Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Мозоляко Павел Александрович

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ГРАНИЧНОГО ПОВЕДЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Научная специальность 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация
на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2023

Оглавление

Введение

Теория гармонических функций занимает центральное место в математическом анализе вот уже на протяжении двух столетий. В настоящее время к ней можно причислить как классические направления исследований (в особенности относящиеся и к теории аналитических функций, например пространства Харди или теорию субгармонических функций), так и наиболее современные и активно развивающиеся области (дискретные гармонические функции, теория гармонической меры, изучение роста и убывания лапласиана). Она имеет многочисленные и глубоко разработанные связи с другими областями, в том числе с теорией случайных процессов и полей, теорией потенциала (ее происхождение можно возвести к теории гармонических функций), анализом на графах и сетях, статистической физикой, анализом Фурье. теорией всплеском и анализом сигналов, и многими другими.

Вопросы о граничном поведении гармонических функций составляют одну из основных частей теории, к ним относятся и фундаментальные результаты, и современные открытые проблемы. В определенном смысле уже сама задача существования – задача Дирихле – содержит в себе большинство подобных вопросов. Качественное и количественное описание сходимости функции к своим граничным значениям, или, с другой стороны, ее рост и осцилляция у границы ('плохо ведущие себя' функции иногда бывает легче изучать – здесь можно привести трехмерный вариант теоремы Привалова или хвостовой закон повторного логарифма), зависимость от способа приближения к границе, множества нулей и множества уровня, и другие подобные темы составляли постоянный предмет исследований. Примерами конкретных задач могут служить принцип максимума, различные версии теоремы о трех кругах, теоремы типа Фату, существование угловой производной, точки регулярности, граничное неравенство Гарнака, 'распространение малости', закон повторного логарифма для гармонических функций.

Взаимосвязи между классической теорией гармонических функций и дискретными моделями (более явно выраженное, скажем, в случайных процессах) стали рассматриваться относительно недавно. Они, можно так выразиться, присутствовали неявно в методах и рассуждениях, например в виде разложения Литтлвуда-Пэли, аналитических версиях остановки времени в круге, карлесоновых квадратах. Значительное продвижение было получено в восьмидесятых годах в виде знаменитых результатов Н.Г. Макарова о носителе гармонической меры. Далее подобные техники развивались в разных направлениях, в том числе в теории всплесков, диадической теории сингулярных интегральных операторов, теории вероятностей на графах, и в настоящее время теория дискретных гармонических функций представляет уже сформировавшуюся область исследований, в частности ее сходство и различия с ее непрерывным аналогом (из недавних результатов отметим здесь дискретную версию теоремы Лиувилля на квадратной решетке).

Настоящая диссертация посвящена трем вопросам о граничном поведении гармонических функций в связи с дискретными моделями.

Первая тема диссертации относится к описанию карлесоновых мер для некоторого класса пространств аналитических или гармонических функций в полидиске. Пусть $H(\Omega)$ – гильбертово пространство функций, обыкновенно гармонических или аналитических, заданных на области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, и пусть на Ω (или, в зависимости от контекста, на замыкании $\overline{\Omega}$) задана радонова мера μ. Мы называем меру μ карлесоновой мерой для пространства $H(\Omega)$, если неравенство

$$\int_\Omega |f|^2\, d\mu \leq C_\mu \|f\|^2_{H(\Omega)}$$

выполняется для любой функции $f \in H(\Omega)$ с некоторой абсолютной постоянной C_μ.

Само понятие карлесоновой меры возводится к знаменитой статье Л. Карлесона [21], посвященной задаче о короне, где он, в частности, дал описание подобных мер для пространства Харди $H^2(\mathbb{D})$. Впоследствии были получены обобщения на случаи различных пространств аналитических и гармонических функций, мы упомянем здесь результаты Д. Стегенги [90] (шкала Харди-Соболева на диске $\mathbb{D}$), У. Гастингса [40] и Д. Люкинга [59] (пространства Бергмана в многомерном случае), работы [4] и [5] (пространства Бесова в комплексных шарах). Для шкалы Харди-Соболева на полидиске основные ссылки суть [24, 25, 26], в этих работах рассматривался гармонический вариант пространств Харди на полидиске. Карлесоновы меры оказались одним из центральных объектов в анализе пространств аналитических функций, они возникают при описании мультипликаторов, интерполяционных последовательностей, ганкелевых форм, задач о короне, задач об описании исключительных множеств на границе и многих других. Кроме того, в теории потенциала возникают схожие объекты при изучении ограниченности вложений пространств Соболева в $L^p(\mu)$ – *следовых неравенств*. Такая разновидность мер изучалась в первую очередь в работах В.Г. Мазьи (о слабых решениях уравнений типа Шредингера), последующее развитие породило большое количество статей, посвященных свойствам и описаниям таких мер.

Наша главная цель в первом направлении состоит в описании карлесоновых мер для некоторой шкалы пространств Харди-Соболева на полидиске. Как известно, анализ на полидиске значительно отличается от одномерной версии, и в процессе наших рассуждений мы столкнемся с несколькими проявлениями этих отличий. Отметим, в частности, что за исключением важной серии статей С.-Я. Чанг и Р. Феффермана, написанных в восьмидесятых годах, почти неизвестны другие описания карлесоновых мер в мультипараметрическом контексте, даже для бидиска. В нашей работе мы используем диадический дискретный подход. Именно, следуя [6] мы переносим нашу непрерывную задачу в дискретный контекст, переписывая карлесоново вложение как *вложение типа Харди* на некотором графе, который мы называем d-деревом. Мы продолжаем наши рассуждения и решаем дискретную задачу, а потом показываем, что решение переносится обратно на полидиск. Более того, именно дискретное вложение и сопутствующие задачи мы считаем основным объектом исследований, который представляет не меньший интерес, чем сама исходная непрерывная задача, в силу многочисленных связей дискретной модели с диадическими парапроизведениями, сингулярными интегральными операторами, мультипараметрическими потенциалами. Мы также обсудим возможную потерю информации при переходе между дискретными и непрерывными задачами, в особенности в контексте аналитических функций.

Вторая тема состоит в исследовании так называемых пространств роста гармонических функций. Они состоят из функций, гармонических на области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, и удовлетворяющих следующему условию роста у границы области

$$|u(x)| \leq C_u w(\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)), \quad x \in \Omega,$$

здесь функцию w мы называем *весом*, на него обычно накладываются условия удвоения.

Подобные пространства аналитических и гармонических функций в единичном круге рассматривались А. Шилдсом и Д. Уильямсом, а их ряды Фурье изучались Д. Беннеттом, Д. Стегенгой и Р. Тимони, которые показали, что рост функции не может быть описан в терминах роста частичных сумм ряда Фурье (что непосредственно относится к нашим результатам). Еще один подход был разработан Б. Коренблюмом, чья известная работа о распространении теории Неванлинны послужила отправной точкой для исследований в этой области, впоследствии исследования были продолжены в работах Ю. Любарского, Е. Малинниковой и П. Тома. Кроме того, эти пространства изучались и в классических работах М. Картрайт, которая доказала, что односторонняя полиномиальная оценка в круге влечет двустороннюю. В работе А. Боричева этот результат был распространен на намного более широкий класс весов.

В пределах этой темы мы показываем, что функции из классов роста могут быть описаны в терминах коэффициентов их всплеск-разложений. Ряды всплесков, соответствующие граничным (в каком-то смысле) значениям гармонической функции, служат удобным инструментом, заменяющим в некоторой степени ряды Фурье. Например, всплески Хаара доставляют мартингальное представление функции. Мы работаем с гладким кратномасштабным представлением, где степень гладкости зависит от свойств веса w. Далее мы показываем, что такая функция в липшицевой области обыкновенно сильно осциллирует рядом с границей. Подобное поведение является типичным, и оно выражается в терминах, связанных с законом повторного логарифма. Мы предъявляем еще один результат такого рода, приспособленный к нашему пространству.

Помимо этого, мы распространяем результаты М. Картрайт (и А. Боричева) на единичный шар в $\mathbb{R}^d$ и широкий класс регулярных весов.

Наконец, мы доказываем две теоремы об осцилляции для разделенных разностей функций из класса Гельдера на вещественной прямой. На первый взгляд это не относится напрямую к теории гармонических функций, однако поведение таких разностей в значительной степени совпадает с поведением гармонических функций из соответствующих классов роста. Техники, которые мы используем, также позаимствованы из методов, описанных выше, в особенности мартингальные подходы.

Третья тема диссертации посвящена вариации гармонических функций около границы. Для данной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей и положительной гармонической функции u, определенной на Ω, мы изучаем точки $\xi \in \partial\Omega$ для которых

$$\int_0^1 |\nabla u(p + t\vec{N}(\xi))|\, dt < +\infty,$$

где $\vec{N}(\xi)$ есть единичная внутренняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке ξ.

Исследование этой величины – *нормальной вариации* функции u – может быть возведено к классической работе У. Рудина 1955 года, в которой он показал, что нормальная (в его контексте радиальная) вариация ограниченной аналитической функции в круге может быть бесконечной в почти каждой точке окружности. В 1993 году Ж. Бургейн доказал, что, с другой стороны, множество точек конечной вариации ограниченной аналитической функции (а также и положительной гармонической функции) не пусто, и, более того, не может быть слишком маленьким (с точки зрения размерности Хаусдорфа). Этот результат был распространен на случай единичного шара в работе М. О'Нила.
Нормальная вариация возникает в различных задачах теории гармонических функций, мы упомянем только работы Х. Ортеги-Серды, Д. Гирелы, П. Джонса, П. Мюллера, Д. Уолша, в которых различные версии этого объекта использовались для описания пространств аналитических функций и для исследования граничных свойств функций из этих пространств. Наш основной результат состоит в распространении результатов Бургейна на случай гладких областей в $\mathbb{R}^d$. Мы показываем, что нормальная вариация положительной гармонической функции конечна для сверхплотного (в некотором смысле) множества граничных точек. Здесь особое значение уделяется тому факту, что в отличие работ Бургейна и О'Нила, мы избегаем использования преобразования Фурье, и используем вместо этого оценки функций Грина. Хотя сам метод и нельзя назвать дискретным, его дискретная модель, тем не менее, представила бы значительный интерес.

Результаты, выбранные для представления в данной диссертации, либо полностью получены автором, либо автор (в случае работы в соавторстве) внес преобладающий вклад в их получение. Результаты, полученные в соавторстве, отмечены в тексте диссертации.

Диссертация состоит из Введения, 8 Глав и Заключения. В тексте диссертации содержатся определения, пояснения, исторические справки, формулировки вспомогательных утверждений, которые **выносятся на защиту**. Результаты диссертации опубликованы в 15 статьях ([98]-[112]) в рецензируемых журналах. Они неоднократно докладывались на международных научных конференциях и исследовательских семинарах. Это свидетельствует об их **достоверности**.

Далее в этой Главе мы представим основные результаты диссертации и опишем исследуемые вопросы и задачи. Для удобства читателя формулировки теорем приводятся еще раз в соответствующих Главах диссертации. Нумерация формул в теле диссертации тройная: первое число – номер главы, второе число – номер параграфа, третье число – номер утверждения или формулы в параграфе. Нумерация во Введении последовательная, с префиксом I. перед номером формулы или утверждения.

Актуальность вопросов, изучаемых в диссертации, подтверждается выбором тем диссертации. Они встроены в широкий математический контекст и обладают обширными связями с теорией потенциала, теорией случайных процессов, функциональным анализом (в особенности гильбертовыми пространствами аналитических функций), анализом на графах, теорией дифференциальных уравнений в частных производных и многими другими. Все они составляют области активных исследований, и выбранные темы диссертации привлекают значительный интерес специалистов. Отдельно упомянем недавние продвижения, касающиеся теоремы Нехари на полидиске.

Я считаю результаты и темы диссертации **разработанными** в достаточной степени, чтобы представлять диссертацию к защите. Получен ряд общих результатов, приложений, примеров и контрпримеров. Это, однако, не означает, что тема исчерпана, – напротив, остается ряд значительных и важных вопросов, часть из которых сформулирована в Заключении.

Цель данной работы состоит в получении новых конкретных математических результатов, разработке новых методов и техник, а также в разработке новых направлений для последующих исследований и углубления нашего понимания рассматриваемых задач.

Почти все результаты работы – **новые**, что подтверждается их публикацией в рецензируемых изданиях. При обсуждении уже известного утверждения, результат состоит в новом подходе к доказательствам уже известных теорем, что также представляет интерес.

Работа носит **теоретический характер**. Полученные результаты могут применяться (и некоторые уже применяются) в математических исследованиях в указанных выше областях.

В работе используются как уже разработанные, так и новые **методы**, которые относятся к: функциональному анализу, теории меры, гильбертовым пространствам с воспроизводящим ядром, теории потенциала, гармоническим функциям на графах, комбинаторике – в Главах 1-3, а также к теории вероятностей (в особенности к диадическим мартингалам), теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории всплесков, теории пространств Блоха, теории гармонической меры для остальных Глав. Мы, в частности, упомянем новые техники *мажоризации энергии* и *оценок убывания энергии* в мультипараметрическом контексте, которые мы относим к числу главных достижений работы.

Дискретная модель

В этом параграфе мы опишем дискретную модель, которая и послужит основным объектом для изучения в Главах 1 и 2. Результаты, полученные в этих Главах будут в дальнейшем перенесены в непрерывный контекст – в пространства гармонических и аналитических функций на полидиске, это произойдет в Главе 3. Также мы вводим и задачу об ограниченности в L^2 весового вложения, которая составляет суть этих глав, и связанные с ней потенциалы. Мы рассматриваем два типа дискретной модели: сначала мы определяем ее на конечных графах, а затем на бесконечных графах специального типа (d-деревьях). Мы обсудим несколько различных способов интерпретации подобных графов, в том числе дискретизацию единичного круга (D) с помощью кубов Уитни, вложение графа в $\mathbb{R}^n$, и отождествление вершин d-дерева с диадическими параллелепипедами в единичном кубе $[0,1]^d$. Мы опишем контекст и сформулируем предварительные утверждения. Более детальное изложение некоторых из рассматриваемых вопросов можно найти в статье [6], а также в книгах [64] и [97, 78].

Вершины графа мы обозначаем греческими буквами α, β, γ и т.д., в частности буквами τ, ω мы обычно обозначаем *граничные вершины*. Иногда удобнее представлять граф в виде набора диадических параллелепипедов, в таком случае вершины мы записываем как Q, R, I, J. Мы *не используем* ребра графа (несмотря на то, что естественно определять дискретные градиенты именно на ребрах, и это обыкновенно происходит в литературе, мы переносим все объекты на вершины). Таким образом мы *отождествляем граф и его множество вершин*, что отражается в системе обозначений и определениях.
Также мы пишем $A \lesssim B$ для пары величин A, B, если существует некоторая константа C, такая что $A \leq CB$. Этак константа обыкновенно предполагается не зависящей от переменных величин, участвующих в определении A и B, в зависимости от контекста. Кроме того, мы пишем $A \approx B$, если $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$.

Ориентированный ациклический граф Γ есть частично упорядоченное множество, такое что для любых $\alpha, \beta \in \Gamma$ найдется $\gamma \in \Gamma$, удовлетворяющее $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$. Множества $\{\beta \in \Gamma : \beta \geq \alpha\}$ и $\{\beta \in \Gamma : \beta \leq \alpha\}$ обозначаются через $\mathcal{P}_\Gamma(\alpha)$ и $\mathcal{S}_\Gamma(\alpha)$ соответственно (мы обычно опускаем индекс Γ). Аналогично, для данного $E \subset \Gamma$ положим $\mathcal{P}(E) := \bigcup_{\alpha\in E}\mathcal{P}(\alpha)$ и $\mathcal{S}(E) := \bigcup_{\alpha\in E}\mathcal{S}(\alpha)$.
Если множество $\mathcal{P}(\alpha)$ вполне упорядочено для любого $\alpha \in \Gamma$, то мы называем Γ ***деревом***. Дерево T называется 2^n***-адичным***, если произвольный неминимальный элемент $\alpha \in T$ (т.е. не существует вершины $\beta \leq \alpha$) имеет в точности 2^n непосредственных потомков. Под ***d-деревом*** T^d мы понимаем декартово произведение d деревьев T с порядком, задаваемым произведением. Для удобства мы предполагаем по умолчанию, что все деревья с которыми мы работаем, суть двоичные деревья. Большинство результатов может быть в любом случае перенесено и в контекст 2^n-адичных деревьев.

Вводя стандартное расстояние на графе Γ, мы превращаем его в компактное метрическое пространство (для конечных графов эта операция не имеет особого значения, но она нам потребуется ниже, когда мы будем работать с бесконечными графами).

Перейдем теперь к случаю бесконечных графов. Мы начнем с бесконечного двоичного дерева T с корнем (т.е. единственным максимальным элементом), который мы обозначим буквой o. Зададим на T структуру компактного метрического пространства (см. [6]). Рассмотрим для начала комбинаторную границу $\tilde{\partial}T$ дерева T, которая состоит из геодезических относительно стандартной метрики на графе $\omega = \{o, \omega_1, \omega_2, \dots\}$, $\omega_k \in T$ с началом в корне. Для любых двух вершин α, β дерева T их ***наименьший общий предок*** $\alpha \wedge \beta$ – это минимальный элемент в $\mathcal{P}(\alpha) \cap \mathcal{P}(\beta)$. Кроме того, мы можем определить его и для двух геодезических $\omega, \zeta \in \tilde{\partial}T$ как $\omega \wedge \zeta$ (и это элемент уже непосредственно дерева T) – минимальный элемент в $\omega \cap \zeta$, мы также полагаем $\omega \wedge \omega := \omega$. Для данной пары вершин $\alpha, \beta \in T$ положим

$$\operatorname{dist}(\alpha, \beta) := 3^{-|\alpha\wedge\beta|} - \frac{1}{2}(3^{-|\alpha|} + 3^{-|\beta|}), \tag{I.1}$$

где $|\tau| := \#\mathcal{P}(\tau) - 1$, $\tau \in T$ – стандартное расстояние от точки до корня. Это отношение задает метрику (даже ультраметрику) на T, и остается только взять метрическое пополнение T, чтобы получить компактное метрическое пространство $\overline{T}$. ***Метрическая граница*** ∂T дерева T есть $\overline{T} \setminus T$.

Очевидно, что каждый элемент $\omega \in \tilde{\partial}T$ – это последовательность Коши относительно расстояния dist, более того, обозначая через $[\omega]$ класс эквивалентности ω в ∂T, мы видим, что отображение $\omega \mapsto [\omega]$ есть гомеоморфизм $\tilde{\partial}T$ на ∂T, таким образом метрическая и комбинаторная границы дерева совпадают. Стало быть множество предков $\mathcal{P}(\omega)$ граничной точки ω – это попросту сама геодезическая ω, и мы пишем $\omega \in \mathcal{S}(\alpha)$, $\alpha \in T$, если вершина α принадлежит этой геодезической, $\omega = (o, \omega_1, \dots, \alpha, \dots)$. Шары в ∂T имеют вид $\mathcal{S}(\alpha) \cap \partial T$, $\alpha \in T$.

Далее мы обозначаем через $\overline{T}^d$ декартово произведение d экземпляров $\overline{T}$, и мы распространяем метрическую структуру на подобные графы стандартным способом

$$\operatorname{dist}(\alpha, \beta) = \sup_{k=1,\dots,d} \operatorname{dist}(\alpha_k, \beta_k), \quad \alpha_k, \beta_k \in \overline{T},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$. ***Остовом*** $(\partial T)^d$ мы называем произведение d экземпляров границ ∂T. Также через $\partial\mathcal{S}(\alpha)$ мы обозначаем т.н. 'тень' вершины α на остове, $\partial\mathcal{S}(\alpha) = \mathcal{S}(\alpha) \cap (\partial T)^d$. Как и ранее, шары на остове имеют вид $\partial\mathcal{S}(\alpha)$, где координаты вершины α имеют одну и ту же глубину.

Нам также потребуется понятие ***укороченного дерева*** T_N, которое состоит из вершин $\alpha \in T$, таких что $\#\mathcal{P}(\alpha) \le N$, $N \in \mathbb{N}$. Аналогично, ***укороченное d-дерево*** T_N^d – это произведение d экземпляров T_N. Очевидно, что $T^d = \bigcup_{N\ge1} T_N^d$.

Дискретная модель: потенциалы на графах

В этом параграфе мы продолжаем определять новые объекты на графе Γ (в дальнейшем под Γ мы подразумеваем либо конечный граф Γ_f, либо бесконечное d-дерево $\overline{T}^d$) – ***меры, веса и функции***.

Вещественная неотрицательная радоновская ***мера*** на конечном графе Γ или на d-дереве $\overline{T}^d$

обыкновенно обозначается буквами μ, ν, σ, ρ и т.д.
Борелевская ***функция*** есть отображение из Γ_f или $\overline{T}^d$ в $\mathbb{R}_+$ (таким образом мы рассматриваем только неотрицательные функции), функции обозначаются буквами f, φ, ψ etc.
Вес – это отображение из Γ_f или T^d (т.е. мы не определеяем вес на границе) в множество положительных чисел. В частности, для конечного графа Γ_f эти три объекта суть одно и то же – набор положительных чисел, поставленных в соответствие вершинам Γ_f.

Для функции f и веса w на графе Γ мы определяем ***весовой оператор Харди*** $\mathbf{I}_w$ следующим образом

$$\mathbf{I}_w f(\alpha) := \sum_{\gamma \geq \alpha} f(\gamma) w(\gamma) := \int_{\mathcal{P}(\alpha)} f\, dw. \tag{I.2}$$

В частности, если $w \equiv 1$, то мы опускаем индекс и пишем $\mathbf{I}$. Иногда мы используем обозначение $\mathbf{I}(wf)$ вместо $\mathbf{I}_w f$.
Аналогично, для функции φ и меры μ мы определяем 'сопряженный' оператор Харди (это обозначение будет уточнено ниже) как

$$\mathbf{I}^*_\mu \varphi(\alpha) := \int_{\mathcal{S}(\alpha)} \varphi\, d\mu. \tag{I.3}$$

В случае конечного графа Γ_f он превращается в $\sum_{\gamma \leq \alpha} \varphi(\gamma)\mu(\gamma)$. Как и ранее, мы пишем $\mathbf{I}^*$ для $\mu \equiv 1$.
Весовой потенциал меры μ с весом w есть

$$\mathbf{V}^\mu_w(\alpha) := \mathbf{I}_w(\mathbf{I}^*\mu)(\alpha) = \sum_{\gamma \geq \alpha} \int_{\mathcal{S}(\gamma)} d\mu\, w(\gamma) = \int_\Gamma w(\mathcal{P}(\alpha \wedge \tau)) d\mu(\tau), \tag{I.4}$$

где $\mathcal{P}(\alpha \wedge \gamma) = \mathcal{P}(\alpha) \cap \mathcal{P}(\gamma)$ и $w(\mathcal{P}(\alpha \wedge \gamma)) = \sum_{\tau \in \mathcal{P}(\alpha \wedge \gamma)} w(\tau)$. ***Весовая энергия*** меры μ есть

$$\mathcal{E}_w[\mu] := \int_\Gamma \mathbf{V}^\mu_w\, d\mu, \tag{I.5}$$

а ***взаимная энергия*** пары мер μ, ν определяется как

$$\mathcal{E}_w[\mu, \nu] := \int_\Gamma \mathbf{V}^\mu_w\, d\nu. \tag{I.6}$$

Наконец мы можем определить ***весовую емкость*** на Γ. Пусть $K \subset \Gamma$ – компактное множество. Положим

$$\mathrm{Cap}_w(K) := \inf\{\|f\|^2_{L^2(\Gamma, dw)} :\ \mathbf{I}_w f(\tau) \geq 1,\ \tau \in K\}, \tag{I.7}$$

где $\|f\|^2_{L^2(\Gamma, dw)} = \sum_{\gamma \in \Gamma} f^2(\gamma) w(\gamma)$. Мы считаем, что емкость пустого множества бесконечна. Мы говорим, что некоторое свойство выполняется ***квази везде*** или к.в., если оно выполняется для всех элементов $\gamma \in \Gamma$ за исключением множества нулевой емкости.

Замечание. Поскольку мы считаем веса положительными, то емкость одноточечного множества во внутренности графа Γ всегда положительна. См. также обсуждение в начале параграфа 1.1.

Теория потенциала

В этом параграфе мы объясняем, как ввести теорию потенциала на графе, в частности на d-дереве, а также на полидиске $\mathbb{D}^d$. Мы следуем подходу, изложенному Д. Адамсом и Л. Хедбергом в [1, Глава 2], – сначала мы предъявляем довольно общую конструкцию, которую потом адаптируем к конкретному случаю. К сожалению мы не можем просто дать ссылку на соответствующие разделы в [1], так как авторы сохраняют $\mathbb{R}^n$ в качестве одного из потенциальных пространств (т.е. их подход все равно не вполне годится для наших потребностей), и нам требуется дополнительно проделать некоторую подготовительную работу, чтобы охватить случай графов. Мы стараемся максимально сократить технические действия с помощью вложения нашего графа в $\mathbb{R}^n$ для некоторого n, так чтобы потенциальные ядра все равно были определены на евклидовых пространствах. Хотя мы бы и могли попросту повторить рассуждения из [1, Глава 2] с минимальной адаптацией к нашему случаю, но это привело бы к ненужному загромождению текста.
В том или ином виде наши дальнейшие рассуждения могут быть опознаны (правда, в основном, на деревьях) в работах [6], [10], [62], [63], [79], а также в [64, Глава 16]. Большая часть основных свойств емкости для экспоненциальных весов (емкость произведений и принципы максимума/подчинения, которые обсуждаются в параграфе 1.1, оценки емкости граничных проекций из параграфа 3.2) содержатся в работе [104].
Более подробное обсуждение вопроса, а также основные результаты о свойствах потенциалов и емкостей приведены в Главе 1.

Абстрактная теория потенциала

Здесь мы представляем краткий обзор результатов из [1, Параграфы 2.3-2.5], касающихся определений емкости, потенциалов, и существования равновесных мер.

Пусть (M,ν) – пространство с мерой, а $g : M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ – ***ядро***, то есть (a) полунепрерывная снизу на $\mathbb{R}^n$ функция для каждого $y \in M$ и (b) измеримая на M функция для каждого $x \in \mathbb{R}^n$. Для положительной радоновской меры μ на $\mathbb{R}^n$ и неотрицательной ν-измеримой функции f положим

$$\mathcal{G}f(x) := \textstyle\int_M g(x,y)f(y)\,d\nu(y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{I.8a}$$

$$\check{\mathcal{G}}\mu(x) := \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} g(x,y)\,d\mu(x), \quad y \in M. \tag{I.8b}$$

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, обозначим тогда через Ω_E множество ***допустимых функций***,

$$\Omega_E := \{f \in L^2(M,\nu) : \ f \geq 0,\, \mathcal{G}f \geq 1 \,\text{on}\, E\},$$

и определим g-***емкость*** следующим образом

$$\operatorname{Cap}_g(E) := \inf\left\{\int_M f^2\,d\nu:\ f\in\Omega_E\right\}.$$

Известно, что Cap_g – *внешняя емкость*, и что она имеет смысл для всех борелевских множеств. Для меры μ на $\mathbb{R}^n$ определим ее g-***потенциал*** как

$$\mathbb{V}_g^\mu := \mathcal{G}\check{\mathcal{G}}(\mu).$$

Мы говорим, что свойство выполняется g-квази везде, g-к.в., если оно выполняется везде, кроме, может быть, множества нулевой g-емкости.

Теорема A (Теорема Фростмана для Cap_g) *Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$ – компакт. Тогда существует мера μ_E, удовлетворяющая следующим условиям*

$$\operatorname{Cap}_g(E)^{\frac{1}{2}} = \sup\left\{\mu(E):\ \mu\ge 0,\, \operatorname{supp}\mu\subset E,\, \|\check{\mathcal{G}}(\mu)\|_{L^2(M,\nu)}\le 1\right\}, \tag{I.9a}$$

$$\operatorname{Cap}_g(E) = \mu_E(E) =: |\mu_E| = \textstyle\int_{\mathbb{R}^n}\mathbb{V}_g^{\mu_E}\,d\mu, \tag{I.9b}$$

$$\mathbb{V}_g^{\mu_E}(x)\le 1,\quad x\in\operatorname{supp}\mu_E, \tag{I.9c}$$

$$\mathbb{V}_g^{\mu_E}(x)\ge 1,\quad g\text{-к.в. на } E. \tag{I.9d}$$

Теория потенциала на графах

Чтобы применить общую конструкцию, описанную в предыдущем параграфе, нам потребуется сделать еще несколько шагов. Именно, нам нужно, чтобы ядро g было определено на $\Gamma\times\Gamma$, или, иными словами, взять в качестве M граф (обычно d-дерево, снабженное соответствующим весом). Однако, второе из пространств, которое используется в рассуждении выше, есть попросту $\mathbb{R}^n$, следовательно, чтобы правильно применить общую конструкцию, нам потребуется представить граф Γ в виде подмножества $\mathbb{R}^n$ для подходящей размерности n, т.е. построить вложение Γ в $\mathbb{R}^n$.

Конечные графы

Если Γ это конечный граф, то вложение тривиально – мы просто отождествляем вершины с каким-то дискретным набором точек, например в $\mathbb{R}^2$, учитывая отношение порядка на графе.

Бесконечные d-деревья

Пусть теперь $\Gamma = \overline{T}^d$ – это d-дерево. Мы вкладываем каждое координатное дерево в $\mathbb{R}^2$ обычным образом, а потом рассматриваем декартово произведение. подобное вложение (оно носит технический характер – в нашей работе мы используем другие представления графов) может быть найдено в [64, Глава 1] или в работе [6].

Мы отождествляем вершины дерева T с интервалами из последовательных приближений к троичному канторовскому множеству на единичном отрезке. Именно, рассмотрим классическое троичное канторовское множество $E = \bigcap_{j=0}^{\infty} E_j$, где $E_0 = [0,1]$, а приближение E_j состоит из 2^j замкнутых отрезков длины 3^{-j}. Тогда каждая вершина дерева T сопоставляется единственным образом отрезку из E_j (вернее центру такого отрезка), а граница ∂T биективно отображается на E. Иными словами, если c_{jk} – это центр k-го сегмента в E_j, и α – k-я вершина (занумерованная, скажем, слева направо) на глубине j в T, $|\alpha| = j$, то мы полагаем

$$\Phi(\alpha) := p_{kj} = (c_{kj}, 3^{-k}) \in \mathbb{R}^2.$$

Продолжим Φ на границу ∂T по непрерывности, так чтобы $\Phi(\partial T) = E$. Итак, мы имеем инъекцию $\Phi : \overline{T} \to \Phi(\overline{T}) \subset \mathbb{R}^2$, причем евклидово расстояние между образами сравнимо с расстоянием между прообразами относительно введенной нами ранее метрики на дереве (I.1)

$$|\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)| \approx \operatorname{dist}(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \overline{T}.$$

Аналогично, вершины T^d соответствуют троичным параллелепипедам (или произведениям центров сегментов в E_j^i). В частности, остов $(\partial T)^d$ отождествляется с E^d. Множества предков и потомков на $\Phi\left(\overline{T}^d\right)$ наследуются из соответствующих структур на графе.

Применение абстрактной теории

Мы проводим рассуждение для замкнутого d-дерева $\overline{T}^d$, случай конечного графа рассматривается аналогично.

Положим $M := T^d$ и обозначим через $\nu := w$ дискретную меру на M. Пусть $\tau_y \in M = T^d$ и $x \in \Phi(\overline{T}^d)$. Наше ядро, таким образом, записывается как

$$g(x, \tau_y) := \mathbb{1}_{\mathcal{S}(x)}(\tau_y) = \mathbb{1}_{\mathcal{P}(\tau_y)}(x), \quad x \in \Phi\left(\overline{T}^d\right), \ y \in T^d. \tag{I.10}$$

На оставшихся точках $\mathbb{R}^{2d}$ мы доопределяем g бесконечностью,

$$g(x, \tau_y) := +\infty, \quad x \notin \Phi\left(\overline{T}^d\right). \tag{I.11}$$

Легко проверить, что ядро g полунепрерывно снизу по первой переменной и измеримо (относительно дискретной меры w, которая на самом деле есть вес) по второй. Кроме того, если $x = \Phi(\tau_x) \in \Phi\left(\overline{T}^d\right)$ и $\tau_y \in T^d$, то тогда для любой неотрицательной функции f на T^d и меры $\tilde{\mu}$ с носителем в $\Phi\left(\overline{T}^d\right)$ имеем

$$\mathcal{G}f(x) = \textstyle\int_M g(x, \tau_y) f(\tau_y)\, d\nu(\tau_y) = \sum_{\tau_y \geq \tau_x} f(\tau_y) w(\tau_y) = \mathbf{I}_w f(\tau_x), \tag{I.12a}$$

$$\check{\mathcal{G}}\tilde{\mu}(\tau_y) := \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} g(x, \tau_y)\, d\tilde{\mu}(x) = \int_{\mathcal{S}(\tau_y)} d\mu = \mathbf{I}^* \mu(\tau_y), \tag{I.12b}$$

где μ есть Φ-прообраз $\tilde{\mu}$. Для точек $x \notin \Phi\left(\overline{T}^d\right)$ или для меры $\tilde{\mu}$ с нагрузкой вне $\Phi\left(\overline{T}^d\right)$ выражения выше дают бесконечность. Стало быть, имеет смысл рассматривать только меры с носителем на образе d-дерева. В любом случае мы теперь можем применить конструкцию Адамса и Хедберга, чтобы получить следующую дискретную версию теоремы Фростмана.

Теорема B *Пусть задано компактное множество* $E \subset \overline{T}^d$ *а* $w : T^d \to \mathbb{R}_+$ *– вес, причем* $w(o) > 0$. *Тогда существует мера* μ_E, *удовлетворяющая следующим условиям*

$$|\mu_E| = \int_{\overline{T}^d} \mathbf{V}_w^{\mu_E}\, d\mu_E = \mathrm{Cap}_w(E), \tag{I.13a}$$

$$\mathbf{V}_w^{\mu_E} \le 1 \quad \text{на} \;\; \operatorname{supp} \mu_E \tag{I.13b}$$

$$\mathbf{V}_w^{\mu_E} \ge 1 \quad \text{к.в. на} \;\; E. \tag{I.13c}$$

Аналогичное утверждение может быть сформулировано и для конечного графа Γ.

Вложения Харди

Формулировка основной теоремы I.1

Основным объектом исследований здесь служит так называемое ***дискретное вложение Харди*** на d-дереве в линейном случае. Его можно рассматривать с разных точек зрения, например в связи с мультилинейными весовыми парапроизведениями (см. ниже), мультипараметрической теорией потенциала, случайными блужданиями на d-дереве (т.е. процессами с многомерным временем в духе [17]), комбинаторикой диадических параллелепипедов, анализом на полидиске (в том числе вероятностными подходами, как например в [38]). Мы фокусируем наше внимание на проблеме описания вложений типа Карлесона для весовых пространств Харди-Соболева на полидиске, той самой проблеме, которая послужила отправной точкой для работы в этой области. В этом параграфе мы опишем дискретную задачу, а в следующем параграфе покажем, как перенести ее в непрерывный контекст. Теория потенциала в наших рассуждениях остается несколько за кадром, однако ее техники и подходы почти всегда используются в том или ином виде, пусть неявно, и иногда мы используем язык этой теории для формулировки результатов и изучения природы возникающих задач.

Отметим отдельно, что наши результаты могут быть интерпретированы в смысле двухвесовых парапроизведений (подробнее см. [112, Параграф 1]). Двухвесовые оценки для сингулярных интегральных операторов рассматривались в работах Ф. Назарова, С. Трейля и А. Вольберга в контексте диадического анализа, и в работах М. Лэйси, Ч.-Й. Шена, Э. Сойера и И. Уриарте-Туэро в контексте преобразования Гильберта, см. [74], [75], [55], [53]. Еще одним примером может послужить недавняя работа А. Иосевича, Б. Краузе, Э. Сойера, К. Тэйлора и И. Уриарте-Туэро, [45], посвященная двухвесовой задаче о сферическом максимальном операторе. Известный подход к оценкам трилинейных форм парапроизведений из работы [37] основан на $T1$-теореме Давида и Журне.Теория карлесоновых мер (или классичсекая BMO-теория) тоже играет значительную роль. Хорошо известно, что ([25, 26, 49, 48]) в мультипараметрическом случае все эти результаты и понятия, в том числе карлесоновы меры, пространство BMO, неравенства типа Джона-Ниренберга, разложение Кальдерона-

Зигмунда устроены намного более сложно, сравнительно с однопараметрическим случаем. В работе [72] рассматривается новый подход к доказательству трилинейных бипараметрических оценок бипараметрических парапроизведений, его усовершенствованная версия использована в [73] для работы с мультипараметрическими парапроизведениями.

Предположим, что размерность d зафиксирована. Мы задаемся вопросом, когда, для данной ***пары мера-вес*** (w, μ), оператор $\mathbf{I}_w$ ограничен как оператор, действующий из пространства $L^2(T^d, w)$ в пространство $L^2(\overline{T}^d, \mu)$, т.е.

$$\int_{\overline{T}^d} (\mathbf{I}_w f)^2 \, d\mu \le C \int_{T^d} f^2 \, dw, \quad f \in L^2(T^d, w). \tag{I.14}$$

Рассматривая двойственное вложение, мы получаем

$$\int_{T^d} (\mathbf{I}_\mu^* \varphi)^2 \, dw \le C \int_{\overline{T}^d} \varphi^2 \, d\mu, \quad \varphi \in L^2(\overline{T}^d, \mu). \tag{I.15}$$

Наименьшая константа C, такая что неравенства выше выполняются для всех подходящих функций, называется ***константой вложения Карлесона***, мы обозначаем ее через $[w, \mu]_{CE}$.

Обыкновенно условия на вес w и меру μ, обеспечивающие конечность $[w, \mu]_{CE}$, получаются следующим образом: неравенства вложения проверяются (тестируются) на специальном подклассе функций – обычно в этой роли выступают характеристические функции множеств. Согласно этому подходу мы получаем набор тестовых вложений ниже. Все множества предполагаются борелевскими.

Субъемкостная константа – это наименьшее число $[w, \mu]_{SC}$, удовлетворяющее

$$\mu(E) \le [w, \mu]_{SC} \operatorname{Cap}_w(E), \quad \forall E \subset \overline{T}^d. \tag{I.16}$$

Наследственная константа Карлесона (или ***константа сокращенной энергии или REC-константа***) – это наименьшее число $[w, \mu]_{HC}$, удовлетворяющее

$$\mathcal{E}_w(\mu|_E) = \sum_{\alpha \in T^d} w(\alpha)(\mathbf{I}^*\mu|_E)^2(\alpha) \le [w, \mu]_{HC}\mu(E), \quad \forall E \subset \overline{T}^d. \tag{I.17}$$

Карлесонова константа – это наименьшее число $[w, \mu]_C$, удовлетворяющее

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{S}(E)} w(\alpha)(\mathbf{I}^*\mu)^2(\alpha) \le [w, \mu]_C \mu(E), \quad \forall E \subset \overline{T}^d. \tag{I.18}$$

Box-константа – это наименьшее число $[w, \mu]_B$, удовлетворяющее

$$\sum_{\alpha \le \beta} w(\alpha)(\mathbf{I}^*\mu)^2(\alpha) \le [w, \mu]_B \mathbf{I}^*\mu(\beta) = [w, \mu]_B \, \mu(\mathcal{S}(\beta)), \quad \forall \beta \in T^d. \tag{I.19}$$

Все введенные выше величины очевидно порождаются соответствующими тестами: субъемкостное условие происходит из теста вложения на допустимых функциях для множества E, наследственная константа из теста двойственного вложения на характеристических функциях подмножеств графа, карлесонова константа из ослабления неравенства в предыдущем условии, а box-константа – это карлесонова константа, только теперь вместо произвольного подмножества графа рассматриваются только потомки одноточечных множеств в T^d (которые могут быть отождествлены с параллелепипедами в единичном кубе $[0,1]^d$, это мотивирует выбор обозначения).

Неравенства

$$\begin{aligned}&[w,\mu]_B \le [w,\mu]_C \le [w,\mu]_{HC} \le [w,\mu]_{CE},\\&[w,\mu]_{SC} \le [w,\mu]_{CE}\end{aligned}$$

тривиальны (кроме того, несложно видеть, что $[w,\mu]_{SC} \le [w,\mu]_{HC}$). Обратные неравенства известны для размерности $d = 1$ (см, например, [6], где используется теоретико-потенциальный подход, или [74] и [108], где используются методы функции Беллмана). Наш основной результат утверждает, что для весов типа произведения обратные неравенства верны и в случае размерности $d = 2$ и $d = 3$ ([112, Теорема 1.4]).

Теорема I.1 *Пусть (w,μ) – пара вес-мера на d-дереве, причем $d = 2$ или $d = 3$, и, кроме того, вес w имеет структуру произведения, $w(\alpha) = \prod_{k=1}^d w(\alpha_k)$ для любой вершины $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in T^d$. Тогда*

$$\begin{aligned}&[w,\mu]_B \gtrsim [w,\mu]_C \gtrsim [w,\mu]_{HC} \gtrsim [w,\mu]_{CE},\\&[w,\mu]_{SC} \gtrsim [w,\mu]_{CE}.\end{aligned} \tag{I.20}$$

Обоснование выбора веса и подлежащего пространства

Причина, по которой мы рассматриваем данную задачу, состоит в изучении теорем вложения Карлесона на полидиске (более подробные объяснения будут даны в следующем параграфе). Именно поэтому мы рассматриваем d-деревья (в качестве области задания функций) и веса типа произведения. Методы, с помощью которых мы анализируем задачу также обусловлены этой мотивацией – они тесно связана с теорией потенциала, и следуют линии рассуждений, представленной в работах Д. Стегенги ([90]), Э. Сойера ([86]), Н. Аркоцци, Р. Рохберга, Э. Сойера и Б. Уика ([4], [5], [6]), они восходят к ранним работам В.Г. Мазьи.

Однако, несмотря на то, что наш подход в целом уже описан в вышеупомянутых работах, нам потребовалось переизобрести и передоказать большинство составляющих его рассуждений. Причина этого заключается, естественно, в мультипараметрической природе нашей задачи. Эта природа проявляет себя разными способами, например в виде d-мерного времени, или нерадиальных ядер, мы отдельно отметим, что d-дерево на самом деле *есть не дерево*, а ориентированный граф с большим количеством циклов. В частности поэтому исчезает единственность геодезических, и геометрическая структура графа становится намного более сложной. Мы также не можем разбить нашу задачу на набор из d одномерных задач, поскольку хотя вес w и задается произведением одномерных весов, но зато на меру μ мы не налагаем никаких ограничений. Тем не менее, мы используем структуру произведения веса w в нескольких критических местах рассуждения, и позже мы увидим, что общая двухвесовая задача (с произвольными w и μ) еще намного более сложна, даже на относительно просто устроенных подграфах d-дерева.

Эти трудности также неявным образом присутствуют и в формулировке тестовых условий. Обыкновенно в мультипараметрических задачах необходимые и достаточные условия требуют тестов на прямом и двойственном вложении, и на нескольких классах тест-функций. В нашем случае, однако, ситуация выглядит несколько проще, и обратные неравенства (I.20) устроены полностью аналогично случаю $d = 1$. Это обусловлено тем, что, во-первых, мы работаем с весами типа произведения, так что некоторая одномерность структуры по-прежнему сохраняется. В общей двухвесовой задаче даже на подграфах T^2 нам требуются уже несколько тестовых условий одновременно, см. [86] (а для T^3 уже неизвестно ничего). Во-вторых, в неравенствах (I.20), а именно в $[w,\mu]_B \gtrsim [w,\mu]_{CE}$, наблюдается совершенно неожиданный эффект – достаточно получить тест на одной ячейке. Мы объясняем такой эффект причинами теоретико-потенциального характера. Например, для вложения Карлесона пространства Харди на бидиске уже нельзя обойтись тестом только на одной ячейке (как показано в работах [21], [24]). Такое вложение не может быть смоделировано с помощью веса типа произведения – стандартное определение емкости перестает работать, и правильная дискретная модель требует перемены ролей веса w и меры μ.

Мы также отметим, что ограничение размерности $d \le 3$ существенно важно. Мы не знаем, верна ли теорема I.1 для старших размерностей, и доказательство в этом случае должно быть пересобрано заново.

Схема доказательства

Мы доказываем теорему I.1 в Главе 2. Ключевой элемент доказательства состоит в так называемом ***суррогатном принципе максимума***, который служит заменой классического принципа максимума в мультипараметрическом случае. На самом деле мы доказываем основную теорему по модулю установления такого суррогатного принципа в произвольной размерности.

Параграф 2.1

В этом параграфе мы напоминаем формулировку основного результата.

Параграф 2.2

Этот параграф посвящен доказательству суррогатного принципа максимума для $d \le 3$. Приведем подробности.

В параграфе 2.2.1 мы получаем некоторые вспомогательные результаты на классических двоичных деревьях.

В параграфах 2.2.2 и 2.2.3 мы распространяем эти результаты на случаи 2-деревьев и 3-деревьев соответственно. Мы разделяем рассуждения для разных размерностей, потому что мы хотим подчеркнуть наличие еще одного усложнения структуры вложения при переходе от размерности $d = 2$ к размерности $d = 3$. Казалось бы естественным ожидать, что вложение ведет себя более-менее одинаково во всех старших размерностях, однако это не так.

В этих параграфах доказаны два ключевых утверждения. Первое доставляет способ более эффективного (в смысле энергии) перераспределения массы функции на T^d, при условии что ее носитель лежит на множестве малого потенциала исходной меры.

Лемма I.1 (**Мажоризация энергии** на T^d для $d = 2, 3$.) *Пусть $d = 2$ или $d = 3$, и $f : T^d \to \mathbb{R}_+$ – супераддитивная (по каждой переменной) функция, а w – вес типа произведения. Предположим, что $\operatorname{supp} f \subseteq \{\mathbf{I}(wf) \le \delta\}$, и положим $\lambda \ge 4\delta$. Тогда найдется энергетически эффективное перераспределение f, т.е. функция $\varphi : T^d \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям*

$$\mathbf{I}(w\varphi)(\alpha) \ge \mathbf{I}(wf)(\alpha), \quad \alpha \in \{\lambda \le \mathbf{I}(wf) \le 2\lambda\}, \tag{I.21a}$$

$$\int_{T^d} \varphi^2 w \le C \left(\tfrac{\delta}{\lambda}\right)^{c(d)} \int_{T^d} f^2 w, \tag{I.21b}$$

где C– некоторая абсолютная константа, причем $c(2) = 2$, $c(3) = 1$.

Второе ключевое утверждение состоит в применении леммы о мажоризации энергии для оценки емкости исключительного множества – множества, на котором потенциал равновесной меры принимает большие значения (см. [105, Теорема 1.11], [2, Лемма 3.1]).

Теорема I.2 *Пусть μ – мера на T^d при $d = 2$ или $d = 3$, а w – вес типа произведения, причем $\mathbf{V}_w^\mu \le 1$ на $\operatorname{supp}\mu$. Положим $E_\lambda := \{\mathbf{V}_w^\mu \ge \lambda \ge 10\}$. Тогда*

$$\operatorname{Cap}_w E_\lambda \le \frac{C}{\lambda^{c(d)}} \mathcal{E}_w[\mu],$$

где C – некоторая абсолютная константа, причем $c(2) = 4$, $c(3) = 3$.

Наконец, в параграфе 2.2.4 мы формулируем суррогатный принцип максимума для d-деревьев – пока что это гипотеза для $d \ge 4$ (см. [107, Теорема 1.2]).

Теорема I.3 *Мы говорим, что вес w на d-дереве T^d удовлетворяет **суррогатному принципу максимума**, если для некоторого числа $\kappa > 0$, $C < \infty$ и произвольных положительных мер $\mu, \rho : T^d \to [0, \infty)$, и числа $\delta > 0$, верна оценка*

$$\int_{T^d} \mathbf{V}_{w,\delta}^\mu \, d\rho \le C \left(\delta|\rho|\right)^\kappa \left(\mathcal{E}_{w,\delta}[\mu]\mathcal{E}_w[\rho]\right)^{\frac{1-\kappa}{2}}. \tag{I.22}$$

Для размерностей $d = 1, 2, 3$ каждый вес типа произведения удовлетворяет суррогатному принципу максимума с $\kappa = \frac{1}{d}$, причем константа C не зависит от веса w.

Гипотеза I.1 *Пусть w – вес типа произведения. Тогда w удовлетворяет суррогатному принципу максимума с $\kappa = \frac{1}{d}$, причем константа $C = C(d)$ не зависит от веса w.*

Замечание. В качестве следствия суррогатного принципа максимума мы легко получаем и хвостовые оценки энергии для потенциалов на d-дереве, достаточно лишь подставить $\rho = \mu$.

Параграф 2.3

В данном параграфе мы выводим одно из тест-условий в теореме I.1 – субъемкостное условие

$$[w,\mu]_{SC} \gtrsim [w,\mu]_{CE}.$$

Для этого мы доказываем еще одну важную оценку – так называемое ***сильное емкостное неравенство*** на d-дереве.

Теорема I.4 *Предположим, что вес w, заданный на T^d, удовлетворяет суррогатному принципу максимума. Положим $f : t^d \to \mathbb{R}_+$. Тогда*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{2k}\,\mathrm{Cap}_w\left(\{\alpha\in T^d:\ \mathbf{I}_w f(\alpha) > 2^k\}\right) \lesssim \int_{T^d} f^2 w. \tag{I.23}$$

Это утверждение представляет из себя мультипараметрический вариант знаменитого результата В.Г. Мазьи. Его (почти тривиальный) аналог на дереве доказан в параграфе 1.2.

Параграф 2.4

В этом параграфе мы доказываем следующие два тест-условия в теореме I.1 – карлесоново и наследственное карлесоново условия (второе из них служит, в основном, для доказательства первого)

$$[w,\mu]_C \gtrsim [w,\mu]_{HC} \gtrsim [w,\mu]_{CE}.$$

Первое из неравенств выше мы доказываем с помощью субъемкостного условия – это позволяет нам значительно сократить доказательство.

Параграф 2.5

В данном параграфе мы доказываем последнее тест-условие в теореме I.1 – тест на одной ячейке

$$[w,\mu]_B \gtrsim [w,\mu]_{CE}.$$

Это наиболее трудное для вывода и наиболее неожиданное из всех условий. Как мы уж упомянули выше, тест на одной ячейке, вообще говоря, не должен работать в мультипараметрической ситуации, тем не менее оно достаточно для ограниченности вложения.

Параграф 2.6

Последний параграф Главы 2 содержит несколько примеров и контрпримеров, которые позволяют лучше понять выведенные нами условия ограниченности вложения, и показывают типичное, в некотором смысле, поведение пар вес-мера на d-дереве (более подробное изложение см. в [110]). Именно, мы показываем:

- как работать на конечных d-деревьях (что, собственно, и происходило в данной Главе) и как переходить к пределу по глубине графа;
- что структура произведения веса w важна для доказательства теоремы I.1 – иначе необходимо проверять на тест-функциях не только прямое или двойственное вложение (эти контрпримеры приведены в работе [106], Предложение 1.1);
- какие проблемы возникают при переходе к размерности $d = 4$, а также какое своеобразное поведение может демонстрировать хвостовая энергия меры даже в случае бидерева T^2, снабженного единичным весом.

Карлесоновы меры для весовых пространств Харди-Соболева

Гильбертовы пространства аналитических функций на полидиске

Пусть $d \in \mathbb{N}$ и $\vec{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{R}^d$. Мы говорим, что функция f, аналитическая на единичном полидиске $\mathbb{D}^d$ принадлежит весовому пространству Харди-Соболева $\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)$, если

$$f(z) = \sum_{k \in (\mathbb{Z}_+)^d} c_k z^k, \quad z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{D}^d,$$

а коэффициенты $c_k = \hat{f}(k)$ of f удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k \in (\mathbb{Z}_+)^d} |c_k|^2 (k_1 + 1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (k_d + 1)^{s_d} < +\infty,$$

где $k = (k_1, \dots, k_d),\ k_j \in \mathbb{Z}_+$ – сответствующий мультииндекс. Корень из левой части выражения выше мы назвыаем $\vec{s}$-нормой Харди-Соболева функции f,

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)} := \sum_{k \in (\mathbb{Z}_+)^d} |c_k|^2 (k_1 + 1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (k_d + 1)^{s_d}.$$

Очевидно, что

$$\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d) = \bigotimes_{j=1}^{d} \mathcal{H}_{s_j}(\mathbb{D}). \tag{I.24}$$

Мы также рассматриваем и гармонические версии таких пространств, для краткости мы определим их как тензорное произведение координатных однопараметрических пространств в круге.

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}^h_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d) = \bigotimes_{j=1}^{d} \mathcal{H}^h_{s_j}(\mathbb{D}), \\
&\mathcal{H}^h_{s_j}(\mathbb{D}) = \left\{ f(z) = \sum_{k\geq 0} \hat{f}(k) z^k + \sum_{k<0} \hat{f}(k)\bar{z}^k : \sum_{k\in\mathbb{Z}} |hatf(k)|^2 (|k|+1)^{s_j} < +\infty \right\}.
\end{aligned} \tag{I.25}
$$

Шкала таких пространств (по параметру $\vec{s}$) включает в себя известные классические пространства комплексного и гармонического анализа. Например, пространство Харди на единичном круге соответствует $d = 1$ и $s = 0$:

$$
\begin{aligned}
H^2(\mathbb{D}) &:= \{ f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k z^k : \ \|f\|^2_{H^2} < +\infty \}, \\
\|f\|^2_{H^2} &= \frac{1}{2\pi} \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.
\end{aligned}
$$

Еще одно известное пространство – пространство Дирихле на круге $\mathbb{D}$ – определяется как

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathbb{D}) &:= \{ f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k z^k : \ \|f\|^2_{\mathcal{D}} < +\infty \}, \\
\|f\|^2_{\mathcal{D}} &= \|f\|^2_{H^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA,
\end{aligned}
$$

иными словами, мы берем значения параметров $d = 1$, $s = 1$.

Существует огромное количество литературы, посвященной пространству Харди, наверное это самое известное и хорошо исследованное пространство в комплексном анализе. Пространство Дирихле чуть менее популярно, но и ему посвящены множество книг и статей (отдельно отметим здесь недавнюю книгу Н. Аркоцци, Р. Рохберга, Э. Сойера и Б. Уика [7]), кроме того его можно рассматривать как аналитическую версию другого классического пространства Соболева $W^{1,2}$. Соответствующие аналоги на полидиске изучены значительно хуже, как и выше, пространство Харди здесь привлекает наибольшее внимание.
Наше определение задает целую шкалу гильбертовых пространств аналитических функций, зависящих от параметра $\vec{s}$. Мы ограничиваем наше рассмотрение значениями $\vec{s} \in [0,1]^d$ (т.е. мы не изучаем пространства типа Бергмана), более того, мы считаем, что ни один из координатных параметров s_k не обращается в нуль, т.е. пространства на конце шкалы не появляются в наших рассуждениях – мы только упоминаем их при обсуждении контрпримеров и открытых вопросов. Основная причина этого состоит в том, что нашими основными методами служат техники дискретной теории потенциала, которые не вполне выживают при переходе хотя бы одного s_k через нуль.

Отметим здесь еще один интересный подкласс пространств – диагональную версию $H_{\vec{s}}$ (в особенности $H_{\vec{1}}$ – см. обсуждение и базовые сведения в работе [102]), т.е. мы рассматриваем функции на *единичном круге*, отождествляя все переменные z_k с одной переменной $z \in \mathbb{D}$.

Карлесоновы меры: формулировка основного результата

Здесь мы в первую очередь изучаем так называемые ***карлесоновы меры*** для пространств $\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)$.

Напомним, что мера μ на $\mathbb{D}^d$ называется ***карлесоновой*** для пространства $\mathcal{H}_{\vec{s}}$, если

$$\int_{\mathbb{D}^d} |f(z)|^2\,d\mu(z) \le C_\mu \|f\|^2_{\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)}, \quad \forall f \in \mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d), \tag{I.26}$$

или, иными словами, вложение $id : \mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d) \mapsto L^2(\mathbb{D}^d, \mu)$ ограничено. Это определение можно распространить на замыкание полидиска, если рассматривать

$$\sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{D}^d} |f(rz)|^2\,d\mu(z)$$

вместо левой части (I.26). Известно большое количество результатов, дающих описание карлесоновых мер для различных функциональных пространств, отметим здесь исходную работу [19], а также непрерывный поток последовавших за ней работ, в том числе [90], [40], [59], [24], [25], [26], [4], [5] и многие другие. Карлесоновы вложения можно рассматривать и с точки зрения следовых неравенств для пространств Соболева (см., например работы [50] и [68], и многочисленные содержащиеся в них ссылки).

Вообще говоря, типичное описание карлесоновой меры получается подходящим тестом вложения на каком-нибудь классе тест-функций, например на характеристической функции т.н. карлесонова тента, построенного по произвольной граничной дуге.

Наш основной результат следует этой идее. Мы предъявляем описание карлесоновых мер для пространства аналитических функций $\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)$ при $d = 1, 2, 3$ и значениях параметра $\vec{s}$ близких к $\vec{1}$ (т.е. наши пространства в некотором смысле близки к безвесовому пространству Дирихле на полидиске). Мы также описываем карлесоновы меры и для гармонических пространств $\mathcal{H}^h_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)$, теперь отбрасывая ограничения на значения параметра $\vec{s}$. Эти результаты содержатся в двух следующих теоремах (первая теорема появилась в работах [107] и [112]).

Теорема I.5 *Пусть задан вектор $\vec{s} = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in (0,1], j = 1, \dots, d$, $1 \le d \le 3$, такой что его координаты s_i достаточно близки к 1: $1 - s_j \le \varepsilon_d$, для некоторой абсолютной положительной константы $\varepsilon = \varepsilon(d)$ и $j = 1, \dots, d$. Пусть ν – неотрицательная мера на $\overline{\mathbb{D}}^d$. Тогда оператор вложения $id : \mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d) \to L^2(\overline{\mathbb{D}}^d, \nu)$ ограничен, т.е. мера ν карлесонова для пространства $\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)$, тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*

$$\nu(T(E)) \lesssim \mathrm{Cap}_{\vec{s}}(E), \quad E \subset \mathbb{T}^d \tag{I.27a}$$

$$\textstyle\sum_{R\subset E} \nu^2(T(R)) w_{\vec{s}}(R) \lesssim \nu(T(Q)), \quad \text{\textit{для любого множества} } E, \tag{I.27b}$$

$$\textstyle\sum_{R\subset Q} \nu^2(T(R)) w_{\vec{s}}(R) \lesssim \nu(T(Q)), \quad \text{\textit{для любой ячейки} } Q. \tag{I.27c}$$

Здесь Q, R суть диадические параллелепипеды на (поли) торе $\mathbb{T}^d$, а $T(Q)$ – стандартный *тент Карлесона, построенный над Q. Множество E – произвольное конечное объединение подобных параллелепипедов, а $T(E)$ – объединение соответствующих тентов.*

Теорема I.6 *Пусть задан вектор $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in (0, 1], j = 1, \ldots, d$, $1 \le d \le 3$. Пусть ν – неотрицательная мера на $\overline{\mathbb{D}}^d$. Тогда оператор вложения $id : \mathcal{H}^h_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d) \to L^2(\overline{\mathbb{D}}^d, \nu)$ ограничен, т.е. мера ν карлесонова для пространства $\mathcal{H}^h_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)$, тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*

$$\nu(T(E)) \lesssim \mathrm{Cap}_{\vec{s}}(E), \quad E \subset \mathbb{T}^d \tag{I.28a}$$

$$\textstyle\sum_{R \subset E} \nu^2(T(R)) w_{\vec{s}}(R) \lesssim \nu(T(Q)), \quad \textit{для любого множества } E, \tag{I.28b}$$

$$\textstyle\sum_{R \subset Q} \nu^2(T(R)) w_{\vec{s}}(R) \lesssim \nu(T(Q)), \quad \textit{для любой ячейки } Q. \tag{I.28c}$$

Подчеркнем еще раз, что, в старших размерностях $d \ge 1$, *гармоническая версия теоремы, вообще говоря, не вытекает сразу из аналитической, и наоборот.* Эти теоремы доказаны в Главе 3.

Схема доказательства

Мы выводим теоремы I.5 и I.6 из теоремы I.1 с помощью дискретизации полидиска.

Дискретизация

В параграфе 3.1 мы описываем метод дискретизации нашей задачи, который сводит ее к оценкам вложения Харди. Отметим, что мы *не дискретизируем непосредственно пространство* $\mathcal{H}_{\vec{s}}$, а рассматриваем дискретную версию карлесонова вложения (I.26) с помощью воспроизводящего свойства нашего пространства. Оказывается, что это, хотя и не самый прямой, но намного более удобный подход.

Замечание. Идея дискретизации и использования воспроизводящих ядер позаимствована из работы [6].

В параграфе 3.1.1 мы вводим дискретную модель d-мерного полидиска, которая представляет из себя диадическое d-дерево. При этом мы должны следить за некоторыми отличиями между геометрией графа и гиперболической геометрией на полидиске, мы решаем этот вопрос с помощью некоторых дополнительных структур на T^d.

В параграфе 3.1.2 мы используем технику *воспроизводящих ядер* для установления отношения между поведением дискретного потенциала на графе и двойственным вложением Карлесона. Именно здесь возникает возможное различие между аналитическим и гармоническим вариантами пространств, и в зависимости от ситуации мы вынуждены ограничивать возможные значения параметра $\vec{s}$, чтобы оценить воспроизводящее ядро. Основной результат данного параграфа заключается в следующей теореме.

Теорема I.7 *Пусть $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in (0, 1], j = 1, \ldots, d$, $d \ge 1$ – вектор, такой что все его координаты s_i достаточно близки к 1: $1 - s_j \le \varepsilon_d$, для некоторой положительной* *абсолютной константы $\varepsilon = \varepsilon(d)$ и $j = 1, \dots, d$. Пусть ν – неотрицательная мера на $\overline{\mathbb{D}}^d$. Тогда оператор вложения $id : \mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d) \to L^2(\overline{\mathbb{D}}^d, \nu)$ ограничен, т.е. ν – карлесонова мера для пространства $\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)$, тогда и только тогда, когда $(w_{\vec{s}}, \tilde{\nu})$ есть следовая пара вес-мера на $\overline{T}^d$,*

$$\sum_{\alpha \in T^d} (\mathbf{I}^* \psi \tilde{\nu})^2(\alpha) w_{\vec{s}}(\alpha) \le C \int_{T^d} \psi^2 d\tilde{\nu}, \quad \forall \psi \in L^2(\overline{T}^d, \tilde{\nu})\,. \tag{I.29}$$

Здесь $\tilde{\nu}$ – это дискретный образ меры ν на $\overline{T}^d$.
То же утверждение выполняется и для гармонических пространств $\mathcal{H}^h_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)$, только мы более не требуем дополнительных ограничений на $\vec{s}$.

Замечание. Очевидно, что при $d = 1$ гармонические и аналитические пространства почти одинаковы, по крайней мере в структурном смысле

$$\mathcal{H}^h_s(\mathbb{D}) = \mathcal{H}_s(\mathbb{D}) \bigoplus \overline{\mathcal{H}_s(\mathbb{D})}.$$

Стало быть и их множества их карлесоновых мер совпадают. В старших размерностях аналитическое пространство намного меньше гармонического (коэффициенты Фурье аналитического пространства определены только на малом подмножестве решетки $\mathbb{Z}^d$ – положительном октанте $(\mathbb{Z}_+)^d$, и операция сопряжения только отражает этот октант относительно нуля). Мы неоднократно подчеркиваем это различие в настоящей работе, см. также вопросы в параграфе 8.7.

Оценки емкостей

В параграфе 3.2 мы показываем, что оценки емкости множеств в $\mathbb{D}^d$ и в T^d на самом деле суть одно и то же. Результаты этого параграфа служат одним из мостиков между дискретной моделью и непрерывной задачей – есть способы переформулировки и энергетических условий на непрерывном языке (см., например, [102, Теорема 2] в случае одномерного диагонального пространства), но субъемкостное условие наиболее удобно для такого переноса. Чтобы, собственно, сформулировать условия для непрерывной задачи, мы должны установить соответствие между дискретной энергией множества и непрерывной энергией его прообраза при каноническом отображении границы d-дерева на политор. Здесь мы следуем идеям работ [6], [12], [62], [63], [64], в которых похожие результаты были получены для деревьев и метрических пространств (заметим, что структура d-дерева определяется произведением метрик).

Приступим к определению ***бесселевой мультипараметрической емкости***. Мы следуем плану, изложенному в книге [1]. Предположим, что размерность d и параметр $\vec{s} = (s_1, \dots, s_d)$ зафиксированы. Определим теперь ядро g на $\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$ (с учетом естественного вложения политора в пространство $\mathbb{R}^{2d}$). Положим

$$\begin{aligned} g_{\vec{s}}(z,\zeta) &:= \prod_{k=1}^{d} g_{s_j}(z_j,\zeta_j), \quad z,\zeta\in\mathbb{T}^d,\\ g_{s_j}(z_j,\zeta_j) &:= \frac{1}{|z_j-\zeta_j|^{1-\frac{s_j}{2}}}, \quad z_j,\zeta_j\in\mathbb{T}. \end{aligned} \tag{I.30}$$

В качестве основной меры на пространстве $M=\mathbb{T}^d$ мы выбираем меру Лебега. В итоге мы получаем, что для функции $f:\mathbb{T}^d\to\mathbb{R}_+$ и меры μ on $\mathbb{T}^d$ мы имеем

$$\mathcal{G}f(z) = \textstyle\int_{\mathbb{T}^d} g_{\vec{s}}(z,\zeta)f(\zeta)\,d\nu(\zeta), \tag{I.31a}$$

$$\check{\mathcal{G}}\mu(\zeta) := \textstyle\int_{\mathbb{T}^d} g_{\vec{s}}(z,\zeta)\,d\mu(z). \tag{I.31b}$$

Легко видеть (например оценивая стандартные бесселевы потенциалы), что

$$\mathbf{U}^{\mu}_{\vec{s}}(z) := \mathcal{G}\check{\mathcal{G}}\mu(z) = \int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{T}^d} g(z,\zeta)g(\zeta,\tau)d\mu(\zeta)\,dm(\tau) \approx \int_{\mathbb{T}^d}\mathbb{K}_{\vec{s}}(z,\zeta)\,d\,\mu(\zeta), \tag{I.32}$$

где $dm(\tau)$ есть попросту мера Лебега на политоре, и

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{\vec{s}}(z,\zeta) &= \prod_{k=1}^{d}\mathbb{K}_{s_k}(z_k,\zeta_k),\\ \mathbb{K}_{s}(z_k,\zeta_k) &= \frac{1}{|z_k-\zeta_k|^{1-s}}, \quad s<1,\\ \mathbb{K}_1(z_k,\zeta_k) &= \log\left(\frac{1}{|z_k-\zeta_k|}\right). \end{aligned} \tag{I.33}$$

Для компакта $F\subset\mathbb{T}^d$ мы определяем $\vec{s}$***-емкость*** как

$$\mathrm{Cap}_{\vec{s}}(F) = \inf\left\{\int_{\mathbb{T}^d}\mathbf{U}^{\mu}_{\vec{s}}\,d\mu:\ \mathbf{U}^{\mu}_{\vec{s}}\geq 1 \text{ on } F\right\}.$$

Сформулируем еще одну версию теоремы Фростмана, теперь для политора.

Теорема С *Пусть $F\subset\mathbb{T}^d$ – компакт. Тогда существует единственная мера μ_F, такая что*

$$\mathcal{E}_{\vec{s}}[\mu_F] := |\mu_F| = \textstyle\int_{\mathbb{T}^d}\mathbf{U}^{\mu_F}_{\vec{s}}\,d\mu_F = \mathrm{Cap}_{\vec{s}}(F), \tag{I.34a}$$

$$\mathbf{U}^{\mu_F}_{\vec{s}} \leq 1 \quad \text{на} \ \ \mathrm{supp}\,\mu_F \tag{I.34b}$$

$$\mathbf{U}^{\mu_F}_{\vec{s}} \geq 1 \quad \text{к.в.} \ \ \text{на} \ \ F. \tag{I.34c}$$

Определив емкость на $\mathbb{T}^d$, мы разработаем инструменты для установления соотношений между непрерывной и дискретной емкостями. Первый из них – это оценка емкости граничных проекций. Именно, для ***экспоненциальных весов типа произведения*** емкость множества и его проекции на остов соразмерны. Эта оценка позволяет нам рассматривать только меры на остовах $\mathbb{D}^d$ или T^d. Итак, пусть $\vec{s} \in (0,1]^d$ и $w_{\vec{s}}$ – вес типа произведения на T^d. Имеем

$$w_{\vec{s}}(\alpha) := 2^{\sum_{j=1}^{d}(1-s_j)|\alpha_j|}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j) \in T^d, \tag{I.35}$$

где $|\alpha_j| = \#\mathcal{P}(\alpha_j) - 1$.

Теорема I.8 *Пусть $E \subset \overline{T}^d$ и $w = w_{\vec{s}}$ – вес типа произведения, порожденный пространством $\mathcal{H}_{\vec{s}}$. Тогда емкости множеств E и его граничной проекции соразмерны,*

$$\mathrm{Cap}_{w_{\vec{s}}}(E) \approx \mathrm{Cap}_{w_{\vec{s}}}(\partial\mathcal{S}(E)),$$

где $\partial\mathcal{S}(E) = \{\omega \in (\partial T)^d : \mathcal{P}(\omega) \cap E \neq \emptyset\}$ и константа в неравенстве зависит только от параметра $\vec{s}$ и размерности d (она, однако, стремится к бесконечности при $s_j \to 0$ для любого s_j).

Далее мы разрабатываем вторую часть нашего метода перехода.

Теорема I.9 *Пусть $w := w_{\vec{s}} : T^d \to \mathbb{R}_+$ – экспоненциальный вес типа произведения, а $E \subset (\partial T)^d$ – компактное множество. Тогда дискретная емкость F и соответствующая непрерывная емкость его образа $F := \Lambda(E)$ соразмерны*

$$\mathrm{Cap}_{\vec{s}}(F) \approx \mathrm{Cap}_{w_{\vec{s}}}(E), \tag{I.36}$$

причем константа в неравенствах зависит только от размерности d и параметра $\vec{s}$.

Пространства роста

Мы переходим ко второй части диссертации. Здесь мы несколько меняем наш метод анализа, в частности, вместо функционально-аналитического подхода (т.е. вместо дискретизации структурных объектов пространства) мы теперь рассматриваем дискретные модели отдельных элементов – функций – рассматриваемого пространства. Кроме того, здесь мы рассматриваем сам процесс дискретизации чуть более подробно. Наконец, графы более не служат основным подлежащим пространством, и мы рассматриваем более классические дискретные представления функций, например всплеск-разложение или как предел диадических мартингалов. Соответствующие дискретные модели хорошо известны.

В Главе 4 мы предъявляем описание функции из класса роста в терминах ее всплеск-коэффициентов.

В Главе 5 мы продолжаем изучение функций класса роста, теперь определяя их на липшицевых областях в $\mathbb{R}^d$, и описываем их осцилляционное поведение около границы в терминах закона повторного логарифма (мы используем здесь другую технику дискретизации, отличную от случая полупространства).

В Главе 6 мы изучаем разделенные разности функций из класса Гельдера, которые ведут себя аналогично производным гармонических функций из классов роста, и предъявляем

несколько контрпримеров.
Наконец, в Главе 7 мы доказываем классическую теорему М. Картрайт для случая единичного шара в $\mathbb{R}^d$.

Всплеск-разложение функций из классов роста

Обсудим подробнее наш первый результат о функциях из пространств роста. Хотя, формально говоря, мы по-прежнему работаем в контексте нескольких переменных, $\mathbb{R}^{d+1}$, наша задача уже перестает быть мультипараметрической, и возникающие дискретные модели более приспособлены к графам вида деревьев.

Мы называем функцию $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ***удваивающим весом***, если она непрерывна и монотонна на вещественной прямой, причем $\lim_{t\to 0+} w(t) = +\infty$, и $w(t) = 1$ при $t > 1$, а также удовлетворяет следующему условию:

$$w(t) \leq Dw(2t). \tag{I.37}$$

Мы изучаем гармонические функции в верхнем полупространстве $\mathbb{R}^{d+1}_+$, которые удовлетворяют условию роста около границы:

$$|u(x,t)| \leq Kw(t), \quad \text{где } (x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}_+$$

Пространство таких функций, которое мы называем ***пространство роста*** или ***класс роста***, мы обозначаем через $h^\infty_w(\mathbb{R}^{d+1})$, а наименьшую константу K, для которой выполняется неравенство выше, мы называем нормой функции u в пространстве h^∞_w и обозначаем ее через $\|u\|_{v,\infty}$. Отметим, что функции из класса роста ограничены в каждом полупространстве вида

$$\mathbb{R}^{d+1}_\delta = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}, t \geq \delta > 0\}, \tag{I.38}$$

поэтому они могут быть представлены в виде свертки их следа на $\{t = \delta\}$ с ядром Пуассона. Через h^0_w мы обозначаем подпространство h^∞_w, состоящее из функций u, удовлетворяющих условию $u(x,t) = o(w(t))$ $(t \to 0)$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^d$.

Исследованиями подобных пространств занимались А. Шилдс и Д. Уильямс ([88] and [89]), Д. Беннетт, Д. Стегенга и Р. Тимони ([11]), Б. Коренблюм ([51]), У. Ласки ([61], [60]), А. Боричев, Ю. Любарский Е. Малинникова и П. Тома ([14], [65]), К. Сейп ([87]).

Мы предъявим описание функций из класса роста в терминах всплеск-разложений их граничных (в каком-либо смысле) значений. В случае относительно быстро растущего (быстрее, чем t^{-a} для некоторого a) веса описание дается непосредственно в терминах всплеск-коэффициентов, а для медленно растущих весов – в терминах оценок частичных сумм соответствующих разложений.

Кратномасштабная аппроксимация: обозначения

Рассмотрим r***-регулярную кратномасштабную аппроксимацию*** $\{V_j\}$ пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$ (здесь мы следуем изложению в [69, Глава 2]), где точное значение параметра $r \geq r_0(v)$ будет указано ниже. Тогда найдется такая функция $\phi \in V_0$, что

$$|\partial^\alpha \phi(x)| \leq C_N(1+|x|)^{-N},$$

для любого мультииндекса α, такого что $|\alpha| \leq r$ и любого $N \in \mathbf{N}$, причем функции $\{\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}^d\}$ образуют ортонормированный базис подпространства V_0. Более того, существует набор гладких (класса C^r) функций$\{\psi_p\}_{p=1}^q$, которые образуют ортонормированный базис для $V_1 \ominus V_0$, быстро убывают вместе со всеми своими производными вплоть до порядка r. Тогда набор

$$\psi_{p,jk} = 2^{dj/2}\psi_p(2^j x - k), \quad j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d,\ p = 1, ..., q,$$

есть ***ортонормированный всплеск-базис*** в $L^2(\mathbb{R}^d)$ (см. [69, Параграф 3.6]). Мы используем ортонормированный базис $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \cup \{\psi_{p,jk}\}_{1\leq p\leq q, j\geq 0, k\in\mathbb{Z}^d}$. Для произвольной функции $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ее ***всплеск-коэффициенты*** определяются как

$$c_{p,jk}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{\psi_{p,jk}(x)}dx, \quad j \geq 0, k \in \mathbb{Z}^d,\ p = 1, \ldots, q,$$

и

$$b_k(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{\phi(x-k)}dx, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Частичная сумма всплеск-разложения функции f с номером N есть

$$S_N(f)(x) = \sum_k b_k(f)\phi(x-k) + \sum_{p=1}^q \sum_{j=0}^N \sum_k c_{p,jk}\psi_{p,jk}(x).$$

Определим теперь т.н. кратномасштабные блоки Для веса w, удовлетворяющего условию удвоения, мы выберем достаточно большое число A и определим последовательность целых чисел $\{n_l\}$ так, чтобы $n_0 = 0$, $n_l > n_{l-1}$ и $w(2^{-n_l}) \in [A^l, A^{l+1})$. Найдется тогда такое число m^*, зависящее только от веса w, которое удовлетворяет неравенству

$$\frac{2^{-m^* n_l} w(2^{-n_l})}{2^{-m^* n_{l-1}} w(2^{-n_{l-1}})} < 1 - \varepsilon \tag{I.39}$$

для некоторого положительного ε. Наша идея состоит в том, что мы группируем кратномасштабные подпространства V_j в блоки вида $V_{n_l} \setminus V_{n_{l-1}}$, и оцениваем частичные суммы всплеск-разложения, соответствующие этим блокам.

Наш основной результат заключается в следующей теореме.

Теорема I.10 *Пусть u – гармоническая в верхнем полупространстве $\mathbb{R}^{d+1}_+$ функция, ограниченная на каждом полупространстве вида $\{(x,t) : t > t_0 > 0\}$. Тогда $u \in h^\infty_w$ в том и* *только том случае, когда найдется константа C, такая что*

$$M_N(u) = \sup_{t>0} \|S_N(u(\cdot,t))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le Cw(2^{-N}).$$

аналогично, $u \in h^0_w$ в том и только том случае, когда $\lim_{N\to\infty} M_N(u)(w(2^{-N}))^{-1} = 0$.

Доказательство этой теоремы сочетает стандартные методы кратномасштабного анализа с приемом, изобретенным Ж. Бургейном (см. [15]), который позволяет нам добавить в формулу для коэффициента свертку с ядром Пуассона. Этот прием также использовался в работе [98] (теорема 1 и следствие 3.1).

Упомянем также еще один результат из работы [99]. Пусть g – ненулевая радиальная функция в $\mathbb{R}^d$, такая что $g \in C^r$, для достаточно большого числа $r > r_0(w)$ (параметр r_0 писывает скорость роста веса w). Предположим также, что функция g, равно как и все ее частные производные вплоть до порядка r, удовлетворяют

$$|\partial^\beta g(x)| \le \frac{C}{(1+|x|^2)^{d+1}}.$$

Например, подойдет гладкая функция g с компактным носителем. Тогда $(1+|x|^{d+1})\partial^\beta g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, если $|\beta| \le r$. Итак, мы получаем оценку

$$|\hat{g}(\tau)| \le \frac{C}{(1+|\tau|)^r}, \tag{I.40}$$

при этом подобные неравенств выполняются для частных производных $\hat{g}$ вплоть до порядка $d+1$.

Теорема I.11 *Пусть u – гармоническая на $\mathbb{R}^{d+1}_+$ функция, ограниченная в каждом полупространстве $\{(x,t) : t \ge t_0 > 0\}$, и пусть $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ – радиальная функция, такая что все частные производные ее преобразования Фурье $\hat{g}$ суммируемы вплоть до порядка $d+1$, (I.40) выполняется для $\hat{g}$ и частных производных, причем $\hat{g}(0) \ne 0$. Тогда $u \in h^\infty_w$ в том и только том случае, когда найдется такая константа C_u, что*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x,t) g\left(\frac{y-x}{a}\right) dx \right| \le C_u a^d w(a), \tag{I.41}$$

для всех $t > 0, a > 0$ и $y \in \mathbb{R}^d$.

Замечание. В сущности эта теорема утверждает, что в формуле свертки для функции u ядро Пуассона можно заменить на какую-нибудь другую (достаточно гладкую) аппроксимативную единицу, например на ядро Стеклова, свернутое само с собой r раз.

Общий принцип наших рассуждений выглядит следующим образом: если гармоническая функция удовлетворяет некоторому регулярному условию роста (например функции с конечной нормой, или функции, рассматриваемые в работе [51]), тогда для нее естественным образом строится диадический мартингал, удовлетворяющий похожим условиям на рост. Заменяя мартингал (т.е. всплеск Хаара) на более гладкую дискретизацию, мы можем ослабить условия на вес. Подобная замена действительно важна для некоторых сложно устроенных функций, поскольку некоторые оценки на рост мартингалов не могут быть напрямую перенесены в контекст гармонических функций (пример подобного поведения будет обсуждаться ниже). С другой стороны, всплеск-разложения обладают и недостатками, например носители сдвинутых всплеск-функций должны иметь значительное пересечение, что усложняет оценки.

Схема доказательства

В разделе 4.1 мы соберем некоторые вспомогательные утверждения и необходимые сведения о всплеск-разложениях.

Для начала, в параграфе 4.1.1, мы докажем несколько лемм, которые и содержат суть приема, использованного Бургейном в работах [15, 16].

Следуя И. Мейеру, [69], мы затем формулируем нужные нам результаты о всплесках и кратномасштабном анализе, эта работа проделана в параграфах 4.1.2 и 4.1.3.

В разделе 4.2 мы доказываем теорему I.10 – мы используем блоки всплесков, соответствующие подпоследовательности поколений, где размер блока соответствует скорости роста весовой функции w. Доказательство основано на двух теоремах, доказанных в параграфах 4.2.1 и 4.2.2 соответственно.

Теорема I.12 *Для произвольной функции* $u \in h^\infty_w(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ *положим*

$$g_0(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle u(y,t), \phi(y-k)\rangle \phi(x-k), \quad \text{и}$$

$$g_l(x,t) = \sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_l} \sum_{p=1}^{q} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle u(y,t), \psi_{p,jk}(y)\rangle \psi_{p,jk}(x), \quad l \geq 1.$$

Тогда

$$u(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l(x,t), \quad g_l(\cdot,t) \in V_{n_l}(\infty) \quad \text{и}$$

$$\|g_l(\cdot,t)\|_\infty \leq C\|u\|_{v,\infty} w(2^{-n_l}), \quad l \geq 0, \tag{I.42}$$

где константа C *зависит только от* ϕ *и* A.

Иными словами, блок всплеск-разложения (длины, соответствующей росту веса) функции из класса роста допускает ту же оценку, что и исходная функция. Верно и обратное утверждение – если все такие блоки удовлетворяют соответствующему условию роста, то их сумма принадлежит классу роста.

Теорема I.13 *Пусть* u *– функция, гармоническая на верхнем полупространстве* $\mathbb{R}^{d+1}_+$ *и ограниченная на каждом полупространстве* $\{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}, t \geq t_0 > 0\}$. *Предположим, что для каждого* $t > 0$

$$u(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l(x,t),$$

причем ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}^d$*,* $g_0(\cdot,t) \in V_0(\infty)$*,*

$$g_l(x,t) = \sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_l} \sum_{p=1}^{q} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_p^{(jk)}(t)\psi_{p,jk}(x),\ l \geq 1$$

и существует такая константа B*, что*

$$\|g_l(\cdot,t)\|_\infty \leq Bw(2^{-n_l}),$$

для произвольного числа $t > 0$*. Тогда* $u \in h_w^\infty$ *и верна оценка на норму* $\|u\|_{w,\infty} \leq CB$*, где константа* C *зависит только от* A *и* ϕ*.*

Пространства роста на липшицевых областях

В этом разделе мы выводим неравенство, описывающее типичное поведение осцилляционного типа, для функции из пространства роста на липшицевой области в $\mathbb{R}^d$. Мы представляем результаты, полученные в работе [103].

Обозначения и формулировки

Формулировки

Пусть $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – вес, удовлетворяющий условию удвоения (см. (I.37)). Для липшицевой функции $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ мы обозначаем через Ω_ϕ ее надграфик,

$$\Omega_\phi = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^d, y > \phi(x)\}.$$

Мы рассматриваем функции, гармонические в Ω_ϕ и удовлетворяющие условию роста

$$|u(x,y)| \leq Cw(\mathrm{dist}((x,y),\partial\Omega_\phi)), \quad (x,y) \in \Omega_\phi.$$

Пространство таких функций мы обозначаем символом $h_w^\infty(\Omega_\phi)$, а наименьшую константу C, для которой выполняется это неравенство, мы называем нормой функции u в пространстве $h_w^\infty(\Omega_\phi)$, и обозначаем ее через $\|u\|_{w,\infty}$.

Наша цель состоит в получении оценки в духе закона повторного логарифма для ***взвешенных усреднений*** функций из классов роста $h_w^\infty(\Omega_\phi)$ ([103, Теорема 2]).

Теорема I.14 *Пусть* ϕ *– липшицева функция, заданная на* $\mathbb{R}^d$*, и* u *принадлежит классу роста* $h_w^\infty(\Omega_\phi)$*. Для точки* $x \in \mathbb{R}^d$ *и числа* $0 < \delta \leq 1$ *положим*

$$I(x,\delta) = \int_\delta^1 u(x,\phi(x)+y)\, d\left(\frac{1}{w(y)}\right). \tag{I.43}$$

Тогда выполняется следующее неравенство (типа закона повторного логарифма)

$$\limsup_{\delta\to 0}\frac{I(x,\delta)}{\sqrt{\log w(\delta)\log\log\log w(\delta)}}\le C\|u\|_{w,\infty},\quad \text{п.в. } x\in\mathbb{R}^d, \tag{I.44}$$

где константа C зависит только от функции ϕ, веса w и размерности d.

Легко видеть, что если $u\in h^\infty_w(\mathbb{R}^{d+1}_+)$, то тривиальная оценка немедленно дает $I(x,\delta)\le C\log w(\delta)$. Мы, однако, видим, что специальным образом взвешенное среднее (I.43) обнаруживает значительные сокращения подинтегральной функции, так что, используя классический закон повторного логарифма для мартингалов, мы получаем лучшую оценку (I.44). Поскольку мы теперь находимся не в верхнем полупространстве, а в липшицевой области, мы больше не можем использовать всплеск-разложение. Вместо этого мы используем дискретизационную технику, принадлежащую Х. Йоренте и А. Николау. Именно, сначала мы приближаем усреднение I с помощью функции H из класса Блоха, такой что она заодно лежит и в пространстве $h^\infty_{\log w}$. Напомним, что H называется функцией класса Блоха в области Ω, если она гармонична в этой области и $|\nabla H|(\xi)\le\frac{C}{\operatorname{dist}(\xi,\partial\Omega)}$. Отметим здесь два утверждения типа закона повторного логарифма для гармонических функций, закон Макарова-Йоренте, [66, Следствие **3.2**], [58, Теорема **1**], и закон Баньюэлоса-Мура, [8, Теорема **3.04**].К сожалению, мы не можем применить ни одно из этих утверждений, поскольку закон Макарова-Йоренте не дает правильной оценки для медленно растущих весов, а в законе Баньюэлоса-Мура используется функция Лузина, которую сложно оценить с помощью веса. Мы, следовательно, вынуждены модифицировать идеи, лежащие в основе доказательства этих утверждений, в частности мы приближаем функцию H с помощью (супер) диадического мартингала, квадратическую вариацию которого уже можно оценить с помощью веса w. Теперь остается только применить закон повторного логарифма для мартингалов.

Отметим также, что теорема I.14 верна и в том случае, когда вместо Ω_ϕ мы рассматриваем звездную липшицеву область.

В качестве следствия теоремы I.14 мы получаем локальную версию теоремы **5** из работы [99] (см. [103, Теорема 3])

Теорема I.15 *Пусть u – гармоническая в верхнем полупространстве $\mathbb{R}^{d+1}_+$ функция. Предположим, что существует множество $\Sigma\subset\mathbb{R}^d$ положительной d-мерной меры Лебега, такое что для каждой точки $x_0\in\Sigma$ имеем*

$$|u(x,y)|\le Cw(y),\quad |x-x_0|\le My, \tag{I.45}$$

где M – некоторая положительная константа. Тогда выполняется

$$\limsup_{\delta\to 0}\frac{I(x,\delta)}{\sqrt{\log w(\delta)\log\log\log w(\delta)}}\le C_1\cdot C,\quad \text{п.в. } x\in\Sigma, \tag{I.46}$$

где константа C_1 зависит только от M, w и d.

Отметим, что условие (I.45) ограничивает *некасательный* рост функции u около границы. Мы не знаем, остается ли верным наша теорема, если условие (I.45) заменить на условие роста *радиального типа.*

Обозначения

Через $|E|$ мы обозначаем меру Лебега множества $E \subset \mathbb{R}^d$ (размерность d мы считаем понятной из контекста).
Для точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ и числа $r > 0$ через $Q(x,r)$ мы обозначаем куб с длиной стороны $2r$ и центром в точке x

$$Q(x,r) = \prod_{i=1}^{d}(x_i - r, x_i + r],$$

мы также полагаем $Q(x, \frac{1}{2}) := Q(x)$. Далее, для куба Q его центр мы обозначаем через x_Q, т.е. $Q = Q(x_Q, r)$ для некоторого положительного числа r.

Fix $x \in \mathbb{R}^d$. Если $2^k x_i - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ для всех $i = 1 \ldots d$, и $r = 2^{-k-1}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}_+$, то мы называем куб $Q = Q(x,r)$ диадическим кубом ранга k. Для точки $x \in \mathbb{R}^n$ и числа $k \in \mathbb{Z}_+$ через $\Delta_k(x)$ мы обозначим набор всевозможных (сдвинутых) диадических кубов ранга k в $Q(x)$,

$$\Delta_k(x) = \left\{ \prod_{i=1}^{d}(x - \frac{1}{2} + m_i 2^{-k}, x - \frac{1}{2} + (m_i+1)2^{-k}), \quad m_i \in \mathbb{Z}_+,\ 0 \le m_i \le 2^k - 1 \right\},$$

мы также полагаем $\Delta(x) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Delta_k(x)$. Если $Q(x) = (0,1]^d$, то мы пишем Δ_k и Δ соответственно. Через $\mathcal{F}_k(x)$ мы обозначаем (очевидно конечную) сигма-алгебру, порожденную диадическими кубами ранга k в $Q(x)$. Для вероятностной меры μ с носителем в $Q(x)$ и возрастающей последовательности $\{n_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{Z}_+$ мы рассматриваем ***(супер-)диадические мартингалы*** на $Q(x)$ относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_{n_k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, мы обозначаем их через $S = \{S_k, \mathcal{F}_{n_k}(x), \mu\}$. Это означает, что S_k – кусочно постоянная функция на сдвинутых диадических кубах ранга n_k, причем если $\tilde{Q}$ – диадический куб в $\Delta_{n_{k-1}}(x)$, то тогда

$$\frac{1}{\mu(\tilde{Q})} \int_{\tilde{Q}} S_k(t)\, d\mu(t) = S_{k-1}(x_{\tilde{Q}}).$$

В частности, если $n = 1$ а μ – мера Лебега на $Q\left(\frac{1}{2}\right) = (0,1]$ то S имеет следующее *представление усеченным всплеск-рядом*

$$S_k(t) = L + \sum_{j=0}^{n_k} \sum_{i=0}^{2^j-1} b_{ij}\psi_{ij}(t), \quad t \in (0,1], \tag{I.47}$$

где $L = \mathbb{E}S_k = \int_{Q_0} S_k(t)\, dt$, $b_{ij} = 2^j \int_{Q_0} S_k(t)\psi_{ij}(t)\, dt$, $\psi_{ij}(t) = \psi(2^j t - i)$, $t \in \mathbb{R}$, а ψ – ***всплеск Хаара***, $\psi = \chi_{[0,1]} - 2\chi_{[0,\frac{1}{2}]}$ (здесь мы используем L^∞-нормировку вместо обычной L^2). Для произвольного интервала $I \subset (0,1]$ длины $2r$, $I = [x_I - r, x_I + r]$, положим

$$\psi_I(t) = \psi\left(\frac{t - x_I + r}{2r}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда (I.47) может быть переписано следующим образом

$$S_k(t) = L + \sum_{j=0}^{n_k} \sum_{I \in \Delta_j} b_I \psi_I(t), \quad t \in (0,1],$$

где $b_I = \frac{1}{|I|}\int_{\mathbb{R}} S_k(t)\psi_I(t)\,dt$.
Через $\langle S\rangle_k$ мы обозначаем ***квадратическую вариацию*** S,

$$\langle S\rangle_k^2 = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}[|S_j - S_{j-1}|^2 | \mathcal{F}_{n_{j-1}}].$$

Если $n_k = k$, то, используя представление Хаара, мы можем записать квадратическую вариацию как

$$\langle S\rangle_k^2(t) = L^2 + \sum_{I \in \Delta : t \in I, |I| \geq 2^{-k}} b_I^2. \tag{I.48}$$

Пусть u – гармоническая в Ω_ϕ функция. Мы говорим, что u принадлежит ***классу Блоха*** в Ω_ϕ, если существует такая константа $D > 0$, что

$$|\nabla u(x,y)| \leq \frac{D}{\operatorname{dist}((x,y), \partial\Omega_\phi)}, \quad (x,y) \in \Omega_\phi.$$

Пространство таких функций мы обозначаем через $\mathcal{B}(\Omega_\phi)$, а наименьшее возможное значение такой константы через $\|u\|_{\mathcal{B}}$.
Связь между функциями из класса Блоха и диадическими мартингалами хорошо известна, см., например, работу [66] для случая единичного круга, и работу [58], где обсуждаются липшицевы области. В нашем случае мы используем супердиадические мартингалы, т.е., в сущности, разреженные мартингалы. Именно, вместо обычной фильтрации $\mathcal{F}_k$ мы используем некоторую разреженную подпоследовательность сигма-алгебр $\mathcal{F}_{n_k}$, где числа n_k выбираются в зависимости от веса w (и эта последовательность лакунарна для медленно растущих весов w). Такой выбор мартингалов объясняется тем, что тогда намного легче получается оценка квадратической вариации (похожие идеи применяются в работе [65]).

Схема доказательства

Доказательство представлено в разделе 5.1.2, оно основано на следующей лемме, доказанной в параграфах 5.1.3 и 5.1.4.

Лемма I.2 *Предположим, что $u \in h_w^\infty(\Omega_\phi)$. Тогда для каждой точки $x_0 \in \mathbb{R}^d$ существует вероятностная мера μ с носителем $Q(x_0)$ и (супер-)диадический мартингал $S = \{S_k, \mathcal{F}_{n_k}, \mu\}_{k=0}^\infty$ на $Q(x_0)$, такой что μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на*

$Q(x_0)$, и для каждого числа $k \in \mathbb{Z}_+$ выполняется

$$|S_k(x) - I(x, s_k)| \lesssim 1, \tag{I.49a}$$

$$|S_k(x) - S_{k+1}(x)| \lesssim 1, \quad x \in Q(x_0), \tag{I.49b}$$

где $s_k = w^{-1}(2^k)$.

Локальная теорема I.15 доказывается в параграфе 5.1.5.

Доказательство леммы I.2 опирается на приближение усреднения I с помощью **конкретной** функции из класса Блоха, лежащей еще и в пространстве $h^{\infty}_{\log w}(\Omega_\phi)$, и которая удовлетворяет соответствующему закону повторного логарифма. Мы можем теперь поинтересоваться, для **любой ли** функции класса Блоха из пространства $h^{\infty}_{\log w}(\Omega_\phi)$ выполняется закон повторного логарифма (I.44). В параграфе 5.2 мы строим пример функции класса Блоха, который дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Пространства роста: разделенные разности

В этом разделе мы рассматриваем две конструкции, которые относятся к осцилляционному поведению разделенных разностей функций из класса Гельдера. Такие разности можно воспринимать как еще один пример функций из класса роста, только теперь вместо свертки с ядром Пуассона мы рассматриваем продолжение в верхнюю полуплоскость с помощью ядра Стеклова. Мы ограничиваемся рассмотрением случая размерности $d = 2$. Представленные здесь результаты получены в работе [109].

Обозначения и формулировки

Формулировки

Для числа $0 < a < 1$ обозначим через $\mathrm{Hol}_a(\mathbb{R})$ класс гельдеровых функций порядка a, т.е. таких функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^a$ для некоторой константы $C = C(f) > 0$ и для произвольных $x, y \in \mathbb{R}$. Наименьшая из таких констант есть гельдеровская норма $\|f\|_a$. Для непрерывной функции f мы определяем ее ***a*-разделенную разность** как

$$\mathrm{D}_a(f)(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{|h|^a}. \tag{I.50}$$

Наша цель в этом разделе состоит в доказательстве двух теорем об осцилляциях D_a для функций из класса Hol_a.

Теорема I.16 *Пусть $0 < a < 1$. Тогда найдется такая функция $f \in \mathrm{Hol}_a(\mathbb{R})$, что для почти каждой точки $x \in \mathbb{R}$ верно*

$$\limsup_{h \to 0^+} \mathrm{D}_a(f)(x, h) > 0$$

и

$$\liminf_{h\to 0^+} \mathrm{D}_a(f)(x,h) = 0.$$

Теорема I.17 *Пусть* $0 < a < 1$. *Тогда найдется такая функция* $f \in \mathrm{Hol}_a(\mathbb{R})$ *и константа* $C > 0$, *что для каждой точки* $x \in \mathbb{R}$ *найдется пара последовательностей* $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h'_k\}_{k=1}^{\infty}$ *положительных чисел, сходящихся к нулю, и таких что*

$$\begin{aligned} &\limsup_{k\to\infty} \left| \frac{f(x+h'_k) - f(x)}{h'_k} \right| \le 1, \\ &\liminf_{k\to\infty} \frac{|f(x+h_k) - f(x)|}{|h_k|^{\alpha}} > C. \end{aligned} \tag{I.51}$$

Обозначения, обсуждение теорем I.16, I.17

Здесь мы объясним, прочему нас интересуют такие свойства гельдеровых функций.
Для $b > 1$ Г.Х. Харди показал в [39], что функция Вейерштрасса

$$f_{b,a}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{-na} \cos(b^n x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{I.52}$$

принадлежит классу Гельдера $\mathrm{Hol}_a(\mathbb{R})$ и демонстрирует в некотором смысле экстремальное поведение,

$$\limsup_{h\to 0} \frac{|f_{b,a}(x+h) - f_{b,a}(x)|}{|h|^a} > 0$$

для любой точки $x \in \mathbb{R}$.
В работе [109] было получено следующее улучшение, которое уточняет результат Харди.

Теорема *Пусть* $0 < a < 1$ *и* $f \in \mathrm{Hol}_a(\mathbb{R})$. *Почти для каждой точки* $x \in \mathbb{R}$, *такой что существует константа* $\delta = \delta(x) > 0$, *удовлетворяющая*

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{\sigma\{t \in [h,1] : \mathrm{D}_a(f)(x,t) > \delta\}}{\log h^{-1}} > 0, \tag{I.53}$$

найдется и константа $c = c(x) > 0$, *такая что*

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{\sigma\{t \in [h,1] : \mathrm{D}_a(f)(x,t) < -c\}}{\log h^{-1}} > 0. \tag{I.54}$$

Здесь σ – стандартная мера Хаара на $(0,\infty)$, т.е.

$$\sigma(E) = \int_E \frac{dh}{h}, \quad E \subset (0,\infty),$$

так что $\sigma[h,1] = \log h^{-1}$, $0 < h < 1$.
Замечание. Отметим что при всех $b > 1$ и $0 < a < 1$ функция Вейерштрасса $f_{b,a}$, определенная выше в (I.52), удовлетворяет условиям (I.53) (и (I.54)) в любой точке $x \in \mathbb{R}$ для некоторой (равномерной) константы $\delta = \delta(b,a)$ и $c = c(b,a)$.

Отметим также, что в формулировке и утверждении вышеуказанной теоремы необходимо использовать меру σ (или какой-либо другой способ усреднения по шкалам) для измерения тех рангов разложения, для которых $\mathrm{D}_a(f)(x,t)$ отделена от нуля, поскольку разделенные разности могут вести себя очень нерегулярно на разных масштабах. **Описание этого эффекта и составляет содержание теоремы I.16.**

Методы работы [109] основаны на технике диадических мартингалов. Именно, разделенные разности D_a представляются в виде мартингала

$$S_k(x) = 2^k(f(x_2) - f(x_1)), \quad x \in [x_1, x_2) \in \Delta_k, \tag{I.55}$$

где Δ_k – набор диадических подинтервалов ранга k отрезка $[0,1]$. В частности, этот мартингал удовлетворяет *условию роста*

$$\sup_k 2^{-k(1-a)} \|S_k\|_\infty \le \|f\|_a.$$

Как и ранее, непрерывные утверждения получаются с помощью такой дискретизации, и результаты о приближающем мартингале содержатся в следующей теореме ([109, Следствие 1]).

Теорема *Пусть* $0 < \varepsilon < 1$, *а* $\{T_n\}$ *– диадический мартингал, причем* $\sup_n 2^{-n\varepsilon}\|T_n - T_{n-1}\|_\infty \le 1$.

(a) Для числа $0 < \theta < 1$ *рассмотрим множество* $G(\theta)$ *точек* $x \in \mathbb{R}$, *таких что*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\{1 \le k \le N : 2^{-k\varepsilon} T_k(x) \ge \theta\} = 1. \tag{I.56}$$

Тогда $H^{\Phi(\theta(1-2^{-\varepsilon}))}(G(\theta)) \le 1$, *и, стало быть,* $\dim G(\theta) \le \Phi(\theta(1-2^{-\varepsilon}))$.

(b) Для числа $0 < \theta < 1$ *рассмотрим множество* $F(\theta)$ *точек* $x \in \mathbb{R}$, *таких что*

$$\liminf_{k\to\infty} 2^{-k\varepsilon} T_k(x) \ge \theta.$$

Тогда $H^{\Phi(\theta(1-2^{-\beta}))}(F(\theta)) \le 1$, *и, стало быть,* $\dim F(\theta) \le \Phi(\theta(1-2^{-\varepsilon}))$.

(c) Для почти каждой точки $x \in \mathbb{R}$, *для которой существует константа* $\delta = \delta(x) > 0$, *такая что*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\{1 \le k \le N : 2^{-k\varepsilon} T_k(x) > \delta\} > 0,$$

найдется и константа $c = c(x) > 0$, *такая что*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\{1 \le k \le N : 2^{-k\varepsilon} T_k(x) < -c\} > 0$$

Здесь символом H^s обозначается диадическая хаусдорфова мера, dim – размерность по

Хаусдорфу, а Φ – ***энтропия***

$$\Phi(\eta)=\frac{1+\eta}{2}\log_2\left(\frac{2}{1+\eta}\right)+\frac{1-\eta}{2}\log_2\left(\frac{2}{1-\eta}\right),\quad 0<\eta<1.$$

Замечание. Следует учесть, что стратегия доказательства непрерывных утверждений с помощью различных методов дискретизации имееет естественные ограничения. Приведем пример. Зафиксируем число $0<\varepsilon<1$ и рассмотрим диадический мартингал $\{T_n\}$, такой что $\sup_n 2^{-n\varepsilon}\|T_n\|_\infty<\infty$. Х. Фернандес, Ю. Хейнонен и Х. Йоренте в работе [35] доказали следующий закону нуля-единицы: для любого интервала I либо $\{T_n(x)\}$ сходится на множестве точек $x\in I$ положительной длины, либо найдется константа $C>0$, такая что

$$\mathrm{H}^\infty_{1-\varepsilon}(\{x\in I:\lim_{n\to\infty}T_n(x)=+\infty\})>C|I|^{1-\varepsilon}.$$

Здесь символ $\mathrm{H}^\infty_{1-\varepsilon}$ обозначает $(1-\varepsilon)$-обхват по Хаусдорфу. Однако непрерывный аналог этого результата неверен, более того гельдерова функция может осциллировать вокруг каждой точки. **Этот пример и составляет суть теоремы I.17**.

Схема доказательства

В параграфе 6.1 содержится доказательство теоремы I.16, а параграф 6.2 посвящен доказательству теоремы I.17.

Теорема М. Картрайт для классов роста в шаре

Для формулировки нашего следующего результаты мы перенесемся в единичный шар $\mathbb{B}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^{d+1}$. Мы показываем, следуя работе [100], что если гармоническая в шаре функция u удовлетворяет *одностороннему регулярному* условию на рост (и теперь мы не требуем удвоения), то эта оценка на самом деле (с точностью до умножения на константу) верна и для модуля функции u, т.е. оценка двусторонняя.

Формулировки

Хорошо известна классическая теорема, принадлежащая М. Картрайт, [22], которая утверждает, что если функция u гармонична в единичном круге, равна нулю в нуле, и удовлетворяет ***одностороннему условию на рост***

$$u(z)\le w(1-|z|),\quad z\in\mathbb{D},$$

где $w(t)=\frac{1}{t^p}$ для некоторого $p>1$ (т.е. w – полиномиальный вес), то верно и обратное неравенство

$$u(z)\ge -Cw(1-|z|),\quad z\in\mathbb{D},$$

где константа C зависит только от p. Этот результат впоследствии уточнялся и распространялся на более общие веса в работах самой М. Картрайт ([23]) и К.Н. Линдена ([56, 57]). Следует упомянуть и статьи Н.К. Никольского ([76]) и А. Боричева ([13]), во второй работе была получена замечательная оценка $u(z) \geq -(1+o(1))w(1-|z|)$ для широкого класса достаточно быстро растущих весов (см. [13, параграф 1.3]); некоторые оценки константы в обратном неравенстве были известны еще Линдену, [57]. Методы всех этих работ основаны на теории конформных отображений, и, следовательно, ограничены комплексной плоскостью. Вполне естественно задать подобный вопрос и в старших размерностях, схожие задачи рассматривались в работах Ф. Риппона, К. Самотия и Б. Коренблюма, см. [82, 84, 85, 52].

Пусть $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – строго убывающая функция, такая что $\lim_{y\to 0} w(y) = \infty$ и $w(1) = 1$. Более того, мы предполагаем, что $w \in C^2$ и вес удовлетворяет следующим *условиям регулярности*

$$\lim_{y\to 0} \frac{w(y)}{w'(y)} = 0, \tag{I.57}$$

и

$$\left(\frac{w(y)}{w'(y)}\right)' \geq -\frac{1-\delta}{d}, \quad 0 < y < 1, \tag{I.58}$$

для некоторого положительного числа δ.

Замечание. Отметим еще раз что мы теперь не требуем удвоения от веса w, нам, однако, нужна некоторая регулярность, выражаемая в условиях выше.

Наш основной результат здесь состоит в следующей теореме.

Теорема I.18 *Пусть U – гармоническая в единичном шаре $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{R}^{d+1} : \ |z| < 1\}$ функция, и $U(0) = 0$. Предположим, что U удовлетворяет одностороннему условию роста*

$$U(z) \leq w(1-|z|), \quad z \in \mathbb{B}, \tag{I.59}$$

где вес w подчинен условиям (I.57) *и* (I.58).

Тогда верна и следующая двусторонняя оценка (см. [100, Теорема 1])

$$|U(z)| \leq Cw(1-|z|), \quad z \in \mathbb{B}, \tag{I.60}$$

где константа $C = C(d,\delta)$ зависит только от значения параметра δ и размерности d.

Условия (I.57) и (I.58) гарантируют относительно быстрый рост веса w при $|z| \to 1$, а также его регулярность. Естественное условие регулярность для мажорант гармонических функций состоит в *логарифмической выпуклости*, однако А. Боричев (см. [13, Предложение 4.1]) показал, что для того, чтобы выполнялась теорема I.18 необходима дополнительная регулярность веса.

С точки зрения скорости роста вес $w_0(y) = y^{-d}$ служит естественным барьером. Легко видеть, что функция $w(y) = y^{-p}$ удовлетворяет (I.57) и (I.58) в точности тогда, когда $p > d$. Для степеней $p \leq d$ двусторонняя оценка уже не следует из односторонней, очевидный пример доставляется соответствующим ядром Пуассона для шара $\mathbb{B}$ – положительной гармонической функции, которая растет как w_0 около полюса на границе. Мы не предполагаем никаких ограничений сверху на рост веса w.

Схема доказательства

Параграф 7.1

Здесь мы вводим обозначения и доказываем несколько технических утверждений.

Параграф 7.2

В этом параграфе мы снова формулируем наш главный результат, теперь уже в терминах усреднений по сферическим шапочкам.

Параграф 7.3

В этом параграфе мы переписываем условия регулярности (I.57) и (I.58) в более удобном виде.

Параграф 7.4

Здесь мы более подробно обсуждаем условия регулярности.

Параграф 7.5

В данном параграфе мы возвращаемся к доказательству, и формулируем ключевой результат, из которого и следует теорема I.18.

Теорема I.19 *Пусть* $\tilde{k} : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ *– строго убывающая абсолютно непрерывная функция, такая что*

$$\tilde{k}(0) < \infty, \tag{I.61a}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\tilde{k}(y)}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}} dy \leq D, \tag{I.61b}$$

для нектоторой константы $1 < D < \infty$. *Пусть* $\tilde{u}$ *– гармоническая в шаре* $\mathbb{B}$ *функция, непрерывная вплоть до границы, и удовлетворяющая условиям* $\tilde{u}(0) = 0$ *и* $\tilde{u}(z) \leq \tilde{k}(|z|)$ *для* $z \in \mathbb{B}$ *Тогда для каждой точки* $x_0 \in \partial\mathbb{B}$ *и числа* $b \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ *верно следующее неравенство*

$$\int_{\{\phi(\zeta,x_0)\leq b\}} \tilde{u}(\zeta)\, d\sigma_d(\zeta) \geq -C\left(D^{d+1} + \tilde{k}(0)b^d\right). \tag{I.62}$$

где константа C *зависит только от размерности* d.

Здесь под $\phi(\zeta, x_0)$ мы понимаем угол между двумя точками $\zeta, x_0 \in \partial\mathbb{B}$ на единичной сфере, а σ_d – нормированная мера Лебега на сфере.

Параграф 7.6

Здесь мы доказываем еще одну техническую лемму. В доказательстве важную роль играет построение вспомогательной поверхности, эта техника представляет собой модификацию метода из работы [52].

Параграф 7.7

Мы завершаем доказательство теоремы I.19 в этом параграфе.

Усредненная вариация

Последняя часть нашей работы посвящена другому типу граничного поведения гармонических функций – так называемой ***нормальной вариации***. Под именем ***радиальной вариации*** этот объект возник в классической работе У. Рудина [83], где он изучался в контексте различных классов аналитических функций в круге (диск-алгебра, произведения Бляшке, пространство $H^\infty(\mathbb{D})$ ограниченных аналитических функций и др.). Рудин доказал, что для таких пространств (а также и для некоторых других, например для пространства Харди $H^2(\mathbb{D})$, – хотя в этом случае оценки почти очевидны) существует функция f, такая что ее радиальная вариация бесконечна для *почти всех* точек на окружности $\mathbb{T}$. Другими словами,

$$\operatorname{var}(f)|_{[0,e^{i\theta}]} = \int_0^1 |f'(re^{i\theta})|\, dr = +\infty, \quad \text{для п.в. } \theta \in [0, 2\pi). \tag{I.63}$$

Рудин также предъявил несколько примеров пространств, в которых можно найти функцию, радиальная вариация которой бесконечна везде или почти везде, более того, множество точек конечной вариации может быть не только нулевой длины, но и еще первой категории в смысле Бэра. Ему, однако, не удалось заменить свойство 'почти везде' на свойство 'везде', и эта часть задачи осталась незавершенной.

Спустя долгое время – через 38 лет, – эта гипотеза о возможности построения ограниченной аналитической функции, вариация которой бесконечна для каждого радиуса, была опровергнута Ж. Бургейном в замечательной работе [15], где он показал, что *у каждой ограниченной аналитической функции* в единичном круге $\mathbb{D}$ радиальная вариация конечна на довольно большом, в смысле размерности по Хаусдорфу, множестве. Именно, размерность такого множества равна единице внутри каждой дуги окружности. В следующей работе [16] Бургейн распространил свой результат на случай *положительных гармонических функций*, и, отвечая на вопрос В.П. Хавина, на свертки с другими типами (достаточно гладких) аппроксимативных единиц (как, например, с ядром Фейера – но не ядром Стеклова).

Различные варианты взвешенных интегральных средних производных аналитических функций часто встречаются в комплексном анализе, обыкновенно такие объекты используют для определения (например для пространств Дирихле или весовых пространств Харди-Соболева) или описания различных пространств функций. Среди обширного потока литературы на эту

тему упомянем только работы Д. Гирелы о пространствах Бесова и недавнюю серию работ А.Д. Баранова и И.Р. Каюмова, посвященную рациональным функциям.
Сами оценки радиальной вариации использовались П. Джонсом и П. Мюллером в доказательстве гипотезы Андерсона ([47], см. также недавнюю работу [71], посвященную многомерному варианту гипотезы).

Основной результат работы [16] был впоследствии распространен на единичный шар в $\mathbb{R}^d$ в работе М. О'Нилла [77]. Варианты формулировок с разными типами аппроксимативных единиц можно найти в работах [16, 98]. В частности, для многих радиусов верна следующая более сильная оценка

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\tilde{\theta}})| P_{(r)}(\theta - \tilde{\theta})\, d\tilde{\theta} < +\infty, \tag{I.64}$$

где $P_{(r)}(\theta) = \dfrac{1-r^2}{2\pi(1+r^2-2r\cos\theta)}$ – ядро Пуассона в круге. Легко видеть, что левая часть неравенства выше оценивает радиальную вариацию сверху. С другой стороны, дополнительная свертка с ядром Пуассона несколько стабилизирует радиальную вариацию (в духе сравнения некасательной и радиальной максимальных функций – второй объект намного более сложен для изучения).

Наша основная цель здесь состоит в распространении теоремы Бургейна на случай гладких областей в $\mathbb{R}^{d+1}$, $d \geq 1$. Описанные здесь результаты получены в работе [101].

Формулировка основных результатов

Зафиксируем область $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ с гладкой границей S класса C^2. Через $\vec{N}(\xi)$ мы обозначаем единичный вектор внутренней нормали к S в точке $\xi \in S$. Интервал $\{ta+(1-t)b:\ 0 \leq t < 1\}$, где $a, b \in \mathbb{R}^{d+1}$, обозначается через $(a, b]$. Для точки $\xi \in S$ рассмотрим число $t(\xi) > 0$, такое что $(\xi, +r(\xi)\vec{N}(\xi)] \subset \Omega$. Пусть u – какая-либо вещественнозначная функция на Ω. ***Нормальной вариацией функции*** u ***в точке*** $\xi \in S$ называется

$$(\mathrm{Nvar}\ u)(\xi) := \mathrm{var}\left(u|_{(\xi, p+t(\xi)\vec{N}(\xi)]}\right).$$

Нас интересует только конечность этого интеграла, а функция u предполагается гладкой на Ω (очевидно в силу гармоничности). Следовательно, конкретный выбор числа $t(\xi)$ не имеет значения.

Пусть $E \subset S_1 \subset S$. Мы говорим, что множество E ***сверхплотно*** в S_1, если для каждой точки $\xi \in S_1$ и радиуса $r > 0$ мы имеем

$$\dim(E \bigcap \mathbb{B}(\xi, r)) = d,$$

здесь $\mathbb{B}(\xi, \rho)$ – шар в $\mathbb{R}^{d+1}$ радиуса r с центром в ξ, а $\dim$ – хаусдорфова размерность.
Положим

$$\mathcal{V}(u) := \{\xi \in S:\ (\mathrm{Nvar}\ u)(\xi) < +\infty\}.$$

Наш основной результат заключается в следующей теореме ([101, Теорема 1]).

Теорема I.20 *Если функция и гармонична и положительна в области Ω, то тогда множество точек конечной нормальной вариации $\mathcal{V}(u)$ сверхплотно в S.*

Хорошо известно ([81], [43]), что произвольная положительная гармоническая в Ω функция имеет конечные граничные значения вдоль *почти всех* (относительно поверхностной меры) нормалей $\vec{N}(\xi)$. Теорема I.20 утверждает, что для многих точек ξ это свойство выполняется в усиленном смысле: даже и вариация $(\mathrm{Nvar}\ u)(\xi)$ конечна.

Наша теорема улучшает предыдущие результаты Бургейна и О'Нилла. На плоскости, т.е. при $d = 1$, она легко выводится из результатов [15] с помощью конформных отображений. Однако при изучении граничного поведения гармонических функций для более-менее произвольных $(d+1)$-мерных областей переход в старшие размерности обычно представляет из себя сложную задачу (см., например, [20, стр. 48-49], [43], [44]). Помимо этого, наша задача дополнительно усложняется тем фактом, что доказательство замечательных результатов Бургейна, [15], [16], в значительной степени опиралось на технику *преобразования Фурье*. Поскольку в нашем случае граница S области уже, вообще говоря, не группа (методы [77] использовали сферические гармоники), то уже известное доказательство нельзя напрямую адаптировать к нашему случаю. Следуя в общем по пути, проложенному Бургейном в [15], мы по необходимости модифицируем техники и аргументы, чтобы избежать использования гармонического анализа.

Взглянем еще раз на теорему I.20. Мы видим, что

$$\mathrm{var}(u|(\xi, \xi + t(\xi)\vec{N}(\xi)]) = \int_0^{t(\xi)} \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(u \left(\xi + t\vec{N}(\xi) \right) \right) \right| dt \tag{I.65}$$

так что теорема I.20 следует из теоремы I.21 ([101, Теорема 2]), где мы заменяем интеграл в (I.65) на другой интеграл, учитывающий производные функции *и вдоль всех направлений* (а не только вдоль нормали $\vec{\mathcal{N}}(\xi)$)). Положим

$$\mathcal{V}_{\mathrm{grad}}(u) := \{\xi \in S : \int_0^{t(\xi)} \left| \nabla u(\xi + t\vec{N}(\xi)) \right| dt < +\infty\}. \tag{I.66}$$

Теорема I.21 *При условиях теоремы I.20 множество $\mathcal{V}_{\mathrm{grad}}(u)$ сверхплотно в S.*

Как мы уже отметили, одно из ключевых препятствий в теоремах I.20 и I.21 заключается в отсутствии групповой структуры на границе S. Тем не менее, наше доказательство мы запишем именно для такой области $\Omega = \mathbb{R}^2_+$, считая u положительной гармонической функцией на Ω, граничные значения которой имеют компактный носитель. Мы увидим, что такой частный случай уже легко довести до общего утверждения (эта работа полностью проведена в статье [101]), и мы специально не используем в доказательстве групповую структуру вещественной прямой – кроме тех случаев, когда нам это удобно с тточки зрения обозначений и краткости рассуждений.

Для положительной гармонической функции u на $\mathbb{R}^2_+$ (которая по нашим предположениям есть гармоническое продолжение граничной меры с компактным носителем) и числа $y > 0$ положим

$$u_y(x,t) := u(x, t+y), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Пусть теперь h^y_u – ***наименьшая гармоническая мажоранта*** субгармонической функции ∇u_y (подробности см. в ([89, Глава 6, §4])). Записывая ее в виде свертки, имеем

$$h^y_u(x,s) := \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(\xi, y)| P_{(s)}(x-\xi)\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R},\ y, s > 0,$$

где $P_{(s)}(\xi) = \dfrac{s}{\pi(\xi^2 + s^2)}$ – ядро Пуассона для верхней полуплоскости.
Определим

$$\operatorname{Mvar} u(x) := \int_0^1 h^{2t}_u(x,t)\, dt.$$

Это не что иное, как аналог усредненного градиента из(I.64). Точку $x \in \mathbb{R} = S$ мы называем ***точкой Бургейна (B-точкой) функции*** u, если $\operatorname{Mvar} u(x) < +\infty$. Множество точек Бургейна обозначается символом $\mathcal{B}(u)$. Легко убедиться в том, что $\mathcal{V}_{\text{grad}}(u) \supset \mathcal{B}(u)$. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема I.22 *Множество точек Бургейна $\mathcal{B}(u)$ сверхплотно в S.*

Замечание. Чрезвычайно важно, что функция u предполагается *ограниченной снизу (или сверху)*. Мы не можем отказаться от этого условия, например, потому что существует гармоническая в круге функция u с граничными значениям из пространства BMO, такая что множество $\mathcal{V}(u)$ пусто (см. [46]).

Обсуждение доказательства теоремы I.22

В Главе 8 мы на самом деле доказываем только теорему I.22 на полуплоскости. Это значительно упрощает рассуждение, а в полной общности доказательство предъявлено в статье [101].

Дифференциальное уравнение для h^{2t}

Для положительной гармонической функции φ на верхней полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$, такой что $\varphi(\infty) = 0$, положим

$$\varphi_{[t]}(x) := \varphi(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Иначе говоря, мы записываем так след функции ϕ на прямой $\{(x,t) :\ x \in \mathbb{R}\}$.
Представим теперь ненадолго, что найдется *регулярное семейство интегральных операторов* B_t с ядрами $b_t : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, действующих на$C^\infty_0(\mathbb{R})$, причем на конкретной функции $u_{[t]}$ они дают

$$B_t\left[u_{[t]}\right] := \left(h^{2t}_u\right)_{[t]}, \quad t > 0. \tag{I.67}$$

Пусть заодно для каждого $\varepsilon > 0$ нам дано еще одно семейство операторов $\Psi_t = \Psi_{t,\varepsilon}$ (мы обыкновенно опускаем второй индекс) с *положительными ядрами* ψ_t, которые удовлетворяют следующим условиям

$$\Psi_\theta \left[\varphi_{[t]}\right] \le C\Psi_t \left[\varphi_{[t]}\right], \quad \forall\varphi \text{ and } 0 < \theta \le t \le 1, \tag{I.68a}$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t} \left(\Psi_t \left[\varphi_{[t]}\right]\right) = \varepsilon\Psi_t \left[B_t \left[\varphi_{[t]}\right]\right], \quad 0 < t < 1. \tag{I.68b}$$

Положим теперь $g_t := (h_u^{2t})_{[t]}$ и заметим, что из положительности u, Ψ_t, B_t следует, что для всех $0 < \theta \le \delta \le 1$ мы имеем

$$\begin{aligned}&\Psi_1 \left[u_{[1]}\right] \ge \Psi_1 \left[u_{[1]}\right] - \Psi_\delta \left[u_{[\delta]}\right] = \varepsilon \int_\delta^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\Psi_t \left[u_{[t]}\right]\right) dt = \varepsilon \int_\delta^1 \Psi_t \left[B_t \left[u_{[t]}\right]\right] dt = \\ &\varepsilon \int_\delta^1 \Psi_t[g_t]\, dt \ge \frac{\varepsilon}{C} \int_\delta^1 \Psi_\theta[g_t]\, dt = \frac{\varepsilon}{C}\Psi_\theta \left[\int_\delta^1 g_t\, dt\right].\end{aligned} \tag{I.69}$$

Грубо говоря, это рассуждение уже намекает на то, что усредненная вариация $\operatorname{Mvar} u = \int_0^1 g_t\, dt$ конечна во многих точках. нам нужно больше, соответственно мы и требуем больше от семейства Ψ_t. Именно, мы дополнительно предположим, что ядро ψ_t обладает единичной массой

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_t(x,\xi)\, d\xi \equiv 1,$$

то есть оператор Ψ_t^* отображает пространство вероятностных мер на $\mathbb{R}$ в себя. Более того, зафиксируем любую гладкую относительно меры Лебега вероятностную меру ν на $\mathbb{R}$ – гауссова мера вполне подойдет. Положим далее $\nu_t := \Psi_t^*[\nu]$, $0 < t \le 1$ (напомним, что ν_t зависит еще от параметра ε), и потребуем, чтобы

a. *существовали положительные константы c_1, c_2, такие что для любого $r > 0$*

$$\nu_t(I) \le c_1 r^{1-c_2\varepsilon} \tag{I.70}$$

для каждого интервала $I \subset \mathbb{R}$ длины $|I| = r$;

b. *Для каждого интервала I мера ν_t нагружает I положительной массой при достаточно малых значениях $\varepsilon < \varepsilon_I$.*

обеспечив себе все вышеуказанные условия, нам только остается проинтегрировать (I.69) по мере ν, чтобы получить

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_1 \left[u_{[1]}\right] d\nu \ge \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{C}\Psi_\theta \left[\int_\delta^1 g_t\, dt\right] d\nu = \frac{\varepsilon}{C} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_\delta^1 g_t\, dt\right) \Psi_\theta^*[\nu].$$

Перейдем к пределу по δ и получим

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{Mvar}_u\, d\nu_0 \le \frac{C}{\varepsilon},$$

так как функция $u_{[1]}$ ограничена, а начальные данные ν представляют из себя гладкую вероятностную меру. Здесь под ν_0 мы понимаем слабый предел мер ν_θ. Оценки на размерность носителя $\operatorname{supp}\nu_0$ немедленно следуют из a и b.

Как построить такие операторы

Обширный набор свойств, который мы требуем от семейств B_t и Ψ_t, может показаться случайным, но это на самом деле не так. Мы попросту выписываем формулу для B_t, а затем строим решение дифференциального уравнения I.68b, добывая все оставшиеся свойства по ходу доказательства. К сожалению операторы B_t обычно не коммутируют, так что мы не можем сразу выписать решение в виде экспоненты (в духе [27]). Мы, следовательно, вынуждены непосредственно строить решение уравнения, в сущности как сумму Римана (или скорее произведение, – наше решение есть вариант мультипликативного интеграла).
Итак, нам надо проверить три основных факта: существование решения Ψ_t, его положительность, и еще 'фокусирующее' свойство (I.68a). Все они обеспечиваются дополнительной сверткой с ядром Пуассона в определении $\operatorname{Mvar} u$ и неоднократным применением неравенства Гарнака. Подчеркнем еще раз, что наш выбор полуплоскости в качестве области не имеет значения и обусловлен только вопросами удобства изложения.

Дальнейшие комментарии

В отличие от предыдущих тем работы, здесь мы работаем в рамках 'непрерывного' анализа. Более того, можно сказать, что мы решили отойти от дискретных идей, неявно присутствовавших в [15] (множество $\mathcal{B}(u)$ может быть описано и в терминах всплеск-разложения функции u). Помимо этого, самая простая переформулировка нашей задачи на дискретном языке оказывается заодно и самой тривиальной, и имеет смысл для более сложно устроенных функций (см. [18]). Тем не менее, было бы очень интересно окончательно исследовать уравнение (I.68a). Пока оно не до конца поддается анализу, и подходящая дискретная модель могла бы принести здесь значительную пользу.

Первые шаги в этом направлении были сделаны в работе [111], где изучалось множество точек Бургейна для функции u специального вида – *гармонической меры канторовского множества E* на единичном интервале. Описание таких точек дано в терминах диадической кодировки E, [111, Теорема 1].

Теорема I.23 *Пусть $\{q_j\} \in \ell^1$ – последовательность положительных чисел, а $E \subset [0,1]$ – множество канторовского типа, порожденное $\{q_j\}$. Иными словами, на каждом шаге k построения множества E мы выкидываем в точности q_k-ую часть сегмента предыдущего поколения (суммируемость $\{q_j\}$ обеспечивает положительность $|E|$). Для каждой точки $x \in E$ существует ее естественная кодировка в виде последовательности нулей и единиц, такую последовательность мы обозначаем через $\kappa(x) = (\kappa_1(x), \kappa_2(x), \dots)$. Тогда точка $x_0 \in E$ – точка Бургейна гармонического продолжения $\mathbb{1}_E$ в верхнюю полуплоскость в точности* *тогда, когда*

$$\sum_{k\geq 1} 2^{n_{k+1}(x_0)-n_k(x_0)} q_{n_k(x_0)-1} < +\infty,$$

здесь $n_k(x_0)$ *суть те моменты, когда траектория* $\kappa(x_0)$ *меняет направления, из* 0 *в* 1 *и наоборот.*

Эта теорема несколько проясняет геометрическое распределение точек Бургейна – они должны лежать 'глубоко' во множестве E. Например те точки, траектория которых стабилизируется, начиная с некоторого шага, точно не будут точками Бургейна , и это можно проверить непосредственно. С другой стороны, если мы меняем направление на каждом шаге, то такая точка обязательно будет точкой Бургейна.

Обзор представленных результатов

В этом параграфе мы, для удобства читателя, соберем ссылки на представленные в работе результаты.

Теоремы I.1, I.2, I.3, I.4, а также лемма I.1 содержатся в работах [107] и (в основном) в [112]. В работе [112] собраны и результаты, составляющие теоремы I.5, I.6 и I.7. Одномерный вариант теоремы I.1 доказан в работе [108], оценка на карлесонову константу в случае бидерева получена в работе [105]. Теорема I.8 доказана в статье [104], а эквивалентность емкостей (теорема I.9) в [2]. Различные примеры собраны в работах [106] и [110].

Теоремы I.10, I.11, I.12, I.13 доказаны в работе [99] (теорема I.11 выводится и из результатов работы [98]).

Теоремы I.14, I.15 доказаны в работе [103], а теоремы I.16, I.17 – в [109].

Многомерные варианты теоремы Картрайт (теоремы I.18, I.19) получены в статье [100].

Наконец, результаты о точках Бургейна, теоремы I.20, I.21, I.22, I.23 содержатся в работах [101] и [111].

Глава 1 Дискретная модель

1.1 Основные сведения

В этом параграфе мы получим несколько результатов о свойствах емкостей на (в основном) d-деревьях и изучим некоторые базовые свойства структуры равновесных мер.

Замечание. В дальнейшем мы считаем, что вес w всегда конечен и положителен. Это условие избавит нас от проблем с применением теории потенциала, в особенности при определении весовой емкости и изучении ее свойств. Иногда, правда, в контрпримерах мы позволяем весу принимать нулевые значения, но мы делаем это исключительно для удобства и на конечных графах. Эти примеры могут быть изменены соответствующим образом, чтобы учесть положительность веса. См., например, раздел 2.6.4.

Для данного множества обыкновенно довольно сложно (если вообще возможно) вычислить его емкость, даже в самом классическом случае $\Gamma = \overline{T}$ и $w \equiv 1$ (который соответствует гармонической емкости на плоскости). Мы приведем несколько базовых примеров.

Предложение 1.1.1 *Пусть w – вес на графе Γ. Тогда емкость одноточечного множества равна*

$$\mathrm{Cap}_w(\{\alpha\}) = \frac{1}{w(\mathcal{P}(\alpha))}, \quad \alpha \in \Gamma. \tag{1.1}$$

Доказательство. Построим минимайзер для (I.7). Очевидно, что носитель экстремальной функции $f_{\{\alpha\}}$ должен лежать на $\mathcal{P}(\alpha)$. Решение вполне элементарно и задается следующей формулой $f(\gamma) = \frac{1}{w(\mathcal{P}(\alpha))} \cdot \mathbb{1}_{(\mathcal{P}(\alpha))}(\gamma)$. □

Следующее предложение касается свойств равновесных мер для подмножеств дерева.

Предложение 1.1.2 *Пусть T – дерево, снабженное весом w, а $E \subset \overline{T}$ – компактное множество. Тогда весовые емкости E и $\mathcal{S}(E)$ совпадают, более того равновесная мера μ_E множества E удовлетворяет соотношению*

$$\mathbf{V}_w^{\mu_E} = 1 \quad \text{q.e. on } \mathcal{S}(E). \tag{1.2}$$

Замечание. Это равновесное свойство типа Фростмана (1.2) определенно не выполняется на d-дереве при $d \geq 2$, собственно в большинстве типичных случаев (за исключением произведений множеств, см. ниже) равновесный потенциал строго больше единицы на значительной части потомков E. Равенство емкостей, тем не менее, верно для любого графа.

Доказательство. Доказательство следует почти сразу. Пусть $\tilde{E}$ – множество максимальных элементов E (в смысле отношения порядка на графе), т.е. $\alpha \in \tilde{E}$, если $\alpha \in E$ и не существует $\beta \in E$, $\beta > \alpha$. Тогда $\mathcal{S}(\tilde{E}) = \mathcal{S}(E)$ и в силу монотонности имеем $\mathbf{I}_w f(\alpha) \geq \mathbf{I}_w f(\beta)$ для $\tilde{E} \ni \alpha \geq \beta$. Оказывается, что все 'важные' с точки зрения потенциала точки содержатся в точности в $\tilde{E}$, поэтому если функция f допустима для $\tilde{E}$, то она допустима и для $\mathcal{S}(E)$. С другой стороны, $\tilde{E} \subset \mathcal{S}(E)$, стало быть емкость второго множества не меньше емкости первого.

Для (1.2) можно считать, что $E = \mathcal{S}(E)$ в силу рассуждения выше. Чуть ниже, в предложении 1.1.4, мы покажем, что принцип максимума выполняется на дереве с константой 1. Следовательно общая теорема Фростмана B утверждает, что $\mathbf{V}_w^{\mu_E} \leq 1$ вне $\operatorname{supp} \mu_E$. С другой стороны, по той же теореме $\mathbf{V}_w^{\mu_E} \geq 1$ квази всюду на E.

□

Следующая оценка, хоть и имеет довольно специальную природу, окажется полезной нам впоследствии – d-деревья с экспоненциальными весами типа произведения служат естественной моделью для весовых пространств Харди-Соболева на полидиске.

Предложение 1.1.3 *Пусть Γ – d-дерево $\overline{T}^d$, и пусть w – экспоненциальный вес типа произведения*

$$\begin{aligned} &w(\alpha) = w_1(\alpha_1) \cdot \dots \cdot w_d(\alpha_d), \quad \alpha_k \in T \\ &w_k(\alpha_k) := 2^{(1-s_k)|\alpha_k|}, \quad 0 < s_k \leq 1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Тогда емкость остова $(\partial T)^d$ строго положительна. Если же один из параметров s_k обнуляется (или отрицателен), то емкость остова равна нулю.

Емкость произведения множеств равна произведению координатных емкостей,

$$\mathrm{Cap}_w(E) = \prod_{k=1}^{d} \mathrm{Cap}_{w_k}(E_k), \quad E = \prod_{k=1}^{d} E_k,\ \overline{T} \supset E_k \text{ - компакт.} \tag{1.4}$$

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы мы сошлемся на теорему I.8, которая утверждает, что емкость множества (например корня) и его проекции на остов (т.е. всего остова в данном случае) сравнимы. Емкость корня очевидно положительна.

Для быстро растущих весов, т.е. в точности когда один из параметров s_k неположителен, мы сначала оценим емкость произведений.

Если f_{E_k} – экстремайзер для k-го координатного множества, то функция $\prod_{k=1}^{d} f_{E_k}$ допустима для E, т.е.

$$\sum_{\alpha \geq \omega} w(\alpha) \prod_{k=1}^{d} f_{E_k}(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{d} \sum_{\alpha_k \geq \omega_k} \prod_{k=1}^{d} w_k(\alpha_k) f_{E_k}(\alpha_k) \geq 1, \quad \omega \in E.$$

С другой стороны, как мы уже видели, одномерный равновесный потенциал принимает в точности единичные значения не только на носителе равновесной меры, но и квази всюду на множестве E_k. Следовательно, если μ – произведение равновесных мер для координатных

множеств E_k, то его d-весовой потенциал $\mathbf{V}_w^\mu$ тоже равен 1 квази всюду на $E = \prod_{k=1}^d E_k$. Стало быть, он не что иное как равновесный потенциал для всего множества E.
Пусть теперь вес w растет слишком быстро на дереве T, т.е. $w(\alpha) \geq 2^{|\alpha|}$ для $\alpha \in T$. Если μ – произвольная ненулевая мера на ∂T, то $\mathbf{I}^*(o) = |\mu| > 0$, и

$$\mathbf{I}^*\mu(\alpha) = \mathbf{I}^*\mu(\alpha^1) + \mathbf{I}^*\mu(\alpha^2),$$

где α^i суть двое детей α. Но тогда, для двух ближайших потомков α_1^1, α_1^2 мы имеем

$$(\mathbf{I}^*\mu(\alpha_1^1))^2 w(\alpha_1^1) + (\mathbf{I}^*\mu(\alpha_1^1))^2 w(\alpha_1^2) \geq 2\frac{1}{2}\left(\mathbf{I}^*\mu(\alpha_1^1) + \mathbf{I}^*\mu(\alpha_2^1)\right)^2 = (\mathbf{I}^*(o))^2.$$

Итерируя, получаем что для любого множества уровня $k+1$ мы имеем

$$\sum_{j=1}^{2^{k+1}} (\mathbf{I}^*\mu(\alpha_{k+1}^j))^2 w(\alpha_{k+1}^j) \geq 2^{k+1} \sum_{j=1}^{2^{k+1}} (\mathbf{I}^*\mu(\alpha_{k+1}^j))^2 \geq$$
$$2^k \sum_{j=1}^{2^k} (\mathbf{I}^*\mu(\alpha_k^j))^2 \geq \cdots \geq |\mu|^2.$$

Стало быть энергия меры μ бесконечна,

$$\sum_{\alpha \in T} (\mathbf{I}^*\mu(\alpha))^2 w(\alpha) = \infty.$$

Для оценки емкости $(\partial T)^d$ мы используем оценку произведения множеств выше. Предложение доказано. □

Замечание. Порядок роста $2^{|\alpha|}$ представляет критическую точку на шкале роста, он соответствует тому росту веса, для которого применение теории потенциала теряет смысл. Как мы увидим ниже, это соображение имеет параллели в шкале пространств Харди-Соболева на диске, где левый конец шкалы соответствует классическому пространству Харди $H^2(\mathbb{D})$, и именно в нем неприменимы условия емкостного типа. Карлесоново условие для $H^2(\mathbb{D})$ записывается теперь с помощью меры Лебега, которую можно интерпретировать как критическую бесселеву емкость на $\mathbb{T}$ (также на левом конце соответствующей шкалы).

Теория потенциала на дереве ведет себя аналогично классической теории на плоскости (соответственно бесселевы потенциалы моделируются дискретными потенциалами с подходящим выбором веса w). В бипараметрической версии, с другой стороны, даже в случае $w \equiv 1$, накапливаются различия. Следующий результат раскрывает часть подробностей.

Предложение 1.1.4 *Пусть w – вес на двоичном дереве T, а μ – мера на границе $\overline{T}$ с конечной w-энергией. Тогда максимум весового потенциала достигается на носителе меры,*

$$\sup_{\tau \in \operatorname{supp} \mu} \mathbf{V}_w^\mu(\tau) = \sup_{\tau \in \overline{T}} \mathbf{V}_w^\mu(\tau). \tag{1.5}$$

Кроме того, если $f : T \to \mathbb{R}_+$ супераддитивна, т.е. $f(\alpha) \geq f(\alpha^-)+f(\alpha^+)$ для любой вершины α и двух ее детей $\alpha^\pm$, а ν – мера с конечной энергией, такая что $\mathbf{I}_w f \geq \mathbf{V}^\nu_w$ на носителе меры ν, то то же неравенство выполняется во всех вершинах,

$$\mathbf{I}_w f(\tau) \geq \mathbf{V}^\nu_w(\tau), \quad \tau \in \overline{T}. \tag{1.6}$$

С другой стороны, если $w \equiv 1$ – вес на бидереве T^2, то, вообще говоря, оба принципа – максимума и подчинения – неверны, даже для равновесных мер. Иначе говоря, для любого числа N найдется такое множество E, что максимум его равновесного потенциала μ_E больше N, в то время как $\mathbf{V}^{\mu_E} = 1$ на $\operatorname{supp}\mu_E$.

Доказательство. **Принцип максимума**

Достаточно проверить оценку (1.5) во внутренности дерева (т.е. для вершин $\tau \in T$), так как для любой граничной точки $\beta \in \partial T$ мы имеем $\mathbf{V}^\mu_w(\beta) = \sup_{\tau>\beta}\mathbf{V}^\mu_w(\alpha)$. Пусть теперь найдется такая вершина $\beta \in T \setminus \operatorname{supp}\mu$, что

$$\mathbf{V}^\mu_w(\beta) > \mathbf{V}^\mu_w(\alpha), \quad \alpha \in \operatorname{supp}\mu.$$

Мы немедленно видим, что $\mathcal{S}(\beta)\bigcap \operatorname{supp}\mu = \emptyset$, поэтому существует единственная вершина $\tau_\beta > \beta$, такая что $\mathcal{S}(\tau_\beta)\bigcap\operatorname{supp}\mu \neq \emptyset$, но $\mathcal{S}(\tau)\bigcap\operatorname{supp}\mu = \emptyset$ для каждой точки $\tau < \tau_\beta$. Тогда $(\mathbf{I}^*\mu)(\tau) = 0$ в таких точках τ, и

$$\mathbf{V}^\mu_w(\beta) = \mathbf{V}^\mu_w(\tau_\beta) + \sum_{\tau_\beta>\tau\geq\beta}(\mathbf{I}^*\mu)(\beta)w(\beta) = \mathbf{V}^\mu_w(\tau_\beta).$$

Монотонность (по отношению к естественному порядку на T) потенциала $\mathbf{V}^\mu_w$ влечет

$$\mathbf{V}^\mu_w(\tau_\beta) < \mathbf{V}^\mu_w(\alpha), \quad \text{for any } \alpha \in \mathcal{S}(\tau_\beta)\bigcap\operatorname{supp}\mu,$$

и мы получаем противоречие.

Принцип подчинения

Как и ранее, достаточно доказать (1.6) только для внутренних точек дерева T. Пусть теперь существует точка $\alpha^0 \in T$, для которой

$$(\mathbf{I}_w f)(\alpha^0) \leq \mathbf{V}^\nu_w(\alpha^0),$$

мы, очевидно, можем считать, что

$$(\mathbf{I}_w f)(\tau) > \mathbf{V}^\nu_w(\tau), \quad \tau > \alpha^0.$$

Мы немедленно видим, что $f(\alpha^0) \leq (\mathbf{I}^*\nu)(\alpha^0)$, поэтому на одном из сыновей α^0 (которого мы обозначаем через α_1) мы имеем $f(\alpha^1) \leq (\mathbf{I}^*\nu)(\alpha^1)$ причем $(\mathbf{I}^*\nu)(\alpha^1) > 0$. Повторяя это рассуждение, мы получаем монотонную последовательность вершин $\{\alpha^k\}_0^\infty$, такую что $f(\alpha^k) \leq (\mathbf{I}^*\nu)(\alpha^k),\ k = 0, 1, \dots$ причем $(\mathbf{I}^*\nu)(\alpha^k) > 0$. Обозначим конечную точку этой геодезической через $\omega = \bigcap_k \mathcal{S}(\alpha^k)$. Очевидно, что $\omega \in \operatorname{supp}\nu$. Следовательно имеем

$$(\mathbf{I}_w f)(\omega) = (\mathbf{I}_w f)(\alpha^0) + \sum_{k=1}^{\infty} f(\alpha^k) w(\alpha^k) \leq \mathbf{V}_w^\nu(\alpha^0) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{I}^*\nu)(\alpha^k) w(\alpha^k) = \mathbf{V}_w^\nu(\omega),$$

и мы пришли к противоречию.

Почему принципы максимума и подчинения не выполняются на бидереве T^2

Принцип максимума рассмотрен в параграфе 2.6.4, он нарушается даже для равновесных мер с носителем на предках одной граничной точки. Нарушение принципа подчинения следует незамедлительно – в качестве меры ν мы можем взять равновесную меру, нарушающую принцип максимума, а в качестве функции f – единичную нагрузку в корне. Поскольку в данном случае $\mathbf{I}wf \equiv 1$, то подчинение выполняется на носителе ν, но оно, очевидно, нарушается на исключительном множестве большого потенциала. □

1.2 Сильное емкостное неравенство в однопараметрическом случае

Ниже мы доказываем простую версию так называемого сильного емкостного неравенства (намного более сложные случаи для размерностей 2 или 3 рассмотрены в параграфе 2.3). Это неравенство представляет из себя дискретную версию известных классических непрерывных результатов для радиальных ядер. Ключевое соображение здесь состоит в том, что на дереве геодезические определяются единственным образом (т.е. на дереве нет циклов в отличие от d-деревьев), что позволяет нам провести рассуждение с помощью сферической замены переменной.

Предложение 1.2.1 *Пусть w – вес на дереве T, а f – неотрицательная функция. Тогда найдется такая константа $C = C(w)$, что*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{2k} \operatorname{Cap}_w(\{\tau \in \overline{T} :\ \mathbf{I}_w f(\tau) \geq 2^k\}) \leq C \|f\|^2_{L^2(T,dw)}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ определим время остановки E_k, состоящее из максимальных (в смысле отношения порядка на дереве) вершин α, таких что $\mathbf{I}wf(\alpha) \geq 2^k$. Иными словами, если $\alpha \in E_k$, то $\mathbf{I}_w f(\alpha) \geq 2^k$, но $\mathbf{I}_w f(p(\alpha)) < 2^k$, где $p(\alpha)$ – единственный родитель вершины α. Мы, очевидно, имеем

$$\{\tau \in \overline{T} :\ \mathbf{I}_w f(\tau) \geq 2^k\} = \{\tau : \tau \in \mathcal{S}(E_k)\} = \{\tau :\ \exists \alpha \in E_k :\ \alpha \geq \tau\}.$$

Если же для какой-то геодезической неравенство $\mathbf{I}_w(\alpha) \geq 2^k$ не выполняется никогда, т.е. время остановки бесконечно, то на этой геодезической попросту нет вершин из множества E_k. Также эти множества не содержат своих строгих потомков, т.е. если $\alpha \in E_k$, то не существует такой вершины $\beta < \alpha$, что $\beta \in E_k$.
Далее, очевидно, мы можем рассматривать множества $F_k := \{\tau \in \overline{T} : \ 2^{k+1} > \mathbf{I}_w f(\tau) \geq 2^k\}$ в левой части (1.7), это всего лишь слегка увеличивает значение константы. Наша цель состоит в построении 'почти разбиения' Ω_k дерева T – такого семейства множеств, что $\bigcup_k \Omega_k = T$, а сами множества Ω_k почти дизъюнктны – каждая точка содержится не более чем в трех таких множествах, и, к тому же, функции $2^{-k+2} f|_{\Omega_k}$ допустимы для множеств F_k. Такое почти разбиение доставит желаемую оценку (1.7), поскольку в этом случае мы имеем

$$\cap_w(F_k) \leq 16 \cdot 2^{-2k} \cdot \|f|_{\Omega_k}\|^2_{L^2 T, dw},$$

следовательно

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{2k} \operatorname{Cap}_w(\{\tau \in \overline{T} : \ \mathbf{I}_w f(\tau) \geq 2^k\}) \leq 16 \sum_k \|f|_{\Omega_k}\|^2_{L^2 T, dw} \leq C \cdot \|f\|^2_{L^2 T, dw}.$$

Существование подобного почти разбиения выводится почти сразу. Именно, рассмотрим какую-либо геодезическую $\mathcal{P}(\omega) = (o, \tau_1(\omega), \tau_2(\omega), \ldots, \omega)$, где ω – некоторая граничная точка на ∂T, и обозначим через n_k номера элементов этой геодезической, соответствующие временам остановки, т.е. $\tau_{n_k}(\omega) \in E_k$. В силу дискретной природы нашей модели может случиться так, что некоторые из этих моментов совпадают, $n_k = n_{k+1} = \cdots = n_{k+i}$ для каких-то k, i – этот эффект возникает в том случае, когда приращение функции $\mathbf{I}_w f$ слишком велико. Тем не менее, множества $\{\tau_j(\omega) : n_k \leq j < n_{k+1}\}$ дизъюнктны, а, стало быть, таковы и множества

$$\bigcup_{\omega\in\partial T} \{\tau_j(\omega) : n_k \leq j < n_{k+1}\} = F_k.$$

Теперь, для произвольного $\omega \in \partial T$ мы положим

$$E_k(\omega) := \{\tau_{n_k - 1}(\omega), \tau_{n_k}(\omega), \ldots, \tau_{n_{k+1}}(\omega)\}, \quad \text{если } \ n_k(\omega) < n_{k+1}(\omega),$$

и

$$E_k(\omega) := \emptyset \quad \text{иначе.}$$

Пусть

$$E_k := \bigcup_{\omega\in\partial T} E_k(\omega).$$

Мы утверждаем, что эти множества и задают искомое почти разбиение. Действительно, легко видеть, что

$$E_k = F_k \bigcup \{ \text{ родители вершин из } F_k \ \} \bigcup \{ \text{ дети вершин из } F_k \ \}.$$

Следовательно любая вершина $\alpha \in E_k$ не может быть родителем или ребенком вершин из других множеств F_j более одного раза, следовательно $\bigcup_k E_k(\omega)$ покрывает $\mathcal{P}(\omega)$ максимум трижды. Наконец, если $E_k(\omega) = \emptyset$, то пусто и множество $F_k(\omega) = F_k \cap \mathcal{P}(\omega)$. Иначе $\tau_{n_{k+1}}(\omega)$ – максимальный элемент $F_{k+1}(\omega)$, так как $\mathbf{I}_w f(\tau_{n_{k+1}-1}(\omega)) < 2^{k+1}$ по определению. Очевидно, что

$$\mathbf{I}_w f|_{E_k(\omega)}(\tau_{n_{k+1}}(\omega)) = \mathbf{I}_w f(\tau_{n_{k+1}}(\omega)) - \mathbf{I}_w f(\tau_{n_k-1}(\omega)) \geq 2^{k+1} - 2^k = 2^k.$$

Следовательно функция $2^{-k} f|_{E_k}$ допустима для множества F_{k+1}, тем самым доказательство завершено. $\square$

Глава 2 Вложения Харди на конечных d-деревьях

2.1 Основные результаты

Напомним основные определения и формулировку основного результата данной Главы. Неравенство вложения Харди есть

$$\int_{\overline{T}^d} (\mathbf{I}_w f)^2\,d\mu \le [w,\mu]_{CE} \int_{T^d} f^2\,dw, \quad f \in L^2(T^d, w), \tag{2.1}$$

а его двойственная версия есть

$$\int_{T^d} (\mathbf{I}^*_\mu \varphi)^2\,dw \le [w,\mu]_{CE} \int_{\overline{T}^d} \varphi^2\,d\mu, \quad \varphi \in L^2(\overline{T}^d, \mu). \tag{2.2}$$

Субъемкостная константа $[w,\mu]_{SC}$, *наследственная карлесонова константа* $[w,\mu]_{HC}$, *карлесонова константа* $[w,\mu]_C$, *box-константа* $[w,\mu]_B$ суть наименьшие возможные числа, которые реализуют неравенства ниже

$$\mu(E) \le [w,\mu]_{SC}\,\mathrm{Cap}_w(E), \quad \forall E \subset \overline{T}^d, \tag{2.3a}$$

$$\mathcal{E}_w(\mu|_E) = \textstyle\sum_{\alpha\in T^d} w(\alpha)(\mathbf{I}^*\mu|_E)^2(\alpha) \le [w,\mu]_{HC}\mu(E), \quad \forall E \subset \overline{T}^d, \tag{2.3b}$$

$$\textstyle\sum_{\alpha\in\mathcal{S}(E)} w(\alpha)(\mathbf{I}^*\mu)^2(\alpha) \le [w,\mu]_C\mu(E), \quad \forall E \subset \overline{T}^d, \tag{2.3c}$$

$$\textstyle\sum_{\alpha\le\beta} w(\alpha)(\mathbf{I}^*\mu)^2(\alpha) \le [w,\mu]_B \mathbf{I}^*\mu(\beta) = [w,\mu]_B\,\mu(\mathcal{S}(\beta)), \quad \forall \beta \in T^d. \tag{2.3d}$$

Основной результат данной главы состоит в том, что для весов типа произведения верны также и обратные неравенства в случае $d = 2$ и $d = 3$.

Теорема 2.1.1 *Пусть (w,μ) – пара вес-мера на d-дереве, причем $d = 2$ или $d = 3$, а вес w имеет структуру произведения, $w(\alpha) = \prod_{k=1}^d w(\alpha_k)$ для произвольной вершины $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in T^d$. Тогда*

$$\begin{aligned} &[w,\mu]_B \gtrsim [w,\mu]_C \gtrsim [w,\mu]_{HC} \gtrsim [w,\mu]_{CE}, \\ &[w,\mu]_{SC} \gtrsim [w,\mu]_{CE}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Замечание. Мы подчеркиваем важность структуры произведения веса w – позже мы предъявим контрпримеры к неравенствам (2.4), в которых, естественно, вес на бидереве T^2 уже не будет произведением весов (эти контрпримеры в несколько ином виде уже возникали в работе [86]). С другой стороны мы не накладываем условий на меру μ, если бы она была произведением мер, то теорема 2.1.1 элементарно выводилась бы из известного однопараметрического результата разделением переменных. Кроме того, вопрос вполне открыт для $d \geq 4$, ниже мы обсудим его более подробно.

В дальнейшем мы работаем на укороченных d-деревьях T_N^d, т.е. на произведениях d экземпляров координатных деревьев, срезанных на уровне N. Это обусловлено тем, что намного удобнее проводить рассуждения на конечных графах (в частности, емкость любого множества на конечном графе строго положительна), а затем переходить к пределу по глубине графа. Подробности предъявлены в параграфе 2.6.1.
В силу вышесказанного мы не уточняем глубину N укороченного d-дерева, мы только следим за тем, чтобы ни одна оценка не зависела от этой глубины. Поэтому мы обычно опускаем нижний индекс в обозначении и пишем T^d вместо T_N^d.

В этой главе мы, в основном, следуем рассуждениям работы [112]. В размерности 2 цепочка неравенств $[w,\mu]_C \gtrsim [w,\mu]_{HC} \gtrsim [w,\mu]_{CE}$ была доказана в [105] (Теоремы 1.8, 1.9) другим способом. Сама последовательность изложения результатов, а также теорема 2.2.2 и лемма 2.2.11 получены в совместной работе с А. Вольбергом, Г. Псаромиликосом и П. Зориным-Краничем, [112].

2.2 Суррогатный принцип максимума

В этом разделе мы строим наш основной инструмент для работы с оценками вида (2.4) – так называемый *суррогатный принцип максимума*. Как мы уже видели ранее, см. предложение 1.1.4, кассический принцип максимума, вообще говоря, не выполняется на T^d, даже для единичного веса $w \equiv 1$. Тем не менее, оказывается, что мы можем установить его ослабленную версию с помощью оценки емкости исключительного множества точек, на которых этот принцип нарушается. В процессе мы получаем и хвостовые оценки энергии меры на T^d при $d = 2$ или $d = 3$. В пределах этого параграфа мы используем символ $\mathbf{I}$ для обозначения оператора Харди на дереве, бидереве или тридереве, в зависимости от контекста. Нам также потребуются и координатные операторы $\mathbf{I_k}$, определямые формулой

$$\mathbf{I}_k f(\alpha) = \sum_{\beta_k \geq \alpha_k} f(\alpha_1, \dots, \beta_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_d), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in T^d,$$

где f – функция на T^d (и здесь точное значение размерности зависит от контекста). Сопряженные операторы $\mathbf{I}_k^*$ определяются аналогично,

$$\mathbf{I}_k^* f(\alpha) = \sum_{\beta_k \leq \alpha_k} f(\alpha_1, \dots, \beta_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_d), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in T^d.$$

Отметим, что эти проекции коммутируют, т.е. для множества $A \subset \{1, 2, \dots, d\}$ имеем

$$\prod_{k \in A} \mathbf{I}_k = \prod_{k \in A} \mathbf{I}_{\sigma(k)}$$

для любой перестановки σ множества A. То же выполняется и для сопряженных операторов $\mathbf{I}_k^*$.

2.2.1 Оценки на дереве

Мы начнем с формулировки и доказательства нескольких вспомогательных утверждений в простейшем случае – на дереве.

Лемма 2.2.1 *Пусть заданы функции $f, g : T \to \mathbb{R}_+$. Тогда*

$$\mathbf{I}f \cdot \mathbf{I}g \le \mathbf{I}(\mathbf{I}f \cdot g + f \cdot \mathbf{I}g).$$

Доказательство. Доказательство состоит в дискретном интегрировании по частям. Действительно, для данной вершины $\alpha \in T$ имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{I}f(\alpha)\mathbf{I}g(\alpha) \le \mathbf{I}f(\alpha)\mathbf{I}g(\alpha) + \mathbf{I}(f \cdot g)(\alpha) = \\ \sum_{\alpha' \ge \alpha,\ \alpha'' \ge \alpha} f(\alpha')g(\alpha'') + \sum_{\alpha' \ge \alpha} f(\alpha')g(\alpha') = \\ \sum_{\alpha' \ge \alpha'' \ge \alpha} f(\alpha')g(\alpha'') + \sum_{\alpha'' \ge \alpha' \ge \alpha} f(\alpha')g(\alpha'') = \\ \sum_{\alpha'' \ge \alpha} \mathbf{I}f(\alpha'')g(\alpha'') + \sum_{\alpha' \ge \alpha} f(\alpha')\mathbf{I}g(\alpha') = \\ \mathbf{I}(\mathbf{I}f \cdot g)(\alpha) + \mathbf{I}(f \cdot \mathbf{I}g)(\alpha).\end{aligned}$$

□

Предварим следующую лемму необходимыми обозначениями. Для (конечного) дерева T множество детей (т.е. потомков следующего ранга) вершины $\beta \in T$ мы понимаем как набор максимальных элементов в T, которые строго меньше β,

$$\operatorname{ch} \beta := \max \{\beta' \in T : \beta' < \beta\},$$

в частности, если $\beta \in \partial T$, то эта вершина бездетна, $\operatorname{ch} \beta = \emptyset$.

Функцию $g : T \to \mathbb{R}$ мы назовем *супераддитивной*, если для каждой вершины $\beta \in T$ выполняется неравенство

$$g(\beta) \ge \sum_{\beta' \in \operatorname{ch} \beta} g(\beta'),$$

и *аддитивной*, если оно превращается в равенство. Разностный оператор определяется как

$$\Delta g(\beta) := g(\beta) - \sum_{\beta' \in \operatorname{ch} \beta} g(\beta').$$

Подобный выбор обозначений частично мотивирован тем, что если $G = \mathbf{I}g$, то Δg – это попросту дискретный лапласиан функции G.

Лемма 2.2.2 *Пусть T – конечное дерево. Тогда для любой пары функций $f, g : T \to \mathbb{R}$ мы имеем*

$$\sum_{\alpha \in T} f(\alpha) g(\alpha) = \sum_{\alpha' \in T} \Delta f(\alpha') \mathbf{I} g(\alpha'). \tag{2.5}$$

Доказательство. Суммируя по уровням дерева, мы немедленно видим, что

$$f(\alpha) = \sum_{\alpha' \leq \alpha} \Delta f(\alpha').$$

Следовательно

$$\sum_{\alpha} f(\alpha) g(\alpha) = \sum_{\alpha \geq \alpha'} \Delta f(\alpha') g(\alpha) =$$
$$\sum_{\alpha' \in T} \Delta f(\alpha') \sum_{\alpha' \leq \alpha} g(\alpha) = \sum_{\alpha' \in T} \Delta f(\alpha') \mathbf{I} g(\alpha').$$

□

Нам потребуется и другой резльтат типа 'интегрирования по частям', теперь уже для сопряженного оператора $\mathbf{I}^*$.

Лемма 2.2.3 *Пусть задана пара функций $f, g : T \to \mathbb{R}$. Тогда*

$$\mathbf{I}^*(fg) = \mathbf{I}^*(\Delta f \cdot Ig) - f(\mathbf{I}g - g)$$

Доказательство. Для данной вершины β множество $\mathcal{S}(\beta)$ само есть (под) дерево, с корнем в вершине β. Применяя (2.5) к этому дереву, получаем

$$\mathbf{I}(fg)(\beta) = \int_{\mathcal{S}(\beta)} fg = \int_{\mathcal{S}(\beta)} \Delta f \cdot \mathcal{I}(g \mathbb{1}_{\mathcal{S}(\beta)}).$$

Теперь, если $\alpha \in \mathcal{S}(\beta)$, то

$$\mathcal{I}(g \mathbb{1}_{\mathcal{S}(\beta)})(\alpha) = \sum_{\alpha \leq \gamma \leq \beta} g(\gamma) = \sum_{\alpha \leq \gamma} g(\gamma) - \sum_{\beta \leq \gamma} g(\gamma) + g(\beta) =$$
$$\mathbf{I}g(\alpha) - \mathbf{I}g(\beta) + g(\beta),$$

следовательно

$$\mathbf{I}^*(fg)(\beta) = \int_{\mathcal{S}(\beta)} \Delta f \cdot (\mathbf{I}g(\alpha) - \mathbf{I}g(\beta) + g(\beta)) =$$
$$\int_{\mathcal{S}(\beta)} \Delta f \cdot \mathcal{I}g - (\mathcal{I}g(\beta) - g(\beta)) \int_{\mathcal{S}(\beta)} \Delta f =$$
$$\mathcal{I}^*(\Delta f \cdot \mathcal{I}g)(\beta) - (\mathcal{I}g(\beta) - g(\beta)) f(\beta).$$

□

Следствие 2.2.1 *Пусть задана пара функций $f, g : T \to \mathbb{R}_+$. Тогда*

$$\mathbf{I}^*(fg) \leq \mathbf{I}^*(\Delta f \cdot g).$$

2.2.2 Оценки на бидереве

Мы продолжаем наши рассуждения, теперь повышая размерность на единицу, и мы доказываем бипараметрические аналоги утверждений выше. Первое из них составляет аналог леммы 2.2.1.

Лемма 2.2.4 *Пусть $f, g : T^2 \to \mathbb{R}_+$. Тогда*

$$\mathbf{I}f \cdot \mathbf{I}g \leq \mathbf{I}(\mathbf{I}f \cdot g + \mathbf{I}_1 f \cdot \mathbf{I}_2 g + \mathbf{I}_2 f \cdot \mathbf{I}_1 g + f\mathbf{I}g).$$

Доказательство. Поскольку операторы $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ коммутируют, то мы можем применить лемму 2.2.1, получая

$$\mathbf{I}f \cdot \mathbf{I}g = (\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 f)(\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 g) \leq \mathbf{I}_1((\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 f) \cdot \mathbf{I}_2 g + \mathbf{I}_2 f \cdot (\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 g)),$$

и

$$\begin{aligned}&((\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 f) \cdot \mathbf{I}_2 g + \mathbf{I}_2 f \cdot (\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 g)) \leq \\ &\mathbf{I}_2((\mathbf{I}_2\mathbf{I}_1 f) \cdot g + \mathbf{I}_1 f \cdot \mathbf{I}_2 g) + \mathbf{I}_2(\mathbf{I}_2 f \cdot \mathbf{I}_1 g + f \cdot (\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 g)).\end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned}&\mathbf{I}f \cdot \mathbf{I}g \leq \mathbf{I}_1(\mathbf{I}_2((\mathbf{I}_2\mathbf{I}_1 f) \cdot g + \mathbf{I}_1 f \cdot \mathbf{I}_2 g) + \mathbf{I}_2(\mathbf{I}_2 f \cdot \mathbf{I}_1 g + f \cdot (\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 g))) = \\ &\mathbf{I}(\mathbf{I}f \cdot g + \mathbf{I}_1 f \cdot \mathbf{I}_2 g + \mathbf{I}_2 f \cdot \mathbf{I}_1 g + f\mathbf{I}g).\end{aligned}$$

□

Следующие три результата касаются *энергетических оценок* на бидереве. Наша цель здесь состоит в получении оценок емкостей множеств большого потенциала мер, сосредоточенных на множестве малого потенциала.

Лемма 2.2.5 *Пусть задана супераддитивная (по каждой переменной) функция $f : T^2 \to \mathbb{R}_+$ и пусть $w_1 w_2 = w : T^2 \to \mathbb{R}_+$ – вес типа произведения. Предположим также, что* $\operatorname{supp} f \subset \{\mathbf{I}(wf) \leq \delta\}$. *Тогда*

$$\int_{T^2} wf \cdot \mathbf{I}_1(w_1 f) \cdot \mathbf{I}_2(w_2 f) \cdot \mathbf{I}(wf) \leq \delta^2 \int_{T^2} f^2 w.$$

Доказательство. Заметим сразу, что в силу наличия структуры произведения оператор $\mathbf{I}_1$ 'не замечает' координатного веса w_2, то есть $\mathbf{I}_1(wf) = w_2\mathbf{I}_1(w_1 f)$. Мы используем свойство носителя функции f и убираем один из членов в левой части,

$$\int_{T^2} wf \cdot \mathbf{I}_1(w_1 f) \cdot \mathbf{I}_2(w_2 f) \cdot \mathbf{I}(wf) \le \delta \int_{T^2} wf \cdot \mathbf{I}_1(w_1 f) \cdot \mathbf{I}_2(w_2 f) =$$
$$\delta \int_{T^2} w_1 f \cdot \mathbf{I}_1(wf) \cdot \mathbf{I}_2(w_2 f) = \delta \int_{T^2} wf \cdot \mathbf{I}_1^* \left(w_1 f \cdot \mathbf{I}_2(w_2 f)\right) = \tag{2.6}$$
$$\delta \int_{T^2} wf \cdot \mathbf{I}_1^* \left(f \cdot \mathbf{I}_2(wf)\right).$$

В силу следствия 2.2.1 мы видим, что

$$\mathbf{I}_1^*(f \cdot \mathbf{I}_2(wf)) \le \mathbf{I}_1^* \left(\Delta_1 f \cdot \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2(wf)\right).$$

Носитель функции f есть так называемое *up-множество*, т.е. оно содержит всех предков своих элементов, поэтому носитель $\Delta_1 f$ лежит там же, а сама функция неотрицательна, $\Delta_1 f \ge 0$ по супераддитивности f. Следовательно

$$\mathbf{I}_1^* \left(f \cdot \mathbf{I}_2(wf)\right) \le \mathbf{I}_1^* \left(\Delta_1 f \cdot \mathbf{I}(wf)\right) \le \mathbf{I}_1^*(\Delta_1 f \cdot \delta) = \delta f. \tag{2.7}$$

Остается только подставить (2.7) в (2.6). □

Лемма 2.2.6 *В условиях предыдущей леммы мы имеем также*

$$\int_{T^2} w(\mathbf{I}_1(w_1 f))^2 (\mathbf{I}_2(w_2 f))^2 \le 4\delta^2 \int_{T^2} f^2 w.$$

Доказательство. Лемма 2.2.1 и коммутируемость операторов $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ влекут

$$\int_{T^2} w(\mathbf{I}_1(w_1 f))^2 (\mathbf{I}_2(w_2 f))^2 \le 4 \int_{T^2} w\mathbf{I}_1 \left(w_1 f \cdot \mathbf{I}_1(w_1 f)\right) \cdot \mathbf{I}_2 \left(w_2 f \cdot \mathbf{I}_2(w_2 f)\right) =$$
$$4 \int_{T^2} \mathbf{I}_1 \left(w_1 f \cdot \mathbf{I}_1(wf)\right) \cdot \mathbf{I}_2 \left(w_2 f \cdot \mathbf{I}_2(wf)\right) =$$
$$4 \int_{T^2} \mathbf{I}_2^* \left(w_1 f \cdot \mathbf{I}_1(wf)\right) \cdot \mathbf{I}_1^* \left(w_2 f \cdot \mathbf{I}_2(wf)\right) =$$
$$4 \int_{T^2} w\mathbf{I}_2^* \left(f \cdot \mathbf{I}_1(wf)\right) \cdot \mathbf{I}_1^* \left(f \cdot \mathbf{I}_2(wf)\right).$$

Остается лишь применить (2.7) □

Мы, наконец, готовы приступить к доказательству основной леммы о мажоризации энергии на бидереве. Грубо говоря, мы показываем, что если функция f сосредоточена на множестве малого ($\le \delta$) $\mathbb{I}_w$-потенциала самой функции f, то в таком случае оператор $\mathbf{I}_w f$, вообще говоря, довольно неэффективно, в смысле энергии, реализует значения $\mathbb{I}_w f$ на множестве большого ($\ge \lambda \ge 4\delta$) потенциала. Сформулируем теперь точный результат.

Лемма 2.2.7 *Пусть функция $f : T^2 \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям двух предыдущих лемм, пусть также задано число $\lambda \ge 4\delta$. Тогда существует энергетически эффективное перерас-*

пределение $\varphi : T^2 \to \mathbb{R}_+$ массы f, такое что

$$\mathbf{I}(w\varphi)(\alpha) \geq \mathbf{I}(wf)(\alpha), \quad \alpha \in \{\lambda \leq \mathbf{I}(wf) \leq 2\lambda\}, \tag{2.8a}$$

$$\textstyle\int_{T^2} \varphi^2 w \leq C\frac{\delta^2}{\lambda^2} \int_{T^2} f^2 w, \tag{2.8b}$$

где C – некоторая абсолютная константа.

Доказательство. Так как $2\delta\lambda^{-1} \leq \frac{1}{2}$, то мы имеем

$$(\mathbf{I}(wf))\mathbb{1}_{\{\mathbf{I}(wf)\geq\lambda\}} \leq 4\lambda^{-1}\mathbf{I}\left(\mathbf{I}_1(w_1 f)\cdot \mathbf{I}_2(w_2 f)\right),$$

следовательно

$$\begin{aligned}&(\mathbf{I}(wf))\mathbb{1}_{\{\lambda\leq\mathbf{I}(wf)\leq 2\lambda\}} \leq 4\lambda^{-1}\mathbf{I}\left(\mathbf{I}_1(w_1 f)\cdot \mathbf{I}_2(w_2 f)\right)\mathbb{1}_{\{\lambda\leq\mathbf{I}(wf)\leq 2\lambda\}} \leq \\ &4\lambda^{-1}\mathbf{I}\left(\mathbf{I}_1(w_1 f)\cdot \mathbf{I}_2(w_2 f)\cdot \mathbb{1}_{\{\lambda\leq\mathbf{I}(wf)\leq 2\lambda\}}\right).\end{aligned}$$

Положим

$$\varphi := 4\lambda^{-1}\mathbf{I}\left(\mathbf{I}_1(w_1 f)\cdot \mathbf{I}_2(w_2 f)\cdot \mathbb{1}_{\{\lambda\leq\mathbf{I}(wf)\leq 2\lambda\}}\right).$$

Очевидно, функция φ удовлетворяет условию (2.8a). Чтобы получить (2.8b) мы применяем лемму 2.2.6. □

Значение этой леммы состоит в том, что она позволяет оценивать размер 'исключительных множеств'. Другими словами, если рассмотреть меру μ на T^2 с носителем на множестве $\{\mathbf{V}_w^\mu \leq 1\}$ 'малого' потенциала, то множество $E_\lambda = \{\mathbf{V}_w^\mu \geq \lambda \geq 10\}$ точек 'большого' потенциала обыкновенно непусто (в отличие, конечно, от случая $d = 1$). Тем не менее, мы можем оценить сверху емкость такого множества, или, точнее говоря, улучшить тривиальную оценку слабого типа.

Теорема 2.2.1 *Пусть мера μ определена выше. Тогда*

$$\operatorname{Cap}_w E_\lambda \leq \frac{C}{\lambda^4}\mathcal{E}_w[\mu],$$

где C – абсолютная константа.

Замечание. Отметим, что функция $\frac{1}{\lambda}\mathbf{I}^*\mu$ допустима (т.е. $\mathbf{I}\left(\frac{1}{\lambda}\mathbf{I}^*\mu\right) \geq 1$ на E_λ). Из определения емкости сразу следует, что

$$\operatorname{Cap}_w E_\lambda \leq \frac{1}{\lambda^2}\mathcal{E}_w[\mu].$$

Эта оценка очевидна. Мы, однако, можем сказать больше – оказывается, что емкость множества E_λ убывает быстрее предписанной скорости по параметру $\lambda \to \infty$.

Доказательство. Положим $f := \mathbf{I}^*\mu$ и $\delta := 1$. Если $f(\alpha) \neq 0$, то найдется вершина $\beta \leq \alpha$, такая что $\beta \in \operatorname{supp}\mu$. Из наших предположений следует, что $\mathbf{I}_w f = \mathbf{V}_w^\mu(\beta) \leq 1$, следовательно монотонность $\mathbf{I}$ влечет $\mathbf{I}_w f(\alpha) \le 1$. Поэтому

$$\operatorname{supp} f \subset \{\mathbf{I}_w f \le \delta = 1\},$$

и мы попадаем как раз в условия леммы 2.2.7. Мы применяем ее с такими данными: $(f; \delta = 1; \lambda_m = 2^m\lambda)$, получая при этом функции φ_m, $m = 0, 1, \dots$, удовлетворяющие

$$\mathbf{I}_w \varphi_m \ge \mathbf{I}_w f = \mathbf{V}_w^\mu, \quad \text{где } \mathbf{V}_w^\mu \in [2^m\lambda, 2^{m+1}\lambda],$$

что, в свою очередь, означает

$$2^{-m}\lambda^{-1}\mathbf{I}_w \varphi_m \ge 1, \quad \text{где } \mathbf{V}_2^\mu \in [2^m\lambda, 2^{m+1}\lambda].$$

Просуммируем все оценки, полагая $\varphi := \sum_{m\ge 0} 2^{-m}\lambda^{-1}\varphi_m$. Сначала мы получим

$$\mathbf{I}_w \varphi \ge 1, \quad \text{где } \mathbf{V}_w^\mu \in [\lambda, \infty),$$

и также

$$\begin{aligned}
&\int_{T^2} \varphi^2 w \le \left(\lambda^{-1} \sum_{m\ge 0} 2^{-m} \left(\int_{T^2} \varphi_m^2 w\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \le \\
&C\left(\lambda^{-1} \sum_{m\ge 0} \lambda^{-1} 2^{-2m} \left(\int_{T^2} f^2 w\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \le \\
&C'\lambda^{-2} \int_{T^2} f^2 w.
\end{aligned}$$

Так как $f = \mathbf{I}^*\mu$, то

$$\int_{T^2} f^2 w = \int_{T^2} (\mathbf{I}^*\mu)^2 w = \int_{T^2} \mathbf{V}_2^\mu \, d\mu = \mathcal{E}_w[\mu],$$

и доказательство завершено. □

Замечание. Установленная нами скорость убывания порядка λ^{-4} не наилучшая (усложняя рассуждения, мы можем улучшить ее до $e^{-c\sqrt{\lambda}}$ по крайней мере для $w \equiv 1$) С другой стороны известен пример экспоненциального убывания емкости, т.е. существует мера μ, такая что $\mathbf{V}^\mu \le 1$ на $\operatorname{supp}\mu$, при этом следующая нижняя оценка выполняется для некоторой положительной абсолютной константы c:

$$\operatorname{Cap}(\{\mathbf{V}^\mu > \lambda\}) \ge ce^{-2\lambda},$$

см. предложение 1.1.4).

Наконец, мы выведем еще одну оценку энергии, на этот раз для взаимной энергии двух мер. Напомним, что *delta*-срезанный потенциал и энергия определяются как

$$\mathbf{V}^{\mu}_{w,\delta}(\alpha) = \sum_{\beta\geq\alpha:\ \mathbf{V}^{\mu}_{w}(\beta)\leq\delta} w(\beta)\mathbf{I}^*\mu(\beta)$$
$$\mathcal{E}_{w,\delta}[\mu] = \int_{T^2} \mathbf{V}^{\mu}_{w,\delta} d\mu.$$

Лемма 2.2.8 *Пусть задана пара мер μ, ρ на T^2 and $\delta > 0$. Пусть вес $w : T^2 \to \mathbb{R}_+$ имееет структуру произведения. Тогда*

$$\left(\int_{T^2} \mathbf{V}^{\mu}_{w,\delta}\, d\rho\right)^4 \leq 28 \cdot \delta^2 \mathcal{E}_{w,\delta}[\mu]\mathcal{E}_w[\rho]|\rho|^2.$$

Доказательство. Положим $f := \mathbb{1}_{\mathbf{V}^{\mu}_{w}\leq\delta}\mathbf{I}^*\mu$. Тогда имеем

$$\int_{T^2} \mathbf{V}^{\mu}_{w,\delta}\, d\rho = \int_{T^2} \mathbf{I}(fw)\, d\rho \leq |\rho|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{T^2} (\mathbf{I}(wf))^2\, d\rho\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

в силу леммы 2.2.4

$$|\rho|^{\frac{1}{2}} \left(2\int_{T^2} \mathbf{I}\left(\mathbf{I}_1(wf)\cdot\mathbf{I}_2(wf) + (wf)\cdot\mathbf{I}(wf)\right)\, d\rho\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$2^{\frac{1}{2}}|\rho|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{T^2} w\left(\mathbf{I}_1(w_1 f)\cdot\mathbf{I}_2(w_2 f) + (wf)\cdot\mathbf{I}(wf)\right)\mathbf{I}^*\rho\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$2^{\frac{1}{2}}|\rho|^{\frac{1}{2}}\mathcal{E}_w^{\frac{1}{4}}[\rho] \left(\int_{T^2} w\left(\mathbf{I}_1(w_1 f)\cdot\mathbf{I}_2(w_2 f) + (wf)\cdot\mathbf{I}(wf)\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Раскроем скобки, применяя при этом леммы 2.2.5 и 2.2.6, чтобы получить

$$2^{\frac{1}{2}}|\rho|^{\frac{1}{2}}\mathcal{E}_w^{\frac{1}{4}}[\rho] \left(\int_{T^2} w\left(\mathbf{I}_1(w_1 f)\cdot\mathbf{I}_2(w_2 f) + (wf)\cdot\mathbf{I}(wf)\right)^2\right)^{\frac{1}{4}} \leq$$
$$2^{\frac{1}{2}}|\rho|^{\frac{1}{2}}\mathcal{E}_w^{\frac{1}{4}}[\rho]\left(7\delta^2\int_{T^2} f^2 w\right)^{\frac{1}{4}} =$$
$$28^{\frac{1}{4}}|\rho|^{\frac{1}{2}}\mathcal{E}_w^{\frac{1}{4}}[\rho]\delta^{\frac{1}{2}}\mathcal{E}_{w,\delta}^{\frac{1}{4}}[\mu].$$

Доказательство завершено. □

2.2.3 Оценки на тридереве

Мы повторяем большинство оценок предыдущего параграфа для тридерева T^3 (оператор Харди теперь тоже трехмерен). Как и в лемме 2.2.4 мы получаем следующий результат на тридеревьях

Лемма 2.2.9 *Пусть задана пара функций $f, g : T^3 \to \mathbb{R}_+$. Тогда*

$$\mathbf{I}f \cdot \mathbf{I}g \le \mathbf{I}\left(\sum_{A\subseteq\{1,2,3\}} \mathbf{I}_A f \cdot \mathbf{I}_{A^c} g\right),$$

где $\mathbf{I}_A = \prod_{j\in A} \mathbf{I}_j$ – композиция соответствующих координатных операторов Харди.

Доказательство. Доказательство проходит совершенно аналогично лемме 2.2.4. □

Следствие 2.2.2 *Пусть заданы числа $0 < \delta < \frac{\lambda}{4}$ и функция $f : T^3 \to \mathbb{R}_+$, причем* $\operatorname{supp} f \subset \{\mathbf{I}f \le \delta\}$*. Тогда*

$$(\mathbf{I}f)\mathbb{1}_{\lambda\le\mathbf{I}f\le2\lambda} \le 4\lambda^{-1}\left(\sum_{j\in\{1,2,3\}} \mathbf{I}_j f \cdot \mathbf{I}_{\{j\}^c} f \cdot \mathbb{1}_{\mathbf{I}f\le2\lambda}\right),$$

где $\mathbf{I}_{\{j\}^c} = \prod_{k\ne j} \mathbf{I}_k$.

Доказательство. Подставляя $f = g$ в лемму 2.2.9, мы получаем

$$(\mathbf{I}f)^2 \le \mathbf{I}\left(2\sum_{j=1,2,3} \mathbf{I}_j f \cdot \mathbf{I}_{\{j\}^c} f + 2f \cdot \mathbf{I}f\right).$$

Теперь мы применим условие на носитель

$$(\mathbf{I}f)\mathbb{1}_{\lambda\le\mathbf{I}f\le2\lambda} \le \lambda^{-1}\mathbf{I}\left(2\sum_{j=1,2,3} \mathbf{I}_j \cdot \mathbf{I}_{\{j\}^c} + 2\delta f\right) \le$$
$$\lambda^{-1}\mathbf{I}\left(2\sum_{j=1,2,3} \mathbf{I}_j f \cdot \mathbf{I}_{\{j\}^c} f\right) + 2\delta\lambda^{-1}\mathbf{I}f.$$

Поскольку $2\delta\lambda^{-1} \le \frac{1}{2}$, то мы видим, что

$$(\mathbf{I}f)\mathbb{1}_{\lambda\le\mathbf{I}f\le2\lambda} \le 2\lambda^{-1}\mathbf{I}\left(2\sum_{j=1,2,3} \mathbf{I}_j f \cdot \mathbf{I}_{\{j\}^c} f\right) \cdot \mathbb{1}_{\lambda\le\mathbf{I}f\le2\lambda} \le$$
$$2\lambda^{-1}\left(2\sum_{j=1,2,3} \mathbf{I}_j f \cdot \mathbf{I}_{\{j\}^c} f \cdot \mathbb{1}_{\mathbf{I}f\le2\lambda}\right).$$

□

Лемма 2.2.10 (Оценки энергии на T^3) *Пусть функция $f : T^3 \to \mathbb{R}_+$ супераддитивна по каждой переменной, и пусть задан вес $w : T^3 \to \mathbb{R}_+$ со структурой произведения, причем* $\operatorname{supp} f \subseteq \{\mathbf{I}_w f \le \delta\}$*. Тогда для всех $j = 1, 2, 3$ имеем*

$$\int_{T^3} w \cdot \left(\mathbf{I}_j(w_j f) \cdot \mathbb{I}_{\{j\}^c}(w_{\{j\}^c} f)\right)^2 \mathbb{1}_{\mathbf{I}(wf)\le\lambda} \le 2\delta\lambda \int_{T^3} f^2 w,$$

где $w_{\{j\}^c} = \prod_{k\ne j} w_k$.

Доказательство. Не умаляя общности, считаем, что $j = 1$. Тогда в силу леммы 2.2.1 имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{T^3} w \cdot (\mathbf{I}_1(w_1 f) \cdot \mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(w_2w_3f))^2\, \mathbf{I}\mathrm{f} \le \lambda \le \\
&2\int_{T^3} w\mathbf{I_1}\left((w_1 f \cdot \mathbf{I}_1(w_1 f))\right) \cdot (\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(w_2w_3f))^2 \cdot \mathbb{1}_{\mathbf{I}(wf)\le\lambda} = \\
&2\int_{T^3} \mathbf{I}_1\left(w_1 f \cdot \mathbf{I}_1(wf)\right) \cdot (\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(w_2w_3f)) \cdot (\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(wf)) \cdot \mathbb{1}_{\mathbf{I}(wf)\le\lambda} = \\
&2\int_{T^3} w_1 f \cdot \mathbf{I}_1(wf) \cdot \mathbf{I}_1^*\left((\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(w_2w_3f)) \cdot (\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(wf)) \cdot \mathbb{1}_{\mathbf{I}(wf)\le\lambda}\right).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Следствие 2.2.1 влечет

$$\begin{aligned}
&\mathbf{I}_1^*\left((\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(w_2w_3f)) \cdot (\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(wf)) \cdot \mathbb{1}_{\mathbf{I}(wf)\le\lambda}\right) \le \\
&\mathbf{I}_1^*\left(\Delta_1\left(\mathbb{1}_{\mathbf{I}(wf)\le\lambda}\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(w_2w_3f)\right) \cdot \mathbf{I}_1\left(\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(wf)\right)\right).
\end{aligned}$$

Так как множество $\{\mathbf{I}(wf) \le \lambda\}$ – up-множество, а функция f супераддитивна, то $\Delta_1\left(\mathbb{1}_{\mathbf{I}(wf)\le\lambda}\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(w_2w_3f)\right) \ge 0$ и
$\mathbf{I}_1\left(\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(wf)\right) = \mathbf{I}(wf) \le \lambda$ на носителе предыдущей функции. Следовательно

$$\begin{aligned}
&\mathbf{I}_1^*\left((\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(w_2w_3f)) \cdot (\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(wf)) \cdot \mathbb{1}_{\mathbf{I}(wf)\le\lambda}\right) \le \\
&\mathbf{I}_1^*\left(\Delta_1\left(\mathbb{1}_{\mathbf{I}(wf)\le\lambda}\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(w_2w_3f)\right) \cdot \lambda\right) = \\
&\lambda\mathbb{1}_{\mathbf{I}(wf)\le\lambda} \cdot \mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(w_2w_3f).
\end{aligned}$$

Из этой оценки следует

$$\begin{aligned}
(2.9) \le & 2\lambda\int_{T^3} w_1 f \cdot \mathbf{I}_1(wf) \cdot \mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(w_2w_3f) = \\
& 2\lambda\int_{T^3} f \cdot \mathbf{I}_1(wf) \cdot \mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(wf) = 2\lambda\int_{T^3} wf \cdot \mathbf{I}_1^*(f \cdot \mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(wf)).
\end{aligned}$$

Аналогично (2.7) мы видим, что

$$\mathbf{I}_1^*(f \cdot \mathbf{I}_2\mathbf{I}_3(wf)) \le \delta f.$$

Доказательство завершено. □

Следующее утверждение представляет собой трехмерный (или, вернее, трехпараметрический) аналог леммы 2.2.7 (с более медленным убыванием).

Лемма 2.2.11 (Мажоризация энергии на T^3.) *Пусть задана функция $f : T^3 \to \mathbb{R}_+$, супераддитивная по каждой переменной, и вес $w : T^3 \to \mathbb{R}_+$ со структурой произведения. Предположим, что* $\operatorname{supp} f \subseteq \{\mathbf{I}(wf) \le \delta\}$, *и положим $\lambda \ge 4\delta$. Тогда найдется энергетиче-*

ски эффективное перераспределение $\varphi : T^3 \to \mathbb{R}_+$*, такое что*

$$\mathbf{I}(w\varphi)(\alpha) \geq \mathbf{I}(wf)(\alpha), \quad \alpha \in \{\lambda \leq \mathbf{I}(wf) \leq 2\lambda\}, \tag{2.10a}$$

$$\textstyle\int_{T^3} \varphi^2 w \leq C \frac{\delta}{\lambda} \int_{T^3} f^2 w, \tag{2.10b}$$

где C *– абсолютная константа.*

Доказательство. Поскольку $2\delta\lambda^{-1} \leq \frac{1}{2}$, то мы имеем

$$(\mathbf{I}(wf)) \cdot \mathbb{1}_{\lambda \leq \mathbf{I}(wf) \leq 2\lambda} \leq 2\lambda^{-1}\mathbf{I}\left(2 \sum_{j=1,2,3} \mathbf{I}_j(w_j f) \cdot \mathbf{I}_{\{j\}^c}(w_{\{j\}^c} f)\right) \cdot \mathbb{1}_{\lambda \leq \mathbf{I}(wf) \leq 2\lambda}$$

$$2\lambda^{-1}\mathbf{I}\left(2 \sum_{j=1,2,3} \mathbf{I}_j(w_j f) \cdot \mathbf{I}_{\{j\}^c}(w_{\{j\}^c} f) \cdot \mathbb{1}_{\lambda \leq \mathbf{I}(wf) \leq 2\lambda}\right).$$

Следовательно мы получаем (2.10a), а чтобы получить (2.10b), мы применяем лемму 2.2.10. □

Оценка емкости исключительного множества следует как и в двумерном случае, теперь с более медленным убыванием.

Теорема 2.2.2 *Пусть задана мера* μ *на* T^3*, и вес типа произведения* $w : T^3 \to \mathbb{R}_+$*, причем* $\mathbf{V}_w^\mu \leq 1$ *на* $\operatorname{supp}\mu$*. Положим* $E_\lambda := \{\mathbf{V}_w^\mu \geq \lambda \geq 10\}$*. Тогда*

$$\mathrm{Cap}_w E_\lambda \leq \frac{C}{\lambda^3} \mathcal{E}_w[\mu],$$

где C *– абсолютная константа.*

Доказательство. Мы повторяем доказательство теоремы 2.2.1, только теперь мы используем мажоризацию энергии на тридереве, т.е. лемму 2.2.11, вместо 2.2.7. □

Замечание. Как и выше, мы не знаем, точна ли оценка скорости убывания порядка λ^{-3}. Она, в принципе, должна быть хуже для тридерева, но мы не знаем насколько.

Мы продолжаем наше рассуждение оценкой взаимной энергии на тридереве T^3.

Лемма 2.2.12 *Пусть задана пара мер* μ, ρ *на* T^3 *и число* $\delta > 0$*. Пусть* $w : T^3 \to \mathbb{R}_+$ *– вес типа произведения. Тогда*

$$\left(\int_{T^3} \mathbf{V}_{w,\delta}^\mu \, d\rho\right)^3 \leq C \cdot \delta \mathcal{E}_{w,\delta}[\mu] \mathcal{E}_w[\rho] |\rho|. \tag{2.11}$$

Доказательство. Не умаляя общности, мы считаем, что $\mathcal{E}_{w,\delta}[\mu] \neq 0$ и $\rho \not\equiv 0$. Зафиксируем положительное число $\lambda > 0$, точное значение которого будет выбрано позднее. Положим $f := \mathbf{I}^*\mu \cdot \mathbb{1}_{\mathbf{V}_w^\mu \leq \delta}$, эта функция, очевидно, супераддитивна по каждой переменной. Кроме того, имеем $\mathbf{I}(wf) = \mathbf{V}_{w,\delta}^\mu \leq \mathbf{V}_w^\mu \leq \delta$ на $\operatorname{supp} f$, и также $\mathcal{E}_{w,\delta}[\mu] = \int_{T^3} f^2 w$.

Для $m = 1, 0, \ldots$ положим

$$\varphi_m := 4(2^m\lambda)^{-1}\left(\sum_{j=1,2,3}\mathbf{I}_j(w_j f)\cdot\mathbf{I}_{\{j\}^c}(w_{\{j\}^c}f)\cdot\mathbb{1}_{\mathbf{I}(wf)\le 2^{m+1}\lambda}\right).$$

Тогда, применяя следствие 2.2.2 и подставляя wf вместо f, получаем

$$\mathbf{I}(wf)\cdot\mathbb{1}_{2^m\lambda<\mathbf{I}(wf)<2^{m+1}\lambda}\le\mathbf{I}(w\varphi_m),$$

так что из леммы 2.2.10 выводим

$$\int_{T^3}\varphi_m^2 w\le C\frac{\delta}{2^m\lambda}\int_{T^3}f^2w.$$

Следовательно

$$\begin{aligned}\int_{T^3}\mathbf{V}^\mu_{w,\delta}\,d\rho = \int_{\{\mathbf{V}^\mu_{w,\delta}\le\lambda\}}\mathbf{V}^\mu_{w,\delta}\,d\rho+\sum_{m\ge0}\int_{\{2^m\lambda<\mathbf{V}^\mu_{w,\delta}\le 2^{m+1}\lambda\}}\mathbf{V}^\mu_{w,\delta}\,d\rho\le\\
\lambda|\rho|+\sum_{m\ge0}\int_{T^3}\mathbf{I}(w\varphi_m)\,d\rho=\lambda|\rho|+\sum_{m\ge0}w\varphi_m\mathbf{I}^*\rho\le\\
\lambda|\rho|+\sum_{m\ge0}\left(\int_{T^3}\varphi_m^2w\right)^{\frac12}\mathcal{E}_w^{\frac12}[\rho]\le\\
\lambda|\rho|+\sum_{m\ge0}c\left(\frac{\delta}{2^m\lambda}\right)^{\frac12}\mathcal{E}_{w,\delta}^{\frac12}[\mu]\mathcal{E}_w^{\frac12}[\rho]\le\\
\lambda|\rho|+C\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{\frac12}\mathcal{E}_{w,\delta}^{\frac12}[\mu]\mathcal{E}_w^{\frac12}[\rho].\end{aligned}$$

Подставляя $\lambda=(\delta\mathcal{E}_{w,\delta}[\mu]\mathcal{E}_w[\rho])^{\frac13}|\rho|^{-\frac23}$, мы получаем (2.11). □

Следствие 2.2.3 *Пусть задана пара мер μ,ρ на T^3 и положительное число $\delta>0$. Тогда*

$$\int_{T^3}\mathbf{V}^\mu_{w,\delta}\,d\rho\le C_{(2.11)}^{\frac12}\delta^{\frac12}\mathcal{E}_w^{\frac16}[\mu]|\mu|^{\frac16}\mathcal{E}_w^{\frac13}[\rho]|\rho|^{\frac13}.$$

Доказательство. Применяя лемму 2.2.12 дважды, получаем

$$\begin{aligned}\left(\int_{T^3}\mathbf{V}^\mu_{w,\delta}\,d\rho\right)^{\frac13}\le C_{(2.11)}\delta\mathcal{E}_{w,\delta}[\mu]\mathcal{E}_w[\rho]|rho|\le\\
C_{(2.11)}\delta\left(C_{(2.11)}\delta\mathcal{E}_w[\mu]|\mu|\right)^{\frac12}\mathcal{E}_w[\rho]|\rho|,\end{aligned}$$

и доказательство, тем самым, завершено. □

2.2.4 Оценки на d-деревьях (условные)

Мы говорим, что вес w, заданный на d-дереве T^d, удовлетворяет *суррогатному принципу максимума*, если для некоторых чисел $\kappa > 0$, $C < \infty$, произвольных мер $\mu, \rho : T^d \to [0, \infty)$ и числа $\delta > 0$ выполняется

$$\int_{T^d} \mathbf{V}^{\mu}_{w,\delta}\, d\rho \le C\, (\delta|\rho|)^{\kappa}\, (\mathcal{E}_{w,\delta}[\mu]\mathcal{E}_w[\rho])^{\frac{1-\kappa}{2}}\,. \tag{2.12}$$

Для размерностей $d = 1, 2, 3$ каждый вес типа произведения удовлетворяет этому принципу, как мы уже показали выше, причем в этих случаях $\kappa = \frac{1}{d}$, а константа C не зависит от веса w. Это приводит нас к следующей гипотезе

Гипотеза 2.2.1 (Суррогатный принцип максимума для d-деревьев) *Пусть вес w имеет структуру произведения. Тогда w удовлетворяет суррогатному принципу максимума с $\kappa = \frac{1}{d}$, причем константа $C = C(d)$ не зависит от веса w.*

Как и выше, структура произведения веса w имеет огромное значение, поскольку при ее отсутствии легко построить контрпример уже на бидереве T^2, причем соответствующий вес w будет принимать только значения 0 или 1 (и, дополнительно, будет монотонным). Кажется весьма правдоподобным, что суррогатный принцип максимума выполняется и в старших размерностях, однако наши методы доказательства прекращают работать при $d \ge 4$ (отчасти, на самом деле, уже при $d = 3$).

Далее в этом параграфе мы доказываем утверждения по модулю выполнения суррогатного принципа максимума (СПМ). Все константы считаются зависящими от κ, C в (2.12), но не от веса w. Отметим еще раз, что для $d = 1, 2, 3$ результаты верны безусловно.

Принимая $\rho = \mu$ в (2.12), мы получаем следующую лемму.

Лемма 2.2.13 *Пусть вес $w : T^d \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет суррогатному принципу максимума (СПМ). Для произвольной меры μ на T^d и числа $\delta > 0$ имеем*

$$\int_{T^d} \mathbf{V}^{\mu}_{w,\delta}\, d\mu \le C_{(2.12)}^{\frac{2}{1+\kappa}}\, (\delta|\mu|)^{\frac{2\kappa}{1+\kappa}}\, \mathcal{E}_w^{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}}[\mu]. \tag{2.13}$$

Гипотеза 2.2.2 *Для всех натуральных чисел d выполняется*

$$\int_{T^d} \mathbf{V}^{\mu}_{w,\delta}\, d\mu \le C_n\, (\delta|\mu|)^{\frac{2}{d+1}}\, \mathcal{E}_w^{\frac{d-1}{d+1}}[\mu].$$

2.3 Субъемкостное условие

Теперь, когда мы уже проделали подготовительную работу и вывели различные оценки взаимной энергии на d-деревьях, мы готовы приступить к доказательству первого, субъемкостного, условия. Именно, мы доказываем следующее предложение.

Предложение 2.3.1 *Пусть вес w удовлетворяет СПМ, а μ – мера на T^d, удовлетворяющая*

$$\mu(E) \leq C_\mu \operatorname{Cap}_w(E), \quad \forall E \subset T^d. \tag{2.14}$$

Тогда для любой функции $f : T^d \to \mathbb{R}_+$ имеем

$$\int_{T^d} (\mathbf{I}_w f)^2 \, d\mu \leq C' \int_{T^d} f^2 w, \tag{2.15}$$

где константа C' зависит только от C_μ и $C_{(2.12)}$. Иными словами, $[w,\mu]_{SC} \gtrsim [w,\mu]_{CE}$.

Мы проводим доказательство в несколько шагов, следуя, в основном, идеям из [1, Глава 7]. Во-первых, мы модифицируем левую часть (2.15) с помощью субъемкостного условия, получая так называемое *сильное емкостное неравенство*, доказательство которого и составляет основную часть нашего рассуждения. Далее, мы отделяем ℓ^2-норму функции f, сводя (2.15) к оценкам множеств уровня $\mathbf{I}_w f$. Затем мы применяем (2.12), чтобы убедиться в том, что энергетическое скалярное произведение двух равновесных мер оценивается через емкости соответствующих множеств. Это составляет ключевое место доказательства. Наконец, мы показываем, что взаимная энергия множеств уровня (вернее говоря их равновесных мер) сконцентрирована на диагонали.

2.3.1 Доказательство предложения 2.3.1: сильное емкостное неравенство

Предположим, что меры w, μ удовлетворяют условию данного предложения, и рассмотрим произвольную (неотрицательную) функцию f из $L^2(T^d, w)$. Для данного числа $k \in \mathbb{Z}$ положим

$$E_k := \{\alpha \in T^d : \ \mathbf{I}_w f(\alpha) > 2^k\}.$$

Переписывая левую часть неравенства (2.15) с помощью функции распределения (или используя 'сферические' координаты, порожденные множествами уровня $\mathbf{I}_w f$), и применяя субъемкостное условие (2.14), мы получаем

$$\int_{T^d} (\mathbf{I}_w f)^2 \, d\mu \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{2k} \mu(E_k) \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{2k} \operatorname{Cap}_w(E_k).$$

Нам остается доказать следующую оценку (сильное емкостное неравенство)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{2k} \operatorname{Cap}_w(E_k) \lesssim \int_{T^d} f^2 w. \tag{2.16}$$

Оставшая часть доказательства и посвящена этому неравенству.

Замечание. Отметим еще раз, что так называемое слабое емкостное неравенство

$$2^{2k} \operatorname{Cap}_w(E_k) \leq \int_{T^d} f^2 w$$

совершенно тривиально, верно для всех весов и d-деревьев, и следует немедленно из определения емкости.

2.3.2 Отделение функции f

Обозначим равновесную меру для множества E_k через μ_k. Нам потребуются следующие свойства равновесных мер.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cap}_w(E_k) = |\mu_k| = \mathcal{E}_w[\mu_k] \\ &\mathbf{V}_w^{\mu_k} = 1 \ \text{ on } \operatorname{supp}\mu_k \\ &\mathbf{V}_w^{\mu_k} \geq 1 \ \text{ on } E_k. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Левая часть неравенства (2.16) переписывается как

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{2k}\,\mathrm{Cap}_w(E_k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \int_{T^d} 2^k\,d\mu_k \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \int_{T^d} \mathbf{I}_w f\,d\mu_k =$$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \int_{T^d} f w \mathbf{I}^*\mu_k = \int_{T^d} f w \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \mathbf{I}^*\mu_k\right) \leq$$
$$\left(\int_{T^d} f^2 w\right)^{\frac12} \left(\int_{T^d} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \mathbf{I}^*\mu_k\right)^2 w\right)^{\frac12}$$

Отсюда мы выводим, что оценка (2.16) следует из

$$\int_{T^d} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \mathbf{I}^*\mu_k\right)^2 w \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{2k}\,\mathrm{Cap}_w(E_k) = \int_{T^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{2k} \left(\mathbf{I}^*\mu_k\right)^2 w, \tag{2.18}$$

или, иными словами, главная часть в (2.18) лежит на диагонали.

2.3.3 Оценка диагональной части

Раскрывая левую часть неравенства (2.18), получаем

$$\sum_{k,j\in\mathbb{Z}} 2^{k+j} \int_{T^d} \mathbf{I}^*\mu_k \cdot \mathbf{I}^*\mu_j \cdot w = \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} 2^{k+j} \int_{T^d} \mathbf{V}_w^{\mu_k}\,d\mu_j \leq 2 \sum_{j\leq k\in\mathbb{Z}} 2^{k+j} \int_{T^d} \mathbf{V}_w^{\mu_k}\,d\mu_j$$

Применяя суррогатный принцип максимума (2.12) с данными $\delta = 1$, $\mu = \mu_j$ и $\rho = \mu_k$, мы получаем

$$\int_{T^d} \mathbf{V}_w^{\mu_k}\,d\mu_j \lesssim \mathcal{E}_w^{\frac{1-\kappa}{2}}[\mu_j]\mathcal{E}_w^{\frac{1+\kappa}{2}}[\mu_k] = |\mu_k|^{\frac{1+\kappa}{2}} \cdot |\mu_j|^{\frac{1-\kappa}{2}},$$

так как обе меры μ_k и μ_j – равновесные. Подставляя эту оценку в неравенства выше, и применяя неравенство Гельдера дважды, имеем

$$\sum_{j\le k\in\mathbb{Z}} 2^{k+j}\int_{T^d}\mathbf{V}_w^{\mu_k}\,d\mu_j \lesssim \sum_{j\le k\in\mathbb{Z}} 2^{k+j}|\mu_k|^{\frac{1+\kappa}{2}}\cdot|\mu_j|^{\frac{1-\kappa}{2}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k(1+\kappa)}|\mu_k|^{\frac{1+\kappa}{2}}\cdot 2^{-k\kappa}\sum_{j\le k}2^j|\mu_j|^{\frac{1-\kappa}{2}} \le$$

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{2k}|\mu_k|\right)^{\frac{1+\kappa}{2}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{-k\frac{2\kappa}{1-\kappa}}\left(\sum_{j\le k}2^j|\mu_j|^{\frac{1-\kappa}{2}}\right)^{\frac{2}{1-\kappa}}\right)^{\frac{1-\kappa}{2}} =$$

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{2k}|\mu_k|\right)^{\frac{1+\kappa}{2}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{-k\frac{2\kappa}{1-\kappa}}\left(\sum_{j\le k}2^{j\frac{\kappa}{2}}2^{j(1-\frac{\kappa}{2})}|\mu_j|^{\frac{1-\kappa}{2}}\right)^{\frac{2}{1-\kappa}}\right)^{\frac{1-\kappa}{2}} \le$$

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{2k}|\mu_k|\right)^{\frac{1+\kappa}{2}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{-k\frac{2\kappa}{1-\kappa}}\left(\sum_{j\le k}2^{j\frac{\kappa}{1+\kappa}}\right)^{\frac{1+\kappa}{1-\kappa}}\sum_{j\le k}2^{j\frac{2-\kappa}{1-\kappa}}|\mu_j|\right)^{\frac{1-\kappa}{2}} \lesssim$$

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{2k}|\mu_k|\right)^{\frac{1+\kappa}{2}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{-k\frac{2\kappa}{1-\kappa}}2^{k\frac{\kappa}{1-\kappa}}\sum_{j\le k}2^{j\frac{2-\kappa}{1-\kappa}}|\mu_j|\right)^{\frac{1-\kappa}{2}} =$$

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{2k}|\mu_k|\right)^{\frac{1+\kappa}{2}}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j\frac{2-\kappa}{1-\kappa}}|\mu_j|\sum_{k\ge j}2^{-k\frac{\kappa}{1-\kappa}}\right)^{\frac{1-\kappa}{2}} \lesssim$$

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{2k}|\mu_k|\right)^{\frac{1+\kappa}{2}}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j\frac{2-\kappa}{1-\kappa}}|\mu_j|\cdot 2^{-j\frac{\kappa}{1-\kappa}}\right)^{\frac{1-\kappa}{2}} =$$

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{2k}|\mu_k|\right)^{\frac{1+\kappa}{2}}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{2j}|\mu_j|\right)^{\frac{1-\kappa}{2}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{2k}|\mu_k|.$$

В силу равновесного свойства меры μ_k мы заключаем, что $|\mu_k|$ is just $\mathcal{E}_w[\mu_k] = \int_{T^d}(\mathbf{I}^*\mu_k)^2 w$, следовательно

$$\sum_{k,j\in\mathbb{Z}} 2^{k+j}\int_{T^d}\mathbf{I}^*\mu_k\cdot\mathbf{I}^*\mu_j\cdot w \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{2k}\int_{T^d}(\mathbf{I}^*\mu_k)^2 w,$$

и мы получаем искомую оценку.

Замечание. Сильное емкостное неравенство (которое, в своем первоначальном виде, появилось, видимо, в работе [67]) обыкновенно не выполняется – равно как и суррогатный принцип максимума – в том случае, когда вес не имеет структуры произведения. Собственно говоря, контрпример к суррогатному принципу максимума, работает и для сильного емкостного неравенства.

2.4 Условие Карлесона влечет вложение

В этом разделе мы доказываем два обратных неравенства в (2.4), именно

$$[w,\mu]_{CE} \lesssim [w,\mu]_{HC} \lesssim [w,\mu]_C.$$

Мы начнем со вспомогательного утверждения. Для $E \subset T^d$ положим

$$\mathcal{E}_{w,E}[\mu] := \int_E (\mathbf{I}^*\mu)^2 w.$$

Лемма 2.4.1 *Пусть вес* $w : T^d \to \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет суррогатному принципу максимума* (2.12). *Для данной меры* ν *на* T^d *положим*

$$E := \left\{ \mathbf{V}_w^\nu > (2C_{(2.13)})^{-\frac{1}{\kappa}}] \frac{\mathcal{E}_w[\nu]}{|\nu|} \right\}] \subset T^d.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{w,E}[\nu] = \sum_{\alpha\in E} (\mathbf{I}^*\nu)^2(\alpha) w(\alpha) \geq \frac{1}{2}\mathcal{E}_w[\nu].$$

Доказательство. Положим $\delta := (2C_{(2.13)})^{-\frac{1}{\kappa}} \dfrac{\mathcal{E}_w[\nu]}{|\nu|}$. Применяя лемму 2.2.13, получаем искомое неравенство

$$\mathcal{E}_{w,E}[\nu] = \mathcal{E}_w[\nu] - \mathcal{E}_{w,\delta}[\nu] \geq \mathcal{E}_w[\nu] - C_{(2.13)}(\delta|\nu|)^\kappa \mathcal{E}_w^{1-\kappa}[\nu] = \frac{1}{2}\mathcal{E}_w[\nu].$$

□

Замечание. Смыл этой леммы заключается в том факте, что если срезать энергию меры ν 'достаточно высоко', т.е. на множестве малого, сравнительно со средним значением $\mathbf{V}_w^\nu$, потенциала, то оставшаяся энергия составляет только малую часть полной энергии $\mathcal{E}_w[\nu]$.

Мы теперь готовы приступить к выводу основной оценки. Коротко говоря, идея доказательства выглядит следующим образом. Если константа $[w,\mu]_{HC}$ значительно больше, чем $[w,\mu]_C$ (значение которой, после соответствующей ренормировки, можно принять равным 1), то это означает, что найдется множество E, такое что энергия сужения меры μ на это множество значительно больше его массы. В этом случае из леммы 2.4.1 (т.е., в сущности из оценки хвостовой энергии в лемме 2.2.13) мы заключаем, что энергия $\mu\mathbb{1}_E$ в основном сосредоточена на некотором множестве F предков E. Такое множество при этом не находится 'слишком высоко' на графе, в частности F сравнимо с E в смысле емкости, поэтому, чтобы уменьшить константу $[w,\mu]_C$, нам придется перераспределить массу μ на F, что, в свою очередь, приводит к еще большему дисбалансу между константами $[w,\mu]_{HC}$ и $[w,\mu]_C$. Итерируя эту конструкцию, мы приходим к противоречию. Итак, верна следующая теорема.

Теорема 2.4.1 *Пусть вес* $w : T^d \to \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет суррогатному принципу максимума* (2.12). *Тогда для каждой меры* μ *на* T^d *мы имеем*

$$[w,\mu]_{HC} \lesssim [w,\mu]_C.$$

Доказательство. Не умаляя общности можно считать, что $[w,\mu]_C = 1$. Положим

$$A := [w,\mu]_{HC} = \sup_{E\subset T^d,\ \mu(E)\neq 0} \frac{\mathcal{E}_w[\mu\cdot\mathbb{1}_E]}{\mu(E)}. \tag{2.19}$$

Поскольку граф T^d конечен, то и постоянная A конечна, и существует экстремальное множество E для (2.19). Положим $\nu := \mu \mathbb{1}_E$ и

$$F := \{\mathbf{V}_w^\nu > cA\}$$

для некоторой абсолютной константы c (значение которой выберем чуть позже). Тогда из леммы 2.4.1 следует, что если константа c достаточно мала, то

$$\mathcal{E}_{w,F}[\nu] \geq \frac{1}{2}\mathcal{E}_w[\nu].$$

Следовательно $0 < \mathcal{E}_w[\nu] \leq 2\mathcal{E}_{w,F}[\nu] \leq 2\mathcal{E}_{w,F}[\mu] \leq 2\mu(F)$, в частности $\mu(F) \neq 0$. Поскольку $\mathbf{V}_w^\nu > cA$ на F, имеем

$$cA\mu(F) \leq \int_F \mathbf{V}_w^\nu \, d\mu \leq \mathcal{E}_w^{\frac{1}{2}}[\nu]\mathcal{E}_w^{\frac{1}{2}}[\mu \mathbb{1}_F] \leq (2\mu(F))^{\frac{1}{2}}(A\mu(F))^{\frac{1}{2}}.$$

Неравенство $A \lesssim 1$ следует незамедлительно. □

2.4.1 Наследственное условие Карлесона влечет вложение

Далее мы обращаем неравенство между константой $[w,\mu]_{HC}$ и константой вложения $[w,\mu]_{CE}$. Само по себе наследственное условие Карлесона не очень удобно для использования, оно, однако, может служить удобным шагом в выводе более подходящих условий.

Отметим также, что неравенство $[w,\mu]_{CE} \lesssim [w,\mu]_{HC}$ мы получаем почти немедленно с помощью результатов параграфа 2.3.

Предложение 2.4.1 *Пусть вес $w : T^d \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет суррогатному принципу максимума* (2.12)*, и μ – мера на T^d. Тогда для любого множества $E \subset T^d$ верно*

$$\mu(E) \leq [w,\mu]_{HC}\operatorname{Cap}_w(E).$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное множество $E \subset T^d$, и рассмотрим какую-нибудь допустимую для него функцию f, т.е. такую функцию, что потенциал $\mathbf{I}_w f$ не меньше единицы на E. Положим $A = [w,\mu]_{HC}$. Используя положительность энергии и раскрывая скобки, получаем

$$0 \leq \int_{T^d} (\mathbf{I}^*\mu|_E - Af)^2 w = \sum_{\alpha\in T^d} (\mathbf{I}^*\mu|_E)^2(\alpha)w(\alpha) - \\ - 2A\sum_{\alpha\in T^d} \mathbf{I}^*\mu|_E(\alpha)\cdot f(\alpha)w(\alpha) + A^2\sum_{\alpha\in T^d} f^2(\alpha)w(\alpha).$$

Отсюда, в свою очередь, выводим, что

$$
\begin{aligned}
0 \leq & \left(\sum_{\alpha \in T^d} (\mathbf{I}^* \mu|_E)^2(\alpha) w(\alpha) - A \sum_{\alpha \in T^d} \mathbf{I}^* \mu|_E(\alpha) \cdot f(\alpha) w(\alpha) \right) - \\
& - A \left(\sum_{\alpha \in T^d} \mathbf{I}^* \mu|_E(\alpha) \cdot f(\alpha) w(\alpha) - A \sum_{\alpha \in T^d} f^2(\alpha) w(\alpha) \right) = \\
& \left(\sum_{\alpha \in T^d} (\mathbf{I}^* \mu|_E)^2(\alpha) w(\alpha) - A \int_{T^d} \mathbf{I}_w f \, d\mu|_E \right) - \\
& - A \left(\int_{T^d} \mathbf{I}_w f \, d\mu|_E - A \sum_{\alpha \in T^d} f^2(\alpha) w(\alpha) \right).
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Поскольку функция f допустима для E, и мера $\mu|_E$ сосредоточена на E, имеем $\int_{T^d} \mathbf{I}_w f \, d\mu|_E \geq |\mu|_E|$. Из определения $[w, \mu]_{HC} = A$ следует, что

$$
\sum_{\alpha \in T^d} (\mathbf{I}^* \mu|_E)^2(\alpha) w(\alpha) - A \int_{T^d} \mathbf{I}_w f \, d\mu|_E \leq 0.
$$

Однако второй член в правой части (2.20) должен быть неотрицательным, стало быть

$$
|\mu|_E| \leq A \sum_{\alpha \in T^d} f^2(\alpha) w(\alpha).
$$

Минимизируя по множеству допустимых для E функций, получаем

$$
|\mu|_E| \leq A \operatorname{Cap}_w(E),
$$

и мы получаем искомое неравенство. □

Остается заметить, что в параграфе 2.3 мы уже показали, что субъемкостное условие влечет вложение, т.е. $[w, \mu]_{CE} \lesssim [w, \mu]_{SC}$, отсюда немедленно получаем

$$
[w, \mu]_{CE} \lesssim [w, \mu]_{HC}.
$$

2.5 Тест на одной ячейке

Нам осталось доказать последнее неравенство в (2.4), именно то, которое утверждает, что вложение на самом деле эквивалентно тесту даже на характеристической функции одной ячейки (а не произвольного множества). Общая идея доказательства созвучна рассуждению, примененному для вывода предыдущего неравенства $[w, \mu]_{CE} \lesssim [w, \mu]_C$, однако теперь мы имеем в распоряжении более узкий набор тестовых неравенств, что приводит к значительным затруднениям. Отметим также, что, вообще говоря, подобного рода тесты (т.е. на одной ячейке) очень редко встречаются в мультипараметрическом контексте.

2.5.1 Основная оценка

Предварим доказательства некоторыми новыми обозначениями. В пределах этого параграфа вес w мы считаем зафиксированным на T^d, поэтому мы не пишем его в индексах. Для меры ν на T^d положим

$$\mathbf{V}^{\nu}_{\tau}(\omega) := \textstyle\sum_{\omega\le\beta\le\tau}\mathbf{I}^*\nu(\beta)w(\beta) \tag{2.21a}$$

$$\mathbf{V}_{\varepsilon',\,good}(\omega) := \textstyle\sum_{\beta\ge\omega:\ \mathbf{V}^{\nu}_{\omega}>\varepsilon'}\mathbf{I}^*\nu(\beta)w(\beta). \tag{2.21b}$$

Следующая лемма использует построение 'лестницы' в духе работы [86] для оценки размера срезанных 'хороших' потенциалов.

Лемма 2.5.1 *Пусть $d\ge 2$ и μ – мера на T^d, а вес $w: T^d\to\mathbb{R}_+$ удовлетворяет суррогатному принципу максимума* (2.12). *Предположим также, что $\mathcal{E}[\mu]\le|\mu|$, и*

$$\mathbf{V}^{\mu}\ge\frac{1}{3}\quad\text{on }\operatorname{supp}\mu. \tag{2.22}$$

Тогда для достаточно малого числа ε' имеем

$$\int_{T^d}\mathbf{V}^{\mu}_{\varepsilon',\,good}\,d\mu\gtrsim|\mu|.$$

Доказательство. Достаточно показать, что для некоторых чисел ε' и ε_{d-1} выполняется

$$\mu\left\{\omega\in T^d:\ \mathbf{V}^{\mu}_{\varepsilon',\,good}(\omega)\ge\varepsilon_{d-1}\right\}\ge\frac{|\mu|}{2}.$$

Зафиксируем некоторое число $\varepsilon>0$ (точный выбор значения будет произведен позже), и положим

$$\varepsilon_1:=\varepsilon,\ \ \varepsilon_2:=\varepsilon\cdot\varepsilon_1^{\frac{1}{\kappa}},\ \ \varepsilon_3:=\varepsilon\cdot\varepsilon_2^{\frac{1}{\kappa}},\dots.$$

Из леммы 2.2.13 заключаем

$$\int_{\mathbb{T}^d}\mathbf{V}^{\mu}_{\varepsilon_j}\,d\mu\lesssim\varepsilon_j^{\kappa}|\mu|^{\kappa}\mathcal{E}^{1-\kappa}[\mu]\lesssim\varepsilon_j^{\kappa}\int_{T^d}d\mu$$

для некоторого числа $\kappa>0$. Напомним, что $\mathbf{V}^{\mu}_{\varepsilon_j}(\omega)=\displaystyle\sum_{\omega\le\alpha\in T^d:\ \mathbf{V}^{\mu}\le\varepsilon_j}\mathbf{I}^*\mu(\alpha)w(\alpha)$. Из неравенства Чебышева следует, что

$$\mathbf{V}^{\mu}_{\varepsilon_j}(\omega)\le\frac{1}{10}\left(\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon}\right)^{\kappa} \tag{2.23}$$

для по крайней мере $(1-C\varepsilon^{\kappa})$-части (относительно меры μ) точек ω. Учитывая этот факт, мы теперь рассматриваем только те точки ω, для которых (2.23) выполняется для каждого $j=1,2,\dots,d-1$, причем $\mathbf{V}^{\mu}(\omega)\lesssim 1$. Положим

$$\varepsilon':=\varepsilon\cdot\varepsilon_1\cdot\dots\cdot\varepsilon_{d-1}.$$

Для данной вершины ω положим

$$\mathcal{U} := \{\tau \geq \omega : \mathbf{V}^{\mu}_{\tau}(\omega) > \varepsilon'\} \tag{2.24}$$

и

$$\mathcal{W}_j := \{\tau \geq \omega : \mathbf{V}^{\mu}(\tau) \leq \varepsilon_j\}, \quad 1 \leq j \leq d-1. \tag{2.25}$$

Напомним снова определения множеств предков и потомков вершины, $\mathcal{P}(\alpha) = \{\beta \in T^d : \beta \geq \alpha\}$ и $\mathcal{S}(\beta) = \{\alpha \in T^d : \alpha \leq \beta\}$.

Далее, если $\mathcal{U} \not\subset \mathcal{W}_{d-1}$, то тогда найдется точка $\gamma \notin \mathcal{W}_{d-1}$, такая что $\mathcal{P}(\gamma) \subset \mathcal{U}$. Следовательно

$$\mathbf{V}^{\mu}_{\varepsilon', good}(\omega) \geq \sum_{\gamma' \geq \gamma} \mathbf{I}^* \mu(\gamma') w(\gamma') = \mathbf{V}^{\mu}(\gamma) \geq \varepsilon_{d-1},$$

и в этом случае потенциал в точке ω достаточно велик. Предположим еще, что $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}_{d-1}$. Мы собираемся покрыть множество $\mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{W}_1$ конечным набором множеств вида $\mathcal{S}(\beta)$, где $\beta \in \mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{U}$. Это и приведет к противоречию с (2.22), поскольку в силу (2.23) (2.24) интеграл функции $f := \mathbf{I}^* \mu \cdot w$ мал на $\mathcal{W}_1$, а также и на каждом $\mathcal{S}(\beta)$. Перейдем к подробному изложению.

Для набора координат $J \subset \{1, 2, \dots, d\}$ и точки $\gamma \in T^d$ положим

$$\mathcal{P}_J(\gamma) := \{\beta \in T^d : \beta_j \geq \gamma_j, \, j \in J, \, \beta_j = \gamma_j, \, j \notin J\}.$$

Для множества $J \subset \{1, 2, \dots, d\}$ и вершины $\gamma \in T^d$ определим множество $\mathcal{Q}_J(\gamma) \subset T^d$ следующим образом. Если $|J| = 1$, то тогда $\mathcal{Q}_J(\gamma)$ считается состоящим из единственного максимального элемента множества $\mathcal{P}_J(\gamma) \setminus \mathcal{U}$, в случае, если последнее множество непусто, иначе мы полагаем $\mathcal{Q}_J(\gamma) = \emptyset$. Если же $|J| \geq 2$, то $\mathcal{Q}_J(\gamma)$ есть максимальное множество максимальных элементов $\mathcal{P}_J(\gamma) \setminus \mathcal{W}_{d-|J|+1}$, такое что множества $\mathcal{P}_J(\beta) \setminus \mathcal{W}_{d-|J|+2}$ попарно дизъюнктны для $\beta \in \mathcal{Q}_J(\gamma)$.

Нам потребуется еще и множество $\mathcal{R}_J$, которые мы определяем рекурсивно, $\mathcal{R}_{\emptyset}(\gamma) := \{\gamma\}$, и

$$\mathcal{R}_J(\gamma) := \bigcup_{J' \subset J} \bigcup_{\gamma' \in \mathcal{Q}_J(\gamma)} \mathcal{R}_{J'}(\gamma),$$

здесь мы пробегаем всевозможные подмножества $J' \subset J$ мощности $|J'| = |J| - 1$.

Мы утверждаем, что для каждой вершины $\gamma \in \mathcal{P}(\omega)$ и каждого набора $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$, где $J \neq \emptyset$ верно

$$\bigcup_{\gamma' \in \mathcal{R}_J(\gamma)} \mathcal{S}(\gamma') \supseteq \mathcal{P}_J(\gamma) \setminus \mathcal{W}_{d-|J|+1}, \tag{2.26}$$

где мы полагаем $\mathcal{W}_d := \mathcal{U}$. Докажем включение (2.26) с помощью индукции по мощности J. Для $|J| = 1$ наше утверждение очевидно. Песть теперь набор J, $|J| \geq 2$ зафиксирован, и пусть (2.26) выполняется для всех поднаборов J. Положим

$$\mathcal{F} := \bigcup_{\gamma' \in \mathcal{R}_J} \mathcal{S}(\gamma'), \quad \mathcal{G} := \mathcal{P}_J(\gamma) \setminus \mathcal{W}_{d-|J|+1}.$$

По предположению имеем

$$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{P}_{J'}(\gamma') \setminus \mathcal{W}_{d-|J|+2} \tag{2.27}$$

для каждой вершины $\gamma' \in \mathcal{R}_J(\gamma)$ и каждого поднабора $J' \subsetneq J$. Предположим, что

$$\mathcal{F} \not\supseteq \mathcal{G}. \tag{2.28}$$

Выберем максимальный элемент $\beta \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$. Так как $\mathcal{F}$ есть down-множество (то есть вместе с любой вершиной оно содержит и всех ее потомков), мы убеждаемся в том, что β – максимальный элемент и для $\mathcal{G}$. Итак, выполняется

$$\Big(\mathcal{P}_J(\beta) \bigcap \mathcal{P}_J(\gamma)\Big) \setminus \mathcal{W}_{d-|J|+2} = \emptyset \quad \text{для всех } \gamma' \in \mathcal{Q}(\gamma). \tag{2.29}$$

Действительно, предположим противное, то есть что существует $\beta' \in \Big(\mathcal{P}_J(\beta) \bigcap \mathcal{P}_J(\gamma)\Big) \setminus \mathcal{W}_{d-|J|+2}$, и возьмем наименьшее β' с таким свойством. Поскольку $\mathcal{W}_{d-|J|+2}$ – это up-множество то β' есть минимальный элемент для множества $\mathcal{P}_J(\beta) \bigcap \mathcal{P}_J(\gamma)$. Также, в силу того, что $\beta, \gamma' \in \mathcal{P}_J(\gamma)$, мы видим, что β' есть покоординатный максимум β, γ'. Наконец, так как β и γ' суть два различных максимальных элемента $\mathcal{P}$, мы выводим, что β' совпадает с γ' хотя бы по одной координате, так что $\beta' \in \mathcal{P}_{J'}\gamma'$ для некоторого поднабора $J' \subsetneq H$. Тогда из (2.27) следует, что $\beta' \in \mathcal{F}$, притом это down-множество, с другой стороны $\gamma' \geq \gamma$, следовательно $\gamma \in \mathcal{F}$, и мы приходим к противоречию.

Итак, мы показали, что выполняется (2.29). В свою очередь, отсюда следует противоречие с максимальностью $\mathcal{Q}_J(\gamma)$. Таким образом, предположение (2.28) неверно, и мы получаем (2.26).

Зафиксируем вершину $\gamma \geq \omega$. Для $2 \leq |J| \leq d$ имеем

$$\begin{aligned} 1 \gtrsim \mathbf{V}^\mu(\omega) \geq \mathbf{V}^\mu(\gamma) &\geq \sum_{\beta \in \mathcal{Q}_J(\gamma)} \int_{\mathcal{P}_J(\beta) \setminus \mathcal{W}_{d-|J|+2}} fw \\ &\geq \sum_{\beta \in \mathcal{Q}_J(\gamma)} \Big(\mathbf{I}f(\beta) - \mathbf{I}(f \mathbb{1}_{\mathcal{W}_{d-|J|+2}})(\omega)\Big) \end{aligned}$$

по определению $\beta \in \mathcal{W}_{d-|J|+1}$, и, в силу (2.23),

$$\sum_{\beta \in \mathcal{Q}_J(\gamma)} \left(\varepsilon_{d-|J|+1} - \frac{\left(\frac{\varepsilon_{d-|J|+2}}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}}{10}\right) \gtrsim |\mathcal{Q}_J(\gamma)| \varepsilon_{d-|J|+1}.$$

Следовательно

$$\varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_{d-1} |\mathcal{R}_{1,2,\dots,d}(\omega)| \lesssim 1.$$

Таким образом, из (2.26) следует

$$\mathbf{V}^{\mu}(\omega)-\mathbf{V}^{\mu}_{\varepsilon}=\int_{\mathcal{P}(\omega)\setminus\mathcal{W}_1} fw \leq \sum_{\gamma'\in\mathcal{R}_{1,2,\dots,d}(\omega)}\int_{\mathcal{S}(\gamma')} fw =$$
$$\sum_{\gamma'\in\mathcal{R}_{1,2,\dots,d}(\omega)}\mathbf{V}^{\mu}_{\gamma'}(\omega)\leq$$
$$\varepsilon'|\mathcal{R}_{1,2,\dots,d}(\omega)|\lesssim$$
$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_1\cdot\ldots\varepsilon_{d-1}}=\varepsilon.$$

Применяя (2.23), получаем

$$\frac{1}{3}\leq\mathbf{V}^{\mu}(\omega)=(\mathbf{V}^{\mu}(\omega)-\mathbf{V}^{\mu}_{\varepsilon}(\omega))+\mathbf{V}^{\mu}_{\varepsilon}(\omega)\leq C\varepsilon+\frac{1}{10}.$$

Для достаточно малых значений ε предыдущее неравенство, очевидно, нарушается, поэтому мы приходим к противоречию с предположением $\mathcal{U}\subset\mathcal{W}_{d-1}$. □

2.5.2 Тест на одной ячейке влечет условие Карлесона

Предварим дальнейшие рассуждения еще одним вспомогательным результатом довольно общей природы.

Лемма 2.5.2 (Лемма о балансировке) *Пусть w – вес общего типа, а ν – мера на T^d, такая что*

$$\mathcal{E}[\nu]\geq A|\nu|,$$

для некоторого числа $A>0$. Тогда найдется down-множество $\tilde{E}\subset T^d$, такое что мера $\tilde{\nu}:=\nu\cdot\mathbb{1}_{\tilde{E}}$ удовлетворяет

$$\mathbf{V}^{\tilde{\nu}}\geq\frac{A}{3}\quad\text{on}\ \tilde{E},$$
$$\mathcal{E}[\tilde{\nu}]\geq\frac{1}{3}\mathcal{E}[\nu].$$

Доказательство. Доказательство довольно прямолинейно – мы отбрасываем части носителя меры ν с малым потенциалом, а потом проверяем, что у оставшейся меры сохранилось достаточно энергии. Более подробно, перенормируем меру ν, заменяя ее на $\frac{3\nu}{A}$, чтобы мы могли считать $A=3$. Положим $E_0=T^d$ и $\nu_0:=\nu\mathbb{1}_{E_0}$. Мы проводим индуктивное рассуждение.

$$E_{k+1}:=E_k\setminus\{\mathbf{V}^{\nu_k}\leq 1\},\quad \nu_{k+1}:=\nu\cdot\mathbb{1}_{E_{k+1}}.$$

Последовательность $\{E_k\}$ состоит из down-множеств и убывает, а поскольку граф T^d конечен, то она должна стабилизироваться, начиная с некоторого номера, – $E_m=E_{m+1},\ m\geq M$. Положим $\tilde{\nu}:=\nu_M$ и $\tilde{E}:=E_M$. Первая оценка леммы уже следует из нашего построения, так

как
$$\mathbf{V}^{\tilde\nu} \geq 1 = \frac{A}{3} \quad \text{на } \tilde E.$$
Чтобы оценить остаток энергии, положим $\sigma_k := \nu_k - \nu_{k+1} = \nu_k \cdot \mathbb{1}_{E_k \setminus E_{k+1}}$. Мы имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[\nu] = \int_{T^d} \mathbf{V}^{\nu_0}\, d\nu_0 = \int_{T^d} \mathbf{V}^{\nu_1}\, d\nu_1 + \int_{T^d} \mathbf{V}^{\nu_0}\, d\sigma_0 + \int_{T^d} \mathbf{V}^{\sigma_0}\, d\nu_0 \leq \\ \int_{T^d} \mathbf{V}^{\nu_1}\, d\nu_1 + 2\int_{T^d} \mathbf{V}^{\nu_0}\, d\sigma_0 \leq \mathcal{E}[\nu_1] + 2|\sigma_0| \leq \\ \cdots \leq \mathcal{E}[\nu_M] + 2|\sigma_0| + 2|\sigma_1| + \cdots + 2|\sigma_M| \leq \mathcal{E}[\tilde\nu] + 2|\nu|,\end{aligned}$$

поскольку $\mathbf{V}^{\nu_k} \leq 1$ на $\operatorname{supp}\sigma_k$. С другой стороны, $\mathcal{E}[\nu] \geq 3|\nu|$ по нашему предположению, следовательно
$$\mathcal{E}[\tilde\nu] \geq \frac{1}{3}\mathcal{E}[\nu],$$
и доказательство завершено. □

Теперь мы готовы приступить к доказательству последнего неравенства в (2.4).

Теорема 2.5.1 *Пусть $d \geq 2$ и вес $w : T^d \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет суррогатному принципу максимума* (2.12). *Тогда для любой меры ν на T^d выполняется*

$$[w,\nu]_{HC} \lesssim [w,\nu]_B.$$

Доказательство. После перенормировки мы можем считать, что $[w,\nu]_B = 1$. Пусть $A := [w,\mu]_{HC}$, а множество $E \subset T^d$ таково, что $\mu := \nu\mathbb{1}_E \neq 0$, и $\mathcal{E}[\mu] = A|\mu|$ (такое подмножество существует, например потому, что граф T^d конечен). По лемме 2.5.2 существует подмножество $\tilde E$ множества E, такое что мера $\tilde\mu = \mu\mathbb{1}_{\tilde E}$ удовлетворяет

$$\mathbf{V}^{\tilde\mu} \geq \frac{A}{3} \quad \text{on } \tilde E,$$

и $\tilde\mu \neq 0$. Таким образом, заменяя μ на $\tilde\mu$, мы можем считать, что $\mathbf{V}^{\mu} \geq \dfrac{A}{3}$ на $\operatorname{supp}\mu$.

Применяя лемму 2.5.1 с $\frac{\mu}{A}$ вместо μ, для достаточно малых $\varepsilon, \theta > 0$ имеем

$$\int_{T^d} \mathbf{V}^{\mu}_{\varepsilon A,\, good}\, d\mu \geq 2\theta\mathcal{E}[\mu].$$

Мы утверждаем, что при таких значениях чисел ε и θ на самом деле выполняется

$$\mathcal{E}[\mu] \leq \frac{\theta}{1-\theta} \sum_{\alpha:\, \theta\varepsilon A\mathbb{I}^*\mu(\alpha) \leq \mathcal{E}_\alpha[\mu]} (\mathbf{I}^*\mu(\alpha))^2 w(\alpha). \tag{2.30}$$

Действительно, предположим что вершина α такова, что

$$\theta\varepsilon A\mathbb{I}^*\mu(\alpha) > \mathcal{E}_\alpha[\mu] = \sum_{\omega\leq\alpha} \mathbf{V}^{\mu}_{\alpha}(\omega)\mu(\omega),$$

где $\mathbf{V}^\mu_\alpha(\omega) = \sum\limits_{\beta:\, \omega\le\beta\le\alpha} \mathbf{I}^*\mu(\beta)\cdot w(\beta)$. Мы тогда получаем

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\le\alpha:\, \mathbf{V}^\mu_\alpha(\omega)\le\varepsilon A} \mu(\omega) = \mathbf{I}^*\mu(\alpha) - \sum_{\omega\le\alpha:\, \mathbf{V}^\mu_\alpha(\omega)>\varepsilon A} \mu(\omega) \ge \\ \mathbf{I}^*\mu(\alpha) - \frac{1}{\varepsilon A}\sum_{\omega\le\alpha} \mathbf{V}^\mu_\alpha(\omega)\mu(\omega) \ge \\ (1-\theta)\mathbf{I}^*\mu(\alpha).\end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha:\, \theta\varepsilon A\mathbf{I}^*\mu(\alpha)>\mathcal{E}_\alpha[\mu]} (\mathbf{I}^*\mu(\alpha))^2 w(\alpha) \le \sum_\alpha w(\alpha)\mathbf{I}^*\mu(\alpha)\frac{1}{1-\theta}\sum_{\omega\le\alpha:\, \mathbf{V}^\mu_\alpha(\omega)\le\varepsilon A} \mu(\omega) = \\ \frac{1}{1-\theta}\sum_\omega \mu(\omega) \sum_{\alpha\ge\omega:\, \mathbf{V}^\mu_\alpha(\omega)\le\varepsilon A} w(\alpha)\mathbf{I}^*\mu(\alpha) = \\ \frac{1}{1-\theta}\sum_\omega \mu(\omega)\left(\mathbf{V}^\mu(\omega) - \mathbf{V}^\mu_{\varepsilon A,\, good}(\omega)\right) \le \\ \frac{1-2\theta}{1-\theta}\mathcal{E}[\mu].\end{aligned}$$

Мы получили (2.30).

Далее, из леммы 2.2.13 и того обстоятельства, что $\mathbf{V}^\mu \ge \dfrac{A}{4}$ на $\operatorname{supp}\mu$, получаем

$$\mathcal{E}_{c'A}[\mu] \lesssim (c'A)^\kappa|\mu|^\kappa\mathcal{E}^{1-\kappa}[\mu] \lesssim (c')^\kappa\mathcal{E}[\mu]. \tag{2.31}$$

Считая значение c' достаточно малым, и применяя (2.30) вместе с (2.31), получаем

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}[\mu] \lesssim \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} (\mathbf{I}^*\mu(\alpha))^2 w(\alpha), \quad \text{where} \\ &\mathcal{R} := \left\{\alpha\in T^d:\ \theta\varepsilon A\mathbf{I}^*\mu(\alpha)\le\mathcal{E}_\alpha[\mu],\ \mathbf{V}^\mu(\alpha)\ge c'A\right\}.\end{aligned}$$

Для каждой вершины $\alpha\in\mathcal{R}$ имеем

$$\theta\varepsilon A\mathbf{I}^*\mu(\alpha) \le \mathcal{E}_\alpha[\mu] \le \mathcal{E}_\alpha[\nu] \le [w,\nu]_B\mathbf{I}^*\nu(\alpha) = \mathbf{I}^*\sigma(\alpha),$$

где $\sigma L = \nu\mathbb{1}_F$ и $F := \{\beta\in T^d:\ \exists\alpha\in\mathcal{R},\ \alpha\le\beta\}$. Следовательно

$$A^2\mathcal{E}[\mu] \lesssim \mathcal{E}[\sigma]. \tag{2.32}$$

С другой стороны, из определения A, оценки $\mathbf{V}^\mu \gtrsim A$ на $\operatorname{supp}\sigma$ и неравенства Коши-Буняковского выводим

$$\mathcal{E}[\sigma] \le A|\sigma| \lesssim \int_{T^d} \mathbf{V}^\mu\, d\sigma \le \mathcal{E}^{\frac12}[\mu]\mathcal{E}^{\frac12}[\sigma]. \tag{2.33}$$

Оценка (2.33), в свою очередь влечет $\mathcal{E}[\sigma] \lesssim \mathcal{E}[\mu]$, подставляя это отношение в (2.32), мы видим, что $A \lesssim 1$.

Доказательство завершено $\square$

2.6 Примечания, примеры и контрпримеры

Этот раздел содержит результаты работ [106] и [110]. В нем мы получаем несколько утверждений, которые проясняют особенности поведения весовых потенциалов. Сначала мы докажем, что мы не теряли общности, работая с конечными графами, иначе говоря, мы покажем, как переходить к пределу по глубине d-дерева. Затем мы покажем, что если вес w *не имеет структуры произведения*, то ни одно из утверждений теоремы 2.1.1 не обязано выполняться, даже если вес w принимает только значения 0 или 1. Для этого мы построим наборы мер μ и весов w на конечных бидеревьях T^2 глубины N, такие что невязки между различными константами (тест на ячейке, карлесона, наследственная карлесонова, вложения) растут вместе с N. Эти контрпримеры можно увидеть и в работе [86], собственно это их дискретные аналоги. Кроме того, мы доказываем более общую версию теоремы о мажоризации энергии на 1-дереве, и показываем, что она не распространяется на 2-дерево.

2.6.1 От конечного d-дерева T^d_N к бесконечному $\overline{T}^d$

Мы доказали теорему 2.1.1 для произвольного (в смысле глубины) d-дерева T^d_N (или, что есть то же самое, для пар (w, μ), суженных на T^d_N). В частности мы видим, что ни одно из неравенств в (2.4) не зависит от глубины. Мы утверждаем, что отсюда следует и теорема вложения на бесконечном замкнутом d-дереве.

Действительно, пусть даны мера μ на замкнутом d-дереве $\overline{T}^d$ и вес типа произведения w на внутренности T^d. Мы утверждаем, что верны обратные неравенства (2.4).

Для начала зафиксируем произвольное число $N \in \mathbb{N}$ и рассмотрим сужения веса w и меры μ на T^d_N. Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in T^d$ положим $|\alpha| := \max_{1\leq k\leq d} |\alpha_k|$, где $|\alpha_k| := \#\mathcal{P}(\alpha_k) - 1$ это попросту глубина α_k в соответствующем координатном дереве. Сужение веса производится обычным образом,

$$w_N := w \cdot \mathbb{1}_{T^d_N}.$$

Перенос меры μ на срезанное дерево нужно проводить чуть более аккуратно,

$$\mu_N := \mu \cdot \mathbb{1}_{T^d_N} + \sum_{\alpha : |\alpha| = N+1} \mathbb{1}_\alpha \cdot \mathbf{I}^*\mu(\alpha).$$

Другими словами, мы оставляем неизменной ту часть массы меры μ, которая лежит на T^d_N, а оставшуюся массу μ 'поднимаем' на нижний уровень T^d_N (который состоит из точек глубины N – в точности тех, для которых $|\alpha| = N + 1$) с помощью $\mathbf{I}^*\mu$.

Легко видеть, что

$$\mathbf{I}^*\mu_N(\alpha) \leq \mathbf{I}^*\mu(\alpha), \quad \alpha \in T^d. \tag{2.34}$$

Действительно, для двух различных вершин $\alpha, \beta \in (\partial T_N)^d$ (т.е. для $|\alpha| = |\beta| = N+1$) множества потомков α и β *дизъюнктны*, $\mathcal{S}(\alpha) \cap \mathcal{S}(\beta) = \emptyset$. Следовательно

$$\int_{\mathcal{S}(\gamma)} \mathbb{1}_{|\alpha|\geq N} d\mu = \sum_{\alpha\leq\gamma,\,|\alpha|=N+1} \int_{\mathcal{S}(\alpha)} d\mu,$$

так что для любой вершины $\gamma \in T_N^d$ в (2.34) мы попросту имеем равенство, а для остальных γ левая часть обнуляется (нас эти вершины не интересуют в любом случае).
Аналогично, любой набор потомков вершин

$$E := \bigcup_j \mathcal{S}(\alpha^j), \quad \alpha^j \in T^d, \tag{2.35}$$

удовлетворяет

$$\mu_N(E) = \mu\left(E \cap T_N^d\right)$$

в силу тех же причин. Мы заключаем, что если пара (w, μ) удовлетворяет любому из тест-условий (2.3a) – (2.3d) на бесконечном замкнутом d-дереве, то суженные пары (w_N, μ_N) удовлетворяют им на T_N^d с теми же константами.
Далее, заметим что для $f \in L^2(T^d, dw)$ мы имеем по теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$\lim_{N\to\infty} \int_{T^d} f^2(\tau)\, dw_N(\tau) = \lim_{N\to\infty} \int_{T^d} (f \cdot \mathbb{1}_{T_N^d})^2(\tau)\, dw(\tau) = \int_{T^d} f^2(\tau)\, dw(\tau).$$

Наконец,

$$\lim_{N\to\infty} \int_{T^d} (\mathbf{I}_{w_N} f)^2\, d\mu_N = \lim_{N\to\infty} \int_{T^d} (\mathbf{I}_w f)^2\, d\mu_N = \int_{\overline{T}^d} (\mathbf{I}_w f)^2\, d\mu,$$

поскольку функция $\mathbf{I}_w f$ монотонна в смысле порядка на d-дереве, а I_w-потенциалы поточечно сходятся к граничным значениям

$$\lim_{|\alpha|\to\infty,\, \alpha\geq\omega} \mathbf{I}_w f(\alpha) = \mathbf{I}_w f(\omega), \quad \omega \in \partial T^d.$$

Мы завершили доказательство.

2.6.2 Основа для конструкции контрпримеров

Далее мы считаем, что $d = 2$ и $T^2 = T_N^2$ – конечное (пусть очень глубокое) диадическое бидерево – для построения контпримеров нам достаточно расмматривать самый простой случай. Кроме того, в этом разделе мы будем интерпретировать бидерево T^2 как набор всевозможных диадических прямоугольников, лежащих в единичном квадрате $Q_0 = [0,1]^2$, с длиной стороны как минимум 2^{-N}, упорядоченных по вложению.

Как и ранее, множество минимальных элементов такого бидерева мы обозначаем через $(\partial T)^2$, и оно состоит из квадратов размера $2^{-N} \times 2^{-N}$, а элементы этого множества мы обычно обозначаем буквой ω. Наборы таких точек ω мы обозначаем через $E \subset (\partial T)^2$, мы также отождествляем множество с объединением его элементов, т.е. $Q \subset E$, если Q покрыто элементами из E.

Во всех примерах носитель меры μ лежит внутри единичного квадрата Q_0. Легко видеть, что эта мера может быть рассмотрена и на бидереве, мы просто определяем $\tilde{\mu}(\omega) := \mu(\omega)$ для $\omega \in (\partial T)^2$, и $\tilde{\mu}(Q) := 0$ для $Q \notin (\partial T)^2$. В таком случае $\mathbf{I}^*\tilde{\mu}(Q) = \mu(Q)$. После подобных переобозначений тест (2.3d) для меры μ и веса $w = \{w_Q\}$ принимает следующий вид

$$\sum_{Q \in T^2,\, Q \subset R} \mu^2(Q) w_Q \le C\mu(R), \quad \text{для всех} R \in T^2. \tag{2.36}$$

Условие Карлесона (2.3c) выглядит как

$$\sum_{Q \in T^2,\, Q \subset E} \mu^2(Q) w_Q \le C\mu(E), \quad \text{для всех} E \subset (\partial T)^2, \tag{2.37}$$

наследственное условие Карлесона (2.3b) теперь есть

$$\sum_{Q \in T^2} \mu^2(Q \cap E) w_Q \le C\mu(E), \quad \text{для всех} E \subset (\partial T)^2, \tag{2.38}$$

а вложение (вернее говоря, его двойственная версия) (2.2) становится

$$\sum_{Q \in T^2} \left(\int_Q \varphi \, \mathrm{d}\mu \right)^2 w_Q \le C \int_{Q_0} \varphi^2 d\mu \quad \text{для всех} \varphi \in L^2(Q_0, d\mu). \tag{2.39}$$

2.6.3 Тест на ячейке не влечет условия Карлесона

В известной работе [21] Карлесон построил семейства $\mathcal{R}$ диадических прямоугольников в $Q = [0,1]^2$, удовлетворяющих следующим двум свойствам:

$$\forall R_0 \in T^2, \qquad \sum_{R \subset R_0, R \in \mathcal{R}} m_2(R) \le C_0 m_2(R_0)\,, \tag{2.40}$$

но

$$\sum_{R \in \mathcal{R}} m_2(R) > C_1 m_2(\cup_{R \in \mathcal{R}} R)\,, \tag{2.41}$$

где отношение C_1/C_0, вообще говоря, может принимать любое значение, а m_2 - мера Лебега на плоскости. Выберем $\mu = m_2$, а

$$w_R := \begin{cases} \frac{1}{m_2(R)}, & R \in \mathcal{R}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Мы можем сопоставить левые части (2.40) и (2.41) с левыми частями (2.36) и (2.37) соответственно. Следовательно, условие теста на ячейке (2.36) верно с константой C_0, в то время как условие Карлесона может выполняться только в виде (2.37) $\geq C_1$.

В данном примере вес w уже ведет себя совершенно нерегулярным образом. Можно, впрочем, построить соответствующий контрпример и для $w_R \in \{0,1\}$ для всех R.

2.6.4 Условие Карлесона не влечет наследственное условие

Здесь наша цель состоит в том, чтобы показать, что для пары w, μ общего вида условия Карлесона (2.37) теперь не хватает для вложения (2.39), даже для условия (2.38). Итак, мы доказываем следующее утверждение.

Предложение 2.6.1 *ДЛя произвольного числа $\delta > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$, вес $w : T_N^2 \to \{0,1\}$, и мера μ на ∂T^2, такие что μ удовлетворяет условию Карлесона* (2.37) *с константой $C_\mu = \delta$:*

$$\sum_{Q \subset E} \mu^2(Q) w_Q \leq \delta \mu(E), \quad \text{для всех } E \subset (\partial T)^2, \tag{2.42}$$

но при этом найдется такое множество $F \subset Q_0$, что

$$\sum_{Q \in \mathcal{D}} \mu^2(Q \cap F) w_Q > \mu(F), \tag{2.43}$$

и, следовательно, константа в (2.38) *не меньше* 1.

Мы собираемся предъявить два примера такого рода. Первый пример довольно прост и вдохновлен контрпримером к L^2-ограниченности бипараметрической максимальной функции. В этом случае вес w сосредоточен на очень маленьком подмножестве бидерева. Второй пример более сложно устроен, при этом носитель веса теперь находится на намного большей части бидерева, и, к тому же, он монотонен, $w_R \geq w_Q$ для $R \supseteq Q$. Тем не менее, в носителе w все равно не хватает прямоугольников.

Нам потребуются дополнительные обозначения. Через $\omega_0 := [0, 2^{-N}]^2$ мы обозначим левый нижний квадрат в единичном квадрате. Для диадического прямоугольника $R = [a,b] \times [c,d]$ обозначим через

$$\begin{aligned} R^{+\circ} &:= [(a+b)/2, b] \times [c,d], \\ R^{\circ +} &:= [a,b] \times [(c+d)/2, d], \\ R^{++} &:= [(a+b)/2, b] \times [(c+d)/2, d], \end{aligned}$$

его правую половину, верхнюю половину и верхнюю правую четверть соответственно Мы фиксируем вес w в начале доказательства, поэтому мы опускаем его в индексах вида $\mathbf{V}_w^\mu$, $\mathbf{I}_w$ и т.п.

Простой пример

Положим $Q_i = [0, 2^{-i+1}] \times [0, 2^{-N+i}]$ для $j = i, \ldots, N$. Определим меру μ, присвоив единичную массу квадрату ω_0 и каждому из квадратов Q_i^{++}, в остальных вершинах считаем ее равной 0. Положим

$$w_R := \begin{cases} 1 & \text{если } R \in \{\omega_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_N\}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Итак, мы имеем $N + 1$ элементов w_R веса, равных единице. Для множества $E = \omega_0$ верно

$$\mathcal{E}[\mu|E] = \mu(\omega_0)^2 + \sum_{i=1}^{N} \mu(\omega_0 \cap Q_i)^2 = (N+1) = (N+1)\mu(E).$$

Следовательно, наследственная константа (2.38) не меньше, чем $\geq N + 1$.

Обозначая $Q_0 := \omega_0$, видим, что для $E \subseteq \partial T^2$ имеем

$$\mathcal{E}_E[\mu] = \sum_{R \subset E,\, w_R \neq 0} \mu(R)^2 = \sum_{j: Q_j \subset E} \mu(Q_j)^2.$$

Поскольку $Q_i^{++} \cap Q_j = \emptyset$, разве что $i \in \{0, j\}$, получаем

$$\mathcal{E}_E[\mu] \leq \sum_{j: Q_j \subset E} 2^2 \leq 4\mu(E)$$

Итак, условие Карлесона (2.37) выполняется с константой 4.

Отсутствие принципа максимума играет важную роль

Построим теперь более сложный пример, показывающий, что условие Карлесона может выполняться, зато его наследственная версия неверна. Вес w по-прежнему принимает значения 0 или 1, но его носитель $\mathcal{R}$ теперь есть *up-множество* – оно содержит всех предков прямоугольников из $\mathcal{R}$.

Пример основан на том факте, что потенциалы на бидереве могут нарушать принцип максимума. Мы начнем с построения меры μ с кусочно постоянной плотностью на базовом квадрате, такой что

$$\mathbf{V}^\mu \lesssim 1 \quad \text{на } \operatorname{supp} \mu, \tag{2.44}$$

но при этом

$$\max \mathbf{V}^\mu \geq \mathbf{V}^\mu(\omega_0) \gtrsim \log N. \tag{2.45}$$

Определим набор прямоугольников

$$Q_j := [0, 2^{-2^j}] \times [0, 2^{-2^{-j}N}], \quad j = 1, \ldots, M \approx \log N. \tag{2.46}$$

Теперь положим

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &:= \{R:\ Q_j \subset R \text{ для некоторого } j = 1\dots M\}\\ w_Q &:= \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(Q)\\ \mu(\omega) &:= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{|Q_j^{++}|}\mathbb{1}_{Q_j^{++}}(\omega),\end{aligned} \tag{2.47}$$

где $|Q|$ обозначает общее количество точек $\omega \in (\partial T)^2 \cap Q$, т.е. количество наименьших прямоугольников (квадратов размера $2^{-N} \times 2^{-N}$) в Q.

Заметим, что на Q_j вышеопределенная мера есть по сути равномерное распределение массы $\frac{1}{N}$ на верхней правой четверти Q_j^{++} прямоугольника Q_j (и эти четверти дизъюнктны).

Что доказать (2.44), мы фиксируем $\omega \in Q_j^{++}$ и строим разбиение

$$\mathbf{V}^\mu(\omega) = \mathbf{V}^\mu_{Q_j^{++}}(\omega) + \mu(Q_j^{\circ+}) + \mu(Q_j^{+\circ}) + \mathbf{V}^\mu(Q_j),$$

где в первом члене складываются $\mu(Q)$ (напомним, что в нашем случае $\mathbf{I}^*\mu(Q) = \mu(Q)$ из-за отождествления прямоугольника как вершины графа и как подмножества плоскости) для Q между ω и Q_j^{++}. Легко видеть, что $\mathbf{V}^\mu_{Q_j^{++}}(\omega) \lesssim \frac{1}{N}$ (на левой стороне неравенства суммируется двойная геометрическая прогрессия). Очевидно, $\mu(Q_j^{\circ+}) + \mu(Q_j^{+\circ}) \le \frac{2}{N}$. Нетривиальная часть содержится в следующей оценке

$$\mathbf{V}^\mu(Q_j) \lesssim 1\,. \tag{2.48}$$

Для каждого диадического прямоугольника $R \supseteq \omega_0$ и каждого числа j' имеем

$$\text{либо } Q_{j'} \subseteq R, \text{ либо } Q_{j'}^{++} \cap R = \emptyset. \tag{2.49}$$

Более того, так как стороны прямоугольников Q_j вложены друг в друга, то множество $\{j' : Q_{j'} \subseteq R\}$ есть (целочисленный) интервал, содержащий j. Для целочисленного интервала $[m, m+k]$ положим

$$C^{[m,m+k]} := \{R \supseteq \omega_0 : \{j' : Q_{j'} \subseteq R\} = [m, m+k]\}.$$

Поскольку каждый прямоугольник в $C^{[m,m+k]}$ содержит $[0, 2^{-2^m}] \times [0, 2^{-2^{-m-k}N}]$, то имеем

$$\#C^{[m,m+k]} \le (2^m + 1)(2^{-m-k}N + 1) \lesssim 2^{-k}N. \tag{2.50}$$

Из этого следует, что

$$\mathbf{V}^\mu(Q_j) = \sum_{[m,m+k]\ni j}(\#C^{[m,m+k]})(k+1)\frac{1}{N} \lesssim \sum_{k\ge 0}(k+1)^2 2^{-k}N\frac{1}{N} \lesssim 1. \tag{2.51}$$

Это доказывает (2.48), а, следовательно, и (2.44).

Теперь мы оцениваем величину $\mathbf{V}^\mu(\omega_0)$ снизу. Для этого нам нужна более точная *ниж-*

няя оценка на $\#C^{[m,m+k]}$. Множество $C^{\{j\}}$ содержит все такие прямоугольники R, которые содержат Q_j и содержатся в $[0,2^{-2^{j-1}-1}]\times[0,2^{-2^{-j-1}N-1}]$, поэтому

$$\#C^{\{j\}} \geq 2^{j-1}\cdot 2^{-j-1}N \gtrsim N. \tag{2.52}$$

Следовательно

$$\mathbf{V}^{\mu}(\omega_0) \geq \sum_{j=1}^{M}(\#C^{\{j\}})\frac{1}{N} \gtrsim M. \tag{2.53}$$

Мы доказали (2.45), как только $M \asymp \log N$.

Далее мы предъявим и второй пример меры ν и веса w, таких что выполняется условие Карлесона, но не наследственное условие. Вес w определяется и как (2.47), так что на этот раз он задается характеристической функцией некоторого up-множества. К только что построенной мере μ прибавим еще одно слагаемое,

$$\nu := \mu + \nu|\omega_0,$$

где $\nu|\omega_0$ есть равномерно распределенная по ω_0 мера полной массы $\frac{1}{N}$.

Наследственная константа велика

Выведем сначала нижнюю оценку для наследственной (REC-) константы. Положим $F=\omega_0$. Тогда, в силу (2.52) имеем

$$\mathcal{E}[\nu|F] \geq \sum_{j=1}^{M}(\#C^{\{j\}})\nu(\omega_0)^2 \gtrsim MN\cdot\nu(\omega_0)^2.$$

Это доказывает, что $[w,\nu]_{HC} \gtrsim \nu(\omega_0)\cdot NM = M$.

Карлесонова константа мала

Далее мы удостоверимся в том, что условие (2.37) выполняется с небольшой константой. Мы можем удалить из суммы в левой части (2.37) все прямоугольники $Q\notin\mathcal{R}$. Затем мы можем заменить множество E на объединение оставшихся Q, не меняя левую часть и уменьшая правую часть. Стало быть, мы можем свести нашу задачу к случаю, когда E есть объединение элементов $\mathcal{R}$. В силу (2.49) мы получаем, что для каждого числа j либо верно свойство $Q_j\subseteq E$, либо свойство $Q_j^{++}\cap E=\emptyset$. Положим $\mathcal{J} := \{j : Q_j\subseteq E\}$. Тогда

$$\text{левая часть (2.37)} \leq \sum_{[m,m+k]\subseteq\mathcal{J}}\ \sum_{Q\in C^{[m,m+k]}}\big((k+1)/N+1/N\big)^2. \tag{2.54}$$

В сочетании с (2.50) получаем

$$
\begin{aligned}
\text{левая часть (2.37)} &\lesssim \sum_{[m,m+k]\subseteq\mathcal{J}} 2^{-k}N(k+2)^2(1/N)^2\\
&\lesssim (\#\mathcal{J})/N\\
&\leq \mu(E)\\
&\leq \nu(E),
\end{aligned}
$$

так что $[w,\nu]_C \lesssim 1$.

2.6.5 Наследственное условие не влечет вложение

В этом разделе мы следуем идее рассуждений предыдущих параграфов. Мы также начинаем с квадратов $\{Q_j\}$ и меры μ, но теперь, вместо добавления одноточечной массы в ω_0, мы добавим более нетривиально распределенную массу на базовом квадрате.

Мы определяем $Q_j, \mu, \mathcal{R}, w$ как в предыдущих параграфах. Далее, положим

$$
Q_{0,j} := Q_j, \quad \mu_0 := \mu.
$$

Продолжим, определяя последовательность наборов $\mathcal{Q}_k,\ k = 0, \ldots, K \approx \log M$ диадических прямоугольников следующим образом

$$
\mathcal{Q}_k := \left\{ Q_{k,j} := \bigcap_{i=j}^{j+2^k-1} Q_{0,i},\ j = 1, \ldots, M-2^k \right\},\ k = 1, \ldots, K. \tag{2.55}
$$

Иными словами, $\mathcal{Q}_k$ состоит из пересечений 2^k последовательных элементов базового набора $\mathcal{Q}_0$. Полная мощность набора $\mathcal{Q}_k$ обозначается через $M_k = M - 2^k + 1$.

Для $k = 1, \ldots, K$ положим

$$
\mu_k(\omega) := \frac{2^{-2k}}{N} \sum_{j=1}^{M_k} \frac{1}{|Q_{k,j}^{++}|} \mathbb{1}_{Q_{k,j}^{++}}(\omega), \quad \omega \in (\partial T)^2,
$$

и определим

$$
\mu := \mu_0 + \sum_{k=1}^{K} \mu_k.
$$

Константа вложения велика

Напомним формулировку карлесонова вложения на бидереве.

$$
\int_{(\partial T)^2} (\mathbf{I}(fw))^2 \,\mathrm{d}\mu \leq [w,\mu]_{CE} \int_{T^2} f^2 \cdot w. \tag{2.56}
$$

Мы тестируем это неравенство (2.56) на функции

$$f(R) := \mu_0(R) = \mathbf{I}^*\mu_0(R).$$

Из (2.44) мы выводим

$$\int_{T^2} f^2 \cdot w = \int_{T^2} \mathbf{V}^{\mu_0}\,\mathrm{d}\mu_0 \lesssim |\mu_0| = \frac{M}{N}\,. \tag{2.57}$$

С другой стороны, используя (2.55) и заменяя M на 2^k а (2.53), мы получаем

$$\mathbf{V}^{\mu_0}(Q_{k,j}) \gtrsim 2^k N \cdot \frac{1}{N} = 2^k. \tag{2.58}$$

Следовательно

$$\int_{T^2} (\mathbf{I}(fw))^2\,\mathrm{d}\mu = \int_{(\partial T)^2} (\mathbf{V}^{\mu_0})^2\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{K} \int_{(\partial T)^2} (\mathbf{V}^{\mu_0})^2\,\mathrm{d}\mu_k \gtrsim \sum_{k=1}^{K} 2^{2k}|\mu_k| \sim \frac{M}{N}\log M. \tag{2.59}$$

Подставляя (2.57) и (2.59) в (2.56), мы получаем $[w,\mu]_{CE} \gtrsim \log M$.

Наследственная константа мала

Мы утверждаем, что $[w,\mu]_{HC} \lesssim 1$, иными словами, для любого набора диадических прямоугольников $\mathcal{A}$, если мы определим $A := \cup_{R\in\mathcal{A}} R$, то мы получим

$$\mathcal{E}[\mu|_A] \lesssim \mu(A). \tag{2.60}$$

Чтобы доказать (2.60), положим $\nu_k := \mu_k|_A$, $k = 0,\dots,K$. Then

$$\mathcal{E}[\mu|_A] = \sum_{n,k} \int_{(\partial T)^2} \mathbf{V}^{\nu_n}\,\mathrm{d}\nu_k \le 2\sum_{n\ge k} \int (\partial T)^2 \mathbf{V}^{\nu_n}\,\mathrm{d}\nu_k \le 2\sum_{n\ge k} \int (\partial T)^2 \mathbf{V}^{\mu_n}\,\mathrm{d}\nu_k.$$

Поскольку $\operatorname{supp}\nu_k \subseteq \operatorname{supp}\mu_k$, то достаточно доказать

$$\sum_{n\ge k} \mathbf{V}^{\mu_n} \lesssim 1 \quad \text{на} \quad \operatorname{supp}\mu_k. \tag{2.61}$$

Наше утверждение (2.61) обладает тем преимуществом, что оно более не зависит от $\mathcal{A}$.

Для каждого $R \in \mathcal{R}$ имеем

$$\begin{aligned}\mu_n(R) &= 2^{-2n}\#\{Q_{n,j} \subseteq R\} \le 2^{-2n}(\#\{Q_{0,j} \subseteq R\} + 2^n)\\ &\le 2^{-n}(\#\{Q_{0,j} \subseteq R\} + 1) \le 2 \cdot 2^{-n}\mu_0(R).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{V}^{\mu_n}(Q_{k,j}) \lesssim 2^{-n}\mathbf{V}^{\mu_0}(Q_{k,j}) \le 2^{-n} \sum_{i=j}^{j+2^k-1} \mathbf{V}^{\mu_0}(Q_{0,i}) \lesssim 2^{k-n},$$

где последнее неравенство выводится из (2.44). Таким образом, мы получили (2.61), а, следовательно, и (2.60).

2.6.6 Мажоризация энергии для двух функций

Ключевое рассуждение в доказательстве теоремы 2.1.1 состояло в так называемой *технике мажоризации энергии*, которые мы (описали) по отдельности на бидереве T^2 и тридереве T^3, см. леммы 2.2.7 и 2.2.11 соответственно. Мы показали, что, грубо говоря, если мера μ на T^2 сосредоточена на множестве 'малого' μ-потенциала (скажем, $\mathbf{V}^\mu \leq 1$), то тогда функция $\mathbf{I}^*\mu$ довольно неэффективно доставляет свои значения на множестве 'большого' μ-потенциала, т.е. там, где $\mathbf{V}^\mu \geq \lambda \geq 10$. В каком-то смысле это означает, что множества 'малого потенциала' и 'большого потенциала' далеки друг от друга. На самом деле (и на этом факте основаны доказательства результатов работ [2] и [3]), на дереве верно еще более сильное утверждение, в котором 'расстояние' между этими двумя множествам измеряется с помощью одной меры, а потенциал порождается другой мерой. В частности, это утверждение влечет мажоризацию энергии на бидереве. Естественно предположить, что для повышения размерности следует получить аналогичное утверждение и для $d \geq 2$. Однако, оказывается, что уже на бидереве такая оценка не выполняется, так что мажоризация энергии на T^3 выводится другим способом (который, в свою очередь, уже не применим к T^d при $d \geq 4$).

В этом параграфе мы сначала предъявим доказательство леммы о двух мерах (вернее двух функциях) на дереве, а потом и контрпример к ней на бидереве.

Лемма 2.6.1 *Путь $f, g : T \to \mathbb{R}_+$ – функции на T, такие что* $\operatorname{supp} f \subset \{\mathbf{I}g \leq \delta\}$*, и функция g супераддитивна. Тогда найдется такая функция $\varphi : T \to \mathbb{R}_+$, что*

$$a)\ \mathbf{I}\varphi(\omega) \geq If(\omega) \quad \forall \omega \in \partial T \colon \mathbf{I}g(\omega) \in [\lambda, 2\lambda] \tag{2.62}$$

$$b)\ \int_T \varphi^2 \leq C\frac{\delta}{\lambda}\int_T f^2. \tag{2.63}$$

Доказательство леммы 2.6.1

Мы начнем с другой леммы, которая верна для операторов и пространств довольно общего вида.

Лемма 2.6.2 *Пусть K – интегральный оператор с положительным ядром, а f, g – положительные функции. Тогда*

$$\int (Kf)^2 g \leq \Big(\sup_{\operatorname{supp} g} KK^*g\Big)\int f^2.$$

Доказательство. В силу двойственности имеем

$$\int (Kf)^2 g = \int fK^*(Kf \cdot g) \leq \|f\|_2 \|K^*(Kf \cdot g)\|_2.$$

Оператор и его ядро мы обозначаем (в пределах этого доказательства) одной буквой K. По предположению верно $Kh(x) = \int K(x,y)h(y)$ для некоторого положительного ядра K. Следовательно

$$
\begin{aligned}
\|K^*(Kf\cdot g)\|_2^2 &= \int K^*(Kf\cdot g)K^*(Kf\cdot g)\\
&= \int K(x,y)((If)(x)g(x))K(x',y)((Kf)(x')g(x'))\,\mathrm{d}(x,x',y)\\
&\le \int \frac{1}{2}(Kf(x)^2 + Kf(x')^2)K(x,y)(g(x))K(x',y)(g(x'))\,\mathrm{d}(x,x',y)\\
&= \frac{1}{2}\int K^*((Kf)^2\cdot g)K^*(g) + \int K^*(g)K^*((Kf)^2\cdot g)\\
&= \int (KK^*g)\cdot (Kf)^2\cdot g \le \Big(\sup_{\operatorname{supp} g} KK^*g\Big)\int (Kf)^2\cdot g.
\end{aligned}
$$

Подставляя второе выражение в первое, получаем

$$
\int (Kf)^2 g \le \|f\|_2\Big(\sup_{\operatorname{supp} g} KK^*g\Big)\Big(\int (Kf)^2\cdot g\Big)^{1/2}.
$$

Лемма доказана. $\square$

В предыдущей лемме оператор K мог быть, например, оператором $\mathbf{I}$ на дереве T, или, возможно, оператором $\mathbf{I}$ на T^d, это не имело значения. В следующей лемме, однако, важен выбор пространства, т.е. дерева T или бидерева T^2.

Лемма 2.6.3 *Пусть T – конечное дерево, и задана пара функций $g, h : T \to \mathbb{R}_+$. Предположим, что функция g супераддитивна, и положим $\lambda = \|Ih\|_{L^\infty(\operatorname{supp} g)}$. Тогда для каждой вершины $\beta\in T$ имеем*

$$
\mathbf{I}(gh)(\beta) = \sum_{\alpha\le\beta} g(\alpha)h(\alpha) \le \lambda g(\beta).
$$

Доказательство. Не умаляя общности, мы можем рассматривать только тот случай, когда вершина β – корень T и, при этом, $T = \operatorname{supp} g$. Мы проводим индукцию по глубине дерева. Пусть дано конечное дерево T, и наше утверждение выполняется для всех его ветвей. Тогда по индукционной гипотезе и супераддитивности функции g мы имеем

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha\le\beta} g(\alpha)h(\alpha) &= g(\beta)h(\beta) + \sum_{\beta'\in\operatorname{ch}(\beta)}\sum_{\alpha\le\beta'} g(\alpha)h(\alpha)\\
&\le g(\beta)h(\beta) + \sum_{\beta'\in\operatorname{ch}(\beta)} g(\beta')\sup_{\alpha\le\beta'}\sum_{\alpha\le\alpha'\le\beta'} h(\alpha')\\
&\le g(\beta)h(\beta) + \sum_{\beta'\in\operatorname{ch}(\beta)} g(\beta')\sup_{\alpha<\beta}\sum_{\alpha\le\alpha'<\beta} h(\alpha')\\
&\le^{key} g(\beta)h(\beta) + g(\beta)\sup_{\alpha<\beta}\sum_{\alpha\le\alpha'<\beta} h(\alpha')\\
&= g(\beta)\sup_{\alpha\le\beta}\sum_{\alpha\le\alpha'\le\beta} h(\alpha').
\end{aligned}
$$

$\square$

Выведем теперь лемму 2.6.1 из лемм 2.6.2 и 2.6.3. Положим $\varphi = 2\lambda^{-1}\mathbf{I}f \cdot g \cdot \mathbb{1}_{\mathbf{I}g\le 4\lambda}$. Пусть точка ω такова, что $\mathbf{I}g(\omega) \ge \lambda$. Тогда $f(\omega) = 0$ и $f(\gamma) = 0$ для всех предков ω вплоть до первой вершины γ', такой что $\mathbf{I}g(\gamma') \le \delta$. Следовательно, для таких ω имеем

$$\sum_{\gamma\ge\omega} \mathbf{I}f \cdot g \cdot \mathbb{1}_{\mathbf{I}g\le 4\lambda} = \sum_{\gamma\ge\omega} \mathbf{I}f \cdot g = \mathbf{I}f(\omega)(\lambda-\delta) \ge \frac{\lambda}{2}\mathbf{I}f(\omega).$$

Мы проверили неравенство (2.62) из леммы 2.6.1.

Чтобы удостовериться в 2.63, применим сначала лемму 2.6.2 к

$$K := I \circ \mathbb{1}_{\mathbf{I}g\le\delta},$$

этот оператор есть композиция оператора умножения и $\mathbf{I}$. В таком случае получаем

$$\int_T \varphi^2 = \frac{4}{\lambda^2}\int_T (\mathbf{I}f)^2 (g\mathbb{1}_{\mathbf{I}g\le 4\lambda})^2 \le \frac{4}{\lambda^2}\sup_{\operatorname{supp} g} KK^*(g^2\mathbb{1}_{\mathbf{I}g\le 4\lambda})\int_T f^2\,.$$

Чтобы получить $\sup_{\operatorname{supp} g} KK^*(g^2\mathbb{1}_{\mathbf{I}g\le 4\lambda})$, мы используем лемму 2.6.3, в силу которой для каждой вершины α

$$K^*(g^2\mathbb{1}_{\mathbf{I}g\le 4\lambda})(\alpha) \le \mathbf{I}^*(g^2\mathbb{1}_{\mathbf{I}g\le 4\lambda})(\alpha) \le 4\lambda g(\alpha)\,.$$

Осталось только оценить $Kg = \mathbf{I}(\mathbb{1}_{\mathbf{I}g\le\delta} g)$. Непосредственно из определения $\mathbf{I}$ следует

$$\mathbf{I}(\mathbb{1}_{\mathbf{I}g\le\delta} g) \le \delta. \tag{2.64}$$

Таким образом, видим, что $\sup_{\operatorname{supp} g} KK^*(g^2\mathbb{1}_{\mathbf{I}g\le 4\lambda}) \le 4\delta\lambda$, стало быть

$$\int_T \varphi^2 \le \frac{16\delta}{\lambda}\int f^2\,.$$

Попытка повышения размерности

Как мы вскоре увидим, лемма 2.6.1 неверна для случая бидерева. Тем не менее, представим ненадолго, что нам это еще неизвестно, и попробуем исследовать попытку имитиации ее доказательства на бидереве.

Подходящим выбором функции φ служила бы функция

$$\begin{aligned}\varphi = \lambda^{-1}(&\mathbf{I}_1 f\cdot \mathbf{I}_{23}g + \mathbf{I}_2 f\cdot\mathbf{I}_{13}g + \mathbf{I}_3 f\cdot \mathbf{I}_{12}g + \\ &\mathbf{I}_1 gf\cdot\mathbf{I}_{23}f + \mathbf{I}_2 g\cdot\mathbf{I}_{13}f + \mathbf{I}_3 g\cdot\mathbf{I}_{12}f + g\mathbf{I}f).\end{aligned} \tag{2.65}$$

Она удовлетворяет следующему свойству

$$\mathbf{I}(\cdot\mathbb{1}_{\mathbf{I}f\le 2\lambda}\cdot\varphi) \ge \mathbf{I}f, \quad \text{where } \mathbf{I}g\in[\lambda, 2\lambda], \tag{2.66}$$

которое составляет аналог утверждения a) леммы 2.6.1. Оказывается, что мы не можем (и, в итоге, это в принципе невозможно) доказать утверждение b) леммы 2.6.1 для этой функции. Это происходит, в сущности, потому что у нас нет хорошей оценки на величину $\int_{T^d}(\mathbf{I}f)^2 g^2$, использующей $\int_{T^d} f^2$ для *супераддитивных по всем переменным* функций g.

Заметим, что это препятствие исчезает, если мы положим $f = g$, потому что в таком случае

$$\mathbf{I}(\lambda^{-1} g\mathbf{I}f) = \mathbf{I}(\lambda^{-1} f\mathbf{I}f) \le \frac{\delta}{\lambda}\mathbf{I}f \le \frac{1}{10}\mathbf{I}f,$$

и вместо функции φ из (2.65) мы используем другой способ выбрать функцию φ для мажоризации:

$$\tilde{\varphi} := c\lambda^{-1}(2\mathbf{I}_1 f \cdot \mathbf{I}_{23} f + 2\mathbf{I}_2 f \cdot \mathbf{I}_{13} f + 2\mathbf{I}_3 f \cdot \mathbf{I}_{12} f),$$

гду $c = \frac{10}{9}$. Теперь из (2.66) следует

$$\mathbf{I}(\mathbb{1}_{\mathbf{I}f \le 2\lambda} \cdot \tilde{\varphi}) \ge \mathbf{I}f, \quad \text{где } \mathbf{I}f \in [\lambda, 2\lambda]\,. \tag{2.67}$$

Аналог неравенства b) леммы 2.6.1 $\equiv$ (2.63) на тридереве теперь выводится из леммы 2.2.10.

Но что же не работает на 4-дереве?

Итак, мы не знаем, как оценивать $\int_{T^3}(\mathbf{I}f)^2 g^2$ с помощью $\int_{T^3} f^2$, но мы можем обойти это препятствие, просто положив $f = g$. Может ли такой способ сработать и на d-дереве, $d \ge 4$?

К сожалению, как мы сейчас увидим, в старших размерностях, $d \ge 4$, так сделать не получается. Отметим, что по аналогии с (2.65) мы можем построить φ и для 4-дерева:

$$\begin{aligned}
&\varphi = \lambda^{-1}(\mathbf{I}_1 f \cdot \mathbf{I}_{234} g + \mathbf{I}_2 f \cdot \mathbf{I}_{134} g + \mathbf{I}_3 f \cdot \mathbf{I}_{124} g + \mathbf{I}_4 f \cdot \mathbf{I}_{123} g + \\
&\mathbf{I}_1 g \cdot \mathbf{I}_{234} f + \mathbf{I}_2 g \cdot \mathbf{I}_{134} f + \mathbf{I}_3 g \cdot \mathbf{I}_{124} f + \mathbf{I}_4 g \cdot \mathbf{I}_{123} f + \\
&\mathbf{I}_{12} g \cdot \mathbf{I}_{34} f + \mathbf{I}_{23} g \cdot \mathbf{I}_{14} f + \mathbf{I}_{34} g \cdot \mathbf{I}_{12} f + \mathbf{I}_{12} f \cdot \mathbf{I}_{34} g + \mathbf{I}_{23} f \cdot \mathbf{I}_{14} g + \mathbf{I}_{34} f \cdot \mathbf{I}_{12} g + \\
&g\mathbf{I}f).
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Здесь обозначение $\mathbf{I}$ подразумевает суммирование по всем четырем переменным сразу 4 т.е. применение оператора Харди на T^4. Рассмотрим теперь случай $g = f$. Мы опять можем поглотить последнее слагаемое $g\mathbf{I}f = f\mathbf{I}f \le \delta f$ левой частью неравенства, так как $\operatorname{supp} f \subset \{\mathbf{I}f \le \delta\}$.

Однако, чтобы доказать неравенство b) леммы 2.6.1, нам нужна, например, такая оценка

$$\int_{T^4} (\mathbf{I}_{12} f \cdot \mathbf{I}_{34} f)^2 \le C \int_{T^4} f^2\,.$$

Мы не знаем, как получить эту оценку. В некотором смысле, аргумент работает, пока у нас есть одномерный фактор вида $\mathbf{I}_j$ в каждом члене формулы. Если же появляется член, содержащий только двумерные факторы, то наше рассуждение более не работает.

Лемма 2.6.1 неверна на T^2

Предложение 2.6.2 *Лемма 2.6.1 неверна на T^d. Именно, пусть h – функция на $\mathbb{R}$, такая что $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$, а $w : T^2 \to \mathbb{R}_+$ – единичный вес, $w \equiv 1$. Тогда найдется пара чисел $\lambda \geq 10\delta > 0$ и пара функций $f, g : T^2 \to \mathbb{R}_+$, таких что $\operatorname{supp} f \subset \{\mathbf{I}f \leq \delta\}$, функция g супераддитивна по каждой переменной, и для каждой функции $\varphi : T^2 \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющей условию*

$$\mathbf{I}\varphi \geq \mathbf{I}f \quad \text{on } \{2\lambda \leq \mathbf{I}g \leq 4\lambda\}$$

оценка

$$\int_{T^2} \varphi^2 \leq h\left(\frac{\delta}{\lambda}\right) \int_{T^2} f^2 \tag{2.69}$$

не выполняется для бидерева достаточно большой глубины (напомним, что мы постоянно работаем с конечными d-деревьями T^d_N).

Предъявляемые нами функции f, g имеют специальный вид

$$f = \mathbf{I}^*\mu,\ g = \mathbf{I}^*\nu,$$

где μ, ν – некоторые меры на T^2, причем мера μ тривиальна – это попросту единичная нагрузка в корне o бидерева T^2. В частности, $f(o) = 1, f(v) = 0, \forall v \neq o$. Очевидно, что $\mathbf{I}f \equiv 1$ на T^2.

Процесс выбора нагрузок для меры ν чуть сложнее. Для начала мы фиксируем большое число M. Далее рассмотрим еще одно число $n = 2^{2^s} >> M$ для некоторого натурального s, его значение будет выбрано ниже. В единичном квадрате Q^0 отметим диадические подквадраты $Q_1, \ldots, Q_{2^M}$, которые находятся на главной диагонали единичного квадрата, упорядочены по направлению от левого нижнего угла Q_0 к правому верхнему, и имеют длину стороны 2^{-M}.

В каждом таком диагональном квадрате Q_j выберем еще один маленький квадрат ω_j – юго-западный угловой диадический квадрат с длиной стороны 2^{-n-M}. Определим теперь меру ν как сумму одинаковых нагрузок в квадратах ω_j и выберем число n и нагрузки $\mu(\omega_j)$ таким образом, чтобы выполнялось следующее соотношение

$$\begin{aligned} &\nu(\omega) := \frac{1}{n^2}, \quad j = 1, \ldots, 2^M \\ &2^M = \frac{n}{\log n}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Мы немедленно получаем

$$g(o) = \mathbf{I}^*\nu(o) = |\nu| = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{\log n} = \frac{1}{n \log n} =: \delta.$$

Очевидно, что построенные таким образом функции f, g удовлетворяют $\operatorname{supp} f = \{o\} \subset \{\mathbf{I}g \leq \delta\}$, причем функция g субаддитивна по обеим переменным на T^2: таким свойством обладают все функции вида $\mathbf{I}^*\nu$.

Теперь выясним, что есть λ, и как выглядит множество $\{2\lambda \le \mathbf{I}g \le 4\lambda\}$. Для Q_1 и ω_1 рассмотрим семейство $\mathcal{F}_1$ диадических прямоугольников, содержащих ω_1, лежащих в Q_1, и имеющих следующий вид:

$$[0, 2^{-n}2^{-M}] \times [0, 2^{-M}], [0, 2^{-n/2}2^{-M}] \times [0, 2^{-2}2^{-M}], \ldots, [0, 2^{-n/2^k}2^{-M}] \times [0, 2^{-2^k}2^{-M}],$$

их в точности $\frac{\log n}{\log 2}$, мы обозначаем их через $q_{10}, q_{11}, \ldots, q_{1k}$, $k \asymp \log n$. Проделаем такую же операцию и для остальных квадратов ω_j, Q_j, получая при этом $q_{j0}, q_{j1}, \ldots, q_{jk}$.

Как мы уже видели при выводе неэквивалентности вложения и наследственного карлесонова условия, верно

$$\mathbf{I}g(q_{ji}) \asymp \frac{1}{n} \quad \forall j, i. \tag{2.71}$$

Положим

$$F := \bigcup_{ik} q_{ik}\,. \tag{2.72}$$

Выберем, наконец, число $\lambda = \frac{c}{n}$ для подходящей константы c. Тогда имеем $F \subset \{2\lambda \le \mathbf{I}g \le 4\lambda\}$. Поскольку $\mathbf{I}f \ge 1$, то если бы мажорирующая функция φ вида 2.69 существовала, то мы бы получили $\mathbf{I}\varphi \ge 1$ на F, и, кроме того,

$$\int_{T^2} \varphi^2 \le \frac{C}{\log n} \int_{T^2} f^2 = \frac{C}{\log n}\,.$$

Это, в свою очередь, повлекло бы

$$\mathrm{Cap}(F) \le \frac{C}{\log n}\,.$$

Ниже мы покажем, что на самом деле $\mathrm{Cap}(F) \asymp 1$. Следовательно подобная мажорирующая функция не существует.

Пусть мера ρ – равновесная мера множества F, а мера μ нагружает каждый прямоугольник q_{jk} массой $\frac{1}{n}$ при $\frac{\log n}{4} \le k \le \frac{3\log n}{4}$, положим ее равной нулю в остальных точках. Очевидно, что $|\mu| = \sum_{j=1}^{\frac{n}{\log n}} \sum_{k=\frac{\log n}{4}}^{\frac{3\log n}{4}} \mu(q_j k) \asymp 1$. Мы утверждаем, что

$$\mathbf{V}^\mu \asymp 1 \quad \text{на } \operatorname{supp}\mu. \tag{2.73}$$

Используя эту оценку, мы можем записать для $\varepsilon > 0$

$$0 \le \mathcal{E}[\rho - \varepsilon\mu] = \left(\int_{T^2} \mathbf{V}^\rho\, d\rho - \varepsilon \int_{T^2} \mathbf{V}^\rho\, d\mu\right) + \varepsilon\left(\varepsilon \int_{T^2} \mathbf{V}^\mu\, d\mu - \int_{T^2} \mathbf{V}^\rho\, d\mu\right). \tag{2.74}$$

Так как мера ρ – равновесная для $F \supset \operatorname{supp}\mu$, а бидерево T^2 конечно (т.е., в частности, емкость каждой вершины строго положительна), мы видим, что $\mathbb{V}^\rho \ge 1$ на $\operatorname{supp}\mu$, и $\int_{T^2} \mathbf{V}^\rho\, d\mu \ge |\mu|$. В силу (2.73) найдется некоторое число ε, такое что $\varepsilon \int_{T^2} \mathbf{V}^\mu\, d\mu \le |\mu|$, следовательно второе слагаемое в (2.74) должно быть отрицательным. Но тогда первое слагаемое положительно, что означает

$$\operatorname{Cap} F = \int_{T^2} \mathbf{V}^\rho \, d\rho \geq \varepsilon \int_{T^2} \mathbf{V}^\rho \, d\mu \geq \varepsilon|\mu| \asymp 1.$$

Осталось доказать оценку (2.73). В силу симметрии нашей конструкции достаточно оценить потенциал на какой-нибудь одной вершине, скажем на q_{1k}. Для этого мы разобьем потенциал $\mathbf{V}^\mu$ на несколько слагаемых: $\mathbb{V}_1$, вклад прямоугольников, содержащих Q_1, на $\mathbb{V}_2$, вклад прямоугольников, содержащих q_{1k}, и лежащих в Q_1, и $\mathbb{V}_3$, вклад прямоугольников, содержащих q_{1k}, 'вертикально' пересекающих Q_1,т.е. их вертикальная сторона (на координатной оси) содержит вертикальную сторону Q_1 (есть еще слагаемое $\mathbb{V}_4$, полоностью аналогичное по симметрии $\mathbb{V}_3$).

Два из этих слагаемых оцениваются почти сразу, величина $\mathbb{V}_1$ 'почти' состоит из вкладов 'диагональных квадратов, содержащих Q_1', а оставшиеся квадраты в этой сумме допускают тривиальную оценку. Положим

$$r = |\mu|, \quad M = \log \frac{n}{\log n}\,.$$

Разделим потенциал на диагональную часть и остаток:

$$\mathbb{V}_1 = r + \frac{r}{2} + \frac{r}{4} + \dots \frac{r}{2^M} + \frac{r}{2} + \frac{r}{2} + 2\frac{r}{4} + 2\frac{r}{4} + \dots k\frac{r}{2^k} + 2\frac{r}{2^k} + \dots \asymp 1$$

Чтобы оценить $\mathbb{V}_2$, отметим, что найдется не более чем cn прямоугольников, содержащих q_{1k}, и содержащихся в Q_1, которые при этом не содержат других q, найдется не более чем $\frac{cn}{2}$ прямоуглльников, содержащих q_{1k} и одного из его соседей (и лежащих в Q_1), не более чем $\frac{cn}{4}$ прямоугольников, содержащих q_{1k} и двух его соседей (и лежащих в Q_1), и так далее.

Следовательно,

$$\mathbb{V}_2 \leq Cn\frac{1}{n} + \frac{Cn}{2}\frac{2}{n} + \frac{Cn}{4}\frac{3}{n} + \dots \lesssim 1$$

Обратимся теперь к изучению слагаемого $\mathbb{V}_3$. Размер q_{1k} по горизонтали составляет $2^{-M} \cdot 2^{-n2^{-k}}$, а по вертикали – $2^{-M} \cdot 2^{-2^k}$. Стало быть, прямоугольников третьего типа, которые не содержат соседних, насчитывается не более чем (напомним, что $k \geq \frac{1}{4}\log n$)

$$n2^{-k}(2^k + M) \leq n + n^{\frac{3}{4}} \log n\,.$$

Таких, что они содержат q_{1k} и одного из соседей, всего не больше

$$n2^{-k}(2^{k-1} + M) \leq \frac{n}{2} + n^{\frac{3}{4}} \log n\,.$$

Продолжая это рассуждение, мы приходим к оценке

$$\mathbb{V}_3 \leq n\frac{1}{n} + \frac{n}{2}\frac{2}{n} + \frac{n}{4}\frac{3}{n} + \dots + n^{\frac{3}{4}} \log n \frac{\log^2 n}{n} \lesssim 1\,.$$

С величиной $\mathbb{V}_4$ мы работаем точно так же, здесь мы теперь используем неравенство $k \leq \frac{3}{4}\log n$. Собирая все слагаемые, составляющие $\mathbb{V}_i$, воедино, получаем

$$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 + \mathbb{V}_3 + \mathbb{V}_4 \leq C_1 + C_2 + C_3 \frac{\log^3 n}{n^{\frac{1}{4}}}.$$

Обратная оценка уже обеспечена непосредственно слагаемым $\mathbb{V}_1$, и мы выводим (2.73). Доказательство завершено.

Форма графика $x \to \mathbf{cap}(\mathbb{V}^\nu \geq x)$ для $w \equiv 1$

Пусть E – подмножество дерева T или 2-дереве T^2, а ν – равновесная мера для множества for E,

$$\mathrm{Cap}(E) = |\nu|, \ \mathbf{V}^\nu = 1 \text{ на } \operatorname{supp}\nu, \ f := \mathbf{I}^*\nu = \{f : \int f^2 \to \min \text{ для } \mathbf{I}f \geq 1 \text{ на } E\}.$$

Рассмотрим для начала случай дерева T. Зафиксируем число $x \in [|\nu|, 1]$ и исследуем свойства множества

$$D_x := \{\alpha \in T : \mathbf{V}^\nu(\alpha) \geq x\}.$$

Мы хотим разобраться в форме графика функции

$$C(x) := \mathrm{Cap}(D_x).$$

Начнем с левого конца интервала $x = |\nu| = \mathbf{V}(E)$. Отметим, что в корне o, очевидно, имеем $\mathbb{V}^\nu(o) = |\nu|$, так что $o \in D_{|\nu|}$. С другой стороны $1 = \mathrm{cap}(o)$, поэтому

$$C(|\nu|) = 1.$$

Пусть теперь $x = 1$. На E имеем $\mathbf{V}^\nu = 1$, а принцип максимума (который мы можем использовать, т.к. мы находимся на дереве) утверждает, что $E = \{\alpha : \mathbf{V}^\nu \geq 1\}$. Стало быть,

$$C(1) = \mathrm{cap}(E) = |\nu|.$$

Далее выберем $|\nu| < x < 1$. Принцип максимума влечет

$$\int_T \mathbb{1}_{\mathbf{I}g \leq x} \cdot g^2 = \int_T \mathbf{V}^\nu_x \, d\nu \leq x|\nu|. \tag{2.75}$$

Заметим, что если $\mathbf{I}g(\alpha) \leq x$ и $\mathbf{I}g(\operatorname{son}\alpha) > x$, то $\mathbb{I}g(\alpha) \geq x/2$ в точности потому, что функция $g = \mathbf{I}^*\nu$ монотонно возрастает на дереве T. Это, в свою очередь, означает, что

$$\mathbf{I}(\mathbb{1}_{\mathbf{I}g \leq x} \cdot g) \geq x/2, \quad \text{на } D_x = \{\mathbf{I}g = \mathbf{V}^\nu \geq x\}. \tag{2.76}$$

Из определения емкости и соотношений между (2.75), (2.76) мы выводим:

Предложение 2.6.3 *На дереве T емкость множества уровня $D_x = \{\alpha \in T : \mathbf{V}^\nu(\alpha) \ge x\}$, построенного по равновесной мере ν какого-либо множества E, удовлетворяет следующему неравенству*

$$C(x) = \mathrm{cap}(\{\alpha \in T : \mathbf{V}^\nu(\alpha) \ge x\}) \le \frac{4\,\mathrm{cap}(E)}{x} = \frac{4|\nu|}{x},\ \mathrm{cap}(E) \le x \le 1\,.$$

Ситуация совершенно иначе выглядит на 2-дереве T^2. Емкости множеств уровня равновесных потенциалов на T^2 ведут себя намного менее регулярно. Примеры такого поведения мы уже наблюдали в доказательстве предложения 2.6.2. Собственно говоря, мера ν из этого доказательства и есть (после умножения на константу) равновесная мера некоторого множества, причем

$$|\nu| = \frac{1}{n\log n}\,.$$

Положим

$$x = \frac{c}{n}\,.$$

Из вышеупомянутых рассуждений, однако, следует, что выбрав константу c должным образом, мы можем добиться

$$\mathrm{cap}((\alpha_1,\alpha_2) \in T^2 : \mathbf{V}^\nu(\alpha_1,\alpha_2) \ge \frac{c}{n}) \asymp 1 >> \frac{|\nu|}{x}\,. \tag{2.77}$$

Это означает, что предложение 2.6.3 попросту не выполняется для T^2, потому что если бы оно было верным, то мы бы имели $\mathrm{cap}((\alpha_1,\alpha_2) \in T^2 : \mathbf{V}^\nu(\alpha_1,\alpha_2) \ge \frac{c}{n}) \lesssim \frac{1}{\log n}$.

Ключевой момент здесь состоит в отсутствии 'настоящего' принципа максимума на T^2, неравенства (2.75). Вместо этого мы можем получить только его суррогатную версию, которая доставляет намного более слабую оценку роста емкости, чем предложение 2.6.3. Собственно, СПМ означает, что

$$\mathrm{cap}(\{\mathbf{V}^\nu \ge x\}) \le \frac{C_\tau \mathrm{cap}(E)}{x^{1+\tau}}\,.$$

и мы уже имели возможность убедиться в том, что величину τ невозможно отбросить. Разумеется, емкость любого подмножества T^2 ограничена сверху единицей, так что

$$\mathrm{cap}(\{\mathbf{V}^\nu \ge x\}) \le \max\left(1, \frac{C_\tau \mathrm{cap}(E)}{x^{1+\tau}}\right).$$

Это объясняет плоскую часть графика $C(x) \asymp 1$, когда параметр x лежит между $\frac{1}{n\log n}$ и $\frac{1}{n}$.

Глава 3 От d-дерева к полидиску: меры Карлесона

В этой Главе мы продемонстрируем технику перехода из дискретного контекста, изучению которого была посвящена предыдущая Глава, в непрерывный – полидиск $\mathbb{D}^d$ размерности $d = 1, 2, 3$. Пространство $L^2(T^d, w)$ мы интепретируем как дискретную модель пространства Харди-Соболева $\mathcal{H}_s$ гармонических (а иногда и аналитических!) функций на полидиске, а дискретное вложение типа Харди (2.1) (при подходящем выборе веса w) переходит во вложение Карлесона $\mathcal{H}_s$ (с соответствующими изменениями в тестовых условиях, в особенности субъемкостном). Отметим, что, строго говоря, мы дискретизируем не пространства $\mathcal{H}_s(\mathbb{D})$, а сам полидиск $\mathbb{D}^d$ и непосредственно неравенство вложения Карлесона. Это позволяет нам опустить некоторые технические подробности, относящиеся к преобразованию функций дискретного переменного в непрерывный случай (хотя, при этом, возникающие пространства L^2 на d-деревьях T^d служат вполне подходящим аналогом непрерывных пространств $\mathcal{H}_s(\mathbb{D})$).

3.1 Дискретизация: полидиск и вложение

3.1.1 Дискретизация полидиска $\mathbb{D}^d$

Мы начнем с разбиения полидиска на диадические ячейки Карлесона. Зафиксируем целые числа $j \geq 0$ и $1 \leq l \leq 2^j$, и положим $z_{jl} = (1 - 2^{-j})e^{\frac{2\pi i(2l-1)}{2^{j+1}}}$, а для точки $z = re^{it} \in \mathbb{D}$ положим $J(z) = \{e^{is} : \ t - (1-r)\pi \leq s < t + (1-r)\pi\}$, $S(z) = \{\rho e^{is} : \ e^{is} \in J(z);\, r \leq \rho \leq 1\}$, символом $Q(z) = \{\rho e^{is} \in S(z) : \ \frac{1-r}{2} < 1 - \rho \leq 1 - r\}$ обозначим 'верхнюю половину' ячейки $S(z)$. Мы также пишем $Q_{jl} := Q(z_{jl})$. Легко видеть, что между вершинами дерева T и диадическими ячейками Карлесона Q_{jl} установлено взаимооднозначное соотношение: здесь ячейка Q_{00} есть корень o, ячейки Q_{11} и Q_{12} соответствуют двум 'детям' корня, и так далее. Другими словами, для каждой вершины $\alpha \in T$ найдется в точности одна карлесонова ячейка Q_α, и обратно, каждой ячейке Q_{jl} соответствует в точности одна вершина $\alpha^{jl} \in T$. Набор $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in T}$ образует разбиение, для любой точки $z \in \mathbb{D}$ можно выбрать единственную ячейку $Q_\alpha \ni z$ ее содержащую.

Далее мы введем вспомогательную структуру графа на дереве T следующим образом

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\tau) := \bigcup_{\beta \in \mathcal{P}(\tau)} \{\gamma \in T : \ \operatorname{cl} Q_\gamma \bigcap \operatorname{cl} Q_\beta \neq \emptyset, \ |Q_\gamma| = |Q_\beta|\}. \tag{3.1}$$

Именно, для вершины $\tau \in T$ мы определим $\mathfrak{G}$-*расширенное множество предков*, взяв обычное множество предков $\mathcal{P}(\tau)$ и добавив к нему всех 'евклидовых соседей' γ, т.е. к каждой вершине $\beta \in \mathcal{P}(\tau)$ мы добавляем еще две вершины γ того же ранга (глубины в T) и таких, что соответствующие им карлесоновы ячейки пересекаются с Q_β. Построение такого типа часто встречается в контексте диадических структур – в сущности мы добавляем к диадическому интервалу двух его соседей той же длины. Аналогично определяется и $\mathfrak{G}$-*расширенное множество потомков*,

$$\tau \in \mathcal{S}_{\mathfrak{G}}(\tau) \iff \gamma \in \mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\tau). \tag{3.2}$$

Очевидно, это определение может быть расширено и на полное дерево $\overline{T}$.

Так как $\mathcal{P}(\alpha) \subset \mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\alpha)$ для всех $\alpha \in \overline{T}$, мы имеем такое же включение и для множеств потомков, $\mathcal{S}(\alpha) \subset \mathcal{S}_{\mathfrak{G}}(\alpha)$, более того, это включение строгое, разве что мы рассматриваем потомков корня o. С другой стороны, множества потомков, обычное и расширенное, 'сравнимы'. Именно, для каждой вершины α найдется множество $N(\alpha)$, состоящее из трех точек – α и ее два 'евклидовых' соседа – таких, что

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{G}}(\alpha) \subset \bigcup_{\beta \in N(\alpha)} \mathcal{S}(\beta), \tag{3.3}$$

также $\bigcup_{\alpha \in T} N(\alpha)$ покрывает каждую точку не более трех раз.

Соответствие между ∂T и $\mathbb{T}$ устроено чуть более сложным образом – как мы уже видели, стандартное отображение границы дерева на отрезок более не есть биекция, и диадические рациональные точки считаются дважды. С другой стороны, мы и так, по большому счету, не используем границу, а точки с двумя прообразами образуют полярное (для нужных нам весов) множество.

Для данной граничной точки $\omega \in \partial T$, которая также есть и геодезическая $\{o, \omega^1, \dots\}$, рассмотрим ее образ $S(\omega) := \bigcap\limits_{k \geq 0} S_{\omega^k}$. Это отображение уже не будет инъекцией, некоторые точки на окружности представляются двумя геодезическими на дереве.

Повторим это рассуждение и для полидиска $\mathbb{D}^d$. Наш следующий шаг очевиден – мы рассматриваем разбиение

$$\mathbb{D}^d = \bigcup_{\alpha \in T^d} Q_\alpha,$$

$$Q_\alpha = Q_{(\alpha_1, \dots, \alpha_d)} = \prod_{k=1}^{d} Q_{\alpha_k}, \quad \alpha_k \in T.$$

Аналогично,

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\alpha) = \prod_{k=1}^{d} \mathcal{P}(\alpha_k),$$

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{G}}(\alpha) = \prod_{k=1}^{d} \mathcal{S}(\alpha_k), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in T^d.$$

Как и выше, обычные множества предков/потомков и их $\mathfrak{G}$-расширенные версии на T^d отличаются не очень сильно друг от друга в том же смысле

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{G}}(\alpha) \subset \bigcup_{\beta \in N(\alpha)} \mathcal{S}(\beta), \quad \alpha \in T^d, \tag{3.4}$$

притом $\# N(\alpha) = 3^d$ и $\bigcup_{\alpha \in T} N(\alpha)$ покрывает каждую вершину d-дерева T^d не более чем 3^d раз. Мы также рассматриваем и (неинъективное) отображение

$$\Lambda : (\partial T)^d \to (\partial \mathbb{D})^d = (\Lambda(\omega_1), \ldots, \Lambda(\omega_d)). \tag{3.5}$$

Замечание. Основной смысл этой вспомогательной структуры $\mathfrak{G}$ заключается в том, что геометрия дерева T не вполне соответствует (гиперболической) геометрии единичного круга $\mathbb{D}$. Например, легко найти пару близких друг к другу (в смысле диска) точек $z, w \in \mathbb{D}$, в то время как расстояние на дереве между соответствующими вершинами α и β (т.е. $z \in Q_\alpha$, $w \in Q_\beta$) довольно велико. Этот эффект хорошо известен, и существует несколько способов избавиться от него. Здесь мы выбираем тот, который нам кажется самым простым, в особенности потому что мы не отслеживаем точные значения констант.

3.1.2 Карлесоново вложение на T^d эквивалентно вложению на полидиске

Контекст и основные определения

Напомним определения объектов, с которыми мы работаем.
Для данного целого числа $d \geq 1$ и $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in [0,1]^d$ мы рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)$, состоящее из аналитических на полидиске $\mathbb{D}^d$ функций с нормой

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)} := \sum_{n_1, \ldots, n_d \geq 0} |\widehat{f}(n_1, \ldots, n_d)|^2 (n_1+1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (n_d+1)^{s_d},$$

где

$$f(z) = \sum_{n_1, \ldots, n_d \geq 0} \widehat{f}(n_1, \ldots, n_d) z_1^{n_1} \cdot \dots \cdot z_d^{n_d}, \quad z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{D}^d.$$

Также,

$$\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d) = \bigotimes_{j=1}^{d} \mathcal{H}_{s_j}(\mathbb{D}). \tag{3.6}$$

напомним, что мы называем (w, μ) следовой парой для весового неравенства Харди на $\overline{T}^d$, если $[w, \mu]_{CE} < +\infty$, т.е.

$$\textstyle\int_{\overline{T}^d} (\mathbf{I}_w f)^2 \, d\mu \leq [w, \mu]_{CE} \int_{T^2} f^2 \, dw, \quad f \in L^2(T^d, w), \tag{3.7a}$$

$$\textstyle\int_{T^d} (\mathbf{I}^*_\mu \varphi)^2 \, dw \leq [w, \mu] \int_{\overline{T}^d} \varphi^2 \, d\mu, \quad \varphi \in L^2(\overline{T}^d, \mu). \tag{3.7b}$$

Напомним еще, что мера ν на $\overline{\mathbb{D}}^d$ называется мерой Карлесона для $\mathcal{H}_{\vec{s}}$, если найдется такая константа C_ν, что

$$\sup_{r<1}\int_{\overline{\mathbb{D}}^d}|f(rz)|^2\,d\nu(z)\le C_\nu\|f\|^2_{\mathcal{H}_s(\mathbb{D}^d)},\tag{3.8}$$

или, иными словами, если вложение $id:\mathcal{H}_s(\mathbb{D}^d)\to L^2(\overline{\mathbb{D}}^d,d\nu)$ ограничено. Мы собираемся описать связь между следовыми парами и карлесоновыми мерами для $\mathcal{H}_{\vec{s}}$. Мы начнем с предположения $\operatorname{supp}\nu\subset r\mathbb{D}^d$ для некоторого $r<1$ (точное значение радиуса не имеет значения, ни одна оценка ниже не зависит от этого параметра или от глубины графа, кроме того, мы предъявим способ перейти к потенциалам мер с носителем на границе).

Хорошо известно, что $\mathcal{H}_{s_j}(\mathbb{D})$, $1\le j\le d$, – *гильбертово пространство с воспроизводящим ядром* (ГПВЯ) с ядром K_{s_j}, которое (возможно после соответствующего изменения нормы) удовлетворяет

$$\begin{aligned}&|K_{s_j}|(z_j,\zeta_j)\asymp|1-z_j\bar{\zeta}_j|^{s_j-1},\quad 0<s_j<1\\&|K_{s_j}|(z_j,\zeta_j)\asymp\log|1-z_j\bar{\zeta}_j|^{-1},\quad s_j=1.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Более того, легко убедиться в том, что

$$\Re K_s\asymp|K_s|,0<s\le1\,.\tag{3.10}$$

Однако при $s=0$ мы попадаем в критический случай, когда

$$\text{ядро Пуассона не сравнимо с модулем ядра Коши}\,.\tag{3.11}$$

Незамедительно следует, что $\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)$ – гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, причем

$$K_{\vec{s}}(z,\zeta)=\prod_{j=1}^d K_{s_j}(z_j,\zeta_j),\quad z,\zeta\in\mathbb{D}^d.$$

Вернемся к изучению вложения Карлесона. Оператор $id:\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)\to L^2(\mathbb{D}^d,d\nu)$ ограничен в точности тогда, когда ограничен сопряженный к нему оператор Θ. Рассмотрим его действие на функцию $g\in L^2(\mathbb{D}^d,d\nu)$

$$(\Theta g)(z)=\langle\Theta g,K_{\vec{s}}(z,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D})}=\langle g,K_{\vec{s}}(z,\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{D}^d),d\nu}=\int_{\mathbb{D}^d}g(\zeta)\overline{K_{\vec{s}}(z,\zeta)}\,d\nu(\zeta).$$

Следовательно, для ограниченности Θ нам потребуется

$$\|g\|^2_{L^2(\mathbb{D}^d,d\nu)}\gtrsim\|\Theta g\|^2_{\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)}=\langle g,\Theta g\rangle_{L^2(\mathbb{D}^d,d\nu)}=\int_{\mathbb{D}^{2d}}g(z)\overline{g(\zeta)}K_{\vec{s}}(z,\zeta)\,d\nu(z)\,d\nu(\zeta).\tag{3.12}$$

Из неравенства (3.12) легко выводится следующее неравенство

$$\|g\|^2_{L^2(\mathbb{D}^d,d\nu)}\gtrsim\int_{\mathbb{D}^{2d}}g(z)g(\zeta)K_{\vec{s}}(z,\zeta)\,d\nu(z)\,d\nu(\zeta),\quad g\ge0\,.\tag{3.13}$$

Таким образом, если известно, что вещественная часть воспроизводящего ядра эквивалентна его модулю, то Θ ограничен в точности тогда, когда оценка

$$\int_{\mathbb{D}^{2d}} g(z)g(\zeta)|K_{\vec{s}}(z,\zeta)|\,d\nu(z)\,d\nu(\zeta) \lesssim \|g\|^2_{L^2(\mathbb{D}^d,d\nu)} \tag{3.14}$$

верна для произвольной положительной функции g на $\mathbb{D}^d$.

На самом деле (3.12) влечет (3.13), так что мы можем перейти к вещественным частям в (3.13), взяв вещественную часть ядра. Теперь из

$$\Re K_{\vec{s}}(z,\zeta) = \Re\prod_{j=1}^{d} K_{s_j}(z_j,\zeta_j) \asymp |\prod_{j=1}^{d} K_{s_j}(z_j,\zeta_j)| = |K_{\vec{s}}(z,\zeta)|, \quad z,\zeta\in\mathbb{D}^d, \tag{3.15}$$

следует (3.12)⇒(3.14). Обратное утверждение (3.14)⇒(3.12), очевидно, всегда выполняется.

Итак, мы заключаем, что при выполнении поточечного соотношения (3.15) мы сразу имеем (3.12)≡(3.14).

Тем не менее, соотношение (3.15) – оно играет ключевую роль в доказательстве эквивалентности диадического и аналитического вложений (см. ниже) – имеет и свои ограничения. Во-первых, оно не выполняется даже в одномерном случае при $s=0$, см. (3.11). Таким образом, случай $s=0$ служит в определенном смысле концом потенциально-теоретической шкалы. Также хорошо известно, что в одномерном случае меры, реализующие вложения $L^2(\mathbb{T})$ ядрами Пуассона и Коши, одни и те же. Это не составляет особого труда доказать, что, вообще говоря, довольно удивительно – уже на бидиске совершенно непонятно, совпадают ли меры вложения для произведений ядер Пуассона $P_{z_1}P_{z_2}$ и Коши $K_{\vec{0}}(z,\zeta) = (1-z_1\bar{\zeta}_1)^{-1}(1-z_2\bar{\zeta}_2)^{-1}$ пространства $L^2(\mathbb{T}^2)$, попытки доказать такую эквивалентность привели к недавней активности вокруг работы [34].

Еще одна интересная особенность случая $s=0$, опять относящаяся к (3.11), состоит в том, что в отличие от положительных значений параметра $s>0$, когда соответствующее вложение может быть описано в терминах теста на одной ячейке, здесь из работ Чанг, Феффермана и Карлесона [24], [31], [21], [93], следует, что такое описание невозможно для пуассонова вложения пространства $L^2(\mathbb{T}^d)$ при $d\geq 2$ (т.е. уже на бидиске).

Безвесовое пространство Дирихле

Сначала мы рассмотрим случай, когда все $s_j=1$. Для простоты мы считаем, что $d=2$ – мы не теряем здесь общности для безвесовых пространств.

Воспроизводящее ядро есть $K_{\vec{1}}(z,\zeta) = \log(1-z_1\bar{\zeta}_1)\log(1-z_2\bar{\zeta}_2) = K_1(z_1,\zeta_1)K_1(z_2,\zeta_2)$. Мы проверяем, что неравенство (3.12) (равносильное вложению):

$$\int_{\mathbb{D}^2} g(z)\overline{g(\zeta)}K_{\vec{1}}(z,\zeta)\,d\nu(z)\,d\nu(\zeta) \leq A\|g\|^2_{L^2(\mathbb{D}^2,d\nu)} \tag{3.16}$$

на самом деле утверждает, что для каждого $C \ge 0$ верно

$$\int_{\mathbb{D}^2} g(z)\overline{g(\zeta)}(C+K_1(z_1,\zeta_1))(C+K_1(z_2,\zeta_2))\,d\nu(z)\,d\nu(\zeta) \le B(C)\|g\|^2_{L^2(\mathbb{D}^2,d\nu)} \tag{3.17}$$

Чтобы вывести последнее неравенство из (3.16) достаточно просто раскрыть скобки в левой части, и оценить слагаемые по отдельности. Слагаемое с $K_1(z_1,\zeta_1))K_1(z_2,\zeta_2)$ is $\lesssim \|g\|^2_{L^2(\mathbb{D}^2,d\nu)}$ оценивается с помощью (3.16), а слагаемое с $C^2\int_{\mathbb{D}^2} g(z)\overline{g(\zeta)}d\nu(z)\,d\nu(\zeta)$ очевидно $\lesssim \|g\|^2_{L^2(\mathbb{D}^2,d\nu)}$ по неравенству Гельдера. Рассмотрим теперь одно из смешанных слагаемых (они оцениваются одинаково – в силу симметрии):

$$C\int_{\mathbb{D}^2} g(z)\overline{g(\zeta)}K_1(z_1,\zeta_1)\,d\nu(z)\,d\nu(\zeta) =: CI,$$

не обращая внимание на C и разделяя интегралы (срезку ν по первой координате мы записываем как ν_1), мы имеем

$$I = \int_{\mathbb{D}} G(z_1)\overline{G(\zeta_1)}K_1(z_1,\zeta_1))\,d\nu_1(z_1)\,d\nu_1(\zeta_1),$$

где $G(w) := \int g(w,u)d\nu_w(u)$ и $d\nu_w(u)$ суть меры на слоях: $\nu(E) = \int \nu_w(E)d\nu_1(w)$.

Очевидно, что ν_1 на $\mathbb{D}$ – карлесонова мера для одномерного пространства Дирихле, если ν карлесонова для двумерного, так что

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}} G(z_1)\overline{G(\zeta_1)}K_1(z_1,\zeta_1))\,d\nu_1(z_1)\,d\nu_1(\zeta_1) \le B\int_{\mathbb{D}} |G_1(z_1)|^2\,d\nu_1(z_1) \le \\ &B\int_{\mathbb{D}}\Big(\int_{\mathbb{D}} |g(z_1,z_2)|\,d\nu_{z_1}(z_2)\Big)^2 d\nu_1(z_1) \le B'\int_{\mathbb{D}^2} |g(z_1,z_2)|^2\,d\nu_{z_1}(z_2)d\nu_1(z_1) \le \\ &B'\int_{\mathbb{D}^2} |g(z_1,z_2)|^2\,d\nu(z)\,.\end{aligned}$$

Мы вывели (3.17) из (3.16) с помощью разделения переменных. Природа ядра здесь не играла никакой роли, тот же самый процесс можно повторить для произвольных размерности d и ядра $K_{\vec{s}}$ (вместо $K_{\vec{1}}$).

Важность выбора именно такого ядра $K_{\vec{1}}$ мы увидим сейчас. Именно, числа $(1-z\bar{\zeta})$, где $z,\zeta \in \mathbb{D}$, очевидно лежат в правой полуплоскости. Стало быть, так как $\Im K_1$ есть аргумент $\log\frac{1}{1-z\bar{\zeta}}$, мы получаем

$$|\Im K_1(z,\zeta)| \le \pi/2. \tag{3.18}$$

Поэтому, добавляя достаточно большую константу $C > 0$ к $K_1(z,\zeta)$, мы приходим к a) $|\Re(C+K_1)| >> |\Im(C+K_1)|$, b) $|\Re(C^d + K_{\vec{1}}(z,\zeta))| \ge c\Re(\Pi_{j=1}^d(C+K_1)(z_j,\zeta_j)))$ для произвольной размерности d, достаточно лишь выбрать $C = C(d)$ подходящим образом. Из второго неравенства заключаем, что

$$\Re\Pi_{j=1}^d(C+K_1(z_j,\zeta_j)) \asymp |\Pi_{j=1}^d(C+K_1(z_j,\zeta_j))|\,. \tag{3.19}$$

Стало быть, для $\vec{s}=\vec{1}$ мы получаем (3.15) с помощью модификации ядра, не меняя при этом класс карлесоновых мер. Это следует из (3.17), и означает, что мы можем заменить и (3.12) на (3.14). Подобное рассуждение работает для $\vec{s}=\vec{1}$ и произвольной размерности d.

Весовые пространства Харди-Соболева

Теперь мы считаем, что $\vec{s}=(s_j)_{j=1}^d, 0<s_j\leq 1$, но $\vec{s}\neq\vec{1}$. Мы более не можем повторить дословно предыдущее рассуждение, более того, для $K_s=(1-z\bar{\zeta})^{s-1}$ при $0<s<1$ более не выполняется (3.18), мнимая часть не ограничена, так что добавление константы более нам не поможет.

Тем не менее, чтобы свести аналитическое вложение (3.12) к диадическому вложению на d-дереве, нам следует уметь выводить (3.14) из (3.12) (обратное тривиально).

Здесь у нас есть только частичные результаты, именно

$$1-\epsilon(d)\leq s_j\leq 1 \tag{3.20}$$

для значений $\epsilon(d)$ достаточно близких к нулю.

Мы замечаем, что $1-z\bar{\zeta}$ лежит в правой полуплоскости при $z,\zeta\in\mathbb{D}$, так что $(1-z\bar{\zeta})^\epsilon$ лежит в конусе $C_\epsilon=\{u+iv, u\geq 0, |v|\leq u\cdot\tan\pi\epsilon\}$. Следовательно, для каждого $s_j\in(1-\epsilon,1)$,

$$|\Im K_{s_j}(z_j,\zeta_j)|\leq\tan\pi\epsilon\cdot\Re K_{s_j}(z_j,\zeta_j)\,.$$

Отсюда видно, что если число ϵ достаточно мало (в зависимости от размерности d), то выполняется (3.15), что, в свою очередь, гарантирует эквивалентность (3.12) и (3.14).

Из (3.14) мы заключаем, что выполняется диадическое вложение. Затем мы объясняем, что диадическое вложение влечет (3.14), тем самым замыкая рассуждение.

Замечание. Рассуждения этого параграфа теряют силу в том случае, если даже один из параметров s_j обращается в нуль. В таком случае в ядре происходит аналог 'фазового перехода', и соотношение (3.15) становится неверным. Этим, в частности, может быть объяснена особая роль пространств Харди на полидиске. Для гармонических пространств Харди мы все равно можем установить связь между вложением Карлесона и неравенством Харди, только теперь вместо двойственного вложения мы используем прямое (3.7a), меняя местами меру μ и вес w.

Однако теория Чанг-Феффермана дает описание мер вложения именно в случае d-*гармонического* пространства $h^2(\mathbb{D}^d)=H_0^h(\mathbb{D}^d)$.

Так как, очевидно, аналитическое пространство Харди $H^2(\mathbb{D}^d)$ содержится в гармоническом $h^2(\mathbb{D}^d)$, из результатов Чанг-Феффермана следует достаточность условий на меру вложения но их необходимость (мы считаем, что и она имеет место) остается открытой за исключением размерности $d=1$. Если бы известная статья [34] не содержала глубоких прорех в доказательстве, то ее методы могли бы быть модифицированы для установления этой необходимости, однако, как показано в заметке [95], можно предъявить контрпример к рассуждениям (но не к итоговому результату!) работы [34].

Переход в диадический контекст

Мы определяем каноническое отображение $\Lambda_* : Meas^+(\mathbb{D}^d) \to Meas^+(T^d)$ как

$$\Lambda^* \nu(\alpha) = \tilde{\nu}(\alpha) := \nu(Q_\alpha). \tag{3.21}$$

Для мер на границе мы также задаем отображение из $Meas^+(\partial T)^d$ в $Meas^+(\mathbb{T}^d)$,

$$\Lambda_* \mu(F) := \mu(\Lambda^{-1}(F)), \quad F \subset \mathbb{T}^d. \tag{3.22}$$

Аналогично, для функции $g \in L^2(\mathbb{D}^d, d\nu)$ положим

$$\tilde{g}(\alpha) := \frac{1}{\nu(Q_\alpha)} \int_{Q_\alpha} g(z)\, d\nu(z), \quad \alpha \in T^d, \tag{3.23}$$

и мы считаем $\tilde{g}(\alpha) := 0$, если $\nu(Q_\alpha) = 0$.

Определим

$$\begin{aligned} w_{s_j}(\alpha_j) &:= 2^{(1-s_j)(|\alpha_j|-1)}, \quad \alpha_j \in T, \\ w_{\vec{s}}(\alpha) &:= \prod_{j=1}^{d} w_{s_j}(\alpha_j), \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in T^d, \end{aligned} \tag{3.24}$$

где $|\alpha_j| = \#\mathcal{P}(\alpha_j)$ есть глубина α_j в T (мы считаем, что корень имеет глубину 1).

Дальнейшим рассуждениям мы предпошлем следующую лемму.

Лемма 3.1.1 *Для произвольной пары вершин $\alpha, \beta \in T^d$ имеем*

$$\begin{aligned} |K_{\vec{s}}(z,\zeta)| \approx \tilde{k}_{\vec{s}}(\alpha,\beta) &:= \\ & w_{\vec{s}}\left(\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\alpha) \bigcap \mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\beta)\right) = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\alpha) \bigcap \mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\beta)} w_{\vec{s}}(\gamma), \quad z \in Q_\alpha,\ \zeta \in Q_\beta. \end{aligned}$$

Такое же соотношение выполняется и на границе

$$|K_{\vec{s}}(z,\zeta)| \approx \tilde{k}_{\vec{s}}(\tau,\omega) := \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\tau) \bigcap \mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\omega)} w_{\vec{s}}(\gamma), \quad z = \Lambda(\tau),\ \zeta = \Lambda(\omega), \ \ \tau, \omega \in (\partial T)^d.$$

Доказательство. Так как вес $w_{\vec{s}}$ имеет структуру произведения, то достаточно рассматривать только точки на (замкнутом) дереве $\overline{T}$ и в единичном круге $\overline{\mathbb{D}}$ соответственно. Напомним, что $\mathfrak{G}$-структура добавляет еще два дополнительных элемента каждого ранга к обычному множеству предков $\mathcal{P}(\tau)$. Зафиксировав две произвольные точки $\tau, \omega \in \overline{T}$ (неважно где, на границе или во внутренности дерева), мы всегда можем считать, что их глубина в дереве $\overline{T}$ одна и та же. Действительно, пусть, например, $|\omega| > |\tau|$, рассмотрим тогда $\omega' \in \mathcal{P}(\omega)$ с

$|\omega| = |\omega'|$. Легко убедиться в том, что

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\tau)\bigcap\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\omega) = \mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\tau)\bigcap\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\omega').$$

Таким же образом мы работаем и с непрерывными величинами,

$$|K_s(z,\zeta)| \approx \left|K_s\left(z, \zeta\frac{|z|}{|\zeta|}\right)\right|, \quad \frac{1}{2} \le |z| \le |\zeta|.$$

Для точки $z \in \mathbb{T}$ имеем

$$1 + \log\frac{1}{|z-1|} \approx \sum_{j=1}^{2+\log_2\frac{1}{|z-1|}} |\tilde{I}_j(z)|^0,$$
$$1 + \frac{1}{|z-1|^{1-s}} \approx \sum_{j=1}^{2+\log_2\frac{1}{|z-1|}} |\tilde{I}_j(z)|^{1-s}, \quad 0 < s < 1,$$

где $\tilde{I}_j(z) = \{e^{2\pi i\theta} : \ \theta \in [-2^{-j}, 2^{-j}+1)\}$ есть объединение трех диадических подинтервалов $\mathbb{T}$ ранга j – того, что содержит 0 и его двух соседей. Такой же интервал содержит и точку z, но не тогда, когда j больше, чем (примерно, с точностью до умножения на константу) $2 - \log_2|z-1|$. Отсюда немедленно заключаем, что

$$1 + \log\frac{1}{|z-\zeta|} \approx \sum_{j=1}^{\log_2\frac{1}{|z|}} |\tilde{I}_j(z,\zeta)|^0,$$
$$1 + \frac{1}{|z-\zeta|^{1-s}} \approx \sum_{j=1}^{\log_2\frac{1}{|z|}} |\tilde{I}_j(z,\zeta)|^{1-s}, \quad 0 < s < 1,$$

причем $I_j(z,\zeta)$ – объединение трех последовательных диадических интервалов одного и того же ранга, содержащее обе точки ζ и z. Поскольку $w_s(\alpha) = 2^{|\alpha|(1-s)}$, и $J_\alpha = 2^{-|\alpha|}$ (напомним, что J_α – основание карлесоновой ячейки, соответствующей вершине α), то выводим, что для $|\tau| = |\omega|$ верно

$$w_1(\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\tau)\bigcap\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\omega)) = |\tau| \approx \log\frac{1}{|z_\tau - z_\omega|},$$
$$w_s(\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\tau)\bigcap\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\omega)) = \sum_{j=1}^{|\tau|} 2^{(1-s)j} \approx 2^{(1-s)|\tau|} \approx \frac{1}{|z_\tau - z_\omega|^{1-s}}, \quad 0 < s < 1,$$

где z_τ – либо центр карлесоновой ячейки Q_τ for $\tau \in T$, либо образ $\Lambda(\tau)$ на окружности, если $\tau \in \partial T$. Сравнивая получившиеся оценки со значением ядра $|K_s(z,\zeta)|$ для $z \in Q_\tau$ и $\zeta \in Q_\omega$ (или их образов на круге), мы получаем искомые соотношения. $\square$

Применяя теперь лемму 3.1.1 к левой части (3.14), получаем

$$\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} g(z)g(\zeta)|K_{\vec{s}}(z,\zeta)|\,d\nu(z)d\nu(\zeta) =$$
$$\sum_{\alpha\in T^d}\sum_{\beta\in T^d}\int_{Q_\alpha}\int_{Q_\beta} g(z)g(\zeta)|K_{\vec{s}}(z,\zeta)|\,d\nu(z)\,d\nu(\zeta) \approx$$
$$\sum_{\alpha\in T^d}\sum_{\beta\in T^d}\int_{Q_\alpha}\int_{Q_\beta} g(z)g(\zeta)k_{\vec{s}}(\alpha,\beta)\,d\mu(z)\,d\mu(\zeta) =$$
$$\sum_{\alpha\in T^d}\sum_{\beta\in T^d}\tilde{g}(\alpha)\tilde{g}(\beta)k_{\vec{s}}(\alpha,\beta)\tilde{\nu}(\alpha)\tilde{\nu}(\beta)$$

Мы анализируем это выражение начиная с конца, полагая $\sigma(\alpha)=\tilde{g}(\alpha)\tilde{\nu}(\alpha),\ \alpha\in T^d$ (напомним что на открытом дереве T^d меры и функции суть одно и то же):

$$\sum_{\gamma\in T^d} w_{\vec{s}}(\gamma)\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_{\mathfrak{G}}(\gamma)}\sigma(\alpha)\right)^2 = \sum_{\gamma\in T^d}\sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{S}_{\mathfrak{G}}(\gamma)}\sigma(\alpha)\sigma(\beta)w_{\vec{s}}(\gamma) =$$
$$\sum_{\alpha,\beta\in T^d}\sigma(\alpha)\sigma(\beta)\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\alpha)\bigcap\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\beta)} w_{\vec{s}}(\gamma) =$$
$$\sum_{\alpha\in T^d}\sum_{\beta\in T^d} w_{\vec{s}}\left(\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\alpha)\bigcap\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\beta)\right)\cdot\sigma(\alpha)\sigma(\beta) =$$
$$\sum_{\alpha\in T^d}\sum_{\beta\in T^d}\tilde{g}(\alpha)\tilde{g}(\beta)\tilde{k}_{\vec{s}}(\alpha,\beta)\tilde{\nu}(\alpha)\tilde{\nu}(\beta).$$

Определим

$$k_{\vec{s}}(\alpha,\beta) := w_{\vec{s}}(\mathcal{P}(\alpha)\bigcap\mathcal{P}(\beta)) = \sum_{\gamma\geq\alpha,\beta} w(\gamma),\quad \alpha,\beta\in T^d,$$

и повторим вычисления выше, теперь для $\mathcal{P}$ вместо $\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}$. Мы приходим к

$$\sum_{\gamma\in T^d} w_{\vec{s}}(\gamma)\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{S}(\gamma)}\sigma(\alpha)\right)^2 = \sum_{\alpha\in T^d}\sum_{\beta\in T^d}\tilde{g}(\alpha)\tilde{g}(\beta)k_{\vec{s}}(\alpha,\beta)\tilde{\nu}(\alpha)\tilde{\nu}(\beta).$$

Оценка для потомков (3.4) – та, что утверждает, что множество $\mathcal{S}_{\mathfrak{G}}$ может быть покрыто ограниченным сверху количеством множеств вида $\mathcal{S}$, и что каждая точка используется при этом не более константы раз, – влечет

$$\sum_{\gamma\in T^d} w_{\vec{s}}(\gamma)\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_{\mathfrak{G}}(\gamma)}\sigma(\alpha)\right)^2 = \sum_{\gamma\in T^d}\sigma\left(\mathcal{S}_{\mathfrak{G}}(\gamma)\right)^2 w_{\vec{s}}(\gamma) \approx$$
$$\sum_{\gamma\in T^d}\sigma\left(\mathcal{S}(\gamma)\right)^2 w_{\vec{s}}(\gamma) = \sum_{\gamma\in T^d} w_{\vec{s}}(\gamma)\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{S}(\gamma)}\sigma(\alpha)\right)^2.$$

Соединяя вышеприведенные оценки, мы видим, что (3.14) равносильно

$$\sum_{\alpha\in T^d}\int_{Q_\alpha} g^2(z)\,d\nu(z) \gtrsim \sum_{\alpha\in T^d}\sum_{\beta\in T^2}\tilde g(\alpha)\tilde g(\beta)k_{\vec s}(\alpha,\beta)\tilde\nu(\alpha)\tilde\nu(\beta),$$

гдн $\tilde g$ и $\tilde\nu$ определяются как в (3.21), (3.23). Итак, если функция g постоянна на ячейках Q_α, а ν – карлесонова мера для, $\mathcal{H}_{\vec s}$, тогда

$$\|\tilde g\|^2_{L^2(T^d,d\tilde\nu)} \gtrsim \sum_{\alpha,\beta\in T^d}\tilde g(\alpha)\tilde g(\beta)k_{\vec s}(\alpha,\beta)\tilde\mu(\alpha)\tilde\mu(\beta) = \sum_{\gamma\in T^d} w_{\vec s}(\gamma)\left(\sum_{\beta\le\gamma}\tilde g(\beta)\tilde\nu(\beta)\right)^2. \tag{3.25}$$

С другой стороны, в силу неравенства Иенсена имеем

$$\sum_{\alpha\in T^d}\int_{Q_\alpha} g^2(z)\,d\nu(z) \ge \sum_{\alpha\in T^d}\tilde g^2(\alpha)\tilde\nu(\alpha),$$

так что если (3.25) выполняется для произвольной функции $\tilde g$ из $L^2(T^2,\,d\tilde\nu)$, то мера ν карлесонова.

На самом деле мы уже пришли к (3.7b) с данными $w = w_{\vec s}$, и $\mu = \tilde\nu$ и $\varphi = \tilde g$. Единственное отличие состоит в том, что в (3.7b) мы используем замкнутое d-дерево $\overline{T}^d$, но, как мы вскоре увидим, это не имеет особого значения.

Предложение 3.1.1 *Будем считать меру ν, заданную на $\overline{\mathbb{D}}^d$, заданной на всем пространстве $\mathbb{C}^d$ с $\operatorname{supp}\nu\subset\overline{\mathbb{D}}^d$. Для $0<r<1$ зададим меру ν_r как растяжение меры ν с носителем на $r\overline{\mathbb{D}}^d$,*

$$d\nu_r(z) := d\nu(r^{-1}z),\quad z\in\mathbb{C}^d.$$

Тогда мера ν карлесонова для пространства $\mathcal{H}_{\vec s}$ тогда и только тогда, когда мера ν_r карлесонова, причем константа C_{ν_r} в (3.8) не зависит от значения параметра r.

Доказательство. Доказательство почти тривиально. Поскольку

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}^d}|f(r\zeta)|^2\,d\nu(\zeta) = \int_{r\overline{\mathbb{D}}^d}|f(z)|^2\,d\nu_r(z) = \int_{\overline{\mathbb{D}}^d}|f(z)|^2\,d\nu_r(z),$$

то мы видим, что если мера ν карлесонова, то такова и мера ν_r причем C_{ν_r} не зависит от значения параметра r. С другой стороны, если $C_{\nu_r}<C<\infty$, то $C_\nu=\sup_{r<1}C_{\nu_r}<C$, и легко видеть, что предел $\lim\limits_{r\to1}\int_{\overline{\mathbb{D}}^d}|f(r\zeta)|^2\,d\nu(\zeta)$ существует. □

Замечание. Подчеркнем еще раз, что все наши условия на карлесоновость меры или ограниченность вложения типа Харди не зависят от значения параметра растяжения r или от глубины d-дерева. Итак, мы приходим к следующей теореме (теорема I.7)

Теорема 3.1.1 *Пусть задан вектор $\vec s=(s_1,\dots,s_d)$, $s_j\in(0,1], j=1,\dots,d$, $d\ge1$, компоненты s_i которого достаточно близки к 1: $1-s_j\le\varepsilon_d$, для некоторого положительного числа $\varepsilon=\varepsilon(d)$ при $j=1,\dots,d$. Пусть ν – мера на $\overline{\mathbb{D}}^d$. Тогда оператор вложения*

$id : \mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d) \to L^2(\overline{\mathbb{D}}^d, \nu)$ ограничен, т.е. мера ν карлесонова для $\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)$, тогда и только тогда, когда $(w_{\vec{s}}, \tilde{\nu})$ составляет пару мера-вес для $\overline{T}^d$,

$$\sum_{\alpha \in T^d} (\mathbf{I}^* \psi \tilde{\nu})^2(\alpha) w_{\vec{s}}(\alpha) \leq C \int_{T^d} \psi^2 d\tilde{\nu}, \quad \forall \psi \in L^2(\overline{T}^d, \tilde{\nu}) . \tag{3.26}$$

Здесь $\tilde{\nu} = \Lambda^* \nu$ – это дискретный образ ν на $\overline{T}^d$.

3.2 Весовые емкости на T^d и бесселевы мультипараметрические емкости на $\mathbb{D}^d$

Чтобы вывести условия на ограниченность вложения Карлесона для пространства $\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)$ с $d = 1, 2, 3$, остается только использовать дискретную теорему 2.1.1. Однако, для этого надо изменить формулировку условий на непрерывную. Для этого мы выбрали одно из условий, именно субъемкостное (2.3a). В этом параграфе мы покажем равносильность субъемкостных условий в смысле весовой емкости на T^d и в смысле d-параметрической бесселевой емкости, и, тем самым, завершим доказательство теоремы I.5.

По данной мере на $\mathbb{T}^d = (\partial \mathbb{D})^d$ и вектору $\vec{s} \in (0, 1]^d$ мы определяем мультипараметрический $\vec{s}$-бесселев потенциал

$$\mathbf{U}^{\mu}_{\vec{s}}(z) = \int_{\mathbb{T}^d} \mathbb{K}_{\vec{s}}(z, \zeta)\, d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbb{T}^d, \tag{3.27}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{\vec{s}}(z, \zeta) &= \prod_{k=1}^{d} \mathbb{K}_{s_k}(z_k, \zeta_k), \\ \mathbb{K}_s(z_k, \zeta_k) &= \frac{1}{|z_k - \zeta_k|^{1-s}}, \quad s < 1, \\ \mathbb{K}_1(z_k, \zeta_k) &= \log\left(\frac{1}{|z_k - \zeta_k|}\right). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Мы собираемся показать, что емкости на политоре и остове d-дерева сравнимы.

Теорема 3.2.1 *Пусть вес $w := w_{\vec{s}} : T^d \to \mathbb{R}_+$ – экспоненциальный вес типа произведения, определенный в (3.24), и предположим, что задано компактное множество $E \subset (\partial T)^d$. Тогда соответствующие емкости множества E и его образа на политоре $F := \Lambda(E)$ сравнимы*

$$\mathrm{Cap}_{\vec{s}}(F) \approx \mathrm{Cap}_{w_{\vec{s}}}(E), \tag{3.29}$$

причем константа зависит только от размерности d и вектора $\vec{s}$.

Доказательство. Схема нашего доказательства выглядит следующим образом.
Сначала мы покажем, что для любой (неотрицательной радоновой) меры μ на $(\partial T)^d$ ее $(w_{\vec{s}})$-потенциал сравним с ($\vec{s}$-бесселевым) потенциалом ее непрерывного образа $\Lambda_* \mu =: \nu$. Отсюда

мы незамедлительно выводим, что их энергии сравнимы. Стало быть, равновесная мера множества E (а вернее ее образ) 'почти равновесна' и для множества F. С другой стороны, если ν равновесна для F, то ее прообраз $\Lambda^*\nu$ имеет сравнимую с ν энергию, так что $\Lambda^*\nu$ 'почти равновесна' для E. Перейдем к подробностям.

Эквивалентность потенциалов на самом деле уже следует из леммы 3.1.1. Действительно, для пары точек $\zeta, z \in \mathbb{T}^d$ потенциальное ядро $\mathbb{K}_{\vec{s}}$ и воспроизводящее ядро $K_{\vec{s}}$ эквивалентны. Пусть μ – мера с носителем на множестве E (равновесные меры именно таковы). Аналогично рассуждениям предыдущего параграфа мы видим, что

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{w_{\vec{s}}}[\mu] = \int_E \mathbf{V}^{\mu}_{w_{\vec{s}}}\, d\mu = \sum_{\gamma \in T^d} w_{\vec{s}}(\gamma) \left(\int_{\partial \mathcal{S}(\gamma)} d\mu \right)^2 \\
&\approx \sum_{\gamma \in T^d} w_{\vec{s}}(\gamma) \left(\int_{\partial \mathcal{S}_{\mathfrak{G}}(\gamma)} d\mu \right)^2 = \int_{(\partial T)^{2d}} \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\tau) \cap \mathcal{P}_{\mathfrak{G}}(\omega)} w_{\vec{s}}(\gamma) \right) d\mu(\tau)\, d\mu(\omega) = \\
&\int_{E^2} k_{\vec{s}}(\tau, \omega)\, d\mu(\tau) d\mu(\omega).
\end{aligned}
$$

Следовательно, вместо обычного дискретного потенциала мы можем рассматривать потенциал, порожденный $\mathfrak{G}$-расширенным ядром. Для точки $F \ni \zeta = \Lambda(\omega)$, $\omega \in E$, имеем

$$
\{\tau \in E : k_{\vec{s}}(\tau, \omega) \geq Ct\} \subset E \cap \Lambda^{-1}\left(\{z \in F : K_{\vec{s}}(z, \zeta) \geq t\}\right) \subset \left\{\tau \in E : k_{\vec{s}}(\tau, \omega) \geq \frac{T}{C}\right\}
$$

для некоторой абсолютной константы C, так как в силу леммы 3.1.1

$$
k_{\vec{s}}(\tau, \omega) \approx K_{\vec{s}}(\Lambda(\tau), \Lambda(\omega)).
$$

Следовательно, поскольку $\operatorname{supp} \mu \subset E$,

$$
\begin{aligned}
&\int_E k_{\vec{s}}(\tau, \omega)\, d\mu(\tau) = \int_0^{\infty} \mu\left(E \cap \{k_{\vec{s}}(\tau, \omega) \geq t\}\right) dt \approx \\
&\int_0^{\infty} \nu\left(\{K_{\vec{s}}(z, \zeta) \geq t\}\right) dt = \int_F \mathbb{K}_{\vec{s}}(z, \zeta)\, d\nu(z).
\end{aligned}
$$

Эквивалентность энергий мер μ и $\nu = \Lambda_*\nu$ следует незамедлительно, и, стало быть,

$$
\operatorname{Cap}_{W_{\vec{s}}}(E) \lesssim \operatorname{Cap}_{\vec{S}}(\Lambda(E)),
$$

поскольку $\Lambda_*\mu$ допустима для множества F, возможно после умножения на абсолютную постоянную.

Чтобы получить обратные оценки, мы должны уметь перемещать меры в другом направлении, из $\mathbb{T}^d$ в $(\partial T)^d$. Для этого, для данной меры ν на $\mathbb{T}^d$ и борелевского множества

$\tilde{E} \subset (\partial T)^d$ мы запишем

$$\Lambda^*\nu(\tilde{E}) := \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\#\{\tilde{E} \cap \{\Lambda^{-1}(z)\}\}}{\#\{\Lambda^{-1}(z)\}}\, d\nu(z). \tag{3.30}$$

Это отображение корректно определено, (см. подробное доказательство в [2] или, в одномерном случае, в [6]). Поскольку подинтегральная функция в (3.30) ограничена сверху и снизу, то мы видим, что $\Lambda^*\Lambda_*\mu \approx \mu$, и $\Lambda_*\Lambda^*\nu \approx \nu$. На самом деле, легко убедиться и в том, что для мер с конечной энергией эти эквивалентности превращаются в точные равенства, мы не делаем этого, так как нам достаточно иметь двустороннюю оценку.
Повторяя предыдущее рассуждение теперь для меры ν – равновесной меры множества F, – мы видим, что мера $\Lambda^*\nu$ (как и ранее, после умножения на поправочную константу) допустима для множества E, и их энергии сравнимы. Доказательство завершено. $\square$

Чтобы полностью переместить наше дискретное субъемкостное условие на политор, нам требуется еще одно утверждение (см. также [104, раздел 3]).

Теорема 3.2.2 *Пусть $E \subset \overline{T}^d$, а вес $w = w_{\vec{s}}$ – вес типа произведения, порожденный пространством $\mathcal{H}_{\vec{s}}$. Тогда емкости множества E и его проекции на остов сравнимы,*

$$\mathrm{Cap}_w(E) \approx \mathrm{Cap}_w(\partial\mathcal{S}(E)),$$

где $\partial\mathcal{S}(E) = \{\omega \in (\partial T)^d : \mathcal{P}(\omega) \cap E \neq \emptyset\}$.

Замечание. Эта теорема есть более точная версия предложения 1.1.3.

Доказательство. Оценка в одну из сторон тривиальна, так как из монотонности $\mathbf{I}_w$ следует $\mathbf{V}_w^\mu(\omega) \geq \mathbf{V}_w^\mu(\beta)$, где $\omega \in \partial\mathcal{S}(E)$ – потомок $\beta \in E$, для произвольной меры μ. Чтобы доказать обратную оценку, мы покажем, что потенциалы меры μ и ее 'граничной проекции' сравнимы *всюду на* $\overline{T}^d$. Из этого следует, что допустимые для E и $\partial\mathcal{S}(E)$ меры совпадают (с точностью до умножения на константу), и что их энергии сравнимы. Как и ранее, это даст эквивалентность емкостей.

Мы начнем с определения граничной проекции меры. Введем для этого 'меру Лебега' на $(\partial T)^d$ – попросту взяв дискретный образ стандартной нормированной меры Лебега на политоре,

$$m_d := \frac{1}{(2\pi)^d}\Lambda^*(dx_1 \dots dx_d).$$

Иными словами, для $\partial\mathcal{S}(\alpha) \subset (\partial T)^d$ мы положим $m_d(\partial\mathcal{S}(\alpha)) := 2^{-|\alpha|}$, где $|\alpha| = \prod_{k=1}^d |\alpha_k|$, и $|\alpha_k| = \#\mathcal{P}(\alpha) - 1$. Затем мы распространим получившуюся меру на борелевские подмножества $(\partial T)^d$ обычным образом.

Предположим теперь, что $\mu = \mu_\alpha$ есть точечная нагрузка, $\operatorname{supp}\mu_\alpha = \alpha \in T^d$. Тогда ее проекция $(\mu_\alpha)_b$ определяется как

$$(\mu_\alpha)_b(E) = |\mu_\alpha| m_d\left(E \bigcap \partial\mathcal{S}(\alpha)\right).$$

В сущности, мы берем массу μ_α и распределяем ее равномерно по граничным потомкам $\partial\mathcal{S}(\alpha)$ вершины α. Далее, если мера μ сконцентрирована на открытом d-дереве T^d (т.е. не имеет граничной массы – в таком случае ее можно представить как набор точечных нагрузок в вершинах), мы пишем

$$\mu_b = \sum_{\alpha\in T^d} (\mu_\alpha)_b, \quad \mu_\alpha := \mu\cdot \mathbb{1}_\alpha.$$

Наконец, если часть носителя μ лежит в ∂T^d, например в $(\partial T)^{k_0}\times T^{d-k_0}$, то мы проводим предыдущее рассуждение, оставляя переменные, отвечающие $(\partial T)^{k_0}$, на месте, а с оставшимися работая как с точечными нагрузками.

$$d\mu_b(\omega_1,\ldots,\omega_{k_0},\omega_{k_0+1},\ldots,\omega_d) = \sum_{\alpha\in T^{d-k_0}} \left(d\mu(\omega_1,\ldots,\omega_{k_0},\cdot,\ldots,\cdot)\cdot \mathbb{1}_{(\partial T)^{k_0}\times\{\alpha\}}\right)_b (\omega_{k_0}+1,\ldots,\omega_d).$$

В частности, если мера μ целиком сосредоточена на $(\partial T)^d$, то мы не делаем с ней ничего, $\mu_b = \mu$.

В итоге, поскольку каждая мера μ на $\overline{T}^d$ может быть разложена в соответствующие слагаемые с носителем на внутренности, границе или остове d-дерева, мы получаем меру μ_b с носителем на $(\partial T)^d$, и удовлетворяющую важному свойству

$$\mu(\overline{T}^d) = \mu_b((\partial T)^d).$$

Следующий шаг состоит в сравнении $w_{\vec{s}}$-потенциалов мер μ и μ_b. В силу линейности достаточно провести эту операцию только для одной точечной нагрузки $\mu_\alpha = \mu\cdot\mathbb{1}_\alpha$, поскольку мера μ – равно как и ее потенциал – представляется в виде соответствующей суммы. Вершина $\{\alpha\}$ d-дерева есть, в свою очередь, произведение одномерных вершин, ее граничная проекция $\partial\mathcal{S}(\alpha)$ тоже раскладывается в произведение одномерных проекций, следовательно

$$\mathbf{V}^{\mu_\alpha}_{w_{\vec{s}}} = \prod_{k=1}^d \mathbf{V}^{\mu_{\alpha_k}}_{w_{s_k}}, \quad \mathbf{V}^{(\mu_\alpha)_b}_{w_{\vec{s}}} = \prod_{k=1}^d \mathbf{V}^{(\mu_{\alpha_k})_b}_{w_{s_k}},$$

поэтому достаточно проводить все оценки на координатном дереве T. Итак, зафиксируем произвольную вершину $\gamma\in T$ и нагрузку σ в γ, и число $0 < s \le 1$, и, наконец, точку $\tau\in\overline{T}$. Мы рассматриваем два случая возможного взаимного расположения τ и γ. Если τ не потомок γ, тогда соответствующие потенциалы попросту совпадают,

$$\mathbf{V}^\sigma_{w_s}(\tau) = \sum_{\beta\ge\tau} \mathbf{I}^*\sigma(\beta)w_s(\beta) = \sum_{\beta\ge\tau}\mathbf{I}^*\sigma_b(\beta)w_s(\beta) = \mathbf{V}^{\sigma_b}_{w_s}(\tau),$$

так как $\mathbf{I}^*\sigma = \mathbf{I}^*\sigma_b$ выше γ, и обе величины обнуляются между $\gamma\wedge\tau$ и τ. С другой стороны, если $\tau \leq \gamma$, то равномерное распределение массы по граничной проекции влечет оценку

$$\mathbf{V}_{w_s}^{\sigma_b}(\tau) = \sum_{\beta \geq \tau} \mathbf{I}^*\sigma_b(\beta) w_s(\beta) = \sum_{\beta \geq \gamma} \mathbf{I}^*\sigma_b(\beta) w_s(\beta) + \sum_{\gamma > \beta \geq \tau} \mathbf{I}^*\sigma_b(\beta) w_s(\beta) =$$
$$\mathbf{V}_{w_s}^{\sigma}(\tau) + \sum_{\gamma > \beta \geq \tau} \mathbf{I}^*\sigma_b(\gamma) \cdot 2^{|\gamma|-|\beta|} w_s(\beta) \leq \mathbf{V}_{w_s}^{\sigma}(\tau) + C\mathbf{I}^*\sigma_b(\gamma) w_s(\gamma) \leq (C+1)\mathbf{V}_{w_s}^{\sigma}(\tau),$$

поскольку $\mathbf{V}_{w_s}^{\sigma}(\tau) = \mathbf{V}_{w_s}^{\sigma}(\gamma)$, а также

$$\sum_{\beta \leq \gamma} 2^{|\gamma|-|\beta|} w_s(\beta) \leq \sum_{k \geq 0} 2^{-k+(1-s)k} w_s(\gamma) \leq w_s(\gamma).$$

Мы видим, что

$$\mathbf{V}_{w_{\vec{s}}}^{\mu} \approx \mathbf{V}_{w_{\vec{s}}}^{\mu_b} \quad \text{and} \quad \mathcal{E}_{w_{\vec{s}}}[\mu] \approx \mathcal{E}_{w_{\vec{s}}}[\mu_b],$$

так как $|\mu| = |\mu_b|$ по построению. Обозначим теперь через μ_b и ν спуск равновесной меры множества E и равновесную меру его тени на остове $\partial\mathcal{S}(E)$ соответственно. По эквивалентности потенциалов имеем

$$\mathcal{E}_{w_{\vec{s}}}[\mu_b] \approx |\mu_b| = \cap_{w_{\vec{s}}}(E).$$

С другой стороны, из равновесности ν (свойство (I.13c) теоремы B) выводим, что $\mathcal{E}_{w_{\vec{s}}}[\mu_b, \nu] \geq |\mu_b|$. Эта оценка и неравенство Гельдера влекут

$$\mathcal{E}_{w_{\vec{s}}}[\mu_b] \lesssim \mathcal{E}_{w_{\vec{s}}}[\nu],$$

что и доставляет требуемое неравенство на емкости,

$$\mathrm{Cap}_{w_{\vec{s}}}(\partial\mathcal{S}(E)) \gtrsim \mathrm{Cap}_{w_{\vec{s}}}(E).$$

Доказательство завершено. □

Мы теперь можем завершить доказательство теоремы I.5. Напомним ее формулировку.

Теорема 3.2.3 *Пусть все компоненты s_i вектора $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in (0,1]$, $j = 1, \ldots, d$, $1 \leq d \leq 3$ достаточно близки к единице: $1 - s_j \leq \varepsilon_d$, для некоторой абсолютной положительной постоянной $\varepsilon = \varepsilon(d)$ и $j = 1, \ldots, d$. Пусть ν – неотрицательная мера на $\overline{\mathbb{D}}^d$. Тогда оператор вложения $id : \mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d) \to L^2(\overline{\mathbb{D}}^d, \nu)$ ограничен, т.е. мера ν карлесонова для пространства $\mathcal{H}_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)$, тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*

$$\nu(T(E)) \lesssim \mathrm{Cap}_{\vec{s}}(E), \quad E \subset \mathbb{T}^d \tag{3.31a}$$
$$\textstyle\sum_{R \subset E} \nu^2(T(R)) w_{\vec{s}}(R) \lesssim \nu(T(Q)), \quad \textit{для всех } E, \tag{3.31b}$$
$$\textstyle\sum_{R \subset Q} \nu^2(T(R)) w_{\vec{s}}(R) \lesssim \nu(T(Q)), \quad \textit{для всех } Q. \tag{3.31c}$$

Здесь буквами Q, R мы обозначаем диадические прямоугольники на (поли) торе $\mathbb{T}^d$, а $T(Q)$ – обычный тент Карлесона, построенный по прямоугольнику Q, множество E мы предпо-

лагаем состоящим из конечного объединения таких прямоугольников, а $T(E)$ – объединение соответствующих тентов.

Доказательство. Применяя теорему 3.1.1, мы видим, что мера ν карлесонова тогда и только тогда, когда ее дискретный образ $\tilde{\nu} := \Lambda^*\nu$ и вес $w_{\vec{s}}$ образуют следовую пару для на T^d. Теорема 2.1.1 предъявляет тестовые условия для такой пары. В частности, условие (3.31b) следует из$[w_{\vec{s}}, \tilde{\nu}]_C \gtrsim [w_{\vec{s}}, \tilde{\nu}]_{CE}$, а (3.31c) из $[w_{\vec{s}}, \tilde{\nu}]_B \gtrsim [w_{\vec{s}}, \tilde{\nu}]_{CE}$. Субъемкостное условие (3.31a) получается с помощью $[w_{\vec{s}}, \tilde{\nu}]_{SC} \gtrsim [w_{\vec{s}}, \tilde{\nu}]_{CE}$, теорем 3.2.1 и 3.2.2. Действительно, записывая $T(E)$ как объединение множеств вида Q_α и соответствующих кусков границ, видим, что $\nu(T(E)) \approx \tilde{n}u(\tilde{E})$, где $\tilde{E} \subset \overline{T}^d$ – объединение этих вершин α и Λ-прообразов граничных частей. Поскольку $\nu \approx \Lambda^*\Lambda_*\nu$ (отметим снова, что здесь мы на самом деле имеем точное равенство), мы выводим из теоремы 3.2.1 эквивалентность условия (3.31a) и

$$\tilde{\nu}(\tilde{E}) \lesssim \mathrm{Cap}_{w_{\vec{s}}}\, \partial\mathcal{S}(\tilde{E}), \quad \forall \tilde{E} = \mathcal{S}(\cup_{k=1}^M \{\alpha_k\}),\ \alpha_k \in T^d.$$

Осталось заметить, что правая часть соотношения выше сравнима с $\mathrm{Cap}_{w(\vec{s})}(\tilde{E})$ в силу теоремы 3.2.2, и мы получаем дискретное субъемкостное условие, эквивалентное ограниченности вложения. □

Если же мы рассматриваем *гармонические* пространства $\mathcal{H}^h_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)$ для $d = 1, 2, 3$, то мы можем отбросить требования близости $\vec{s}$ к $\vec{1}$.

Теорема 3.2.4 *Пусть $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in (0, 1], j = 1, \ldots, d$, $1 \le d \le 3$. Пусть ν – неотрицательная мера на $\overline{\mathbb{D}}^d$. Тогда оператор вложения $id : \mathcal{H}^h_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d) \to L^2(\overline{\mathbb{D}}^d, \nu)$ ограничен, т.е. мера ν карлесонова для пространства $\mathcal{H}^h_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d)$, тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*

$$\nu(T(E)) \lesssim \mathrm{Cap}_{\vec{s}}(E), \quad E \subset \mathbb{T}^d \tag{3.32a}$$

$$\textstyle\sum_{R\subset E} \nu^2(T(R)) w_{\vec{s}}(R) \lesssim \nu(T(Q)), \quad \text{для всех } E, \tag{3.32b}$$

$$\textstyle\sum_{R\subset Q} \nu^2(T(R)) w_{\vec{s}}(R) \lesssim \nu(T(Q)), \quad \text{для всех } Q. \tag{3.32c}$$

Доказательство. Доказательство в точности повторяет доказательство предыдущей теоремы, только здесь нам не требуется следить за вещественной и мнимой частями вопсроизводящих ядер. Действительно, гармоническое воспроизводящее ядро $K^h_{\vec{s}}(z, \zeta)$ удовлетворяет оценке

$$K^h_{\vec{s}}(z, \zeta) \approx |K_{\vec{s}}(z, \zeta)|,$$

поскольку $H^h_{s_j}(\mathbb{D}) = H_{s_j}(\mathbb{D}) \bigoplus \overline{H_{s_j}(\mathbb{D})}$, и $\mathcal{H}^h_{\vec{s}}(\mathbb{D}^d) = \bigotimes_{j=1}^d H^h_{s_j}(\mathbb{D})$. Так как мы теперь работаем с вещественным ядром, ограничения на значения компонент s_j не нужны. Оставшаяся часть доказательства есть дословное воспроизведение рассуждения из теоремы 3.2.3. □

Глава 4 Пространства роста гармонических функций: всплеск-разложение

4.1 Вспомогательные результаты и базовые сведения о КМА

4.1.1 Основная лемма

В этом параграфе мы докажем несколько вспомогательных утверждений. Первое из них представляет собой элементарную оценку.

Лемма 4.1.1 *Пусть функция* $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *и* $|x|^{2M} g(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *для некоторого целого числа* $M > \frac{d}{2}$. *Если* $\|\hat{g}\|_1 = C_1$ *и* $\|\Delta^M(\hat{g})\|_1 \le C_2$, *тогда*

$$\|g\|_1 \le c(d, M) \left(C_1^{2M-d} C_2^d\right)^{1/(2M)}.$$

Доказательство. Поскольку $g, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, то из формулы обращения следует, что $|g(x)| \le C_1$. Аналогично, $|x|^{2M} g(x), \widehat{|x|^{2M} g(x)} \in L^1$, и $|g(x)| \le C_2 |x|^{-2M}$. Таким образом,

$$\|g\|_1 \le c_d \left(C_1 \frac{R^d}{d} + C_2 \frac{R^{d-2M}}{2M-d}\right),$$

для всех $R > 0$. Выбрав число R таким образом, чтобы $R^{2M} = C_2 C_1^{-1}$, мы получаем искомую оценку. □

Пусть $P(x) = c_d(1+|x|^2)^{-(d+1)/2}$ – стандартное ядро Пуассона для верхнего полупространства, как обычно положим $P_{(s)}(x) = s^{-d} P(\frac{x}{s})$. Константа c_d выбирается таким образом, чтобы $\hat{P}(\tau) = e^{-2\pi|\tau|}$. Следующая лемма (она есть частный случай теоремы 1 работы [98]) применяется для 'деления' на ядро Пуассона в свертках и преобразованиях Фурье, и основана на результатах из [15]. Для удобства читателя мы предъявим ее доказательство.

Лемма 4.1.2 *Существует такая функция* $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *что* $\hat{\Phi}(\tau) = e^{2\pi|\tau|}$ *при* $|\tau| \le 1$.

Доказательство. Заметим, что функция $2\cosh(2\pi|\tau|)$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^d$, так что мы можем найти гладкую функцию Θ с компактным носителем, удовлетворяющую $\Theta(\tau) = 2\cosh(2\pi|\tau|)$ при $|\tau| \le 1$. Обозначим через Ξ обратное преобразование Фурье функции Θ. Очевидно, что $\Xi \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Положим, наконец, $\Phi = \Xi - P$, в таком случае $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, и $\hat{\Phi}(\tau) = \Theta(\tau) - e^{-2\pi|\tau|}$. При $|\tau| \le 1$ имеем $\hat{\Phi}(\tau) = e^{2\pi|\tau|}$. □

Теперь мы можем оценить часть функции $u(\cdot,t) \in h^\infty_w$, отвечающую ограниченным частотам. Следующий результат и составляет нашу основную лемму.

Лемма 4.1.3 *Пусть u – ограниченная функция в $\mathbb{R}^{d+1}_+$, а функция $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет условию $\operatorname{supp}\hat\sigma \subset B_{\delta^{-1}}$. Тогда*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)\sigma(x)dx\right| \le C_d \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{d+1}_\delta)}\|\sigma\|_1,$$

где константа C_d зависит только от размерности d, а $\mathbb{R}^{d+1}_\delta = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1} :\ t \ge \delta > 0\}$.

Доказательство. Запишем следующее тождество в смысле обобщенных функций

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)\sigma(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u(\cdot,t)}(\tau)\hat\sigma(\tau)d\tau.$$

Пусть теперь функция Φ предоставлена леммой 4.1.2, положим $\Phi_\delta(x) = \delta^{-d}\Phi(\delta^{-1}x)$, тогда $\widehat{\Phi_\delta}(\tau) = \hat\Phi(\delta\tau)$, и $\|\Phi_\delta\|_1 = \|\Phi\|_1$. Так как преобразование Фурье $\hat\sigma$ обнуляется вне шара $B_{1/\delta}$, имеем

$$\hat\sigma(\tau) = \widehat{\Phi_\delta}(\tau)e^{-2\pi|\tau|\delta}\hat\sigma(\tau) = \widehat{\Phi_\delta}(\tau)\hat P_\delta(\tau)\hat\sigma(\tau).$$

В таком случае

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)\sigma(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} u(\widehat{\cdot,t+}\delta)(\tau)\widehat{\sigma*\Phi_\delta}(\tau)d\tau\right| =$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} u(x,t+\delta)(\sigma*\Phi_\delta)(x)dx\right| \le \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{d+1}_\delta)}\|\sigma\|_1\|\Phi_\delta\|_1$$

и мы получаем искомую оценку. □

4.1.2 Базовые сведения о кратномасштабном анализе

Мы работаем с гладким (порядка r) кратномасштабной аппроксимацией (КМА) в $\mathbb{R}^d$. Здесь мы, в основном, следуем классическим книгам И. Добеши [28] и И. Мейера [69]. Через $K(x,y)$ мы обозначаем ядро ортогональной проекции на подпространство V_0, предполагая также, что

$$K(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \phi(x-k)\overline{\phi(y-k)},$$

где $\phi(x)$ и все ее производные вплоть до порядка r включительно убывают быстрее любой степени x. Более того, мы предполагаем, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \phi(x-k) = 1,$$

см [69, Глава 2.10].

Положим $K_j(x,y) = 2^{jn}K(2^jx, 2^jy)$, также положим $D(x,y) = K_1(x,y) - K(x,y)$, и

$$D_j(x,y) = 2^{jd}D(2^jx, 2^jy) = K_{j+1}(x,y) - K_j(x,y).$$

Поскольку мы имеем дело с r-гладким КМА, мы получаем

$$D(x,y) = \sum_{|\beta|=r} \partial_y^\beta D_\beta(x,y), \tag{4.1}$$

где D_β суть функции класса Шварца, удовлетворяющие $|D_\beta(x,y)| \leq C_m(1+|x-y|)^{-m}$, см [69, Глава 2.8]. Далее, для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ определим

$$K_0f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)dy \quad \text{и} \quad D_jf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} D_j(x,y)f(y)dy.$$

Как обычно, $V_j = \{f(x) : f(2^{-j}x) \in V_0\}$. Нам также потребуются и L^∞-версии этих пространств,

$$V_0(\infty) = \{f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a(k)\phi(x-k), \quad \{a(k)\} \in l^\infty(\mathbb{Z}^d)\},$$

и $V_j(\infty) = \{f(x) : f(2^{-j}x) \in V_0(\infty)\}$, $V_j \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$.
Выполняется следующее неравенство типа Бернштейна, см. [69, Глава 2.5]. Именно, существуют такая константа $C = C(\phi)$, что

$$\|\partial^\beta f\|_\infty \leq C2^{|\beta|j}\|f\|_\infty \tag{4.2}$$

для любой функции $f \in V_j(\infty)$ и мультииндекса β, такого что $|\beta| \leq r$.

4.1.3 Кратномасштабная аппроксимация ядра Пуассона

Нам потребуется пара оценок для гладкой кратномасштабной аппроксимации ядер Пуассона.

Лемма 4.1.4 *Найдется такое число C, что*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (P_{(s)}(\xi-y) - P_{(s)}(\xi-x))K(x,y)dx \right| dy \leq Cs^{-r}$$

для произвольной точки $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Доказательство. Обозначим $f_\xi(x) = P_{(s)}(\xi - x)$, тогда

$$\int_{\mathbb{R}^d} (P_{(s)}(\xi-y) - P_{(s)}(\xi-x))K(x,y)dx =$$
$$P_{(s)}(\xi-y) - \int_{\mathbb{R}^d} f_\xi(x)E(y,x)dx = f_\xi(y) - (K_0f_\xi)(y).$$

Мы имеем

$$|f_\xi(x) - K_0f_\xi(x)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^d} D_j(x,y)f_\xi(y)dy \right|.$$

Интегрируя (4.1), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} D(x,y) f_\xi(y) dy \right| dx \le C \sum_{|\beta|=r} \|\partial^\beta f_\xi\|_1 \le C s^{-r}.$$

С помощью ремасштабирования также имеем $D_j f(x) = (D_0 f_j)(2^j x)$, где $f_j(y) = f(y 2^{-j})$. Теперь

$$\|D_j f\|_1 = 2^{-dj} \|D f_j\|_1 \le C 2^{-rj} \sum_{|\beta|=r} \|\partial^\beta f\|_1.$$

Мы применяем эту оценку для $j = 0, 1, ...$ и $f = f_\xi$, получая при этом

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_\xi(x) - K_0 f_\xi(x)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \|D_j f_\xi\|_1 \le C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-rj} \sum_{|\beta|=r} \|\partial^\beta f_\xi\|_1 \le C s^{-r}.$$

□

Лемма 4.1.5 *Найдется такое число C, что*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (K_J(x,y) - K(x,y)) P_{(s)}(y-\xi)\, dy \right| d\xi \le C s^{-r}$$

для произвольных точки $x \in \mathbb{R}^d$ и числа $J \ge 1$.

Доказательство. В обозначениях предыдущей леммы имеем

$$\int_{\mathbb{R}^d} (K_J(x,y) - K(x,y)) P_{(s)}(y-\xi)\, dy = \sum_{j=0}^{J-1} D_j f_\xi(x),$$

а в силу (4.1)

$$\int_{\mathbb{R}^d} |D_0 f_\xi(x)|\, d\xi \le C \sum_{|\beta|=r} \|\partial^\beta P_{(s)}\|_1 \le C s^{-r}.$$

Аналогично для $j \ge 1$ выводим

$$\int_{\mathbb{R}^d} |D_j f_\xi(x)|\, d\xi \le C 2^{-rj} s^{-r}.$$

Доказательство завершено. □

4.2 Кратномасштабный анализ в классах роста

4.2.1 Разбиение на блоки и прямые оценки

Для веса w, удовлетворяющего условию удвоения, мы выберем достаточно большую константу A и зададим последовательность целых чисел $\{n_l\}_l$ таким образом, что $n_0 = 0$, $n_l > n_{l-1}$, а

$w(2^{-n_l}) \in [A^l, A^{l+1})$. найдется такое число m^*, зависящее только от веса w, удовлетворяющее

$$\frac{2^{-m^*n_l}w(2^{-n_l})}{2^{-m^*n_{l-1}}w(2^{-n_{l-1}})} < 1-\varepsilon. \tag{4.3}$$

В случае, если вес w обладает некоторой регулярностью, мы можем реализовать последнее неравенство, просто выбрав m^* так, чтобы функция $t^{m^*-1}w(t)$ возрастала.

Как мы уже упоминали выше, мы рассматриваем r-гладкую кратномасштабную аппроксимацию в $\mathbb{R}^d$, именно, мы выбираем число r так, чтобы $r > m^* + d$, где число m^* было выбрано ранее. Вместо обычного диадического разбиения $L^2(\mathbb{R}^d) = V_0 \cup \bigcup_{j\geq 1} V_j \setminus V_{j-1}$ мы работаем с блоками, приспособленными к конкретному весу w,

$$L^2(\mathbb{R}^d) = V_0 \cup \bigcup_{l\geq 1} V_{n_l} \setminus V_{n_{l-1}}.$$

Именно, мы собираем все слагаемые всплеск-разложения с номерами поколений $n_{l-1}+1, ..., n_l$ в один блок при этом мы работаем с ограниченными функциями, которые, вообще говоря, не обязаны быть квадратично суммируемыми. Обозначим через $\{\psi_p\}_{p=1}^q$ набор r-гладких быстро убывающих функций, таких что $\{\psi_p(x-k), 1 \leq p \leq q, k \in \mathbb{Z}^d\}$ образуют ортогональный базис подпространства $V_1 \ominus V_0$, см. [69, Гл. 3.1, 3.6]. Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ и $k \in \mathbb{Z}^d$ имеем

$$\psi_{p,jk} = 2^{dj/2}\psi_p(2^j x - k).$$

Далее мы пишем

$$\langle f(y), g(y)\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\overline{g(y)}\, dy.$$

если соответствующий интеграл сходится.

Напомним формулировку теоремы I.12.

Теорема 4.2.1 *Для произвольной функции $u \in h_w^\infty(\mathbb{R}_+^{d+1})$ определим*

$$g_0(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle u(y,t), \phi(y-k)\rangle \phi(x-k), \quad \textit{and}$$

$$g_l(x,t) = \sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_l} \sum_{p=1}^{q} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle u(y,t), \psi_{p,jk}(y)\rangle \psi_{p,jk}(x), \quad l \geq 1.$$

Тогда

$$u(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l(x,t), \quad g_l(\cdot,t) \in V_{n_l}(\infty) \quad \textit{and}$$

$$\|g_l(\cdot,t)\|_\infty \leq C\|u\|_{v,\infty} w(2^{-n_l}), \quad l \geq 0, \tag{4.4}$$

где C зависит только от всплеска ϕ и постоянной A.

Доказательство. Положим, как обычно $K_j(x,y) = 2^{jd}K(2^jx, 2^jy)$, тогда

$$g_0(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)u(y,t)\,dt \quad \text{and}$$
$$g_l(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} (K_{n_l}(x,y) - K_{n_{l-1}}(x,y))u(y,t)\,dy.$$

Очевидно, $g_l(\cdot,t) \in V_{n_l}(\infty)$. Более того, для каждого t функция $u(\cdot,t)$ равномерно непрерывна, так что ряд $\sum_l g_l(x,t)$ сходится к $u(x,t)$ равномерно на $\mathbb{R}^d$.

Преобразование Фурье функции $K(x,\cdot)$ по второй переменной мы обозначим через $\hat{K}(x,\tau)$ (мы никогда не используем преобразование Фурье во всем пространстве $\mathbb{R}^{2d}$). Отметим, что

$$|\hat{K}(x,\tau)| \le C(1+|\tau|)^{-m^*-d}$$

равномерно по x, а так как $r > m^* + d$, то эта же оценка верна и для всех производных $\hat{K}(x,\tau)$ по τ. Выберем еще какую-нибудь гладкую функцию $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с носителем в $[-1,1]$, которая равна единице на отрезке $[-1/2, 1/2]$, причем $0 \le \eta \le 1$.

Тогда преобразование Фурье функции $K_N(x,\cdot)$, где $N \le n_l$, допускает следующее разбиение

$$\widehat{K_N}(x,\tau) = \hat{K}(2^Nx, 2^{-N}\tau) = \hat{K}(2^Nx, 2^{-N}\tau)\eta(2^{-n_l}|\tau|) +$$
$$\sum_{i=l+1}^{\infty} \hat{K}(2^Nx, 2^{-N}\tau)(\eta(2^{-n_i}|\tau|) - \eta(2^{-n_{i-1}}|\tau|)) =:$$
$$\zeta^0_{N,l}(x,\tau) + \sum_{i=l+1}^{\infty} \zeta_{N,i}(x,\tau).$$

Во-первых, мы имеем

$$\|\zeta^0_{N,l}(x,\cdot)\|_1 \le \|\hat{K}(2^Nx, 2^{-N}\cdot)\|_1 \le 2^{dN}\|\hat{K}(2^Nx,\cdot)\|_1.$$

Во-вторых, поскольку $N \le n_l$, то верна оценка $\|\Delta^M_\tau \zeta^0_{N,l}(x,\cdot)\|_1 \le C2^{(d-2M)N}$. Пусть также $\sigma^0_{N,l} = \mathcal{F}^{-1}(\zeta^0_{N,l})$. Тогда из леммы 4.1.1 следует $\|\sigma^0_{N,l}(x,\cdot)\|_1 \le C$.

Далее, используя оценки на убывание $\hat{K}(x,\tau)$, получаем

$$\|\zeta_{N,i}(x,\cdot)\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{K}(2^Nx, 2^{-N}\tau)(\eta(2^{-n_i}|\tau|) - \eta(2^{-n_{i-1}}|\tau|))|\,d\tau \le$$
$$2^{dN}\int_{2^{n_{i-1}-N-1} \le |\xi| \le 2^{n_i - N}} |\hat{K}(2^Nx,\xi)|\,d\xi \le C2^{dN+m^*(N-n_{i-1})}.$$

Аналогично, так как $n_i > N$, а производные $\hat{K}(x,\tau)$ удовлетворяют тем же оценкам на убывание, получаем

$$\|\Delta_\tau^M \zeta_{N,i}(x,\cdot)\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \left|\Delta_\tau^M \left(\hat{K}(2^{n_l}x, 2^{-n_l}\tau)(\eta(2^{-n_i}|\tau|) - \eta(2^{-n_{i-1}}|\tau|))\right)\right| d\tau$$
$$\le C2^{(d-2M)N+m^*(N-n_{i-1})},$$

для произвольного $M \ge 1$.

Далее, определим $\sigma_{N,i}(x,y) = \mathcal{F}^{-1}(\zeta_{N,i}(x,\cdot)),\ i > l$. Применяя лемму 4.1.1 еще раз, приходим $\|\sigma_{N,i}\|_1 \le C2^{m^*(N-n_{i-1})}$. Наконец, применяя лемму 4.1.3 и учитывая (4.3), получаем

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} K_N(x,y)u(y,t)\,dy\right| \le$$
$$C\|u\|_{v,\infty}\left(w(2^{-n_l}) + 2^{m^*N}\sum_{i=l+1}^{\infty} 2^{-m^*n_{i-1}}w(2^{-n_i})\right) \le C\|u\|_{v,\infty}A^l, \tag{4.5}$$

для любой точки$x \in \mathbb{R}^d$ числа $N \le n_l$. Тогда (4.4) следует при выборе $N = n_l$ и $N = n_{l-1}$. □

Следствие 4.2.1 *Пусть $\{\psi_{p,jk}\}$ – ортогональный гладкий всплеск-базис. Тогда найдется такое число C, что для любой функции $u \in h_w^\infty$ выполняется неравенство*

$$|c_{p,jk}(u(\cdot,t))| \le C2^{-dj/2}\|u\|_{v,\infty}w(2^{-j}), \tag{4.6}$$

при $t > 0,\ j \in \mathbb{Z}_+,\ k \in \mathbb{Z}^d$.

Доказательство. Очевидно, что

$$|\langle u(x,t), \psi_{p,jk}(x)\rangle| = |\langle g_l(x,t), \psi_{p,jk}(x)\rangle| \le \|g_l(x,t)\|_\infty\|\psi_{p,jk}\|_1,$$

где $j \in (n_{l-1}, n_l]$. Тогда (4.4) влечет (4.6). □

4.2.2 Обратные оценки и описание коэффициентов

Верно и утверждение, обратное к теореме I.12. Напомним формулировку.

Теорема 4.2.2 *Пусть u – гармоническая в верхнем полупространстве $\mathbb{R}_+^{d+1}$ функция, ограниченная на каждом полупространстве вида $\{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}, t \ge t_0 > 0\}$. Для каждого числа $t > 0$ предположим, что верно представление*

$$u(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l(x,t),$$

причем ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}^d$, $g_0(\cdot,t) \in V_0(\infty)$,

$$g_l(x,t) = \sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_l} \sum_{p=1}^{q} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_p^{(jk)}(t)\psi_{p,jk}(x),\ l \ge 1$$

и что найдется такое число B, что

$$\|g_l(\cdot,t)\|_\infty \leq Bw(2^{-n_l}),$$

для любого числа $t > 0$. Тогда $u \in h^\infty_w$, и $\|u\|_{w,\infty} \leq CB$, где число C зависит только от постоянной A и всплеска ϕ.

Доказательство. Зафиксируем число $s \in (0,1]$, и подберем такое число L, что $s \in [2^{-n_{L+1}}, 2^{-n_L})$. Тогда

$$u(x,t+s) = \left(u(\cdot,t) * P_{(s)}\right)(x) = \sum_{l=0}^{\infty}(g_l(\cdot,t) * P_{(s)})(x) =$$
$$\sum_{l=0}^{L+1}\left(g_l(\cdot,t) * P_{(s)}\right)(x) + \sum_{l=L+2}^{\infty}\left(g_l(\cdot,t) * P_{(s)}\right)(x).$$

Для каждого $l \leq L+1$ имеем

$$|g_l(\cdot,t) * P_{(s)}| \leq \|g_l(\cdot,t)\|_\infty \leq Bw(2^{-n_l}).$$

Поскольку $\langle g_l(y,t), K_{n_{l-1}}(x,y)\rangle = 0$, то для $l > L+1$ получаем

$$\left(g_l(\cdot,t) * P_{(s)}\right)(x) =$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} g_l(y,t)P_{(s)}(x-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} g_l(y,t)K_{n_{l-1}}(\xi,y)P_{(s)}(x-w)\,d\xi dy =$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} g_l(y,t)\int_{\mathbb{R}^d}(P_{(s)}(x-y) - P_{(s)}(x-\xi))K_{n_{l-1}}(\xi,y)\,d\xi\,dy.$$

Ремасштабируя и применяя лемму 4.1.4, выводим

$$|g_l(\cdot,t) * P_{(s)}| \leq CBw(2^{-n_l})(2^{n_{l-1}}s)^{-r}.$$

Отметим, что $2^{n_{l-1}}s \geq 1$, и $r > m^*$, где m^* выбрано так, что выполняется (4.3). Тогда

$$|g_l(\cdot,t) * P_{(s)}| \leq CBA^2 s^{-m^*} w(2^{-n_{l-1}})2^{-m^* n_{l-1}}.$$

Соберем, наконец, все оценки воедино, и, принимая во внимание (4.3), получим

$$|u(x,t+s)| \leq CBw(s),$$

для произвольного $t > 0$.

$\square$

В случае, когда вес w растет достаточно быстро, мы можем переформулировать наш результат в терминах всплеск-коэффициентов. Для весов общего типа такое описание недоступно.

Определение 4.2.1. *Мы говорим, что вес w имеет степенной рост, если он удовлетворяет условию удвоения (I.37), и существует такое число κ, что для последовательности n_j, определенной в 4.2.1 верно $n_{j+1} - n_j \le \kappa$ для всех $j \ge 0$.*

Типичным примером веса степенного роста служит функция $w(t) = t^{-a}$, $a > 0$. Нормальные веса (в терминологии Шилдса и Уильямса, [88]) тоже относятся к этому классу. Для степенных весов w и гармонические функции из h_w^∞ могут быть описаны с помощью их *всплеск-коэффициентов*, это обеспечивается следствием 4.2.1 в сочетании с утверждением ниже.

Следствие 4.2.2 *Пусть w – вес степенного роста, а u– гармоническая в $\mathbb{R}_+^{d+1}$ функция, ограниченная на каждом полупространстве $\{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}, t \ge t_0 > 0\}$. Предположим, что найдется такое число B, что*

$$|b_k(u(\cdot,t))| \le B, \quad u \quad |c_{p,jk}(u(\cdot,t))| \le 2^{-dj/2} B w(2^{-j}), \tag{4.7}$$

для всех $t > 0$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}^d$. Тогда $u \in h_w^\infty$, и $\|u\|_{w,\infty} \le CB$, где C не зависит от функции u.

Доказательство. Определим функцию g_l как в теореме 4.2.1. Мы хотим показать, что $\|g_l(x,t)\| \le Bw(2^{-n_l})$. Поскольку между номерамиn_{l-1} и n_l зажато конечное число диадических поколений, то достаточно оценить

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle u(y,t), \psi_{p,jk}(y)\rangle \psi_{p,jk}(x)$$

для каждого j. Применяя (4.7)и неравенство из [69, Глава 3.1],

$$\max_x \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\psi_{p,jk}(x)| \le C 2^{dj/2},$$

мы получаем искомую оценку. □

4.2.3 Описание с помощью всплесков

Теперь мы доказываем теорему I.10, напомним ее формулировку для удобства читателя.

Теорема 4.2.3 *функция, ограниченная на каждом полупространстве $\{(x,t) : t > t_0 > 0\}$. Тогда $u \in h_w^\infty$ тогда и только тогда, когда существует такое число C, что*

$$M_N(u) = \sup_{t>0} \|S_N(u(\cdot,t))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le Cw(2^{-N}).$$

Аналогично, $u \in h_w^0$ тогда и только тогда, когда $\lim_{N\to\infty} M_N(u)(w(2^{-N}))^{-1} = 0$.

На самом деле эта теорема может быть выведена непосредственно из доказательств теорем 4.2.1 и 4.2.2, мы, однако, предъявим отдельное доказательство. Мы изменим формулировку теоремы, чтобы учесть разбиение на всплеск-блоки.

Пусть $u \in h^\infty_w$ и $n_{l-1} \le N < n_l$. Мы имеем

$$S_N(u(x,t)) = \int_{\mathbb{R}^d} K_N(x,y)u(y,t)\,dy,$$

и $w(2^{-N}) \ge cA^l$. Далее, применяя (4.5) при данном конкретном l, мы получаем $|S_N(u(x,t))| \le C\|u\|_{v,\infty} w(2^{-N})$. Если, к тому же, $u \in h^0_w$, то с помощью аналогичных рассуждений мы выводим

$$M_N(u) = \sup_t |S_N(u(x,t))| = o(w(2^{-N})), \quad N \to \infty.$$

Для доказательства обратного утверждения предположим, что $M_N(u) \le \varepsilon_l w(2^{-N})$, если $N \ge n_{l-1}$. Тогда, очевидно,

$$|g_l(x,t)| = |S_{n_l}(x,t) - S_{n_{l-1}}(x,t)| \le 2\varepsilon_l w(2^{-n_l}).$$

Из теоремы 4.2.2 следует, что $u \in h^\infty_w$, если числа ε_l равномерно ограничены. В том случае, когда $\varepsilon_l \to 0$ при $l \to \infty$, мы получаем

$$|g_l(\cdot,t) * P_{(s)}| \le 2\varepsilon_l w(2^{-n_l})$$

для произвольного числа $t > 0$. Более того, рассуждая как в доказательстве теоремы 4.2.2, имеем

$$|g_l(\cdot,t) * P_{(s)}| \le C\varepsilon_l w(2^{-n_l})(2^{n_{l-1}}s)^{-r}.$$

Теперь мы выбираем такое число L, что $s \in [2^{-n_{L+1}}, 2^{-n_L})$ и запишем оценку

$$|u(x,t+s)| \le \sum_{l=0}^{L+1} 2\varepsilon_l w(2^{-n_l}) + C\varepsilon_L \sum_{l=L+2}^{\infty} w(2^{-n_l})(2^{n_{l-1}}s)^{-m} \le$$
$$\sum_{l=0}^{L+1} 2\varepsilon_l w(2^{-n_l}) + C_1\varepsilon_L (2^{n_{L+1}}s)^{-m} w(2^{-n_{L+1}}) \le c_L w(s),$$

где c_L стремится к нулю при L стремящемся к бесконечности. Доказательство теоремы 4.2.3 завершено.

Мы также предъявим еще одну формулировку теоремы, теперь уже в терминах граничных значений гармонических функций. Пусть $h^{-a} = h^\infty_{t^{-a}}$ для $a > 0$, и $h^{-\infty} = \cup_a h^{-a}$. Условие удвоения для веса w влечет $h^\infty_w \subset h^{-a}$ для некоторого $a > 0$. Гармонические функции из класса $h^{-\infty}$ имеют граничные значения в смысле распределений конечного порядка, см. например [92]. Таким образом, если мы выберем достаточно гладкую кратномасштабную аппроксимацию, порожденную всплесками с компактными носителями, то мы можем определить всплеск-коэффициенты граничных значений $u \in h^\infty_w$. Это позволяет нам переформулировать основной результат следующим образом.

Предположим, что $u \in h^{-a}$ и обозначим через U граничные значения функции u в смысле распределений. Обозначим также через $b_k(U)$ и $c_{p,jk}(U)$ всплеск-коэффициенты распределения U относительно некоторого достаточно гладкого всплеск-базиса с компактным носителем. Определим

$$S_N(U)(x) = \sum_{p=1}^{q} \sum_{j=0}^{N} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{p,jk}(U)\psi_{p,jk}(x) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} b_k(U)\phi(x-k).$$

Следствие 4.2.3 *Пусть $h_w^\infty \subset h^{-a}$ и положим $u \in h^{-a}$. Тогда $u \in h_w^\infty$ тогда и только тогда, когда найдется такое число $K > 0$, что*

$$\|S_N(U)\|_\infty \leq Kw(2^{-N})$$

для любого числа N.

Доказательство. Очевидно, что $c_{p,jk}(U) = \lim_{t\to 0} c_{p,jk}(u(\cdot,t))$, так что

$$S_N(U)(x) = \lim_{t\to 0} S_N(u(\cdot,t))(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Следовательно, если $u \in h_w^\infty$, то верна искомая оценка.

Докажем обратное. Рассмотрим для этого последовательность $u_N(\cdot, y) = S_N(U) * P_{(y)}$ гармонических в верхнем полупространстве функций. Повторяя оценки из доказательства теоремы 4.2.2, мы заключаем, что $u_N \in h_w^\infty$, и $\|u_N\|_{w,\infty} \leq CK$. Следовательно последовательность $\{u_N\}$ образует нормальное семейство в верхнем полупространстве, и мы можем выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{u_{N_j}\}$, предел который мы обозначим через $u_0 \in h_w^\infty$, а через U_0 – граничные значения u_0. Итак, $c_{p,jk}(U_0) = c_{p,jk}(U)$, и $b_k(U_0) = b_k(U)$. Поэтому $U_0 = U$, а так как u_0 и u ограничены в $\{(x,t), t \geq 1\}$, то немедленно получаем, что $u = u_0 \in h_w^\infty$. $\square$

Глава 5 Пространства роста на липшицевых областях: граничная осцилляция

5.1 Доказательства теорем I.14 и I.15

5.1.1 Основная аппроксимационная лемма

Как и обычно, для пары функций f и g мы пишем $f \lesssim g$, если существует положительная константа $C = C(w, d, \|\phi'\|_\infty, \|u\|_{w,\infty})$, такая что $f \le Cg$. Мы также пишем $f \approx g$, если $f \lesssim g$ и $g \lesssim f$. Рассмотрим такую убывающую последовательность положительных чисел $\{s_k\}_{k=0}^\infty$, что

$$w(s_k) = 2^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

и положим

$$n_0 = 0,\ n_k = -\left[\frac{\log s_k}{\log 2}\right], \quad k \in \mathbb{N}$$

(мы допускаем возможность $n_k = n_{k+1}$ для некоторых $k \in \mathbb{N}$ – это происходит с быстро растущими весами).
Из условия удвоения (I.37) следует оценка $w(2^{-n_k}) \approx 2^k$. Рассмотрим теперь величину $I(x, \delta)$, определенную в (I.43). Приближение $I(x, \delta)$ с помощью мартингалов доставляется леммой I.2, формулировку которой мы и приведем.

Лемма 5.1.1 *Предположим, что $u \in h_w^\infty(\Omega_\phi)$. ТОгда для каждой точки $x_0 \in \mathbb{R}^d$ найдется вероятностная мера μ на $Q(x_0)$ и (супер-) диадический мартингал $S = \{S_k, \mathcal{F}_{n_k}, \mu\}_{k=0}^\infty$ на $Q(x_0)$, такие что μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $Q(x_0)$, и для каждого числа $k \in \mathbb{Z}_+$ верны оценки*

$$|S_k(x) - I(x, s_k)| \lesssim 1, \tag{5.1a}$$

$$|S_k(x) - S_{k+1}(x)| \lesssim 1, \quad x \in Q(x_0). \tag{5.1b}$$

5.1.2 Как вывести теорему I.14

Предполагая, что верна лемма 5.1.1, мы используем стандартное рассуждение. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}^d$ и положим

$$E = \{x \in Q(x_0) : \lim_{m\to\infty} |\langle S\rangle_m|(x) < \infty\}.$$

Неравенство (5.1b) обеспечивает $\langle S\rangle_m^2 \lesssim m,\ m \geq 1$. Применяя закон повторного логарифма для мартингалов к S (см., например, теорему **3.0.2** в [8]), мы получаем

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{|S_m|(x)}{\sqrt{m\log\log m}} \lesssim 1 \qquad \mu \text{ п.в. } x \in Q(x_0)\setminus E.$$

Хорошо известно, что для μ-п.в. точек $x \in E$ последовательность $\{S_m(x)\}$ ограничена, так что из (5.1a) заключаем, что последовательность $\{I(x, s_m)\}$ ограничена μ п.в. на E. Следовательно

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{|I(x,s_m)|}{\sqrt{m\log\log m}} \lesssim 1 \quad \mu \text{ п.в. } x \in Q(x_0). \tag{5.2}$$

Стало быть для $s_m \leq \delta \leq s_{m-1}$ и $x \in Q(x_0)$ имеем

$$\begin{aligned} |I(x,s_m) - I(x,\delta)| &\leq \int_{s_m}^{\delta} |u(x,\phi(x)+y)|\, d\left(\frac{1}{w(y)}\right) \\ &\lesssim \log w(s_m) - \log w(s_{m-1}) = 1, \end{aligned}$$

также, очевидно, $w(\delta) \geq w(s_{m-1}) = \frac{1}{2}w(s_m)$. Учитывая оценку (5.2) и абсолютную непрерывность меры μ относительно меры Лебега, приходим к

$$\limsup_{\delta\to\infty} \frac{|I(x,\delta)|}{\sqrt{\log w(\delta)\log\log\log w(\delta)}} \lesssim 1, \quad \text{п.в. } x \in Q(x_0).$$

Неравенство (I.44) следует немедленно.

5.1.3 Доказательство леммы 5.1.1: вспомогательная функция H

Приближение величины $I(x,\theta)$ функциями из пространства Блоха обеспечивается следующей леммой

Лемма 5.1.2 *Предположим, что $u \in h_w^\infty(\Omega_\phi)$. Положим*

$$H(x,t) = \int_0^1 u(x,t+y)\, d\left(\frac{1}{w(y)}\right), \quad (x,t)\in\Omega_\phi. \tag{5.3}$$

Тогда H принадлежит пространству Блоха $\mathcal{B}(\Omega_\phi)$, причем $\|H\|_{\mathcal{B}} \lesssim 1$. Более того,

$$|H(x,\phi(x)+\theta) - I(x,\theta)| \lesssim 1, \quad x\in\mathbb{R}^d, 0<\theta\leq 1. \tag{5.4}$$

Доказательство. Заметим сначала, что функция H гармонична в Ω_ϕ как усреднение гармонических функций. Далее мы докажем следующее неравенство

$$|\nabla u|(x,\phi(x)+\theta) \lesssim \frac{w(\theta)}{\theta}, \quad x\in\mathbb{R}^d,\ \theta>0. \tag{5.5}$$

Зафиксируем произвольное положительное число θ. Поскольку функция ϕ липшицева, то $\operatorname{dist}((x,\theta+\phi(x)),\partial\Omega_\phi) \approx \theta$ для всех $x\in\mathbb{R}^d$ и положительных θ. Из (I.37) выводим, что для

$y \geq \frac{\theta}{2}$ верно

$$|u(x, \phi(x) + y)| \leq w(\mathrm{dist}(x, y + \phi(x)), \partial\Omega_\phi)) \lesssim w\left(\frac{\theta}{2}\right), \tag{5.6}$$

так что найдется константа $C = C(d, \phi, w)$, удовлетворяющая

$$0 \leq u(x, y) + Cw\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq (C+1)w\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (x, y) \in \Omega_{\phi + \frac{\theta}{2}}.$$

Теперь оценка (5.5) следует из (I.37) и неравенства Гарнака. При $(x, \theta) \in \Omega_\phi$ неравенство (5.5) влечет

$$\begin{aligned}
|\nabla H|\,(x, \phi(x) + \theta) &\leq \int_0^1 |\nabla u|(x, \phi(x) + \theta + y)\, d\left(\frac{1}{w(y)}\right) \\
&\lesssim \int_0^1 \frac{w(\theta + y)}{\theta + y}\, d\left(\frac{1}{w(y)}\right) = \int_0^\theta \frac{w(\theta + y)}{\theta + y}\, d\left(\frac{1}{w(y)}\right) + \int_\theta^1 \frac{w(\theta + y)}{\theta + y}\, d\left(\frac{1}{w(y)}\right).
\end{aligned}$$

В силу убывания функции $\frac{w(y)}{y}$ имеем

$$\int_0^\theta \frac{w(\theta + y)}{\theta + y}\, d\left(\frac{1}{w(y)}\right) \leq \int_0^\theta \frac{w(\theta)}{\theta}\, d\left(\frac{1}{w(y)}\right) = \frac{1}{\theta}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\int_\theta^1 \frac{w(\theta + y)}{\theta + y}\, d\left(\frac{1}{w(y)}\right) &\leq \int_\theta^1 \frac{w(y)}{y}\, d\left(\frac{1}{w(y)}\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{[\log \frac{1}{\theta}]} \int_{2^k\theta}^{2^{k+1}\theta} \frac{1}{y} d \log \frac{1}{w(y)} \leq \sum_{k=0}^{[\log \frac{1}{\theta}]} \frac{1}{2^k\theta} \int_{2^k\theta}^{2^{k+1}\theta} d\log\frac{1}{w(y)} \\
&\leq \frac{1}{\theta} \sum_{k=0}^{[\log \frac{1}{\theta}]} 2^{-k} (\log w(2^k\theta) - \log w(2^{k+1}\theta)) \\
&\leq \frac{1}{\theta} \sum_{k=0}^{[\log \frac{1}{\theta}]} 2^{-k} (\log\left(Dw(2^{k+1}\theta)\right) - \log w(2^{k+1}\theta)) \\
&\leq \frac{\log D}{\theta} \sum_{k=0}^{[\log \frac{1}{\theta}]} 2^{-k} \lesssim \frac{1}{\theta}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Собирая все оценки воедино, приходим к

$$|\nabla H|\,(x, \phi(x) + \theta) \lesssim \frac{1}{\theta} \approx \frac{1}{\mathrm{dist}((x, \phi(x) + \theta), \partial\Omega_\phi)},$$

что и доказывает первую часть леммы.

Чтобы получить(5.4), запишем

$$
\begin{aligned}
&H(x,\phi(x)+\theta)-I(x,\theta)\\
&\qquad=\int_0^1 u(x,\phi(x)+\theta+y)\,d\left(\frac{1}{w(y)}\right)-\int_\theta^1 u(x,y)\,d\left(\frac{1}{w(y)}\right)\\
&\qquad\qquad=\int_0^\theta u(x,\phi(x)+\theta+y)\,d\left(\frac{1}{w(y)}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad+\int_\theta^1 \left(u(x,\phi(x)+\theta+y)-u(x,\phi(x+y))\right)\,d\left(\frac{1}{w(y)}\right).
\end{aligned}
$$

Рассуждая как и в первой части доказательства, имеем

$$
\left|\int_0^\theta u(x,\phi(x)+\theta+y)\,d\left(\frac{1}{w(y)}\right)\right|\le w(\theta)\int_0^\theta d\left(\frac{1}{w(y)}\right)=1.
$$

И опять, из (5.5) следует

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_\theta^1 \left(u(x,\phi(x)+\theta+y)-u(x,\phi(x+y))\right)\,d\left(\frac{1}{w(y)}\right)\right|\\
&\qquad\le\int_\theta^1\int_y^{y+\theta}|\nabla u|(x,\phi(x)+s)\,ds\,d\left(\frac{1}{w(y)}\right)\\
&\qquad\qquad\le\int_\theta^1\int_y^{y+\theta}\frac{w(s)}{s}\,ds\,d\left(\frac{1}{w(y)}\right)\le\int_\theta^1 w(y)\frac{\theta}{y}\,d\left(\frac{1}{w(y)}\right)\lesssim 1,
\end{aligned}
$$

точо так же, как и в(5.7). Из этой пары неравенств и выводим (5.4). □

5.1.4 Доказательство леммы 5.1.1: диадический мартингал

Построив вспомогательную функцию, аппроксимирующую I, мы теперь переходим к мартингалам. Хорошо известно (см., например, [66]) что функции из пространства Блоха в единичном круге могут быть (с точностью до константы) интерпретированы как диадические мартингалы. Подобное утверждение для липшицевых областей было получено Йоренте, Следствие **2** работы [58] послужит нам в качестве основного инструмента.

Зафиксировав произвольную точку $x_0\in\mathbb{R}^d$, положим

$$
\begin{aligned}
&A=\|\phi'\|_\infty\sqrt{d},\ \lambda=8+\frac{1}{A},\\
&\Omega_1=\{(x,y):x\in\lambda Q(x_0):\phi(x)\le y\le\phi(x)+\lambda A\}.
\end{aligned}
$$

Верно следующее предложение.

Предложение 5.1.1 (Следствие **2**, [58]) *Если $v\in\mathcal{B}(\Omega_1)$, то найдется диадический мартингал $\mathcal{M}=\{M_k,\mathcal{F}_k(x_0),\omega\}$ в $Q(x_0)$ и положительное число $C=C(\phi,d)$, такие что мера ω абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $Q(x_0)$, и, если $A2^{-(k+1)}\le t\le$*

$A2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, *то для всех* $x \in Q(x_0)$

$$|M_k(x) - v(x, \phi(x) + t)| \le C\|v\|_{\mathcal{B}}, \tag{5.8a}$$
$$|M_{k+1}(x) - M_k(x)| \le C\|v\|_{\mathcal{B}}. \tag{5.8b}$$

Применим это предложение к H, полагая

$$S = \{S_k, \mathcal{F}_{n_k}(x_0), \omega\} := \{M_{n_k}, \mathcal{F}_{n_k}(x_0), \omega\}.$$

Обратимся к неравенствам (5.1a) и (5.1b). Из (5.8a) и (5.4) заключаем, что

$$\begin{aligned}|S_k(x) - I(x, s_k)| &= |M_{n_k}(x) - I(x, s_k)| \\ &\le |M_{n_k}(x) - H(x, \phi(x) + A2^{-n_k})| + |H(x, \phi(x) + A2^{-n_k}) - H(x, \phi(x) + s_k)| \\ &\quad + |H(x, \phi(x) + s_k) - I(x, s_k)| \lesssim 1 + \int_{s_k}^{A2^{-n_k}} |\nabla H(x, \phi(x) + y)|\, dy \\ &\lesssim 1, \quad x \in Q(x_0),\end{aligned}$$

поскольку $\|H\|_{\mathcal{B}} \lesssim 1$, так что мы получаем (5.1a). Чтобы вывести (5.1b), заметим, что

$$\begin{aligned}|S_k(x) - S_{k+1}(x)| &= |M_{n_k}(x) - M_{n_{k+1}}(x)| \le |M_{n_k}(x) - I(x, s_k)| \\ &\quad + |I(x, s_k) - I(x, s_{k+1})| + |I(x, s_{k+1}) - M_{n_{k+1}}(x)| \\ &\lesssim 1 + |I(x, s_k) - I(x, s_{k+1})|.\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$|I(x, s_k) - I(x, s_{k+1})| \le w(s_k) \int_{s_{k+1}}^{s_k} d\left(\frac{1}{w(y)}\right) = 2^k(2^{-k} - 2^{-k-1}) = \frac{1}{2},$$

и мы немедленно получаем неравенство (5.1b).

5.1.5 Доказательство теоремы I.15

Доказательство следует стандартным рассуждения. Мы применяем обычную конструкцию конусов Привалова Σ, т.е. рассмотрим область

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Sigma} \Gamma(x, M),$$

где $\Gamma(x, M)$ есть конус раствора M с вершиной в точке x – $\Gamma(x, M) = \{(\tilde{x}, y) \in \mathbb{R}^{d+1}_+ : |\tilde{x} - x| \le My\}$. Очевидно, Ω – надграфик некоторой липшицевой функции ϕ, причем $\|\phi'\|_\infty = \frac{1}{M}$, так что $\Omega = \Omega_\phi$. Условие (I.45) влечет

$$|u(x, y)| \le Kw(y) \lesssim w(\operatorname{dist}((x, y), \partial\Omega)), \quad (x, y) \in \Omega,$$

так что мы теперь можем применить теорему I.14, получая

$$\limsup_{\delta\to 0} \frac{I(x,\delta)}{\sqrt{\log w(\delta) \log\log\log w(\delta)}} \le C, \quad \text{п.в. } x\in\mathbb{R}^d.$$

Теоремы I.15 следует немедленно.

5.2 Один пример

В доказательстве тоеремы I.14 мы вводили гармоническую функцию H, для которой мы установили принадлежность к пространству Блоха. Кроме того, из оценки (5.4) следует, что $H\in h^\infty_{\log w}(\Omega_\phi)$, и что закон повторного логарифма в (I.44) выполняется и для функции H,

$$\limsup_{\delta\to 0} \frac{H(x,\delta)}{\sqrt{\log w(\delta) \log\log\log w(\delta)}} \lesssim 1, \quad \text{п.в. } x\in\mathbb{R}^d. \tag{5.9}$$

При доказательстве этой оценки мы использовали специальную природу функции H, именно то, что она была построена по функции $u\in h^\infty_w(\Omega_\phi)$. Естественно задаться вопросом, верно ли, что *произвольная* функция $v\in h^\infty_{w_0}(\Omega_\phi)\bigcap\mathcal{B}(\Omega_\phi)$ подчиняется следующему закону повторного логарифма

$$\limsup_{\delta\to 0} \frac{v(x,\phi(x)+\delta)}{\sqrt{w_0(\delta)\log\log w_0(\delta)}} \lesssim 1, \quad \text{п.в. } x\in\mathbb{R}^n. \tag{5.10}$$

Отрицательный ответ на этот вопрос заключается в следующем предложении.

Предложение 5.2.1 *Пусть* $w_0(y)=\log\log\frac{e}{y}+1,\ y\in(0,1]$. *Тогда найдется число* $A>0$, *функция* $v\in h^\infty_{w_0}(\mathbb{R}^2_+)\bigcap\mathcal{B}(\mathbb{R}^2_+)$, *число* $k_0\in\mathbb{N}$ *и последовательность* $\{y_k\}_{k=k_0}^\infty\to 0$, *удовлетворяющие неравенству*

$$\left|\left\{t\in[0,1]:\, |v(t,y_k)|\ge\frac{w_0(y_k)}{A}\right\}\right|\ge\frac{1}{10}. \tag{5.11}$$

Известно, что функция из класса $h^\infty_w(\mathbb{R}^2_+)$ может расти с максимальной скоростью, т.е. в точности как вес w, только на малой часть вертикальных лучей $\{x+iy\},\ y\in\mathbb{R}_+$, однако она может достигать такой скорости роста на подмножествах таких лучей для почти всех $x\in\mathbb{R}$ (см. [65], [14]). К сожалению, мы не можем воспроизвести пример из указанных работ, поскольку он представляет из себя лакунарный тригонометрический ряд, а для таких рядов можно доказать, что если он определяет функцию из класса Блоха, то верно и соотношение (5.9).

Доказательство. Скалярное произведение $\int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(t)dt$ двух вещественнозначных функций $f,g\in L^2(\mathbb{R}^n)$ мы обозначаем через $\langle f,g\rangle$. Выберем такую функцию $\varphi:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, что $\operatorname{supp}\varphi\subset[0,1]$, $\varphi\in C^{10}$, $\|\varphi\|_\infty\le 1$. Потребуем также, чтобы $\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,dt=0$ and $\langle\varphi,\psi\rangle\ne 0$ (здесь ψ – всплеск Хаара). Например, мы можем взять подходящую ренормализацию всплеска Добеши (или любой другой гладкий всплеск с компактным носителем, подчиненный нашим условиям). Символом $P_{(y)}$ мы обозначаем ядро пуассона для полуплоскости, $P_{(y)}(t) = \frac{y}{\pi(y^2+t^2)}$, $y > 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Основная идея состоит в том, чтобы построить функциональный ряд вида

$$\sum_{j=0}^{k} \sum_{I \in \Delta_j} c_I \varphi_I(t) := \Phi_k(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5.12}$$

который удовлетворяет близким к исходным условиям, а затем поставить ему в соответствие некоторую функцию из пространства Блоха, которая и послужит искомым контрпримером. Более подробно, сначала мы строим функцию Φ_k и возрастающую последовательность индексов $\{b_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}_+$ так, чтобы

$$\|\Phi_k - \Phi_{k-1}\|_\infty \leq 1, \tag{5.13a}$$

$$\|\Phi_k\|_\infty \leq w_0(2^{-k}) + 2, \tag{5.13b}$$

$$\left|\left\{t \in (0,1] : |\Phi_{b_k}|(t) \geq \tfrac{w_0(2^{-b_k})}{4}\right\}\right| \geq \tfrac{1}{10}, \tag{5.13c}$$

для произвольного целого числа $k \geq k_0$.

Свойство (5.13a) есть аналог условия Блоха, свойство (5.13b) отвечает за скорость роста, а свойство (5.13c) соответствует оценке (5.11) (таким образом закон повторного логарифма не выполняется для Φ_k с весом w_0).

5.2.1 Построение $\{b_j\}$ и Φ_k

Выберем для начала число $a \in \mathbb{N}$ так, чтобы $2^{-a+1}\|\varphi'\|_\infty \leq \frac{1}{4}|\langle\varphi,\psi\rangle|$. Теперь зафиксируем натуральное число $j_0 \geq 4\|\varphi'\|_\infty + 4$ и возрастающую последовательность $b_j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие

$$\begin{aligned}
&b_1 = 0,\ \frac{b_j}{a} \in \mathbb{N},\\
&j - 1 \leq w_0(2^{-b_j}) \leq j,\\
&\left(\frac{b_j - b_{j-1}}{a} - 1\right)\langle\varphi,\psi\rangle^2 \geq 4j^2, \quad j \geq j_0.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Существование такой последовательности проверяется элементарно (напомним, что $w_0(y) = \log\log\frac{e}{y} + 1$).

Сами функции Φ_k строятся с помощью двойной индукции, сначала по j, а затем по m между b_j и b_{j+1}. Положим $\Phi_0(t) = \varphi(t)$. Предположим теперь, что уже построена функция Φ_{b_j} для некоторого $j \in \mathbb{N}$. Рассмотрим всевозможные интервалы $I \in \Delta_{b_j}$, такие что $\sup_{t\in I}|\Phi_{b_j}|(t) > j$, множество таких интервалов мы обозначим через $\mathcal{E}_j^{b_j}$. Далее, пусть построены функция Φ_{m-1} и набор $\mathcal{E}_j^{m-1}$ для некоторого m, $b_j + 1 \leq m \leq b_{j+1}$. Если $\frac{m}{a} \in \mathbb{Z}$, то для $I \in \Delta_m$ и $t \in I$ положим

$$\Phi_m(t) = \Phi_{m-1}(t), \quad t \in \bigcup\nolimits_{J \in \mathcal{E}_j^{m-1}} J, \tag{5.15a}$$

$$\Phi_m(t) = \Phi_{m-1}(t) + \varphi_I(t), \quad t \notin \bigcup\nolimits_{J \in \mathcal{E}_j^{m-1}} J, \tag{5.15b}$$

$$\mathcal{E}_j^m = \mathcal{E}_j^{m-1} \bigcup \{J \in \Delta_m : \sup\nolimits_{t \in J} |\Phi_m(t)| > j\}. \tag{5.15c}$$

Иначе определим

$$\Phi_m(t) = \Phi_{m-1}(t), \quad t \in (0,1], \tag{5.16a}$$

$$\mathcal{E}_j^m = \mathcal{E}_j^{m-1}. \tag{5.16b}$$

Положим, наконец,

$$\mathcal{E}_j = \bigcup_{m=b_j}^{b_{j+1}-1} \mathcal{E}_j^m = \mathcal{E}_j^{b_{j+1}-1}.$$

Наше рассуждение, в сущности, состоит в построении времени остановки, которое (вместо мартингалов) задается для функционального ряда вида (5.12). Именно, если $I \in \mathcal{E}_j$, то процесс построения останавливается на этом интервале, причем $\Phi_{b_{j+1}}(t) = \Phi_m(t),\ t \in I,\ m = \operatorname{rank} I$, где rank интервала – это попросту его глубина в соответствующем дереве, т.е. $\operatorname{rank} I = |\log_2 |I||$. Если же, с другой стороны, $t \in (0,1] \setminus \bigcup_{J \in \mathcal{E}_j} J$, то построение проводится на каждом шаге (номер которого делится на a) вплоть до b_{j+1}. Множество $(0,1] \setminus \bigcup_{J \in \mathcal{E}_j} J$, таким образом, разбивается на дизъюнктное объединение интервалов из $\Delta_{b_{j+1}}$, набор таких интервалов мы обозначаем через $\mathcal{G}_j$.
Очевидно, функция Φ_m имеет вид, предписанный в (5.12), причем

$$\Phi_{b_{j+1}}(t) = \Phi_{b_j}(t) + \sum_{m=b_j+1}^{b_{j+1}} \sum_{J \in \Delta_m} c_J \varphi_J(t), \quad t \in (0,1],$$

где $c_J = 1$, только если $\frac{\operatorname{rank} J}{a} \in \mathbb{Z}$ *и* не существует такого интервала $I \in \mathcal{E}_j$, что $I \supset J$, а в ином случае $c_J = 0$. Мы также видим, что

$$\sup_{t \in I} |\Phi_{b_{j+1}}|(t) > j, \quad I \in \mathcal{E}_j;$$

$$|\Phi_{b_{j+1}}| \le j+1, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Нам осталось проверить свойства (5.13a)-(5.13c). Оценка (5.13a) следует напрямую из (5.15), так как $\|\varphi_I\|_\infty = 1$ для произвольного интервала I. Для каждого числа $k \in \mathbb{N}$ найдется номер $j_k \in \mathbb{N}$, такой что $b_{j_k} \le k \le b_{j_k+1} - 1$. Итак, мы имеем

$$\|\Phi_k\|_\infty \le j_k + 1 \le w_0(2^{-b_{j_k}}) + 2 \le w_0(2^{-k}) + 2,$$

и мы выводим (5.13b).

5.2.2 Доказательство (5.13c): мартингальное разложение

Зафиксируем произвольное число $j \geq j_0$ (напомним, что номер j_0 был определен в (5.14)). Поскольку $j_0 \geq 4\|\varphi'\|_\infty + 4$, то мы видим, что $\frac{j}{2} - \|\varphi'\|_\infty \geq \frac{j}{2} - \frac{j_0}{4} \geq \frac{j}{4}$, и, в силу (5.14), получаем $\frac{j}{2} - \|\varphi'\|_\infty \geq \frac{w_0(2^{-b_j})}{4}$. Следовательно, чтобы вывести (5.13c), достаточно доказать оценку

$$\left|\left\{t \in (0,1] : |\Phi_{b_{j+1}}(t)| \geq \frac{j}{2} - \|\varphi'\|_\infty\right\}\right| \geq \frac{1}{10}. \tag{5.17}$$

Первый шаг доказательства состоит в проверке того, что функция $|\Phi_{b_{j+1}}|$ 'достаточно велика' на интервалах из $\mathcal{E}_j$, именно, что для всех $I \in \mathcal{E}_j$ мы имеем

$$|\Phi_{b_{j+1}}|(t) \geq j - 2\|\varphi'\|_\infty, \quad t \in I. \tag{5.18}$$

Действительно, зафиксировав число $m = \operatorname{rank} I$, получаем

$$|\Phi'_m|(t) \leq \sum_{J\in\Delta:\, t\in J, \operatorname{rank} J\leq m} c_J\|\varphi'_J\|_\infty = \|\varphi'\|_\infty \sum_{J\in\Delta:\, t\in J, \operatorname{rank} J\leq m} \frac{c_J}{|J|} \leq 2^{m+1}\|\varphi'\|_\infty, \quad t \in (0,1],$$

так как $|c_J| \leq 1$ для любого интервала $J \in \Delta$. И снова мы имеем $\Phi_{\beta_{j+1}}(t) = \Phi_m(t)$ на I, следовательно $|\sup_{t\in I}\Phi_m(t) - \inf_{t\in I}\Phi_m(t)| \leq \int_I |\Phi'_m(t)|\,dt \leq 2\|\varphi'\|_\infty$, и мы получаем (5.18).

Покажем теперь, что

$$\left|\bigcup_{J\in\mathcal{G}_j} J\right| \leq \frac{3}{4}, \tag{5.19}$$

в сочетании (5.18) отсюда следует (5.17). Для этого рассмотрим разложение Хаара функции $\Phi_{b_{j+1}}$,

$$\Phi_{b_{j+1}} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{I\in\Delta_m} b_I\psi_I, \tag{5.20}$$

где $b_I = 2^{\operatorname{rank} I}\langle\Phi_{b_{j+1}}, \psi_I\rangle = 2^{\operatorname{rank} I}\sum_{k=0}^{b_{j+1}}\sum_{J\in\Delta_k} c_J\langle\varphi_J, \psi_I\rangle$, и коэффициент c_J равняется либо нулю либо единице. Здесь мы суммируем, начиная с $m = 0$, так как $\operatorname{supp}\Phi_k \subset [0,1]$, и $\int_0^1 \Phi_k(t)\,dt = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Полагая

$$\tilde{S}_k = \sum_{m=0}^{k}\sum_{I\in\Delta_m} b_I\psi_I,$$

мы видим, что $\{\tilde{S}_k, \mathcal{F}_k, |\cdot|\}$ – диадический мартингал на $(0,1]$. Поскольку $\Phi_{b_{j+1}} \in C^{10}(\mathbb{R})$, то сумма в правой части выражения (5.20) сходится к $\Phi_{b_{j+1}}$ равномерно на $\mathbb{R}$ при $k \to \infty$. Отсюда немедленно следует, что $\langle\tilde{S}\rangle_k$ сходится равномерно к ограниченному пределу, который мы обозначаем через $\langle\tilde{S}\rangle_\infty$.

Наша цель здесь состоит в оценке квадратической вариации мартингала $\tilde{S}$ снизу на интервалах из $\mathcal{G}_j$, в таком случае мы сможем использовать стандартные методы теории мартингалов, чтобы оценить меру $\bigcup_{J\in\mathcal{G}_j} J$. Для произвольного числа $k \in \mathbb{Z}_+$ выполняется следующее тождество

$$\int_0^1 \langle \tilde S\rangle_k^2(t)\,dt = \int_0^1 \tilde S_k^2(t)\,dt. \tag{5.21}$$

Предположим на время, что нам известна оценка

$$\langle \tilde S\rangle_\infty^2(t) \ge 4j^2, \quad t \in \bigcup_{J\in\mathcal{G}_j} J. \tag{5.22}$$

Тогда (5.21) влечет

$$\begin{aligned} 4j^2\cdot\left|\bigcup_{J\in\mathcal{G}_j} J\right| &\le \int_{\bigcup_{J\in\mathcal{G}_j} J} \langle \tilde S\rangle_\infty^2(t)\,dt \le \int_0^1 \langle \tilde S\rangle_\infty^2(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \tilde S_\infty^2(t)\,dt = \int_0^1 \Phi_{b_{j+1}}^2(t)\,dt \le (j+1)^2, \end{aligned}$$

и неравенство (5.19) следует незамедлительно. Таким образом, остается проверить (5.22).

5.2.3 Доказательство (5.13c): неравенство (5.22)

Покажем сначала, что если $c_I = 1$ для некоторого интервала $I \in \Delta_m$, $b_j \le m \le b_{j+1}-1$, то

$$|b_I| \ge \frac{1}{2}\left|\langle\varphi,\psi\rangle\right|. \tag{5.23}$$

Зафиксируем произвольный интервал I. Для всех $J\in\Delta_k,\ k\le m$, обычные подсчеты дают

$$\begin{aligned} &|\langle\varphi_J,\psi_I\rangle| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi(2^k t - x_J)\psi(2^m t - x_I)\,dt\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi(2^k(t-2^{-m}x_I) - x_J)\psi(2^m t)\,dt\right| \\ &= 2^{-k}\left|\int_{\mathbb{R}} \varphi(t - 2^{k-m}x_I - x_J)\psi(2^{m-k}t)\,dt\right| \\ &= 2^{-k}\left|\int_{\mathbb{R}} \left(\varphi(t-2^{k-m}x_I-x_J) - \varphi(-2^{k-m}x_I - x_J)\right)\psi(2^{m-k}t)\,dt\right| \\ &= 2^{-k}\left|\int_{\mathbb{R}}\int_{-2^{k-m}x_I-x_J}^{t-2^{k-m}x_I-x_J} \varphi'(s)\,ds\,\psi(2^{m-k}t)\,dt\right| \le 2^{-k}\|\varphi'\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \left|t\psi(2^{m-k}t)\right|\,dt \\ &= 2^{k-2m}\|\varphi'\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |t\psi(t)|\,dt \le 2^{k-2m}\|\varphi'\|_\infty. \end{aligned}$$

Теперь мы видим, что если $k>m$, то $\langle\varphi_J,\psi_I\rangle = 0$ для каждого $J\in\Delta_k$, а если $k\le m$, то тогда найдется максимум один интервал $J\in\Delta_k$, такой что$\langle\varphi_J,\psi_I\rangle\ne 0$. Мы, стало быть, имеем

$$|b_I| = 2^m \left|\sum_{k=0}^{b_{j+1}} \sum_{J\in\Delta_k} c_J \langle \varphi_J, \psi_I\rangle\right| = 2^m \left|\sum_{k\le m,\, J\in\Delta_k,\, J\supset I} c_J \langle \varphi_J, \psi_I\rangle\right|$$
$$\ge 2^m \left|\langle \varphi_I, \psi_I\rangle\right| - 2^m \sum_{k\le m-1,\, J\in\Delta_k,\, J\supset I} |c_J| |\langle \varphi_J, \psi_I\rangle|$$
$$\ge \langle \varphi, \psi\rangle - 2^m \sum_{k\le m-1,\, J\in\Delta_k,\, J\supset I} |c_J| \|\varphi'\|_\infty 2^{k-2m}$$
$$\ge \langle \varphi, \psi\rangle - \|\varphi'\|_\infty \sum_{k\le m-1,\, J\in\Delta_k,\, J\supset I} 2^{k-m} |c_J|.$$

Из (5.15b) следует, что если $c_J = 1$, то $c_J = 0$ для $J \in \Delta_k$, $m - a < k \le m-1$ (у разложение $\Phi_{b_{j+1}}$ очень редкие коэффициенты). Учитывая выбор величины a, получаем

$$|\langle \varphi, \psi\rangle| - \|\varphi'\|_\infty \sum_{k\le m-1,\, J\in\Delta_k,\, J\supset I} 2^{k-m}|c_J| \ge \langle \varphi, \psi\rangle - \|\varphi'\|_\infty 2^{-a} \ge \frac{1}{2}|\langle \psi, \varphi\rangle|,$$

и мы приходим к (5.23).

Рассмотрим теперь произвольный интервал $I \in \mathcal{G}_j$. Заметим опять, что $c_J = 1$ для каждого $J \in \Delta_m$, такого что $\frac{m}{a} \in \mathbb{Z}$, $J \supset I$ и $b_j \le m \le b_{j+1} - 1$. Поэтому (5.23) влечет оценку $|b_J| \ge \frac{1}{2}|\langle \varphi, \psi\rangle|$ для таких интервалов J, и, в силу (5.14), мы имеем

$$\langle \tilde{S}\rangle_\infty^2(t) \ge \sum_{b_j\le m\le b_{j+1}-1,\, \frac{m}{a}\in\mathbb{Z},\, J\in\Delta_m,\, t\in J} |b_J|^2 \ge \frac{1}{4}\left(\frac{b_{j+1}-b_j}{a} - 1\right)|\langle \varphi, \psi\rangle|^2 \ge 100 j^2,$$

для $t \in I$, отсюда и выводим (5.22).

5.2.4 Как построить функцию из класса Блоха по Φ_j

Положим

$$v_k(x,y) = \left(\Phi_k * P_{(y)}\right)(x), \quad x \in \mathbb{R},\ k \ge k_0.$$

Покажем сначала, что $v_k \to v$ при $k \to \infty$, где v есть гармоническая функция.

Зафиксируем произвольное число $y > 0$. Так как c_I принимает значения 0 или 1, мы видим, что для натурального числа $m \le n$

$$|v_m(x,y) - v_n(x,y)|$$
$$= \left|\sum_{j=m+1}^{n} \sum_{I\in\Delta_j} c_I \varphi_I * P_{(y)}\right|(x) \le \sum_{j=m+1}^{n} \sum_{I\in\Delta_j} |c_I| \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi_I(t) P_{(y)}(x-t)\,dt\right|$$
$$\le \sum_{j=m+1}^{n} \sum_{i=0}^{2^j-1} \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi(2^j t) P_{(y)}\left(x - t - \left(i + \frac{1}{2}\right)2^{-j}\right)\,dt\right|.$$

Проделаем стандартные вычисления

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{2^j-1}\left|\int_{\mathbb{R}}\varphi(2^jt)P_{(y)}\left(x-t-\left(i+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right)\,dt\right| \\
&=\sum_{i=0}^{2^j-1}\left|\int_{\mathbb{R}}\varphi(2^jt)\left(P_{(y)}\left(x-t-\left(i+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right)-P_{(y)}\left(x-\left(i+\frac{3}{2}\right)2^{-j}\right)\right)\,dt\right| \\
&\leq\sum_{i=0}^{2^j-1}\left|\int_0^{\frac{2^{-j}}{y}}\varphi(2^jyt)\left(P\left(\frac{x}{y}-t-\frac{i+\frac{1}{2}}{y}2^{-j}\right)-P\left(\frac{x}{y}-\frac{i+\frac{3}{2}}{y}2^{-j}\right)\right)\,dt\right| \\
&\leq\sum_{i=0}^{2^j-1}\left|\int_0^{\frac{2^{-j}}{y}}\varphi(2^jyt)\int_{\frac{x}{y}-\frac{i+\frac{3}{2}}{y}2^{-j}}^{\frac{x}{y}-t-\frac{i+\frac{1}{2}}{y}2^{-j}}|P'|(s)\,ds\,dt\right| \\
&\leq\int_0^{\frac{2^{-j}}{y}}|\varphi(2^jyt)|\sum_{i=0}^{2^j-1}\int_{\frac{x}{y}-\frac{i+\frac{3}{2}}{y}2^{-j}}^{\frac{x}{y}-t-\frac{i+\frac{1}{2}}{y}2^{-j}}|P'|(s)\,ds\,dt \\
&\leq\int_0^{\frac{2^{-j}}{y}}|\varphi(2^jyt)|\int_{\mathbb{R}}|P'|(s)\,ds\,dt\leq C\frac{2^{-j}}{y},\quad x\in\mathbb{R},\ y>0,\ j\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

Итак, мы пришли к

$$
|v_m(x,y)-v_n(x,y)|\leq C\sum_{j=m+1}^{n}\frac{2^{-j}}{y},\quad x\in\mathbb{R},\ y>0,
\tag{5.25}
$$

откдуа незамедлительно следует равномерная сходимость.

Далее мы покажем, что функция v удовлетворяет условию роста типа $h^\infty_{w_0}$. При $y\geq 2^{-k}$ оценка (5.25) влечет

$$
|v(x,y)-v_k(x,y)|\leq C,\quad x\in\mathbb{R}.
$$

В сочетании с (5.13b) и определением веса w_0, выводим

$$
\begin{aligned}
|v(x,y)|\leq C+|v_k(x,y)|=C+\left|\Phi_k*P_{(y)}\right|(x)& \\
\leq C+w_0(2^{-k})\leq Cw_0(y),\quad x\in\mathbb{R},\ 2^{-k+1}\geq\ y\geq 2^{-k},\ k\in\mathbb{N},&
\end{aligned}
$$

поэтому $v\in h^\infty_{w_0}$.

Покажем теперь, что $v\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2_+)$. Рассмотрим произвольное положительное число $y\leq 1$ и число $m\in\mathbb{Z}$, такие что $2^{-m+1}\geq y\geq 2^{-m}$. Имеем,

$$
|\nabla v(x,y)|\leq|\nabla v(x,y)-\nabla v_m(x,y)|+|\nabla v_m(x,y)|,\quad x\in\mathbb{R}.
$$

Повторяя вычисления из (5.24), мы получаем, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется

$$
\begin{aligned}
&|\nabla v(x,y) - \nabla v_m(x,y)| \\
&\qquad \le \left|\frac{\partial}{\partial y} v(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} v_m(x,y)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x} v(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} v_m(x,y)\right| \\
&\qquad = \left|\sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{I\in\Delta_j} c_I \varphi_I * \left(\frac{\partial}{\partial y} P_{(y)}\right)\right|(x) + \left|\sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{I\in\Delta_j} c_I \varphi_I * \left(\frac{\partial}{\partial x} P_{(y)}\right)\right|(x) \\
&\qquad \le \frac{C2^{-m}}{y^2} \le \frac{C}{y}. \qquad (5.26)
\end{aligned}
$$

Напомним, что $\varphi \in C^{10}(\mathbb{R})$, и что для двух любых различных интервалов $I, J \in \Delta_j$ носители функций φ_I и φ_J не пересекаются. Ремасштабирование приводит к

$$
\left|\sum_{I\in\Delta_j} c_I \varphi_I * \left(\frac{\partial}{\partial x} P_{(y)}\right)\right|(x) + \left|\sum_{I\in\Delta_j} c_I \varphi_I * \left(\frac{\partial}{\partial y} P_{(y)}\right)\right|(x) \le C2^j, \quad x \in \mathbb{R},\ y > 0,\ j \in \mathbb{N}.
$$

Отсюда заключаем, что

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial x} v_m(x,y)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y} v_m(x,y)\right| &= \left|\Phi_m * \left(\frac{\partial}{\partial x} P_{(y)}\right)\right|(x) + \left|\Phi_m * \left(\frac{\partial}{\partial y} P_{(y)}\right)\right|(x) \\
&\le C \sum_{j=0}^{m} 2^j = C2^{m+1} \le \frac{C}{y}, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Из этой оценки и из (5.26) выводим, что $v \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2_+)$.

Остается доказать (5.11). Зафиксируем произвольное число $k \ge k_0$. Поскольку $\|\Phi'_{b_k}\|_\infty \le 2^{b_k+1}\|\varphi'\|_\infty$, то мы видим, что для всех $x \in (0,1]$, удовлетворяющих условию $|\Phi_{b_k}(x)| \ge \frac{k-1}{2}$, найдется интервал $I_x = [x-\rho_k, x+\rho_k]$, $\rho_k = \frac{2^{-b_k-2}}{\|\varphi'\|_\infty}$, такой что $|\Phi_{b_k}(t)| \ge \frac{k-3}{2}$, $t \in I_x$. Тогда очевидно, что

$$
\int_{\mathbb{R}\setminus I_x} P_y(x-t)\,dt \le \frac{1}{4},
$$

для $0 < y \le \frac{\rho_k}{10}$. Зафиксировав такое число x, и положив $y_k = \frac{2^{-b_k-2}}{10\|\varphi'\|_\infty}$, получаем

$$
\begin{aligned}
|v_{b_k}(x,y)| &= \left|\Phi_{b_k} * P_{(y)}\right|(x) \\
&\ge \left|\int_{I_x} \Phi_{b_k}(t) P_{(y)}(x-t)\,dt\right| - \left|\int_{\mathbb{R}\setminus I_x} \Phi_{b_k}(t) P_{(y)}(x-t)\,dt\right| \\
&\ge \frac{k-3}{2} - \|\Phi_{b_k}\|_\infty \int_{\mathbb{R}\setminus I_x} P_{(y)}(x-t)\,dt \ge \frac{k-3}{2} - \frac{k+2}{4} \\
&= \frac{k-4}{2} \ge \frac{w_0(2^{-b_k}) - 4}{2},
\end{aligned}
$$

так что

$$
\left|\left\{x \in (0,1] : |v_{b_k}|(x,y) \ge \frac{w_0(2^{-b_k}) - 4}{2}\right\}\right| \ge \frac{1}{10}, \quad 0 < y \le y_k.
$$

Следуя, как и ранее, (5.24), приходим к

$$|v_{\beta_k}(x, y_k) - v(x, y_k)| \le C_0 \|\varphi'\|_\infty. \tag{5.27}$$

Из свойства удвоения веса w_0 следует

$$w_0(y_k) = w_0\left(\frac{2^{-\beta_k-2}}{10\|\varphi'\|_\infty}\right) \le C_1 \frac{w_0(2^{-\beta_k}) - 4}{2} - C_0\|\varphi'\|_\infty \le C\frac{w_0(2^{-\beta_k}) - 4}{2}$$

для достаточно больших чисел k. Итак, мы имеем

$$\left|\left\{x \in (0,1] : |v|\,(x, y_k) \ge \frac{w_0(y_k)}{C}\right\}\right| \ge \frac{1}{10}, \quad y_k = \frac{2^{-b_k-2}}{10\|\varphi'\|_\infty},$$

что и есть (5.11). $\square$

Наш способ построения функции v кажется не самым естественным или эффективным. С другой стороны, мы не можем напрямую использовать здесь методы теории диадических мартингалов, следуя, например, работе [36]. Вместо этого мы строим 'всплескоподобный' ряд для функции Блоха (см. [69], где описан класс $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2_+)$ в терминах всплеск-представления).

Отметим, что процесс усреднения $u(x,\delta) \to H(x,\delta) = \int_0^1 u(x, y+\delta)\, d\frac{1}{w(y)}$ может быть интерпретирован как применение некоторого мультипликатора M к граничным значениям функции u,

$$\widehat{Mf}(\tau) = \widehat{f}(\tau) \int_0^1 e^{-2\pi y|\tau|} d\frac{1}{w(y)}, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

где $f = u(\cdot, 0)$ (в каком-то смысле эти граничные значения существуют). Условие удвоения (I.37) означает, что

$$\int_0^1 e^{-2\pi y|\tau|} d\frac{1}{w(y)} \approx \frac{1}{w\left(\frac{1}{|\tau|}\right)}, \quad |\tau| > 0,$$

так что мы, в сущности, делим преобразование Фурье функции $u(\cdot, 0)$ на w. Было бы интересным разобраться в структуре образа M, по крайней мере мы видим, что $Mu \in h^\infty_w(\mathbb{R}^{n+1}_+) \bigcap \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, если $u \in h^\infty_w(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Пример из предложения 5.2.1 показывает, что образ M (в случае медленно растущих весов) может быть строгим подмножеством $h^\infty_w(\mathbb{R}^{n+1}_+) \bigcap \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Некоторые подробности о мультипликаторах класса роста можно найти в работе [30].

Глава 6 Пространства роста: разделенные разности

6.1 Доказательство теоремы I.16

Доказательство состоит из двух частей. Сначала мы доказываем мартингальную версию теоремы I.16. Напомним ее формулировку.

Лемма 6.1.1 *Пусть* $0 < \varepsilon < 1$. *тогда найдется такой диадический мартингал* $\{S_n\}$, *удовлетворяющий условию* $\sup_n 2^{-n\varepsilon}\|S_n\|_\infty < \infty$, *что*

$$\limsup_{n\to\infty} 2^{-n\varepsilon} S_n(x) > 0,$$

и

$$\liminf_{n\to\infty} 2^{-n\varepsilon} S_n(x) \geq 0$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$. *На самом деле верна равномерная версия последнего неравенства: для всех* $\delta > 0$ *существует число* $n_0 \in \mathbb{N}$, *такое что*

$$2^{-n\varepsilon} S_n(x) \geq -\delta \quad \text{для всех} \;\; n \geq n_0, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Затем мы приближаем a-разделенные разности их дискретными аналогами, получая непрерывное утверждение,

Теорема 6.1.1 *Пусть* $0 < a < 1$. *Тогда найдется такая функция* $f \in \mathrm{Hol}_a(\mathbb{R})$, *что для почти каждой точки* $x \in \mathbb{R}$ *верно*

$$\limsup_{h\to 0^+} \mathrm{D}_a(f)(x,h) > 0$$

и

$$\liminf_{h\to 0^+} \mathrm{D}_a(f)(x,h) = 0.$$

Итак, мы начинаем с леммы 6.1.1.

Доказательство. Достаточно определить мартингал $\{S_n\}$ на единичном интервале $[0,1)$. Мы строим его с помощью двойной индукции. Более подробно, мы определяем пару возрастающих последовательностей натуральных чисел $\{k_{jn}\}_{1\leq n\leq n_j}$ и M_j, $n \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих

$$k_{00} + M_0 \leq k_{01} \leq k_{01} + M_0 \leq \dots \leq k_{0n_0} + M_0 \leq k_{10} \leq k_{10} + M_1 \cdots \leq k_{1n_1} + M_1 \leq \dots$$
$$\leq k_{20} \leq \dots \leq k_{(j-1)n_{j-1}} + M_{j-1} \leq k_{j0} \leq \dots \leq k_{jn_j} + M_j \leq \dots,$$

а также мартингал $\{S_m\}$ таким образом, что: *(a)* для любого числа $n \geq 0$ найдется такое число $j \geq 0$, что $2^{-m\varepsilon}S_m \geq -2^{-n}$ при $m \geq k_{jn_j} + M_j$, и *(b)* $2^{-m\varepsilon}S_m \geq \frac{1}{3}$ для хотя бы одного номера m между k_{j0} и $k_{jn_j} + M_j$ на 'достаточно большом' подмножестве базового интервала $[0, 1)$. Мы начнем с описания базовых элементов, составляющих нашу конструкцию.

Построение блоков

Для диадического интервала J длины $|J| = 2^{-K}$ и числа $\delta > 0$ мы определим *блок* $W(\delta, J)$ следующим образом.

Рассмотрим вложенную последовательность диадических подинтервалов интервала J, сходящуюся к его левому концу. Иными словами, положим $J_0 := J$, и по данному J_{k-1} определим $J_k := J_{k-1}^-$, $k \geq 1$ (где I^- есть левая половина интервала I). Положим $M = M(\delta) := \left[\frac{\log \frac{1}{2\delta}}{(1-\varepsilon)\log 2}\right] + 1$, так что

$$\frac{1}{2} \leq 2^{M(1-\varepsilon)} \cdot \delta \leq \frac{1}{2^\varepsilon}.$$

Обозначим теперь через h_I (перенормированную) функцию Хаара, соответствующую диадическому интервалу I, $h_I(x) = 2\chi_{I^-} - \chi_I$, и определим

$$s_{k,J}(x) := \delta \cdot 2^{K\varepsilon} \cdot 2^k h_{J_k}(x), \quad 0 \leq k \leq M.$$

Поскольку $|J_k| = 2^{-K-k}$, то, очевидно, функция $s_{k,J}$ есть попросту мартингальная разность ранга $K + k$, причем

$$\|2^{-(K+k)\varepsilon} \sum_{m=0}^{k} s_{m,J}\|_\infty \leq 2\delta 2^{k(1-\varepsilon)} \leq 2^{1-\varepsilon}, \quad 0 \leq k \leq M. \tag{6.1}$$

С другой стороны,

$$2^{-(K+k)\varepsilon} \sum_{m=0}^{k} s_{m,J} \geq -2^{-k\varepsilon} \cdot \delta \geq -\delta. \tag{6.2}$$

Определим

$$W(\delta, J) := \sum_{k=0}^{M} s_{k,J},$$

и заметим, что

$$2^{-(M+K)\varepsilon}\|W(\delta, J)\|_\infty \leq 2^{1-\varepsilon}, \tag{6.3}$$

и, кроме того,

$$2^{-(M+K)\varepsilon}W(\delta, J)(x) \geq \frac{1}{2}\left(1 - 2^{-M}\right), \quad x \in J_M. \tag{6.4}$$

В частности, $|J_M| = 2^{-M}|J|$. Подводя итоги, мы построили кусочно постоянную функцию $W(\delta, J)$ с носителем на интервале J, которая равна $-\delta 2^{K\varepsilon}$ на $J \setminus J_M$, и $\delta 2^{K\varepsilon}(2^M - 1)$ на J_M. Так как $2^{M(1-\varepsilon)}\delta \approx 1$, то мы имеем $\delta 2^{K\varepsilon} \approx |J|^{-\varepsilon}2^{M(\varepsilon-1)}$, и, следовательно, $\delta 2^{K\varepsilon}(2^M - 1) \approx |J_M|^{-\varepsilon}$.

Комбинирование блоков, первый шаг

Положим $\delta_j := 2^{-j-2},\ j \in \mathbb{Z}_+$. Мы определяем (суперлакунарную) последовательность k_{mn} чисел следующим образом. Положим $k_{00} := 0,\ J = [0, 1)$, и

$$S_{M(\delta_0)} := W(\delta_0, J).$$

Теперь выберем k_{01} так, чтобы

$$2^{-k_{01}\varepsilon} \|S_{M(\delta_0)}\|_\infty \leq \frac{\delta_0}{2}.$$

Положим далее

$$\begin{aligned} S_i &:= S_{M(\delta_0)}, \quad M(\delta_0) \leq i \leq k_{01}, \\ S_{k_{01}+M(\delta_0)} &:= S_{M(\delta_0)} + \sum_{J \in \Delta_{k_{01}}} W(\delta_0, J), \end{aligned}$$

Напомним, что символом Δ_i мы (в данной главе) обозначаем набор диадических интервалов ранга i.

Мы продолжаем итерирование конструкции. Более подробно, предположим, что мы уже определили номера k_{0n} и мартингал S_i для $0 \leq i \leq k_{0n} + M(\delta_0)$. Выберем теперь число $k_{0(n+1)}$ так, чтобы

$$2^{-k_{0(n+1)}\varepsilon} \|S_{k_{0n}+M(\delta_0)}\|_\infty \leq \frac{\delta_0}{2},$$

и определим

$$\begin{aligned} S_i &:= S_{k_{0n}+M(\delta_0)}, \quad k_{0n} + M(\delta_0) \leq i < k_{0(n+1)}, \\ S_{k_{0(n+1)}+M(\delta_0)} &:= S_{k_{0n}+M(\delta_0)} + \sum_{J \in \Delta_{k_{0(n+1)}}} W(\delta_0, J). \end{aligned}$$

Мы повторяем процедуру до шага $n = n_0 := \left[\frac{\log(1-2^{-M(\delta_0)})}{\log \delta_0}\right] + 1$.

Комбинирование блоков, второй шаг

Продолжим итеративное построение, теперь также и по параметру j. Предположим, что мы уже определили последовательность чисел $\{k_{mn}\}_{m=0}^{j-1} = \{\{k_{0n}\}_{n=0}^{n_0}, \ldots, \{k_{(j-1)n}\}_{n=0}^{n_{j-1}}\}$ и последовательность частичных сумм $\{S_i\},\ i = 0, \ldots, k_{(j-1)n_{j-1}} + M(\delta_{j-1})$. Мы применяем построение предыдущего шага, используя теперь δ_j вместо δ_0. Иными словами, мы выбираем число $k_{j0} \geq k_{(j-1)n_{j-1}}$ таким образом, что

$$2^{-k_{j0}\varepsilon} \|S_{k_{(j-1)n_{j-1}}+M(\delta_{j-1})}\| \leq \frac{\delta_j}{2},$$

и определяем мартингал S_i для $k_{(j-1)n_{j-1}} + M(\delta_{j-1}) \leq i \leq k_{j0} + M(\delta_j)$ как и ранее. Далее мы переходим к номеру k_{j1} и так далее, вплоть до шага $n = n_j = \left[\frac{\log(1-2^{-M(\delta_j)})}{\log \delta_j}\right] + 1$ (в силу наших предположений имеем $m_j = M(\delta_j) \approx j$, и $n_j \approx j2^j$).

Поведение мартингала $\{S_m\}$

Для начала мы удостоверимся в том, что мартингал S_i удовлетворяет условию роста, то есть

$$\sup_i 2^{-i\varepsilon}\|S_i\|_\infty \le 2^{1-\varepsilon}.$$

Действительно, выберем произвольное число i и рассмотрим наибольший номер k_{jn}, не превосходящий i. Выполняется одно из двух неравенств: *(a)* $k_{jn}+M(\delta_j) < i$ или *(b)* $k_{jn}+M(\delta_j) \ge i$. В случае (a) мартингал попросту останавливается до того момента, пока мы не достигнем следующего шага $k_{j(n+1)}$ или $k_{(j+1)0}$, в любом случае, очевидно, $S_i = S_{k_{jn}+M(\delta_j)}$, так что мы имеем

$$\begin{aligned}&2^{-i\varepsilon}\|S_i\|_\infty = 2^{-i\varepsilon}\|S_{k_{jn}+M(\delta_j)}\|_\infty \le 2^{-(k_{jn}+M(\delta_j))\varepsilon}\|S_{k_{jn}+M(\delta_j)}\|_\infty \le \\ &2^{-(k_{jn}+M(\delta_j))\varepsilon}\left(\|S_m\|_\infty + \|S_{k_{jn}+M(\delta_j)} - S_m\|_\infty\right),\end{aligned}$$

где $m = m(n,j)$ равняется либо $k_{j(n-1)}+M(\delta_j)$, если $n \ge 1$, либо $k_{(j-1)n_{j-1}}+M(\delta_{j-1})$, если $n = 0$. В обоих случаях число k_{jn} было выбрано таким образом, что

$$2^{-(k_{jn}+M(\delta_j))\varepsilon}\|S_m\|_\infty \le 2^{-k_{jn}\varepsilon}\|S_m\|_\infty \le \frac{\delta_j}{2}.$$

С другой стороны, по построению мы имеем

$$S_{k_{jn}+M(\delta_j)} - S_m = \sum_{J\in\Delta_{k_{jn}}} W(\delta_j, J),$$

так что $\|S_{k_{jn}+M(\delta_j)} - S_m\|_\infty = \|W(\delta_j,J)\|_\infty$ для каждого интервала $J \in \Delta_{k_{nj}}$. В силу нашего выбора $W(\delta_j, J)$ (см. (6.3)) верна оценка

$$2^{-(k_{nj}+M(\delta_j))\varepsilon}\|W(\delta_j,J)\|_\infty \le 2^{1-\varepsilon}.$$

Случай (b) рассматривается аналогично, только теперь мы используем оценку (6.1).
Далее мы показываем, что

$$\liminf_{i\to\infty} 2^{-i\varepsilon}S_i(x) \ge 0, \quad x \in [0,1).$$

Это утверждение также следует из построения, поскольку мартингал S_i состоит из 'очень редких' и 'независимых' блоков, и, в силу выбора числа k_{jn} мы всегда можем рассматривать только его хвостовую часть. В частности, если $i \ge k_{jn}+M(\delta_j)$ для некоторых j,n, то из (6.2) следует, что $2^{-i\varepsilon}W(\delta_j,J) \ge -2\delta_j$ для произвольного интервала $J \in \Delta_{k_{jn}}$, поэтому, используя предыдущее рассуждение, мы видим, что $2^{-i\varepsilon}S_i \ge -3\delta_j$, откуда и следует искомое неравенство.

Наконец, мы оцениваем меру множества E, состоящего из точек $x \in \mathbb{R}$, для которых

$\limsup_{i\to\infty} 2^{-i\varepsilon}S_i(x) \geq \frac{1}{5}$. Рассмотрим пару чисел $j \in \mathbb{Z}_+$ и $0 \leq n \leq n_j - 1$. Как и ранее, имеем

$$2^{-(k_{jn}+M(\delta_j))\varepsilon}\|S_{k_{jn}+M(\delta_j)}\|_\infty \geq 2^{-(k_{jn}+M(\delta_j))\varepsilon}\|W(\delta_j, J)\|_\infty - \frac{\delta_j}{2}$$

для каждого интервала $J \in \Delta_{k_{jn}}$, мы можем рассматривать блоки $W(\delta_j, J)$ по отдельности. Теперь, если $|J| = 2^{-k_{jn}}$, то из (6.4) выводим, что $2^{-(k_{jn}+M(\delta_j))\varepsilon}W(\delta_j, J) \geq \frac{1}{4}$ на интервале $J_{M(\delta_j)}$ при $|J_{M(\delta_j)}| = 2^{-M(\delta_j)}|J|$. С другой стороны, если интервал I есть интервал следующего шага построения в J,то есть $|I| = 2^{-k_{j(n+1)}}$, $I \subset J$, то опять (6.4) гарантирует $2^{-(k_{j(n+1)}+M(\delta_j))\varepsilon}W(\delta_j, I) \geq \frac{1}{4}$ на $I_{M(\delta_j)}$. Обозначим через $\mathcal{F}(J)$ множество всех таких интервалов, то есть

$$\mathcal{F}(J) = \{I_{M(\delta_j)} \subset I : I \in \Delta_{k_{j(n+1)}}(J)\},$$

где $\Delta_m(J)$ – набор диадических подинтервалов интервала J ранга m. интервалы, составляющие $\mathcal{F}(J)$, не пересекаются, кроме того, они равномерно распределены внутри J (напомним, что для каждого $I \in \Delta_{k_{j(n+1)}}(J)$ интервал $I_{M(\delta_j)}$ – это самый левый диадический подинтервал I ранга $k_{j(n+1)} + M(\delta_j)$). Отсюда следует, что

$$\left|\left(\bigcup_{\mathcal{F}(J)} I_{M(\delta_j)}\right) \setminus J_{M(\delta_j)}\right| = \sum_{I_{M(\delta_j)}\in\mathcal{F}(J),\, I_{M(\delta_j)}\subset J\setminus J_{M(\delta_j)}} |I_{M(\delta_j)}| = \tag{6.5}$$
$$(2 - 2^{-M(\delta_j)})2^{-M(\delta_j)}|J \setminus J_{M(\delta_j)}|.$$

Назовем интервал I' δ_j-*особым*, если существует такое число $0 \leq n \leq n_j$ и такой интервал $J \in \Delta_{k_{jn}}$, что $I' = J_{M(\delta_j)}$, иными словами I' есть самый левый диадический подинтервал интервала J ранга $k_{jn} + M(\delta_j)$. Набор всех δ_j-особых интервалов мы обозначаем через $\mathcal{F}_j$. Снова имеем $|I'|^\varepsilon W(\delta_j, J) \geq \frac{1}{4}$ на I', а поэтому $|I'|^\varepsilon S(I') \geq \frac{1}{5}$ (где $S(I) := S_i(x)$ для $x \in I$ и $i = \log_2 |I|^{-1}$). Из (6.5) выводим

$$\left|\bigcup_{I'\in\mathcal{F}_j} I'\right| \geq 1 - (1 - 2^{-M(\delta_j)})^{n_j}.$$

Поэтому мера множества F_j, в точках которого верно

$$2^{-(k_{jn}+M(\delta_j))\varepsilon}\sum_{J\in\Delta_{k_{jn}}} W(\delta_j, J)(x) \leq \frac{1}{4}$$

для всех $n = 0, \ldots, n_j$, мала, именно

$$|F_j| \leq (1 - 2^{-M(\delta_j)})^{n_j} \lesssim \delta_j$$

в силу нашего выбора номера n_j. Следовательно

$$\left|\left\{x : 2^{-i\varepsilon} S_i(x) \leq \frac{1}{5},\ k_{j0} \leq i \leq k_{jn_j}\right\}\right| \lesssim \delta_j.$$

Поскольку $\sum_j \delta_j \leq 1$, то мы немедленно видим, что

$$\left|\left\{x :\ \limsup_{i\to\infty} 2^{-i\varepsilon} S_i(x) \leq \frac{1}{5}\right\}\right| = 0.$$

Сделаем еще одно наблюдение. Для данного δ_j-особого интервала I' рассмотрим диадический интервал $\tilde{I}$ такой же длины, который лежит сразу слева от I', иными словами, если $I' = [i2^{-m}, (i+1)2^{-m})$, то $\tilde{I} := [(i-1)2^{-m}, i2^{-m})$ (если случится так, что левый конец I' попадает в 0, то мы положим $\tilde{I} := \emptyset$, так что мы выкидываем интервалы, не попадающие в $[0,1)$). Такие интервалы мы называем *левыми-δ_j-особыми*, и обозначаем их совокупность через $\tilde{\mathcal{F}}_j$. Рассуждая как и ранее, видим, что

$$\left|[0,1) \setminus \left(\bigcup_{\tilde{I}\in\tilde{\mathcal{F}}_j} \tilde{I}\right)\right| \leq 2(1-2^{-M(\delta_j)})^{n_j} \lesssim \delta_j, \tag{6.6}$$

так что почти каждая точка $x \in [0,1)$ лежит в $\bigcup_{\tilde{I}\in\tilde{\mathcal{F}}_j} \tilde{I}$ для бесконечного количества $j \in \mathbb{Z}_+$. $\square$

Теперь мы готовы приступить к доказательству теоремы 6.1.1.

Доказательство теоремы 6.1.1. Зафиксируем число $\varepsilon := 1-a$. Рассмотрим мартингал $\{S_n\}$, построенный в лемме 6.1.1. не умаляя общности, мы считаем, что $S_0 = 0$. Мы задаем на вещественной оси функцию f следующим образом. Положим $f(0) = 0$. Соотношение $f(b_n) - f(a_n) := 2^{-n} S_n(I)$ при $I = [a_n, b_n) \in \Delta_n$, $n \geq 0$, определяет f на двоично-рациональных точках $[0,1]$, и мы доопределяем функцию f на остальных точках по непрерывности. Отметим, что, поскольку $S_0 = 0$, то $f(0) = f(1) = 0$. Наконец, мы продолжаем f с $[0,1]$ на всю вещественную прямую по периодичности. Покажем, что $f \in \mathrm{Hol}_\alpha$. Зафиксируем точку $x \in \mathbb{R}$ и число $0 < h \leq 1$. Мы хотим показать, что $|f(x+h) - f(x)| \leq Ch^a$ для некоторой абсолютной константы $C > 0$. Найдется такая возрастающая последовательность двоично-рациональных точек $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ что $[a_{k-1}, a_k) \in \Delta$, $\lim_{k\to-\infty} a_k = x$, $\lim_{k\to+\infty} a_k = x+h$, и что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует не более 4 диадических интервалов ранга n вида $[a_{k-1}, a_k)$. Иными словами, мы рассматриваем аналог разбиения Уитни интервала $[x, x+h)$, где элементы разбиения имеют своими концами точки $\{a_k\}$. Для $k \in \mathbb{Z}$ обозначим через r_k длину интервала $[a_{k-1}, a_k)$, то есть $r_k = a_k - a_{k-1}$. Очевидно, что

$$|f(x+h) - f(x)| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} (f(a_k) - f(a_{k-1}))\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(a_k) - f(a_{k-1})| =$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_k |S([a_{k-1}, a_k))|.$$

Поскольку $\sup_n 2^{-n(1-a)}\|S_n\|_\infty < \infty$, и количество точек a_k, порождающих диадические интервалы ранга n, ограничено, то найдется такая константа $C = C(a) > 0$, что

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C \sum_{n \geq \log_2 \frac{1}{h}} 2^{-n} 2^{n(1-a)} \leq \frac{C}{1-2^{-a}} h^a,$$

так что f лежит в соответствующем классе Гельдера Hol_a. Далее мы покажем, что

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h^a} = 0, \quad x \in [0,1). \tag{6.7}$$

Зафиксируем произвольную точку $x \in [0,1)$ и число $\delta > 0$. В силу леммы 6.1.1 найдется такое число N, что $2^{-n(1-a)} S_n(t) \geq -\delta$ для всех $n \geq N$ и $t \in [0,1)$. Теперь зафиксируем произвольное число $0 < h \leq 2^{-N}$, и рассмотрим разбиение типа Уитни $[x, x+h)$, упомянутое выше. Очевидно, $r_k \leq 2^{-N}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, следовательно

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f(a_k) - f(a_{k-1})) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k \frac{f(a_k) - f(a_{k-1})}{r_k} =$$
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k S([a_{k-1}, a_k)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-n_k} S([a_{k-1}, a_k)) \geq -\delta \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-n_k} 2^{n_k(1-a)},$$

где $2^{-n_k} = r_k$ и $\sup_k r_k \leq h$. Поскольку для каждого n наберется не больше четырех чисел $n_k = n$), то

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-n_k} 2^{n_k(1-a)} \leq C h^a$$

для некоторой абсолютной постоянной $C > 0$, и мы получаем (6.7).

Остается показать, что для почти каждой точки $x \in [0,1]$ выполняется

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h^a} > \frac{1}{20}. \tag{6.8}$$

Зафиксируем точку $x \in [0,1)$ и число N так, чтобы $2^{-n(1-a)} S_n(t) \geq -\frac{1-a}{40}$ для каждого $n \geq N$ и $t \in [0,1)$. Из (6.6) следует, что почти все x принадлежат бесконечному числу левых-δ_j-особых интервалов, в частности существует такая последовательность номеров $\{j_m(x)\}_{m=0}^\infty$, что $x \in \tilde{I}_m(x) \in \tilde{\mathcal{F}}_{j_m}$ и $|\tilde{I}_m| \leq 2^{-N}$. Найдем теперь для каждого j_m число h_m, так чтобы точка $x+h_m$ была правым концом δ_{j_m}-особого интервала I_m, соответствующего $\tilde{I}_m$. Иными словами, если $\tilde{I}_m = [(i-1)|\tilde{I}_m|, i|\tilde{I}_m|)$ для некоторого $i \in \mathbb{Z}_+$, то $h_m := (i+1)|\tilde{I}_m| - x$. Поскольку интервал I_m есть δ_{j_m}-особый, то верно $|I_m|^{1-a} S(I_m) \geq \frac{1}{5}$. Рассмотрим разбиение типа Уитни интервала $[x, x+h_m)$, порожденное точками $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. В таком случае, поскольку точки $x+h_m$ двоично-рациональные, мы предполагаем $a_0 = a_1 = \cdots = x + h_m$, также, очевидно, $[a_{-1}, a_0) = I_m$ и $a_k - a_{k-1} = r_k \leq |I_m| \leq 2^{-N}$ для всех $k \leq 0$. В частности, $r_k S([a_{k-1}, a_k)) \geq -r_k^a \frac{1-a}{40}$, $k < 0$. Мы приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
f(x+h_m)-f(x) &= \sum_{k\le 0}(f(a_k)-f(a_{k-1})) = \\
&= r_0\frac{f(a_0)-f(a_{-1})}{r_0}+\sum_{k<0} r_k\frac{f(a_k)-f(a_{k-1})}{r_k} = \\
&= |I_m|S(I_m)+\sum_{k<0} r_k S([a_{k-1},a_k)) \ge \frac{1}{5}|I_m|^a-\frac{1-a}{40}\sum_{k<0} r_k^a.
\end{aligned}$$

Поскольку для любого ранга найдется не более четырех диадических интервалов этого ранга вида $[a_{k-1},a_k)$, то мы видим, что

$$\sum_{k<0} r_k^a \le 4\sum_{n\ge \log_2|I_m|^{-1}} 2^{-na} \le \frac{4}{1-a}|I_m|^a.$$

Следовательно

$$f(x+h_m)-f(x) \ge \frac{1}{5}|I_m|^a-\frac{1}{10}|I_m|^a=\frac{1}{10}|I_m|^a \ge \frac{1}{20}h_m^a,$$

в силу $h_m \le |I_m|+|\tilde{I}_m| = 2|I_m|$. Мы завершили доказательство теоремы 6.1.1.

□

6.2 Доказательство теоремы I.17

Напомним формулировку теоремы.

Теорема 6.2.1 *Пусть $0<a<1$. Тогда найдется такая функция $f\in \mathrm{Hol}_a(\mathbb{R})$ и константа $C>0$, что для каждой точки $x\in\mathbb{R}$ найдется пара последовательностей $\{h_k\}_{k=1}^\infty$, $\{h'_k\}_{k=1}^\infty$ положительных чисел, сходящихся к нулю, и таких что*

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{f(x+h'_k)-f(x)}{h'_k}\right| \le 1, \\
&\liminf_{k\to\infty}\frac{|f(x+h_k)-f(x)|}{|h_k|^\alpha} > C.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Мы строим функцию f с помощью 'разреженного' (относительно пространственной переменной) и лакунарного (относительно переменной сжатия) ряда всплесков. В сущности, мы получаем аналог классической функции Вейерштрасса с лучшим контролем индивидуальных атомов. Мы начнем с определения базового всплеска $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющего следующим условиям

$$\begin{aligned}
&\operatorname{supp}\varphi=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\ \ \varphi\equiv 1 \text{ на } \left[-\frac{1}{16},\frac{1}{16}\right],\ \ \varphi\equiv -1 \text{ на } \left[-\frac{7}{16},-\frac{3}{8}\right]\cup\left[\frac{3}{8},\frac{7}{16}\right], \\
&\int_{\mathbb{R}} x^n\varphi(x)\,dx=0,\ 0\le n\le 2.
\end{aligned}$$

Легко убедиться (см., например, [42]) в том, что для любой последовательности $\{c_{jk}\}$, $j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющей $|c_{jk}| \leq 2^{-ka}$, $k \in \mathbb{N}$, функция

$$f := \sum_{j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}} c_{jk}\varphi_{jk}, \quad \text{где } \ \varphi_{jk}(t) := \varphi(2^k t - j),$$

принадлежит классу Гельдера Hol_a.

Определим *суперлакунарную* последовательность k_n положительных чисел с помощью индукции. Положим $k_1 := 1$. Следующее число $k_n \geq k_{n-1}+4$ будет задано таким образом, что выполняется условие (6.10), которое мы предъявим чуть ниже. Затем мы задаем $c_{jk} := 2^{-ka}$, если $k = k_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, и $c_{jk} \equiv 0$ в ином случае, и определяем искомую функцию как

$$f := \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{jk_n}\varphi_{jk_n}.$$

Для каждого числа $m \geq 2$ определим основную и хвостовую части ряда f – $S_m := \sum_{n=1}^{m-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{jk_n}\varphi_{jk_n}$ и $R_m := \sum_{n=m}^{\infty}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{jk_n}\varphi_{jk_n}$.

Предположим, что мы уже задали числа k_n для $n = 1\ldots m-1$ (а, стало быть, и функции S_m) для некоторого $m \geq 2$. Мы выбираем число k_m так, чтобы выполнялись следующие условия

$$\begin{aligned} &2^{-k_m}\cdot\|S_m'\|_\infty \leq \tilde{\varepsilon}2^{-k_m a} \\ &\sup_{|\theta|\leq 10\cdot 2^{-k_m}} |S_m'(t_0+\theta)| \leq \varepsilon, \ \text{ для каждого } t_0, \text{ такого что } S_m'(t_0) = 0, \end{aligned} \tag{6.10}$$

где абсолютная постоянная $\tilde{\varepsilon} > 0$ будет выбрана позже. Отметим, что для всех m носители функций φ_{jk_m} не пересекаются, и что существуют последовательности вложенных интервалов $\{J_n^\pm\}$ длины $\frac{1}{8}2^{-k_n}$, таких что $\varphi_{j_n^\pm k_n} \equiv \pm 1$ на $J_n^\pm$ для некоторого числа $j_n^\pm$ при $n \leq m$.

Зафиксируем произвольную точку $x \in \mathbb{R}$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдется четыре числа $r_m^\pm = r_m^\pm(x)$, $\rho_m^\pm = \rho_m^\pm(x)$, таких что $R_m(x+r_m^+) = \sup_{2^{-k_m}<t\leq 2^{-k_m+1}} R_m(x+t)$, $R_m(x+r_m^-) = \inf_{2^{-k_m}<t\leq 2^{-k_m+1}} R_m(x+t)$, и $R_m(x-\rho_m^+) = \sup_{2^{-k_m}<t\leq 2^{-k_m+1}} R_m(x-t)$, $R_m(x-\rho_m^-) = \inf_{2^{-k_m}<t\leq 2^{-k_m+1}} R_m(x-t)$. Иными словами, точка $x+r_m^\pm$ доставляет максимум/минимум 2^{-k_m}-периодической функции R_m на интервале $[x+2^{-k_m}, x+2^{-k_m+1}]$ (а $x-\rho_m^\pm$ – соответственно на интервале $[x-2^{-k_m+1}, x-2^{-k_m}]$). Очевидно, что $2^{-k_m} \leq |r_m^\pm|, |\rho_m^\pm| \leq 2^{-k_m+1}$, и

$$R_m(x-\rho_m^\pm) = R_m(x+r_m^\pm) = \pm\sum_{n=m}^{\infty} 2^{-k_n a}.$$

Имеем

$$\frac{f(x+r_m^\pm)-f(x)}{r_m^\pm} = \frac{S_m(x+r_m^\pm)-S_m(x)}{r_m^\pm} + \frac{R_m(x+r_m^\pm)-R_m(x)}{r_m^\pm} := (I^\pm) + (II^\pm),$$

так что $(II^+) \geq 0$, $(II^-) \leq 0$ по определению $r_m^\pm$. Рассмотрим следующие возможные случаи:

(i) Для одного из чисел $r_m^{\pm}$ выполняется

$$\left|\frac{f(x+r_m^{\pm})-f(x)}{r_m^{\pm}}\right| \le 1. \tag{6.11}$$

(ii) Имеем

$$\frac{f(x+r_m^{+})-f(x)}{r_m^{+}} > 1, \quad \frac{f(x+r_m^{-})-f(x)}{r_m^{-}} < -1,$$

или

$$\frac{f(x+r_m^{+})-f(x)}{r_m^{+}} < -1, \quad \frac{f(x+r_m^{-})-f(x)}{r_m^{-}} > 1.$$

(iii) Для обоих чисел $r_m^{\pm}$

$$\frac{f(x+r_m^{\pm})-f(x)}{r_m^{\pm}} > 1 \tag{6.12}$$

или

$$\frac{f(x+r_m^{\pm})-f(x)}{r_m^{\pm}} < -1.$$

Случай (i). Предположим, что определяющее неравенство выполняется, скажем, для r_m^{+}. Мы утверждаем, что в таком случае

$$\frac{f(x+r_m^{-})-f(x)}{r_m^{-}} \le -\frac{1}{2}2^{k_m(1-a)}. \tag{6.13}$$

Действительно, в силу (6.10) последовательность $\{k_n\}$ выбирается так, чтобы для $0 \le \theta \le 2^{-k_m+1}$ выполнялось

$$|S_m(t+\theta)-S_m(t)| \le \int_0^{\theta} |S'(t+s)|\,ds \le 2\tilde{\varepsilon}\cdot 2^{-k_m a}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

С другой стороны, очевидно,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |R_m(t)| = \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-k_n a} \ge 2^{-k_m a}.$$

Зафиксируем небольшое число $\tilde{\varepsilon} \le \frac{1}{200}$. Мы немедленно получаем, что $|S_m(x+r_m^{+})-S_m(x+r_m^{-})| \le \frac{1}{50}2^{-k_m a}$, стало быть

$$\frac{f(x+r_m^{-})-f(x)}{r_m^{-}} = \frac{r_m^{+}}{r_m^{-}}\frac{f(x+r_m^{+})-f(x)}{r_m^{+}} + \frac{f(x+r_m^{-})-f(x+r_m^{+})}{r_m^{-}} =$$
$$= \frac{r_m^{+}}{r_m^{-}}\frac{f(x+r_m^{+})-f(x)}{r_m^{+}} + \frac{S_m(x+r_m^{-})-S_m(x+r_m^{+})}{r_m^{-}} + \frac{R_m(x+r_m^{-})-R_m(x+r_m^{+})}{r_m^{-}}.$$

Поскольку $\frac{r_m^{+}}{r_m^{-}} \le 2$, то мы получаем

$$\left|\frac{r_m^{+}}{r_m^{-}}\frac{f(x+r_m^{+})-f(x)}{r_m^{+}} + \frac{S_m(x+r_m^{-})-S_m(x+r_m^{+})}{r_m^{-}}\right| \le \frac{1}{10}2^{k_m(1-a)}$$

С другой стороны, $R_m(x+r_m^-)-R_m(x+r_m^+) = -2\sum_{n=m}^{\infty} 2^{-k_n a} \leq -2^{-k_m a+1}$, отсюда мы выводим

$$\frac{f(x+r_m^-)-f(x)}{r_m^-} \leq \frac{R_m(x+r_m^-)-R_m(x+r_m^+)}{r_m^-} + \frac{1}{10}2^{k_m(1-a)} \leq -\frac{1}{2}2^{k_m(1-a)}.$$

Это рассуждение доказывает (6.13), и мы полагаем $h_m := r_m^-$ и $h'_m := r_m^+$. Если же (6.11) достигается в r_m^-, то мы просто меняем местами r_m^+ и r_m^- в рассуждении.

Случай (ii). Очевидно, существует такая точка $x+\tilde{r}_m$ между $x+r_m^+$ и $x+r_m^-$, что

$$f(x+\tilde{r}_m)-f(x) = 0,$$

мы сразу считаем $h'_m := \tilde{r}_m$. Далее,

$$\max\left\{|R_m(x+\tilde{r}_m)-R_m(x+r_m^+)|, |R_m(x+\tilde{r}_m)-R_m(x+r_m^-)|\right\} \geq \sup_{t\in\mathbb{R}}|R_m(t)| \geq 2^{-k_m a}. \quad (6.14)$$

Пусть максимум достигается в r_m^+. Тогда

$$f(x+r_m^+)-f(x) = f(x+r_m^+)-f(x+\tilde{r}_m) = S_m(x+r_m^+)-S_m(x+\tilde{r}_m)+R_m(x+r_m^+)-R_m(x+\tilde{r}_m),$$

и, рассуждая как в случае *(i)*, мы имеем

$$\left|\frac{f(x+r_m^+)-f(x)}{r_m^+}\right| \geq \frac{1}{2}2^{k_m(1-a)}.$$

Мы полагаем $h_m := r_m^+$. Аналогично мы поступаем, и если (6.14) достигается в r_m^-.

Случай (iii). Пусть выполняется (6.12) (доказательство ведется совершенно одинаково в обоих случаях). Так как $R_m(x+r_m^-)-R_m(x) \leq 0$, то рассуждения выше показывают, что $S_m(x+r_m^-)-S_m(x) \geq r_m^-$. Докажем, что $R_m(x) \leq 0$. Действительно, в силу нашего выбора последовательности $\{k_n\}$, удовлетворяющей условию (6.10), разность $|S_m(x+r_m^-)-S_m(x)|$ мажорируется $2^{-k_m a} \leq -R_m(x+r_m^-)$. Стало быть условие $R_m(x) \geq 0$ немедленно повлекло бы $f(x+r_m^-)-f(x) \leq 0$, и мы пришли бы к противоречию.

Обратимся теперь к точкам максимума/минимума слева от x. Отметим сначала, что обе величины $S_m(x)-S_m(x-\rho_m^+)$ и $S_m(x)-S_m(x-\rho_m^-)$ положительны. Действительно, пусть это не так, скажем, для ρ_m^+, то есть $S_m(x)-S_m(x-\rho_m^+) \leq 0$. Тогда S'_m обнуляется в некоторой точке $x+\theta \in [x-\rho_m^+, x+r_m^-]$. Используя условие (6.10), мы опять приходим к

$$\sup_{\theta\approx 2^{-k_n}} |S'_m(x+\theta)| \leq \frac{1}{10}.$$

Следовательно

$$\left|\frac{S_m(x+r_m^-)-S_m(x)}{r_m^-}\right| \leq \frac{1}{10},$$

и

$$\frac{f(x+r_m^-)-f(x)}{r_m^-} \leq \frac{1}{10} + \frac{R_m(x+r_m^-)-R_m(x)}{r_m^-} \leq \frac{1}{10},$$

и мы приходим к противоречию. Это доказывает, что $S_m(x) - S_m(x-\rho_m^+) \geq 0$. Аналогично получаем, что и $S_m(x) - S_m(x-\rho_m^-) \geq 0$.

Поскольку $R_m(x) \geq R_m(x-\rho_m^-)$, то мы имеем

$$\frac{f(x)-f(x-\rho_m^-)}{\rho_m^-} = \frac{S_m(x)-S_m(x-\rho_m^-)}{\rho_m^-} + \frac{R_m(x)-R_m(x-\rho_m^-)}{\rho_m^-} \geq 0.$$

С другой стороны, так как $R_m(x) \leq 0$, то верно неравенство $R_m(x) - R_m(x-\rho_m^+) \leq -R_m(x-\rho_m^+)$. Стало быть, как и ранее,

$$\frac{f(x)-f(x-\rho_m^+)}{\rho_m^+} \leq -\frac{1}{2}2^{k_m(1-a)}.$$

в частности, найдется точка $x-\tilde{\rho}_m$, такая что $f(x)-f(x-\tilde{\rho}_m) = 0$. Положим теперь $h_m := -\rho_m^+$, и $h'_m := -\tilde{\rho}_m$.

Замечание. Итак, мы построили функцию $f \in \mathrm{Hol}_a$, такую что для каждой точки $x \in \mathbb{R}$ найдется пара последовательностей h_m, h'_m, удовлетворяющих

$$\left|\frac{f(x+h'_m)-f(x)}{h'_m}\right| \leq 1$$
$$\frac{|f(x+h_m)-f(x)|}{|h_m|^a} \gtrsim 1.$$

Наше построение гарантирует, что мы можем выбрать обе эти последовательности с одной из сторон точки x (правой или левой, но сам выбор *зависит* от точки x), однако пока не вполне ясно, можем ли мы зафиксировать выбор стороны заранее, т.е. найдется ли такая функция f, что h_m и h'_m, скажем, положительны. Естественно задаться вопросом – для каждой ли функции $f \in \mathrm{Hol}_a$ найдется хотя бы одна точка x, такая что либо

$$\liminf_{\theta\downarrow 0} \frac{f(x+\theta)-f(x)}{\theta} = +\infty,$$

либо функция f имеет в x конечную производную.

Глава 7 Пространства роста в шаре: теорема Картрайт

7.1 Обозначения

В данной главе мы введем дополнительные обозначения. Как и обычно, для пары функций f и g мы говорим, что $f \lesssim g$ если найдется положительная константа C (зависящая, возможно, только от размерности), такая что $f \leq Cg$. Мы пишем $f \sim g$, если $f \lesssim g$ и $g \lesssim f$. Точку z единичного шара $\mathbb{B}$ пространства $\mathbb{R}^{d+1}$ мы записываем как (x, y), где $x \in S = \partial\mathbb{B}$, $x = \frac{z}{|z|}$, а $y = 1 - |z| > 0$. В таких обозначениях число y есть попросту расстояние от z до единичной сферы, а x – проекция z на сферу; такой 'полупространственный' способ записи здесь более удобен. Несколько злоупотребляя обозначениями, мы используем оба способа записи – и $u(z)$, и $u(x, y)$. Через $P_y(x, \xi)$ мы обозначаем обычное ядро Пуассона для шара $\mathbb{B}$,

$$P_y(x,\xi) = \frac{y(2-y)}{|(1-y)x-\xi|^{d+1}} = \frac{1-|z|^2}{|z-\xi|^{d+1}}, \quad x,\xi \in S,\ y \in [0,1],\ z = (1-y)\cdot x.$$

Пусть также $\phi(z, \zeta) \in [0, \pi]$ – угол между векторами z и ζ, где $z, \zeta \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$,

$$\phi(z,\zeta) = \cos^{-1}\left(\frac{\langle z,\zeta\rangle}{|z||\zeta|}\right).$$

Буквой η мы (в пределах данной главы) обозначаем 'южный полюс' шара $\mathbb{B}$, $\eta = (0, \dots, 0, -1)$. Для $0 \leq t \leq \pi$ и $0 \leq y \leq 1$ через $A(y, t)$ мы обозначаем “антарктическую” шапочку

$$A(y,t) = \{z \in \mathbb{B} :\ |z| = 1-y,\ \phi(z,\eta) \leq t\},$$

также мы пишем $S(y, t) = \partial A(y, t)$. Следуя [52],мы используем усредненное ядро Пуассона,

$$\Phi(x,y,t) = \frac{1}{\sigma_{d-1}(S(0,t))}\int_{S(0,t)} P_y(x,\xi)\, d\sigma_{d-1}(\xi), \quad x \in S,\ 0 < y \leq 1,\ 0 \leq t \leq \pi, \tag{7.1}$$

где σ_{d-1} – $(d-1)$-мерная поверхностная мера на $S(0, t)$, $\sigma_{d-1}(S(0, t)) = C(d)\sin^{d-1} t$. Отметим, что $\Phi(x, 1, t) = 1$, для $x \in S$, $0 \leq t \leq \pi$.

Нам потребуется следующая оценка (лемма 1 работы [52])

Лемма 7.1.1 *Для любых $x \in S$ и $y \in (0, 1]$, $t \leq \phi(x, \eta)$ верно*

$$\Phi(x,y,t) \sim \frac{y}{q^2(q^{d-1} + \sin^{d-1}\phi(x,\eta))},$$

где $q^2 = 1 + (1-y)^2 - 2(1-y)\cos(\phi(x,\eta) - t) = \operatorname{dist}^2(S(0,t), S(y,\phi(x,\eta)))$.

Усреднение ядра Пуассона пригодится нам позднее (в параграфе 7.5), при работе с осесимметричными гармоническими функциями. Функцию $\tilde{u}$, заданную на единичном шаре, мы называем осесимметричной, если $u(z)$ зависит только от модуля $|z|$ и угла $\phi(z,\eta)$ между zи $\eta = (0,\ldots,0,-1)$. Если такая функция имеет граничные значения $\tilde{u}(x,0) = \varphi(t),\ t = \phi(x,\eta)$, то мы переписываем формулу представления Пуассона следующим образом

$$\tilde{u}(x,y) = \int_S \tilde{u}(\xi,0) P_y(x,\xi)\, d\sigma_d(\xi) = \int_0^\pi \int_{S(0,t)} \tilde{u}(\xi,0) P_y(x,\xi)\, d\sigma_{d-1}(\xi)\, dt$$
$$= C(d) \int_0^\pi \varphi(t) \Phi(x,y,t) \sin^{d-1} t\, dt, \quad (7.2)$$

где σ_d – нормированная поверхностная мера на S, а $C(d)$ – площадь $(d-1)$-мерной единичной сферы.

7.2 Теорема усреднения

В этом параграфе мы показываем, что для того, чтобы вывести (I.60) из (I.59), достаточно оценить средние функции U на сферических шапочках $A(\theta,\alpha)$ для некоторого числа $\alpha = \alpha(\theta)$, где $0 < \theta < \frac{1}{2}$. Мы также проводим предварительные вычисления, позволяющие нам вывести неравенства для таких средних из (I.59) и условий регулярности (I.57), (I.58).

Для начала мы докажем следующую теорему.

Теорема 7.2.1 *Пусть U – гармоническая в единичном шаре $\mathbb{B}$ функция, непрерывная вплоть до границы, и удовлетворяющая*

$$U(0) = 0,$$
$$U(x,y) \le w(y), \quad x \in S,\ 0 \le y \le 1,$$

где w – строго убывающая функция. Предположим, что для всех $\theta < \frac{1}{2}$ найдется положительное число $\alpha = \alpha(\theta) \le \frac{\theta}{4}$, такое что

$$w(\theta - 2\alpha) \le C_1 w(\theta), \quad (7.3a)$$
$$\frac{1}{\alpha^d} \left| \int_{A(\theta,\alpha)} U(z)\, d\sigma_d(z) \right| \le C_2 w(\theta), \quad (7.3b)$$

для некоторых положительных констант C_1, C_2. Тогда

$$U(\eta,\theta) \ge -C_3 w(\theta), \quad (7.4)$$

где $C_3 = C_3(C_1, C_2, d)$.

Доказательство. Рассмотрим шар $\mathbb{B}'$ радиуса 2α с центром в (η,θ). Из условия

(7.3a)выводим, что для каждой точки $z \in \mathbb{B}'$ выполняется

$$w(1-|z|) \le C_1 w(\theta),$$

стало быть

$$-U(z) + C_1 w(\theta) \ge 0, \quad z \in \mathbb{B}'.$$

Применяя неравенство Гарнака, получаем

$$-U(\eta,\theta) + C_1 w(\theta) \le C(d)\left(-U(z) + C_1 w(\theta)\right), \quad |z| = 1-\theta,\ \phi(z,\eta) \le \alpha.$$

Нам остается только провести усреднение по множеству $\{z : |z| = 1-\theta,\ \phi(z,\eta) \le \alpha\}$,

$$-U(\eta,\theta) + C_1 w(\theta) \le \tilde{C}(d)\frac{1}{\alpha^d}\int_{\{z:|z|=1-\theta,\ \phi(z,\eta)\le\alpha\}} \left(-U(z) + C_1 w(\theta)\right)\, d\sigma_d(z),$$

что, в сочетании с (7.3b), влечет (7.4). □

7.3 Две леммы

Здесь мы показываем, что условия регулярности (I.57) и (I.58) влекут (7.3a) и (7.3b) для должным образом заданного числа $\alpha = \alpha(\theta)$. Оказывается, что такое α удобно задавать (по крайней мере для сколько-нибудь гладких весов) так:

$$\alpha(\theta) := -\frac{w(\theta)}{10w'(\theta)}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{7.5}$$

Более подробное обсуждение условий регулярности проводится в параграфе 7.4. Наш выбор обусловлен следующей леммой.

Лемма 7.3.1 *Если вес w удовлетворяет условиям* (I.57) *и* (I.58), *а число $\alpha(\theta)$ задано как в* (7.5), *то $0 \le \alpha(\theta) \le \frac{\theta}{4}$ и*

$$w(\theta - 2\alpha(\theta)) \le 2w(\theta), \quad 0 < \theta \le \frac{1}{2}.$$

Проверим теперь, что заданное в (7.5) α удовлетворяет (7.3b). Установить это намного сложнее, чем (7.3a), и первый шаг в этом направлении заключается в следующем утверждении.

Лемма 7.3.2 *Если вес w удовлетворяет* (I.57) *и* (I.58) *для некоторого $\delta > 0$, а число $\alpha(\theta)$ задано как в* (7.5), *то для $0 < \theta \le \frac{1}{2}$ имеем*

$$\int_0^1 \left(\frac{w(y(1-\theta)+\theta)}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}} dy \le \left(\frac{d+1}{d} + \frac{40(d+1)}{\delta}\right) w^{\frac{1}{d+1}}(\theta)\alpha^{\frac{d}{d+1}}(\theta). \tag{7.6}$$

7.3.1 Доказательство леммы 7.3.1

Для произвольного числа $0 < \theta < \frac{1}{2}$ найдется число $\theta_1 \in [\theta - 2\alpha(\theta), \theta]$, такое что

$$w(\theta) = w(\theta - 2\alpha(\theta)) + 2\alpha(\theta) w'(\theta_1). \tag{7.7}$$

Условие регулярности (I.58) влечет

$$\alpha'(\theta) \le \frac{1-\delta}{10d}. \tag{7.8}$$

Следовательно $\alpha(\theta_1) \ge \alpha(\theta) - \frac{\theta - \theta_1}{10}$, но, с другой стороны, $\theta - \theta_1 \le 2\alpha(\theta)$, поэтому

$$\alpha(\theta_1) \ge \alpha(\theta) - \frac{\alpha(\theta)}{5} = \frac{4}{5}\alpha(\theta).$$

Мы видим, что

$$-\alpha(\theta) w'(\theta_1) = \frac{\alpha(\theta) w(\theta_1)}{10\alpha(\theta_1)} \le \frac{w(\theta_1)}{8}.$$

Подставляя это неравенство в (7.7), получаем

$$w(\theta) \ge w(\theta - 2\alpha(\theta)) - \frac{w(\theta_1)}{4} \ge \frac{w(\theta - 2\alpha(\theta))}{2}$$

что и доказывает лемму.

7.3.2 Доказательство леммы 7.3.2

Мы разбиваем интеграл в (7.6) на две части

$$\int_0^1 \left(\frac{w(y+\theta-y\theta)}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}} dy$$
$$= \int_0^{\alpha(\theta)} \left(\frac{w(y+\theta-y\theta)}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}} dy + \int_{\alpha(\theta)}^1 \left(\frac{w(y+\theta-y\theta)}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}} dy = I_1 + I_2.$$

Для оценки первого интеграла заметим, что при $\theta \le 1$ имеем

$$I_1 = \int_0^\alpha \left(\frac{w(y+\theta-y\theta)}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}} dy \le w^{\frac{1}{d+1}}(\theta) \int_0^\alpha \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}} dy \le \frac{d+1}{d} w^{\frac{1}{d+1}}(\theta) \alpha^{\frac{d}{d+1}}(\theta).$$

Переходя ко второму интегралу, положим $\kappa(y) := w^{\frac{1}{d+1}}(y),\ y > 0$. Итак, достаточно проверить, что

$$I_2 = \int_\alpha^1 \kappa((1-\theta)y + \theta) y^{-\frac{1}{d+1}} dy \le \tilde{C}\kappa(\theta)\alpha^{\frac{d}{d+1}}(\theta), \tag{7.9}$$

где $\tilde{C} = \frac{40(d+1)}{\delta}$. Из определений $\alpha = \alpha(y)$ и $\kappa = \kappa(y)$ выводим

$$\alpha \cdot \frac{\kappa'}{\kappa} = -\frac{1}{10(d+1)},$$

применим теперь (I.58), чтобы получить

$$\begin{aligned}\left(\alpha^{\frac{d}{d+1}}\kappa\right)' &= \alpha^{-\frac{1}{d+1}}\kappa\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\alpha + \frac{d}{d+1}\alpha'\right)\\ &= \alpha^{-\frac{1}{d+1}}\kappa\left(-\frac{1}{10(d+1)} + \frac{d}{d+1}\alpha'\right) \leq -\frac{1}{10}\alpha^{-\frac{1}{d+1}}\kappa\left(\frac{1}{(d+1)} - \frac{1-\delta}{d+1}\right)\\ &= -\frac{\delta}{10(d+1)}\alpha^{-\frac{1}{d+1}}\kappa. \qquad (7.10)\end{aligned}$$

Положим $c = \frac{\delta}{10(d+1)}$. Тогда, интегрируя (7.10) по промежутку $[\theta, 1]$ для $\theta < \frac{1}{2}$, видим, что

$$\begin{aligned}\kappa(\theta)\alpha^{\frac{d}{d+1}}(\theta) &\geq c\int_\theta^1 \kappa(y)\alpha^{-\frac{1}{d+1}}(y)\,dy\\ &= c(1-\theta)\int_0^1 \kappa\left(y(1-\theta)+\theta\right)\alpha^{-\frac{1}{d+1}}\left(y(1-\theta)+\theta\right)\,dy.\end{aligned}$$

Отсюда, при $y \geq \alpha(\theta)$, и в силу (7.8) выводим $\alpha(\theta + (1-\theta)y) \leq \alpha(\theta) + (1-\theta)y \leq 2y$. Следовательно

$$\int_0^1 \kappa\left(y(1-\theta)+\theta\right)\alpha^{-\frac{1}{d+1}}\left(y(1-\theta)+\theta\right)\,dy \geq 2^{-\frac{1}{d+1}}\int_{\alpha(\theta)}^1 \kappa\left((1-\theta)y+\theta\right)y^{-\frac{1}{d+1}}\,dy.$$

Мы получаем (7.9), причем $\tilde{C} = \frac{2^{\frac{1}{d+1}}10(d+1)}{\delta(1-\theta)}$. Объединяя оценки для обоих интегралов, приходим к

$$\int_0^1 \left(\frac{w(y+\theta-y\theta)}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}}\,dy \leq \left(\frac{d+1}{d} + \frac{40(d+1)}{\delta}\right)w^{\frac{1}{d+1}}(\theta)\alpha^{\frac{d}{d+1}}(\theta),$$

и доказательство завершено.

7.4 Интермедия: рассуждения о регулярности

Мы уже заметили, что для того, чтобы доказать основную теорему, нам нужны условия (7.3a) и (7.3b). эти условия в своем роде независимы – вывод первого вполне герметичен, а второе, как мы вскоре увидим, следует из леммы 7.3.2, где мы не пользуемся свойством удвоения для α. В совокупности они означают, что для каждого фиксированного числа θ мы, в сущности, ищем число $\alpha = \alpha(\theta)$, такое что

$$w(\theta - \alpha) \leq 2w(\theta), \qquad (7.11a)$$

$$\int_\alpha^1 \left(\frac{w(y+\theta-y\theta)}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}}\,dy \leq C(w,n)w^{\frac{1}{d+1}}(\theta)\alpha^{\frac{d}{d+1}}(\theta). \qquad (7.11b)$$

Эти же два неравенства “соревнуются” друг с другом. Действительно, считая число α очень маленьким, мы немедленно видим, что первое условие легко выполняется, однако же второе условие нарушается с запасом. С другой стороны, α не может быть и слишком большим (относительно θ) в силу первого условия: чем быстрее растет вес w, тем меньше, в принципе, должно быть число α. Заставляя оба неравенства выполняться одновременно, мы (возможно с некоторой потерей информации) приходим к требованию “регулярности ” веса w, сформулированному в (I.57) и (I.58).

Следует отметить, что мы не используем регулярность в других частях доказательства, так что если w непосредственно удовлетворяет условиям (7.11a) и (7.11b) для некоторого α (не обязательно определенного именно так, как в (7.5)), то теорема I.18 по-прежнему верна. Один из важных примеров доставляется весами полиномиального роста. Предположим, что $w \in C^1$ и

$$-\frac{N}{y} \leq \frac{w'(y)}{w(y)} \leq -\frac{d+\varepsilon}{y}, \ y \in (0,1], \tag{7.12}$$

для некоторых чисел ε и $N \geq d+\varepsilon$. Положим $\alpha(\theta) = \frac{\theta}{2N}$. Очевидно, $w(\theta-\alpha) \leq 2w(\theta), \ \theta \in (0,1]$, так что мы имеем (7.11a). Далее,

$$\left(y^{\frac{d}{d+1}} w^{\frac{1}{d+1}}(y)\right)' = \frac{y^{-\frac{1}{d+1}} w^{\frac{1}{d+1}}(y)}{d+1} \left(\frac{w'(y)}{w(y)} y + d\right),$$

поэтому

$$\left(\alpha^{\frac{d}{d+1}}(y) w^{\frac{1}{d+1}}(y)\right)' \leq -C\alpha^{-\frac{1}{d+1}}(y) w^{\frac{1}{d+1}}(y),$$

что и составляет (7.10). Следуя доказательству леммы 7.3.2, мы видим, что выполняется и условие (7.11b). Отметим, что в этом случае вес w может быть чуть менее гладким, чем того требует условие регулярности (I.58).

Отметим еще, что для того, чтобы ограничить функцию U снизу, нам не нужна регулярность веса w на всем интервале $(0,1]$. Предполагая, что вес $w \in C^2$, w монотонно убывает, и что (I.57) и (I.58) выполняются только для $0 < y \leq y_0$ (или, например, $w \in C^1$,и (7.12) выполняется только для $0 < y \leq y_0$) для некоторого числа $y_0 < 1$, мы все равно можем доказать вариант теоремы I.18, где (I.60) заменяется на

$$|U(z)| \leq C_1 + C_2 w(1-|z|), \quad z \in \mathbb{B}. \tag{7.13}$$

Действительно, легко видеть, что найдется C^2-гладкая функция $\tilde{w}$, удовлетворяющая условиям (I.57) и (I.58) для $y \in (0,1]$, причем

$$\begin{aligned} \tilde{w}(y) &\geq w(y), \quad y_1 \leq y \leq 1, \\ \tilde{w}(y) &= Aw(y), \quad 0 < y \leq y_1. \end{aligned}$$

К примеру, можно положить $\tilde{w}(y) = c(y+b)^s$ для $y \geq y_1$ и некоторого $y_1 \leq y_0$, такого что $\left(\frac{w}{w'}\right)'(y_1) < 0$. Поскольку теорема I.18 верна для веса $\tilde{w}$, то мы немедленно выводим (7.13). Аналогичное рассуждение работает и для весов $w \in C^1$, удовлетворяющих (7.12).

7.5 Основное техническое утверждение

7.5.1 Формулировка

Нижеследующая теорема позволяет нам оценивать сверху абсолютные значения усреднений гармонических функций.

Теорема 7.5.1 *Пусть* $\tilde{k} : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ *– строго убывающая абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая*

$$\tilde{k}(0) < \infty, \tag{7.14a}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\tilde{k}(y)}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}} dy \le D, \tag{7.14b}$$

для некоторой константы $1 < D < \infty$. *Пусть* $\tilde{u}$ *– гармоническая в единичном шаре* $\mathbb{B}$ *функция, непрерывная вплоть до границы, и удовлетворяющая* $\tilde{u}(0) = 0$ *and* $\tilde{u}(x, y) \le \tilde{k}(y)$ *for* $x \in S,\ 0 \le y \le 1$. *Тогда для любой точки* $x_0 \in S$ *и числа* $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$ *верно следующее неравенство*

$$\int_{\{\phi(x,x_0)\le\beta\}} \tilde{u}(x, 0)\, d\sigma_d(x) \ge -C\left(D^{d+1} + \tilde{k}(0)\beta^d\right). \tag{7.15}$$

где значение C *зависит только от размерности* d.

7.5.2 Теоремы 7.5.1 и 7.2.1 влекут теорему I.18

Зафиксируем произвольное положительное число $\theta \le \frac{1}{2}$. Пусть функция U и вес w заданы как в формулировке теоремы I.18, а α определено в (7.5). Определим вес, который мы будем использовать в теореме 7.5.1:

$$\tilde{k}(y) := \frac{w(y + \theta - y\theta)}{w(\theta)\alpha(\theta)^d}, \quad 0 \le y \le 1.$$

Действительно, в силу леммы 7.3.2 имеем

$$\int_0^1 \left(\frac{\tilde{k}(y)}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}} dy = \int_0^1 \left(\frac{w(y + \theta - y\theta)}{w(\theta)\alpha^d(\theta)y}\right)^{\frac{1}{d+1}} dy \le \left(\frac{d+1}{d} + \frac{40(d+1)}{\delta}\right),$$

и мы приходим к условию (7.14b), где $D = \frac{d+1}{d} + \frac{40(d+1)}{\delta}$. Положим теперь $\beta = \alpha(\theta)$, так чтобы $0 \le \beta \le \frac{1}{2}$ по (7.8). Очевидно, $\tilde{k}(0) < \infty$, и из (I.59) следует, что функция

$$\tilde{u}(z) := \frac{U(z(1-\theta))}{w(\theta)\alpha^d(\theta)}, \quad |z| \le 1,$$

оценивается сверху через $\tilde{k}(y)$. Таким образом, из теоремы 7.5.1 следует, что для любой точки $x_0 \in S$ верно

$$\int_{\{\phi(x,x_0)\le\alpha(\theta)\}} \tilde{u}(x,0)\,dx \ge -C(d)\left(D^{d+1}+\tilde{k}(0)\alpha^d(\theta)\right) \ge -C(d)\left(D^{d+1}+1\right).$$

Поскольку функция $\tilde{u}$ подчинена весу $\tilde{k}$, то последнее неравенство влечет

$$\frac{1}{\alpha^d(\theta)}\left|\int_{A(\theta,\alpha(\theta))} U(z)\,d\sigma_d(z)\right| \lesssim D^{d+1}w(\theta),$$

и мы получаем (7.3b). Условие (7.3a) следует из леммы 7.3.1. Мы получаем следующее неравенство

$$\frac{1}{\alpha^d(\theta)}\left|\int_{A(\theta,\alpha(\theta))} U(z)\,d\sigma_d(z)\right| \lesssim \left(\frac{d+1}{d}+\frac{40(d+1)}{\delta}\right)^{d+1} w(\theta),$$

которое, в сочетании с теоремой 7.2.1, и доказывает теорему I.18.

7.6 Весовая лемма

Здесь мы доказываем теорему 7.5.1. Предварим доказательство введением дополнительных обозначений. Для произвольного числа $\beta \in [0,\frac{\pi}{2}]$ положим

$$A = A(0,\beta) = \{x \in S : \phi(x,\eta) \le \beta\},\ A' = S \setminus A.$$

Напомним, что $\Phi(x,y,t)$ есть усредненное ядро Пуассона, определенное в (7.1). Основной ингредиент доказательства теоремы 7.5.1 заключается в следующей лемме.

Лемма 7.6.1 *Пусть $k : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ – строго убывающая абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая*

$$k(0) \le \tfrac{\lambda}{\beta^d}, \tag{7.16a}$$

$$\textstyle\int_0^1 \left(\frac{k(y)}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}} dy \le \lambda^{\frac{1}{d+1}}, \tag{7.16b}$$

для некоторого положительного числа $\lambda \le \frac{1}{\pi}$. Тогда существуют подобласть $\Omega \subset \mathbb{B}$ и положительная функция v_A, гармоническая в области Ω, такие что

$$A \subset \partial\Omega,\ 0 \in \Omega, \tag{7.17a}$$

$$v_A(0) \le C(d)\lambda^{\frac{1}{d+1}}, \tag{7.17b}$$

$$v_A(x,y) \gtrsim k(y) \gtrsim \Phi(x,y,\beta), \quad (x,y) \in \partial\Omega \setminus A, \tag{7.17c}$$

где соответствующие константы зависят только от размерности d.

Доказательство этой леммы использует модификацию рассуждения, представленного в доказательстве леммы **4** статьи [52]. По существу, оно позволяет нам оценить усреднение веса

k на $\partial\Omega \setminus A$ относительно гармонической меры области Ω в нуле. Ключевой момент здесь заключается во втором неравенстве (7.17c), которое используется (в пункте 7.7) для нижней оценки в (7.15).

7.6.1 Доказательство леммы 7.6.1: вспомогательная поверхность Γ_A

Область Ω мы строим, определяя ее границу $\partial\Omega = \Gamma_A \bigcup A$. Поверхность Γ_A определяется ниже, таким образом, чтобы второе неравенство в (7.17c) выполнялось на Γ_A, и, кроме того, чтобы на ней была верна эквивалентность $k(y) \approx \Phi(x, y, \beta)$.

Рассмотрим теперь строго убывающую функцию $\frac{y}{k(y)}$. Пусть $s = s(\beta)$ – решение следующего уравнения

$$\frac{y}{k(y)} = \beta^{d+1}.$$

В силу убывания k из неравенства (7.16a) следует

$$0 < s = k(s)\beta^{d+1} \leq k(0)\beta^{d+1} \leq \lambda\beta. \tag{7.18}$$

Далее, из (7.16b) и монотонности k следует и

$$k^{\frac{1}{d+1}}(1) \int_0^1 \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}} dy \leq \int_0^1 \left(\frac{k(y)}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}} dy \leq \lambda^{\frac{1}{d+1}},$$

так что имеем $k(1) \leq \lambda \leq \frac{1}{\pi}$. Определим $\rho = \rho(\beta)$ как решение следующего уравнения

$$\frac{y}{k(y)} = (\pi - \beta)^{d+1},$$

мы видим, что $s < \rho < 1$. Положим далее

$$\begin{aligned} \gamma(y) &= \beta + \left(\frac{y}{k(y)}\right)^{\frac{1}{d+1}}, \quad s \leq y \leq \rho, \\ \gamma(y) &= \beta + \left(\frac{y}{k(y)\beta^{d-1}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq y \leq s, \end{aligned} \tag{7.19}$$

и заметим, что $\gamma(0) = \beta$, $\gamma(s) = 2\beta$, и $\gamma(\rho) = \pi$. Поверхность Γ_A определяется следующим образом

$$\Gamma_A := \{(x, y) : \phi(x, \eta) = \gamma(y),\ x \in A' = S \setminus A,\ y \in [0, \rho]\},$$

соответственно, Ω – область, ограниченная $A \bigcup \Gamma_A$, так что Ω удовлетворяет (7.17a).

7.6.2 Доказательство леммы 7.6.1: вспомогательная функция v_A

Мы сначала определяем граничные значения функции v_A на единичной сфере:

$$\begin{aligned} v_A(x, 0) &= k(y), \quad (x, y) \in \Gamma_A, \\ v_A(x, 0) &= 0, \quad x \in A, \end{aligned} \tag{7.20}$$

и задаем функцию v_A как гармоническое продолжение $v_A(\cdot,0)$ в единичный шар. Отметим осесимметричность функции v_A. Остается проверить неравенства (7.17b) и (7.17c).

В рассуждении ниже буквой C мы обозначаем постоянную, зависящую только разве от размерности, значение которой может меняться от строчки к строчке.

Доказательство первого неравенства вполне прямолинейно, хотя и несколько тяжеловесно. Мы имеем: $\gamma^{-1}(\beta)=0$, $\gamma^{-1}(2\beta)=s$, и из (7.2) выводим

$$\begin{aligned}
v_A(0) &= C\int_\beta^\pi \int_{\phi(x,\eta)=t} v_A(x,0)\,d\sigma_{d-1}(x)\,dt = C\int_\beta^\pi k(y(\gamma))\sin^{d-1}\gamma\,d\gamma\\
&= C\int_\beta^{2\beta} k(y(\gamma))\sin^{d-1}\gamma\,d\gamma + C\int_{2\beta}^{\pi} k(y(\gamma))\sin^{d-1}\gamma\,d\gamma\\
&= C\int_0^s k(y)\sin^{d-1}(\gamma(y))\gamma'(y)\,dy + C\int_s^\rho k(y)\sin^{d-1}(\gamma(y))\gamma'(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Оба этих интеграла оцениваются примерно одинаково. Для первого заметим, что $\gamma(y)\le\gamma(s)=2\beta$, так что $\sin\gamma(y)\le 2\beta$. Тогда

$$\begin{aligned}
\int_0^s k(y)\sin^{d-1}(\gamma(y))\gamma'(y)\,dy &\le C\beta^{d-1}\int_0^s k(y)\gamma'(y)\,dy\\
&= C\beta^{\frac{d-1}{2}}\int_0^s y^{-\frac12}\left(k^{\frac12}(y)-yk'(y)k^{-\frac12}(y)\right)\,dy\\
&\le C\beta^{\frac{d-1}{2}}\left(\int_0^s\sqrt{\frac{k(y)}{y}}\,dy+\int_0^s y^{\frac12}\,dk^{\frac12}(y)\right)\\
&\le C\beta^{\frac{d-1}{2}}\sqrt{k(0)s}\le C\beta^{\frac{d-1}{2}}\sqrt{\lambda^2\cdot\beta^{1-n}}\le C\lambda,
\end{aligned}$$

где предпоследнее неравенство следует из (7.16a) и(7.18). Аналогично, для второго интеграла имеем $y\in[s,\rho]$, и

$$\gamma'(y)=\frac{1}{d+1}\left(\frac{y}{k(y)}\right)^{-\frac{d}{d+1}}\frac{k(y)-yk'(y)}{k^2(y)},$$

и также

$$\gamma(y)\le 2\left(\frac{y}{k(y)}\right)^{\frac{1}{d+1}}.$$

Мы получаем

$$\int_s^\rho k(y)\sin^{d-1}(\gamma(y))\gamma'(y)\,dy \le \int_s^\rho k(y)(\gamma(y))^{d-1}\gamma'(y)\,dy$$
$$\le 2^{d-1}\int_0^1 k(y)\frac{k^{-\frac{d-1}{d+1}}(y)y^{\frac{d-1}{d+1}}}{d+1}\left(y^{-\frac{d}{d+1}}k^{-\frac{1}{d+1}}(y) - y^{\frac{1}{d+1}}k^{-\frac{1}{d+1}-1}(y)k'(y)\right)\,dy$$
$$\le \frac{2^{d-1}}{d+1}\left(\int_0^1\left(\frac{k(y)}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}}\,dy - (d+1)\int_0^1 y^{\frac{d}{d+1}}\,d(k^{\frac{1}{d+1}}(y))\right)$$
$$= \frac{2^{d-1}}{d+1}\left(\int_0^1\left(\frac{k(y)}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}}\,dy + n\int_0^1\left(\frac{k(y)}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}}\,dy - (d+1)k^{\frac{1}{d+1}}(1)\right)$$
$$\le C\int_0^1\left(\frac{k(y)}{y}\right)^{\frac{1}{d+1}}\,dy \le C\lambda^{\frac{1}{d+1}}.$$

Эти две оценки в совокупности влекут $v_A(0) \le C(\lambda + \lambda^{\frac{1}{d+1}}) \lesssim \lambda^{\frac{1}{d+1}}$, поскольку $\lambda \le 1$.

Вторая часть оценки (7.17c), то есть неравенство $k(y) \gtrsim \Phi(x,y,\beta)$, при $(x,y) \in \Gamma_A$, следует непосредственно из леммы 7.1.1. Действительно, из этой леммы выводим, что для $t \le \phi(x,\eta) \le \frac{\pi}{2}$ верно

$$\Phi(x,y,t) \sim \frac{y}{((\phi(x,\eta)-t)^2+y^2)\left(((\phi(x,\eta)-t)^2+y^2)^{\frac{d-1}{2}} + \phi^{d-1}(x,\eta)\right)}. \tag{7.21}$$

Если $\beta \le \phi(x,\eta) \le 2\beta$, то, очевидно, $((\phi(x,\eta)-\beta)^2+y^2)^{\frac{d-1}{2}} + \phi^{d-1}(x,\eta) \ge \beta^{d-1}$. Далее, $(\phi(x,\eta)-\beta)^2 = \frac{y}{k(y)\beta^{d-1}}$ при $(x,y)\in\Gamma_A$ в силу (7.19). Мы, следовательно, имеем

$$\Phi(x,y,\beta) \le \frac{Cy}{((\phi(x,\eta)-\beta)^2+y^2)\beta^{d-1}} \le \frac{Cy}{(\phi(x,\eta)-\beta)^2\beta^{d-1}}$$
$$\le \frac{Cyk(y)\beta^{d-1}}{y\beta^{d-1}} \le Ck(y), \quad (x,y)\in\Gamma_A.$$

Из (7.21) следует, что $\Phi(x,y,\beta) \le \frac{cy}{(\phi(x,\eta)-\beta)^{d+1}}$. Для $2\beta \le \phi(x,\eta) \le \pi$ имеем $4(\phi(x,\eta)-\beta)^2 \ge \phi^2(x,\eta)$, а стало быть, по (7.19), получаем

$$\Phi(x,y,\beta) \le \frac{Cy}{(\phi(x,\eta)-\beta)^{d+1}} = \frac{Cy}{(\gamma(y)-\beta)^{d+1}} = \frac{Ck(y)y}{y} = Ck(y), \quad (x,y)\in\Gamma_A.$$

Чтобы доказать первую часть (7.17c), мы сначала показываем, что

$$y \le \phi(x,\eta) - \beta \tag{7.22}$$

при $(x,y)\in\Gamma_A$. Действительно, для $2\beta \le \phi(x,\eta)$ из (7.16b) и (7.19) следует

$$\frac{y}{\phi(x,\eta)-\beta} = k^{\frac{1}{d+1}}(y)y^{1-\frac{1}{d+1}} \le \int_0^y\left(\frac{k(\tau)}{\tau}\right)^{\frac{1}{d+1}}\,d\tau \le \lambda^{\frac{1}{d+1}},$$

поскольку $\frac{k(y)}{y}$ есть убывающая функция. Если $\beta \le \phi(x,\eta) \le 2\beta$, то $y \le s \le \lambda\beta$ и (7.19) доставляет

$$\frac{y}{\phi(x,\eta)-\beta} = k^{\frac{1}{2}}(y)\beta^{\frac{d-1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \le k^{\frac{1}{2}}(0)\beta^{\frac{d-1}{2}}s^{\frac{1}{2}} \le (\lambda\beta^{-n})^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{d-1}{2}}(\lambda\beta)^{\frac{1}{2}} \le \lambda \le 1.$$

Положим $E(x,y) = \{\xi \in S : \phi(\xi,\eta) \le \phi(x,\eta),\ \phi(x,\xi) \le y\}$. Неравенство (7.22) влечет $\sigma_d(E(x,y)) \sim y^d$ при $(x,y) \in \Gamma_A$ и $E(x,y) \subset a$. Мы видим, что $P_y(\xi,x) \gtrsim \frac{1}{y^d}$, так как $\xi \in E(x,y)$, к тому же функция $v_A(x,0)$ осесимметрична и строго убывает относительно $\phi(x,\eta)$ при $\phi(x,\eta) \ge \beta$, поэтому

$$\begin{aligned} v_A(x,y) &= \int_S v_A(\xi,0)P_y(\xi,x)\,d\sigma_d(\xi) \\ &\ge \int_{\{\xi\in a:\phi(\xi,\eta)\le\phi(x,\eta)\}} v_A(\xi,0)P_y(\xi,x)\,d\sigma_d(\xi) \gtrsim \int_{E(x,y)} v_A(\xi,0)\frac{1}{y^d}\,d\sigma_d(\xi) \\ &\ge \frac{1}{y^d}\int_{E(x,y)} v_A(x,0)\,d\sigma_d(\xi) \ge \frac{1}{y^d}v_A(x,0)\sigma_d(E(x,y)) \gtrsim Ck(y). \end{aligned}$$

Мы завершили доказательство леммы 7.6.1.

7.7 Доказательство теоремы 7.5.1

Сначала мы перенормируем вес $\tilde{k}$ и функцию $\tilde{u}$, полагая

$$\begin{aligned} k(y) &= \frac{\lambda}{D^{d+1}+\tilde{k}(0)\beta^d}\tilde{k}(y), \\ u(z) &= \frac{\lambda}{D^{d+1}+\tilde{k}(0)\beta^d}\tilde{u}(z), \end{aligned} \tag{7.23}$$

где $\lambda = \lambda(d) \le \frac{1}{\pi}$ есть небольшая положительная постоянная, которая будет выбрана чуть позже. Мы считаем, что $x_0 = \eta$ и $\tilde{u}(\cdot,0)$ (и, следовательно, $u(\cdot,0)$) есть осесимметричная функция

$$u(x,0) = \varphi(|\phi(x,\eta)|), \quad x \in S.$$

Через u_A и $u_{A'}$ мы обозначаем гармонические продолжения в единичный шар $\mathbb{B}$ функций $u(\cdot,0)\cdot\chi_A$ и $u(\cdot,0)\cdot\chi_{A'}$ соответственно.

Очевидно, что $0 = u(0) = u_{A'}(0) + u_A(0)$. Положим

$$K = -u_A(0) = -\int_A u(x,0)\,d\sigma_d(x),$$

также мы считаем, что $K \ge 0$ (иначе неравенство (7.15) тривиально). Мы видим, что из (7.14a) и (7.14b) следует, что вес k удовлетворяет условиям (7.16a) и (7.16b). Пусть поверхность Γ_A и функция v_A задаются леммой 7.6.1.

Сначала мы докажем следующее неравенство

$$u_a(x,y) \le C(1+K)v_A(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_A. \tag{7.24}$$

Поскольку $u_a(\cdot,0)$ – попросту составляет граничные значения функции u на a, то мы имеем

$$u_a(x,y) = u(x,y) - u_A(x,y) \le k(y) - u_A(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_A,$$

так что для верхней оценки u_a нам потребно ограничить функцию u_A снизу на поверхности Γ_A. Как и ранее, (7.2) влечет

$$u_A(x,y) = C(d)\int_0^\beta \varphi(t)\Phi(x,y,t)\sin^{d-1} t\,dt,$$

в частности, мы выводим

$$u_A(0) = C(d)\int_0^\beta \varphi(t)\sin^{d-1} t\,dt. \tag{7.25}$$

Очевидно, $\varphi(t)-k(0) \le 0$, поэтому теорема о среднем (первая, в отличие от [52]) гарантирует существование числа $t_0 \in [0,\beta]$, такого что

$$\begin{aligned}
&\int_0^\beta \varphi(t)\Phi(x,y,t)\sin^{d-1} t\,dt \\
&\qquad = \int_0^\beta (\varphi(t)-k(0))\,\Phi(x,y,t)\sin^{d-1} t\,dt + \int_0^\beta k(0)\Phi(x,y,t)\sin^{d-1} t\,dt \\
&\qquad = \Phi(x,y,t_0)\int_0^\beta (\varphi(t)-k(0))\sin^{d-1} t\,dt + k(0)\int_0^\beta \Phi(x,y,t)\sin^{d-1} t\,dt \\
&\qquad \ge \Phi(x,y,t_0)\int_0^\beta \varphi(t)\sin^{d-1} t\,dt - \Phi(x,y,t_0)k(0)\int_0^\beta \sin^{d-1} t\,dt \\
&\qquad = \Phi(x,y,t_0)\frac{u_A(0)}{C(d)} - \Phi(x,y,t_0)k(0)\int_0^\beta \sin^{d-1} t\,dt,
\end{aligned}$$

здесь последнее неравенство следует из (7.25). Теперь, из (7.23) выводим $k(0)\beta^d \le \lambda \le 1$, к тому же имеем
$\int_0^\beta \sin^{d-1} t\,dt \approx \beta^d$. Мы продолжаем оценку, получая

$$\begin{aligned}
\int_0^\beta \varphi(t)\Phi(x,y,t)\sin^{d-1} t\,dt &\ge \Phi(x,y,t_0)\left(\frac{u_A(0)}{C(d)} - k(0)\int_0^\beta \sin^{d-1} t\,dt\right) \\
&\ge \Phi(x,y,t_0)\left(-\frac{K}{C(d)} - C(d,\beta)\lambda\right),
\end{aligned}$$

где $C(d,\beta) \sim 1$. Применяя (7.21), получаем $\sup_{0\le t\le\beta}\Phi(x,y,t) \sim \Phi(x,y,\beta)$, если $\phi(x,\eta) > \beta$.

Итак, мы имеем

$$u_A(x,y) \geq C(d)\Phi(x,y,t_0)\left(-\frac{K}{C(d)} - C(d,\beta)\lambda\right)$$
$$\geq C(d)\Phi(x,y,\beta)\left(-\frac{K}{C(d)} - C(d,\beta)\lambda\right) \geq -C(d)(K+1)\Phi(x,y,\beta).$$

Совокупность полученных оценок вместе с (7.17c) доставляет

$$u_{A'}(x,y) \leq k(y) - u_A(x,y) \leq k(y) + C(d)(K+1)\Phi(x,y,\beta) \lesssim v_A(x,y)(K+1)$$

при $(x,y) \in \Gamma_A$, и мы выводим (7.24).

После получения этой оценки доказательство почти завершено. Из принципа максимума в сочетании с (7.24) и (7.17b) следует

$$K = u_{A'}(0) \leq C(1+K)v_A(0) \leq C_0\lambda^{\frac{1}{d+1}}(1+K) \leq \frac{1+K}{3},$$

для достаточно малых λ. Мы, стало быть, имеем $K \leq \frac{1}{2}$, что, в свою очередь, означает

$$\int_{A(0,\beta)} \tilde{u}(x,0)\, d\sigma_d(x) \geq -\frac{1}{2\lambda}\left(D^{d+1} + \tilde{k}(0)\beta^d\right),$$

и теорема доказана.

Глава 8 Нормальная вариация положительных гармонических функций

В этой главе мы доказываем теорему I.22. Сформулируем ее заново.

Теорема 8.0.1 *Пусть u – положительная гармоническая в верхней полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ функция, такая, что ее граничные значения имеют компактный носитель, так что, в частности,* $\lim_{|(x,t)|\to\infty} u(x,t) = 0$. *Тогда множество ее точек Бургейна, то есть точек, где* ***средняя вариация*** *функции u конечна,*

$$\operatorname{Mvar} u(x) = \int_0^1 h_u^{2t}(x,t)\,dt < \infty,$$

сверхплотно в $\mathbb{R}$. Иными словами, пересечение множества точек Бургейна с ***любым интервалом*** *$I \subset \mathbb{R}$ имеет полную (единичную) размерность Хаусдорфа. Здесь h_u^{2t} – наименьшая гармоническая мажоранта субгармонической функции $|\nabla u|(\cdot, \cdot + 2t)$, которая может быть записана в следующем виде*

$$h_u^{2t}(x,s) := \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(\xi, 2t)| P_{(s)}(x-\xi)\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R},\ t,s > 0.$$

План доказательства уже был кратко очерчен во Введении. Перед тем, как перейти к более подробному обсуждению, мы введем дополнительные обозначения и установим некоторые предварительные факты.

8.1 Операторы B_y

8.1.1 Интегральные операторы и их ядра

В изложении доказательства мы стараемся придерживаться некоторой идеи универсальности – в том смысле, что наши рассуждения не зависят от выбора полуплоскости в качестве исходной области, а работают и в большей общности – для липшицевых подобластей $\mathbb{R}^d$. Таким образом, мы, поелику возможно, сводим к минимуму стандартные 'полупространственные' обозначения типа $\mathbb{R}^{d+1}_+$. В частности, мы пишем Ω вместо $\mathbb{R}^2_+$ и $S = \partial\Omega$ вместо $\mathbb{R} = \partial\mathbb{R}^2_+$. В пределах данной главы под *ядром* мы понимаем функцию, определенную на $S \times S$. Ядра обозначаются малыми греческими или латинскими буквами, а соответствующие им интегральные операторы – одноименными большими буквами. Так, например, оператор

K порождается ядром k,

$$K[\varphi](x) := \int_S k(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad x \in S. \tag{8.1}$$

Единственное исключение здесь – ядро Пуассона $P_{(y)}$ для верхней полуплоскости, которое и записывается большой буквой P, и определено на $\Omega \times S$ либо S, в зависимости от того, какие переменные мы фиксируем. Отчасти из-за этого мы далее будем использовать и другое, более единообразное, обозначение. Наконец, мы пишем $x_{[t]} := (x,t),\ x \in S,\ t > 0$.

Композиция $k_1 \circ k_2$ ядер k_1 и k_2 определяется так:

$$(k_1 \circ k_2)(x,\xi) := \int_S k_1(x,\eta)k_2(\eta,\xi)\,d\eta, \quad x,\xi \in S. \tag{8.2}$$

Здесь мы предполагаем, что подинтегральная величина в (8.2) суммируема при любых $x,\xi \in S$. Мы особенно следим за выполнением равенства $K_1(K_2(\varphi)) = K(\varphi)$ (где K – интегральный оператор с ядром $k := k_1 \circ k_2$). Композиции $k_1 \circ \cdots \circ k_n$ определяются аналогично для любого натурального числа n.

Символом k^* мы обозначаем сопряженное к k ядро:

$$k^*(x,\xi) := k(\xi,x), \quad x,\xi \in S, \tag{8.3}$$

а K^* – соответствующий интегральный оператор, который удовлетворяет следующей формуле

$$\int_S K^*(\varphi)\cdot\psi\,ds = \int_S \varphi\cdot K(\psi)\,ds.$$

8.1.2 Ядра p_y, c_y, b_y

Первое из этих ядер попросту составляет еще одну форму записи ядра Пуассона для области Ω, а два других зависят и от функции u.

Ядро p_t

Положим

$$p_t(x,\xi) := P_{(t)}(x-\xi) = \frac{t}{\pi(t^2+(x-\xi)^2)}, \quad x,\xi \in S,\ t > 0. \tag{8.4}$$

Для пары $x \in S,\ t > 0$, мера $p_t(x,\cdot)\,ds$ на S есть попросту гармоническая мера в области Ω с полюсом $x_{[t]} := (x,t) \in \Omega$. В частности, $\int_S p_t(x,\xi)\,d\xi = 1$.

Нам потребуется следующее *полугрупповое свойство* ядра p_t,

$$p_{t_1+t_2} = p_{t_1} \circ p_{t_2}, \quad t_1,t_2 > 0. \tag{8.5}$$

Нам также потребуется еще одно свойство ядра p_t – *всюду* на $S\times S$ мы имеем

$$\frac{p_{t_2}}{p_{t_1}} \le c(S)\left(\frac{t_2}{t_1}\right), \quad 0<t_1\le t_2\le 1. \tag{8.6}$$

Ядро c_t

С каждым вектором $\vec{a}\in\mathbb{R}^d$ мы свяжем величину

$$\operatorname{sgn}\vec{a} := \begin{cases} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, & \text{если } \vec{a}\neq 0\\ 0, & \text{if } \vec{a}=0. \end{cases}$$

Скалярное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$. Пусть $\phi(\xi) := \operatorname{sgn}(\nabla u)(\xi),\ \xi\in\Omega$. Векторное поле ϕ обращается в нуль на замкнутом множестве $\mathcal{Z}$ нулей ∇u, а вне этого множества оно бесконечно дифференцируемо и унимодулярно.

Положим

$$c_t(x,\xi) := \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\circ p_t(x,\xi), \phi(x_{2t})\right\rangle, \quad x,\xi\in S,\ t>0, \tag{8.7}$$

иными словами, мы рассматриваем частную производную ядра Пуассона вдоль поля ϕ. И поле ϕ, и ядро c_t зависят от функции u, однако мы не отражаем это в обозначениях.

В силу неравенства Гарнака имеем

$$|c_t(x,\xi)| \le \frac{c(S)p_t(x,\xi)}{t}, \quad x,\xi\in S,\ t>0. \tag{8.8}$$

Продифференцировав $\int_S p_t(x,\xi)ds(\xi)\equiv 1,\ (x,t)\in\Omega$ по $\phi(x_{2t})$, получим

$$C_t[1]=0 \text{ on } S, \quad t>0. \tag{8.9}$$

Ядро b_t

Это ядро мы определяем следующим образом: $b_t := p_t\circ c_t,\ t>0$, соответствующий интеграл, очевидно, сходится. Отметим далее, что для $x\in S,\ t>0$ и $\phi=(\phi_1,\phi 2)$ имеем

$$\begin{gathered} C_t\left[u_{[t]}\right](x) = \int_S c_t(x,\xi)u_{[t]}(\xi)\,d\xi = \\ = \int_S \left(\frac{\partial}{\partial x}p_t(x,\xi)\cdot\phi_1(x,2t) + \frac{\partial}{\partial t}p_t(x,\xi)\cdot\phi_2(x,2t)\right)u(\xi,t)\,d\xi = \\ \phi_1(x,2t)\int_S \frac{\partial}{\partial x}p_t(x,\xi)u(\xi,t)\,d\xi + \phi_2(x,2t)\int_S\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,\xi)u(\xi,t)\,d\xi = \\ \phi_1(x,2t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,2t) + \phi_2(x,2t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,2t) = |\nabla u|(x,2t) \end{gathered} \tag{8.10}$$

Наименьшая гармоническая мажоранта h^{2t} функции $|\nabla u_{[2t]}|$, которая есть гармоническое продолжение градиента, теперь записывается как

$$h^{2t}\left(x_{[t]}\right) = (h^{2t})_{[t]}(x) = B_t\left(u_{[t]}\right)(x), \quad x \in S, \tag{8.11}$$

причем тогда

$$\operatorname{Mvar} u(x) = \int_0^1 B_t\left(u_{[t]}\right)(x)\,dt, \quad x \in S. \tag{8.12}$$

Отметим, что $B_t\left[u_{[t]}\right] > 0$.

Нам потребуются следующие свойства ядер b_t: *при любом* $t \in (0,1)$

$$|b_t| \le \tfrac{c}{t} p_t, \tag{8.13a}$$

$$B_t(1) \equiv 0 \text{ на } S. \tag{8.13b}$$

Действительно, в силу (8.8) и неравенства Гарнака имеем

$$\begin{aligned} |b_t| &\le p_t \circ |c_t| \le c\frac{p_t \circ p_t}{t} \\ &\le c'(S)\frac{p_t}{t}, \end{aligned}$$

в то время как (8.13b) следует из (8.9).

В параграфе 8.7 мы покажем, что функция $(x,\xi,t) \mapsto b_t(x,\xi)$ непрерывна на множестве $S \times S \times (0,+\infty)$.

8.1.3 План доказательства теоремы 8.0.1, меры $\nu^{\varepsilon,u}$

Предположим, что существует такая борелевская мера ν, сосредоточенная на S, что $\int_S \operatorname{Mvar} u\, d\nu < +\infty$ и $\nu(I) > 0$ для произвольного интервала $I \subset S$. Тогда множество $\mathcal{B}(u)$ точек Бургейна функции u *плотно* в S. Однако это еще не позволяет нам заявить, что множество $\mathcal{B}(u)$ *сверхплотно* в S – такая мера ν может быть сосредоточена и на счетном подмножестве S.

Чтобы доказать *сверхплотность* множества $\mathcal{B}(u)$ в S, мы строим семейство мер $\{\nu^\varepsilon\}$ (где $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ для некоторого числа ε_0, зависящего в итоге только от поверхности S), сосредоточенных на S, и таких что

a. $\int_S \operatorname{Mvar} u\, d\nu^\varepsilon < +\infty$*;*

b. для некоторых положительных констант c_1, c_2 *и любого интервала* $I \subset S$ *верно неравенство*

$$\nu^\varepsilon(I) \le c_1 |I|^{1-c_2\varepsilon}; \tag{8.14}$$

c. для любого интервала $I \subset S$ *найдется такое число* $\varepsilon_I > 0$*, что* $\nu^\varepsilon(I) > 0$*, если* $0 < \varepsilon < \varepsilon_I$*.*

Удостоверимся в том, что *существование такого семейства мер* (ν^{ε}) *обеспечивает сверхплотность множества* $\mathcal{B}(u)$ *в* S.

Нижеследующее рассуждение хорошо известно, см., например, [12, лемма 1.2.8]. Зафиксируем произвольный интервал $I \subset S$. Положим $\Sigma := \mathcal{B}(u) \bigcap \mathbb{B}$, так чтобы $\nu_{\varepsilon}(\Sigma) = \nu^{\varepsilon}(I)$ в силу (a). Для любого покрытия $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ множества Σ интервалами имеем

$$0 < \nu^{\varepsilon}(I) = \nu^{\varepsilon}(\Sigma) \le \sum_j \nu^{\varepsilon}(I_j) \le c_1 \sum_j |I_j|^{1-c_2\varepsilon},$$

если $0 < \varepsilon < \min\left\{\varepsilon_0, \varepsilon(I), \frac{1}{c_2}\right\}$. Для такого ε мы видим, что $(1-c_2\varepsilon)$-мерная мера Хаусдорфа множества Σ положительна, стало быть $\dim \Sigma = 1$.

План построения мер ν^{ε} изложен в параграфе 8.2. Само это построение и доказательство свойств (a)-(c) проведено в параграфах 8.3 - 8.6. Заметим, что построенные там меры ν^{ε} – вероятностные (т.е. $\nu_{\varepsilon}(S) = 1$).

Меры ν^{ε} $(= \nu^{\varepsilon,\,u})$ мы называем мерами Бургейна (B-мерами) функции u. Идею применения таких мер к доказательству сверхплотности множества B-точек мы позаимствовали из работ [15], [16]. Главное отличие нашего рассуждения состоит в способе построения B-мер. Наш метод приспособлен не только к тому случаю, когда Ω есть шар или полупространство, но и к областям Ω звездного типа.

8.2 План построения мер ν^{ε}

8.2.1 Основная схема

Осталось построить семейство B-мер, удовлетворяющих свойствам (a), (b), (c) (см. параграф 8.1.3). Это будет сделано в параграфах 8.3-8.6 в соответствии с планом, который мы сейчас наметим.

Через $M_+(S)$ мы обозначаем множество всех конечных положительных радоновских мер, сосредоточенных на S. Далее мы построим семейство отображений $(\mathcal{W}_{\varepsilon,u})_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ множества $M_+(S)$ в себя, такое что $\nu^{\varepsilon} := \mathcal{W}_{\varepsilon,u}(\nu)$ удовлетворяет свойствам (a), (b), (c), для любой меры $\nu \in M_+(S)$. Это и докажет теорему 8.0.1.

Замечание. Отображения $\mathcal{W}_{\varepsilon,u}$ на самом деле суть сужения на $M_+(S)$ линейных операторов, отображающих множество $M(S)$ борелевских зарядов, сосредоточенных на S в себя, причем $\mathcal{W}_{\varepsilon,u}(\nu)(S) = \nu(S)$ для любого заряда $\nu \in M(S)$.

8.2.2 Ядра $\psi_{t,u,\varepsilon}$

Зафиксируем малое число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, далее мы не упоминаем число ε_0. Мера $\mathcal{W}_{\varepsilon,u}[\nu]$ строится как результат непрерывного преобразования меры $\nu \in M_+(S)$, зависящего от параметра t. Для $t \in (0,1)$ мы определим положительное ядро $\psi_t (= \psi_{t,\varepsilon,u}) \in C(\bar{S} \times \bar{S})$ (и, заодно, интегральный оператор Ψ_t), такое что

$$\int_S \psi_t(x,\xi)\,d\xi = \Psi_t[1](x) \equiv 1$$

для всех $t \in (0,1)$. Для заданной вероятностной меры $\nu \in M_+(S)$ и борелевского множества $E \subset S$ положим

$$\begin{aligned} \nu_t(E) &:= \int_S \int_S \mathbb{1}_E(x)\psi_t(\xi,x)\,d\nu(\xi)\,dx \\ &=: \Psi_t^*[\nu](E),\ t \in (0,1). \end{aligned} \tag{8.15}$$

Ясно, что ν_t есть вероятностная мера, сосредоточенная на S. Мера $\nu^\varepsilon := \mathcal{W}[\nu]\,(= \mathcal{W}_{\varepsilon,u}[\nu])$ определяется как слабый предел мер $\lim_{t\downarrow 0}\nu_t s$ (существование такого предела доказывается в пункте 8.3.4). Операторы Ψ_t сходятся к тождественному при $t \uparrow 1$ (см. пункт 8.3.3). Точнее, $\lim_{t\uparrow 1}\Psi_t[\varphi] = \varphi$ равномерно на S какова бы ни была функция $\varphi \in C(\bar S)$. В дальнейшем под Ψ_1 мы понимаем тождественный оператор на пространстве $C(\bar S)$, а Ψ_1^* – тождественное отображение множества $M(\bar S)$ в себя.

Таким образом, начиная при $t = 1$ с единичной массы ν на S, мы постепенно перераспределяем ее при t, стремящемся к нулю. Каждому значению параметра $t \in (0,1)$ отвечает распределение $\Psi_t^*[\nu] = \nu_t$. Переходя к пределу, мы получаем распределение $\nu^\varepsilon = \mathcal{W}[\nu]$, приспособленное к функции u – в том смысле, что интеграл $\int_S \mathrm{Mvar}\,u\,d\nu^\varepsilon$ конечен. Тем самым гарантируется *существование* точек Бургейна функции u. Их *сверхплотность* следует из того, что семейство $\{\nu^\varepsilon\}$ удовлетворяет свойствам (b) и (c). Эти свойства мы доказываем в параграфе 8.5. Свойство (a) мы выведем сейчас же из некоторых фактов, относящихся к ядру ψ_t.

8.2.3 Два ключевых свойства ядер ψ_t

Эти свойства доказаны в параграфах 8.3-8.4, пока мы ограничимся формулировками.

Пусть φ – положительная гармоническая в Ω функция, предел которой конечен в бесконечности. Как и ранее, мы пишем $\varphi_{[t]}(x) := \varphi(x,t),\ x \in S, t > 0$, так что $\varphi_{[t]} \in C(\bar S)$. Зафиксируем число $0 < \theta < t \le 1$. *Тогда*

i. $\Psi_\theta\left[\varphi_{[t]}\right] \le C\Psi_t\left[\varphi_{[t]}\right]$;

ii. если $\lim_\infty \varphi = 0$, то при любом $x \in S$ *функция* $f^x : t \mapsto \Psi_t\left[\varphi_{[t]}\right]$ *непрерывно дифференцируема на* $(0,1]$, причем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f^x\right)(t) = \varepsilon\Psi_t\left[B_t\left[\varphi_{[t]}\right]\right](x), \quad x \in S,\ t \in (0,1] \tag{8.16}$$

Утверждение(i) доказывается в параграфе 8.3.3, а утверждение (ii) и непрерывность $B_t\left[\varphi_{[t]}\right]$ – в параграфе 8.4.

8.2.4 Конечность средней вариации

Сейчас, пользуясь свойствами (i) и (ii) мы докажем конечность интеграла $\int_S \mathrm{Mvar}\, u\, d\nu^\varepsilon$, т.е. свойство (a) меры ν^ε.

Положим при $t \in (0,1]$

$$g_t := (h^{2t})_{[t]} = B_t\left[u_{[t]}\right], \tag{8.17}$$

см. (8.10) и (8.11). Отметим, что при всех $t \in (0,1]$ функция g_t совпадает на S с некоторой положительной гармонической в Ω, исчезающей в бесконечности. Чтобы доказать (a) достаточно установить, что интеграл $\displaystyle\int_S \int_\delta^1 g_t\, dt\, d\nu^\varepsilon$ равномерно ограничен относительно $\delta \in (0,1)$. При каждом таком δ функция $x \mapsto \int_\delta^1 g_t(x) dt,\ x \in S$, совпадает на S с некоторой положительной гармонической на Ω функцией, исчезающей в бесконечности. Стало быть, в силу (i), мы имеем

$$\lim_{\theta\to 0}\int_S \left(\int_\delta^1 g_t\, dt\right) d\nu_\theta = \lim_{\theta\to 0}\int_S \left(\Psi_\theta\left[\int_\delta^1 g_t\, dt\right]\right) d\nu$$
$$= \lim_{\theta\to 0}\int_S \left(\int_\delta^1 \Psi_\theta[g_t]\, dt\right) d\nu \le C_{(\mathrm{i})}\int_S \left(\int_\delta^1 \Psi_t(g_t)\, dt\right) d\nu.$$

Тогда, применяя (ii), (8.16) и (8.17), мы видим, что последний интеграл равен

$$\frac{C_{(\mathrm{i})}}{\varepsilon}\int_S \left(\int_\delta^1 \frac{\partial}{\partial t}\Psi_t\left[u_t\right]\, dt\right) d\nu = \frac{C_{(\mathrm{i})}}{\varepsilon}\int_S \left(\Psi_1\left[u_{[1]}\right] - \Psi_\delta\left[u_{[\delta]}\right]\right) d\nu$$
$$\le \frac{C_{(\mathrm{i})}}{\varepsilon}\int_S \Psi_1\left[u_{[1]}\right] d\nu \le \frac{C_{(\mathrm{i})}}{\varepsilon}\sup_S u_{[1]}$$

(именно в предпоследнем неравенстве мы воспользовались положительностью функции u). Напомним, что u исчезает в бесконечности, так что функция u_1 ограничена на S. Искомое свойство доказано.

8.2.5 Дифференциальные уравнения (8.16)

Нам предстоит решить уравнения (8.16), где $t \mapsto \Psi_t$ есть неизвестная операторная функция. Для этого мы приспособим известный метод решения линейных дифференциальных уравнений в векторном пространстве ([27]). Мы построим операторную функцию $J \mapsto \Psi_J$, отображающую компактный промежуток (**сегмент**) $J \subset (0,1]$ в интегральный оператор Ψ_J с положительным ядром $\psi_J \in C(S \times S)$. Эта функция промежутка – '*мультипликативный интеграл*' – удовлетворяет следующему условию:

$$0 < a < b < c \Rightarrow \psi_{[a,c]} = \psi_{[b,c]} \circ \omega_{[a,b]}. \tag{8.18}$$

Ядра ψ_t определяются следующим образом: $\psi_t := \psi_{[t,1]},\ 0 < t < 1$. В параграфах 8.3-8.6 мы проверим, что они обеспечивают все потребные нам свойства мер ν^ε.

8.3 Ядра ψ_J, слабая сходимость ν_t, условие (i)

В этом и нескольких следующих параграфах мы заявляем, что ядра ψ_t обладают некоторыми свойствами, а затем проводим доказательство по модулю выполнения этих свойств. Сами свойства будут доказаны позже, и доказательство замкнется в параграфе 8.6. Значение параметра ε мы считаем фиксированным (и достаточно малым, в сущности мы выберем его в самом конце наших рассуждений), поэтому мы опускаем его в обозначениях.

8.3.1 Ядра b_J, $\tilde{\psi}_J, \psi_J$

Обозначим через segm_+ множество всех невырожденных компактных промежутков (сегментов), содержащихся в луче $(0, +\infty)$. Для $J = [a, b] \in \mathrm{segm}_+$ положим

$$\begin{aligned} &m(J) = a,\ M(J) = b,\ |J| = b - a, \\ &b_J(x, \xi) = \int_J b_\theta(x, \xi)\, d\theta, \quad x, \xi \in S. \end{aligned} \tag{8.19}$$

Из (8.13a) и (8.6) следует, что

$$|b_J| \leq c \frac{p_{m(J)}}{m(J)} |J|, \tag{8.20}$$

если $M(J) \leq 1$. Сегмент $J \in \mathrm{segm}_+$ мы называем *короткмм*, если $|J| \leq m(J)$. Для короткого сегмента $J \subset (0, 1]$ имеем

$$|b_J| \leq c' p_{|J|}, \tag{8.21}$$

вследствие (8.6). Отметим, что для любого $J \in \mathrm{segm}_+$

$$B_J[1] = \int_J B_\theta[1]\, d\theta = 0.$$

Положим

$$\tilde{\psi}_J := p_{|J|} - \varepsilon b_J, \quad J \in \mathrm{segm}_+.$$

Ясно, что $\tilde{\Psi}_J[1] = 1$. Ядро $\tilde{\psi}_J$ *положительно*, если J есть короткий сегмент, а число ε достаточно мало (см. (8.21), отметим еще раз, что непосредственный выбор максимального ε_0 мы сделаем в самом конце).Более того, при этих условиях

$$(1 - c\varepsilon) p_{|J|} \leq \tilde{\psi}_J \leq (1 + c\varepsilon) p_{|J|} \tag{8.22}$$

Мы продолжаем собирать свойства ядер ψ_J, откладывая пока их построение.
При достаточно малых длинах $|J|$ ядро ψ_J можно рассматривать как небольшое возмущение ядра $\tilde{\psi}_J$. Именно, положим $r_J := \psi_J - \tilde{\psi}_J$, мы увидим, что

$$|r_J| \leq c\varepsilon^2 \frac{|J|^2}{m(J)^2} p_{m(J)}. \tag{8.23}$$

Тогда из (8.6) следует, что

$$|r_J| \leq c'\varepsilon^2 p_{|J|}, \tag{8.24}$$

для коротких сегментов J. *Мы заключаем, что ядро ψ_J положительно.* Действительно, в силу (8.22) имеем

$$\psi_J = \tilde{\psi}_J + r_J \geq (1 - c''\varepsilon)\, p_{|J|},$$

для коротких сегментов J. Поскольку произвольный сегмент J представляется как дизъюнктное объединение коротких сегментов $\bigsqcup_{n=1}^N J_n$, мы видим, что $\psi_J = \psi_{J_N} \circ \cdots \circ \psi_{J_1} > 0$ (см. (8.18)).

Отметим также, что $R_J[1] = 0$, следовательно

$$\Psi_J[1] = 1.$$

8.3.2 Поведение ядер ψ_t при малых значениях t

В этом пункте мы оцениваем ядра $\psi_{[\theta,1]}$ при малых положительных θ. Отметим сначала, что сегмент $[t, 2t]$ короткий, так что

$$\psi_{[t,2t]} \leq \tilde{\psi}_{[t,2t]} + c\varepsilon p_t \leq p_t + c'\varepsilon \int_t^{2t} \frac{p_y}{y}\, dy + c\varepsilon p_t,$$

где c и c' суть абсолютные положительные константы (см. (8.13), (8.21)). Далее, в силу (8.6) имеем

$$\int_t^{2t} \frac{p_y}{y}\, dy \leq \int_t^{2t} c' \frac{p_t}{t} \cdot \frac{y}{t}\, d\theta = c' p_t.$$

Поэтому

$$\psi_{[t,2t]} \leq C p_t, \quad C = 1 + \varepsilon c' > 0,\ 0 < t \leq 1, \tag{8.25}$$

мы считаем всегда, что $\varepsilon < 1$. The estimate of $\psi_{[\theta,1]}$ следует из (8.25): *если* $0 < \theta < \frac{1}{2}$, *тогда*

$$\psi_{[\theta,1]} \leq c \cdot \frac{1}{\theta^{c\varepsilon}} \cdot p_{1-\theta}. \tag{8.26}$$

Действительно, представляя $\psi_{[\theta,1]}$ как композицию ядер $\psi_{\left[2^k\theta, 2^{k+1}\theta\right]}$ и $\psi_{[2^K\theta,1]}$ для некоторого числа $K \approx \log \frac{1}{\theta}$, и применяя (8.25) к каждому сомножителю, получаем

$$\begin{aligned}
&\psi_{[\theta,1]} \leq (1 + c\varepsilon)^{K+1} p_{1-2^K\theta} \circ p_{2^{K-1}\theta} \circ \cdots \circ p_\theta = (1 + c\varepsilon)^{K+1} p_{(1-2^K\theta)+(2^{K-1}+\cdots+1)\theta} \\
&= (1 + c\varepsilon)^{K+1} p_{1-\theta} \leq= \frac{c}{\theta^{c'\varepsilon}} p_{1-\theta}.
\end{aligned}$$

При тех же условиях из (8.25) точно так же выводится оценка

$$\psi_{[\theta,1]} \geq c''\theta^{c''\varepsilon} \cdot p_{1-\theta}, \quad c'' > 0. \tag{8.27}$$

При малых значениях θ последний член $p_{1-\theta}$ не сильно отличается от константы, так что наши оценки в некотором смысле равномерны.

8.3.3 Фокусирующее свойство оператора Ω_Δ

Дл короткого сегмента J оператор Ψ_J похож на пуассоновский оператор $P_{|J|}$: для некоторого класса функций ψ, сосредоточенных на S, функция $\Psi_J[\varphi]$ сходится к φ при $|J| \to 0$; при этом отображение $\xi \mapsto \psi_J(x,\xi)$, $\xi \in S$ 'фокусируется на точку $x \in S$', становясь похожим на δ_x. Это фокусирующее свойство будет в дальнейшем неоднократно использоваться.

Лемма 8.3.1 *Пусть* $t \in (0,1)$ *а* φ *– положительная гармоническая на* Ω *функция. Тогда для всех* $J \in \mathrm{segm}_+,\ J \subset (0,t]$ *имеем*

$$\left|\Psi_J\left[\varphi_{[t]}\right] - \varphi_{[t]}\right| \le c\frac{|J|}{t}\varphi_{[t]} \tag{8.28}$$

всюду на S *(причем константы не зависят от значения параметра* ε*).*

Доказательство. Пусть $I \in \mathrm{segm}_+,\ I \subset J$,а $f := \varphi_{[t]} = \varphi(\cdot, t)$. Тогда

$$\begin{aligned} |\Psi_I[f] - f| \le |P_{|I|}[f] - f| + |B_I[f]| + |R_I[f]| =: \\ I + II + III. \end{aligned} \tag{8.29}$$

Первое слагаемое оценивается очень легко: из неравенства Гарнака следует, что

$$\left|P_{|I|}[f] - f(x)\right| \le \int_t^{t+|I|} |\nabla\varphi|(x,\theta)\,d\theta \le C|I||\nabla\varphi|(x,t) \le C\frac{|I|}{t}\varphi(x,t).$$

перейдем к слагаемому II. Для данных $\theta \in I,\ x \in S$ имеем

$$|C_\theta[f](x)| \le |\nabla\left(P_\theta[f]\right)(x)| = \left|\nabla\varphi_{[t+\theta]}(x)\right| \le c_3\frac{\varphi(x,t)}{t},$$

следовательно

$$II \le \int_I P_\theta\left[|C_\theta[f]|\right]\,d\theta \le \frac{c_3}{t}\int_I \varphi(x, t+\theta)\,d\theta \le \frac{c_4|I|}{t}\varphi(x,t).$$

Наконец, (8.23) влечет для всех $x \in S$

$$\begin{aligned} III(x) &\le c_5\int_S \frac{|I|^2}{m(I)^2}p_{m(I)}(x,\xi)f(\xi)\,d\xi \\ &\le c_5\frac{|I||J|}{(m(J))^2}\varphi(x, t+m(I)) \le c_6 f(x)\frac{|I||J|}{t(m(J))^2}. \end{aligned} \tag{8.30}$$

Из оценок (8.29) – (8.30) выводим

$$(1-\theta_I)f \le \Psi_I[f] \le (1+\theta_J)f, \tag{8.31}$$

где $0 < \theta_I \le c_7\frac{|I|}{t}\left(1 + \frac{|I||J|}{(m(J))^2}\right)$.

Разобьем теперь сегмент J на N неналегающих сегментов $I_1, I_2, \dots, I_N$ одинаковой длины.

Выберем достаточно большое число $N = N(J,t)$, так чтобы

$$\theta_{I_n}(:= \theta_n) \le 2c_7 \frac{|J|}{Nt} < \frac{1}{2}, \quad k = 1, \dots, K.$$

Тогда, в силу (8.31) и (8.17), имеем

$$\begin{aligned} \Psi_J[f] = \prod_{n=N}^{1} \Psi_{I_n}[f] \le \prod_{n=N}^{2} \Psi_{I_n}[(1+\theta_1)f) \le \dots \le \\ \left(1 + 2c_7 \frac{|J|}{Nt}\right)^N f \le \left(1 + c_8 \frac{|J|}{t}\right) f \end{aligned} \tag{8.32}$$

(напомним, что $\frac{|J|}{t} \le 1$, а ядро Ψ_{I_n} положительно). Далее,

$$\Psi_J[f] \ge \left(1 - 2c_7 \frac{|J|}{Nt}\right)^N f \ge \left(1 - c_9 \frac{|J|}{t}\right) f. \tag{8.33}$$

Теперь из оценок (8.32) и (8.33) следует (8.28). □

Немедленным следствием леммы 8.3.1 оказывается утверждение (i) из параграфа 8.2.3. Докажем его. Положим $J := [\theta, t]$.

Согласно лемме 8.3.1 имеем:

$$\Psi_J\left[\varphi_{[t]}\right] \le (1+c)\varphi_{[t]}.$$

Поскольку $[\theta, 1] = J \bigcup [t, 1]$, то

$$\Psi_\theta\left[\varphi_{[t]}\right] = \Psi_t(\Psi_J\left[\varphi_{[t]}\right] \le (1+c)\Psi_t\left[\varphi_{[t]}\right]$$

и доказательство завершено.

8.3.4 Слабая сходимость мер $\gamma_y s$

Докажем теперь что при $t \downarrow 0$ *меры* $\nu_t s$ *сходятся слабо на* $\bar{S}$ *к некоторой мере* ν_0 $(= \nu^\varepsilon$, *сосредоточенной на* S, *и такой что* $\nu_0(S) = 1$.

Доказательство. Поскольку все меры ν_t вероятностные, мы можем отыскать убывающую последовательность чисел $\{t_k\} \downarrow 0$ в $(0,1)$, такую что подпоследовательность ν_{t_k} сходится слабо на $\bar{S}$ к некоторой мере:

$$\lim_{k \to \infty} \int_S f d\nu_{t_k} = \int_{\bar{S}} f\, d\nu_0, \tag{8.34}$$

какова бы ни была функция $f \in C(\bar{S})$. Проверим, что $\nu_0(\{\infty\}) = 0$, т.е. что $\nu_0(S) = 1$, и массаν_0 не убегает на бесконечность. Рассмотрим большой сегмент $I \subset S$ длины $|I| = L$ с центром в нуле. Через $\omega_L(x,t)$ мы обозначим гармоническую меру I в Ω с полюсом в (x,t).

Выберем теперь достаточно большое число M так, чтобы

$$\omega_L(x,t) \le \frac{1}{2}, \quad x \in S \setminus M\cdot I, \quad 0 < t \le 1,$$

здесь $M\cdot I$ обозначает сегмент длины $M|I|$ с тем же центром, что и I. Ясно, что $\omega_L(x,t) \in C(\bar S)$ для данного t. Далее,

$$\nu_0(\{\infty\}) \le \nu_0(\bar S \setminus M\cdot I) \le 2\int_{\bar S}(1-\omega_L)(x,t)\,d\nu_0(x) = \lim_{k\to\infty} 2\int_S (1-\omega_L)(x,t)\,d\nu_{t_k}(x)$$
$$= \lim_{k\to\infty}\int_S \Psi_{t_k}\left[(1-\omega_L)_{[t]}\right]\,d\nu \le \frac{c(S)}{t}\int_S (1-\omega_L)_{[t]}\,d\nu(x),$$

здесь мы использовали фокусирующее свойство Ψ_{y_k} и гармоничность $1-\omega_L$. Поскольку мера ν вероятностная, а $\omega_L(x,t)\to 1$ при $L\to\infty$, мы видим, что последний интеграл обнуляется.

Остается показать, что

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_S f\,d\nu_t = \int_S f\,d\nu_0$$

для всех $f \in C(\bar S)$. Очевидно, что в качестве таких f достаточно рассматривать следы положительных гармонических функций на S, мы и предполагаем, что функция f такова: $f(x) = \varphi(x,\theta),\ x \in S$ для некоторой положительной гармонической функции φ и числа $t > 0$. Согласно лемме 8.3.1, мультипликативному свойству ψ_J и равенству $\Psi_t[1] = 1,\ \nu(S) = 1$, мы получаем:

$$\left|\int_S f\,d\nu_t - \int_S f\,d\nu_{t_k}\right| = \left|\int_S \Psi_{t_k}\left[\Psi_{[t,t_k]}[f] - f\right]\,d\nu\right|$$
$$\le \|\Psi_{[t_k,t]}[f] - f\|_\infty \le c(S)\frac{t_k}{\theta}\|f\|_\infty,$$

и мы получаем требуемое. □

8.4 Равенство (ii) для операторных функций $t \mapsto \Psi_t$

В этом параграфе мы, все еще принимая на веру существование и свойства ядер ψ_J, выводим дифференциальные уравнения (ii), уже использованные в пункте 8.2.4.
Пусть φ – положительная гармоническая функция, исчезающая в бесконечности. Положим

$$f^x(t) := \Psi_t\left[\varphi_{[t]}\right](x), \quad t \in (0,1],\ x \in S,$$

где, как и ранее, $\Psi_t := \Psi_{[t,1]}$, а Ψ_1 – тождественный оператор. Чтобы вычислить производную функции f^x, мы сначала докажем ее липшицевость на каждом сегменте вида $[t_0,1],\ 0 < t_0 < 1$. Далее, в пункте 8.4.1, мы вычислим *левую* производную $(f^x)'_-$. Как мы покажем ниже, она существует и непрерывна всюду на $(0,1]$ (существование правой производной функции $(f^x)'_+$ доказывается сложнее, так как ядра в (8.16) не обязательно коммутируют). Из липшицевости

$f|_{[t_0,1]},\ t_0 \in (0,1]$ следует

$$f^x(y) = f^x(1) - \int_t^1 (f^x)'_-(\theta)\,d\theta, \quad t \in (0,1].$$

Итак, мы имеем $(f^x)'_-(t) = (f^x)'_+(t),\ t \in (0,1]$, и, следовательно, $f^x \in C^1((0,1])$.

Теперь мы покажем, что функция $f^x|_{[t_0,1]}$ липшицева. Положим $t \in (0,1]$, $\delta > 0$, $t - \delta \geq t_0,\ J := [t,1]$. Учитывая (8.17), видим

$$f^x(t) - f^x(t-\delta) = \left(\Psi_t\left[I + II\right]\right)(x) + III(x), \tag{8.35}$$

где

$$\begin{aligned} I &:= \varphi_{[t]} - \Psi_J\left[\varphi_{[t]}\right], \\ II &:= \varphi_{[t]} - \varphi_{[t-\delta]}, \\ III &:= (\Psi_{t-\delta} - \Psi_t)[II]. \end{aligned}$$

Полагая $N := \sup_{t_0 \leq t \leq 1} \|\varphi_{[t]}\|_\infty$, мы видим, что из фокусирующего свойства ядер ψ_J (лемма 8.3.1) следует:

$$\|I\|_\infty \leq c_1(S) N \frac{\delta}{t_0}.$$

В силу неравенства Гарнака для каждой точки $x \in S$ найдется такое число $\theta = \theta(x) \in (t-\delta, t)$, что

$$|II|(x) \leq |\nabla\varphi(x,\theta)|\delta \leq c_2(S) N \frac{\delta}{t_0}.$$

Следовательно

$$\|\Psi_t[I + II]\|_\infty \leq \|I\|_\infty + \|II\|_\infty \leq c_3(S) N \frac{\delta}{t_0}.$$

Наконец,

$$\|III\|_\infty \leq 2\|II\|_\infty \leq 2c_3(S) N \frac{\delta}{t_0},$$

поэтому

$$|f^x(t) - f^x(t-\delta)| \leq c_4(S) N \frac{\delta}{t_0}, \quad x \in S,\ 0 < t_0 \leq t - \delta < t \leq 1.$$

Доказательство липшицевости завершено.

8.4.1 Вычисление производной $(f^x)'$

Из (8.35) следует, что для $0 < \delta \leq \dfrac{t}{2}$ выполняется

$$\frac{f^x(t-\delta) - f^x(t)}{-\delta} = \Psi_t[A_1](x) + A_2(x), \quad x \in S,\ 0 < t \leq 1 \tag{8.36}$$

где $A_1 := \dfrac{I+II}{2}$, $A_2 := \dfrac{III}{\delta}$ (величины I, II, III те же, что и в (8.35)).
Проверим, что $\lim_{\delta\downarrow 0} A_2 = 0$ on S. Действительно, модуль градиента $|\nabla\varphi(x,\theta)|$ равномерно ограничен при $\frac{t}{2} \le \theta \le 2t$ в силу неравенства Гарнака, кроме того $\Psi_\theta[1] = 1$, поэтому

$$\frac{1}{\delta}\left(\Psi_{t-\delta} - \Psi_t\right)\left[\int_{t-\delta}^{t} \frac{\partial}{\partial\theta}\varphi_{[\theta]}\, d\theta\right] = \frac{1}{\delta}\int_{t-\delta}^{t}\left(\Psi_{t-\delta} - \Psi_t\right)\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi_{[\theta]}\right] d\theta$$

и подинтегральные величины сходятся к нулю.
Остается показать, что на S верно следующее неравенство:

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{I+II}{\delta} = \varepsilon B_t\left[\varphi_{[t]}\right], \tag{8.37}$$

поскольку в таком случае оценка

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\Psi_t[A_1] = \varepsilon\Psi_t\left[B_t\left[\varphi_{[t]}\right]\right]$$

следует незамедлительно по теореме Лебега. Мы имеем:

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{I+II}{\delta} = \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\int_{t-\delta}^{t} B_\theta\left[\varphi_{[t]}\right]\, d\theta + \frac{1}{\delta}R_{[t-\delta,\delta]}\left[\varphi_{[t]}\right]\right) = \varepsilon B_t\left[\varphi_{[t]}\right] + \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}R_{[t-\delta,t]}\left[\varphi_{[t]}\right] \tag{8.38}$$

так как функция $\theta \mapsto B_\theta\left[\varphi_{[t]}\right](x)$ непрерывна на $[t-\delta, t]$ для всех $x \in S$, см. 8.7. Второе слагаемое в выражении выше очевидно исчезает в силу (8.23).

8.5 Свойства (b) и (c)мер ν^ε

8.5.1 Положительность мер $\nu^\varepsilon(I)$

Лемма 8.5.1 *Для данного интервала $I \subset S$ существует число ε_I, такое что для всех $\varepsilon \le \varepsilon_I$ верна оценка $\nu^\varepsilon(I) > c$, где $c = c(S, I, \nu) > 0$.*

Доказательство. Обозначим через φ гармоническое продолжение какого-нибудь элемента разбиения единицы, приспособленного к интервалу I, т.е. след $\varphi_{[0]}$ на границе есть гладкая функция, принимающая значения между 0 и 1, а $\varphi_{[0]} \equiv 1$ на $\frac{1}{2}I$, и $|\nabla\varphi_{[0]}| \le \frac{2}{|I|}$. Достаточно показать, что для достаточно маленького числа ε верно:

$$\int_S \varphi_{[t]}\, d\nu^\varepsilon \ge c(S, I) > 0. \tag{8.39}$$

Это, в свою очередь, следует из

$$\int_S \varphi_{[t]}\, d\Psi^*_\delta(\nu) \ge c(S, I, \nu) > 0, \text{ where } 0 < \delta < y < |I|. \tag{8.40}$$

Мы можем считать, что $|I| \leq 1$. Оценка (8.40) равносильна

$$\int_S \Psi_{[\delta,t]}\left[\varphi_{[t]}\right]\, d\Psi_t^*(\nu) \geq c > 0,$$

которая, в силу леммы 8.3.1, следует из

$$\int_S \varphi_{[t]}\, d\Psi_t^*(\nu) \left(= \int_S \Psi_t\left[\varphi_t\right]\, d\nu\right) \geq c_1 > 0 \tag{8.41}$$

Если $t \in (0, |I|)$, то

$$\begin{aligned}\Psi_t\left[\varphi_{[t]}\right] &= \Psi_{|I|}\left[\varphi_{[|I|]}\right] - \int_t^{|I|} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\Psi_\theta\left[\varphi_{[\theta]}\right]\right)\, d\theta \\ &= \Psi_{|I|}\left[\varphi_{[|I|]}\right] - \varepsilon \int_t^{|I|} \Psi_\theta\left[B_\theta\left[\varphi_{[\theta]}\right]\right]\, d\theta\end{aligned} \tag{8.42}$$

Из (8.27) следует, что

$$\Psi_{|I|}\left[\varphi_{[|I|]}\right] \geq c_2(S)|I|^\varepsilon P_{1-|I|}\left[\varphi_{[|I|]}\right] = c_2(S)|I|^\varepsilon \varphi_1, \tag{8.43}$$

поэтому

$$\int_S \Psi_{|I|}\left[\varphi_{[|I|]}\right]\, d\nu \geq c_3|I|^\varepsilon.$$

Второе слагаемое (8.42) оценивается как

$$\varepsilon \int_t^{|I|} \Psi_\theta\left[B_\theta\left[\varphi_{[\theta]}\right]\right]\, d\theta \leq \varepsilon \sup_{\theta\in(0,|I|)} \|B_\theta\left[\varphi_{[\theta]}\right]\|_\infty \cdot |I|. \tag{8.44}$$

С другой стороны,

$$\|B_\theta\left[\varphi_{[\theta]}\right]\|_\infty \leq c_4(S) \sup_\Omega |\nabla\varphi| =: \frac{c_5}{|I|} \tag{8.45}$$

(см. определение ядер b_t в пункте 8.1.2 и первое из неравенств (8.8)). Мы пришли к неравенству

$$\int_S \Psi_t\left[\varphi_{[t]}\right]\, d\nu \geq c_3|I|^\varepsilon - c_5\varepsilon \geq \frac{c_3}{2},$$

для малых значений ε. □

8.5.2 Распределение массы мер ν_ε

Мы переходим к (b). Пусть $I \subset S$ – произвольный интервал, мы можем считать, что $|I| \leq \frac{1}{2}$, и пусть $g(x)$ – его гармоническая мера в Ω с полюсом в точке $(x, |I|) \in \Omega$. Ясно, что $g(x) \geq \frac{1}{10}$ на I, следовательно

$$\nu^\varepsilon(I) \leq C \int_S g\, d\nu^\varepsilon = C \lim_{\delta\to 0} \int_S g\, d\Psi_\delta^*[\nu].$$

Полагая $\delta < |I|$ и $J = [|I|, 1]$, и учитывая, что g есть след положительной гармонической функции на уровне $|I|$, мы получаем

$$\int_S g\, d\Psi^*_\delta[\nu] = \int_S \Psi_{[\delta,|I|]}[g]\, d\Psi^*_J[\nu] \le C \int_S g\, d\Psi^*_J[\nu],$$

в силу леммы 8.3.1. Мы затем используем (8.26), чтобы установить

$$\int_S g\, d\Psi^*_J[\nu] \le C \cdot |I|^{-C\varepsilon} \int_S g(x) \int_S p_{1-|I|}(x,\xi)\, d\nu(\xi)\, dx \le$$
$$C_1 \cdot |I|^{-C\varepsilon} \int_S g(x)\, dx \le C_2 |I|^{1-C\varepsilon},$$

поскольку интегралы $\int_S p_{1-|I|}(x,\xi)\, d\nu(\xi)$, очевидно, равномерно ограничены по x, а L^1-норма функции gесть попросту $|I|$.

8.6 Ядра ψ_J : существование, свойства

8.6.1 Дополнительные обозначения

Для данного сегмента $J \subset (0,1]$ обозначим через $\Lambda \subset \mathrm{segm}_+$ конечный набор неналегающих сегментов, таких что $J = \bigcup_{I\in\Lambda} I$. Подобный набор мы называем *дроблением* сегмента $J \in \mathrm{segm}_+$. Иногда мы воспринимаем Λ как *семейство* сегментов $(I_k)_{k=1}^N$ с положительными (и возрастающими) левыми концами: $0 < m(J) = m(I_1) < \dots < m(I_N) < M(I_N) = M(J)$. Число $\delta_\Lambda := \max_{I\in\Lambda} |I|$ мы называем *мелкостью* дробления Λ; мы пишем $\Lambda_2 \succ \Lambda_1$, если каждый элемент Λ_2 содержится в некотором элементе Λ_1. С каждым дроблением Λ сегмента J мы свяжем ядро ψ^Λ,

$$\psi^\Lambda := \tilde\psi_{I_N} \circ \tilde\psi_{I_{N-1}} \circ \dots \tilde\psi_{N_1}$$

(см. соответствующие определения ядер в пункте 8.3.1). Ядро ψ_J определяется (в пункте 8.6.5) как предел последовательности ядер $(\psi^{\Lambda_n})_{n=1}^\infty$, где Λ_n есть некоторая последовательность дроблений сегмента J, причем $\delta_{\Lambda_n} \to 0$.

8.6.2 Разложение ψ^Λ

Обозначим через $\mathbf{N}_q$ множество всех q-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \dots, N\}$. Начнем с равенства

$$\psi^\Lambda = (p_{|I_1|} - \varepsilon b_{I_1}) \circ (p_{|I_2|} - \varepsilon b_{I_2}) \circ \dots \circ (p_{|I_N|} - \varepsilon b_{I_N}) =$$
$$p_{|J|} + \sum_{q=1}^N \sum_{\Sigma\in\mathbf{N}_q} \pi_\Sigma, \tag{8.46}$$

где $\pi_\Sigma := r_N^\Sigma \circ r_{N-1}^\Sigma \circ \cdots \circ r_1^\sigma$, а

$$r_j^\Sigma = \begin{cases} -\varepsilon b_{I_j}, & \text{если } j \in \Sigma, \\ p_{|I_j|}, & \text{если } j \notin \Sigma. \end{cases}$$

Выделим сумму в (8.46), отвечающую $q = 1$, и учтем, что $b_J = \sum_{q=1}^N b_{I_q}$, а

$$\sum_{\Sigma \in \mathbf{N}_1} \pi_\Sigma = -\varepsilon \sum_{j=1}^N p_{|I_j^+|} \circ b_{I_j} \circ p_{|I_j^-|},$$

где $I_j^\pm$ – сегменты $[M(I_j), M(J)]$ и $[m(J), m(I_j)]$ соответственно (если один из них вырождается в точку, то ядро $p_{|I_q^\pm|}$ следует понимать как единицу композиционного умножения ядер).

Из (8.46) выводим теперь, что

$$\psi^\Lambda = \tilde{\psi}_J + \varepsilon \sum_{j=1}^N v_j + \rho_\Lambda, \tag{8.47}$$

где $v_j := b_{I_j} - p_{|I_j^+|} \circ b_{I_j} \circ p_{|I_j^-|}$ и $\rho_\Lambda := \sum_{q=2}^N \sum_{\Sigma \in \mathbf{N}_q} \pi_\Sigma$.

8.6.3 Оценка ядер $\psi^\Lambda - \tilde{\psi}_J$

Нам нужно оценить остаточные члены v_j и ρ_Λ.

Ядра v_j

Заметим, что при θ, $\lambda > 0$ выполняются следующие неравенства

$$|b_\theta| + |c_\theta| \le c(S)\tfrac{p_\theta}{\theta} \tag{8.48a}$$

$$|p_{\theta+\lambda} - p_\theta| \le c(S)\tfrac{\lambda}{\theta} p_\theta, \tag{8.48b}$$

если $\theta + \lambda < 1$. Оценка (8.48a) следует из (8.8) и (8.13), а второе из неравенств есть элементарное следствие неравенства Гарнака.

Пусть $I \in \mathrm{segm}_+,\ I \subset J$, положим $L(I) := \dfrac{|I|}{m(I)}$ и $v_I := b_I - p_{|I^+|} \circ b_I \circ p_{|I^-|}$. Мы имеем

$$|v_I| \le |b_I - p_{|I^+|} \circ b_I| + |p_{|I^+|} \circ b_I - p_{|I^+|} \circ b_I \circ p_{|I^-|}|. \tag{8.49}$$

Используя (8.48b) и (8.8), получаем

$$
\begin{aligned}
&|b_I - p_{|I^+|} \circ b_I| \le \\
&\int_I |p_\theta c_\theta - p_{|I^+|+\theta} \circ c_\theta|\, d\theta \le c(S,J)|I^+| \int_I \frac{p_\theta}{\theta} \circ \frac{p_\theta}{\theta}\, d\theta \\
&= c(S,J)|I^+| \int_I \frac{p_{2\theta}}{\theta^2}\, d\theta \le c'(S,J)|I^+| \int_I \frac{p_{m(J)}}{\theta^2} \cdot \frac{2\theta}{m(J)}\, d\theta \\
&\le L(J)\frac{|I|}{m(J)} p_{m(J)}.
\end{aligned} \tag{8.50}
$$

Переходя ко второму слагаемому в (8.49), отметим, что мы может отделить часть ядра Пуассона из ядра c_θ. Иными словами, учитывая полугрупповове свойство ядра Пуассона p_θ в (8.7), мы получаем

$$
c_\theta = \tilde{c}_\theta \circ p_{\frac{\theta}{2}}, \quad \theta > 0,
$$

где $\tilde{c}_\theta$ есть производная $p_{\frac{\theta}{2}}$ относительно поля ϕ, и это ядро удовлетворяет тем же оценкам, что и ядро c_θ. Следовательно мы имеем

$$
\begin{aligned}
&|p_{|I^+|} \circ b_I - p_{|I^+|} \circ b_I \circ p_{|I^-|}| \le \\
&\int_I |p_{|I^+|+\theta} \circ (c_\theta - c_\theta \circ p_{|I^-|})|\, d\theta = \int_I \left| p_{|I^+|+\theta} \circ \tilde{c}_\theta \circ (p_{\frac{\theta}{2}} - p_{\frac{\theta}{2}+|I^-|}) \right| \, d\theta \\
&\le c(S) \int_I \frac{1}{\theta} \frac{|I^-|}{\theta} p_{|I^+|+\frac{3}{2}\theta} \circ p_{\frac{\theta}{2}}\, d\theta \le c''(S) \int_I \frac{|I^-|}{\theta^2} \frac{|I^+| + 2\theta}{m(J)} p_{m(J)}\, d\theta \\
&\le c''(S,J)L(J)(3L(J)+2)\frac{|I|}{m(J)} p_{m(J)} \le 3c''(S,J)\frac{M(J)}{m(J)} L(J) \frac{|I|}{m(J)} p_{m(J)}
\end{aligned} \tag{8.51}
$$

напомним, что $L(J) = \frac{M(J)}{m(J)} - 1$. Из (8.50), (8.51) и (8.49) следует, что

$$
|v_I| \le c(S,J)\frac{M(J)}{m(J)} L(J) \frac{|I|}{m(J)} p_{m(J)},
$$

где $c(S,J)$ возрастает с расширением промежутка J. Возвращаясь к дроблению Λ сегмента J (см. (8.47)), мы видим, что

$$
\sum_{j=1}^{N} |v_j| \le c(S,J)\frac{M(J)}{m(J)} L(J) \sum_{j=1}^{N} \frac{|I|_k}{m(J)} p_{m(J)} = c(S,J)\frac{M(J)}{m(J)} (L(J))^2 p_{m(J)}. \tag{8.52}
$$

Оценка ядра ρ_Λ

Согласно (8.46) имеем

$$
\rho_\Lambda = \sum_{q=2}^{N} \sum_{\Sigma \in \mathbf{N}_q} \pi_\Sigma,
$$

Если $j \in \Sigma$, то, в силу (8.20), видим

$$|r_j^\Sigma| = \varepsilon |b_{I_j}| \le c(S)\varepsilon L(I_j) p_{m(I_j)}$$

Предположим, что наше дробление Λ *правильное*, т.е. $\delta(\Lambda) \le \frac{2|J|}{N}$. Тогда, полагая $h := 2c(S)\varepsilon L(J)$, получаем

$$|r_j^\Sigma| \le \frac{h}{N} p_{m(I_j)}, \quad j \in \Sigma.$$

С другой стороны, если $j \notin \Sigma$, то $r_j^\Sigma = p_{|I_j|}$. Это означает, что при $\Sigma \in \mathbf{N}_q$ имеем

$$|\pi_\Sigma| \le h^q N^{-q} p_{a(\Sigma)},$$

где

$$a(\Sigma) := \sum_{j \in \Sigma} m(I_j) + \sum_{j \notin \Sigma} |I_j| \le qM(J) + |J|$$

Учитывая оценку $\#\mathbf{N}_q = C_N^q \le \frac{N^q}{q!}$, мы приходим к

$$|\rho_\Lambda| \le \sum_{q=2}^{N} \frac{N^q}{q!} h^q N^{-q} c(S) \frac{qM(J) + |J|}{m(J)} p_{m(J)} \le Ch^2 \sum_{q=2}^{\infty} \frac{h^{q-2}}{(q-1)!} \frac{M(J) + |J|}{m(J)} p_{m(J)}$$
$$\le C(2L(J) + 1) h^2 e^h p_{m(J)}.$$

Теперь, наконец, мы готовы оценить ядро $\psi^\Lambda - \tilde{\psi}_J$. Соединяя вышеприведенные оценки с (8.47) и (8.52), мы выводим

$$|\psi^\Lambda - \tilde{\psi}_J| \le c(S, L(J))(L(J))^2 p_{m(J)}, \tag{8.53}$$

где функция $s \mapsto c(S,s)$ возрастает по второму параметру. Здесь мы считаем дробление Λ правильным.

Оценка ядра ψ^Λ также следует из (8.53), именно

$$\begin{aligned} |\psi^\Lambda| &\le |\tilde{\psi}(J)| + c(S, L(J))(L(J))^2 p_{m(J)} \le p_{|J|} + \\ &+ (c(S)\varepsilon L(J) + c(S, L(J))(L(J))^2 p_{m(J)}) = p_{|J|} + A \cdot (L(J))^2 p_{m(J)}, \end{aligned} \tag{8.54}$$

где $A = A(L(J), S)$, а функция $x \mapsto A(x, S)$ возрастает.

8.6.4 Оценка ядра $\psi^{\tilde{\Lambda}} - \psi^\Lambda$, $\Lambda \succ \tilde{\Lambda}$

Эта оценка – основная, после нее мы легко завершим конструкцию ядра ψ_J.

Лемма 8.6.1 *Пусть $\tilde{\Lambda}$ – дробление $J \in \mathrm{segm}_+$, а $\Lambda \succ \tilde{\Lambda}$. Тогда*

$$|\psi^{\tilde{\Lambda}} - \psi^\Lambda| \le C(S, J)\delta(\tilde{\Lambda}) p_{m(J)} \tag{8.55}$$

где $\delta(\tilde{\Lambda})$ – мелкость дробления (см. пункт 8.6.1).

Доказательство. Пусть $\tilde{\Lambda} = \{J_1, J_2, \dots, J_N\}$, $m(J_1) < m(J_2) \dots < m(J_N)$. Положим $\Lambda_k := \{I \in \Lambda : I \subset J_k\}$, так что Λ_k есть дробление сегмента J_k, $\Lambda = \bigcup_{k=1}^N \Lambda_k$. При $i = 2, 3, \dots, N$ через Λ_i^- мы обозначаем часть дробления Λ, попавшую в J_i^-: $\Lambda_i^- = \bigcup_{1 \le q < i} \Lambda_q$; $\Lambda_1^- := \emptyset$. При $i = 1, \dots, N$ через $\tilde{\Lambda}_i^+$ мы обозначаем часть дробления $\tilde{\Lambda}$, попавшую в J_i^+ :, так что $\tilde{\Lambda}_i^+ = \bigcup_{i<q\le N} J_q$; $\tilde{\Lambda}_{N+1}^+ := \emptyset$. Наконец, положим $\tilde{\Lambda}_i := \Lambda_i^- \bigcup \{J_i\} \bigcup \tilde{\Lambda}_i^+$, $1 \le i \le N$; $\tilde{\Lambda}_{N+1} := \Lambda$. Ядро $\psi^{\tilde{\Lambda}_i}$ мы записываем здесь как ψ_i, $i = 1, \dots, N+1$. В частности, $\psi_1 = \psi^{\tilde{\Lambda}}$, $\psi_{N+1} = \psi^{\Lambda}$,

$$\psi^{\tilde{\Lambda}} - \psi^{\Lambda} = \sum_{i=1}^{K} (\psi_i - \psi_{i+1}).$$

Если $i \ne 1,\ N$, то

$$\psi_i - \psi_{i+1} = \psi^{\tilde{\Lambda}_i^+} \circ (\tilde{\psi}_{J_i} - \psi^{\Lambda_i}) \circ \psi^{\Lambda_i^-}. \tag{8.56}$$

Это равенство сохраняется и при $i = 1,\ N$, если под $\psi^{\emptyset}$ понимать единицу композиционного умножения ядер. Из (8.56), (8.53), (8.54) и неравенства $|J_i|^2 \le \delta(\tilde{\Lambda})|J_i|$ следует, что

$$|\psi_i - \psi_{i+1}| \le (p_{|J_i^+|} + C p_{m(J_i^+)}) \circ \delta(\tilde{\Lambda})|J_i| p_{m(J)} \circ (p_{|J_i^-|} + C p_{m(J_i^-)}), \tag{8.57}$$

где $C = C(J, S)$. Правая часть в (8.57) не превосходит

$$\frac{A(M(J) + |J|)}{m(J)} \delta(\tilde{\Lambda})|J_i| p_{m(J)} = A(1 + 2L(J))\delta(\tilde{\Lambda})|J_i| p_{m(J)},$$

где $A = A(\Delta, S)$. Поэтому

$$|\psi^{\tilde{\Lambda}} - \psi^{\Lambda}| \le \sum_{i=1}^{N} |\psi_i - \psi_{i+1}| \le A(1 + 2L(J))|J|\delta(\tilde{\Lambda}) p_{m(J)}.$$

$\square$

8.6.5 Двоичные дробления ядра ω_Δ

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $J \in \mathrm{segm}_+$. Через $\tilde{\Lambda}_n(J)$ мы обозначаем дробление сегмента J, состоящее из всевозможных пересечений вида $J \bigcap \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Такое дробление мы называем *двоичным ранга n*. Эти дробления правильны, $\tilde{\Lambda}_{n+1}(J) \succ \tilde{\Lambda}_n(J)$, $\delta(\tilde{\Lambda}_n(J)) \le \frac{|J|}{2^n}$. Положим $\psi_n := \psi^{\tilde{\Lambda}_n(J)}$. Из леммы 8.6.1 следует, что $|\psi_n - \psi_{n+1}| \le C(J, S)\frac{|J|}{2^n} p_{m(J)}$. Следовательно ряд

$$\psi_J := \lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi_1 + (\psi_2 - \psi_1) + (\psi_3 - \psi_2) + \dots \tag{8.58}$$

сходится равномерно на $S \times S$ и задает ядро ψ_J, обладающее следующими свойствами

1. $\psi_J \in C(S \times S)$;

2. $\psi_J > 0$, если $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$;

3. $\int_S \psi_J(x,\xi)\, d\xi = 1$ при всех $x \in S$;

4. если $0 < a < b < c$, то $\psi_{[a,c]} = \psi_{[b,c]} \circ \psi_{[a,b]}$;

5. $|\psi_J - \tilde{\psi}_J| \leq C(S)\varepsilon^2 (L(J))^2 p_{m(J)}$, если сегмент J– короткий (т.е. если $L(J) \leq 1$).

Доказательство. Свойство (1) следует из непрерывности b_J (см. пункт 8.7) и из равномерной сходимости ряда (8.58) на $S \times S$.
Утверждение (2) следует из положительности $\tilde{\psi}_J$ для малых значений ε (см. (8.21)).
Чтобы получить (3), мы отметим, что $\tilde{\psi}_J(x,\xi)\; d\xi$ есть вероятностная мера на S, поэтому $\int_S \psi_n(x,\xi)\, d\xi \equiv 1$, и мы можем перейти к пределу под интегралом, поскольку (8.55) гарантирует

$$|\psi_n - \psi_J| \leq C|J| 2^{-n} p_{m(J)}.$$

Теперь мы докажем (4). Пусть $J := [a,c],\ J^- := [a,b],\ J^+ := [b,c],\ \tilde{\Lambda}'_n(J) := \tilde{\Lambda}_n(J^-) \bigcup \tilde{\Lambda}_n(J^+)$. Очевидно, $\tilde{\Lambda}'_n(J) \succ \tilde{\Lambda}_n(J)$, поэтому из леммы 8.6.1 следует, что

$$|\psi^{\tilde{\Lambda}'_n} - \psi^{\tilde{\Lambda}_n}| \leq c(S,J) \frac{|J|}{2^n} p_{m(J)}.$$

Итак, мы видим, что $\lim_{n\to\infty} \psi^{\tilde{\Lambda}'_n(J)} = \psi_J$ всюду на $S \times S$. С другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} \psi^{\tilde{\Lambda}_n(J^+)} \circ \psi^{\tilde{\Lambda}_n(J^-)} = \psi_{J^+} \circ \psi_{J^-}.$$

Мы можем перейти к пределу в силу оценок

$$|\psi^{\tilde{\Lambda}_n(J^\pm)}| \leq \tilde{\psi}_{J^\pm} + c p_{m(J)}$$

которые следуют из (8.53). Остается заметить, что $\psi^{\tilde{\Lambda}'_n(J)} \equiv \psi^{\tilde{\Lambda}_n(J^+)} \circ \psi^{\tilde{\Lambda}_n(J^-)}$.
Нам осталось доказать (5). Из (8.53) следует, что при $\Lambda := \tilde{\Lambda}_n(J)$ мы имеем

$$|\psi^{\tilde{\Lambda}_n(J)} - \tilde{\psi}(J)| \leq c(S, L(J))\varepsilon^2 (L(J))^2 p_{m(J)}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где функция $x \mapsto c(S,x)$ возрастает по второй переменной. Если сегмент J – короткий (т.е. $L(J) \leq 1$), то, переходя к пределу, получаем

$$|\psi_J - \tilde{\psi}_J| \leq c(S,1)\varepsilon^2 \left(\frac{|J|}{m(J)}\right) p_{m(J)}.$$

$\square$

Основная теорема почти доказана, нам только надо удостовериться в непрерывности ядра b_t.

8.7 Ядра b_t непрерывны

Здесь мы изучаем свойство непрерывности ядер b_t, определенных в 8.1.2. Полное доказательство, т.е. для случая липшицевых подобластей $\mathbb{R}^{d+1}$, требует некоторых усилий. С другой стороны, оно почти немедленно получается для нашего случая $\Omega = \mathbb{R}^2_+$, поскольку нули градиента гармонической функции составляют дискретное множество.

Итак, рассмотрим ядро b_t, записанное в виде свертки. Именно здесь мы воспользуемся более простым (относительно общего случая) видом области $\Omega = \mathbb{R}^2_+$ и ее границы $S = \mathbb{R}$. Мы имеем

$$\begin{aligned}
&b_t(x,\xi) = (p_t \circ c_t)(x,\xi) = \int_S p_t(x,\eta) c_t(\eta,\xi)\, d\eta = \\
&\int_S p_t(x,\eta) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \eta} p_t(\eta,\xi) \cdot \phi_1(\eta, 2t) + \frac{\partial}{\partial t} p_t(\eta,\xi) \cdot \phi_2(\eta, 2t) \right) d\eta = \\
&\frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{t}{t^2 + (x-\eta)^2} \left(\frac{2t(\eta - \xi)}{(t^2 + (\xi-\eta)^2)^2} \cdot \phi_1(\eta, 2t) + \frac{t^2 - (\xi-\eta)^2}{(t^2+(\xi-\eta)^2)^2} \cdot \phi_2(\eta, 2t) \right) d\eta,
\end{aligned} \tag{8.59}$$

где $(\phi_1, \phi_2)(\eta, 2t) = \phi(\eta, 2t) = \dfrac{\nabla u(\eta, 2t)}{|\nabla u(\eta, 2t)|}$, если $|\nabla u(\eta, 2t)| \neq 0$, и 0 иначе. Поскольку величина $|\nabla u|$ ограничена на каждой полуплоскости вида $\{(x,\theta) : x \in \mathbb{R},\ \theta \geq \theta_0 > 0\}$, то из неравенства Гарнака в сочетании с (8.59) следует непрерывность $b_t(x,\xi)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Доказательство теоремы 8.0.1 завершено.

Заключение

В заключение мы сделаем несколько наблюдений. Во-первых, представленные здесь результаты, в особенности те из них, что относятся к теории потенциала на d-деревьях, доставляют значительное продвижение в анализе на полидиске. Более того, мы считаем, что именно разработанные методы составляют основное достижение работы. В частности, техники мажоризации энергии и емкостные оценки исключительных множеств могут быть использованы и в других моделях. Дискретизация бесселевой емкости тоже может оказаться полезной. Во-вторых, мы считаем, что полученные результаты открывают несколько направлений для дальнейших исследований. Среди них отметим распространение весовых неравенств на старшие размерности и анализ мер Бургейна.

Мы завершаем диссертацию перечислением нескольких открытых вопросов и задач для дальнейших исследований по тематике работы.

Весовая теория потенциала на графах

Нелинейная теория

Естественное обобщение весовой теории вложений Харди (2.1) состоит в ее нелинейном варианте. Именно, мы задаемся вопросом об описании пар w, μ, которые реализуют ограниченное вложение

$$\mathbf{I}_w:\ L^p(T^d, w) \to L^q(\overline{T}^d, \mu).$$

Иными словами, задача состоит в изучении неравенства

$$\left(\int_{\overline{T}^d} (\mathbf{I}_w f)^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le C(w,\mu,p,q) \left(\int_{T^d} f^q \, dw\right)^{\frac{1}{q}} \tag{C.1}$$

для произвольных функций $f \in L^q(T^d, w)$. Одномерный случай, $d = 1$, достаточно хорошо изучен, см. работы [6], [74] или [108]. Для старших размерностей, $d \ge 2$, вопрос остается пока почти полностью открытым, даже для $w \equiv 1$ и $p = q$. Одно из (многочисленных) препятствий состоит в том, что нелинейный потенциал на 2-дереве (в отличие от одномерного случая) уже не будет p-гармонической функцией, хотя линейная версия гармонична (для тождественно единичного веса) по каждой переменной. Также составляет интерес изучить аналоги результатов работы [91] для 2-дерева.

Старшие размерности

Еще один вопрос касается случая веса типа произведения и размерности $d \geq 4$. Как мы показали выше, наши рассуждения, строго говоря, уже не вполне работают даже и для размерности $d = 3$, и мы использовали различные обходные пути (см. контрпример мажоризации энергии для двух функций, Предложение 2.6.2). Таким образом, случай T^4 пока тоже вполне открыт. В качестве одного из возможных подходов имеет смысл использовать модификации леммы 2.6.1 для конкретных функций, возникающих из проекций трехмерных мер и их потенциалов.

Двухвесовая задача

Теорема Э. Сойера для d-деревьев

Внимательное изучение статьи [86] и переформулировка полученных в ней результатов на языке, введенном в первой главе, приводит к теореме 8.7.1, изложенной ниже. Мы можем переосмыслить работу Э. Сойера в следующем виде.

Предположим, что вес $w : T^2 \to \mathbb{R}_+$ обладает специальной структурой: он обнуляется везде, кроме, возможно, предков одного маленького квадрата в $[0,1]^2$. Именно, найдется такая точка $\omega_0 \in (\partial T)^2$, что

$$\operatorname{supp} w \subset \{\alpha : \ \alpha \geq \omega_0\}.$$

Если, к тому же, вес w тождественно равен единице на предках граничной вершины ω_0, то тогда это вес типа произведения, и мы уже можем охарактеризовать соответствующее вложение: условие (C.2c) необходимо и достаточно для ограниченности оператора Харди. Для общего веса с носителем на предках ω_0, Э. Сойер доказал следующую теорему.

Теорема 8.7.1 *Пусть носитель w состоит из предков граничного квадрата $\omega_0 \in (\partial T)^2$.*

$$\sup_{\beta \geq \omega_0} \left(\mathbf{I}^*\mu(\beta)\mathbb{I}w(\beta)\right) \leq A^2 < \infty, \tag{C.2a}$$

$$\sum_{\alpha \geq \beta \geq \omega_0} \mu(\alpha)(\mathbf{I}w(\alpha))^2 \leq A^2 \sum_{\alpha \geq \beta} w(\alpha), \tag{C.2b}$$

$$\sum_{\omega_0 \leq \alpha \leq \beta} w(\alpha)(\mathbf{I}^*\mu(\alpha))^2 \leq A^2 \sum_{\alpha \leq \beta} \mu(\alpha) \tag{C.2c}$$

для любой вершины $\beta \in T^2$. Все эти три условия необходимы.

Замечание. Последнее условие (C.2c) есть не что иное, как тест на одной ячейке. Иначе говоря, если мы ограничим вес на угловые квадраты, но при этом не будем требовать структуры произведения, то мы видим, что один тест на ячейках вида $[w,\mu]_B < \infty$ теперь превращается в три различных теста (опять-таки на ячейках) для пары (μ, w).

Замечание. Подобное сужение 2-дерева обладает неожиданным свойством – предположим, что w дополнительно имеет структуру произведения, т.е. $w = w_1 \cdot w_2$, где координатные веса w_j сконцентрированы на отдельных геодезических на координатных деревьях. В таком случае, как это было показано в работе [96], любое из трех вышеперечисленных условиях также будет и достаточным, даже первое условие (С.2а). Легко заметить, однако, что это условие есть в точности субъемкостное условие на меру для одной ячейки,

$$\mu(\{\alpha\}) \leq A \operatorname{Cap}_w(\{\alpha\}), \quad \forall \alpha \in T^2.$$

С другой стороны, хорошо известно, что уже на дереве T, даже в случае $w \equiv 1$ субъемкостное условие на ячейках не обеспечивает ограниченность вложения Харди, поскольку емкость обычно не аддитивна (разве что мы имеем дело с мерой Лебега – экстремальным видом емкости). Такое различие может быть объяснено 'повышенной связностью' (по сравнению с деревом) графа T^2, суженного на $\mathcal{P}(\omega_0)$.

Еще один способ интерпретировать три условия Сойера состоит в переписывании их на языке емкости. Бидерево T^2, снабженное таким весом w, обладает некоторой симметрией, и в данном конкретном случае мы можем менять вес w и меру μ местами. Именно, для меры μ с носителем на предках одной граничной вершины мы определяем 'двойственную' емкость (для простоты мы рассматриваем конечные графы) следующим образом

$$\mathbf{W}_\mu^w(\alpha) := \sum_{\gamma \leq \alpha} (\mathbf{I}w)(\gamma)\mu(\gamma),$$

$$\operatorname{Pac}_\mu(F) := \inf_w \left\{ \sum_{\beta \in T^2} (\mathbf{I}w)^2(\beta)\mu(\alpha) : \ \mathbf{W}_\mu^w \geq 1 \text{ на } F \right\}.$$

В сущности мы получаем симметричные варианты $\mathbf{V}$-потенциала и w-емкости, – мы меняем направление на графе на противоположное, и заменяем оператор $\mathbf{I}^*$ на $\mathbf{I}$, и вес w на меру μ. Оказывается, что условия Сойера (С.2) эквивалентны

$$\mu(E) \leq A \operatorname{Cap}_w(E), \quad \forall E \subset T^2, \tag{C.3a}$$

$$w(F) \leq A \operatorname{Pac}_\mu(F), \quad \forall F \subset T^2. \tag{C.3b}$$

Трехмерный вариант теоремы Сойера – это до сих пор открытый вопрос. Техника, использованная Сойером существенно зависит от размерности, и, по-видимому, не может быть перенесена в старшие размерности. С другой стороны, мы рассчитываем, что методы, развитые в параграфе 2.5, в сочетании с использованием емкости и симметричной емкости позволят описать ограниченность вложения для размерности три.

Веса общего вида на 2-дереве

Очень естественный вопрос состоит и в выяснении ситуации для полностью двухвесовой задачи, т.е. для весов без структуры произведения, на d-дереве, даже в случае $d = 2$. Очевидными кандидатам на условия на пару мера-вес являются три теста типа Сойера на отдельных ячейках (С.2) или два субъемкостных теста (С.3). Здесь важно отметить, что решение подобной задачи заодно даст и новое описание карлесоновых мер для гармонического пространства Харди на бидиске $H^2(\mathbb{D}^2)$ в духе Чанг-Феффермана. Если подобное описание действительно имеет место, например, состоящее из трех тестов, то тест Карлесона на произвольных множествах может быть заменен на коллекцию тестов на отдельных ячейках, что было бы весьма неожиданно. Этот вопрос тоже является вполне открытым.

Соотношения между гармоническими и аналитическими вложениями

Как мы видели ранее, для доказательства варианта теоремы вложения Карлесона для пространств аналитических функций 3.2.3 нужно, чтобы даже в случае 2-дерева пространство $\mathcal{H}_{\vec{s}}$ не отстояло бы слишком далеко от безвесового пространства Дирихле $\mathcal{H}_{\vec{1}}$ на бидиске. Для гармонических пространств такого ограничения нет, и было бы крайне интересно выяснить, возникает ли оно по существу, или это попросту артефакт доказательства. Его необходимость влекла бы существование некоторой критической кривой параметра $\vec{s}$, такой что под ней аналитическая и гармоническая версии весового пространства имели бы существенно разную структуру.

Более того, этот вопрос представляет значительный интерес уже для случая $s = \vec{0}$ (хотя, строго говоря, мы не рассматривали такие значения параметра). Оказывается, что и для пространства Харди на бидиске неизвестно, совпадают ли карлесоновы меры для его аналитической и гармонической версии, и любое продвижение в этом вопросе позволило бы получить новую информацию о мультипараметрической теореме типа Нехари из работы [34].

Вариация около границы

Я считаю, что дифференциальное уравнение (I.68b), порождающее семейство операторов Ψ_t и меры Бургейна ν_θ также представляет значительный интерес. В особенности следует отметить, что эти меры содержат в себе некоторую информацию о поведении нулевых множеств производных положительных гармонических функций около границы области, и их истинная природа еще не выяснена до конца. Кроме того, правильная (т.е. нетривиальная) дискретная формулировка такой задачи тоже оказалась бы крайне полезной.

Литература

[1] R. Adams, L. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, Springer 1999.

[2] N. Arcozzi, P. Mozolyako, K.-M. Perfekt, G. Sarfatti, *Carleson measures for the Dirichlet space on the bidisc*, arXiv:1811.04990, (2018), 1–44.

[3] N. Arcozzi, P. Mozolyako, G. Psaromiligkos, A. Volberg, P. Zorin-Kranich, *Bi-parameter Carleson embeddings with product weights*, arXiv:1906.11150 (2020), 1–24.

[4] N. Arcozzi, R. Rochberg, E. Sawyer, *Carleson Measures for Analytic Besov Spaces*. Rev. Mat. Iberoamericana **18** (2002), no. 2, 443–510.

[5] N. Arcozzi, R. Rochberg, E. Sawyer, *Carleson Measures for the Drury-Arveson Hardy Space and other Besov-Sobolev Spaces on Complex Balls*. Adv. Math. **218** (2008), no. 4, 1107–1180.

[6] N. Arcozzi, R. Rochberg, E. Sawyer, B.D. Wick, *Potential theory on trees, graphs and Ahlfors-regular metric spaces*. Potential Anal. **41** (2014), no. 2, 317–366.

[7] N. Arcozzi, R. Rochberg, E. Sawyer, B.D. Wick, *The Dirichlet space and related function spaces*. American Mathematical Society, 2019.

[8] R. Bañuelos, C. N. Moore, *Probabilistic behavior of harmonic functions*. Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin (1999).

[9] A. Barron, J. Pipher, *Sparse domination for bi-parameter operators using square functions*, arXiv:1709.05009, 1–22.

[10] I. Benjamini, Y. Peres, *Random walks on a tree and capacity in the interval*, Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist. **28** (1992), no. 4, 557-592.

[11] G. Bennett, D. A. Stegenga, R. M. Timoney, *Coefficients of Bloch and Lipschitz functions*, Ill. J. Math. **25** (1981), 520–531.

[12] C. Bishop, Y. Peres *Fractals in probability and analysis*, Cambridge University Press, 2017.

[13] A. Borichev, *On the minimum of harmonic functions*, J. Anal. Math. **89** (2003), 199–212.

[14] A. Borichev, Yu. Lyubarskii, E. Malinnikova, P. Thomas, *Radial growth of functions in the Korenblum space*, Алгебра и анализ **21** (2009), no. 6, 47-65.

[15] J. Bourgain, *On the radial variation of bounded analytic functions on the disk*, Duke Math. J. **69** (1993), no. 3, 671–682.

[16] Ж. Бургейн, *Ограниченность вариаций сверток мер*, Мат. Заметки **54** (1993), no. 4, 25–34.

[17] R. Cairoli, J.B. Walsh, *Stochastic integrals in the plane*, Acta math. **134** (1975), 11–183.

[18] A. Cantón, J.L. Fernández, D. Pestana, J.M. Rodríguez, *On harmonic functions on trees*, Potential Analysis, **15** (2001), 199-244.

[19] L. Carleson, *Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. of Math. **76** (1962), no. 3, 547–559

[20] L. Carleson, *Selected Problems on Exceptional Sets*, Van Nostrand, 1967.

[21] L. Carleson, *A counter example for measures bounded on H^p for the bi-disc*, Mittag-Leffler Report No. **7** (1974).

[22] M.L. Cartwright, *On analytic functions regular in the unit circle, I*, Quart. J. Math. Oxford **4** (1933), 246–257.

[23] M.L. Cartwright, *On analytic functions regular in the unit circle, II*, Quart. J. Math. Oxford **6** (1935), 94–105.

[24] Sun-Yung A. Chang, *Carleson measure on the bi-disc*, Ann. of Math. **109** (1979), no. 3, 613–620.

[25] Sun-Yung A. Chang, R. Fefferman, *A continuous version of duality of H1 with BMO on the bidisc*, Ann. of Math. **112** (1980), no. 1, 179–201.

[26] Sun-Yung A. Chang, R. Fefferman, *Some recent developments in Fourier analysis and H^p-theory on product domains*, Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985), no. 1, 1–43.

[27] J.L. Daleckii, M.G. Krein, *Stability of solutions of differential equations in Banach spaces*, Translations of Mathematical Monographs, v. 43, AMS, Providence, Rhode-Island, 1974.

[28] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[29] L.E. Dor, *On projections in L^1*, Ann. of Math. **102** (1975), no. 3, 463–474.

[30] K.S. Eikrem, E. Malinnikova, *Coefficient multipliers of growth spaces of harmonic functions*, Integr. Equ. Oper. Theory **82** (2015), 555–573.

[31] R. Fefferman, *Harmonic analysis on product spaces*, Ann. of Math. **126** (1987), no. 1, 109–130.

[32] R. Fefferman, *Calderón-Zygmund theory for product domains: H^p spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **83** (1986), no. 4, 840–843.

[33] R. Fefferman, *Some recent developments in Fourier analysis and H^p theory on product domains. II*, Function spaces and applications (Lund, 1986), 44–51, Lecture Notes in Math., 1302, Springer, Berlin, 1988.

[34] S. Ferguson, M. Lacey, *A characterization of product BMO by commutators*, Acta Math. **189** (2002), 143–160.

[35] J. L. Fernández, J. Heinonen, J. G. Llorente, *Asymptotic values of subharmonic functions*, Proc. London Math. Soc. **73.2** (1996), no. 3, 404–430.

[36] J.B. Garnett, D.E. Marshall, *Harmonic measure*, Cambridge University Press, Cambridge (2005).

[37] L. Grafakos, R. Torres, *Multilinear Calderón–Zygmund theory*, Adv. Math. **165**, 2002, 124–164.

[38] R.F. Gundy, *Inégalités pour martingales a un et deux indices: L'espace H^p*, in Ecole d'Eté de Probabibilités de Saint-Flour VIII-1978, Springer (1980).

[39] G. H. Hardy, *Weierstrass's non-differentiable function*, Trans. Amer. Math. Soc. **17** (1916), no. 3, 301–325.

[40] W. Hastings, *A Carleson Measure Theorem for Bergman Spaces*, Proceedings of the AMS **2** (1975), no. 1, 237–241.

[41] W.K. Hayman, P.B. Kennedy, *Subharmonic functions*, Vol. 1. Acad. Press, London, 1976.

[42] M. Holschneider, P. Tchamitchian, *Pointwise analysis of Riemann's "nondifferentiable"function*, Inv. Math. **105** (1991), no. 1 157–175.

[43] R. Hunt, R. Wheeden, *Positive harmonic functions on Lipschitz domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **147** (1970), 507–527.

[44] R. Hunt, R. Wheeden, *On the boundary values of harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **132** (1968), no. 2,307–322.

[45] A. Iosevich, B. Krause, E. Sawyer, K. Taylor, I. Uriarte-Tuero, *Maximal operators: scales, curvature and the fractal dimension*, Anal. Math. **45** (2019), 63–86.

[46] P. Jones, *A complete bounded submanifold in C^3*, Proc. Amer. Math. Soc. **76** (1979), no. 2 305–306.

[47] P. Jones, P.F.X. Müller, *Radial variation of Bloch functions.*, Math. Res. Lett. **4** (1997), no. 3, 395–400.

[48] J.-L. Journé, *Calderoón–Zygmund operators on product spaces*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 55–91.

[49] J.-L. Journé, *Two problems of Calderón-Zygmund theory on product-spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **38** (1988), no. 1, 111–132.

[50] R. Kerman, E. Sawyer, *Carleson Measures and Multipliers of Dirichlet-type Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1988), no. 1, 87–98.

[51] B. Korenblum, *An extension of the Nevanlinna theory*, Acta Math. **135** (1975), no. 3-4, 187–219.

[52] B. Korenblum, P.J. Rippon, K. Samotij, *On integrals of harmonic functions over annuli*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **20** (1995), 3–26.

[53] M. T. Lacey, *Two-weight inequality for the Hilbert transform: a real variable characterization II*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 15, 2821–2840.

[54] M. Lacey, *Lectures on Nehari's Theorem on the Polydisk*, Contemp. Math. Volume **444**, 2007, pp. 185–213.

[55] M. T. Lacey, E. T. Sawyer, C.-Y. Shen, I. Uriarte-Tuero, *Two-weight inequality for the Hilbert transform: a real variable characterization I*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 15, 2795–2820.

[56] C.N. Linden, *Functions regular in the unit circle*, Quart. J. Math. Oxford **52** (1956), 196–216.

[57] C.N. Linden, *Inequalities for functions regular in the unit circle*, Quart. J. Math. Oxford **58** (1962), 26–37.

[58] J.G. Llorente, *Boundary values of harmonic Bloch functions in Lipschitz domains: a martingale approach*, Potential Analysis **9** (1998), 229–260.

[59] D. Luecking, *A Technique for Characterizing Carleson Measures on Bergman Spaces*, Proceedings of the AMS **87** (1983), no. 4, 656–660.

[60] W. Lusky, *On weighted spaces of harmonic and holomorphic functions*, J. London Math. Soc. **51** (1995), no. 2, 309–320.

[61] W. Lusky, *On the isomorphism classes of weighted spaces of harmonic and holomorphic functions*, Studia Math. **175** (2006), no. 1, 19–45.

[62] R. Lyons, *Random walks and percolation on trees*, Ann. Probab. **18** (1990), no. 3 931–958.

[63] R. Lyons, *Random walks, capacity and percolation on trees*, Ann. Probab. **20** (1992), no. 4, 2043–2088.

[64] R. Lyons, Y. Peres *Probability on trees and networks*, Cambridge, (2016).

[65] Yu. Lyubarskii, E. Malinnikova, *Radial oscillation of harmonic functions in the Korenblum class*, Bull. London Math. Soc. **44** (2012), no. 1, 68–84.

[66] Н.Г. Макаров, *Вероятностные методы в теории конформных отображений*, Алгебра и анализ **1** (1989), no. 1, 3–59.

[67] В.Г. Мазья, *К теории многомерного оператора Шредингера*, Известия Академии наук СССР, Серия математическая, **28** (1964), 1145–1172.

[68] В.Г. Мазья, *Классы множеств и мер, связанные с теоремами вложения*, в сб. 'Теоремы вложения и их приложения', Труды симпозиума по теоремам вложения, Баку (1966), Москва, изд. 'Наука', (1970), 142–159.

[69] Y. Meyer, *Wavelets and operators*, Cambridge studies in advanced mathematics, **37**, Cambridge University Press, 1992.

[70] P. Mozolyako, G. Psaromiligkos, A. Volberg, P. Zorin-Kranich, *Improved surrogate bi-parameter maximum principle*, arXiv:2101.01094v2, (2021), 1–15.

[71] P.F.X. Müller, K. Riegler, *Radial variation of Bloch functions on the unit ball of* $\mathbb{R}^d$, Ark. Mat. 58(1), (2020) 161–178.

[72] C. Muscalu, J. Pipher, T. Tao, C. Thiele, *Bi-parameter paraproducts*, Acta Math. **193** (2004), 269–296.

[73] C. Muscalu, J. Pipher, T. Tao, C. Thiele, *Multi-parameter paraproducts*, Rev. Mat. Iberoamericana **22** (2006), no. 3, 963–976.

[74] F. Nazarov, S. Treil, and A. Volberg, *The Bellman functions and two-weight inequalities for Haar multipliers*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), 909–928.

[75] F. Nazarov, S. Treil, A. Volberg, *Two weight inequalities for individual Haar multipliers and other well localized operators*, Math. Res. Lett. **15** (2008), no. 3, 583–597.

[76] N.K. Nikolski, *Selected Problems of weighted approximation and spectral analysis*, Proc. of the Steklov Institute of Math, Vol. **120**, Amer. Math. Soc., Providence, 1976.

[77] M. D. O'Neill, *Vertical variation of harmonic functions in upper half-spaces*, Colloq. Math. **87** (2001), 1–12.

[78] M. Paolo, P. M. Soardi *Potential Theory on Infinite Networks*, Springer, 1994.

[79] R. Pemantle, Y. Peres, *Galton-Watson trees with the same mean have the same polar sets*, Ann. Probab. **23** (1995), 1102–1124.

[80] J. Pipher, *Journé's covering lemma and its extension to higher dimensions*, Duke Journal of Math **53** (1986), no. 3, 683–690.

[81] И.И. Привалов, П.И. Кузнецов, *Граничные задачи и различные классы гармонических и субгармонических функций, определенных в произвольных областях*, Мат. Сб. **6(48)** 1939, no. 3, 345–375.

[82] P.J. Rippon *A boundary estimate for harmonic functions*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **91** (1982), 79–90.

[83] W. Rudin *The radial variation of analytic functions*, Duke Math. J. **22** (1955), 235–242.

[84] K. Samotij *A representation theorem for harmonic functions in the ball in $\mathbb{R}^n$*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **11** (1986), no. 1, 29–37.

[85] K. Samotij *A critical growth rate for harmonic and subharmonic functions in the open ball in $\mathbb{R}^n$*, Colloq. Math. **52** (1987), no. 1, 145–158.

[86] E. Sawyer *Weighted inequalities for the two-dimensional Hardy operator*, Studia Math. **82** (1985), no. 1, 1–16.

[87] K. Seip *Interpolation and sampling in small Bergman spaces*, Collect. Math. **64** (2013), 61–72.

[88] A. L. Shields, D. L. Williams *Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **162** (1971), 287–302.

[89] A. L. Shields, D. L. Williams *Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of harmonic functions*, J. Reine Angew. **299/300** (1978), 256–279.

[90] D.A. Stegenga *Multipliers of the Dirichlet Space*, Illinois J. Math. **24** (1980), no. 1, 113–139.

[91] V. Stepanov, E. Ushakova, *On weighted Hardy inequality with two-dimensional rectangular operator – extension of the E. Saywer theorem*, Math. Ineq. & Appl. **24** (2021), no. 3, 617–634.

[92] E. J. Straube, *Harmonic and analytic functions admitting a distribution boundary value*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **11** (1984), no. 4, 559-591.

[93] Terence Tao, *Dyadic product H^1, BMO, and Carleson's counterexample*, unpublished note, (1999), available at http://www.math.ucla.edu/ tao/preprints/Expository/product.dvi.

[94] I. E. Verbitsky, *Embedding and multiplier theorems for discrete Littlewood-Paley spaces.* Pacific J. Math. **176** (1996), no. 2, 529–556.

[95] A. Volberg, *Non-symmetry for Fourier transform of positive functions of two variables*, preprint, Dec. 2019, 2 pages.

[96] A. Wedestig, *Weighted inequalities for the Sawyer two-dimensional Hardy operator and its limiting geometric mean operator*, J. Inequal. Appl. **4** (2005), 387–394.

[97] W. Woess, *Random walks on infinite graphs and groups*, Cambridge, 2000.

Статьи, включенные в диссертацию.

[98] П.А. Мозоляко, *Об определении точек Бургейна борелевского заряда на вещественной прямой*, Зап. Науч. Сем. ПОМИ **389** (2011), 191–205 (перевод на англ. в J. Math. Sci. **182** (2012), no. 5, 690-698).

[99] K.S. Eikrem, E. Malinnikova, P. Mozolyako, *Wavelet characterization of growth spaces of harmonic functions*, Journal d'Analyze Mathématique **122** (2014), no. 1, 87–111.

[100] A. Logunov, E. Malinnikova, P. Mozolyako, *On a theorem of Cartwright in higher dimensions*, Journal of London Mathematical Society **93** (2016), no. 1, 65–82.

[101] В.П. Хавин, П.А, Мозоляко, *Конечность вариации положительной гармонической функции вдоль нормалей к границе*, Алгебра и анализ **28** (2016), no. 3, 67–110 (перевод на англ. вSt. Petersburg Mathematical Journal, **28** (2017) no. 3, 345–375).

[102] N. Arcozzi, P. Mozolyako, K.-M. Perfekt, S. Richter, G. Sarfatti, *Some Hilbert Spaces related with the the Dirichlet space*, Concrete Operators **3** (2016), 94–101.

[103] P. Mozolyako, *Boundary oscillations of harmonic functions in Lipschitz domains*, Collectanea Mathematica **68** (2017), no. 3, 359–376.

[104] N. Arcozzi, P. Mozolyako, K.-M. Perfekt, *Some properties related to trace inequalities for the multi-parameter Hardy operators on poly-trees*, Anal. Math. Phys. **9**, (2019), 937–954.

[105] N. Arcozzi, I. Holmes, P. Mozolyako, A. Volberg, *Bi-parameter embedding and measures with restriction energy condition*, Math. Ann. **377** (2020), 643–674.

[106] P. Mozolyako, G. Psaromiligkos, A. Volberg, *Counterexamples for multi-parameter weighted paraproducts*, Comptes Rendus Mathématique **358** (2020), no. 5, 529–534.

[107] P. Mozolyako, G. Psaromiligkos, A. Volberg, P. Zorin-Kranich, *Combinatorial property of all positive measures in dimensions 2 and 3*, Comptes Rendus Mathématique, **358** (2020), no. 6, 721–725.

[108] N. Arcozzi, I. Holmes, P. Mozolyako, A. Volberg, *Bellman function sitting on a tree*, Int. Math. Res. Notes **2021** (2021), no. 16, 12037–12053.

[109] P. Mozolyako, A. Nicolau, *Oscillation of Functions in the Hölder class*, Potential Analysis **55** (2021), 53–74.

[110] P. Mozolyako, A. Volberg, *Essential differences of potential theories on a tree and on a bi-tree*, Comptes Rendus Mathématique **360** (2022), 1039–1048.

[111] P. Mozolyako, *B-точки канторовских множеств*, Зап. Науч. Сем. ПОМИ **512** (2022), 148–172.

[112] P. Mozolyako, G. Psaromiligkos, A. Volberg, P. Zorin-Kranich, *Carleson embedding on the tri-tree and on the tri-disc*, Revista Matemática Iberoamericana **38** (2022), 2069–2116.