}^m\big)_2, & r \text{ is odd}. \end{cases}$$

□

The proof of the two following statements goes exactly the same way as in Corollary 2 and therefore is omitted.

Corollary 3. *Let $B \in W_2^{(r)}$ under the assumptions of Theorem 3.*

1. *If r is even, then for any $u \in \widetilde{H}_1^r$,*

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r} E\big(u^{(r)}, \operatorname{span}\{\Phi^e_{B^{(r)},l}\}_{l=1}^{m-1}\big)_2.$$

2. *If r is odd, then for any $u \in \widetilde{H}_1^r$,*

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r} E\big(u^{(r)}, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B^{(r)},n,m-1}\big)_2.$$

Corollary 4. *Let $B \in W_2^{(r)}$ under the assumptions of Theorem 4.*

1. *If r is even, then for any $u \in \widetilde{H}_2^r$,*

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^2_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(2m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \widetilde{\mathcal{S}}^2_{B^{(r)},n,m}\big)_2.$$

2. *If r is odd, then for any $u \in \widetilde{H}_2^r$,*

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^2_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(2m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \operatorname{span}\{\Phi^e_{B^{(r)},2l-1}\}_{l=1}^m\big)_2.$$

2.4. Examples

In the previous Chapter (Corollary 1.8) we gave an easily verifiable condition that is sufficient for the fulfillment of inequality (2.5) (and, consequently, the corresponding conditions of Theorems 2–4). Namely, inequality (2.5) holds for all functions B possessing the property

$$|l+2nk|^r |c_{l+2nk}(B)| \leqslant |l|^r |c_l(B)| \quad \text{для всех } |l| \in [1:m-1],\ k \in \mathbb{Z}.$$

In particular, all the functions with the Fourier coefficients of the form

$$c_k(B) = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}k} - 1}{i\frac{\pi}{n}k}\right)^{\mu+1} \eta_k, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+,\ \mu+1 \geqslant r,$$

where $|\eta_{l+2nk}| \leqslant |\eta_l|$ and $\eta_l \neq 0$ for $|l| < n$, satisfy this condition for all $m \leqslant n$. For $\eta_k = 1$ we get the B-spline. If η_k are the Fourier coefficients of the function $K \in L_1$, the function B is the Steklov average of order $\mu+1$ of K. For example, K can be the Poisson kernel ($\eta_k = e^{-\alpha|k|}$, $\alpha > 0$), the heat kernel ($\eta_k = e^{-\alpha k^2}$, $\alpha > 0$), the kernels of some differential operators ($\eta_k = \frac{1}{P(ik)}$, where P is a polynomial with only real roots), and the generalized Bernoulli kernel ($\eta_k = |k|^{-s} e^{-i\beta \operatorname{sign} k}$, $s > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$); in the latter two examples, η_0 is assumed to equal 1.

Taking the Dirichlet kernels of appropriate order as a function B in Theorems 2–4, we get the optimal subspaces of trigonometric polynomials (2.1).

Now we describe spline spaces arising from Theorems 2–4 and show that the results of [24] follow from these theorems.

Recall that for a given space of periodic functions with appropriate symmetry conditions, we denote the space of their restrictions to $[0,\pi]$ or to $[0,\pi/2]$ by the same letter but without tilde.

1. Replace n with $n+1$ in Theorem 2 and take $m = n$, $B = B_{n+1,d}$. Then our space $\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n+1,n}$ is the n-dimensional space of odd splines from $\mathbb{S}^\times_{B,n+1}$. Consider the space $Q_{d,1}$ of splines s which have knots $\left\{\frac{k\pi}{n+1}\right\}_{k=1}^n$ and satisfy the boundary conditions

$$s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < d, \quad k \text{ even}.$$

Its dimension equals n for d odd and equals $n+1$ for d even. So, for d odd, $\mathcal{S}^0_{B,n+1,n} = Q_{d,1} = S_{d,0}$.

For d even, $\mathcal{S}^0_{B,n+1,n}$ is an n-dimensional subspace of $Q_{d,1}$.

2. Replace n with $n+1$ in Theorem 2 and take $m = n$, $B = B_{n+1,d}\big(\cdot - \frac{\pi}{2(n+1)}\big)$. Then our space $\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n+1,n}$ is the n-dimensional space of odd splines from $\mathbb{S}^{\times}_{B,n+1}$. Consider the space $Q_{d,2}$ of splines s which have knots $\left\{\frac{k\pi}{n+1} + \frac{\pi}{2(n+1)}\right\}_{k=0}^{n}$ and satisfy the boundary conditions

$$s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d, \quad k \text{ even}.$$

Its dimension equals n for d even and equals $n+1$ for d odd. Note that 0 and π are not the knots. So, for d even we have $\mathcal{S}^0_{B,n+1,n} = Q_{d,2} = S_{d,0}$. For d odd, $\mathcal{S}^0_{B,n+1,n}$ is an n-dimensional subspace of $Q_{d,2}$.

3. Take $m = n$, $B = B_{n,d}$ in Theorem 3. Then our space $\widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,n}$ is the n-dimensional space of even splines from $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$. Consider the space $Q_{d,3}$ of splines s which have knots $\left\{\frac{k\pi}{n}\right\}_{k=1}^{n-1}$ and satisfy the boundary conditions

$$s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < d, \quad k \text{ odd}.$$

Its dimension equals n for d even and equals $n+1$ for d odd. So, for d even, $\mathcal{S}^1_{B,n,n} = Q_{d,3} = S_{d,1}$. For d odd, $\mathcal{S}^1_{B,n,n}$ is an n-dimensional subspace of $Q_{d,3}$.

4. Take $m = n$, $B = B_{n,d}\big(\cdot - \frac{\pi}{2n}\big)$ in Theorem 3. Then our space $\widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,n}$ is the n-dimensional space of even splines from $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$. Consider the space $Q_{d,4}$ of splines s which have knots $\left\{\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right\}_{k=0}^{n-1}$ and satisfy the boundary conditions

$$s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d, \quad k \text{ odd}.$$

Its dimension equals n for d odd and equals $n+1$ for d even. Note that 0 and π are not the knots. So, for d odd we have $\mathcal{S}^1_{B,n,n} = Q_{d,4} = S_{d,1}$. For d even, $\mathcal{S}^1_{B,n,n}$ is an n-dimensional subspace of $Q_{d,4}$.

5. Replace n with $2n+1$ in Theorem 4 and take $m = n$, $B = B_{2n+1,d}$. Consider the space $Q_{d,5}$ of splines s which have knots $\left\{\frac{k\pi}{2n+1}\right\}_{k=1}^{n}$ and satisfy the boundary conditions

$$s^{(k)}(0) = s^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leqslant k < d,\ 0 \leqslant l \leqslant d, \quad k \text{ even},\ l \text{ odd}.$$

Its dimension equals n for d odd and equals $n+1$ for d even. So, for d odd, $\mathcal{S}^2_{B,2n+1,n} = Q_{d,5} = S_{d,2}$. For d even, $\mathcal{S}^2_{B,2n+1,n}$ is an n-dimensional subspace of $Q_{d,5}$.

6. Replace n with $2n+1$ in Theorem 4 and take $m = n$, $B = B_{2n+1,d}\big(\cdot - \frac{\pi}{2(2n+1)}\big)$. Consider the space $Q_{d,6}$ of splines s which have knots $\left\{\frac{k\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2(2n+1)}\right\}_{k=0}^{n-1}$ and satisfy the boundary conditions

$$s^{(k)}(0) = s^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d,\ 0 \leqslant l < d, \quad k \text{ even},\ l \text{ odd}.$$

Its dimension equals n for d even and equals $n+1$ for d odd. So, for d even, $\mathcal{S}^2_{B,2n+1,n} = Q_{d,6} = S_{d,2}$. For d odd, $\mathcal{S}^2_{B,2n+1,n}$ is an n-dimensional subspace of $Q_{d,6}$.

Taking other values of m and n and taking the B-spline (shifted or not) as a function B in

Theorems 2–4 we get new families of optimal spline subspaces with equidistant knots.

Chapter 3.

Approximation of classes of convolutions by spaces of shifts on the axis

3.1. Introduction

In this chapter, we prove a variety of sharp inequalities for mean square approximation of certain functional classes by spaces of shifts on the axis. In particular, we obtain conditions that are necessary and sufficient for the fulfillment of the inequality

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,\sigma}\big)_2 \leqslant \widehat{G}^*(\sigma)\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

that is sharp on the class of functions f representable in the form $G * \varphi$, $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, where $G \in L_1(\mathbb{R})$. Here $\widehat{G}^*$ is a symmetrically decreasing rearrangement of $|\widehat{G}|$. In addition, we obtain a criteria of optimality of spaces of shifts in terms of average widths, which means that the constant in the inequality for best approximation cannot be decreased by passing to another approximating subspace of the same average dimension. In particular, we calculate the value of average width for the class of functions under consideration. Thus we not only indicate a wide set of optimal approximating subspaces, but also give a complete description of extremal subspaces that are generated by equidistant shifts of a single function.

The method of proving is based on constructing a continual analog of decomposition over bases in spaces of shifts and using it to find an explicit expression for best approximation, which allows us to apply a technique used in Chapter 1.

The results of the chapter are published in [37] and [19].

3.2. Fourier analysis in spaces of shifts

Let $\sigma > 0$, $B \in L_2(\mathbb{R})$ and consider the functions

$$\Phi_{B,\sigma}(x,y) = \frac{1}{2\sigma} \sum_{j\in\mathbb{Z}} B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right) e^{i\frac{j\pi}{\sigma}y}, \tag{3.1}$$

$$D_{B,\sigma}(y) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{B}(y + 2\nu\sigma)\right|^2. \tag{3.2}$$

The definition of $\Phi_{B,\sigma}$ is correct since for a.e. $x \in \mathbb{R}$ the series on the right-hand side of (3.1) converges in $L_2[-\sigma,\sigma]$.

Let us mention some properties of the functions $\Phi_{B,\sigma}$. Note that they are quite similar to the properties of the Zak transform (see, for example, [27, §8.2]).

Φ1. $\Phi_{B,\sigma} \in L_2\left(\left[0,\frac{\pi}{\sigma}\right] \times [-\sigma,\sigma]\right)$ *and*

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \int_{-\sigma}^{\sigma} |\Phi_{B,\sigma}(x,y)|^2 \, dy \, dx = \frac{1}{2\sigma} \|B\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Proof. Since $\left\{B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$ for a.e. $x \in \mathbb{R}$, we get $\Phi_{B,\sigma}(x,\cdot) \in L_2[-\sigma,\sigma]$ for a.e. x. Furthermore, by Parseval's equality, we have

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} |\Phi_{B,\sigma}(x,y)|^2 \, dy = \frac{1}{2\sigma} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right|^2.$$

This yields

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \int_{-\sigma}^{\sigma} |\Phi_{B,\sigma}(x,y)|^2 \, dy \, dx = \frac{1}{2\sigma} \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right|^2 dx = \frac{1}{2\sigma} \|B\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

□

Φ2. *The following relations hold:*

$$\Phi_{B,\sigma}(x, y + 2\sigma) = \Phi_{B,\sigma}(x,y), \quad \Phi_{B,\sigma}\left(x + \frac{\pi}{\sigma}, y\right) = e^{i\frac{\pi}{\sigma}y} \Phi_{B,\sigma}(x,y),$$
$$\overline{\Phi_{B,\sigma}(x,y)} = \Phi_{B,\sigma}(x,-y).$$

This property is clear. Moreover, it implies that the function $\Phi_{B,\sigma}$ is completely defined by its values on $\left[0,\frac{\pi}{\sigma}\right] \times [-\sigma,\sigma]$.

Φ3. *In* $L_2\left(\left[0,\frac{\pi}{\sigma}\right] \times [-\sigma,\sigma]\right)$, *we have*

$$\Phi_{B,\sigma}(x,y) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{B}(y + 2\nu\sigma) e^{i(y+2\nu\sigma)x}. \tag{3.3}$$

Proof. First we point out that one can obtain the equality

$$\int_{-\sigma}^{\sigma}\int_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{B}(y+2\nu\sigma)e^{i(y+2\nu\sigma)x}\right|^2 dx\,dy=\frac{1}{2\sigma}\|B\|^2_{L_2(\mathbb{R})}, \tag{3.4}$$

using the same argument as in the proof of Φ1. Indeed, since $\left\{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)\right\}_{\nu\in\mathbb{Z}}\in\ell_2(\mathbb{Z})$ for a.e. $y\in\mathbb{R}$, by Parseval's equality, we have for a.e. $y\in\mathbb{R}$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{B}(y+2\nu\sigma)e^{i(y+2\nu\sigma)x}\right|^2 dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{B}(y+2\nu\sigma)e^{2i\nu\sigma x}\right|^2 dx=\frac{\pi}{\sigma}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{B}(y+2\nu\sigma)\right|^2.$$

Therefore,

$$\int_{-\sigma}^{\sigma}\int_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{B}(y+2\nu\sigma)e^{i(y+2\nu\sigma)x}\right|^2 dx\,dy=\frac{\pi}{\sigma}\int_{-\sigma}^{\sigma}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{B}(y+2\nu\sigma)\right|^2 dy=$$
$$=\frac{\pi}{\sigma}\|\widehat{B}\|^2_{L_2(\mathbb{R})}=\frac{1}{2\sigma}\|B\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Let $B_n\in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$, $B_n\to B$ in $L_2(\mathbb{R})$. For a.e. $x,y\in\mathbb{R}$ put

$$g_n(t)=e^{iyt}B_n(x-t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Then $g_n\in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$,

$$\widehat{g_n}(\xi)=e^{i(y-\xi)x}\widehat{B_n}(y-\xi),\quad \xi\in\mathbb{R},$$

and the Poisson summation formula yields

$$\Phi_{B_n,\sigma}(x,y)=\frac{1}{2\sigma}\sum_{j\in\mathbb{Z}}g_n\left(j\frac{\pi}{\sigma}\right)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{g_n}(2j\sigma)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{B_n}(y+2j\sigma)e^{i(y+2j\sigma)x}.$$

Using property Φ1 and identity (3.4), by passing to the limit as $n\to\infty$, we get the required assertion. □

Recall that a set $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ of elements of a Hilbert space $\mathcal{H}$ is called *a Riesz system* with constants $A,B>0$ if for any $\beta\in\ell_2(\mathbb{Z})$ the series $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}\beta_jf_j$ converges in $\mathcal{H}$ and

$$A_1\|\beta\|^2_{\ell_2(\mathbb{Z})}\leqslant\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\beta_jf_j\right\|^2_{\mathcal{H}}\leqslant A_2\|\beta\|^2_{\ell_2(\mathbb{Z})}. \tag{3.5}$$

If we assume that only the right-hand inequality in (3.5) holds, then $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ is said to be *a Bessel system.*

Remark 1 ([36, Theorem 1.1.6]). Let $B\in L_2(\mathbb{R})$. The functions $\left\{B\left(\cdot-\frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ form a Riez system in $L_2(\mathbb{R})$ with constants A_1, A_2 if and only if for almost every $y \in (-\sigma, \sigma)$ the inequality

$$A_1 \leqslant \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{B}(y + 2\nu\sigma) \right|^2 \leqslant A_2,$$

holds, i.e. the functions $D_{B,\sigma}$ and $\dfrac{1}{D_{B,\sigma}}$ belong to $L_\infty[-\sigma, \sigma]$.

Φ4. *Let $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ be a Bessel system in $L_2(\mathbb{R})$. Then the following equality holds*

$$\int_{\mathbb{R}} B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\, dt = 2\pi D_{B,\sigma}(y), \tag{3.6}$$

(convergence of the integral on the left-hand side of (1.4) is interpreted in $L_2[-\sigma, \sigma]$).

Proof. Indeed, for $n \in \mathbb{N}$, by formulas (3.3), (3.2), we have

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int_{-n}^{n} B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\, dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y) \right|^2 dy =$$

$$= \int_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int_{-n}^{n} B(t)\overline{\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{B}(y+2\nu\sigma)e^{i(y+2\nu\sigma)t}}\, dt - 2\pi \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{B}(y+2\nu\sigma)\right|^2 \right|^2 dy =$$

$$= 4\pi^2 \int_{-\sigma}^{\sigma} \left| \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} B(t)e^{-i(y+2\nu\sigma)t}\, dt - \widehat{B}(y+2\nu\sigma) \right) \right|^2 dy.$$

Termwise inner multiplication in the second equation is valid since series (3.3) converges in $L_2[-n, n]$ with respect to x. This implies by Cauchy–Schwarz inequality

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int_{-n}^{n} B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\, dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y) \right|^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi^2 \int_{-\sigma}^{\sigma} \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{B}(y+2\nu\sigma)|^2 \right) \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} B(t)e^{-i(y+2\nu\sigma)t}\, dt - \widehat{B}(y+2\nu\sigma) \right|^2 \right) dy \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi^2 \|D_{B,\sigma}\|_{L_\infty[-\sigma,\sigma]} \int_{-\sigma}^{\sigma} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} B(t)e^{-i(y+2\nu\sigma)t}\, dt - \widehat{B}(y+2\nu\sigma) \right|^2 dy =$$

$$= 4\pi^2 \|D_{B,\sigma}\|_{L_\infty[-\sigma,\sigma]} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} B(t)e^{-iyt}\, dt - \widehat{B}(y) \right|^2 dy \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Finiteness of the value $\|D_{B,\sigma}\|_{L_\infty[-\sigma,\sigma]}$ is ensured by Remark 1. □

Denote by $\mathbb{S}_{B,\sigma}$ the space of functions s defined on $\mathbb{R}$ and representable in the form

$$s(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right), \quad \beta \in \ell_2(\mathbb{Z}). \tag{3.7}$$

Remark 2. If the functions $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ form a Riez system in $L_2(\mathbb{R})$, then for every function s of the form

$$s(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right)$$

the inclusions $s \in L_2(\mathbb{R})$ and $\beta \in \ell_2(\mathbb{Z})$ are equivalent. In this case $\mathbb{S}_{B,\sigma}$ is a subspace $L_2(\mathbb{R})$.

For $0 < \rho < \sigma$, let $\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ be the space of functions s in $\mathbb{S}_{B,\sigma}$ that can be represented as (3.7) with the additional condition

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j e^{-i\frac{j\pi}{\sigma}y} = 0 \quad \text{for almost all} \quad \rho < |y| \leqslant \sigma$$

(convergence of the series is interpreted in $L_2[-\sigma,\sigma]$). When $\rho = \sigma$ by $\mathbb{S}_{B,\sigma,\sigma}$ we mean $\mathbb{S}_{B,\sigma}$.

Remark 3. If the functions $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ form a Riez system in $L_2(\mathbb{R})$, then for every $0 < \rho \leqslant \sigma$ the spaces $\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ are closed in $L_2(\mathbb{R})$ (see., for example, [36, Theorem 1.1.2]).

Let $s \in \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ be the function of the form (3.7). Put

$$\zeta_{B,\sigma}(s,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_j e^{-i\frac{j\pi}{\sigma}y}.$$

Clearly, $\zeta_{B,\sigma}(s) \in L_2[-\sigma,\sigma]$. Furthermore, $\zeta_{B,\sigma}(s,y) = 0$ for a.e. $\rho < |y| \leqslant \sigma$. This implies, by Parseval's equality for product of two functions, the following representation of s:

$$s(x) = \int_{-\rho}^{\rho} \zeta_{B,\sigma}(s,y)\Phi_{B,\sigma}(x,y)\,dy. \tag{3.8}$$

Conversely, if the function s is defined by

$$s(x) = \int_{-\rho}^{\rho} \zeta(y)\Phi_{B,\sigma}(x,y)\,dy$$

for some $\zeta \in L_2[-\rho,\rho]$, then $s \in \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ and it admits representation (3.7) with coefficients

$$\beta_j = \frac{1}{2\sigma}\int_{-\rho}^{\rho} \zeta(y) e^{i\frac{j\pi}{\sigma}y}\,dy, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

If B is the B-spline

$$B_{\sigma,m}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{\sigma}y} - 1}{i\frac{\pi}{\sigma}y} \right)^{m+1} e^{ixy}\, dy,$$

we find that $\mathbb{S}_{B,\sigma}$ coincides with the space of splines $\mathbf{S}_{\sigma,\mu}$. The corresponding functions $\Phi_{B,\sigma}$ were introduced by Schoenberg (see [35]) and are called *exponential splines.*

In general situation under consideration formula (3.8) is a continual analog of decomposition over orthogonal bases in finite dimensional spaces of shifts of periodic functions (see Chapter 1).

Remark 4. It is known (see. [36, Proposition 1.1.9]) that $s \in \mathbb{S}_{B,\sigma}$ if and only if the Fourier transform of s if of the form $\widehat{s}(y) = \widehat{B}(y)\zeta_{B,\sigma}(s, y)$ for some $\zeta_{B,\sigma}(s) \in L_2[-\sigma, \sigma]$. By the definition of the space $\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$, the inclusion $s \in \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ is equivalent to the fact that the Fourier transform of s is of the form $\widehat{s}(y) = \widehat{B}(y)\zeta_{B,\sigma}(s, y)$, where $\zeta_{B,\sigma}(s) \in L_2[-\sigma, \sigma]$, $\zeta_{B,\sigma}(s, y) = 0$ for almost every $\rho < |y| \leqslant \sigma$.

Further we assume that the functions $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ form the Riez system in $L_2(\mathbb{R})$.

Let $\mathbb{S}^1_{B,\sigma,\rho}$ be the space of functions $s \in \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ for which in representation (3.7) we have $\beta \in \ell_1(\mathbb{Z})$. Obviously, $\mathbb{S}^1_{B,\sigma,\rho}$ is dense in $\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$.

Lemma 1. *If $s \in \mathbb{S}^1_{B,\sigma,\rho}$, then*

$$\zeta_{B,\sigma}(s, y) = \frac{1}{2\pi D_{B,\sigma}(y)} \int\limits_{\mathbb{R}} s(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t, y)}\, dt, \tag{3.9}$$

where convergence of the integral on the right-hand side is interpreted in $L_2[-\sigma, \sigma]$.

Proof. First we note that for every $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, the following inequality holds:

$$\left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int\limits_a^b B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t, y)}\, dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y) \right|^2 dy \right)^{1/2} \leqslant \sqrt{2\pi}\|D_{B,\sigma}\|^{1/2}_{L_\infty[-\sigma,\sigma]}\|B\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Indeed, similarly to the proof of the proposition Φ4, we obtain the estimate

$$\left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int\limits_a^b B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t, y)}\, dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y) \right|^2 dy \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\|D_{B,\sigma}\|^{1/2}_{L_\infty[-\sigma,\sigma]} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_a^b B(t)e^{-iyt}\, dt - \widehat{B}(y) \right|^2 dy \right)^{1/2},$$

which implies the required inequality by Parseval's identity.

For $n \in \mathbb{N}$, by formulas (3.7), (3.6), property $\Phi 2$, and Minkowski inequality, we get

$$\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}\left|\int_{-n}^{n} s(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y)\zeta_{B,\sigma}(s,y)\right|^2 dy\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_{-\sigma}^{\sigma}\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\beta_j\int_{-n}^{n} B\left(t-\frac{j\pi}{\sigma}\right)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y)\zeta_{B,\sigma}(s,y)\right|^2 dy\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_{-\sigma}^{\sigma}\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\beta_j\int_{-n-\frac{j\pi}{\sigma}}^{n-\frac{j\pi}{\sigma}} B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}\left(t+\frac{j\pi}{\sigma},y\right)}\,dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y)\zeta_{B,\sigma}(s,y)\right|^2 dy\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_{-\sigma}^{\sigma}\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\beta_j e^{-i\frac{j\pi}{\sigma}y}\left(\int_{-n-\frac{j\pi}{\sigma}}^{n-\frac{j\pi}{\sigma}} B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y)\right)\right|^2 dy\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}|\beta_j|\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}\left|\int_{-n-\frac{j\pi}{\sigma}}^{n-\frac{j\pi}{\sigma}} B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y)\right|^2 dy\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Termwise passing to the limit is valid, because for every $j \in \mathbb{Z}$ the expression in brackets tends to 0 by property $\Phi 4$, while summability of β and the remark at the beginning of the proof provide the estimate

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\beta_j|\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}\left|\int_{-n-\frac{j\pi}{\sigma}}^{n-\frac{j\pi}{\sigma}} B(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt - 2\pi D_{B,\sigma}(y)\right|^2 dy\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2\pi}\|D_{B,\sigma}\|^{1/2}_{L_\infty[-\sigma,\sigma]}\|B\|_{L_2(\mathbb{R})}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\beta_j| < \infty.$$

Term-by-term integration over a finite interval is valid since for every $n \in \mathbb{N}$ we have

$$\int_{-n}^{n}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\beta_j|\left|B\left(t-\frac{j\pi}{\sigma}\right)\right|\left|\Phi_{B,\sigma}(t,y)\right|\,dt = \sum_{j\in\mathbb{Z}}|\beta_j|\int_{-n}^{n}\left|B\left(t-\frac{j\pi}{\sigma}\right)\right|\left|\Phi_{B,\sigma}(t,y)\right|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}|\beta_j|\left(\int_{-n}^{n}\left|B\left(t-\frac{j\pi}{\sigma}\right)\right|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_{-n}^{n}|\Phi_{B,\sigma}(t,y)|^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \|B\|_{L_2(\mathbb{R})}\left(\int_{-n}^{n}|\Phi_{B,\sigma}(t,y)|^2\,dt\right)^{1/2}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\beta_j| < \infty.$$

$\square$

The following theorem is an analog of the Plancherel theorem for elements of spaces of shifts.

Lemma 2. *If $S, s \in \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$, then*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |s(x)|^2 dx = 2\pi \int\limits_{-\rho}^{\rho} |\zeta_{B,\sigma}(s,y)|^2 \, D_{B,\sigma}(y)\, dy, \tag{3.10}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} S(x)\overline{s(x)}\, dx = 2\pi \int\limits_{-\rho}^{\rho} \zeta_{B,\sigma}(S,y)\overline{\zeta_{B,\sigma}(s,y)} D_{B,\sigma}(y)\, dy. \tag{3.11}$$

Proof. Let us prove (3.10). It suffices to check the equality for $s \in \mathbb{S}^1_{B,\sigma,\rho}$; it will hold for $s \in \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ by continuity.

Using (3.8) and (3.9), we derive to

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |s(x)|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}} s(x)\overline{s(x)}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \overline{s(x)} \int\limits_{-\rho}^{\rho} \zeta_{B,\sigma}(s,y)\Phi_{B,\sigma}(x,y)\, dy\, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\rho}^{\rho} \zeta_{B,\sigma}(s,y) \int\limits_{-n}^{n} \overline{s(x)}\Phi_{B,\sigma}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\rho}^{\rho} \zeta_{B,\sigma}(s,y) \overline{\int\limits_{-n}^{n} s(x)\overline{\Phi_{B,\sigma}(x,y)}\, dx}\, dy = 2\pi \int\limits_{-\rho}^{\rho} |\zeta_{B,\sigma}(s,y)|^2 \, D_{B,\sigma}(y)\, dy.$$

Passage to the limit under the integral sign is valid by Lemma 1.

Interchanging the order of integration is justified since for any $n \in \mathbb{N}$ the function

$$(x,y) \mapsto \overline{s(x)}\zeta_{B,\sigma}(s,y)\Phi_{B,\sigma}(x,y)$$

is integrable on $[-n,n] \times [-\sigma,\sigma]$. Indeed,

$$\int\limits_{-n}^{n} |s(x)| \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\zeta_{B,\sigma}(s,y)|\, |\Phi_{B,\sigma}(x,y)|\, dy\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\zeta_{B,\sigma}(s,y)|^2 dy \right)^{1/2} \int\limits_{-n}^{n} |s(x)| \left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\Phi_{B,\sigma}(x,y)|^2 \, dy \right)^{1/2} dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\zeta_{B,\sigma}(s,y)|^2 dy \right)^{1/2} \left(\int\limits_{-n}^{n} |s(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_{-n}^{n}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\Phi_{B,\sigma}(x,y)|^2 dy\, dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Formula (3.11) is derived from (3.10) in a standard way. □

The Fourier transform and the partial Fourier integral of the function $f \in L_2(\mathbb{R})$ with respect to the system $\Phi_{B,\sigma}$ are defined as follows:

$$\zeta_{B,\sigma}(f,y) = \frac{1}{2\pi D_{B,\sigma}(y)} \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt, \tag{3.12}$$

$$J_{B,\sigma,\rho}(f,x) = \int\limits_{-\rho}^{\rho} \zeta_{B,\sigma}(f,y)\Phi_{B,\sigma}(x,y)\,dy, \quad 0<\rho\leqslant\sigma.$$

Let us show that the integral on the right-hand side of (3.12) converges in $L_2[-\sigma,\sigma]$. It suffices to prove that the sequence

$$\left\{ y \mapsto \int\limits_{-n}^{n} f(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt \right\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{3.13}$$

is a Cauchy sequence in $L_2[-\sigma,\sigma]$. Take $\varepsilon>0$. Since the sequence

$$\left\{ y \mapsto \int\limits_{-n}^{n} f(t)e^{-iyt}\,dt \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

is convergent in $L_2(\mathbb{R})$, there exists such number $N\in\mathbb{N}$ that for every $n,k\in\mathbb{N}$, $n>k>N$, the following inequality holds:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_{[-n,n]\setminus[-k,k]} f(t)e^{-iyt}\,dt \right|^2 dy < \frac{\varepsilon}{\|D_{B,\sigma}\|_{L_\infty[-\sigma,\sigma]}}.$$

Therefore, for such n and k, we have the estimate

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int\limits_{-n}^{n} f(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt - \int\limits_{-k}^{k} f(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt \right|^2 dy = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int\limits_{[-n,n]\setminus[-k,k]} f(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt \right|^2 dy =$$

$$= \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left| \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)} \int\limits_{[-n,n]\setminus[-k,k]} f(t)e^{-i(y+2\nu\sigma)t}\,dt \right|^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant \|D_{B,\sigma}\|_{L_\infty[-\sigma,\sigma]} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \left| \int\limits_{[-n,n]\setminus[-k,k]} f(t)e^{-i(y+2\nu\sigma)t}\,dt \right|^2 \right) dy =$$

$$= \|D_{B,\sigma}\|_{L_\infty[-\sigma,\sigma]} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_{[-n,n]\setminus[-k,k]} f(t)e^{-iyt}\,dt \right|^2 dy < \varepsilon.$$

This means that (3.13) is a Cauchy sequence in $L_2[-\sigma,\sigma]$.

Since $1/D_{B,\sigma}\in L_\infty[-\sigma,\sigma]$, we get $\zeta_{B,\sigma}(f)\in L_2[-\sigma,\sigma]$, which implies $J_{B,\sigma,\rho}(f)\in\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$ and, in particular, $J_{B,\sigma,\rho}(f)\in L_2(\mathbb{R})$.

Furthermore, for $f \in L_2(\mathbb{R})$ and $s \in \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$, by formulas (3.8) and (3.12), we obtain

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{s(t)}\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(t)\overline{s(t)}\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(t)\int_{-\rho}^{\rho}\overline{\zeta_{B,\sigma}(s,y)\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dy\,dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho}\overline{\zeta_{B,\sigma}(s,y)}\int_{-n}^{n} f(t)\overline{\Phi_{B,\sigma}(t,y)}\,dt\,dy = 2\pi\int_{-\rho}^{\rho}\overline{\zeta_{B,\sigma}(s,y)}\zeta_{B,\sigma}(f,y)D_{B,\sigma}(y)\,dy,$$

while the equality (3.11) yields

$$\int_{\mathbb{R}} J_{B,\sigma,\rho}(f,t)\overline{s(t)}\,dt = 2\pi\int_{-\rho}^{\rho}\overline{\zeta_{B,\sigma}(s,y)}\zeta_{B,\sigma}(f,y)D_{B,\sigma}(y)\,dy.$$

This implies that $f - J_{B,\sigma,\rho}(f) \perp \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$, i.e., that $J_{B,\sigma,\rho}(f)$ is an orthogonal projection of f on $\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$. In addition,

$$2\pi\int_{-\rho}^{\rho}|\zeta_{B,\sigma}(f,y)|^2 D_{B,\sigma}(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}}|J_{B,\sigma,\rho}(f,x)|^2\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2\,dx. \tag{3.14}$$

Now we provide an explicit expression of the new Fourier transform and best approximation by spaces of shifts in terms of trigonometric Fourier transform.

Lemma 3. *If $f \in L_2(\mathbb{R})$, then*

$$\zeta_{B,\sigma}(f) = \frac{1}{D_{B,\sigma}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{B}(\cdot+2k\sigma)}\widehat{f}(\cdot+2k\sigma) \quad \text{в} \quad L_2[-\sigma,\sigma], \tag{3.15}$$

$$E^2(f,\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho})_2 = 2\pi\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}(y)\right|^2 dy - \int_{-\rho}^{\rho}\frac{1}{D_{B,\sigma}(y)}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{B}(y+2k\sigma)}\widehat{f}(y+2k\sigma)\right|^2 dy\right). \tag{3.16}$$

Proof. By formulas (3.12), (3.3) and the Cauchy–Schwarz inequality, we have

$$\int_{-\sigma}^{\sigma}\left|\zeta_{B,\sigma}(f,y) - \frac{1}{D_{B,\sigma}(y)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{B}(y+2k\sigma)}\widehat{f}(y+2k\sigma)\right|^2 dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-\sigma}^{\sigma}\left|\frac{1}{D_{B,\sigma}(y)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{B}(y+2k\sigma)}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} f(t)e^{-i(y+2k\sigma)t}dt - \widehat{f}(y+2k\sigma)\right)\right|^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\int_{-\sigma}^{\sigma}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} f(t)e^{-i(y+2k\sigma)t}dt - \widehat{f}(y+2k\sigma)\right|^2 dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} f(t)e^{-iyt}dt - \widehat{f}(y)\right|^2 dy = 0.$$

Using properties of orthogonal projection, we get

$$E^2(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho})_2 = \|f - J_{B,\sigma,\rho} f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})} - \|J_{B,\sigma,\rho} f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

This implies, by the Plancherel theorem and formulas (3.14) and (3.15), the following equality:

$$E^2(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho})_2 = 2\pi \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(y)\right|^2 dy - 2\pi \int\limits_{-\rho}^{\rho} |\zeta_{B,\sigma}(f,y)|^2 \, D_{B,\sigma}(y)\, dy =$$

$$= 2\pi \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(y)\right|^2 dy - \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{1}{D_{B,\sigma}(y)} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2k\sigma)} \widehat{f}(y+2k\sigma) \right|^2 dy \right).$$

$\square$

Note that particular case of Fourier analysis in spline spaces was developed by Vinogradov in [3] and was used to obtain sharp in Jackson's inequality.

3.3. Main results

Given a complex-valued function γ defined almost everywhere on $\mathbb{R}$, denote by T_γ the set of functions $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$for which the product $\gamma\widehat{\varphi}$ also belongs to $L_2(\mathbb{R})$. Next, denote by $\mathfrak{F}_\gamma$ the space of functions f whose Fourier transform has the form

$$\widehat{f} = \gamma\widehat{\varphi}, \quad \varphi \in T_\gamma. \tag{3.17}$$

By definition, $\mathfrak{F}_\gamma$ is a subspace of $L_2(\mathbb{R})$.

Note the two particular cases of $\mathfrak{F}_\gamma$.

1. If γ is the Fourier transform of some $G \in L_1(\mathbb{R})$, then $\mathfrak{F}_\gamma$ is the class of convolutions with kernel G. In this case, T_γ is the whole $L_2(\mathbb{R})$.

2. If $\gamma(y) = \frac{1}{(iy)^r}$, $r \geqslant 1$, then $\mathfrak{F}_\gamma$ is the Sobolev space $W_2^{(r)}(\mathbb{R})$. In this case, T_γ consists of the rth derivatives of functions in $W_2^{(r)}(\mathbb{R})$.

Observe that, in what follows, r need not be integer unless specified otherwise. Recall in this connection that the Weyl fractional derivative of f is defined in terms of the Fourier transform:

$$\widehat{f^{(r)}}(y) = (iy)^r \widehat{f}(y).$$

Let A be a subset in $\mathbb{R}$ of finite Lebesgue measure. The symmetrization of A is the interval $A^* = \left(-\frac{\operatorname{mes} A}{2}, \frac{\operatorname{mes} A}{2}\right)$.

Given a real- or complex-valued function f on $\mathbb{R}$ with $f(x) \to 0$ as $x \to \infty$, denote by f^* the symmetrically decreasing rearrangement of $|f|$, i.e.

$$f^*(x) = \int_0^\infty \chi_{\{x\in\mathbb{R}\colon |f(x)|>t\}^*}(t)\,dt.$$

Note that if f is continuous then so is f^*.

Theorem 1. *Suppose that $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$, the set $Q \subset \mathbb{R}$ is empty or finite, and the functions $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ constitute a Riesz system for $L_2(\mathbb{R})$. Suppose also that $\gamma\colon \mathbb{R}\setminus Q \to \mathbb{C}$ satisfies the conditions:*

- *γ is continuous on $\mathbb{R}\setminus Q$, $\quad\gamma(y)\to 0$ as $y\to\infty$;*
- *$|\gamma(y)|\to\infty$ as $y\to q$ for all $q\in Q$.*

Then the following statements are equivalent.

1. *For every function $f\in\mathfrak{F}_\gamma$ of the form* (3.17) *the following inequality holds:*

$$E\big(f,\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \gamma^*(\rho)\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{3.18}$$

2. *The functions $\widehat{B}$ and γ satisfy the following conditions.*

   2.1. *For almost every $y\in(-\sigma,\sigma)\setminus(-\rho,\rho)$ and all $k\in\mathbb{Z}$, the inequality $|\gamma(y+2k\sigma)|\leqslant\gamma^*(\rho)$ holds.*

   2.2. *For almost all $y\in(-\rho,\rho)$ there exists at most one number $k_y\in\mathbb{Z}$ for which we have $|\gamma(y+2k_y\sigma)|>\gamma^*(\rho)$. Moreover, whenever such a number k_y exists, the following conditions are satisfied.*

   2.2.1. *$\widehat{B}(y+2k_y\sigma)\neq 0$.*

   2.2.2. *For every $k\in\mathbb{Z}$ the equality $|\gamma(y+2k\sigma)|=\gamma^*(\rho)$ implies $\widehat{B}(y+2k\sigma)=0$.*

   2.2.3.

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |\gamma(y+2k\sigma)|\neq\gamma^*(\rho)}} \frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2-(\gamma^*(\rho))^2}\geqslant 0.$$

The constant $\gamma^*(\rho)$ on the right-hand side of inequality (3.18) *is sharp.*

Proof. In view of (3.16) and (3.17), we can rewrite inequality (3.18) as

$$\int_{\mathbb{R}} |\gamma(y)|^2|\widehat{\varphi}(y)|^2dy - \int_{-\rho}^{\rho}\frac{1}{D_{B,\sigma}(y)}\left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)}\gamma(y+2\nu\sigma)\widehat{\varphi}(y+2\nu\sigma)\right|^2dy \leqslant$$
$$\leqslant (\gamma^*(\rho))^2\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\varphi}(y)|^2dy.$$

This shows that for the fulfillment of this inequality, it is necessary that, for almost all $y \in (-\rho, \rho)$ the inequality $|\gamma(y+2\nu_y\sigma)| > \gamma^*(\rho)$ holding for some $\nu_y \in \mathbb{Z}$ implies that $\widehat{B}(y+2\nu_y\sigma) \neq 0$. Indeed, suppose that there exists $A \subset (-\rho, \rho)$ with mes $A > 0$ such that for every y there is $\nu_y \in \mathbb{Z}$ for which $|\gamma(y+2\nu_y\sigma)| > \gamma^*(\rho)$ but $\widehat{B}(y+2\nu_y\sigma) = 0$. Given $\varepsilon > 0$, we put

$$Q_\varepsilon = \begin{cases} \varnothing, & Q = \varnothing, \\ \bigcup\limits_{q \in Q} (q-\varepsilon, q+\varepsilon), & Q \neq \varnothing. \end{cases}$$

Then, for some $\varepsilon > 0$ the set $A \setminus Q_\varepsilon$ satisfies the same conditions as A. Furthermore, if $\widehat{\varphi} = \chi_{A \setminus Q_\varepsilon}$, then $\varphi \in T_\gamma$, and, hence, the desired inequality fails for $\widehat{\varphi} = \chi_{A \setminus Q_\varepsilon}$.

Representing the integral over $\mathbb{R}$ as the sum of integrals over intervals of length 2σ, rewrite the inequality as

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma(y+2k\sigma)|^2 |\widehat{\varphi}(y+2k\sigma)|^2 dy -$$
$$- \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{1}{D_{B,\sigma}(y)} \left| \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)} \gamma(y+2\nu\sigma) \widehat{\varphi}(y+2\nu\sigma) \right|^2 dy \leqslant$$
$$\leqslant (\gamma^*(\rho))^2 \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(y+2k\sigma)|^2 dy.$$

The last inequality is equivalent to the system

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma(y+2k\sigma)|^2 |\widehat{\varphi}(y+2k\sigma)|^2 \leqslant (\gamma^*(\rho))^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(y+2k\sigma)|^2,$$
$$\text{for a.e. } y \in (-\sigma, \sigma) \setminus (-\rho, \rho),$$
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma(y+2k\sigma)|^2 |\widehat{\varphi}(y+2k\sigma)|^2 - \frac{1}{D_{B,\sigma}(y)} \left| \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)} \gamma(y+2\nu\sigma) \widehat{\varphi}(y+2\nu\sigma) \right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (\gamma^*(\rho))^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(y+2k\sigma)|^2 \quad \text{for a.e. } y \in (-\rho, \rho).$$

Indeed, the system obviously implies (3.18). Conversely, suppose that (3.18) holds but at least one of the inequalities of the system is violated; i.e., there exists $A \subset (-\sigma, \sigma)$ with $\operatorname{mes} A > 0$, such that for all $y \in A$ some of the inequalities of the system fails. As above, we conclude that the same holds for $A \setminus Q_\varepsilon$ for some $\varepsilon > 0$ and for $\widehat{\varphi} = \chi_{A \setminus Q_\varepsilon}$ we have $\varphi \in T_\gamma$, and then (3.18) fails for $\widehat{\varphi} = \chi_{A \setminus Q_\varepsilon}$.

Using analogous considerations, we conclude that the first inequality in the system holds if and only if condition 2.1 is fulfilled. The second inequality is obvious for those $y \in (-\rho, \rho)$ for which $|\gamma(y+2k\sigma)| \leqslant \gamma^*(\rho)$ for all $k \in \mathbb{Z}$. Therefore, henceforth we will consider only those $y \in (-\rho, \rho)$ for which $|\gamma(y+2k\sigma)| > \gamma^*(\rho)$ for at least one k. Moreover, we may assume that $y + 2k\sigma \notin Q$ for no $k \in \mathbb{Z}$. Then $\{\widehat{\varphi}(y+2k\sigma)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ can be any element $\ell_2(\mathbb{Z})$. In this case, the desired inequality is equivalent to the fact that the quadratic form

$$\langle A_y u, u\rangle_{\ell_2(\mathbb{Z})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(|\gamma(y+2k\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2\right)|u_k|^2 - \\ - \frac{1}{D_{B,\sigma}(y)} \left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)}\gamma(y+2\nu\sigma)u_\nu\right|^2$$

is nonpositive. Here $u \in \ell_2(\mathbb{Z})$ and the operator $A_y\colon \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$ is defined by the formula

$$(A_y u)_k = \left(|\gamma(y+2k\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2\right)u_k - \\ - \frac{\widehat{B}(y+2k\sigma)\overline{\gamma(y+2k\sigma)}}{D_{B,\sigma}(y)} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)}\gamma(y+2\nu\sigma)u_\nu.$$

Since A_y is compact, the nonpositivity of the quadratic form of A_y is equivalent to the nonpositivity of all eigenvalues of A_y, i.e., to the fact that the system of equations

$$\left(|\gamma(y+2k\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2 - \lambda\right)u_k - \\ - \frac{\widehat{B}(y+2k\sigma)\overline{\gamma(y+2k\sigma)}}{D_{B,\sigma}(y)} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)}\gamma(y+2\nu\sigma)u_\nu = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{3.19}$$

has no positive roots λ for $u \neq \mathbb{O}$.

Observe that if there exist two distinct $k, k' \in \mathbb{Z}$ for which

$$|\gamma(y+2k\sigma)| = |\gamma(y+2k'\sigma)| > \gamma^*(\rho),$$

then (3.19) obviously has the positive root

$$\lambda = |\gamma(y+2k\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2$$

for

$$u_k = \frac{1}{\overline{\widehat{B}(y+2k\sigma)}\gamma(y+2k\sigma)}, \quad u_{k'} = -\frac{1}{\overline{\widehat{B}(y+2k'\sigma)}\gamma(y+2k'\sigma)}, \\ u_l = 0 \quad \text{for } l \in \mathbb{Z}\setminus\{k,k'\}.$$

Suppose that there are no two such numbers. If

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)}\gamma(y+2\nu\sigma)u_\nu = 0,$$

then

$$\left(|\gamma(y+2k\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2 - \lambda\right)u_k = 0$$

for all $k \in \mathbb{Z}$. For each positive λ, the expression in the brackets can vanish at most for one integer;

denote it by k'. Then $u_k = 0$ for all $k \neq k'$; therefore $u_{k'} \neq 0$. It follows that $\widehat{B}(y+2k'\sigma) = 0$, which, as we have demonstrated, is impossible for $|\gamma(y+2k'\sigma)| > \gamma^*(\rho)$.

Consequently, $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)}\gamma(y+2\nu\sigma)u_\nu \neq 0$, and then

$$|\gamma(y+2k'\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2 - \lambda \neq 0$$

since $\widehat{B}(y+2k'\sigma) \neq 0$. Dividing (3.19) by

$$|\gamma(y+2k\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2 - \lambda,$$

multiplying it by $\overline{\widehat{B}(y+2k\sigma)}\gamma(y+2k\sigma)$ and summing up over all integers k, we obtain

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2k\sigma)}\gamma(y+2k\sigma)u_k -$$
$$-\frac{1}{D_{B,\sigma}(y)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2 - \lambda} \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{B}(y+2\nu\sigma)}\gamma(y+2\nu\sigma) \right) = 0,$$

which is equivalent to

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{B}(y+2\nu\sigma)\right|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2 |\gamma(y+2\nu\sigma)|^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2 - \lambda}.$$

Combining the terms on one side and reducing all to the common denominator, transform the equation to the form

$$\Psi_y(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2 - \lambda} = 0. \tag{3.20}$$

Put $\Pi = \{k \in \mathbb{Z} \colon |\gamma(y+2k\sigma)| > \gamma^*(\rho)\}$. Since $\gamma(y) \to 0$ as $y \to \infty$, the set Π is finite. Suppose that Π contains at least two elements. Note that all positive zeros of the denominators in (3.20) are different since for $k, k' \in \Pi$, $k \neq k'$, we have $|\gamma(y+2k\sigma)| \neq |\gamma(y+2k'\sigma)|$. Let λ_1 and λ_2 be two consecutive positive zeros of the denominators in (3.20). Clearly, on (λ_1, λ_2) the function Ψ_y is continuous and strictly increasing from $-\infty$ to $+\infty$. Therefore, $\Psi_y(\lambda^*) = 0$ for some $\lambda^* \in (\lambda_1, \lambda_2)$. Henceforth, we will assume that $|\gamma(y+2k\sigma)| > \gamma^*(\rho)$ for a unique $k_y \in \mathbb{Z}$.

If condition 2.2.2 is not fulfilled, i.e., $|\gamma(y+2k'\sigma)| = \gamma^*(\rho)$ for some $k' \in \mathbb{Z}$ but $\widehat{B}(y+2k'\sigma) \neq 0$, then, since Ψ_y is continuous and increases strictly from $-\infty$ to $+\infty$ on $(0, |\gamma(y+2k_y\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2)$, equation (3.20) has a positive root. If condition 2.2.2 is fulfilled then (3.20) can be rewritten as

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}: \\ |\gamma(y+2k\sigma)|\neq\gamma^*(\rho)}} \frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2 - \lambda} = 0.$$

For $\lambda > |\gamma(y+2k_y\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2$, all denominators on the left-hand side of the last equality are negative and the term on the sides increases strictly in λ to $+\infty$ on $(0, |\gamma(y+2k_y\sigma)|^2 - (\gamma^*(\rho))^2)$.

Therefore, the absence of positive roots for the term is equivalent to its nonnegativity for $\lambda = 0$, i.e., to condition 2.2.3.

Show that inequality (3.18) is sharp. Suppose that (3.18) holds with the constant $\gamma^*(\rho)$ replaced by some $K < \gamma^*(\rho)$. Using the same arguments as above, we conclude that this inequality is equivalent to the conditions of assertion 2 with $\gamma^*(\rho)$ replaced by K. Show that such conditions cannot be fulfilled. Indeed, consider $A_K = \{y\colon |\gamma(y)| > K\}$. Since $K < \gamma^*(\rho)$, we conclude that $\operatorname{mes} A_K > 2\rho$. On the other hand, assertions 2.1 and 2.2 imply that

$$A_K \subset \{y + 2k_y\sigma\colon y \in (-\rho, \rho), \quad k_y \in \mathbb{Z} \text{ is unique for each } y\}.$$

Therefore, the condition $\operatorname{mes} A_K \leqslant 2\rho$ must be fulfilled. Thus, the constant $\gamma^*(\rho)$ in (3.18) cannot be decreased. □

We will address the question of the sharpness of (3.18) in terms of average widths at the end of the chapter.

Theorem 1 can be strengthened in the standard manner.

Corollary 1. *If, under the assumptions of assertion 2 of Theorem 1 the Fourier transform of B has the form $\widehat{B} = \gamma\widehat{\psi}$ for some $\psi \in T_\gamma$ then every function f of the form* (3.17) *satisfies the inequality*

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \gamma^*(\rho) E\big(\varphi, \mathbb{S}_{\psi,\sigma,\rho}\big)_2.$$

Proof. Let s be an element of best approximation of φ by $\mathbb{S}_{\psi,\sigma,\rho}$. By Remark 4,

$$\gamma\widehat{s} = \gamma\widehat{\psi}\zeta = \widehat{B}\zeta,$$

where $\zeta \in L_2[-\sigma, \sigma]$, $\zeta(y) = 0$ for almost every $\rho < |y| \leqslant \sigma$. Hence, $\gamma\widehat{s}$ is the Fourier transform of some function in $\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}$; we will denote it by $\widetilde{s}$. Applying Theorem 1 to $f - \widetilde{s}$, we obtain

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 = E\big(f - \widetilde{s}, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \gamma^*(\rho)\|\varphi - s\|_{L_2(\mathbb{R})} = \gamma^*(\rho) E\big(\varphi, \mathbb{S}_{\psi,\sigma,\rho}\big)_2.$$

□

Let us formulate some particular case of Theorem 1 for the approximation of convolution classes.

Corollary 2. *Suppose that* $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$, $G \in L_1(\mathbb{R})$, *while the functions* $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *form a Riesz system for* $L_2(\mathbb{R})$. *Then the following are equivalent.*

1. *For every function f representable as*

$$f = G * \varphi, \quad \varphi \in L_2(\mathbb{R}),$$

we have the inequality

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \widehat{G}^*(\rho)\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

2. The Fourier transforms of B and G satisfy the following conditions.

2.1. For almost every $y \in (-\sigma,\sigma)\setminus(-\rho,\rho)$ and all $k \in \mathbb{Z}$ we have $|\widehat{G}(y+2k\sigma)| \leqslant \widehat{G}^*(\rho)$.

2.2. For almost every $y \in (-\rho,\rho)$ there exists at most one number $k_y \in \mathbb{Z}$ for which $|\widehat{G}(y+2k_y\sigma)| > \widehat{G}^*(\rho)$. Moreover, if such k_y exists then the following conditions are fulfilled.

2.2.1. $\widehat{B}(y+2k_y\sigma) \neq 0$.

2.2.2. for every $k \in \mathbb{Z}$ the inclusion $|\widehat{G}(y+2k\sigma)| = \widehat{G}^*(\rho)$ implies $\widehat{B}(y+2k\sigma) = 0$.

2.2.3.

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |\widehat{G}(y+2k\sigma)|\neq\widehat{G}^*(\rho)}} \frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2}{|\widehat{G}(y+2k\sigma)|^2-(\widehat{G}^*(\rho))^2} \geqslant 0.$$

If the absolute value of the Fourier transform of G decreases symmetrically then Corollary 2 can be simplified.

Corollary 3. *Suppose that $0<\rho\leqslant\sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$, $G \in L_1(\mathbb{R})$, while the functions $\left\{B\left(\cdot-\frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ form a Riesz system for $L_2(\mathbb{R})$, and $|\widehat{G}|$ decreases symmetrically and is not constant in some neighborhoods $-\rho$ and ρ. Then the following statements are equivalent.*

1. For every function f representable in the form

$$f = G * \varphi, \quad \varphi \in L_2(\mathbb{R}),$$

we have the inequality

$$E\big(f,\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant |\widehat{G}(\rho)|\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

2. For almost all $y \in (-\rho,\rho)$, we have $\widehat{B}(y)\neq 0$ and

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2}{|\widehat{G}(y+2k\sigma)|^2-|\widehat{G}(\rho)|^2} \geqslant 0.$$

Proof. As was observed at the beginning of the section, for the convolution classes with integrable kernel G we have $\gamma=\widehat{G}$, and T_γ is the whole $L_2(\mathbb{R})$. Since $|\widehat{G}|$ decreases symmetrically, we have $\gamma^*(\rho) = |\widehat{G}(\rho)|$, assertion 2.1 of Corollary 2 is fulfilled automatically, and k_y of assertion 2.2 is equal to zero for all y. The nonconstancy of $|\widehat{G}|$ in some neighborhoods of ρ and $-\rho$ together with symmetric decrease imply that for all $y \in (-\rho,\rho)$

$$\{k\in\mathbb{Z}\colon |\gamma(y+2k\sigma)| = \gamma^*(\rho)\} = \{k\in\mathbb{Z}\colon |\widehat{G}(y+2k\sigma)| = |\widehat{G}(\rho)|\} = \varnothing.$$

Therefore, assertion 2 of Corollary 2 takes the above form. □

Similarly, Theorem 1 gives the following assertion for the approximation of Sobolev function spaces.

Corollary 4. *Suppose that $r \geqslant 1$, $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$ while the functions $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ form a Riesz system for $L_2(\mathbb{R})$. Then the following statements are equivalent.*

1. *For every $f \in W_2^{(r)}(\mathbb{R})$ we have the inequality*

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \frac{1}{\rho^r}\|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

2. *For almost every $y \in (-\rho, \rho)$, we have $\widehat{B}(y) \neq 0$ and*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2}{\frac{1}{(y+2k\sigma)^{2r}} - \frac{1}{\rho^{2r}}} \geqslant 0.$$

3.4. Sufficient conditions

Let us give some condition sufficient for the fulfillment of 2.2.3 of Theorem 1.

Theorem 2. *Suppose that $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$, the set $Q \subset \mathbb{R}$ is empty or finite, and the functions $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ constitute a Riesz system for $L_2(\mathbb{R})$. Let the function $\gamma\colon \mathbb{R}\setminus Q \to \mathbb{C}$ satisfy the conditions:*

- *γ is continuous on $\mathbb{R}\setminus Q$, $\quad \gamma(y) \to 0$ as $y \to \infty$;*
- *$|\gamma(y)| \to \infty$ as $y \to q$ for all $q \in Q$.*

Suppose also that $\widehat{B}$ and γ satisfy the following conditions.

1. *For almost every $y \in (-\sigma, \sigma)\setminus(-\rho, \rho)$ and all $k \in \mathbb{Z}$ we have $|\gamma(y+2k\sigma)| \leqslant \gamma^*(\rho)$.*
2. *For almost every $y \in (-\rho, \rho)$ there exists at most one number $k_y \in \mathbb{Z}$ for which $|\gamma(y+2k_y\sigma)| > \gamma^*(\rho)$. Moreover, if such k_y exists then the following conditions are fulfilled.*

   2.1. *$\widehat{B}(y+2k_y\sigma) \neq 0$ an for all $k \in \mathbb{Z}$*

$$|\widehat{B}(y+2k\sigma)| \leqslant \frac{|\widehat{B}(y+2k_y\sigma)|}{|\gamma(y+2k_y\sigma)|}|\gamma(y+2k\sigma)|. \tag{3.21}$$

   2.2. *For every $k \in \mathbb{Z}$, the equality $|\gamma(y+2k\sigma)| = \gamma^*(\rho)$ implies $\widehat{B}(y+2k\sigma) = 0$.*

   2.3.

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |\gamma(y+2k\sigma)|\neq\gamma^*(\rho)}} \frac{1}{1 - \frac{(\gamma^*(\rho))^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2}} \geqslant 0. \tag{3.22}$$

Then for every function $f \in \mathfrak{F}_\gamma$ of the form (3.17) we have the inequality

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \gamma^*(\rho)\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Proof. It suffices to check condition 2.2.3 of Theorem 1; the remaining conditions in the second assertion of Theorem 1 coincide with the assumption of Theorem 2. Since for $k \neq k_y$ all the denominators are negative, using (3.21) and condition 2.3, we get

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |\gamma(y+2k\sigma)|\neq\gamma^*(\rho)}} \frac{|\widehat{B}(y+2k\sigma)|^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2-(\gamma^*(\rho))^2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{|\widehat{B}(y+2k_y\sigma)|^2}{|\gamma(y+2k_y\sigma)|^2} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |\gamma(y+2k\sigma)|\neq\gamma^*(\rho)}} \frac{1}{1-\frac{(\gamma^*(\rho))^2}{|\gamma(y+2k\sigma)|^2}} \geqslant 0. \qquad \square$$

Remark 5. The series on the left-hand side of (3.22) converges if and only if for some $A>0$ we have $\gamma\chi_{\mathbb{R}\setminus(-A,A)} \in L_2(\mathbb{R})$. Since the left-hand side of (3.22) contains only one positive term, this series can diverge only to $-\infty$.

Note the particular cases of Theorem 2 for classes of convolutions with symmetrically decreasing absolute value of the Fourier transform of the kernel.

Corollary 5. *Assume that* $0<\rho\leqslant\sigma$, $B\in L_2(\mathbb{R})$, $G\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$, *while the functions* $\left\{B\left(\cdot-\frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *form a Riesz system for* $L_2(\mathbb{R})$, *and the Fourier transforms of* B *and* G *satisfy the following conditions.*

1. $|\widehat{G}|$ *decreases symmetrically and is nonconstant in some neighborhoods of* $-\rho$ *and* ρ.
2. *For almost every* $y\in(-\rho,\rho)$ *we have* $\widehat{B}(y)\neq 0$,

$$|\widehat{B}(y+2k\sigma)| \leqslant \frac{|\widehat{B}(y)|}{|\widehat{G}(y)|}|\widehat{G}(y+2k\sigma)| \quad \textit{for all } k\in\mathbb{Z},$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-\frac{|\widehat{G}(\rho)|^2}{|\widehat{G}(y+2k\sigma)|^2}} \geqslant 0. \tag{3.23}$$

Then every function f *representable as*

$$f = G*\varphi, \quad \varphi\in L_2(\mathbb{R}),$$

satisfies the inequality

$$E\big(f,\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant |\widehat{G}(\rho)|\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Henceforth, we assume that B satisfies condition 2.1 of Theorem 2 (r the corresponding condition of Corollary 5).

Let us give some conditions under which the product of functions γ, satisfying the hypotheses of Theorem 2, also satisfies these conditions.

The following Lemma is be proved the same way as Lemma 1.3, but we give this proof for completeness.

Lemma 4. *Suppose that functions γ_1 and γ_2 satisfy the following condition.*

2.3' For almost every $y \in (-\rho, \rho)$ и $i = 1, 2$ there exists at most one number $k_y(\gamma_i) \in \mathbb{Z}$ for which $|\gamma_i(y + 2k_y(\gamma_i))| > |\gamma_i^*(\rho)|$. Moreover, if such $k_y(\gamma_i)$ exists then

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |\gamma_i(y+2k\sigma)|\neq\gamma_i^*(\rho)}} \frac{1}{1 - \frac{(\gamma_i^*(\rho))^2}{|\gamma_i(y+2k\sigma)|^2}} \geqslant 0, \quad i = 1, 2. \tag{3.24}$$

If

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{R}\colon |\gamma_1(z)| > \gamma_1^*(\rho)\} &= \{z \in \mathbb{R}\colon |\gamma_2(z)| > \gamma_2^*(\rho)\},\\ \{z \in \mathbb{R}\colon |\gamma_1(z)| = \gamma_1^*(\rho)\} &= \{z \in \mathbb{R}\colon |\gamma_2(z)| = \gamma_2^*(\rho)\}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

then the function $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ also satisfies condition 2.3'.

Proof. For almost every $y \in (-\rho, \rho)$ put

$$L_y = \{k \in \mathbb{Z}\colon |\gamma(y + 2k\sigma)| \neq \gamma^*(\rho)\}.$$

Note that conditions (3.25) imply

$$\gamma^*(\rho) = \gamma_1^*(\rho)\gamma_2^*(\rho),$$

$$L_y = \{k \in \mathbb{Z}\colon |\gamma_1(y + 2k\sigma)| \neq \gamma_1^*(\rho)\} = \{k \in \mathbb{Z}\colon |\gamma_2(y + 2k\sigma)| \neq \gamma_2^*(\rho)\},$$

and $k_y(\gamma_1) = k_y(\gamma_2) = k_y(\gamma)$ for almost every $y \in \mathbb{R}$.

For almost all $y \in (-\rho, \rho)$ put

$$u_k = u_k(y) = \frac{(\gamma_1^*(\rho))^2}{|\gamma_1(y + 2k\sigma)|^2}, \quad v_k = v_k(y) = \frac{(\gamma_2^*(\rho))^2}{|\gamma_2(y + 2k\sigma)|^2}.$$

Then for almost every $y \in (-\rho, \rho)$ we have $0 < u_{k_y} < 1$, $0 < v_{k_y} < 1$, and $u_k \geqslant 1$, $v_k \geqslant 1$ for all $k \in \mathbb{Z} \setminus \{k_y\}$. Desired inequality (3.24) for the function γ is equivalent to

$$\frac{1}{1 - u_{k_y}v_{k_y}} \geqslant \sum_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{u_kv_k - 1}, \tag{3.26}$$

while condition (3.24) for γ_1 and γ_2 can be rewritten as

$$u_{k_y} \geqslant 1 - \Bigg(\sum_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{u_k - 1}\Bigg)^{-1}, \quad v_{k_y} \geqslant 1 - \Bigg(\sum_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{v_k - 1}\Bigg)^{-1}.$$

This implies

$$\frac{1}{1 - u_{k_y}v_{k_y}} \geqslant \frac{1}{\Big(\sum\limits_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{u_k - 1}\Big)^{-1} + \Big(\sum\limits_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{v_k - 1}\Big)^{-1}}.$$

On the other hand,

$$\sum_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{u_kv_k - 1} \leqslant \sum_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{u_k + v_k - 2}.$$

Therefore, for proving (3.26), it suffices to show that

$$\sum_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \frac{1}{u_k+v_k-2} \leqslant \frac{1}{\left(\sum\limits_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \dfrac{1}{u_k-1}\right)^{-1} + \left(\sum\limits_{k\in L_y\setminus\{k_y\}} \dfrac{1}{v_k-1}\right)^{-1}}.$$

Applying Lemma 1.2 to $x_k = \frac{1}{u_k-1}$, $y_k = \frac{1}{v_k-1}$, $k \in L_y \setminus \{k_y\}$, we obtain what was required. □

Remark 6. By induction, the claim of Lemma 4 holds for the finite product of γ_j; and passage to the limit yields the assertion also for a countable collection of γ_j.

3.5. Examples

Let us give some examples of the functions ? satisfying the hypotheses of Theorem 2 for all $\rho \leqslant \sigma$.

1. $|\gamma(y)| = \dfrac{1}{|y|^r}$, $\quad r \geqslant 1$.

This in particular implies some sufficient condition for the extremality of the shift spaces for the Sobolev function classes on the axis.

Corollary 6. *Suppose that* $r \geqslant 1$, $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$, *while the functions* $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *form a Riez system for* $L_2(\mathbb{R})$, *and the Fourier transform of* B *satisfies the following conditions.*

for almost every $y \in (-\rho, \rho)$, *we have* $\widehat{B}(y) \neq 0$ *and*

$$|y+2k\sigma|^r|\widehat{B}(y+2k\sigma)| \leqslant |y|^r|\widehat{B}(y)| \quad \text{for all } k \in \mathbb{Z}.$$

Then for every function $f \in W_2^{(r)}(\mathbb{R})$, *we have the inequality*

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant \frac{1}{\rho^r}\|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

2. $|\gamma(y)| = \dfrac{1}{(1+a^2y^2)^\alpha}$, where $\alpha \in \mathbb{N}$ or $\alpha + \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. $|\gamma(y)| = e^{-\beta|y|^\delta}$, где $\delta \geqslant 2$, $\beta > 0$.

The corresponding inequalities (3.22) for such functions γ were proved in Chapter 1 (Examples 1.1–1.3); therefore, in this chapter, we give them without proofs. Example 1.4 also implies that for the Fourier transform of the Poisson kernel $\gamma(y) = e^{-\alpha|y|}$, $\alpha > 0$, condition (3.22) is satisfied in general not for all α.

Let us deduce one important consequence of Examples 2 and 3.

A function K defined almost everywhere on $\mathbb{R}$ is called *totally positive* if for every $n \in \mathbb{N}$ and almost all real x_k and t_j such that

$$x_1 < \ldots < x_n, \quad t_1 < \ldots < t_n,$$

the determinant of the matrix $\big(K(x_k - t_j)\big)_{k,j=1}^n$ is nonnegative. Henceforth, we will denote by

$\nu(\varphi)$ the number of essential sign changes for a real-valued function φ, i.e.,

$$\nu(\varphi) = \sup S^{-}[\varphi(t_1), \varphi(t_2), \ldots, \varphi(t_n)],$$

where $S^{-}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ is the number of sign changes for a set of reals $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (the zero terms are eliminated) and the supremum is taken over all $n \in \mathbb{N}$ and and all possible ordered sets of real numbers $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ (see. [29, § I.3]). It is said that a function $K \in L_1(\mathbb{R})$ *does not increase oscillation* if $\nu(\varphi * K) \leqslant \nu(\varphi)$ for every $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$.

Theorem A ([29, § I.5])**.** *Let $K \in L_1(\mathbb{R})$ be a nonzero function. Then the following statements are equivalent.*

1. *K is totally positive.*
2. *K is almost everywhere nonnegative and does not increase oscillation.*
3. *The Fourier transform of K is of the form $\widehat{K}(z) = \dfrac{1}{\psi(iz)}$, where ψ belongs to Laguerre–Pólya class, i.e.,*

$$\psi(z) = Ce^{-\alpha z^2+\delta z}\prod_{k=1}^{\infty}(1-a_k z)e^{-a_k z},$$

$$C>0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \delta, a_k \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty.$$

Thus, since for a totally positive function $K \in L_1(\mathbb{R})$,the absolute value of the Fourier transform looks as

$$|\widehat{K}(z)| = \frac{1}{C}e^{-\alpha z^2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+a_k^2 z^2}}, \qquad z \in \mathbb{R},$$

(with the same conditions on the parameters as in Theorem A), by Remark 6, Examples 2 and 3 give the following assertion.

Corollary 7. *Suppose that $0 < \rho \leqslant \sigma$, $B \in L_2(\mathbb{R})$, while the functions $\left\{B\left(\cdot - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ form a Riez system for $L_2(\mathbb{R})$, and $K \in L_1(\mathbb{R})$ is totally positive. Then for every function f representable as*

$$f = K * \varphi, \quad \varphi \in L_2(\mathbb{R}),$$

the following inequality holds:

$$E\big(f, \mathbb{S}_{B,\sigma,\rho}\big)_2 \leqslant |\widehat{K}(\rho)|\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Suppose that G satisfies (3.23), and $|\widehat{G}|$ decreases symmetrically and is nonconstant in some neighborhoods $-\rho$ and ρ. Then the examples of functions B satisfying the hypotheses of Corollary 5 for all $\rho \leqslant \sigma$ are given by functions with the Fourier transforms of the form

$$\widehat{B}(y) = \widehat{G}(y)\psi(y),$$

where ψ satisfies the following conditions:

- there exist $A, B > 0$ such that for almost every $y \in (-\sigma, \sigma)$, we have
$$A \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi(y + 2k\sigma)|^2 \leqslant B;$$
- for almost every $y \in (-\rho, \rho)$, we have $\psi(y) \neq 0$ and $|\psi(y + 2k\sigma)| \leqslant |\psi(y)|$ for all $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

If ψ is the Fourier transform of a function $K \in L_1(\mathbb{R})$ then such a function B is simply $G * K$. In particular, we can take as K each function in $L_1(\mathbb{R})$ or which the absolute value of the Fourier transform decreases symmetrically and is nonconstant in some neighborhoods of$-\rho$ and ρ.

The examples of the functions B, satisfying the conditions of Corollary 6 for all $\rho \leqslant \sigma$ are given by the functions with Fourier transform of the form
$$\widehat{B}(y) = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{\sigma}y} - 1}{i\frac{\pi}{\sigma}y}\right)^{\mu+1} \psi(y), \quad \mu \in \mathbb{Z}_+,\ \mu + 1 \geqslant r,$$
where ψ satisfies the same conditions. If ψ is the Fourier transform of a function $K \in L_1(\mathbb{R})$ then such a function B is the Steklov average of order $\mu + 1$ of K.

In particular, this implies inequality for the approximation of functions from $W_2^{(r)}(\mathbb{R})$ by splines. Let us formulate this assertion.

Corollary 8. *Let $r \geqslant 1$, $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$, $\mu + 1 \geqslant r$. Then for every function $f \in W_2^{(r)}(\mathbb{R})$ the following inequality holds:*
$$E\big(f, \grave{\mathbf{S}}_{\sigma,\mu}\big)_2 \leqslant \frac{1}{\sigma^r}\|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$
If $r \in \mathbb{N}$ then every $f \in W_2^{(r)}(\mathbb{R})$ satisfies
$$E\big(f, \grave{\mathbf{S}}_{\sigma,\mu}\big)_2 \leqslant \frac{1}{\sigma^r} E\big(f^{(r)}, \grave{\mathbf{S}}_{\sigma,\mu-r}\big)_2.$$

The claim of Corollary 8 was obtained in [17] for $r \in \mathbb{N}$, and is new for r noninteger.

3.6. Average widths

Recall the definitions of average dimension and average width in the sense of Kolmogorov using the notations of [14].

Let D_p be the closed unit ball in $L_p(\mathbb{R})$. For $A > 0$ and a function f on $\mathbb{R}$, we put
$$P_A f(t) = \begin{cases} f(t), & |t| < A, \\ 0, & |t| > A. \end{cases}$$

The value
$$d_n(Y; X) = \inf_{X_n} \sup_{x\in Y} \inf_{y\in X_n} \|x - y\|_X,$$

where the first infimum is taken over all subspaces X_n of X of dimension at most n, is called the *Kolmogorov n-width* of the set Y in the normed space X.

Let H be a subspace in $L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty]$. For $\varepsilon, A > 0$, we put

$$K(\varepsilon, A, H) = K(\varepsilon, A, H, L_p(\mathbb{R})) = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ \colon d_n(P_A(H \cap D_p), L_p(\mathbb{R})) < \varepsilon\}.$$

The value

$$\overline{\dim}\, H = \overline{\dim}\,(H, L_p(\mathbb{R})) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \varliminf_{A\to+\infty} \frac{K(\varepsilon, A, H, L_p(\mathbb{R}))}{2A}$$

is called the *average dimension* of H in $L_p(\mathbb{R})$.

It is known (see. [14, Lemma 2.1]) that the average dimension of the spline space $\grave{\mathbf{S}}_{\sigma,\mu}$ and the space of entire functions of type at most σ in $L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty]$, is equal to $\frac{\sigma}{\pi}$. Moreover, it follows from [38, Theorem 1] that if the series

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right) \right|$$

converges uniformly in x on any segment then

$$\overline{\dim}\, \mathbb{S}_{B,\sigma} = \frac{\sigma}{\pi}.$$

Let $p \in [1, +\infty]$. The *average Kolmogorov ν-width* of the set X in $L_p(\mathbb{R})$ is defined by

$$\overline{d_\nu}(X; L_p(\mathbb{R})) = \inf_{X_\nu} \sup_{x\in X} \inf_{y\in X_\nu} \|x - y\|_{L_p(\mathbb{R})},$$

where the first infimum is taken over all subspaces X_ν in $L_p(\mathbb{R})$ of average dimension at most ν.

It follows from [32, Theorem 6] that the function class

$$W_2^G(\mathbb{R}) = \{f \in L_2(\mathbb{R}) \colon f = G * \varphi,\ \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1,\ G \in L_1(\mathbb{R})\}$$

satisfies

$$\overline{d_{\frac{\sigma}{\pi}}}(W_2^G(\mathbb{R}); L_2(\mathbb{R})) = \widehat{G}^*(\sigma).$$

Note that in [32, Theorem 6] the authors also require the fulfillment of the condition $G \in L_2(\mathbb{R})$, but the latter is not required in the proof.

The Sobolev function classes with natural r on the axis satisfy the equality

$$\overline{d_{\frac{\sigma}{\pi}}}(W_2^{(r)}(\mathbb{R}); L_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{\sigma^r}$$

(see [14, Theorem 4.2]).

We will extend these results to the class $\mathfrak{F}_\gamma$. To this end, we introduce some notation.

Given $A \subset \mathbb{R}$, let $\mathfrak{B}_A(\mathbb{R})$ be the space of functions $f \in L_2(\mathbb{R})$ with $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset A$.

Denote by $\mathfrak{F}_\gamma^1$ the set of $f \in \mathfrak{F}_\gamma$ such that φ in the representation

$$\widehat{f} = \gamma\widehat{\varphi}, \quad \varphi \in T_\gamma, \tag{3.27}$$

satisfies the condition $\|\varphi\|_2 \leqslant 1$.

We will also need the following auxiliary assertions.

Theorem B ([9, Theorem 1])**.** *Let $A \subset \mathbb{R}$ be a Jordan measurable set of finite Lebesgue measure. Then*

$$\overline{\dim}\,(\mathfrak{B}_A(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = \frac{\operatorname{mes} A}{2\pi}.$$

Theorem C ([32, Theorem 5])**.** *Let $A \subset \mathbb{R}$ be a Jordan measurable set of finite Lebesgue measure and $\dfrac{\operatorname{mes} A}{2\pi} > \nu > 0$. Then*

$$\overline{d_\nu}\big(\mathfrak{B}_A(\mathbb{R}) \cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})\big) = 1.$$

Theorem 3. *Suppose that $\rho > 0$, a set $Q \subset \mathbb{R}$ is empty or finite, and a complex–valued function γ satisfies the following conditions:*

- *γ is continuous on $\mathbb{R} \setminus Q$, $\quad \gamma(y) \to 0$ as $y \to \infty$;*
- *$|\gamma(y)| \to \infty$ as $y \to q$ for all $q \in Q$.*

Then

$$\overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}\big(\mathfrak{F}_\gamma^1, L_2(\mathbb{R})\big) = \gamma^*(\rho).$$

Proof. 1. The upper estimate. Put

$$A_\rho = \{y \in \mathbb{R}\colon |\gamma(y)| > \gamma^*(\rho)\}.$$

Show that the sets A_ρ are Jordan measurable for almost all ρ Indeed, the boundary of A_ρ lies in the set

$$B_\rho = \{y \in \mathbb{R}\colon |\gamma(y)| = \gamma^*(\rho)\},$$

which can have nonzero measure only for at most countably many values ρ. Moreover, it is clear that $\operatorname{mes} A_\rho \leqslant 2\rho$. Take $\varepsilon > 0$ and consider the Jordan measurable set $A \supset A_\rho$ for which $\operatorname{mes} A < \operatorname{mes} A_\rho + 2\pi\varepsilon$. Then, by Theorem C,

$$\overline{\dim}\,(\mathfrak{B}_A(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = \frac{\operatorname{mes} A}{2\pi} \leqslant \frac{\rho}{\pi} + \varepsilon.$$

For $f \in \mathfrak{F}_\gamma^1$ of the form (3.27), denote by Γ_f the function from $\mathfrak{B}_A(\mathbb{R})$ for which $\widehat{\Gamma_f} = \widehat{f}\chi_A = \gamma\widehat{\varphi}\chi_A$. Since $|\gamma| \leqslant \gamma^*(\rho)$ на $\mathbb{R} \setminus A$, we have

$$E\,(f, \mathfrak{B}_A(\mathbb{R}))_2^2 \leqslant \|f - \Gamma_f\|_2^2 = 2\pi\|\widehat{f} - \widehat{\Gamma_f}\|_2^2 = 2\pi \int\limits_{\mathbb{R}\setminus A} |\gamma|^2|\widehat{\varphi}|^2 \leqslant (\gamma^*(\rho))^2\|\varphi\|_2^2.$$

Owing to the arbitrariness of ε, this implies that

$$\overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}\big(\mathfrak{F}^1_\gamma, L_2(\mathbb{R})\big) \leqslant \gamma^*(\rho).$$

2. The lower estimate. Given $\varepsilon > 0$, denote by A_ε some Jordan measurable subset of

$$\{y \in \mathbb{R}\colon |\gamma(y)| > \gamma^*(\rho) - \varepsilon\}$$

whose measure is greater than 2ρ. By Theorem B, the average dimension of $\mathfrak{B}_{A_\varepsilon}(\mathbb{R})$ is greater than $\frac{\rho}{\pi}$, and, by Theorem C,

$$\overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}\big(\mathfrak{B}_{A_\varepsilon}(\mathbb{R}) \cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})\big) = 1.$$

Show that $\mathfrak{F}^1_\gamma$ contains a ball of radius $\gamma^*(\rho)-\varepsilon$ of the space $\mathfrak{B}_{A_\varepsilon}(\mathbb{R})$, i.e., for every $f \in \mathfrak{B}_{A_\varepsilon}(\mathbb{R})$, $\|f\|_2 \leqslant \gamma^*(\rho) - \varepsilon$, there exists $\varphi \in T_\gamma$ such that $\|\varphi\|_2 \leqslant 1$ and $\widehat{f} = \gamma\widehat{\varphi}$. Indeed, for $f \in \mathfrak{B}_{A_\varepsilon}(\mathbb{R})$ put $\widehat{\varphi} = \dfrac{\widehat{f}}{\gamma}$. Then, obviously, $\varphi \in T_\gamma$ и $\widehat{f} = \gamma\widehat{\varphi}$. Moreover, since $|\gamma| > \gamma^*(\rho) - \varepsilon$ on A_ε, we have

$$\|\varphi\|_2^2 = 2\pi\|\widehat{\varphi}\|_2^2 = 2\pi\int\limits_{A_\varepsilon}\left|\frac{\widehat{f}}{\gamma}\right|^2 \leqslant \frac{2\pi}{(\gamma^*(\rho)-\varepsilon)^2}\int\limits_{A_\varepsilon}|\widehat{f}|^2 = \frac{1}{(\gamma^*(\rho)-\varepsilon)^2}\|f\|_2^2 \leqslant 1.$$

Consequently,

$$\begin{aligned}\overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}\big(\mathfrak{F}^1_\gamma, L_2(\mathbb{R})\big) &\geqslant \overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}\big(\mathfrak{B}_{A_\varepsilon}(\mathbb{R}) \cap (\gamma^*(\rho)-\varepsilon)BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})\big) = \\ &= (\gamma^*(\rho)-\varepsilon)\overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}\big(\mathfrak{B}_{A_\varepsilon}(\mathbb{R}) \cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})\big) = \gamma^*(\rho) - \varepsilon.\end{aligned}$$

Since ε is arbitrary, we obtain

$$\overline{d_{\frac{\rho}{\pi}}}\big(\mathfrak{F}^1_\gamma, L_2(\mathbb{R})\big) \geqslant \gamma^*(\rho).$$

$\square$

Theorem 3 and the assertion about the average dimension of the shift spaces implies the following statement.

Corollary 9. *If under the assumptions of Theorem 1, Theorem 2 or Corollaries 2–5, we have* $\rho = \sigma$ *and the series*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|B\left(x - \frac{j\pi}{\sigma}\right)\right|$$

converges uniformly with respect to x *on every segment then inequality* (3.18) *(or the analogous inequality of Theorem 2 or Corollaries 2–5) is sharp in the sense of the average widths; i.e., the constant on the right-hand side cannot be decreased by passing to another approximating subspace of average dimension at most* $\frac{\sigma}{\pi}$.

For $\rho \neq \sigma$, the conditions under which $\overline{\dim}\,\mathbb{S}_{B,\sigma,\rho} = \dfrac{\rho}{\pi}$ are unknown.

Conclusion

Main results of the dissertation consist in the following.

1. In the first chapter, we give a complete description of spaces of shifts that provide a sharp (in the sense of widths) constant in the inequality for best mean square approximation of periodic convolution classes. The obtained results generalize well-known classical inequalities for approximation of Sobolev classes of periodic functions by trigonometric polynomials and splines.

2. In the second chapter, we find a wide set of optimal approximating subspaces for classes of differentiable functions defined on a segment and subject to certain boundary conditions. In particular, we prove optimality of spaces of splines with equidistant knots of various types.

3. In the third chapter, we prove sharp inequalities for approximation of classes of convolutions by spaces of shifts on the axis. We obtain a complete description of spaces of shifts for which these inequalities hold, and also calculate the values of average widths for approximated classes of functions. In particular, we indicate conditions under which the obtained inequalities are sharp in the sense of average widths.

The obtained results can be used for solving related problems of approximation theory.

References

[1] *Akhiezer N. I., Krein M. G.* Best approximation of differentiable periodic functions by trigonometric sums // Dokl. AN SSSR. 1937. vol. 15. no. 3. p. 107–112.

[2] *Vinogradov O. L.* Analog of the Akhiezer-Krein-Favard sums for periodic splines of minimal defect // J. Math. Sci. (N.Y.). 2003. vol. 114. no. 5. p. 1608–1627.

[3] *Vinogradov O. L.* Sharp Jackson-Chernykh type inequality for spline approximations on the line // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2020. vol. 53. no. 1. p. 10–19.

[4] *Vinogradov O. L.* Classes of convolutions with a singular family of kernels: Sharp constants for approximation by spaces of shifts // St. Petersburg Math. J. 2021. vol. 32. p. 233–260.

[5] *Vinogradov O. L.* Sharp constants for approximations of convolution classes with an integrable kernel by spaces of shifts // St. Petersburg Math. J. 2019. vol. 30. p. 841–867.

[6] *Vinogradov O. L.* Sharp inequalities for approximations of classes of periodic convolutions by subspaces of shifts of odd dimension // Math. Notes. 2009. vol. 85. no. 3-4. p. 544–557.

[7] *Vinogradov O. L., Ulitskaya A. Yu.* Optimal subspaces for mean square approximation of classes of differentiable functions on a segment // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2020. т. vol. 53. no. 3. p. 270–281.

[8] *Vinogradov O. L., Ulitskaya A. Yu.* Sharp estimates for mean square approximation of classes of differentiable periodic functions by shift spaces // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2018. vol. 51. no. 1. p. 15–22.

[9] *Dinh Dung.* Mean ε-dimension of the functional class $B_{G,p}$ // Math. Notes. 1980. vol. 28. no. 5. p. 818–823.

[10] *Kolmogorov A. N.* Collected works. Mathematics and mechanics. Moskva: Nauka, 1985. (in Russian).

[11] *Kolmogorov A. N., Tikhomirov, V. M.* ε-entropy and ε-capacity of sets in function spaces // Am. Math. Soc., Transl., II. Ser. 1961. vol. 17. p. 227–364.

[12] *Korneichuk N. P.* Splines in approximation theory. Moskva: Nauka, 1984. (in Russian).

[13] *Korneichuk N.* Exact constants in approximation theory. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. vol. 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[14] *Magaril-Il'yaev G. G.* Mean dimension, widths, and optimal recovery of Sobolev classes of functions on the line // Math. USSR-Sb. 1993. vol. 74. no. 2. p. 381-403.

[15] *Nikolsky, S.* Approximation of functions in the mean by trigonometrical polynomials // Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 1946. vol. 10. p. 207–256. (in Russian).

[16] *Tikhomirov V. M.* On approximate characteristics of smooth functions of several variables // Theory of cubature formulas and numerical mathematics, Pap. Conf. Differential equations and numerical mathematics. Novosibirsk: Nauka, 1980. p. 183–188. (in Russian).

[17] *Sun Yongsheng, Li Chun* Best approximation of certain classes of smooth functions on the real axis by splines of a higher order // Math. Notes. 1990. vol. 48. no. 4. p. 1038–1044.

[18] *Ulitskaya A. Yu.* Sharp estimates for mean square approximations of classes of periodic convolutions by spaces of shifts // St. Petersburg Mathematical Journal. 2021. vol. 32. no. 2. p. 349–369.

[19] *Ulitskaya A. Yu.* Sharp estimates for the mean-square approximations of convolution classes by shift spaces on the axis // Siberian Mathematical Journal. 2023. vol. 64. no. 1. p. 157–173.

[20] *Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities. 2d ed. Cambridge, University Press, 1952.

[21] *Shannon C. E.* Collected Works on Information Theory and Cybernetics. Moskow: IL, 1963. (Russian translation).

[22] *de Boor C., DeVore R., Ron A.* Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$ // Trans. Am. Math. Soc. 1994. vol. 341 (2). p. 787–806.

[23] *Favard J.* Sur les meilleurs procêdês d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonomêtriques // Bull. Sci. Math. 1937. vol. 61 (2). p. 209–224, 243–256.

[24] *Floater M. S., Sande E.* Optimal spline spaces for L^2 n-width problems with boundary conditions // Constructive Approximation. 2018. vol. 50. p. 1–18.

[25] *Floater M. S., Sande E.* Optimal spline spaces of higher degree for L^2 n-widths // Journal of Approximation Theory. 2017. vol. 216. p. 1–15.

[26] *Golomb M.* Approximation by periodic spline interpolants on uniform meshes // Journal of Approximation Theory. 1968. vol. 1. p. 26–65.

[27] *Gröchenig K.* Foundations of Time–Frequency Analysis. Boston: Birkhäuser, 2001.

[28] *Kamada M., Toriachi K., Mori R.* Periodic spline orthonormal bases // Journal of Approximation Theory. 1988. vol. 55. p. 27–34.

[29] *Karlin S.* Total positivity. Vol. 1. Stanford: Stanford University Press, 1968.

[30] *Kolmogorov A.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. Math. 1936. vol. 37. p. 107–110.

[31] *Kolomoitsev Yu., Skopina M.* Approximation by multivariate quasi-projection operators and Fourier multipliers // Applied Mathematics and Computation. 2021. vol. 400. 125955.

[32] *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M.* On exact values of n-widths in a Hilbert space // Journal of Approximation Theory. 2001. vol. 108. no. 1. p. 97–117.

[33] *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Spline spaces are optimal for L^2 n-widths // Illinois Journal of Mathematics. 1978. vol. 22. no. 4. p. 541–564.

[34] *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag, 1985.

[35] *Schoenberg I. J.* Cardinal Spline Interpolation. Philadelphia: SIAM, 2 ed., 1993.

[36] *Skopina M., Krivoshein A., Protasov V.* Multivariate wavelet frames. Singapore: Springer, 2016.

[37] *Ulitskaya A. Yu.* Fourier analysis in spaces of shifts // Journal of Mathematical Sciences. 2022. vol. 266. p. 603–614.

[38] *Vinogradov O. L.* Average dimension of shift spaces // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. vol. 39. no. 5. p. 717–721.

[39] *Vinogradov O. L.* Structural characterization of deviations of quasi-projectors on the real line // J. Math. Anal. Appl. 2021. vol. 500, no. 1. 125115.