

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

На правах рукописи

СЕВОСТЬЯНОВ Руслан Андреевич

**МНОГОЦЕЛЕВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ
С КОМПЕНСАЦИЕЙ ЗАПАЗДЫВАНИЯ**

Научная специальность

2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент М.В. Сотникова

г. Санкт-Петербург

2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. Актуальность, цели и основные результаты диссертации	4
2. Краткое содержание работы	10
ГЛАВА 1. ВОПРОСЫ МНОГОЦЕЛЕВОГО УПРАВЛЕНИЯ С КОМПЕНСАЦИЕЙ ЗАПАЗДЫВАНИЯ	12
1.1. Режимы функционирования объекта управления.....	12
1.2. Многоцелевая структура управления	16
1.3. Применение прогноза для компенсации запаздывания.....	22
1.4. Выводы.....	34
ГЛАВА 2. МНОГОЦЕЛЕВОЕ ВИЗУАЛЬНОЕ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЕ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ	35
2.1. Постановка задачи	35
2.2. Синтез многоцелевого закона управления.....	39
2.3. Компенсация постоянного запаздывания	51
2.4. Позиционирование мобильного робота относительно визуального маркера	53
2.5. Позиционирование неполноприводного робота относительно визуального маркера	60
2.6. Выводы.....	67
ГЛАВА 3. МНОГОЦЕЛЕВОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ НА ОСНОВЕ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ	68
3.1. Постановка задачи	69
3.2. Линеаризация обратной связью	70

3.3. Синтез многоцелевого регулятора.....	71
3.4. Компенсация постоянного запаздывания	81
3.5. Результаты экспериментов.....	84
3.6. Выводы.....	102
ГЛАВА 4. МНОГОЦЕЛЕВОЕ УПРАВЛЕНИЕ СУДНОМ НА ВОЗДУШНОЙ ПОДУШКЕ.....	103
4.1. Суда на воздушной подушке	103
4.2. Постановка задачи.....	109
4.3. Практическая реализация многоцелевого регулятора без учета запаздывания	111
4.4. Практическая реализация компенсирующего многоцелевого регулятора	120
4.5. Выводы	127
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	129
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	130

Введение

1. Актуальность, цели и основные результаты диссертации

Современный уровень развития технологий определяет тот факт, что автоматизация в той или иной степени проникает практически во все области человеческой жизнедеятельности. При этом с каждым годом темпы автоматизации увеличиваются, все больше профессий заменяются трудом машин. В свою очередь, подобный прогресс невозможен без использования систем автоматического управления, базирующихся на применении принципа обратной связи. Особый интерес здесь представляют задачи управления движением различных объектов – мобильных роботов, воздушных беспилотных аппаратов, морских судов, роботов-манипуляторов и т.д. Важно отметить, что развитие промышленности и экономики определяет постоянное ужесточение требований к качеству динамики управляемого движения в различных режимах и при различных условиях. Можно выделить несколько важнейших актуальных направлений исследований в этой области, которые рассматриваются в диссертации.

Прежде всего, к ним относится базовая задача стабилизации движений подвижных объектов. Например, контейнеровозу важно поддерживать заданный курсовой угол при движении по морю с учетом заданных требований к качеству процессов управления. При этом задача дополнительно усложняется за счет возможного наличия внешних возмущений. В этом случае крайне важна такая бортовая система автоматической стабилизации судна по курсу, которая бы позволила доставить груз без повреждений в заданный срок, с минимальными затратами топлива. Отметим, что качество процессов управления в различных режимах функционирования здесь можно существенно повысить за счет учета динамики подвижного объекта.

Второй важной задачей является использование визуальной информации в контуре обратной связи. Как правило, подобные задачи актуальны для автомобильных автопилотов, мобильных роботов на складах и производствах,

а также для воздушных дронов. Указанные типы подвижных объектов оснащаются видеокамерой, жестко закрепленной на корпусе. Задача управления может заключаться, например, в позиционировании робота относительно заданного объекта. При этом необходимо обеспечить требуемое качество процессов управления с учетом влияния внешних возмущений. Здесь также важен учет уравнений динамики подвижного объекта в совокупности с уравнениями, представляющими изменение визуальной информации, для разработки эффективных алгоритмов управления.

Наконец, отдельно отметим задачу управления движением роботоманипуляторов. Здесь особенно важно обеспечить заданную точность и скорость позиционирования, поскольку от этого может зависеть, например, качество сборки автомобиля на автоматизированном конвейере. При этом вибрации корпуса и неучтенная масса груза также действуют на объект управления как внешние возмущения, которые необходимо компенсировать.

Реализация современных систем управления, как правило, осуществляется при помощи цифровых устройств. Это неизбежно приводит к наличию запаздывания в контуре обратной связи. Величина запаздывания может быть достаточно малой, чтобы не оказывать заметного влияния на динамику системы. Однако в некоторых случаях запаздывание может значительно ухудшить качество процессов управления, вплоть до потери устойчивости. Соответственно, зачастую необходимо учитывать наличие запаздывания при проектировании систем управления.

Таким образом, можно выделить основные особенности рассматриваемых в диссертации задач: синтез многоцелевой обратной связи с учетом динамики подвижного объекта, использование визуальной информации, наличие запаздывания управляющего сигнала, оптимизация процессов управления в различных режимах функционирования, а также практическая реализуемость алгоритмов управления на борту подвижного объекта в режиме реального времени.

Задачи анализа и синтеза стабилизирующих обратных связей в целом достаточно глубоко изучены. Например, в трудах В. И. Зубова [17–19], А. А. Красовского [24, 25], А. М. Летова [28–30], Р. Калмана [20, 70], Б. Френсиса [66], Д. Дойла [63] и других выдающихся ученых [1–3, 14, 21, 22, 26, 27, 33, 39, 50, 52, 57, 69, 71, 93] заложены фундаментальные основы оптимизации процессов управления. Вопросы управления подвижными объектами, в том числе морскими судами, широко исследуются в работах Ю.А. Лукомского и В. М. Корчанова [32], Пелевина А.Е. [15, 35], Ю. П. Петрова [36–38], Т. Fossen [64, 65, 75], Т. Perez [83] и других исследователей [4, 13, 37, 91, 96].

Однако опубликованные работы, как правило, касаются отдельных режимов движения. Для учета всего комплекса требований к динамике замкнутой системы в различных режимах функционирования можно отметить методологию синтеза многоцелевой структуры управления, впервые упомянутую в работе [5]. В работах [5–10] эта идея получила свое развитие, а применение многоцелевых регуляторов к задачам стабилизации морских подвижных объектов описано, например, в [99, 100].

Основным преимуществом использования многоцелевой структуры является тот факт, что изначально сложную задачу синтеза регулятора для учета всего комплекса требований во всех возможных режимах можно разбить на отдельные более простые задачи, соответствующие синтезу отдельных элементов многоцелевой структуры. Эти задачи могут быть решены относительно независимо друг от друга, что упрощает процесс синтеза полного регулятора. Отсюда следует еще одно преимущество многоцелевой структуры: отдельные элементы могут быть включены или выключены в зависимости от текущего режима движения, например, для более экономного использования вычислительных ресурсов.

Вопросы использования визуальной информации в контуре обратной связи также довольно широко освещены в литературе. Здесь можно выделить, например, подход Visual Servoing [61, 62, 78]. Суть этого подхода заключается в расчете необходимого вектора скорости движения для

минимизации невязки между текущей и желаемой проекцией некоторого объекта на плоскость изображения. Вопросы отработки заданной скорости, как правило, не рассматриваются в литературе, посвященной Visual Servoing, таким образом, динамика объекта управления не учитывается.

Стабилизация движения с учетом запаздывания является одной из ключевых тем теории управления, Одной из первых теоретических работ по этому направлению является монография [24], а практические вопросы обсуждаются в книге [54]. В работе [16] рассматриваются алгебраические методы исследования динамики систем с запаздыванием. Вопросы устойчивости движения динамических систем по Ляпунову с точки зрения методов, развивающих идеологию применения функционалов Ляпунова-Красовского, приводятся в монографии [72].

На текущий момент можно выделить два основных практических подхода к решению задачи обеспечения устойчивости систем с запаздыванием. Первый подход, описанный в работе [80], основан на применении статической обратной связи для линейных систем с запаздыванием с бесконечномерным спектром, обеспечивающей сдвиг конечного числа крайних правых собственных чисел в левую открытую полуплоскость. Несмотря на простоту структуры обратной связи, процедура синтеза в этом случае обладает рядом недостатков, ограничивающих ее практическое применение.

Идея второго подхода заключается в использовании в обратной связи прогноза состояния системы для компенсации запаздывания. Замкнутая таким регулятором система обладает конечным набором собственных чисел. Эта идея впервые была упомянута в статье [94]. Дальнейшее развитие описано в монографии [79], а обобщение на случай нелинейных систем приведено в работе [73]. Важным вопросом являются детали реализации указанного подхода, а также обобщение на случай применения динамических регуляторов. Подобные вопросы рассматриваются в статье [10], при этом

основной задачей здесь является сохранение передаточной матрицы исходной системы без запаздывания, замкнутой многоцелевым регулятором.

Возможность комбинирования описанных методов: многоцелевого подхода к синтезу законов управления, использования визуальной информации в контуре обратной связи, а также компенсации запаздывания за счет применения прогноза является перспективным направлением проведения исследований и определяет **актуальность** данной работы.

Целью диссертационной работы является проведение исследований, направленных на разработку новых методов синтеза многоцелевых алгоритмов управления подвижными объектами, позволяющих повысить эффективность и качество их функционирования в различных режимах.

Для достижения поставленной цели, в работе рассматриваются следующие конкретные направления исследований:

- разработка методов синтеза многоцелевых законов управления подвижными объектами с компенсацией запаздывания;
- исследование вопросов и разработка методов синтеза многоцелевых регуляторов с использованием визуальной информации для динамического позиционирования подвижных объектов с учетом запаздывания;
- развитие методов синтеза многоцелевых регуляторов для управления подвижными объектами с нелинейными математическими моделями, допускающими возможность линеаризации обратной связью;
- создание программных комплексов для моделирования динамики объектов управления, замкнутых указанными регуляторами, а также проведение численных экспериментов.

В качестве конкретных примеров объектов управления для демонстрации работоспособности предложенных методов используются, в частности, судно на воздушной подушке, мобильный робот с видеокамерой и двухзвенный робот-манипулятор.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработаны новые методы эквивалентного преобразования

многоцелевых регуляторов для компенсации запаздывания в контуре обратной связи.

2. Предложены новые алгоритмы синтеза многоцелевых регуляторов с визуальной информацией в контуре обратной связи в задаче динамического позиционирования подвижных объектов в различных режимах.

3. Построены новые эффективные методы синтеза многоцелевых регуляторов для подвижных объектов на основе метода линеаризации обратной связью.

4. Разработаны алгоритмы многоцелевого управления судном на воздушной подушке с компенсацией запаздывания.

Теоретическая и практическая ценность результатов диссертации.

Теоретическая ценность полученных в диссертации результатов заключается в создании новых методов и алгоритмов синтеза многоцелевых регуляторов для управления подвижными объектами в различных режимах функционирования с учетом внешних возмущений, запаздывания управляющего сигнала и с использованием визуальной информации в контуре обратной связи.

Практическая значимость полученных результатов определяется возможностью бортовой реализации описанных многоцелевых регуляторов на реальных объектах управления, что, в свою очередь, подкреплено результатами численных экспериментов, демонстрирующих эффективность принятого подхода.

Результаты диссертации успешно используются в исследованиях при проектировании систем управления подвижными объектами, в частности морским судном на воздушной подушке и мобильными роботами (Гранты РФФИ № 18-37-00463 мол_а, № 20-07-00531, Контракты СПбГУ № 9.21.1415.2017, № 11456826).

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, докладывались на: XLV международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (Санкт-Петербург, 2014),

XI международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (Москва, 2016), XI международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий», (ПМТУКТ-2018, Воронеж, 2018), III международной научной конференции «Конвергентные когнитивные информационные технологии» (Москва, 2018), IV международной научной конференции «Конвергентные когнитивные информационные технологии» (Москва, 2019), IV международной конференции «Устойчивость и процессы управления» (SCP2020, Санкт-Петербург, Россия, 2020), конференции «Математическая теория управления и ее приложения» (МТУиП-2020, Санкт-Петербург, 2020), VI международной научной конференции «Конвергентные когнитивные информационные технологии» (Москва, 2021), VII международной научной конференции «Конвергентные когнитивные информационные технологии» (Москва, 2022), 22nd International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR, Екатеринбург, 2023), а также на семинарах кафедры компьютерных технологий и систем СПбГУ.

2. Краткое содержание работы

Диссертационная работа изложена на 139 листах и состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 103 наименования.

Введение посвящено краткому изложению рассматриваемой проблематики, а также содержит обзор литературы по теме исследования.

В первой главе описаны основные режимы функционирования подвижных объектов и требования к динамике объектов управления в этих режимах, вводится формальное определение многоцелевого регулятора, обсуждаются вопросы поиска настраиваемых элементов многоцелевой обратной связи, а также представлена методология компенсации запаздывания в канале управления и соответствующей трансформации многоцелевого регулятора.

Вторая глава посвящена вопросам динамического позиционирования подвижных объектов с использованием визуальной информации в контуре обратной связи с учетом запаздывания и внешних возмущений. Разработан подход к синтезу закона управления, основанный на комбинации многоцелевого подхода, идеологии visual servoing, а также компенсации запаздывания. Работоспособность предложенных методов показана на примере численных экспериментов с компьютерной моделью полноприводного омни-колесного мобильного робота с видеокамерой и неполноприводного унициклического робота с видеокамерой.

Третья глава связана с задачей синтеза компенсирующего запаздывание управления подвижными объектами на основе многоцелевого подхода и метода линеаризации обратной связью. Исследуются вопросы компенсации постоянных и полигармонических внешних возмущений. Приводятся результаты численных экспериментов с компьютерной моделью двухзвенного робота-манипулятора.

В четвертой главе в качестве практического приложения для демонстрации эффективности применения разработанного подхода рассматривается решение задачи синтеза многоцелевой обратной связи с компенсацией запаздывания для судна на воздушной подушке, а также приводятся результаты численных экспериментов.

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в **17** печатных работах, **3** из которых опубликованы в журналах, входящих в Перечень рецензируемых изданий, рекомендованных для публикации материалов, представляющих основные результаты диссертаций, **5** работ опубликованы в изданиях, индексируемых базами Web of Science СС и Scopus, а также **9** работ – в изданиях, индексируемых базой РИНЦ.

Глава 1. Вопросы многоцелевого управления с компенсацией запаздывания

В данной главе рассматриваются основные вопросы синтеза многоцелевых регуляторов для стабилизации движения подвижных объектов с учетом запаздывания управляющего сигнала. Запаздывание неизбежно присутствует в реальных физических системах управления и в общем случае приводит к потере качества динамики, вплоть до потери устойчивости. Многоцелевые регуляторы оказываются полезными в том случае, когда постановка задачи подразумевает наличие целого ряда требований к динамике управляемого движения в различных режимах. Особая трансформация многоцелевого регулятора, синтезированного для системы без запаздывания, позволяет обеспечить компенсацию запаздывания с сохранением исходной передаточной матрицы.

Первый параграф посвящен основным режимам функционирования подвижных объектов, представляющим интерес в рамках данной работы, и требованиям к динамике объекта управления в этих режимах. Во втором параграфе вводится описание многоцелевой структуры управления и общего подхода к поиску ее настраиваемых элементов. Наконец, в последнем параграфе представлен подход к компенсации запаздывания за счет использования прогноза состояния объекта управления.

1.1. Режимы функционирования объекта управления

Рассмотрим произвольный подвижный объект, нелинейная динамика которого описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\delta}}, \bar{\mathbf{d}}_e), \\ \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\delta}}),\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $\bar{\mathbf{x}} \in E^n$ – вектор состояния объекта, включающий в себя компоненты линейной и угловой скоростей, $\bar{\boldsymbol{\delta}} \in E^m$ – вектор управляющих воздействий

(отклонений органов управления от нейтрального положения), $\bar{\mathbf{d}}_e \in E^{n_d}$ – вектор возмущающих воздействий, \mathbf{F} – векторная функция, все компоненты которой являются непрерывно дифференцируемыми по совокупности аргументов, $\bar{\mathbf{y}} \in E^k$ – вектор измерений, \mathbf{S} – векторная функция.

Будем считать, что для системы (1.1) определена обратная связь путем задания некоторого оператора \mathbf{U} от вектора измерений в виде

$$\bar{\delta} = \mathbf{U}(\bar{\mathbf{y}}). \quad (1.2)$$

Перечислим основные режимы функционирования и требования к динамике объекта управления в этих режимах. Обязательным условием для всех режимов является обеспечение асимптотической устойчивости движения. Для формализации требований к динамике зададим на движениях системы (1.1), (1.2) обобщенный функционал качества

$$J = J(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\delta}) = J(\mathbf{U}), \quad (1.3)$$

конкретная форма которого зависит от текущего режима функционирования.

1) Режим *собственного движения* характеризуется отсутствием внешнего возмущения и нулевыми начальными условиями. Целью управления является обеспечение перехода системы из начального положения в положение равновесия, определяемое постоянным задающим сигналом \mathbf{r} , подаваемым в контур обратной связи. Требования к динамике в этом режиме являются самыми важными.

Введем в рассмотрение вспомогательную скалярную функцию с нормой в смысле евклидова пространства

$$\rho(t) = \|\bar{\mathbf{y}}(t)\|,$$

заданную при $t \in [0, \infty)$. Одним из вариантов представления функционала (1.3) может являться величина перерегулирования по переменной ρ в виде

$$J_1 = \frac{\rho_m - \rho_r}{\rho_r}, \quad (1.4)$$

где $\rho_r = \|\mathbf{r}\|$, $\rho_m = \sup_{t \in [0, \infty)} \rho(t)$.

Помимо (1.4) введем в рассмотрение еще один функционал

$$T_p = \inf \{t_m : \rho(t) \in M(\rho_r, \Delta), \forall t \geq t_m\}, \quad (1.5)$$

где $M(\rho_r, \Delta) = \{\rho : \|\rho - \rho_r\| / \|\rho_r\| \leq \Delta\}$, Δ – фиксированное вещественное число. Функционал (1.5), по сути, определяет быстродействие замкнутой системы. На рис. 1.1 продемонстрировано схематичное представление сущности приведенных функционалов (1.4) и (1.5).

Выбранные значения настраиваемых элементов обратной связи должны доставлять одновременный минимум функционалов (1.4) и (1.5) на таком множестве, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость положения равновесия замкнутой системы. В частности, возможно введение более строгого требования о расположении корней характеристического полинома линейного приближения замкнутой системы в некоторой заданной области открытой левой комплексной полуплоскости.

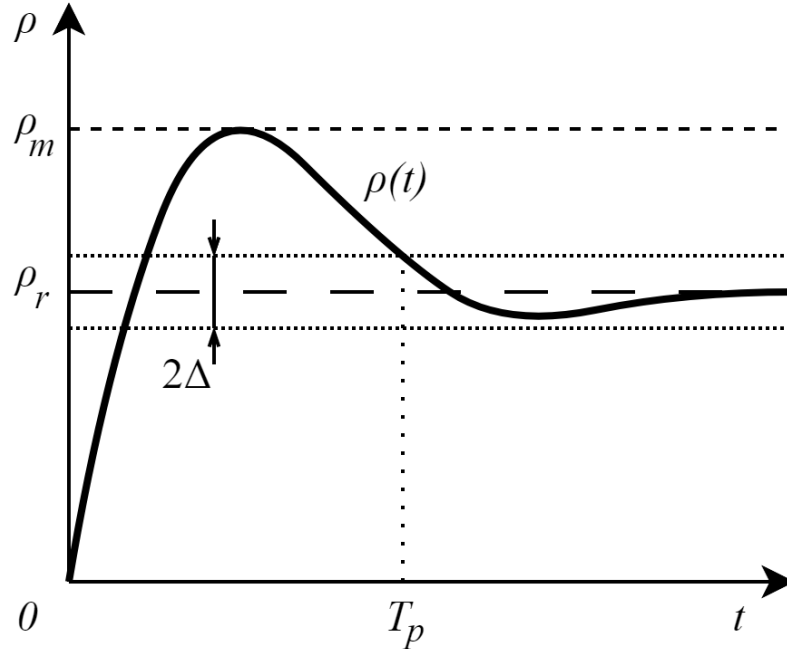


Рис. 1.1. Наглядное представление перерегулирования и быстродействия.

Заметим, что одновременное достижение минимума функционалов (1.4) и (1.5) на практике чаще всего невозможно, в связи с чем настраиваемые

элементы закона управления выбираются с учетом желаемых ограничений указанных функционалов

$$J_1 \leq J_{10}, T_p \leq T_{p0},$$

где постоянные числа J_{10} и T_{p0} задаются из практических соображений.

2) Режим движения под воздействием *постоянного внешнего возмущения* $\bar{\mathbf{d}}_e(t) = \bar{\mathbf{d}}_{e0}$ (например, бокового ветра или морского течения) при нулевых начальных условиях. В этом режиме отсутствует задающий сигнал, а целью управления является обеспечение астатизма замкнутой системы, т.е. выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t) = 0$$

для любого вектора $\bar{\mathbf{d}}_{e0}$.

Зададим на движениях замкнутой системы функционал, определяющий максимальное отклонение по управляемым переменным

$$\rho_p = \max_{t \in [0, \infty)} \rho(t).$$

Фактически, необходимо обеспечить минимальное значение «провала» регулируемых координат при воздействии ступенчатого возмущения, не ухудшив при этом качество функционирования системы управления в предыдущем режиме.

3) Режим движения под воздействием *периодического внешнего возмущения* (например, морского волнения или неровности дороги). Начальные условия в этом режиме нулевые, а задающий сигнал отсутствует. Целью управления является минимизация влияния возмущения на реакцию управляющего сигнала для экономии ресурса исполнительных органов. В качестве функционала качества здесь может выступать норма передаточной матрицы от возмущения к управляющему сигналу.

1.2. Многоцелевая структура управления

Определим некоторое контролируемое движение объекта управления путем задания вектор-функций $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_c(t)$, $\bar{\boldsymbol{\delta}} = \bar{\boldsymbol{\delta}}_c(t)$ и $\bar{\mathbf{d}}_e = \bar{\mathbf{d}}_c(t)$, удовлетворяющих системе (1.1):

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_c = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_c, \bar{\boldsymbol{\delta}}_c, \bar{\mathbf{d}}_c). \quad (1.6)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}_c(t), \quad \boldsymbol{\delta}(t) = \bar{\boldsymbol{\delta}}(t) - \bar{\boldsymbol{\delta}}_c(t), \quad \mathbf{d}(t) = \bar{\mathbf{d}}_e(t) - \bar{\mathbf{d}}_c(t)$$

для отклонений значений переменных системы (1.1) от заданного движения. С учетом (1.1) и (1.6) динамику указанных отклонений можно описать при помощи системы уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{d}), \quad (1.7)$$

где

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{d}) = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_c + \mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\delta}}_c + \boldsymbol{\delta}, \bar{\mathbf{d}}_c + \mathbf{d}) - \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_c, \bar{\boldsymbol{\delta}}_c, \bar{\mathbf{d}}_c),$$

откуда видно, что система (1.7) находится в положении равновесия при нулевых значениях переменных \mathbf{x} , $\boldsymbol{\delta}$ и \mathbf{d} .

Выполним линеаризацию системы (1.7) в окрестности нулевого положения равновесия. В результате получим

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}\mathbf{d}, \quad (1.8)$$

считая при этом, что исходная модель объекта управления такова, что матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{H} линеаризованной системы (1.8) постоянны.

Предположим, что в общем случае полный вектор состояния недоступен для измерения. В связи с этим добавим к системе (1.8) уравнения выхода

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (1.9)$$

где $\mathbf{y} \in E^k$ – вектор измерений, \mathbf{C} – матрица с постоянными компонентами.

Также предположим, что приводы исполнительных органов обладают собственной линейной динамикой вида

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{u}, \quad (1.10)$$

где $\mathbf{u} \in E^m$ – управляющий сигнал, который непосредственно подается на вход объекта управления.

Рассмотрим линейные уравнения динамики подвижного объекта (1.8) – (1.10) без запаздывания с учетом вектора измерений и линейным уравнением динамики приводов исполнительных устройств:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{B}\delta + \mathbf{Hd}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}, \\ \dot{\delta} &= \mathbf{u}.\end{aligned}\tag{1.11}$$

В общем виде многоцелевая структура закона управления для системы (1.11) включает в себя следующие элементы [7]:

$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{B}\delta + \mathbf{G}(\mathbf{y} - \mathbf{Cz})$ – уравнение асимптотического наблюдателя;

$$\xi = \mathbf{F}\left(\frac{d}{dt}\right)(\mathbf{y} - \mathbf{Cz}) \text{ – уравнение корректирующего устройства;}\tag{1.12}$$

$$\mathbf{u} = \mu\dot{\mathbf{z}} + \nu\mathbf{y} + \xi \text{ – уравнение скоростного управляющего сигнала.}\tag{1.13}$$

Асимптотический наблюдатель используется в основном для решения двух задач. Прежде всего, в случае, когда размерность вектора измерений меньше размерности вектора состояния, но система полностью наблюдаема, наблюдатель обеспечивает оценку полного вектора состояния системы. Помимо этого, выбор матрицы \mathbf{G} влияет на динамику замкнутой системы, в том числе определяет реакцию на постоянные внешние возмущения.

Динамический корректор (1.12) также может быть использован в нескольких целях в зависимости от выбора настраиваемых элементов. В основном можно выделить два режима работы корректора при условии наличия внешних периодических возмущений (например, морского волнения). В первом режиме корректор обеспечивает минимизацию влияния возмущения на измеряемые параметры системы, выступая в роли оптимального динамического компенсатора. Во втором режиме корректор является оптимальным динамическим фильтром, минимизируя реакцию исполнительных органов на возмущение. Это позволяет, например, обеспечить увеличение ресурса износоустойчивости рулей и экономию

топлива для морских судов в случае движения в условиях развитого волнения.

Наиболее важной частью многоцелевого регулятора является уравнение скоростного закона (1.13). Этот элемент обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы, а также заданные характеристики качества динамики управляемого движения в условиях отсутствия и при наличии внешних возмущений. Уравнение (1.13) можно преобразовать к эквивалентному позиционному закону управления по выходу асимптотического наблюдателя в виде [7]

$$\mathbf{u} = \mathbf{kz} + \mathbf{k}_0\delta + \mathbf{v}_0\mathbf{y} + \xi, \quad (1.14)$$

где $\mathbf{k} = \mu(\mathbf{A} - \mathbf{GC})$, $\mathbf{k}_0 = \mu\mathbf{B}$, $\mathbf{v}_0 = \mu\mathbf{G} + \mathbf{v}$.

Далее будем использовать закон управления в виде (1.14), поскольку такая форма является наиболее предпочтительной для учета запаздывания управляющего сигнала, которое описывается в следующих параграфах.

Отметим, что в процессе синтеза оптимального управления поиску подлежат постоянные матрицы \mathbf{G} , μ , \mathbf{v} , а также передаточная матрица корректора \mathbf{F} . Поиск осуществляется в зависимости от заданных требований к динамике объекта в различных режимах, в том числе в условиях присутствия внешних возмущений.

Обратим внимание на тот факт, что уравнение динамического корректора (1.12) можно преобразовать к линейной системе

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \alpha\mathbf{p} + \beta(\mathbf{y} - \mathbf{cz}), \\ \xi &= \gamma\mathbf{p} + \mathbf{m}_f(\mathbf{y} - \mathbf{cz}), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где $\mathbf{p} \in E^{n_1}$ – вектор состояния корректора, $\xi \in E^m$ – его выходной вектор (размерность вектора должна совпадать с размерностью вектора δ отклонений исполнительных органов), α , β , γ , \mathbf{m}_f – постоянные матрицы, удовлетворяющие условию

$$\gamma(\mathbf{E}_{n_1}s - \alpha)^{-1}\beta + \mathbf{m}_f \equiv \mathbf{F}(s).$$

Принимая во внимание (1.14) и (1.15), уравнения многоцелевой структуры закона управления можно представить в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\delta + \mathbf{G}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{z}), \\ \dot{\mathbf{p}} &= \alpha\mathbf{p} + \beta(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{z}), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{k}\mathbf{z} + \mathbf{k}_0\delta + \mathbf{v}_0\mathbf{y} + \xi.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Поскольку современные системы управления подлежат реализации на цифровых бортовых вычислительных устройствах, прямое использование непрерывной системы (1.16) на объекте управления невозможно. В связи с отмеченным обстоятельством зададим некоторый период дискретизации T_d и преобразуем регулятор (1.16) к системе линейных разностных уравнений

$$\begin{aligned}\mathbf{z}[n+1] &= \mathbf{A}_d\mathbf{z}[n] + \mathbf{B}_d\delta[n] + \mathbf{G}_d(\mathbf{y}[n] - \mathbf{C}\mathbf{z}[n]), \\ \mathbf{p}[n+1] &= \alpha_d\mathbf{p}[n] + \beta_d(\mathbf{y}[n] - \mathbf{C}\mathbf{z}[n]), \\ \mathbf{u}[n] &= \mathbf{k}\mathbf{z}[n] + \mathbf{k}_0\delta[n] + \mathbf{v}_0\mathbf{y}[n] + \xi[n],\end{aligned}$$

подлежащей непосредственной реализации на борту управляемого подвижного объекта.

Обсудим вопросы синтеза элементов многоцелевой структуры. Первостепенной задачей является поиск коэффициентов обратной связи (1.14), которые однозначно определяются параметрами базового закона управления

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_x(\mathbf{x} - \mathbf{r}) + \mathbf{K}_\delta\delta,\tag{1.17}$$

где $\mathbf{r} \in \mathbf{E}^n$ – заданный фиксированный вектор командного сигнала, \mathbf{K}_x и \mathbf{K}_δ – постоянные искомые матрицы. Обратная связь в виде (1.17) не подлежит непосредственной реализации, но является основой для решения дальнейших задач.

Коэффициенты закона (1.17) находятся исходя из требований к качеству динамики собственного движения объекта управления. Это наиболее приоритетные требования, выполнение которых обязательно для любого режима функционирования системы управления.

Следующим шагом является переход к скоростному закону управления для обеспечения астатизма замкнутой системы. В общем случае этот переход достаточно сложен, однако в частных случаях подход к выводу формул скоростного закона может быть существенно упрощен [11, 12]. Процедура поиска настраиваемых элементов будет продемонстрирована, в частности, в четвертой главе для задачи стабилизации судна на воздушной подушке.

Далее поиску подлежит матрица \mathbf{G} коэффициентов асимптотического наблюдателя, исходя из требований к динамике управляемого движения при воздействии внешних ступенчатых возмущений. В этом режиме будем считать, что командный сигнал нулевой.

Наконец, финальным искомым элементом многоцелевой структуры является передаточная матрица корректора $\mathbf{F}(s)$. В данной работе основным требованием, определяющим значение этой матрицы, является минимизация интенсивности управляющего сигнала при наличии внешних периодических возмущений.

Формализуем задачу поиска передаточной матрицы $\mathbf{F}(s)$. Заметим, что канал исполнительных органов в замкнутой системе (1.11), (1.16) является ЛТИ-системой, на вход которой поступают измерения \mathbf{y} , а выходом является вектор δ состояния приводов рулей. При этом можно считать, что эта система сама замкнута динамическим корректором как обратной связью. Объектом управления здесь является основная часть канала управления в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\delta + \mathbf{G}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{z}), \\ \dot{\delta} &= \mathbf{k}\mathbf{z} + \mathbf{k}_0\delta + \mathbf{v}_0\mathbf{y} + \xi.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Считая, что входом основной части является вектор $\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \xi \end{pmatrix}$, добавим к системе

(1.18) уравнения выхода по вектору $\begin{pmatrix} \delta \\ \zeta \end{pmatrix}$, где $\zeta = \mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{z}$, тогда в пространстве

состояний модель основной части канала исполнительных органов можно представить в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\boldsymbol{\delta}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{GC} & \mathbf{B} \\ \mathbf{k} & \mathbf{k}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{v}_0 & \mathbf{E}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{E}_m \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0}_{k \times m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{m \times k} & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \mathbf{E}_k & \mathbf{0}_{k \times m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В частотной области система (1.19) выглядит как

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix} = \mathbf{T}(s) \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11}(s) & \mathbf{T}_{12}(s) \\ \mathbf{T}_{21}(s) & \mathbf{T}_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

где $\mathbf{T}(s)$ – передаточная матрица основной части канала исполнительных органов. В явном виде эта матрица выражается через постоянные матрицы системы (1.19) как

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{E}_m \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0}_{k \times m} \end{pmatrix} \left(\mathbf{E}_{n+m} s - \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{GC} & \mathbf{B} \\ \mathbf{k} & \mathbf{k}_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{v}_0 & \mathbf{E}_m \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{m \times k} & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \mathbf{E}_k & \mathbf{0}_{k \times m} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При замыкании системы (1.20) корректирующим устройством получим уравнения

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11}(s) & \mathbf{T}_{12}(s) \\ \mathbf{T}_{21}(s) & \mathbf{T}_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\xi} &= \mathbf{F}(s) \boldsymbol{\zeta}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Исключим внутренние переменные $\boldsymbol{\zeta}$ и $\boldsymbol{\xi}$ из (1.21) и получим передаточную матрицу от входа \mathbf{y} к выходу $\boldsymbol{\delta}$

$$\mathbf{F}_{y\delta}(s) = \mathbf{T}_{11}(s) + \mathbf{T}_{12}(s) \mathbf{F}(s) [\mathbf{E}_k - \mathbf{T}_{22}(s) \mathbf{F}(s)]^{-1} \mathbf{T}_{21}(s).$$

Далее введем в рассмотрение функционал

$$J_2 = J_2(\mathbf{F}) = \|\mathbf{F}_{y\delta}(s, \mathbf{F})\|,$$

заданный на множестве Ω матриц $\mathbf{F}(s)$ с правильными дробно-рациональными компонентами, корни знаменателей которых лежат в левой

открытой полуплоскости. Тогда минимизация интенсивности управления сводится к решению оптимизационной задачи

$$J_2(\mathbf{F}) \rightarrow \min_{\mathbf{F} \in \Omega}, J_{20} = \min_{\mathbf{F} \in \Omega} J_2(\mathbf{F}), \mathbf{F}(s) = \arg \min_{\mathbf{F} \in \Omega} J_2(\mathbf{F}).$$

Отметим здесь также, что в частных случаях задача оптимального поиска передаточной матрицы корректора существенно упрощается за счет ряда допущений, что будет показано в четвертой главе на примере задачи управления судном на воздушной подушке.

1.3. Применение прогноза для компенсации запаздывания

Теперь обратимся к задаче стабилизации объекта управления при условии наличия постоянного запаздывания в канале управления. Для демонстрации общей идеи предлагаемого подхода рассмотрим сначала простейший вариант решения задачи. Введем в рассмотрение линеаризованную систему (1.8), (1.9) без учета динамики приводов, добавив постоянное запаздывание h в канал управления и внешнего возмущения:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta(t-h) + \mathbf{H}d(t-h), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Рассмотрим совместно с системой (1.22) вспомогательный ЛТИ-объект без запаздывания по управлению

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta + \mathbf{H}d(t-h), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Для системы (1.23) построим стабилизирующее управление вида

$$\delta = \mathbf{K}\mathbf{x}, \quad (1.24)$$

обеспечивая гурвицевость матрицы $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}$. Уравнения замкнутой системы (1.23), (1.24) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{H}d(t-h), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Теперь вернемся к исходной системе с запаздыванием (1.22) и поставим задачу компенсации запаздывания, т.е. поиск такого управления

$$\delta = \mathfrak{R}(\mathbf{x}, \mathbf{d}), \quad (1.26)$$

что замкнутая система (1.22), (1.26) принимает вид (1.25). Поставленная проблема для систем с запаздыванием в литературе также получила название задачи назначения конечного спектра [81]. Известно (например, [73]), что решение задачи обеспечивается выбором управления (1.26) в виде

$$\delta(t-h) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t),$$

или в эквивалентной форме

$$\delta(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t+h). \quad (1.27)$$

Очевидно, что прямая реализация управления (1.27) в общем случае невозможна из физических соображений, поскольку для этого требуется знание будущего состояния объекта управления в момент времени $t+h$. Тем не менее, поскольку в качестве объекта управления выступает ЛТИ-система, возможно применение формулы Коши для вычисления прогноза будущего состояния системы.

Теорема 1.1. *Если матрица \mathbf{A} является гурвицевой, то динамический регулятор*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_p &= \mathbf{A}\mathbf{z}_p + \mathbf{B}\delta + \mathbf{H}\mathbf{d}, \\ \delta &= \mathbf{K}e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{z}_p - \mathbf{K}e^{\mathbf{A}h}\mathbf{z}_p(t-h) \end{aligned} \quad (1.28)$$

эквивалентен регулятору (1.27).

Доказательство. Зная текущий вектор $\mathbf{x}(t)$ и векторы $\delta(t)$ и $\mathbf{d}(t)$, заданные на отрезке $t \in [t-h, t]$, по формуле Коши получим

$$\mathbf{x}(t+h) = e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x}(t) + e^{\mathbf{A}h} \int_t^{t+h} e^{-\mathbf{A}(\tau-t)} [\mathbf{B}\delta(\tau-h) + \mathbf{H}\mathbf{d}(\tau-h)] d\tau. \quad (1.29)$$

Далее преобразуем представление прогноза в виде (1.29). Введем в рассмотрение вспомогательную векторную переменную $\mathbf{z}_p \in E^n$:

$$\mathbf{z}_p(t) = e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\theta} [\mathbf{B}\delta(\theta) + \mathbf{H}\mathbf{d}(\theta)] d\theta.$$

Рассмотрим тождество

$$\int_0^t e^{-\mathbf{A}\theta} [\mathbf{B}\delta(\theta) + \mathbf{Hd}(\theta)] d\theta \equiv \int_0^{t-h} e^{-\mathbf{A}\theta} [\mathbf{B}\delta(\theta) + \mathbf{Hd}(\theta)] d\theta +$$

$$+ \int_{t-h}^t e^{-\mathbf{A}\theta} [\mathbf{B}\delta(\theta) + \mathbf{Hd}(\theta)] d\theta,$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+h) &= e^{\mathbf{A}h} \mathbf{x}(t) + e^{\mathbf{A}h} \int_t^{t+h} e^{-\mathbf{A}(\tau-t)} [\mathbf{B}\delta(\tau-h) + \mathbf{Hd}(\tau-h)] d\tau = \\ &= e^{\mathbf{A}h} \mathbf{x}(t) + e^{\mathbf{A}t} \int_{t-h}^t e^{-\mathbf{A}\theta} [\mathbf{B}\delta(\theta) + \mathbf{Hd}(\theta)] d\theta = \\ &= e^{\mathbf{A}h} \mathbf{x}(t) + e^{\mathbf{A}t} \left[\int_0^t e^{-\mathbf{A}\theta} [\dots] d\theta - \int_0^{t-h} e^{-\mathbf{A}\theta} [\dots] d\theta \right] = e^{\mathbf{A}h} \mathbf{x}(t) + \\ &+ e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\theta} [\dots] d\theta - e^{-\mathbf{A}h} e^{\mathbf{A}h} e^{\mathbf{A}t} \int_0^{t-h} e^{-\mathbf{A}\theta} [\dots] d\theta = e^{\mathbf{A}h} \mathbf{x}(t) + \\ &+ e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\theta} [\mathbf{B}\delta(\theta) + \mathbf{Hd}(\theta)] d\theta - e^{\mathbf{A}h} e^{\mathbf{A}(t-h)} \int_0^{t-h} e^{-\mathbf{A}\theta} [\mathbf{B}\delta(\theta) + \mathbf{Hd}(\theta)] d\theta = \\ &= e^{\mathbf{A}h} \mathbf{x}(t) + \mathbf{z}_p(t) - e^{\mathbf{A}h} \mathbf{z}_p(t-h). \end{aligned}$$

Таким образом, прогноз (1.28) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{x}(t+h) \equiv \mathbf{z}_p(t) + e^{\mathbf{A}h} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}_p(t-h)]. \quad (1.30)$$

Принимая во внимание (1.30), перепишем формулу обратной связи по прогнозу (1.27) в форме

$$\delta = \mathbf{K}e^{\mathbf{A}h} \mathbf{x} + \mathbf{Kz}_p - \mathbf{K}e^{\mathbf{A}h} \mathbf{z}_p(t-h). \quad (1.31)$$

Поскольку, как отмечено в ряде работ (например, [73]) непосредственная реализация обратной связи в виде (1.31) сопряжена с рядом значительных проблем, связанных с численным интегрированием, трансформируем полученное представление прогноза (1.30). Найдем производную вспомогательной переменной \mathbf{z}_p :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_p(t) &= \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\theta} [\mathbf{B}\delta(\theta) + \mathbf{Hd}(\theta)] d\theta + e^{\mathbf{A}t} e^{-\mathbf{A}t} [\mathbf{B}\delta(t) + \mathbf{Hd}(t)] \equiv \\ &\equiv \mathbf{Az}_p(t) + \mathbf{B}\delta(t) + \mathbf{Hd}(t). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Использование выражения (1.32) позволяет вместо обратной связи (1.31) получить динамический регулятор (1.28), реализация которого на бортовом оборудовании достаточно проста. Однако отметим, что такая замена возможна только в том случае, если матрица \mathbf{A} является гурвицевой. Для доказательства этого факта рассмотрим характеристический полином замкнутой системы

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta(t-h) + \mathbf{H}\mathbf{d}(t-h), \\ \dot{\mathbf{z}}_p &= \mathbf{A}\mathbf{z}_p + \mathbf{B}\delta + \mathbf{H}\mathbf{d}, \\ \delta &= \mathbf{K}e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{z}_p - \mathbf{K}e^{\mathbf{A}h}\mathbf{z}_p(t-h).\end{aligned}\quad (1.33)$$

Будем считать, что $\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$, $\delta(t) = \mathbf{d}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t < 0$. Избавляясь от δ и применяя преобразование Лапласа, получим

$$\begin{aligned}(\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{BK}e^{\mathbf{A}h}e^{-sh})\mathbf{x} + (\mathbf{BK}e^{\mathbf{A}h}e^{-2sh} - \mathbf{BK}e^{-sh})\mathbf{z}_p &= \mathbf{H}\mathbf{d}e^{-sh}, \\ -\mathbf{BK}e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x} + (\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{BK} + \mathbf{BK}e^{\mathbf{A}h}e^{-sh})\mathbf{z}_p &= \mathbf{H}\mathbf{d}.\end{aligned}\quad (1.34)$$

Таким образом, характеристический полином системы (1.33) можно записать в виде

$$\Delta(s) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{BK}e^{\mathbf{A}h}e^{-sh} & \mathbf{BK}e^{\mathbf{A}h}e^{-2sh} - \mathbf{BK}e^{-sh} \\ \hline -\mathbf{BK}e^{\mathbf{A}h} & \mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{BK} + \mathbf{BK}e^{\mathbf{A}h}e^{-sh} \end{array} \right).$$

Умножая вторую строку на e^{-sh} и вычитая из первой, получим

$$\Delta(s) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}s - \mathbf{A} & -\mathbf{E}s e^{-sh} + \mathbf{A}e^{-sh} \\ \hline -\mathbf{BK}e^{\mathbf{A}h} & \mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{BK} + \mathbf{BK}e^{\mathbf{A}h}e^{-sh} \end{array} \right).$$

Теперь умножим первый столбец на e^{-sh} и прибавим ко второму:

$$\Delta(s) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}s - \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{BK}e^{\mathbf{A}h} & \mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{BK} \end{array} \right) = \det(\mathbf{E}s - \mathbf{A}) \det(\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{BK}),$$

откуда видно, что система (1.33) будет устойчивой тогда и только тогда, когда матрица \mathbf{A} является гурвицевой.

Наконец, рассмотрим вопрос об эквивалентности регуляторов (1.27) и (1.28). Передаточная матрица $\mathbf{F}_{dy}(s)$ замкнутой системы (1.22), (1.27) от входа \mathbf{d} к выходу \mathbf{y} описывается выражением

$$\mathbf{F}_{dy}(s) = \mathbf{C}(\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{H}e^{-sh}.$$

Теперь умножим второе уравнение системы (1.34) на e^{-sh} и вычтем из первого, получая

$$(\mathbf{E}s - \mathbf{A})\mathbf{x} - (\mathbf{E}s - \mathbf{A})e^{-sh}\mathbf{z}_p = 0,$$

откуда следует, что $\mathbf{z}_p = \mathbf{x}e^{sh}$. Подставим полученное соотношение во второе уравнение системы (1.34):

$$(\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}e^{sh} = \mathbf{H}d,$$

т.е.

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{H}d e^{-sh},$$

откуда

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{H}d e^{-sh}.$$

Таким образом, передаточная матрица $\mathbf{G}_{dy}(s)$ замкнутой системы (1.22), (1.28) совпадает с передаточной матрицей $\mathbf{F}_{dy}(s)$. ■

Дополнительно отметим, что передаточная матрица $\mathbf{G}_{dy}(s)$ совпадает с передаточной матрицей замкнутой системы (1.25) без запаздывания в канале управления.

Приведенные выше рассуждения касались проблемы компенсации запаздывания в случае статической обратной связи. Однако многоцелевая структура, находящаяся в центре внимания данной главы, является динамическим регулятором, т.е. обладает собственной динамикой. С учетом этого факта рассмотрим обобщение приведенного метода на случай применения произвольного динамического регулятора.

Такое обобщение возможно по следующей причине. Как правило, линейная система уравнений, описывающая динамику подвижного объекта в рассматриваемых режимах (особенно это характерно для морских подвижных объектов), является устойчивой, но не асимптотически, поскольку у матрицы \mathbf{A} есть нулевое собственное число. Однако эту

матрицу можно считать гурвицевой с малой степенью устойчивости, так как использование прогноза в некоторой степени компенсирует динамику объекта управления.

Будем считать, что для вспомогательной системы без запаздывания в канале управления (1.23) синтезирован динамический регулятор по выходу в общем виде:

$$\delta = \mathbf{W}(p)\mathbf{y}, \quad (1.35)$$

где $p = d/dt$.

Регулятор (1.35) можно представить в пространстве состояний при помощи уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \mathbf{A}_k \xi + \mathbf{B}_k \mathbf{y}, \\ \delta &= \mathbf{C}_k \xi + \mathbf{D}_k \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

где $\xi \in E^q$ – вектор состояния регулятора. Постоянные матрицы системы (1.36) удовлетворяют тождеству

$$\mathbf{W}(s) \equiv \mathbf{C}_k (\mathbf{E}_q s - \mathbf{A}_k)^{-1} \mathbf{B}_k + \mathbf{D}_k,$$

где \mathbf{E}_q – единичная матрица размера $q \times q$.

Преобразуем замкнутую систему (1.23), (1.36), исключив переменную δ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{C}_k\xi + \mathbf{H}\mathbf{d}(t-h), \\ \dot{\xi} &= \mathbf{B}_k\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{A}_k\xi. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Далее замкнем систему с запаздыванием (1.22) стабилизирующей обратной связью вида

$$\delta(t) = \mathbf{W}(p)\mathbf{C}\mathbf{x}(t+h), \quad (1.38)$$

сводящей систему (1.22) к виду (1.37). Прогноз состояния системы, как было отмечено в предыдущем параграфе, можно выполнить по формуле (1.30):

$$\mathbf{x}(t+h) \equiv e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x}(t) + \mathbf{z}_p(t) - e^{\mathbf{A}h}\mathbf{z}_p(t-h),$$

При этом динамика векторной функции $\mathbf{z}_p(t)$ определяется уравнением

$$\dot{\mathbf{z}}_p = \mathbf{A}\mathbf{z}_p + \mathbf{B}\delta + \mathbf{H}\mathbf{d}.$$

Подставив прогноз в уравнение (1.38), получим компенсирующий регулятор по выходу

$$\delta(t) = \mathbf{W}(p)\mathbf{C}\left[e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x} + \mathbf{z}_p - e^{\mathbf{A}h}\mathbf{z}_p(t-h)\right].$$

Далее для представления прогноза выхода системы (1.22) введем в рассмотрение вспомогательную переменную

$$\gamma = \mathbf{C}\left(e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x} + \mathbf{z}_p - e^{\mathbf{A}h}\mathbf{z}_p(t-h)\right),$$

которую будем считать входом регулятора (1.35). Добавив к уравнениям регулятора динамику векторной функции $\mathbf{z}_p(t)$, получим обратную связь вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_p &= \mathbf{A}\mathbf{z}_p + \mathbf{B}\delta + \mathbf{H}\mathbf{d}, \\ \dot{\xi} &= \mathbf{A}_k\xi + \mathbf{B}_k\gamma, \\ \delta &= \mathbf{C}_k\xi + \mathbf{D}_k\gamma, \\ \gamma &= \mathbf{C}\left(e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x} + \mathbf{z}_p - e^{\mathbf{A}h}\mathbf{z}_p(t-h)\right) \end{aligned} \quad (1.39)$$

Важно отметить, что обобщенный динамический регулятор (1.39) позволяет компенсировать запаздывание в системе управления, основываясь на обратной связи, стабилизирующей систему без запаздывания, при этом сохраняя передаточную матрицу исходной системы.

Теорема 1.2. *Если матрица \mathbf{A} является гурвицевой, то динамический регулятор (1.39) эквивалентен регулятору (1.38).*

Доказательство. Рассмотрим уравнения замкнутой системы (1.22), (1.39):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta(t-h) + \mathbf{H}\mathbf{d}(t-h), \\ \dot{\mathbf{z}}_p &= \mathbf{A}\mathbf{z}_p + \mathbf{B}\delta + \mathbf{H}\mathbf{d}, \\ \dot{\xi} &= \mathbf{A}_k\xi + \mathbf{B}_k\gamma, \\ \delta &= \mathbf{C}_k\xi + \mathbf{D}_k\gamma, \\ \gamma &= \mathbf{C}\left(e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x} + \mathbf{z}_p - e^{\mathbf{A}h}\mathbf{z}_p(t-h)\right) \end{aligned} \quad (1.40)$$

Избавимся от переменной γ :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}(t-h) + \mathbf{H}\mathbf{d}(t-h), \\
\dot{\mathbf{z}}_p &= \mathbf{A}\mathbf{z}_p + \mathbf{B}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{H}\mathbf{d}, \\
\dot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{A}_k\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}_k\mathbf{C}\left(e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x} + \mathbf{z}_p - e^{\mathbf{A}h}\mathbf{z}_p(t-h)\right), \\
\boldsymbol{\delta} &= \mathbf{C}_k\boldsymbol{\xi} + \mathbf{D}_k\mathbf{C}\left(e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x} + \mathbf{z}_p - e^{\mathbf{A}h}\mathbf{z}_p(t-h)\right).
\end{aligned}$$

Далее подставим выражение для $\boldsymbol{\delta}$ в первые два уравнения:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{C}_k\boldsymbol{\xi}(t-h) + \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}\left(e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{z}_p(t-h) - e^{\mathbf{A}h}\mathbf{z}_p(t-2h)\right) + \mathbf{H}\mathbf{d}(t-h), \\
\dot{\mathbf{z}}_p &= \mathbf{A}\mathbf{z}_p + \mathbf{B}\mathbf{C}_k\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}\left(e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x} + \mathbf{z}_p - e^{\mathbf{A}h}\mathbf{z}_p(t-h)\right) + \mathbf{H}\mathbf{d}, \\
\dot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{A}_k\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}_k\mathbf{C}\left(e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x} + \mathbf{z}_p - e^{\mathbf{A}h}\mathbf{z}_p(t-h)\right).
\end{aligned}$$

Применим преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h}e^{-hs}\right)\mathbf{x} - \left(\mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{-hs} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h}e^{-2hs}\right)\mathbf{z}_p - \\
&\quad - \mathbf{B}\mathbf{C}_k\boldsymbol{\xi}e^{-hs} = \mathbf{H}\mathbf{d}e^{-hs}, \\
&\quad - \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x} + \left(\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h}e^{-hs}\right)\mathbf{z}_p - \mathbf{B}\mathbf{C}_k\boldsymbol{\xi} = \mathbf{H}\mathbf{d}, \\
&\quad \mathbf{B}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x} + \left(\mathbf{B}_k\mathbf{C} - \mathbf{B}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h}e^{-hs}\right)\mathbf{z}_p - (\mathbf{E}s - \mathbf{A}_k)\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Таким образом, характеристический полином замкнутой системы (1.40) определяется выражением

$$\Delta_d(s) = \det \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h}e^{-hs} & -\mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{-hs} + \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h}e^{-2hs} & -\mathbf{B}\mathbf{C}_k e^{-hs} \\ \hline -\mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h} & \mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h}e^{-hs} & -\mathbf{B}\mathbf{C}_k \\ \hline \mathbf{B}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h} & \mathbf{B}_k\mathbf{C} - \mathbf{B}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h}e^{-hs} & \mathbf{E}s - \mathbf{A}_k \end{array} \right).$$

Умножая вторую строку на e^{-hs} и вычитая из первой, получим

$$\Delta_d(s) = \det \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{E}s - \mathbf{A} & -(\mathbf{E}s - \mathbf{A})e^{-hs} & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h} & \mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h}e^{-hs} & -\mathbf{B}\mathbf{C}_k \\ \hline \mathbf{B}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h} & \mathbf{B}_k\mathbf{C} - \mathbf{B}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h}e^{-hs} & \mathbf{E}s - \mathbf{A}_k \end{array} \right).$$

Теперь умножим первый столбец на e^{-hs} и вычтем из второго, тогда

$$\Delta_d(s) = \det \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{E}s - \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h} & \mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C} & -\mathbf{B}\mathbf{C}_k \\ \hline \mathbf{B}_k\mathbf{C}e^{\mathbf{A}h} & \mathbf{B}_k\mathbf{C} & \mathbf{E}s - \mathbf{A}_k \end{array} \right).$$

Таким образом, получаем, что

$$\Delta_d(s) = \det(\mathbf{E}s - \mathbf{A}) \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C} & -\mathbf{B}\mathbf{C}_k \\ \hline \mathbf{B}_k\mathbf{C} & \mathbf{E}s - \mathbf{A}_k \end{array} \right) = \Delta_0(s)\Delta_1(s),$$

где $\Delta_1(s)$ – характеристический полином асимптотически устойчивой замкнутой системы

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta, \\ \dot{\xi} &= \mathbf{A}_k\xi + \mathbf{B}_k\mathbf{y}, \\ \delta &= \mathbf{C}_k\xi + \mathbf{D}_k\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Таким образом, полином $\Delta_d(s)$ гурвицев тогда и только тогда, когда матрица \mathbf{A} является гурвицевой.

Теперь докажем эквивалентность регуляторов (1.38) и (1.39). Прежде всего, отметим, что передаточная матрица $\mathbf{F}_{dy}(s)$ замкнутой системы (1.37) от входа \mathbf{d} к выходу \mathbf{y} описывается выражением

$$\mathbf{F}_{dy}(s) = \mathbf{C} \left(\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{C}_k(\mathbf{E}s - \mathbf{A}_k)^{-1}\mathbf{B}_k\mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{H}e^{-hs}. \quad (1.42)$$

Вернемся к системе (1.41). Умножая второе уравнение на e^{-hs} и вычитая из первого, получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}s - \mathbf{A})\mathbf{x} - (\mathbf{E}s - \mathbf{A})e^{-hs}\mathbf{z}_p &= 0, \\ -\mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{Ah}\mathbf{x} + (\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{Ah}e^{-hs})\mathbf{z}_p - \mathbf{B}\mathbf{C}_k\xi &= \mathbf{H}\mathbf{d}, \\ \mathbf{B}_k\mathbf{C}e^{Ah}\mathbf{x} + (\mathbf{B}_k\mathbf{C} - \mathbf{B}_k\mathbf{C}e^{Ah}e^{-hs})\mathbf{z}_p - (\mathbf{E}s - \mathbf{A}_k)\xi &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Из первого уравнения выразим $\mathbf{z}_p = e^{hs}\mathbf{x}$ и подставим в оставшиеся:

$$\begin{aligned} -\mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{Ah}\mathbf{x} + (\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C}e^{Ah}e^{-hs})e^{hs}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{C}_k\xi &= \mathbf{H}\mathbf{d}, \\ \mathbf{B}_k\mathbf{C}e^{Ah}\mathbf{x} + (\mathbf{B}_k\mathbf{C} - \mathbf{B}_k\mathbf{C}e^{Ah}e^{-hs})e^{hs}\mathbf{x} - (\mathbf{E}s - \mathbf{A}_k)\xi &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Преобразуем:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C})e^{hs}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{C}_k\xi &= \mathbf{H}\mathbf{d}, \\ \mathbf{B}_k\mathbf{C}e^{hs}\mathbf{x} - (\mathbf{E}s - \mathbf{A}_k)\xi &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения выразим $\xi = (\mathbf{E}s - \mathbf{A}_k)^{-1}\mathbf{B}_k\mathbf{C}e^{hs}\mathbf{x}$ и подставим в первое:

$$(\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C})e^{hs}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{C}_k(\mathbf{E}s - \mathbf{A}_k)^{-1}\mathbf{B}_k\mathbf{C}e^{hs}\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{d},$$

откуда получаем:

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{C}_k(\mathbf{E}s - \mathbf{A}_k)^{-1}\mathbf{B}_k\mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{H}\mathbf{d}e^{-hs},$$

соответственно

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \left(\mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}_k\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{C}_k(\mathbf{E}s - \mathbf{A}_k)^{-1}\mathbf{B}_k\mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{H}\mathbf{d}e^{-hs}.$$

Таким образом, передаточная матрица замкнутой системы (1.22), (1.39) совпадает с передаточной матрицей (1.42) замкнутой системы (1.37). ■

Стоит отметить тот факт, что обратная связь (1.39) требует знания полного вектора состояния системы в каждый момент времени. В случае компенсации по выходу можно показать, что возможно сохранение динамики не исходного объекта, а вспомогательного в виде [10]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta + \mathbf{H}\mathbf{d}(t - h), \\ \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}, \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}e^{-\mathbf{A}h}, \end{aligned}$$

замкнутого некоторым динамическим регулятором

$$\delta = \tilde{\mathbf{W}}(p)\boldsymbol{\eta}.$$

Однако далее будем использовать обратную связь вида (1.39), поскольку в центре внимания данной работы находится сохранение динамики исходной системы (1.22) путем компенсации запаздывания на основе многоцелевого регулятора. Конкретная структура многоцелевой компенсирующей обратной связи для подвижного объекта управления (например, морского судна) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_p &= \mathbf{A}\mathbf{z}_p + \mathbf{B}\delta + \mathbf{H}\mathbf{d}, \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\delta_m + \mathbf{G}(\gamma_k - \mathbf{C}\mathbf{z}), \\ \dot{\delta}_m &= \mathbf{k}\mathbf{z} + \mathbf{k}_0\delta_m + \mathbf{v}_0\gamma_k + \gamma\mathbf{p} + \mathbf{m}_f(\gamma_k - \mathbf{C}\mathbf{z}), \\ \dot{\mathbf{p}} &= \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \boldsymbol{\beta}(\gamma_k - \mathbf{C}\mathbf{z}), \\ \gamma_k &= \mathbf{C} \left(e^{\mathbf{A}h}\mathbf{x} + \mathbf{z}_p - e^{\mathbf{A}h}\mathbf{z}_p(t - h) \right), \\ \delta_z &= \delta_m, \end{aligned}$$

где δ_m – отклонение органов управления по модели, δ_z – текущее отклонение, рассчитанное для стабилизации с учетом запаздывания.

Необходимо отметить следующую особенность. Уравнения обратной связи (1.39) подразумевают, что вычисленный управляющий сигнал подается на объект управления напрямую. Однако в действительности для подвижного объекта управлению подлежит не отклонение рулей, а скорость перекладки. В связи с указанным фактом для обеспечения сходимости отклонения δ к вычисленному положению δ_z на привод рулей можно подать управляющий сигнал

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}_u (\delta_z - \delta),$$

преобразуя уравнение привода к виду

$$\dot{\delta} = \mathbf{k}_u (\delta_z - \delta),$$

где $\mathbf{k}_u > 0$ – диагональная матрица с достаточно большими по значению элементами для быстрой сходимости динамических процессов.

Далее введем обозначения

$$\mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C} & \mathbf{B} & \mathbf{0}_{n \times n_1} \\ \mathbf{k} - \mathbf{m}_f \mathbf{C} & \mathbf{k}_0 & \gamma_k \\ -\beta \mathbf{C} & \mathbf{0}_{n_1 \times m} & \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{v}_0 + \mathbf{m}_f \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \xi_c = \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \delta_m \\ \mathbf{p} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_c = (\mathbf{0}_{m \times n} \mid \mathbf{1}_{m \times m} \mid \mathbf{0}_{m \times n_1}).$$

С учетом введенных обозначений запишем многоцелевой компенсирующий регулятор для стабилизации произвольного подвижного объекта с запаздыванием в канале управления в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_p &= \mathbf{A}\mathbf{z}_p + \mathbf{B}\delta + \mathbf{H}\mathbf{d}, \\ \dot{\xi}_c &= \mathbf{A}_c \xi_c + \mathbf{B}_c \gamma_k, \\ \gamma_k &= \mathbf{C} \left(e^{\mathbf{A}h} \mathbf{x} + \mathbf{z}_p - e^{\mathbf{A}h} \mathbf{z}_p(t-h) \right), \\ \delta_z &= \mathbf{C}_c \xi_c, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{k}_u (\delta_z - \delta). \end{aligned} \tag{1.43}$$

Схема замкнутой системы (1.22), (1.43) приведена на рис. 1.2.

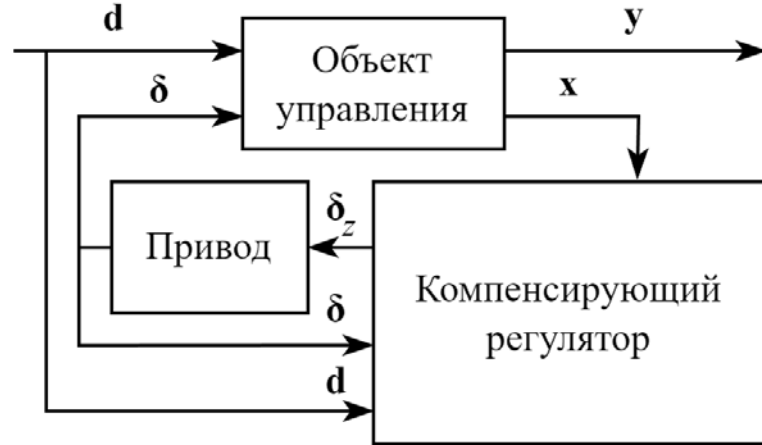


Рис. 1.2. Замкнутая система управления с компенсирующим регулятором (1.43).

С учетом того, что полученный многоцелевой компенсирующий регулятор подлежит реализации на цифровом бортовом оборудовании, осуществим дискретизацию обратной связи (1.43) с заданным периодом дискретизации T_d . Обратим внимание на тот факт, что в дискретном варианте экспоненты при вычислении вспомогательной переменной γ_k необходимо заменить на степени матрицы \mathbf{A}_d , которая является дискретизованной версией матрицы \mathbf{A} . В результате получим систему разностных уравнений

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}_p[n+1] &= \mathbf{A}_d \mathbf{z}_p[n] + \mathbf{B}_d \delta[n] + \mathbf{H}_d \mathbf{d}[n], \\
 \xi_c[n+1] &= \mathbf{A}_{cd} \xi_c[n] + \mathbf{B}_{cd} \gamma_k[n], \\
 \gamma_k[n] &= \mathbf{C} \left(\mathbf{A}^{n_h} \mathbf{x}[n] + \mathbf{z}_p[n] - \mathbf{A}^{n_h} \mathbf{z}_p[n - n_h] \right), \\
 \delta_z[n] &= \mathbf{C}_c \xi_c[n], \\
 \mathbf{u}[n] &= \mathbf{k}_u (\delta_z[n] - \delta[n]),
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

где $n_h = [h/T_d]$.

Дискретный регулятор (1.44) подлежит непосредственной реализации на борту объекта управления, при этом линейная природа полученных уравнений подразумевает относительно небольшой объем необходимых вычислений, что позволяет использовать достаточно маломощные и недорогие вычислительные устройства.

1.4. Выводы

Представленный в данной главе подход позволяет синтезировать стабилизирующие многоцелевые регуляторы с учетом совокупности требований к качеству функционирования объекта управления в различных режимах. При этом отдельные элементы таких регуляторов могут быть отключены в соответствующих условиях, а исходная достаточно сложная задача синтеза разбивается на ряд более простых задач, которые могут быть решены относительно независимо друг от друга. Также показано, что при помощи особой трансформации исходного регулятора можно компенсировать наличие запаздывания в каналах управления и внешнего возмущения.

Стоит отметить, что конкретный вид уравнений системы (1.16) может отличаться в зависимости от решаемой задачи. Например, в следующих двух главах будут рассмотрены задачи управления с визуальной обратной связью, а также управление нелинейной системой при помощи метода линеаризации обратной связью. В этих случаях многоцелевой регулятор принимает соответствующие конкретные формы, отличные от (1.16). Однако неизменными остаются общая структура, состоящая из асимптотического наблюдателя, динамического корректора и уравнения управляющего сигнала, а также идеология поиска настраиваемых элементов этой структуры.

Глава 2. Многоцелевое визуальное позиционирование подвижных объектов с учетом запаздывания

В данной главе рассматривается использование многоцелевого подхода для решения задачи позиционирования подвижного объекта с использованием визуальной информации в контуре обратной связи, с учетом комплекса требований к движению объекта в различных режимах, а также с учетом наличия запаздывания в канале управления.

В параграфе 2.1 приводится формальная постановка задачи. Параграф 2.2 посвящен процедуре синтеза многоцелевого регулятора. В параграфе 2.3 описывается трансформация многоцелевого регулятора для компенсации запаздывания. Параграфы 2.4 и 2.5 посвящены демонстрации работоспособности приведенного подхода на примере экспериментов с компьютерными моделями полноприводного и неполноприводного мобильных роботов.

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим произвольный подвижный объект, математическую модель динамики которого можно описать уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{D}\mathbf{v} &= \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{d}}(t), \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ – положительно определенная матрица инерции, \mathbf{D} – положительно определенная матрица демпфирования, $\mathbf{v} \in E^6$ – вектор линейных и угловых скоростей, $\mathbf{u} \in E^6$ – управляющий сигнал, $\tilde{\mathbf{d}}(t) \in E^6$ – вектор внешних возмущений, $\boldsymbol{\eta} \in E^6$ – вектор, описывающий положение твердого тела в пространстве относительно фиксированной системы координат, $\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})$ – матрица поворота, при этом $\det \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}) \neq 0, \forall \boldsymbol{\eta}$. Для удобства разрешим первое уравнение системы (2.1) относительно производной:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d}(t), \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\mathbf{A} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}$, $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}$, $\mathbf{d}(t) = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{d}}(t)$.

Рассмотрим системы координат, используемые для построения математических моделей объектов управления и позиционирования визуальных целей (рис. 2.1). Обозначим инерциальную систему координат, жестко связанную с землей как $O_g x_g y_g z_g$. Эта система является неподвижной, относительно нее задается положение объекта управления и визуальных маркеров в пространстве. Система является правой, ось $O_g z_g$ направлена вертикально вверх, $O_g x_g y_g$ – горизонтальная плоскость.

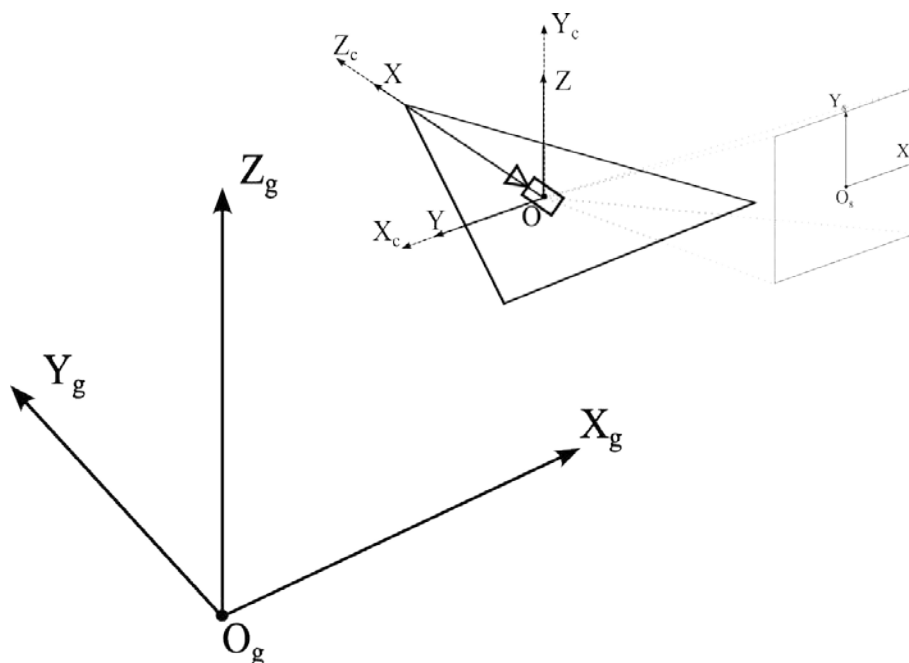


Рис. 2.1. Используемые системы координат.

Система $Oxuz$ находится в центре масс объекта управления и жестко связана с ним. Система правая, ось Oz направлена вертикально вверх, ось Ox – продольная, ось Oy направлена на левый борт подвижного объекта. На оси этой системы проецируются векторы скорости подвижного объекта.

Предположим, что в геометрическом центре подвижного объекта (будем считать, что он совпадает с центром масс) жестко закреплена видеокамера, оптическая ось которой направлена по оси Ox , а оптический центр нахо-

дится в точке O . Пусть $Ox_c y_c z_c$ – система координат, связанная с камерой. При этом координатная ось Oz_c системы координат камеры сонаправлена оси Ox связанной системы координат, ось Ox_c сонаправлена оси Oy , а ось Oy_c – оси Oz . Рассмотрим также нормированную плоскость изображения [51], расположенную на фокусном расстоянии $f = 1$ от оптического центра и перпендикулярную оптической оси. Введем в этой плоскости систему координат $O_s x_s y_s$, центр которой находится на оптической оси, ось $O_s y_s$ сонаправлена с осью Oy_c , а ось $O_s x_s$ противоположно направлена с осью Ox_c .

Пусть (X_c, Y_c, Z_c) – координаты некоторой точки пространства, заданные в системе координат камеры. Тогда координаты проекции этой точки на плоскость изображения вычисляются по формулам [51]

$$x_s = -\frac{X_c}{Z_c}, y_s = \frac{Y_c}{Z_c}.$$

Будем считать, что в поле зрения камеры постоянно находится некоторый визуальный маркер, в плоскости изображения представленный набором точек $\mathbf{s} = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1, N}$, которые в свою очередь являются проекциями точек маркера (X_i, Y_i, Z_i) , $i = \overline{1, N}$, заданными в системе координат камеры. Поставим задачу позиционирования объекта относительно маркера таким образом, чтобы проекции точек маркера \mathbf{s} на изображении оказались в желаемом положении \mathbf{s}_d , т.е. необходимо обеспечить выполнение условия:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{s}(t) = \mathbf{s}_d. \quad (2.3)$$

Дополним систему (2.2) уравнением динамики изменения проекций точек маркера на плоскость изображения в соответствии с математическими моделями, описанными в [78]:

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{L}_s(\mathbf{s}, \mathbf{Z}_c) \mathbf{v} + \mathbf{d}_c(t). \quad (2.4)$$

Вектор $\mathbf{Z}_c \in E^N$ содержит значения Z_i , $i = \overline{1, N}$ для каждой спроецированной точки маркера, $\mathbf{d}_c(t)$ – вектор внешних возмущений, $\mathbf{L}_s(\mathbf{s}, \mathbf{Z}_c)$ – матрица

взаимосвязей, компоненты которой для каждой пары (x_i, y_i) задаются следующим образом:

$$\mathbf{L}_s(x_i, y_i, Z_i) = \begin{pmatrix} \frac{x_i}{Z_i} & -\frac{1}{Z_i} & 0 & y_i & x_i y_i & -(1+x_i^2) \\ \frac{y_i}{Z_i} & 0 & -\frac{1}{Z_i} & -x_i & 1+y_i^2 & -x_i y_i \end{pmatrix}.$$

Систему (2.4) необходимо дополнить уравнением динамики вектора \mathbf{Z}_c :

$$\dot{\mathbf{Z}}_c = \mathbf{L}_z(\mathbf{s}, \mathbf{Z}_c)\mathbf{v} + \mathbf{d}_z(t), \quad (2.5)$$

где $\mathbf{d}_z(t)$ – внешнее возмущение, $\mathbf{L}_z(\mathbf{s}, \mathbf{Z}_c)$ – матрица, строки которой равны

$$\mathbf{L}_z(x_i, y_i, Z_i) = (-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -y_i Z_i \quad x_i Z_i).$$

Таким образом, динамика подвижного объекта и проекций маркера в плоскости изображения полностью описываются уравнениями (2.2), (2.4), (2.5). Будем считать, что векторы \mathbf{v} , \mathbf{s} и \mathbf{Z}_c доступны для непосредственного измерения.

Дополнительно введем в рассмотрение вектор невязок $\mathbf{e} = \mathbf{s} - \mathbf{s}_d$ между фактическим и желаемым положением точек в плоскости изображения. Динамика невязок, соответственно, описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c)\mathbf{v} + \mathbf{d}_c(t). \quad (2.6)$$

С учетом введенного обозначения условие (2.3) можно переписать в виде

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Для достижения цели управления (2.7) в рамках многоцелевого подхода рассмотрим три основных режима движения объекта управления.

1) *Режим собственного движения* характеризуется отсутствием внешних возмущений, при этом цель управления описана уравнением (2.7). В этом режиме основными требованиями к динамике управляемого движения являются обеспечение устойчивости положения равновесия и соблюдение заданных ограничений на перерегулирование и время переходного процесса.

2) *Режим движения при воздействии постоянного возмущения* характеризуется отсутствием задающего сигнала, нулевыми начальными условиями, а также наличием постоянных внешних возмущений

$$\mathbf{d}(t) \equiv \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_c(t) \equiv \mathbf{d}_{c0}, \mathbf{d}_z(t) \equiv \mathbf{d}_{z0}.$$

Целью управления является компенсация возмущений и обеспечение астатизма по управляемому выходу $\mathbf{s}(t)$ замкнутой системы. Главным требованием к динамике в этом режиме является соблюдение заданного ограничения на максимальное допустимое отклонение управляемых переменных $\mathbf{s}(t)$.

3) *Режим движения при воздействии периодического возмущения* определяется наличием возмущения в виде полигармонического сигнала также при нулевых начальных условиях и отсутствии задающего сигнала. В этом режиме качество динамики определяется минимизацией интенсивности управления при сохранении точности стабилизации системы.

2.2. Синтез многоцелевого закона управления

Поставим задачу синтеза многоцелевого закона управления, обеспечивающего достижение цели управления (2.7) и выполнение всех требований в режимах функционирования, приведенных выше. Введем в рассмотрение многоцелевую структуру закона управления, включающую в себя следующие элементы:

1) асимптотический наблюдатель

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_v &= \mathbf{A}\mathbf{z}_v + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{H}_v(\mathbf{v} - \mathbf{z}_v), \\ \dot{\mathbf{z}}_e &= \mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c)\mathbf{z}_v + \mathbf{H}_e(\mathbf{e} - \mathbf{z}_e), \end{aligned} \quad (2.8)$$

2) динамический корректор

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \boldsymbol{\beta}_v(\mathbf{v} - \mathbf{z}_v) + \boldsymbol{\beta}_e(\mathbf{e} - \mathbf{z}_e), \\ \boldsymbol{\zeta} &= \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + \boldsymbol{\mu}_v(\mathbf{v} - \mathbf{z}_v) + \boldsymbol{\mu}_e(\mathbf{e} - \mathbf{z}_e), \end{aligned} \quad (2.9)$$

3) уравнение управляющего сигнала

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_v\mathbf{z}_v - \mathbf{K}_e\mathbf{z}_e + \boldsymbol{\zeta}. \quad (2.10)$$

Здесь $\mathbf{z}_v \in E^6$ и $\mathbf{z}_e \in E^{2N}$ – векторы состояния асимптотического наблюдателя; $\mathbf{p} \in E^{n_p}$ – вектор состояния динамического корректора; $\zeta \in E^6$ – выход динамического корректора. Настраиваемыми элементами многоцелевой структуры (2.8) – (2.10) являются матрицы:

- а) \mathbf{K}_v и \mathbf{K}_e базового закона управления;
- б) \mathbf{H}_v и \mathbf{H}_e асимптотического наблюдателя;
- с) α , β_v , β_e , γ , μ_v , μ_e динамического корректора.

Асимптотический наблюдатель (2.8) обеспечивает оценку переменных состояния, недоступных для непосредственного измерения, а также может влиять на реакцию замкнутой системы (2.2), (2.8) – (2.10) на внешние возмущения за счет выбора настраиваемых элементов. Вектор состояния наблюдателя также подается на вход динамического корректора, основная цель которого – компенсация внешних возмущений.

Поиск настраиваемых элементов, составляющий суть задачи многоцелевого синтеза, может быть формализован как задача оптимизации. Одним из основных преимуществ многоцелевого подхода является возможность поиска настраиваемых элементов относительно независимо друг от друга [5–9]. Отдельные элементы многоцелевой структуры также могут включаться/выключаться в зависимости от текущего режима движения.

Рассмотрим последовательно задачи выбора настраиваемых элементов многоцелевой структуры (2.8) – (2.10) в соответствии с требованиями в упомянутых режимах движения.

1) Синтез базового закона управления.

Базовый закон управления задается уравнением

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_v \mathbf{v} - \mathbf{K}_e \mathbf{e}. \quad (2.11)$$

Желаемое качество динамики объекта управления в режиме собственного движения обеспечивается за счет выбора матриц \mathbf{K}_v и \mathbf{K}_e . С учетом (2.2) и (2.6), динамика собственного движения задается системой уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c)\mathbf{v}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Теорема 2.1. Обратная связь (2.11) обеспечивает устойчивость нулевого положения равновесия $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}$ системы (2.12) при $\mathbf{K}_e = \mu\mathbf{L}_s^T$, $\mu > 0$, $\mathbf{K}_v \succ 0$.

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму

$$V = \frac{\mu}{2}\mathbf{e}^T\mathbf{e} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^T(\mathbf{B}^{-1})^T\mathbf{v} \geq 0.$$

Отметим, что из постановки задачи $\mathbf{B}^{-1} \succ 0$, а $V = 0$ только при одновременном выполнении $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Вычислив производную квадратичной формы в силу системы (2.12), получим

$$\begin{aligned}\dot{V}\Big|_{(11),(12)} &= \mu\dot{\mathbf{e}}^T\mathbf{e} + \mathbf{v}^T\mathbf{B}^{-1}\dot{\mathbf{v}} = \mu\mathbf{v}^T\mathbf{L}_s^T\mathbf{e} + \mathbf{v}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{v}^T\mathbf{u} = \\ &= \mathbf{v}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{v}^T(\mu\mathbf{L}_s^T\mathbf{e} + \mathbf{u}).\end{aligned}$$

Если принять

$$\mathbf{u} = -\mu\mathbf{L}_s^T\mathbf{e} - \mathbf{K}_v\mathbf{v},\tag{2.13}$$

где $\mathbf{K}_v \succ 0$ – произвольная положительно определенная матрица, то получим

$$\dot{V}\Big|_{(11),(12)} = \mathbf{v}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{v}^T\mathbf{K}_v\mathbf{v} \leq 0,$$

поскольку матрица $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = -\mathbf{D}$ является отрицательно определенной.

Таким образом, по теореме Ляпунова, закон управления (2.13) обеспечивает устойчивость нулевого положения равновесия $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}$ замкнутой системы (2.12), (2.13). ■

Отметим, что на матрицу \mathbf{K}_v в данном случае не накладывается никаких ограничений, кроме положительной определенности. Это свойство можно использовать для удовлетворения заданных требований к динамике движущегося объекта.

2) Синтез асимптотического наблюдателя.

Далее обратимся к задаче поиска настраиваемых элементов асимптотического наблюдателя. Рассмотрим динамику векторов ошибок оценивания $\boldsymbol{\varepsilon}_v = \mathbf{v} - \mathbf{z}_v$, $\mathbf{e}_s = \mathbf{e} - \mathbf{z}_e$, которая в соответствии с (2.2), (2.6), (2.8) удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v &= (\mathbf{A} - \mathbf{H}_v)\boldsymbol{\varepsilon}_v, \\ \dot{\mathbf{e}}_s &= \mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c)\boldsymbol{\varepsilon}_v - \mathbf{H}_e\mathbf{e}_s.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Теорема 2.2. *Асимптотическая устойчивость нулевого положения равновесия $\boldsymbol{\varepsilon}_{v0} = \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_{s0} = \mathbf{0}$ системы (2.14) обеспечивается при $\mathbf{A} - \mathbf{H}_v \prec 0$ и $\mathbf{H}_e \succ 0$.*

Доказательство. Положение равновесия системы (2.14) задается уравнениями

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \mathbf{H}_v)\boldsymbol{\varepsilon}_{v0} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c)\boldsymbol{\varepsilon}_{v0} - \mathbf{H}_e\mathbf{e}_{s0} &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Очевидно, что в этом случае система обладает нулевым положением равновесия $\boldsymbol{\varepsilon}_{v0} = \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_{s0} = \mathbf{0}$. Рассмотрим первое уравнение системы (2.14). Глобальная асимптотическая устойчивость нулевого положения равновесия гарантируется при условии гурвицевости матрицы $\mathbf{A} - \mathbf{H}_v$.

Рассмотрим второе уравнение системы (2.14). Поскольку имеется глобальная асимптотическая устойчивость нулевого положения равновесия $\boldsymbol{\varepsilon}_v = \mathbf{0}$, а компоненты матрицы $\mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c)$ ограничены, то можно заключить, что слагаемое $\mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c)\boldsymbol{\varepsilon}_v \rightarrow \mathbf{0}$ при $t \rightarrow +\infty$. В соответствии с теоремой для каскадных систем [75], глобальная асимптотическая устойчивость нулевого положения равновесия для вектора \mathbf{e}_s обеспечивается в том случае, если матрица $\mathbf{H}_e \succ 0$ является положительно определенной. ■

Таким образом, помимо указанных требований, на настраиваемые элементы асимптотического наблюдателя не накладывается никаких ограничений. Поэтому, так же, как и для базового закона управления, матрицы на-

блюдателя могут быть выбраны с учетом удовлетворения требований к динамике:

1) качество динамики замкнутой системы с базовым законом управления (2.11) и с управляющим сигналом по состоянию наблюдателя $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_v \mathbf{z}_v - \mathbf{K}_e \mathbf{z}_e$ в режиме собственного движения должно быть максимально одинаковым, при этом допускается, что в случае базового закона (2.11) качество динамики может оказаться немного лучше;

2) значение L2-нормы невязок $\mathbf{e}(t)$ не должно превышать заданного значения в режиме движения при воздействии постоянного внешнего возмущения.

3) Синтез динамического корректора.

Рассмотрим теперь задачу поиска настраиваемых элементов динамического корректора. Прежде всего докажем следующую теорему.

Теорема 2.3. *Многоцелевой регулятор (2.8) – (2.10) обеспечивает устойчивость нулевого положения равновесия $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{0}$ системы (2.12), если матрицы \mathbf{K}_v и \mathbf{H}_e являются положительно определенными, $\mathbf{K}_e = \mu \mathbf{L}_s^T$, а матрицы \mathbf{a} и $\mathbf{A} - \mathbf{H}_v$ – гурвицевы.*

Доказательство. Рассмотрим уравнения замкнутой системы (2.14), (2.8) – (2.10) в режиме собственного движения:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v &= (\mathbf{A} - \mathbf{H}_v) \boldsymbol{\varepsilon}_v, \\ \dot{\mathbf{e}}_s &= \mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c) \boldsymbol{\varepsilon}_v - \mathbf{H}_e \mathbf{e}_s, \\ \dot{\mathbf{z}}_v &= \mathbf{A} \mathbf{z}_v + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{H}_v \boldsymbol{\varepsilon}_v, \\ \dot{\mathbf{z}}_e &= \mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c) \mathbf{z}_v + \mathbf{H}_e \mathbf{e}_s, \\ \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{a} \mathbf{p} + \boldsymbol{\beta}_v \boldsymbol{\varepsilon}_v + \boldsymbol{\beta}_e \mathbf{e}_s, \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}} &= \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + \boldsymbol{\mu}_v \boldsymbol{\varepsilon}_v + \boldsymbol{\mu}_e \mathbf{e}_s, \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K}_v \mathbf{z}_v - \mathbf{K}_e \mathbf{z}_e + \boldsymbol{\zeta}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Избавляясь от переменных \mathbf{u} и $\boldsymbol{\zeta}$, получим

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v &= (\mathbf{A} - \mathbf{H}_v)\boldsymbol{\varepsilon}_v, \\
\dot{\mathbf{e}}_s &= \mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c)\boldsymbol{\varepsilon}_v - \mathbf{H}_e \mathbf{e}_s, \\
\dot{\mathbf{z}}_v &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_v)\mathbf{z}_v - \mathbf{BK}_e \mathbf{z}_e + \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + (\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_v + \mathbf{H}_v)\boldsymbol{\varepsilon}_v + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_e \mathbf{e}_s, \\
\dot{\mathbf{z}}_e &= \mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c)\mathbf{z}_v + \mathbf{H}_e \mathbf{e}_s, \\
\dot{\mathbf{p}} &= \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \boldsymbol{\beta}_v \boldsymbol{\varepsilon}_v + \boldsymbol{\beta}_e \mathbf{e}_s,
\end{aligned}$$

что можно представить в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v \\ \dot{\mathbf{e}}_s \\ \dot{\mathbf{z}}_v \\ \dot{\mathbf{z}}_e \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{H}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c) & -\mathbf{H}_e & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_v + \mathbf{H}_v & \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_e & \mathbf{A} - \mathbf{BK}_v & -\mathbf{BK}_e & \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_e & \mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\beta}_v & \boldsymbol{\beta}_e & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_v \\ \mathbf{e}_s \\ \mathbf{z}_v \\ \mathbf{z}_e \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Характеристический полином замкнутой системы (2.16) равен

$$\begin{aligned}
\Delta(s) &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}s - \mathbf{A} + \mathbf{H}_v & \mathbf{0} \\ -\mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c) & \mathbf{E}s + \mathbf{H}_e \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}s - \mathbf{A} + \mathbf{BK}_v & \mathbf{BK}_e \\ -\mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c) & \mathbf{E}s \end{pmatrix} \det(\mathbf{E}s - \boldsymbol{\alpha}) = \\
&= \Delta_o(s)\Delta_b(s)\Phi(s),
\end{aligned}$$

где

- $\Delta_o(s)$ – характеристический полином системы асимптотического наблюдателя (2.8);
- $\Delta_b(s)$ – характеристический полином системы (2.12), замкнутой базовым законом управления (2.11);
- $\Phi(s)$ – характеристический полином динамического корректора.

Полином $\Delta_o(s)$ асимптотически устойчив по теореме 2.2. Устойчивость полинома $\Delta_b(s)$ следует из теоремы 2.1. Полином $\Phi(s)$ асимптотически устойчив ввиду гурвицевости матрицы $\boldsymbol{\alpha}$ по условию теоремы 2.3. Таким образом, замкнутая система (2.15) является устойчивой. ■

Из теоремы 2.3 следует, что единственным обязательным требованием к динамическому корректору является гурвицевость матрицы $\boldsymbol{\alpha}$. Обратимся теперь к вопросу обеспечения астатизма замкнутой системы (2.2), (2.6), (2.8)

– (2.10). Будем считать, что внешние возмущения постоянны: $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_0$, $\mathbf{d}_c(t) = \mathbf{d}_{c0}$. Представим динамический корректор (2.9) в tf-форме:

$$\zeta = \mathbf{F}_v(s)(\mathbf{v} - \mathbf{z}_v) + \mathbf{F}_e(s)(\mathbf{e} - \mathbf{z}_e), \quad (2.17)$$

где s – переменная Лапласа, $\mathbf{F}_v(s) = \gamma(\mathbf{E}_{n_p} s - \boldsymbol{\alpha})^{-1} \boldsymbol{\beta}_v + \boldsymbol{\mu}_v$ и $\mathbf{F}_e(s) = \gamma(\mathbf{E}_{n_p} s - \boldsymbol{\alpha})^{-1} \boldsymbol{\beta}_e + \boldsymbol{\mu}_e$ – передаточные матрицы корректора.

Теорема 2.4. *Замкнутая система (2.2), (2.6), (2.8) – (2.10) является астатической по отношению к векторам \mathbf{v} и \mathbf{e} для любых постоянных возмущений $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_0$ и $\mathbf{d}_c(t) = \mathbf{d}_{c0}$, если передаточные матрицы динамического корректора удовлетворяют условиям*

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_v(0) &= -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{H}_v, \\ \mathbf{F}_e(0) &= \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{K}_v \mathbf{T} - \mathbf{A} \mathbf{T} - \mathbf{B} \mathbf{K}_e), \\ \mathbf{T} &= -(\mathbf{L}_0^T \mathbf{L}_0)^{-1} \mathbf{L}_0^T \mathbf{H}_e, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_s(\mathbf{e}_0, \mathbf{Z}_{c0})$ – значение матрицы взаимосвязей в положении равновесия.

Доказательство. С учетом (2.17) уравнения замкнутой системы можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v &= \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_v - \mathbf{H}_v \boldsymbol{\varepsilon}_v + \mathbf{d}_0, \\ \dot{\mathbf{e}}_s &= \mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c) \boldsymbol{\varepsilon}_v - \mathbf{H}_e \mathbf{e}_s + \mathbf{d}_{c0}, \\ \dot{\mathbf{z}}_v &= \mathbf{A} \mathbf{z}_v + \mathbf{H}_v \boldsymbol{\varepsilon}_v - \mathbf{B} \mathbf{K}_e \mathbf{z}_e - \mathbf{B} \mathbf{K}_v \mathbf{z}_v + \mathbf{B} \mathbf{F}_v(s) \boldsymbol{\varepsilon}_v + \mathbf{B} \mathbf{F}_e(s) \mathbf{e}_s, \\ \dot{\mathbf{z}}_e &= \mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c) \mathbf{z}_v + \mathbf{H}_e \mathbf{e}_s. \end{aligned}$$

Вычислим положение равновесия для этой системы. В результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_{v0} - \mathbf{H}_v \boldsymbol{\varepsilon}_{v0} + \mathbf{d}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{L}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{v0} - \mathbf{H}_e \mathbf{e}_{s0} + \mathbf{d}_{c0} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A} \mathbf{z}_{v0} + \mathbf{H}_v \boldsymbol{\varepsilon}_{v0} - \mathbf{B} \mathbf{K}_e \mathbf{z}_{e0} - \mathbf{B} \mathbf{K}_v \mathbf{z}_{v0} + \mathbf{B} \mathbf{F}_v(0) \boldsymbol{\varepsilon}_{v0} + \mathbf{B} \mathbf{F}_e(0) \mathbf{e}_{s0} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{L}_0 \mathbf{z}_{v0} + \mathbf{H}_e \mathbf{e}_{s0} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{v0}$, \mathbf{e}_{s0} , \mathbf{z}_{v0} , \mathbf{z}_{e0} – значения соответствующих величин в положении равновесия. Из первых двух уравнений системы (2.19) видно, что векторы ошибок оценивания $\boldsymbol{\varepsilon}_{v0}$, \mathbf{e}_{s0} и внешние возмущения \mathbf{d}_0 , \mathbf{d}_{c0} напрямую связаны

между собой. В связи с этим векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_{v0}$, \mathbf{e}_{s0} можно рассматривать в дальнейшем как внешние возмущения.

Из последнего уравнения системы (2.19) получаем

$$\mathbf{z}_{v0} = -(\mathbf{L}_0^T \mathbf{L}_0)^{-1} \mathbf{L}_0^T \mathbf{H}_e \mathbf{e}_{s0}. \quad (2.20)$$

Вводя вспомогательную матрицу $\mathbf{T} = -(\mathbf{L}_0^T \mathbf{L}_0)^{-1} \mathbf{L}_0^T \mathbf{H}_e$ и подставляя (2.20) в третье уравнение системы (2.19), получим соотношение

$$\mathbf{BK}_e \mathbf{e}_0 = (\mathbf{AT} - \mathbf{BK}_v \mathbf{T} + \mathbf{BF}_e(0) + \mathbf{BK}_e) \mathbf{e}_{s0} + [\mathbf{H}_v + \mathbf{BF}_v(0)] \boldsymbol{\varepsilon}_{v0}.$$

Таким образом, чтобы обеспечить условие (2.7) при наличии постоянных внешних возмущений, т.е. для выполнения свойства астатизма, необходимо, чтобы множители перед векторами \mathbf{e}_{s0} и $\boldsymbol{\varepsilon}_{v0}$ были равны нулю, что обеспечивается условиями (2.18). ■

Теперь рассмотрим режим движения при наличии полигармонического возмущения в виде $d(t) = \sum_{i=1}^{N_\omega} A_i \sin(\omega_i t)$, где N_ω – количество гармоник. Будем считать, что в этом режиме движения системы очень малы, поэтому можно заменить матрицу $\mathbf{L}_s(\mathbf{e}, \mathbf{Z}_c)$ постоянным значением $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_s(\mathbf{e}_0, \mathbf{Z}_{c0})$, соответствующим заданному положению равновесия. Тогда уравнения многоцелевого регулятора (2.8) – (2.10) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_v &= \mathbf{A} \mathbf{z}_v + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{H}_v \boldsymbol{\varepsilon}_v, \\ \dot{\mathbf{z}}_e &= \mathbf{L}_0 \mathbf{z}_v + \mathbf{H}_e \mathbf{e}_s, \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K}_v \mathbf{z}_v - \mathbf{K}_e \mathbf{z}_e + \boldsymbol{\zeta}. \end{aligned}$$

Избавимся от третьего уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_v &= \mathbf{A} \mathbf{z}_v - \mathbf{BK}_v \mathbf{z}_v - \mathbf{BK}_e \mathbf{z}_e + \mathbf{B} \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{H}_v \boldsymbol{\varepsilon}_v, \\ \dot{\mathbf{z}}_e &= \mathbf{L}_0 \mathbf{z}_v + \mathbf{H}_e \mathbf{e}_s, \end{aligned}$$

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_v \\ \dot{\mathbf{z}}_e \end{pmatrix} = \mathbf{A}_s \begin{pmatrix} \mathbf{z}_v \\ \mathbf{z}_e \end{pmatrix} + \mathbf{B}_s \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_v \\ \mathbf{e}_s \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

где

$$\mathbf{A}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK}_v & -\mathbf{BK}_e \\ \mathbf{L}_0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_v & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_e & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Представим (2.21) в tf-форме:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z}_v \\ \mathbf{z}_e \end{pmatrix} = \mathbf{P}(s) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_v \\ \mathbf{e}_s \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

где

$$\mathbf{P}(s) = (\mathbf{E}s - \mathbf{A}_s)^{-1} \mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}(s) & \mathbf{P}_{12}(s) & \mathbf{P}_{13}(s) \\ \mathbf{P}_{21}(s) & \mathbf{P}_{22}(s) & \mathbf{P}_{23}(s) \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.5. *Фильтрация полигармонического возмущения с частотами ω_i , $i = \overline{1, N_\omega}$ в канале управления обеспечивается при выполнении условий*

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_v(j\omega_i) &= -\mathbf{F}^{-1}(j\omega_i)[\mathbf{K}_v \mathbf{P}_{11}(j\omega_i) + \mathbf{K}_e \mathbf{P}_{21}(j\omega_i)], \\ \mathbf{F}_e(j\omega_i) &= -\mathbf{F}^{-1}(j\omega_i)[\mathbf{K}_v \mathbf{P}_{12}(j\omega_i) + \mathbf{K}_e \mathbf{P}_{22}(j\omega_i)], \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $\mathbf{F}(j\omega_i) = \mathbf{K}_v \mathbf{P}_{13}(j\omega_i) + \mathbf{K}_e \mathbf{P}_{23}(j\omega_i) - \mathbf{E}$.

Доказательство. Подставим (2.22) в уравнение управляющего сигнала:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbf{K}_v (\mathbf{P}_{11} \boldsymbol{\varepsilon}_v + \mathbf{P}_{12} \mathbf{e}_s + \mathbf{P}_{13} \boldsymbol{\zeta}) - \mathbf{K}_e (\mathbf{P}_{21} \boldsymbol{\varepsilon}_v + \mathbf{P}_{22} \mathbf{e}_s + \mathbf{P}_{23} \boldsymbol{\zeta}) + \boldsymbol{\zeta} = \\ &= -(\mathbf{K}_v \mathbf{P}_{11} + \mathbf{K}_e \mathbf{P}_{21}) \boldsymbol{\varepsilon}_v - (\mathbf{K}_v \mathbf{P}_{12} + \mathbf{K}_e \mathbf{P}_{22}) \mathbf{e}_s - (\mathbf{K}_v \mathbf{P}_{13} + \mathbf{K}_e \mathbf{P}_{23} - \mathbf{E}) \boldsymbol{\zeta}. \end{aligned}$$

С учетом $\mathbf{F}(s) = \mathbf{K}_v \mathbf{P}_{13}(s) + \mathbf{K}_e \mathbf{P}_{23}(s) - \mathbf{E}$ получим

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -(\mathbf{K}_v \mathbf{P}_{11} + \mathbf{K}_e \mathbf{P}_{21}) \boldsymbol{\varepsilon}_v - (\mathbf{K}_v \mathbf{P}_{12} + \mathbf{K}_e \mathbf{P}_{22}) \mathbf{e}_s - \mathbf{F} \boldsymbol{\zeta} = \\ &= -(\mathbf{K}_v \mathbf{P}_{11} + \mathbf{K}_e \mathbf{P}_{21}) \boldsymbol{\varepsilon}_v - (\mathbf{K}_v \mathbf{P}_{12} + \mathbf{K}_e \mathbf{P}_{22}) \mathbf{e}_s - \mathbf{F}(\mathbf{F}_v \boldsymbol{\varepsilon}_v + \mathbf{F}_e \mathbf{e}_s) = \\ &= -(\mathbf{K}_v \mathbf{P}_{11} + \mathbf{K}_e \mathbf{P}_{21} + \mathbf{F} \mathbf{F}_v) \boldsymbol{\varepsilon}_v - (\mathbf{K}_v \mathbf{P}_{12} + \mathbf{K}_e \mathbf{P}_{22} + \mathbf{F} \mathbf{F}_e) \mathbf{e}_s. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Множители перед $\boldsymbol{\varepsilon}_v$ и \mathbf{e}_s в правой части (2.24) представляют собой передаточные матрицы от соответствующих входов к выходному управляющему сигналу. Таким образом, для обеспечения фильтрующего свойства по частотам ω_i , $i = \overline{1, N_\omega}$ необходимо, чтобы эти передаточные матрицы были равны нулю:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_v \mathbf{P}_{11}(j\omega_i) + \mathbf{K}_e \mathbf{P}_{21}(j\omega_i) + \mathbf{F}(j\omega_i) \mathbf{F}_v(j\omega_i) &= 0, \\ \mathbf{K}_v \mathbf{P}_{12}(j\omega_i) + \mathbf{K}_e \mathbf{P}_{22}(j\omega_i) + \mathbf{F}(j\omega_i) \mathbf{F}_e(j\omega_i) &= 0, \end{aligned}$$

откуда получаем условия (2.23). ■

Теперь рассмотрим задачу синтеза передаточных матриц $\mathbf{F}_v = (\mathbf{F}_{v1} \ \mathbf{F}_{v2} \ \dots \ \mathbf{F}_{v6})^T$ и $\mathbf{F}_e = (\mathbf{F}_{e1} \ \mathbf{F}_{e2} \ \dots \ \mathbf{F}_{e6})^T$ динамического корректора, которые удовлетворяют условиям астатизма (2.18) и фильтрации возмущений (2.23). Для этого перепишем условия (2.18) и (2.23) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_v(0) &= \mathbf{F}_v^0 = (\mathbf{F}_{v1}^0 \ \mathbf{F}_{v2}^0 \ \dots \ \mathbf{F}_{v6}^0)^T, \\ \mathbf{F}_v(j\omega_i) &= \mathbf{F}_{vi}^* = (\mathbf{F}_{vi1}^* \ \mathbf{F}_{vi2}^* \ \dots \ \mathbf{F}_{vi6}^*)^T, \\ \mathbf{F}_e(0) &= \mathbf{F}_e^0 = (\mathbf{F}_{e1}^0 \ \mathbf{F}_{e2}^0 \ \dots \ \mathbf{F}_{e6}^0)^T, \\ \mathbf{F}_e(j\omega_i) &= \mathbf{F}_{ei}^* = (\mathbf{F}_{ei1}^* \ \mathbf{F}_{ei2}^* \ \dots \ \mathbf{F}_{ei6}^*)^T,\end{aligned}$$

где \mathbf{F}_v^0 , \mathbf{F}_{vi}^* , \mathbf{F}_e^0 и \mathbf{F}_{ei}^* – постоянные матрицы. Далее приведем рассуждения для синтеза передаточной матрицы \mathbf{F}_v , поскольку для матрицы \mathbf{F}_e процедура полностью аналогична.

Каждая компонента корректора \mathbf{F}_v с передаточной матрицей $\mathbf{F}_{vk}(s)$, $k = \overline{1,6}$, в tf-форме представляется уравнением

$$\zeta_{vk} = \mathbf{F}_{vk}(s)\boldsymbol{\varepsilon}_v,$$

или в пространстве состояний

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_{vk} &= \boldsymbol{\alpha}_{vk}\mathbf{p}_{vk} + \boldsymbol{\beta}_{vk}\boldsymbol{\varepsilon}_v, \\ \zeta_{vk} &= \boldsymbol{\gamma}_{vk}\mathbf{p}_{vk} + \boldsymbol{\mu}_{vk}\boldsymbol{\varepsilon}_v,\end{aligned}$$

где $\mathbf{p}_{vk} \in E^{2N_\omega}$ – вектор состояния корректора. При этом передаточная матрица $\mathbf{F}_{vk}(s)$ равна $\mathbf{F}_{vk}(s) = \boldsymbol{\gamma}_{vk}(\mathbf{E}_{n_p}s - \boldsymbol{\alpha}_{vk})^{-1}\boldsymbol{\beta}_{vk} + \boldsymbol{\mu}_{vk}$. С учетом обозначений

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{vik} &= \operatorname{Re}\mathbf{F}_{vik}^*, \\ \mathbf{I}_{vik} &= \operatorname{Im}\mathbf{F}_{vik}^*, \\ i &= \overline{1, N_\omega}, k = \overline{1, 6},\end{aligned}$$

условия (2.18) и (2.23) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
-\gamma_{vk} \mathbf{a}_{vk}^{-1} \boldsymbol{\beta}_{vk} + \boldsymbol{\mu}_{vk} &= \mathbf{F}_{vk}^0, \\
\gamma_{vk} (\mathbf{E}_{2N_\omega} j\omega_i - \mathbf{a}_{vk})^{-1} \boldsymbol{\beta}_{vk} + \boldsymbol{\mu}_{vk} &= \mathbf{R}_{vik} + \mathbf{I}_{vik} j, \\
i = \overline{1, N_\omega}, k = \overline{1, 6}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Выберем произвольные гурвицевы матрицы \mathbf{a}_{vk} и произвольные векторы γ_{vk} . Введем обозначения

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{vik}^R &= \operatorname{Re}(\mathbf{E}_{2N_\omega} j\omega_i - \mathbf{a}_{vk})^{-1}, \\
\mathbf{a}_{vik}^I &= \operatorname{Im}(\mathbf{E}_{2N_\omega} j\omega_i - \mathbf{a}_{vk})^{-1},
\end{aligned}$$

тогда, вычитая первое уравнение системы (2.25) из второго, получим

$$\begin{aligned}
\gamma_{vk} (\mathbf{a}_{vik}^R + \mathbf{a}_{vk}^{-1}) \boldsymbol{\beta}_{vk} &= \mathbf{R}_{vik} - \mathbf{F}_{vk}^0, \\
\gamma_{vk} \mathbf{a}_{vik}^I \boldsymbol{\beta}_{vk} &= \mathbf{I}_{vik}, \\
i = \overline{1, N_\omega}, k = \overline{1, 6},
\end{aligned}$$

что можно записать в виде

$$\mathbf{A}_{vk} \boldsymbol{\beta}_{vk} = \mathbf{B}_{vk}, \tag{2.26}$$

где

$$\mathbf{A}_{vk} = \begin{pmatrix} \gamma_{vk} (\mathbf{a}_{v1k}^R + \mathbf{a}_{vk}^{-1}) \\ \gamma_{vk} \mathbf{a}_{v1k}^I \\ \dots \\ \gamma_{vk} (\mathbf{a}_{vN_\omega k}^R + \mathbf{a}_{vk}^{-1}) \\ \gamma_{vk} \mathbf{a}_{vN_\omega k}^I \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{vk} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{v1k} - \mathbf{F}_{vk}^0 \\ \mathbf{I}_{v1k} \\ \dots \\ \mathbf{R}_{vN_\omega k} - \mathbf{F}_{vk}^0 \\ \mathbf{I}_{vN_\omega k} \end{pmatrix}, k = \overline{1, 6}. \tag{2.27}$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{\beta}_{vk}$ можно найти в результате решения линейной системы (2.26). Далее, подставляя $\boldsymbol{\beta}_{vk}$ в первое уравнение системы (2.25), вычислим $\boldsymbol{\mu}_{vk}$ по формуле

$$\boldsymbol{\mu}_{vk} = \mathbf{F}_{vk}^0 + \gamma_{vk} \mathbf{a}_{vk}^{-1} \boldsymbol{\beta}_{vk}, k = \overline{1, 6}. \tag{2.28}$$

Полученные матрицы \mathbf{a}_{vk} , $\boldsymbol{\beta}_{vk}$, γ_{vk} , $\boldsymbol{\mu}_{vk}$, $k = \overline{1, 6}$ определяют динамический корректор, обеспечивающий фильтрацию на частотах ω_i , $i = \overline{1, N_\omega}$ и астатизм замкнутой системы.

В соответствии с приведенными выше рассуждениями сформулируем алгоритм синтеза многоцелевого регулятора (2.8) – (2.10).

Алгоритм № 1 (синтеза многоцелевого регулятора)

1) Зафиксировать значения коэффициента μ и матрицы \mathbf{K}_v для базового закона управления (2.11). Эти значения могут быть найдены, например, из соображений минимизации постоянной времени переходного процесса в замкнутой системе.

2) Задать значения матриц \mathbf{H}_v и \mathbf{H}_e асимптотического наблюдателя (2.8) для обеспечения наиболее быстрой сходимости оценок к фактическим значениям переменных состояния объекта управления.

3) Вычислить значения $\mathbf{F}_v(0)$ и $\mathbf{F}_e(0)$ передаточных матриц динамического корректора в соответствии с условиями (2.18) для обеспечения астатизма замкнутой системы.

4) Задать частоты ω_i , $i = \overline{1, N_\omega}$ внешнего полигармонического возмущения и рассчитать соответствующие значения $\mathbf{F}_v(j\omega_i)$ и $\mathbf{F}_e(j\omega_i)$ матриц динамического корректора.

5) Зафиксировать гурвицевы матрицы α_{vk} , γ_{vk} и α_{ek} , γ_{ek} динамических корректоров, $k = \overline{1, 6}$. В частности, можно положить $\gamma_{vk} = (0 \dots 0 \ 1)$, задать собственное число λ кратности $2N_\omega$ и посчитать соответствующую форму Фробениуса для матриц α_{vk} , при этом $\text{Re}(\lambda) < 0$. Аналогичным образом задать матрицы α_{ek} и γ_{ek} .

6) Сформировать матрицы \mathbf{A}_{vk} и \mathbf{B}_{vk} в соответствии с формулами (2.27). Из линейной системы (2.26) найти вектор β_{vk} . Вычислить вектор μ_{vk} по формуле (2.28). Аналогичным образом найти векторы β_{ek} и μ_{ek} .

2.3. Компенсация постоянного запаздывания

Введем в систему (2.2) постоянное запаздывание h в канал управления и канал внешних возмущений. Так же для удобства будем считать, что матрица \mathbf{B} учитывается в слагаемом \mathbf{d} . В итоге получим систему вида

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t-h) + \mathbf{d}(t-h), \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}(t))\mathbf{v}(t).\end{aligned}$$

Как было отмечено в предыдущей главе, запаздывание, как правило, негативно сказывается на динамике управляемого движения. Поставим задачу учета запаздывания для сохранения тех же динамических свойств, что и в замкнутой системе (2.2), (2.6), (2.8) – (2.10). Как и в предыдущих главах, будем использовать компенсационный подход, который заключается в оценке прогноза вектора скорости системы по формуле Коши

$$\mathbf{v}(t+h) = e^{\mathbf{A}h} \mathbf{v}(t) + e^{\mathbf{A}h} \int_t^{t+h} e^{-\mathbf{A}(\tau-t)} [\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau-h) + \mathbf{d}(\tau-h)] d\tau. \quad (2.29)$$

Уравнение (2.29), в свою очередь, удобнее использовать в форме динамической системы [10]

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}_p &= \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d}, \\ \mathbf{v}(t+h) &= \mathbf{z}_p(t) + e^{\mathbf{A}h} [\mathbf{v}(t) - \mathbf{z}_p(t-h)]\end{aligned} \quad (2.30)$$

С учетом (2.30) можем выполнить трансформацию регулятора (2.8) – (2.10) для компенсации запаздывания, которая сохраняет исходную передаточную матрицу замкнутой системы. Отметим, что в этом случае асимптотические наблюдатели оценивают прогноз состояния системы на величину запаздывания. Также здесь требуется оценка прогноза положения подвижного объекта \mathbf{z}_η через оценку будущей скорости \mathbf{z}_v . Обозначим прогноз скорости $\mathbf{v}(t+h)$ переменной $\boldsymbol{\lambda}$. В результате получим многоцелевой регулятор с компенсацией запаздывания в форме

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{z}}_p &= \mathbf{A}\mathbf{z}_p + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d}, \\
\dot{\mathbf{z}}_v &= \mathbf{A}\mathbf{z}_v + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{H}_v(\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{z}_v), \\
\dot{\mathbf{z}}_\eta &= \mathbf{R}(\mathbf{z}_\eta)\mathbf{z}_v, \\
\dot{\mathbf{z}}_e &= \mathbf{L}(\mathbf{e}, \mathbf{Z})\mathbf{z}_v + \mathbf{H}_e(\mathbf{e} - \mathbf{z}_e), \\
\dot{\mathbf{p}} &= \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \boldsymbol{\beta}_v(\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{z}_v) + \boldsymbol{\beta}_e(\mathbf{e} - \mathbf{z}_e), \\
\dot{\boldsymbol{\zeta}} &= \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + \boldsymbol{\mu}_v(\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{z}_v) + \boldsymbol{\mu}_e(\mathbf{e} - \mathbf{z}_e), \\
\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{z}_p + e^{\mathbf{A}h}(\mathbf{v} - \mathbf{z}_p(t-h)), \\
\mathbf{u} &= -\mathbf{K}_e\mathbf{z}_e - \mathbf{K}_v\mathbf{z}_v + \boldsymbol{\zeta}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Отметим, что регулятор (2.31), действительно, является не более чем трансформацией исходного регулятора без учета запаздывания (2.8) – (2.10), и использует тот же самый синтезированный набор настраиваемых элементов. Иными словами, если синтезирован многоцелевой регулятор без учета запаздывания, удовлетворяющий всем поставленным требованиям, то для компенсации постоянного запаздывания не нужно проводить дополнительного синтеза каких-либо элементов многоцелевой структуры, достаточно использовать трансформированный регулятор в форме (2.31).

Таким образом, можно сформулировать алгоритм синтеза многоцелевого регулятора для компенсации постоянного запаздывания h .

Алгоритм № 2 (синтеза многоцелевого регулятора с компенсацией запаздывания)

- 1) Синтезировать базовый регулятор (2.8) – (2.10) для замкнутой системы без запаздывания в соответствии с алгоритмом 1.
- 2) Добавить к полученному регулятору уравнения (2.30) для расчета прогноза скорости системы на величину запаздывания, а также уравнение наблюдателя для оценки положения подвижного объекта \mathbf{z}_η .
- 3) Заменить все вхождения скорости \mathbf{v} в базовом регуляторе на прогнозируемое значение $\boldsymbol{\lambda}$.

2.4. Позиционирование мобильного робота относительно визуального маркера

Рассмотрим в качестве объекта управления мобильный робот на омни-колесном шасси (рис. 2.2), что обеспечивает полноприводность системы при движении на плоскости. Будем считать, что управлением в данном случае являются силы и момент, действующие на шасси при движении колес. Предположим, что в канале управления (а также в канале внешних возмущений) присутствует постоянное транспортное запаздывание h . Математическая модель динамики робота описывается системой уравнений [82]

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t-h) + \mathbf{d}(t-h), \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}(t))\mathbf{v}(t),\end{aligned}\tag{2.32}$$

где $\mathbf{v} = (v, v_n, \omega)^T$ – вектор скоростей: v – линейная скорость, v_n – линейная скорость по направлению нормали, ω – угловая скорость; $\mathbf{u} = (u_v, u_{vn}, u_\omega)^T$ – вектор управляющих воздействий: u_v – сила тяги в продольном направлении, u_{vn} – сила тяги в направлении нормали, u_ω – вращающий момент; $\boldsymbol{\eta} = (x, y, \varphi)^T$ – положение центра масс и курсовой угол робота; \mathbf{d} – вектор внешних возмущений; \mathbf{A} – диагональная матрица коэффициентов трения; \mathbf{B} – диагональная матрица коэффициентов при управляющих воздействиях. Единственная нелинейность системы (2.32) описывается матрицей

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Базовые вопросы учета запаздывания на основе компенсационного подхода в задачах управления мобильными роботами были впервые описаны в работах [48, 49], а многоцелевой подход к синтезу стабилизирующей обратной связи для таких роботов представлен в статье [47]. Вопросы визуального позиционирования с многоцелевой обратной связью без учета запаздывания затрагиваются в работах [41, 44, 45, 87, 95], а статьи [42, 86] развивают полученные результаты для компенсации запаздывания.

Предположим, что в геометрическом центре робота жестко закреплена видеокамера, ориентированная по направлению движения робота. В поле зрения камеры постоянно находится некоторый визуальный маркер, в плоскости изображения представленный набором точек $\mathbf{s} = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1, N}$, которые в свою очередь являются проекциями точек маркера (X_i, Y_i, Z_i) , $i = \overline{1, N}$ в системе координат камеры. Поставим задачу позиционирования робота относительно маркера таким образом, чтобы проекции точек маркера \mathbf{s} на изображении оказались в желаемом положении \mathbf{s}_d . При этом нужно компенсировать постоянные и полигармонические внешние возмущения, а также запаздывание.

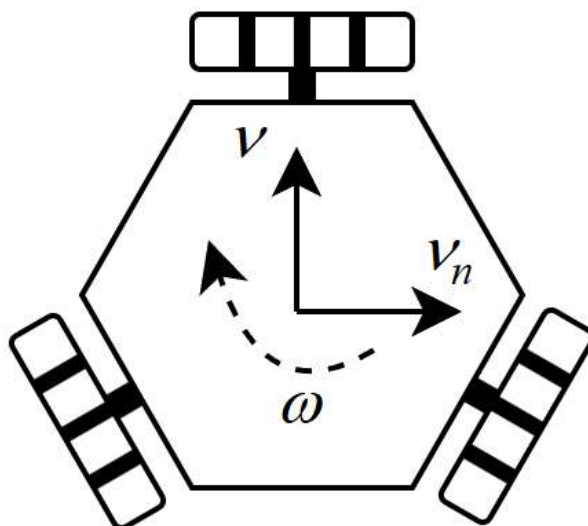


Рис. 2.2. Модель омни-колесного робота.

Отметим, что в рассматриваемом случае матрица взаимосвязей $\mathbf{L}_s(\mathbf{s}, \mathbf{Z}_c)$ существенно упрощается:

$$\mathbf{L}(x_i, y_i, Z_i) = \begin{pmatrix} \frac{x_i}{Z_i} & -\frac{1}{Z_i} & -(1+x_i^2) \\ \frac{y_i}{Z_i} & 0 & -x_i y_i \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим работу многоцелевого регулятора в различных режимах на примере экспериментов с компьютерной моделью, реализованной в среде Matlab-Simulink. В качестве начальных условий будем считать, что робот на-

ходится в начале координат и направлен по направлению оси Ox , а центр визуального маркера квадратной формы находится в точке $(1.9601 \ -0.3973)$ и повернут на угол 0.2 рад. Целью управления является такое положение робота, при котором расстояние до маркера составляет 1 м, а угол между курсовым углом робота и вектором, направленным из центра маркера в центр робота, нулевой. Этому положению соответствует точка $(0.9801 \ -0.1987)$. В качестве интересующего набора точек возьмем угловые точки маркера. Примем следующие значения параметров системы и многоцелевого регулятора:

$$\mathbf{A} = \text{diag}([-0.2587 \ -0.2654 \ -0.7333]),$$

$$\mathbf{B} = \text{diag}([0.5140 \ 0.5140 \ 66.7]),$$

$$\mathbf{H}_v = 10\mathbf{E}_3, \mathbf{H}_e = 10\mathbf{E}_8, \mu = 4,$$

$$\mathbf{K}_v = \text{diag}([62.7442 \ 2.6878 \ 0.9891]).$$

Рассмотрим сначала простейшую ситуацию, в которой внешнее возмущение и запаздывание отсутствуют, соответственно, динамический корректор выключен, компенсация запаздывания не применяется. Рис. 2.3 демонстрируют динамику системы в этом случае – на левом графике изображена траектория движения угловых точек маркера на изображении, а на правом – динамика положения робота. Как видно, желаемое положение маркера достигается примерно за 10 секунд и робот останавливается.

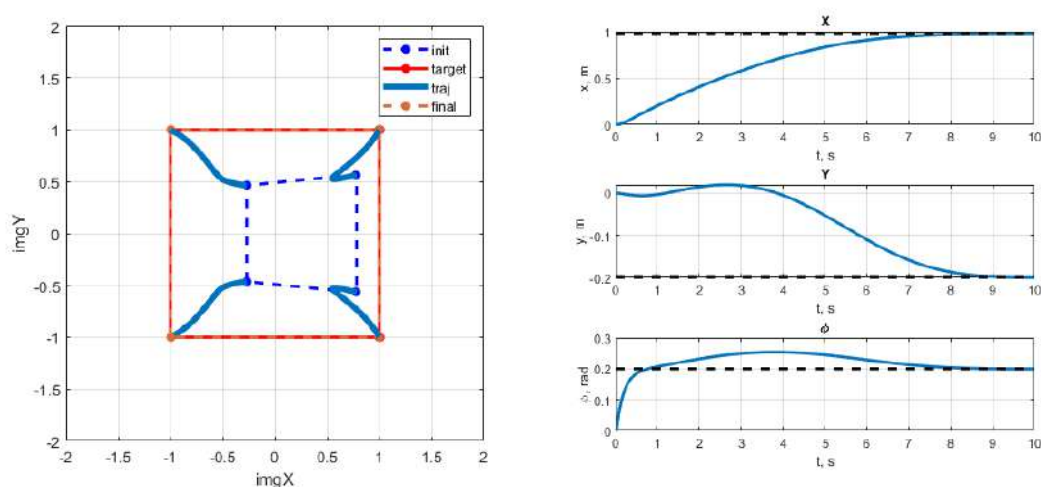


Рис. 2.3. Динамика точек на изображении (слева) и движения робота при отсутствии запаздывания и внешнего возмущения (справа).

Теперь рассмотрим случай, когда робот уже находится в желаемом положении, но на него действует постоянное внешнее возмущение $\mathbf{d} = [0.4 \ 0.2 \ 0.1]^T$. Динамика системы для этой ситуации представлена на рис. 2.4. Можно заметить, что робот отклоняется от начального положения и не может в него вернуться.

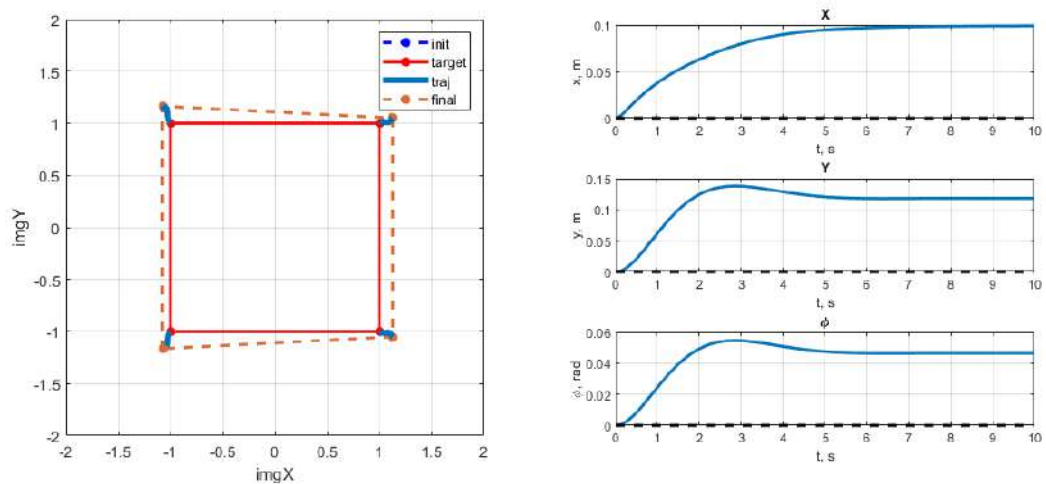


Рис. 2.4. Динамика движения робота при наличии постоянного внешнего возмущения при выключенном динамическом корректоре.

Теперь применим динамический корректор, синтезированный в соответствии с процедурой, описанной в параграфе 2.2 для компенсации постоянного возмущения, а также полигармонического возмущения, состоящего из трех частот $\omega_1 = 31.4159 \text{ c}^{-1}$, $\omega_2 = 37.6991 \text{ c}^{-1}$ и $\omega_3 = 43.9823 \text{ c}^{-1}$. В качестве матриц α_{vk} примем матрицы в форме Фробениуса с собственными числами $\lambda = -6$ кратности 6. Как видно из рис. 2.5, в этом случае наличие корректора позволяет роботу вернуться в исходное положение при наличии постоянного внешнего возмущения.

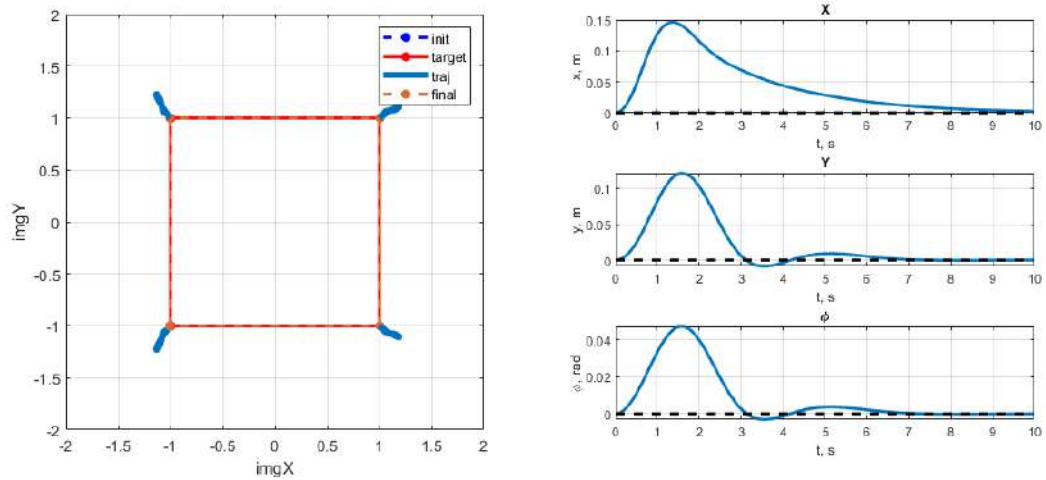


Рис. 2.5. Динамика движения робота при наличии постоянного внешнего возмущения с включенным динамическим корректором.

Наконец, рассмотрим влияние полигармонического внешнего возмущения в виде

$$w(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) + \sin(\omega_3 t),$$

$$\mathbf{d}(t) = (0.4w(t) \quad 0.2w(t) \quad 0.1w(t))^T,$$

при этом динамический корректор будет включен только после 5 секунды эксперимента. Динамика системы для этого случая представлена на рис. 2.6 и рис. 2.7. Можно заметить, что включение корректора не оказывает заметного влияния на динамику системы. При этом интенсивность управляющего сигнала снижается почти до нулевого значения.

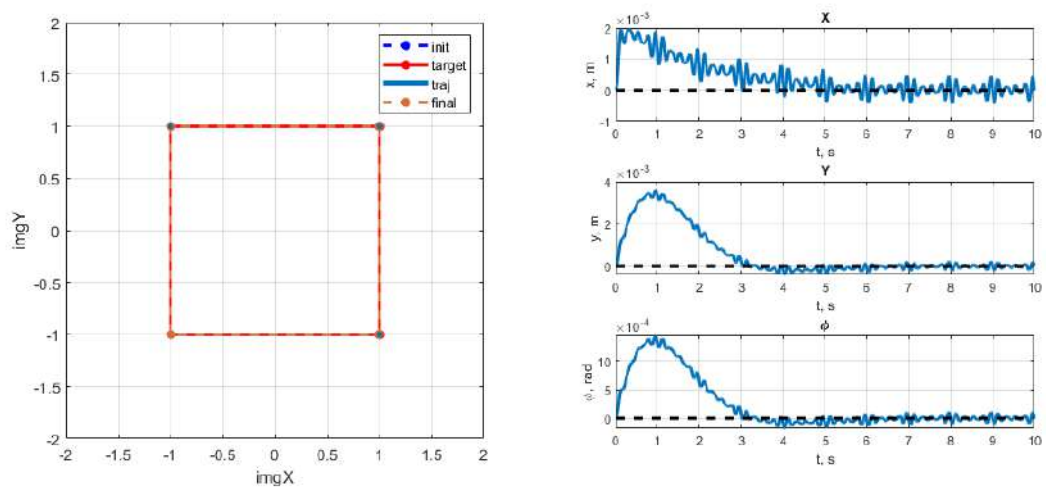


Рис. 2.6. Динамика движения робота при наличии полигармонического возмущения.

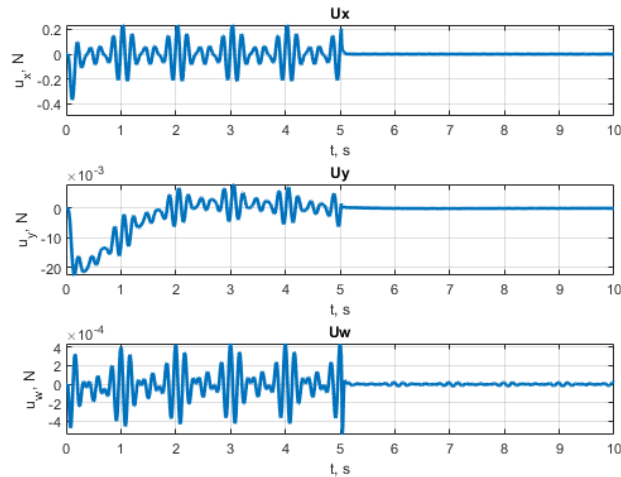


Рис. 2.7. Управляющий сигнал при наличии полигармонического возмущения.

Теперь введем в систему постоянное запаздывание $h = 0.06$ с. Рассмотрим первый случай при движении робота к визуальному маркеру без внешнего возмущения с выключенным динамическим корректором. Как видно из рис. 2.8, появляется заметное ухудшение качества динамики по курсовому углу, начинаются колебательные процессы. Дальнейшее увеличение запаздывания приводит к неустойчивости системы.

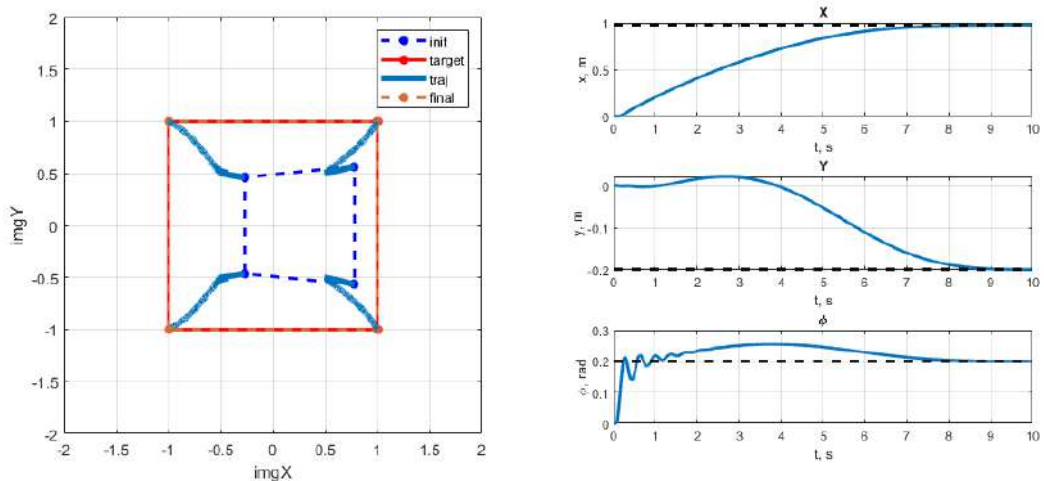


Рис. 2.8. Динамика движения робота при наличии постоянного запаздывания.

Осуществим трансформацию многоцелевого регулятора для компенсации постоянного запаздывания в соответствии с предыдущим параграфом.

Анализ рис. 2.9 позволяет сделать вывод о том, что в этом случае динамика робота практически совпадает со случаем без присутствия запаздывания.

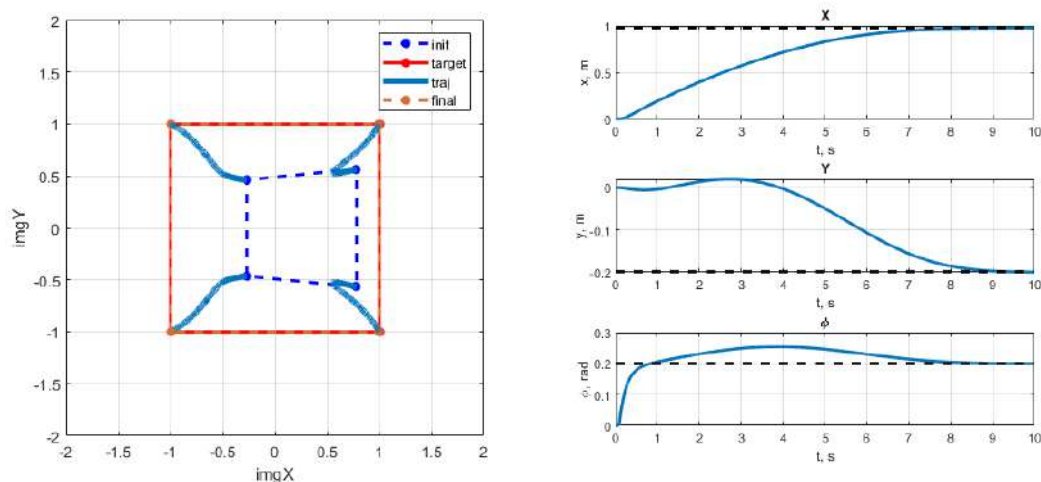


Рис. 2.9. Динамика движения робота при компенсации постоянного запаздывания.

Отметим также, что динамика системы при наличии постоянного или полигармонического внешнего возмущения в случае компенсации запаздывания также почти идентична соответствующим случаям без запаздывания, как видно из рис. 2.10, 2.11 и 2.12.

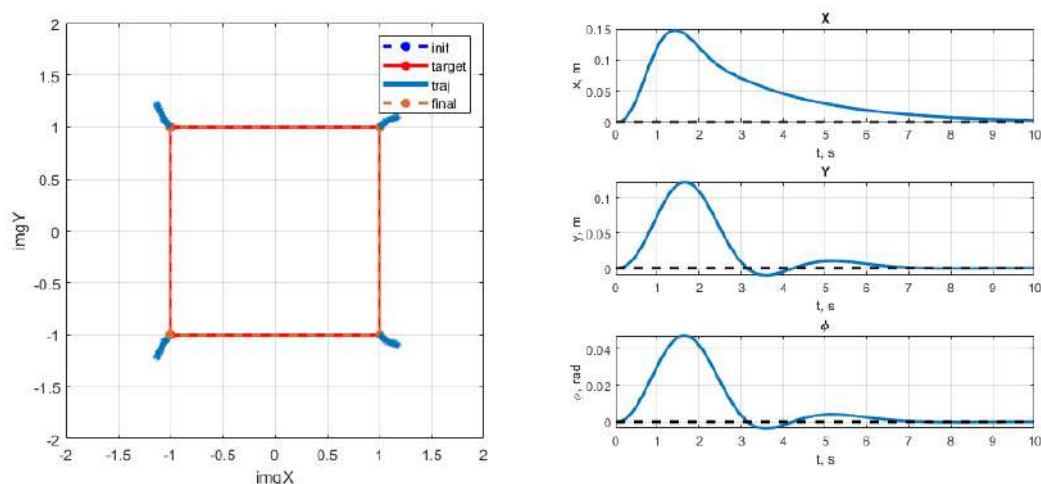


Рис. 2.10. Динамика движения робота при наличии постоянного внешнего возмущения с включенным корректором и компенсацией постоянного запаздывания.

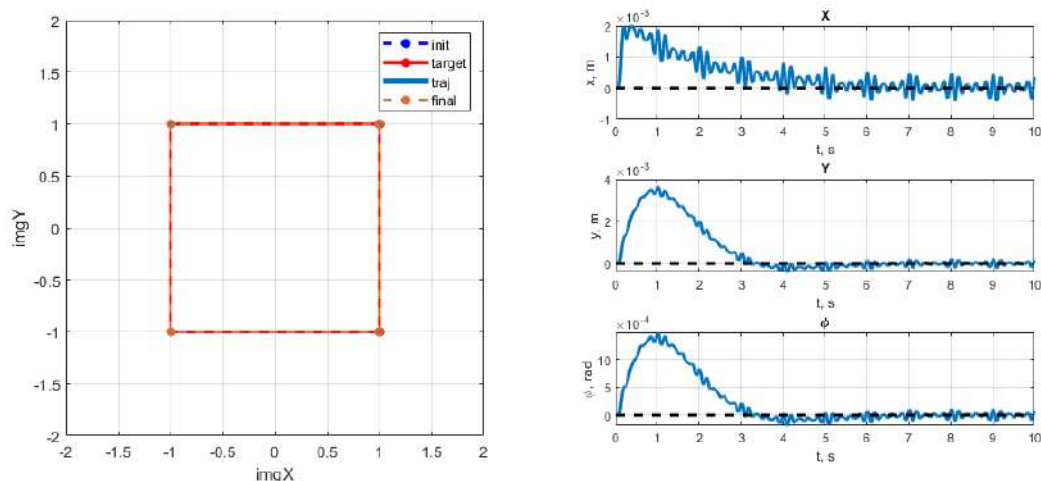


Рис. 2.11. Динамика движения робота при наличии полигармонического внешнего возмущения с включенным корректором и компенсацией постоянного запаздывания.

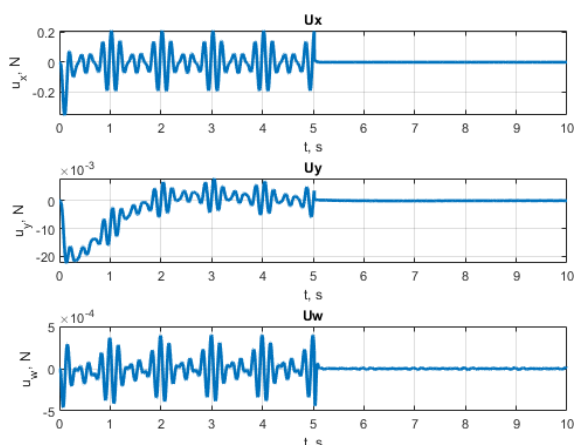


Рис. 2.12. Управляющий сигнал при наличии полигармонического внешнего возмущения с включенным корректором и компенсацией постоянного запаздывания.

Таким образом, многоцелевой регулятор в данной задаче действительно является эффективным инструментом для стабилизации и компенсации внешних возмущений, а трансформация регулятора для учета постоянного запаздывания позволяет получить динамику системы, совпадающую с динамикой при отсутствии запаздывания.

2.5. Позиционирование неполноприводного робота относительно визуального маркера

Теперь рассмотрим аналогичную задачу на примере неполноприводного робота. Примем в качестве объекта управления мобильный робот уницик-

лического типа, управление которым осуществляется путем задания напряжений на электромоторах двух ведущих колес (рис. 2.13). Как и ранее предположим, что в канале управления и канале внешних возмущений присутствует постоянное транспортное запаздывание h . Математическая модель динамики робота описывается системой уравнений [59]

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t-h) + \mathbf{d}(t-h), \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}(t))\mathbf{v}(t),\end{aligned}\tag{2.33}$$

где $\mathbf{v} = (v, \omega)^T$ – вектор скоростей: v – линейная скорость, ω – угловая скорость; $\mathbf{u} = (u_v, u_\omega)^T$ – вектор управляющих воздействий: u_v – сумма напряжений на моторах, u_ω – разность напряжений; $\boldsymbol{\eta} = (x, y, \varphi)^T$ – положение центра масс и курсовой угол робота; \mathbf{d} – вектор внешних возмущений; \mathbf{A} – диагональная матрица коэффициентов трения; \mathbf{B} – диагональная матрица коэффициентов при управляющих воздействиях. Единственная нелинейность системы (2.33) описывается матрицей

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) & 0 \\ \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

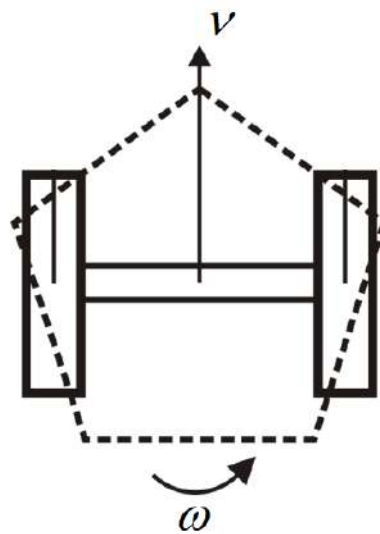


Рис. 2.13. Модель унициклического робота.

Матрица взаимосвязей $\mathbf{L}_s(s, \mathbf{Z}_c)$ в этом случае также достаточно проста:

$$\mathbf{L}(x_i, y_i, Z_i) = \begin{pmatrix} \frac{x_i}{Z_i} & -(1 + x_i^2) \\ \frac{y_i}{Z_i} & -x_i y_i \end{pmatrix}.$$

Как и в предыдущем параграфе, поставим задачу позиционирования робота относительно визуального маркера квадратной формы. Начальные условия и желаемое положение также совпадают. Примем следующие значения параметров системы и многоцелевого регулятора:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\mathbf{E}_{2 \times 2}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{E}_{2 \times 2}, \\ \mathbf{H}_v &= 100\mathbf{E}_{3 \times 3}, \quad \mathbf{H}_e = 100\mathbf{E}_{8 \times 8}, \\ \mathbf{K}_v &= \text{diag}([8 \quad 2]), \quad \mu = 4. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала простейшую ситуацию, в которой внешнее возмущение и запаздывание отсутствуют, соответственно, динамический корректор выключен, компенсация запаздывания не применяется. Рис. 2.14 демонстрирует динамику системы в этом случае. Как видно, желаемое положение маркера достигается примерно за 3 секунды и робот останавливается.

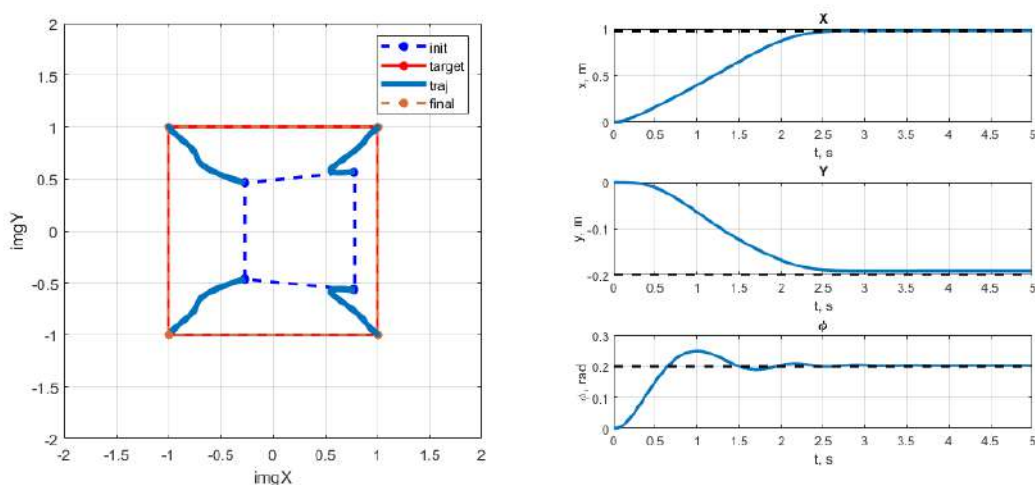


Рис. 2.14. Динамика системы при отсутствии внешних возмущений и запаздывания.

Далее введем постоянное внешнее возмущение $\mathbf{d} = (2 \ 1)^T$ при выключенном динамическом корректоре в ситуации, когда робот уже находится в желаемом положении. Из рис. 2.15 видно, что в этом случае робот смещается и не может компенсировать сдвиг, поскольку замкнутая система не обладает астатизмом.

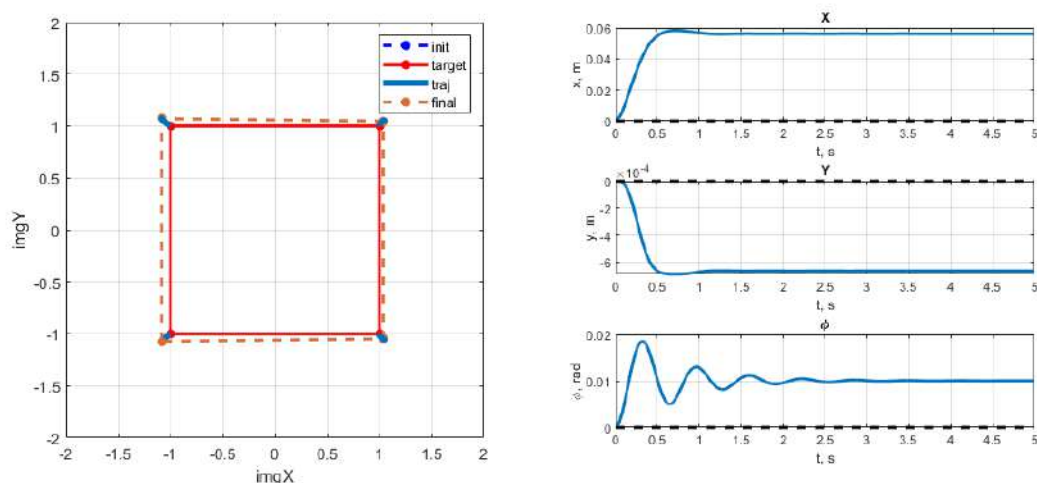


Рис. 2.15. Динамика системы при наличии внешнего возмущения.

Как и ранее, синтезируем динамический корректор одновременно для компенсации постоянного и полигармонического возмущения с тремя частотами $\omega_1 = 31.4159 \text{ c}^{-1}$, $\omega_2 = 37.6991 \text{ c}^{-1}$ и $\omega_3 = 43.9823 \text{ c}^{-1}$. В качестве матриц α_{vk} примем матрицы в форме Фробениуса с собственными числами $\lambda = -2.8$ кратности 4. Динамика системы с включенным корректором представлена на рис. 2.16. Видно, что в этом случае робот возвращается в исходное положение.

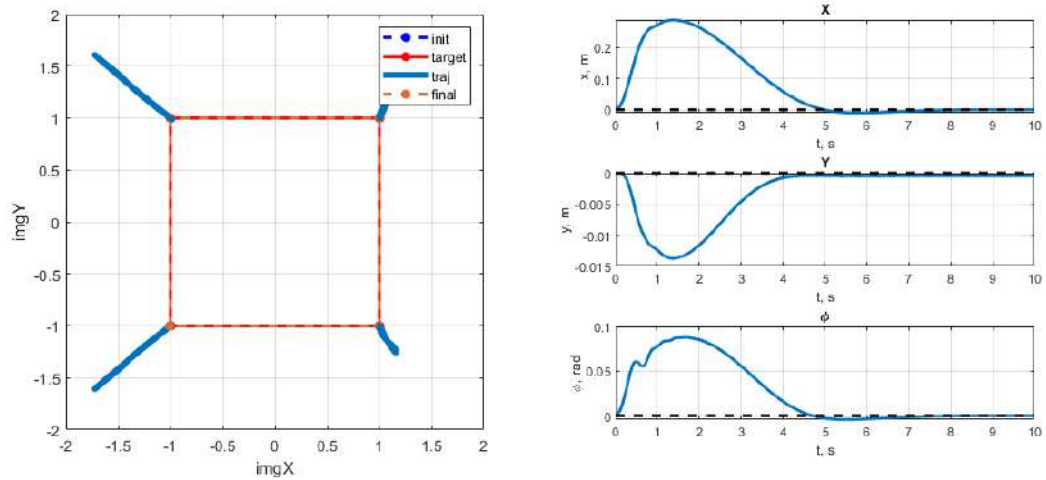


Рис. 2.16. Динамика точек на изображении при наличии внешнего возмущения и включенном динамическом корректоре.

Теперь рассмотрим влияние полигармонического возмущения в виде

$$w(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) + \sin(\omega_3 t),$$

$$\mathbf{d}(t) = (2w(t) \quad w(t))^T,$$

при этом динамический корректор остается выключенным первые 5 с. Из рис. 2.17 и 2.18 видно, что после включения корректора интенсивность управления значительно снижается, не оказывая при этом заметного влияния на динамику движения робота.

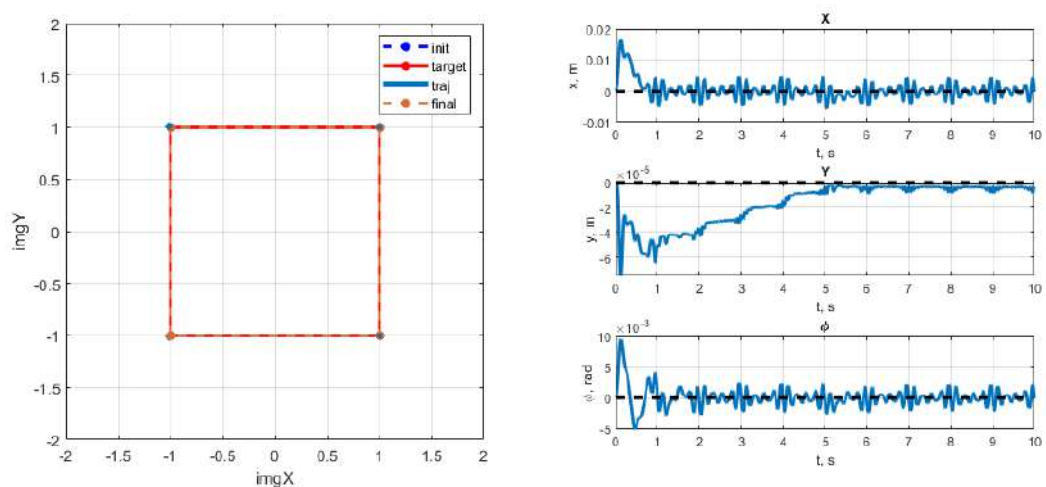


Рис. 2.17. Динамика системы при наличии полигармонического возмущения.

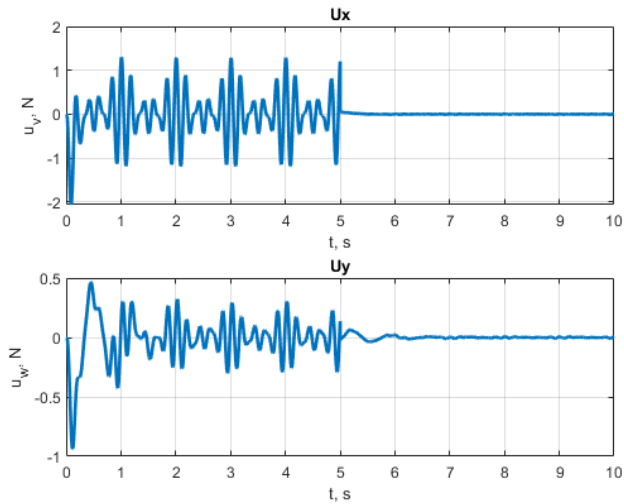


Рис. 2.18. Динамика управляющего сигнала при наличии полигармонического возмущения.

Снова вернемся к исходной задаче движения к визуальному маркеру и введем в систему постоянное запаздывание $h = 0.04$ с. На рис. 2.19 представлена динамика системы для этого случая, откуда видно, что система становится неустойчивой по курсовому углу.

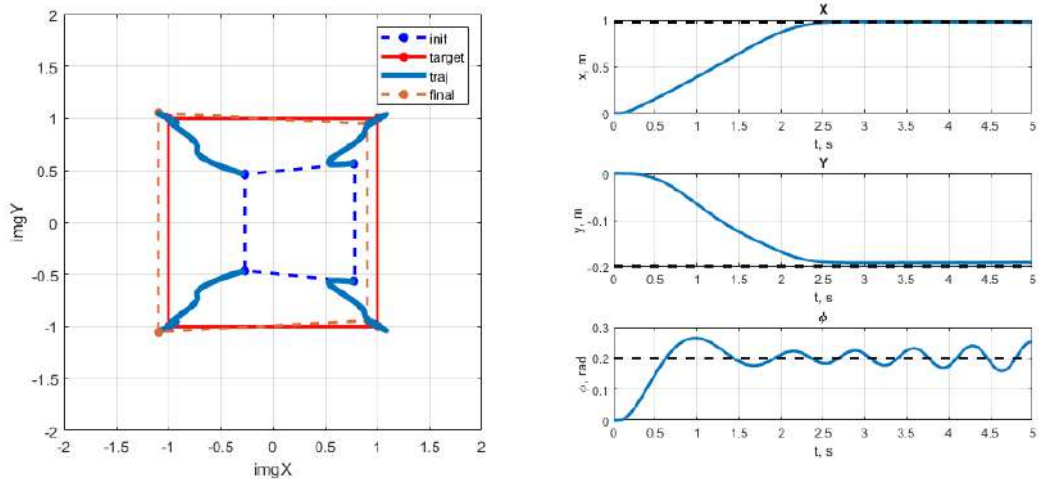


Рис. 2.19. Динамика системы при наличии постоянного запаздывания.

Как и в предыдущем параграфе, применим компенсирующую запаздывание трансформацию регулятора. Рис. 2.20, 2.21, 2.22 и 2.23 демонстрируют, что использование трансформированного регулятора позволяет получить динамику, почти идентичную случаю без запаздывания во всех режимах – без

внешнего возмущения, с постоянным и полигармоническим внешним возмущением с использованием динамического корректора.

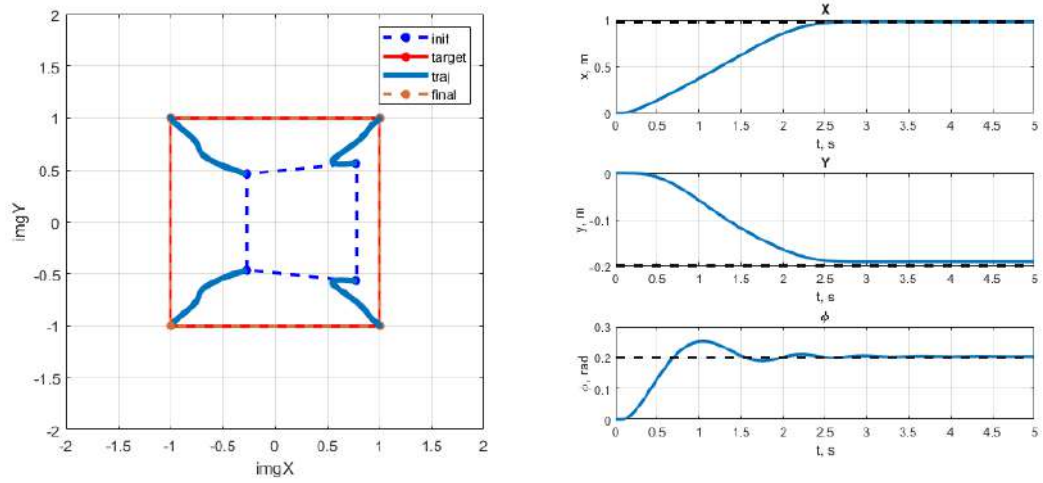


Рис. 2.20. Динамика системы при наличии постоянного запаздывания с применением компенсирующего регулятора.

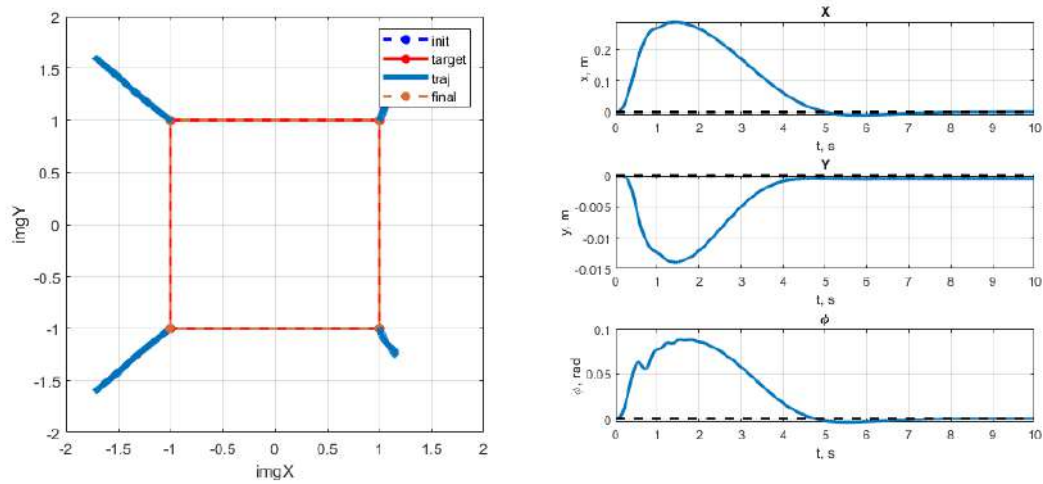


Рис. 2.21. Динамика системы при наличии постоянного внешнего возмущения.

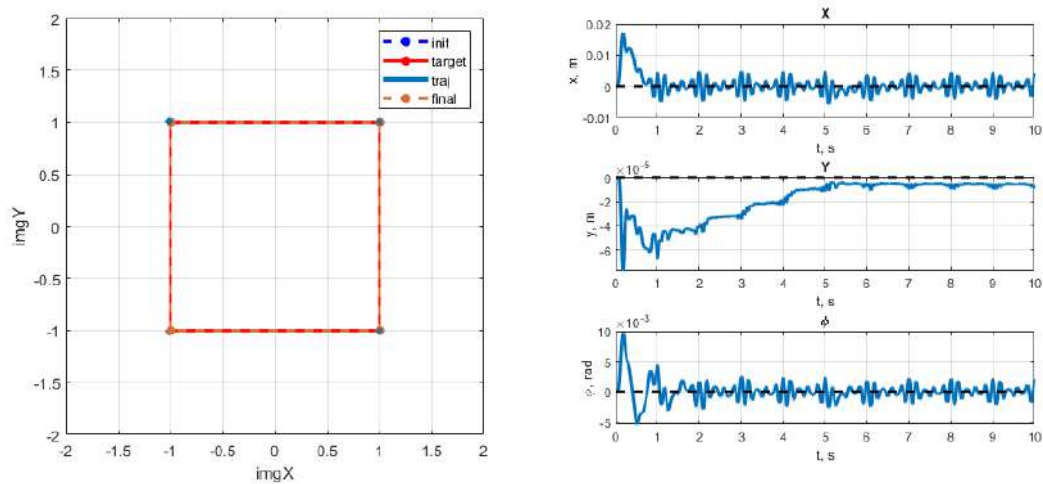


Рис. 2.22. Динамика системы при наличии полигармонического возмущения.

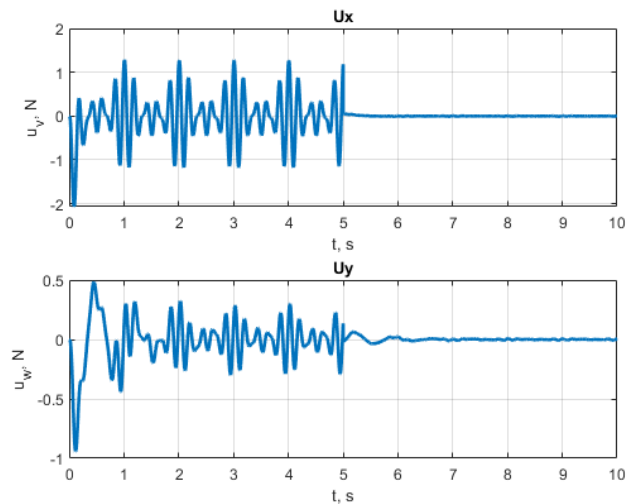


Рис. 2.23. Динамика управления при наличии полигармонического возмущения.

Таким образом, представленный подход может быть использован и в неполноприводных системах, по крайней мере, для некоторого подмножества положений.

2.6. Выводы

Результаты экспериментов с компьютерной моделью позволяют сделать вывод о том, что многоцелевые регуляторы могут эффективно применяться в задачах визуального позиционирования подвижных объектов. При этом сохраняются все преимущества таких регуляторов: независимость синтеза настраиваемых элементов и возможность отключения отдельных элементов многоцелевой структуры закона управления.

Как и в предыдущей главе, показано, что наличие запаздывания негативно влияет на качество динамики управляемого движения. Особая трансформация многоцелевого регулятора позволяет компенсировать запаздывание, сохраняя динамические характеристики замкнутой системы, синтезированной без учета запаздывания. При условии, что внешнее возмущение доступно для непосредственного измерения, компенсирующий регулятор работает и с применением динамического корректора.

Глава 3. Многоцелевое управление нелинейными системами на основе линеаризации обратной связью

В настоящее время роботы-манипуляторы являются неотъемлемой частью автоматизированного производства, заменяя труд человека там, где необходима точность и скорость работы [55]. Особый интерес при решении задач управления подобными объектами представляет тот факт, что математические модели динамики таких роботов содержат существенные нелинейности. В этом случае часто применяют подход, получивший название линеаризации обратной связью (feedback linearization, [69]), позволяющий избавиться от нелинейности.

В данной главе описывается комбинация использования многоцелевой структуры управления и компенсационного подхода, представленных в предыдущих главах, а также линеаризации обратной связью в задаче стабилизации заданного положения нелинейных объектов управления с учетом внешних возмущений и запаздывания. Стоит отметить, что существуют альтернативные методы учета запаздывания, например, использование асимптотических наблюдателей особого вида [88] или метод непрерывного размещения корней [80, 89], однако процедура синтеза регулятора в этом случае достаточно сложна и не всегда гарантирует обеспечение устойчивости замкнутой системы.

В параграфе 3.1 приводится формальная постановка задачи. Параграф 3.2 посвящен методу линеаризации обратной связью в представленной задаче. В параграфе 3.3 вводится многоцелевой регулятор для линеаризованной системы, а также процедура синтеза такого регулятора. Параграф 3.4 посвящен описанию трансформации многоцелевого регулятора для компенсации постоянного запаздывания. Наконец, параграф 3.5 посвящен результатам экспериментов с компьютерной моделью двухзвенного робота-манипулятора в различных режимах движения.

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную математическую модель динамики произвольного объекта управления с учетом постоянного запаздывания в канале управления и в канале внешнего возмущения в виде

$$\mathbf{M}[\boldsymbol{\theta}(t)]\ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{C}[\boldsymbol{\theta}(t), \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)] + \mathbf{g}[\boldsymbol{\theta}(t)] = \boldsymbol{\tau}(t-h) + \boldsymbol{\tau}_e(t-h), \quad (3.1)$$

где $\boldsymbol{\theta} \in E^n$ – вектор обобщенных координат, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ – положительно определенная симметричная матрица инерции, \mathbf{C} – вектор моментов Кориолиса и центробежных моментов, \mathbf{g} – вектор гравитационных моментов, $\boldsymbol{\tau} \in E^n$ – вектор управляющих моментов, $\boldsymbol{\tau}_e \in E^n$ – вектор внешних возмущений, t – текущий момент времени, h – постоянное запаздывание.

Будем считать, что целью управления является стабилизация текущего положения $\boldsymbol{\theta}$ объекта управления в заданном положении $\boldsymbol{\theta}_d$, т.е. обеспечение условия

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}_d. \quad (3.2)$$

Рассмотрим различные режимы движения, в которых предъявляются особые требования к динамике системы.

1) При отсутствии внешних возмущений система находится в режиме *собственного движения*, при этом в качестве основных требований к качеству динамики, помимо условия (3.2), могут выступать ограничения на время переходного процесса и перерегулирование.

2) В случае $\boldsymbol{\tau}_e(t) = \boldsymbol{\tau}_{e0}$ система находится в режиме *движения при наличии постоянного возмущения*. Будем считать, что в этом режиме желаемое положение $\boldsymbol{\theta}_d$ соответствует начальному положению $\boldsymbol{\theta}_0$, при этом заданы ограничения на максимальное отклонение текущего состояния $\boldsymbol{\theta}(t)$ от заданного положения $\boldsymbol{\theta}_d$, а целью управления является обеспечение астатизма системы с учетом этих ограничений.

3) В режиме движения при воздействии периодического возмущения необходимо минимизировать интенсивность реакции управляющего сигнала на полигармоническое возмущение с известными частотами, не ухудшив при этом качество стабилизации. В этом режиме так же примем $\theta_d = \theta_0$.

3.2. Линеаризация обратной связью

Сначала рассмотрим более простую задачу стабилизации текущего положения объекта управления в режиме собственного движения (т.е. при отсутствии внешнего возмущения), а также без учета запаздывания. Тогда математическая модель примет вид

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\tau}. \quad (3.3)$$

Перед введением в рассмотрение многоцелевой структуры управления обратимся к следующей проблеме. Матрицы $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ и $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ в уравнениях (3.3) в общем случае являются нелинейными. В связи с этим осуществим линеаризацию системы (3.3) за счет формирования управляющего сигнала таким образом, чтобы избавиться от нелинейностей.

Разрешая (3.3) относительно старшей производной, получим

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})). \quad (3.4)$$

Далее приведем (3.4) к системе ОДУ первого порядка. Введем в рассмотрение вектор $\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$. Тогда систему (3.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Представим управляющий сигнал в виде

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}, \quad (3.6)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ – некоторая векторная функция. Подставляя (3.6) в (3.5), получим линейную стационарную (LTI) систему

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{u},\end{aligned}\tag{3.7}$$

для которой \mathbf{u} является управляющим сигналом.

Асимптотическая устойчивость системы (3.7) достигается за счет синтеза вектора \mathbf{u} в виде

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta} - \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\omega},\tag{3.8}$$

где \mathbf{K}_θ и \mathbf{K}_ω – произвольные матрицы, обеспечивающие гурвицевость матрицы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{K}_\theta & -\mathbf{K}_\omega \end{pmatrix},$$

а также требуемое качество динамики замкнутой системы. Например, если задан квадратичный функционал качества, то матрицы \mathbf{K}_θ и \mathbf{K}_ω могут быть найдены в результате LQR-синтеза.

3.3. Синтез многоцелевого регулятора

Теперь рассмотрим общий случай для произвольного режима движения, в котором могут присутствовать внешние возмущения. Обратимся к вопросу синтеза регулятора для формирования управляющего сигнала в линеаризованной системе (3.7) с учетом требований к динамике в различных режимах движения. Для начала будем считать, что дана произвольная линейная система в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{d}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx},\end{aligned}\tag{3.9}$$

где \mathbf{x} – вектор состояния системы, \mathbf{y} – вектор измерений, $\mathbf{d} = \mathbf{d}(t)$ – вектор внешних возмущений, \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} – постоянные матрицы. Для стабилизации системы (3.9) с учетом заданных требований будем формировать управляющий сигнал при помощи многоцелевого регулятора в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= \mathbf{A}z + \mathbf{B}u + \mathbf{H}(y - Cz), \\
 \dot{p} &= \alpha p + \beta(y - Cz), \\
 \dot{\xi} &= \gamma p + \mu(y - Cz), \\
 u &= -\mathbf{K}z + \xi.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Первое уравнение системы (3.10) представляет собой асимптотический наблюдатель, задача которого состоит в моделировании динамики исходного объекта управления. Выход наблюдателя используется в динамическом корректоре, представленном вторым и третьим уравнениями системы (3.10). Корректор используется для компенсации внешних возмущений в различных режимах движения. Например, он может быть использован для обеспечения астатизма по выходу y объекта управления при наличии постоянного внешнего возмущения, или для минимизации интенсивности управляющего сигнала в результате реакции на полигармоническое возмущение. Наконец, последнее уравнение регулятора (3.10) представляет собой управляющий сигнал, который непосредственно подается на вход линейной системы (3.9).

Обратимся к задаче синтеза многоцелевого регулятора. Настраиваемыми элементами структуры (3.10) являются матрица \mathbf{H} асимптотического наблюдателя, матрица \mathbf{K} закона управления и матрицы α , β , γ , μ динамического корректора. Рассмотрим уравнения замкнутой системы (3.9) – (3.10) без внешнего возмущения, избавляясь от переменных y , ξ , u :

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \mathbf{A}x - \mathbf{B}\mathbf{K}z + \mathbf{B}\gamma p + \mathbf{B}\mu\mathbf{C}(x - z), \\
 \dot{z} &= \mathbf{A}z - \mathbf{B}\mathbf{K}z + \mathbf{B}\gamma p + \mathbf{B}\mu\mathbf{C}(x - z) + \mathbf{H}\mathbf{C}(x - z), \\
 \dot{p} &= \alpha p + \beta\mathbf{C}(x - z),
 \end{aligned}$$

или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mu\mathbf{C} & -\mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{B}\mu\mathbf{C} & \mathbf{B}\gamma \\ \mathbf{B}\mu\mathbf{C} + \mathbf{H}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{B}\mu\mathbf{C} - \mathbf{H}\mathbf{C} & \mathbf{B}\gamma \\ \beta\mathbf{C} & -\beta\mathbf{C} & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \\ p \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Характеристический полином системы (3.11) равен

$$\Delta(s) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}s - \mathbf{A} - \mathbf{V}\mu\mathbf{C} & \mathbf{BK} + \mathbf{V}\mu\mathbf{C} & -\mathbf{B}\gamma \\ -\mathbf{V}\mu\mathbf{C} - \mathbf{HC} & \mathbf{E}s - \mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{V}\mu\mathbf{C} + \mathbf{HC} & -\mathbf{B}\gamma \\ -\beta\mathbf{C} & \beta\mathbf{C} & \mathbf{E}s - \alpha \end{pmatrix}.$$

Прибавляя к первому столбцу второй, получим

$$\Delta(s) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}s - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & \mathbf{BK} + \mathbf{V}\mu\mathbf{C} & -\mathbf{B}\gamma \\ \mathbf{E}s - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & \mathbf{E}s - \mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{V}\mu\mathbf{C} + \mathbf{HC} & -\mathbf{B}\gamma \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{C} & \mathbf{E}s - \alpha \end{pmatrix}.$$

Далее, вычитая из второй строки первую, имеем

$$\Delta(s) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}s - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & \mathbf{BK} + \mathbf{V}\mu\mathbf{C} & -\mathbf{B}\gamma \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}s - \mathbf{A} + \mathbf{HC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{C} & \mathbf{E}s - \alpha \end{pmatrix}.$$

По свойству определителя блочно-треугольной матрицы можем записать

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \det(\mathbf{E}s - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}s - \mathbf{A} + \mathbf{HC} & \mathbf{0} \\ \beta\mathbf{C} & \mathbf{E}s - \alpha \end{pmatrix} = \\ &= \det(\mathbf{E}s - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \det(\mathbf{E}s - \mathbf{A} + \mathbf{HC}) \det(\mathbf{E}s - \alpha) = \Delta_b(s) \Delta_o(s) \Phi(s), \end{aligned}$$

где $\Delta_b(s)$, $\Delta_o(s)$ и $\Phi(s)$ – характеристические полиномы системы (3.9), замкнутой базовым законом управления, асимптотического наблюдателя и динамического корректора, соответственно. Таким образом, в общем случае для обеспечения асимптотической устойчивости замкнутой системы (3.9) – (3.10) необходимо выполнение условий:

- 1) матрица \mathbf{K} закона управления должна обеспечивать гурвицевость матрицы $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$;
- 2) матрица \mathbf{H} асимптотического наблюдателя должна обеспечивать гурвицевость матрицы $\mathbf{A} - \mathbf{HC}$;
- 3) матрица α динамического корректора должна быть гурвицевой.

Дальнейшее уточнение значений настраиваемых элементов зависит от конкретных требований, предъявляемых к качеству динамики управляемого движения.

Рассмотрим, в частности, вопросы обеспечения астатизма и минимизации реакции управляющего сигнала на полигармоническое

возмущение в соответствующих режимах. Вернемся к линеаризованной системе (3.7). Несмотря на то, что для компенсации нелинейностей используются точные измерения переменных θ и ω , будем считать, что выходом линеаризованной системы является вектор $y = \theta$. Далее будет показано, что этого достаточно для эффективной работы многоцелевого регулятора, который в этом случае можно представить в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}_{\theta} &= \mathbf{z}_{\omega} + \mathbf{H}_{\theta}(\theta - \mathbf{z}_{\theta}), \\ \dot{\mathbf{z}}_{\omega} &= \mathbf{u} + \mathbf{H}_{\omega}(\theta - \mathbf{z}_{\theta}), \\ \dot{\mathbf{p}} &= \alpha \mathbf{p} + \beta(\theta - \mathbf{z}_{\theta}), \\ \xi &= \gamma \mathbf{p} + \mu(\theta - \mathbf{z}_{\theta}), \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K}_{\theta}(\mathbf{z}_{\theta} - \theta_d) - \mathbf{K}_{\omega} \mathbf{z}_{\omega} + \xi,\end{aligned}\tag{3.12}$$

где \mathbf{z}_{θ} и \mathbf{z}_{ω} – векторы состояния соответствующих асимптотических наблюдателей по переменным θ и ω . Настраиваемыми элементами структуры (3.12) являются матрицы \mathbf{H}_{θ} , \mathbf{H}_{ω} , \mathbf{K}_{θ} , \mathbf{K}_{ω} , α , β , γ , μ . Из соображений, приведенных выше для регулятора (3.10) следует, что:

- 1) матрицы \mathbf{K}_{θ} и \mathbf{K}_{ω} базового закона управления должны обеспечивать гурвицевость матрицы

$$\mathbf{K}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{K}_{\theta} & -\mathbf{K}_{\omega} \end{pmatrix};$$

- 2) матрицы \mathbf{H}_{θ} и \mathbf{H}_{ω} асимптотического наблюдателя задаются из аналогичных соображений, обеспечивая гурвицевость матрицы

$$\mathbf{H}_o = \begin{pmatrix} -\mathbf{H}_{\theta} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{H}_{\omega} & \mathbf{0} \end{pmatrix};$$

- 3) матрица α динамического корректора должна быть гурвицевой.

Далее обратимся к вопросу синтеза динамического корректора для обеспечения астатизма замкнутой системы в режиме движения при наличии постоянного внешнего возмущения. В tf-форме корректор можно представить как

$$\xi = \mathbf{F}(s)(\theta - \mathbf{z}_{\theta}),$$

где s – переменная Лапласа, $\mathbf{F}(s) = \gamma(\mathbf{E}s - \boldsymbol{\alpha})^{-1}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\mu}$ – передаточная матрица корректора.

Присутствие внешнего возмущения в уравнении (3.3) приводит к тому, что фактически в результате линеаризации обратной связью вместо (3.7) получим систему

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{u} + \mathbf{d},\end{aligned}\tag{3.13}$$

где $\mathbf{d}(t) = \mathbf{M}^{-1}[\boldsymbol{\theta}(t)]\boldsymbol{\tau}_e(t)$.

В рассматриваемом режиме движения внешнее возмущение постоянно или медленно изменяется, т.е. можно считать, что $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_0$.

Теорема 3.1. *Замкнутая система (3.13), (3.12) является астатической по отношению к любому постоянному возмущению $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_0$, если передаточная матрица динамического корректора удовлетворяет условию*

$$\mathbf{F}(0) = -\mathbf{K}_\theta - \mathbf{K}_\omega \mathbf{H}_\theta - \mathbf{H}_\omega.\tag{3.14}$$

Доказательство. Уравнения динамики замкнутой системы (3.13), (3.12) можно записать как

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{u} + \mathbf{d}_0, \\ \dot{\mathbf{z}}_\theta &= \mathbf{z}_\omega + \mathbf{H}_\theta \boldsymbol{\varepsilon}_\theta, \\ \dot{\mathbf{z}}_\omega &= \mathbf{u} + \mathbf{H}_\omega \boldsymbol{\varepsilon}_\theta, \\ \boldsymbol{\xi} &= \mathbf{F}(s)\boldsymbol{\varepsilon}_\theta, \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K}_\theta(\mathbf{z}_\theta - \boldsymbol{\theta}_d) - \mathbf{K}_\omega \mathbf{z}_\omega + \boldsymbol{\xi},\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_\theta = \boldsymbol{\theta} - \mathbf{z}_\theta$. Вычитая третье и четвертое уравнения из первых двух, вводя обозначение $\boldsymbol{\varepsilon}_\omega = \boldsymbol{\omega} - \mathbf{z}_\omega$, а также избавляясь от векторов \mathbf{u} и $\boldsymbol{\xi}$, получим

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\theta &= \boldsymbol{\varepsilon}_\omega - \mathbf{H}_\theta \boldsymbol{\varepsilon}_\theta, \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\omega &= -\mathbf{H}_\omega \boldsymbol{\varepsilon}_\theta + \mathbf{d}_0, \\ \dot{\mathbf{z}}_\theta &= \mathbf{z}_\omega + \mathbf{H}_\theta \boldsymbol{\varepsilon}_\theta, \\ \dot{\mathbf{z}}_\omega &= -\mathbf{K}_\theta(\mathbf{z}_\theta - \boldsymbol{\theta}_d) - \mathbf{K}_\omega \mathbf{z}_\omega + \mathbf{F}(s)\boldsymbol{\varepsilon}_\theta + \mathbf{H}_\omega \boldsymbol{\varepsilon}_\theta,\end{aligned}\tag{3.15}$$

Рассмотрим положение равновесия системы (3.15):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_{\omega 0} - \mathbf{H}_{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta 0} &= \mathbf{0}, \\
-\mathbf{H}_{\omega} \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta 0} + \mathbf{d}_0 &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{z}_{\omega 0} + \mathbf{H}_{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta 0} &= \mathbf{0}, \\
-\mathbf{K}_{\theta}(\mathbf{z}_{\theta 0} - \boldsymbol{\theta}_d) - \mathbf{K}_{\omega} \mathbf{z}_{\omega 0} + (\mathbf{F}(0) + \mathbf{H}_{\omega}) \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta 0} &= \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{\omega 0}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta 0}$, $\mathbf{z}_{\omega 0}$ и $\mathbf{z}_{\theta 0}$ – установившиеся значения соответствующих векторов. Из второго уравнения (3.16) видно, что $\mathbf{d}_0 = \mathbf{H}_{\omega} \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta 0}$, т.е. установившийся вектор невязок $\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta 0}$ и вектор внешнего возмущения \mathbf{d}_0 напрямую связаны между собой. Отсюда следует, что далее вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta 0}$ можно рассматривать как внешнее возмущение.

Из третьего уравнения (3.16) получаем, что $\mathbf{z}_{\omega 0} = -\mathbf{H}_{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta 0}$. Подставляя это равенство в последнее уравнение системы (3.16) получим

$$-\mathbf{K}_{\theta}(\mathbf{z}_{\theta 0} - \boldsymbol{\theta}_d) + \mathbf{K}_{\omega} \mathbf{H}_{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta 0} + (\mathbf{F}(0) + \mathbf{H}_{\omega}) \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta 0} = 0,$$

или, подставляя $\mathbf{z}_{\theta 0} = \boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta 0}$, где $\boldsymbol{\theta}_0$ – установившееся значение $\boldsymbol{\theta}$:

$$\mathbf{K}_{\theta}(\boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\theta}_d) = (\mathbf{K}_{\theta} + \mathbf{K}_{\omega} \mathbf{H}_{\theta} + \mathbf{F}(0) + \mathbf{H}_{\omega}) \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta 0},$$

откуда следует, что для того, чтобы в положении равновесия выполнялось равенство $\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\theta}_d$, необходимо обеспечить равенство нулю множителя при $\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta 0}$, т.е.

$$\mathbf{K}_{\theta} + \mathbf{K}_{\omega} \mathbf{H}_{\theta} + \mathbf{F}(0) + \mathbf{H}_{\omega} = 0,$$

что эквивалентно условию (3.14). ■

Таким образом, если передаточная матрица динамического корректора удовлетворяет условию (3.14), то замкнутая система (3.13), (3.12) обладает свойством астатизма по отношению к внешнему возмущению \mathbf{d}_0 .

Теперь обратимся к задаче синтеза динамического корректора в режиме движения при воздействии полигармонического возмущения в виде

$$w(t) = \sum_{i=1}^{N_{\omega}} A_i \sin(\omega_i t),$$

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{a}w(t),$$

где N_ω – количество гармоник, A_i – постоянные амплитуды, ω_i – частоты, \mathbf{a} – вектор постоянных коэффициентов. Рассмотрим многоцелевой регулятор в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}_\theta &= \mathbf{z}_\omega + \mathbf{H}_\theta \boldsymbol{\varepsilon}_\theta, \\ \dot{\mathbf{z}}_\omega &= \mathbf{u} + \mathbf{H}_\omega \boldsymbol{\varepsilon}_\theta, \\ \boldsymbol{\xi} &= \mathbf{F}(s) \boldsymbol{\varepsilon}_\theta, \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K}_\theta \mathbf{z}_\theta - \mathbf{K}_\omega \mathbf{z}_\omega + \boldsymbol{\xi}.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Подставляя выражение для управляющего сигнала \mathbf{u} во второе уравнение (3.17), получим

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}_\theta &= \mathbf{z}_\omega + \mathbf{H}_\theta \boldsymbol{\varepsilon}_\theta, \\ \dot{\mathbf{z}}_\omega &= -\mathbf{K}_\theta \mathbf{z}_\theta - \mathbf{K}_\omega \mathbf{z}_\omega + \boldsymbol{\xi} + \mathbf{H}_\omega \boldsymbol{\varepsilon}_\theta,\end{aligned}$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_\theta \\ \dot{\mathbf{z}}_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{K}_\theta & -\mathbf{K}_\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_\theta \\ \mathbf{z}_\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{H}_\theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_\omega & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}.\quad (3.18)$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{A}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{K}_\theta & -\mathbf{K}_\omega \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_\theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_\omega & \mathbf{E} \end{pmatrix},$$

представим (3.18) в tf-форме:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z}_\theta \\ \mathbf{z}_\omega \end{pmatrix} = \mathbf{P}(s) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_\theta \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix},\quad (3.19)$$

где

$$\mathbf{P}(s) = (\mathbf{E}s - \mathbf{A}_s)^{-1} \mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}(s) & \mathbf{P}_{12}(s) \\ \mathbf{P}_{21}(s) & \mathbf{P}_{22}(s) \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.2. *Фильтрация полигармонического возмущения с частотами ω_i , $i = \overline{1, N_\omega}$ в канале управления обеспечивается при выполнении условий*

$$\mathbf{T}(j\omega_i) = -\mathbf{T}^{-1}(j\omega_i) [\mathbf{K}_\theta \mathbf{P}_{11}(j\omega_i) + \mathbf{K}_\omega \mathbf{P}_{21}(j\omega_i)],\quad (3.20)$$

где $\mathbf{T}(j\omega_i) = \mathbf{K}_\theta \mathbf{P}_{12}(j\omega_i) + \mathbf{K}_\omega \mathbf{P}_{22}(j\omega_i) - \mathbf{E}$.

Доказательство. Из (3.19) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_\theta &= \mathbf{P}_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_\theta + \mathbf{P}_{12}\boldsymbol{\xi}, \\ \mathbf{z}_\omega &= \mathbf{P}_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_\theta + \mathbf{P}_{22}\boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Подставляя (3.21) в выражение для управляющего сигнала в (3.17), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbf{K}_\theta(\mathbf{P}_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_\theta + \mathbf{P}_{12}\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{K}_\omega(\mathbf{P}_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_\theta + \mathbf{P}_{22}\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\xi} = \\ &= -(\mathbf{K}_\theta\mathbf{P}_{11} + \mathbf{K}_\omega\mathbf{P}_{21})\boldsymbol{\varepsilon}_\theta - (\mathbf{K}_\theta\mathbf{P}_{12} + \mathbf{K}_\omega\mathbf{P}_{22} - \mathbf{E})\boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

Введем обозначение $\mathbf{T}(s) = \mathbf{K}_\theta\mathbf{P}_{12}(s) + \mathbf{K}_\omega\mathbf{P}_{22}(s) - \mathbf{E}$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -(\mathbf{K}_\theta\mathbf{P}_{11} + \mathbf{K}_\omega\mathbf{P}_{21})\boldsymbol{\varepsilon}_\theta - \mathbf{T}\boldsymbol{\xi} = \\ &= -(\mathbf{K}_\theta\mathbf{P}_{11} + \mathbf{K}_\omega\mathbf{P}_{21})\boldsymbol{\varepsilon}_\theta - \mathbf{T}\mathbf{F}\boldsymbol{\varepsilon}_\theta = \\ &= -(\mathbf{K}_\theta\mathbf{P}_{11} + \mathbf{K}_\omega\mathbf{P}_{21} + \mathbf{T}\mathbf{F})\boldsymbol{\varepsilon}_\theta. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Выражение $\mathbf{G}(s) = -[\mathbf{K}_\theta\mathbf{P}_{11}(s) + \mathbf{K}_\omega\mathbf{P}_{21}(s) + \mathbf{T}(s)\mathbf{F}(s)]$ из (3.22) является передаточной матрицей от входа $\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$ к выходу \mathbf{u} . Для обеспечения минимизации реакции управляющего сигнала на полигармоническое возмущение с частотами ω_i , $i = \overline{1, N_\omega}$ необходимо обеспечить выполнение условия $\mathbf{G}(j\omega_i) = 0$ за счет выбора передаточной матрицы $\mathbf{F}(s)$ динамического корректора, откуда получаем условия (3.20). ■

Наконец, обсудим вопрос синтеза передаточной матрицы $\mathbf{F}(s) = (\mathbf{F}_1(s) \ \mathbf{F}_2(s) \ \dots \ \mathbf{F}_n(s))^T$ динамического корректора, удовлетворяющей условиям (3.14) и (3.20), т.е. обеспечивающей астатизм замкнутой системы и фильтрацию полигармонического возмущения. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(0) &= \mathbf{F}^0 = (\mathbf{F}_1^0 \ \mathbf{F}_2^0 \ \dots \ \mathbf{F}_n^0)^T, \\ \mathbf{F}(j\omega_i) &= \mathbf{F}_i^* = (\mathbf{F}_{i1}^* \ \mathbf{F}_{i2}^* \ \dots \ \mathbf{F}_{in}^*)^T, \\ & i = \overline{1, N_\omega}, \end{aligned}$$

где \mathbf{F}^0 и \mathbf{F}_i^* – постоянные матрицы. Каждая отдельная компонента динамического корректора, соответствующая обобщенной координате с индексом $k = \overline{1, n}$, описывается уравнением

$$\zeta_k = \mathbf{F}_k(s)\boldsymbol{\varepsilon}_\theta,$$

что можно представить в пространстве состояний как

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_k &= \mathbf{a}_k \mathbf{p}_k + \mathbf{b}_k \varepsilon_\theta, \\ \zeta_k &= \gamma_k \mathbf{p}_k + \mu_k \varepsilon_\theta.\end{aligned}\quad (3.23)$$

Здесь $\mathbf{p}_k \in E^{2N_\omega}$ – вектор состояния соответствующей компоненты динамического корректора. Отметим, что с учетом (3.23) передаточную матрицу $\mathbf{F}_k(s)$ можно представить как $\mathbf{F}_k(s) = \gamma_k (\mathbf{E}_{2N_\omega} s - \mathbf{a}_k)^{-1} \mathbf{b}_k + \mu_k$.

Таким образом, условия (3.14) и (3.20) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}-\gamma_k \mathbf{a}_k^{-1} \mathbf{b}_k + \mu_k &= \mathbf{F}_k^0, \\ \gamma_k (\mathbf{E}_{2N_\omega} j\omega_i - \mathbf{a}_k)^{-1} \mathbf{b}_k + \mu_k &= \mathbf{R}_{ik} + \mathbf{I}_{ik} j, \\ i = \overline{1, N_\omega}, k = \overline{1, n},\end{aligned}\quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{ik} &= \operatorname{Re} \mathbf{F}_{ik}^*, \\ \mathbf{I}_{ik} &= \operatorname{Im} \mathbf{F}_{ik}^*.\end{aligned}$$

Зададим произвольным образом ненулевые векторы γ_k размерности $1 \times 2n$ и гурвицевы матрицы \mathbf{a}_k размерности $2n \times 2n$. Отметим, что в этом случае матрицы $\mathbf{E}_{2N_\omega} j\omega_i - \mathbf{a}_k$ из (3.24) являются невырожденными. Вычтем первое уравнение (3.24) из второго и выделим вещественную и мнимую части, тогда:

$$\begin{aligned}\gamma_k (\mathbf{a}_{ik}^R + \mathbf{a}_k^{-1}) \mathbf{b}_k &= \mathbf{R}_{ik} - \mathbf{F}_k^0, \\ \gamma_k \mathbf{a}_{ik}^I \mathbf{b}_k &= \mathbf{I}_{ik}, \\ i = \overline{1, N_\omega}, k = \overline{1, n},\end{aligned}\quad (3.25)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{ik}^R &= \operatorname{Re}(\mathbf{E}_{2N_\omega} j\omega_i - \mathbf{a}_k)^{-1}, \\ \mathbf{a}_{ik}^I &= \operatorname{Im}(\mathbf{E}_{2N_\omega} j\omega_i - \mathbf{a}_k)^{-1}.\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} \gamma_k(\mathbf{a}_{1k}^R + \mathbf{a}_k^{-1}) \\ \gamma_k \mathbf{a}_{1k}^I \\ \dots \\ \gamma_k(\mathbf{a}_{N_\omega k}^R + \mathbf{a}_k^{-1}) \\ \gamma_k \mathbf{a}_{N_\omega k}^I \end{pmatrix}, \mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{1k} - \mathbf{F}_k^0 \\ \mathbf{I}_{1k} \\ \dots \\ \mathbf{R}_{N_\omega k} - \mathbf{F}_k^0 \\ \mathbf{I}_{N_\omega k} \end{pmatrix}, k = \overline{1, n}, \quad (3.26)$$

тогда (3.25) можно представить в виде линейной системы

$$\mathbf{A}_k \boldsymbol{\beta}_k = \mathbf{B}_k \quad (3.27)$$

с $2N_\omega \times n$ уравнениями и $2N_\omega \times n$ неизвестными для каждого фиксированного k . С учетом того факта, что матрицы \mathbf{A}_k являются невырожденными, система (3.27) имеет единственное решение – матрицу $\boldsymbol{\beta}_k$.

В свою очередь, зная $\boldsymbol{\beta}_k$, можно получить матрицу $\boldsymbol{\mu}_k$ по формуле

$$\boldsymbol{\mu}_k = \mathbf{F}_k^0 + \gamma_k \mathbf{a}_k^{-1} \boldsymbol{\beta}_k, k = \overline{1, n}. \quad (3.28)$$

полученной из первого уравнения системы (3.24).

Таким образом, динамический корректор, представленный полученными матрицами \mathbf{a}_k , $\boldsymbol{\beta}_k$, γ_k , $\boldsymbol{\mu}_k$, $k = \overline{1, n}$, обеспечивает астатизм замкнутой системы по выходу $\boldsymbol{\theta}$ и фильтрацию в канале управления полигармонического возмущения с частотами ω_i , $i = \overline{1, N_\omega}$.

Представленные выше рассуждения позволяют сформулировать следующий алгоритм синтеза многоцелевого регулятора.

Алгоритм № 1 (синтеза многоцелевого регулятора)

1) Задать значения матриц \mathbf{K}_θ и \mathbf{K}_ω базового закона управления (3.8), обеспечивающие гурвицевость матрицы \mathbf{K}_b и необходимое качество динамики замкнутой системы.

2) Зафиксировать матрицы \mathbf{H}_θ и \mathbf{H}_ω асимптотических наблюдателей, обеспечивающие гурвицевость матрицы \mathbf{H}_o и желаемую степень сходимости к нулю невязок между оценками и фактическим состоянием объекта управления.

3) По формулам из условия (3.14) вычислить соответствующее значение $\mathbf{F}(0) = \mathbf{F}^0$ передаточной матрицы корректора, обеспечивающей астатизм замкнутой системы по отношению к постоянным внешним возмущениям.

4) Вычислить значения $\mathbf{F}(j\omega_i)$ передаточной матрицы динамического корректора, соответствующие заданным частотам ω_i , $i = \overline{1, N_\omega}$ внешнего полигармонического возмущения.

5) Зафиксировать гурвицевы матрицы α_k и векторы γ_k , $k = \overline{1, n}$ соответствующих компонент динамического корректора. В частности, матрицы α_k можно представить в форме Фробениуса, задав собственное число λ кратности $2N_\omega$ с отрицательной вещественной частью, а вектор-строку γ_k взять в виде $\gamma_k = (0 \ \dots \ 0 \ 1)$.

6) Вычислить по формулам (3.26) матрицы \mathbf{A}_k и \mathbf{B}_k , $k = \overline{1, n}$. Найти векторы β_k , решая линейную систему (3.27). По формуле (3.28) вычислить векторы μ_k .

3.4. Компенсация постоянного запаздывания

Теперь вернемся к системе с постоянным запаздыванием (3.1). Применение линеаризующей обратной связи (3.6) с многоцелевым регулятором (3.12) при наличии запаздывания не позволяет получить заданное качество динамики управляемого движения, а в определенных случаях может привести к потере устойчивости системы. Прежде всего, запаздывание управляющего сигнала τ приводит к тому, что компенсирующие нелинейности слагаемые и множители перестают совпадать с фактическими значениями в момент действия запоздавшего управления. В связи с этим линеаризация обратной связью перестает работать. Помимо этого, даже при условии успешной линеаризации,

слагаемое \mathbf{u} , являющееся управлением для линейной системы, так же будет запаздывать, что приведет к ухудшению качества управления.

В связи с этим, для преодоления указанных недостатков, рассмотрим компенсационный подход [73]. Его суть заключается в использовании прогноза состояния объекта управления на величину запаздывания в обратной связи:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_p(t) &= \boldsymbol{\theta}(t+h), \\ \boldsymbol{\omega}_p(t) &= \boldsymbol{\omega}(t+h).\end{aligned}\tag{3.29}$$

Приведем (3.1) к системе ОДУ первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\tau}(t-h) + \boldsymbol{\tau}_e(t-h) - \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})),\end{aligned}\tag{3.30}$$

тогда, зная текущие значения переменных состояния $\boldsymbol{\theta}(t)$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$, прогноз (3.29) можно получить, интегрируя правые части системы (3.30):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_p(t) &= \int_0^{t+h} \boldsymbol{\omega}(\delta) d\delta, \\ \boldsymbol{\omega}_p(t) &= \int_0^{t+h} \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta}(\delta))(\boldsymbol{\tau}(\delta-h) + \boldsymbol{\tau}_e(\delta-h) - \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(\delta), \boldsymbol{\omega}(\delta)) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}(\delta))) d\delta.\end{aligned}\tag{3.31}$$

Преобразовывая интегралы в правых частях (3.31), получим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_p(t) &= \int_0^t \boldsymbol{\omega}(\delta) d\delta + \int_t^{t+h} \boldsymbol{\omega}(\delta) d\delta, \\ \boldsymbol{\omega}_p(t) &= \int_0^t [\dots] d\delta + \int_t^{t+h} [\dots] d\delta.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Первые слагаемые в правых частях (3.32) представляют собой текущие значения $\boldsymbol{\theta}(t)$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$, таким образом

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_p(t) &= \boldsymbol{\theta}(t) + \int_t^{t+h} \boldsymbol{\omega}(\delta) d\delta, \\ \boldsymbol{\omega}_p(t) &= \boldsymbol{\omega}(t) + \int_t^{t+h} \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta}(\delta))(\boldsymbol{\tau}(\delta-h) + \boldsymbol{\tau}_e(\delta-h) - \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(\delta), \boldsymbol{\omega}(\delta)) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}(\delta))) d\delta.\end{aligned}$$

Далее обозначим $\sigma = \delta - h$, тогда

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}_p(t) &= \boldsymbol{\theta}(t) + \int_{t-h}^t \boldsymbol{\omega}_p(\sigma) d\sigma, \\
\boldsymbol{\omega}_p(t) &= \boldsymbol{\omega}(t) + \int_{t-h}^t \left[\mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_p(\sigma)) (\boldsymbol{\tau}(\sigma) + \boldsymbol{\tau}_e(\sigma) - \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_p(\sigma), \boldsymbol{\omega}_p(\sigma)) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_p(\sigma))) \right] d\sigma
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Отметим, что прямое численное решение интегралов в правых частях (3.33) может вызывать определенные трудности, как указано, например, в работе [73]. В связи с этим фактом введем в рассмотрение вспомогательную динамическую систему

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{w}, \\
\dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) (\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_e - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) - \mathbf{g}(\mathbf{q})),
\end{aligned} \tag{3.34}$$

причем на временном отрезке $t \in [-h, 0]$ выполняются условия

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(t) &= \boldsymbol{\theta}_0, \\
\mathbf{w}(t) &= \boldsymbol{\omega}_0, \\
\boldsymbol{\tau}(t) &= 0, \\
\boldsymbol{\tau}_e(t) &= 0.
\end{aligned}$$

С учетом (3.34) можно переписать систему (3.31) в виде

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}_p &= \boldsymbol{\theta}(t) + \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}(t-h), \\
\boldsymbol{\omega}_p &= \boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(t-h).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Преобразуем линеаризующую обратную связь (3.6) и многоцелевой регулятор (3.12), используя прогноз по формулам (3.35):

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{w}, \\
\dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) (\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_e - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{w}) - \mathbf{g}(\mathbf{q})), \\
\boldsymbol{\theta}_p &= \boldsymbol{\theta} + \mathbf{q} - \mathbf{q}(t-h), \\
\boldsymbol{\omega}_p &= \boldsymbol{\omega} + \mathbf{w} - \mathbf{w}(t-h), \\
\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta p} &= \boldsymbol{\theta}_p - \mathbf{z}_\theta, \\
\dot{\mathbf{z}}_\theta &= \mathbf{z}_\omega + \mathbf{H}_\theta \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta p}, \\
\dot{\mathbf{z}}_\omega &= \mathbf{u} + \mathbf{H}_\omega \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta p}, \\
\mathbf{u} &= -\mathbf{K}_\theta (\mathbf{z}_\theta - \boldsymbol{\theta}_d) - \mathbf{K}_\omega \mathbf{z}_\omega + \mathbf{F}(s) \boldsymbol{\varepsilon}_{\theta p}, \\
\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_p, \boldsymbol{\omega}_p) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_p) + \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_p) \mathbf{u}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Система (3.36) представляет собой регулятор, компенсирующий постоянное запаздывание в канале обратной связи и внешнего возмущения. Отметим, что (3.36) является трансформацией многоцелевого регулятора (3.12), сохраняющей его передаточную матрицу. Таким образом, для синтеза регулятора (3.36) достаточно синтезировать регулятор без запаздывания (3.12), удовлетворяющий всем требованиям к динамике в различных режимах движения, после чего добавить в него вычисление прогноза в соответствии с (3.36). Недостатком такого подхода является необходимость непосредственного измерения внешнего возмущения без запаздывания.

С учетом приведенных выше рассуждений сформулируем следующий алгоритм.

Алгоритм № 2 (синтеза многоцелевого компенсирующего регулятора)

1) В соответствии с алгоритмом № 1 синтезировать для замкнутой системы без запаздывания базовый регулятор (3.12).

2) Для расчета прогноза состояния системы на величину постоянного запаздывания добавить к синтезированному регулятору уравнения (3.34) и (3.35).

3) Заменить на прогнозируемые значения θ_p и ω_p все вхождения текущих измерений состояния θ и ω соответственно в уравнении управляющего сигнала τ и в уравнении его линейной части u .

3.5. Результаты экспериментов

Для проверки работоспособности описанных алгоритмов была реализована компьютерная модель в среде Octave. В качестве объекта управления был принят двухзвенный манипулятор (рис. 3.1).

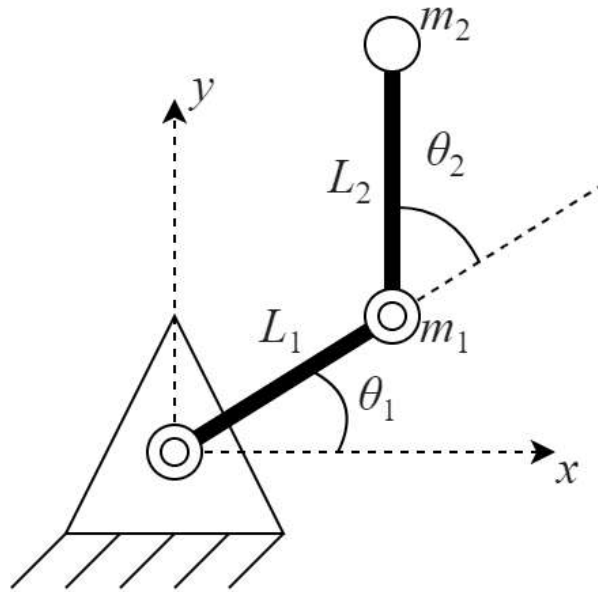


Рис. 3.1. Двухзвенный манипулятор.

Матрицы системы (3.1) в этом случае принимают значения [77]

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} m_1 L_1^2 + m_2 (L_1^2 + 2L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2) & m_2 (L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2) \\ m_2 (L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2) & m_2 L_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} -m_2 L_1 L_2 \cos \theta_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\ m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) L_1 g \cos \theta_1 + m_2 g L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 g L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix},$$

где m_1 и m_2 – точечные массы на концах звеньев, L_1 и L_2 – длины звеньев,

g – ускорение свободного падения, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \quad \theta_2)^T$ – углы отклонения звеньев.

Примем $m_1 = m_2 = 1$ кг, $L_1 = L_2 = 1$ м, $g = 9.8$ м/с².

В качестве настраиваемых элементов многоцелевого регулятора (3.12) примем значения

$$\mathbf{K}_\theta = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_\omega = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_\theta = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}, \mathbf{H}_\omega = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\boldsymbol{\alpha}_k$ динамического корректора были приняты как матрицы Фробениуса с собственным числом $\lambda = -3$ кратности 6. В качестве векторов

γ_k были выбраны значения $\gamma_k = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$. Постоянное возмущение в соответствующем режиме задавалось в виде

$$\tau_e(t) = (0.1 \ 0.1)^T \quad (3.37)$$

Наконец, в режиме с периодическим возмущением вектор τ_e представлялся как

$$\begin{aligned} \tau_e(t) &= (w(t) \ w(t))^T, \\ w(t) &= \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) + \sin(\omega_3 t), \end{aligned} \quad (3.38)$$

причем $\omega_1 = 31.416 \text{ c}^{-1}$, $\omega_2 = 37.699 \text{ c}^{-1}$ и $\omega_3 = 43.982 \text{ c}^{-1}$.

3.5.1. Система без запаздывания

Для начала рассмотрим режим без внешнего возмущения и запаздывания при выключенном динамическом корректоре. В качестве начального положения примем $\theta_0 = (0 \ 0)^T$, $\omega_0 = (0 \ 0)^T$. Будем считать, что желаемым положением является $\theta_d = (45 \ 60)^T$ градусов. Динамика системы в этом режиме представлена на рис. 3.2. Отметим, что желаемое положение достигнуто.

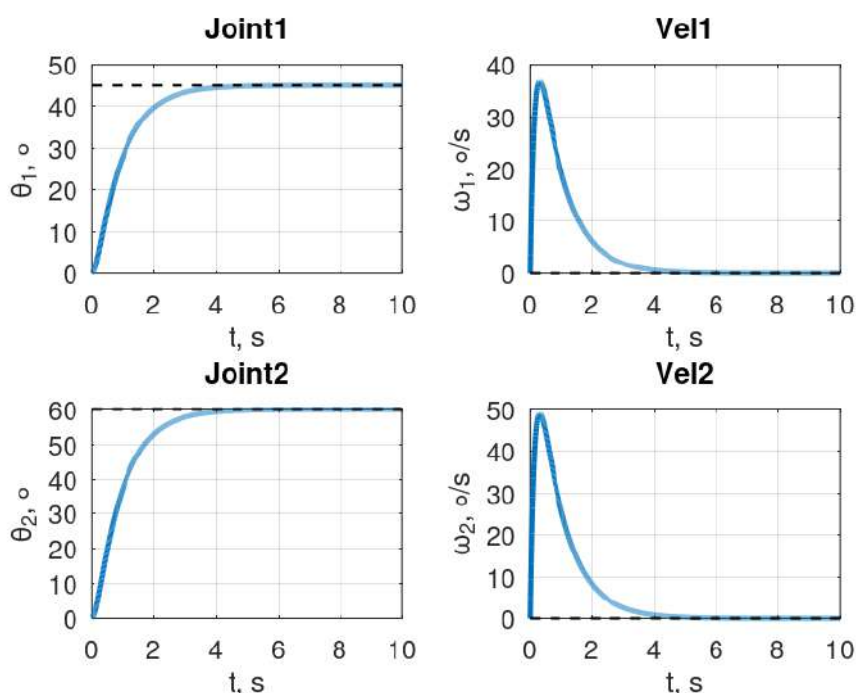


Рис. 3.2. Динамика системы без внешнего возмущения и запаздывания.

Теперь рассмотрим влияние внешнего возмущения. Зададим начальное положение, соответствующее желаемому, т.е. $\theta_0 = \theta_d = (45 \ 60)^T$ градусов. Подадим на объект управления постоянное возмущение (3.37) при выключенном динамическом корректоре. Как видно из рис. 3.3, в этом случае манипулятор отклоняется от заданного положения и не может в него вернуться. Таким образом, без динамического корректора астатизм не обеспечивается.

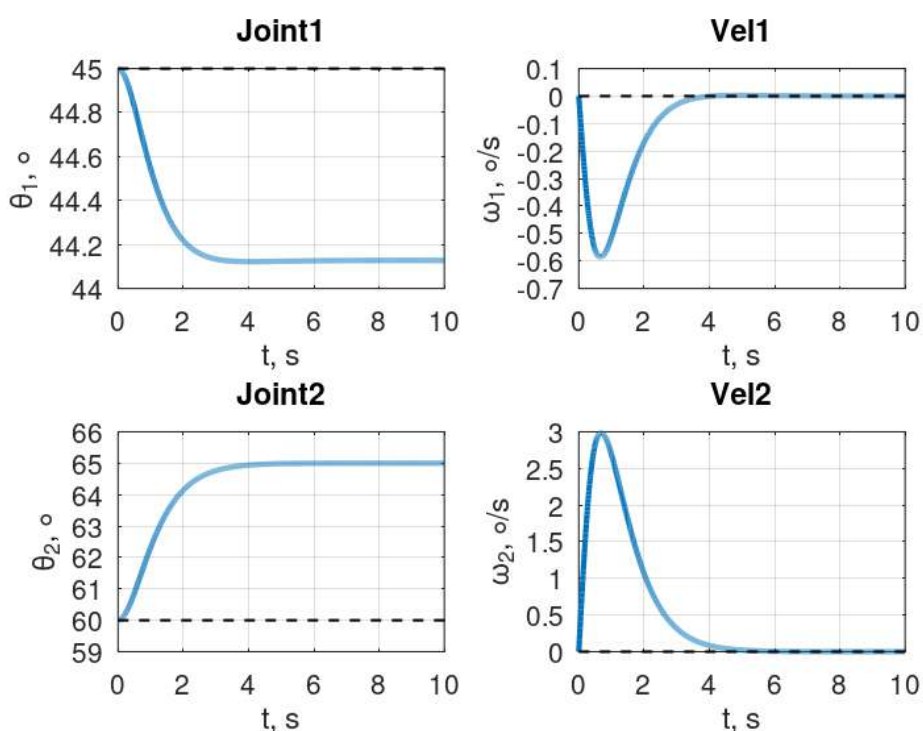


Рис. 3.3. Динамика системы без запаздывания при воздействии постоянного внешнего возмущения.

Теперь при тех же условиях включим динамический корректор. Динамика системы, представленная на рис. 3.4, демонстрирует, что корректор действительно обеспечивает астатизм – после первоначального отклонения робот возвращается обратно в заданное положение.

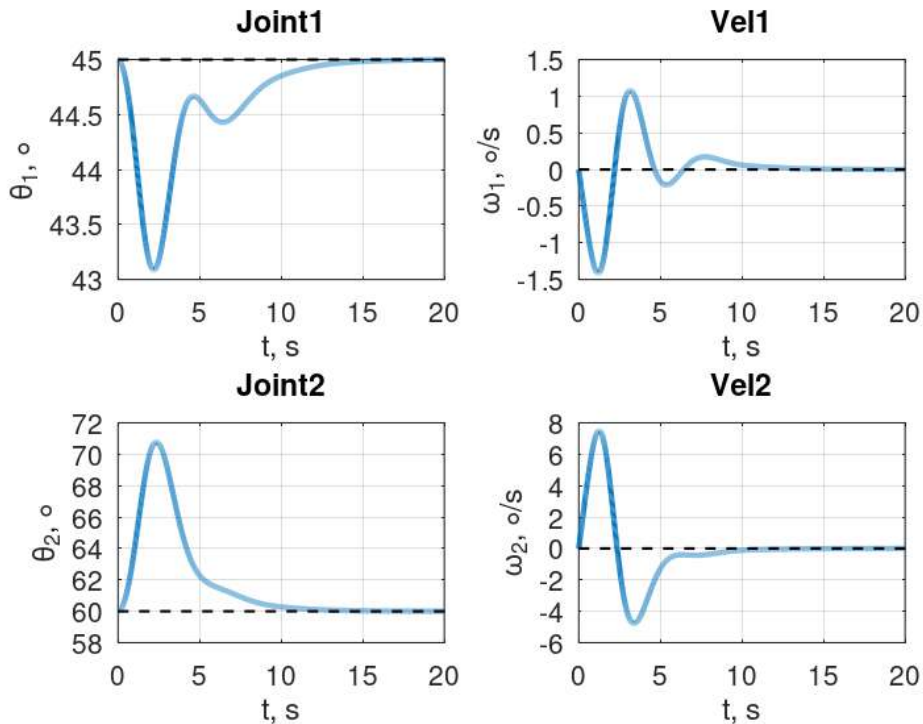


Рис. 3.4. Динамика системы без запаздывания с постоянным внешним возмущением и включенным динамическим корректором.

Наконец, рассмотрим влияние полигармонического возмущения (3.38). В этом режиме для наглядности динамический корректор будет включен только после 10с движения системы. Из рис. 3.5 видно, что периодическое возмущение также смещает робота от заданного положения, но включение корректора возвращает его обратно, при этом интенсивность колебаний по выходу θ не изменяется. Однако если обратить внимание на динамику управляющего сигнала τ (рис. 3.6), то можно заметить снижение интенсивности работы управления после включения корректора. Отметим, что отсутствие полной компенсации периодического возмущения объясняется тем фактом, что в действительности в данном случае минимизируется влияние внешнего возмущения на линейную часть u управляющего сигнала τ .

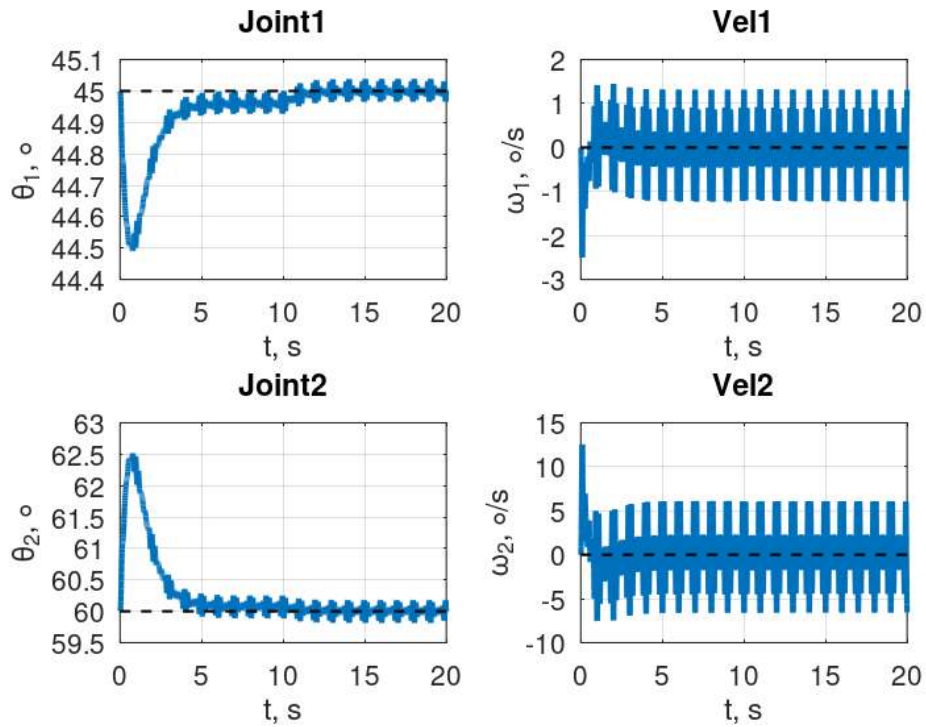


Рис. 3.5. Динамика системы без запаздывания с полигармоническим внешним возмущением и включенным в момент $t = 10$ с динамическим корректором.

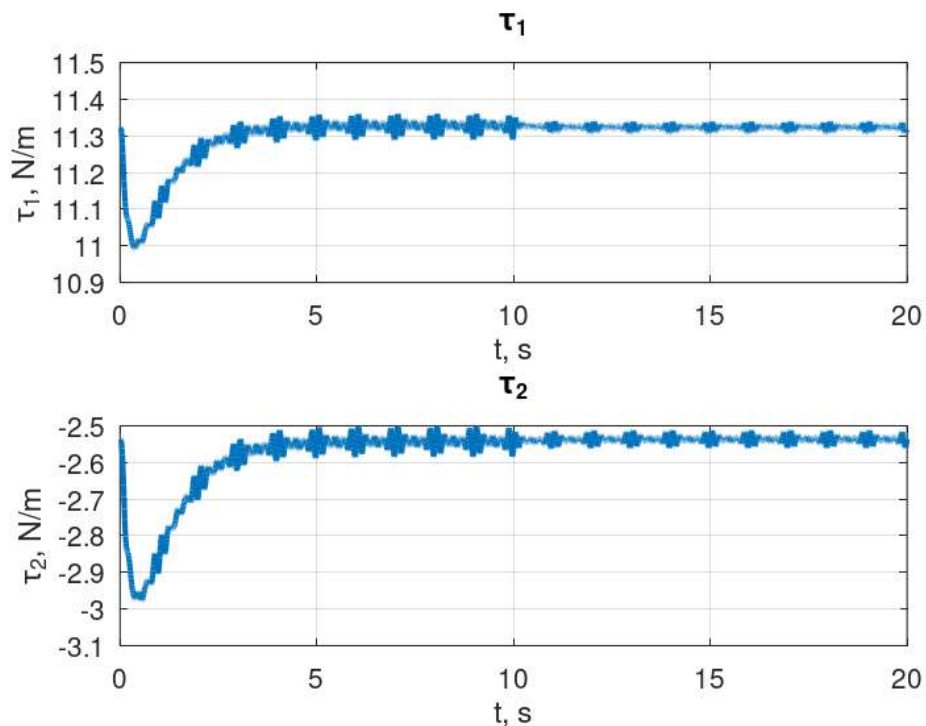


Рис. 3.6. Динамика управляющего сигнала τ без запаздывания с полигармоническим внешним возмущением.

На рис. 3.7 представлена динамика непосредственно линейной части \mathbf{u} управляющего сигнала $\boldsymbol{\tau}$. Здесь видно, что влияние внешнего возмущения полностью компенсируется включением динамического корректора, как и ожидалось.

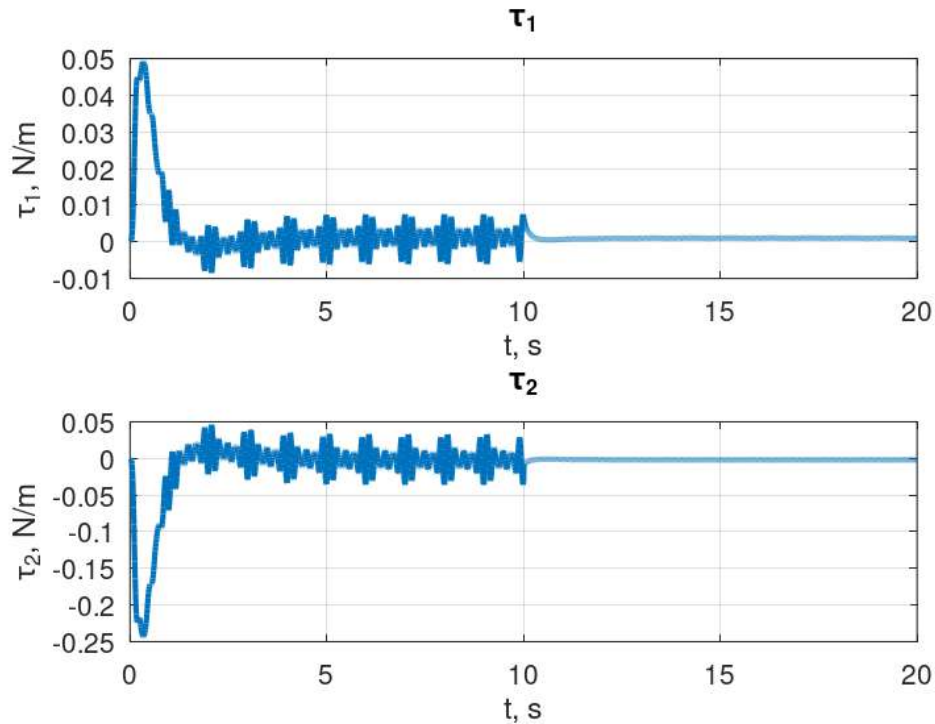


Рис. 3.7. Динамика линейной части \mathbf{u} управляющего сигнала $\boldsymbol{\tau}$ без запаздывания с полигармоническим внешним возмущением.

Влияние периодического возмущения на полный управляющий сигнал $\boldsymbol{\tau}$ можно уменьшить, если для расчета значений матриц \mathbf{M} , \mathbf{C} и \mathbf{g} , компенсирующих нелинейности, использовать выходы асимптотических наблюдателей \mathbf{z}_θ и \mathbf{z}_ω вместо фактических измерений $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\omega}$. Пример динамики при таком подходе представлен на рис. 3.8 и 3.9. Видно, что амплитуда колебаний углов сочленений $\boldsymbol{\theta}$ становится чуть меньше, при этом заметно более значительное снижение интенсивности управляющего сигнала $\boldsymbol{\tau}$ после включения корректора. Влияние возмущения на линейную часть \mathbf{u} в этом случае также полностью компенсируется, что демонстрирует рис. 3.10.

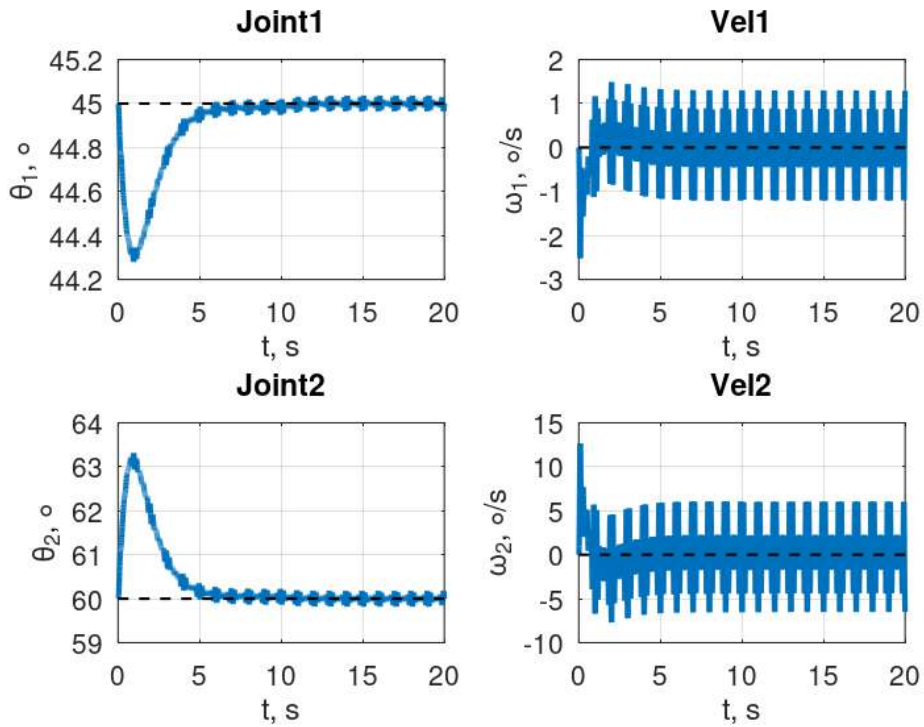


Рис. 3.8. Динамика системы при использовании выходов наблюдателей для расчета матриц в управляющем сигнале.

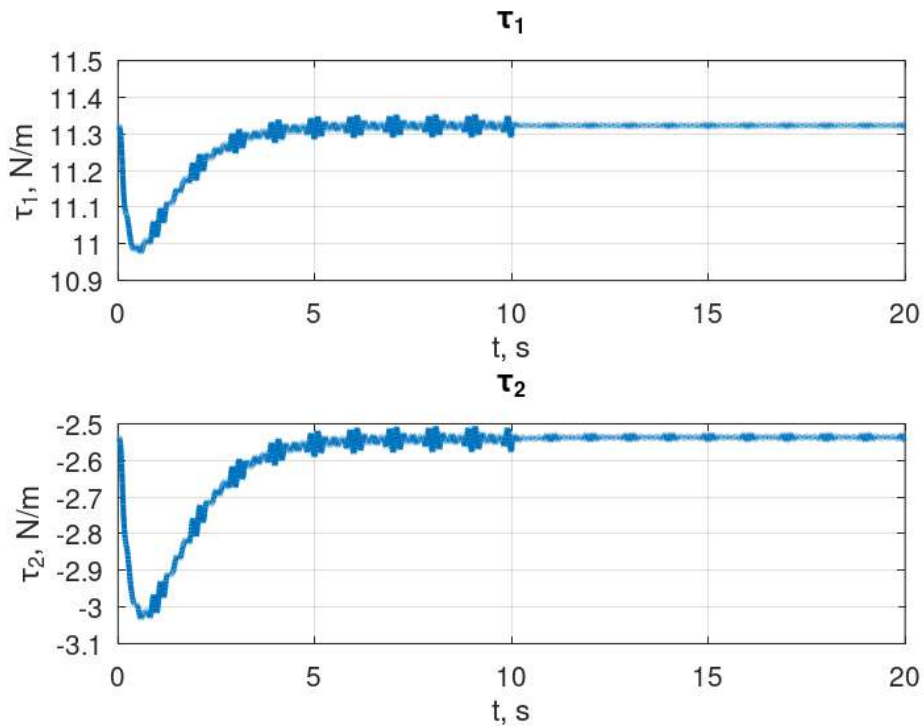


Рис. 3.9. Динамика управляющего сигнала τ при использовании выходов наблюдателей для расчета матриц в управляющем сигнале.

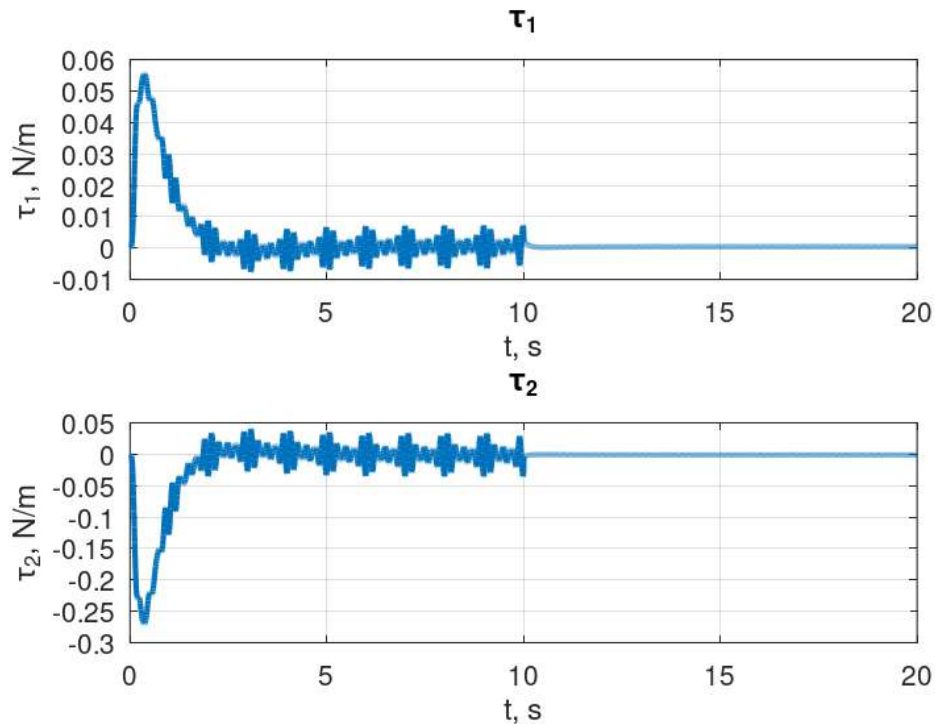


Рис. 3.10. Динамика линейной части u управляющего сигнала τ при использовании выходов наблюдателей для расчета матриц в управляющем сигнале.

3.5.2. Система с постоянным запаздыванием без компенсации

Теперь рассмотрим влияние постоянного запаздывания $h = 0.1$ с при использовании того же многоцелевого регулятора (3.12) без компенсирующей трансформации. Снова обратимся к режиму собственного движения при отсутствии внешних возмущений. Динамика системы для этого случая представлена на рис. 3.11. Можно заметить значительное ухудшение качества динамики. Дальнейшее увеличение запаздывания приводит к неустойчивости системы.

Воздействие постоянного внешнего возмущения при выключенном корректоре, как и в случае без запаздывания, приводит к смещению манипулятора от заданного положения, при этом динамика также ухудшается (рис. 3.12). Включение корректора в таких условиях приводит к неустойчивости системы, как видно из рис. 3.13. К неустойчивости также приводит и работа корректора при воздействии периодических возмущений.

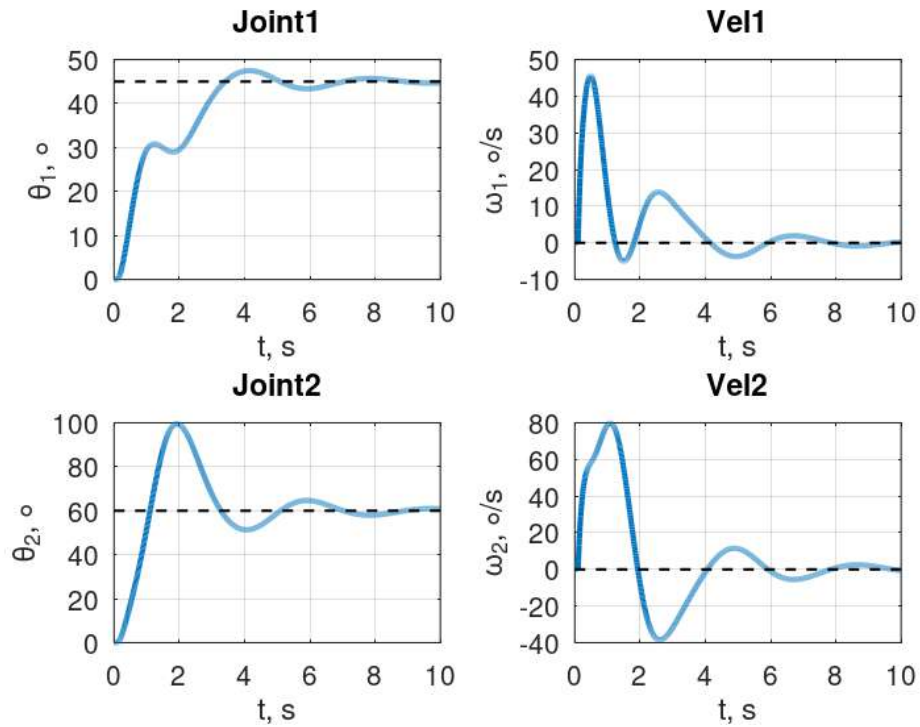


Рис. 3.11. Динамика системы без внешнего возмущения с постоянным запаздыванием без компенсации.

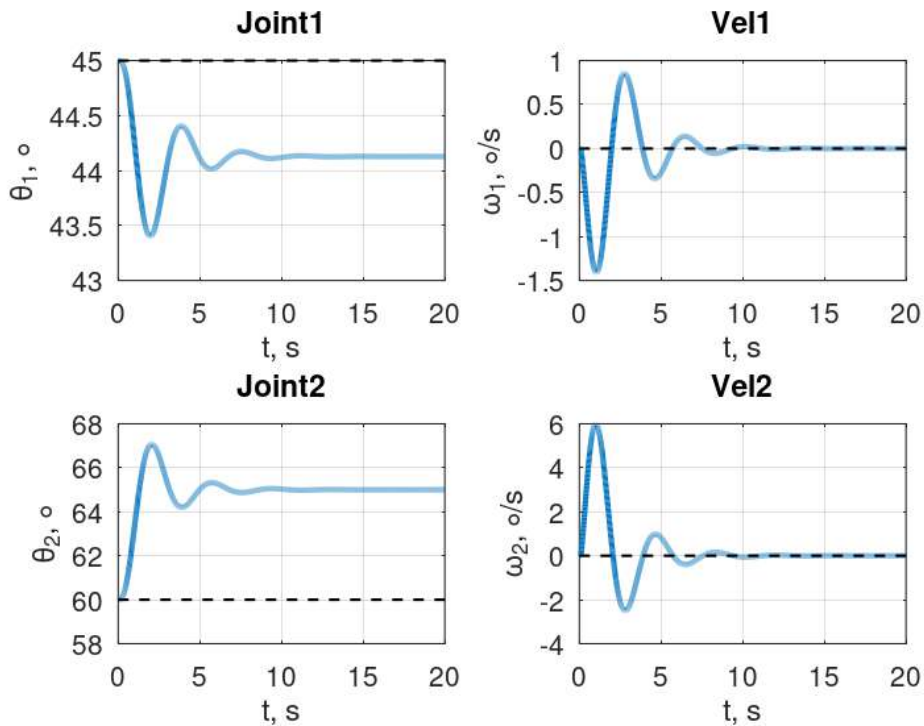


Рис. 3.12. Динамика системы при постоянном внешнем возмущении и с постоянным запаздыванием без компенсации и корректора.

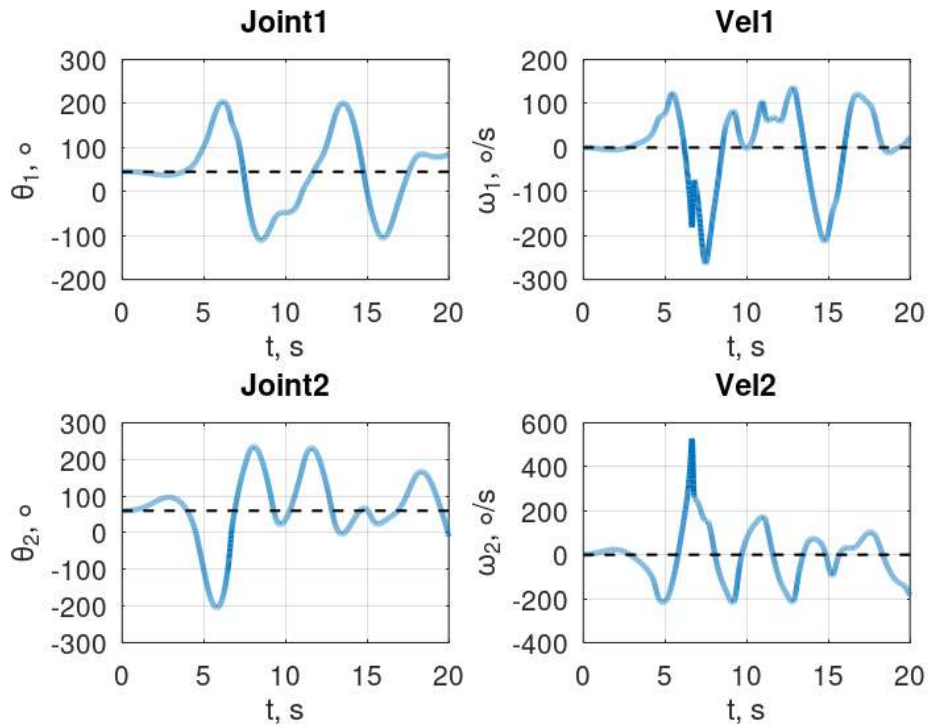


Рис. 3.13. Динамика системы при постоянном внешнем возмущении и включенном корректоре с постоянным запаздыванием без компенсации.

Продemonстрируем работу динамического корректора без потери устойчивости. Для этого понизим величину запаздывания до $h = 0.05$ с, используя при этом в качестве собственного числа для синтеза матриц \mathbf{a}_k корректора значение $\lambda = -10$. Динамика системы при воздействии постоянного возмущения с включенным корректором для этого случая представлена на рис. 3.14. Видно, что корректору удастся обеспечить возврат манипулятора в заданное положение, но динамика системы значительно хуже случая без запаздывания. При подаче периодического возмущения в подобных условиях с включением корректора после 10с, как видно из рис. 3.15 и рис. 3.16, изменения в динамике незначительны.

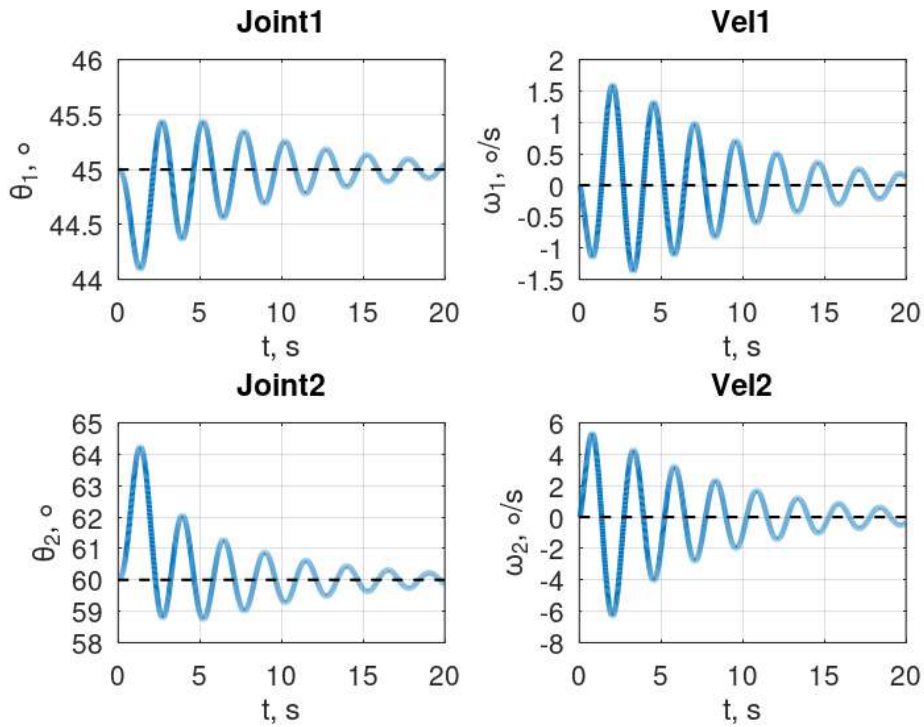


Рис. 3.14. Динамика системы при постоянном внешнем возмущении и включенном корректоре с уменьшенным запаздыванием.

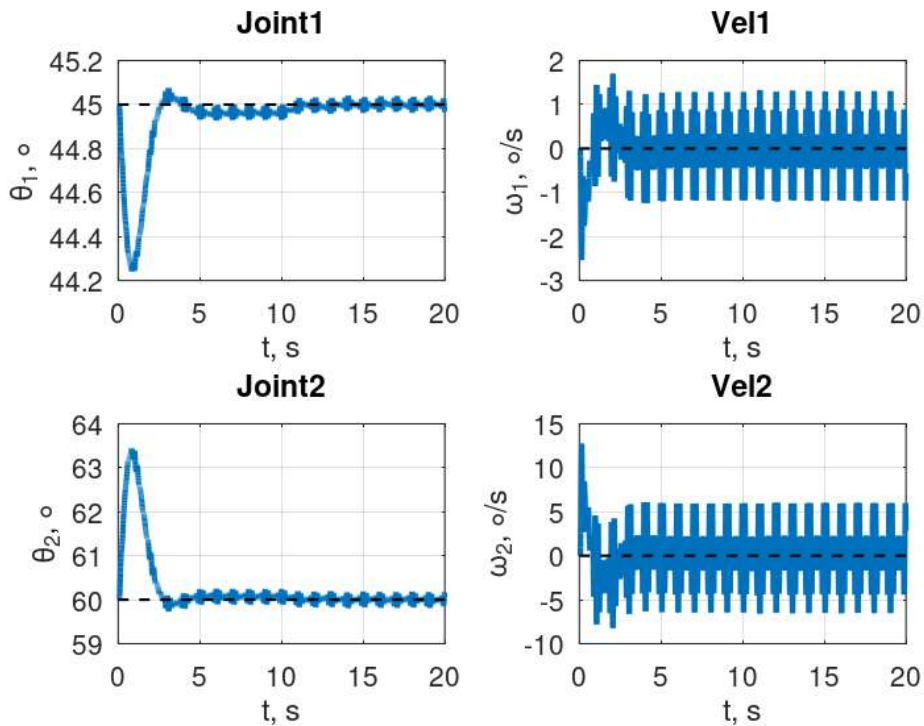


Рис. 3.15. Динамика системы при периодическом внешнем возмущении с уменьшенным запаздыванием.

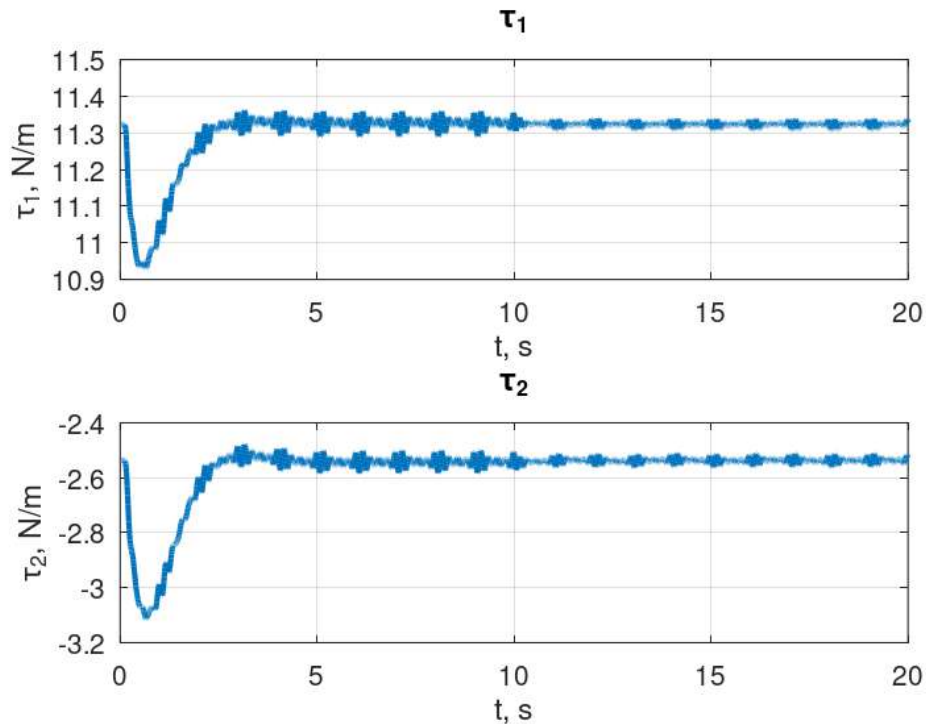


Рис. 3.16. Динамика управляющего сигнала τ при периодическом внешнем возмущении с уменьшенным запаздыванием.

3.5.3. Компенсация постоянного запаздывания

Теперь продемонстрируем работу компенсирующей трансформации (3.36) многоцелевого регулятора, синтезированного без учета запаздывания. Снова будем использовать величину запаздывания $h = 0.1$ с и собственное число $\lambda = -3$ для синтеза матриц \mathbf{a}_k динамического корректора. Сначала рассмотрим режим собственного движения без внешнего возмущения и с выключенным корректором. Динамика системы для этого случая представлена на рис. 3.17. Видно, что графики практически идентичны рис. 3.2 для случая без запаздывания.

Далее подадим постоянное внешнее возмущение и включим динамический корректор. Рис. 3.18 также демонстрирует динамику, практически идентичную случаю без запаздывания.

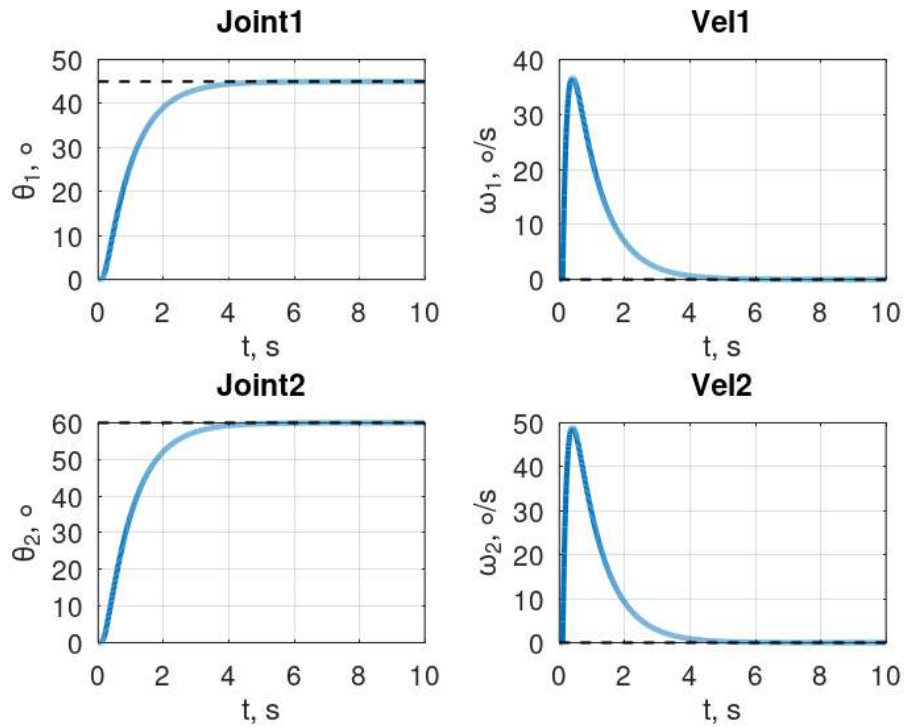


Рис. 3.17. Динамика системы без внешнего возмущения с постоянным запаздыванием и компенсацией.

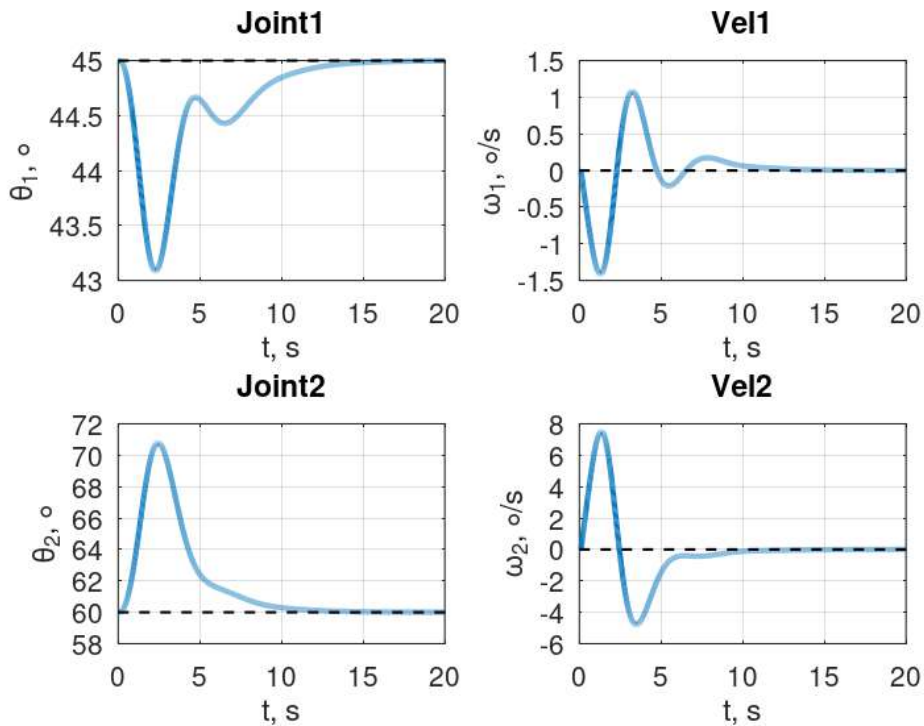


Рис. 3.18. Динамика системы при постоянном внешнем возмущении с постоянным запаздыванием, компенсацией и включенным корректором.

Наконец, обратимся к режиму движения при воздействии периодического внешнего возмущения и наличии постоянного запаздывания в каналах управления и внешнего возмущения. Как и ранее, будем включать динамический корректор здесь также только после 10с движения. Динамика движения системы для этого случая представлена на рис. 3.19, на рис. 3.20 изображена динамика управляющего сигнала τ , а рис. 3.21 демонстрирует динамику линейной части u управляющего сигнала. Как видно из представленных графиков, динамика при заданных условиях снова практически идентична динамике в случае без запаздывания.

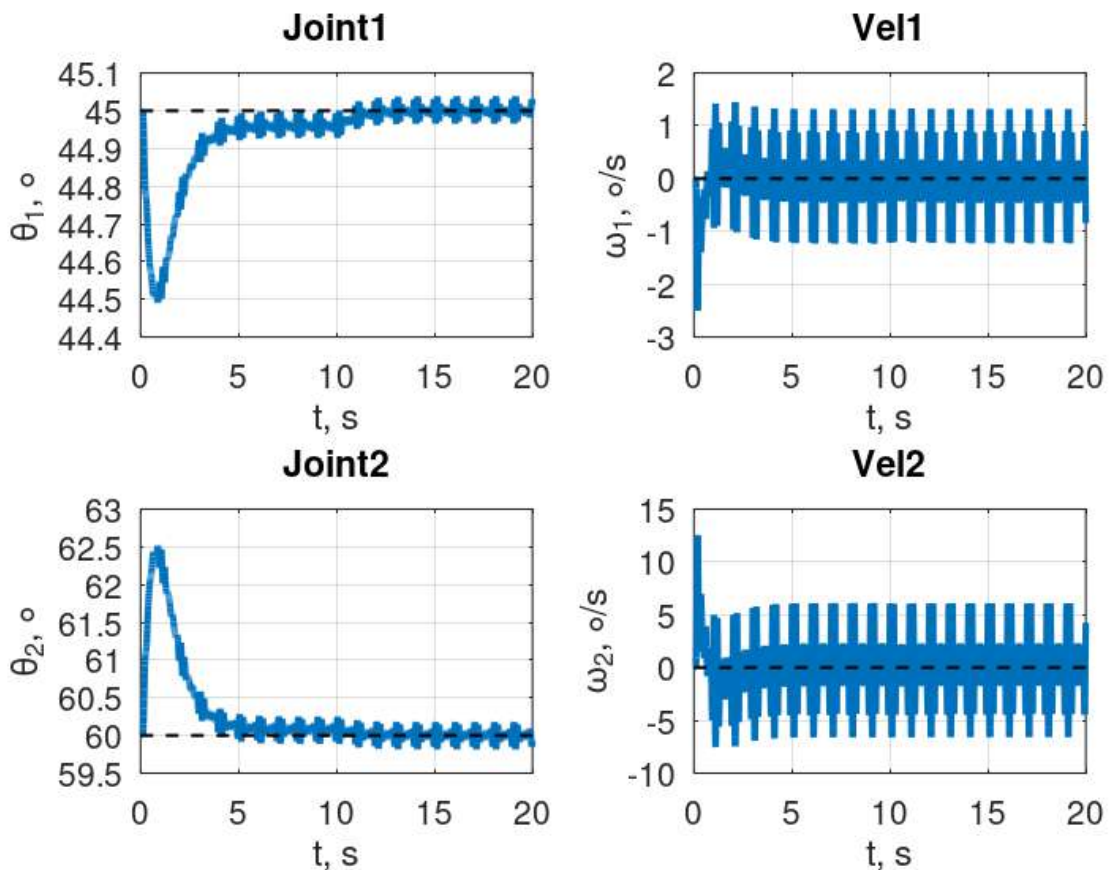


Рис. 3.19. Динамика системы при периодическом внешнем возмущении с постоянным запаздыванием и компенсацией.

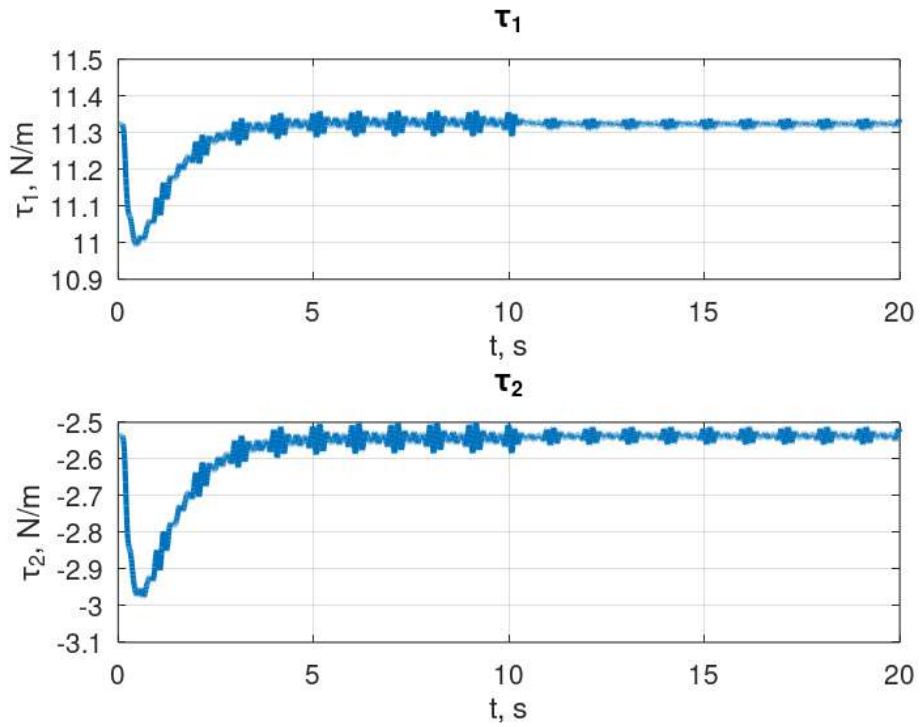


Рис. 3.20. Динамика управляющего сигнала τ при периодическом внешнем возмущении с постоянным запаздыванием и компенсацией.

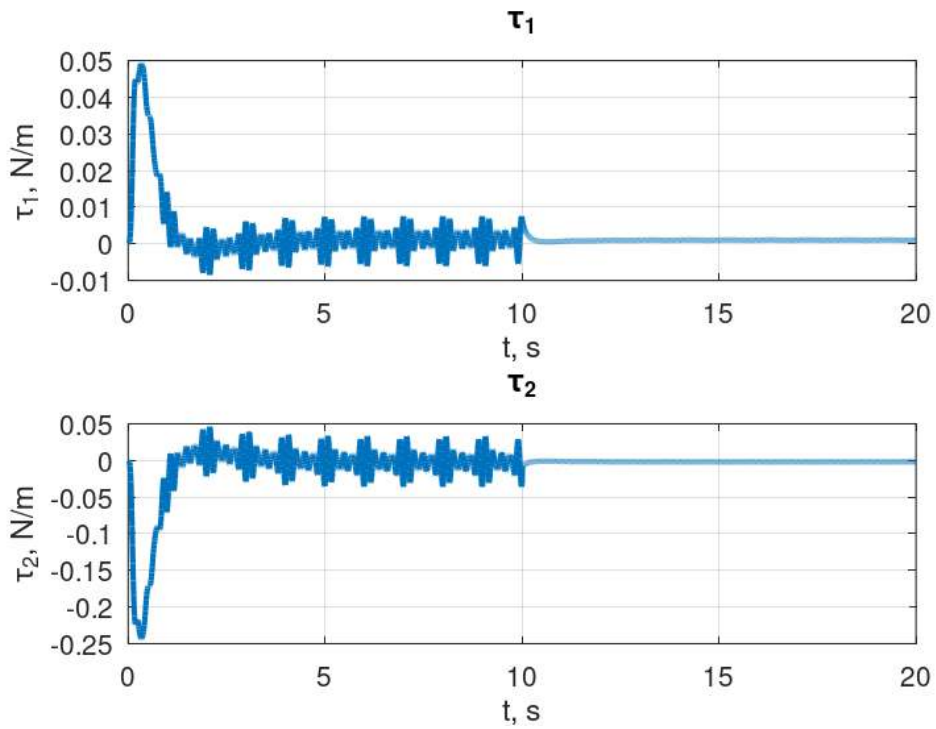


Рис. 3.21. Динамика линейной части u управляющего сигнала τ при периодическом внешнем возмущении с постоянным запаздыванием и компенсацией.

Отметим, что использование выходов асимптотических наблюдателей \mathbf{z}_θ и \mathbf{z}_ω вместо значений прогноза θ_p и ω_p при расчете компенсирующих нелинейности матриц \mathbf{M} , \mathbf{C} и \mathbf{g} в регуляторе с компенсацией запаздывания также приводит к уменьшению интенсивности управляющего сигнала τ после включения динамического корректора, как и в случае без запаздывания. Динамика движения системы для этого случая представлена на рис. 3.22, динамика управляющего сигнала τ изображена рис. 3.23, а рис. 3.24 демонстрирует динамику линейной части \mathbf{u} управляющего сигнала. Видно, что представленные графики также практически совпадают с аналогичными графиками для случая без запаздывания.

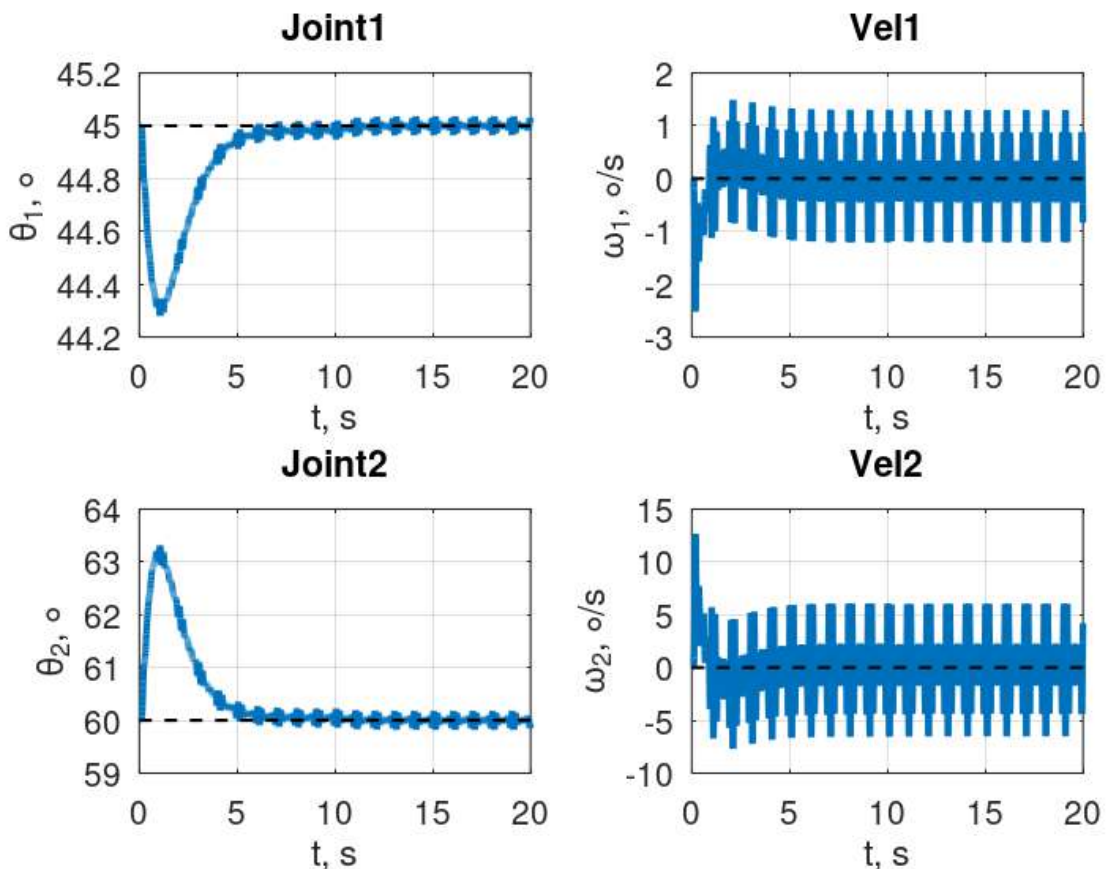


Рис. 3.22. Динамика системы при использовании выходов наблюдателей для расчета матриц в управляющем сигнале.

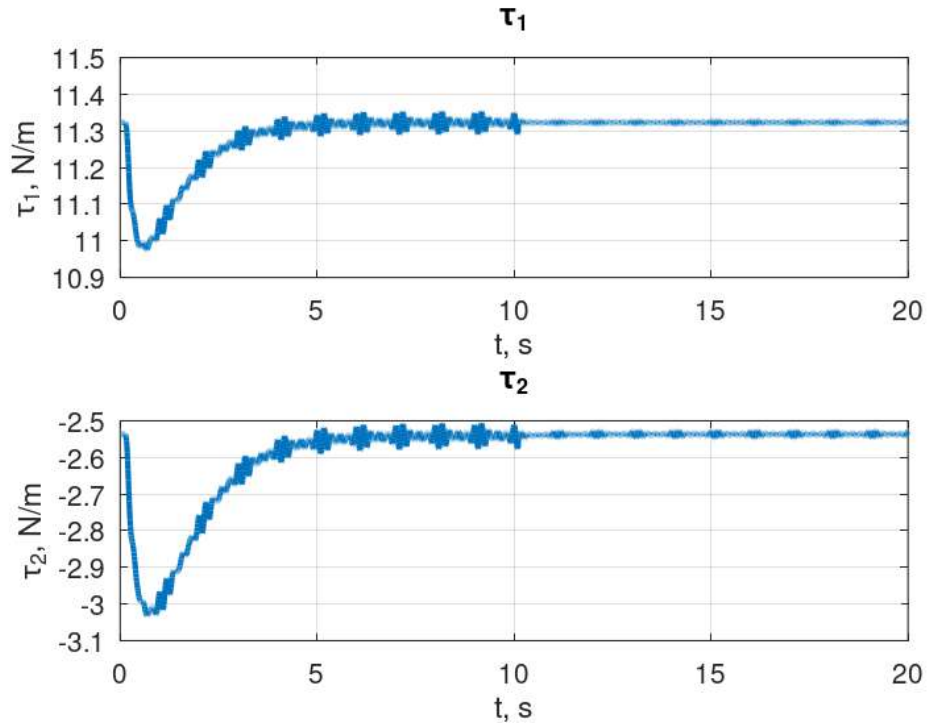


Рис. 3.23. Динамика управляющего сигнала τ при использовании выходов наблюдателей для расчета матриц в управляющем сигнале.

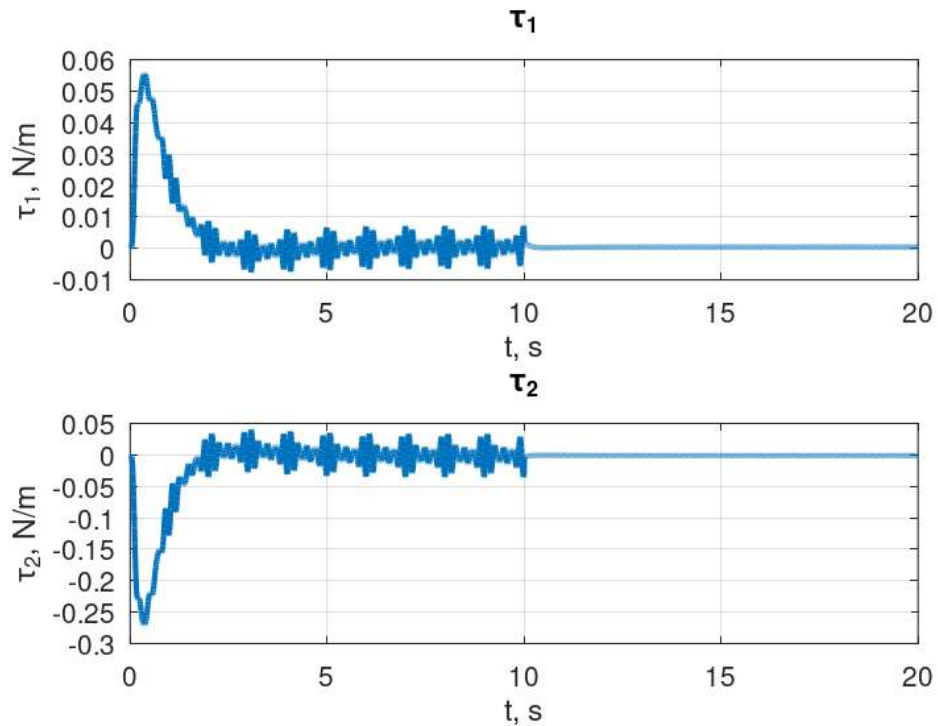


Рис. 3.24. Динамика линейной части u управляющего сигнала τ при использовании выходов наблюдателей для расчета матриц в управляющем сигнале.

Таким образом, компенсирующая запаздывания трансформация (3.36) многоцелевого регулятора действительно позволяет получить динамику замкнутой системы, практически совпадающую с динамикой в случае без наличия постоянного запаздывания.

3.6. Выводы

Анализ графиков, полученных в результате экспериментов с компьютерной моделью двухзвенного манипулятора, позволяет сделать вывод о том, что многоцелевые регуляторы могут эффективно решать задачи стабилизации нелинейных систем при использовании метода линеаризации обратной связью с учетом требований к динамике в различных режимах, в частности – при наличии внешних возмущений. Напомним, что основным преимуществом многоцелевых регуляторов является тот факт, что синтез настраиваемых элементов происходит относительно независимо друг от друга, а отдельные элементы могут быть отключены в зависимости от текущего режима работы.

При этом наличие запаздывания в канале управления достаточно сильно ухудшает качество динамики замкнутой системы, вплоть до потери устойчивости. Показано, что для компенсации запаздывания достаточно синтезировать многоцелевой регулятор с желаемыми характеристиками для системы без запаздывания, после чего осуществить особую трансформацию полученного регулятора. Такая трансформация позволяет обеспечить динамические характеристики системы с запаздыванием, практически идентичные случаю без запаздывания, т.е., по сути, сохранить передаточную матрицу первоначального регулятора.

К недостаткам представленного подхода можно отнести необходимость знать точную динамическую модель для обеспечения линеаризации обратной связью, затрудненную фильтрацию периодических внешних возмущений, а также необходимость измерения внешнего возмущения без запаздывания.

Глава 4. Многоцелевое управление судном на воздушной подушке

Данная глава посвящена вопросам стабилизации движения особого класса морских подвижных объектов – судов на воздушной подушке. Многоцелевой подход здесь чрезвычайно важен, поскольку движение таких судов осуществляется в условиях многорежимности, при наличии внешних возмущений различного рода [90]. Реализация систем управления на цифровом бортовом оборудовании [43] также приводит к наличию запаздывания в канале управления, которое необходимо учитывать [46]. В данной главе приводятся детали процесса синтеза компенсирующего многоцелевого регулятора, описанного в первой главе, для стабилизации движения с учетом описанных особенностей.

В параграфе 4.1 приводится общее описание особенностей судов на воздушной подушке, приводятся нелинейные уравнения динамики бокового движения, а также линеаризованная модель. Параграф 4.2 посвящен постановке задачи для конкретного судна с заданными числовыми параметрами. В параграфе 4.3 раскрываются детали синтеза многоцелевого регулятора без учета запаздывания и приводятся результаты экспериментов с компьютерной моделью. Параграф 4.4 посвящен экспериментам при наличии постоянного запаздывания с обычным и компенсирующим регуляторами.

4.1. Суда на воздушной подушке

В целях демонстрации работоспособности приведенных методов рассмотрим частную ситуацию. Примем в качестве объекта управления судно на воздушной подушке (СВП) – особый вид транспорта, уменьшающий сопротивление поверхности за счет образования области повышенного аэростатического давления под корпусом судна. Стоит отметить, что в зависимости от типа ограждения воздушной подушки существует два типа СВП – скеговые и амфибийные. Для первого типа

характерно жесткое боковое ограждение, частично погруженное в воду. Динамика таких судов больше похожа на классические корабли. Ограждение у второго типа СВП – гибкое и, как правило, не имеет прямого контакта с поверхностью движения. В центре внимания данной работы находятся как раз амфибийные СВП.

Рассмотрим схему образования воздушной подушки в упрощенном виде (рис. 4.1). Зона повышенного давления (собственно, сама воздушная подушка), компенсирующая вес судна, получает приток воздуха за счет нагнетающих вентиляторов. Воздушный поток может быть опционально направлен через зоны жесткого ресивера 1 и гибкого ресивера 2 в целях более равномерного распределения давления воздуха. Гибкое ограждение воздушной подушки объединено с корпусом судна. Такое ограждение обеспечивает подъем СВП на определенную высоту, за счет чего, как правило, корпус судна не имеет прямого контакта с поверхностью движения. Благодаря этому амфибийные СВП способны двигаться не только по воде, но и по суше, а также по болотам, льдам и т.д.

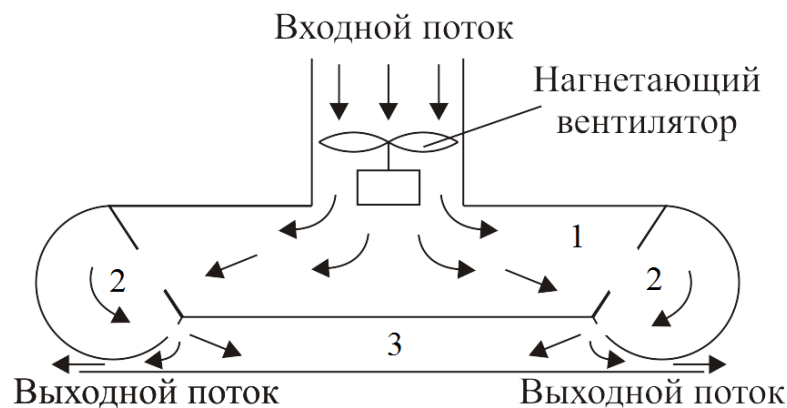


Рис. 4.1. Образование избыточного давления под днищем СВП.

В качестве движителей СВП выступают воздушные винты переменного шага, установленные на палубе. Направление движения может быть изменено либо за счет управления вертикальными аэродинамическими рулями, либо, в случае наличия нескольких движителей, за счет разной тяги винтов. При этом первый способ характерен при движении на больших

скоростях, а второй более эффективен при разгоне судна. Стоит отметить, что наличие аэродинамических рулей необязательно в тех случаях, когда возможен поворот самих движителей, однако модели СВП с подобными технологиями гораздо менее распространены. Далее будем рассматривать модель СВП с единственным движителем и вертикальными аэродинамическими рулями в режиме движения по морской поверхности.

Отметим еще несколько особенностей динамики СВП. В отличие от классических моделей кораблей, на движение СВП по морской поверхности не оказывают влияние присоединенные массы воды, ввиду отсутствия прямого контакта корпуса с водой. Тем не менее, воздушная подушка взаимодействует с поверхностью воды, так что учет сил гидродинамического сопротивления необходим. Здесь следует отметить также следующую специфичную для СВП особенность. Под воздушной подушкой образуется углубление в водной поверхности при движении на небольших скоростях. Однако углубление исчезает при преодолении скорости порядка 30 узлов (так называемая «горбовая скорость»), при этом гидродинамическое сопротивление значительно уменьшается [31].

Приведем описание нелинейной математической модели СВП. Необходимые системы координат приведены на рис. 4.2. Здесь $O_g \xi \eta \zeta$ – базовая (земная) система координат, являющаяся неподвижной. $O \xi_1 \eta_1 \zeta_1$ – полусвязанная (промежуточная земная) система, начало которой жестко связано с центром масс СВП, а оси параллельны осям базовой системы координат и, соответственно, имеют фиксированную ориентацию. Наконец, $O_{ху\zeta}$ – связанная система координат, оси которой, в отличие от предыдущей системы, вращаются вместе с судном.

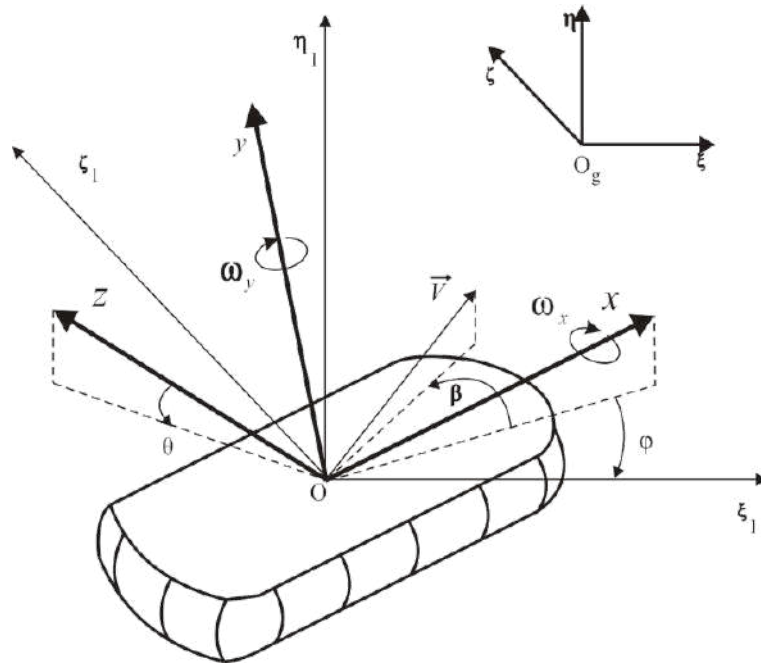


Рис. 4.2. Системы координат.

С учетом наиболее значимых сил, влияющих на динамику СВП, нелинейные дифференциальные уравнения бокового движения можно записать в виде системы [13, 103]

$$\begin{aligned}
 m(\dot{V}_x + V_z \omega_y) &= F_{xa} + F_{xh} + T, \\
 m(\dot{V}_z - V_x \omega_y) &= F_{za} + F_{zh} + F_{zc} + F_{zr}, \\
 I_x \dot{\omega}_x &= M_{xa} + M_{xh} + M_{\theta} + M_{xr}, \\
 I_y \dot{\omega}_y &= M_{ya} + M_{yh} + M_{yr},
 \end{aligned}$$

которую можно преобразовать к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_x &= (F_{xa} + F_{xh} + T - V_z \omega_y)/m, \\
 \dot{V}_z &= (F_{za} + F_{zh} + F_{zc} + F_{zr} + V_x \omega_y)/m, \\
 \dot{\omega}_x &= (M_{xa} + M_{xh} + M_{\theta} + M_{xr})/I_x, \\
 \dot{\omega}_y &= (M_{ya} + M_{yh} + M_{yr})/I_y,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

где V_x и V_z – линейные скорости, ω_x и ω_y – угловые скорости, m – масса судна, I_x и I_y – моменты инерции. Силы и моменты, обозначенные индексом a , относятся к аэродинамическому сопротивлению, h – к

гидродинамическому сопротивлению. Индекс r обозначает силы и моменты, действующие на рули. F_{zc} – реактивная сила потока воздуха, возникающего в случае крена с одной из сторон воздушной подушки. M_θ – восстанавливающий момент при крене за счет давления воздуха внутри воздушной подушки. T – сила тяги движителя.

Силы и моменты аэродинамического сопротивления можно описать при помощи формул

$$\begin{aligned} F_{xa} &= 0.5C_{xa}(\beta_a)\rho_a V_0^2 S, \\ F_{za} &= 0.5C_{za}(\beta_a)\rho_a V_0^2 S, \\ M_{xa} &= 0.5F_{za}H, \\ M_{ya} &= 0.5(C_{mya}(\beta_a) + C_{mya}^{\omega_y} \frac{\omega_y L}{V_0})\rho_a V_0^2 SL, \end{aligned}$$

где β_a – угол аэродинамического дрейфа относительно ветра, ρ_a – плотность воздуха, V_0 – скорость судна относительно ветра, S – площадь боковой поверхности судна, L и H – длина и высота судна, соответственно; $C_{xa}(\beta_a)$, $C_{za}(\beta_a)$, $C_{mya}(\beta_a)$, $C_{mya}^{\omega_y}$ – аэродинамические коэффициенты корпуса судна.

Гидродинамическое сопротивление представляется в виде

$$\begin{aligned} F_{xh} &= 0.5C_{xh}(Fr, \beta)\rho_w V^2 W^{2/3}, \\ F_{zh} &= 0.5C_{zh}(Fr, \beta)\rho_w V^2 W^{2/3}, \\ M_{xh} &= 0.5F_{zh}H, \\ M_{yh} &= 0.5(C_{myh}(Fr, \beta) + C_{myh}^{\omega_y}(Fr) \frac{\omega_y W^{1/3}}{V})\rho_w V^2 W, \end{aligned}$$

где β – угол дрейфа судна, ρ_w – плотность воды, V – скорость судна, W – водоизмещение судна. $C_{xh}(Fr, \beta)$, $C_{zh}(Fr, \beta)$, $C_{mxh}(Fr, \beta)$, $C_{myh}(Fr, \beta)$, $C_{myh}^{\omega_y}$ – гидродинамические коэффициенты. Fr – число Фруда (безразмерная величина, применяемая в судостроении для сравнения гидродинамических свойств корпусов различного размера). Число Фруда вычисляется как

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{Lg}},$$

где g – ускорение свободного падения.

Отметим тот факт, что, как правило, аэродинамические и гидродинамические коэффициенты реальных моделей судов вычисляются в процессе экспериментов в аэродинамической трубе и специализированном бассейне. Ввиду сложности соответствующих аэродинамических процессов, точное описание сил и моментов, действующих на рули, достаточно трудоемко. В связи с этим будем использовать экспериментальное приближение, приведенное в [13]:

$$F_{zr} = C_r \delta \frac{\rho_a}{2} V_0^2 S,$$

$$M_{yr} = F_{zr} x_r,$$

$$M_{xr} = -F_{zr} y_r,$$

$$C_r = C_{rI} [(1 - k_r)(1 + s) \frac{S_r''}{S_r} + \frac{S_r'}{S_r}],$$

$$k_r = \frac{1.9\pi\lambda_{1r}s}{\lambda_r(1.9\pi + \lambda_{1r})(s + 1)},$$

$$s = \sqrt{\frac{1 + 2.53T}{(\rho_a D^2 V_0^2)}} - 1,$$

где C_r – некоторый силовой коэффициент, δ – отклонение руля, x_r и y_r – координаты геометрического центра руля, C_{rI} – коэффициент модели без двигателей. S_r – площадь поверхности руля, S_r' и S_r'' – области площади руля внутри и вне воздушного потока, λ_r и λ_{rI} – соответствующие части длин рулей, D – диаметр воздушного винта. k_r и s – вспомогательные коэффициенты.

Теоретическое описание реактивной силы воздушного потока F_{zc} и восстанавливающего момента M_θ также довольно затруднительно. Как правило, в целях моделирования достаточно привести упрощенные формулы, являющиеся экспериментальным приближением:

$$F_{zc} = mgk_\theta\theta,$$

$$M_\theta = -mgh\theta - N_\theta\omega_x,$$

где θ – угол крена, h – метацентрическая высота, k_θ – коэффициент силы потока, N_θ – коэффициент восстанавливающего момента воздушной подушки. Коэффициенты k_θ и N_θ вычисляются экспериментально.

В предположении, что внешние возмущения отсутствуют, линеаризуем нелинейную систему (4.1) в окрестности положения равновесия $V_x = const$, $V_z = \omega_y = \theta = \delta_r = 0$. Динамикой крена и продольной скорости в этом режиме можно пренебречь. Также отметим, что в линейных моделях морских подвижных объектов принято вместо боковой скорости судна V_z рассматривать угол дрейфа, который можно представить как $\beta = \frac{V_z}{V_x}$.

С учетом приведенных соображений линейную модель боковой динамики СВП, используемую для синтеза стабилизирующего регулятора, можно описать системой уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= a_{11}\beta + a_{12}\omega_y + b_1\delta_r + h_1d, \\ \dot{\omega}_y &= a_{21}\beta + a_{22}\omega_y + b_2\delta_r + h_2d, \\ \dot{\varphi} &= \omega_y,\end{aligned}\tag{4.2}$$

где φ – курсовой угол, d – скалярное внешнее возмущение (ветровое или волновое); a_{ij} , b_i , h_i – постоянные коэффициенты модели.

4.2. Постановка задачи

В качестве конкретных значений параметров нелинейной модели СВП будем использовать осредненные данные различных судов из работ [13, 23, 31, 103]. Основные характеристики приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1. Характеристики рассматриваемой модели СВП.

Характеристика	Ед. измерения	Величина	Обозначение
Объёмное водоизмещение	м ³	3 628.8	W
Длина	м	27	L
Ширина	м	14	B
Высота	м	9.6	H
Масса	кг	70 000	m
Момент инерции относительно продольной оси	кг м ²	1 680 933.3	J_{xx}
Момент инерции относительно вертикальной оси	кг м ²	5 395 833.3	J_{yy}
Момент инерции относительно поперечной оси	кг м ²	4 790 100	J_{zz}
Максимальный угол перекладки рулей	град	40	δ_{\max}
Максимальная скорость перекладки рулей	град/с	15	$\dot{\delta}_{\max}$
Максимальная скорость	м/с	28	V_{\max}
Площадь руля	м ²	5.4	S_r
Продольное плечо руля	м	13.5	x_r
Вертикальное плечо руля	м	2.4	y_r
Плотность воды	кг/м ³	1000	ρ_w
Плотность воздуха	кг/м ³	1.292	ρ_a

Будем считать, что в каналах управления и внешнего возмущения присутствует постоянное запаздывание τ . С учетом динамики привода руля и считая, что выходом является значение курсового угла φ , линейная модель бокового движения СВП в окрестности описанного положения равновесия представляется в виде системы

$$\begin{aligned}
\dot{\beta} &= a_{11}\beta + a_{12}\omega_y + b_1\delta_r(t - \tau) + h_1d(t - \tau), \\
\dot{\omega}_y &= a_{21}\beta + a_{22}\omega_y + b_2\delta_r(t - \tau) + h_2d(t - \tau), \\
\dot{\varphi} &= \omega_y, \\
y &= \varphi, \\
\dot{\delta}_r &= u.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Рассмотрим прямолинейное движение СВП с постоянной продольной скоростью $V_x = 12$ м/с. Необходимо синтезировать компенсирующий многоцелевой регулятор для обеспечения следующих характеристик замкнутой системы в различных режимах движения:

1) В любом режиме должна быть обеспечена асимптотическая устойчивость движения СВП.

2) В режиме *собственного движения* необходимо обеспечить поворот СВП по курсовому углу на 10° за 10 с при максимальном значении перерегулирования в 3% от заданного угла.

3) В режиме движения под воздействием *постоянного внешнего возмущения* в виде бокового ветра со скоростью 10м/с (т.е. $d(t) = 10$) отклонение курсового угла от текущего значения не должно превышать 0.4° .

4) В качестве *периодического внешнего возмущения* рассмотрим волнение на поверхности моря, примерно соответствующее 4 баллам по шкале Бофорта. В этом режиме необходимо обеспечить минимизацию интенсивности перекладки рулей. В качестве приближенной модели волнения примем полигармоническое возмущение вида

$$d(t) = 0.2\sin(0.65t) + 0.1\sin(0.55t) + 0.1\sin(0.75t). \tag{4.4}$$

4.3. Практическая реализация многоцелевого регулятора без учета запаздывания

В целях тестирования приведенных методов в среде Matlab-Simulink была реализована компьютерная модель нелинейной боковой динамики

СВП. При прямолинейном движении со скоростью 12 м/с коэффициенты линейной модели (4.3) принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -0.3176, & a_{12} &= 0.852, \\ a_{21} &= -0.0102, & a_{22} &= -0.1383, \\ b_1 &= -0.005, & b_2 &= -0.0217, \\ h_1 &= -0.0006, & h_2 &= 0.00025. \end{aligned}$$

Приведем сравнение нелинейной динамики с линейным приближением. На рис. 4.3 представлен переходный процесс, соответствующий реакции на ступенчатое отклонение руля величиной в 1° . Можно отметить практически идеальное совпадение моделей. Динамика моделей при воздействии внешнего ступенчатого возмущения в виде бокового ветра со скоростью 10 м/с представлена на рис. 4.4. Видно, что в течение нескольких первых секунд присутствует заметное расхождение по углу дрейфа, однако в целом динамика также практически идентична. Таким образом, можно заключить, что динамика вычисленной линейной модели является достаточным приближением исходной нелинейной системы в рассматриваемом режиме и пригодна для дальнейшего синтеза многоцелевого и компенсирующего регуляторов.

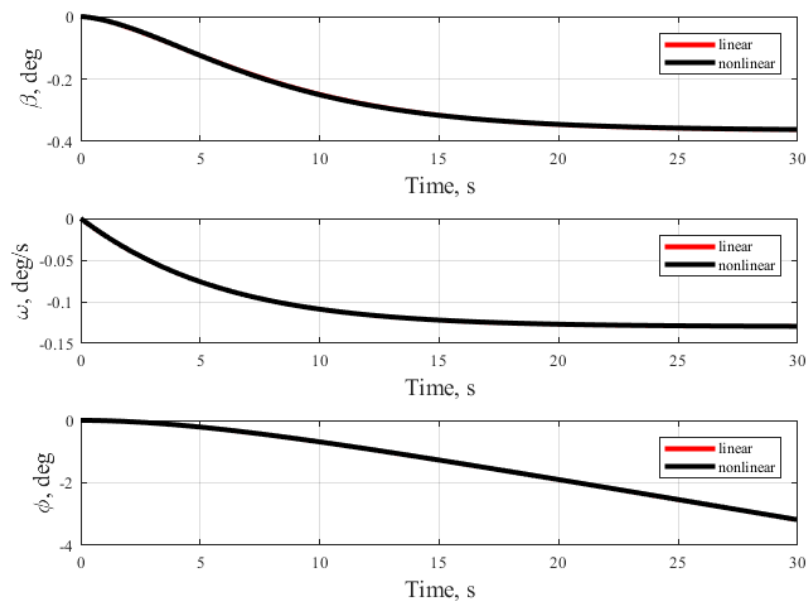


Рис. 4.3. Сравнение линейной и нелинейной моделей при единичном отклонении руля.

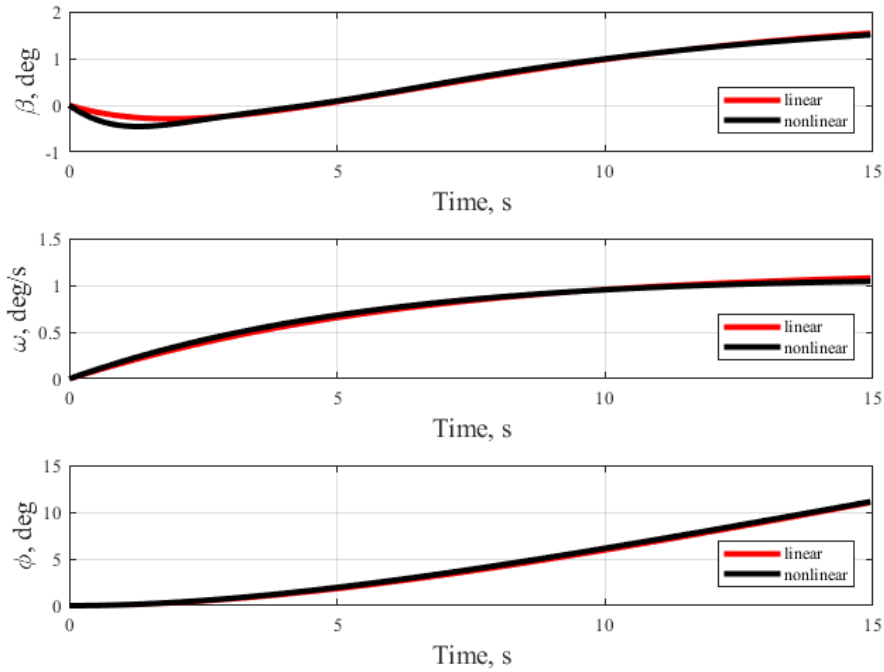


Рис. 4.4. Сравнение линейной и нелинейной моделей при воздействии бокового ветра.

Настраиваемые элементы позиционного закона управления (1.17), соответствующие требованиям, приведенным в постановке задачи, принимают следующие значения, полученные в результате LQR-оптимального синтеза:

$$\mathbf{K}_x = (0.3365 \quad -23.1742 \quad -7.0711), \quad k_\delta = 1.006,$$

при этом были использованы следующие весовые матрицы квадратичного функционала качества:

$$\mathbf{Q} = \text{diag}([0 \quad 1.5 \quad 0.5 \quad 0]), \quad R = 0.01.$$

Теперь выведем выражения для вычисления коэффициентов базового скоростного закона управления (1.13). В соответствии с приведенным в п. 1.2 замечанием, процедуру поиска в конкретных ситуациях можно существенно упростить. Рассмотрим линейную систему (4.2) без учета внешнего возмущения:

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= a_{11}\beta + a_{12}\omega_y + b_1\delta_r, \\ \dot{\omega}_y &= a_{21}\beta + a_{22}\omega_y + b_2\delta_r, \\ \dot{\phi} &= \omega_y.\end{aligned}$$

Указанную систему нужно разрешить относительно переменных состояния ω_y , β и δ , в итоге получая соотношения

$$\begin{aligned}\beta &= [(a_{12}b_2 - a_{22})\dot{\phi} - b_2\dot{\beta} + b_1\dot{\omega}_y]/q, \\ \omega_y &= \dot{\phi}, \\ \delta &= [(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\dot{\phi} - a_{11}\dot{\omega}_y + a_{21}\dot{\beta}]/q, \\ q &= a_{21}b_1 - a_{11}b_2.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Подставляя полученные уравнения (4.5) в позиционный закон управления (1.17), получим коэффициенты скоростного закона управления

$$\begin{aligned}\nu &= k_3, \mu_1 = (a_{21}k_\delta - b_2k_1)/q, \mu_2 = (b_1k_1 - a_{11}k_\delta)/q, \\ \mu_3 &= ((a_{12}b_2 - b_1a_{22})k_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})k_\delta)/q + k_2,\end{aligned}$$

где $(k_1 \quad k_2 \quad k_3) = \mathbf{K}_x$, $(\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3) = \boldsymbol{\mu}$.

Подставим вычисленные значения \mathbf{K}_x и k_δ в приведенные уравнения, в результате чего получим конкретные значения параметров скоростного закона управления:

$$\boldsymbol{\mu} = (-0.2757 \quad 46.2269 \quad 29.8032), \quad \nu = 7.0711.$$

Приведем результаты экспериментов с компьютерной моделью без запаздывания. Динамика управляемого движения СВП в режиме отработки задающего сигнала при повороте на 10° по курсовому углу с синтезированным скоростным законом приведена на рис. 4.5. Видно, что всего за 10 с осуществляется переход в зону 3% от задающего сигнала, т.е. требования по перерегулированию и времени переходного процесса соблюдены.

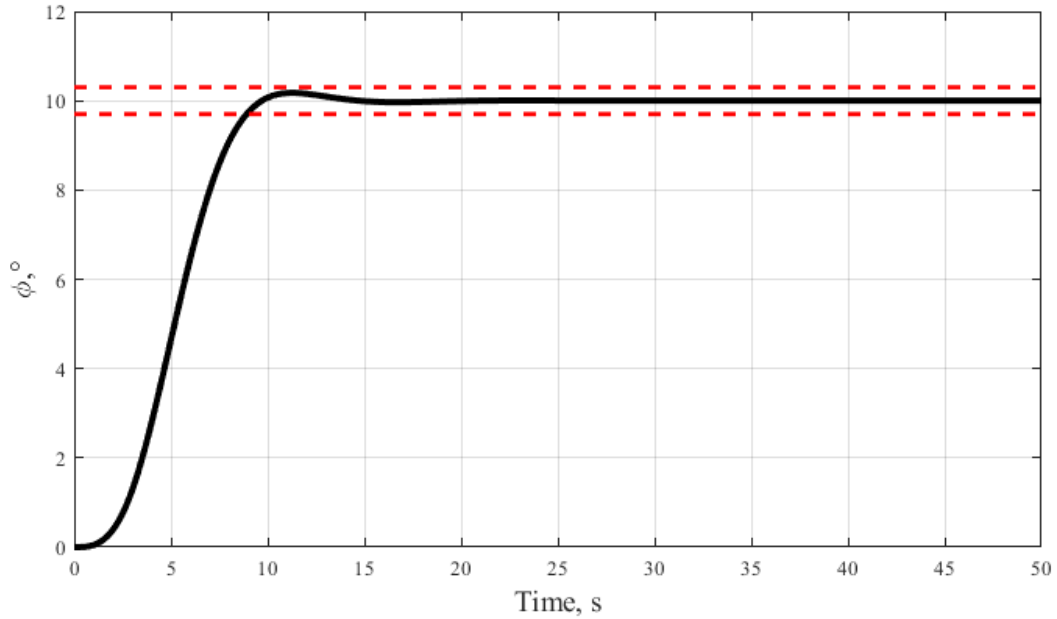


Рис. 4.5. Динамика курсового угла при повороте на 10° .

Далее перейдем к синтезу асимптотического наблюдателя. В соответствии с указанным в постановке задачи требованием к динамике в режиме движения под воздействием постоянного внешнего возмущения, в результате синтеза наблюдателя как фильтра Калмана получим матрицу \mathbf{G} при невязках в виде

$$\mathbf{G} = (1.4272 \quad 1.9543 \quad 1.977)^T.$$

В соответствии с приведенной в первой главе методологией перейдем теперь к позиционному закону управления (1.14) по выходу асимптотического наблюдателя:

$$\mathbf{k} = (-0.3843 \quad 23.1742 \quad -148.8717), \quad k_0 = -1.0006, \quad v_0 = 155.9427.$$

Динамика системы с синтезированным наблюдателем при воздействии бокового ветра приведена на рис. 4.6. Можно отметить, что заявленное требование соблюдается, отклонение не превышает 0.4° , при этом обеспечивается сходимость курсового угла к нулевому значению, то есть свойство астатизма.

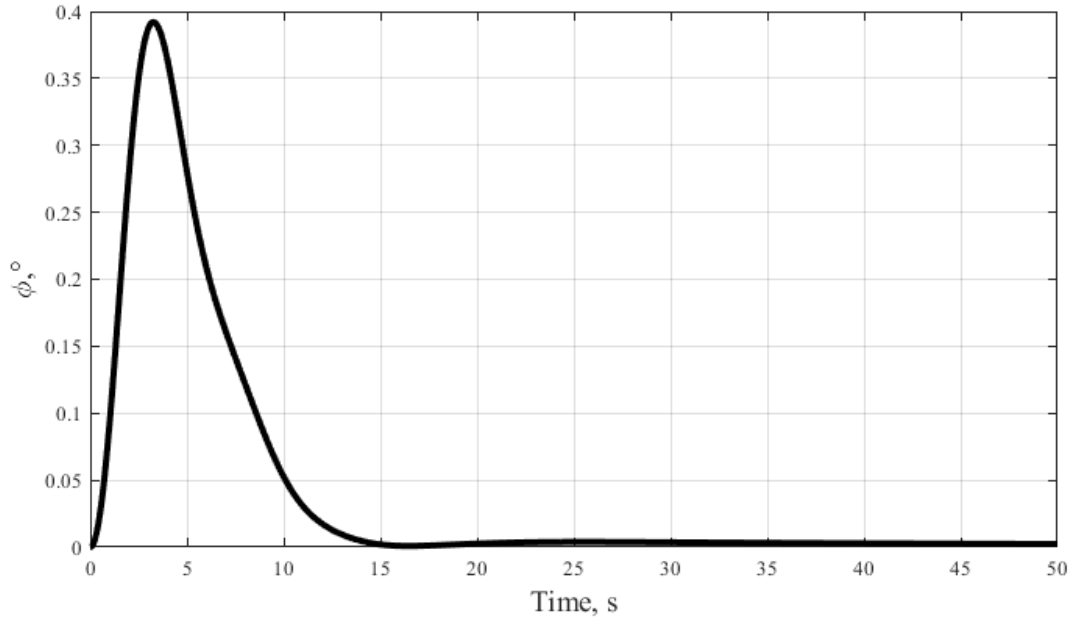


Рис. 4.6. Динамика курсового угла при воздействии бокового ветра со скоростью 10 м/с.

В заключение перейдем к задаче синтеза динамического корректора (1.12). В рамках данной работы, как было указано выше, целью корректора является минимизация интенсивности перекладки воздушных рулей в случае воздействия внешних периодических возмущений, таких как морское волнение.

Примем для простоты гармоническое колебание с постоянной частотой ω_0 в качестве приближенной модели периодического возмущения. Отметим тот факт [9], что в этой ситуации для решения поставленной задачи необходимо обеспечить равенство нулю на заданной частоте ω_0 передаточной функции от текущего выхода к положению рулей, т.е. $F_{y\delta}(j\omega_0, F) = 0$. В свою очередь, для выполнения этого условия передаточная функция динамического корректора $F(s)$ должна удовлетворять равенству

$$F(j\omega_0) = [T_{12}(j\omega_0) - \tilde{T}T_{22}(j\omega_0)]^{-1}\tilde{T}, \quad (4.6)$$

где $\tilde{T} = T_{11}(j\omega_0)T_{21}^{-1}(j\omega_0)$; T_{11} , T_{12} , T_{21} и T_{22} – элементы из (1.20).

Для величины, вычисленной по формуле (4.6), введем специальное обозначение $f_0 = F(j\omega_0)$. Матрицу \mathbf{a} системы (1.15) (т.е. представления динамического корректора в пространстве состояний) примем в виде

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Отметим тот факт, что передаточная функция $F(s)$ корректора является дробно-рациональной функцией вида

$$F(s) = \frac{\varepsilon(s)}{\alpha_p(s)},$$

где

$$\alpha_p(s) = \det(\mathbf{E}_2s - \mathbf{a}),$$

$$\varepsilon(s) = \alpha_p(s)\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{E}_2s - \mathbf{a})^{-1}\boldsymbol{\beta} = \varepsilon_1s + \varepsilon_0.$$

Для обеспечения условия $F(j\omega_0) = f_0$ должны выполняться равенства

$$\varepsilon_0 = \operatorname{Re}[f_0\alpha_p(j\omega_0)],$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\operatorname{Im}[f_0\alpha_p(j\omega_0)]}{\omega_0}.$$

Примем значение $\boldsymbol{\gamma} = (0 \ 1)$, тогда столбец $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ получим, решая

линейную систему

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ -\varepsilon_1/\alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Возьмем конкретное значение частоты $\omega_0 = 0.65$ как среднюю частоту возмущения (4.4). В качестве корней знаменателя передаточной функции корректора примем $\lambda_0 = \lambda_1 = -0.2$. Тогда в соответствии с описанным

подходом, матрицы модели корректора в пространстве состояний принимают следующие значения:

$$\mathbf{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.04 & -0.4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\beta} = \begin{pmatrix} -69.2093 \\ -83.98 \end{pmatrix}, \quad \gamma = (0 \quad 1).$$

На рис. 4.7 приведен график частотной характеристики замкнутой системы от внешнего возмущения к отклонению рулей в двух режимах: с включенным корректором, и без него. Можно отметить, что на заданной частоте характеристика с включенным фильтром нулевая, что и являлось целью синтеза.

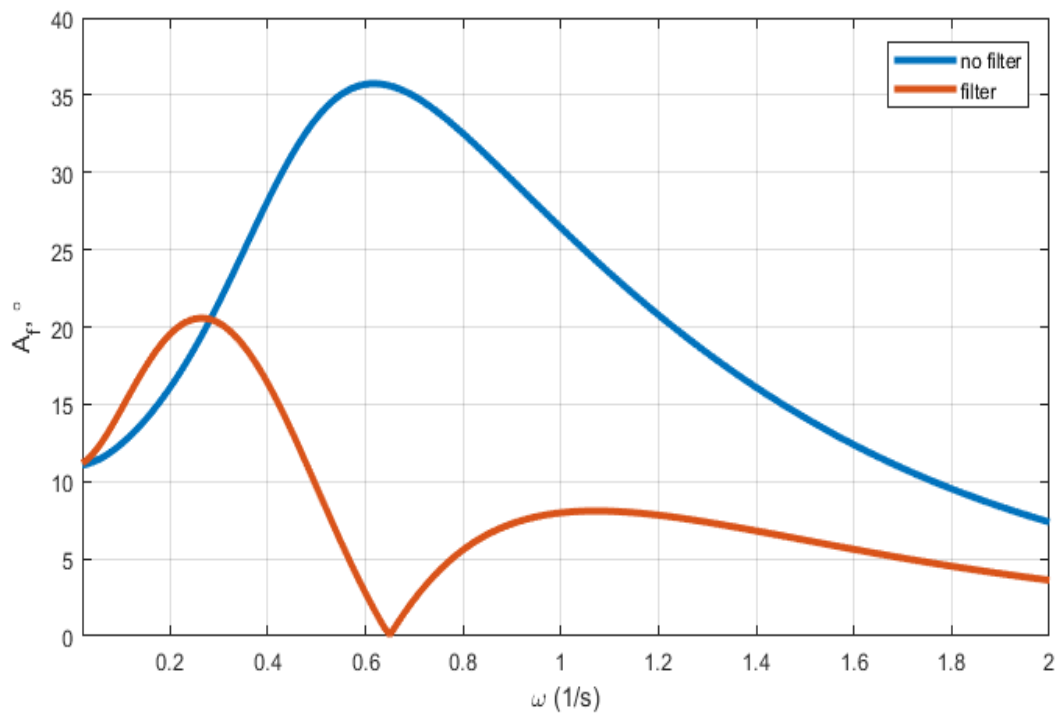


Рис. 4.7. Частотная характеристика замкнутой системы (4.6), (1.16) от возмущения к отклонению рулей.

Рассмотрим динамику судна в этом режиме, представленную на рис. 4.8 и рис. 4.9. На судно действует полигармоническое внешнее возмущение (4.4). Динамический корректор был отключен на протяжении первых 300 с, и на этом временном отрезке можно отметить существенные колебания перекладки рулей. Дальнейшее включение корректора, как видно, приводит к значительному снижению интенсивности колебаний рулей, причем

амплитуда колебаний курсового угла также уменьшается. В результате можно отметить, что динамический корректор в приведенной ситуации действительно позволяет достигнуть поставленной цели, эффективно снижая интенсивность управления без потери качества отработки курсового угла. Заметим также, что наличие дополнительных гармоник в принятой модели возмущения (4.4) практически не сказывается на качестве работы корректора, поскольку значения частотной характеристики на этих частотах также значительно ниже, чем в случае выключенного корректора.

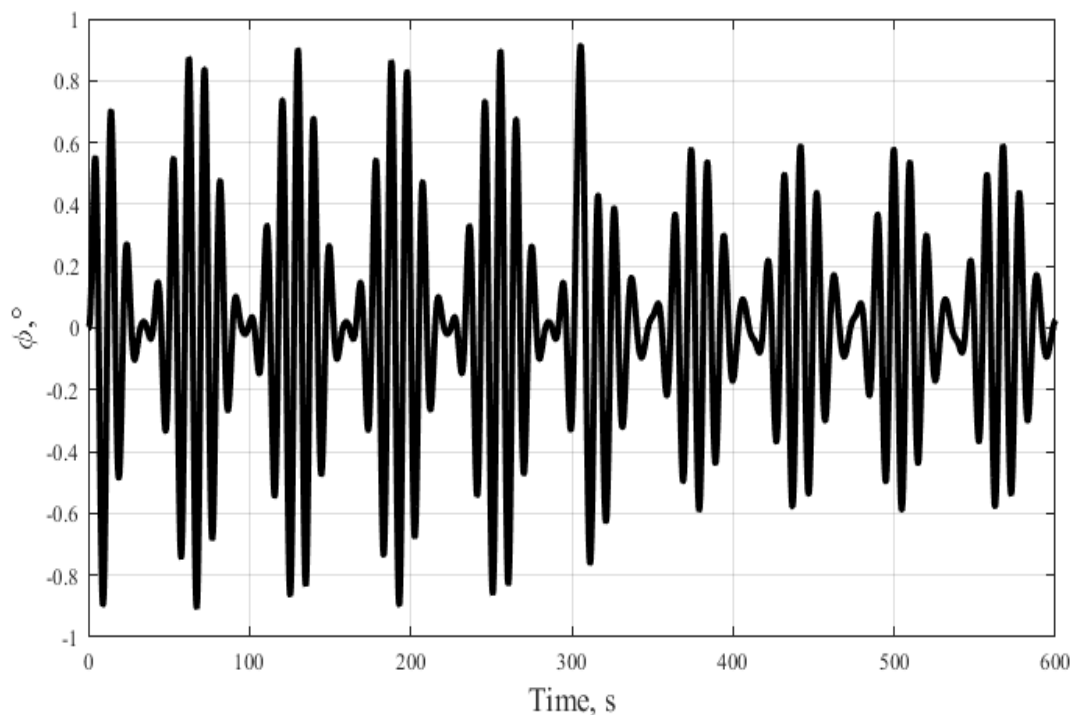


Рис. 4.8. Динамика курсового угла при воздействии морского волнения.

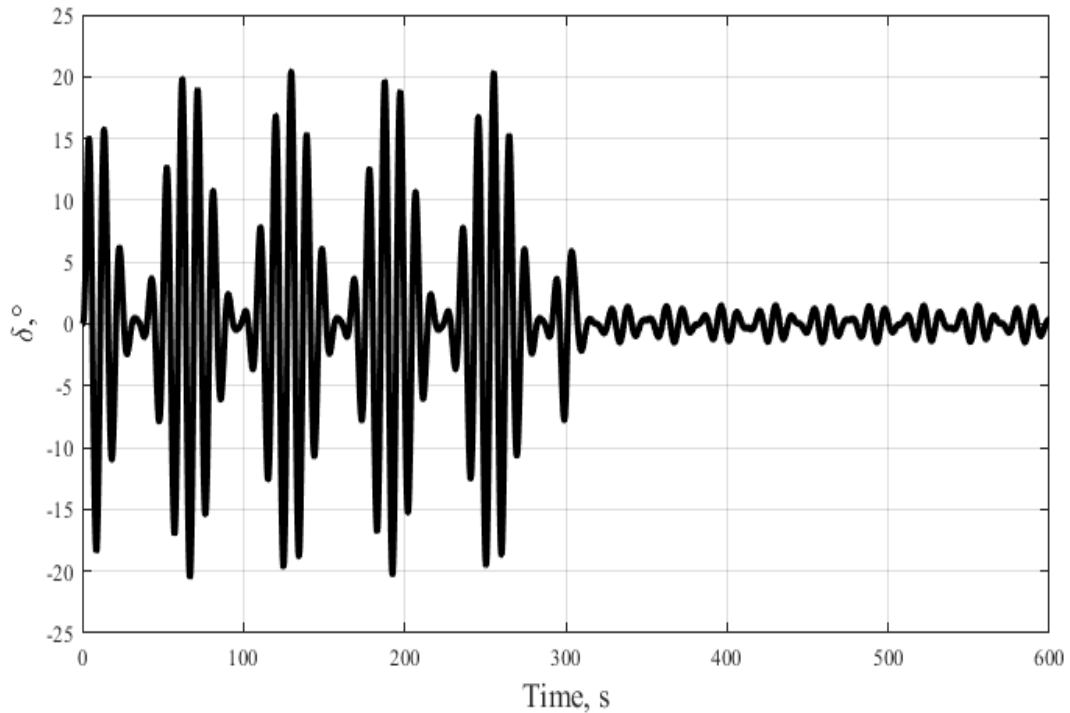


Рис. 4.9. Динамика перекадки рулей при воздействии морского волнения.

4.4. Практическая реализация компенсирующего многоцелевого регулятора

Обратимся теперь к вопросу влияния запаздывания на динамику замкнутой системы с многоцелевым регулятором, синтезированным ранее. Для начала рассмотрим режим отработки командного сигнала в ситуации, когда внешние возмущения отсутствуют. На рис. 4.10 представлен поворот судна на 10° при наличии постоянного запаздывания $\tau = 0.8$ с. Можно отметить значительное ухудшение качества управления за счет появления заметной колебательности переходного процесса. При увеличении запаздывания до $\tau = 1.2$ с колебания перестают быть затухающими, амплитуда становится постоянной и существенной (рис. 4.11).

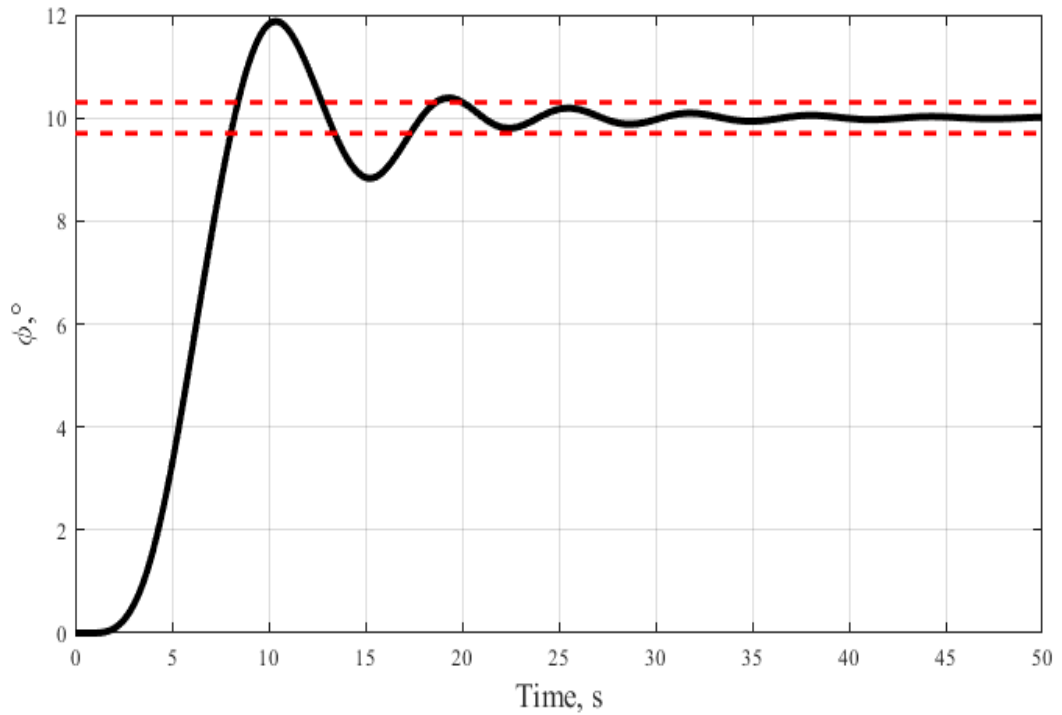


Рис. 4.10. Динамика курсового угла при повороте на 10° и запаздывании $\tau = 0.8$ с.

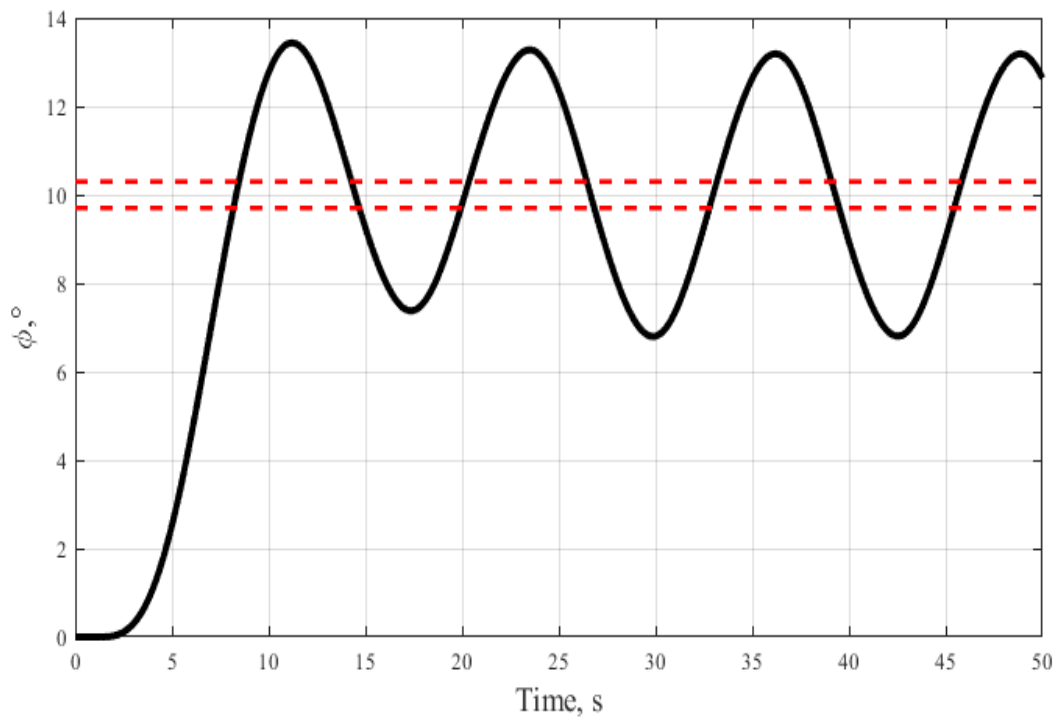


Рис. 4.11. Динамика курсового угла при повороте на 10° и запаздывании $\tau = 1.2$ с.

Представленные графики убедительно демонстрируют, что запаздывание необходимо принимать во внимание при проектировании систем управления подвижными объектами. В соответствии с описанным в п.

1.3 компенсационным подходом трансформируем исходный многоцелевой регулятор для учета запаздывания. С учетом обозначений, принятых в первой главе, управляющий сигнал будем подавать на привод руля в виде

$$u = k_u (\delta_z - \delta), \quad k_u = 100.$$

На рис. 4.12 представлена динамика замкнутой системы с многоцелевым компенсирующим регулятором при повороте на 10° с запаздыванием $\tau = 0.8$ с. В этом случае качество управления в целом идентично динамике замкнутой системы без запаздывания, что и является целью компенсационного подхода.

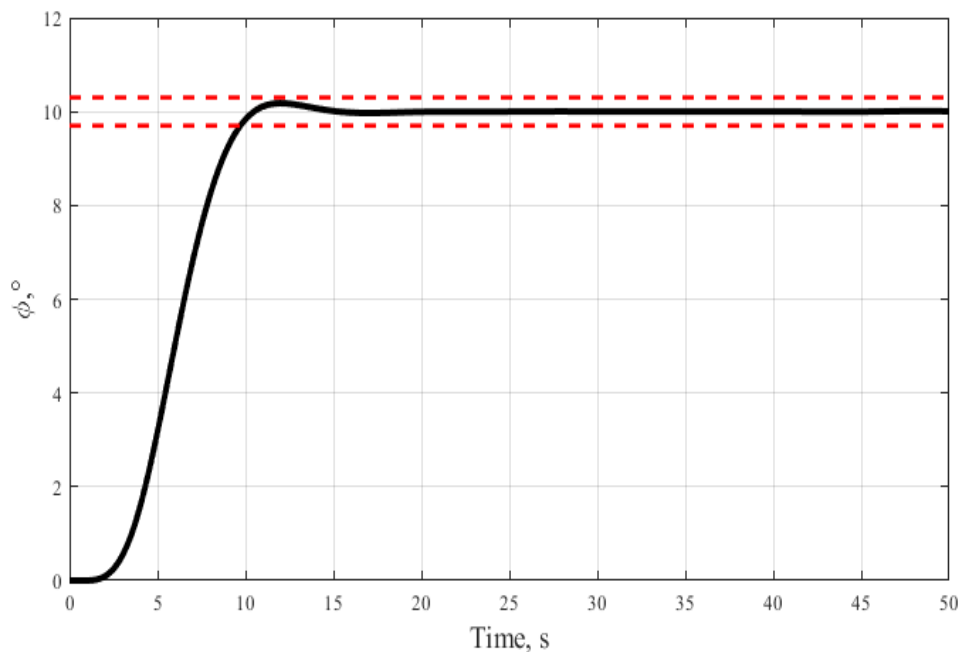


Рис. 4.12. Динамика системы, замкнутой компенсирующей обратной связью при повороте на 10° и запаздывании $\tau = 0.8$ с.

Теперь введем постоянное внешнее возмущение в виде бокового ветра со скоростью 10м/с. В этой ситуации качество динамики существенно ухудшается уже при запаздывании $\tau = 0.5$ с, как видно из рис. 4.13. При увеличении запаздывания до 0.8с амплитуда колебаний становится постоянной (рис. 4.14). Таким образом, в этом режиме также необходим учет запаздывания.

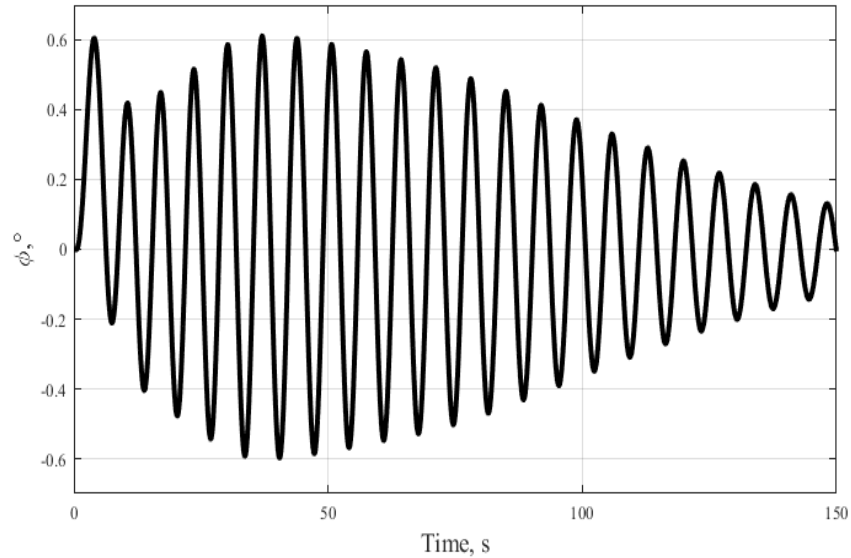


Рис. 4.13. Динамика системы при воздействии бокового ветра со скоростью 10м/с и запаздывании $\tau = 0.5$ с.

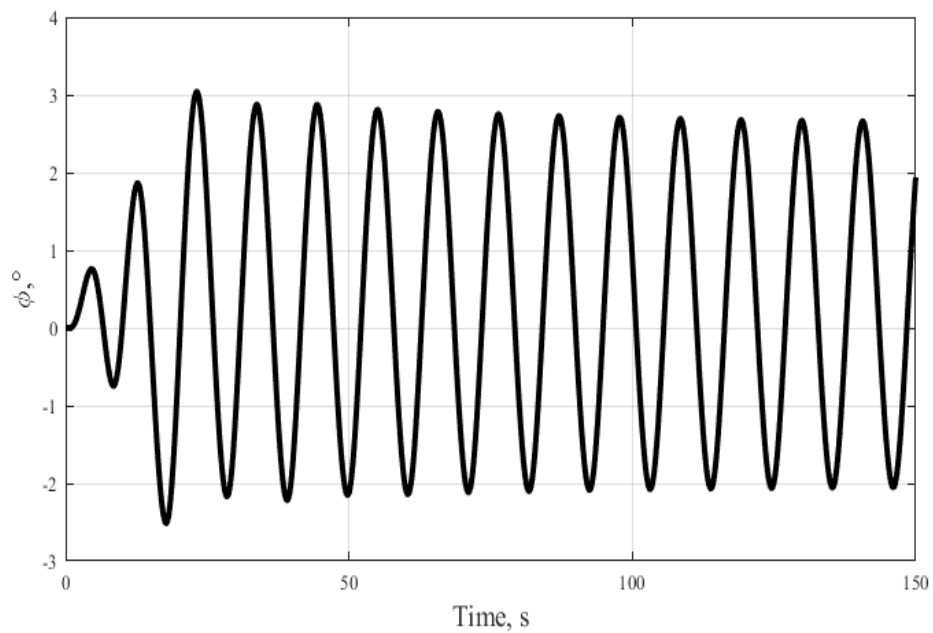


Рис. 4.14. Динамика системы при воздействии бокового ветра со скоростью 10м/с и запаздывании $\tau = 0.8$ с.

Рассмотрим теперь в этой ситуации поведение системы, замкнутой компенсирующим регулятором. Из рис. 4.15 видно, что в указанных условиях компенсационный подход позволяет сохранить динамические характеристики исходной системы без запаздывания, избавляя от негативного влияния запаздывания.

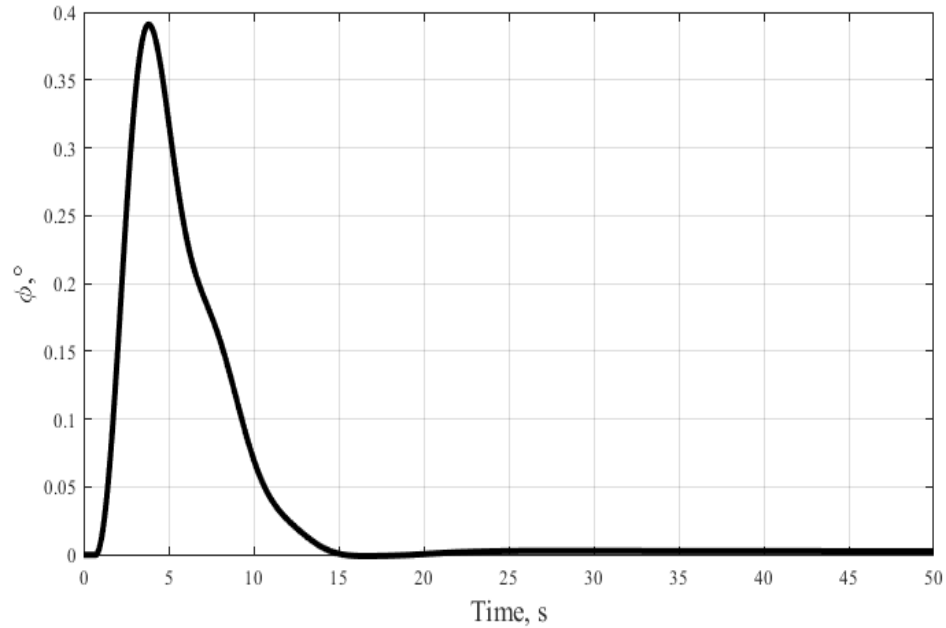


Рис. 4.15. Динамика системы, замкнутой компенсирующей обратной связью при воздействии бокового ветра со скоростью 10м/с и запаздывании $\tau = 0.5$ с.

Наконец, обратимся к вопросу влияния запаздывания на динамику системы при условии влияния периодического возмущения. Как видно из рис. 4.16 и рис. 4.17, амплитуда колебаний в замкнутой системе без компенсации запаздывания с выключенным корректором заметно увеличивается при величине запаздывания $\tau = 0.8$ с. Тем не менее, включение динамического корректора приводит к значительному снижению амплитуды колебаний.

Теперь применим компенсирующий регулятор, соответствующая динамика представлена на рис. 4.18 и рис. 4.19. И снова можно отметить, что динамика управляемого движения в этом случае соответствует динамике системы без запаздывания, т.е. примененный регулятор действительно компенсирует запаздывание. Таким образом, можно сделать вывод о том, что многоцелевой компенсирующий регулятор может эффективно применяться и в режиме морского волнения при условии наличия запаздывания.

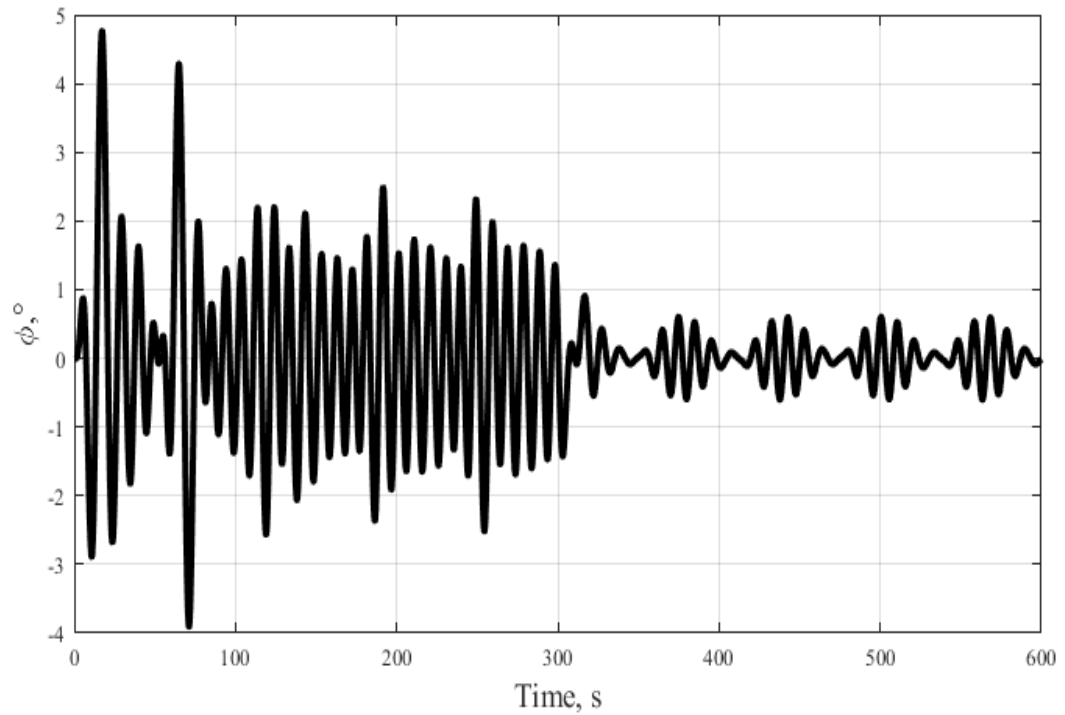


Рис. 4.16. Динамика курсового угла при воздействии волнения и запаздывании $\tau = 0.8$ с.

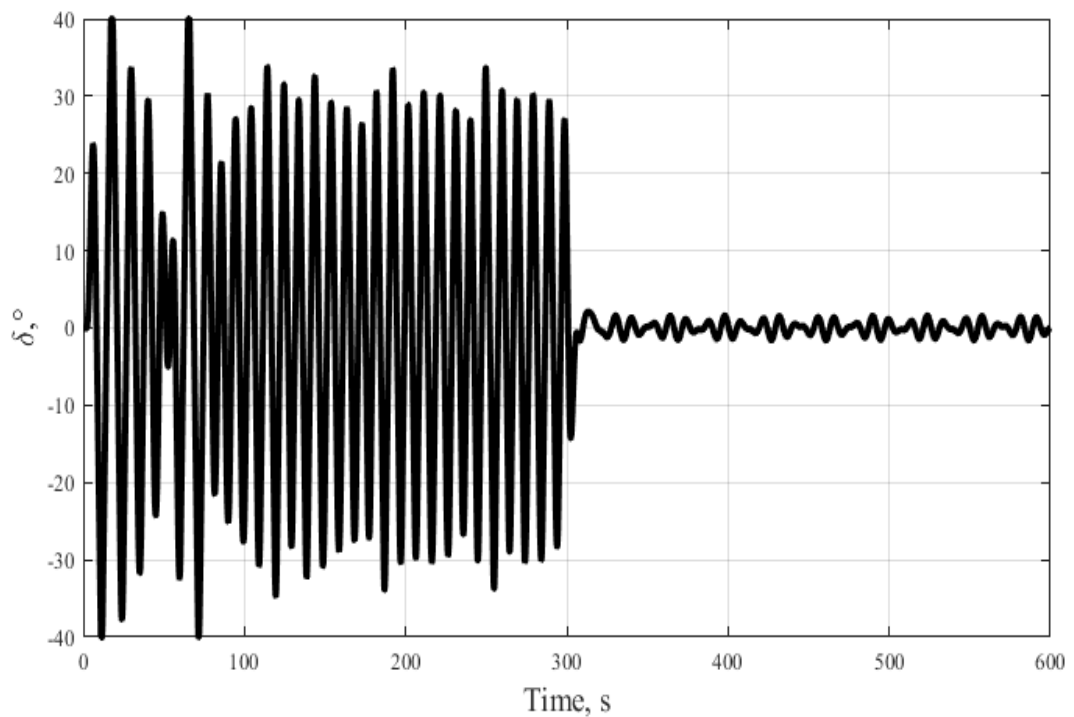


Рис. 4.17. Динамика перекадки рулей при воздействии волнения и запаздывании $\tau = 0.8$ с.

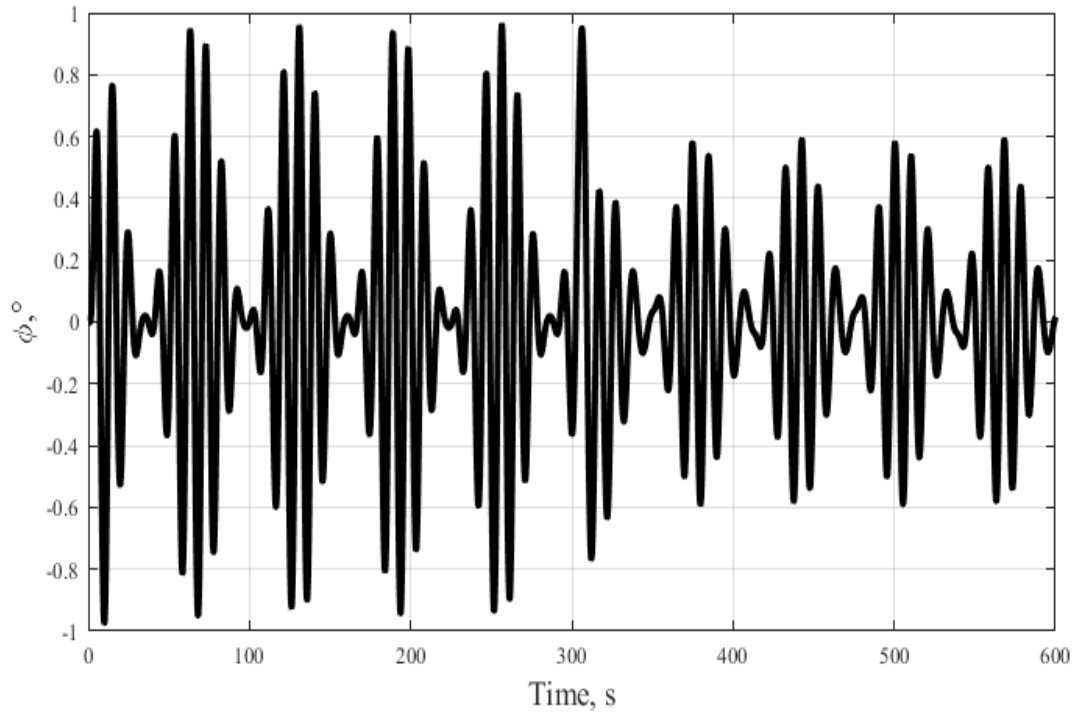


Рис. 4.18. Динамика курсового угла при использовании компенсирующего регулятора при воздействии волнения и запаздывании $\tau = 0.8$ с.

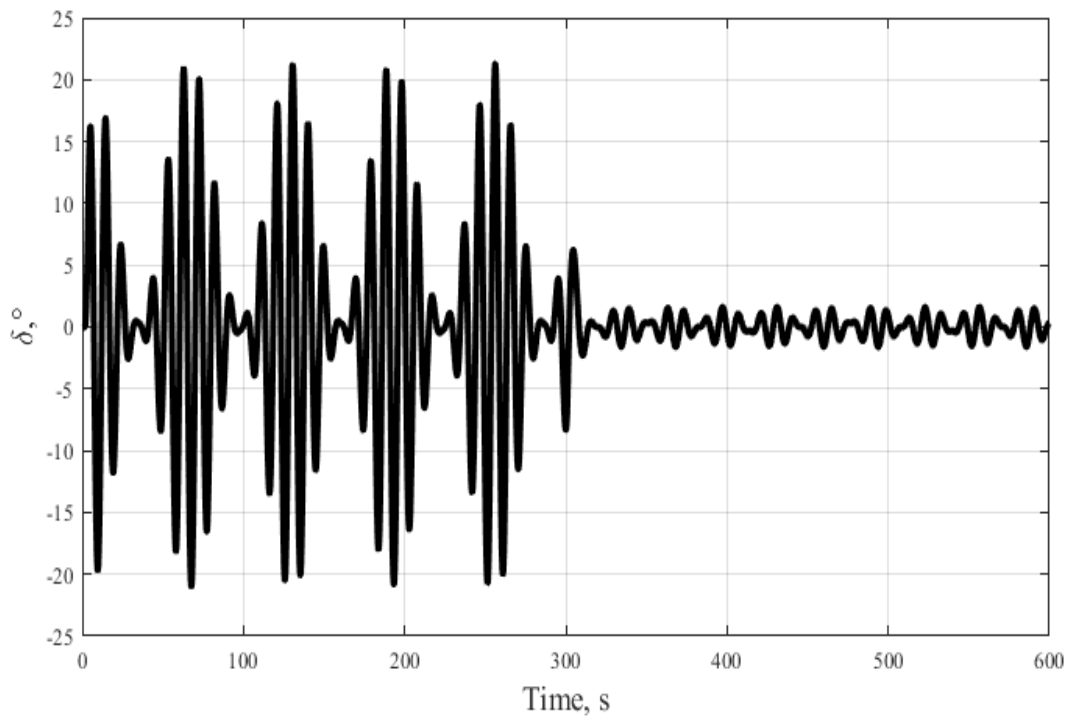


Рис. 4.19. Динамика перекладки рулей при использовании компенсирующего регулятора при воздействии волнения и запаздывании $\tau = 0.8$ с.

4.5. Выводы

Полученные результаты демонстрируют эффективность применения многоцелевых регуляторов для стабилизации подвижных объектов в различных режимах, при этом обеспечивается учет целого комплекса требований к динамике управляемого движения. Процесс синтеза элементов многоцелевой структуры значительным образом упрощается за счет относительной независимости элементов, входящих в состав регулятора. Возможность отключения отдельных элементов регулятора в зависимости от текущего режима также является существенным преимуществом.

Следует отметить, что качество управления системой, замкнутой многоцелевым регулятором, существенно ухудшается при наличии запаздывания в канале управления. Степень ухудшения может быть различной в зависимости от выбранных значений настраиваемых элементов многоцелевой структуры и величины запаздывания, вплоть до потери устойчивости. Таким образом, при проектировании системы управления необходим учет запаздывания.

Использование компенсационного подхода позволяет сохранить динамические характеристики исходной системы без запаздывания, т.е. передаточную матрицу. Результаты численных экспериментов показывают, что переходные процессы в обоих случаях практически идентичны. Важно отметить тот факт, что при компенсационном подходе не нужно решать отдельную задачу синтеза для системы с запаздыванием. Если осуществлен синтез регулятора базовой системы, то достаточно добавить уравнение динамики вспомогательной векторной функции и преобразовать вход регулятора с учетом прогноза.

В качестве недостатков описанного подхода можно выделить необходимость измерения величины внешнего возмущения. В ряде случаев точное измерение невозможно. Помимо этого, дальнейшему исследованию подлежит также вопрос робастных свойств использованного регулятора.

Тем не менее, можно сделать заключение, что применение описанного в главе подхода в целом позволяет обеспечить оптимальное управление подвижными объектами с учетом внешних возмущений различной природы и запаздывания управляющего сигнала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена вопросам моделирования, анализа и синтеза многоцелевых законов управления подвижными объектами с учетом запаздывания.

В результате проведенных исследований получены следующие основные результаты:

- Исследованы вопросы применения прогноза для компенсации запаздывания в задаче многоцелевого управления подвижными объектами с линейными моделями динамики. Разработан метод трансформации многоцелевого регулятора, построенного для объекта без запаздывания, обеспечивающий компенсацию запаздывания и сохраняющий передаточную матрицу исходной замкнутой системы.
- Развита методы многоцелевого управления в задаче визуального позиционирования подвижных объектов. Разработан алгоритм синтеза многоцелевого регулятора с визуальной обратной связью, учитывающий динамику объекта управления.
- Сформирована компенсирующая запаздывание трансформация многоцелевого регулятора с визуальной информацией в контуре обратной связи. Рассмотрены примеры синтеза таких регуляторов для двух видов мобильных роботов, полноприводного и неполноприводного, с учетом запаздывания.
- Развита методы многоцелевого управления подвижными объектами с нелинейными моделями динамики. Предложен алгоритм синтеза многоцелевого регулятора с линеаризацией обратной связью.
- Разработан метод трансформации построенного многоцелевого регулятора для компенсации запаздывания. Рассмотрен пример синтеза такого регулятора для двухзвенного робота-манипулятора с запаздыванием.
- Представлен пример синтеза компенсирующего многоцелевого регулятора для управления движением судна на воздушной подушке.

Список литературы

1. Александров А. Ю., Жабко А. П., Платонов А. В. Устойчивость движений дискретных динамических. СПб. : Издательский Дом Федоровой Г.В., 2015. 154 с.
2. Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления / Алиев Ф. А., Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Н. Киев : Наукова думка, 1978. 327 с.
3. Барабанов А. Е., Первозванский А. А. Оптимизация по равномерно-частотным показателям (Н-теория) // Автоматика и телемеханика. 1992. № 9. С. 3–32.
4. Бородай И. К., Нецветаев Ю. А. Качка судов на морском волнении. Л. : Судостроение, 1969. 432 с.
5. Веремей Е. И., Корчанов В. М. Многоцелевая стабилизация динамических систем одного класса // Автоматика и телемеханика. 1988. № 9. С. 126–137.
6. Веремей Е. И., Еремеев В. В., Корчанов В. М. Синтез алгоритмов робастного управления движением подводных лодок вблизи взволнованной поверхности моря // Гироскопия и навигация. 2000. № 2. С. 34–43.
7. Компьютерное моделирование систем управления движением морских подвижных объектов / Веремей Е. И., Корчанов В. М., Коровкин М. В., Погожев С. В. СПб. : НИИ Химии СПбГУ, 2002. 370 с.
8. Веремей Е. И., Сотникова М. В. Многоцелевая структура законов управления морскими подвижными объектами // Труды: XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014). 2014. С. 3289–3300.
9. Веремей Е. И. Среднеквадратичная многоцелевая оптимизация: учеб. пособие. СПб. : Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2016. 408 с.

10. Веремей Е. И. Компенсирующие регуляторы по выходу для ЛТИ систем с запаздыванием по управлению // Современные методы прикладной математики, теории управления и информационных технологий (ПМТУКТ-2017). Сборник трудов X международной конференции. 2017. С. 106–110.
11. Веремей Е. И., Погожев С. В., Севостьянов Р. А. Стабилизация курса морских судов в экономичном режиме движения // Современные методы прикладной математики, теории управления и информационных технологий (ПМТУКТ-2015). Сборник трудов VIII международной конференции. 2015. С. 92–95.
12. Веремей Е. И., Погожев С. В., Севостьянов Р. А. Фильтрующая коррекция многоцелевых законов управления движением морских судов // Системы управления и информационные технологии. 2015. № 4 (62). С. 4–7.
13. Войткунский Я. И. Справочник по теории корабля: в трех томах. Том 3. Управляемость водоизмещающих судов. Гидродинамика судов с динамическими принципами поддержания. Л. : Судостроение, 1985. 544 с.
14. Дезоер Ч., Видьясагар М. Системы с обратной связью: Вход-выходные соотношения. М. : Наука, 1972. 278 с.
15. Дмитриев С. П., Пелевин А. Е. Задачи навигации и управления при стабилизации судна на траектории. СПб. : ГНЦ РФ-ЦНИИ «Электроприбор», 2002. 160 с.
16. Жабко А. П., Харитонов В. Л. Методы линейной алгебры в задачах управления. СПб. : Изд-во С.–Петербург. ун-та, 1993. 320 с.
17. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М. : Наука, 1975. 496 с.
18. Зубов В. И. Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л. : Судостроение, 1966. 352 с.
19. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л. : Машиностроение, 1974. 336 с.

20. Калман Р., Бьюси Р. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказаний // Труды американского общества инженеров-механиков. Сер. Д. Техническая механика. 1961. Т. 83, № 1. С. 123–141.
21. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А. Многомерные дискретные системы управления. М. : Наука, 1966. 420 с.
22. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М. : Мир, 1977. 650 с.
23. Колызаев Б. А., Косоруков А. И., Литвиненко В. А. Справочник по проектированию судов с динамическими принципами поддержания. Л. : Судостроение, 1980. 472 с.
24. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. : Физматгиз, 1959. 211 с.
25. Красовский А. А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М. : Наука, 1973. 558 с.
26. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М. : Машиностроение, 1976. 184 с.
27. Ларин В. Б., Сунцев В. Н. О задаче аналитического конструирования регуляторов // АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1968. № 12. С. 142–144.
28. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов // АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1960. № 4–6; 1961. № 4, 11.
29. Летов А. М. Динамика полета и управление. М. : Наука, 1969. 359 с.
30. Летов А. М. Математическая теория процессов управления. М. : Наука, 1981. 256 с.
31. Лукомский Ю. А., Чугунов В. С. Системы управления морскими подвижными объектами. Л. : Судостроение, 1988. 272 с.
32. Лукомский Ю. А., Корчанов В. М. Управление морскими подвижными объектами. СПб. : Элмор, 1996. 320 с.
33. Мирошник И. В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. СПб. : Питер, 2005. 271 с.

34. Олссон Г., Пиани Д. Цифровые системы автоматизации и управления. СПб. : Невский Диалект, 2001. 557 с.
35. Пелевин А. Е. Идентификация параметров модели объекта в условиях внешних возмущений // Гироскопия и навигация. 2014. №4 (87). С. 111–120.
36. Петров Ю. П. Оптимизация управляемых систем, испытывающих воздействие ветра и морского волнения. Л. : Судостроение, 1973. 216 с.
37. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления. Л. : Энергия, 1977. 280 с.
38. Петров Ю. П. Синтез устойчивых систем управления, оптимальных по среднеквадратичным критериям качества // АН СССР, Автоматика и телемеханика. 1983. № 7. С. 5–24.
39. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М. : Наука, 2002. 303 с.
40. Поляков К. Ю. Основы теории цифровых систем управления: учебное пособие. СПб. : СПбГМТУ, 2006. 161 с.
41. Севостьянов Р. А. Компенсация внешних возмущений в задаче визуального позиционирования мобильного робота // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 4. С. 790–798.
42. Севостьянов Р. А. Визуальное позиционирование мобильного робота с учетом запаздывания // Математическая теория управления и ее приложения (МТУиП-2020), материалы конференции. Государственный научный центр Российской Федерации АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». 2020. С. 77–79.
43. Севостьянов Р. А., Шаяхметова Л. В. Система автоматизации процесса исследования динамики модели судна на воздушной подушке // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. Т. 12, № 1. С. 127–134.

44. Севостьянов Р. А. Программная поддержка процессов управления мобильным роботом с визуальной обратной связью // Системы управления и информационные технологии. 2019. № 4 (78). С. 83–86.
45. Севостьянов Р. А. Управление неполноприводным роботом с визуальной обратной связью // Современные методы прикладной математики, теории управления и информационных технологий (ПМТУКТ-2018). Сборник трудов XI международной конференции. 2018. С. 244–247.
46. Севостьянов Р. А. Стабилизация движения судна на воздушной подушке с учетом запаздывания // Современные методы прикладной математики, теории управления и информационных технологий (ПМТУКТ-2018). Сборник трудов XI международной конференции. 2018. С. 248–251.
47. Севостьянов Р. А. Цифровая стабилизация движения колесного робота // Системы управления и информационные технологии. 2018. № 1 (71). С. 43–36.
48. Севостьянов Р. А. Стабилизация движения робота при наличии транспортного запаздывания // Навигация и управление движением: материалы XVI конференции молодых ученых. 2014. С. 258–264.
49. Севостьянов Р. А. Управление движением мобильного робота с учетом транспортного запаздывания // Процессы управления и устойчивость: Труды 45-й международной научной конференции аспирантов и студентов. 2014. С. 385–390.
50. Фомин В. Н. Методы управления линейными дискретными объектами. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. 336 с.
51. Форсайт Д, Понс Ж. Компьютерное зрение. Современный подход. М. : Вильямс, 2004. 928 с.
52. Чанг Ш. Синтез оптимальных систем автоматического управления. М. : Машиностроение, 1964. 440 с.
53. Чернецкий В. И. Математическое моделирование динамических систем. Петрозаводск : Изд-во Петрозаводск. гос. ун-та, 1996. 432 с.

54. Янушевский Р. Т. Управление объектами с запаздыванием. М. : Наука, 1978. 416 с.
55. Billard A., Kragic D. Trends and challenges in robot manipulation // Science. 2019. Vol. 364, № 6446. P. eaat8414.
56. Speeded up robust features (SURF) / Bay H. [et al.] // Computer Vision and Image Understanding. 2008. Vol. 110, № 3. P. 346–359.
57. Bogsra O. H., Kwakernaak H., Meinsma G. Design methods for control systems. Notes for a course of the Dutch Institute of Systems and Control. 2006. 325 p.
58. Brauni Th. Embedded Robotics: Mobile Robot Design and Applications with Embedded Systems. 2nd ed. Berlin : Springer-Verlag, 2006. 458 p.
59. Carona R., Aguiar A. P., Gaspar J. Control of unicycle type robots: tracking, path following and point stabilization // Proceedings of IV Jornadas de Engenharia de Electronica e Telecomunicacoes e de Computadores. 2008. P. 180–185.
60. Caspi P., Maler O. From Control Loops to Real-Time Programs // Handbook of Networked and Embedded Control Systems / ed. by D. Hristu, W.S. Levine. Boston : Birkhauser, 2005. P. 395–418.
61. Chaumette F., Hutchinson S. Visual Servo Control: Basic Approaches // IEEE Robotics & Automation Magazine. 2006. Vol. 13, № 4. P. 82–90.
62. Chaumette F., Hutchinson S. Visual Servo Control: Advanced Approaches // IEEE Robotics & Automation Magazine. 2007. Vol. 14, № 1. P. 109–118.
63. Doyle J., Francis B., Tannenbaum A. Feedback control theory. New York : Macmillan Publ. Co., 1992. 227 p.
64. Fossen T. I. Guidance and Control of Ocean Vehicles. John Wiley & Sons, 1994. 494 p.
65. Fossen T. I. Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control. John Wiley & Sons, 2011. 596 p.
66. Francis B. A. A course in linear control theory // Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin : Springer-Verlag, 1987. Vol. 88. 156 p.

67. Automatic generation and detection of highly reliable fiducial markers under occlusion / Garrido-Jurado S., Muñoz-Salinas R., Madrid-Cuevas F. J., Marín-Jiménez M. J. // *Pattern Recogn.* 2014. Vol. 47, № 6. P. 2280–2292.
68. Hartley R., Zisserman A. *Multiple view geometry in computer vision*. 2nd ed. Cambridge University Press, 2004. 672 p.
69. Isidori A. *Nonlinear Control Systems*. London : Springer, 1995. 549 p.
70. Kalman R. E. Contributions to the theory of optimal control // *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*. 1960. Vol. 5. P. 102–119.
71. Khalil H. K. *Nonlinear systems*. 3rd ed. NJ : Prentice Hall, 2002. 750 p.
72. Kharitonov V. L. *Time-Delay Systems. Lyapunov Functionals and Martices*. Birkhäuser, 2013. 312 p.
73. Krstic M. *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Birkhäuser, 2009. 466 p.
74. Landau I. D., Zito G. *Digital Control Systems: Design, Identification and Implementation*. London : Springer-Verlag, 2006. 484 p.
75. Loria A., Fossen T. I., Panteley E. A Separation Principle for Dynamic Positioning of Ships: Theoretical and Experimental Results // *IEEE Transactions of Control Systems Technology*. 2000. Vol. 8, № 2. P. 332–343.
76. Lowe D. G. Distinctive image features from scale-invariant keypoints // *International Journal of Computer Vision*. 2004. Vol. 2, № 60. P. 91–110.
77. Lynch K. M., Park F. C. *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*. Cambridge University Press, 2017. 624 p.
78. Malis E., Chaumette F., Boudet S. 2 1/2 D Visual Servoing // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 1999. Vol. 15, № 2. P. 238–250.
79. *Time-Delay Systems. Stability and Performance Criteria with Applications* / Marshall J. E., Gorecki H., Korytowski A., Walton K. Ellis Horwood, 1992. 244 p.
80. Michiels W., Niculescu S.-I. *Stability and Stabilization of Time-Delay Systems. An Eigenvalue-Based Approach*. Philadelphia : SIAM, 2007. 378 p.

81. Mondie S., Michiels W. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2003. Vol. 48, № 12. P. 2207–2212.
82. Dynamical Models for Omni-directional Robots with 3 and 4 Wheels / Oliviera H. P., Sousa A. J., Moreira A. P, Costa P. J. // *Proceedings of the 5th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*. 2008. P. 189–196.
83. Perez T. *Ship Motion Control: Course Keeping and Roll Stabilization Using Rudder and Fins*. London : Springer-Verlag, 2005. 300 p.
84. *The mathematical theory of optimal processes* / L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkerelidze, E. F. Mischenko. New York : John Wiley, 1962. 360 p.
85. Sami Fadali M., Visoli A, *Digital Control Engineering: Analysis and Design*. Burlington : Academic Press, 2009. 552 p.
86. Sevostyanov R. A. Delay-compensating Visual Positioning Of The Mobile Robot // *Journal of Physics: Conference Series*. 13. "13th Multiconference on Control Problems, M CCP 2020". 2021. P. 012038.
87. Sevostyanov R. Multipurpose Visual Positioning of the Underactuated Mobile Robot // *Stability and Control Processes: Proceedings of the 4th International Conference Dedicated to the Memory of Professor Vladimir Zubov, Saint Petersburg, 05–09 october 2020*. Cham : Springer, 2022. P. 329–334.
88. Sevostyanov R., Shayakhmetova L. Application of the Asymptotic Observers for the Stabilization of the Time-Delay Linear Equations // *Convergent Cognitive Information Technologies. Convergent 2018. Communications in Computer and Information Science*. 2020. Vol. 1140. P. 223–230.
89. Sevostyanov R., Shayakhmetova L. Stabilization of the inverted pendulum considering delay // *Selected Papers of the II International Scientific Conference "Convergent Cognitive Information Technologies" (Convergent 2017)*. 2018. P. 318–324.

90. Sevostyanov Ruslan A., Veremey Evgeny I. Multipurpose stabilization of the advanced marine surface crafts // 6th Seminar on Industrial Control Systems - Analysis, Modeling and Computation, ITM Web of Conferences. 2016. Vol. 6. P. 01004.
91. Handbook of Robotics / ed. by B. Siciliano, O. Khatib. Berlin : Springer-Verlag, 2008. 1628 p.
92. Robotics: modelling, planning and control / B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo. London : Springer-Verlag, 2009. 644 p.
93. Slotine J. J. E., Li W. Applied Nonlinear Control. NJ : Prentice-Hall, 1991. 461 p.
94. Smith O. J. M. A Controller to overcome dead time // ISAJ. 1959. Vol. 6, № 2. P. 28–33.
95. Sotnikova M, Sevostyanov R. Visual Positioning of a Moving Object Using Multi-objective Control Algorithm // Lecture Notes in Computer Science 2023. Vol. 13930 LNCS. P. 425–438.
96. Spong M. W., Hutchinson S., Vidyasagar M. Robot Modeling and Control. John Wiley & Sons, 2005. 496 p.
97. Szeliski R. Computer Vision: Algorithms and Application. London : Springer-Verlag, 2011. 812 p.
98. Van der Schaft A. J. L2-Gain and passivity techniques in nonlinear control. 2nd ed. London : Springer-Verlag, 2000. 248 p.
99. Veremey E. I. Dynamical Correction of Control Laws for Marine Ships' Accurate Steering // Journal of Marine Science and Application. 2014. Vol. 13, № 2. P. 127–133.
100. Veremey E. I. Optimization of filtering correctors for autopilot control laws with special structures // Optimal Control Applications and Methods. 2016. Vol. 37, № 2. P. 323–339.
101. Vidyasagar M. Control system synthesis: A factorization approach. Cambridge (Mass.) : MIT Press, 1985. 436 p.

102. Xianzhou W., Hanzhen X. Robust autopilot with wave filter for ship steering // Journal of Marine Science and Application. 2006. Vol. 5. P. 24–29.
103. Yun L., Bliault A. Theory and Design of Air Cushion Craft. London : Arnolds, 2000. 632 p.