

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Су Шимай

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МЕТОДЫ  
АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧАХ  
УПРАВЛЕНИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЕМ  
ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Научная специальность: 1.2.3. Теоретическая информатика,  
кибернетика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
Перевод с английского языка

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
доцент Е. М. Парилина

Санкт-Петербург

2023

# Оглавление

<b>Введение</b> .....	4
<b>Глава 1 Устойчивые соглашения в одношаговых играх управления загрязнением окружающей среды</b> .....	22
1.1 Модель .....	22
1.2 Равновесия при различных сценариях .....	23
1.2.1 Некооперативный сценарий .....	25
1.2.2 Кооперативный сценарий .....	26
1.2.3 Частично кооперативные сценарии .....	26
1.2.4 Анализ различных сценариев .....	28
1.3 Определение устойчивых коалиционных структур .....	32
1.3.1 Устойчивые по Нэшу сценарии в случае нетрансферабельных выигрышей .....	32
1.3.2 Сценарии индивидуально устойчивых коалиционных структур в случае нетрансферабельных выигрышей .....	33
1.4 Разработка механизмов, обеспечивающих устойчивость сценариев кооперации .....	34
1.4.1 Устойчивость по Нэшу коалиционных структур с трансферабельными выигрышами .....	35
1.4.2 Механизм налогообложения .....	39
1.4.3 Создание множества допустимых коалиционных структур .....	41
1.5 Заключение к главе 1 .....	47
<b>Глава 2 Устойчивые соглашения в динамических играх управления загрязнением окружающей среды</b> .....	48
2.1 Моделирование соглашений с использованием механизма компенсаций .....	48
2.1.1 Равновесия при различных сценариях .....	50
2.1.2 Сравнение сценариев .....	55

2.1.3 Числовой пример .....	57
2.2 Устойчивость по Нэшу и индивидуальная устойчивость различных кооперативных сценариев .....	61
2.2.1 Равновесия при различных сценариях .....	62
2.2.2 Исследование устойчивых коалиционных структур .....	73
2.2.3 Устойчивые коалиционные структуры при схемах трансферных платежей .....	81
2.3 Заключение к главе 2 .....	86
<b>Глава 3 Ценность информации в дифференциальной игре управления загрязнением окружающей среды .....</b>	<b>88</b>
3.1 Ценность информации при неопределенности терминальных затрат .....	88
3.1.1 Терминальные издержки известны .....	90
3.1.2 Терминальные издержки неизвестны .....	92
3.1.3 Оценка ценности информации .....	93
3.2 Ценность информации при неопределенности об изменении верхней границы допустимого управления .....	95
3.2.1 Изменение верхней границы допустимого управления .....	97
3.2.2 Верхняя граница допустимого управления: $\bar{b} < b$ .....	97
3.2.3 Верхняя граница управления $\bar{b} \geq b$ .....	100
3.2.4 Оценка ценности информации .....	101
3.3 Ценность информации о начальном уровне загрязнения .....	102
3.3.1 Кооперативный случай .....	103
3.3.2 Некооперативный случай .....	107
3.3.3 Нормированная ценность информации о начальном запасе ....	108
3.3.4 Анализ теоретических результатов и численные примеры .....	110
3.4 Заключение к главе 3 .....	114
<b>Заключение .....</b>	<b>116</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>119</b>

# Введение

## **Актуальность темы диссертационного исследования**

Анализ устойчивости, широко применяемый в математике, технике, экономике, экологии, медицине и т.д., в целом представляет собой комплексный метод оценки стабильности сложной системы или процесса. Важность анализа устойчивости заключается в том, что устойчивость системы позволяет специалистам делать выводы и обобщения о возможных траекториях развития сложных систем. Или, наоборот, ученые способны определить порог, пересечение которого означает, что система переходит в область неустойчивости или даже разрушается. Таким же образом, равновесие в теории игр можно трактовать как устойчивую ситуацию, при которой исход игры может быть соответствующим образом спрогнозирован. Кроме того, конечной целью анализа устойчивости является определение условий устойчивости системы или разработка подходящего механизма, при котором система остается устойчивой. Аналогичным образом, с помощью теории игр, можно выработать стратегии игроков, учитывающие условия равновесия, завершая анализ.

Если же речь идет о реализации условий устойчивости, то в действительности все иначе. Необходимо учитывать внутренние и внешние факторы и элементы системы. С одной стороны, целевая функция и структура, являющиеся внутренними характеристиками системы, оказывают существенное влияние на проведение анализа устойчивости: используются линейные и нелинейные зависимости. Допустим, если целью является устойчивая коалиционная структура в многоагентной системе, например, международные соглашения по охране окружающей среды, то при анализе используются нелинейные модели. В то же время при моделировании системы с помощью линейной регрессионной модели система оказывается линейной. С другой стороны, внешние элементы, воздействующие на систему, содержат неопределенную информацию и могут косвенно влиять на нее извне. В дифференциальных играх игроки выбирают свои страте-

гии на основе текущего состояния информации, и при изменении информации, игроки должны соответствующим образом изменить свои стратегии. В данной диссертации исследование акцентируется на двух аспектах анализа устойчивости. В центре внимания данной диссертации находится анализ устойчивости соглашений, заключаемых для решения экологических проблем, например, вызванных выбросами парниковых газов, что является очень важным и сложным для моделирования. Значимым представляется применение анализа устойчивости в играх совместного управления загрязнением окружающей среды, когда игроки могут отклоняться от жестких ограничений, предписанных соглашениями.

Мы наблюдаем, как изменение климата, вызванное в значительной степени выбросами парниковых газов, угрожает множеству живых существ более актуально, чем когда-либо раньше. Такие природные катаклизмы, как засуха, наводнения, лесные пожары, таяние ледников и т.п., постоянно напоминают нам о непредвиденных проблемах, с которыми мы сталкиваемся. В настоящее время Европейский Союз предпринимает более активные действия, используя систему торговли квотами на выбросы парниковых газов, запущенную в 2005 году, для постоянного сокращения выбросов и достижения климатической нейтральности к 2050 году. Цель достижения «нулевых выбросов» к 2050 году прописана в «дорожной карте» США, Канады, Австралии, Южной Кореи и Японии.

В то время как развитые страны вносят свой вклад в решение этой проблемы, целенаправленные решения развивающегося мира все еще находятся в стадии разработки. Такие страны, как Индия и Марокко, несомненно, являются лидерами в совершенствовании возобновляемой энергии среди всех развивающихся стран [112]. Китай, одна из наиболее представительных развивающихся стран, добился больших успехов в переходе к «зеленой» энергетике, а его собственная система торговли квотами на выбросы по систематическому ограничению и сокращению выбросов  $CO_2$  действуют с прошлого года [59, 109]. Однако развивающиеся страны, по сравнению с развитыми, в целом не способны быстро реализовать ряд эффективных мер по борьбе с изменением климата без ущерба для своего экономического роста. Более того, в ближайшее десятилетие, по мере дальнейшей ликвидации бедности и повышения уровня жизни в развивающихся странах, на них будет приходиться основная часть прироста энергопотребления, т.е. более высокий уровень выбросов. Устойчивый путь решения этой проблемы

основан на стабильном сотрудничестве.

Диссертация посвящена изучению устойчивости в задачах управления загрязнением окружающей среды с одним или многими участниками, учитывая внутренние и внешние факторы, с точки зрения целевых функций, реализации механизмов управления и неопределенной информации. Кроме того, предполагается, что полученный в данной диссертации механизм достижения устойчивости может быть расширен и применен в других областях для существенного повышения эффективности и надежности исходной системы.

### **Степень разработанности проблемы в литературе**

Говоря о внутренних факторах устойчивости системы, следует отметить, что Организация Объединенных Наций (ООН), выступающая в качестве важного координатора, призывает все страны к конкретным действиям по сокращению выбросов газов. Киотский протокол и Парижское соглашение — это международные обязательства стран на пути решения этой проблемы. Однако заявление США в 2017 году о выходе из Парижского соглашения 2015 года заставляет нас задуматься о сохранении стабильности международных экологических соглашений и приложить усилия для предотвращения подобных случаев [110]. Идея учитывать авторитет стран при моделировании международных экологических соглашений, когда участники страдают в результате отказа некоторых членов от условий соглашения, является одним из способов прогнозирования поведения игроков [13].

Фактически, анализ устойчивых международных экологических соглашений с точки зрения теоретико-игрового подхода можно отнести к концу 1900-х годов, и с тех пор исследования в этой области стали проводиться с учетом различных аспектов. Необходимость сотрудничества между странами или игроками в решении проблем борьбы с загрязнением окружающей среды подчеркивается в [20, 26]. Во многих публикациях, посвященных международным экологическим соглашениям с теоретико-игровой точки зрения, сравнение поведения сотрудничающих и не сотрудничающих стран при наличии только двух участников исследуется в [33, 49, 60, 64, 95]. Взаимодействие двух стран, различающихся по степени чувствительности к выбросам, т.е. чувствительных (развитых) и нечувствительных (развивающихся) стран, моделируется как асимметричная дифференциальная игра [33, 64, 105]. В работе [103] рассматривается дифференциальная игра между развитыми и развивающимися странами, когда иг-

роки взаимодействуют в стохастической среде. В [64] поставлена другая оптимизационная задача, опирающаяся на ту же динамику системы. В [66] исследуется асимметричная игра двух лиц, символизирующая фактор экономической эффективности и экологической чувствительности в конкурентной системе Север-Юг. Случай участия более двух стран в соглашении рассматривается в [28, 52, 77, 93, 99], где авторы сравнивают два случая: (i) страны ведут себя индивидуально рационально, или (ii) они сотрудничают, образуя гранд коалицию. Модель экологических соглашений, участники которых включают в них адаптивные меры, предложена в работе [12], где авторы показывают, что когда адаптация регулируется соглашением, то при определенном размере коалиции достигается устойчивость однокоалиционной структуры.

В то же время частичное сотрудничество или коалиционная структура, образованная коалициями разного размера, является еще одним вариантом моделирования международных экологических соглашений согласно [35]. В данном исследовании структура частичного сотрудничества является основной в изучении международных экологических соглашений. Прежде всего, разнообразие формируемых коалиций предполагает большее количество сценариев и решений проблемы сокращения выбросов, чем сценарий «одна коалиция плюс много индивидуальных игроков». Поскольку прибыль коалиции зависит от разбиения других игроков, это отличает игру от гедонистических игр, в которых выигрыш любой коалиции не зависит от поведения игроков вне коалиции [9, 46, 47]. Кроме того, судя по эмпирическим данным о международных экологических соглашениях, большая коалиция обычно не может быть создана из-за возможного конфликта интересов [111], и такой сценарий может быть нежелательным при отсутствии многосторонней координации [95]. Поэтому рассмотрение нетривиальных сценариев или сценариев с множеством коалиций может быть мотивировано экзогенными факторами, например, расположением стран, политической ситуацией, коммуникационными возможностями и т.д., не позволяющими сформировать гранд коалицию.

Как отмечалось, типичная ситуация, рассматриваемая в литературе, — это когда руководство предлагает подписать экологическое соглашение с рядом стран. Они могут присоединиться к этому соглашению и образовать коалицию, а те, кто не согласен присоединиться, становятся индивидуальными игроками [4, 20, 37, 63]. Также игрокам может быть одновременно предложено несколько

соглашений, и они могут выбрать, к какому из них присоединиться. Возникает вопрос, не является ли коалиционная структура с одним соглашением в каком-то смысле лучше, чем коалиционная структура с несколькими соглашениями? Следует отметить, что в [2, 16, 18, 34, 36] авторы приходят к выводу, что многокоалиционная структура может превосходить первую, хотя в [11] сформулировано, что ни одна многокоалиционная структура не является выгодной. В данном исследовании мы не ограничиваем количество соглашений в обществе, что означает возможность одновременного формирования нескольких коалиций разного размера.

Более того, если можно сформировать любую коалицию и любую коалиционную структуру, то для их практической реализации необходимо убедиться, что они в какой-то степени устойчивы. В существующей литературе по динамическим играм изучение устойчивости сосредоточено на структуре, представленной единственной гранд коалицией [71, 75, 77, 101, 104]. Для решения международной проблемы управления загрязнением окружающей среды обычно предполагается, что может быть сформирована одна «большая» коалиция, а все остальные игроки, не вошедшие в нее, ведут себя как индивидуальные игроки [4, 20, 63]. Понятие устойчивости коалиции, определяемое международными экологическими соглашениями (например, см. [53]), оговаривается условиями внешней и внутренней устойчивости [19, 82]. Эти условия предполагают, что ни у одного игрока нет стимула отклоняться от коалиции и ни один одиночка не получит выгоды от вступления в эту коалицию. Однако в предположении при формировании множества коалиций концепция устойчивости соглашений, включающая внутренние и внешние условия устойчивости, не может охватить все возможные отклонения игроков [16, 18, 23]. Разрешается менять одно соглашение на другое, что может быть выгодно в случае нескольких коалиций. При таком подходе мы можем использовать принципы устойчивости, предложенные для игр с коалиционными структурами. В исследовании проверяются условия устойчивости Нэша [9, 46, 47, 70] и индивидуальной устойчивости [9, 91] для любой возможной коалиционной структуры. В случае нетрансферабельных полезностей, когда игроки не перераспределяют вознаграждения внутри коалиции, маловероятно существование устойчивых коалиционных структур. По этой причине предлагается три механизма, позволяющие разрабатывать устойчивые сценарии сотрудничества или устойчивые коалиционные структу-



ры. Первый из них основан на определении трансферов между членами коалиции для увеличения выплат игрокам, имеющим выгодные отклонения от кооперации. Система трансферов определяется на основе кооперативных решений, разработанных для игр с коалиционными структурами [3, 55, 68]. Одной из таких схем определения трансферных выплат является переговорное решение Нэша [65], которое, в основном, используется для игр с двумя игроками [14, 15, 31, 33, 92, 103], моделирующих кооперативные экологические проблемы. Для более чем двух игроков вектор Шепли [84] стал мощным инструментом для поддержания устойчивого сотрудничества в дифференциальных играх [85, 43, 76]. Схема трансферных выплат также применяется в [88] для разработки экологических соглашений в разных сценариях сотрудничества. В работах [11, 17, 20, 32] трансферабельные полезности рассматриваются при решении экологических проблем. В работе [96] исследуется повторяющаяся игра с трансферами на каждом этапе между странами, загрязняющими атмосферу. При заданных условиях профиль построенных стратегий является абсолютным равновесием по Нэшу, реализующим Парето-оптимальные выигрыши на каждом этапе игры. Второй механизм основан на определении схемы налогообложения игроков с выгодными отклонениями. Мы определяем величину единого налога для всех игроков для любого конкретного сценария, когда игроки платят одинаковый налог в случае отклонения. Дается определение устойчивого сценария при принятой схеме налогообложения. Третий механизм, предлагаемый для того, чтобы сделать желаемый сценарий устойчивым, заключается в определении множества запрещенных коалиций или множества допустимых коалиционных структур. Этот механизм может быть определен на основе теории кооперативных игр с ограниченной кооперацией и решений, определенных для этого класса игр [1, 8, 69]. Ограничивая формирование некоторых коалиций, мы можем предотвратить реализацию нежелательного сценария отклонения. Существуют различные подходы для определения множества допустимых коалиционных структур, например, разрешенные структуры, матроиды, антиматроиды и т.д., и для выбранного класса можно использовать модифицированные концепции кооперативных решений, основанные, например, на векторе Шепли [1, 8]. Более того, даже при наличии описанных выше механизмов вопрос существования устойчивой структуры остается открытым. В данном исследовании мы можем доказать это только теоретически для статической модели, поскольку в дина-

мической модели сделать это сложнее.

Помимо исследования коалиционных структур, в данном исследовании предлагается механизм компенсации (trade-off mechanism) [24], который заключается в модификации целевых функций в дифференциальной игре двух лиц, которая может быть выгодна обоим игрокам. Идея механизма компенсации заимствована из теории цепей поставок. Как правило, используются две основные модели цепей поставок: прямая цепь поставок и замкнутая цепь поставок. В прямой цепи поставок поток товара по цепи является однонаправленным. Другой популярной моделью является замкнутая цепь поставок, в которой использованный продукт может быть переработан и снова продан после повторного производства. Более того, в отличие от прямых цепей поставок, замкнутая цепь поставок имеет свою неотъемлемую характеристику: замкнутость, что, естественно, делает ее реализацию экологически выгодной [24]. Однако независимо от того, какая модель используется, для решения сложных экологических проблем применяются различные средства управления загрязнением или ограничения, такие как налог на выбросы углерода [97, 98], торговля квотами [40, 58, 106], управление «зелеными» цепочками поставок [50, 107], предпочтение потребителей в пользу низкоуглеродных технологий [40, 51, 97, 100], субсидирование низкоуглеродных технологий [98, 108], разработка эффективных контрактов [24] и др. Механизм компенсации — это своего рода разработанный контракт, выгодный игрокам, который игроки подписывают, и ведут себя в соответствии с его правилами в течение определенного времени. Он отличается от кооперативного сценария, в котором игроки полностью координируют свои действия для максимизации общей прибыли. Кооперативный сценарий требует полного контроля за действиями игроков на кооперативной траектории, в то время как согласно механизму компенсаций после подписания контракта игроки действуют индивидуально и разыгрывают равновесие по Нэшу в переопределенной дифференциальной игре. Таким образом, нет необходимости принимать какой-либо механизм распределения [42, 73, 74, 84] вдоль траектории состояния. Более того, иерархическая структура [58] в модели цепочки поставок показывает, действует ли производитель как лидер или доминирует продавец. Это выгодно отличает механизм компенсации от договора о распределении затрат и доходов [24], поскольку первый не требует координации действий игроков при принятии решений.

Переходя к внешним факторам, можно сказать, что экономическая деятельность по уменьшению загрязнений учитывает множество различных составляющих, и соответствующие решения строятся на основе их статистических оценок, а не на реальных значениях. Совершенно очевидно, что важную роль здесь играет информация. С тех пор как в 1948 г. была предложена модель связи Шеннона-Уивера [83], различные понятия и детали информационной связи, такие как источник информации, передатчик, канал, шум, сообщение, приемник, получатель информации, кодер и декодер, получили широкое распространение. В силу внутреннего характера информации показатель «ценности информации» может дать оценку стоимости знания истинных значений параметров. В случае экологии, анализ ценности информации позволяет определить наилучшую стратегию сбора информации, которая приводит к наибольшей чистой прибыли [38]. В случае медицины, знание истинной информации повышает качество анализа диагностических тестов [67]. В коммерции ценность информации также связана с реализацией продукции [81]. Если говорить кратко, то ценность информации находит широкое применение в различных областях, где неопределенность играет важную роль в процессе принятия решений. Как указано в [54], использование анализа ценности информации началось с 1990-х годов, и область ее применения включает экономику, экологию, энергетику, медицинские системы и т.д., что частично показано в [7, 30, 57, 61, 86, 102]. Например, ценность информации, скрытой в расчетном значении одного конкретного параметра модели, например, оценки потенциального количества нефти, находящегося в месторождении, оказывает существенное влияние на устойчивость решений игроков в их экономической деятельности. Говорим о значении ценности информации, например, когда пытаемся вычислить скорость объекта, движущегося с постоянным ускорением, необходимо знать начальную скорость  $v_0$ . Определение начального условия требуется и в том случае, когда для решения задачи оптимизации мы используем метод градиентного спуска. Перечень подобных случаев может быть существенно расширен, но эти случаи объединяет то, что расчетные или оцененные значения параметров существенно влияют на интересы лица, принимающего решения. В дифференциальных играх не всегда гарантируется точность или достаточность информации при составлении модели. Таким образом, ценность информации важна при измерении ее недостатка или неточности информации при принятии игроками решений и для оценки

влияния на конечную прибыль игроков. В статье [41] авторы подробно описывают влияние информации о неточной оценке начального размера месторождения на прибыль, что может привести к ее уменьшению. Можно рассчитать ценность информации в дифференциальных играх или задачах оптимизации и показать, как неточная информация, получаемая, исходя из неопределенности параметров, влияет на результаты. Существует несколько работ, рассматривающих неопределенность параметров в дифференциальных играх [21, 94]. В частности, в [94] насколько мне известно, впервые изучается проблема управления загрязнением окружающей среды с последующим восстановлением. Проведено исследование ценности кооперации [22], в котором информация представлена в сравнении прибылей игроков при кооперации и при ее отсутствии.

Можно сказать, что два аспекта: внутренние и внешние факторы — имеют существенное значение для анализа устойчивости. Очень важно выяснить, как целевые функции, структура системы, реализация механизмов и неопределенная информация могут повлиять на устойчивость природоохранной и экономической деятельности.

### **Цели работы**

Диссертация посвящена решению экологических проблем путем глубокого исследования анализа устойчивости в этих проблемах. Предметом анализа устойчивости являются игры управления загрязнением окружающей среды со многими игроками (в частном случае, задачи оптимизации с одним игроком). При анализе устойчивости основное внимание уделяется внутренним и внешним факторам. В данной диссертации исследование влияния внутренних элементов, включая целевые функции, структуру системы и реализацию механизмов, в большей степени ориентировано на изучение влияния изначально заданных характеристик системы на ее устойчивость. Если говорить о неопределенной информации, обусловленной внешними элементами, в том числе изменением верхней границы управления и терминальных затрат, оценкой начальных запасов природных ресурсов, то исследуется устойчивость принятия решений игроками в условиях недостатка или отсутствия необходимой информации.

В целом данную диссертацию можно рассматривать как руководство для анализа устойчивости по ряду проблем, а также применять существующие или новые концепции и аналитические методы для решения таких задач, как смена работы, переезд в другую страну, развод или главным образом проблем, возни-

кающих в многоагентных системах.

### **Основные задачи**

Для реализации плана исследования были сформулированы следующие основные задачи:

1. В рамках статической модели необходимо рассмотреть игру между странами или компаниями, загрязняющими общий регион, когда страны по-разному относятся к политике уменьшения загрязнений. Одной из задач является рассмотрение различных сценариев: (1) когда все страны ведут себя индивидуально рационально, (2) когда все они образуют единую коалицию, и (3) когда страны частично сотрудничают, что предполагает формирование различных коалиционных структур. Также предполагается изучение устойчивости всех коалиционных структур. В исследовании предлагаются три способа построения устойчивой коалиционной структуры в случае, если она не является по сути устойчивой. Эти способы основаны на трансферных платежах, ограничениях на формирование коалиций, на создании системы затрат при отклонении от коалиции, определяющих договор между сотрудничающими странами. Все эти схемы обеспечивают устойчивость по Нэшу и/или индивидуальную устойчивость предпочитаемой коалиционной структуры.
2. Одна из задач состоит в исследовании несимметричной дифференциальной игры управления загрязнением окружающей среды с участием развивающейся и двух развитых стран. Развивающаяся страна нечувствительна к загрязнениям окружающей среды, в отличие от развитых стран. Предполагая частичную кооперацию, необходимо рассмотреть все коалиционные структуры, состоящие из трех игроков, и получить для них условия устойчивости на основе двух подходов: (1) устойчивость по Нэшу и (2) индивидуальная устойчивость. Во-первых, рассматривается случай нетрансферабельных выигрышей. Во-вторых, предлагается схема трансфертных платежей, позволяющая сделать конкретные коалиционные структуры устойчивыми. Предлагается механизм компенсаций, при котором частичная нагрузка по устранению загрязнения распределяется между развитыми и развивающимися странами. В свою очередь, развитая страна делится с развивающейся страной своей прибылью для эффективности работы ме-

ханизма. Исследуется эффективность механизма компенсаций путем сравнения его с кооперативным и некооперативным случаями.

3. Для дифференциальных игр управления загрязнением окружающей среды одной из задач является изучение того, как может повлиять на выигрыш ситуация, при которой требуемая информация неизвестна. Для этого, в частности, необходимо рассмотреть два сценария: (1) изучить роль знания о терминальной прибыли и (2) проанализировать влияние знания о точном значении верхней границы управления. В случае игр двух лиц управления загрязнением окружающей среды с неопределенным начальным объемом загрязнения предлагается модель добычи ресурсов с процессом восстановления, при которой фирмы обязаны выплачивать компенсацию на восстановление загрязненных и аварийных территорий. Моделирование оценки начального объема исследуется в кооперативном и некооперативном вариантах. В обеих играх задача состоит в определении ценности информации или нормализованной ценности информации, чтобы выявить влияние неопределенности на конечный выигрыш игроков.

### **Научная новизна**

В диссертационной работе впервые предложен механизм компенсаций, связывающий целевые функции выигрышей двух асимметричных игроков в играх управления загрязнением окружающей среды, как один из инструментов анализа устойчивости. Этот механизм компенсаций заимствован из теории цепей поставок, в которой функции выигрышей участников взаимосвязаны. Отличительной особенностью механизма компенсаций является то, что он не требует полной координации действий игроков во времени, которая необходима при решении задачи максимизации общей прибыли. Кроме того, в работе проводится сравнение предложенного механизма компенсаций с кооперативным решением и равновесием по Нэшу. На численном примере показано, что при решении задачи управления загрязнением окружающей среды механизм компенсаций может быть предпочтительней, чем кооперативный сценарий игры.

При анализе устойчивости коалиционных структур, образуемых игроками, во-первых, изучается множество структур от гранд коалиции и структуры, состоящей только из индивидуальных игроков, до частично кооперативных структур, в которых могут быть созданы множественные коалиции. Частичная ко-

операция рассматривается как сценарий «большая коалиция и несколько индивидуальных игроков». Во-вторых, для подтверждения устойчивости коалиционных структур в отличие от внутренней и внешней устойчивости используются два подхода (из теории игр с коалиционными структурами): устойчивость по Нэшу и индивидуальная устойчивость. Можно определить, что индивидуальная устойчивость гораздо более целесообразна для экологических соглашений, поскольку любой игрок может отклонить вступление другого игрока в коалицию, если принятие нового участника влечет за собой уменьшение прибыли.

Что касается механизмов реализации устойчивых сценариев, в работе предлагается инструментарий для того, чтобы сделать коалиционные структуры устойчивыми. Для этого в работе представлены три механизма: (1) схема трансферных платежей, когда выигрыши могут перераспределяться между игроками для поддержания устойчивости кооперации, (2) схема налогообложения, при которой определяется величина единого для всех игроков налога для предотвращения возможных отклонений и (3) моделирование множества допустимых коалиций, которые могут быть определены для ограничения кооперации. В рамках третьего подхода некоторые коалиционные структуры запрещаются, что позволяет обеспечить устойчивость большего числа сценариев.

В третьей части диссертации, которая посвящена изучению неполной информации, подробно рассматриваются три случая: (1) ценность информации при неопределенности терминальных затрат, (2) ценность информации при неопределенности возможного регулирования верхней границы управления и (3) ценность информации о начальном уровне загрязнения. Первые два случая вызваны тем, что управляющий орган или регулятор внедряет новую стратегию, учитывая текущее производство. Третий случай, касающийся оценки начального уровня загрязнений, возникает под влиянием лица, принимающего решение, и влияет на устойчивость производственного плана. Насколько мне известно, проблема управления загрязнением с процессом восстановления впервые рассматривается в данной диссертации с точки зрения ценности информации. В этой части диссертационной работы предлагается новый показатель нормированной ценности информации для измерения полезности информации в трех вышеуказанных случаях.

### **Методы исследования**

В диссертации используются методы теории игр (условия устойчивости и

механизмы создания устойчивых коалиционных структур, равновесие по Нэшу, оптимальность по Парето), решения дифференциальных игр (условия устойчивости, принцип максимума Понтрягина, уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, устойчивость решений), теории кооперативных игр (с трансферабельными и нетрансферабельными полезностями, характеристические функции), игр с коалиционными структурами, теории оптимизации (условия Куна-Таккера), теории вероятностей (ценность информации), теории контрактов.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Данная диссертационная работа посвящена анализу устойчивости применительно к теоретико-игровым и оптимизационным задачам, теоретическая значимость которого заключается в описании важных характеристик исследуемых систем или процессов. Теоретические результаты включают анализ устойчивости, включая устойчивость по Нэшу и индивидуальную устойчивость, проектирование механизмов схем трансферных платежей в случае трансферабельных полезностей, создание схем налогообложения, определение множества допустимых коалиционных структур. Одним из теоретических результатов работы является процедура определения модифицированных функций выигрышей игроков в задачах управления загрязнением окружающей среды с двумя игроками, стимулирующих кооперацию, а также исследование влияния неопределенности информации о параметрах системы на стратегии и выигрыши игроков.

Практическая значимость работы заключается в предложенных подходах к моделированию соглашений в области охраны окружающей среды и решению проблем управления загрязнением, которые несомненно являются самыми значимыми за последние десятилетия. Международное сообщество активно поддерживает сотрудничество в решении экологических проблем. Используя возможность кооперации, идея создания гранд коалиции или коалиции типа «одна большая коалиция и много индивидуальных игроков» не находит популярности в некоторых обществах из-за существующих ограничений на сотрудничество, что приводит к обсуждению в данной работе случая множественных коалиций. Более того, показывается возможность «покупать сотрудничество» с помощью различных методов, разработанных для поддержания устойчивости конкретных коалиционных структур. «Покупка сотрудничества» — конструктивное проявление принципа торговли. Применение моделей с неопределенной информацией широко и не ограничивается задачами управления загрязнением



окружающей среды. Наличие точной информации в экономической деятельности, безусловно, важно для принимающего решения, чтобы действовать правильно. Естественно, что на устойчивость принятия решений может влиять неопределенная информация, и в диссертации эта проблема тщательно изучается.

Два важнейших понятия: устойчивость по Нэшу и индивидуальная устойчивость — подробно изучаются в главах 1 и 2. В частности, в главе 1 исследуется статическая модель, в которой игроки создают все возможные структуры, включающие сценарии с двумя коалициями. В качестве теоретического инструментария, позволяющего сделать желаемую структуру устойчивой, предлагаются три механизма, и реализация каждого демонстрируется на численном примере. Динамическая модель управления загрязнением окружающей среды описана в главе 2. Здесь также предложен механизм компенсаций с двумя игроками на основе проектирования контрактов из теории цепочек поставок. Кроме того, изучается дифференциальная игра трех лиц, для которой предлагается схема трансферных платежей и изучается устойчивость коалиционных структур в динамике. В последней главе проводится анализ неопределенной информации при решении задач управления загрязнением окружающей среды. В частности, в главе 3 изучаются три сценария, демонстрирующие отклонения, вносимые в процесс принятия решений из-за неполной информации, измеренные нормированной ценностью информации.

Исследования, проведенные в диссертации, поддержаны государственной стипендией Китая № 202109010149 (2022-2025) и грантом Российского научного фонда № 22-11-00051 «Разработка методов управления многоагентными системами в условиях конфликта» (2023).

### **Краткое описание работы**

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Каждая глава начинается с описания модели, основных определений и постановки задач. В конце каждой главы приводятся численные примеры для наглядной иллюстрации теоретических результатов. Диссертация содержит 129 страниц (117 страниц в варианте на английском языке), включая 19 таблиц и 14 рисунков. В списке литературы приведено 112 наименований, перечисленных в алфавитном порядке.

Первая глава посвящена изучению условий устойчивости, найденных для

каждой из возможных коалиционных структур, включая гранд коалицию, частичную кооперацию (одна коалиция и несколько индивидуальных игроков или структура, состоящая из нескольких коалиций), а также структуру, состоящую только из индивидуальных игроков, и изучению механизмов создания устойчивых структур. В разделе 1.1 описывается статическая модель с четырьмя игроками. Выбор статической модели обусловлен необходимостью снижения сложности нахождения равновесий. В разделе 1.2 найдены равновесия для всех возможных коалиционных структур. В разделе 1.3 после определения понятий устойчивости Нэша и индивидуальной устойчивости представлен анализ устойчивости на основе нетрансферабельных выигрышей. Поскольку нетрансферабельные выигрыши не всегда удовлетворяют условиям устойчивости, мы предлагаем другие способы для того, чтобы сделать устойчивыми нужные коалиционные структуры. В разделе 1.4 описаны три механизма, включающие схему трансферных платежей, схему налогообложения и разработку структур допустимых коалиционных структур. В некоторых случаях теоретически подтверждается существование устойчивой коалиционной структуры, а в некоторых случаях это представлено на численных примерах. Наконец, в разделе 1.5 подводятся итоги первой главы.

В отличие от статической модели, рассмотренной в первой главе, во второй главе рассматриваются динамические игры. В разделе 2.1 предлагается механизм компенсаций, заимствованный из теории контрактов в цепочках поставок. По сравнению с полностью кооперативным сценарием, механизм компенсаций не требует полной координации поведения игроков. В данном разделе преимущества механизма компенсаций анализируются в сравнении с кооперативным и некооперативным сценариями, где в качестве критерия выбран уровень загрязнения окружающей среды. Результаты демонстрируются на численных примерах. В разделе 2.2 рассматривается дифференциальная игра с тремя асимметричными игроками, различающимися своим отношением к проблеме уменьшения загрязнения (чувствительные и нечувствительные игроки). Представлены три типа сценариев сотрудничества и применены концепции устойчивости Нэша и индивидуальной устойчивости в динамическом случае. Затем проводится идентификация устойчивых структур в случаях нетрансферабельных и трансферабельных прибылей. Кроме того, определяется граница трансферных платежей для развитых стран, чтобы «купить кооперацию» с развивающимися стра-

нами и сохранить устойчивый сценарий кооперации. Теоретические результаты подтверждаются двумя численными примерами. В разделе 2.3 дается краткий обзор результатов главы.

В отличие от внутренних факторов устойчивости, изучаемых в главах 1 и 2, в последней главе исследуется влияние внешних факторов, в частности, неопределенной информации о параметрах на устойчивость системы. В разделе 3.1 исследуется ценность информации в случае неопределенности терминальных затрат. В частности, рассматривается следующая ситуация. Когда игрок узнает, что у него будут терминальные издержки, то первоначальная стратегия, построенная без этой информации, может быть заменена на улучшенную. В разделе 3.2 рассматривается ценность информации в случае неопределенности относительно возможной корректировки верхней границы управления. Аналогично, при появлении информации об изменении верхней границы управления ожидается, что стратегия может быть скорректирована соответствующим образом. В разделе 3.3 исследуется значение информации о неопределенности в оценке начального запаса загрязнений. При завышенной или заниженной его оценке изменяется конечная выплата: при кооперативном и некооперативном сценариях выигрыши игроков также зависят от неточных оценок. Раздел 3.4 содержит краткое заключение к главе 3.

В конце диссертации дается общее заключение о всей работе. В нем также обсуждаются возможные направления дальнейших исследований.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Определены условия устойчивости по Нэшу и индивидуальной устойчивости сценариев кооперации для статических и динамических игр управления загрязнением окружающей среды. В частности, в явном виде получены условия устойчивости коалиционных структур для игр трех и четырех лиц.
2. Разработана схема трансферных платежей для того, чтобы сделать желаемую коалиционную структуру устойчивой путем перераспределения прибылей между развитыми и развивающимися странами для поддержания кооперации в случае трансферабельных выигрышей.
3. Предложена схема налогообложения, увеличивающая издержки при отклонении от заданной коалиционной структуры, при которой отклонения игроков становятся невыгодными. В частности, предложена схема единого

налога на отклонения, основанная на вычислении наибольшей выгоды от отклонения.

4. Предложен метод определения множества допустимых коалиций путем введения ограничений на формирование нежелательных коалиций. Формирование множества допустимых коалиций эквивалентно введению ограничений на возможные отклонения игроков.
5. Для динамической модели управления загрязнением окружающей среды получены условия существования устойчивых коалиционных структур, которые проиллюстрированы на численных примерах. В статической модели игры существование устойчивой структуры может быть теоретически доказано при существовании схемы трансферных платежей и определении множества допустимых коалиций.
6. В качестве другого подхода к поддержанию кооперации предлагается механизм компенсаций, основанный на теории контрактов для цепочек поставок, который заключается в том, что развитая страна передает часть своей прибыли развивающейся стране в обмен на ее участие в затратах по уменьшению загрязнения окружающей среды. Эта идея реализуется путем разработки модифицированных целевых функций игроков.
7. Рассчитана ценность информации для задач управления загрязнениями в случае неопределенных терминальных затрат, неопределенной верхней границы управления и неточной оценки начального уровня загрязнения.

### **Апробация результатов**

Основные результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались на международных конференциях «Теория игр и менеджмент» (Санкт-Петербург, 2021, 2023); «Теория игр и приложения» (Санкт-Петербург, 2022); «Математическая теория оптимизации и исследование операций» (онлайн, 2022; Екатеринбург, 2023), а также на семинарах Кафедры математической теории игр и статистических решений Санкт-Петербургского государственного университета.

### **Публикации**

По результатам диссертации опубликованы следующие работы: [21, 22, 87, 88, 89], статья [90] направлена в журнал и находится на рецензировании.

## Благодарности

Почти шесть лет учебы в России, все мои счастливые моменты, а также все сложные периоды — все это становится очень существенным в этот момент. Особую благодарность я хочу выразить профессору Парилиной за огромную поддержку моих исследований, терпение и терпимость к моим ошибкам. Каждый раз, когда я заходил в тупик в своих исследованиях или выбивался из сил, она всегда поддерживала меня и вдохновляла двигаться дальше. Мне очень повезло, что я стал Вашим аспирантом. Спасибо Вам, профессор. Я также очень благодарен профессору Громовой за ее неоценимую помощь в моей работе и благодарен Анне Тур за ее поддержку моих исследований. Искренне прошу прощения у бабушки, моих дорогих родителей, сестры и подруги за то, что не мог проводить с ними много времени. Спасибо всем вам.

## Глава 1

# Устойчивые соглашения в одношаговых играх управления загрязнением окружающей среды

В этой главе мы проводится анализ устойчивости статической модели управления загрязнением окружающей среды с четырьмя игроками. Проверяется устойчивость по Нэшу и индивидуальная устойчивость всех возможных коалиционных структур, включая сценарии с двумя коалициями. Кроме того, для придания устойчивости конкретной коалиционной структуре предложены три механизма — схема трансферных платежей, схема налогообложения и создание множества допустимых коалиций. Доказано существование устойчивой коалиционной структуры при некоторых значениях параметров.

### 1.1 Модель

Пусть множество стран или игроков есть  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ , причем игроки относятся к двум типам:  $I$  — чувствительный к загрязнениям игрок (развитая страна) и  $II$  — нечувствительный к загрязнениям игрок (развивающаяся страна)<sup>1</sup>. Тип игрока определяет его стратегию в деятельности по уменьшению загрязнения окружающей среды и его отношение к экологической политике. Пусть игроки 1, 2 относятся к типу  $I$ , а игроки 3, 4 — к типу  $II$ .

Страны производят товары, и эта производственная деятельность приводит к выбросам. Стратегией игрока  $i$  является  $e_i$ , что представляет собой уровень выбросов. В соответствии с постановкой, рассмотренной в [33, 64], запас загряз-

<sup>1</sup>Для простоты расчетов мы рассмотрим случай четырех игроков, но полученные результаты и все предлагаемые в статье схемы могут быть применены к играм с любым числом игроков.

нений  $S$  задается следующим образом:

$$S = \mu \sum_{i \in N} e_i + \delta S_0, \quad S_0 > 0, \quad (1.1)$$

где  $\mu > 0$  — предельное влияние на общий уровень загрязнений  $S$ , оказываемое выбросами игроков, а  $\delta > 0$  — скорость поглощения загрязнений природой. Величина  $S_0$  — начальный уровень накопления загрязнений до выбора игроками своих стратегий.

Если предположить, что нечувствительный и чувствительный игроки по-разному относятся к политике уменьшения загрязнения окружающей среды с точки зрения ущерба, наносимого их производственной деятельностью, то это моделируется с помощью различных функций выигрыша. Чувствительный игрок стремится максимизировать свой выигрыш, который определяется формулой:

$$\max_{e_i > 0} W_i = \alpha_i e_i - \frac{1}{2} e_i^2 - \frac{1}{2} \beta S^2, \quad (1.2)$$

где  $\alpha_i > 0$ ,  $\beta > 0$  — параметры стоимости единицы ущерба, тогда как функция выигрыша нечувствительного игрока имеет вид:

$$\max_{e_i > 0} W_i = \alpha_i e_i - \frac{1}{2} e_i^2. \quad (1.3)$$

Заметим, что функция выигрыша (1.2) при  $\beta = 0$  определяет выигрыш любого чувствительного игрока.

## 1.2 Равновесия при различных сценариях

В данном разделе мы предполагаем, что игроки могут сотрудничать и формировать коалиции любого размера, поэтому сотрудничество может быть полным, когда все игроки объединяются в единую коалицию, или частичным, когда могут формироваться коалиции любого размера. Таким образом, в рамках частично кооперативного сценария может формироваться не только гранд коалиция, но и коалиции меньшего размера, что предполагает формирование специфических коалиционных структур. Под коалиционной структурой  $\pi$  мы понимаем любое разбиение множества игроков, то есть  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  такое, что  $B_j \subset N$ ,  $B_j \cap B_k = \emptyset$ ,  $\cup_{j=1}^m B_j = N$ . Например, число коалиционных структур, которые могут быть образованы четырьмя игроками, равно 15.

Определим возможные коалиционные структуры или сценарии в игре с четырьмя игроками:

1. *Некооперативный сценарий*:  $\pi_1 = \{\{I\}, \{I\}, \{II\}, \{II\}\}$ ;

2. *Кооперативный сценарий*:  $\pi_2 = \{\{I, I, II, II\}\}$ ;

3. *Частично кооперативные сценарии*:

(а) Случай 1  $\{\{I, I\}, \{II\}, \{II\}\}, \{\{I, II\}, \{I\}, \{II\}\}$  (тип “2 + 1 + 1”: одна коалиция с двумя членами, остальные — индивидуальные игроки):

$$\pi_{3_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}, \pi_{3_2} = \{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}, \pi_{3_3} = \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}, \\ \pi_{3_4} = \{\{2, 3\}, \{1\}, \{4\}\}, \pi_{3_5} = \{\{2, 4\}, \{1\}, \{3\}\}, \pi_{3_6} = \{\{3, 4\}, \{1\}, \{2\}\};$$

(б) Случай 2  $\{\{I, I\}, \{II, II\}\}, \{\{I, II\}, \{I, II\}\}$  (тип “2+2”: две коалиции с двумя членами в каждой коалиции):

$$\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \pi_{4_2} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \pi_{4_3} = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\};$$

(с) Случай 3  $\{\{I, I, II\}, \{II\}\}, \{\{I, II, II\}, \{I\}\}$  (тип “3 + 1”: одна коалиция с тремя членами):

$$\pi_{5_1} = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}, \pi_{5_2} = \{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}, \\ \pi_{5_3} = \{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}, \pi_{5_4} = \{\{2, 3, 4\}, \{1\}\}.$$

Рассмотрим игру, описанную в предыдущем разделе, когда множество игроков разбито на коалиции в соответствии со структурой  $\pi$ . Сделаем предположения о поведении игроков:

1. Игроки, входящие в коалицию, выбирают стратегии, максимизирующие выигрыш этой коалиции, который определяется как сумма выигрышей игроков, входящих в эту коалицию. Поэтому коалиция рассматривается как один игрок.
2. Коалиции ведут себя некооперативно по отношению друг к другу, и равновесие по Нэшу рассматривается как принцип равновесия в игре между коалициями.

В следующих утверждениях приводятся условия равновесия по Нэшу в игре при различных коалиционных структурах.



### 1.2.1 Некооперативный сценарий

**Утверждение 1.1.** В некооперативном сценарии  $\pi_1$  равновесие по Нэшу имеет вид:

$$e_i^{nc} = \frac{\alpha_i + \beta\mu^2\alpha_i - \beta\mu^2 \sum_{k \in M \setminus i} \alpha_k - \beta\mu\delta S_0}{1 + 2\beta\mu^2}, \quad i = 1, 2,$$

$$e_j^{nc} = \alpha_j, \quad j = 3, 4,$$

когда равновесные стратегии неотрицательны, равновесный запас загрязнений равен

$$S^{nc} = \frac{\delta S_0 + \alpha_{1234}\mu}{1 + 2\beta\mu^2}, \quad (1.4)$$

где  $\alpha_{1234} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ .

*Доказательство.* Во-первых, функция выигрыша игрока 3 и игрока 4 не зависит от переменной  $S$  и стратегий других игроков, поэтому легко получить, что максимальные значения их выигрышей равны  $W_3^{\pi_1} = \frac{\alpha_3^2}{2}$  и  $W_4^{\pi_1} = \frac{\alpha_4^2}{2}$ , что достигается при  $e_3 = \alpha_3$  и  $e_4 = \alpha_4$  соответственно.

Во-вторых, игрок 1 имеет тип  $I$ . Его оптимизационная задача имеет вид:

$$W_1^{\pi_1} = \alpha_1 e_1 - \frac{1}{2} e_1^2 - \frac{1}{2} \beta S^2 \rightarrow \max_{e_1 \geq 0}.$$

Подставляя  $S$  в (1.1), перепишем задачу максимизации следующим образом:

$$W_1^{\pi_1} = \alpha_1 e_1 - \frac{1}{2} e_1^2 - \frac{1}{2} \beta (\delta S_0 + \mu\alpha_{34} + \mu e_1 + \mu e_2)^2 \rightarrow \max_{e_1 \geq 0},$$

где  $\alpha_{34} = \alpha_3 + \alpha_4$ .

Приравняем первую производную  $W_1^{\pi_1}$  по  $e_1$  к нулю, и определим, что игрок 1 может получить максимальную прибыль, когда

$$e_1^{nc} = \frac{\alpha_1 - \beta\mu(\delta S_0 + \mu\alpha_{34} + \mu e_2^{nc})}{1 + \beta\mu^2},$$

исходя из того, что вторая производная по  $e_1^{nc}$  отрицательна. Аналогично, для игрока 2 получаем его наилучшую стратегию ответа  $e_2^{nc} = \frac{\alpha_2 - \beta\mu(\delta S_0 + \mu\alpha_{34} + \mu e_2^{nc})}{1 + \beta\mu^2}$ .

Решив эти два линейных уравнения, мы получим равновесные стратегии.

Затем, подставив их в выражение (1.1), получим значение равновесного запаса загрязнений (1.4).  $\square$

### 1.2.2 Кооперативный сценарий

**Утверждение 1.2.** В кооперативном сценарии  $\pi_2$  оптимальные стратегии игроков имеют вид:

$$e_i^c = \frac{\alpha_i + 6\beta\mu^2\alpha_i - 2\beta\mu^2 \sum_{j \in N \setminus i} \alpha_j - 2\beta\mu\delta S_0}{1 + 8\beta\mu^2}, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\},$$

когда оптимальные стратегии неотрицательны, запас загрязнений при сценарии  $\pi_2$  составляет

$$S^c = \frac{\delta S_0 + \alpha_{1234}\mu}{1 + 8\beta\mu^2}. \quad (1.5)$$

*Доказательство.* Задача оптимизации гранд коалиции  $N$  имеет вид:

$$W^{\pi_2} = \sum_{i=1}^4 (\alpha_i e_i - \frac{1}{2} e_i^2) - \beta S^2 \rightarrow \max_{e_i \geq 0, i \in N}. \quad (1.6)$$

Найдя первую производную по каждому  $e_i$  и убедившись в отрицательном знаке второй производной, мы получаем оптимальные стратегии игроков:

$$e_i^c = \frac{\alpha_i - 2\beta\mu(\delta S_0 + \mu \sum_{j \in N \setminus i} e_j^c)}{1 + 2\beta\mu^2}. \quad (1.7)$$

Решив эти четыре линейных уравнения, мы получаем окончательный результат. Подставив выражения этих стратегий в (1.1), получим оптимальное значение запаса (1.5) для кооперативного сценария.  $\square$

### 1.2.3 Частично кооперативные сценарии

В этом разделе мы исследуется равновесное поведение игроков при частичном сотрудничестве.

**Утверждение 1.3.** При частично кооперативных сценариях коалиционное равновесие по Нэшу и соответствующий запас выбросов имеют вид:

1.  $\pi_{3_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ : равновесие по Нэшу определяется следующим образом:

$$e_i^{3_1} = \frac{\alpha_i + 2\beta\mu^2\alpha_i - 2\beta\mu^2 \sum_{k \in N \setminus i} \alpha_k - 2\beta\mu\delta S_0}{1 + 4\beta\mu^2}, \quad i = 1, 2,$$

$$e_j^{3_1} = \alpha_j, \quad j = 3, 4.$$

Уровень загрязнений равен

$$S^{3_1} = \frac{\delta S_0 + \alpha_{1234}\mu}{1 + 4\beta\mu^2}.$$

2.  $\pi_{3_2} = \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}$ : равновесие по Нэшу определяется следующим образом:

$$e_i^{3_2} = \frac{\alpha_i + 2\beta\mu^2\alpha_i - \beta\mu^2 \sum_{k \in N \setminus i} \alpha_k - \beta\mu\delta S_0}{1 + 3\beta\mu^2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$e_4^{3_2} = \alpha_4.$$

Уровень загрязнений равен

$$S^{3_2} = \frac{\delta S_0 + \alpha_{1234}\mu}{1 + 3\beta\mu^2}. \quad (1.8)$$

3.  $\pi_{3_3} = \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}$ : равновесие по Нэшу определяется стратегиями:

$$e_i^{3_3} = \frac{\alpha_i + 2\beta\mu^2\alpha_i - \beta\mu^2 \sum_{k \in N \setminus i} \alpha_k - \beta\mu\delta S_0}{1 + 3\beta\mu^2}, \quad i = 1, 2, 4,$$

$$e_3^{3_3} = \alpha_3.$$

Уровень загрязнений равен

$$S^{3_3} = \frac{\delta S_0 + \alpha_{1234}\mu}{1 + 3\beta\mu^2}. \quad (1.9)$$

4.  $\pi_{4_2} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ : равновесие по Нэшу определяется по формуле:

$$e_i^{4_2} = \frac{\alpha_i + 3\beta\mu^2\alpha_i - \beta\mu^2 \sum_{k \in N \setminus i} \alpha_k - \beta\mu\delta S_0}{1 + 4\beta\mu^2}, \quad i \in M.$$

Уровень загрязнений равен

$$S^{4_2} = \frac{\delta S_0 + \alpha_{1234}\mu}{1 + 4\beta\mu^2}. \quad (1.10)$$

5.  $\pi_{5_1} = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ : равновесие по Нэшу определяется следующим образом:

$$e_i^{5_1} = \frac{\alpha_i + 4\beta\mu^2\alpha_i - 2\beta\mu^2 \sum_{k \in N \setminus i} \alpha_k - 2\beta\mu\delta S_0}{1 + 6\beta\mu^2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$e_4^{5_1} = \alpha_4.$$

Уровень загрязнений равен

$$S^{5_1} = \frac{\delta S_0 + \alpha_{1234}\mu}{1 + 6\beta\mu^2}. \quad (1.11)$$

б.  $\pi_{5_2} = \{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$ : равновесие по Нэшу определяется по формуле:

$$e_i^{5_2} = \frac{\alpha_i + 4\beta\mu^2\alpha_i - 2\beta\mu^2 \sum_{k \in N \setminus i} \alpha_k - 2\beta\mu\delta S_0}{1 + 6\beta\mu^2}, \quad i = 1, 2, 4,$$

$$e_3^{5_2} = \alpha_3.$$

Уровень загрязнений равен

$$S^{5_2} = \frac{\delta S_0 + \alpha_{1234}\mu}{1 + 6\beta\mu^2}. \quad (1.12)$$

Во всех ситуациях мы предполагаем, что равновесные стратегии неотрицательны.

*Доказательство.* Опущено. □

В таблице 1.1 приведены равновесные стратегии игроков и равновесные по Нэшу значения уровня загрязнения для каждого сценария.

#### 1.2.4 Анализ различных сценариев

Используя утверждение 1.1–1.3, сначала сравним сценарии, используя в качестве критерия уровень загрязнения в равновесии, а затем — выигрыши игроков. В таблице 1.2 во втором столбце проранжируем равновесные запасы от минимального, обозначенного  $S - 0$  (соответствующего кооперативному сценарию  $\pi_2$ ), до максимального, обозначенного  $S - 4$  (соответствующего некооперативному сценарию  $\pi_1$  и частично кооперативному сценарию  $\pi_{3_6}$ ). Отметим, что уровень загрязнения при частично кооперативных сценариях  $\pi_{5_1}$  и  $\pi_{5_2}$  находится на втором месте. Результаты сравнения уровней загрязнений обобщаются в следствии 1.1.

**Следствие 1.1.** *Равновесный уровень загрязнения, соответствующий различным сценариям, удовлетворяет условиям:*

$$S^c < S^{5_1} = S^{5_2} < S^{3_1} = S^{4_1} = S^{4_2} = S^{4_3}$$

$$= S^{5_3} = S^{5_4} < S^{3_2} = S^{3_3} = S^{3_4} = S^{3_5} < S^{mc} = S^{3_6}.$$

*Доказательство.* Этот результат непосредственно следует из сравнения уровней выбросов, соответствующих возможным сценариям, для которых значения уровня загрязнения в равновесии приведены в утверждениях 1.1–1.3. □

Таблица 1.1: Равновесные по Нэшу стратегии игроков и значения уровня загрязнения для всех сценариев

Сценарий	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$S$
$\pi_{1, \pi_{36}}$	$\frac{\alpha_1 + \beta\mu^2 \alpha_1 - \beta\mu^2 \alpha_{234} - \beta\mu\delta S_0}{1 + 2\beta\mu^2}$	$\frac{\alpha_2 + \beta\mu^2 \alpha_2 - \beta\mu^2 \alpha_{134} - \beta\mu\delta S_0}{1 + 2\beta\mu^2}$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\frac{\delta S_0 + \alpha_{1234}\mu}{1 + 2\beta\mu^2}$
$\pi_2$	$\frac{\alpha_1 + 6\beta\mu^2 \alpha_1 - 2\beta\mu^2 \alpha_{234} - 2\beta\mu\delta S_0}{1 + 8\beta\mu^2}$	$\frac{\alpha_2 + 6\beta\mu^2 \alpha_2 - 2\beta\mu^2 \alpha_{134} - 2\beta\mu\delta S_0}{1 + 8\beta\mu^2}$	$\frac{\alpha_3 + 6\beta\mu^2 \alpha_3 - 2\beta\mu^2 \alpha_{124} - 2\beta\mu\delta S_0}{1 + 8\beta\mu^2}$	$\frac{\alpha_4 + 6\beta\mu^2 \alpha_4 - 2\beta\mu^2 \alpha_{123} - 2\beta\mu\delta S_0}{1 + 8\beta\mu^2}$	$\frac{\delta S_0 + \alpha_{1234}\mu}{1 + 8\beta\mu^2}$
$\pi_{31}, \pi_{41}$	$\frac{\alpha_1 + 2\beta\mu^2 \alpha_1 - 2\beta\mu^2 \alpha_{234} - 2\beta\mu\delta S_0}{1 + 4\beta\mu^2}$	$\frac{\alpha_2 + 2\beta\mu^2 \alpha_2 - 2\beta\mu^2 \alpha_{134} - 2\beta\mu\delta S_0}{1 + 4\beta\mu^2}$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\frac{\delta S_0 + \alpha_{1234}\mu}{1 + 4\beta\mu^2}$
$\pi_{32}, \pi_{34}$	$\frac{\alpha_1 + 2\beta\mu^2 \alpha_1 - \beta\mu^2 \alpha_{234} - \beta\mu\delta S_0}{1 + 3\beta\mu^2}$	$\frac{\alpha_2 + 2\beta\mu^2 \alpha_2 - \beta\mu^2 \alpha_{134} - \beta\mu\delta S_0}{1 + 3\beta\mu^2}$	$\frac{\alpha_3 + 2\beta\mu^2 \alpha_3 - \beta\mu^2 \alpha_{124} - \beta\mu\delta S_0}{1 + 3\beta\mu^2}$	$\alpha_4$	$\frac{\delta S_0 + \alpha_{1234}\mu}{1 + 3\beta\mu^2}$
$\pi_{33}, \pi_{35}$	$\frac{\alpha_1 + 2\beta\mu^2 \alpha_1 - \beta\mu^2 \alpha_{234} - \beta\mu\delta S_0}{1 + 3\beta\mu^2}$	$\frac{\alpha_2 + 2\beta\mu^2 \alpha_2 - \beta\mu^2 \alpha_{134} - \beta\mu\delta S_0}{1 + 3\beta\mu^2}$	$\alpha_3$	$\frac{\alpha_4 + 2\beta\mu^2 \alpha_4 - \beta\mu^2 \alpha_{123} - \beta\mu\delta S_0}{1 + 3\beta\mu^2}$	$\frac{\delta S_0 + \alpha_{1234}\mu}{1 + 3\beta\mu^2}$
$\pi_{42}, \pi_{43}, \pi_{53}, \pi_{54}$	$\frac{\alpha_1 + 3\beta\mu^2 \alpha_1 - \beta\mu^2 \alpha_{234} - \beta\mu\delta S_0}{1 + 4\beta\mu^2}$	$\frac{\alpha_2 + 3\beta\mu^2 \alpha_2 - \beta\mu^2 \alpha_{134} - \beta\mu\delta S_0}{1 + 4\beta\mu^2}$	$\frac{\alpha_3 + 3\beta\mu^2 \alpha_3 - \beta\mu^2 \alpha_{124} - \beta\mu\delta S_0}{1 + 4\beta\mu^2}$	$\frac{\alpha_4 + 3\beta\mu^2 \alpha_4 - \beta\mu^2 \alpha_{123} - \beta\mu\delta S_0}{1 + 4\beta\mu^2}$	$\frac{\delta S_0 + \alpha_{1234}\mu}{1 + 4\beta\mu^2}$
$\pi_{51}$	$\frac{\alpha_1 + 4\beta\mu^2 \alpha_1 - 2\beta\mu^2 \alpha_{234} - 2\beta\mu\delta S_0}{1 + 6\beta\mu^2}$	$\frac{\alpha_2 + 4\beta\mu^2 \alpha_2 - 2\beta\mu^2 \alpha_{134} - 2\beta\mu\delta S_0}{1 + 6\beta\mu^2}$	$\frac{\alpha_3 + 4\beta\mu^2 \alpha_3 - 2\beta\mu^2 \alpha_{124} - 2\beta\mu\delta S_0}{1 + 6\beta\mu^2}$	$\alpha_4$	$\frac{\delta S_0 + \alpha_{1234}\mu}{1 + 6\beta\mu^2}$
$\pi_{52}$	$\frac{\alpha_1 + 4\beta\mu^2 \alpha_1 - 2\beta\mu^2 \alpha_{234} - 2\beta\mu\delta S_0}{1 + 6\beta\mu^2}$	$\frac{\alpha_2 + 4\beta\mu^2 \alpha_2 - 2\beta\mu^2 \alpha_{134} - 2\beta\mu\delta S_0}{1 + 6\beta\mu^2}$	$\alpha_3$	$\frac{\alpha_4 + 4\beta\mu^2 \alpha_4 - 2\beta\mu^2 \alpha_{123} - 2\beta\mu\delta S_0}{1 + 6\beta\mu^2}$	$\frac{\delta S_0 + \alpha_{1234}\mu}{1 + 6\beta\mu^2}$

**Замечание 1.1.** Используются следующие обозначения:  $\alpha_S = \sum_{i \in S} \alpha_i$  для любого  $S \subset N$ .

Таблица 1.2: Равновесные уровни загрязняющих веществ и выигрыши игроков при различных сценариях

Сценарий	Загрязнение ( $S$ )	Игрок 1 ( $W_1$ )	Игрок 2 ( $W_2$ )	Игрок 3 ( $W_3$ )	Игрок 4 ( $W_4$ )
$\pi_1, \pi_{3_6}$	S - 4	$W_1 - 5$	$W_2 - 5$	$W_3 - 0$	$W_4 - 0$
$\pi_2$	S - 0	$W_1 - 0$	$W_2 - 0$	$W_3 - m$	$W_4 - m$
$\pi_{3_1}, \pi_{4_1}$	S - 2	$W_1 - 4$	$W_2 - 4$	$W_3 - 0$	$W_4 - 0$
$\pi_{3_2}, \pi_{3_4}$	S - 3	$W_1 - 3$	$W_2 - 3$	$W_3 - k$	$W_4 - 0$
$\pi_{3_3}, \pi_{3_5}$	S - 3	$W_1 - 3$	$W_2 - 3$	$W_3 - 0$	$W_4 - k$
$\pi_{4_2}, \pi_{4_3}, \pi_{5_3}, \pi_{5_4}$	S - 2	$W_1 - i$	$W_2 - i$	$W_3 - 1$	$W_4 - 1$
$\pi_{5_1}$	S - 1	$W_1 - j$	$W_2 - j$	$W_3 - 4$	$W_4 - 0$
$\pi_{5_2}$	S - 1	$W_1 - j$	$W_2 - j$	$W_3 - 0$	$W_4 - 4$

Теперь сравним сценарии с точки зрения выигрышей игроков, приведенных в таблице 1.2 (последние четыре столбца). Например, рассмотрим чувствительного игрока 1. Проранжируем выигрыши игроков от максимального, обозначенного как  $W_1 - 0$  (соответствующего кооперативному сценарию  $\pi_2$ ), до минимального  $W_1 - 5$  (соответствующего сценариям  $\pi_1$  и  $\pi_{3_6}$ ). Заметим, что в таблице присутствуют ранги  $i, j, m, k$ . Они принимают значения  $i, j \in \{1, 2\}$ , а  $m, k \in \{2, 3\}$ , причем эти значения зависят от параметров следующим образом:

$$\begin{cases} i = 1, j = 2, & \text{если } 28\beta^2\mu^4 - 1 > 0, \\ i = 2, j = 1, & \text{если } 28\beta^2\mu^4 - 1 < 0, \\ i = j = 1, & \text{если } 28\beta^2\mu^4 - 1 = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\begin{cases} m = 2, k = 3, & \text{если } 3 + 8\beta\mu^2 - 28\beta^2\mu^4 < 0, \\ m = 3, k = 2, & \text{если } 3 + 8\beta\mu^2 - 28\beta^2\mu^4 > 0, \\ m = k = 2, & \text{если } 3 + 8\beta\mu^2 - 28\beta^2\mu^4 = 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

**Замечание 1.2.** Должно выполняться условие неотрицательности равновесных по Нэшу или оптимальных стратегий игроков, то есть требуется убедиться, что наименьшие равновесные или оптимальные стратегии в таблице 1.1 являются неотрицательными. Получаем условия,

1. Для чувствительного игрока 1:  $\alpha_1 + 2\beta\mu(\mu(\alpha_1 - \alpha_{234}) - \delta S_0) \geq 0$ ,
2. Для чувствительного игрока 2:  $\alpha_2 + 2\beta\mu(\mu(\alpha_2 - \alpha_{134}) - \delta S_0) \geq 0$ ,
3. Для нечувствительного игрока 3:  $\alpha_3 + \beta\mu(\mu(2\alpha_3 - \alpha_{124}) - \delta S_0) \geq 0$ ,
4. Для нечувствительного игрока 4:  $\alpha_4 + \beta\mu(\mu(2\alpha_4 - \alpha_{123}) - \delta S_0) \geq 0$ ,

т.е. необходимо удовлетворить следующие неравенства:

$$\alpha_i \geq \frac{2\beta\mu}{1+2\beta\mu^2}(\delta S_0 + \mu \sum_{j \in N \setminus i} \alpha_j), \quad i = 1, 2; \quad (1.15)$$

$$\alpha_i \geq \frac{\beta\mu}{1+2\beta\mu^2}(\delta S_0 + \mu \sum_{j=N \setminus i} \alpha_j), \quad i = 3, 4. \quad (1.16)$$

Более того, эти неравенства можно упростить таким образом, что только для двух игроков  $x, y$ ,  $\arg \min_x \alpha_x, x \in \{1, 2\}$  и  $\arg \min_y \alpha_y, y \in \{3, 4\}$ , эти неравенства должны выполняться, так как если предположить, что  $x' = \{1, 2\} \setminus x$  и  $y' = \{3, 4\} \setminus y$ , то имеем

$$\alpha_{x'} \geq \alpha_x \geq \frac{2\beta\mu}{1+2\beta\mu^2}(\delta S_0 + \mu \sum_{j \in N \setminus x} \alpha_j) \geq \frac{2\beta\mu}{1+2\beta\mu^2}(\delta S_0 + \mu \sum_{j \in N \setminus x'} \alpha_j),$$

$$\alpha_{y'} \geq \alpha_y \geq \frac{\beta\mu}{1+2\beta\mu^2}(\delta S_0 + \mu \sum_{j \in N \setminus y} \alpha_j) \geq \frac{\beta\mu}{1+2\beta\mu^2}(\delta S_0 + \mu \sum_{j \in N \setminus y'} \alpha_j).$$

Таким образом, если игрок  $x, y$  удовлетворяет неравенствам в (1.15) и (1.16), то все неравенства справедливы.

Сравнивая различные сценарии сотрудничества в игре, определенной уравнениями и функциями выигрышей (1.1)–(1.3), сделаем следующие выводы:

1. Чувствительные игроки могут получить максимальные (минимальные) выигрыши только при кооперативном (некооперативном) сценарии.
2. Нечувствительные игроки могут получить максимальные выигрыши, если они действуют в одиночку или в однородной коалиции, состоящей только из нечувствительных игроков.
3. При кооперативном сценарии уровень загрязнения достигает минимального уровня, а при некооперативном — максимального (наихудшего для окружающей среды).
4. Нечувствительный игрок получает наименьший выигрыш, если он сотрудничает с двумя чувствительными игроками, и не сотрудничает с другим нечувствительным игроком.

### 1.3 Определение устойчивых коалиционных структур

В данном разделе предполагается, что выигрыши игроков нетрансферабельны, т.е. игроки получают выплаты в соответствии с заданными функциями выигрышей, даже если они образуют коалицию. Вектор  $W^\pi = (W_1^\pi, \dots, W_m^\pi) \in \mathbb{R}^m$  обозначает соответствующие выигрыши игроков при формировании коалиционной структуры  $\pi$ .

Изучим устойчивость всех возможных сценариев или коалиционных структур. Устойчивая коалиционная структура является хорошей «основой» для ее формирования. Существуют различные концепции устойчивости коалиционных структур, предложенные для нединамических игр. Коалиционная структура  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$ , такая, что  $B_1 \cup \dots \cup B_m = N$  и  $B_i \cap B_j = \emptyset$  для всех  $i, j = 1, \dots, m, i \neq j$ , является устойчивой, когда ни один игрок не может увеличить свой выигрыш, если отклонится от этой структуры индивидуально. Следует заметить, что рассматриваются две возможности для отклоняющегося игрока: 1) он может присоединиться к любой возможной коалиции без каких-либо ограничений (см. раздел 1.3.1), 2) коалиция, к которой хотел бы присоединиться отклоняющийся игрок, может заблокировать его присоединение, если хотя бы один член коалиции может проиграть, приняв такого игрока (см. раздел 1.3.2).

#### 1.3.1 Устойчивые по Нэшу сценарии в случае нетрансферабельных выигрышей

Первое определение устойчивой коалиционной структуры предполагает, что все индивидуальные отклонения игроков возможны.

**Определение 1.1.** Коалиционная структура  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  называется устойчивой по Нэшу (или просто устойчивой), если для любого игрока  $i \in N$  выполняется, что

$$W_i^\pi \geq W_i^{\pi'} \quad \text{для всех } \pi' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-\{B(i), B_j\}}\},$$

где  $B_j \in \pi \cup \emptyset$ ,  $B_j \neq B(i)$ ,  $\pi_{-\{B(i), B_j\}} = \pi \setminus \{B(i), B_j\}$ , а  $W^\pi$ ,  $W^{\pi'}$  обозначают векторы выигрышей игроков при коалиционных структурах  $\pi$  и  $\pi'$  соответственно.

В Определении 1.1 любой игрок может отклониться от своей текущей коали-



ции, присоединившись к другой существующей коалиции или став индивидуальным игроком.

**Утверждение 1.4.** *В игре управления загрязнением окружающей среды (1.1)–(1.3) с нетрансферабельными выигрышами не существует устойчивой по Нэшу коалиционной структуры или сценария.*

*Доказательство.* Проверая условия устойчивости, приведенные в определении 1.1, и принимая во внимание равновесные выигрыши игроков при различных сценариях (см. таблицу 1.1), можно сделать вывод, что для любого сценария существует хотя бы один игрок, отклонение которого будет прибыльным для него. Следовательно, устойчивого сценария не существует.  $\square$

### 1.3.2 Сценарии индивидуально устойчивых коалиционных структур в случае нетрансферабельных выигрышей

В этом разделе исследуется еще одна концепция устойчивости коалиционных структур применительно к нашей модели. Предполагается, что игроки, входящие в коалицию, могут отказаться от сотрудничества с другим игроком, желающим присоединиться к ним, в том случае, если приход игрока в коалицию может привести к потере прибыли кого-либо из членов коалиции. Это означает, что не все отклонения игрока возможны. Поэтому приводится другое определение устойчивой коалиционной структуры с обоснованной блокировкой входа новых игроков в коалицию.

**Определение 1.2.** *Коалиционная структура  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  называется индивидуально устойчивой, если для любого игрока  $i \in N$  выполняется:*

$$W_i^\pi \geq W_i^{\pi''} \text{ для всех } \pi'' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-\{B(i), B_j\}}\} \text{ таких, что}$$

$$W_k^{\pi''} \geq W_k^\pi \text{ для всех } k \in B_j,$$

где  $B_j \in \pi \cup \emptyset$ ,  $B_j \neq B(i)$ ,  $\pi_{-\{B(i), B_j\}} = \pi \setminus \{B(i), B_j\}$ , а  $W^\pi$ ,  $W^{\pi''}$  обозначают векторы выигрышей игроков при коалиционных структурах  $\pi$  и  $\pi''$  соответственно.

Очевидно, что множество индивидуально устойчивых коалиционных структур содержит множество устойчивых по Нэшу коалиционных структур [91]. Следующее утверждение характеризует условия индивидуально устойчивых коалиционных структур.

**Утверждение 1.5.** В игре по управлению загрязнением окружающей среды, определяемой формулами (1.1)–(1.3) с нетрансферабельными выигрышами, только коалиционные структуры или сценарии  $\pi_{3_1}$  и  $\pi_{4_1}$  являются индивидуально устойчивыми.

*Доказательство.* Проверая условия устойчивости, приведенные в определении 1.2, и учитывая равновесные выигрыши игроков при различных сценариях (см. таблицу 1.1), легко установить, что им удовлетворяют только две коалиционные структуры. Неравенства, которые выполняются для сценариев  $\pi_{3_1}$  и  $\pi_{4_1}$ , приведены в таблице 1.3. Они выделены синим цветом.  $\square$

Таблица 1.3: Условия индивидуальной устойчивости коалиционных структур  $\pi_{3_1}$  и  $\pi_{4_1}$

Сценарий	Ч 1	Ч 2	НЧ 3	НЧ 4
$\pi_{3_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$	$\left\{ \begin{array}{l} W_1^{\pi_{3_1}} \geq W_1^{\pi_1} \\ \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} W_3^{\pi_{3_1}} < W_3^{\pi_{3_2}} \\ W_1^{\pi_{3_1}} \geq W_1^{\pi_{3_2}} \end{array} \right. \\ \text{or } W_3^{\pi_{3_1}} \geq W_3^{\pi_{3_2}} \end{array} \right. \\ \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} W_4^{\pi_{3_1}} < W_4^{\pi_{3_3}} \\ W_1^{\pi_{3_1}} \geq W_1^{\pi_{3_3}} \end{array} \right. \\ \text{or } W_4^{\pi_{3_1}} \geq W_4^{\pi_{3_3}} \end{array} \right. \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} W_2^{\pi_{3_1}} \geq W_2^{\pi_1} \\ \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} W_3^{\pi_{3_1}} < W_3^{\pi_{3_4}} \\ W_2^{\pi_{3_1}} \geq W_2^{\pi_{3_4}} \end{array} \right. \\ \text{or } W_3^{\pi_{3_1}} \geq W_3^{\pi_{3_4}} \end{array} \right. \\ \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} W_4^{\pi_{3_1}} < W_4^{\pi_{3_5}} \\ W_2^{\pi_{3_1}} \geq W_2^{\pi_{3_5}} \end{array} \right. \\ \text{or } W_4^{\pi_{3_1}} \geq W_4^{\pi_{3_5}} \end{array} \right. \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} W_1^{\pi_{3_1}} < W_1^{\pi_{5_1}} \\ W_2^{\pi_{3_1}} < W_2^{\pi_{5_1}} \\ W_3^{\pi_{3_1}} \geq W_3^{\pi_{5_1}} \end{array} \right. \\ \text{or } W_1^{\pi_{3_1}} \geq W_1^{\pi_{5_1}} \end{array} \right. \\ \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} W_4^{\pi_{3_1}} < W_4^{\pi_{4_1}} \\ W_3^{\pi_{3_1}} \geq W_3^{\pi_{4_1}} \end{array} \right. \\ \text{or } W_4^{\pi_{3_1}} \geq W_4^{\pi_{4_1}} \end{array} \right. \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} W_1^{\pi_{3_1}} < W_1^{\pi_{5_2}} \\ W_2^{\pi_{3_1}} < W_2^{\pi_{5_2}} \\ W_4^{\pi_{3_1}} \geq W_4^{\pi_{5_2}} \end{array} \right. \\ \text{or } W_1^{\pi_{3_1}} \geq W_1^{\pi_{5_2}} \end{array} \right. \\ \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} W_3^{\pi_{3_1}} < W_3^{\pi_{4_1}} \\ W_4^{\pi_{3_1}} \geq W_4^{\pi_{4_1}} \end{array} \right. \\ \text{or } W_3^{\pi_{3_1}} \geq W_3^{\pi_{4_1}} \end{array} \right. \end{array} \right.$
$\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$	$\left\{ \begin{array}{l} W_1^{\pi_{4_1}} \geq W_1^{\pi_{3_6}} \\ \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} W_3^{\pi_{4_1}} < W_3^{\pi_{5_3}} \\ W_4^{\pi_{4_1}} < W_4^{\pi_{5_3}} \\ W_1^{\pi_{4_1}} \geq W_1^{\pi_{5_3}} \end{array} \right. \\ \text{or } W_3^{\pi_{4_1}} \geq W_3^{\pi_{5_3}} \\ \text{or } W_4^{\pi_{4_1}} \geq W_4^{\pi_{5_3}} \end{array} \right. \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} W_2^{\pi_{4_1}} \geq W_2^{\pi_{3_6}} \\ \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} W_3^{\pi_{4_1}} < W_3^{\pi_{5_4}} \\ W_4^{\pi_{4_1}} < W_4^{\pi_{5_4}} \\ W_2^{\pi_{4_1}} \geq W_2^{\pi_{5_4}} \end{array} \right. \\ \text{or } W_3^{\pi_{4_1}} \geq W_3^{\pi_{5_4}} \\ \text{or } W_4^{\pi_{4_1}} \geq W_4^{\pi_{5_4}} \end{array} \right. \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} W_3^{\pi_{4_1}} \geq W_3^{\pi_{3_1}} \\ \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} W_1^{\pi_{4_1}} < W_1^{\pi_{5_1}} \\ W_2^{\pi_{4_1}} < W_2^{\pi_{5_1}} \\ W_3^{\pi_{4_1}} \geq W_3^{\pi_{5_1}} \end{array} \right. \\ \text{or } W_1^{\pi_{4_1}} \geq W_1^{\pi_{5_1}} \\ \text{or } W_2^{\pi_{4_1}} \geq W_2^{\pi_{5_1}} \end{array} \right. \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} W_4^{\pi_{4_1}} \geq W_4^{\pi_{3_1}} \\ \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} W_1^{\pi_{4_1}} < W_1^{\pi_{5_2}} \\ W_2^{\pi_{4_1}} < W_2^{\pi_{5_2}} \\ W_4^{\pi_{4_1}} \geq W_4^{\pi_{5_2}} \end{array} \right. \\ \text{or } W_1^{\pi_{4_1}} \geq W_1^{\pi_{5_2}} \\ \text{or } W_2^{\pi_{4_1}} \geq W_2^{\pi_{5_2}} \end{array} \right. \end{array} \right.$

## 1.4 Разработка механизмов, обеспечивающих устойчивость сценариев кооперации

В этом разделе предлагается три механизма, позволяющие сделать коалиционную структуру устойчивой в случае, если она не является таковой, когда выигрыши игроков нетрансферабельны, т. е. в случае, когда она не удовлетворяет определению 1.1. Эти механизмы основаны на: 1) внедрении системы трансферных платежей, разработанной на основе какого-либо кооперативного

решения, например, вектора Шепли, CIS-значения и т. д. (см. раздел 1.4.1); 2) внедрении схемы налогообложения отклонений любого игрока в случае, если сценарий неустойчив, т.е. хотя бы один игрок может получить выгоду от отклонения от данного сценария (см. раздел 1.4.2); 3) введение множества допустимых коалиций, т.е. набора коалиций, которые могут быть сформированы в игре путем введения ограничений на формирование коалиций, которые могут дестабилизировать сценарий (см. раздел 1.4.3).

#### 1.4.1 Устойчивость по Нэшу коалиционных структур с трансферабельными выигрышами

В этом разделе исследуется устойчивость по Нэшу сценариев кооперации, когда выигрыши игроков могут перераспределяться между членами коалиции. Трансферы между игроками могут быть определены различными способами, например, путем применения некоторых кооперативных решений, таких как вектор Шепли, CIS-значение,  $s$ -ядро [3]. Эти решения применительно к играм с коалиционными структурами удовлетворяют свойству эффективности, согласно которому сумма выплат игрокам равна выигрышу коалиции, в которую они входят. Выплаты, которые получают игроки после осуществления трансферов есть  $\xi^\pi = (\xi_i^\pi : i \in S, S \in \pi)$ , они представлены в таблице 1.4. В этой таблице используются следующие обозначения:  $\xi_S^\pi = \sum_{i \in S} \xi_i^\pi$  и  $W_S^\pi = \sum_{i \in S} W_i^\pi$ .

Представлен механизм осуществления трансферных платежей на основе CIS-значения [29], но аналогичным образом может быть использовано и любое другое кооперативное решение. Для любого игрока  $i \in S$ , такого, что  $S \in \pi$ ,  $i$ -ая компонента CIS-значения определяется следующим образом:

$$\xi_i^\pi = \hat{W}_i + \frac{W_S^\pi - \sum_{j \in S} \hat{W}_j}{|S|}, \quad (1.17)$$

где  $\hat{W}_i$  — выигрыш игрока  $i$ , который он получает при индивидуальном отклонении от коалиции  $S$  и становится индивидуальным игроком при условии, что все остальные игроки остаются в тех коалициях, в которых они состояли до выхода из коалиции. Формально,  $\hat{W}_i = W_i^{\pi'}$ , где  $\pi' = \{\pi \setminus S, S \setminus \{i\}, \{i\}\}$ . Величина  $\hat{W}_i$  может быть интерпретирована как гарантированный выигрыш игрока  $i$ , если он решит действовать индивидуально, а все остальные игроки не будут менять коалиции, в которые они входят.

Таблица 1.4: Выплаты игрокам при различных сценариях с трансферабельными выигрышами

Сценарий	Ч 1	Ч 2	НЧ 3	НЧ 4
$\pi_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$	$W_1^{\pi_1}$	$W_2^{\pi_1}$	$W_3^{\pi_1}$	$W_4^{\pi_1}$
$\pi_2 = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$	$\xi_1^{\pi_2}$	$\xi_2^{\pi_2}$	$\xi_3^{\pi_2}$	$W_{1234}^{\pi_2} - \xi_{123}^{\pi_2}$
$\pi_{3_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$	$\xi_1^{\pi_{3_1}}$	$W_{12}^{\pi_{3_1}} - \xi_1^{\pi_{3_1}}$	$W_3^{\pi_{3_1}}$	$W_4^{\pi_{3_1}}$
$\pi_{3_2} = \{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}$	$\xi_1^{\pi_{3_2}}$	$W_2^{\pi_{3_2}}$	$W_{13}^{\pi_{3_2}} - \xi_1^{\pi_{3_2}}$	$W_4^{\pi_{3_2}}$
$\pi_{3_3} = \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}$	$\xi_1^{\pi_{3_3}}$	$W_2^{\pi_{3_3}}$	$W_3^{\pi_{3_3}}$	$W_{14}^{\pi_{3_3}} - \xi_1^{\pi_{3_3}}$
$\pi_{3_4} = \{\{2, 3\}, \{1\}, \{4\}\}$	$W_1^{\pi_{3_4}}$	$\xi_2^{\pi_{3_4}}$	$W_{23}^{\pi_{3_4}} - \xi_2^{\pi_{3_4}}$	$W_4^{\pi_{3_4}}$
$\pi_{3_5} = \{\{2, 4\}, \{1\}, \{3\}\}$	$W_1^{\pi_{3_5}}$	$\xi_2^{\pi_{3_5}}$	$W_3^{\pi_{3_5}}$	$W_{24}^{\pi_{3_5}} - \xi_2^{\pi_{3_5}}$
$\pi_{3_6} = \{\{3, 4\}, \{1\}, \{2\}\}$	$W_1^{\pi_{3_6}}$	$W_2^{\pi_{3_6}}$	$\xi_3^{\pi_{3_6}}$	$W_{34}^{\pi_{3_6}} - \xi_3^{\pi_{3_6}}$
$\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$	$\xi_1^{\pi_{4_1}}$	$W_{12}^{\pi_{4_1}} - \xi_1^{\pi_{4_1}}$	$\xi_3^{\pi_{4_1}}$	$W_{34}^{\pi_{4_1}} - \xi_3^{\pi_{4_1}}$
$\pi_{4_2} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$	$\xi_1^{\pi_{4_2}}$	$\xi_2^{\pi_{4_2}}$	$W_{13}^{\pi_{4_2}} - \xi_1^{\pi_{4_2}}$	$W_{24}^{\pi_{4_2}} - \xi_2^{\pi_{4_2}}$
$\pi_{4_3} = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$	$\xi_1^{\pi_{4_3}}$	$\xi_2^{\pi_{4_3}}$	$W_{23}^{\pi_{4_3}} - \xi_2^{\pi_{4_3}}$	$W_{14}^{\pi_{4_3}} - \xi_1^{\pi_{4_3}}$
$\pi_{5_1} = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$	$\xi_1^{\pi_{5_1}}$	$\xi_2^{\pi_{5_1}}$	$W_{123}^{\pi_{5_1}} - \xi_{12}^{\pi_{5_1}}$	$W_4^{\pi_{5_1}}$
$\pi_{5_2} = \{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$	$\xi_1^{\pi_{5_2}}$	$\xi_2^{\pi_{5_2}}$	$W_3^{\pi_{5_2}}$	$W_{124}^{\pi_{5_2}} - \xi_{12}^{\pi_{5_2}}$
$\pi_{5_3} = \{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}$	$\xi_1^{\pi_{5_3}}$	$W_2^{\pi_{5_3}}$	$\xi_3^{\pi_{5_3}}$	$W_{134}^{\pi_{5_3}} - \xi_{13}^{\pi_{5_3}}$
$\pi_{5_4} = \{\{2, 3, 4\}, \{1\}\}$	$W_1^{\pi_{5_4}}$	$\xi_2^{\pi_{5_4}}$	$\xi_3^{\pi_{5_4}}$	$W_{234}^{\pi_{5_4}} - \xi_{23}^{\pi_{5_4}}$

**Утверждение 1.6.** В игре, определенной функциями (1.1)–(1.3), когда выигрыши игроков трансферабельны и определяются CIS-значениями, рассчитанными по формуле (1.17), существует устойчивая коалиционная структура, если  $\beta\mu^2 \leq 1.9549$ . Более того,

1. Если  $\beta\mu^2 \in (0, 0.125]$ , то коалиционная структура  $\pi_2$  устойчива по Нэшу;
2. Если  $\beta\mu^2 \in [0.125, 0.333)$ , то коалиционные структуры  $\pi_{5_3}$  и  $\pi_{5_4}$  устойчивы по Нэшу;
3. Если  $\beta\mu^2 \in [0.333, 1.2071)$ , то коалиционные структуры  $\pi_{3_1}$ ,  $\pi_{4_1}$ ,  $\pi_{5_3}$  и  $\pi_{5_4}$  устойчивы по Нэшу;
4. Если  $\beta\mu^2 \in [1.2071, 1.9549]$ , то коалиционная структура  $\pi_{3_1}$  устойчива по Нэшу.
5. Если  $\beta\mu^2 \in (1.9549, +\infty)$ , не существует устойчивой по Нэшу коалиционной структуры.

*Доказательство.* Подставляем значения  $W_i^\pi$  для всех  $i \in M$  и  $\pi$  из таблицы 1.1 в формулу (1.17), после чего проверяем, выполняются ли условия определения 1.1. Приходим к следующим выводам:

1. Коалиционные структуры  $\pi_1, \pi_{3_2}, \pi_{3_3}, \pi_{3_4}, \pi_{3_5}, \pi_{3_6}, \pi_{4_2}, \pi_{4_3}$  никогда не являются устойчивыми по Нэшу, что сразу определяется при сравнении выигрышей игроков при заданных структурах и их выигрышей при отклонении.
2. Коалиционная структура  $\pi_2$  устойчива по Нэшу, если

$$8\beta\mu^2 - 1 \leq 0,$$

и учитывая, что  $\beta, \mu \geq 0$ , получаем, что это эквивалентно условию:

$$\beta\mu^2 \in (0, 0.125].$$

Эта справедливо для области голубого цвета и кривой красного цвета на рис. 1.1.

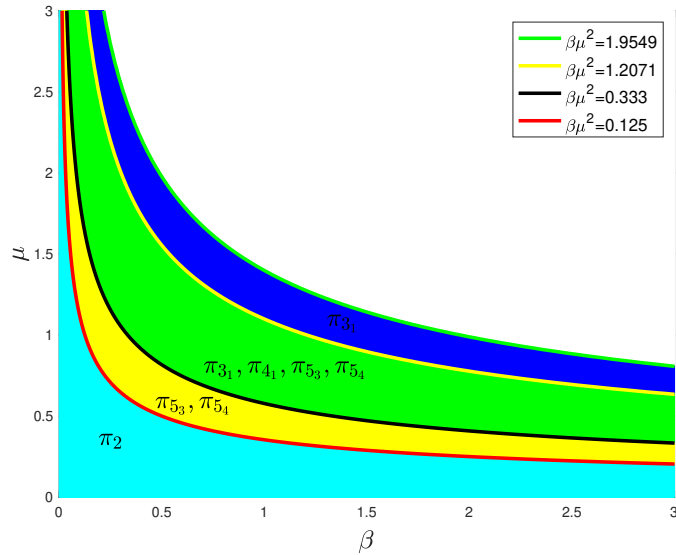


Рис. 1.1: Устойчивые коалиционные структуры из утверждения 1.6 для следующих областей: голубая область —  $\pi_2$ ; желтая область —  $\pi_{5_3}, \pi_{5_4}$ ; зеленая область —  $\pi_{3_1}, \pi_{4_1}, \pi_{5_3}, \pi_{5_4}$  и синяя область —  $\pi_{3_1}$ .

3. Коалиционная структура  $\pi_{3_1}$  устойчива по Нэшу, если

$$\begin{aligned} 1 + 5\beta\mu^2 + 5\beta^2\mu^4 - 4\beta^3\mu^6 &\geq 0, \\ 3\beta\mu^2 - 1 &\geq 0, \end{aligned}$$

что эквивалентно условию

$$\beta\mu^2 \in [0.333, 1.9549].$$

Это справедливо для зеленой и синей областей, а также их границ, представленных на рис. 1.1.

4. Коалиционная структура  $\pi_{4_1}$  устойчива по Нэшу, если

$$\begin{aligned} 1 + 4\beta\mu^2 - 4\beta^2\mu^4 &\geq 0, \\ 3\beta\mu^2 - 1 &\geq 0, \end{aligned}$$

что эквивалентно условию

$$\beta\mu^2 \in [0.333, 1.2071].$$

Это справедливо для зеленой области и ее границы, представленной на рис. 1.1.

5. Коалиционные структуры  $\pi_{5_1}, \pi_{5_2}$  устойчивы по Нэшу, если выполняются три неравенства:

$$\begin{aligned} 156\beta^3\mu^6 + 80\beta^2\mu^4 + 7\beta\mu^2 - 1 &\leq 0, \\ 3\beta\mu^2 - 1 &\leq 0, \\ 8\beta\mu^2 - 1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Однако система не имеет решения.

6. Коалиционные структуры  $\pi_{5_3}, \pi_{5_4}$  устойчивы по Нэшу, если выполняются два неравенства:

$$\begin{aligned} 1 + 4\beta\mu^2 - 4\beta^2\mu^4 &\leq 0, \\ 8\beta\mu^2 - 1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Эта система эквивалентна условию

$$\beta\mu^2 \in [0.125, 1.2071],$$

что справедливо для желтой и зеленой областей и их границ, которые изображены на рис. 1.1.

Таким образом для любых значений  $\beta > 0$  и  $\mu > 0$ , таких, что  $\beta\mu^2 \leq 1.9549$ , всегда существует хотя бы один устойчивый по Нэшу сценарий.  $\square$

Следует заметить, что в случае нетрансферабельных выигрышей наименее загрязненная коалиционная структура  $\pi_2$  (см. таблицу 1.2) всегда неустойчива. Однако коалиционная структура  $\pi_2$  может быть устойчивой, если выигрыши игроков трансферабельны и вычисляются в соответствии с CIS-значением, что

следует из утверждения 1.6. Поэтому при желании сделать устойчивым наиболее благоприятный с экологичной точки зрения сценарий целесообразно принять механизм трансферных платежей с использованием CIS-значения. Схема трансферных платежей также рассматривается для соглашений в области охраны окружающей среды между развивающимися и развитыми странами в случае динамической игры в [33, 64, 89].

### 1.4.2 Механизм налогообложения

В этом разделе предлагается еще один механизм, позволяющий сделать коалиционную структуру устойчивой по Нэшу или индивидуально устойчивой за счет реализации системы платежей за отклонение игрока от коалиции, в которую он входит. Опишем этот механизм на примере. Рассмотрим коалиционную структуру  $\pi_{5_1}$ , которая фактически не является устойчивой, но, например, управляющий орган желает сделать ее устойчивой. В утверждениях 1.4 и 1.6 доказано, что  $\pi_{5_1}$  не является устойчивой по Нэшу ни в случае нетрансферабельных выигрышей, ни в случае трансферабельных выигрышей, когда трансферы определяются на основе CIS-значения, поэтому для устойчивости этого сценария можно внедрить механизм налогообложения. Определим систему налогообложения выигрышей игроков в случае отклонения от сценария  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  следующим образом:

$$T^\pi = \max_{i \in N} \left\{ \frac{\left[ \max_{\pi'} \hat{W}_i^{\pi'} - \hat{W}_i^\pi \right]^+}{\hat{W}_i^\pi} \right\} \times 100\%, \quad (1.18)$$

где  $\pi' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-\{B(i), B_j\}}\}$ ,  $\hat{W}_i^{\pi'}$  — выигрыш игрока  $i$  согласно сценарию  $\pi'$  после осуществления трансферных платежей при необходимости. Оператор  $[A]^+$  равен  $A$ , если  $A \geq 0$ , и равен нулю в противном случае.

Приведем замечания о величине налога  $T^\pi$ , применяемого для сценария  $\pi$ , заданного формулой (1.18), и о предлагаемом механизме налогообложения в целом:

1. Разность  $\max_{\pi'} \hat{W}_i^{\pi'} - \hat{W}_i^\pi$  — это максимальное значение, которое игрок  $i$  может получить при индивидуальном отклонении от коалиции, в которую он входит. Как и в определении 1.1, предполагается, что игрок  $i$  может

присоединиться к любой коалиции из  $\pi$  или стать индивидуальным. Аналогичным образом можно определить механизм налогообложения в случае индивидуальной устойчивости согласно определению 1.2.

2. Если сценарий  $\pi$  устойчив, то  $T^\pi$  равно нулю.
3. Формула (1.18) определяет значение однородного (одинакового для всех) налогообложения, т.е. для любого игрока при заданном сценарии  $\pi$  применяется налог одинакового размера. Можно также представить схему индивидуального налогообложения, определяющую различные налоги для разных игроков в зависимости от того, насколько они могут выиграть от отклонений. В последнем случае в формуле (1.18) необходимо убрать максимум.
4. Формула (1.18) записана для случая положительных выигрышей  $\hat{W}_i^\pi$ , приведенных в знаменателе.
5. Для реализации схемы налогообложения необходим орган власти или координационный центр. Этот механизм может быть прописан в контракте, определяющем выплаты и налоги игрокам при реализации того или иного сценария.

Теперь определим устойчивый сценарий  $\pi$  в случае с трансферабельными выигрышами и применяемой схемой налогообложения.

**Определение 1.3.** Коалиционная структура  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  является устойчивой в игре с трансферабельными выигрышами и применяемой схемой налогообложения, если для любого игрока  $i \in N$  имеет место:

$$\hat{W}_i^\pi \geq \hat{W}_i^{\pi'} - \frac{T^\pi}{100} \hat{W}_i^\pi \quad \text{для всех } \pi' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-\{B(i), B_j\}}\},$$

где  $B_j \in \pi \cup \emptyset$ ,  $B_j \neq B(i)$ ,  $\pi_{-\{B(i), B_j\}} = \pi \setminus \{B(i), B_j\}$ , а  $\hat{W}^\pi$  и  $\hat{W}^{\pi'}$  обозначают векторы выигрышей игроков после осуществления трансферных платежей для коалиционных структур  $\pi$  и  $\pi'$  соответственно.

**Утверждение 1.7.** Если налоги для любого игрока  $i$  и сценария  $\pi$  равны  $T^\pi$  и определяются по формуле (1.18), то сценарий  $\pi$  устойчив в смысле определения 1.3.



*Доказательство.* Результат сразу же следует из подстановки значений налогов, заданных формулой (1.18), в условие устойчивости из определения 1.3.  $\square$

**Пример 1.1.** Пусть параметры игры, удовлетворяющей неравенствам в (1.15) и (1.16), будут следующими:

$$\alpha_1 = 10, \alpha_2 = 9, \alpha_3 = 4, \alpha_4 = 3, \\ \beta = 1, \mu = 0.4, \delta = 0.2, S_0 = 3.$$

Рассмотрим сценарий  $\pi_{5_1} = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ , который не является устойчивым, что доказано в утверждении 1.6. Налоги игроков в этом сценарии определяются по формуле (1.18). Для заданных параметров  $\beta\mu^2 = 0.16$  из утверждения 1.6 следует, что коалиционные структуры  $\pi_{5_3} = \{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}$  и  $\pi_{5_4} = \{\{2, 3, 4\}, \{1\}\}$  являются устойчивыми, если трансферные платежи определяются согласно CIS-значения. В таблице 1.5 приведены выигрыши игроков после применения CIS-значения в  $\pi_{5_1}$  и выигрыши игроков, полученные при индивидуальных отклонениях от  $\pi_{5_1}$ . Например, игрок 1 может отклониться и реализовать сценарий  $\pi_{4_3}$ , если присоединится к игроку 4, или сценарий  $\pi_{3_4}$ , если станет индивидуальным игроком. Соответствующие выплаты игроку 1 при этих отклонениях составляют 17.9602 и 19.1340. Аналогичные расчеты можно провести и для других игроков. Тогда, согласно формуле (1.18), единый налог, назначаемый каждому игроку в сценарии  $\pi_{5_1}$ , равен  $T^{\pi_{5_1}} = 4.24\%$ .

Таблица 1.5: Выплаты игрокам при  $\pi_{5_1} = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$  и при возможных отклонениях

	$\hat{W}_i^{\pi_{5_1}}$	$\{\hat{W}_i^{\pi'}, \forall \pi'\}$	$\left[\max_{\pi'} \hat{W}_i^{\pi'} - \hat{W}_i^{\pi}\right]^+$
Игрок 1	18.7418	{17.9602; 19.1340}	0.3922
Игрок 2	9.2418	{8.4602; 9.6340}	0.3922
Игрок 3	8.7816	{8.0; 8.0}	0
Игрок 4	4.5	{4.2790}	0

### 1.4.3 Создание множества допустимых коалиционных структур

В разделе 1.4.1 показано, что в случае трансферабельных выигрышей можно определить систему трансферных платежей на основе любого кооперативного решения. После реализации этой системы трансферов получают новые устойчивые коалиционные структуры по сравнению со случаем нетрансферабельных

выигрышей. Тем не менее, некоторые «желательные» коалиционные структуры могут оставаться неустойчивыми. В этом разделе предлагается механизм конструирования множества допустимых коалиционных структур путем определения множества запрещенных коалиций. При наличии ограничений на отклонения на некоторые коалиционные структуры, нежелательные отклонения не могут быть реализованы. Следовательно, отклонения соответствующих игроков также блокируются, а это значит, что большее число сценариев являются устойчивыми. Зная отклонения, выгодные для некоторых игроков, можно сформировать множество запрещенных коалиций для предотвращения нежелательных отклонений.

В этом разделе вводится понятие допустимой коалиционной структуры, определяя множество запрещенных коалиций  $\Omega = \{R_1, \dots, R_\ell\}$ , где  $R_j \subset N$  для  $j = 1, \dots, \ell$ . Тогда мы можем определить допустимую коалиционную структуру или допустимый сценарий  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  такой, что  $\pi \cap \Omega = \emptyset$ ,  $B_1 \cup \dots \cup B_m = N$  и  $B_i \cap B_j = \emptyset$  для всех  $i, j = 1, \dots, m, i \neq j$ . Теперь определим структуру устойчивой допустимой коалиционной структуры, введя ограничения на отклонения игроков от текущего сценария, т.е. игрок не может индивидуально отклониться на недопустимый сценарий. Таким образом, множество возможных отклонений игроков ограничено относительно заданного в определении 1.1, когда все отклонения игроков могут быть осуществлены.

**Определение 1.4.** *Допустимая коалиционная структура  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  устойчива по Нэшу (или просто устойчива) в игре с ограниченной кооперацией, если для любого игрока  $i \in N$  выполняется, что*

$$W_i^\pi \geq W_i^{\pi'} \quad \text{для всех } \pi' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-\{B(i), B_j\}}\}, \quad \text{такое что}$$

$$\{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}\} \cap \Omega = \emptyset,$$

где  $B_j \in \pi \cup \emptyset$ ,  $B_j \neq B(i)$ ,  $\pi_{-\{B(i), B_j\}} = \pi \setminus \{B(i), B_j\}$ , а  $W^\pi$ ,  $W^{\pi'}$  обозначают векторы выигрышей игроков в коалиционных структурах  $\pi$  и  $\pi'$  соответственно.

Можно также определить индивидуально устойчивые допустимые коалиционные структуры, предполагая, что в условии из определения 1.2 возможны только отклонения на допустимые сценарии.

**Определение 1.5.** Допустимая коалиционная структура  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  индивидуально устойчива, если для любого игрока  $i \in N$  выполняется, что

$$W_i^\pi \geq W_i^{\pi''} \text{ for all } \pi'' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-\{B(i), B_j\}}\} \text{ такие, что}$$

$$\{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}\} \cap \Omega = \emptyset \text{ и } W_k^{\pi''} \geq W_k^\pi \text{ для всех } k \in B_j,$$

где  $B_j \in \pi \cup \emptyset$ ,  $B_j \neq B(i)$ ,  $\pi_{-\{B(i), B_j\}} = \pi \setminus \{B(i), B_j\}$ , а  $W^\pi$ ,  $W^{\pi''}$  обозначают векторы выигрышей игроков в коалиционных структурах  $\pi$  и  $\pi''$  соответственно.

Приведем некоторые замечания об устойчивых и индивидуально устойчивых допустимых сценариях и предлагаемом механизме реализации запрещенных коалиций для придания устойчивости изначально неустойчивым сценариям:

1. Следует заметить, что если коалиция  $S$  запрещена, то это не означает, что коалиция  $S' \supset S$  запрещена. Например, если сотрудничество двух развивающихся стран ограничено,  $\{3, 4\} \in \Omega$ , то из этого не следует, что любая коалиция, содержащая это множество, ограничена. Тогда коалиция  $\{1, 3, 4\}$  допустима, если  $\{1, 3, 4\} \notin \Omega$ .
2. Добавляя коалицию к множеству запрещенных коалиций  $\Omega$ , мы уменьшаем количество возможных сценариев и количество возможных отклонений от реализуемого сценария. Согласно определениям 1.4 и 1.5, игрок не может отклониться на недопустимый сценария. Это положительно сказывается на устойчивости сценария, так как меньше отклонений от этого сценария может быть реализовано.
3. Для реализации механизма допустимых сценариев необходим орган власти или координационный центр. Ограничения на формирование некоторых коалиций могут быть реализованы с помощью правил или законов при создании контрактов, поддерживающих сотрудничество. Исследование не акцентирует внимание на условиях, при которых данный механизм может быть технически реализован, а приводится математическая модель такого механизма.

Демонстрируется применение этого механизма, когда коалиция двух развивающихся стран ограничена из-за непродуктивной совместной работы двух развивающихся стран. Таким образом,  $\Omega = \{\{3, 4\}\}$  — множество запрещенных

коалиций. Поэтому сценарии  $\pi_{3_6} = \{\{3, 4\}, \{1\}, \{2\}\}$  и  $\pi_{4_1} = \{\{3, 4\}, \{1, 2\}\}$  недопустимы. Можно показать, как изменяются множества устойчивых и индивидуально устойчивых коалиций при реализации этого ограничения для случаев с нетрансферабельными и трансферабельными выигрышами.

**Утверждение 1.8.** *В игре управления загрязнением окружающей среды (1.1)–(1.3) с нетрансферабельными выигрышами с множеством запрещенных коалиций  $\Omega = \{\{3, 4\}\}$  не существует устойчивой по Нэшу допустимой коалиционной структуры или сценария, но существует единственный индивидуально устойчивый допустимый сценарий  $\pi_{3_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ .*

*Доказательство.* Доказательство следует из утверждений 1.4 и 1.5 путем проверки условий, приведенных в определениях 1.4 и 1.5.  $\square$

Приводятся условия устойчивости допустимых сценариев, если выигрыши игроков трансферабельные и определяются CIS-значением.

**Утверждение 1.9.** *В игре, определяемой (1.1)–(1.3), когда выигрыши игроков являются трансферабельными и определяются CIS-значением, заданной формулой (1.17), всегда существует устойчивая допустимая коалиционная структура. Также справедливо:*

1. Если  $\beta\mu^2 \in (0, 0.125]$ , то допустимая коалиционная структура  $\pi_2$  устойчива;
2. Если  $\beta\mu^2 \in [0.125, 0.333) \cup (1.9549, +\infty)$ , то допустимые коалиционные структуры  $\pi_{5_3}$  и  $\pi_{5_4}$  устойчивы;
3. Если  $\beta\mu^2 \in [0.333, 1.9549]$ , то допустимые коалиционные структуры  $\pi_{3_1}$ ,  $\pi_{5_3}$  и  $\pi_{5_4}$  устойчивы.

*Доказательство.* Подставляем значения  $W_i^\pi$  для любых  $i \in M$  и  $\pi$  из таблицы 1.1 в формулу (1.17), после чего проверяем, выполняются ли условия определения 1.8. Приходим к следующим выводам:

1. Допустимые коалиционные структуры  $\pi_1, \pi_{3_2}, \pi_{3_3}, \pi_{3_4}, \pi_{3_5}, \pi_{4_2}, \pi_{4_3}$  никогда не являются устойчивыми, что немедленно следует из сравнения выигрышей игроков в данных структурах и их выигрышей при отклонении.

2. Допустимая коалиционная структура  $\pi_2$  устойчива, если

$$8\beta\mu^2 - 1 \leq 0,$$

что эквивалентно условию

$$\beta\mu^2 \in (0, 0.125],$$

с учетом того, что  $\beta, \mu \geq 0$ . Это условие справедливо на красной кривой и ниже этой кривой, т.е. в синей области, что изображено на рис. 1.2.

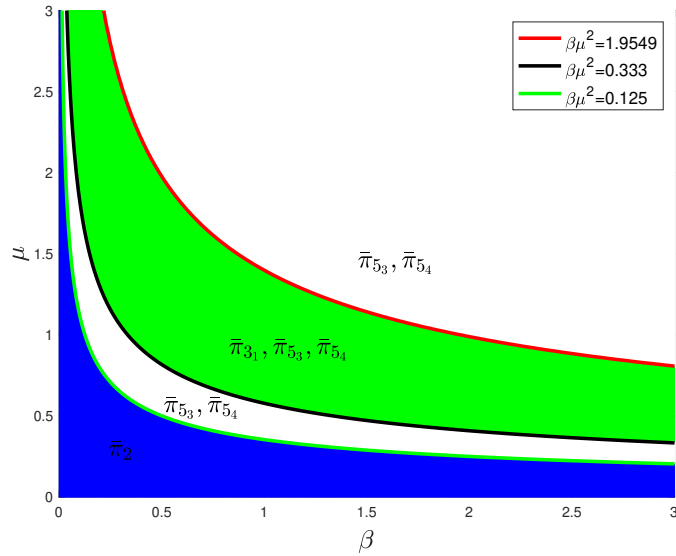


Рис. 1.2: Устойчивые допустимые коалиционные структуры из утверждения 1.9: синяя область —  $\pi_2$ ; белая область —  $\pi_{5_3}, \pi_{5_4}$ ; зеленая область —  $\pi_{3_1}, \pi_{5_3}, \pi_{5_4}$

3. Допустимая коалиционная структура  $\pi_{3_1}$  устойчива, если

$$1 + 5\beta\mu^2 + 5\beta^2\mu^4 - 4\beta^3\mu^6 \geq 0,$$

$$3\beta\mu^2 - 1 \geq 0,$$

что эквивалентно условию

$$\beta\mu^2 \in [0.333, 1.9549].$$

Это справедливо для зеленой области и ее границ на рис. 1.2.

4. Допустимые коалиционные структуры  $\pi_{5_1}, \pi_{5_2}$  устойчивы, если выполняются три неравенства:

$$156\beta^3\mu^6 + 80\beta^2\mu^4 + 7\beta\mu^2 - 1 \leq 0,$$

$$3\beta\mu^2 - 1 \leq 0,$$

$$8\beta\mu^2 - 1 \geq 0.$$

Однако, эта система не имеет решения.

5. Допустимые коалиционные структуры  $\pi_{5_3}, \pi_{5_4}$  устойчивы по Нэшу, если выполняется неравенство:

$$8\beta\mu^2 - 1 \geq 0,$$

что эквивалентно условию:

$$\beta\mu^2 \in [0.125, \infty),$$

которое соответствует белой и зеленой областям, изображенным на рис. 1.2.

Таким образом, при любых значениях  $\beta > 0$  и  $\mu > 0$  всегда существует хотя бы один устойчивый по Нэшу допустимый сценарий.  $\square$

Сравним устойчивые сценарии для случая с трансферабельными выигрышами, когда нет запрещенных коалиций (утверждение 1.6) и когда коалиция  $\{3, 4\}$  запрещена (утверждение 1.9):

- В случае запрещенной коалиции  $\{3, 4\}$  всегда существует устойчивый сценарий, в то время как при отсутствии ограничений на сотрудничество для  $\beta\mu^2 > 1.9549$  устойчивой коалиционной структуры не существует. При наличии ограничения на формирование коалиции  $\{3, 4\}$  в этом интервале устойчивы сценарии  $\pi_{5_3}$  и  $\pi_{5_4}$ .
- Диапазон параметров, при котором кооперативный сценарий  $\pi_2$  устойчив, не меняется, т.е.  $\beta\mu^2 \in (0, 0.125]$ . Это легко объясняется тем, что коалиция  $\{3, 4\}$  не может быть сформирована из  $\pi_2$  путем индивидуальных отклонений.
- Наблюдаются изменения в наборе устойчивых сценариев, когда  $\beta\mu^2 \in [1.2071, 1.9549]$ . При добавлении ограничения на формирование коалиции  $\{3, 4\}$  сценарии  $\pi_{5_3}$  и  $\pi_{5_4}$  становятся устойчивыми, тогда как для случая без ограничений на формирование коалиции  $\{3, 4\}$  они неустойчивы.

Если стоит задача сделать конкретный сценарий устойчивым, если он не является устойчивым по определению 1.1, даже после осуществления трансферных платежей, определенных в разделе 1.4.1, то в данном случае может помочь

механизм создания множества запрещенных коалиций или множества допустимых сценариев. Необходимо выявить отклонения, выгодные для игроков, а затем сформировать множество запрещенных коалиций, чтобы предотвратить отклонения игроков. Это, безусловно, можно сделать при наличии управляющего органа или регулятора.

## 1.5 Заключение к главе 1

Исследование в данной главе посвящено изучению анализа устойчивости в статической модели управления загрязнением окружающей среды. В этой одношаговой модели проводится анализ для случая четырех игроков, так что образуемая ими коалиционная структура может быть «нетривиальной», т.е. можно исследовать частичную кооперацию, при которой может быть сформировано несколько коалиций.

После определения множества допустимых коалиционных структур для статической модели проводится проверка устойчивости по Нэшу и индивидуальной устойчивости. Определено, что если выигрыши игроков нетрансферабельны, то не существует устойчивой по Нэшу коалиционной структуры, и только две коалиционные структуры индивидуально устойчивы. Если говорить о случае трансферабельных выигрышей, то для него получены устойчивые коалиционные структуры, более предпочтительные с экологической точки зрения.

В итоге предложено три механизма, позволяющих сделать устойчивыми те или иные коалиционные структуры. Схема трансферных платежей является наиболее распространенным механизмом. В данном исследовании использовано CIS-значение для перераспределения выплат между игроками, и результат показывает, что гранд коалиция, при которой получается наименьшее загрязнение, может быть устойчивой при некоторых условиях. Вторым предложенным механизмом — схема налогообложения, при которой создается препятствие, чтобы игроки оставались в первоначальных коалициях. Единый налог, применяемый к игрокам, определяется как наибольшая выгода, которую игрок может получить при отклонении. Третий механизм — создание множества запрещенных коалиций для того, чтобы исключить некоторые нежелательные коалиционные структуры. Таким образом, большее число коалиционных структур может быть устойчивыми. Для иллюстрации каждого механизма приводятся примеры.

## Глава 2

# Устойчивые соглашения в динамических играх управления загрязнением окружающей среды

В этой главе исследуется существование устойчивых соглашений в динамических играх управления загрязнением окружающей среды в отличие от первой главы, где рассмотрены статические игры. В качестве промежуточного решения между кооперативными и некооперативными решениями для данного класса игр предлагается механизм компенсаций [89], т.е. контракт, при котором два игрока ведут себя «кооперативно», но не требуется полной координации их стратегий. Также в данной главе определяются устойчивые по Нэшу и индивидуально устойчивые соглашения для игр более двух лиц подобно тому, как таковые определяются в теории коалиционных структур [88].

### 2.1 Моделирование соглашений с использованием механизма компенсаций

В данном разделе предполагается, что множество игроков  $N = \{1, 2\}$  состоит из двух стран: развитой и развивающейся. Асимметрия между двумя странами представлена их разной чувствительностью к проблеме загрязнения окружающей среды, т.е. игроки могут быть двух типов: игрок 1 — чувствительный к загрязнению игрок (развитая страна), а игрок 2 — нечувствительный к загрязнению игрок (развивающаяся страна).

По аналогии с моделью, представленной в [33, 64], динамика уровня загряз-



нения  $S$  задается следующим образом:

$$\dot{S}(t) = \mu \sum_{i \in N} e_i(t) - \varepsilon S(t), \quad S(0) = S_0, \quad (2.1)$$

где  $e_i(t)$  — уровень выбросов игрока  $i$ ,  $\mu > 0$  — предельное влияние выбросов игроков на накопление загрязнения,  $\varepsilon > 0$  — скорость естественного поглощения загрязнений природой.

Чувствительные и нечувствительные игроки различаются по своему отношению к политике уменьшения загрязнений, что отражается в модели в виде различных функций выигрышей игроков, т.е. нечувствительный игрок максимизирует свой выигрыш, который определяется следующим образом:

$$\max_{e_2 > 0} W_2 = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (\alpha_2 e_2 - \frac{1}{2} e_2^2) dt, \quad (2.2)$$

тогда как функция выигрыша чувствительного игрока имеет вид:

$$\max_{e_1 > 0} W_1 = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (\alpha_1 e_1 - \frac{1}{2} e_1^2 - \frac{1}{2} \beta_1 S^2) dt, \quad (2.3)$$

где  $\rho > 0$  — ставка дисконтирования, а  $\alpha_i, \beta_i$  — положительные константы. Стоимость ущерба от загрязнения окружающей среды, равная  $\frac{1}{2} \beta_1 S^2$ , опущена в (2.2), что говорит о том, что нечувствительный игрок не заинтересован в уменьшении уровня загрязнения природы.

Рассмотрим три возможных сценария с точки зрения поведения игроков и их готовности к сотрудничеству. При некооперативном сценарии оба игрока индивидуально максимизируют свою прибыль. Такое поведение не является экологически благоприятным, т.е. оно не позволяет решить проблему загрязнения окружающей среды. При кооперативном сценарии игроки максимизируют свою совместную прибыль, что позволяет в некотором степени решить экологическую проблему, т.е. уменьшить уровень загрязнения окружающей среды и получить наибольший суммарный выигрыш. Существует несколько проблем, связанных с реализацией кооперативного сценария, и среди них: 1) проблема справедливого распределения совместной прибыли и 2) проблема реализации полного кооперативного (скоординированного) поведения, особенно когда полная координация действий игроков затруднена. В данной работе предлагается рассмотреть третий сценарий, при котором сотрудничество отличается от полностью кооперативного, но осуществляется через механизм компенсаций (см.

[24]), обычно используемый в координации цепочек поставок [25, 56]. Этот механизм представляет собой форму кооперативного поведения, предлагаемую для поиска эффективного решения по снижению ущерба от загрязнения окружающей среды, при этом, он не требует полной координации поведения игроков во времени. В предлагаемом механизме компенсаций, оба игрока по-прежнему действуют, максимизируя собственную прибыль, но между ними происходит перераспределение затрат, возникающих от загрязнений. Чувствительный игрок компенсирует затраты нечувствительному игроку, поскольку он становится вовлеченным в решение проблемы уменьшения загрязнения. Это делается путем передачи последнему долю своей прибыли.

### 2.1.1 Равновесия при различных сценариях

В этом разделе исследуются равновесия по Нэшу в дифференциальной игре двух лиц при некооперативном сценарии, а также находится решение совместной оптимизационной задачи игроков при кооперативном сценарии. Наконец, определяются равновесные по Нэшу стратегии для сценария с использованием механизма компенсаций.

#### Некооперативный сценарий

При некооперативном сценарии оба игрока ведут себя как индивидуальные игроки, максимизируя свои прибыли, определяемые по формулам (2.2) и (2.3) при заданной динамике уровня загрязнений (2.1).

**Утверждение 2.1.** *Предполагая существование решения внутри области допустимых значений, при некооперативном сценарии равновесие по Нэшу в стратегиях с обратной связью в дифференциальной игре двух игроков, определяемой целевыми функциями (2.2) и (2.3) с учетом динамики (2.1), имеет вид*

$$\begin{aligned} e_1^{nc}(t) &= \alpha_1 + \mu(x_{nc}S^{nc}(t) + y_{nc}), \\ e_2^{nc}(t) &= \alpha_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} x_{nc} &= \frac{\rho + 2\varepsilon - \sqrt{(\rho + 2\varepsilon)^2 + 4\mu^2\beta_1}}{2\mu^2} < 0, \\ y_{nc} &= \frac{\mu(\alpha_1 + \alpha_2)x_{nc}}{\rho + \varepsilon - \mu^2x_{nc}} < 0, \\ z_{nc} &= \frac{(\alpha_1 + \mu y_{nc})^2 + 2\mu y_{nc}\alpha_2}{2\rho}. \end{aligned}$$

Соответствующая равновесная траектория состояния (уровня загрязнений) имеет вид

$$S^{nc}(t) = \frac{\mu(\alpha_1 + \alpha_2) + \mu^2 y_{nc}}{\mu^2 x_{nc} - \varepsilon} (e^{(\mu^2 x_{nc} - \varepsilon)t} - 1) + e^{(\mu^2 x_{nc} - \varepsilon)t} S_0.$$

Устойчивое состояние уровня выбросов есть

$$S_\infty^{nc} = \frac{\mu(\alpha_1 + \alpha_2)(\rho + \varepsilon)}{(\varepsilon - \mu^2 x_{nc})(\rho + \varepsilon - \mu^2 x_{nc})},$$

которое глобально асимптотически устойчиво при  $\mu^2 x_{nc} - \varepsilon < 0$ .

Выигрыши игроков в равновесии по Нэшу равны

$$\begin{aligned} V_1^{nc} &= \frac{1}{2} x_{nc} S_0^2 + y_{nc} S_0 + z_{nc}, \\ V_2^{nc} &= \frac{\alpha_2^2}{2\rho}. \end{aligned}$$

Доказательство. См. [33]. □

### Кооперативный сценарий

При кооперативном сценарии два игрока совместно максимизируют свой суммарный выигрыш, т.е. решают следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{\substack{e_i \geq 0 \\ i \in N}} \sum_{i \in N} W_i(e_1, e_2)$$

при заданном уравнении динамики состояния (2.1), при этом, функции выигрыша игроков задаются формулами (2.2) и (2.3).

**Утверждение 2.2.** *Предполагая существование решения внутри области допустимых значений, в кооперативном сценарии оптимальные стратегии в форме стратегий с обратной связью в дифференциальной игре двух игроков, определяемой целевыми функциями (2.2) и (2.3) с учетом (2.1), имеют вид*

$$e_i^c(t) = \alpha_i + \mu(xS^c(t) + y), \quad i = 1, 2,$$

где

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\varepsilon + \rho - \sqrt{(2\varepsilon + \rho)^2 + 8\mu^2\beta_1}}{4\mu^2} < 0, \\ y &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\mu x}{\rho + \varepsilon - 2x\mu^2} < 0, \\ z &= \frac{(\alpha_1 + \mu y)^2 + (\alpha_2 + \mu y)^2}{2\rho}. \end{aligned}$$

Соответствующая траектория состояния уровня загрязнений при кооперативном сценарии имеет вид:

$$S^c(t) = \frac{\mu(\alpha_1 + \alpha_2) + 2\mu^2 y}{2\mu^2 x - \varepsilon} (e^{(2\mu^2 x - \varepsilon)t} - 1) + e^{(2\mu^2 x - \varepsilon)t} S_0.$$

Устойчивое состояние уровня выбросов есть

$$S_\infty^c = \frac{\mu(\alpha_1 + \alpha_2)(\rho + \varepsilon)}{(\varepsilon - 2\mu^2 x)(\rho + \varepsilon - 2\mu^2 x)},$$

которое глобально асимптотически устойчиво при  $2\mu^2 x - \varepsilon < 0$ .

Совместный выигрыш игроков:

$$V_{12}^c = \frac{1}{2} x S_0^2 + y S_0 + z.$$

Доказательство. См. [33]. □

### Сценарий с использованием механизма компенсаций

В данном разделе предлагается третий сценарий, при котором игроки сотрудничают, договорившись о механизме компенсаций платежей/затрат во времени. Механизм предполагает, что игроки договариваются о двух параметрах: 1) коэффициент компенсации  $0 < \tau < 1$ , показывающий долю прибыли, которую чувствительный игрок отдает нечувствительному игроку за то, что тот убедил его присоединиться к решению проблемы уменьшения загрязнения; 2) коэффициент затрат  $0 < \theta < 1$ , показывающий величину загрязнения, за которое должен отвечать нечувствительный игрок. В этом случае функция выигрыша нечувствительного игрока имеет вид:

$$\max_{e_2 > 0} W_2 = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left( \alpha_2 e_2(t) + \tau \alpha_1 e_1(t) - \frac{1}{2} e_2^2(t) - \frac{1}{2} \beta_1 \theta S^2(t) \right) dt, \quad (2.4)$$

в то время как функция выигрыша чувствительного игрока имеет вид

$$\max_{e_1 > 0} W_1 = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left( (1 - \tau) \alpha_1 e_1(t) - \frac{1}{2} e_1^2(t) - \frac{1}{2} \beta_1 (1 - \theta) S^2(t) \right) dt. \quad (2.5)$$

Параметры  $(\tau, \theta)$  можно понимать как контракт между двумя игроками, и они могут быть предметом переговоров. В данной формулировке не рассматривается задача выбора этих параметров, т.е. они предполагаются заданными, но можно допустить их как переменные решения игроков в переговорном процессе. Очевидно, что равновесие по Нэшу как набор стратегий в форме управлений с обратной связью существенно зависит от значений  $(\tau, \theta)$ .

В сценарии с применением механизма компенсаций оба игрока по отдельности максимизируют собственную прибыль, аналогично тому, как это было описано в некооперативном сценарии. Однако при этом сценарии целевые функции (2.4) и (2.5) зависят не только от переменной состояния, но и от управлений  $e_1, e_2$ .

**Утверждение 2.3.** *Предполагая существование решения внутри области допустимых значений, в сценарии с использованием механизма компенсаций равновесие по Нэшу в форме управлений с обратной связью в дифференциальной игре двух лиц, определяемой целевыми функциями (2.4) и (2.5) с учетом динамики (2.1), имеет вид:*

$$\begin{aligned} e_1^{ToM}(t) &= \alpha_1(1 - \tau) + \mu(x_1 S^{ToM}(t) + y_1), \\ e_2^{ToM}(t) &= \alpha_2 + \mu(x_2 S^{ToM}(t) + y_2), \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, y_1$  и  $y_2$  — решения системы уравнений (2.12), приведенной в доказательстве. Соответствующая траектория равновесного состояния имеет вид:

$$S^{ToM}(t) = \frac{\mu B + \mu^2 y_{12}}{\mu^2 x_{12} - \varepsilon} (e^{(\mu^2 x_{12} - \varepsilon)t} - 1) + e^{(\mu^2 x_{12} - \varepsilon)t} S_0, \quad (2.6)$$

где  $x_{12} = x_1 + x_2, y_{12} = y_1 + y_2$  и  $B = \alpha_1(1 - \tau) + \alpha_2$ .

Устойчивое состояние уровня выбросов:

$$S_\infty^{ToM} = \frac{\mu B + \mu^2 y_{12}}{\varepsilon - \mu^2 x_{12}}, \quad (2.7)$$

которое глобально асимптотически устойчиво при  $\mu^2 x_{12} - \varepsilon < 0$ .

Выплаты игроков в равновесии по Нэшу равны

$$\begin{aligned} V_1^{ToM} &= \frac{1}{2} x_1 S_0^2 + y_1 S_0 + z_1, \\ V_2^{ToM} &= \frac{1}{2} x_2 S_0^2 + y_2 S_0 + z_2, \end{aligned}$$

где  $z_1$  и  $z_2$  определены в доказательстве.

*Доказательство.* Оптимизационная задача для каждого игрока имеет вид:

$$W_1^{ToM} = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left( \alpha_1 e_1(t)(1 - \tau) - \frac{1}{2} e_1^2 - \frac{1}{2} \beta_1 (1 - \theta) S^2(t) \right) dt \rightarrow \max_{e_1 \geq 0}, \quad (2.8)$$

$$W_2^{ToM} = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left( \alpha_2 e_2(t) + \tau(\alpha_1 e_1(t)) - \frac{1}{2} e_2^2(t) - \frac{1}{2} \beta_1 \theta S^2(t) \right) dt \rightarrow \max_{e_2 \geq 0}. \quad (2.9)$$

Полагая линейно-квадратичную форму функций  $V_1(S) = \frac{1}{2} x_1 S^2 + y_1 S + z_1$  и  $V_2(S) = \frac{1}{2} x_2 S^2 + y_2 S + z_2$ , запишем уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для (2.8) и (2.9):

$$\rho V_1(S) = \max_{e_1} \left\{ \alpha_1 e_1 (1 - \tau) - \frac{1}{2} e_1^2 - \frac{1}{2} \beta_1 (1 - \theta) S^2 + V_1'(S) [\mu(e_1 + e_2) - \varepsilon S] \right\}, \quad (2.10)$$

$$\rho V_2(S) = \max_{e_2} \left\{ \alpha_2 e_2 + \tau(\alpha_1 e_1) - \frac{1}{2} e_2^2 - \frac{1}{2} \beta_1 \theta S^2 + V_2'(S) [\mu(e_1 + e_2) - \varepsilon S] \right\}. \quad (2.11)$$

Максимизируя выражение в правой части (2.10), получим, что  $e_1 = \alpha_1 + \mu V_1'(S)$ , а максимизируя выражение в правой части (2.11), получим, что  $e_2 = \alpha_2 + \mu V_2'(S)$ . Учитывая производные  $V_1'(S) = x_1 S + y_1$ ,  $V_2'(S) = x_2 S + y_2$ , и подставляя эти выражения в (2.10), получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{1}{2} x_1 S^2 + y_1 S + z_1 \right) &= \alpha_1 (1 - \tau) [\alpha_1 (1 - \tau) + \mu(x_1 S + y_1)] - \\ &- \frac{1}{2} [\alpha_1 (1 - \tau) + \mu(x_1 S + y_1)]^2 - \frac{1}{2} \beta_1 (1 - \theta) S^2 + \\ &+ (x_1 S + y_1) \left( \mu [\alpha_1 (1 - \tau) + \alpha_2 + \mu(x_1 S + y_1 + x_2 S + y_2)] - \varepsilon S \right). \end{aligned}$$

Учитывая вид производной  $V_2'(S) = x_2 S + y_2$  и подставляя полученные выражения в (2.11), получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{1}{2} x_2 S^2 + y_2 S + z_2 \right) &= \alpha_2 [\alpha_2 + \mu(x_2 S + y_2)] + \\ &+ \tau \alpha_1 [\mu(x_1 S + y_1) + \alpha_1 (1 - \tau)] - \frac{1}{2} [\alpha_2 + \mu(x_2 S + y_2)]^2 - \frac{1}{2} \beta_1 \theta S^2 + \\ &+ (x_2 S + y_2) \left( \mu [\mu(x_1 S + y_1) + \alpha_1 (1 - \tau) + \alpha_2 + \mu(x_2 S + y_2)] - \varepsilon S \right). \end{aligned}$$

Приравнивая выражения при соответствующих степенях  $S$ , получаем систему уравнений относительно  $x_1, x_2$ :

$$\begin{aligned} \mu^2 x_1^2 + 2\mu^2 x_1 x_2 - 2\varepsilon x_1 - \rho x_1 - \beta_1 (1 - \theta) &= 0, \\ \mu^2 x_2^2 + 2\mu^2 x_1 x_2 - 2\varepsilon x_2 - \rho x_2 - \beta_1 \theta &= 0. \end{aligned}$$

После несложных преобразований, получаем систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\mu^4 x_1^4 - 4\mu^2(2\varepsilon + \rho)x_1^3 + ((2\varepsilon + \rho)^2 + 6\mu^2\beta_1\theta - 2\mu^2\beta_1)x_1^2 - (1 - \theta)^2\beta_1^2 = 0, \\ 3\mu^4 x_2^4 - 4\mu^2(2\varepsilon + \rho)x_2^3 + ((2\varepsilon + \rho)^2 - 6\mu^2\beta_1\theta + 4\beta_1\mu^2)x_2^2 - \beta_1^2\theta^2 = 0, \\ y_1 = \frac{\mu^3 x_1[(x_2 B + \tau\alpha_1 x_1)A - \mu^2 x_1 x_2 B]}{A(A^2 - \mu^4 x_1 x_2)} - \frac{\mu x_1 B}{A}, \\ y_2 = \frac{\mu^3 x_1 x_2 B - \mu(x_2 B + \tau\alpha_1 x_1)A}{A^2 - \mu^4 x_1 x_2}, \\ z_1 = \frac{2\mu y_1 B + \alpha_1^2(1 - \tau)^2 + \mu^2 y_1^2 + 2\mu^2 y_1 y_2}{2\rho}, \\ z_2 = \frac{2\mu y_2 B + \alpha_2^2 + 2\alpha_1^2 \tau(1 - \tau) + \mu^2 y_2^2 + 2\mu^2 y_1 y_2 + \tau\alpha_1 \mu y_1}{2\rho}, \end{array} \right. \quad (2.12)$$

где  $A = \mu^2 x_1 + \mu^2 x_2 - \rho - \varepsilon$  и  $B = \alpha_1(1 - \tau) + \alpha_2$ .

В системе (2.12) необходимо решить первые два уравнения, затем, подставив  $x_1$  и  $x_2$  в остальные четыре уравнения, найти  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $z_1$  и  $z_2$ . Заметим, что для доказательства устойчивости состояния необходимо, чтобы  $x_1, x_2$  были отрицательными.

Выражение равновесного уровня накопленного загрязнения  $S^{ToM}(t)$  получается из решения уравнения (2.1) и имеет вид (2.6). При стремлении  $t$  к бесконечности в (2.1) получается устойчивое состояние уровня выбросов (2.7), которое глобально асимптотически устойчиво, когда  $\mu^2 x_{12} - \varepsilon < 0$ .  $\square$

### 2.1.2 Сравнение сценариев

В этом разделе исследуется эффективность механизма компенсаций при различных значениях  $(\tau, \theta)$  путем сравнения уровня загрязнения, стратегий игроков и выигрышей при этом сценарии с соответствующими некооперативными и кооперативными сценариями. Изучается область значений параметров  $(\tau, \theta)$ , при которых оба игрока заинтересованы во внедрении механизма компенсаций, т.е. их прибыль в этом сценарии должна быть не меньше, чем при некооперативном сценарии.

#### Некооперативный сценарий в сравнении с механизмом компенсаций

В описанной выше дифференциальной игре набор параметров  $(\tau, \theta)$ , где  $\tau \in (0, 1)$ ,  $\theta \in (0, 1)$ , определяющих механизм компенсаций, может быть разбит на

Таблица 2.1: Параметры  $(\tau, \theta)$  (механизм компенсаций в сравнении с некооперативным сценарием)

	Игрок 1	Игрок 2	Предельное состояние
1) Выгодно для 2 игрока	$W_1^{ToM} < W_1^{nc}$	$W_2^{ToM} \geq W_2^{nc}$	$S_\infty^{ToM} < S_\infty^{nc}$
2) Выгодно для 1 игрока	$W_1^{ToM} \geq W_1^{nc}$	$W_2^{ToM} < W_2^{nc}$	$S_\infty^{ToM} < S_\infty^{nc}$
<b>3) Выгодно для обоих игроков</b>	$W_1^{ToM} \geq W_1^{nc}$	$W_2^{ToM} \geq W_2^{nc}$	$S_\infty^{ToM} < S_\infty^{nc}$
4) Невыгодно для обоих игроков	$W_1^{ToM} < W_1^{nc}$	$W_2^{ToM} < W_2^{nc}$	$S_\infty^{ToM} < S_\infty^{nc}$
5) Неприемлемо	—	—	$S_\infty^{ToM} \geq S_\infty^{nc}$

пять классов путем сравнения выигрышей игроков и предельного уровня выбросов в некооперативном сценарии и сценарии с использованием механизма компенсаций: 1) выгодный для нечувствительного игрока, когда только нечувствительный игрок получает больший выигрыш в сценарии с механизмом компенсаций по сравнению с некооперативным, и предельный уровень загрязнения в сценарии с механизмом компенсаций ниже, чем с некооперативным; 2) выгодный для чувствительного игрока, когда только чувствительный игрок выигрывает в сценарии с механизмом компенсации по сравнению с некооперативным, и предельный уровень загрязнения при механизме компенсаций ниже, чем в некооперативном; 3) выгодный для обоих игроков, т.е. оба игрока получают большие выигрыши, принимая механизм компенсаций 4) невыгодный для обоих игроков, т.е. этот набор параметров не выгоден обоим игрокам, но предельный уровень загрязнения при использовании механизма компенсаций ниже, чем при некооперативном сценарии; (v) неприемлемый, т.е. оба игрока производят больше загрязнений, чем при некооперативном сценарии.

Очевидно, что оба игрока принимают набор  $(\tau, \theta)$  тогда и только тогда, когда они оба получают от него прибыль, а предельный запас загрязнения будет меньше, чем при некооперативном сценарии. Наборы параметров  $(\tau, \theta)$  и соответствующие неравенства для выигрышей игроков и предельного состояния уровня загрязнения приведены в таблице 2.1.

Проверить неравенства из таблицы 2.1 в игре общего вида затруднительно, поэтому результаты демонстрируются на численном примере в разделе 2.1.3.



Таблица 2.2: Параметры  $(\tau, \theta)$  (механизм компенсаций в сравнении с кооперацией)

	Игрок 1	Игрок 2	Предельный уровень загрязнений
1) Выгодно для 2 игрока	$W_1^{ToM} < W_1^c$	$W_2^{ToM} \geq W_2^c$	$S_\infty^{ToM} < S_\infty^c$
2) Выгодно для 1 игрока	$W_1^{ToM} \geq W_1^c$	$W_2^{ToM} < W_2^c$	$S_\infty^{ToM} < S_\infty^c$
<b>3) Выгодно для обоих игроков</b>	$W_1^{ToM} \geq W_1^c$	$W_2^{ToM} \geq W_2^c$	$S_\infty^{ToM} < S_\infty^c$
4) Невыгодно для обоих игроков	$W_1^{ToM} < W_1^c$	$W_2^{ToM} < W_2^c$	$S_\infty^{ToM} < S_\infty^c$
5) Неприемлемо	—	—	$S_\infty^{ToM} \geq S_\infty^c$

### Кооперативный сценарий в сравнении с механизмом компенсаций

В этом разделе сравним выигрыши игроков и предельные уровни загрязнения в сценарии с использованием механизма компенсаций и кооперативном сценарии. Повторяя ту же классификацию, что и в разделе 2.1.2, представим в таблице 2.2 пять групп параметров  $(\tau, \theta)$  для сравнения сценариев. Опять же интерес представляет подмножество параметров  $(\tau, \theta)$ , такое, что оба игрока получают выгоду от использования механизма компенсаций, но предполагается, что такое подмножество невозможно будет найти, сравнивая этот сценарий с кооперативным.

Неравенства, приведенные в таблице 2.2, проверяются на численном примере в разделе 2.1.3.

#### 2.1.3 Числовой пример

В этом разделе приведен численный пример, иллюстрирующий механизм компенсаций в зависимости от значений  $(\tau, \theta)$ . Параметрами игры являются

$$\beta_1 = 1, \alpha_1 = 9, \alpha_2 = 4,$$

$$\varepsilon = 0.4, \mu = 0.35, \rho = 0.1, S_0 = 1.$$

Как показано на рис. 2.1, множество возможных значений параметров  $(\tau, \theta)$  разбито на пять областей, соответствующих классам, описанным в таблице 2.1. Черная область представляет собой подмножество значений  $(\tau, \theta)$ , при котором игроки при механизме компенсаций загрязняют больше, чем при некооперативном сценарии. Красная (синяя) область соответствует подмножеству значений

$(\tau, \theta)$ , при котором только чувствительный (нечувствительный) игрок получает больше при механизме компенсаций, загрязняя меньше (в сумме), чем при некооперативном сценарии. Зеленая область содержит Парето-оптимальные значения  $(\tau, \theta)$ , когда оба игрока выигрывают от использования механизма компенсаций по сравнению с некооперативным сценарием. Желтая область такова, что оба игрока не заинтересованы в сценарии с использованием механизма компенсаций, поскольку при этом они уменьшают предельный уровень загрязнения по сравнению с некооперативным сценарием.

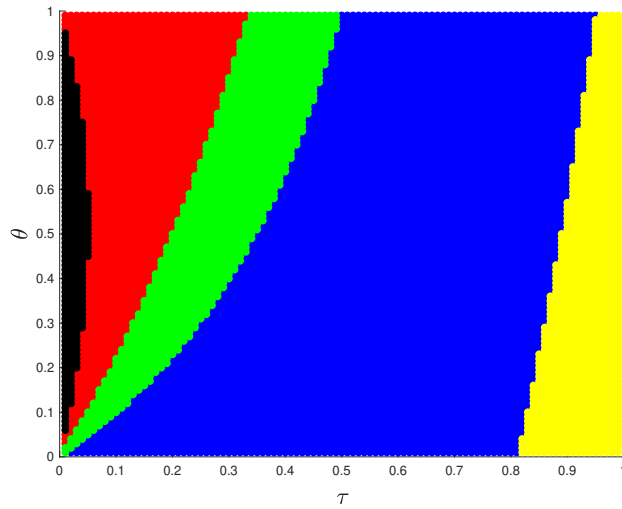


Рис. 2.1: Механизм компенсаций по сравнению с некооперативным сценарием (таблица 2.1). Черная область: тип 5) в таблице 2.1; красная область: тип 2) в таблице 2.1; синяя область: тип 1) в таблице 2.1; желтая область: тип 4) в таблице 2.1; зеленая область: тип 3) в таблице 2.1, соответствующие Парето-оптимальным парам значений  $(\tau, \theta)$ .

Заметим, что для любого  $\tau \in (0, 0.49)$  существует непустой интервал для  $\theta$  такой, что значения  $(\tau, \theta)$  определяют Парето-оптимальный механизм компенсаций для игроков, т.е. оба игрока заинтересованы в его принятии. Оба игрока получают выгоду, выбирая  $(\tau, \theta)$  из зеленой области на рис. 2.1, но возникает вопрос: насколько они могут улучшить свои выигрыши при внедрении механизма компенсаций? Выгоду игроков (в процентах), полученную при использовании механизма компенсаций по сравнению с некооперативным сценарием, можно рассчитать с помощью коэффициента:

$$M_i = \left| \frac{W_i^{nc} - W_i^{ToM}}{W_i^{nc}} \right| \times 100\%, \quad i = 1, 2. \quad (2.13)$$

Некоторые значения оптимального по Парето множества  $(\tau, \theta)$  (из зеленой области на рис. 2.1) и коэффициенты увеличения прибыли  $M_1$  и  $M_2$  для чувстви-

Таблица 2.3: Прибыль от использования механизма компенсаций по сравнению с некооперативным сценарием для Парето-оптимальных значений  $(\tau, \theta)$

$(\tau, \theta)$	(0.31, 0.89)	(0.49, 0.96)	(0.4, 0.97)	(0.34, 0.89)	(0.2, 0.23)
$M_1$	75.61%	0.08%	40.23%	60.22%	1.44%
$M_2$	0.72%	87.8%	46.33%	21.05%	47.35%

тельного и нечувствительного игроков соответственно представлены в таблице 2.3. В числовом примере максимальный коэффициент увеличения прибыли для игрока 1 (чувствительный игрок) составляет 75.61%, а для игрока 2 (нечувствительный игрок) — 87.8%. Очевидно, что игроку 1 выгоднее небольшие значения  $\tau$  и большие  $\theta$ , а игроку 2 — большие  $\tau$ .

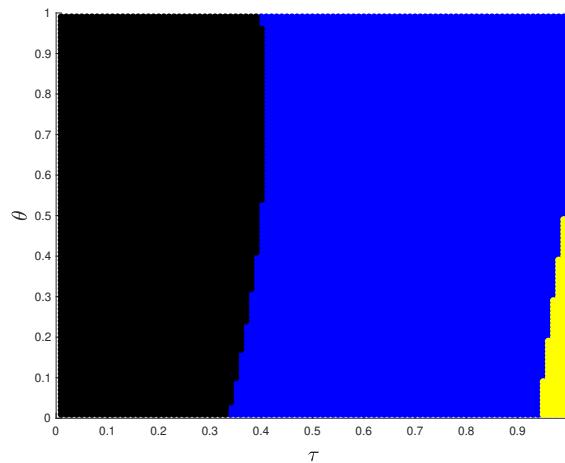


Рис. 2.2: Механизм компенсаций в сравнении с кооперативным сценарием (таблица 2.2). Черная область: тип 5) из таблицы 2.2; синяя область: тип 1) из таблицы 2.2; желтая область: тип 4) из таблицы 2.2.

Следует отметить, что механизм компенсаций интересен тем, что он предпочтительнее кооперативного сценария в части уровня загрязнения в некоторых случаях (уровень загрязнения при механизме компенсаций может быть меньше, чем при кооперативном сценарии), как показывает на рис. 2.2 нечерная область. На этом рисунке можно видеть три области, включая большую черную область, в которой уровень загрязнения при механизме компенсаций больше, чем при кооперативном сценарии. В синей области механизм компенсаций выгоден только для нечувствительного игрока. Отметим, что при построении рис. 2.2 в кооперативном сценарии не используется механизм перераспределения прибыли для определения вознаграждений игроков. Поэтому области могут изменить-

ся после принятия любого кооперативного правила распределения суммарного выигрыша игроков.

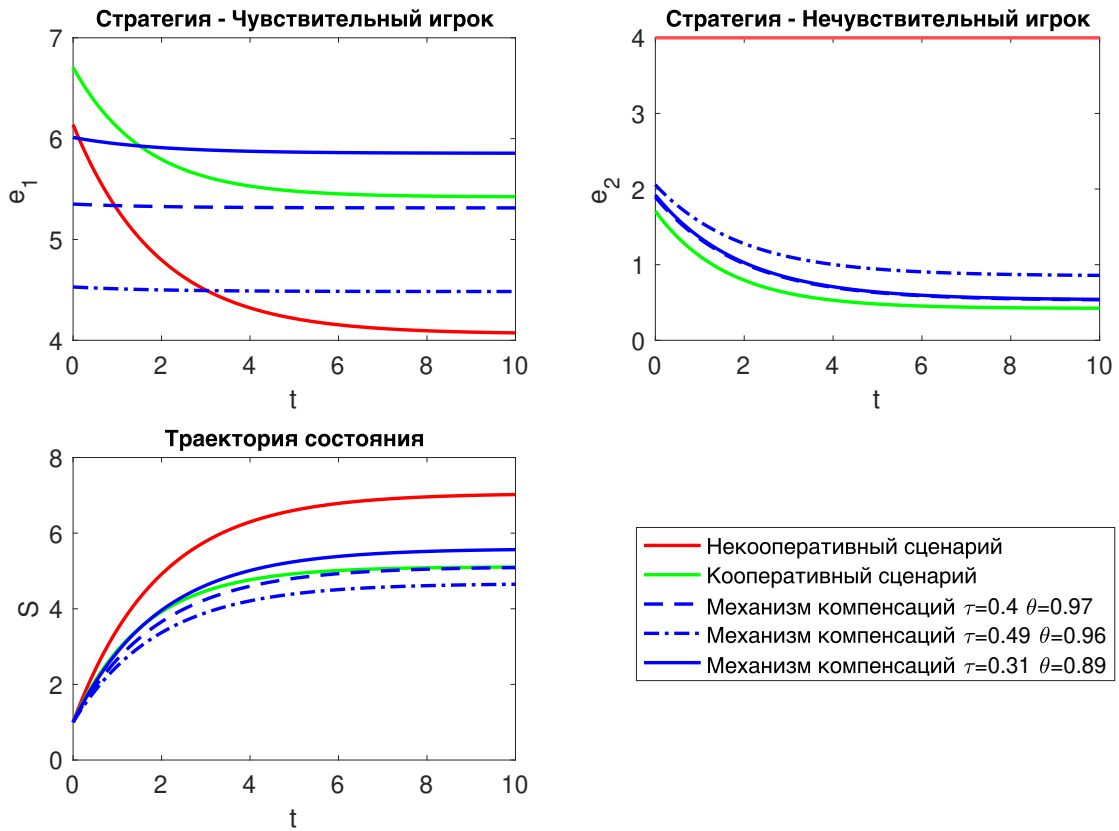


Рис. 2.3: Стратегии чувствительного и нечувствительного игроков и траектория состояния (уровня загрязнения) при различных сценариях: некооперативном, кооперативном и трех сценариев с использованием механизма компенсаций с параметрами  $(\tau, \theta) \in \{(0.31, 0.89), (0.49, 0.96), (0.4, 0.97)\}$ .

Помимо сравнения прибылей игроков, получаемых ими при использовании механизма компенсаций, особый интерес представляет сравнение стратегий игроков и уровней загрязнения при различных сценариях. Как показано на рис. 2.3, из Парето-оптимального множества пар  $(\tau, \theta)$  выбирается три набора  $(0.31, 0.89)$ ,  $(0.49, 0.96)$ ,  $(0.4, 0.97)$ . Первая (вторая) пара параметров дает наибольшую выгоду игроку 1 (игроку 2), а третья — более или менее одинаковое увеличение прибыли для обоих игроков (40.23% для игрока 1 и 46.33% для игрока 2), как показано в табл. 2.3. На рис. 2.3 видно, что после применения предложенного выше механизма компенсаций количество выбросов или стратегия чувствительного игрока становится практически постоянной, а для нечувствительного игрока количество выбросов значительно снизилось по сравнению с некооперативным уровнем. Более важно, что уровень загрязнения свидетель-

ствуует о том, что механизм компенсаций способен снизить его больше, чем кооперативный сценарий (см. рис. 2.3), и при этом он приносит выгоду обоим игрокам по сравнению с равновесием по Нэшу. Например, если игроки используют механизм компенсаций с параметрами  $(\tau, \theta) = (0.49, 0.96)$ , то уровень загрязнения меньше, чем при кооперативном сценарии, а выигрыши игроков увеличиваются на 0.08% и 87.8% для игрока 1 и 2 соответственно.

## 2.2 Устойчивость по Нэшу и индивидуальная устойчивость различных кооперативных сценариев

В данном разделе рассматривается модель, в которой игроками являются три соседние отрасли или страны, производящие товары, загрязняя окружающую среду и наносящие ей ущерб. Множество игроков равно  $N = \{1, 2, 3\}$ . Игроки являются асимметричными с точки зрения функций прибыли, обусловленных различным отношением к экологическим проблемам. Игроки могут быть двух типов:  $I$  — чувствительный к выбросам игрок (или развитая страна) и  $II$  — нечувствительный к выбросам игрок (или развивающаяся страна). Чувствительный игрок обеспокоен состоянием окружающей среды и проводит экологически безопасную политику. Нечувствительный игрок не заботится об уровне выбросов, т.е. проводит экологически неблагоприятную политику. Пусть игрок 1 относится к типу  $II$ , а игроки 2 и 3 — к типу  $I$ . Множество игроков по типам определяется как  $N = \{II, I, I\}$ , содержащее две развитые и одну развивающуюся страны.

Страны производят товары, и эта производственная деятельность приводит к выбросам. Опираясь на модель, представленную в [33], определим динамическую систему уровня загрязнений  $S$  формулой:

$$\dot{S}(t) = \mu \sum_{i \in N} e_i(t) - \varepsilon S(t), \quad S(0) = S_0, \quad (2.14)$$

где  $e_i(t)$  — количество выбросов игрока  $i$ ,  $\mu > 0$  — предельное влияние выбросов игроков на уровень загрязнения  $S$ , а  $\varepsilon > 0$  — скорость поглощения загрязнений природой.

Нечувствительный игрок не обеспокоен ущербом, наносимым окружающей среде, и заботится только о доходах от своей производственной деятельности, т.е. этот игрок максимизирует свой выигрыш, который определяется следую-

щим образом:

$$W_i = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (\alpha_i e_i(t) - \frac{1}{2} e_i^2(t)) dt, \quad (2.15)$$

где  $\rho > 0$  — ставка дисконтирования. При этом, чувствительные игроки берут на себя ответственность за снижение загрязнения. Поэтому функция выигрыша чувствительного игрока имеет вид:

$$W_i = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (\alpha_i e_i(t) - \frac{1}{2} e_i^2(t) - \frac{1}{2} \beta_i S^2(t)) dt, \quad (2.16)$$

где  $\beta_i > 0$ , а последний член под интегралом в (2.16) представляет собой стоимость ущерба.

В общем, можно сказать, что у всех игроков целевая функция имеет вид (2.16), но для игрока 1 параметр  $\beta_1$  равен нулю, поэтому в функции выигрыша (2.15) опущен член  $\frac{1}{2} \beta_i S^2$ , а для игроков 2 и 3 параметры  $\beta_2, \beta_3$  строго положительны.

**Замечание 2.1.** *В общем случае два чувствительных игрока 2 и 3 несимметричны по параметрам, т.е. параметры  $\alpha$  и  $\beta$  предполагаются различными для этих игроков.*

### 2.2.1 Равновесия при различных сценариях

В этом разделе рассмотрим кооперативную постановку описанной игры, предполагая, что сотрудничество может быть частичным. Поэтому может формироваться не только гранд коалиция, но и более мелкие коалиции, что предполагает образование специальных коалиционных структур. В следующих теоремах приводятся условия равновесий по Нэшу в дифференциальной игре трех игроков при различных коалиционных разбиениях, когда целевые функции игроков задаются формулой (2.16) и динамика состояния имеет вид (2.14). Рассмотрим возможные коалиционные структуры или сценарии:

1. *Некооперативный сценарий:*  $\pi_1 = \{\{I\}, \{I\}, \{II\}\}$ ;

2. *Кооперативный сценарий:*  $\pi_2 = \{\{I, I, II\}\}$ ;

3. *Частично кооперативные сценарии:*

(а) Случай 1 (сотрудничество двух развитых стран):  $\pi_3 = \{\{I, I\}, \{II\}\}$ ;

- (b) Случай 2 (сотрудничают одна развивающаяся и одна развитая страна):  $\pi_4 = \{\{I, II\}, \{I\}\}$ . Этот сценарий имеет два варианта:  $\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$  и  $\pi_{4_2} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$ . Здесь и далее ссылаемся на общую форму коалиционной структуры  $\pi_4$ , если результат справедлив для обеих структур  $\pi_{4_1}$  и  $\pi_{4_2}$ .

### Некооперативный сценарий

В этом сценарии три игрока действуют как индивидуальные игроки, максимизирующие (2.16) при заданной динамике состояния (2.14), т.е. коалиционная структура имеет вид  $\pi_1 = \{\{I\}, \{I\}, \{II\}\}$ . В следующем утверждении характеризуем равновесие по Нэшу для некооперативного сценария.

**Утверждение 2.4.** *Предполагая существование решения внутри области допустимых значений, в некооперативном сценарии  $\pi_1 = \{\{I\}, \{I\}, \{II\}\}$ , если существует решение внутри области допустимых значений, равновесие по Нэшу в стратегиях с обратной связью имеет вид:*

$$\begin{aligned} e_1^{nc}(t) &= \alpha_1, \\ e_j^{nc}(t) &= \alpha_j + \mu(x_j S^{nc}(t) + y_j), \quad j = 2, 3, \end{aligned}$$

где  $x_j, y_j, z_j$  для  $j = 2, 3$  удовлетворяют системе:

$$\begin{aligned} 3\mu^4 x_j^4 - 4(2\varepsilon + \rho)\mu^2 x_j^3 + [4\mu^2 \beta_{5-j} + (2\varepsilon + \rho)^2 - 2\mu^2 \beta_j] x_j^2 - \beta_j^2 &= 0, \quad x_j < 0 \\ y_j &= \frac{\mu\alpha_{123} x_j (\rho + \varepsilon - \mu^2 x_{23} + \mu^2 x_{5-j})}{(\rho + \varepsilon - \mu^2 x_{23})^2 - \mu^4 x_j x_{5-j}} < 0, \\ z_j &= \frac{\alpha_j^2 + 2\mu y_j \alpha_{123} + 2\mu^2 y_j y_{5-j}}{2\rho}, \end{aligned}$$

где  $\alpha_{23} = \alpha_2 + \alpha_3$ ,  $\alpha_{123} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ,  $x_{23} = x_2 + x_3$ .

Соответствующая траектория равновесного уровня загрязнений имеет вид

$$S^{nc}(t) = \frac{\mu\alpha_{123} + \mu^2 y_{23}}{\mu^2 x_{23} - \varepsilon} (e^{(\mu^2 x_{23} - \varepsilon)t} - 1) + e^{(\mu^2 x_{23} - \varepsilon)t} S_0, \quad (2.17)$$

где  $y_{23} = y_2 + y_3$ .

Передельный уровень загрязнения равен

$$S_\infty^{nc} = \frac{\mu\alpha_{123} + \mu^2 y_{23}}{\varepsilon - \mu^2 x_{23}}, \quad (2.18)$$

который глобально асимптотически устойчив, если  $\mu^2 x_{23} - \varepsilon < 0$ .

*Доказательство.* Во-первых, функция выигрыша игрока 1 не зависит от переменной состояния, и легко получить, что максимальное значение его целевой функции достигается при  $e_1 = \alpha_1$ .

Во-вторых, игроки 2 и 3 относятся к типу  $I$ , для иллюстрации вычислений возьмем второго игрока. Оптимизационная задача игрока 2 имеет вид:

$$W_2^{\pi_1} = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (\alpha_2 e_2(t) - \frac{1}{2} e_2^2(t) - \frac{1}{2} \beta_2 S^2(t)) dt \rightarrow \max_{e_2(t) \geq 0}. \quad (2.19)$$

Принимая линейно-квадратичную форму функций  $V_2(S) = \frac{1}{2} x_2 S^2 + y_2 S + z_2$  и  $V_3(S) = \frac{1}{2} x_3 S^2 + y_3 S + z_3$ , запишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для (2.19), которое имеет вид

$$\rho V_2(S) = \max_{e_2} \left\{ (\alpha_2 e_2 - \frac{1}{2} e_2^2 - \frac{1}{2} \beta_2 S^2) + V_2'(S) [\mu(e_1 + e_2 + e_3) - \varepsilon S] \right\}. \quad (2.20)$$

Максимизируя выражение в правой части уравнения (2.20), получим  $e_2 = \alpha_2 + \mu V_2'(S)$ , а соответствующая стратегия для игрока 3 есть  $e_3 = \alpha_3 + \mu V_3'(S)$ . Учитывая производные  $V_j'(S) = x_j S + y_j$ ,  $j = 2, 3$ , и подставляя эти выражения в (2.20), получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{1}{2} x_2 S^2 + y_2 S + z_2 \right) &= \frac{1}{2} [\alpha_2 + \mu(Sx_2 + y_2)]^2 + \mu \alpha_1 (x_2 S + y_2) + \\ &+ \mu (x_2 S + y_2) [\alpha_3 + \mu(x_3 S + y_3)] - \frac{1}{2} \beta_2 S^2 - \varepsilon S (x_2 S + y_2). \end{aligned}$$

Приравнявая множители при соответствующих степенях переменных, запишем два линейных квадратичных уравнения, содержащих  $x_2, x_3$ :

$$\begin{aligned} \mu^2 x_2^2 - (2\varepsilon + \rho) x_2 + 2\mu^2 x_2 x_3 - \beta_2 &= 0, \\ \mu^2 x_3^2 - (2\varepsilon + \rho) x_3 + 2\mu^2 x_2 x_3 - \beta_3 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $x_2$  и  $x_3$  находятся как решения следующих уравнений:

$$3\mu^4 x_2^4 - 4(2\varepsilon + \rho)\mu^2 x_2^3 + [4\mu^2 \beta_3 + (2\varepsilon + \rho)^2 - 2\mu^2 \beta_2] x_2^2 - \beta_2^2 = 0, \quad (2.21)$$

$$3\mu^4 x_3^4 - 4(2\varepsilon + \rho)\mu^2 x_3^3 + [4\mu^2 \beta_2 + (2\varepsilon + \rho)^2 - 2\mu^2 \beta_3] x_3^2 - \beta_3^2 = 0. \quad (2.22)$$

Сложно записать решение системы (2.21) и (2.22) относительно  $x_2, x_3$  в явном



виде, поэтому вводим систему с новыми переменными:

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{\mu\alpha_{123}x_2(\rho + \varepsilon - \mu^2x_{23} + \mu^2x_3)}{(\rho + \varepsilon - \mu^2x_{23})^2 - \mu^4x_2x_3}, \\ y_3 &= \frac{\mu\alpha_{123}x_3(\rho + \varepsilon - \mu^2x_{23} + \mu^2x_2)}{(\rho + \varepsilon - \mu^2x_{23})^2 - \mu^4x_2x_3}, \\ z_2 &= \frac{\alpha_2^2 + 2\mu y_2\alpha_{123} + 2\mu^2y_2y_3}{2\rho}, \\ z_3 &= \frac{\alpha_3^2 + 2\mu y_3\alpha_{123} + 2\mu^2y_2y_3}{2\rho}, \end{aligned}$$

где  $x_{23} = x_2 + x_3$ .

Для глобальной устойчивости предельного состояния требуется, чтобы  $\mu^2x_{23} - \varepsilon < 0$ , поэтому выбираются отрицательные корни  $x_2$  и  $x_3$  из (2.21) и (2.22). В дальнейшем выражение равновесного уровня загрязнения  $S^{nc}(t)$  получается как решение задачи (2.14) и задается формулой (2.17). Устойчивое состояние уровня загрязнений есть (2.18), которое получается, если в уравнении (2.14) подставить нулевое значение.  $\square$

При некооперативном сценарии нечувствительный игрок имеет постоянный уровень выбросов, равный коэффициенту его линейной прибыли от производства, а его мгновенный выигрыш равен  $\frac{\alpha_1^2}{2}$  при выигрыше во всей игре  $\frac{\alpha_1^2}{2\rho}$ . Очевидно, что равновесная стратегия нечувствительного игрока в некооперативном сценарии больше, чем его стратегия в кооперативном и частично кооперативном сценариях, когда он сотрудничает с чувствительным игроком. Это будет доказано в разделе 3.3.

### Кооперативный сценарий

При кооперативном сценарии коалиционная структура имеет вид  $\pi_2 = \{\{I, I, II\}\}$ , т.е. три игрока координируют свои стратегии с целью максимизации суммарного выигрыша, равного

$$\max_{\substack{e_i \geq 0 \\ i \in N}} \sum_{i \in N} W_i(e_1, e_2, e_3) \quad (2.23)$$

с учетом динамики состояния (2.14) с начальным условием  $S(0) = S_0$ . В следующем утверждении показаны необходимые условия оптимальности решения.

**Утверждение 2.5.** *Предполагая существование решения внутри области допустимых значений, при кооперативном сценарии, когда  $\pi_2 = \{I, I, II\}$ , оптимальные стратегии игроков в форме управлений с обратной связью имеют вид:*

$$e_i^c(t) = \alpha_i + \mu(x_c S^c(t) + y_c), \quad i \in N, \quad (2.24)$$

где

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{2\varepsilon + \rho - \sqrt{(2\varepsilon + \rho)^2 + 12\mu^2\beta_{123}}}{6\mu^2} < 0, \\ y_c &= \frac{\mu x_c \alpha_{123}}{\rho + \varepsilon - 3\mu^2 x_c} < 0, \\ z_c &= \frac{\sum_{i=1}^3 (\alpha_i + \mu y_c)^2}{2\rho}, \end{aligned}$$

и  $\alpha_{123} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ,  $\beta_{123} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ .

*Траектория кооперативного уровня загрязнения имеет вид:*

$$S^c(t) = \frac{\mu\alpha_{123} + 3\mu^2 y_c}{3\mu^2 x_c - \varepsilon} (e^{(3\mu^2 x_c - \varepsilon)t} - 1) + e^{(3\mu^2 x_c - \varepsilon)t} S_0.$$

*Предельный уровень загрязнения равен*

$$S_\infty^c = \frac{(\rho + \varepsilon)\mu\alpha_{123}}{(\varepsilon - 3\mu^2 x_c)(\rho + \varepsilon - 3\mu^2 x_c)},$$

*и он глобально асимптотически устойчив, если  $3\mu^2 x_c - \varepsilon < 0$ .*

*Доказательство.* При кооперативном сценарии, поскольку все игроки совместно максимизируют общую прибыль (2.23), оптимизационная задача имеет вид

$$\begin{aligned} W^{\pi_2} &= W_1^{\pi_2} + W_2^{\pi_2} + W_3^{\pi_2} \\ &= \sum_{i=1}^3 \int_0^\infty e^{-\rho t} (\alpha_i e_i(t) - \frac{1}{2} e_i^2(t) - \frac{1}{2} \beta_i S^2(t)) dt \rightarrow \max_{\substack{e_i \geq 0 \\ i \in N}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Для решения задачи (2.25) уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана может быть записано в виде:

$$\rho V_c(S) = \max_{e_1, e_2, e_3} \left\{ \sum_{i=1}^3 (\alpha_i e_i - \frac{1}{2} e_i^2 - \frac{1}{2} \beta_i S^2) + V_c'(S) [\mu(e_1 + e_2 + e_3) - \varepsilon S] \right\}. \quad (2.26)$$

Максимизируя выражение в правой части уравнения (2.26), запишем условие первого порядка и найдем управление  $e_i = \alpha_i + \mu V_c'(S)$ . Предполагая линейно-квадратичную форму  $V_c(S)$ , зададим  $V_c(S) = \frac{1}{2} x_c S^2 + y_c S + z_c$ . Тогда подстановка

соответствующих переменных в (2.26) дает

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{1}{2} x_c S^2 + y_c S + z_c \right) &= \frac{1}{2} [\alpha_1 + \mu(x_c S + y_c)]^2 - \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) S^2 - \varepsilon S(x_c S + y_c) \\ &+ \frac{1}{2} [\alpha_2 + \mu(x_c S + y_c)]^2 + \frac{1}{2} [\alpha_3 + \mu(x_c S + y_c)]^2. \end{aligned}$$

С помощью процедуры идентификации получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} 3\mu^2 x_c^2 - (2\varepsilon + \rho)x_c - \beta_{123} &= 0, \\ y_c &= \frac{\mu x_c \alpha_{123}}{\rho + \varepsilon - 3\mu^2 x_c}, \\ z_c &= \frac{\sum_{i=1}^3 (\alpha_i + \mu y_c)^2}{2\rho}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Поскольку глобальная устойчивость предельного состояния имеет место при  $3\mu^2 x_c - \varepsilon < 0$ , то возьмем отрицательный корень уравнения (2.27), т.е.

$$x_c = \frac{2\varepsilon + \rho - \sqrt{(2\varepsilon + \rho)^2 + 12\mu^2 \beta_{123}}}{6\mu^2}.$$

Подставляя все необходимые переменные в (2.14) и решая это дифференциальное уравнение, получаем выражения для  $S^c(t)$  и  $S_\infty^c$ , представленные в утверждении.  $\square$

Заметим, что стратегия нечувствительного игрока 1  $e_1^c(t)$  меньше его стратегии в некооперативном случае  $e_1^{nc}(t)$  для любого  $t$ . Это следует из отрицательности коэффициентов  $x_c$  и  $y_c$  в (2.24) и формы стратегии  $e_1^{nc}(t)$ , которая равна  $\alpha_1$  для любого  $t > 0$ . Очевидно, что выигрыш игрока 1 при кооперативном сценарии меньше, чем при некооперативном. Поэтому нечувствительному игроку невыгодно сотрудничать с чувствительными игроками, если они не компенсируют игроку 1 переключение с некооперативного на кооперативное поведение (см. [33]). Система трансферных платежей между тремя игроками для придания устойчивости их сотрудничеству рассматривается в разделе 5.

### Частично кооперативные сценарии

**Случай 1:**  $\{\{I, I\}, \{II\}\}$ . В этом подразделе исследуется равновесное поведение игроков при частичном сотрудничестве. Начнем со сценария, когда формируется коалиционная структура  $\{\{I, I\}, \{II\}\}$ , в которой два чувствительных игрока образуют коалицию, а нечувствительный игрок выступает в роли одиночки. Для удобства зафиксируем коалиционную структуру  $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$  для этого

случая. Целевая функция коалиции  $\{2, 3\}$  определяется следующим образом:

$$\max_{e_2, e_3} \sum_{i=2}^3 W_i(e_1, e_2, e_3),$$

где целевая функция нечувствительного игрока задана формулой (2.16), и учитывается динамика состояния (2.14).

**Утверждение 2.6.** *Предполагая существование решения внутри области допустимых значений, при частично кооперативном сценарии с коалиционной структурой  $\pi_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$  равновесие по Нэшу в форме стратегий с обратной связью имеет вид:*

$$\begin{aligned} e_1^{pc_1}(t) &= \alpha_1, \\ e_2^{pc_1}(t) &= \alpha_2 + \mu(x_{c_1} S^{pc_1}(t) + y_{c_1}), \\ e_3^{pc_1}(t) &= \alpha_3 + \mu(x_{c_1} S^{pc_1}(t) + y_{c_1}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} x_{c_1} &= \frac{2\varepsilon + \rho - \sqrt{(2\varepsilon + \rho)^2 + 8\mu^2\beta_{23}}}{4\mu^2} < 0, \\ y_{c_1} &= \frac{\mu x_{c_1} \alpha_{123}}{\rho + \varepsilon - 2\mu^2 x_{c_1}} < 0, \\ z_{c_1} &= \frac{(\alpha_2 + \mu y_{c_1})^2 + (\alpha_3 + \mu y_{c_1})^2 + 2\mu y_{c_1} \alpha_1}{2\rho}, \end{aligned}$$

и  $\beta_{23} = \beta_2 + \beta_3$ .

Соответствующая траектория равновесного состояния при сценарии частичного сотрудничества (случай 1) имеет вид

$$S^{pc_1}(t) = \frac{\mu\alpha_{123} + 2\mu^2 y_{c_1}}{2\mu^2 x_{c_1} - \varepsilon} (e^{(2\mu^2 x_{c_1} - \varepsilon)t} - 1) + e^{(2\mu^2 x_{c_1} - \varepsilon)t} S_0.$$

Предельный уровень загрязнения равен

$$S_{\infty}^{pc_1} = \frac{(\rho + \varepsilon)\mu\alpha_{123}}{(\varepsilon - 2\mu^2 x_{c_1})(\rho + \varepsilon - 2\mu^2 x_{c_1})},$$

который глобально асимптотически устойчив, если  $2\mu^2 x_{c_1} - \varepsilon < 0$ .

*Доказательство.* Поскольку нечувствительный игрок 1 максимизирует свою собственную функцию выигрыша, он ведет себя так же, как и в некооперативном сценарии, поскольку его целевая функция не зависит от переменной состояния. Рассмотрим функцию выигрыша коалиции двух других игроков, которые

являются чувствительными, и эта коалиция решает оптимизационную задачу:

$$W^{\pi_3} = W_2^{\pi_3} + W_3^{\pi_3} = \sum_{i=2}^3 \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (\alpha_i e_i(t) - \frac{1}{2} e_i^2(t) - \frac{1}{2} \beta_i S^2(t)) dt \rightarrow \max_{e_2, e_3}.$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в этом случае выглядит следующим образом:

$$\rho V_{c_1}(S) = \max_{e_2, e_3} \left\{ \sum_{i=2}^3 (\alpha_i e_i - \frac{1}{2} e_i^2 - \frac{1}{2} \beta_i S^2) + V'_{c_1}(S) [\mu(e_1 + e_2 + e_3) - \varepsilon S] \right\}. \quad (2.28)$$

Максимизируя выражение в правой части уравнения (2.28), получаем стратегии:  $e_j = \alpha_j + \mu V'_{c_1}(S)$ ,  $j = 2, 3$ . Предполагая линейно-квадратичную форму  $V_{c_1}$ , т.е.,  $V_{c_1}(S) = \frac{1}{2} x_{c_1} S^2 + y_{c_1} S + z_{c_1}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{1}{2} x_{c_1} S^2 + y_{c_1} S + z_{c_1} \right) &= \frac{1}{2} [\alpha_2 + \mu(Sx_{c_1} + y_{c_1})^2 + \frac{1}{2} [\alpha_3 + \mu(Sx_{c_1} + y_{c_1})]^2 + \\ &+ \mu \alpha_1 (x_{c_1} S + y_{c_1}) - \frac{1}{2} \beta_{23} S^2 - \varepsilon S (x_{c_1} S + y_{c_1})]. \end{aligned}$$

Путем приравнивая коэффициентов получаем

$$\begin{aligned} 2\mu^2 x_{c_1}^2 - (2\varepsilon + \rho)x_{c_1} - \beta_{23} &= 0, \\ y_{c_1} &= \frac{\mu x_{c_1} \alpha_{123}}{\rho + \varepsilon - 2\mu^2 x_{c_1}}, \\ z_{c_1} &= \frac{(\alpha_2 + \mu y_{c_1})^2 + (\alpha_3 + \mu y_{c_1})^2 + 2\mu y_{c_1} \alpha_1}{2\rho}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Берем отрицательный корень  $x_{c_1}$  как решение (2.29) для глобальной устойчивости решения, поэтому  $x_{c_1} = \frac{2\varepsilon + \rho - \sqrt{(2\varepsilon + \rho)^2 + 8\mu^2 \beta_{23}}}{4\mu^2}$ , тогда  $S^{pc_1}(t)$  получается как решение (2.14) с начальным условием  $S(0) = S_0$ .  $\square$

**Случай 2:**  $\{\{I, II\}, \{I\}\}$ . В данном разделе проанализируем сценарий частичного сотрудничества, когда формируется коалиция между развитой и развивающейся страной, а другая развитая страна выступает в роли индивидуального игрока. Предположим, что нечувствительный игрок 1 и чувствительный игрок 2 играют совместно. Тогда оптимизационная задача для коалиции  $\{1, 2\}$  имеет вид:

$$\max_{e_1, e_2} \sum_{i=1}^2 W_i(e_1, e_2, e_3),$$

где функция выигрыша  $W_i$ ,  $i = 1, 2$  задается формулами (2.15) и (2.16) соответственно.

**Утверждение 2.7.** *Предполагая существование решения внутри области допустимых значений, при частично кооперативном сценарии (случай 2) с коалиционной структурой  $\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$  равновесие по Нэшу в форме стратегий с обратной связью имеет вид:*

$$\begin{aligned} e_1^{pc_2}(t) &= \alpha_1 + \mu(x_{c_2} S^{pc_2}(t) + y_{c_2}), \\ e_2^{pc_2}(t) &= \alpha_2 + \mu(x_{c_2} S^{pc_2}(t) + y_{c_2}), \\ e_3^{pc_2}(t) &= \alpha_3 + \mu(x_{3_{c_2}}^{pc_2} S^{pc_2}(t) + y_{3_{c_2}}), \end{aligned} \quad (2.30)$$

где  $x_{c_2}, x_{3_{c_2}}, y_{c_2}, y_{3_{c_2}}, z_{c_2}, z_{3_{c_2}}$  удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{aligned} 12\mu^4 x_{c_2}^4 - 8(2\varepsilon + \rho)\mu^2 x_{c_2}^3 + \left((2\varepsilon + \rho)^2 + 4\mu^2\beta_3 - 4\mu^2\beta_2\right)x_{c_2}^2 - \beta_2^2 &= 0, \\ 3\mu^4 x_{3_{c_2}}^4 - 4(2\varepsilon + \rho)\mu^2 x_{3_{c_2}}^3 + \left((2\varepsilon + \rho)^2 + 8\mu^2\beta_2 - 2\mu^2\beta_3\right)x_{3_{c_2}}^2 - \beta_3^2 &= 0, \\ y_{c_2} &= \frac{\mu\alpha_{123}x_{c_2}(\rho + \varepsilon - 2\mu^2x_{c_2})}{(\rho + \varepsilon - 2\mu^2x_{c_2} - \mu^2x_{3_{c_2}})^2 - 2\mu^4x_{c_2}x_{3_{c_2}}}, \\ y_{3_{c_2}} &= \frac{\mu\alpha_{123}x_{c_2}(\rho + \varepsilon - \mu^2x_{3_{c_2}})}{(\rho + \varepsilon - 2\mu^2x_{c_2} - \mu^2x_{3_{c_2}})^2 - 2\mu^4x_{c_2}x_{3_{c_2}}}, \\ z_{c_2} &= \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\mu y_{c_2}(\alpha_{123} + \mu y_{c_2} + \mu y_{3_{c_2}})}{2\rho}, \\ z_{3_{c_2}} &= \frac{\alpha_3^2 + \mu y_{3_{c_2}}(2\alpha_{123} + 4\mu y_{c_2} + \mu y_{3_{c_2}})}{2\rho}. \end{aligned}$$

Соответствующая траектория состояния имеет вид:

$$S^{pc_2}(t) = \frac{\mu\alpha_{123} + \mu^2(2y_{c_2} + y_{3_{c_2}})}{\mu^2(2x_{c_2} + x_{3_{c_2}}) - \varepsilon} (e^{[\mu^2(2x_{c_2} + x_{3_{c_2}}) - \varepsilon]t} - 1) + e^{[\mu^2(2x_{c_2} + x_{3_{c_2}}) - \varepsilon]t} S_0.$$

Предельный уровень загрязнения есть

$$S_\infty^{pc_2} = \frac{\mu\alpha_{123} + \mu^2 y_{3_{c_2}} + 2\mu^2 y_{c_2}}{\varepsilon - 2\mu^2 x_{c_2} - \mu^2 x_{3_{c_2}}},$$

который глобально асимптотически устойчив, если  $\mu^2(2x_{c_2} + x_{3_{c_2}}) - \varepsilon < 0$ .

*Доказательство.* Рассмотрим структуру  $\{\{I, II\}, \{I\}\}$ , в которой игрок 3 выступает в качестве индивидуального игрока. Необходимо решить две оптимизационные задачи. Сначала для коалиции игроков 1 и 2 сформулируем их совместную оптимизационную задачу:

$$W^{\pi_{4_1}} = W_1^{\pi_{4_1}} + W_2^{\pi_{4_1}} = \sum_{i=1}^2 \int_0^\infty e^{-\rho t} (\alpha_i e_i(t) - \frac{1}{2} e_i^2(t) - \frac{1}{2} \beta_i S^2(t)) dt \rightarrow \max_{e_1, e_2}.$$

Игрок 3 стремится максимизировать

$$W_3^{\pi_4} = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (\alpha_3 e_3(t) - \frac{1}{2} e_3^2(t) - \frac{1}{2} \beta_3 S^2(t)) dt \rightarrow \max_{e_3}.$$

Следуя методу предыдущих случаев, запишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\rho V_{c_2}(S) = \max_{e_1, e_2} \left\{ \sum_{i=1}^2 (\alpha_i e_i - \frac{1}{2} e_i^2 - \frac{1}{2} \beta_i S^2) + V'_{c_2}(S) [\mu(e_1 + e_2 + e_3) - \varepsilon S] \right\}, \quad (2.31)$$

$$\rho V_{3_{c_2}}(S) = \max_{e_3} \left\{ (\alpha_3 e_3 - \frac{1}{2} e_3^2 - \frac{1}{2} \beta_3 S^2) + V'_{3_{c_2}}(S) [\mu(e_1 + e_2 + e_3) - \varepsilon S] \right\}. \quad (2.32)$$

Из этого следует, что  $V_{c_2}(S) = \frac{1}{2} x_{c_2} S^2 + y_{c_2} S + z_{c_2}$ ,  $V_{3_{c_2}}(S) = \frac{1}{2} x_{3_{c_2}} S^2 + y_{3_{c_2}} S + z_{3_{c_2}}$ , следовательно, равновесные стратегии есть

$$\begin{aligned} e_j(t) &= \alpha_j + \mu(x_{c_2} S(t) + y_{c_2}), \quad j \in 1, 2, \\ e_3(t) &= \alpha_3 + \mu(x_{3_{c_2}} S(t) + y_{3_{c_2}}). \end{aligned}$$

Затем, подставив  $V_{c_2}(S)$ ,  $V'_{c_2}(S)$ ,  $V_{3_{c_2}}(S)$ ,  $V'_{3_{c_2}}(S)$  в (2.31) и (2.32), получим

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{1}{2} x_{c_2} S^2 + y_{c_2} S + z_{c_2} \right) &= \frac{1}{2} [\alpha_1 + \mu(S x_{c_2} + y_{c_2})]^2 + \frac{1}{2} [\alpha_2 + \mu(S x_{c_2} + y_{c_2})]^2 \\ &\quad + \mu(x_{c_2} S + y_{c_2}) [\alpha_3 + \mu(x_{3_{c_2}} S + y_{3_{c_2}})] - \frac{1}{2} \beta_{12} S^2 - \varepsilon S (x_{c_2} S + y_{c_2}), \\ \rho \left( \frac{1}{2} x_{3_{c_2}} S^2 + y_{3_{c_2}} S + z_{3_{c_2}} \right) &= \frac{1}{2} [\alpha_3 + \mu(S x_{3_{c_2}} + y_{3_{c_2}})]^2 - \varepsilon S (x_{3_{c_2}} S + y_{3_{c_2}}) \\ &\quad + \mu(x_{3_{c_2}} S + y_{3_{c_2}}) [\alpha_{12} + 2\mu(x_{c_2} S + y_{c_2})] - \frac{1}{2} \beta_3 S^2. \end{aligned}$$

Методом идентификации коэффициентов получается следующая система:

$$\begin{aligned} 12\mu^4 x_{c_2}^4 - 8(2\varepsilon + \rho)\mu^2 x_{c_2}^3 + \left( (2\varepsilon + \rho)^2 + 4\mu^2 \beta_3 - 4\mu^2 \beta_2 \right) x_{c_2}^2 - \beta_2^2 &= 0, \\ 3\mu^4 x_{3_{c_2}}^4 - 4(2\varepsilon + \rho)\mu^2 x_{3_{c_2}}^3 + \left( (2\varepsilon + \rho)^2 + 8\mu^2 \beta_2 - 2\mu^2 \beta_3 \right) x_{3_{c_2}}^2 - \beta_3^2 &= 0, \\ y_{c_2} &= \frac{\mu \alpha_{123} x_{c_2} (\rho + \varepsilon - 2\mu^2 x_{c_2})}{(\rho + \varepsilon - 2\mu^2 x_{c_2} - \mu^2 x_{3_{c_2}})^2 - 2\mu^4 x_{c_2} x_{3_{c_2}}}, \\ y_{3_{c_2}} &= \frac{\mu \alpha_{123} x_{c_2} (\rho + \varepsilon - \mu^2 x_{3_{c_2}})}{(\rho + \varepsilon - 2\mu^2 x_{c_2} - \mu^2 x_{3_{c_2}})^2 - 2\mu^4 x_{c_2} x_{3_{c_2}}}, \\ z_{c_2} &= \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\mu y_{c_2} (\alpha_{123} + \mu y_{c_2} + \mu y_{3_{c_2}})}{2\rho}, \\ z_{3_{c_2}} &= \frac{\alpha_3^2 + \mu y_{3_{c_2}} (2\alpha_{123} + 4\mu y_{c_2} + \mu y_{3_{c_2}})}{2\rho}. \end{aligned}$$

Берем отрицательные корни  $x_{c_2}$  и  $x_{3_{c_2}}$ , а  $S^{pc_2}(t)$  и  $S_{\infty}^{pc_2}$  находятся из решения уравнения динамики.  $\square$

**Замечание 2.2.** В утверждении 2.7 рассматривается случай 2 с коалиционной структурой  $\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$  и опускается случай коалиционной структуры  $\pi_{4_2} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$ , для которой равновесие легко найти, следуя утверждению 2.7, путем замены чувствительного игрока 2 в коалиции  $\{1, 2\}$  на игрока 3.

Заметим, что стратегия нечувствительного игрока 1 в частично кооперативном сценарии  $e_1^{pc_1}(t)$  (случай 1) равна его стратегии в некооперативном случае  $e_1^{nc}(t)$ . Это верно, так как в обоих случаях выигрыш игрока 1 не зависит от переменной состояния. При этом его стратегия при частично кооперативном сценарии  $e_1^{pc_2}(t)$  (случай 2) меньше стратегии при некооперативном случае  $e_1^{nc}(t)$  при любых  $t$ . Это следует из отрицательности коэффициентов  $x_{c_2}$  и  $y_{c_2}$  в (2.30) и формы стратегии  $e_1^{nc}(t)$ , которая равна  $\alpha_1$  для любого  $t > 0$ . Очевидно, что выигрыш игрока 1 при частично кооперативном сценарии (случай 2) меньше, чем при некооперативном. Опять же, нечувствительному игроку невыгодно сотрудничать с чувствительным игроком, если последний не компенсирует игроку 1 переход от некооперативного к частично кооперативному поведению.

**Замечание 2.3.** Полученные выше равновесия по Нэшу или оптимальные стратегии должны быть неотрицательными, что требует выполнения следующих неравенств:

$$\begin{aligned}
 \alpha_i + \mu(x_i S^{nc}(t) + y_i) &\geq 0, i = 2, 3, \\
 \alpha_i + \mu(x_c S^c(t) + y_c) &\geq 0, i = 1, 2, 3, \\
 \alpha_i + \mu(x_{c_1} S^{pc_1}(t) + y_{c_1}) &\geq 0, i = 2, 3, \\
 \alpha_i + \mu(x_{c_2} S^{pc_2}(t) + y_{c_2}) &\geq 0, i = 1, 2, \\
 \alpha_3 + \mu(x_{3_{c_2}} S^{pc_2}(t) + y_{3_{c_2}}) &\geq 0, \\
 \alpha_i + \mu(x_{c_3} S^{pc_3}(t) + y_{c_3}) &\geq 0, i = 1, 3, \\
 \alpha_2 + \mu(x_{2_{c_3}} S^{pc_3}(t) + y_{2_{c_3}}) &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

А поскольку некоторые параметры не могут быть получены в явном виде, то эти неравенства проверяются после нахождения всех коэффициентов, что показано на численных примерах.



### 2.2.2 Исследование устойчивых коалиционных структур

Рассмотрим все возможные сценарии или коалиционные структуры на предмет устойчивости. Устойчивая коалиционная структура — это «претендент» на формирование. Существуют различные концепции устойчивости коалиционных структур, предложенные для нединамических игр (обсуждается во введении). Коалиционная структура  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$ , такая, что  $B_1 \cup \dots \cup B_m = N$  и  $B_i \cap B_j = \emptyset$  для всех  $i, j = 1, \dots, m, i \neq j$ , является устойчивой, если никакой из игроков не может увеличить свой выигрыш, отклонившись от этой структуры индивидуальным образом. Заметим, что рассматривается две возможности для отклоняющегося игрока: 1) он может присоединиться к любой возможной коалиции без каких-либо ограничений (см. раздел 2.2.2), 2) коалиция, к которой хотел бы присоединиться отклоняющийся игрок, может заблокировать отклонение, если существует хотя бы один ее член, который может проиграть, приняв отклоняющегося игрока (см. раздел 2.2.2). В разделе 2.2.2 рассматривается ситуация, когда выигрыши игроков нетрансферабельны, т.е. выигрыш любого игрока, выступающего в качестве члена коалиции, равен его выигрышу, определяемому изначально заданной функцией выигрыша. Вектор  $W^\pi = (W_1^\pi, \dots, W_n^\pi) \in \mathbb{R}^n$  представляет собой соответствующие выигрыши игроков в коалиционной структуре  $\pi$ . Подчеркнем, что выигрыши игроков определяются выигрышами в равновесии по Нэшу, вычисленном для соответствующей коалиционной структуры (см. утверждения 2.4–2.7 в разделе 2.2.1).

#### Коалиционные структуры, устойчивые по Нэшу

Первое определение устойчивой коалиционной структуры предполагает, что все индивидуальные отклонения игроков возможны.

**Определение 2.1.** Коалиционная структура  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  является устойчивой по Нэшу (или просто устойчивой), если для любого игрока  $i \in N$  выполняется:

$$W_i^\pi \geq W_i^{\pi'} \quad \text{для всех } \pi' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-B(i) \cup B_j}\},$$

где  $B_j \in \pi \cup \emptyset$ ,  $B_j \neq B(i)$ ,  $\pi_{-B(i) \cup B_j} = \pi \setminus \{B(i), B_j\}$ , а  $W^\pi$ ,  $W^{\pi'}$  обозначают векторы выигрышей игроков при коалиционных структурах  $\pi$  и  $\pi'$  соответственно.

В определении 2.1 любой игрок может отклониться от своей текущей коалиции, присоединившись к другой существующей коалиции или став индивидуальным игроком.

**Замечание 2.4.** Если неравенство в определении 2.1 является строгим, т.е.  $W_i^\pi > W_i^{\pi'}$  для всех  $\pi' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-B(i) \cup B_j}\}$ , коалиционная структура  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  называется строго устойчивой.

Следующее утверждение характеризует условия устойчивости по Нэшу коалиционных структур в дифференциальной игре, определяемой (2.14)–(2.16).

**Утверждение 2.8.** В дифференциальной игре, заданной (2.14)–(2.16), возможны следующие коалиционные структуры или сценарии:

- 1)  $\pi_1 = \{\{I\}, \{I\}, \{II\}\}$  (некооперативный сценарий);
- 2)  $\pi_2 = \{\{I, I, II\}\}$  (кооперативный сценарий);
- 3)  $\pi_3 = \{\{I, I\}, \{II\}\}$  (частично кооперативный сценарий, когда нечувствительный игрок выступает в роли индивидуального игрока);
- 4)  $\pi_4 = \{\{I, II\}, \{I\}\}$  (частично кооперативный сценарий, когда чувствительный и нечувствительный игроки кооперируются), включая  $\pi_{4_1} = \{\{\{1, 2\}, \{3\}\}$  и  $\pi_{4_2} = \{\{\{1, 3\}, \{2\}\}$

устойчивы или устойчивы по Нэшу тогда и только тогда, когда выполняются соответствующие условия, приведенные в таблице 2.4. Каждая строка соответствует определенному сценарию.

Таблица 2.4: Условия устойчивости по Нэшу коалиционных структур

	НЧ 1	Ч 2	Ч 3
$\pi_1$	$\begin{cases} W_1^{\pi_1} \geq W_1^{\pi_{4_1}} \\ W_1^{\pi_1} \geq W_1^{\pi_{4_2}} \end{cases}$	$\begin{cases} W_2^{\pi_1} \geq W_2^{\pi_3} \\ W_2^{\pi_1} \geq W_2^{\pi_{4_1}} \end{cases}$	$\begin{cases} W_3^{\pi_1} \geq W_3^{\pi_3} \\ W_3^{\pi_1} \geq W_3^{\pi_{4_2}} \end{cases}$
$\pi_2$	$W_1^{\pi_2} \geq W_1^{\pi_3}$	$W_2^{\pi_2} \geq W_2^{\pi_{4_1}}$	$W_3^{\pi_2} \geq W_3^{\pi_{4_2}}$
$\pi_3$	$W_1^{\pi_3} \geq W_1^{\pi_2}$	$\begin{cases} W_2^{\pi_3} \geq W_2^{\pi_1} \\ W_2^{\pi_3} \geq W_2^{\pi_{4_1}} \end{cases}$	$\begin{cases} W_3^{\pi_3} \geq W_3^{\pi_1} \\ W_3^{\pi_3} \geq W_3^{\pi_{4_2}} \end{cases}$
$\pi_{4_1}$	$\begin{cases} W_1^{\pi_{4_1}} \geq W_1^{\pi_1} \\ W_1^{\pi_{4_1}} \geq W_1^{\pi_{4_2}} \end{cases}$	$\begin{cases} W_2^{\pi_{4_1}} \geq W_2^{\pi_1} \\ W_2^{\pi_{4_1}} \geq W_2^{\pi_3} \end{cases}$	$W_3^{\pi_{4_1}} \geq W_3^{\pi_2}$
$\pi_{4_2}$	$\begin{cases} W_1^{\pi_{4_2}} \geq W_1^{\pi_1} \\ W_1^{\pi_{4_2}} \geq W_1^{\pi_{4_1}} \end{cases}$	$W_2^{\pi_{4_2}} \geq W_2^{\pi_2}$	$\begin{cases} W_3^{\pi_{4_2}} \geq W_3^{\pi_1} \\ W_3^{\pi_{4_2}} \geq W_3^{\pi_3} \end{cases}$

Записать условия, приведенные в утверждении 2.8, в явном виде не представляется возможным. Продемонстрируем их на численных примерах в разделе 2.2.2.

### Индивидуально устойчивые коалиционные структуры

В этом разделе исследуется еще одна концепция устойчивости. Теперь предполагается, что игроки, входящие в коалицию, могут отказаться от кооперации с другим игроком, желающим присоединиться к ним, в случае если этот игрок может принести потери для коалиции после его присоединения к ней. Таким образом, приведем другое определение устойчивой коалиционной структуры с возможностью блокировки внешних входов.

**Определение 2.2.** Коалиционная структура  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  является индивидуально устойчивой, если для любого игрока  $i \in N$  имеет место:

$$W_i^\pi \geq W_i^{\pi''} \text{ для всех } \pi'' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-B(i) \cup B_j}\} \text{ такие, что}$$

$$W_k^{\pi''} \geq W_k^\pi \text{ для всех } k \in B_j,$$

где  $B_j \in \pi \cup \emptyset$ ,  $B_j \neq B(i)$ ,  $\pi_{-B(i) \cup B_j} = \pi \setminus \{B(i), B_j\}$ , а  $W^\pi$ ,  $W^{\pi''}$  обозначают векторы выигрышей игроков при коалиционных структурах  $\pi$  и  $\pi''$  соответственно.

Очевидно, что множество индивидуально устойчивых коалиционных структур содержит множество устойчивых по Нэшу коалиционных структур [91].

**Замечание 2.5.** Если неравенство в определении 2 является строгим, т.е.  $W_i^\pi > W_i^{\pi''}$  для всех  $\pi'' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-B(i) \cup B_j}\}$ , то говорят, что коалиционная структура  $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$  строго индивидуально устойчива.

Следующее утверждение характеризует условия индивидуально устойчивых коалиционных структур в дифференциальной игре, определяемой (2.14)–(2.16).

**Утверждение 2.9.** В дифференциальной игре, определяемой (2.14)–(2.16), следующие коалиционные структуры или сценарии:

- 1)  $\pi_1 = \{\{I\}, \{I\}, \{II\}\}$  (некооперативный сценарий);
- 2)  $\pi_2 = \{\{I, I, II\}\}$  (кооперативный сценарий);

3)  $\pi_3 = \{\{I, I\}, \{II\}\}$  (частично кооперативный сценарий, когда нечувствительный игрок не кооперируется с другими игроками);

4)  $\pi_4 = \{\{I, II\}, \{I\}\}$  (частично кооперативный сценарий, когда чувствительный и нечувствительный игроки кооперируются), включая  $\pi_{4_1} = \{\{\{1, 2\}, \{3\}\}$  и  $\pi_{4_2} = \{\{\{1, 3\}, \{2\}\}$

индивидуально устойчивы тогда и только тогда, когда выполняются соответствующие условия, приведенные в таблице 2.5. Каждая строка соответствует определенному сценарию.

Таблица 2.5: Условия индивидуальной устойчивости коалиционных структур

	НЧ 1	Ч 2	Ч 3
$\pi_1$	$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} W_2^{\pi_1} < W_2^{\pi_{4_1}} \\ W_1^{\pi_1} \geq W_1^{\pi_{4_1}} \end{array} \right. \\ \text{или } W_2^{\pi_1} \geq W_2^{\pi_{4_1}} \\ \left[ \begin{array}{l} W_3^{\pi_1} < W_3^{\pi_{4_2}} \\ W_1^{\pi_1} \geq W_1^{\pi_{4_2}} \end{array} \right. \\ \text{или } W_3^{\pi_1} \geq W_3^{\pi_{4_2}} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} W_3^{\pi_1} < W_3^{\pi_3} \\ W_2^{\pi_1} \geq W_2^{\pi_3} \end{array} \right. \\ \text{или } W_3^{\pi_1} \geq W_3^{\pi_3} \\ \left[ \begin{array}{l} W_1^{\pi_1} < W_1^{\pi_{4_1}} \\ W_2^{\pi_1} \geq W_2^{\pi_{4_1}} \end{array} \right. \\ \text{или } W_1^{\pi_1} \geq W_1^{\pi_{4_1}} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} W_2^{\pi_1} < W_2^{\pi_3} \\ W_3^{\pi_1} \geq W_3^{\pi_3} \end{array} \right. \\ \text{или } W_2^{\pi_1} \geq W_2^{\pi_3} \\ \left[ \begin{array}{l} W_1^{\pi_1} < W_1^{\pi_{4_2}} \\ W_3^{\pi_1} \geq W_3^{\pi_{4_2}} \end{array} \right. \\ \text{или } W_1^{\pi_1} \geq W_1^{\pi_{4_2}} \end{array} \right.$
$\pi_2$	$W_1^{\pi_2} \geq W_1^{\pi_3}$	$W_2^{\pi_2} \geq W_2^{\pi_{4_1}}$	$W_3^{\pi_2} \geq W_3^{\pi_{4_2}}$
$\pi_3$	$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} W_2^{\pi_3} < W_2^{\pi_2} \\ W_3^{\pi_3} < W_3^{\pi_2} \\ W_1^{\pi_3} \geq W_1^{\pi_2} \end{array} \right. \\ \text{или } W_2^{\pi_3} \geq W_2^{\pi_2} \\ \text{или } W_3^{\pi_3} \geq W_3^{\pi_2} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} W_2^{\pi_3} \geq W_2^{\pi_1} \\ \left[ \begin{array}{l} W_1^{\pi_3} < W_1^{\pi_{4_1}} \\ W_2^{\pi_3} \geq W_2^{\pi_{4_1}} \end{array} \right. \\ \text{или } W_1^{\pi_3} \geq W_1^{\pi_{4_1}} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} W_3^{\pi_3} \geq W_3^{\pi_1} \\ \left[ \begin{array}{l} W_1^{\pi_3} < W_1^{\pi_{4_2}} \\ W_3^{\pi_3} \geq W_3^{\pi_{4_2}} \end{array} \right. \\ \text{или } W_1^{\pi_3} \geq W_1^{\pi_{4_2}} \end{array} \right.$
$\pi_{4_1}$	$\left\{ \begin{array}{l} W_1^{\pi_{4_1}} \geq W_1^{\pi_1} \\ \left[ \begin{array}{l} W_3^{\pi_{4_1}} < W_3^{\pi_{4_2}} \\ W_1^{\pi_{4_1}} \geq W_1^{\pi_{4_2}} \end{array} \right. \\ \text{или } W_3^{\pi_{4_1}} \geq W_3^{\pi_{4_2}} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} W_2^{\pi_{4_1}} \geq W_2^{\pi_1} \\ \left[ \begin{array}{l} W_3^{\pi_{4_1}} < W_3^{\pi_3} \\ W_2^{\pi_{4_1}} \geq W_2^{\pi_3} \end{array} \right. \\ \text{или } W_3^{\pi_{4_1}} \geq W_3^{\pi_3} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} W_1^{\pi_{4_1}} < W_1^{\pi_2} \\ W_2^{\pi_{4_1}} < W_2^{\pi_2} \\ W_3^{\pi_{4_1}} \geq W_3^{\pi_2} \\ \text{или } W_1^{\pi_{4_1}} \geq W_1^{\pi_2} \\ \text{или } W_2^{\pi_{4_1}} \geq W_2^{\pi_2} \end{array} \right.$
$\pi_{4_2}$	$\left\{ \begin{array}{l} W_1^{\pi_{4_2}} \geq W_1^{\pi_1} \\ \left[ \begin{array}{l} W_2^{\pi_{4_2}} < W_2^{\pi_{4_1}} \\ W_1^{\pi_{4_2}} \geq W_1^{\pi_{4_1}} \end{array} \right. \\ \text{или } W_2^{\pi_{4_2}} \geq W_2^{\pi_{4_1}} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} W_1^{\pi_{4_2}} < W_1^{\pi_2} \\ W_3^{\pi_{4_2}} < W_3^{\pi_2} \\ W_2^{\pi_{4_2}} \geq W_2^{\pi_2} \\ \text{или } W_1^{\pi_{4_2}} \geq W_1^{\pi_2} \\ \text{или } W_3^{\pi_{4_2}} \geq W_3^{\pi_2} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} W_3^{\pi_{4_2}} \geq W_3^{\pi_1} \\ \left[ \begin{array}{l} W_2^{\pi_{4_2}} < W_2^{\pi_3} \\ W_3^{\pi_{4_2}} \geq W_3^{\pi_3} \end{array} \right. \\ \text{или } W_2^{\pi_{4_2}} \geq W_2^{\pi_3} \end{array} \right.$

Условия, приведенные в Утверждении 2.9, затруднительно записать в явном виде. Они демонстрируются на численных примерах в разделе 2.2.2.

### Численное моделирование

Для лучшего понимания того, как проверять устойчивость различных сценариев, приведем два численных примера.

В первом наборе параметры игры, удовлетворяющие неравенствам в (2.33), задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 0, \beta_2 = 3, \beta_3 = 4, \\ \alpha_1 &= 5, \alpha_2 = 6, \alpha_3 = 8, \\ \varepsilon &= 0.6, \mu = 0.3, S_0 = 1.\end{aligned}$$

Используя утверждения 2.4–2.7, можем рассчитать выигрыши игроков для всех сценариев, которые представлены в таблице 2.6, где жирным шрифтом выделены максимальные выплаты игроков при различных сценариях. Проверяя усло-

Таблица 2.6: Выплаты игрокам при различных сценариях (первый набор параметров)

	Игрок 1	Игрок 2	Игрок 3
	НЧ	Ч	Ч
$\pi_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	<b>4.167</b>	2.772	6.306
$\pi_2 = \{\{1, 2, 3\}\}$	3.734	<b>3.205</b>	<b>7.085</b>
$\pi_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$	<b>4.167</b>	2.810	6.581
$\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$	4.069	2.976	6.596
$\pi_{4_2} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$	3.995	3.043	1.994

вия устойчивости по Нэшу, приведенные в утверждении 2.8, и условия индивидуальной устойчивости, приведенные в утверждении 2.9, заметим, что ни один сценарий при текущем наборе параметров не удовлетворяет устойчивости по Нэшу, но существует единственный индивидуально устойчивый сценарий  $\pi_3 = \{\{I, I\}, \{II\}\}$ , в котором развивающаяся страна действует одна, а две развитые страны сотрудничают. Нечувствительный игрок не кооперируется и это устойчивый сценарий, потому что он не заинтересован нести дополнительные издержки за ущерб, наносимый окружающей среде. Таким образом, даже если не вводить систему трансферных платежей между игроками внутри коалиции, можно найти индивидуально устойчивый сценарий игры.

Равновесные стратегии игроков для различных сценариях изображены на рис. 2.4. Соответствующие траектории равновесных состояний также представлены на рис. 2.4. Можно заметить, что наименьший (наибольший) уровень

загрязнения наблюдается при кооперативном (некооперативном) сценарии, соответствующем коалиционной структуре  $\pi_2$  ( $\pi_1$ ), что вполне ожидаемо. Интересно, что уровень загрязнения, соответствующий коалиционной структуре  $\pi_3$ , которая является единственным индивидуально устойчивым сценарием, имеет наименьший суммарный уровень загрязнения среди других уровней загрязнения, соответствующих частично кооперативным сценариям.

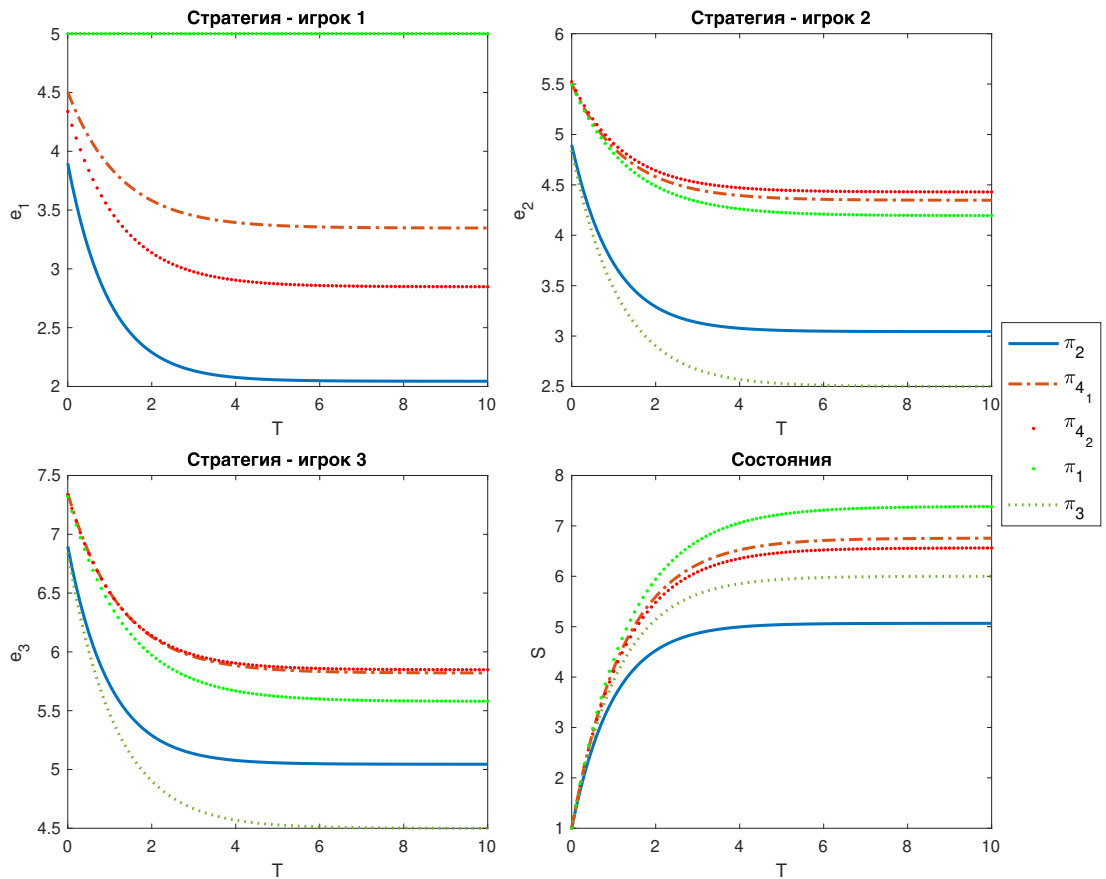


Рис. 2.4: Равновесные стратегии и траектории состояний при различных сценариях (первый набор параметров)

Второй набор параметров игры, удовлетворяющие неравенствам в (2.33):

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 0, \beta_2 = 2, \beta_3 = 3, \\ \alpha_1 &= 5, \alpha_2 = 6, \alpha_3 = 7, \\ \varepsilon &= 0.6, \mu = 0.5, S_0 = 1.\end{aligned}$$

Повторив те же вычисления, что и в первом случае, вычислим выплаты игрокам, которые представлены в таблице 2.7. Анализ условий устойчивости из утверждений 2.8 и 2.9 показывает, что в игре снова нет устойчивых по Нэшу

коалиционных структур, но есть единственный индивидуально устойчивый сценарий  $\pi_1 = \{\{I\}, \{I\}, \{II\}\}$ , когда все игроки действуют в одиночку. Заметим, что он отличается от найденного для первого набора параметров. Снова получаем, что развивающаяся страна может получить максимальный выигрыш, только действуя в одиночку, но, как и для двух других развитых стран, во втором наборе параметров сотрудничество неустойчиво, поскольку игрок 2 имеет выгодное отклонение, если он станет индивидуальным игроком.

Таблица 2.7: Выплаты игрокам при различных сценариях (второй набор параметров)

	Игрок 1	Игрок 2	Игрок 3
	НЧ	Ч	Ч
$\pi_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	<b>4.167</b>	2.056	2.029
$\pi_2 = \{\{1, 2, 3\}\}$	3.279	<b>2.859</b>	<b>3.898</b>
$\pi_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$	<b>4.167</b>	2.048	2.813
$\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$	3.965	2.470	2.736
$\pi_{4_2} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$	3.724	2.672	1.180

По сравнению с первым набором параметров наиболее заметное отличие проявляется в равновесной стратегии игрока 3. Для этого игрока траектория управления в некооперативном сценарии, т.е. при устойчивой структуре  $\pi_1$ , пересекается с траекторией в кооперативном сценарии в некоторый момент времени и после этого становится ниже. Как и в первом случае, равновесный уровень загрязнения в сценарии  $\pi_3$  является наименьшим среди частично кооперативных сценариев, но этот сценарий в данном случае, в отличие от первого, не является устойчивым.

### Динамически устойчивые коалиционные структуры

В этом разделе исследуем устойчивость коалиционных структур вдоль соответствующих равновесных траекторий. Если предположить, что коалиционная структура устойчива в начальный момент времени  $t = 0$ , то в некоторый момент времени на соответствующей траектории состояния она может стать неустойчивой. Для анализа вычислим выигрыши игроков в подыграх, начинающихся в моменты времени  $\bar{t} = 1, 5, 10$  при различных сценариях. При этом исследуем оба набора параметров, что и в предыдущем разделе. В таблицах 2.8 (первый набор) и 2.9 (второй набор) даны выигрыши игроков в этих подыграх при различных коалиционных структурах. В таблицах 2.8 и 2.9 много нулевых выигрышей, но

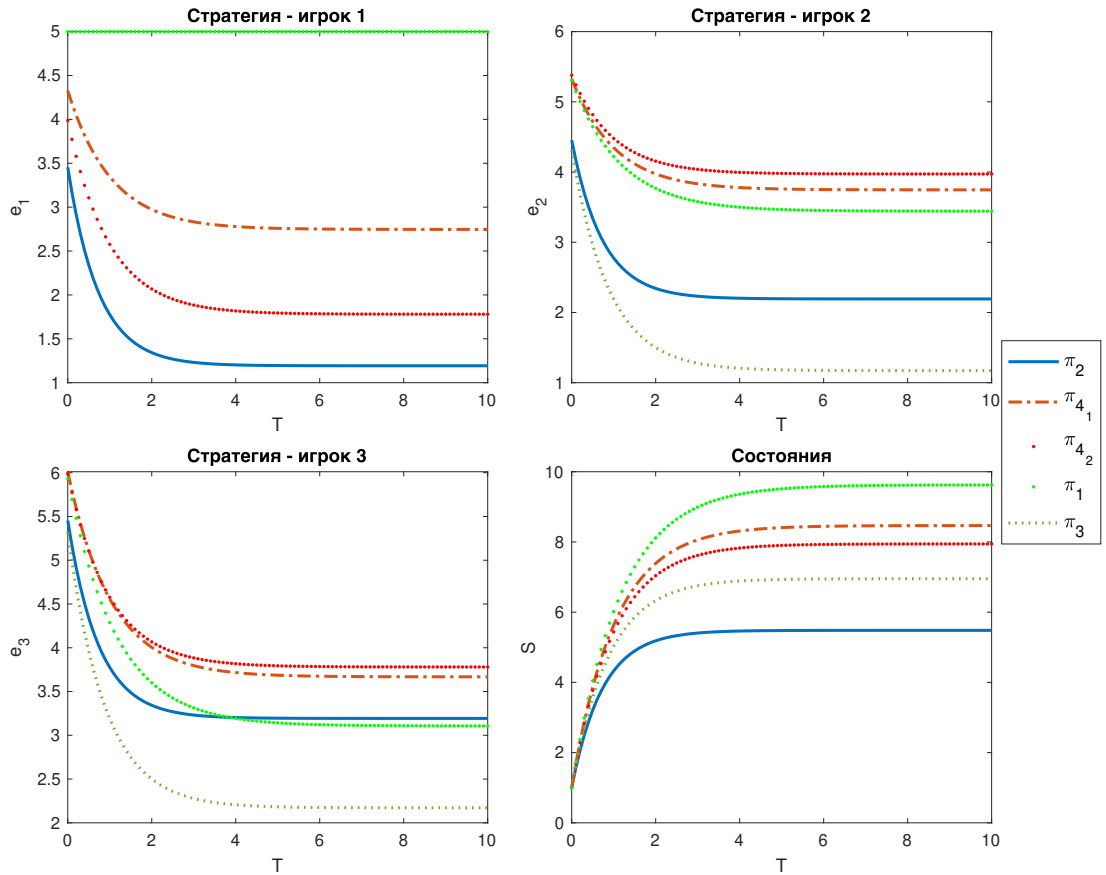


Рис. 2.5: Равновесные стратегии и траектории состояний при различных сценариях (второй набор параметров)

они не равны нулю, а очень малы, поэтому записаны приближенные нулевые значения.

Сделаем следующие выводы:

- Частично кооперативный сценарий, соответствующий коалиционной структуре  $\pi_3$ , устойчив по Нэшу в любой промежуточный момент времени  $\bar{t} = 1, 5, 10$  и является единственным индивидуально устойчивым сценарием в эти моменты времени.
- Для всей игры в начальный момент времени не существует устойчивых по Нэшу коалиционных структур для обоих наборах параметров (см. определение 1). Но в любой промежуточный момент времени  $\bar{t} = 1, 5, 10$  коалиционная структура  $\pi_3$  оказывается единственной устойчивой по Нэшу коалиционной структурой.



Таблица 2.8: Выплаты игрокам в подыграх, начиная с момента времени  $\bar{t} = 1, 5, 10$  (первый набор параметров)

$\bar{t} = 1$	Игрок 1	Игрок 2	Игрок 3
	НЧ	Ч	Ч
$\pi_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	4.167	-6.681	-6.382
$\pi_2 = \{\{1, 2, 3\}\}$	0.144	-0.307	-0.255
$\pi_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$	4.167	-0.495	-0.499
$\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$	0.190	-0.569	-4.736
$\pi_{4_2} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$	0.177	-5.082	-0.786
$\bar{t} = 5$	Игрок 1	Игрок 2	Игрок 3
	НЧ	Ч	Ч
$\pi_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	4.167	-20.911	-25.467
$\pi_2 = \{\{1, 2, 3\}\}$	0	0	0
$\pi_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$	4.167	0	0
$\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$	0	0	-19.807
$\pi_{4_2} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$	0	-15.464	0
$\bar{t} = 10$	Игрок 1	Игрок 2	Игрок 3
	НЧ	Ч	Ч
$\pi_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	4.167	-21.817	-26.682
$\pi_2 = \{\{1, 2, 3\}\}$	0	0	0
$\pi_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$	4.167	0	0
$\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$	0	0	-20.553
$\pi_{4_2} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$	0	-15.936	0

### 2.2.3 Устойчивые коалиционные структуры при схемах трансферных платежей

Конечная цель развитых стран не сводится к безусловному получению индивидуальной прибыли. Как ожидается, они стремятся к сотрудничеству с развивающимися странами для дальнейшего снижения глобальных выбросов загрязняющих веществ. В предыдущих разделах были рассмотрены устойчивые сценарии с нетрансферабельными выплатами, и из численных примеров можно было заметить, что возможно существование двух типов устойчивых сценариев  $\pi_1$  и  $\pi_3$ , в которых развивающаяся страна всегда выступает в роли индивидуального игрока. Но ни один из этих сценариев не приводит к наименьшим выбросам. Поэтому можно побудить две развитые и одну развивающуюся страны к сотрудничеству или сделать кооперативный сценарий  $\pi_2$  устойчивым, определив схему трансферных платежей между игроками (см. раздел 2.2.3). Также можно определить схему трансферных платежей, чтобы сделать устойчивыми частично кооперативные сценарии (см. раздел 2.2.3). Последняя задача актуальна, ко-

Таблица 2.9: Выплаты игрокам в подыграх, начиная с момента времени  $\bar{t} = 1, 5, 10$  (второй набор параметров)

$\bar{t} = 1$	Игрок 1	Игрок 2	Игрок 3
	НЧ	Ч	Ч
$\pi_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	4.167	-10.364	-16.938
$\pi_2 = \{\{1, 2, 3\}\}$	0.094	-0.277	-0.401
$\pi_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$	4.167	-0.578	-0.820
$\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$	0.171	-0.710	-13.159
$\pi_{4_2} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$	0.132	-6.830	-1.051
$\bar{t} = 5$	Игрок 1	Игрок 2	Игрок 3
	НЧ	Ч	Ч
$\pi_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	4.167	-25.443	-39.911
$\pi_2 = \{\{1, 2, 3\}\}$	0	0	0
$\pi_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$	4.167	0	0
$\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$	0	0	-29.138
$\pi_{4_2} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$	0	-15.550	0
$\bar{t} = 10$	Игрок 1	Игрок 2	Игрок 3
	НЧ	Ч	Ч
$\pi_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	4.167	-25.998	-40.755
$\pi_2 = \{\{1, 2, 3\}\}$	0	0	0
$\pi_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$	4.167	0	0
$\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$	0	0	-29.526
$\pi_{4_2} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$	0	-15.722	0

гда полный кооперативный сценарий по каким-либо причинам не может быть реализован (например, из-за внешних ограничений на полную кооперацию).

### Устойчивость по Нэшу и индивидуальная устойчивость кооперативного сценария

Для того чтобы кооперативный сценарий был устойчивым, необходимо определить условия, удовлетворяющие системе неравенств из утверждения 2.8. При этих условиях ни один из игроков не имеет стимула к индивидуальному отклонению. Заметим, что для кооперативного сценария условия устойчивости по Нэшу и индивидуальной устойчивости совпадают, что немедленно следует из утверждений 2.8 и 2.9. Поэтому необходимо определить выплаты игрокам  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , такие, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \sum_{i=1}^3 W_i^{\pi_2}, \\ \xi_1 \geq W_1^{\pi_3}, \\ \xi_2 \geq W_2^{\pi_{4_2}}, \\ \xi_3 \geq W_3^{\pi_{4_1}}. \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Если существует решение системы (2.34), то трансферный платеж игроку  $i \in N$  определяется формулой:

$$\theta_i^{\pi^2} = \xi_i - W_i^{\pi^2}. \quad (2.35)$$

Трансферный платеж  $\theta_i^{\pi^2}$  игроку  $i$  может иметь любой знак: 1) положительный, что означает, что игроку платят другие игроки, 2) отрицательный, когда игрок платит другим игрокам за сотрудничество, 3) нулевой, если игроку  $i$  платят в соответствии с его изначально заданной функцией выигрыша  $W_i^{\pi^2}$ .

**Пример 2.1.** *Продемонстрируем построение платежной схемы для численных примеров, представленных в разделе 2.2.2, используя два набора параметров. Подставляя в систему (2.34) выигрыши игроков при различных сценариях, получаем, что для обоих наборов существует решение этой системы, причем, это решение является множественным для обоих наборов. Точнее, решением является область треугольника, изображенная на рис. 2.6а и 2.6б. Если вектор платежей  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  выбирается из области оранжевого треугольника для первого набора и зеленого треугольника для второго набора, кооперативный сценарий является устойчивым.*

Кроме того, согласно (2.35), трансферный платеж  $\theta_1$  развивающейся страны положителен для обоих наборов, это означает, что две развитые страны фактически направляют часть своей прибыли на компенсацию кооперативного поведения развивающейся страны. Для описания такого поведения развитых стран актуален термин, предложенный в [33], «покупка кооперации».

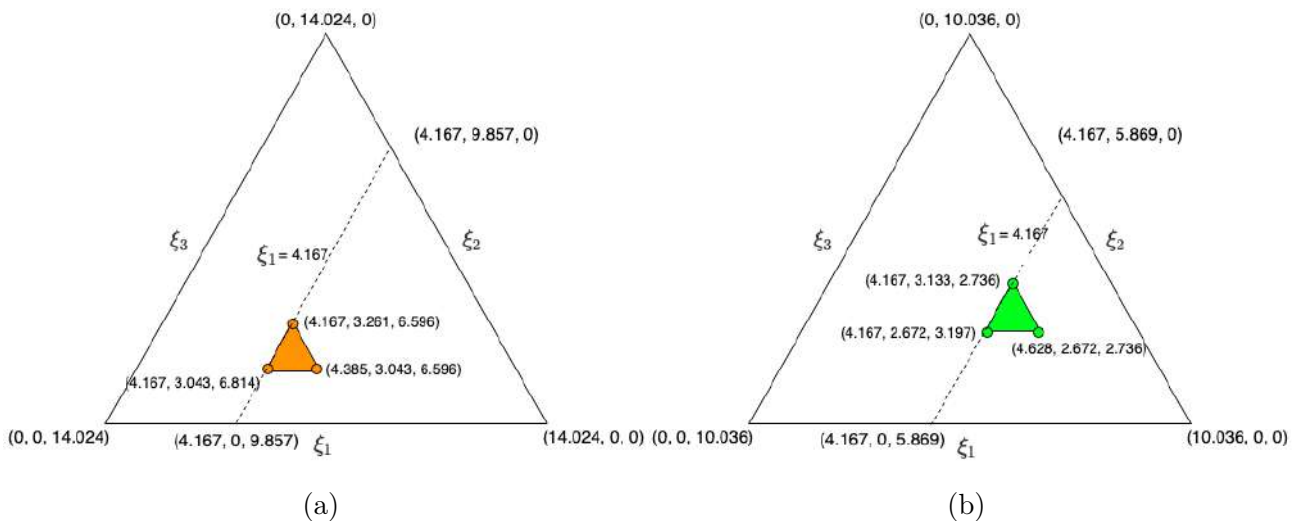


Рис. 2.6: Набор выплат игрокам  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , удовлетворяющим условиям (2.34) (а): первый набор параметров, (б): второй набор параметров.

Выбор единственного вектора платежей в данной работе не рассматривается. Можно обратиться к литературе по кооперативным играм для определения «разумного» решения в наборе платежей, заданном (2.34). Можно дать интуитивное объяснение «разумного» решения с точки зрения развитых стран. Они могут обратиться к границе сохранения устойчивости кооперативного сценария, и вполне разумно, что они максимально сохраняют свои выигрыши при этом, т.е. тогда они выплатят развивающейся стране минимальную компенсацию. На рис. 2.6а и 2.6б пунктирной линией обозначен набор платежей с  $\xi_1 = 4,167$ , то есть минимальное вознаграждение развивающейся стране, при котором кооперативный сценарий устойчив. Поэтому для двух развитых стран целесообразно выбирать выплаты на пересечении цветной и пунктирной областей.

#### Устойчивость по Нэшу частично кооперативного сценария

Теперь исследуем, является ли частично кооперативный сценарий, скажем сценарий  $\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ , устойчивым при применении системы трансферных платежей. Сначала определим выигрыши игроков при различных сценариях в случае, когда любой коалиции разрешено осуществлять трансферные платежи. При осуществлении трансферов должно выполняться условие эффективности. В табл. 2.10 определены выплаты игрокам при трансферах для всех сценариев: Таблица 2.10 содержит пять переменных. Для того чтобы сценарий  $\pi_{4_1}$

Таблица 2.10: Выплаты игрокам за счет трансферных платежей

	Игрок 1	Игрок 2	Игрок 3
	НЧ	Ч	Ч
$\pi_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	4.167	2.772	6.306
$\pi_2 = \{\{1, 2, 3\}\}$	$\xi_1^{\pi_2}$	$\xi_2^{\pi_2}$	$14.024 - \xi_1^{\pi_2} - \xi_2^{\pi_2}$
$\pi_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$	4.167	$\xi_2^{\pi_3}$	$10.290 - \xi_2^{\pi_3}$
$\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$	$\xi_1^{\pi_{4_1}}$	$7.045 - \xi_1^{\pi_{4_1}}$	6.596
$\pi_{4_2} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$	$\xi_1^{\pi_{4_2}}$	3.043	$5.991 - \xi_1^{\pi_{4_2}}$

был устойчивым по Нэшу, необходимо, чтобы выполнялась следующая система

неравенств (см. утверждение 2.8):

$$\begin{aligned}
 \xi_1^{\pi_{4_1}} &\geq 4.167, \\
 \xi_1^{\pi_{4_1}} &\geq \xi_1^{\pi_{4_2}}, \\
 7.045 - \xi_1^{\pi_{4_1}} &\geq 2.772, \\
 7.045 - \xi_1^{\pi_{4_1}} &\geq \xi_2^{\pi_3}, \\
 6.596 &\geq 14.024 - \xi_1^{\pi_2} - \xi_2^{\pi_2}.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Если трансферы определяются таким образом, что любая коалиция делит излишек выигрыша поровну между игроками, т.е. концепция кооперативного решения является CIS-значением (см. таблицу 2.11), то мы можем легко проверить, удовлетворяется ли эта система для CIS-значения [29]. Синим цветом изображен устойчивый сценарий. Как видно, сценарий  $\pi_{4_1}$  не является устойчивым, если выплаты игрокам организованы с учетом CIS-значения.

Таблица 2.11: Выплаты игрокам, если используется CIS-значение для распределения совместной прибыли (сценарий  $\pi_2$  является устойчивым)

	Игрок 1	Игрок 2	Игрок 3
	НЧ	Ч	Ч
$\pi_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	4.167	2.772	6.306
$\pi_2 = \{\{1, 2, 3\}\}$	4.240	3.116	6.669
$\pi_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$	4.167	3.378	6.912
$\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$	4.220	2.825	6.596
$\pi_{4_2} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$	1.926	3.043	4.065

Таблица 2.12: Выплаты игрокам при новой схеме трансферных платежей (сценарии  $\pi_2, \pi_{4_1}$  устойчивы)

	Игрок 1	Игрок 2	Игрок 3
	НЧ	Ч	Ч
$\pi_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	4.167	2.772	6.306
$\pi_2 = \{\{1, 2, 3\}\}$	4.240	3.189 ↑	6.596 ↓
$\pi_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$	4.167	2.825 ↓	7.465 ↑
$\pi_{4_1} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$	4.220	2.825	6.596
$\pi_{4_2} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$	1.926	3.043	4.065

В системе (2.36) последние два неравенства не выполняются. Поэтому мы можем изменить трансферные выплаты игрокам 2 и 3, например, в кооперативном сценарии  $\pi_2$  и частично кооперативном сценарии  $\pi_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ . Это может

быть сделано с учетом эффективности любой коалиции при любом сценарии. Новые выплаты игрокам приведены в таблице 2.12, в которой устойчивые сценарии окрашены в синий цвет. Увеличиваем выплату игроку 2 по сравнению с CIS-значением в сценарии  $\pi_2$  (3.189 вместо 3.116), но уменьшаем выплату игроку 3 (6.596 вместо 6.669). Эффективность коалиции  $\{1, 2, 3\}$  в этом сценарии после изменения трансферной выплаты остается удовлетворительной, т.е. совместный выигрыш коалиции составляет 14.024. Также увеличиваем выигрыш игрока 3 по сравнению с CIS-значением в сценарии  $\pi_3$  (7.465 вместо 6.912), но уменьшаем выигрыш игрока 2 (2.825 вместо 3.378). Эффективность коалиции  $\{2, 3\}$  в этом сценарии удовлетворена, т.е. совместный выигрыш коалиции  $\{2, 3\}$  составляет 10.290.

### 2.3 Заключение к главе 2

В данной главе исследование посвящено разработке и проверке устойчивости соглашений о снижении загрязнения окружающей среды в дифференциальных играх с асимметричными игроками.

В рамках подхода, основанного на механизме компенсаций, предлагается механизм в виде контракта, при котором чувствительный игрок отчисляет часть доходов для компенсации нечувствительному игроку за деятельность по снижению загрязнения окружающей среды. Важнейший вопрос заключается в определении Парето-оптимального значения набора параметров, т.е. процента прибыли, отдаваемого нечувствительному игроку, и процента снижения загрязнения, требуемого от нечувствительного игрока. В численном примере перебираются все возможные комбинации наборов параметров и сравниваются полученные результаты при кооперативном и некооперативном сценариях. Делается вывод, что можно найти Парето-оптимальные наборы параметров для механизма компенсаций, т.е. устойчивое соглашение, которое предпочтительнее некооперативного сценария. Также очевидно, что этот механизм хуже, чем полностью кооперативный сценарий, с точки зрения прибылей обоих игроков.

Также в этой главе рассматривается дифференциальная игра с одним нечувствительным и двумя чувствительными игроками для исследования устойчивости по Нэшу и индивидуальной устойчивости сценариев кооперации. В отличие от упомянутого выше механизма компенсаций, устойчивое соглашение

применяется для коалиционных структур, образованных тремя игроками. Рассматриваются различные сценарии кооперации, когда игроки могут частично кооперироваться. Чтобы рассмотреть все возможные коалиционные структуры, предлагаются три типа сценариев: 1) кооперативный, 2) некооперативный и 3) частично кооперативный, при котором прибыль коалиции зависит от поведения внешних игроков (в частности, от того, образуют они коалицию или нет). Определены условия устойчивости по Нэшу и индивидуальной устойчивости коалиционных структур или сценариев. На двух численных примерах демонстрируется процедура нахождения устойчивого сценария. Также представлена процедура придания устойчивости конкретному сценарию (если это возможно) путем разработки специальной схемы трансферных платежей.

## Глава 3

# Ценность информации в дифференциальной игре управления загрязнением окружающей среды

В данной главе рассматривается дифференциальная игра, в которой информация о терминальных издержках [21], о точном значении верхней границы допустимого управления [21] и о начальном уровне загрязнения [87, 94] в задаче управления загрязнением неизвестны. Исследуем ценность соответствующей информации, сравнивая выигрыш при полной информации и выигрыш при ее отсутствии с помощью «ценности информации» (*Value of Information* или VI), первоначально определенной в [80]. В последнем случае, когда начальный уровень загрязнения неизвестен, используем в работе его оценку.

### 3.1 Ценность информации при неопределенности терминальных затрат

В данном разделе рассматривается задача управления объемами загрязняющих веществ в процессе производства [27]. Общий выигрыш вычисляется с учетом терминальных затрат, равных штрафу за загрязнение окружающей среды в последний момент производственного процесса. В этом случае исследуется ценность информации, которая показывает, как осведомленность о терминальных затратах влияет на выигрыш игрока.

В [5] найдено кооперативное решение в дифференциальной игре управления загрязнением окружающей среды. В [45] получены условия для оптимального управления, а в [43] — кооперативное решение в дифференциальных играх трех лиц.



В этом разделе представлена модель трех лиц, чтобы упростить получение теоретических результатов. Предполагаем, что объем производства пропорционален объему загрязнения окружающей среды. Стратегия игрока  $i$  — это скорость загрязнения за единицу времени,  $u_i \in [0, b_i]$ .

Динамика системы определяется уравнением:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^3 u_i(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

где  $x(t)$  — общий уровень загрязнения. Предположим, что штраф в терминальный момент времени  $T$  также пропорционален уровню загрязнения  $x(T)$ . Тогда выигрыш игрока  $i$  является смешанной функцией Больца:

$$K_i(x_0, T - t_0, u) = \int_{t_0}^T \left( (b_i - \frac{1}{2}u_i(t))u_i(t) - h_i x \right) dt - D_i x(T), \quad (3.2)$$

где  $u = (u_1, u_2, u_3)$  и  $(b_i - \frac{1}{2}u_i(t))u_i(t)$  представляет мгновенный доход, равный валовой прибыли, которую игрок  $i$  может получить в момент времени  $t$  при  $b_i \geq 0$ ,  $h_i x$  — затраты на устранение загрязнения  $x$ , а  $D_i x(T)$  — терминальные затраты. Рассматривается кооперативный вариант игры, т.е. игроки изначально договариваются использовать оптимальные управления, максимизирующие суммарную прибыль игроков в предположении, что  $t_0 = 0$ , т.е.

$$\sum_{i=1}^3 K_i(x_0, T, u) \rightarrow \max_u. \quad (3.3)$$

**Утверждение 3.1.** *В кооперативном варианте дифференциальной игры, определяемой целевой функцией гранд коалиции (3.3) при условии (3.1), оптимальное (кооперативное) управление имеет вид:*

$$u_i^*(t) = b_i - (T - t)h_{123} - D_{123}, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.4)$$

*соответствующая оптимальная траектория состояния имеет вид:*

$$x^*(t) = (b_{123} - 3D_{123} - 3h_{123}T)t + \frac{3}{2}t^2 h_{123} + x_0, \quad (3.5)$$

где  $h_{123} = h_1 + h_2 + h_3$ ,  $D_{123} = D_1 + D_2 + D_3$ ,  $b_{123} = b_1 + b_2 + b_3$ ,  $D_{ij} = D_i + D_j$ .

*Доказательство.* Задача максимизации (3.3) может быть решена в классе стратегий с обратной связью [39, 79]. Функция Гамильтона имеет вид:

$$H(x, u, \psi) = \sum_{i=1}^3 \left[ (b_i - \frac{1}{2}u_i)u_i - h_i x(t) \right] + \psi(u_1 + u_2 + u_3).$$

Оптимальное управление, максимизирующее эту функцию, находим из условия (необходимое условие):

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u_i} &= b_i - u_i + \psi = 0, \\ u_i^* &= b_i + \psi, i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Поскольку вторая производная  $H$  при  $u = u_i^*$  отрицательна, получаем, что оптимальное управление  $u_i^*$  максимизирует функцию Гамильтона.

Условиями для сопряженной переменной имеют вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x} = h_{123}, \quad (3.6)$$

$$\psi(T) = \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{t=T} = -D_{123}. \quad (3.7)$$

Решая (3.6) и (3.7) совместно, получаем

$$\psi(t) = (t - T)h_{123} - D_{123}.$$

После этого оптимальное управление и оптимальная траектория состояния имеют вид (3.4) и (3.5) соответственно.  $\square$

Введем дополнительные ограничения на параметры модели, которые гарантируют, что результат решения некоторой вспомогательной задачи оптимизации допустим и принадлежит компактному множеству  $[0, b_i]$ :

$$\begin{aligned}D_i &\in [0, \min(b_1 - D_{123}, b_2 - D_{123}, b_3 - D_{123})], \\ h_i &\in [0, \frac{\min(b_1, b_2, b_3) - D_{123}}{T} - h_{123}], \quad i \in \{1, 2, 3\}.\end{aligned} \quad (3.8)$$

Поскольку вычисление оптимального управления и оптимальной траектории состояния носит один и тот же характер, для следующих двух случаев: терминальная стоимость известна/неизвестна, обобщим задачу и исследуем поведение произвольного игрока  $i$ .

### 3.1.1 Терминальные издержки известны

В данном разделе исследуется ситуация, когда терминальные издержки известны игроку. В отличие от задачи групповой оптимизации (3.3), в данном разделе рассматривается некооперативная игра, когда игроки стремятся максимизировать свои функцию выигрыша (3.2) при условии (3.1). Найдем равновесие по

Нэшу, т.е. охарактеризуем равновесные стратегии игроков и соответствующую равновесную траекторию состояния. Когда говорится, что терминальные издержки известны игрокам, имеется в виду, что они включены в функцию выигрыша как линейные затраты на уменьшение терминального уровня загрязнения, т.е. любой игрок  $i$  максимизирует функцию (3.2).

Известно, что для линейно-квадратичной дифференциальной игры, заданной функциями (3.1), (3.2), равновесие по Нэшу существует и единственно [6]. Аналогично результатам, полученным в утверждении 3.1, определим равновесие по Нэшу, используя принцип максимума Понтрягина [79].

**Утверждение 3.2.** *В дифференциальной игре, определяемой целевой функцией (3.2) при условии (3.1), равновесный по Нэшу набор стратегий имеет вид:*

$$u_i^{NE}(t) = b_i - (T - t)h_i - D_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.9)$$

*Соответствующая траектория состояния имеет вид:*

$$x^{NE}(t) = (b_{123} - D_{123} - h_{123}T)t + \frac{1}{2}t^2h_{123} + x_0. \quad (3.10)$$

*Выигрыш для игрока 1 в равновесии равен*

$$\begin{aligned} K_1^{NE} &= K_1(x_0, T, u_1^{NE}) \\ &= -x_0(Th_1 + D_1) + D_1T(D_{123} - b_{123} + Th_{123}) + \frac{T(b_1^2 - D_1^2)}{2} + \\ &+ \frac{T^2(h_1D_{23} - h_1b_{123} - D_1h_{123})}{2} + \frac{T^3h_1(h_{123} + h_{23})}{6}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

*Для игрока  $i = 2, 3$  выигрыш в равновесии по Нэшу может быть получен циклической перестановкой индексов в (3.11).*

*Доказательство.* Для нахождения равновесия по Нэшу определим гамильтониан для игрока  $i$ :

$$H_i(x, u, \psi) = (b_i - \frac{1}{2}u_i)u_i - h_ix(t) + \psi(u_1 + u_2 + u_3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Равновесная по Нэшу стратегия  $u_i^{NE} = b_i + \psi, i = 1, 2, 3$ , максимизирующая гамильтониан с учетом отрицательного знака второй производной от  $H_i$  при  $u = u_i^{NE}$ .

Уравнения для сопряженных переменных имеют вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial H_i}{\partial x} = h_i. \quad (3.12)$$

$$\psi(T) = \frac{\partial H_i}{\partial x} \Big|_{t=T} = -D_i. \quad (3.13)$$

Решив совместно (3.12) и (3.13), получим

$$\psi(t) = (t - T)h_i - D_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Находим равновесные по Нэшу стратегии и траектории равновесного состояния, которые приведены в (3.9) и (3.10) соответственно. Выигрыш игрока в равновесии по Нэшу (3.11) рассчитывается путем подстановки полученного значения управления в (3.2) и интегрирования выражений.  $\square$

### 3.1.2 Терминальные издержки неизвестны

Начнем с интерпретации того, что понимается под «неизвестными терминальными издержками». Предположим, что игрок не знает, будет ли в терминальный момент времени ему назначен терминальный штраф, зависящий от  $x(T)$ , или нет. Поэтому предполагаем, что игрок игнорирует терминальные издержки в своей функции выигрыша, т.е. задаем параметр терминальных издержек  $D_i = 0$  в функции выигрыша (3.2). Тогда так называемая *имитационная* задача оптимизации для любого игрока  $i$  имеет вид

$$\bar{K}_i(x_0, T, u_i) = \int_{t_0}^T \left( (b_i - \frac{1}{2}u_i(t))u_i(t) - h_i x \right) dt \rightarrow \max_{u_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.14)$$

Рассмотрим *имитационную* дифференциальную игру, в которой игроки решают задачу (3.14) при заданной динамике состояния (3.1). Однако можно посчитать реальный выигрыш игрока по формуле (3.2) путем подстановки равновесных по Нэшу стратегий, найденных при решении игроками имитационной игры. Интересно оценить, как игнорирование терминальных затрат в задаче оптимизации влияет на реальные выигрыши игроков. Для этого подставим равновесие по Нэшу имитационной дифференциальной игры в функцию выигрыша (3.14) и оценим важность информации о терминальных издержках. Назовем этот выигрыш игрока «фактическим выигрышем».

**Утверждение 3.3.** *В имитационной дифференциальной игре, заданной целевыми функциями вида (3.14) при условии (3.1), так называемая имитационная равновесная по Нэшу стратегия имеет вид:*

$$u_i^{*NE}(t) = b_i - (T - t)h_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.15)$$

*Соответствующая (имитационная) траектория равновесного состояния, полученная как решение уравнения (3.1) при подстановке стратегии (3.15),*

имеет вид:

$$x^{*NE}(t) = (b_{123} - h_{123}T)t + \frac{1}{2}t^2h_{123} + x_0. \quad (3.16)$$

Фактический выигрыш в соответствии с (3.2) для игрока 1 равен

$$\begin{aligned} K_1^{*NE} &= K_1(x_0, T, u_1^{NE}) \\ &= -x_0(D_1 + Th_1) - D_1T(b_{123} - Th_{123}) + \frac{Tb_1^2}{2} - \\ &\quad - \frac{T^2(D_1h_{123} + h_1b_{123})}{2} + \frac{T^3h_1(h_{123} + h_{23})}{6}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Для игрока  $i = 2, 3$  реальный выигрыш может быть получен циклической перестановкой индексов в (3.17).

*Доказательство.* В задаче оптимизации, определенной в (3.14), гамильтониан имеет вид:

$$H_i(x, u, \psi) = (b_i - \frac{1}{2}u_i)u_i - h_i x(t) + \psi(u_1 + u_2 + u_3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Равновесная по Нэшу стратегия  $u_i^{*NE} = b_i + \psi, i = 1, 2, 3$ , максимизирующая гамильтониан с учетом отрицательной второй производной  $H_i$  при  $u = u_i^{*NE}$ .

Уравнения для сопряженных множителей есть

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial H_i}{\partial x} = h_i. \quad (3.18)$$

$$\psi(T) = \frac{\partial H_i}{\partial x} \Big|_{t=T} = 0. \quad (3.19)$$

Решив (3.18) и (3.19) совместно, получим

$$\psi(t) = (t - T)h_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Затем получим имитационную равновесную по Нэшу стратегию и соответствующую траекторию состояния, которые приведены в (3.15) и (3.16). Фактический выигрыш игрока (3.17) вычисляется путем подстановки полученных значений управления в (3.2) и интегрирования выражения.  $\square$

### 3.1.3 Оценка ценности информации

Прежде чем определить ценность информации, важно также сравнить (имитационное) равновесное по Нэшу управление и траекторию состояния для двух

предыдущих случаев: известных и неизвестных терминальных затратах. Рассмотрим следующий набор параметров:

$$\begin{aligned} b_1 &= 300, b_2 = 305, b_3 = 303, \\ T &= 20, h_1 = 2, h_2 = 3, h_3 = 4, \\ D_1 &= 3, D_2 = 6, D_3 = 5, x_0 = 5. \end{aligned}$$

Заметим, что эти параметры должны удовлетворять условиям (3.8). Как показано в левой части рис. 3.1, для каждого игрока равновесная по Нэшу стратегия при неизвестных терминальных затратах в имитационной игре выше стратегии, полученной при известных терминальных затратах, что подтверждает ожидание о том, что игроки будут увеличивать загрязнение, т.е. увеличивать объем производства, когда они ошибочно полагают, что затраты за загрязнение ниже из-за отсутствия достаточной информации. Следовательно, уровень загрязнения в этом случае выше, как показано на рис.3.1.

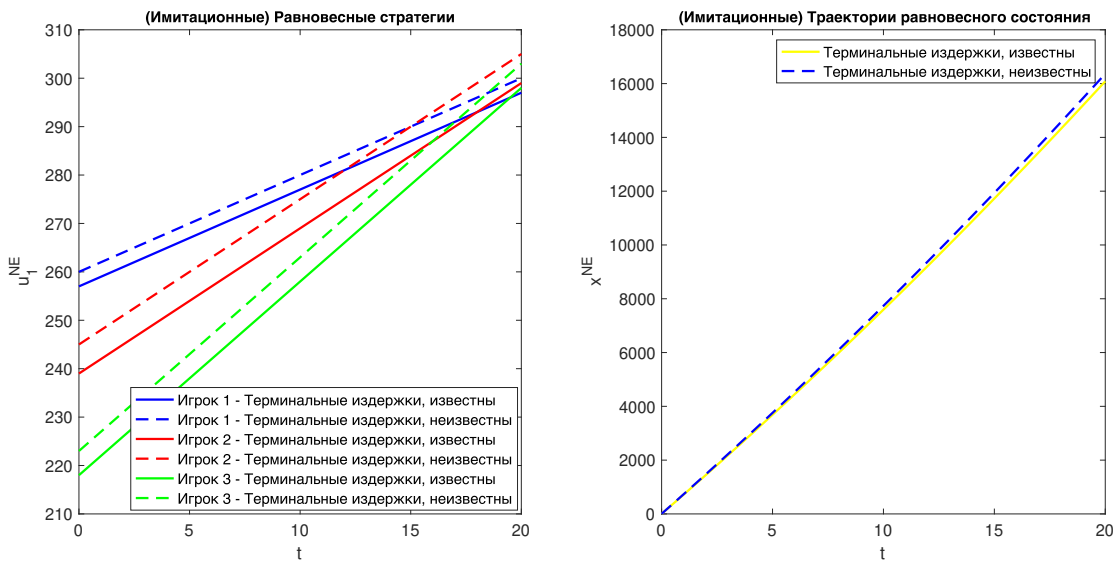


Рис. 3.1: (Имитационные) равновесные по Нэшу стратегии и траектории состояния, когда терминальные издержки известны (неизвестны). На левом рисунке представлены (имитационные) равновесные по Нэшу стратегии игроков

Чтобы оценить *ценность информации*, первоначально рассмотренную в [80], для задачи с неполной информацией о терминальных затратах, сформулируем определение нормированной ценности информации (Normalized value of information или NVI), вычисляемой, сравнивая выигрыши, полученные в утверждениях (3.2) и (3.3), следующим образом:

**Определение 3.1.** Для дифференциальных игр, заданных (3.2) и (3.14), нормированное значение информации о терминальных затратах определяется формулой:

$$NVI_i = \left| \frac{K_i^{NE} - K_i^{*NE}}{K_i^{NE}} \right| \times 100\%, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.20)$$

Вычисляя (3.20) для численного примера, описанного выше, получаем, что  $NVI_1 = 0,96\%$ ,  $NVI_2 = 1,73\%$ ,  $NVI_3 = 4,34\%$ , и эти значения достаточно малы. Но если выигрыш исчисляется миллиардами у.е., то информация может стоить гораздо больше.

Описанный метод расчета нормированной ценности информации в форме, приведенной в (3.20), может быть также использован для кооперативного варианта игры:

$$NVI_i = \frac{\xi_i - \xi_i^*}{\xi_i} \times 100\%,$$

где  $\xi_i, i \in N$ , — компонента кооперативного решения (например, вектора Шепли,  $\tau$ -значения и т.д.) игры, вычисленного в условиях полной информации, а  $\xi_i^*, i \in N$ , — компонента кооперативного решения, вычисленного при недостатке информации.

## 3.2 Ценность информации при неопределенности об изменении верхней границы допустимого управления

В классической теории оптимального управления [72] задачи принято рассматривать без изменения структуры или информации, которой располагает лицо, принимающее решение. В работе [44] рассмотрен случай динамического обновления информации. В работе [10] авторы исследуют дифференциальную игру с переключением режимов и последствиями. В то время как в данной работе, анализируется модель промышленного производства, в которой в какой-то момент может быть изменена верхняя граница допустимого уровня загрязнения, вызванного производством. Изучается устойчивость оптимальных управлений и оптимальных траекторий при таком изменении. Упростим приведенную выше модель и рассмотрим процесс управления загрязнением с единственным игроком. Предполагаем, что загрязнение пропорционально объему производства, а скорость выбросов в атмосферу сдерживается государством или другими заинтересованными сторонами. Целью игрока является выбор оптимального управ-

ления, максимизирующего его прибыль. Модель может быть обобщена для случаев некооперативной или кооперативной дифференциальной игры.

Динамика уровня загрязнений определяется дифференциальным уравнением:

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = x_0, \quad u \in [0, b], \quad t \in [0, T]. \quad (3.21)$$

Игрок решает задачу максимизации:

$$J(x_0, T, u) = \int_0^T \left( \left( b - \frac{1}{2}u(t) \right) u(t) - hx(t) \right) dt \rightarrow \max_u. \quad (3.22)$$

**Утверждение 3.4.** В задаче максимизации с целевой функцией (3.22) при условии (3.21), оптимальное управление имеет вид:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T - \frac{b}{h}], \\ b - h(T - t), & t \in [T - \frac{b}{h}, T]. \end{cases} \quad (3.23)$$

Оптимальная траектория состояния имеет вид:

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0, & t \in [0, T - \frac{b}{h}], \\ x_0 + \frac{(b - Th + ht)^2}{2h}, & t \in [T - \frac{b}{h}, T]. \end{cases} \quad (3.24)$$

*Доказательство.* В задаче оптимизации (3.22) при условии (3.21) гамильтониан равен

$$H(x, u, \psi) = \left( b - \frac{u}{2} \right) u - hx + \psi u. \quad (3.25)$$

Решаем уравнение:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = b - u + \psi = 0,$$

получаем оптимальное управление:

$$u^* = b + \psi. \quad (3.26)$$

Поскольку вторая производная  $H$  при  $u = u_i^*$  отрицательна, подтверждается, что получен максимум гамильтониана при оптимальном управлении  $u^*$ .

Уравнение для сопряженной переменной имеет вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x} = h. \quad (3.27)$$

Терминальное состояние  $x(T)$  не фиксировано, находим решение дифференциального уравнения (3.27) с терминальным условием  $\psi(T) = 0$ , следовательно,

$$\psi(t) = h(t - T).$$



Тогда, подставляя  $\psi$  в (3.26), и поскольку знак управления должен быть неотрицательным, так как  $b - h(T - t) < 0$ , то положим  $u = 0$ . Рассматривая решение задачи оптимизации с условием Куна-Таккера [48], подтверждаем, что оптимальное управление, заданное формулой (3.23), действительно максимизирует гамильтониан (3.25). Наконец, оптимальное управление  $u^*$  и оптимальная траектория состояния имеют вид, приведенный в утверждении 3.4.  $\square$

### 3.2.1 Изменение верхней границы допустимого управления

Предположим, что в момент времени  $\tau_s \in [0, T]$  верхняя граница управляющей переменной изменяется на  $\bar{b}$ , т.е. для  $t \in [\tau_s, T]$  управление должно удовлетворять ограничению  $u(t) \in [0, \bar{b}]$ , и в случае полной информации игрок знает об этом. Мы также предполагаем, что момент  $\tau_s$  задан и известен игроку.

В случае, когда верхняя граница допустимого управления может быть изменена, в общем случае возможны два сценария: 1) верхняя граница изменяется так, что  $\bar{b} < b$ , 2) верхняя граница изменяется так, что  $\bar{b} \geq b$ . Причем, когда игрок не обладает такой информацией об изменении верхней границы, эти два сценария не будут иметь значения при описании модели в следующих разделах, поскольку целевая функция игрока не меняется в зависимости от этой информации, его целевая функция определяется по формуле (3.22).

### 3.2.2 Верхняя граница допустимого управления: $\bar{b} < b$

**Информация об изменении верхней границы допустимого управления неизвестна**

В данном разделе предполагается, что игрок не знает об изменении верхней границы допустимого управления. При этом, выполнено условие: измененная верхняя граница допустимого управления  $\bar{b}$  ниже исходной  $b$ , т.е.  $\bar{b} < b$ . Предположительно, так называемое имитационное оптимальное управление в этой ситуации аналогично управлению в (3.23), поскольку игрок все равно будет вести себя так, чтобы максимизировать целевую функцию (3.22) из-за неимения информации об изменении верхней границы. Между тем, предположим, что оптимальное управление достигнет  $\bar{b}$  в момент времени  $\theta$ , т.е.,

$$\begin{aligned} b - h(T - \theta) &= \bar{b}, \\ \theta &= T + \frac{\bar{b} - b}{h} < T. \end{aligned}$$

Кроме того, предположим, что  $\theta \geq \tau_s$ , то есть изменение верхней границы допустимого управления происходит до того, как оптимальное управление достигает нового предела. Таким образом, в этом случае ограничение на  $\tau_s$  является тривиальным, поскольку игрок не знает об изменении верхней границы.

Следовательно, превысив изменившуюся верхнюю границу  $\bar{b}$  через время  $\theta$ , игрок должен быть наказан. Определим штраф, оцениваемый интегралом на промежутке времени, на котором так называемое имитационное оптимальное управление превосходит  $\bar{b}$ , т.е.  $P \int_{\theta}^T (b - h(T-t) - \bar{b}) dt$ , где  $P > 0$  — коэффициент штрафа. Таким образом, можно записать целевую функцию в следующем виде:

$$J^L(x_0, T, u) = \int_0^T \left( (b - \frac{1}{2}u)u - dx \right) dt - P \int_{\theta}^T (b - h(T-t) - \bar{b}) dt. \quad (3.28)$$

Заметно, что так называемые имитационные оптимальное управление и траектория вычисляются для целевой функции (3.22), учитывая, что игрок не имеет информации об изменении верхней границы управления, однако расчет выигрыша игрока производится путем подстановки оптимального управления и траектории в (3.28).

**Утверждение 3.5.** *В случае, когда изменение верхней границы допустимого управления неизвестно игроку, когда  $\bar{b} < b$ , для задачи максимизации целевой функцией (3.22) при условии (3.21), имитационное оптимальное управление имеет вид:*

$$u^{*LN}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T - \frac{b}{h}], \\ b - h(T - t), & t \in [T - \frac{b}{h}, T]. \end{cases}$$

*Имитационная оптимальная траектория состояния имеет вид:*

$$x^{*LN}(t) = \begin{cases} x_0, & t \in [0, T - \frac{b}{h}], \\ x_0 + \frac{(b - Th + ht)^2}{2h}, & t \in [T - \frac{b}{h}, T]. \end{cases}$$

*Фактический выигрыш игрока, согласно (3.28), равен*

$$J^{*LN} = -Thx_0 + \frac{b^3}{6h} - \frac{P(b - \bar{b})^2}{2h}.$$

*Доказательство.* См. утверждение 3.4. □

**Информация об изменении верхней границы допустимого управления известна**

В данном разделе, как и в предыдущем, предполагаем, что  $\theta \geq \tau_s$  и, в отличие от этого случая, существенным отличием является то, что управление не выйдет за пределы  $\bar{b}$ , если оно будет осуществляться при наличии информации об

изменении верхней границы управления, т.е.,

$$0 \leq u \leq \bar{b} < b. \quad (3.29)$$

Поэтому в этом случае игрок не несет никаких дополнительных затрат.

**Утверждение 3.6.** *В случае, когда информация об изменении верхней границы управления известна, когда  $\bar{b} < b$ , для задачи оптимизации, определяемой целевой функцией (3.22) при условии (3.29), оптимальное управление имеет вид:*

$$u^{*LY}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T - \frac{b}{h}], \\ b - h(T - t), & t \in [T - \frac{b}{h}, T + \frac{\bar{b}-b}{h}], \\ \bar{b}, & t \in [T + \frac{\bar{b}-b}{h}, T]. \end{cases} \quad (3.30)$$

*Оптимальная траектория состояния имеет вид:*

$$x^{*LY}(t) = \begin{cases} x_0, & t \in [0, T - \frac{b}{h}], \\ x_0 + \frac{(b-Th+ht)^2}{2h}, & t \in [T - \frac{b}{h}, T + \frac{\bar{b}-b}{h}], \\ x_0 + \frac{\bar{b}^2}{2h} - \bar{b}(T - t) + \frac{\bar{b}(b-\bar{b})}{h}, & t \in [T + \frac{\bar{b}-b}{h}, T]. \end{cases}$$

*Максимальный выигрыш игрока равен*

$$J^{*LY} = -Thx_0 + \frac{\bar{b}(b-\bar{b})^2}{2h} + \frac{\bar{b}^2(3b-2\bar{b})}{6h}.$$

*Доказательство.* Учитывая ограничение  $u \leq \bar{b}$ , указанное в (3.29), запишем функцию Лагранжа:

$$L(u, \lambda) = (b - \frac{u}{2})u - hx + \psi u + \lambda(\bar{b} - u).$$

Применяя условие Куна-Таккера, получаем систему условий, которые должны быть выполнены,

$$\frac{\partial L}{\partial u} = b - u + \psi - \lambda \leq 0, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \bar{b} - u \geq 0, \quad (3.32)$$

$$\lambda, u \geq 0, \quad (3.33)$$

$$\lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda(\bar{b} - u) = 0, \quad (3.34)$$

$$u \frac{\partial L}{\partial u} = u(b - u + \psi - \lambda) = 0. \quad (3.35)$$

Если  $\lambda = 0$  в уравнении (3.34), получаем, что  $u = 0$  или  $u = b + \psi$ . Если  $u = \bar{b}$ , то  $\lambda = b - \bar{b} + \psi = 0$ . В сочетании с  $\psi$  в утверждении 3.4 можно получить оптимальное управление (3.30) и, наконец, оптимальную траекторию состояния и максимальный выигрыш.  $\square$

### 3.2.3 Верхняя граница управления $\bar{b} \geq b$

Если верхняя граница управления изменилась на  $\bar{b} > b$ , допустимое управление не будет больше  $\bar{b}$  независимо от того, известна или неизвестна информация об этом. Поэтому уточнения ограничений  $\tau_s$  не требуется.

#### Информация об изменении верхней границы управления неизвестна

Когда информация об изменении верхней границы управления неизвестна, это означает, что игрок будет решать оптимизационную задачу, определенную в (3.22), при условии, что

$$0 \leq u \leq b \leq \bar{b}. \quad (3.36)$$

**Утверждение 3.7.** *В случае, когда информация об изменении верхней границы управления неизвестна, и  $\bar{b} \geq b$ , для задачи максимизации целевой функции (3.22) при условии (3.36), оптимальное управление задается следующим образом:*

$$u^{*HN}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T - \frac{b}{h}], \\ b - h(T - t), & t \in [T - \frac{b}{h}, T]. \end{cases}$$

*Оптимальная траектория состояния имеет вид:*

$$x^{*HN}(t) = \begin{cases} x_0, & t \in [0, T - \frac{b}{h}], \\ x_0 + \frac{(b - Th + ht)^2}{2h}, & t \in [T - \frac{b}{h}, T]. \end{cases}$$

*Максимальный выигрыш игрока, согласно (3.22), равен*

$$J^{*HN} = -Thx_0 + \frac{b^3}{6h}.$$

*Доказательство.* См. утверждение 3.4. □

#### Информация об изменении верхней границы управления известна

Аналогично задаче оптимизации, описанной в утверждении 3.7, когда информация об изменении верхней границы управления известна, целевая функция и ограничения остаются прежними.

**Утверждение 3.8.** *В случае, когда информация об изменении верхней границы управления известна, и когда  $\bar{b} \geq b$ , для задачи максимизации с целевой функцией (3.22) при условии (3.36), оптимальное управление имеет вид:*

$$u^{*HY}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T - \frac{b}{h}], \\ b - h(T - t), & t \in [T - \frac{b}{h}, T]. \end{cases} \quad (3.37)$$

Оптимальная траектория состояния имеет вид:

$$x^{*HY}(t) = \begin{cases} x_0, & t \in [0, T - \frac{b}{h}], \\ x_0 + \frac{(b - Th + ht)^2}{2h}, & t \in [T - \frac{b}{h}, T]. \end{cases}$$

Максимальный выигрыш игрока равен

$$J^{*HY} = -Thx_0 + \frac{b^3}{6h}.$$

*Доказательство.* Повторяя ту же процедуру, что описана в доказательстве утверждения 3.6, с использованием условий Куна-Таккера, получаем аналогичные условия (3.31)–(3.35), которые должны выполняться.

Если  $\lambda = 0$ , то имеем  $u = 0$  или  $u = b + \psi$ . Если  $\lambda \neq 0$ , то  $u = \bar{b}$  и  $\lambda = b - \bar{b} + \psi \geq 0$ . Однако поскольку в данном случае  $b - \bar{b} \leq 0$ , а  $\psi < 0$ , как следует из утверждения 3.4, то, следовательно,  $\lambda < 0$ , что не удовлетворяет условию. Таким образом, мы имеем только  $u = 0$  и  $u = b + \psi$  — два варианта, как описано в (3.37). Для нахождения оптимальной траектории состояния и максимального выигрыша, см. утверждение 3.7.  $\square$

### 3.2.4 Оценка ценности информации

Пусть для обоих случаев  $T = 25, b = 20, h = 1, x_0 = 10, P = 8$ . Пусть  $\bar{b} = 5$ , когда  $\bar{b} < b$ , и  $\bar{b} = 25$ , когда  $\bar{b} \geq b$ . Как видно из рис. 3.2, информация об изменении верхней границы управления играет важную роль только в случае, когда  $\bar{b} < b$ , и влияет на (имитационное) оптимальное управление и (имитационную) оптимальную траекторию состояния. При  $\bar{b} \geq b$  (имитационное) оптимальное управление и (имитационная) оптимальная траектория состояния не меняются, а выигрыши в этих двух случаях равны, это свидетельствует о том, что эта информация не приносит никакой пользы игроку.

Для оценки *ценности информации* вновь используем нормированную ценность информации.

**Определение 3.2.** В задачах оптимизации (3.22) и (3.28), когда изменение верхней границы управления известно или неизвестно, нормированная ценность информации о терминальных затратах вычисляется по формуле:

$$NVI = \left| \frac{J^{MY} - J^{MN}}{J^{MY}} \right| \times 100\%, \quad M \in \{L, H\}.$$

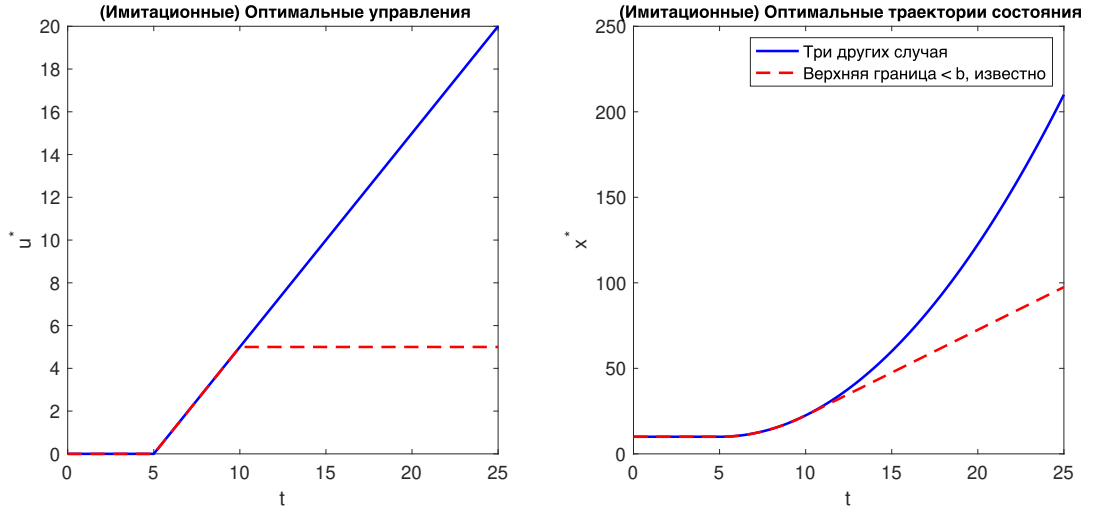


Рис. 3.2: (Имитационные) оптимальные управления и траектории состояний в ситуации, когда верхняя граница управления изменяется. Красная (пунктирная) линия обозначает случай, когда  $\bar{b} < b$  известно (см. утверждение 3.6), а синяя (сплошная) линия представляет три других случая, рассмотренных в утверждениях 3.5, 3.7 и 3.8.

Для приведенного выше численного примера, когда  $\bar{b} < b$ , получаем  $NVI = 21.6\%$  и, как и ожидалось, эта величина является возрастающей функцией параметра  $P$ , что говорит о том, что информация об изменении верхней границы управления в данном случае является значимой. Более того, информация о  $\bar{b} \geq b$  бесполезна, так как анализ показывает, что игрок не улучшает свой выигрыш, и нормированное значение информации равно нулю.

### 3.3 Ценность информации о начальном уровне загрязнения

В данном разделе рассматривается дифференциальная игра с двумя фирмами  $z \in \{i, j\}$ , занимающимися добычей ресурсов с запасом  $p_t$  в момент времени  $t \in [0, T]$ . Используются обозначения: объем добычи  $\gamma^z p_t$ , величина экологического возмущения  $e_t^z = \epsilon^z \gamma^z p_t$  и сокращение загрязнения:  $a_t^z = \alpha^z \tau_t^z$ , где  $\gamma^z, \epsilon^z, \alpha^z$  — положительные константы, а усилия по восстановлению окружающей среды  $\tau_t^z$  — управляющая переменная игрока  $z$ .

Динамика системы задается

$$\dot{p}_t = (\epsilon^i \gamma^i + \epsilon^j \gamma^j - \delta) p_t - \alpha^i \tau_t^i - \alpha^j \tau_t^j, \quad p_t > 0, \quad p_{t=0} = p_0, \quad (3.38)$$

где  $\delta > 0$  — естественная скорость восстановления окружающей среды, а темп

прироста загрязнения окружающей среды без учета мер по снижению загрязнения составляет  $\epsilon^i \gamma^i + \epsilon^j \gamma^j - \delta > 0$ .

Цель фирм — найти стратегии или усилия по восстановлению  $\tau_t^z$ , чтобы минимизировать свои затраты на восстановительные процедуры. Предположим, что игроки ведут себя кооперативно, стремясь минимизировать сумму своих затрат. Функционал коалиции имеет вид

$$K(p_0, \tau_t^i, \tau_t^j) = \int_0^T \left[ \frac{(\tau_t^i)^2}{2} + \frac{(\tau_t^j)^2}{2} \right] dt + \phi p_T^2 \rightarrow \min, \quad (3.39)$$

в то время как при некооперативном варианте игры любой игрок  $z$  стремится минимизировать следующий функционал:

$$J_z(p_0, \tau_t^z) = \int_0^T \frac{(\tau_t^z)^2}{2} dt + \frac{1}{2} \phi p_T^2 \rightarrow \min, \quad (3.40)$$

где  $p_0$  обозначает начальный уровень запаса загрязнения, затраты на восстановление вычисляются следующим образом:  $\ell(\tau_t^z) = \frac{(\tau_t^z)^2}{2}$ , издержки на восстановление для каждой фирмы в терминальный момент времени равны  $f(p_T) = \phi \frac{p_T^2}{2}$ , где  $\phi$  — положительная константа.

Если предположить, что игроки симметричны, т.е. имеют равные коэффициенты  $\epsilon^i = \epsilon^j = \epsilon$ ,  $\alpha^i = \alpha^j = \alpha$ ,  $\gamma^i = \gamma^j = \gamma$ , то можно переписать (3.38), получим

$$\dot{p}_t = (2\epsilon\gamma - \delta)p_t - \alpha(\tau_t^i + \tau_t^j) \quad (3.41)$$

с ограничением  $2\epsilon\gamma - \delta > 0$ .

Эта игра представлена в работе [62], где рассматриваются решения в классе стратегий с обратной связью. Здесь же предполагается, что игроки не обладают точной информацией о начальном уровне запаса загрязнения и не могут наблюдать  $p_t$  в любой момент времени. В таких условиях использование управлений с обратной связью не имеет смысла, поэтому будем искать равновесии в классе программных стратегий и оценим значение информации о начальном состоянии системы.

### 3.3.1 Кооперативный случай

**Утверждение 3.9.** *В кооперативной дифференциальной игре, определяемой совместной целевой функцией (3.39) при условии (3.41), оптимальное кооперативное управление для фирм имеет вид:*

$$(\tau_t^i)^* = (\tau_t^j)^* = -\psi\alpha = 2\alpha\phi e^{(2\epsilon\gamma - \delta)(T-t)} p_T^*, \quad (3.42)$$

где  $p_T^* = \frac{(2\epsilon\gamma - \delta)p_0 e^{(2\epsilon\gamma - \delta)T}}{2\epsilon\gamma - \delta + 2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T} - 1)}$ .

Соответствующая оптимальная кооперативная траектория состояния имеет вид:

$$p_t^* = p_0 e^{(2\epsilon\gamma - \delta)t} - \frac{2\alpha^2\phi e^{(2\epsilon\gamma - \delta)(T+t)} p_T^*}{2\epsilon\gamma - \delta} + \frac{2\alpha^2\phi e^{(2\epsilon\gamma - \delta)(T-t)} p_T^*}{2\epsilon\gamma - \delta}. \quad (3.43)$$

Общие издержки коалиции двух фирм равны

$$K(p_0, (\tau_t^i)^*, (\tau_t^j)^*) = p_0\phi e^{(2\epsilon\gamma - \delta)T} p_T^*.$$

*Доказательство.* Следуя [78], для нахождения решения кооперативной задачи в классе программных стратегий с целью минимизации (3.39), определим гамильтониан:

$$H = -\frac{(\tau_t^i)^2 + (\tau_t^j)^2}{2} + \psi[(2\epsilon\gamma - \delta)p_t - \alpha(\tau_t^i + \tau_t^j)],$$

где  $\psi$  — сопряженная переменная, которая может быть получена через каноническую систему с учетом условия трансверсальности  $\psi(T) = -\frac{d}{dp_t}\phi p_T^2|_{t=T} = -2\phi p_T$ , получаем  $\psi(t) = -2\phi e^{(2\epsilon\gamma - \delta)(T-t)} p_T$ . В соответствии с условием экстремальности первого порядка и знаком второй производной  $H$  по управляющей переменной оптимальное управление для каждой фирмы задается формулой (3.42). Соответственно, оптимальная траектория состояния получается в виде (3.43).

Общие издержки коалиции из двух фирм равны

$$\begin{aligned} K(p_0, (\tau_t^i)^*, (\tau_t^j)^*) &= \sum_{z \in i, j} \int_0^T \frac{((\tau_t^z)^*)^2}{2} dt + \phi(p_T^*)^2 \\ &= \int_0^T \left[ \frac{2\alpha\phi(2\epsilon\gamma - \delta)p_0 e^{(2\epsilon\gamma - \delta)(2T-t)}}{2\epsilon\gamma - \delta + 2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T} - 1)} \right]^2 dt + \phi(p_T^*)^2 \\ &= \frac{p_0^2\phi(2\epsilon\gamma - \delta)e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T}}{2\epsilon\gamma - \delta + 2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T} - 1)} = p_0\phi e^{(2\epsilon\gamma - \delta)T} p_T^*, \end{aligned}$$

где  $P_T^*$  находится подстановкой  $t = T$  в выражение для  $p_t^*$ , приведенное выше. Можно заметить, что при использовании управления  $(\tau_t^z)^*$ ,  $z = i, j$ , игроки не смогут полностью очистить окружающую среду к моменту времени  $T$ , так как  $p_T^* > 0$ .  $\square$

Теперь перейдем к рассмотрению неопределенности о начальном запасе загрязнения, здесь возможны два варианта развития событий: 1) оценка начального запаса может быть завышена по сравнению с фактическим; 2) начальный



запас может быть недооценен. На самом деле возможен и третий случай, когда оценка совпадает с фактической величиной, но он тривиален, и опущен без дальнейшего обсуждения.

Предположим, что  $\hat{p}_0$  — оценка начального запаса загрязнения. Если подставить  $\hat{p}_0$  в выражения оптимальных стратегий и оптимальной траектории состояния, то получим следующее:

$$(\hat{\tau}_t^i)^* = (\hat{\tau}_t^j)^* = -\psi\alpha = \frac{2\alpha\phi(2\epsilon\gamma - \delta)e^{(2\epsilon\gamma - \delta)(2T-t)}\hat{p}_0}{2\epsilon\gamma - \delta + 2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T} - 1)}, \quad (3.44)$$

$$\hat{p}_t^* = p_0e^{(2\epsilon\gamma - \delta)t} - \left[ e^{(2\epsilon\gamma - \delta)t} - \frac{1}{e^{(2\epsilon\gamma - \delta)t}} \right] \frac{2\alpha^2\phi e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T}\hat{p}_0}{2\epsilon\gamma - \delta + 2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T} - 1)}. \quad (3.45)$$

### Завышенная оценка начального запаса загрязнения

Когда оценка начального запаса загрязнения  $\hat{p}_0$  превышает фактическое значение (т.е.  $\hat{p}_0 > p_0$ ), возможны два исхода, которые зависят от того, насколько  $\hat{p}_0$  отличается от  $p_0$ . Если разница не очень велика, то получаем  $\hat{p}_T^* \geq 0$ , как и в исходной задаче. В противном случае возможно, что к моменту времени  $\hat{t} < T$  фирмы очистят окружающую среду, и тогда  $\hat{p}_T^* < 0$ .

Сначала рассмотрим случай, когда  $\hat{p}_T^* \geq 0$ .

Согласно (3.45), имеем

$$p_0e^{(2\epsilon\gamma - \delta)T} - \left[ e^{(2\epsilon\gamma - \delta)T} - \frac{1}{e^{(2\epsilon\gamma - \delta)T}} \right] \frac{2\alpha^2\phi e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T}\hat{p}_0}{2\epsilon\gamma - \delta + 2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T} - 1)} \geq 0.$$

Это неравенство выполняется, если

$$\frac{p_0}{\hat{p}_0} \geq \frac{2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T} - 1)}{2\epsilon\gamma - \delta + 2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T} - 1)}. \quad (3.46)$$

Записав  $\hat{p}_0$  через  $p_0$  в виде  $\hat{p}_0 = rp_0$ , перепишем неравенство (3.46) в виде:

$$1 < r \leq 1 + \frac{2\epsilon\gamma - \delta}{2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T} - 1)}. \quad (3.47)$$

В случае, когда неравенство (3.47) выполняется, игроки, использующие управления (3.44), будут иметь суммарные издержки, равные

$$\begin{aligned} K(p_0, (\hat{\tau}_t^i)^*, (\hat{\tau}_t^j)^*) &= \sum_{z \in i, j} \int_0^T \frac{((\hat{\tau}_t^z)^*)^2}{2} dt + \phi(\hat{p}_T^*)^2 \\ &= \int_0^T \left[ \frac{2\alpha\phi(2\epsilon\gamma - \delta)\hat{p}_0 e^{(2\epsilon\gamma - \delta)(2T-t)}}{2\epsilon\gamma - \delta + 2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T} - 1)} \right]^2 dt + \phi(\hat{p}_T^*)^2 \\ &= \frac{2\alpha^2\phi^2\hat{p}_0^2(2\epsilon\gamma - \delta)e^{4(2\epsilon\gamma - \delta)T}(1 - e^{-2(2\epsilon\gamma - \delta)T})}{(2\epsilon\gamma - \delta + 2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T} - 1))^2} + \phi(\hat{p}_T^*)^2. \end{aligned}$$

Когда условие (3.47) не выполняется, имеем  $\hat{p}_T^* < 0$ . Это означает, что к моменту времени  $\hat{t} < T$  фирмы очистят окружающую среду. Чтобы найти момент  $\hat{t}$ , когда  $\hat{p}_{\hat{t}} = 0$ , можно решить уравнение для определения  $e^{-2(2\epsilon\gamma-\delta)\hat{t}}$ :

$$p_0 e^{(2\epsilon\gamma-\delta)\hat{t}} - \left[ e^{(2\epsilon\gamma-\delta)\hat{t}} - \frac{1}{e^{(2\epsilon\gamma-\delta)\hat{t}}} \right] \frac{2\alpha^2 \phi e^{2(2\epsilon\gamma-\delta)T} \hat{p}_0}{2\epsilon\gamma - \delta + 2\alpha^2 \phi (e^{2(2\epsilon\gamma-\delta)T} - 1)} = 0.$$

Затем

$$e^{-2(2\epsilon\gamma-\delta)\hat{t}} = 1 - \frac{2\epsilon\gamma - \delta + 2\alpha^2 \phi (e^{2(2\epsilon\gamma-\delta)T} - 1)}{2r\alpha^2 \phi e^{2(2\epsilon\gamma-\delta)T}}.$$

Таким образом, получившееся выражение для управления в этом сценарии имеет вид:

$$(\hat{\tau}_t^i)^{**} = (\hat{\tau}_t^j)^{**} = \begin{cases} \frac{2\alpha\phi(2\epsilon\gamma-\delta)e^{(2\epsilon\gamma-\delta)(2T-t)}\hat{p}_0}{2\epsilon\gamma-\delta+2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma-\delta)T}-1)}, & t \in [t_0, \hat{t}], \\ 0, & t \in [\hat{t}, T]. \end{cases}$$

Соответствующая траектория состояния выглядит следующим образом:

$$\hat{p}_t^{**} = \begin{cases} p_0 e^{(2\epsilon\gamma-\delta)t} - \left[ e^{(2\epsilon\gamma-\delta)t} - \frac{1}{e^{(2\epsilon\gamma-\delta)t}} \right] \frac{2\alpha^2 \phi e^{2(2\epsilon\gamma-\delta)T} \hat{p}_0}{2\epsilon\gamma - \delta + 2\alpha^2 \phi (e^{2(2\epsilon\gamma-\delta)T} - 1)}, & t \in [t_0, \hat{t}], \\ 0, & t \in [\hat{t}, T]. \end{cases}$$

Таким образом, если  $r > 1 + \frac{2\epsilon\gamma-\delta}{2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma-\delta)T}-1)}$ , текущие суммарные издержки равны

$$\begin{aligned} K(p_0, (\tau_t^i)^{**}, (\tau_t^j)^{**}) &= \sum_{z \in i, j} \int_0^T \frac{((\hat{\tau}_t^z)^{**})^2}{2} dt + \phi(\hat{p}_T^{**})^2 \\ &= \int_0^{\hat{t}} \left[ \frac{2\alpha\phi(2\epsilon\gamma-\delta)\hat{p}_0 e^{(2\epsilon\gamma-\delta)(2T-t)}}{2\epsilon\gamma-\delta+2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma-\delta)T}-1)} \right]^2 dt \\ &= \frac{2\alpha^2\phi^2\hat{p}_0^2(2\epsilon\gamma-\delta)e^{4(2\epsilon\gamma-\delta)T}(1-e^{-2(2\epsilon\gamma-\delta)\hat{t}})}{(2\epsilon\gamma-\delta+2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma-\delta)T}-1))^2} \\ &= \frac{p_0\hat{p}_0\phi(2\epsilon\gamma-\delta)e^{2(2\epsilon\gamma-\delta)T}}{2\epsilon\gamma-\delta+2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma-\delta)T}-1)}. \end{aligned}$$

### Заниженная оценка начального запаса загрязнения

В случае, когда игроки имеют заниженную оценку начального запаса, т.е.  $\hat{p}_0 < p_0$  ( $0 < r < 1$ ), вновь получаем  $\hat{p}_T^* \geq 0$ . Игроки используют стратегии (3.44), и суммарные издержки равны  $K(p_0, (\hat{\tau}_t^i)^*, (\hat{\tau}_t^j)^*)$ .

### 3.3.2 Некооперативный случай

**Утверждение 3.10.** В дифференциальной игре, определенной в (3.40) при условии (3.41), равновесная по Нэшу стратегия фирмы  $z$  имеет вид:

$$(\tau_t^z)^{NC} = -\psi\alpha = \alpha\phi e^{(2\epsilon\gamma-\delta)(T-t)} p_T^+, \quad (3.48)$$

$$\text{где } p_T^+ = \frac{(2\epsilon\gamma-\delta)p_0 e^{(2\epsilon\gamma-\delta)T}}{2\epsilon\gamma-\delta + \alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma-\delta)T}-1)}.$$

Равновесная траектория состояния имеет вид :

$$p_t^{NC} = p_0 e^{(2\epsilon\gamma-\delta)t} - \frac{\alpha^2\phi e^{(2\epsilon\gamma-\delta)(T+t)} p_T^+}{2\epsilon\gamma-\delta} + \frac{\alpha^2\phi e^{(2\epsilon\gamma-\delta)(T-t)} p_T^+}{2\epsilon\gamma-\delta}. \quad (3.49)$$

Издержки фирмы  $z$  в равновесии равны

$$J_z(p_0, (\tau_t^z)^{NC}) = \frac{1}{2}\phi(p_T^+)^2 \left[ \frac{\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma-\delta)T}-1)}{2(2\epsilon\gamma-\delta)} + 1 \right]. \quad (3.50)$$

*Доказательство.* Переходя к (3.40), определяем гамильтониан для нахождения равновесной по Нэшу стратегии фирмы, а именно:

$$H_z = -\frac{(\tau_t^z)^2}{2} + \psi[(2\epsilon\gamma-\delta)p_t - \alpha(\tau_t^i + \tau_t^j)].$$

Равновесная стратегия любой фирмы задается (3.48), а равновесная траектория состояния определяется формулой (3.49). Издержки фирмы  $z$  в равновесии определяются по формуле (3.50). Тогда сумма издержек двух фирм равна

$$J = \sum_{z \in i,j} J_z(p_0, (\tau_t^z)^{NC}) = \phi(p_T^+)^2 \left[ \frac{\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma-\delta)T}-1)}{2(2\epsilon\gamma-\delta)} + 1 \right].$$

□

#### Два случая оценки начального запаса

В некооперативном случае анализ классификации оценок начального запаса идентичен предыдущему, включая завышенную, равную и заниженную оценки. Если предположить, что оценка начального запаса  $\tilde{p}_0$  не имеет значения для обеих фирм, то соответствующая равновесная по Нэшу стратегия и равновесная траектория состояния имеют вид:

$$(\tilde{\tau}_t^z)^{NC} = -\psi\alpha = \frac{\alpha\phi(2\epsilon\gamma-\delta)e^{(2\epsilon\gamma-\delta)(2T-t)}\tilde{p}_0}{2\epsilon\gamma-\delta + \alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma-\delta)T}-1)},$$

$$\tilde{p}_t^{NC} = p_0 e^{(2\epsilon\gamma - \delta)t} - [e^{(2\epsilon\gamma - \delta)t} - \frac{1}{e^{(2\epsilon\gamma - \delta)t}}] \frac{\alpha^2 \phi e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T} \tilde{p}_0}{2\epsilon\gamma - \delta + \alpha^2 \phi (e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T} - 1)}.$$

Проводя аналогичные расчеты для случаев заниженной и завышенной оценки, описанные выше, результат в данном случае повторяет результат, сформулированный в утверждении 3.12.

### 3.3.3 Нормированная ценность информации о начальном запасе

В этом разделе используются идеи исследований в [21, 94] и решается задача определения ценности информации в дифференциальной игре с непрерывным временем.

**Определение 3.3.** *Нормированная ценность информации в кооперативной игре определяется по формуле:*

$$\mathcal{V}^C = \left| \frac{K(p_0, (\tau_t^i)^*, (\tau_t^j)^*) - K(p_0, (\hat{\tau}_t^i)^*, (\hat{\tau}_t^j)^*)}{K(p_0, (\tau_t^i)^*, (\tau_t^j)^*)} \right|,$$

где  $K(p_0, (\tau_t^i)^*, (\tau_t^j)^*)$  — суммарный выигрыш игроков, полученный при известной информации о значениях параметров, а  $K(p_0, (\hat{\tau}_t^i)^*, (\hat{\tau}_t^j)^*)$  — суммарный выигрыш игроков, полученный при неточной оценке значений.

В отличие от кооперативного случая, для некооперативной игры при использовании неточной информации затраты игроков могут быть меньше, чем при известной информации. В этом случае предполагается, что ценность информации о начальном состоянии равна нулю.

**Определение 3.4.** *Нормированная ценность информации в некооперативной игре для игрока  $z \in \{i, j\}$  определяется по формуле:*

$$\mathcal{V}_z^{NC} = \begin{cases} \left| \frac{J_z(p_0, (\tau_t^z)^{NC}) - J_z(p_0, (\tilde{\tau}_t^z)^{NC})}{J_z(p_0, (\tau_t^z)^{NC})} \right|, & J_z(p_0, (\tau_t^z)^{NC}) < J_z(p_0, (\tilde{\tau}_t^z)^{NC}), \\ 0, & J_z(p_0, (\tau_t^z)^{NC}) \geq J_z(p_0, (\tilde{\tau}_t^z)^{NC}). \end{cases}$$

где  $J_z(p_0, (\tau_t^z)^{NC})$  — затраты игрока  $z$ , полученные в случае точной информации о значениях параметров, в то время как  $J_z(p_0, (\tilde{\tau}_t^z)^{NC})$  — затраты игрока  $z$ , полученные в случае неточной оценки значений.

Очевидно, что чем больше значения  $\mathcal{V}^C$  и  $\mathcal{V}^{NC}$ , тем важнее информация о начальном уровне запаса в кооперативном и некооперативном случаях. Далее,

опираясь на результаты, полученные в разделе 3.3.1, можно доказать следующие утверждения.

**Утверждение 3.11.** В кооперативной игре (3.39) при условии (3.41) ценность информации о начальном запасе  $p_0$  равна

$$\mathcal{V}^C = \begin{cases} \frac{(1-r)^2}{\theta}, & 0 < r \leq 1 + \theta, \\ r - 1, & r > 1 + \theta. \end{cases}$$

Здесь  $r = \frac{\hat{p}_0}{p_0}$ ,  $\hat{p}_0$  — оценка начального запаса и

$$\theta = \frac{2\epsilon\gamma - \delta}{2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T} - 1)}.$$

*Доказательство.* См. раздел 3.3.1 и определение 3.3.

Заметим, что когда  $0 < r < 1$  или  $1 < r \leq 1 + \theta$ , то для ценности информации используем формулу:

$$\mathcal{V}^C = \left| \frac{K(p_0, (\tau_t^i)^*, (\tau_t^j)^*) - K(p_0, (\hat{\tau}_t^i)^*, (\hat{\tau}_t^j)^*)}{K(p_0, (\tau_t^i)^*, (\tau_t^j)^*)} \right|.$$

Если  $r = 1$ , тогда  $\mathcal{V}^C = 0$ .

А если  $r > 1 + \theta$ , то нормированная ценность информации равна

$$\mathcal{V}^C = \left| \frac{K(p_0, (\tau_t^i)^*, (\tau_t^j)^*) - K(p_0, (\hat{\tau}_t^i)^{**}, (\hat{\tau}_t^j)^{**})}{K(p_0, (\tau_t^i)^*, (\tau_t^j)^*)} \right|.$$

□

**Утверждение 3.12.** В некооперативной игре (3.40) при условии (3.41) ценность информации о начальном запасе  $p_0$  определяется по формуле:

$$\mathcal{V}_z^{NC} = \begin{cases} \frac{(1-r)(r(1+\theta) - 3\theta - 1)}{\theta(1+4\theta)}, & 0 < r \leq 1 \text{ or } \frac{3\theta+1}{\theta+1} < r \leq 1 + 2\theta, \\ 0, & 1 < r \leq \frac{3\theta+1}{\theta+1}, \\ \frac{2\theta+1}{4\theta+1}r - 1, & r > 1 + 2\theta. \end{cases}$$

Здесь  $r = \frac{\tilde{p}_0}{p_0}$ ,  $\tilde{p}_0$  — оценка начального запаса и

$$\theta = \frac{2\epsilon\gamma - \delta}{2\alpha^2\phi(e^{2(2\epsilon\gamma - \delta)T} - 1)}.$$

*Доказательство.* См. раздел 3.3.2 и определение 3.4. □

### 3.3.4 Анализ теоретических результатов и численные примеры

#### Сравнение кооперативного и некооперативного случаев

В рассматриваемой игре игроки симметричны, а значит, можно сделать вывод, что в кооперативной игре каждый игрок будет нести половину общих издержек. Тогда ценность информации для общих издержек будет совпадать с ценностью информации для каждого игрока в отдельности. При таком условии способ сравнения ценности информации о начальном запасе в кооперативной и некооперативной игре вполне оправдан.

Результат сравнения  $\mathcal{V}^C$  и  $\mathcal{V}^{NC}$  представлен в таблицах 3.1, 3.2. В таблице 3.1 предполагается, что  $0 < \theta \leq 1$ . Результаты для  $\theta > 1$  приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.1: Сравнение нормированной ценности информации для  $0 < \theta \leq 1$

$0 < r < 1$	$1 < r \leq \frac{1+3\theta}{\theta+1}$	$\frac{1+3\theta}{\theta+1} < r < 1 + 2\theta$	$r \geq 1 + 2\theta$
$\mathcal{V}^C > \mathcal{V}^{NC}$	$\mathcal{V}^C > \mathcal{V}^{NC}$	$\mathcal{V}^C < \mathcal{V}^{NC}$	$\mathcal{V}^C > \mathcal{V}^{NC}$

Таблица 3.2: Сравнение нормированной ценности информации для  $\theta > 1$

$0 < r < 1$	$1 < r \leq \frac{1+3\theta}{\theta+1}$	$\frac{1+3\theta}{\theta+1} < r < 1 + \theta$	$r \geq 1 + \theta$
$\mathcal{V}^C > \mathcal{V}^{NC}$	$\mathcal{V}^C > \mathcal{V}^{NC}$	$\mathcal{V}^C < \mathcal{V}^{NC}$	$\mathcal{V}^C > \mathcal{V}^{NC}$

Можно заметить, что в большинстве случаев ценность информации в кооперативной игре выше, чем в некооперативной, что свидетельствует о том, что влияние оценки начального запаса загрязнения на выигрыши игроков в кооперативной игре гораздо существеннее. Поэтому, если игроки выбирают кооперативное поведение, им следует уделять больше внимания точности информации о начальном состоянии загрязнения.

#### Сравнение случаев завышенных и заниженных оценок

Для того чтобы выяснить, будут ли завышенная и заниженная оценка на относительно одном и том же уровне одинаково влиять на конечные издержки в каждом случае, сначала приводится подробный анализ кооперативного случая. Величина  $\bar{\mathcal{V}}^C$  представляет собой NVI в случае завышенной оценки со сдвигом  $\beta p_0$  вправо от  $p_0$ , а  $\underline{\mathcal{V}}^C$  — нормированное значение информации для случая зани-

женной оценки с тем же сдвигом влево. В зависимости от значений параметров возможны различные случаи:

1. Предположим, что  $0 \leq \beta < 1$ ,  $\theta < 1$ .

В случае завышенной оценки для  $\hat{p}_0 = p_0 + \beta p_0$  имеем

$$\bar{\nu}^C = \begin{cases} \frac{\beta^2}{\theta}, & 0 \leq \beta \leq \theta, \\ \beta, & \theta < \beta < 1. \end{cases}$$

В случае заниженной оценки, если  $\hat{p}_0 = p_0 - \beta p_0$ , то

$$\underline{\nu}^C = \frac{\beta^2}{\theta}, \text{ for all } 0 \leq \beta < 1.$$

Получаем, что

$$\begin{aligned} \bar{\nu}^C &= \underline{\nu}^C, \text{ if } 0 \leq \beta \leq \theta, \\ \bar{\nu}^C &< \underline{\nu}^C, \text{ if } \theta < \beta < 1. \end{aligned}$$

2. Предположим, что  $0 \leq \beta < 1$ ,  $\theta \geq 1$ . В этом случае  $\bar{\nu}^C = \underline{\nu}^C$  для всех  $0 \leq \beta < 1$ .

Эти два случая показывают, что влияние заниженной оценки всегда больше или равно таковому при завышенной оценке.

3. Для случая  $\beta \geq 1$  наличие большей информации о неизвестном параметре не имеет смысла. Все же можно отметить, что потери в случае завышенной оценки превышают наибольшие потери в случае заниженной оценки только в том случае, если  $\beta > \frac{1}{\theta}$ .

Аналогичный анализ можно провести для некооперативного случая и случая с коэффициентом терминальных затрат.

### Числовой пример

На основании утверждений 3.11, 3.12 на численном примере показан анализ влияния различных случаев оценивания неизвестных параметров. Значения параметров задаются случайным образом: пусть для обоих случаев они равны  $\gamma = 1,8$ ,  $\epsilon = 0,1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\phi = 0,06$ ,  $p_0 = 100$ ,  $\delta = 0,1$ ,  $r \in (0, 2]$ . В частности, в примере сравним четыре различных случая с терминальными моментами времени  $T = 10, 12, 14$  и  $16$ .

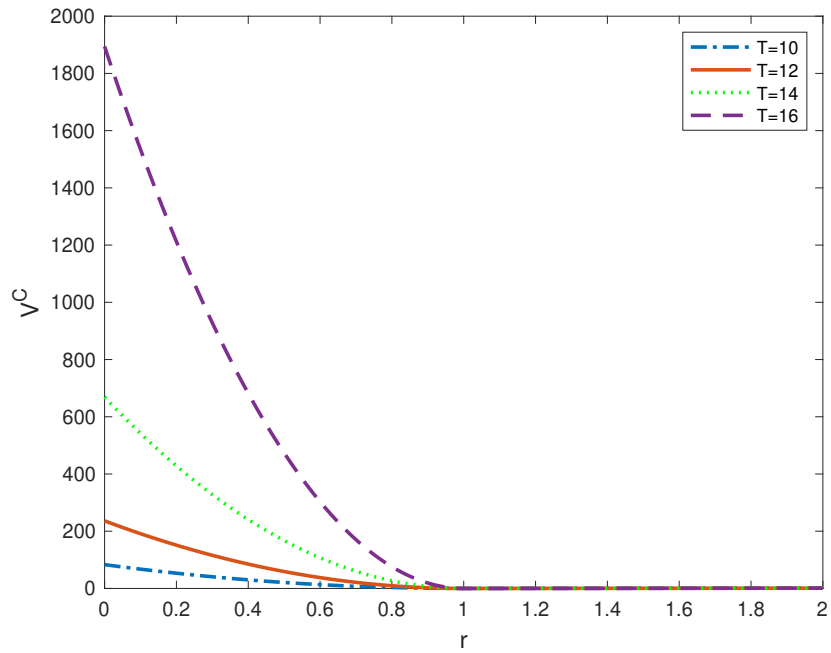


Рис. 3.3: Нормированная ценность информации для различных оценок начального уровня загрязнения при различных временных интервалах в кооперативном случае (по оси  $X$  изменяется  $r$ , на оси  $Y$  —  $V^C$ ).

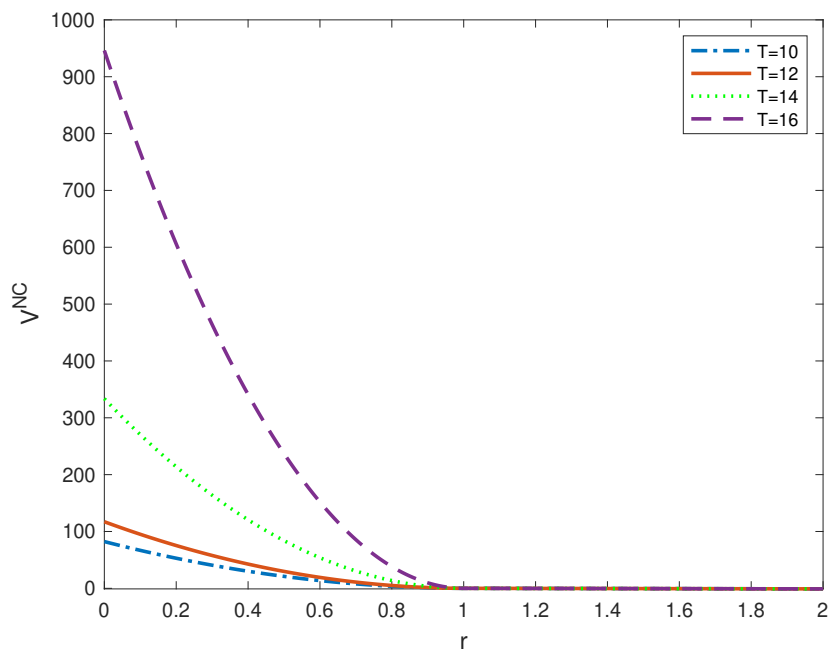


Рис. 3.4: Нормированная ценность информации для различных оценок начального уровня загрязнения при различных временных интервалах в некооперативном случае (по оси  $X$  изменяется  $r$ , на оси  $Y$  —  $V^C$ ).



На рис. 3.3 и 3.4 видно, что режим игры (кооперативный и некооперативный) действительно демонстрирует схожую форму кривой, но с разными значениями. Очевидно, что на этих двух рисунках, если сравнить нормированное значение информации при завышенной оценке, т.е.  $r > 1$ , и заниженной оценке, т.е.  $r \leq 1$ , то заниженная оценка принесет игрокам большие издержки, если наблюдать их в целом, что также подтверждается теоретическим анализом. При фиксированном начальном времени, чем больше продолжительность игры, тем более резкий рост издержек будет вызван заниженной оценкой. Напротив, линейноподобная кривая нормированной ценности информации при завышенной оценке гораздо более устойчива и полого. Объединив эти результаты с полученными при теоретическом анализе, можно предположить, что лицо, принимающее решение, после получения наблюдаемого отрезка возможных значений начального объема, например, отрезка начального запаса  $[A \pm B]$ , должен обратить внимание на величину  $A + B$ , т.е. более весомое значение будет иметь завышенная оценка начального запаса. К тому же, из-за большей важности этой информации для кооперативного случая требуется дополнительные усилия для того, чтобы лицо, принимающее решение, было уверено в высокой достоверности оценки начального запаса.

Кроме того, считается целесообразным изучить последствия изменения коэффициента терминальных затрат  $\phi$ . Этот параметр определяет штраф, который фирма должна заплатить регулятору, если она не успеет очистить окружающую среду к терминальному моменту времени. На рис. 3.5 показаны четыре графика с  $\phi = 0,01$ ,  $\phi = 0,03$ ,  $\phi = 0,05$  и  $\phi = 0,1$ . Выбор этих четырех значений  $\phi$  сделан из соображений тестирования нескольких значений из заданного интервала. Общие тенденции изменения нормированной ценности информации при различном терминальном времени в кооперативном и некооперативном случаях похожи, поэтому приведен только результат при  $T = 10$ .

Из рис. 3.5 видно, что в случае заниженной оценки нормированная ценность информации быстро возрастает с ростом  $\phi$ . Более того, общий график здесь соответствует показателям нормированной ценности информации при различном времени окончания. Следовательно, можно считать более приемлемой завышенную оценку начального уровня загрязнения, когда лицо, принимающее решение, не может гарантировать, что полученная им оценка достаточно точна, чтобы использовать ее в своем решении.

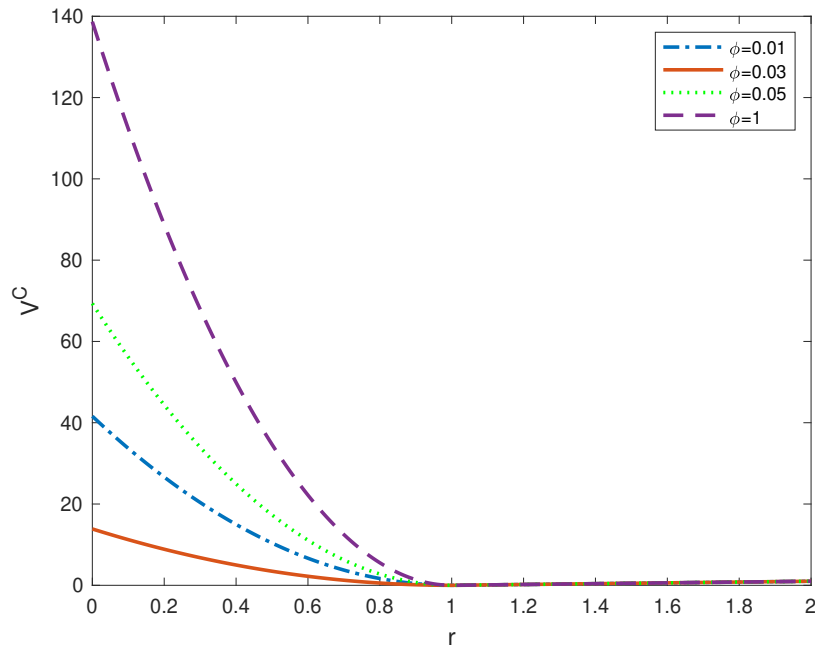


Рис. 3.5: Нормированная ценность информации для различных оценок начального уровня загрязнения при различных коэффициентах  $\phi$ , когда  $T = 10$  (по оси X изменяется  $r$ , на оси Y —  $v^C$ )

### 3.4 Заключение к главе 3

В этой главе рассмотрены три различных сценария, в которых информация, доступная игрокам, не является точной. Начиная с неопределенности терминальных затрат и заканчивая неизвестностью верхней границы допустимого управления и оценкой начального запаса загрязнения, определяется нормированная ценность информации.

В сценариях с терминальными затратами и верхней границей допустимого управления определяется нормированная ценность информации, чтобы отдельно определить значение информации, содержащейся в этих параметрах. Ввиду сложности получения теоретических результатов приводятся численные примеры, в которых рассчитывается ценность информации. Численные примеры для обоих сценариев показали, что отсутствие точной информации действительно снижает выигрыши игроков при различных уровнях снижения загрязнения, за исключением последнего случая, когда изменение верхней границы управления удовлетворяет условию:  $\bar{b} \geq b$ . Отсутствие такой информации в последнем случае никак не влияет на выигрыши игроков.

В сценарии с неизвестным начальным запасом загрязнения изучается, как

оценка начального запаса может повлиять на результаты деятельности двух игроков, участвующих в кооперативной и некооперативной дифференциальной игре. Изучаются два случая, включая завышенную и заниженную оценки, и для количественной оценки ценности информации о параметре начального запаса применяется нормированная ценность информации. Делается вывод о том, что неопределенность в отношении начального запаса в большей степени влияет на кооперативный случай, чем на некооперативный, что напоминает игрокам о необходимости уделять больше внимания точности информации при кооперативном режиме игры. Как для кооперативных, так и для некооперативных случаев можно сделать общий вывод: завышенная оценка начального запаса уменьшает выигрыши игроков. Результаты численного моделирования показывают, что игроки могут значительно снизить свои затраты, если они склонны к завышению оценки, полученной от экспертов, особенно в кооперативном случае.

## Заключение

Данная диссертация посвящена анализу устойчивости в задачах управления загрязнением окружающей среды с одним или многими лицами, принимающими решения. Исследование можно главным образом разделить на две части: изучение влияния внутренних факторов, таких как коалиционная структура и вид целевых функций, на устойчивость кооперации (главы 1 и 2) и анализ устойчивости при влиянии внешних факторов, таких как неопределенность о существовании конечных затрат, возможная корректировка верхней границы допустимых значений управления, а также неточность в оценке начального уровня загрязнений (глава 3). В частности, в главе 1 рассматривается статическая задача управления загрязнением с четырьмя игроками, в которой определяются два понятия устойчивости и предлагаются три механизма, позволяющие сделать отдельные коалиционные структуры устойчивыми. В главе 2 рассматривается динамическая модель управления загрязнением и вводится механизм компенсаций, основанный на теории контрактов для цепочек поставок. В главе 2 также исследуется асимметричная дифференциальная игра с тремя игроками, в которой находятся устойчивые коалиционные структуры, в том числе и в динамике. Анализ устойчивости, приведенный в главе 3, сосредоточен на исследовании того, как неопределенная информация может влиять на устойчивость решений. В главе 3 предлагается новая характеристика, названная нормированной ценностью информации, для определения ценности информации о терминальных затратах, верхней границе управлений и начальном уровне загрязнения.

Основные результаты работы:

1. Рассмотрена игра между странами, загрязняющими окружающую среду, которые по-разному относятся к ее защите. Некоторые страны учитывают затраты на уменьшение загрязнения в своих задачах оптимизации, а другие нет. Изучены различные сценарии кооперации, включая кооперативный, некооперативный и частично кооперативный, когда могут быть сформированы

рованы любые коалиционные структуры. Исследована устойчивость всех сценариев и сделан вывод о том, что устойчивых сценариев может не существовать, но есть единственный индивидуально устойчивый сценарий для некоторых параметров модели. Для поддержания устойчивости желаемых сценариев предложены три механизма, позволяющие сделать их устойчивыми: (1) осуществление трансферных платежей на основе любого кооперативного решения, (2) разработка системы издержек перехода в случае отклонений и (3) ограничения на формирование коалиций и разработка множества допустимых сценариев. Приведены численные примеры игр четырех лиц и показано, как могут работать предложенные механизмы. Подчеркнем, что количество вычислений растет экспоненциально с увеличением числа игроков. Таким образом, теоретически полученные результаты могут быть применены к играм с любым числом игроков, но практически проведение вычислений для предложенных механизмов затруднительно для большого числа игроков.

2. Предложен механизм компенсаций, предполагающий обмен затратами и прибылями между игроками, чувствительными и нечувствительными к вопросам экологии, для уменьшения фактического уровня загрязнений. Сравнение сценария с использованием механизма компенсаций, некооперативного и кооперативного сценариев позволяет выявить преимущества и ограничения данного механизма. На основе численного примера сделан вывод о том, что можно подобрать параметры механизма компенсаций, которые позволят превзойти некооперативный сценарий. Также очевидно, что этот механизм хуже, чем полностью кооперативный сценарий, в части прибылей обоих игроков. Также исследуется дифференциальная игра управления загрязнением окружающей среды с участием развивающихся и развитых стран. Изучена устойчивость различных кооперативных сценариев, когда игроки могут частично кооперироваться. Для изучения всех возможных коалиционных структур предлагается три типа сценариев: (1) кооперативный, (2) некооперативный и (3) частично кооперативный, в которых прибыль коалиции зависит от поведения внешних игроков (в частности, от того, образуют они коалиции или нет). Определены общие условия устойчивости Нэша и индивидуальной устойчивости коалиционных струк-

тур или сценариев. На двух численных примерах демонстрируется процедура нахождения устойчивого сценария в игре с тремя игроками. Также представлена процедура придания устойчивости конкретному сценарию (при возможности) путем определения специальной схемы трансферных платежей.

3. Рассмотрены три модели управления выбросами загрязняющих веществ с неопределенной информацией и применено понятие нормированной ценности информации, предложенное ранее для изменения ценности информации числовым способом. При анализе неопределенности о терминальных затратах и верхней границы управления исследованы случаи, когда данная информация доступна или недоступна. Изучено также влияние такой информации на выигрыши игроков. Полученные результаты показывают, что при неточной информации выигрыши игроков уменьшаются, за исключением случая, когда измененная верхняя граница управления выше исходной, такая информация не имеет смысла для игроков. Кроме того, проведено исследование того, как оценка начального уровня загрязнения может повлиять на деятельность двух игроков с точки зрения процесса восстановления в кооперативных и некооперативных дифференциальных играх. Проведя анализ путем сравнения нормированной ценности информации при различных терминальных затратах в кооперативных и некооперативных играх, выяснено, что переоценка начального уровня влияет на итоговый выигрыш тривиальным образом, а неопределенность начального уровня имеет существенно большее значение для кооперативных игр. Ожидается, что лицо, принимающее решение, будет склоняться к переоценке этого параметра, особенно в случае кооперации.

В заключении можно сказать, что все задачи, сформулированные в данной диссертации, решены, а цели полностью достигнуты.

## Литература

- [1] Algaba E., Bilbao J. M., van den Brink R., Jiménez-Losada A. Axiomatizations of the Shapley value for cooperative games on antimatroids // *Mathematical Methods of Operations Research*. 2003. Vol. 57. P. 49–65.
- [2] Asheim G. B., Froyen C. B., Hovi J., Menz F. C. Regional Versus Global Cooperation for Climate Control // *Journal of Environmental Economics and Management*. 2006. Vol. 51. N. 1. P. 93–109.
- [3] Aumann R., Drèze J. H. Cooperative games with coalition structures // *International Journal of Game Theory*. 1974. Vol. 3. P. 217–237.
- [4] Bahn O., Breton M., Sbragia L., Zaccour G. Stability of international environmental agreements: an illustration with asymmetrical countries // *International Transactions in Operational Research*. 2009. Vol. 16. P. 307–324.
- [5] Barsuk P. I., Gromova E. Investigation of the properties of one cooperative solution in a differential emission control game // *Management processes and sustainability*. 2020. Vol. 7. N. 1. P. 361–366.
- [6] Basar T., Olsder G. J. *Dynamic noncooperative game theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics. 1998.
- [7] Bhattacharjya D., Eidsvik J., Mukerji T. The Value of Information in Spatial Decision Making // *Mathematical Geosciences*. 2010. Vol. 42. P. 141–163.
- [8] Bilbao J., Driessen T., Jimenez Losada A., Lebron E. The Shapley value for games on matroids: The static model // *Mathematical Methods of Operations Research*. 2001. Vol. 53. P. 333–348.
- [9] Bogomolnaia A., Jackson M. O. The stability of hedonic coalition structures // *Games and Economic Behavior*. 2002. Vol. 38. N. 2. P. 201–230.

- [10] Bondarev A., Gromov D. On the structure and regularity of optimal solutions in a differential game with regime switching and spillovers // Haunschmied, J.L., Kovacevic, R.M., Semmler, W., Veliov, V.M. (eds) *Dynamic Economic Problems with Regime Switches. Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance*. 2021. Vol. 25. P. 187–208.
- [11] Bosello F., Buchner B., Carraro C. Equity, Development, and Climate Change Control // *Journal of the European Economic Association*. 2003. Vol. 1. N. 2/3, P. 601–611.
- [12] Breton M., Sbragia L. The Impact of Adaptation on the Stability of International Environmental Agreements // *Environmental and Resource Economics*. 2019. Vol. 74. P. 697–725.
- [13] Breton M., Sbragia L. Self-image and the stability of international environmental agreements // *Ecological Economics*. 2023. Vol. 211. 107869.
- [14] Breton M., Zaccour G., Zahaf M. A differential game of joint implementation of environmental projects // *Automatica*. 2005. Vol. 41. N. 10. P. 1737–1749.
- [15] Cabo F., Tidball M. Cooperation in a Dynamic Setting with Asymmetric Environmental Valuation and Responsibility // *Dynamic Games and Applications*. 2022. Vol. 12. P. 844–871.
- [16] Carraro C. (2000) Roads towards International Environmental Agreements // Siebert H (ed) *The economics of international environmental problems*. 2000. P. 169–202.
- [17] Carraro C., Eyckmans J., Finus M. Optimal Transfers and Participation Decisions in International Environmental Agreements // *Review of International Organizations*. 2006. Vol. 1. P. 379–396.
- [18] Carraro C., Marchiori C. *Stable Coalitions // The Endogenous Formation of Economic Coalitions*, UK: Edward Elgar. 2002. P. 156–198.
- [19] Carraro C., Siniscalco D. Strategies for the international protection of the environment // *Journal of Public Economics*. 1993. Vol. 52. N. 3. P. 309–328.



- [20] Chander P., Tulkens H. The core of an economy with multilateral environmental externalities // *International Journal of Game Theory*. 1997. Vol. 26. P. 379–401.
- [21] Chebotareva A., Su S., Tretyakova S., Gromova E. On the value of the preexisting knowledge in an optimal control of pollution emissions // *Contributions to Game Theory and Management, Russia*. 2021. Vol. 14. P. 48–57.
- [22] Chebotareva A., Su S., Voronina E., Gromova E. Value of cooperation in a differential game of pollution control // Pardalos, P., Khachay, M., Mazalov, V. (eds) *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. Lecture Notes in Computer Science*. 2022. Vol. 13367.
- [23] d'Aspremont C., Jacquemin A., Gabszewicz J. J., Weymark J. A. On the Stability of Collusive Price Leadership // *Canadian Journal of Economics*. 1983. Vol. 16. P. 17–25.
- [24] De Giovanni P., Zaccour G. Cost-Revenue Sharing in a Closed-Loop Supply Chain // Cardaliaguet, P., Cressman, R. (eds) *Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games*, Birkhauser. 2013. Vol. 12. P. 395–421.
- [25] De Giovanni P., Zaccour G. A selective survey of game-theoretic models of closed-loop supply chains // *Annals of Operations Research*. 2022. Vol. 314. N. 1. P. 77–116.
- [26] Dockner E. J., Long N. V. International pollution control: Cooperative versus noncooperative strategies // *Journal of Environmental Economics and Management*. 1993. Vol. 25. P. 13–29.
- [27] Dockner E. J., Jorgensen S., Long N. V., Sorger G. *Differential Games in Economics and Management Science*. Cambridge, UK. 2000.
- [28] Dockner E. J., Nishimura K. Transboundary Pollution in a Dynamic Game Model // *Japanese Economic Review*. 1999. Vol. 50. P. 443–456.
- [29] Driessen T. S. H., Funaki Y. Coincidence of and collinearity between game theoretic solutions // *Operations-Research-Spektrum*. 1991. Vol. 13. P. 15–30.

- [30] Dutta G., Mukerji T., Eidsvik J. Value of information analysis for subsurface energy resources applications // *Applied Energy*, 2019. Vol. 252. 113436.
- [31] Escapa M., Maria J. G. Distribution of potential gains from international environmental agreements: the case of the greenhouse effect // *Journal of Environmental Economics and Management*. 1997. Vol. 33. P. 1–16.
- [32] Eyckmans J., Finus M. An Almost Ideal Sharing Scheme for Coalition Games with Externalities // *Energy, Transport and Environment Working Papers Series*, K.U. Leuven.
- [33] Fanokoa P. S., Telahigue I., Zaccour G. Buying cooperation in an asymmetric environmental differential game // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2010. Vol. 35. N. 6. P. 935–946.
- [34] Finus, M. *New Developments in Coalition Theory: An Application to the Case of Global Pollution* // *Environmental Policy in an International Perspective*, Holland: Kluwer. 2003. Vol. 26. P. 19–49.
- [35] Finus, M. *Game Theoretic Research on the Design of International Environmental Agreements: Insights, Critical Remarks, and Future Challenges* // *International Review of Environmental and Resource Economics*. 2008. Vol. 2. N. 1. P. 29–67.
- [36] Finus M., Rundshagen B. *Endogenous Coalition Formation in Global Pollution Control: A Partition Function Approach* // *Endogenous Formation of Economic Coalitions*, UK: Edward Elgar. 2003. P. 199–243.
- [37] Fuentes-Albero C., Rubio S. J. Can international environmental cooperation be bought? // *European Journal of Operational Research*. 2010. Vol. 202. N. 1. P. 255–264.
- [38] Yokota F., Thompson K. M.. *Value of Information Analysis in Environmental Health Risk Management Decisions: Past, Present and Future* // *Risk Analysis*, John Wiley & Sons. 2004. Vol. 24. N. 3. P. 635–650.
- [39] Gamkrelidze R. V. Discovery of the maximum principle // *Journal of dynamical and control systems*. 1999. Vol. 5. N. 4. P. 437–451.

- [40] Ghosh S. K., Seikh M. R., Chakraborty, M. Analyzing a stochastic dual-channel supply chain under consumers' low carbon preferences and cap-and-trade regulation // *Computers & Industrial Engineering*. 2020. Vol. 149. 106765.
- [41] Gromova E., Tur A. The Impact of The Information about The Initial Conditions on the Solution of Cooperative Differential Games. 31st European Conference on Operation Research, Athens. 2021.
- [42] Gromova E., Plekhanova K. A differential game of pollution control with participation of developed and developing countries // *Contributions to Game Theory and Management*. 2015. Vol. 8. P. 64–83.
- [43] Gromova E. The Shapley value as a sustainable cooperative solution in differential games of three players // Petrosyan, L., Mazalov, V. (eds.) *Recent Advances in Game Theory and Applications. Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications*. 2016. P. 67-91.
- [44] Gromova E., Petrosian O. Control of information horizon for cooperative differential game of pollution control // *International Conference - Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference)*. 2016. P. 1–4.
- [45] Gromov D., Gromova E. On a class of hybrid differential games // *Dynamic Games and Applications*. 2017. Vol. 7. N. 2. P. 266–288.
- [46] Gusev V., Mazalov V. Potential functions for finding stable coalition structures // *Operations Research Letters*. 2019. Vol. 47. N. 6. P. 478–482.
- [47] Hart S., Kurz M. Endogenous formation of coalitions // *Econometrica*. 1983. Vol. 51. P. 1047–1064.
- [48] Haurie A., Krawczyk B. J., Zaccour G. *Games and Dynamic Games*. World Scientific Publishing Company. 2012.
- [49] Hoel, M. Emission Taxes in a Dynamic International Game of CO<sub>2</sub> Emissions // *Conflicts and Cooperation in Managing Environmental Resources. Microeconomic Studies*. Springer, Berlin, Heidelberg. 1992.

- [50] Herrmann F. F., Barbosa-Povoa A. P., Butturi M. A., Marinelli S., Sellitto M. A. Green Supply Chain Management: Conceptual Framework and Models for Analysis // Sustainability. 2021. Vol. 13. N. 15:8127.
- [51] Ji J., Zhang Z., Yang L. Carbon emission reduction decisions in the retail-/dual-channel supply chain with consumers' preference // Journal of Cleaner Production. 2016. Vol. 141. P. 852–867.
- [52] Jorgensen S. A dynamic game of waste management // Journal of Economic Dynamics and Control. 2010. Vol. 34. N. 2. P. 258–265.
- [53] Jorgensen S., Martin-Herran G., Zaccour G. Dynamic games in the economics and management of pollution // Environ Model Assess. 2010. Vol. 15. P. 433–467.
- [54] Keisler J. M., Collier Z. A., Chu E., Nina S., Igor L. Value of information analysis: the state of application // Environment Systems and Decisions. 2014. Vol. 34. P. 3–23.
- [55] Koczy L. A. Partition Function Form Games. Springer Cham. 2018.
- [56] Kuchesfehani E. K., Parilina E. M., Zaccour G. Revenue and cost sharing contract in a dynamic closed-loop supply chain with uncertain parameters // Annals of Operations Research. 2023. Vol. 322. P. 851–877.
- [57] Laxminarayan R., Macauley M. K. The value of information, Springer Dordrecht. 2012.
- [58] Li C., Gao J., Guo J., Wang J. Low-carbon supply chain decisions considering carbon emissions right pledge financing in different power structures // Energies. 2022. Vol. 15. N. 15:5721.
- [59] Liu J., Hou J., Fan Q., Chen H. China's national ETS: Global and local lessons // Energy Reports. 2022. Vol. 8. N. 6. P. 428–437.
- [60] Long N. V. Pollution Control: A Differential Game Approach // Annals of Operational Research. 1992. Vol. 37. P. 283–296.
- [61] Macauley M. K., The value of information: Measuring the contribution of space-derived earth science data to resource management // Space Policy. 2006. Vol. 22. P. 274–282.

- [62] Marsiglio S., Masoudi N. Reclamation of a resource extraction site: A dynamic game approach // *Metroeconomica*. 2022. Vol. 73. P. 770–802.
- [63] Masoudi N. Designed to be stable: international environmental agreements revisited // *International Environmental Agreements*. 2022. Vol. 22. P. 659–672.
- [64] Masoudi N., Zaccour G. A differential game of international pollution control with evolving environmental costs // *Environment and Development Economics*. 2013. Vol. 18. N. 6. P. 680–700.
- [65] Nash J. The bargaining problem // *Econometrica*. 1950. Vol. 18. P. 155–162.
- [66] Natali H., Yuri Y., Thierry B. On North-South interaction and environmental adaptation // *Journal of Environmental Economics and Policy*. 2020. Vol. 9. N. 3. P. 319–337.
- [67] Nikolai M. B. The Value of Information: Revealingness Plus the Ability to React. VOI meeting, 2021.
- [68] Parilina E., Sedakov A. Stable coalition structures in dynamic competitive environment // Pineau P.O., Sigue S., Taboubi S. (eds) *Games in Management Science. International Series in Operations Research & Management Science*. 2020. Vol 280. P. 381–396.
- [69] Parilina E., Sedakov A. Stochastic approach for determining stable coalition structure // *International Game Theory Review*. 2015. Vol. 17. P. 1–22.
- [70] Parilina E., Sedakov A. Stable Cooperation in a Game with a Major Player // *International Game Theory Review*. 2016. Vol. 18. N. 2. P. 1–20.
- [71] Parilina E., Reddy P. V., Zaccour G. Sustainability of cooperation in dynamic games // *Theory and Applications of Dynamic Games. Theory and Decision Library C*. 2022. Vol 51.
- [72] Petrosjan L. A. Cooperative differential games and their applications // Petrosjan L. A, Danilov. N. N. - Tmosk: Tomsk State University Publishing House. 1985. P. 273.

- [73] Petrosjan L. A., Danilov N. A. Time-consistent solutions of non-antagonistic differential games with transferable payoffs // Vestnik of Leningrad State University. 1979. Vol. 1. P. 46–54. (in Russian)
- [74] Petrosjan L., Zaccour G. Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. Vol. 27. N. 3. P. 381–398.
- [75] Petrosyan L. A. Stability of solutions of differential games with many participants // Vestnik of Leningrad State University. 1977. Vol. 19. P. 46–52.
- [76] Petrosyan L. The Shapley value for differential games // Olsder, G.J. (eds) New Trends in Dynamic Games and Applications. Annals of the International Society of Dynamic Games. 1995. Vol 3.
- [77] Petrosyan L. A., Zaccour G. (2018) Cooperative Differential Games with Transferable Payoffs // Başar, T., Zaccour, G. (eds) Handbook of Dynamic Game Theory. 2018.
- [78] Pontryagin L., Boltyanskii V., Gamkrelidze R., Mishchenko E. The Mathematical Theory of Optimal Processes. Interscience: New York, USA. 1962.
- [79] Pontryagin L. S. Mathematical theory of optimal processes. Moscow: Science. 1961.
- [80] Raiffa H., Schlaifer R. Applied statistical decision theory. New York, Wiley. 1961.
- [81] Glazer R. Measuring the Value of Information: The Information-Intensive Organization // IBM Systems Journal. 1993. Vol. 32. N. 1. P. 99–110.
- [82] Rettieva A. N. Stable coalition structure in bioresource management problem // Ecological Modelling. 2012. Vol. 235-236. P. 102-118.
- [83] Shannon C. E. A mathematical theory of communication // Bell System Technical Journal. 1948. Vol. 27. N. 3. P. 379–423.
- [84] Shapley L. S. Notes on the n-Person Game - II: The Value of an n-Person Game. Santa Monica, California. 1951.

- [85] Shevkoplyas E. The Shapley value in cooperative differential games with random duration // Breton, M., Szajowski, K. (eds.) *Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games*. 2011. Vol. 11.
- [86] Straub D. Value of information analysis with structural reliability methods // *Structural Safety*. 2014. Vol. 49. P. 75–85.
- [87] Su S., Tur A. Estimation of Initial Stock in Pollution Control Problem // *Mathematics*. 2022. Vol. 10. N. 19:3457.
- [88] Su S., Parilina E. M. Can partial cooperation between developed and developing countries be stable? // *Operations Research Letters*. 2023. Vol. 51. N. 3. P. 370–377.
- [89] Su S., Parilina E. M. Trade-Off Mechanism to Sustain Cooperation in Pollution Reduction // Khachay, M., Kochetov, Y., Ereemeev, A., Khamisov, O., Mazalov, V., Pardalos, P. (eds) *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2023. Lecture Notes in Computer Science*. 2023. Vol. 13930.
- [90] Su S., Parilina E. M. Designing Stable Coalition Structures for International Environmental Agreements. 2023. (submitted, under review)
- [91] Sun F., Parilina E. M., Gao H. Individual stability of coalition structures in three-person games // *Automation and Remote Control*. 2021. Vol. 82. N. 6. P. 1083–1094.
- [92] Sun J., Tan D. Non-cooperative mode, cost-sharing mode, or cooperative mode: which is the optimal mode for desertification control? // *Computational Economics*. 2021. Vol. 61. N. 3. P. 975–1008.
- [93] Tahvonen O. Carbon Dioxide Abatement as a Differential Game // *European Journal of Political Economy*. 1994. Vol. 10. N. 4. P. 685–705.
- [94] Tur A., Gromova E., Gromov D. On the estimation of the initial stock in the problem of resource extraction // *Mathematics*. 2021. Vol. 9. N. 23:3099.
- [95] van der Ploeg F., de Zeeuw A. J. International aspects of pollution control // *Environmental and Resource Economics*. 1992. Vol. 2. P. 117–139.

- [96] Vasin A. A., Divtsova A. G. A game-theoretic model of agreement on limitation of transboundary air pollution // *Automation and Remote Control*. 2019. Vol. 80. P. 1164–1176.
- [97] Wang L., Xu T., Qin L. A study on supply chain emission reduction level based on carbon tax and consumers' low-carbon preferences under stochastic demand // *Mathematical Problems in Engineering*. 2019. Vol. 2019. P. 1-20.
- [98] Wu H., Sun Y., Su Y., Chen M., Zhao H., Li Q. Which Is the Best Supply Chain Policy: Carbon Tax, or a Low-Carbon Subsidy? // *Sustainability*. 2022. Vol. 14. N. 10:6312.
- [99] Xepapadeas A. Induced Technical Change and International Agreements under Greenhouse Warming // *Resource and Energy Economics*. 1995. Vol. 17. N. 1. P. 1–23.
- [100] Ye T., Guan Z., Tao J., Qu Y. Dynamic optimization and coordination about joint emission reduction in a supply chain considering consumer preference to low carbon and reference low-carbon level effect // *Chinese Journal of Management Science*. 2017. Vol. 25. P. 52–61.
- [101] Yeung D. W. K., Petrosyan L. A. A cooperative stochastic differential game of transboundary industrial pollution // 2008. *Automatica*. Vol. 44. P. 1523–1544.
- [102] Yokota F, Thompson K. M. Value of information analysis in environmental health risk management decisions: past, present, and future // *Risk Analysis*. 2004. Vol. 24. N. 3. P. 635-650.
- [103] Yu W., Xin B. Governance mechanism for global greenhouse gas emissions: a stochastic differential game approach // *Mathematical Problems in Engineering*. 2013. Vol. 2013.
- [104] Zaccour G. Time consistency in cooperative differential games: a tutorial // *INFOR: Information Systems and Operational Research*. 2008. Vol. 46. P. 81–92.
- [105] Zagonari F. International pollution problems: unilateral initiatives by environmental groups in one country // *Journal of Environmental Economics and Management*. Vol. 1998. Vol. 36. P. 46–69.



- [106] Zhang G., Zhang X., Sun H., Zhao X. Three-Echelon Closed-Loop Supply Chain Network Equilibrium under Cap-and-Trade Regulation // Sustainability. 2021. Vol. 13. N. 11:6472.
- [107] Zhao R., Neighbour G., Han J., McGuire M., Deutz P. Using game theory to describe strategy selection for environmental risk and carbon emissions reduction in the green supply chain // Journal of Loss Prevention in the Process Industries. 2012. Vol. 25. N. 6. P. 927–936.
- [108] Zhu Q., Dou Y. A game model for green supply chain management based on government subsidies // Chinese Journal of Management Science. 2011. Vol. 14. P. 86–95.
- [109] China Global Television Network, China to continue green transition toward carbon peak and neutrality. [<https://news.cgtn.com/news/2022-10-21/China-to-continue-green-transition-toward-carbon-peak-and-neutrality-1ejn24Q034Y/index.html>] (last visited Sep. 07, 2023)
- [110] The United Nations. UN climate report: It’s “now or never” to limit global warming to 1.5 degrees. [<https://news.un.org/en/story/2022/04/1115452>] (last visited Sep. 07, 2023)
- [111] The U.S. state government. On the U.S. Withdrawal from the Paris Agreement. [<https://2017-2021.state.gov/on-the-u-s-withdrawal-from-the-paris-agreement/index.html>] (last visited Sep. 07, 2023)
- [112] World Economic Forum, These developing countries are leading the way on renewable energy [<https://www.weforum.org/agenda/2022/07/renewables-are-the-key-to-green-secure-affordable-energy>] (last visited Sep. 07, 2023)