

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. А.Ф. ИОФФЕ

На правах рукописи

Гусаков Михаил Евгеньевич

Динамические процессы в нейтронных звёздах

Научная специальность 1.3.1. Физика космоса, астрономия

НАУЧНЫЙ ДОКЛАД
представлен на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

1	Введение	3
1.1	Исучаемая научная проблема, ее значение для развития науки; краткое описание конкретных задач, рассмотренных в рамках диссертации	3
1.2	Личное участие соискателя ученой степени в получении результатов, изложенных в диссертации	6
1.3	Степень достоверности результатов исследований, проведенных соискателем ученой степени	6
1.4	Научная новизна работы	6
1.5	Практическая значимость	6
2	Гидродинамика сверхтекучих смесей в НЗ: расчет ряда определяющих микроскопических параметров теории [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]	7
2.1	Введение: гидродинамические уравнения, основные параметры теории	7
2.2	Релятивистская матрица сверхтекучих плотностей и функции отклика в сверхтекучих смесях	9
2.3	Объемная вязкость в сверхтекучих смесях в НЗ	11
2.4	Сверхтекучая гидродинамика и объемная вязкость в нуклон-гиперонных смесях; звук и его затухание	13
2.5	Диффузия как лидирующий механизм диссипации в сверхпроводящих НЗ	13
3	Глобальные колебания сверхтекучих невращающихся НЗ: спектр и затухание различных колебательных мод [1, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 12]	15
3.1	Введение	15
3.2	Влияние температурных эффектов на колебания сверхтекучих НЗ; приближенный метод расчета спектров колебаний	16
3.3	Затухание колебаний сверхтекучих НЗ	18
3.4	Тепловые и композиционные g -моды в сверхтекучих НЗ	19
3.5	Роль диффузии в затухании глобальных колебательных мод в НЗ	21
4	Релятивистская диссипативная магнитная гидродинамика сверхтекучих смесей в нейтронных звездах: учет эффектов конечных температур, вихрей Фейнмана-Онзагера и Абриковского [3, 21, 22, 23]	22
5	Колебания вращающихся НЗ: r -моды и сценарии подавления неустойчивости r -мод [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 11, 31, 32]	24
6	Ускоренная эволюция магнитного поля в ядрах нейтронных звезд [33, 34, 35, 36, 37]	29
7	Физика аккрецированной коры нейтронных звезд: уравнение состояния, энерговыделение и термодинамический потенциал [38, 39, 40, 41]	32
7.1	Формулировка проблемы; уравнение состояния полностью аккрецированной коры	32
7.2	Энерговыделение в полностью аккрецированной коре	35
7.3	Термодинамический потенциал для внутренней коры	37
8	Эффекты и процессы [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48]	38
8.1	Введение	38
8.2	Динамически изменяющаяся нуклонная щель и ее влияние на динамику нейтронных звезд	39
8.3	Новый механизм нагрева миллисекундных пульсаров	41
	Положения, выносимые на защиту	44
	Список публикаций	45
	Цитированная литература	48

1 Введение

1.1 Изучаемая научная проблема, ее значение для развития науки; краткое описание конкретных задач, рассмотренных в рамках диссертации

Предлагаемая диссертационная работа посвящена физике нейтронных звезд (НЗ) и исследованию свойств сверхплотного вещества в экстремальных условиях, недостижимых на Земле.

НЗ имеют массу $M \sim 1.4M_{\odot}$ (M_{\odot} – масса Солнца) и радиус $R \sim 12$ км. Плотность вещества в их недрах в разы превосходит плотность вещества в атомных ядрах, $\rho_0 = 2.8 \times 10^{14}$ г см⁻³, делая эти объекты уникальными астрофизическими лабораториями для исследования сверхплотного вещества и проверки таких фундаментальных физических теорий, как теория сильных взаимодействий, общая теория относительности, квантовая теория многих тел.

Помимо огромных плотностей в недрах НЗ присутствуют также недостижимые в земных условиях магнитные поля. Для различных типов НЗ эти поля варьируются от сравнительно небольших (для НЗ), порядка 10^8 Гс (в миллисекундных пульсарах), до стандартных, порядка 10^{12} Гс (в радиопулсарах), и огромных, $\sim (1 - 10) \times 10^{15}$ Гс. НЗ с наиболее сильными полями называют магнитарами. Магнитное поле играет определяющую роль в их эволюции и наблюдательных проявлениях.

Несмотря на то, что НЗ были открыты более 50 лет назад, до сих пор уравнение состояния, и даже состав вещества в их недрах известны недостаточно хорошо. Различные теоретические модели предсказывают состав от чисто нуклонного (нейтроны, протоны, электроны и мюоны) до нуклон-гиперонного и кваркового вещества. Лабораторное исследование столь плотного вещества не представляется возможным, поэтому единственным способом проверки теорий остаётся сравнение наблюдательных проявлений НЗ с предсказаниями теоретических моделей.

Существенной и во многом определяющей особенностью НЗ является наличие барионной сверхтекучести/сверхпроводимости во внутренних слоях не слишком горячих НЗ. Сверхтекучесть барионов (нейтронов и протонов в случае простейшего состава вещества НЗ) кардинально влияет на динамические процессы, происходящие в НЗ, и предсказывается микроскопическими расчетами [R1, R2, R3], а также косвенно подтверждается наблюдениями (например, [49, 50], [R4, R5, R6, R7, R8, R9, R10])¹.

К наблюдательным проявлениям НЗ следует отнести тепловое и нетепловое электромагнитное излучение с поверхности и из магнитосферы НЗ, вспышки разной природы в приповерхностных слоях НЗ (например, в магнитарах и барстерах), сбои периодов пульсаров, модуляцию электромагнитного излучения при колебаниях НЗ, изменение частоты вращения НЗ из-за магнитодипольного излучения или из-за развития гравитационно-волновых неустойчивостей, приводящих к возбуждению колебаний в НЗ и т.д. Одним из наиболее ярких наблюдательных проявлений является остывание НЗ в мало-массивных рентгеновских двойных системах после эпизода аккреции в режи-

¹Здесь и ниже ссылками обычного формата обозначаются публикации соискателя (например, [1]). Остальные ссылки помечены буквой R (например, [R1]). Список работ соискателя и список цитированной литературы приведены в конце научного доклада.

ме реального времени. Наконец, интереснейшим недавним событием явилось наблюдение слияния двух НЗ в 2017 году (событие GW170817) и детектирование наряду с электромагнитным излучением гравитационно-волнового сигнала от этого события обсерваториями LIGO и Virgo.

Для интерпретации непрерывно растущего массива наблюдений НЗ необходимо не только иметь информацию о свойствах сверхплотного вещества, но и понимать, как эти свойства отражаются на крупномасштабной динамике НЗ, и, в конечном итоге, на наблюдениях. Предлагаемая диссертационная работа как раз посвящена выяснению взаимосвязи между процессами, протекающими на микро и макромасштабах, в частности развитию гидродинамической теории, описывающей макроскопические динамические явления в замагниченном, сверхтекучем и сверхпроводящем веществе НЗ. Формулировка такой теории сложна по нескольким причинам: (i) Как уже отмечалось выше, состав вещества внутренних слоев НЗ до сих пор достоверно не определен; (ii) Кинетические коэффициенты, от которых зависят гидродинамические уравнения часто известны с большой степенью неопределенности; (iii) Сверхтекучесть/сверхпроводимость барионов существенно усложняет гидродинамические уравнения, что ведет к появлению многих новых интересных динамических свойств у НЗ; (iv) Наконец, поскольку НЗ являются компактными объектами, возникает необходимость детального учета эффектов общей теории относительности (ОТО). Определению соответствующих динамических уравнений и исследованию их решений в разных обстоятельствах посвящена значительная часть предлагаемой диссертации.

Необходимо отметить, что исследования НЗ занимают важное место в современной наблюдательной астрофизике, что подтверждается запусками обсерватории NICER и российско-немецкой космической обсерватории Спектр РГ, от которых уже начали поступать важнейшие наблюдательные данные, а также недавним запуском рентгеновской поляриметрической обсерватории IXPE. Одной из базовых задач научной программы этих космических миссий является изучение НЗ. Более того, недавние наблюдения обсерваториями LIGO и Virgo гравитационных волн от слияния НЗ открыли новую страницу в исследовании этих объектов. Есть все основания полагать, что в ближайшем будущем детектирование гравитационных волн от сливающихся НЗ станет стандартным инструментом наблюдательной астрофизики. Впоследствии, обсерваториями следующего поколения (например, Einstein Telescope), ожидается детектирование гравитационного сигнала от изолированных и аккрецирующих НЗ, генерируемого, в том числе, благодаря развитию неустойчивости r -мод. Таким образом, объем наблюдательной информации, полученной от космических и наземных обсерваторий, существенно увеличится в скором будущем, что создаст качественно новые возможности для проверки и совершенствования теоретических моделей НЗ и делает представленную диссертационную работу актуальной.

Диссертация состоит из восьми глав, первая из которых является вводной, а также положений, выносимых на защиту.

В главе 2 обсуждена гидродинамика сверхтекучих смесей, пригодная для описания невращающихся НЗ; произведен расчет ряда определяющих параметров этой гидродинамики. Раздел 2.1 представляет собой введение, в котором приведены динамические уравнения и введены основные обозначения.

В разделе 2.2 обсужден важный параметр теории – релятивистская матрица сверхтекучих плотностей, а также функции отклика на скалярное и векторное возмущение в сверхтекучих заряженных смесях. В разделе 2.3 рассмотрен один из определяющих механизмов диссипации – объемная вязкость, генерируемая неравновесными процессами взаимного превращения частиц в сверхтекучих смесях, состоящих из нуклонного вещества внешних слоев НЗ. В разделе 2.4 результаты предыдущих разделов обобщены на более сложный случай нуклон-гиперонного вещества НЗ; в качестве простейшей иллюстративной модели исследован звук и его затухание в таком веществе. Наконец, раздел 2.5 посвящен описанию нового механизма диссипации в НЗ, связанного с диффузией частиц разных сортов в веществе НЗ.

В главе 3 результаты предыдущей главы приложены к исследованию глобальных колебаний сверхтекучих невращающихся релятивистских НЗ и их затухания. Раздел 3.1 содержит введение. В разделе 3.2 обсуждено влияние температурных эффектов на колебания сверхтекучих НЗ, а также сформулирован приближенный метод расчета спектров колебаний. В разделе 3.3 кратко обсуждены основные результаты по затуханию колебаний в сверхтекучих НЗ. В разделе 3.4 рассмотрен специфический класс колебаний – тепловые и композиционные g -моды, которые могут существовать только в сложных смесях внутренних слоев НЗ. Наконец, раздел 3.5 посвящен выяснению роли диффузии в затухании глобальных колебательных мод в НЗ.

В главе 4 обсуждены работы, посвященные обобщению гидродинамики сверхтекучих смесей из главы 2 на случай вращающихся, замагниченных, диссипативных, релятивистских НЗ, в которых существуют топологические дефекты – вихри Фейнмана-Онзагера и Абрикосова.

Глава 5 посвящена исследованию колебаний (прежде всего, r -мод) во вращающихся сверхтекучих НЗ, а также рассмотрению ряда сценариев подавления неустойчивости r -мод в маломассивных рентгеновских двойных системах и следующих из этих сценариев ограничений на свойства сверхплотного вещества.

В главе 6 рассмотрен самосогласованный метод расчета полей скоростей и электрического поля в НЗ по заданному звездному магнитному полю. Предложен новый механизм ускоренной эволюции магнитного поля во внутренних слоях как нормальных, так и сверхпроводящих НЗ; обсуждается влияние этого механизма на эволюцию магнитного поля в магнитарах и обычных радиопульсарах.

Глава 7 посвящена исследованию физики аккрецированной коры НЗ: определению уравнения состояния и расчету энерговыделения в аккрецирующей коре. Раздел 7.1 содержит общее введение, постановку задачи и результаты расчетов уравнения состояния аккрецированной коры. В разделе 7.2 обсуждены расчеты энерговыделения за счет неравновесных ядерных реакций в аккрецирующей коре. В разделе 7.3 введен новый термодинамический потенциал, который должен минимизироваться в неравновесной коре вместо стандартного потенциала Гиббса, и обсуждена специфическая неустойчивость атомных ядер к распаду на нейтроны, возникающая вблизи границы между внутренней корой и ядром НЗ.

Наконец, глава 8 содержит краткое обсуждение ряда эффектов и процессов, не связанных напрямую с результатами предыдущих глав. Раздел 8.1

является вводным. В разделе 8.2 рассмотрен эффект динамического изменения нуклонной щели при движении вещества НЗ и влияние этого эффекта на динамику НЗ. В разделе 8.3 обсужден новый эффективный механизм нагрева миллисекундных пульсаров, связанный с торможением звезды, ее поджатием и индуцированием в аккрецированной звездной коре неравновесных ядерных реакций, приводящих к выделению тепла и нагреву пульсара.

Отметим, что большая часть результатов второй и (в существенно меньшей степени) третьей главы получены соискателем более 10 лет назад и потому не входят в положения, выносимые на защиту. Тем не менее, эти результаты составляют фундамент, на котором построено дальнейшее изложение, и потому включены в предлагаемую работу.

1.2 Личное участие соискателя ученой степени в получении результатов, изложенных в диссертации

Материал диссертации подобран таким образом, что вклад соискателя в получение всех результатов, выносимых на защиту, является определяющим.

1.3 Степень достоверности результатов исследований, проведенных соискателем ученой степени

Достоверность результатов подтверждается тем, что все они опубликованы в международных рецензируемых журналах (таких как Physical Review Letters, MNRAS, Physical Review D), докладывались на семинарах сектора теоретической астрофизики ФТИ им. А.Ф. Иоффе и других научных центров, на всероссийских и международных конференциях и прошли испытание временем. Ряд полученных соискателем результатов воспроизведен и подтвержден в работах независимых исследователей, опубликованных в рецензируемых журналах. Работы соискателя хорошо известны среди специалистов и широко цитируются.

1.4 Научная новизна работы

Полученные соискателем оригинальные результаты обсуждены в главах 2–8 и подытожены в положениях на защиту в конце научного доклада.

1.5 Практическая значимость

Результаты диссертации создают базу для систематического исследования широкого круга динамических процессов в сверхтекучих и сверхпроводящих НЗ.

В частности, разработанная в диссертации релятивистская диссипативная магнитная гидродинамика, описывающая динамические явления в сверхтекучих/сверхпроводящих смесях при конечных температурах, может быть использована при исследовании колебаний и магнито-тепловой эволюции замagnetизированных и вращающихся НЗ.

Адекватное описание колебаний, возникающих в сверхтекучих НЗ с учетом эффектов конечных температур, принципиально важно при моделировании неустойчивостей, возникающих во вращающихся НЗ, а также при моделировании гравитационного сигнала от сливающихся НЗ. Такой сигнал может

нести “отпечаток” процессов, происходящих во внутренних слоях НЗ при их слиянии. Корректная интерпретация сигнала важна для наложения ограничений на свойства сверхплотного вещества.

Найденные соискателем зависящие от температуры антипересечения (“резонансы”) сверхтекучих и нормальных мод колебаний и разработанный механизм усиленного затухания колебаний вблизи резонансов были использованы в диссертации для объяснения наблюдаемой устойчивости быстровращающихся НЗ в маломассивных рентгеновских двойных системах относительно раскачки r -мод (вопреки существованию так называемой неустойчивости Чандрасекара-Фридмана-Шутца). Основанный на предложенной теории резонансной стабилизации r -мод метод исследования внутренней структуры НЗ был использован для наложения новых ограничений на параметры нейтронной сверхтекучести во внутренних слоях НЗ. Дальнейшее развитие этого метода, базирующееся на более совершенных расчетах спектров вращающихся НЗ с учетом новых наблюдений, позволит делать более детальные предсказания свойств сверхплотного вещества.

Предложенный метод расчета скоростей частиц, возмущений химических потенциалов и электрического самосогласованного поля во внутренних слоях НЗ по заданному квазистационарному магнитному полю звезды может быть использован в будущих расчетах эволюции магнитного поля в нормальных и сверхпроводящих НЗ. Механизм ускоренной эволюции магнитного поля, обнаруженный в предлагаемой работе, должен учитываться в будущих расчетах и может существенно изменить интерпретацию наблюдений замагниченных НЗ.

Как показано в диссертации, эффект перераспределения свободных нейтронов во внутренней коре аккрецирующих НЗ кардинально влияет на ее уравнение состояния и на глубокий прогрев коры за счет неравновесных ядерных реакций. Эти результаты означают необходимость пересмотра стандартной теории остывания аккрецирующих НЗ, а также указывают на необходимость новой интерпретации имеющихся наблюдений остывающих НЗ в маломассивных рентгеновских двойных системах.

2 Гидродинамика сверхтекучих смесей в НЗ: расчет ряда определяющих микроскопических параметров теории [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]

2.1 Введение: гидродинамические уравнения, основные параметры теории

Нерелятивистская гидродинамика сверхтекучей жидкости, состоящей из частиц одного сорта – так называемая двухжидкостная модель – была разработана, главным образом, в работах Тиссы [R11], Ландау [R12, R13] и Халатникова [R14]. Плотность потока массы в такой гидродинамике задается выражением

$$\mathbf{j} = (\rho - \rho_s)\mathbf{u} + \rho_s\mathbf{V}_s, \quad (1)$$

где \mathbf{u} – скорость нормальной (несверхтекучей) компоненты жидкости; \mathbf{V}_s – скорость сверхтекучей компоненты; ρ – плотность жидкости и ρ_s – сверхтекучая плотность. В зависимости от температуры жидкости T плотность ρ_s

изменяется от $\rho_s = \rho$ при $T = 0$ до $\rho_s = 0$ при $T \geq T_c$, где T_c – критическая температура перехода жидкости в состояние сверхтекучести.

К сожалению, стандартная гидродинамика однокомпонентной жидкости неприменима для описания процессов, происходящих в НЗ, поскольку вещество внутренних слоев НЗ представляет собой смесь сильно взаимодействующих жидкостей, которая, к тому же, является релятивистской.

Обобщение нерелятивистской сверхтекучей гидродинамики на смеси сверхтекучих/сверхпроводящих веществ было произведено в работах [R15, R16, R17, R18, R19]. Гидродинамика из этих работ позже исследовалась (например, [R20, R21]) в приложении к НЗ. Важным отличием гидродинамики смесей от одножидкостной сверхтекучей гидродинамики является так называемый эффект Андреева-Башкина [R17], состоящий в том, что в плотность потока массы частиц одного сорта вносят вклад сверхтекучие движения частиц другого сорта. Предположим, для простоты, что имеется смесь сверхтекучих жидкостей двух сортов, n и p , которые могут двигаться со сверхтекучими скоростями \mathbf{V}_{sn} и \mathbf{V}_{sp} . Тогда плотность потока массы для частиц каждого сорта дается формулами

$$\mathbf{j}_n = (\rho_n - \rho_{nn} - \rho_{np})\mathbf{u} + \rho_{nn}\mathbf{V}_{sn} + \rho_{np}\mathbf{V}_{sp}, \quad (2)$$

$$\mathbf{j}_p = (\rho_p - \rho_{pn} - \rho_{pp})\mathbf{u} + \rho_{pn}\mathbf{V}_{sn} + \rho_{pp}\mathbf{V}_{sp}. \quad (3)$$

Эффект Андреева-Башкина заключается в появлении в формулах (2) и (3) матрицы сверхтекучих плотностей ρ_{ik} с *ненулевыми* недиагональными элементами ρ_{np} и ρ_{pn} . Матрица ρ_{ik} является функцией концентраций частиц и температуры. В приложении к НЗ эта матрица рассчитывалась при нулевой температуре в работах [R22, R23, R24, R25]. Расчеты матрицы ρ_{ik} для ненулевых температур были впервые проведены в работах соискателя [4, 5]. При этом использовалась теория ферми-жидкости Ландау для смесей, обобщенная Леггеттом на случай сверхтекучести [R26, R27]. Позднее, результаты [4, 5] были полностью подтверждены в независимых расчетах [R28, R29].

Учет релятивистских эффектов был произведен (для сверхтекучей жидкости, состоящей из частиц одного сорта) в работах [R30, R31, R32, R33, R34, R35]. Релятивистская гидродинамика смесей в приложении к НЗ впервые рассматривалась в работах [R36, R37]. При этом исследовался только предел нулевых температур, а диссипативными эффектами пренебрегалось.

В работе [1] сверхтекучая релятивистская гидродинамика в форме, предложенной Соном [R35], была переписана в естественных переменных, допускающих прямое сравнение с нерелятивистскими уравнениями, и впервые обобщена на случай смесей при конечных температурах. В простейшем случае *пре*-вещества НЗ, состоящего из сверхтекучих нейтронов (n), сверхпроводящих протонов (p), а также электронов (e), соответствующие уравнения в пренебрежении диссипативными эффектами состоят из: (i) законов сохранения энергии-импульса и числа частиц

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu j_{(j)}^\mu = 0, \quad (4)$$

где

$$T^{\mu\nu} = (P + \varepsilon) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu} + Y_{ik} \left(w_{(i)}^\mu w_{(k)}^\nu + \mu_i w_{(k)}^\mu u^\nu + \mu_k w_{(i)}^\nu u^\mu \right), \quad (5)$$

$$j_{(i)}^\mu = n_i u^\mu + Y_{ik} w_{(k)}^\mu, \quad (6)$$

$$j_{(e)}^\mu = n_e u^\mu, \quad (7)$$

(ii) условия потенциальности для нейтронной сверхтекучей компоненты

$$\partial_\mu [w_{(n)\nu} + \mu_n u_\nu] - \partial_\nu [w_{(n)\mu} + \mu_n u_\mu] = 0 \quad (8)$$

и (iii) второго закона термодинамики

$$d\varepsilon = T dS + \mu_i dn_i + \mu_e dn_e + \frac{Y_{ik}}{2} d \left(w_{(i)}^\alpha w_{(k)\alpha} \right). \quad (9)$$

Эти уравнения должны быть еще дополнены условием квазинейтральности электрон-протонной жидкости, которое приводит к равенству [1]: $Y_{pk} w_{(k)}^\mu = 0$, а также условиями нормировки и ортогональности четыре-векторов u^μ и w^μ [3]:

$$u^\mu u_\mu = -1, \quad u_\mu w_{(i)}^\mu = 0. \quad (10)$$

В приведенных выше уравнениях индексы $i, k = n, p$ относятся к нуклонам (нейтронам и протонам); греческими буквами μ, ν, \dots обозначены пространственно-временные индексы. Если это не оговорено особо, по дважды повторяющимся индексам (латинским и греческим) подразумевается суммирование. Далее, $\varepsilon, P, S, \mu_j, n_j$ – плотность энергии, давление, плотность энтропии, химический потенциал и концентрация частиц сорта $j = n, p, e$; $g^{\mu\nu}$ – метрический тензор; u^μ – четыре-скорость нормальной (несверхтекучей) компоненты вещества, включающей в себя электроны, а также нейтронные и протонные тепловые боголюбовские возбуждения; $w_{(k)}^\mu$ – четыре-вектора, описывающие сверхтекучие степени свободы. В нерелятивистском пределе пространственная часть вектора $w_{(k)}^\mu$ пропорциональна разности между сверхтекучей и нормальной скоростями жидкости. Наконец, *симметричная* матрица Y_{ik} в формулах (4)–(10) называется релятивистской матрицей сверхтекучих плотностей и является релятивистским обобщением матрицы ρ_{ik} . В нерелятивистском пределе $Y_{ik} = \rho_{ik}/(m_i m_k c^2)$, где c – скорость света, m_i – масса нуклонов сорта $i = n, p$. Этот важнейший параметр релятивистской сверхтекучей гидродинамики введен в теорию в работе [1].

2.2 Релятивистская матрица сверхтекучих плотностей и функции отклика в сверхтекучих смесях

Релятивистская матрица Y_{ik} была рассчитана в работе [6] для нулевой температуры и в работе [7] для случая произвольных температур. Расчет выполнен в рамках релятивистской теории ферми-жидкости Ландау [R38] с учетом эффектов сверхтекучести барионов. Показано, что матрица Y_{ik} зависит от

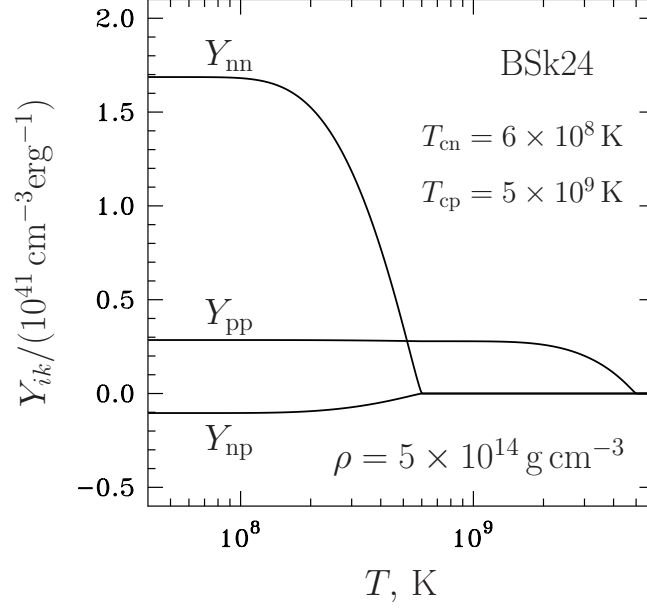


Рис. 1: Элементы матрицы сверхтекучих плотностей нейтрон-протонной смеси в зависимости от температуры T . Смотрите текст для дальнейших пояснений.

параметров Ландау f^{ik} барионной (например, нейтрон-протонной) смеси и универсальных функций температуры $\Phi_i(T)$:

$$Y_{ik} = n_i \gamma_{ik} (1 - \Phi_i), \quad (11)$$

где

$$\gamma_{ii} = \frac{(n_i + G_{ii} m_i^*) (n_k + G_{kk} m_k^* \Phi_k) - G_{ik}^2 m_i^* m_k^* \Phi_k}{m_i^* S}, \quad (12)$$

$$\gamma_{ik} = \frac{G_{ik} n_k (1 - \Phi_k)}{S}, \quad (13)$$

$$S = (n_i + G_{ii} m_i^* \Phi_i) (n_k + G_{kk} m_k^* \Phi_k) - G_{ik}^2 m_i^* m_k^* \Phi_i \Phi_k, \quad (14)$$

$$G_{ik} = \frac{1}{9\pi^4} p_{Fi}^2 p_{Fk}^2 f_1^{ik}. \quad (15)$$

В формулах (12)–(14) p_{Fi} и m_i^* – импульсы Ферми и эффективные массы частиц сорта i ; индексы i и k относятся к различным сортам частиц, $i \neq k$; суммирование по повторяющимся индексам не ведется.

В работе [6] было показано, что при нулевой температуре матрица Y_{ik} удовлетворяет правилу сумм

$$\sum_i \mu_i Y_{ik} = n_k. \quad (16)$$

Этот результат был позднее подтвержден в [R39].

Для примера на рис. 1 приведены элементы матрицы Y_{ik} в зависимости от температуры T для уравнения состояния BSk24 [R40]. Рисунок построен для плотности вещества НЗ $\rho = 5 \times 10^{14}$ г см⁻³; критические температуры

нейтронов и протонов выбраны равными, соответственно, $T_{cn} = 6 \times 10^8$ К и $T_{cp} = 5 \times 10^9$ К. Как следует из рисунка, элементы матрицы Y_{ik} резко изменяются с температурой при $T \sim T_{cn}$ и $T \sim T_{cp}$ несмотря на то, что вещество НЗ является сильно вырожденным. Это связано с тем, что матрица Y_{ik} зависит (через функции Φ_i) от отношений T/T_{cn} и T/T_{cp} , которые могут быть порядка 1 в НЗ.

Как показано в работе [5], матрица сверхтекучих плотностей непосредственно связана с функциями отклика системы на длинноволновое статическое векторное возмущение. Функции отклика для смесей сильно-взаимодействующих сверхтекучих ферми-жидкостей были рассчитаны в [5] для волновых чисел q и частот ω приложенного внешнего скалярного или векторного возмущения, удовлетворяющих условиям $\hbar q v_F \ll \mu$ и $\hbar \omega \ll \mu$ (v_F и μ – соответственно, ферми-скорость и химический потенциал любой из компонент смеси). Для этого была сформулирована и использована система кинетических уравнений, описывающих сверхтекучие смеси во внешнем электромагнитном поле. Полученные уравнения имеют широкую область применимости и могут использоваться для систематического расчета кинетических коэффициентов в сверхтекучих смесях с учетом ферми-жидкостных эффектов, для изучения различных мод, распространяющихся в смесях (плазмоны, фононы, ...), для расчета нейтринных процессов. В свою очередь функции отклика появляются в явном виде, например, в выражениях для нейтринного энерговыделения при куперовском спаривании нейтронов и протонов в НЗ [R41] – важного процесса остывания НЗ.

Полученные в [5] результаты переходят во всех предельных случаях в известные в литературе решения [R26, R42, R43, R44, R45], [4].

2.3 Объемная вязкость в сверхтекучих смесях в НЗ

В несверхтекучем веществе стандартный тензор плотности потока импульса с учетом вязкости имеет вид [R46]

$$\Pi_{lm} = P\delta_{lm} + \rho u_l u_m - \eta \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{lm} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) - \xi \delta_{lm} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \quad (17)$$

где δ_{lm} – символ Кронекера; η – коэффициент сдвиговой вязкости и ξ – коэффициент объемной вязкости.

Как известно, для вырожденного вещества НЗ столкновительная объемная вязкость пренебрежимо мала [R47]. Тем не менее, как показано еще в работах [R48, R49], большая объемная вязкость может эффективно генерироваться в ходе неравновесных процессов взаимного превращения частиц, например, в ходе модифицированного урка-процесса

$$n + N \rightarrow p + e + N + \bar{\nu}_e, \quad p + e + N \rightarrow n + N + \nu_e, \quad (18)$$

где $N = n$ или p ; $\bar{\nu}_e$ и ν_e обозначают электронные антинейтрино и нейтрино, соответственно. Для сверхтекучего вещества НЗ коэффициент объемной вязкости ξ рассчитывался во многих работах (например, [R50, R51, R52, R53, R54, R55]). При этом обычно влияние сверхтекучести на объемную вязкость учитывалось введением щели в дисперсионное соотношение барионов при

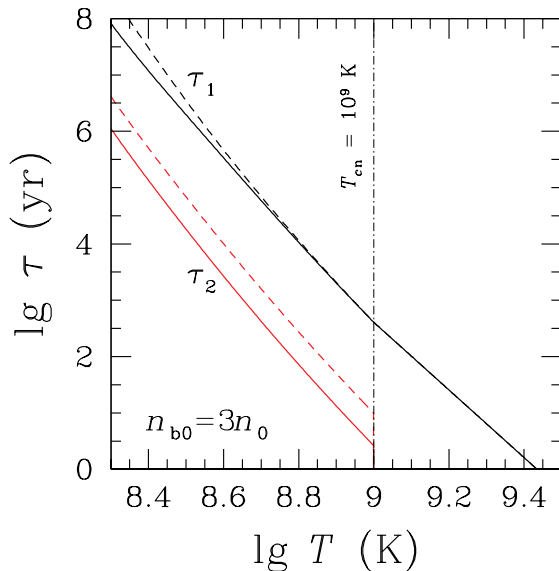


Рис. 2: Характерные времена диссипации за счет объемной вязкости сверхтекучей (красные линии) и нормальной (черные линии) звуковой моды в зависимости от температуры T . Штрихи: учитывается только стандартный коэффициент объемной вязкости ξ_2 ; сплошные линии: учитываются все 4 коэффициента объемной вязкости. Смотрите текст для дальнейших пояснений.

расчете темпа реакций. Однако известно [R14, R56], что в сверхтекучем веществе возникает несколько коэффициентов объемной вязкости (как минимум, 4). Например, добавка $\tau_{bv}^{\mu\nu}$ к тензору энергии-импульса, обусловленная объемной вязкостью, имеет вид ($\perp^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$):

$$\tau_{bv}^{\mu\nu} = -\xi_1 \perp^{\mu\nu} \partial_\gamma [Y_{nk} w_{(k)}^\gamma] - \xi_2 \perp^{\mu\nu} \partial_\gamma u^\gamma \quad (19)$$

и зависит от двух коэффициентов объемной вязкости, ξ_1 и ξ_2 . Еще два коэффициента появляются при учете вязкости в сверхтекучем уравнении (8). В работе [2] было впервые показано, что все эти коэффициенты отличны от нуля, то есть генерируются неравновесными реакциями; произведен первый в литературе расчет этих коэффициентов для *pre*-вещества. После этой работы возник интерес к аналогичным расчетам сверхтекучих коэффициентов объемной вязкости в других фазах вещества НЗ (например, [R57, R58, R59, R60, R61]).

На рис. 2 в качестве примера приведены характерные времена τ затухания звуковых волн в сверхтекучем *pre*-веществе за счет объемной вязкости. Показана зависимость τ от температуры T для вещества с концентрацией барионов $n_b = 3n_0$ ($n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ – концентрация барионов в атомных ядрах). Критическая температура нейтронной сверхтекучести выбрана равной $T_{cn} = 10^9 \text{ K}$. Рисунок построен для двух существующих в таком веществе звуковых мод, “нормальной” (скорость которой практически не отличается от скорости звука в несверхтекучем веществе, показана черным цветом) и “сверхтекучей” (скорость которой сильно зависит от температуры T и которая не существует в нормальном веществе, обозначена красным). Штрихами на рис. 2 приведены времена затухания, рассчитанные с учетом одного

“стандартного” коэффициента объемной вязкости ξ_2 , который раньше обычно только и рассматривался в литературе. Сплошными линиями показан расчет с учетом всех четырех коэффициентов объемной вязкости, найденных в работе [2]. Видно, что учет всех коэффициентов объемной вязкости может в 2–3 раза усиливать диссипацию звуковых волн в сверхтекучем нуклонном веществе.

2.4 Сверхтекучая гидродинамика и объемная вязкость в нуклон-гиперонных смесях; звук и его затухание

Многие микроскопические теории предсказывают появление гиперонов наряду с нуклонами в центральных областях массивных НЗ [R62]. Изучение нуклон-гиперонного вещества представляет значительный интерес, в частности, из-за того, что оно обладает гораздо большей объемной вязкостью, чем чисто нуклонное вещество. Это может иметь важные последствия для теории колебаний НЗ (в особенности, для механизма затухания r -мод). Поэтому представляло интерес распространить результаты, полученные в разделах 2.1–2.3 для нуклонного вещества, на более общий случай сверхтекучего и сверхпроводящего нуклон-гиперонного вещества. Такое обобщение было достигнуто в работах [6, 7, 8, 9, 10, 11].

В частности, в работах [6, 7] были найдены аналитические выражения для матрицы сверхтекучих плотностей нуклон-гиперонного вещества. В работе [8] рассчитаны коэффициенты объемной вязкости (16 коэффициентов, из которых 3 независимых), при этом выявлена и исправлена широко укоренившаяся в литературе ошибка при вычислении коэффициента объемной вязкости нормального нуклон-гиперонного вещества. Эти результаты были использованы [9] для систематического исследования звуковых волн в сверхтекучем нуклон-гиперонном веществе и их затухания за счет сдвиговой и объемной вязкости как в режиме быстрых, так и в режиме медленных реакций взаимного превращения частиц. Кроме того, в работе [11] для ряда современных уравнений состояния нуклон-гиперонного вещества были рассчитаны темпы неравновесных реакций с участием гиперонов в приближении одномезонного обмена и получены обновленные выражения для объемной вязкости. Наконец, в работе [10] для трех нуклон-гиперонных уравнений состояния, полученных в приближении релятивистского среднего поля (relativistic mean-field approximation), были нагенерированы и выложены в общий доступ в сети интернет² таблицы, содержащие всю необходимую информацию для моделирования колебаний сверхтекучих нуклон-гиперонных НЗ: данные по матрице сверхтекучих плотностей, параметры Ландау, эффективные массы, химические потенциалы частиц. Эти таблицы уже были использованы в работах [R63, R64, R65, R66, R67, R68, R69] при моделировании колебаний, тепловой эволюции НЗ, и в других расчетах.

2.5 Диффузия как лидирующий механизм диссипации в сверхпроводящих НЗ

Обычно при изучении колебаний НЗ в качестве основных механизмов диссипации рассматривают объемную и сдвиговую вязкости. Известно, что вли-

²Адрес в сети интернет: <http://www.ioffe.ru/astro/NSG/heos/hyp.html>

яние теплопроводности на затухание колебаний пренебрежимо мало [R70]. Однако вещество внутренних слоев НЗ состоит из смеси частиц различных сортов. В смесях, как известно, возникает новый механизм диссипации – диффузия. Представляет интерес исследовать вопрос о том, насколько она эффективна в НЗ.

Для примера рассмотрим нормальное (несверхтекучее и несверхпроводящее) вещество, состоящее из нейтронов, протонов и электронов. Каждая из компонент $\alpha, \beta = n, p, e$ имеет свою скорость направленного движения $\mathbf{u}_\alpha \neq \mathbf{u}_\beta$. В гидродинамическом пределе, тем не менее, эти скорости очень близки из-за частых столкновений (трения между различными компонентами вещества). Потеря механической энергии вследствие диффузии (например, в звуковой волне) равна [R71]

$$\dot{E}_{\text{diff}} = -\frac{1}{2} \int \sum_{\alpha\beta} J_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta)^2 dV, \quad (20)$$

где $J_{\alpha\beta}$ – темп передачи импульса между частицами сортов α и β – величина, рассчитываемая в кинетической теории; интегрирование проводится по объему системы V .

Для *пре*-вещества в звуковой волне электроны и протоны сцеплены условием квазинейтральности, то есть скорости электронной и протонной компонент совпадают с высокой точностью. При этом основной вклад в диссипацию вносит трение нейтронов о протоны. Используя систему кинетических уравнений для частиц разных сортов можно показать, что соответствующий вклад в диссипацию механической энергии равен:

$$\dot{E}_{\text{diff}} \approx - \int \frac{1}{J_{np}} \left[\frac{n_{n0} n_{e0}}{n_{b0}} \nabla \delta\mu \right]^2 dV, \quad (21)$$

где $\delta\mu \equiv \mu_n - \mu_p - \mu_e$ – разбалансировка химических потенциалов нейтронов, протонов и электронов. Подынтегральное выражение в (21) обратно пропорционально величине J_{np} , которая очень велика из-за чрезвычайно сильного столкновительного трения между нейтронами и протонами. В результате диффузия оказывается неэффективной для затухания звука в нормальном веществе НЗ.

Ситуация меняется если протоны в НЗ находятся в сверхпроводящем состоянии, что предсказывается современными микроскопическими теориями [R72, R2, R3]. В этом случае рассеяние нейтронов на протонах полностью подавлено при $T \ll T_{cp}$. Следовательно, взаимодействие нейтронов в основном происходит с электронами (за счет сравнительно слабых электромагнитных сил). Можно показать, что в этом случае

$$\dot{E}_{\text{diff}} = - \int \frac{1}{J_{en}} \left[\frac{n_{n0} n_{e0}}{n_{b0}} \nabla \delta\mu \right]^2 dV. \quad (22)$$

Поскольку $J_{en} \ll J_{np}$, то диссипация усиливается по сравнению со случаем несверхпроводящего вещества. Этот результат неудивителен: предел идеальной (бездиссипативной) гидродинамики соответствует бесконечному трению между компонентами смеси.

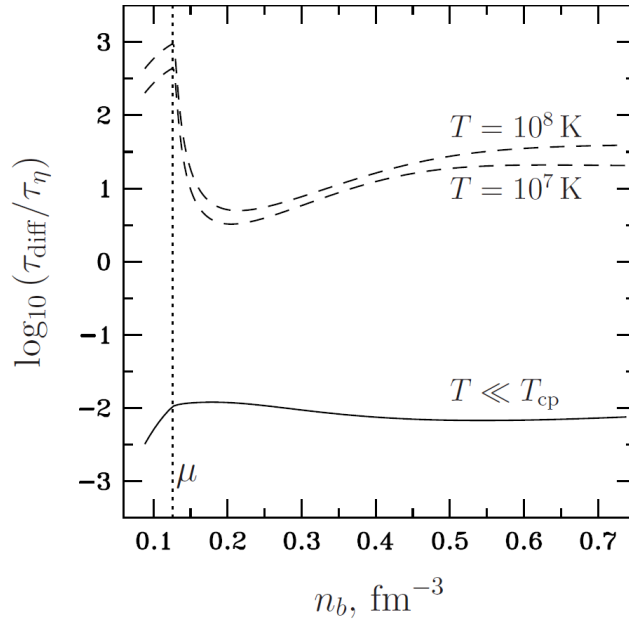


Рис. 3: Отношение характерных времен $\tau_{\text{diff}}/\tau_{\eta}$ как функция n_b для звуковых волн. Штрихи: $\tau_{\text{diff}}/\tau_{\eta}$ для нормального вещества при температурах $T = 10^7$ К и $T = 10^8$ К. Сплошная линия: $\tau_{\text{diff}}/\tau_{\eta}$ для сверхпроводящего вещества и $T \ll T_{\text{cp}}$. Точками показан порог рождения мюонов.

Для иллюстрации эффекта на рисунке 3 приведено отношение $\tau_{\text{diff}}/\tau_{\eta}$ характерных времен затухания за счет диффузии, τ_{diff} , и сдвиговой вязкости, τ_{η} , в зависимости от концентрации барионов n_b . Рисунок построен для *pre*-вещества с примесью мюонов. Штрихами показаны результаты для нормального вещества при $T = 10^7$ К и $T = 10^8$ К; сплошная линия показывает отношение $\tau_{\text{diff}}/\tau_{\eta}$ для сверхпроводящего вещества при $T \ll T_{\text{cp}}$. При расчете использовалось уравнение состояния BSk24 [R40]; величины J_{np} и J_{ne} брались из работы [22]; коэффициент сдвиговой вязкости – из работы [R73]. Из рисунка видно, что диффузия приблизительно в 100 раз более эффективна для затухания звуковых волн, чем сдвиговая вязкость в сверхпроводящих НЗ.

3 Глобальные колебания сверхтекучих невращающихся НЗ: спектр и затухание различных колебательных мод [1, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 12]

3.1 Введение

Колебания НЗ могут возникать как в результате развития внутренней неустойчивости (например, неустойчивости *r*-мод или неустойчивости, вызванной магнитной активностью в магнитарах), так и из-за внешнего воздействия (приливное взаимодействие в ходе слияния НЗ; аккреция в двойной системе и т. п.). Возбуждение колебаний при слиянии НЗ особенно интересно, поскольку колебания влияют на гравитационный сигнал от слияний (например, [R74, R75]). При слияниях в основном возбуждаются *f*-моды, но также это могут быть *p*- и *g*-моды (например, [R76]), или инерционные моды [R77]. Важно уметь корректно описывать колебания, поскольку информация, заключенная в гравитационном сигнале от колеблющейся сливающейся НЗ ис-

пользуется для наложения ограничений на свойства сверхплотного вещества (например, [R78]).

Теория колебаний НЗ имеет долгую историю. Первыми глобальные пульсации НЗ в рамках ОТО были рассмотрены Чандрасекаром [R79] и Торном с соавторами в серии работ 1967–1970 годов [R80, R81, R82, R83, R84]. Дальнейшее развитие теория получила в работах [R85, R86, R87, R70, R88, R89, R90, R91, R92] и многих других.

Первая работа по глобальным нерадиальным колебаниям сверхтекучих НЗ была опубликована Линдбломом и Менделлем [R93]. За этой пионерской работой последовало большое количество других работ (например, [R94, R95, R96, R97, R98, R99, R100, R101, R102]), однако все они рассматривали колебания различных типов без учета эффектов ОТО и эффектов конечных звездных температур (рассматривался предел $T = 0$). Колебания сверхтекучих НЗ в рамках ОТО изучались только в нескольких работах [R103, R104, R91, R92]. При этом авторы делали ряд упрощающих предположений, в том числе, использовали политропное уравнение состояния и работали в пределе $T = 0$.

При исследовании диссипации колебаний, как правило, учитывалось влияние эффектов сверхтекучести на кинетические коэффициенты, но при этом использовалась стандартная (несверхтекучая) гидродинамика. Исключения составляют несколько работ, в том числе [R105, R95, R97, R106, R107, R58, R108]. Однако во всех этих работах рассматривались ньютоновские звезды и использовалась сверхтекучая гидродинамика, справедливая только при нулевой температуре.

Таким образом, основной целью соискателя в данной главе явилось систематическое изучение глобальных колебаний сверхтекучих НЗ и их диссипации в рамках ОТО и с учетом эффекта конечных температур.

3.2 Влияние температурных эффектов на колебания сверхтекучих НЗ; приближенный метод расчета спектров колебаний

Основные свойства зависящих от температуры спектров колебаний сверхтекучих НЗ могут быть пояснены на примере радиальных колебаний [1, 13, 16]. Эти свойства остаются справедливыми и для других типов колебаний (в частности, для f -, p - и r -мод).

На рис. 4(b) показан типичный спектр частот радиальных колебаний звезды с массой $M = 1.4M_{\odot}$ и радиусом $R = 12.2$ км в зависимости от температуры T^{∞} из работы [16]. Здесь и ниже знак ∞ означает, что соответствующая величина взята с учетом гравитационного красного смещения. Спектр построен для модели нейтронной сверхтекучести с максимумом критической температуры в центре звезды, равным $T_{cn,max}^{\infty} = 6 \times 10^8$ К (модель 1 в [16]). В серой области спектр не строился. При $T > T_{cn,max}^{\infty}$ звезда полностью несверхтекучая и в приведенном на рисунке интервале частот существуют только 3 колебательных моды (F , $1H$, $2H$), которые не зависят от температуры, как и должно быть в сильно вырожденной звезде. При $T < T_{cn,max}^{\infty}$ число мод увеличивается: чередующимися сплошными и штриховыми линиями на рисунке показаны первые 6 колебательных мод сверхтекучей звезды. Основными характеристиками спектра колебаний (верными и для других типов колебаний) являются: (i) сильная зависимость собственных частот колебаний от темпе-

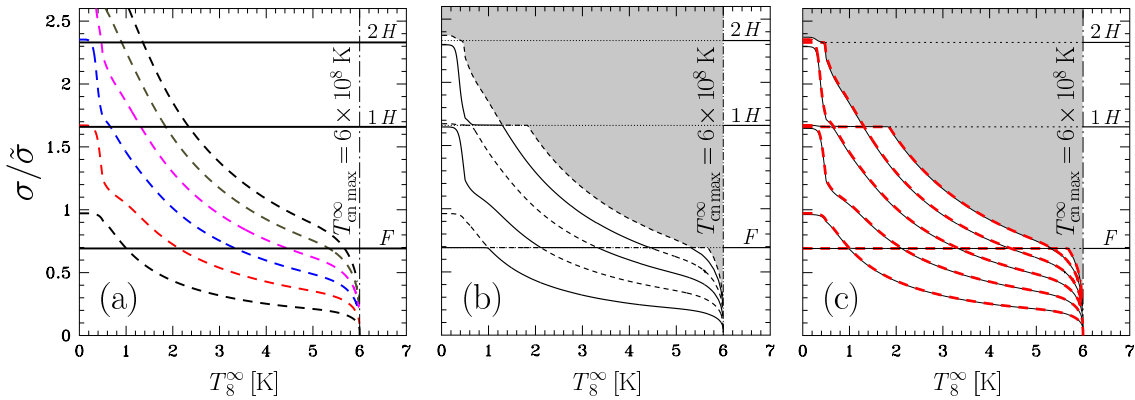


Рис. 4: Частоты радиальных колебаний сверхтекучей звезды σ в единицах $\tilde{\sigma} = c/R = 2.46 \times 10^4 \text{ сек}^{-1}$ в зависимости от температуры T^∞ (в единицах 10^8 K) для ряда колебательных мод. Панель (a): приближенное решение для полностью невзаимодействующих сверхтекучих и нормальных мод колебаний; панель (b): точное решение без каких либо приближений; панель (c): приближенное решение наложено на точное решение. В серой области спектр не строился; вертикальная штриховая линия показывает максимальное значение критической температуры для используемой нейтронной модели сверхтекучести из работы [16]. Смотрите текст для дальнейших пояснений.

ратуры; (ii) наличие очень близких антипересечений мод; (iii) тот факт, что при любой температуре звезды в ее спектре существуют частоты, практически совпадающие с собственными частотами колебаний нормальной (несверхтекучей) звезды.³

Все эти свойства могут быть объяснены в предположении слабой связи уравнений, описывающих чисто сверхтекучие и несверхтекучие (нормальные) моды колебаний НЗ. На этом основан приближенный метод расчета колебаний сверхтекучих НЗ [15, 16], позволяющий кардинально упростить расчеты колебательных спектров в рамках ОТО. Этот метод кратко изложен ниже.

Еще в работе Линдблома и Менделла [R93], в которой рассматривались колебания сверхтекучих ньютоновских НЗ в приближении $T = 0$, в ходе численных экспериментов было замечено, что глобальные осцилляции сверхтекучих НЗ делятся на два типа: (i) несверхтекучие (или нормальные) моды, частоты колебаний которых практически совпадают с собственными частотами несверхтекучей звезды и (ii) сверхтекучие моды, в ходе колебаний которых практически не возмущается плотность потока массы вещества. Последующие исследования подтвердили результат Линдблома и Менделла, но объяснений этому факту дано не было. В работе [15] этот факт был объяснен на примере НЗ с нуклонными ядрами (*nре*-вещество). В частности было показано, что несверхтекучие и сверхтекучие моды действительно описываются двумя слабо связанными системами уравнений, причем эта связь определяется одним безразмерным параметром

$$s = \frac{n_e \partial P(n_b, n_e) / \partial n_e}{n_b \partial P(n_b, n_e) / \partial n_b}, \quad (23)$$

зависящим от уравнения состояния вещества. Параметр s весьма мал для реалистичных уравнений состояния, $|s| \sim 0.01 - 0.05$, что позволяет существенно

³Отметим, что утверждение (iii) не верно для g-мод [19].

упростить расчеты спектров сверхтекучих НЗ и уже в нулевом приближении ($s = 0$, когда системы считаются полностью независимыми) находить спектры с ошибкой лишь в несколько процентов.

В приближении $s = 0$ несверхтекучие (нормальные) моды в точности совпадают с модами несверхтекучей НЗ (но не совпадают времена затухания этих мод!). В то же время сверхтекучие моды обладают следующими свойствами: (1) они не возмущают метрику, то есть не испускают гравитационных волн; (2) не возмущают давление и плотность потока барионов; (3) локализованы в сверхтекучей области и не выходят на поверхность.

На рисунке 4(a) показан спектр радиальных колебаний сверхтекучей НЗ, построенный в приближении $s = 0$. Сверхтекучие моды показаны штрихами, нормальные моды показаны сплошными линиями. Видно, что там, где в истинном решении [рис. 4(b)] существуют антипересечения мод, в приближенном решении имеют место обычные пересечения: сверхтекучие и нормальные моды “не чувствуют” друг друга, поскольку соответствующие уравнения в пределе $s = 0$ полностью независимы. Для сравнения двух решений, точного и приближенного, они наложены друг на друга на рис. 4(c). Различие этих решений составляет всего 1 – 3%.

Используя метод приближенного расщепления мод, в работе [14, 16] были впервые рассчитаны детальные, зависящие от температуры, спектры f - и p -мод для реалистичных моделей сверхтекучих НЗ. Позже справедливость этого метода была дополнительно подтверждена “точным” (без каких-либо приближений) расчетом нерадиальных колебаний в работе [17], а затем в работе [20] этот метод был обобщен на НЗ с нуклон-гиперонным веществом в их внутренних слоях.

3.3 Затухание колебаний сверхтекучих НЗ

Затухание колебаний сверхтекучих НЗ в рамках ОТО и с учетом эффектов конечных температур было детально исследовано в работе [16]. Было обнаружено, что не только спектр колебаний, но и характерные времена диссипации хорошо описываются при помощи приближенного метода расщепления сверхтекучих и нормальных мод. Расчеты показали, что сверхтекучие моды затухают на 1 – 2 порядка быстрее, чем нормальные моды (этот результат верен для затухания за счет сдвиговой и объемной вязкостей). Тем не менее, вблизи резонансов (когда частоты нормальных и сверхтекучих мод совпадают) затухание нормальных мод усиливается и становится сравнимым с затуханием сверхтекучих мод. Это связано с тем, что вблизи резонансов сверхтекучие моды подмешиваются к нормальным решениям, что увеличивает диссипацию. Другим важным результатом явилось то, что времена затухания нормальных мод, рассчитанные в рамках сверхтекучей гидродинамики, могут в несколько раз (вплоть до 10 раз) отличаться от соответствующих времен, рассчитанных с использованием нормальной гидродинамики (как это делалось обычно). Эти свойства верны как для радиальных мод, так и для f - и p -мод, и проиллюстрированы на рис. 5 (см. подпись к рисунку).

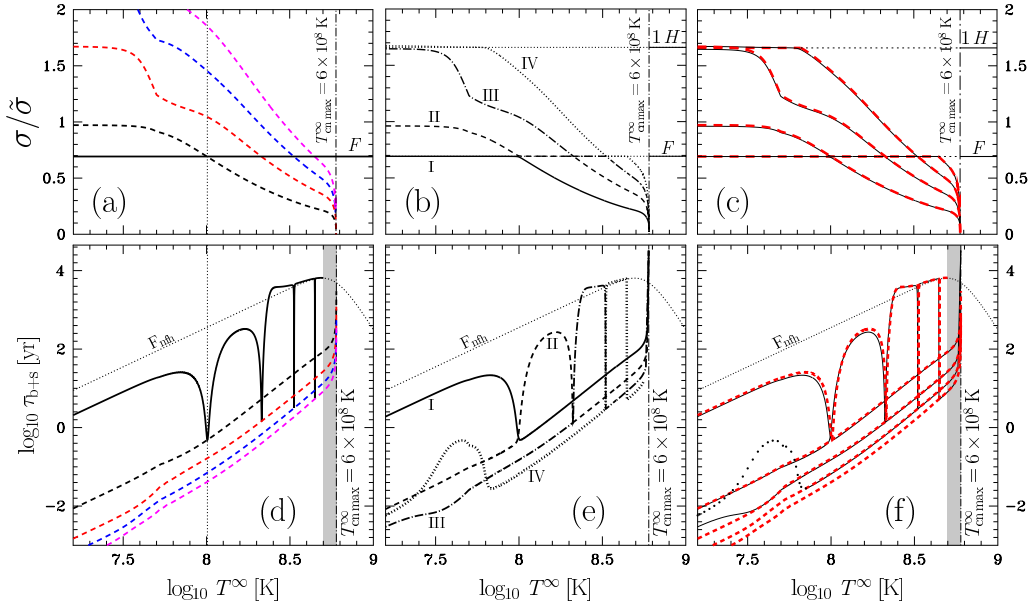


Рис. 5: Частоты σ [панели (a, b, c)] и времена затухания τ_{b+s} за счет объемной и сдвиговой вязкостей [панели (d,e,f)] для радиально колеблющейся НЗ в зависимости от T^∞ . Рисунок построен для модели 1 нуклонной сверхтекучести из работы [16]. Панели (a, d): приближенное решение (нормальная фундаментальная F -мода и первые четыре сверхтекучих моды показаны, соответственно, сплошными и штриховыми линиями). Панели (b, e): точное решение (первые четыре точных моды I, ..., IV показаны сплошными, штриховыми, штрих-пунктирными и точечными линиями, соответственно). Панели (c, f): приближенное (штрихи) и точное решение (сплошные линии) показаны одновременно. Панели (a, b, c) – те же самые спектры, что приведены на рис. 4(a, b, c), соответственно. Нормальная F -мода не построена в заштрихованной области из-за технических причин (слишком много резонансов/антипересечений мод). Точечные линии на панелях (d, e, f) демонстрируют времена затухания для F -моды, рассчитанной в рамках стандартной несверхтекучей гидродинамики. Смотрите работу [16] для дальнейших пояснений.

3.4 Тепловые и композиционные g -моды в сверхтекучих НЗ

Рассматриваемые g -моды – колебания в среде, возвращающей силой для которых является сила плавучести. Если плавучесть вызвана градиентом химического состава, то говорят о композиционных g -модах, если температурой – о температурных g -модах. В веществе неустойчивом относительно колебаний типа g -мод возникает конвекция. G -моды в НЗ изучались в ряде работ (например, [R109, R110, R111]). Во всех этих работах вещество НЗ считалось несверхтекучим.

До недавнего времени было принято считать (например, [R94, R112, R104, R96]), что в сверхтекучем веществе НЗ g -моды отсутствуют, что является следствием существенной модификации уравнений гидродинамики для такого вещества (например, как известно, g -мод нет в сверхтекучем гелии-4). При этом рассматривался упрощенный *пре*-состав вещества ядер НЗ (нейтроны, протоны, электроны) и предполагалось, что температура $T = 0$.

В наших работах [18, 19] показано, что в общем случае этот вывод является неверным и учет конечных температур и/или примеси дополнительных частиц (например, мюонов), приводит к появлению g -мод в колебательном спектре звезды. Для примера, на рис. 6 показан фрагмент спектра колебаний g -мод в сверхтекучей звезде с ядром, состоящим из *пре* μ -вещества. Показаны

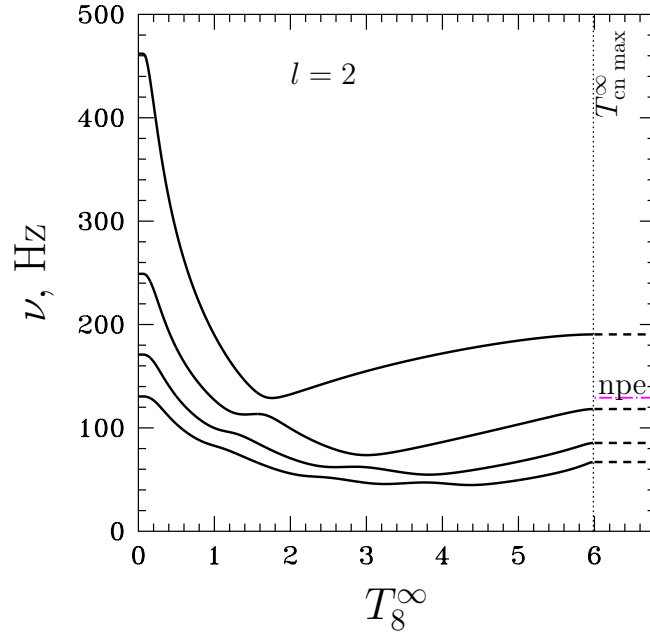


Рис. 6: Спектр частот квадрупольной ($l = 2$) g -моды в зависимости от T_8^∞ для модели II нуклонной сверхтекучести из работы [19]. Сплошные/штриховые линии показывают собственные частоты ν для первых 4 g -мод в сверхтекучих/несверхтекучих НЗ с *пре*-составом их ядер. Штрих-пунктирная линия обозначает собственную частоту фундаментальной g -моды несверхтекучей звезды с *пре*-ядерным составом. Точечная линия демонстрирует максимальную по ядру критическую температуру нейтронов (которая для выбранной модели сверхтекучести достигается в центре звезды).

частоты первых 4 колебательных мод в зависимости от температуры звезды T^∞ . Как и в случае с радиальными колебаниями, а также f - и p -модами, частоты g -мод зависят от температуры несмотря на то, что вещество НЗ является сильно вырожденным. В то же время для несверхтекучей звезды (штрихи на рисунке) частоты не зависят от T . Обращает на себя внимание тот факт, что максимальная частота g -мод в сверхтекучем *пре*-веществе может достигать ~ 500 Гц и в несколько раз превосходить соответствующие частоты в нормальной звезде.

Частоты g -мод сильно зависят от T по двум причинам: (i) потому что размер сверхтекучей области зависит от T для реалистичных моделей сверхтекучести; и (ii) потому что частота Брюнта-Вяйсяля \mathcal{N} (характерная частота g -мод) зависит от матрицы сверхтекучих плотностей, которая в свою очередь зависит от T :

$$\mathcal{N}^2 = -\frac{g}{\mu_n n_b} e^{\nu-\lambda} Y(T) \frac{\partial w(P, \mu_n, x_{e\mu})}{\partial x_{e\mu}} \nabla x_{e\mu}, \quad (24)$$

где $Y(T)$ – известная функция матрицы сверхтекучих плотностей (зависящая от температуры); g ускорение свободного падения; ν, λ – метрические функции; $w = \varepsilon + P$; $x_{e\mu} = n_\mu/n_e$.

Кроме того, в работе [18] показано, что при определенных условиях в сверхтекучем *пре*-веществе возможна конвекция, причем в зависимости от модели сверхтекучести и уравнения состояния она может возникать как при нагревании вещества снизу, так и при его охлаждении.

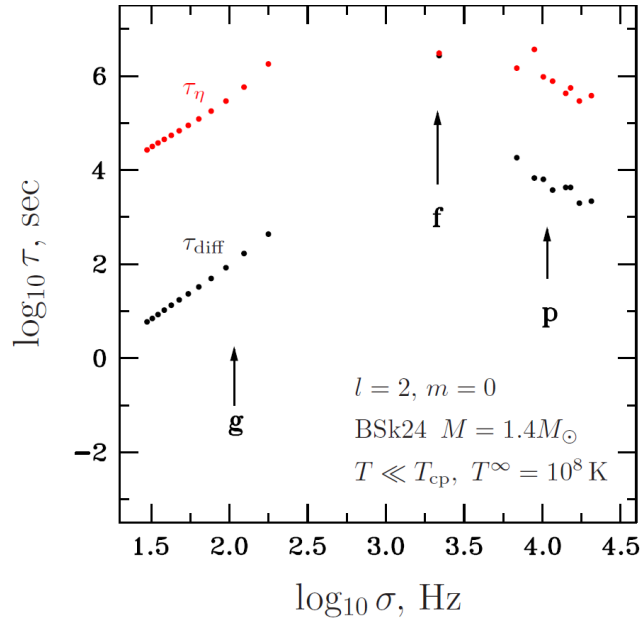


Рис. 7: Времена затухания τ в зависимости от частоты колебаний σ для первых нескольких квадрупольных ($l = 2$) f -, p -, и g -мод в сверхпроводящих НЗ. Красными точками показано τ за счет сдвиговой вязкости, черными точками – за счет диффузии.

Результаты, полученные в работах [18, 19] были позднее воспроизведены тремя группами [R113, R75, R114, R115] и впервые в литературе обобщены в [20] на случай нуклон-гиперонного вещества. Примечательно, что максимальные частоты g -мод в нуклон-гиперонном веществе могут быть даже больше, чем в *нрм*-веществе, и достигать значений порядка 750 Гц. Результаты работы [20] были подтверждены в [R115] и породили целую серию публикаций, посвященных расчетам g -мод в экзотических фазах вещества (например, [R116, R117, R118, R65, R119, R120]).

3.5 Роль диффузии в затухании глобальных колебательных мод в НЗ

В работе [12] был детально исследован механизм затухания глобальных колебаний сверхпроводящих НЗ за счет диффузии, обсуждавшейся в разделе 2.5. Показано, что этот механизм может быть наиболее эффективным источником диссипации в НЗ, опережая по эффективности сдвиговую и объемные вязкости. Это утверждение проиллюстрировано на рис. 7, где представлены характерные времена диссипации τ за счет диффузии (черные точки) и сдвиговой вязкости (красные точки) в зависимости от частоты колебаний, σ . Рисунок построен для звезды с массой $M = 1.4M_{\odot}$ и уравнения состояния BSk24. Температура звезды выбрана равной $T^{\infty} = 10^8 \text{ K}$. Предполагается, что она много меньше критической температуры перехода протонов T_{cp} в сверхпроводящее состояние. Для такой температуры вклад объемной вязкости в диссипацию меньше, чем вклад сдвиговой вязкости, поэтому величина τ для объемной вязкости не приведена. На рис. 7 для примера рассмотрены g -, p -, и f -моды с орбитальным квантовым числом $l = 2$. Видно, что g - и p -моды затухают за счет диффузии в среднем, соответственно, в 5000 и 100 раз быстрее, чем за счет сдвиговой вязкости. В то же время для f -мод, которые являются практически несжимаемыми, характерные времена затухания

отличаются не слишком сильно (но диффузия все равно более эффективна).

Полученные результаты означают, что все явления, в которых происходит возбуждение колебательных мод в сверхпроводящих НЗ должны быть пересмотрены. В частности, чрезвычайно эффективная диссипация g - и p -мод за счет диффузии может влиять на гравитационный сигнал, формируемый на поздних стадиях слияния НЗ посредством, например, подавления $p - g$ неустойчивости, при которой в искаженной приливным взаимодействием НЗ возбуждается пара мод, состоящая из низкочастотной g -моды и высокочастотной p -моды [R76, R121]. Детальное исследование этих вопросов, однако, выходит за рамки предложенной диссертации.

4 Релятивистская диссипативная магнитная гидродинамика сверхтекучих смесей в нейтронных звездах: учет эффектов конечных температур, вихрей Фейнмана-Онзагера и Абрикосова [3, 21, 22, 23]

Как известно, НЗ вращаются и обладают сильными магнитными полями. Сверхтекучесть и сверхпроводимость барионов приводит к появлению вихрей Фейнмана-Онзагера во вращающихся НЗ и вихрей Абрикосова (в случае сверхпроводника II рода) в замагниченных НЗ. Важно понимать, каковы динамические свойства НЗ с вихрями. Вихри влияют на колебания НЗ, их магнито-тепловую эволюцию; вихри, вероятно, вызывают сбои периодов пульсаров (так называемые “глитчи”). Расстояние между вихрями очень маленькое (много меньше радиуса НЗ), их чрезвычайно много, поэтому возникает вопрос о формулировке динамических уравнений, усредненных по большому количеству вихрей. Разработка соответствующих уравнений была начата с пионерских работ Холла и Вайнена [R122, R123], а также Бекаревича и Халатникова [R124], посвященных усредненному описанию вихрей Фейнмана-Онзагера во вращающемся сверхтекучем гелии-4.

В приложении к многокомпонентному веществу НЗ соответствующие гидродинамические уравнения рассматривались в работах [R20, R125, R126, R127, R128] и ряде других. При этом, как правило, исследовались нерелятивистские уравнения и изучался главным образом предел нулевых температур; предполагалось, что протоны образуют сверхпроводник второго рода.

Целью серии работ [3, 21, 22, 23] было сформулировать релятивистский аналог уравнений, описывающих сверхтекучие/сверхпроводящие смеси с учетом электромагнитного поля, вихрей Фейнмана-Онзагера и Абрикосова, эффекта конечных температур и широкого спектра диссипативных эффектов. Необходимые гидродинамические уравнения выведены из закона возрастания энтропии и законов сохранения числа частиц и энергии-импульса. Сделано следующее:

- Сформулирован наиболее общий вид диссипативной релятивистской гидродинамики Холла-Вайнена-Бекаревича-Халатникова, справедливый при произвольных температурах и описывающий незаряженную однокомпонентную жидкость с вихрями [3]. Почти одновременно с этой работой появилась работа [R129], в которой были получены аналогичные уравнения, однако рассматривался менее общий случай $T = 0$, и энергией

вихрей при получении уравнений пренебрегалось.

- Результаты работы [3] были обобщены на заряженные сверхтекучие и сверхпроводящие смеси в работе [21]. При этом было учтено возможное наличие вихрей Фейнмана-Онзагера и Абрикосова (для сверхпроводника II-ого рода), либо промежуточного состояния (для сверхпроводника I-ого рода). Все полученные уравнения применимы для произвольных температур вещества. Впоследствии, Рау и Вассерман [R130] вывели аналогичные уравнения (в других переменных) из конвективного вариационного принципа Картера [R32], и доказали полную эквивалентность получающихся результатов.
- В работе [22] была сформулирована релятивистская диссипативная магнитная гидродинамика (МГД) для несверхтекучих смесей, в которой были учтены эффекты диффузии, теплопроводности и вязкости в замагниченном веществе НЗ.
- Наконец, результаты работ [21, 22] были обобщены для формулировки наиболее общей (на момент написания научного доклада) релятивистской МГД сверхтекучих и сверхпроводящих смесей, учитывающей наличие вихрей при конечных температурах, а также эффекты диффузии частиц различных сортов друг относительно друга [23].

Полученная в работе [23] сверхтекучая МГД, описывающая динамику вихрей и частиц с учетом эффектов диффузии, впервые сформулирована не только в рамках релятивистского подхода, но и в нерелятивистском приближении. Она описывает чрезвычайно широкий класс явлений, который не ограничивается НЗ. Например, выведенные уравнения могут описывать любую (необязательно сверхтекучую) жидкость, в которой вектор электрической индукции не равен вектору напряженности электрического поля, а вектор магнитной индукции не равен вектору напряженности магнитного поля. Учет диффузии в этих уравнениях приводит к тому, что диффузионный ток частиц какого-либо одного сорта приводит к дополнительной силе на вихри, которые начинают двигаться, действуя при этом на другие компоненты вещества. В работе [23] показано, как выразить коэффициенты диффузии, возникающие в полученной МГД через рассчитываемые в кинетической теории темпы передачи импульса $J_{\alpha\beta}$ для двух случаев: (i) несверхтекучее вещество, состоящее из нейтронов, протонов, электронов и мюонов в магнитном поле и (ii) полностью сверхтекучие и сверхпроводящие нуклоны, вместе с электронами и мюонами в магнитном поле вихрей Абрикосова. Применительно к НЗ полученная МГД может использоваться для расчета спектра колебаний и затухания колебаний во вращающихся релятивистских НЗ, а также для моделирования магнитной и/или магнито-тепловой эволюции в НЗ. Эта МГД уже была использована для расчета затухания r -мод колебаний за счет диффузии [12] и для расчета характерных времен диссипации f -, p - и g -мод за счет диффузии (предыдущая глава).

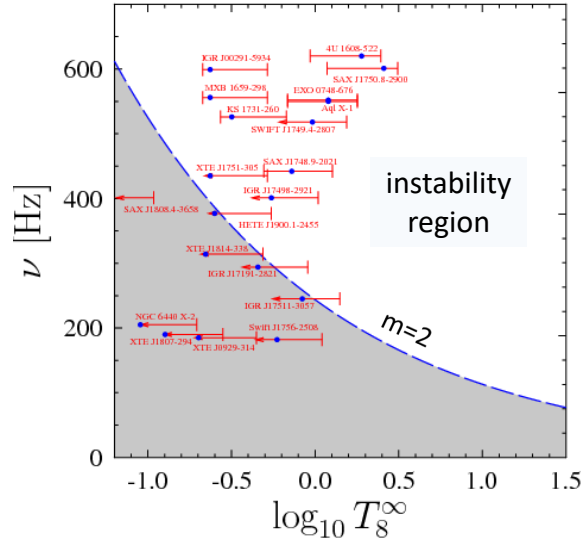


Рис. 8: Частота вращения ν в зависимости от внутренней температуры T_8^∞ (в единицах 10^8 K) для ряда НЗ из маломассивных рентгеновских двойных систем (данные взяты из работы [25].) Источники в серой области устойчивы относительно возбуждения r -мод, в белой области – неустойчивы. Штриховая кривая показывает границу области неустойчивости для наиболее неустойчивой r -моды с $m = 2$. Смотрите текст и работу [25] для дальнейших пояснений.

5 Колебания вращающихся НЗ: r -моды и сценарии подавления неустойчивости r -мод [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 11, 31, 32]

Как было показано еще в 1998 году [R131, R132], НЗ должны становиться неустойчивыми по отношению к возбуждению r -мод (тороидальных колебаний вращающейся звезды, возвращающей силой для которых является сила Кориолиса). Без учета диссипативных процессов в звезде эта неустойчивость имеет место при любой скорости вращения НЗ. Диссипация подавляет неустойчивость r -мод в большинстве НЗ. Однако, действуя в рамках стандартных предположений о свойствах сверхплотного вещества, она является недостаточной для стабилизации горячих быстровращающихся НЗ, наблюдаемых в маломассивных рентгеновских двойных системах (см., например, недавние обзоры [R133, R134]).

На рис. 8 показано “классическое” окно неустойчивости, рассчитанное с использованием минимальных предположений о свойствах сверхплотного вещества [24, 25]. Окно неустойчивости построено для наиболее неустойчивой r -моды с магнитным квантовым числом $m = 2$. По вертикальной оси отложена скорость вращения звезды, по горизонтальной – ее внутренняя температура. В области, залитой серым (под кривой), диссипация достаточно эффективна, чтобы подавлять развитие неустойчивости. Выше кривой диссипация недостаточна и звезды, находящиеся в белой области, неустойчивы относительно возбуждения r -мод. Синими кружками показаны наблюдаемые НЗ в маломассивных рентгеновских двойных системах (LMXB, от “low-mass X-ray binaries”), для которых измерена их скорость вращения и температура. Как видно из рисунка, целый ряд объектов оказывается неустойчивым относительно возбуждения r -мод. Это представляет проблему, поскольку возбуждение r -мод сопровождается гравитационным излучением и сопутствующим

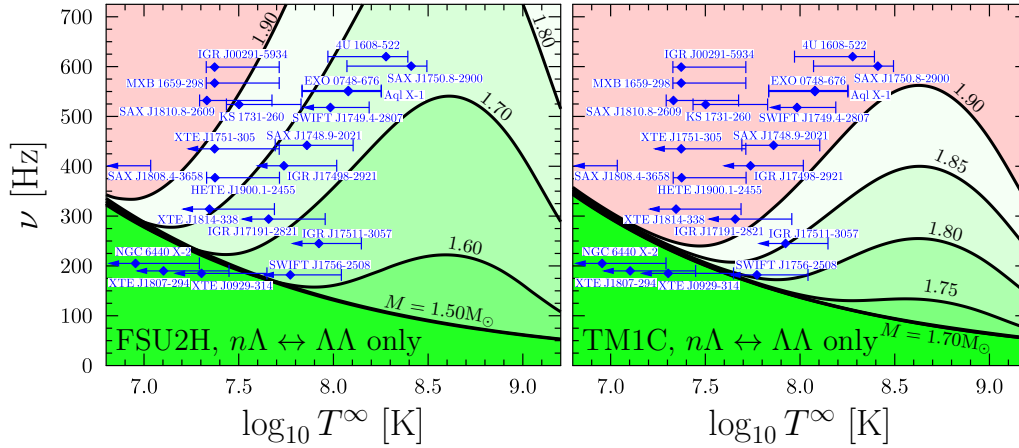


Рис. 9: Окна неустойчивости для НЗ различных масс (указаны на рисунке) и данные наблюдений [25, 11] на диаграмме $\nu - T^\infty$ для нуклон-гиперонных уравнений состояния FSU2H [R136] (левая панель) и TM1C [10] (правая панель). При построении рисунка учитывалась лишь одна гиперонная реакция $n + \Lambda \rightarrow \Lambda + \Lambda$ (предполагалось, что все остальные реакции сильно подавлены барионной сверхтекучестью).

торможением НЗ. В результате, как показывают расчеты (например, [R135], [25]), такие звезды должны быстро замедляться. Как следствие, вероятность найти НЗ в области неустойчивости пренебрежимо мала, и такие звезды не должны были наблюдаться. Но наблюдения говорят об обратном.

Возможным решением этой проблемы могло бы быть указание механизма, усиливающего диссипацию. Однако если, например, задаться задачей стабилизировать все наблюдаемые НЗ сдвиговой вязкостью, то последнюю придется увеличить в 1000 раз, что совершенно нереалистично. Можно пытаться стабилизировать горячие быстровращающиеся НЗ с помощью объемной вязкости, которая в НЗ обусловлена реакциями взаимных превращений частиц. Для простейшего состава вещества ядер НЗ (*нреμ*-вещество) объемная вязкость неэффективна при температурах, типичных для НЗ в маломассивных рентгеновских двойных системах. Однако учет гиперонов во внутренних слоях НЗ приводит в целом ряду безлептонных реакций, которые протекают быстрее реакций с участием лептонов в *нреμ* веществе и обеспечивают эффективную диссипацию за счет объемной вязкости в диапазоне температур, характерных для НЗ в LMXB. В работе [11] в предположении слабой сверхтекучести нейтральных барионов были рассчитаны темпы безлептонных реакций в нуклон-гиперонном веществе в рамках приближения одномезонного обмена. Оказалось, что учет этих процессов позволяет эффективно подавить неустойчивость r -мод в наблюдаемых НЗ.

На рис. 9 показаны окна неустойчивости, модифицированные неравновесными реакциями с участием гиперонов [11]. Две панели соответствуют двум нуклон-гиперонным уравнениям состояния, FSU2H [R136] (левая панель) и TM1C [10] (правая панель). Нижняя кривая на обеих панелях описывает границу области устойчивости относительно возбуждения r -мод в отсутствие гиперонов. Звезды над кривой неустойчивы. Другие кривые показывают границу устойчивости для более тяжелых НЗ, во внутренних слоях которых присутствуют гипероны и идут безлептонные реакции (при построении графиков учитывалась только реакция $n + \Lambda \leftrightarrow \Lambda + \Lambda$, которая, как предполага-

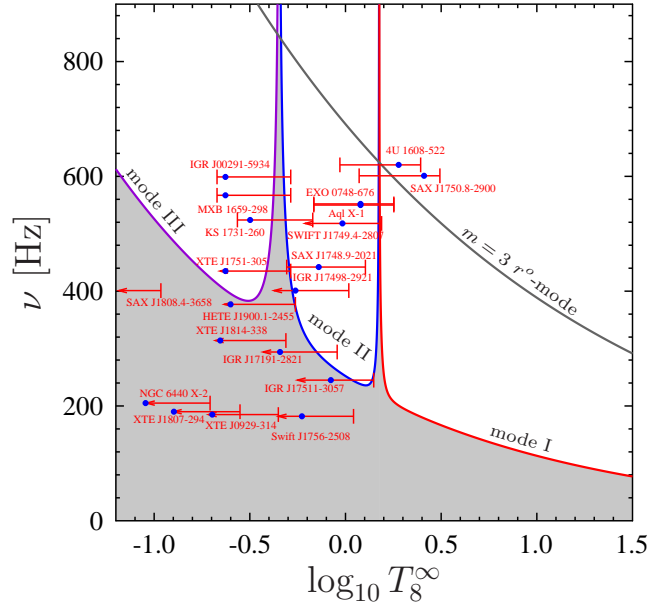


Рис. 10: Окна неустойчивости для r -моды с $m = 2$, испытывающей два антипересечения со сверхтекучими модами, которые приводят к двум пикам устойчивости на рисунке. Серая линия, помеченная $m = 3 r^o$ -mode соответствует границе области устойчивости для нормальной r -моды с $m = 3$. Остальные обозначения такие же, как на рис. 8.

лось в [11], не подавлена сверхтекучестью барионов). Как видно, уравнение состояния FSU2H [R136] позволяет стабилизировать гиперонной объемной вязкостью все наблюдаемые НЗ в LMXB в предположении, что они имеют достаточно большую массу ($\sim 1.9M_{\odot}$).

Другой, более “экономный” способ решения проблемы r -мод был предложен соискателем с соавторами в работах [24, 25]. В этих работах был развит минимальный сценарий стабилизации r -мод, не требующий экзотических предположений о свойствах сверхплотного вещества (например, наличия гиперонов). Сценарий использует свойство r -мод усиленно (резонансно) затухать когда их частоты приближаются к частотам сверхтекучих мод. Поясним подробнее, что имеется в виду.

Как было показано в главе 3, сверхтекучесть барионов в ядрах НЗ приводит к появлению дополнительных сверхтекучих мод в спектре колебаний звезды. В то время как нормальные моды практически нечувствительны к температуре звезды, собственные частоты сверхтекучих мод сильно от нее зависят. В результате нормальные и сверхтекучие моды испытывают антипересечения при определенных (резонансных) температурах [16]. Кроме того оказывается, что сверхтекучие моды сильно затухают за счет так называемого механизма взаимного трения, обусловленного рассеянием электронов на нейтронных вихрях Фейнмана-Онзагера [R137]. Вблизи антипересечений (резонансов) собственные функции сверхтекучей моды подмешиваются к собственным функциям нормальной моды, и нормальная мода также начинает эффективно затухать за счет механизма взаимного трения. Как следствие, область неустойчивости модифицируется – на ней появляются “пики стабильности”.

На рис. 10 показан пример такого модифицированного окна неустойчивости. Два пика соответствуют двум резонансам наиболее неустойчивой нор-

мальной r -моды (для которой $m = 2$) со сверхтекучими модами. В основу рисунка заложен феноменологический спектр колебательных мод, предполагающий, что резонансная температура не зависит от частоты вращения звезды. Расчеты [24, 25] показывают, что в ходе эволюции в LMXB НЗ проводит большую часть своей жизни двигаясь вдоль левой границы пика. Поэтому наблюдаемые горячие быстровращающиеся звезды согласно этому сценарию должны находиться на одном из пиков.

Сценарий резонансной стабилизации r -мод исходно был предложен как чисто феноменологический. Для того, чтобы определить положения пиков и тем самым обосновать этот сценарий [24, 25], в нескольких работах [28, 30, 31, 32] был рассчитан температурный спектр колебаний сверхтекучей вращающейся НЗ. Стоит отметить, что на спектр колебаний вращающейся сверхтекучей НЗ качественно влияют два обстоятельства: стратификация вещества и эффект увлечения между нейтронами и протонами (эффект Андреева-Башкина [R17]; глава 2). Поэтому важно учитывать оба этих эффекта, что оказалось технически сложно задачей. Поэтому сначала, в работе [28], были рассчитаны r -моды сверхтекучей НЗ в предположении, что ее ядро состоит из нейтронов, протонов, электронов и мюонов, то есть является стратифицированным (частота Брюнта-Вяйсяля не равна нулю), однако при этом пренебрегалось эффектом увлечения. Такой подход оправдан в случае, когда нейтронная сверхтекучесть и протонная сверхпроводимость локализованы в разных частях ядра НЗ. В результате было показано, что r -мода действительно испытывает антипересечения со сверхтекучими модами, а резонансные температуры попадают в область температур, наблюдаемых у НЗ в LMXB. Пики стабильности при этом вертикальны, как предполагалось в феноменологическом сценарии, описанном выше.

В последующей работе [30] были рассчитаны вращательные моды сверхтекучей НЗ с учетом эффекта увлечения. Однако при этом рассматривалось сверхтекучее ядро НЗ, состоящее из нейтронов, протонов и электронов. Как обсуждалось в главе 3, такое вещество эффективно является нестратифицированным (частота Брюнта-Вяйсяля равна нулю, g -моды отсутствуют).

Наконец, в работах [31, 32] был рассчитан спектр r -мод сверхтекучей НЗ с учетом обоих эффектов – стратификации вещества мюонами (рассмотрено *прем*-вещество) и эффекта увлечения между нейтронами и протонами. Как оказалось, учет обоих эффектов приводит к тому, что собственные решения для сверхтекучих r -мод становятся неаналитическими функциями частоты вращения. В результате стандартный метод исследования r -мод, использующий разложение по частоте вращения, становится непригодным. Поэтому для нахождения спектра r -мод в сверхтекучем веществе была разработана оригинальная теория возмущений. Для конкретных уравнений состояния и профилей критических температур были рассчитаны частоты нормальных и сверхтекучих r -мод, найдены их антипересечения и построены окна неустойчивости с учетом резонансной стабилизации.

Пример такого окна показан на рис. 11. Как видно, учет стратификации и эффекта увлечения делает пики стабильности не вертикальными, что однако не влияет на основные выводы, сделанные в [24, 25] на основе феноменологической модели спектра. То, что пики стабильности проходят по источникам в классическом окне неустойчивости, обосновывает феноменологический сце-

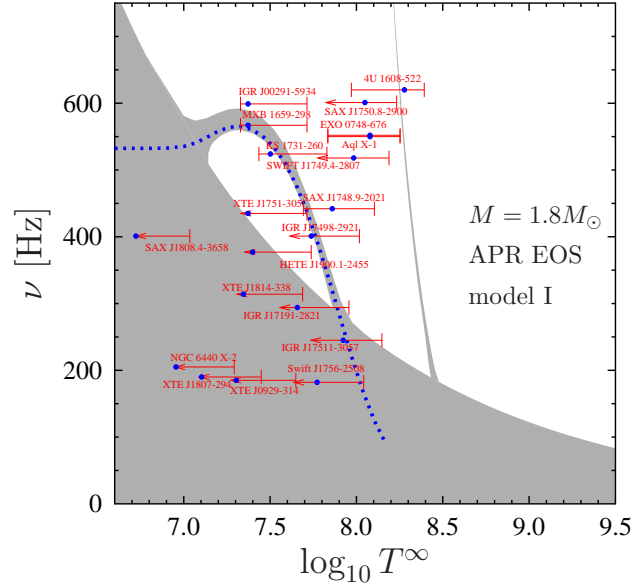


Рис. 11: Окно неустойчивости для нормальной r -моды ($m = 2$), рассчитанной для НЗ с $M = 1.8M_{\odot}$, уравнением состояния APR [R138] и модели I сверхтекучести нуклонов из работы [32]. Область, показанная серым, устойчива по отношению к возбуждению r -мод. На рисунке видны два пика стабильности, соответствующие антипересечению нормальной и сверхтекучих колебательных мод. В отличие от феноменологической модели, пики не являются прямыми, поскольку положения антипересечений зависят от частоты вращения звезды. Остальные обозначения такие же, как и на рис. 8.

нарий резонансной стабилизации r -мод и делает его количественной теорией, объясняющей наблюдения.

Как было показано в работах [29, 31, 32], полученные результаты можно использовать для исследования внутренней структуры НЗ. Из требования, чтобы каждый наблюдаемый источник находился в области стабильности, удалось наложить ограничения на профиль критической температуры нейтронов. А именно, было продемонстрировано, что для описания имеющихся наблюдательных данных в рамках сценария резонансной стабилизации r -мод, профиль критической температуры нейтронов должен быть широким (нейтроны должны быть сверхтекучими практически во всем ядре), а максимальная критическая температура нейтронов должна быть не менее 3×10^8 К. Такие профили предсказываются некоторыми современными микрофизическими моделями [R2].

Предложенный сценарий также позволил предсказать [26] существование нового класса нейтронных звезд – ХОФНАРов (английская аббревиатура HOFNAR от “Hot and Fast Non-Accreting Rotator”). Это горячие быстровращающиеся звезды, происходящие из ЛМХВ. Их маломассивный компаньон перестал заполнять полость Роша, и аккреция в системе прекратилась. Тем не менее эти звезды остаются горячими, так как находятся на одном из пиков в классическом окне неустойчивости. Моделирование показывает [24, 25], что “уйти” с пика они не могут, а вместо этого медленно эволюционируют вдоль его левого края. R -мода в таких звездах остается возбужденной до такой степени, чтобы поддерживать температуру звезды, соответствующую ее положению на пике. Стоит также отметить, что эволюция НЗ вдоль пика может сопровождаться колебаниями ее параметров [27], что в перспективе может на-

блюдаются. В работе [26] было высказано предположение, что ХОФНАРами могут являться некоторые НЗ из qLMXB (горячие НЗ в LMXB, обладающие практически чисто тепловым спектром, которые ни разу не показывали вспышечной активности). Хотя прямых доказательств этому предположению нет, ряд косвенных свидетельств говорят в пользу такой идентификации [26].

6 Ускоренная эволюция магнитного поля в ядрах нейтронных звезд [33, 34, 35, 36, 37]

Магнитные поля в НЗ изменяются в широких пределах от $10^8 - 10^9$ Гс до $10^{15} - 10^{16}$ Гс. Наибольшими полями обладают магнитары, чьи наблюдательные характеристики (например, вспышечная активность, поверхностная температура) определяются магнитным полем. Благодаря тому, что магнитары горячие, а магнитное поле имеет порядок критического поля, разрушающего сверхпроводимость, магнитары можно моделировать как несверхтекучие/несверхпроводящие НЗ.

Что нужно для моделирования квазистационарной эволюции магнитного поля в ядре нормальной (несверхпроводящей) звезды? Предположим, что конфигурация магнитного поля в звезде известна в начальный момент времени t_0 . Магнитное поле выводит звездное вещество из состояния диффузионного и бета-равновесия; в системе возмущаются химические потенциалы частиц различных сортов. Возникают токи частиц, стремящиеся вернуть систему к равновесию. В результате генерируется самосогласованное электрическое поле $\mathbf{E}(t_0)$. Знание этого поля позволяет, используя уравнение Фарадея, рассчитать магнитное поле в следующий момент времени: $\mathbf{B}(t_0 + dt) = \mathbf{B}(t_0) - c \operatorname{rot} \mathbf{E}(t_0)$ и зациклить эту процедуру. Таким образом, основной проблемой при исследовании квазистационарной эволюции магнитного поля со временем является определение самосогласованного электрического поля по заданному магнитному полю в системе.

Начиная с 1992 года (например, [R139, R140, R141, R142, R143, R144, R145, R146, R147, 46, R149, R150]) стандартным подходом при решении этой задачи было использование *предположения* о том, что вещество НЗ как целое покоится с хорошей степенью точности (то есть существуют только относительные “диффузионные” движения частиц разных сортов). Это предположение позволяло существенно упростить уравнения многокомпонентной МГД и находить самосогласованное электрическое поле в системе. Чтобы проверить законность этого предположения, соискателем с соавторами был разработан самосогласованный (без каких-либо приближений) метод расчета параметров звезды по заданному магнитному полю [33]. Этот метод был затем применен для исследования полей скоростей и электрического поля в работе [34].

На рис. 12 показан типичный вид полей скоростей в НЗ, генерируемых магнитным полем. Масса выбранной звезды равна $M = 1.4M_\odot$, внутренняя температура $T^\infty = 2 \times 10^8$ К. Рисунок показывает меридиональный срез НЗ. Слева направо показаны полоидальная компонента $\mathbf{U}_b^{(p)}$ средней барионной скорости \mathbf{U}_b , и диффузионные (относительные) скорости протонов $\mathbf{w}_p = \mathbf{u}_p - \mathbf{U}_b$ и нейтронов $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n - \mathbf{U}_b$ (\mathbf{u}_n и \mathbf{u}_p – скорости направленного движения нейтронов и протонов, соответственно). Стрелками показаны направления ско-

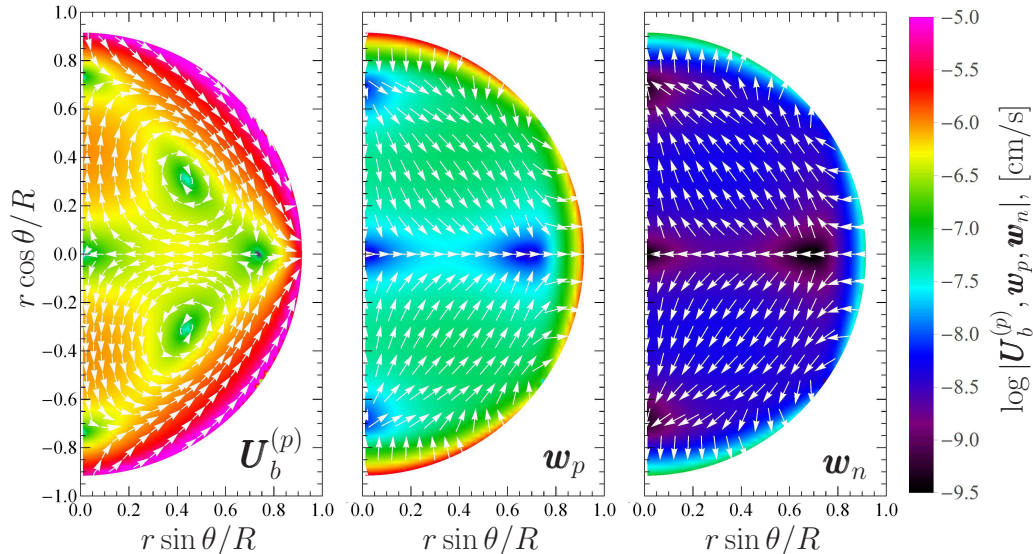


Рис. 12: Величина (показана цветом) и направление следующих скоростей в звезде (слева направо): полоидальной компоненты барионной скорости $U_b^{(p)}$, протонной диффузионной скорости w_p и нейтронной диффузионной скорости w_n . Показан меридиональный срез НЗ. Рисунок построен для внутренней температуры $T^\infty = 2 \times 10^8$ К и “минимальной” модели осесимметричного магнитного поля из работы [34] с максимальным значением магнитного поля по звезде $B_{\max} = 5 \times 10^{15}$ Гс.

ростей, а цветом – величина десятичного логарифма модуля этих скоростей. Хотя рисунок построен для определенной модели осесимметричного магнитного поля (“минимальной” модели из работы [34] с максимальным значением поля, достигающим 5×10^{15} Гс), основные обсуждаемые ниже выводы являются практически модельно-независимыми. Из рисунка видно, что в большей части звезды $U_b^{(p)} \sim 10w_p \sim 100w_n$. Иными словами, приближение неподвижной среды неправомерно, вещество как целое движется со скоростью, на порядок превосходящей относительные скорости частиц. Это означает, что основной вклад в самосогласованное электрическое поле происходит от члена $\mathbf{U}_b \times \mathbf{B}$, который оказывается на порядок большим, чем считалось ранее. Соответствующее характерное время *ускоренной* эволюции магнитного поля может быть оценено используя уравнение Фарадея как: $\tau_U = B/|\text{rot}[\mathbf{U}_b \times \mathbf{B}]|$ и составляет 300 – 5000 лет [34], что сравнимо с типичным возрастом магнитаров ($\sim 10^4$ лет). Оригинальный вывод об ускоренной эволюции магнитного поля в нормальных НЗ был недавно подтвержден в независимых расчетах двух групп [R151, R152].

Результаты, приведенные выше, были получены в предположении несверхтекучей/несверхпроводящей НЗ, что является хорошей моделью магнитара. Однако большинство НЗ являются сверхтекучими и сверхпроводящими (например, радиопульсары). Эволюция магнитного поля в них подчиняется совершенно другим уравнениям и была исследована в работах [35, 37], которые кратко обсуждены ниже.

В работе [35] была исследована диссипация магнитного поля в сверхтекучих (но несверхпроводящих НЗ). Было показано, что для *пре*-вещества НЗ основными диссипативными механизмами являются омическая диссипация и неравновесные бета-процессы, а основной механизм диссипации в нормаль-

ных НЗ – амбиполярная диффузия – полностью неэффективен. В то же время роль амбиполярной диффузии до некоторой степени восстанавливается в *прем*-веществе, в котором присутствуют мюоны.

Дополнительный учет протонной сверхпроводимости существенно влияет на постановку задачи об эволюции магнитного поля в НЗ. Дело в том, что в сверхпроводящих НЗ магнитный поток (в предположении сверхпроводника II рода) содержится в протонных вихрях (вихрях Абрикосова; глава 4). Соответственно, магнитное поле переносится вихрями и основное эволюционное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{V}_L \times \mathbf{B}), \quad (25)$$

где \mathbf{V}_L – скорость вихрей. Вихри в этой задаче ведут себя как дополнительные “частицы”, то есть могут диффундировать относительно других частиц вещества, взаимодействовать с ними, причем это взаимодействие может быть как диссипативным, так и бездиссипативным. От величины кинетических коэффициентов, описывающих взаимодействие вихрей и частиц, кардинально зависит скорость вихрей и, следовательно, скорость эволюции поля. Для этих коэффициентов в литературе были на порядки отличающиеся оценки (например, [R153, R154, R155, R144, R150]). Они были аккуратно рассчитаны соискателем в работе [36], а противоречивые результаты других авторов объяснены. Рассчитанные коэффициенты были имплементированы в МГД, описывающую совместную эволюцию частиц и вихрей, которая была сформулирована в [R128] и в работах [21, 22, 23] из главы 4. Используя получившуюся МГД, в работе [37] самосогласованный подход к эволюции магнитного поля был распространен (без предположений о неподвижности среды) на случай сверхпроводящих НЗ. Основные качественные результаты применения этого подхода и свойства получившихся решений суммированы ниже:

- Конфигурация магнитного поля в достаточно холодной сверхпроводящей НЗ не может быть произвольной и должна удовлетворять ряду условий. Например, для *прем*-вещества ядер НЗ магнитное поле должно быстро (на временах порядка времени остывания НЗ) релаксировать к конфигурации, в которой разность химических потенциалов электронов и мюонов (с учетом гравитационного красного смещения) остается постоянной вдоль магнитных силовых линий.
- Как и в случае нормальных НЗ, частицы всех сортов и вихри движутся с хорошей точностью как единое целое (приближение неподвижной среды не работает). Это приводит к ускоренной эволюции магнитного поля в ядре звезды.
- Характерное время эволюции магнитного поля в ядре НЗ оказывается порядка типичного возраста радиопульсаров, $\sim 3 \times 10^7$ лет. Как следствие, магнитное поле в ядре НЗ нельзя считать “замороженным”, как это часто делается в литературе.

7 Физика аккрецированной коры нейтронных звезд: уравнение состояния, энерговыделение и термодинамический потенциал [38, 39, 40, 41]

7.1 Формулировка проблемы; уравнение состояния полностью аккрецированной коры

Эта глава посвящена исследованию физики коры НЗ. Кора НЗ – достаточно тонкая приповерхностная область НЗ толщиной 1–2 км [R156, R157]. Различают внешнюю кору, состоящую из атомных ядер и вырожденных электронов и внутреннюю кору, в которой вдобавок появляются свободные нейтроны.

НЗ рождаются очень горячими, так что у коры есть возможность релаксировать к состоянию, близкому к полному термодинамическому равновесию. Однако в ходе последующей эволюции НЗ могут испытывать эпизоды аккреции (например, если они находятся в маломассивных рентгеновских двойных системах), в которых аккрецированное вещество постепенно замещает исходный равновесный ядерный состав. Аккрецированное вещество поджигает более глубокие слои, двигая их все глубже внутрь звезды и выводя их из состояния термодинамического равновесия. Сжимаемое вещество коры пытается вернуться в состояние термодинамического равновесия при помощи ряда ядерных реакций (бета-захваты, испускание нейтронов, пикноядерные реакции, ...), приводящих к выделению тепла – так называемая парадигма глубокого прогрева коры [R158]. Сколько тепла выделяется в процессе сжатия и как оно распределено по объему коры зависит от уравнения состояния аккрецированной коры.

Проявлением глубокого прогрева коры являются высокие наблюдаемые температуры НЗ в маломассивных рентгеновских двойных системах в спокойном состоянии (когда аккреция отсутствует; например, [R159, R160, R161, R162, R163, R164, R165, R166, R167, R168]), а также наблюдаемые периоды тепловой релаксации (остывания) НЗ после эпизодов аккреции [R169, R170, R171, R172, R173, R174, R175, R176, R177, R178]. Возможно, механизм глубокого прогрева коры играет важную роль в объяснении относительно высоких температур замедляющихся миллисекундных пульсаров (см. [45, 48] и главу 8).

Как обычно в литературе получают уравнение состояния аккрецированной коры (см. например, [R179, R180, R181, R182, R183, R184, R185, R186])? Выбирается элемент объема вблизи поверхности звезды, содержащий определенное число атомных ядер с определенным (начальным) ядерным составом. Предполагается, что этот элемент объема “привязан” к ядрам, содержащимся внутри него, то есть движется вместе с ними. По мере аккреции вновь аккрецированное вещество поджигает выбранный элемент объема, который начинает сдвигаться вглубь звезды. Давление в этом элементе объема повышается, в результате в нем инициируются ядерные реакции, изменяющие ядерный состав вещества. Этот состав определяется путем анализа допустимых реакций, приводящих к уменьшению подходящего термодинамического потенциала (например, для внешней коры это свободная энергия Гиббса).

Важно отметить, что до серии работ соискателя с соавторами [38, 39, 40, 41] во всех расчетах такого рода предполагалось, что свободные нейтроны во внутренней коре не покидают выбранный элемент объема, “привязанный” к

атомным ядрам, то есть двигаются с той же скоростью, что и ядра. Насколько законно такое предположение? В общем случае оно оказывается несостоятельным, поскольку: (i) согласно микроскопическим расчетам [R3, R72] свободные нейтроны во внутренней коре находятся в сверхтекучем состоянии и могут перераспределяться по коре со своей независимой сверхтекучей скоростью; (ii) даже если они не являются сверхтекучими (что, возможно, имеет место в непосредственной близости от границы между внешней и внутренней корой), они могут двигаться (диффундировать) независимо от ядер чтобы достигнуть диффузионного равновесия, при котором химический потенциал нейтронов с учетом гравитационного красного смещения, μ_n^∞ , становится постоянным во внутренней коре,

$$\mu_n^\infty = \text{const.} \quad (26)$$

Как продемонстрировано в [R187], это условие должно выполняться в аккрецированной коре, поскольку диффузия является очень эффективным механизмом перераспределения нейтронов. Можно показать, что в случае нейтронной сверхтекучести условие (26) также имеет место и необходимо для *гидростатического* равновесия сверхтекучих нейтронов в коре [38].

Ниже уравнение состояния аккрецированной коры, удовлетворяющее условию (26), обозначено аббревиатурой nHD (от английских слов “neutrons in the Hydrostatic/Diffusion equilibrium”). Уравнение состояния nHD было выведено для полностью аккрецированной коры в работе [38] (полностью аккрецированная кора – это кора, аккреция на которую не меняет ее уравнение состояния со временем). Вывод был проведен в рамках модели CLD сжимаемой жидкой капли (CLD – аббревиатура от английского “Compressible Liquid Drop”). Все численные результаты для модели CLD, обсуждаемые в данном разделе, получены с использованием функционала SLy4 из работы [R188]. Основные выводы работы [38] суммированы ниже:

- Любое уравнение состояния аккрецированной коры, удовлетворяющее условию (26), полностью параметризуется заданием давления P_{oi} , определяющего границу внешней и внутренней коры (там, где впервые появляются свободные нейтроны).
- Истинное уравнение состояния полностью аккрецированной коры получается (в рамках модели CLD SLy4) только для одного значения P_{oi} , при котором удаетсяшить внутреннюю кору с ядром НЗ термодинамически непротиворечивым образом.
- Уравнение состояния nHD близко к термодинамически равновесному уравнению состояния коры (catalyzed crust EOS⁴) и сильно отличается от традиционного уравнения состояния, обычно получаемого в литературе. Для иллюстрации на рис. 13 показана зависимость давления P от плотности ρ для трех уравнений состояния, рассчитанных в рамках CLD модели SLy4: уравнения состояния термодинамически равновесной коры (Catalyzed EOS; сплошная линия); традиционного уравнения состояния

⁴EOS – аббревиатура от английского “Equation Of State”.

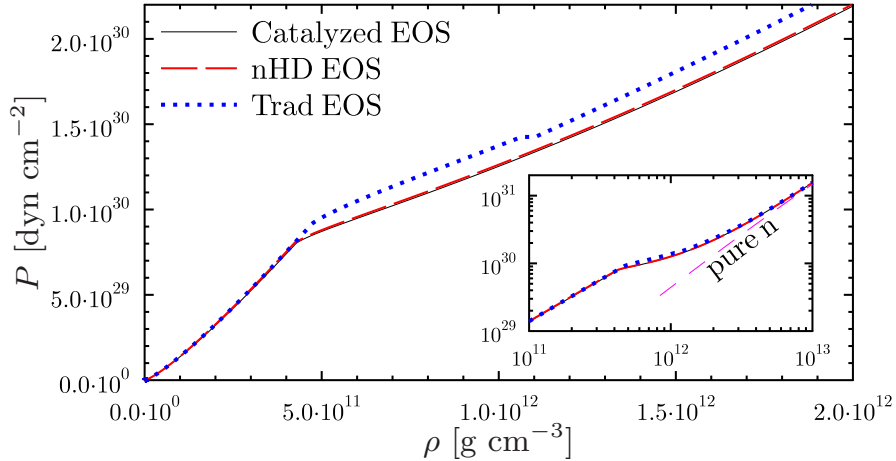


Рис. 13: Зависимость $P(\rho)$ для трех уравнений состояния коры НЗ: равновесного (Catalyzed EOS, сплошная линия), уравнения состояния, удовлетворяющего условию (26) (nHD EOS, длинные штрихи), и традиционного уравнения состояния аккрецированной коры (Trad EOS, точки). Во вставке штрихами также показано уравнения состояния нейтронной жидкости (pure n).

аккрецированной коры, полученного в пренебрежении эффектом диффузии нейтронов (Trad EOS, точки); и уравнения состояния, удовлетворяющего условию (26) (nHD EOS, длинные штрихи). Видно, что последнее уравнение состояния очень близко к термодинамически равновесному. Это неудивительно, поскольку позволив нейтронам перемещаться независимо от ядер, мы тем самым можем понизить полную энергию системы, приближая получившееся уравнение состояния к равновесному. На рис. 14 сравниваются другие параметры перечисленных выше уравнений состояния: число нуклонов в ядре A и заряд ядра Z в зависимости от давления P . Вдобавок к этим уравнениям состояния построены также два традиционных уравнения состояния из работы [R185] (штрихпунктирные линии), которые хорошо согласуются с традиционным уравнением состояния, полученным нами в рамках модели CLD SLy4 (точки). Из рис. 14 видно, что не только зависимость $P(\rho)$, но и остальные параметры уравнения состояния полностью равновесной коры и аккрецированной коры, удовлетворяющей условию (26), очень близки друг к другу в большей части внутренней коры.

- Давление P_{oi} , при котором впервые появляются свободные нейтроны для nHD EOS, близко к соответствующему давлению равновесной коры.
- На границе между аккрецированной корой и ядром звезды (или вблизи этой границы) возникает неустойчивость, при которой все атомные ядра распадаются на нейтроны. Эта неустойчивость связана с тем, что при большем давлении бета-равновесного решения не существует – подробнее об этом см. раздел 7.3. Наличие неустойчивости позволяет сохранять неизменным полное число ядер в коре несмотря на аккрецию вещества на поверхность звезды и делает уравнение состояния полностью аккрецированной коры независимым от времени [39].

Большинство приведенных выше выводов остаются справедливыми и для второй (более реалистичной) из изученных нами моделей, рассмотренной в

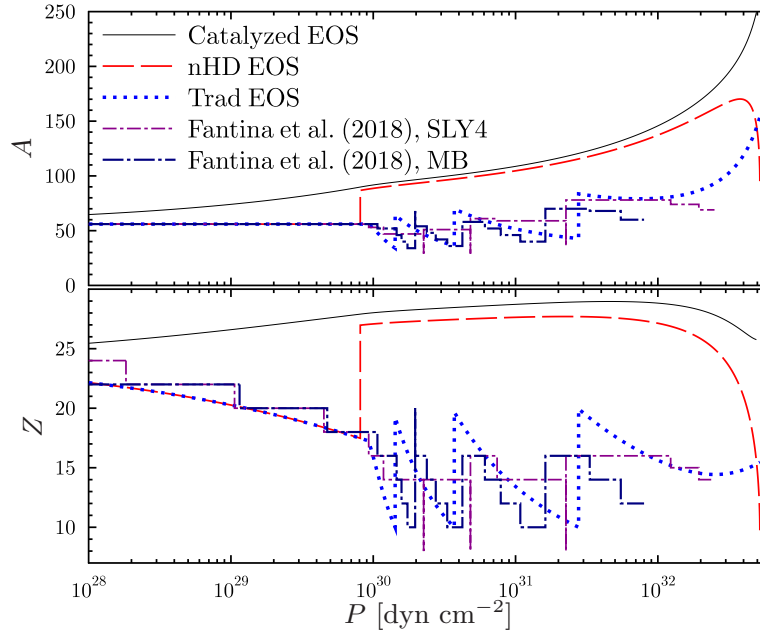


Рис. 14: Число нуклонов в атомном ядре A (верхняя панель) и заряд ядра Z (нижняя панель) в зависимости от давления P для тех же уравнений состояния, что и на рис. 13. Дополнительно приведены результаты для двух традиционных уравнений состояния SLY4 и MB (толстый и тонкий штрих-пунктир) из работы [R185]. Смотрите работу [39] для детального пояснения.

работе [39]: CLD+sh модели из работы [R189]. Это однокомпонентная модель (в том смысле, что рассматриваются только ядра одного сорта при данном давлении), в которой приближенно учтены оболочечные эффекты у атомных ядер во внутренней коре. Основное отличие этой модели от CLD модели из [38] заключается в том, что для этой модели не удастся однозначно определить давление P_{oi} ; можно лишь наложить ограничения на возможные значения этого давления. Например, для CLD+sh модели, базирующейся на функционале BSk24 [R40], ограничение на P_{oi} имеет вид: $0.92P_{nd}^{(cat)} \leq P_{oi} \leq P_{nd}^{(cat)}$. Реальное значение P_{oi} зависит от того, как формировалась полностью аккрецированная кора.

7.2 Энерговыведение в полностью аккрецированной коре

Для моделирования остывания НЗ в маломассивных рентгеновских двойных системах недостаточно знать уравнение состояния аккрецированной коры. Необходимо еще понимать, какое тепло выделяется в коре за счет ядерных реакций в ходе аккреции на НЗ со звезды-компаньона. Этому вопросу посвящена работа [39]. В этой работе была выведена формула для энерговыведения на один аккрецированный нуклон (верна как для традиционного подхода, так и для nHD EOS):

$$Q^\infty = \bar{m}_{b,ash} e^{\nu_s/2} - \mu_{b,core}^\infty, \quad (27)$$

где $\bar{m}_{b,ash}$ – средняя масса бариона в ядерном веществе вблизи поверхности НЗ (начальный ядерный состав или зола из тяжелых элементов); $e^{\nu_s/2}$ – красное смещение на поверхности звезды; $\mu_{b,core}^\infty$ – химический потенциал барионов в

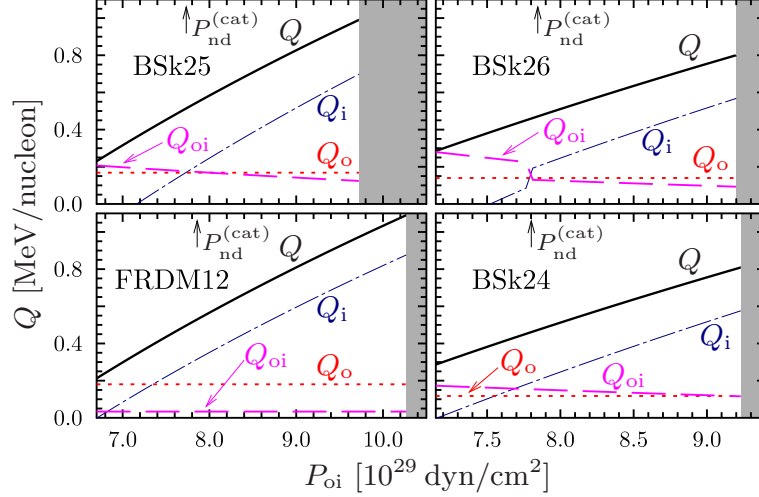


Рис. 15: Энерговыделение Q (сплошные линии), Q_o (точки), Q_{oi} (штрихи) и Q_i (штрих-пунктир) в зависимости от P_{oi} для ряда ядерных моделей. BSk24, BSk25, BSk26: расчеты в рамках теории Хартри-Фока-Боголюбова [R190]; FRDM12: макроскопическая каплевая модель конечного радиуса действия [R191]. Вертикальные стрелки показывают давление $P_{nd}^{(cat)}$, при котором в равновесной коре впервые появляются свободные нейтроны. Для каждой модели серым показана область давлений, при которых в коре аккрецированной НЗ, рассчитанной в рамках традиционного подхода, существуют свободные нейтроны.

ядре НЗ с учетом гравитационного красного смещения. Эта формула может быть преобразована к виду [39], верному лишь для nHD-коры:

$$Q^\infty = e^{\nu_{oi}/2} \left[\bar{m}_{b,ash} \exp \left(\int_0^{P_{oi}} \frac{dP}{P + \epsilon} \right) - m_n \right], \quad (28)$$

где $e^{\nu_{oi}/2}$ – красное смещение на границе внешней и внутренней коры. В формуле (28) интегрирование ведется по внешней коре НЗ вплоть до давления $P = P_{oi}$, при котором появляются свободные нейтроны. Определив P_{oi} и зная уравнение состояния во внешней коре (которое находится в рамках традиционного подхода и достаточно хорошо известно), мы можем определить энерговыделение во всей коре. В качестве примера на рис. 15 представлено энерговыделение в разных областях коры аккрецирующей НЗ в зависимости от давления P_{oi} для четырех уравнений состояния внешней коры, базирующихся на ядерных моделях BSk24, BSk25, BSk26 и FRDM12 (см. работу [39] для более детального объяснения). Показана как зависимость полного энерговыделения Q в коре (сплошные линии), так и энерговыделение во внутренней коре, Q_i (штрих-пунктир), во внешней коре, Q_o (точки), и на границе внешней и внутренней коры, Q_{oi} (штрихи). Принимая, например, что для модели CLD+sh, основанной на функционале BSk24, давление P_{oi} ограничено в интервале $0.92P_{nd}^{(cat)} \leq P_{oi} \leq P_{nd}^{(cat)}$ [39], из рис. 15 получаем суммарное энерговыделение $(0.29 - 0.46)$ МэВ/нуклон, что в 2 – 5 раз меньше, чем предсказывалось в рамках традиционного подхода [R182, R185].

7.3 Термодинамический потенциал для внутренней коры

Обычно в традиционном подходе [R179, R180, R181, R182, R183, R185, R186] для нахождения уравнения состояния аккрецированной коры минимизировалась свободная энергия Гиббса, а условие гидростатического/диффузионного равновесия (26) игнорировалось. Возникает вопрос, какой термодинамический потенциал необходимо минимизировать чтобы учесть это условие? Ответ на него получен в работе [40] и ниже мы переходим к краткому обсуждению результатов этой работы.

В [40] показано, что если есть смесь атомных ядер разных сортов во внутренней коре в некотором (начальном) объеме V , то реакции в нем (при фиксированном давлении и химическом потенциале нейтронов) протекают таким образом, что при этом уменьшается новый термодинамический потенциал

$$\Psi = E + PV - \mu_n N_b, \quad (29)$$

где E – энергия вещества в объеме V ; N_b число барионов в этом объеме. Если число атомных ядер в реакциях сохраняется, то поиск минимально возможного Ψ эквивалентен минимизации:

$$\psi = \frac{\varepsilon + P - \mu_n n_b}{n_N}, \quad (30)$$

где n_N – концентрация атомных ядер. Минимизация потенциала Ψ является универсальным способом нахождения уравнения состояния во внутренней коре НЗ. Такой способ особенно удобен для смесей атомных ядер. Можно показать [40], что при известном потенциале Ψ *распределение* тепла, выделяющегося в полностью аккрецированной коре, дается формулой:

$$\delta Q^\infty(P) = -\frac{d\Psi^\infty}{dP} dP, \quad (31)$$

где $\delta Q^\infty(P)$ – количество тепла (с учетом гравитационного красного смещения), выделяющегося в интервале давлений от P до $P + dP$ и связанного с изменением потенциала $d\Psi^\infty$ (также взятого с учетом гравитационного красного смещения). Эта формула является чрезвычайно полезной, поскольку позволяет связать уравнение состояния полностью аккрецированной коры с распределением тепла, выделяющегося в ходе аккреции на звезду. В частности, используя (31) можно вывести формулу (27) для полного энерговыделения в коре, полученную в [39] из совершенно других соображений (из термодинамического рассмотрения).

Наконец, используя понятие о потенциале Ψ , легко объяснить природу неустойчивости на границе кора-ядро (или вблизи нее), перерабатывающей атомные ядра в нейтроны и позволяющей полностью аккрецированной коре оставаться неизменной с течением времени (раздел 7.1). Для примера проведем рассмотрение в модели сжимаемой жидкой капли (CLD-модель). Можно показать, что Ψ является функцией только P , μ_n и Z , $\Psi = \Psi(P, \mu_n, Z)$, причем задание граничного давления P_{oi} полностью фиксирует μ_n как функцию P . Это означает, что истинное установившееся состояние вещества при данном давлении P находится минимизацией Ψ по Z при фиксированных P и μ_n .

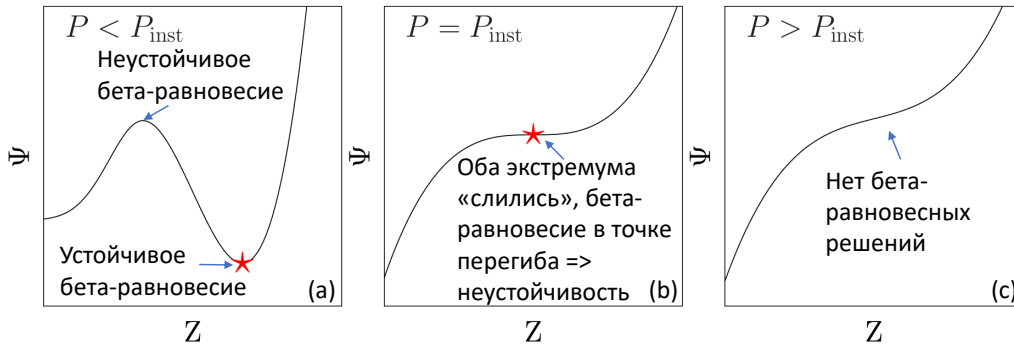


Рис. 16: Качественное поведение термодинамического потенциала Ψ как функции заряда ядра Z при фиксированных P и μ_n . Панель (a): $P < P_{\text{inst}}$, панель (b): $P = P_{\text{inst}}$, панель (c): $P > P_{\text{inst}}$.

Пусть неустойчивость возникает при давлении $P = P_{\text{inst}}$. Тогда при $P < P_{\text{inst}}$ минимум $\Psi(Z)$ определится требованием

$$\frac{\partial \Psi(P, \mu_n, Z)}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi(P, \mu_n, Z)}{\partial Z^2} > 0 \quad (32)$$

и соответствует устойчивому состоянию бета-равновесия. Типичная качественная картина поведения Ψ как функции Z при $P < P_{\text{inst}}$ показана на рис. 16(a); звездочка отмечает истинное решение. Видно, что помимо минимума, при $P < P_{\text{inst}}$ всегда существует и максимум функции Ψ при меньших Z (неустойчивое бета-равновесие). При $P = P_{\text{inst}}$ максимум и минимум Ψ сливаются, наступает неустойчивость, в которой

$$\frac{\partial \Psi(P, \mu_n, Z)}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi(P, \mu_n, Z)}{\partial Z^2} = 0. \quad (33)$$

Эта ситуация показана на рис. 16(b); последнее устойчивое решение соответствует точке перегиба. Наконец, при $P > P_{\text{inst}}$ функция Ψ уже не имеет минимума, бета-равновесных решений не существует, а ядра полностью распадаются на нейтроны [см. рис. 16(c)]. Более детальное, но менее наглядное рассмотрение этой неустойчивости содержится в работе [39].

8 Эффекты и процессы [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48]

8.1 Введение

В этой главе собраны работы, не вошедшие в предыдущие части и не объединенные единой идеей. Большая часть из них ниже отмечена лишь вскользь. Более подробно рассмотрены работы [45, 43] (и связанные с ними [48, 44]), результаты которых вошли в положения на защиту.

Итак, в работе [42] был изучен процесс распада плазмона $\gamma \rightarrow \nu + \bar{\nu}$. Процесс рассчитан в широком диапазоне температур и плотностей и аппроксимирован аналитическими формулами. Результаты доступны в виде таблиц в открытом доступе по адресу: <http://www.ioffe.ru/astro/NSG/plasmon/table.dat>. Эти расчеты часто используются при моделировании остывания белых карликов и НЗ и повторены в работе [R192].

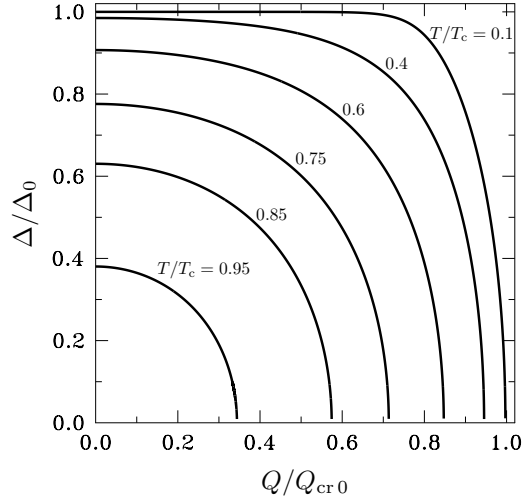


Рис. 17: Сверхтекучая энергетическая щель (в единицах Δ_0) в зависимости от $Q = m\Delta V$ (в единицах Q_{cr}) для ряда температур $T/T_c = 0.1, 0.4, 0.6, 0.75, 0.85$ и 0.95 . Смотрите текст для дальнейших пояснений.

В работе [46] рассмотрен эффект плавучести протонных и нейтронных вихрей в НЗ. Показано, что общепринятое выражение для силы плавучести не верно и должно быть модифицировано. Предложено правильное выражение как для нейтронных, так и для протонных вихрей. Выяснена связь между полученными выражениями для силы плавучести и соответствующими членами в гидродинамике Бекаревича-Халатникова [R124] и ее различными обобщениями.

В работе [47] вычислена объемная вязкость в двух фазах несферических ядер в мантии колеблющейся НЗ. Объемная вязкость возникает из-за неравновесных прямых урка-реакций, которые оказываются не полностью запрещенными благодаря тому, что нейтроны и протоны в мантии двигаются в периодическом потенциале решетки, созданной несферическими ядрами, которая может поглощать избыток импульса частиц. Показано, что полученная объемная вязкость может, при определенных условиях, превосходить объемную вязкость за счет модифицированного урка-процесса во внешнем ядре НЗ, а также превышать сдвиговую вязкость.

8.2 Динамически изменяющаяся нуклонная щель и ее влияние на динамику нейтронных звезд

Как известно [R193], энергия нуклонных возбуждений с импульсом p в сверхтекучем веществе задается формулой $E_p = \sqrt{v_F^2(p - p_F)^2 + \Delta^2}$, где v_F – скорость Ферми, Δ – энергетическая щель, которая является функцией температуры и изменяется от 0 при $T = T_c$ до Δ_0 при $T = 0$ (T_c – критическая температура). Однако если в системе существует ток сверхтекучей компоненты вещества относительно нормальной компоненты, то щель начинает зависеть от разности ΔV между скоростями этих компонент [R194]. Это проиллюстрировано на рис. 17, где представлена зависимость щели (в единицах Δ_0) от $Q = m\Delta V$ в единицах $Q_{cr} = m\Delta V_{cr}$, где $\Delta V_{cr} = (e/2)(\Delta_0/p_F) \sim 10^7$ см сек $^{-1}$ и m – масса частицы. Влияние этого эффекта на динамику НЗ до недавнего времени полностью игнорировалось. Между тем, как показано в [43], предло-

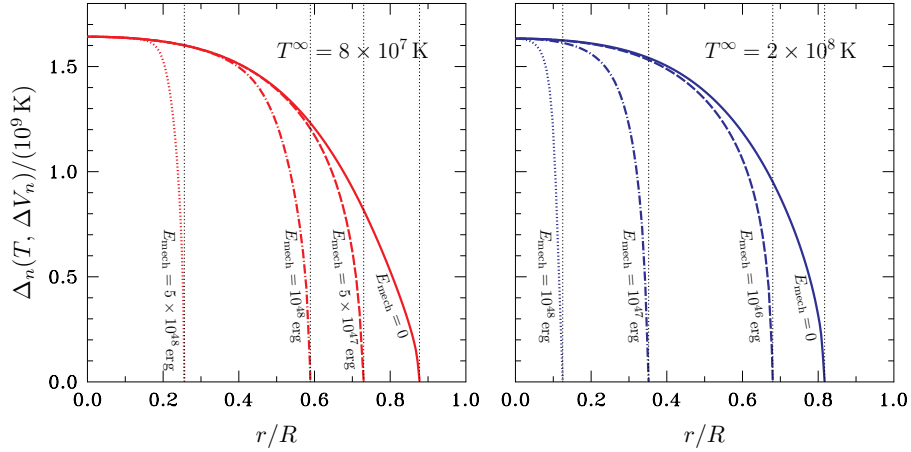


Рис. 18: Нейтронная сверхтекучая щель $\Delta_n(T, \Delta V_n)$ (в единицах 10^9 K) как функция r/R для двух звездных температур $T^\infty = 8 \times 10^7$ K (левая панель) и $T^\infty = 2 \times 10^8$ K (правая панель) и для нескольких энергий колебаний E_{mech} (приведены на рисунке). Вертикальная точечная линия показывает значение r , при котором исчезает нейтронная сверхтекучесть ($\Delta_n = 0$).

женный эффект может быть важен для ряда аспектов физики НЗ, включая колебания и кинетику вещества.

- Колебания НЗ

Зависимость щели от гидродинамических скоростей делает уравнения, описывающие колебания НЗ, нелинейными при гораздо более низких амплитудах колебаний, чем это обычно предполагается (обычно при рассмотрении колебаний используются линеаризованные уравнения гидродинамики, причем подразумевается, что щель зависит лишь от плотности вещества).

Для иллюстрации, на рис. 18 приведена нейтронная щель $\Delta_n(T, \Delta V_n)$ (ΔV_n – разность между нейтронной сверхтекучей скоростью и скоростью нормальных возбуждений) в зависимости от расстояния до центра звезды r (в единицах радиуса НЗ R). Рисунок построен для первой радиальной моды колебаний сверхтекучей НЗ (см. [43] для более подробного описания). Используемая модель сверхтекучести описана в [43]. Кривые на рисунке приведены для двух температур, $T = 8 \times 10^7$ K и $T = 2 \times 10^8$ K и для колебаний с разной механической энергией E_{mech} (подписана возле каждой кривой), то есть с разной амплитудой колебаний. Вертикальные точечные кривые показывают значения r , при которых сверхтекучесть в ходе колебаний исчезает (щель зануляется, ΔV_n слишком большое). Чем больше E_{mech} , тем меньше размер сверхтекучей области. Как видно, щель очень чувствительна к величине E_{mech} .

- Кинетика вещества

Коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости, определяющие диссипацию колебаний, существенно зависят от величины щели. Тем самым ее изменение в ходе колебаний влияет на эти коэффициенты.

Рассмотрение в [43] выполнено без учета ферми-жидкостных эффектов, связанных со взаимодействием барионов разных сортов. Возможная роль

этих эффектов обсуждалась лишь качественно. В частности, было предсказано, что учет ферми-жидкостных эффектов может приводить к тому, что, например, щель протонов будет зависеть от относительных скоростей сверхтекучих нейтронов и нормальной компоненты. Количественно влияние ферми-жидкостных эффектов рассмотрено Леинсоном [R24], который, в частности, подтвердил основные выводы [43]. Эффект зависимости щели от разности сверхтекучей и нормальной скоростей был применен при анализе колебаний в магнитарах [R195] и использован для объяснения антиглитчей в магнитарах в работе [44].

8.3 Новый механизм нагрева миллисекундных пульсаров

По существующим представлениям миллисекундные пульсары (МСП) образуются из НЗ, раскручиваемых аккрецией в маломассивных рентгеновских двойных системах. Кора нейтронных звезд в маломассивных рентгеновских двойных системах состоит из аккрецированного вещества, то есть МСП должны обладать аккрецированной корой. Важное (для нас) отличие аккрецированной коры от коры с равновесным ядерным составом (как в изолированных НЗ) заключается в том, что даже при малом поджатии такой коры на фазовых переходах между веществом с различным ядерным составом происходят экзотермические ядерные реакции, то есть выделяется тепло. Для сравнения, чтобы инициировать ядерные реакции в “равновесной” коре НЗ надо заметно изменить плотность вблизи фазовых переходов [на величину $\sim (1 - 10)\%$].

Другой важной особенностью МСП (помимо наличия аккрецированной коры) является то, что МСП – быстро вращающиеся НЗ. Соответственно, их форма заметно искажена центробежной силой.

Эти два свойства МСП приводят к механизму нагрева, рассмотренному в [45]. Основная идея заключается в следующем. С течением времени МСП постепенно замедляется из-за магнито-дипольных потерь, что приводит к уменьшению центробежной силы, действующей на звезду. Как следствие, давление в каждом данном элементе объема вещества звезды повышается и на границах в коре между веществом с различным ядерным составом индуцируются ядерные реакции с выделением тепла. В результате МСП греется. Как эффективно происходит нагрев? Этот вопрос был исследован в работе [45] на примере однокомпонентной модели [R182]. Было показано, что предложенный механизм нагрева МСП является одним из ведущих механизмов и должен приниматься во внимание при интерпретации наблюдений. Для иллюстрации, на рис. 19 представлен темп нагрева МСП в зависимости от массы НЗ для шести уравнений состояния: трех из семейства BSk (BSk19, BSk20, BSk21, см. [R196]) и трех из семейства PAL (PAL I, PAL II, PAL III, см. [R197]). Рисунок построен для частоты вращения звезды $\nu = 100$ Гц, и типичного темпа замедления МСП $\dot{\Omega} = -10^{-14}$ сек $^{-2}$. Сплошными кривыми показаны результаты для модели звезды, рассчитанной в приближении медленного вращения (метод Хартля [R198]), треугольниками показан расчет с помощью общедоступного кода RNS (<http://www.gravity.phys.uwm.edu/rns/>) без использования каких-либо приближений. Наконец, штрихами показаны

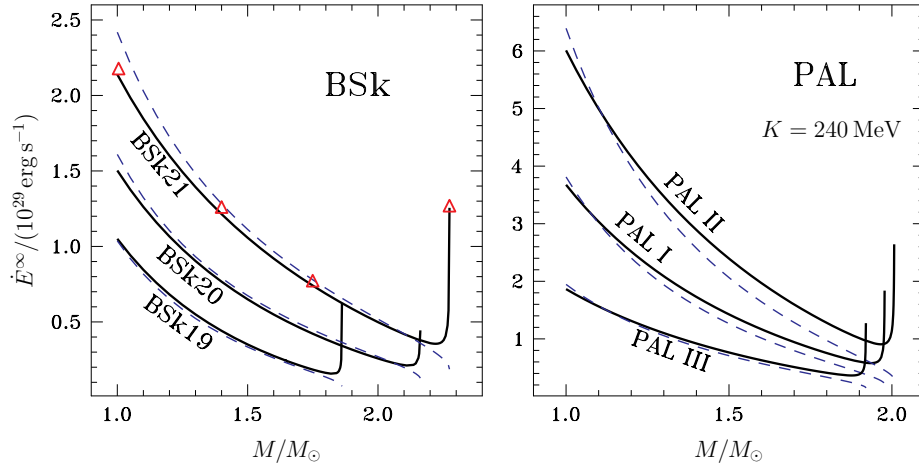


Рис. 19: Темп нагрева коры в единицах 10^{29} эрг сек $^{-1}$ как функция массы НЗ для трех уравнений состояния семейства BSk [R196] (левая панель) и PAL [R197] (правая панель). Толстыми сплошными линиями показаны расчеты в приближении медленного вращения НЗ. Тонкими штрихами показан расчет по приближенной формуле (34) с $a = 0.5$. Треугольниками показан точный расчет \dot{E}^∞ для уравнения состояния BSk21 без использования приближения медленного вращения. Все кривые рассчитаны для частоты $\nu = 100$ Гц и $\dot{\Omega} = -10^{-14}$ сек $^{-2}$.

результаты расчета по приближенной аналитической формуле,

$$\dot{E} \approx -7 \times 10^{28} a \frac{R_6^7}{M_{1.4}^2} \Omega_3 \dot{\Omega}_{-14} \sum_i \frac{P_i}{10^{31} \text{ эрг см}^{-3}} \frac{q_i}{1 \text{ МэВ}} \text{ эрг сек}^{-1}, \quad (34)$$

которая, как видно, качественно верно описывает энерговыделение для не слишком массивных НЗ. В этой формуле параметр a равен: $a = 0.5$; $R_6 = R/(10^6 \text{ см})$, $M_{1.4} = M/(1.4M_\odot)$; $\Omega_3 = \Omega/(10^3 \text{ сек}^{-1})$ – частота вращения НЗ; $\dot{\Omega}_{-14} = \dot{\Omega}/(10^{-14} \text{ сек}^{-2})$; P_i – давление на i -ом фазовом переходе; q_i энерговыделение на i -ом фазовом переходе (в МэВ/нуклон).

Из формулы (34) видно, что соответствующий темп нагрева очень чувствителен к радиусу НЗ ($\sim R^7/M^2$), а следовательно и к уравнению состояния сверхплотного вещества, что и подтверждается рис. 19.

На рис. 20 для тех же уравнений состояния и для параметров PSR J0437-4715 (ближайшего и наиболее полно изученного МСП) рассчитана поверхностная температура T_{eff}^∞ как функция радиуса НЗ R_∞ (видимого удаленным наблюдателем). При построении рисунка принимался во внимание только нагрев МСП за счет неравновесных ядерных реакций в коре. Учитывая, что согласно новым данным (см. [48] и ссылки там) температура этого источника составляет $T_{\text{eff}}^\infty \sim (1 - 1.5) \times 10^5$ К, можно сказать, что глубокий прогрев коры хоть и не способен один (без привлечения других механизмов) объяснить этот источник, но дает температуры, достаточно близкие к требуемым.

Важно отметить, что предложенный механизм нагрева МСП не зависит от модели сверхтекучести нуклонов во внутренних слоях НЗ (в отличие от других механизмов нагрева [R200, R201], рассмотренных в литературе) и, следовательно, является гораздо менее модельно-зависимым. Стоит, однако,

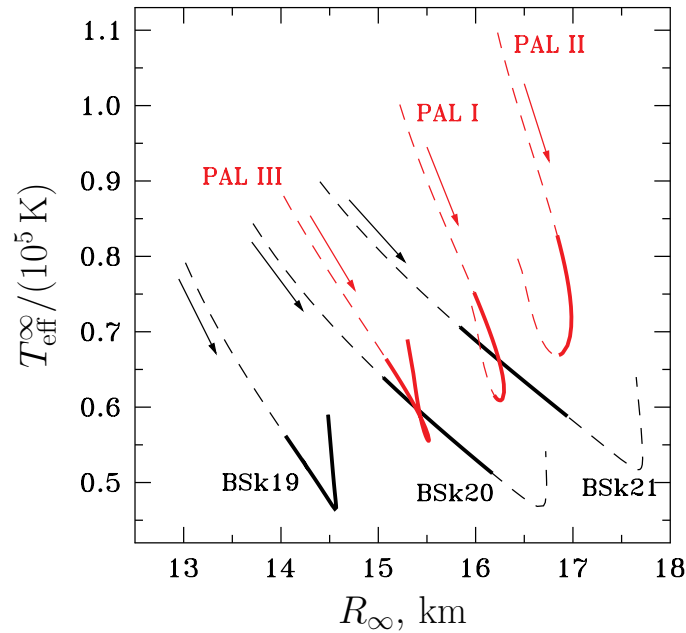


Рис. 20: Эффективная температура звезды T_{eff}^{∞} (в единицах 10^5 K) в зависимости от “видимого” радиуса звезды R_{∞} для шести уравнений состояния (см. рис. 19) с ν и $\dot{\Omega}$ взятыми как у PSR J0437-4715. Тонкими штрихами показаны массы $M_{\odot} < M < M_{\text{max}}$ для каждого уравнения состояния; сплошные толстые линии соответствуют области допустимых масс для PSR J0437-4715 [R199] (уровень значимости 68%). Стрелками показаны направления возрастания массы.

подчеркнуть, что рассмотрение в [45] базировалось на традиционной модели глубокого прогрева коры из работы [R182] и должно быть пересмотрено с учетом результатов главы 7. Предварительные оценки указывают на то, что для более реалистичной модели полностью аккрецированной коры суммарный темп нагрева МСП может быть выше.

Развитию другого возможного механизма нагрева МСП, высказанного в [R201, R202], посвящена работа [48]. Ротохимический нагрев МСП, предложенный в [R201], использует тот факт, что при замедлении НЗ, вещество в ее ядре отклоняется от состояния бета-равновесия, в результате чего инициируются неравновесные реакции превращения частиц (прямой и модифицированный урка-процессы), что приводит к нагреву звезды. В работе [48] была дополнительно выяснена роль двух эффектов на тепловую эволюцию МСП: (i) звездного магнитного поля и (ii) пребывания будущего МСП на стадии аккрецирующей НЗ в маломассивной рентгеновской двойной системе. Показано, что благодаря этим двум эффектам высокие температуры МСП ($\sim 10^5$ K) могут поддерживаться на протяжении более миллиарда лет после прекращения аккреции независимо от частоты вращения и скорости замедления пульсара. В частности, с учетом этих эффектов можно объяснить и наблюдения PSR J0437-4715.

Положения, выносимые на защиту:

- Построение формализма для расчета и анализ спектра колебаний сверхтекучих нейтронных звезд (НЗ) и их затухания с учетом эффектов конечных температур в рамках общей теории относительности [16, 10, 17, 20, 28, 30].

Пояснение: В это положение входят следующие конкретные результаты. Вывод о слабой связи систем уравнений, описывающих сверхтекучие и нормальные моды колебаний в сверхтекучих НЗ. Разработка приближенного подхода для систематических расчетов частот и характерных времен затухания колебаний НЗ в рамках ОТО. Вывод о сильной температурной зависимости спектров колебаний сверхтекучих НЗ. Вывод о существовании антипересечений (резонансов) между сверхтекучими и нормальными модами в зависящих от температуры спектрах пульсирующих НЗ. Детальное исследование характерных времен затухания сверхтекучих и нормальных мод в релятивистских НЗ. Вывод об усиленной диссипации нормальных мод колебаний вблизи резонансов.

- Предсказание и обнаружение в расчетах тепловых и композиционных g -мод в спектре колебаний сверхтекучих НЗ [18, 19, 20].
- Вывод о диффузии как лидирующем механизме диссипации в сверхпроводящих НЗ [12].
- Формулировка релятивистской диссипативной магнитной гидродинамики, описывающей динамические явления в сверхтекучих/сверхпроводящих смесях при конечных температурах, в которых существуют вихри Фейнмана-Онзагера и Абрикосова. Самосогласованный расчет кинетических коэффициентов, отвечающих за взаимодействие лептонов (электронов и мюонов) в сверхтекучем и сверхпроводящем веществе НЗ с вихрями Абрикосова [3, 21, 46, 22, 23, 36].
- Формулировка и разработка минимального сценария резонансной стабилизации r -мод, объясняющего существование быстровращающихся НЗ в LMXB. Предложение метода исследования свойств сверхплотного вещества НЗ, основанного на сравнении предсказаний теории резонансной стабилизации r -мод с данными наблюдений. Ограничения на параметры нейтронной сверхтекучести из сравнения предложенной теории резонансной стабилизации r -мод с данными наблюдений [24, 25, 27, 31, 32].
- Вывод о возможности эффективной стабилизации r -мод в массивных теплых НЗ ($T \sim 10^8$ К) при помощи объемной вязкости, генерируемой неравновесными процессами в нуклон-гиперонном веществе внутренних слоев НЗ, в особенности процессами с участием нейтральных барионов [11].
- Предложение метода расчета скоростей частиц, возмущений химических потенциалов и электрического самосогласованного поля во внутренних слоях НЗ по заданному квазистационарному магнитному полю звезды. Вывод о генерации магнитным полем крупномасштабных потоков вещества в ядрах НЗ, которые могут двигаться со скоростями значительно

(на порядок) превышающими относительные (диффузионные) скорости частиц. Предложение механизма ускоренной эволюции магнитного поля в ядрах НЗ, связанного с движением вещества как целого [33, 35, 34, 37].

- Разработка теории полностью аккрецированной коры НЗ, в которой выполняется условие нейтронного гидростатического и диффузионного равновесия [38, 39, 40, 41].

Пояснение: В это положение входят следующие конкретные результаты. Теоретический вывод уравнения состояния, описывающего аккрецированную кору НЗ, в которой выполняется условие нейтронного гидростатического и диффузионного равновесия. Вывод о том, что уравнение состояния в такой коре параметризуется давлением на границе внешней и внутренней коры. Расчеты уравнения состояния внутренней аккрецированной коры в рамках моделей сжимаемой жидкой капли и сжимаемой жидкой капли с оболочечными эффектами. Вывод о сильном отличии полученного уравнения состояния от традиционного уравнения состояния аккрецированной коры и его близости к уравнению состояния термодинамически равновесной коры. Обнаружение неустойчивости вблизи границы кора-ядро, в ходе которой атомные ядра становятся неустойчивыми относительно распада на нейтроны. Объяснение физического смысла неустойчивости и ее универсального характера в рамках модели сжимаемой жидкой капли. Вывод формулы, описывающей в плоскопараллельном приближении энерговыделение в полностью аккрецированной коре для произвольного состава золы. Введение в теорию термодинамического потенциала, который необходимо минимизировать для нахождения уравнения состояния аккрецированной коры (с произвольно сложным составом коры). Связь термодинамического потенциала с распределением тепла, выделяемого в полностью аккрецированной коре.

- Вывод о важности эффекта динамически изменяющейся сверхтекучей нуклонной щели для динамики нейтронных звезд [43].
- Предложение механизма нагрева миллисекундных пульсаров с аккрецированной корой и детальные расчеты соответствующего темпа нагрева в рамках традиционной модели аккрецированной коры [45].

Список публикаций

- [1] Gusakov M. E., Andersson N. Temperature-dependent pulsations of superfluid neutron stars // Mon. Not. R. Astron. Soc.. — 2006. — Nov. — Vol. 372, no. 4. — P. 1776–1790. — astro-ph/0602282.
- [2] Gusakov M. E. Bulk viscosity of superfluid neutron stars // Phys. Rev. D . — 2007. — Vol. 76, no. 8. — P. 083001. — 0704.1071.
- [3] Gusakov M. E. Relativistic formulation of the Hall-Vinen-Bekarevich-Khalatnikov superfluid hydrodynamics // Phys. Rev. D . — 2016. — Mar. — Vol. 93, no. 6. — P. 064033. — 1601.07732.
- [4] Gusakov M. E., Haensel P. The entrainment matrix of a superfluid neutron proton mixture at a finite temperature // Nuclear Physics A. — 2005. — Nov. — Vol. 761. — P. 333–348. — astro-ph/0508104.

- [5] Gusakov M. E. Transport equations and linear response of superfluid Fermi mixtures in neutron stars // *Phys. Rev. C* .— 2010. — Feb. — Vol. 81, no. 2. — P. 025804. — 1001.4452.
- [6] Gusakov M. E., Kantor E. M., Haensel P. Relativistic entrainment matrix of a superfluid nucleon-hyperon mixture: The zero temperature limit // *Phys. Rev. C* .— 2009. — May. — Vol. 79, no. 5. — P. 055806. — 0904.3467.
- [7] Gusakov M. E., Kantor E. M., Haensel P. Relativistic entrainment matrix of a superfluid nucleon-hyperon mixture. II. Effect of finite temperatures // *Phys. Rev. C* .— 2009. — July. — Vol. 80, no. 1. — P. 015803. — 0907.0010.
- [8] Gusakov M. E., Kantor E. M. Bulk viscosity of superfluid hyperon stars // *Phys. Rev. D* .— 2008. — Vol. 78, no. 8. — P. 083006. — 0806.4914.
- [9] Kantor E. M., Gusakov M. E. Damping of sound waves in superfluid nucleon-hyperon matter of neutron stars // *Phys. Rev. D* .— 2009. — Feb. — Vol. 79, no. 4. — P. 043004. — 0901.4108.
- [10] Gusakov M. E., Haensel P., Kantor E. M. Physics input for modelling superfluid neutron stars with hyperon cores // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*.— 2014. — Mar. — Vol. 439, no. 1. — P. 318–333. — 1401.2827.
- [11] Bulk viscosity in neutron stars with hyperon cores / Ofengeim D. D., Gusakov M. E., Haensel P., and Fortin M. // *Phys. Rev. D* .— 2019. — Nov. — Vol. 100, no. 10. — P. 103017. — 1911.08407.
- [12] Kraav K. Y., Gusakov M. E., Kantor E. M. Diffusion as a leading dissipative mechanism in superconducting neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*.— 2021. — Sep. — Vol. 506, no. 1. — P. L74–L78. — 2105.08121.
- [13] Kantor E. M., Gusakov M. E. Temperature effects in pulsating superfluid neutron stars // *Phys. Rev. D* .— 2011. — May. — Vol. 83, no. 10. — P. 103008. — 1105.4040.
- [14] Chugunov A. I., Gusakov M. E. Non-radial superfluid modes in oscillating neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*.— 2011. — Nov. — Vol. 418, no. 1. — P. L54–L58. — 1107.4242.
- [15] Gusakov M. E., Kantor E. M. Decoupling of superfluid and normal modes in pulsating neutron stars // *Phys. Rev. D* .— 2011. — Apr. — Vol. 83, no. 8. — P. 081304. — 1007.2752.
- [16] Dissipation in relativistic superfluid neutron stars / Gusakov M. E., Kantor E. M., Chugunov A. I., and Gualtieri L. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*.— 2013. — Jan. — Vol. 428, no. 2. — P. 1518–1536. — 1211.2452.
- [17] Quasinormal modes of superfluid neutron stars / Gualtieri L., Kantor E. M., Gusakov M. E., and Chugunov A. I. // *Phys. Rev. D* .— 2014. — July. — Vol. 90, no. 2. — P. 024010. — 1404.7512.
- [18] Gusakov M. E., Kantor E. M. Thermal g-modes and unexpected convection in superfluid neutron stars // *Phys. Rev. D* .— 2013. — Nov. — Vol. 88, no. 10. — P. 101302.
- [19] Kantor E. M., Gusakov M. E. Composition temperature-dependent g modes in superfluid neutron stars. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*.— 2014. — July. — Vol. 442. — P. L90–L94. — 1404.6768.
- [20] Dommes V. A., Gusakov M. E. Oscillations of superfluid hyperon stars: decoupling scheme and g-modes // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*.— 2016. — Jan. — Vol. 455, no. 3. — P. 2852–2870. — 1512.04900.
- [21] Gusakov M. E., Dommes V. A. Relativistic dynamics of superfluid-superconducting mixtures in the presence of topological defects and an electromagnetic field with application to neutron stars // *Phys. Rev. D* .— 2016. — Vol. 94, no. 8. — P. 083006. — 1607.01629.
- [22] Dommes V. A., Gusakov M. E., Shternin P. S. Dissipative relativistic magnetohydrodynamics of a multicomponent mixture and its application to neutron stars // *Phys. Rev. D* .— 2020. — May. — Vol. 101, no. 10. — P. 103020. — 2006.09840.
- [23] Dommes V. A., Gusakov M. E. Dissipative superfluid relativistic magnetohydrodynamics of a multicomponent fluid: The combined effect of particle diffusion and vortices // *Phys. Rev. D* .— 2021. — Dec. — Vol. 104, no. 12. — P. 123008. — 2111.00999.

- [24] Gusakov M. E., Chugunov A. I., Kantor E. M. Instability Windows and Evolution of Rapidly Rotating Neutron Stars // *Phys. Rev. Lett.* . — 2014. — Apr. — Vol. 112, no. 15. — P. 151101. — 1310.8103.
- [25] Gusakov M. E., Chugunov A. I., Kantor E. M. Explaining observations of rapidly rotating neutron stars in low-mass x-ray binaries // *Phys. Rev. D* . — 2014. — Sep. — Vol. 90, no. 6. — P. 063001. — 1305.3825.
- [26] Chugunov A. I., Gusakov M. E., Kantor E. M. New possible class of neutron stars: hot and fast non-accreting rotators // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2014. — Nov. — Vol. 445, no. 1. — P. 385–391. — 1408.6770.
- [27] Kantor E. M., Gusakov M. E., Chugunov A. I. Observational signatures of neutron stars in low-mass X-ray binaries climbing a stability peak // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2016. — Jan. — Vol. 455, no. 1. — P. 739–753. — 1512.02428.
- [28] Kantor E. M., Gusakov M. E. Temperature-dependent r modes in superfluid neutron stars stratified by muons // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2017. — Aug. — Vol. 469, no. 4. — P. 3928–3945. — 1705.06027.
- [29] Chugunov A. I., Gusakov M. E., Kantor E. M. R modes and neutron star recycling scenario // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2017. — June. — Vol. 468, no. 1. — P. 291–304. — 1610.06380.
- [30] Dommès V. A., Kantor E. M., Gusakov M. E. Temperature-dependent oscillation modes in rotating superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2019. — Jan. — Vol. 482, no. 2. — P. 2573–2587. — 1810.08005.
- [31] Kantor E. M., Gusakov M. E., Dommès V. A. Constraining Neutron Superfluidity with R -Mode Physics // *Phys. Rev. Lett.* . — 2020. — Vol. 125, no. 15. — P. 151101. — 2009.12553.
- [32] Kantor E. M., Gusakov M. E., Dommès V. A. Resonance suppression of the r -mode instability in superfluid neutron stars: Accounting for muons and entrainment // *Phys. Rev. D* . — 2021. — Jan. — Vol. 103, no. 2. — P. 023013. — 2102.02716.
- [33] Gusakov M. E., Kantor E. M., Ofengeim D. D. Evolution of the magnetic field in neutron stars // *Phys. Rev. D* . — 2017. — Nov. — Vol. 96, no. 10. — P. 103012. — 1705.00508.
- [34] Ofengeim D. D., Gusakov M. E. Fast magnetic field evolution in neutron stars: The key role of magnetically induced fluid motions in the core // *Phys. Rev. D* . — 2018. — Aug. — Vol. 98, no. 4. — P. 043007. — 1805.03956.
- [35] Kantor E. M., Gusakov M. E. A note on the ambipolar diffusion in superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2018. — Jan. — Vol. 473, no. 3. — P. 4272–4277. — 1703.09216.
- [36] Gusakov M. E. Force on proton vortices in superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2019. — June. — Vol. 485, no. 4. — P. 4936–4950. — 1904.01363.
- [37] Gusakov M. E., Kantor E. M., Ofengeim D. D. Magnetic field evolution time-scales in superconducting neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2020. — Dec. — Vol. 499, no. 3. — P. 4561–4569. — 2010.07673.
- [38] Gusakov M. E., Chugunov A. I. Thermodynamically Consistent Equation of State for an Accreted Neutron Star Crust // *Phys. Rev. Lett.* . — 2020. — May. — Vol. 124, no. 19. — P. 191101. — 2004.04195.
- [39] Gusakov M. E., Chugunov A. I. Heat release in accreting neutron stars // *Phys. Rev. D* . — 2021. — May. — Vol. 103, no. 10. — P. L101301. — 2011.09354.
- [40] Gusakov M. E., Kantor E. M., Chugunov A. I. Nonequilibrium thermodynamics of accreted neutron-star crust // *Phys. Rev. D* . — 2021. — Vol. 104, no. 8. — P. L081301. — 2109.06614.
- [41] Shchepochin N. N., Gusakov M. E., Chugunov A. I. Deep crustal heating for realistic compositions of thermonuclear ashes // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2021. — Nov. — Vol. 507, no. 3. — P. 3860–3870. — 2105.01991.

- [42] Kantor E. M., Gusakov M. E. The neutrino emission due to plasmon decay and neutrino luminosity of white dwarfs // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2007. — Nov. — Vol. 381, no. 4. — P. 1702–1710. — 0708.2093.
- [43] Gusakov M. E., Kantor E. M. Velocity-dependent energy gaps and dynamics of superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2013. — Jan. — Vol. 428, no. 1. — P. L26–L30. — 1206.6580.
- [44] Kantor E. M., Gusakov M. E. Anti-glitches within the Standard Scenario of Pulsar Glitches // *Astrophys. J. Lett.* — 2014. — Dec. — Vol. 797, no. 1. — P. L4. — 1411.2777.
- [45] Gusakov M. E., Kantor E. M., Reisenegger A. Rotation-induced deep crustal heating of millisecond pulsars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2015. — Vol. 453, no. 1. — P. L36–L40. — 1507.04586.
- [46] Dommès V. A., Gusakov M. E. Vortex buoyancy in superfluid and superconducting neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2017. — May. — Vol. 467, no. 1. — P. L115–L119. — 1701.06870.
- [47] Yakovlev D. G., Gusakov M. E., Haensel P. Bulk viscosity in a neutron star mantle // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2018. — Dec. — Vol. 481, no. 4. — P. 4924–4930. — 1809.08609.
- [48] Kantor E. M., Gusakov M. E. Long-lasting accretion-powered chemical heating of millisecond pulsars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2021. — Dec. — Vol. 508, no. 4. — P. 6118–6127. — 2110.02881.
- [49] Enhanced cooling of neutron stars via Cooper-pairing neutrino emission / Gusakov M. E., Kaminker A. D., Yakovlev D. G., and Gnedin O. Y. // *Astron. Astrophys.* — 2004. — Sep. — Vol. 423. — P. 1063–1071. — astro-ph/0404002.
- [50] The cooling of Akmal-Pandharipande-Ravenhall neutron star models / Gusakov M. E., Kaminker A. D., Yakovlev D. G., and Gnedin O. Y. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2005. — Vol. 363, no. 2. — P. 555–562. — astro-ph/0507560.

Цитированная литература

- [R1] Lombardo U., Schulze H.-J. Superfluidity in Neutron Star Matter // *Physics of Neutron Star Interiors* / ed. by Blaschke D., Glendenning N. K., Sedrakian A. — 2001. — Vol. 578 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag. — P. 30.
- [R2] Pairing in high-density neutron matter including short- and long-range correlations / Ding D., Rios A., Dussan H., Dickhoff W. H., Witte S. J., Carbone A., and Polls A. // *Phys. Rev. C* . — 2016. — Aug. — Vol. 94. — P. 025802. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.94.025802>.
- [R3] Sedrakian A., Clark J. W. Superfluidity in nuclear systems and neutron stars // *European Physical Journal A*. — 2019. — Sep. — Vol. 55, no. 9. — P. 167. — 1802.00017.
- [R4] Minimal Cooling of Neutron Stars: A New Paradigm / Page D., Lattimer J. M., Prakash M., and Steiner A. W. // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* — 2004. — Dec. — Vol. 155. — P. 623–650. — arXiv:astro-ph/0403657.
- [R5] Cooling neutron star in the Cassiopeia A supernova remnant: evidence for superfluidity in the core / Shternin P. S., Yakovlev D. G., Heinke C. O., Ho W. C. G., and Patnaude D. J. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2011. — Mar. — Vol. 412. — P. L108–L112.
- [R6] Rapid Cooling of the Neutron Star in Cassiopeia A Triggered by Neutron Superfluidity in Dense Matter / Page D., Prakash M., Lattimer J. M., and Steiner A. W. // *Phys. Rev. Lett.* . — 2011. — Feb. — Vol. 106, no. 8. — P. 081101.
- [R7] Measuring the Cooling of the Neutron Star in Cassiopeia A with all Chandra X-Ray Observatory Detectors / Elshamouty K. G., Heinke C. O., Sivakoff G. R., Ho W. C. G., Shternin P. S., Yakovlev D. G., Patnaude D. J., and David L. // *Astrophys. J.* . — 2013. — Nov. — Vol. 777, no. 1. — P. 22. — 1306.3387.

- [R8] Tests of the nuclear equation of state and superfluid and superconducting gaps using the Cassiopeia A neutron star / Ho W. C. G., Elshamouty K. G., Heinke C. O., and Potekhin A. Y. // *Phys. Rev. C* . — 2015. — Jan. — Vol. 91, no. 1. — P. 015806. — 1412.7759.
- [R9] Constraining superfluidity in dense matter from the cooling of isolated neutron stars / Beloin S., Han S., Steiner A. W., and Page D. // *Phys. Rev. C* . — 2018. — Jan. — Vol. 97, no. 1. — P. 015804.
- [R10] Model-independent constraints on superfluidity from the cooling neutron star in Cassiopeia A / Shternin P. S., Ofengeim D. D., Ho W. C. G., Heinke C. O., Wijngaarden M. J. P., and Patnaude D. J. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2021. — Sep. — Vol. 506, no. 1. — P. 709–726. — 2106.05692.
- [R11] Tisza L. Transport Phenomena in Helium II // *Nature*. — 1938. — May. — Vol. 141. — P. 913.
- [R12] Landau L. D. Theory of superfluidity of Helium-II // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*. — 1941. — Dec. — Vol. 11. — P. 592.
- [R13] Landau L. D. // *J. Physics*. — 1947. — Dec. — Vol. 11. — P. 91.
- [R14] Khalatnikov I. M. // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*. — 1952. — Dec. — Vol. 23. — P. 169.
- [R15] Arkhipov R., Khalatnikov I. M. // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*. — 1957. — Dec. — Vol. 33. — P. 758.
- [R16] Khalatnikov I. M. Sound Propagation in Solutions of Two Superfluid Liquids // *Pisma v ZhETF*. — 1973. — May. — Vol. 17. — P. 534.
- [R17] Andreev A. F., Bashkin E. P. Three-velocity hydrodynamics of superfluid solutions // *Sov. J. Exp. Theor. Phys.* — 1976. — Vol. 42. — P. 164.
- [R18] Vardanyan G. A., Sedrakyan D. M. // *Sov. J. Exp. Theor. Phys.* — 1981. — Nov. — Vol. 54. — P. 919.
- [R19] Holm D. D., Kupersmidt B. A. Superfluid plasmas - Multivelocity nonlinear hydrodynamics of superfluid solutions with charged condensates coupled electromagnetically // *Phys. Rev. A* — 1987. — Vol. 36. — P. 3947–3956.
- [R20] Mendell G., Lindblom L. The coupling of charged superfluid mixtures to the electromagnetic field // *Annals of Physics*. — 1991. — Jan. — Vol. 205. — P. 110–129.
- [R21] Sedrakian A. D., Sedrakian D. M. Superfluid Core Rotation in Pulsars. I. Vortex Cluster Dynamics // *Astrophys. J.* . — 1995. — July. — Vol. 447. — P. 305.
- [R22] Borumand M., Joynt R., Kluźniak W. Superfluid densities in neutron-star matter // *Phys. Rev. C* . — 1996. — Nov. — Vol. 54. — P. 2745–2750.
- [R23] Chamel N., Haensel P. Entrainment parameters in a cold superfluid neutron star core // *Phys. Rev. C* . — 2006. — Apr. — Vol. 73, no. 4. — P. 045802. — nucl-th/0603018.
- [R24] Leinson L. B. Non-linear approach to the entrainment matrix of superfluid nucleon mixture at zero temperature // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2017. — Sep. — Vol. 470, no. 3. — P. 3374–3387. — 1706.01272.
- [R25] Chamel N., Allard V. Entrainment effects in neutron-proton mixtures within the nuclear energy-density functional theory: Low-temperature limit // *Phys. Rev. C* . — 2019. — Dec. — Vol. 100, no. 6. — P. 065801. — 2102.02474.
- [R26] Leggett A. J. Theory of a Superfluid Fermi Liquid. I. General Formalism and Static Properties // *Physical Review*. — 1965. — Dec. — Vol. 140, no. 6A. — P. 1869–1888.
- [R27] Leggett A. J. A theoretical description of the new phases of liquid ^3He // *Reviews of Modern Physics*. — 1975. — Apr. — Vol. 47, no. 2. — P. 331–414.
- [R28] Leinson L. B. The entrainment matrix of a superfluid nucleon mixture at finite temperatures // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2018. — Sep. — Vol. 479, no. 3. — P. 3778–3790. — 1806.05072.

- [R29] Allard V., Chamel N. Entrainment effects in neutron-proton mixtures within the nuclear energy-density functional theory. II. Finite temperatures and arbitrary currents // *Phys. Rev. C* . — 2021. — Feb. — Vol. 103, no. 2. — P. 025804. — 2006.15317.
- [R30] Lebedev V. V., Khalatnikov I. M. The relativistic hydrodynamics of a superfluid // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 1982. — Nov. — Vol. 56. — P. 923.
- [R31] Khalatnikov I. M., Lebedev V. V. Relativistic hydrodynamics of a superfluid liquid // *Physics Letters A*. — 1982. — Aug. — Vol. 91. — P. 70–72.
- [R32] Carter B. The canonical treatment of heat conduction and superfluidity in relativistic hydrodynamics. // *A Random Walk in Relativity and Cosmology*. — 1985. — Jan. — P. 48–62.
- [R33] Carter B., Khalatnikov I. M. Momentum, vorticity, and helicity in covariant superfluid dynamics // *Annals of Physics*. — 1992. — Nov. — Vol. 219. — P. 243–265.
- [R34] Carter B., Khalatnikov I. M. Equivalence of convective and potential variational derivations of covariant superfluid dynamics // *Phys. Rev. D* . — 1992. — June. — Vol. 45. — P. 4536–4544.
- [R35] Son D. T. Hydrodynamics of Relativistic Systems with Broken Continuous Symmetries // *International Journal of Modern Physics A*. — 2001. — Vol. 16. — P. 1284–1286. — hep-ph/0011246.
- [R36] Langlois D., Sedrakian D. M., Carter B. Differential rotation of relativistic superfluid in neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 1998. — July. — Vol. 297. — P. 1189–1201. — astro-ph/9711042.
- [R37] Carter B., Langlois D. Relativistic models for superconducting-superfluid mixtures // *Nuclear Physics B*. — 1998. — Vol. 531. — P. 478–504. — gr-qc/9806024.
- [R38] Baym G., Chin S. A. Landau theory of relativistic Fermi liquids // *Nucl. Phys. A*. — 1976. — Vol. 262, no. 3. — P. 527–538.
- [R39] Sourie A., Oertel M., Novak J. Numerical models for stationary superfluid neutron stars in general relativity with realistic equations of state // *Phys. Rev. D* . — 2016. — Apr. — Vol. 93, no. 8. — P. 083004. — 1602.06228.
- [R40] Goriely S., Chamel N., Pearson J. M. Hartree-Fock-Bogoliubov nuclear mass model with 0.50 MeV accuracy based on standard forms of Skyrme and pairing functionals // *Phys. Rev. C* . — 2013. — Dec. — Vol. 88, no. 6. — P. 061302.
- [R41] Leinson L. B. Neutrino emission from triplet pairing of neutrons in neutron stars // *Phys. Rev. C* . — 2010. — Feb. — Vol. 81, no. 2. — P. 025501. — 0912.2164.
- [R42] Betbeder-Matibet O., Nozières P. Transport equation for quasiparticles in a system of interacting fermions colliding on dilute impurities // *Annals of Physics*. — 1966. — Mar. — Vol. 37, no. 1. — P. 17–54.
- [R43] Aronov A. G., Gurevich V. L. // *Solid State Physics*. — 1974. — Vol. 16. — P. 2656.
- [R44] Effects of strong and electromagnetic correlations on neutrino interactions in dense matter / Reddy S., Prakash M., Lattimer J. M., and Pons J. A. // *Phys. Rev. C* . — 1999. — May. — Vol. 59, no. 5. — P. 2888–2918. — astro-ph/9811294.
- [R45] Leinson L. B. Superfluid response and the neutrino emissivity of baryon matter: Fermi-liquid effects // *Phys. Rev. C* . — 2009. — Apr. — Vol. 79, no. 4. — P. 045502. — 0904.0320.
- [R46] Landau L., Lifshitz E. *Fluid mechanics*. — Pergamon Press, Oxford, 1987.
- [R47] Brooker G. A., Sykes J. Transport Properties of a Fermi Liquid // *Phys. Rev. Lett.* . — 1968. — July. — Vol. 21, no. 5. — P. 279–282.
- [R48] Finzi A., Wolf R. A. Hot, Vibrating Neutron Stars // *Astrophys. J.* . — 1968. — Sep. — Vol. 153. — P. 835.
- [R49] Sawyer R. F. Bulk viscosity of hot neutron-star matter and the maximum rotation rates of neutron stars // *Phys. Rev. D* . — 1989. — June. — Vol. 39, no. 12. — P. 3804–3806.

- [R50] Haensel P., Levenfish K. P., Yakovlev D. G. Bulk viscosity in superfluid neutron star cores. I. Direct Urca processes in npemu matter // *Astron. Astrophys.* — 2000. — May. — Vol. 357. — P. 1157–1169. — astro-ph/0004183.
- [R51] Haensel P., Levenfish K. P., Yakovlev D. G. Bulk viscosity in superfluid neutron star cores. II. Modified Urca processes in npe mu matter // *Astron. Astrophys.* — 2001. — June. — Vol. 372. — P. 130–137. — astro-ph/0103290.
- [R52] Haensel P., Levenfish K. P., Yakovlev D. G. Bulk viscosity in superfluid neutron star cores. III. Effects of Sigma⁻ hyperons // *Astron. Astrophys.* — 2002. — Jan. — Vol. 381. — P. 1080–1089. — astro-ph/0110575.
- [R53] Lindblom L., Owen B. J. Effect of hyperon bulk viscosity on neutron-star r-modes // *Phys. Rev. D* . — 2002. — Mar. — Vol. 65, no. 6. — P. 063006. — astro-ph/0110558.
- [R54] Nayyar M., Owen B. J. R-modes of accreting hyperon stars as persistent sources of gravitational waves // *Phys. Rev. D* . — 2006. — Apr. — Vol. 73, no. 8. — P. 084001. — astro-ph/0512041.
- [R55] Sa'D B. A., Shovkovy I. A., Rischke D. H. Bulk viscosity of spin-one color superconductors with two quark flavors // *Phys. Rev. D* . — 2007. — Mar. — Vol. 75, no. 6. — P. 065016. — astro-ph/0607643.
- [R56] Khalatnikov I. M. An introduction to the theory of superfluidity. — Westview Press, New York, 2000.
- [R57] Mannarelli M., Manuel C. Bulk viscosities of a cold relativistic superfluid: Color-flavor locked quark matter // *Phys. Rev. D* . — 2010. — Feb. — Vol. 81, no. 4. — P. 043002. — 0909.4486.
- [R58] Haskell B., Andersson N. Superfluid hyperon bulk viscosity and the r-mode instability of rotating neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2010. — Nov. — Vol. 408, no. 3. — P. 1897–1915. — 1003.5849.
- [R59] Bierkandt R., Manuel C. Bulk viscosity coefficients due to phonons and kaons in superfluid color-flavor locked quark matter // *Phys. Rev. D* . — 2011. — July. — Vol. 84, no. 2. — P. 023004. — 1104.5624.
- [R60] Haskell B., Andersson N., Comer G. L. Dynamics of dissipative multifluid neutron star cores // *Phys. Rev. D* . — 2012. — Sep. — Vol. 86, no. 6. — P. 063002. — 1204.2894.
- [R61] Manuel C., Tarrús J., Tolos L. Bulk viscosity coefficients due to phonons in superfluid neutron stars // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2013. — July. — Vol. 2013, no. 7. — P. 003. — 1302.5447.
- [R62] Neutron stars and the nuclear equation of state / Burgio G. F., Schulze H. J., Vidaña I., and Wei J. B. // *Progress in Particle and Nuclear Physics*. — 2021. — Sep. — Vol. 120. — P. 103879. — 2105.03747.
- [R63] Fast cooling and internal heating in hyperon stars / Anzuini F., Melatos A., Dehman C., Viganò D., and Pons J. A. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2022. — Jan. — Vol. 509, no. 2. — P. 2609–2623. — 2110.14039.
- [R64] Bayesian Nonparametric Inference of the Neutron Star Equation of State via a Neural Network / Han M.-Z., Jiang J.-L., Tang S.-P., and Fan Y.-Z. // *Astrophys. J.* . — 2021. — Sep. — Vol. 919, no. 1. — P. 11. — 2103.05408.
- [R65] g⁻ mode oscillations in hybrid stars: A tale of two sounds / Jaikumar P., Semposki A., Prakash M., and Constantinou C. // *Phys. Rev. D* . — 2021. — June. — Vol. 103, no. 12. — P. 123009. — 2101.06349.
- [R66] Alford M. G., Haber A. Strangeness-changing rates and hyperonic bulk viscosity in neutron star mergers // *Phys. Rev. C* . — 2021. — Apr. — Vol. 103, no. 4. — P. 045810. — 2009.05181.
- [R67] Cooling of hypernuclear compact stars: Hartree-Fock models and high-density pairing / Raduta A. R., Li J. J., Sedrakian A., and Weber F. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2019. — Aug. — Vol. 487, no. 2. — P. 2639–2652. — 1903.01295.

- [R68] Raduta A. R., Sedrakian A., Weber F. Cooling of hypernuclear compact stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2018. — Apr. — Vol. 475, no. 4. — P. 4347–4356. — 1712.00584.
- [R69] Yu H., Weinberg N. N. Dynamical tides in coalescing superfluid neutron star binaries with hyperon cores and their detectability with third-generation gravitational-wave detectors // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2017. — Sep. — Vol. 470, no. 1. — P. 350–360. — 1705.04700.
- [R70] Cutler C., Lindblom L. The Effect of Viscosity on Neutron Star Oscillations // *Astrophys. J.* . — 1987. — Mar. — Vol. 314. — P. 234.
- [R71] Braginskii S. I. Transport Processes in a Plasma // *Reviews of Plasma Physics.* — 1965. — Jan. — Vol. 1. — P. 205.
- [R72] Stellar Superfluids / Page D., Lattimer J. M., Prakash M., and Steiner A. W. // *arXiv e-prints.* — 2013. — Feb. — P. arXiv:1302.6626. — 1302.6626.
- [R73] Shternin P. S. Transport coefficients of leptons in superconducting neutron star cores // *Phys. Rev. D* . — 2018. — Sep. — Vol. 98, no. 6. — P. 063015. — 1805.06000.
- [R74] Flanagan É. É., Hinderer T. Constraining neutron-star tidal Love numbers with gravitational-wave detectors // *Phys. Rev. D* . — 2008. — Jan. — Vol. 77, no. 2. — P. 021502. — 0709.1915.
- [R75] Yu H., Weinberg N. N. Resonant tidal excitation of superfluid neutron stars in coalescing binaries // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2017. — Jan. — Vol. 464, no. 3. — P. 2622–2637. — 1610.00745.
- [R76] Weinberg N. N., Arras P., Burkart J. An Instability due to the Nonlinear Coupling of p-modes to g-modes: Implications for Coalescing Neutron Star Binaries // *Astrophys. J.* . — 2013. — June. — Vol. 769, no. 2. — P. 121. — 1302.2292.
- [R77] Poisson E. Gravitomagnetic tidal resonance in neutron-star binary inspirals // *Phys. Rev. D* . — 2020. — May. — Vol. 101, no. 10. — P. 104028. — 2003.10427.
- [R78] Abbott B. P., et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral // *Phys. Rev. Lett.* . — 2017. — Vol. 119, no. 16. — P. 161101. — 1710.05832.
- [R79] Chandrasekhar S. The Dynamical Instability of Gaseous Masses Approaching the Schwarzschild Limit in General Relativity. // *Astrophys. J.* . — 1964. — Aug. — Vol. 140. — P. 417.
- [R80] Thorne K. S., Campolattaro A. Non-Radial Pulsation of General-Relativistic Stellar Models. I. Analytic Analysis for $L \geq 2$ // *Astrophys. J.* . — 1967. — Sep. — Vol. 149. — P. 591.
- [R81] Price R., Thorne K. S. Non-Radial Pulsation of General-Relativistic Stellar Models. II. Properties of the Gravitational Waves // *Astrophys. J.* . — 1969. — Jan. — Vol. 155. — P. 163.
- [R82] Thorne K. S. Nonradial Pulsation of General-Relativistic Stellar Models. III. Analytic and Numerical Results for Neutron Stars // *Astrophys. J.* . — 1969. — Vol. 158. — P. 1.
- [R83] Thorne K. S. Nonradial Pulsation of General-Relativistic Stellar Models.IV. The Weakfield Limit // *Astrophys. J.* . — 1969. — Dec. — Vol. 158. — P. 997.
- [R84] Campolattaro A., Thorne K. S. Nonradial Pulsation of General-Relativistic Stellar Models. V. Analytic Analysis for $L = 1$ // *Astrophys. J.* . — 1970. — Mar. — Vol. 159. — P. 847.
- [R85] Detweiler S. L., Ipser J. R. A Variational Principle and a Stability Criterion for the Non-Radial Modes of Pulsation of Stellar Models in General Relativity // *Astrophys. J.* . — 1973. — Vol. 185. — P. 685–708.
- [R86] Lindblom L., Detweiler S. L. The quadrupole oscillations of neutron stars. // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* — 1983. — Sep. — Vol. 53. — P. 73–92.
- [R87] Detweiler S., Lindblom L. On the nonradial pulsations of general relativistic stellar models // *Astrophys. J.* . — 1985. — May. — Vol. 292. — P. 12–15.
- [R88] Cutler C., Lindblom L., Splinter R. J. Damping Times for Neutron Star Oscillations // *Astrophys. J.* . — 1990. — Nov. — Vol. 363. — P. 603.

- [R89] Chandrasekhar S., Ferrari V. On the non-radial oscillations of a star // *Proceedings of the Royal Society of London Series A*. — 1991. — Feb. — Vol. 432, no. 1885. — P. 247–279.
- [R90] Kokkotas K. D., Schutz B. F. W-modes - A new family of normal modes of pulsating relativistic stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 1992. — Mar. — Vol. 255. — P. 119–128.
- [R91] Yoshida S., Lee U. r-modes in relativistic superfluid stars // *Phys. Rev. D*. — 2003. — June. — Vol. 67, no. 12. — P. 124019. — gr-qc/0304073.
- [R92] Lin L.-M., Andersson N., Comer G. L. Oscillations of general relativistic multifluid/multilayer compact stars // *Phys. Rev. D*. — 2008. — Vol. 78, no. 8. — P. 083008. — 0709.0660.
- [R93] Lindblom L., Mendell G. The Oscillations of Superfluid Neutron Stars // *Astrophys. J.*. — 1994. — Feb. — Vol. 421. — P. 689.
- [R94] Lee U. Nonradial oscillations of neutron stars with the superfluid core. // *Astron. Astrophys.*. — 1995. — Nov. — Vol. 303. — P. 515.
- [R95] Lindblom L., Mendell G. r-modes in superfluid neutron stars // *Phys. Rev. D*. — 2000. — May. — Vol. 61, no. 10. — P. 104003. — gr-qc/9909084.
- [R96] Prix R., Rieutord M. Adiabatic oscillations of non-rotating superfluid neutron stars // *Astron. Astrophys.*. — 2002. — Vol. 393. — P. 949–963. — astro-ph/0204520.
- [R97] Lee U., Yoshida S. r-Modes of Neutron Stars with Superfluid Cores // *Astrophys. J.*. — 2003. — Mar. — Vol. 586, no. 1. — P. 403–418. — astro-ph/0211580.
- [R98] Prix R., Comer G. L., Andersson N. Inertial modes of non-stratified superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2004. — Feb. — Vol. 348, no. 2. — P. 625–637. — astro-ph/0308507.
- [R99] Samuelsson L., Andersson N. Axial quasi-normal modes of neutron stars: accounting for the superfluid in the crust // *Classical and Quantum Gravity*. — 2009. — Aug. — Vol. 26, no. 15. — P. 155016. — 0903.2437.
- [R100] Wong K. S., Lin L. M., Leung P. T. Universality in Oscillation Modes of Superfluid Neutron Stars? // *Astrophys. J.*. — 2009. — July. — Vol. 699, no. 2. — P. 1809–1821. — 0812.3708.
- [R101] Passamonti A., Andersson N. Hydrodynamics of rapidly rotating superfluid neutron stars with mutual friction // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2011. — May. — Vol. 413, no. 1. — P. 47–70. — 1004.4563.
- [R102] Passamonti A., Andersson N. Towards real neutron star seismology: accounting for elasticity and superfluidity // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2012. — Jan. — Vol. 419, no. 1. — P. 638–655. — 1105.4787.
- [R103] Comer G. L., Langlois D., Lin L. M. Quasinormal modes of general relativistic superfluid neutron stars // *Phys. Rev. D*. — 1999. — Nov. — Vol. 60, no. 10. — P. 104025. — gr-qc/9908040.
- [R104] Andersson N., Comer G. L., Langlois D. Oscillations of general relativistic superfluid neutron stars // *Phys. Rev. D*. — 2002. — Nov. — Vol. 66, no. 10. — P. 104002. — gr-qc/0203039.
- [R105] Lindblom L., Mendell G. Does Gravitational Radiation Limit the Angular Velocities of Superfluid Neutron Stars? // *Astrophys. J.*. — 1995. — May. — Vol. 444. — P. 804.
- [R106] Haskell B., Andersson N., Passamonti A. r modes and mutual friction in rapidly rotating superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2009. — Aug. — Vol. 397, no. 3. — P. 1464–1485. — 0902.1149.
- [R107] Andersson N., Glampedakis K., Haskell B. Oscillations of dissipative superfluid neutron stars // *Phys. Rev. D*. — 2009. — May. — Vol. 79, no. 10. — P. 103009. — 0812.3023.
- [R108] Passamonti A., Glampedakis K. Non-linear viscous damping and gravitational wave detectability of the f-mode instability in neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2012. — June. — Vol. 422, no. 4. — P. 3327–3338. — 1112.3931.

- [R109] McDermott P. N., van Horn H. M., Scholl J. F. Nonradial g-mode oscillations of warm neutron stars // *Astrophys. J.* . — 1983. — May. — Vol. 268. — P. 837–848.
- [R110] Finn L. S. G-modes in zero-temperature neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 1987. — July. — Vol. 227. — P. 265–293.
- [R111] Reisenegger A., Goldreich P. A New Class of g-Modes in Neutron Stars // *Astrophys. J.* . — 1992. — Aug. — Vol. 395. — P. 240.
- [R112] Andersson N., Comer G. L. On the dynamics of superfluid neutron star cores // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2001. — Dec. — Vol. 328, no. 4. — P. 1129–1143. — astro-ph/0101193.
- [R113] Passamonti A., Andersson N., Ho W. C. G. Buoyancy and g-modes in young superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2016. — Jan. — Vol. 455, no. 2. — P. 1489–1511. — 1504.07470.
- [R114] Rau P. B., Wasserman I. Compressional modes in two-superfluid neutron stars with leptonic buoyancy // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2018. — Dec. — Vol. 481, no. 4. — P. 4427–4444. — 1802.08741.
- [R115] Yu H., Weinberg N. N. Dynamical tides in coalescing superfluid neutron star binaries with hyperon cores and their detectability with third-generation gravitational-wave detectors // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2017. — Sep. — Vol. 470, no. 1. — P. 350–360. — 1705.04700.
- [R116] Kumar D., Mishra H., Malik T. Non-radial oscillation modes in hybrid stars: consequences of a mixed phase // *arXiv e-prints*. — 2021. — P. arXiv:2110.00324. — 2110.00324.
- [R117] Bai Z., Fu W.-j., Liu Y.-x. Identifying QCD Phase Transitions via the Gravitational Wave Frequency from a Supernova Explosion // *Astrophys. J.* . — 2021. — Dec. — Vol. 922, no. 2. — P. 266. — 2109.12614.
- [R118] g modes of neutron stars with hadron-to-quark crossover transitions / Constantinou C., Han S., Jaikumar P., and Prakash M. // *Phys. Rev. D* . — 2021. — Dec. — Vol. 104, no. 12. — P. 123032. — 2109.14091.
- [R119] Lifting the Veil on Quark Matter in Compact Stars with Core g-mode Oscillations / Wei W., Salinas M., Klähn T., Jaikumar P., and Barry M. // *Astrophys. J.* . — 2020. — Dec. — Vol. 904, no. 2. — P. 187.
- [R120] Oscillation modes of hybrid stars within the relativistic Cowling approximation / Ranea-Sandoval I. F., Guilera O. M., Mariani M., and Orsaria M. G. // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2018. — Dec. — Vol. 2018, no. 12. — P. 031. — 1807.02166.
- [R121] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, Weinberg N. N. Constraining the p -Mode-g -Mode Tidal Instability with GW170817 // *Phys. Rev. Lett.* . — 2019. — Feb. — Vol. 122, no. 6. — P. 061104. — 1808.08676.
- [R122] Hall H. E., Vinen W. F. The Rotation of Liquid Helium II. II. The Theory of Mutual Friction in Uniformly Rotating Helium II // *Proceedings of the Royal Society of London Series A*. — 1956. — Dec. — Vol. 238. — P. 215–234.
- [R123] Hall H. E. The rotation of liquid helium II // *Advances in Physics*. — 1960. — Jan. — Vol. 9. — P. 89–146.
- [R124] Bekarevich I., Khalatnikov I. Phenomenological Derivation of the Equations of Vortex Motion in He II // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 1961. — Vol. 13. — P. 643.
- [R125] Mendell G. Superfluid hydrodynamics in rotating neutron stars. I - Nondissipative equations. II - Dissipative effects // *Astrophys. J.* . — 1991. — Vol. 380. — P. 515–540.
- [R126] Mendell G. Superfluid Hydrodynamics in Rotating Neutron Stars. II. Dissipative Effects // *Astrophys. J.* . — 1991. — Vol. 380. — P. 530.
- [R127] Mendell G. Magnetohydrodynamics in superconducting-superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 1998. — June. — Vol. 296, no. 4. — P. 903–912. — astro-ph/9702032.

- [R128] Glampedakis K., Andersson N., Samuelsson L. Magnetohydrodynamics of superfluid and superconducting neutron star cores // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2011. — Jan. — Vol. 410. — P. 805–829. — 1001.4046.
- [R129] Andersson N., Wells S., Vickers J. A. Quantised vortices and mutual friction in relativistic superfluids // *Classical and Quantum Gravity*. — 2016. — Dec. — Vol. 33, no. 24. — P. 245010. — 1601.07395.
- [R130] Rau P. B., Wasserman I. Relativistic finite temperature multifluid hydrodynamics in a neutron star from a variational principle // *Phys. Rev. D*. — 2020. — Sep. — Vol. 102, no. 6. — P. 063011. — 2004.07468.
- [R131] Andersson N. A New Class of Unstable Modes of Rotating Relativistic Stars // *Astrophys. J.*. — 1998. — Aug. — Vol. 502, no. 2. — P. 708–713. — gr-qc/9706075.
- [R132] Friedman J. L., Morsink S. M. Axial Instability of Rotating Relativistic Stars // *Astrophys. J.*. — 1998. — Aug. — Vol. 502, no. 2. — P. 714–720. — gr-qc/9706073.
- [R133] Haskell B. R-modes in neutron stars: Theory and observations // *International Journal of Modern Physics E*. — 2015. — Aug. — Vol. 24. — P. 1541007. — 1509.04370.
- [R134] Glampedakis K., Gualtieri L. Gravitational Waves from Single Neutron Stars: An Advanced Detector Era Survey // *Astrophysics and Space Science Library* / ed. by Rezzolla L., Pizzochero P., Jones D. I. et al. — 2018. — Jan. — Vol. 457 of *Astrophysics and Space Science Library*. — P. 673. — 1709.07049.
- [R135] Levin Y. Runaway Heating by R-Modes of Neutron Stars in Low-Mass X-Ray Binaries // *Astrophys. J.*. — 1999. — May. — Vol. 517. — P. 328–333. — astro-ph/9810471.
- [R136] Hyperonic stars and the symmetry energy / Providência C., Fortin M., Pais H., and Rabhi A. // *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*. — 2019. — Mar. — Vol. 6. — P. 13. — 1811.00786.
- [R137] Alpar M. A., Langer S. A., Sauls J. A. Rapid postglitch spin-up of the superfluid core in pulsars // *Astrophys. J.*. — 1984. — July. — Vol. 282. — P. 533–541.
- [R138] Heiselberg H., Hjorth-Jensen M. Phase Transitions in Neutron Stars and Maximum Masses // *Astrophys. J. Lett.*. — 1999. — Nov. — Vol. 525. — P. L45–L48. — astro-ph/9904214.
- [R139] Goldreich P., Reisenegger A. Magnetic Field Decay in Isolated Neutron Stars // *Astrophys. J.*. — 1992. — Aug. — Vol. 395. — P. 250.
- [R140] Thompson C., Duncan R. C. The Soft Gamma Repeaters as Very Strongly Magnetized Neutron Stars. II. Quiescent Neutrino, X-Ray, and Alfvén Wave Emission // *Astrophys. J.*. — 1996. — Dec. — Vol. 473. — P. 322.
- [R141] Hoyos J., Reisenegger A., Valdivia J. A. Magnetic field evolution in neutron stars: one-dimensional multi-fluid model // *Astron. Astrophys.*. — 2008. — Sep. — Vol. 487. — P. 789–803. — 0801.4372.
- [R142] Hoyos J. H., Reisenegger A., Valdivia J. A. Asymptotic, non-linear solutions for ambipolar diffusion in one dimension // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2010. — Nov. — Vol. 408. — P. 1730–1741. — 1003.5262.
- [R143] Glampedakis K., Jones D. I., Samuelsson L. Ambipolar diffusion in superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2011. — May. — Vol. 413. — P. 2021–2030. — 1010.1153.
- [R144] Magnetic field evolution in superconducting neutron stars / Graber V., Andersson N., Glampedakis K., and Lander S. K. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2015. — Vol. 453. — P. 671–681. — 1505.00124.
- [R145] Simulated magnetic field expulsion in neutron star cores / Elfritz J. G., Pons J. A., Rea N., Glampedakis K., and Viganò D. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2016. — Mar. — Vol. 456. — P. 4461–4474. — 1512.07151.
- [R146] Beloborodov A. M., Li X. Magnetar Heating // *Astrophys. J.*. — 2016. — Dec. — Vol. 833. — P. 261. — 1605.09077.

- [R147] Castillo F., Reisenegger A., Valdivia J. A. Magnetic field evolution and equilibrium configurations in neutron star cores: the effect of ambipolar diffusion // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2017. — Vol. 471, no. 1. — P. 507–522. — 1705.10020.
- [R148] Dommès V. A., Gusakov M. E. Vortex buoyancy in superfluid and superconducting neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2017. — May. — Vol. 467, no. 1. — P. L115–L119. — 1701.06870.
- [R149] The relevance of ambipolar diffusion for neutron star evolution / Passamonti A., Akgün T., Pons J. A., and Miralles J. A. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2017. — Mar. — Vol. 465. — P. 3416–3428. — 1608.00001.
- [R150] Bransgrove A., Levin Y., Beloborodov A. Magnetic field evolution of neutron stars - I. Basic formalism, numerical techniques and first results // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2018. — Jan. — Vol. 473, no. 2. — P. 2771–2790. — 1709.09167.
- [R151] Castillo F., Reisenegger A., Valdivia J. A. Two-fluid simulations of the magnetic field evolution in neutron star cores in the weak-coupling regime // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2020. — Vol. 498, no. 2. — P. 3000–3012. — 2006.13186.
- [R152] Bransgrove A., Levin Y., Beloborodov A. // private communication. — 2021.
- [R153] Jones P. B. Neutron superfluid spin-down and magnetic field decay in pulsars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1991. — Nov. — Vol. 253. — P. 279–286.
- [R154] Jones P. B. Type II superconductivity and magnetic flux transport in neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2006. — Jan. — Vol. 365. — P. 339–344. — astro-ph/0510396.
- [R155] Alford M. G., Sedrakian A. Color-magnetic flux tubes in quark matter cores of neutron stars // *Journal of Physics G Nuclear Physics*. — 2010. — July. — Vol. 37, no. 7. — P. 075202. — 1001.3346.
- [R156] Haensel P., Potekhin A. Y., Yakovlev D. G. *Neutron Stars 1 : Equation of State and Structure*. — 2007. — Vol. 326.
- [R157] Chamel N., Haensel P. *Physics of Neutron Star Crusts* // *Living Reviews in Relativity*. — 2008. — Dec. — Vol. 11, no. 1. — P. 10. — 0812.3955.
- [R158] Brown E. F., Bildsten L., Rutledge R. E. *Crustal Heating and Quiescent Emission from Transiently Accreting Neutron Stars* // *Astrophys. J. Lett.* — 1998. — Sep. — Vol. 504, no. 2. — P. L95–L98. — astro-ph/9807179.
- [R159] Yakovlev D. G., Levenfish K. P., Haensel P. *Thermal state of transiently accreting neutron stars* // *Astron. Astrophys.* — 2003. — Aug. — Vol. 407. — P. 265–271. — astro-ph/0209027.
- [R160] *Thermal states of coldest and hottest neutron stars in soft X-ray transients* / Yakovlev D. G., Levenfish K. P., Potekhin A. Y., Gnedin O. Y., and Chabrier G. // *Astron. Astrophys.* — 2004. — Apr. — Vol. 417. — P. 169–179.
- [R161] *Constraints on Thermal X-Ray Radiation from SAX J1808.4-3658 and Implications for Neutron Star Neutrino Emission* / Heinke C. O., Jonker P. G., Wijnands R., and Taam R. E. // *Astrophys. J.* — 2007. — May. — Vol. 660. — P. 1424–1427. — arXiv:astro-ph/0612232.
- [R162] *Further Constraints on Thermal Quiescent X-Ray Emission from SAX J1808.4-3658* / Heinke C. O., Jonker P. G., Wijnands R., Deloye C. J., and Taam R. E. // *Astrophys. J.* — 2009. — Feb. — Vol. 691. — P. 1035–1041. — 0810.0497.
- [R163] Wijnands R., Degenaar N., Page D. *Testing the deep-crustal heating model using quiescent neutron-star very-faint X-ray transients and the possibility of partially accreted crusts in accreting neutron stars* // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2013. — July. — Vol. 432. — P. 2366–2377. — 1208.4273.
- [R164] Han S., Steiner A. W. *Cooling of neutron stars in soft x-ray transients* // *Phys. Rev. C* . — 2017. — Sep. — Vol. 96, no. 3. — P. 035802. — 1702.08452.

- [R165] Thermal states of neutron stars with a consistent model of interior / Fortin M., Taranto G., Burgio G. F., Haensel P., Schulze H. J., and Zdunik J. L. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2018. — Apr. — Vol. 475, no. 4. — P. 5010–5022. — 1709.04855.
- [R166] Rapid Neutrino Cooling in the Neutron Star MXB 1659-29 / Brown E. F., Cumming A., Fattoyev F. J., Horowitz C. J., Page D., and Reddy S. // *Phys. Rev. Lett.* . — 2018. — May. — Vol. 120, no. 18. — P. 182701. — 1801.00041.
- [R167] Potekhin A. Y., Chugunov A. I., Chabrier G. Thermal evolution and quiescent emission of transiently accreting neutron stars // *Astron. Astrophys.*.. — 2019. — Sep. — Vol. 629. — P. A88. — 1907.08299.
- [R168] Thermal evolution of relativistic hyperonic compact stars with calibrated equations of state / Fortin M., Raduta A. R., Avancini S., and Providencia C. // *arXiv e-prints*. — 2021. — Feb. — P. arXiv:2102.07565. — 2102.07565.
- [R169] Crustal Emission and the Quiescent Spectrum of the Neutron Star in KS 1731-96260 / Rutledge R. E., Bildsten L., Brown E. F., Pavlov G. G., Zavlin V. E., and Ushomirsky G. // *Astrophys. J.* . — 2002. — Vol. 580, no. 1. — P. 413. — Access mode: <http://stacks.iop.org/0004-637X/580/i=1/a=413>.
- [R170] Neutron star cooling after deep crustal heating in the X-ray transient KS 1731-260 / Shternin P. S., Yakovlev D. G., Haensel P., and Potekhin A. Y. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*.. — 2007. — Nov. — Vol. 382. — P. L43–L47.
- [R171] Brown E. F., Cumming A. Mapping Crustal Heating with the Cooling Light Curves of Quasi-Persistent Transients // *Astrophys. J.* . — 2009. — June. — Vol. 698. — P. 1020–1032.
- [R172] Continued Cooling of the Crust in the Neutron Star Low-mass X-ray Binary KS 1731-260 / Cackett E. M., Brown E. F., Cumming A., Degenaar N., Miller J. M., and Wijnands R. // *Astrophys. J. Lett.*.. — 2010. — Vol. 722, no. 2. — P. L137–L141. — 1008.4727.
- [R173] Page D., Reddy S. Forecasting Neutron Star Temperatures: Predictability and Variability // *Phys. Rev. Lett.* . — 2013. — Dec. — Vol. 111, no. 24. — P. 241102. — 1307.4455.
- [R174] Degenaar N., Wijnands R., Miller J. M. A Direct Measurement of the Heat Release in the Outer Crust of the Transiently Accreting Neutron Star XTE J1709-267 // *Astrophys. J. Lett.*.. — 2013. — Apr. — Vol. 767, no. 2. — P. L31. — 1212.1453.
- [R175] Nuclear physics of the outer layers of accreting neutron stars / Meisel Z., Deibel A., Keek L., Shternin P., and Elfriz J. // *Journal of Physics G Nuclear Physics*. — 2018. — Sep. — Vol. 45, no. 9. — P. 093001. — 1807.01150.
- [R176] Consistent accretion-induced heating of the neutron-star crust in MXB 1659-29 during two different outbursts / Parikh A. S., Wijnands R., Ootes L. S., Page D., Degenaar N., Bahramian A., Brown E. F., Cackett E. M., Cumming A., Heinke C., Homan J., Rouco Escorial A., and Wijnngaarden M. J. P. // *Astron. Astrophys.*.. — 2019. — Apr. — Vol. 624. — P. A84. — 1810.05626.
- [R177] The effect of diffusive nuclear burning in neutron star envelopes on cooling in accreting systems / Wijnngaarden M. J. P., Ho W. C. G., Chang P., Page D., Wijnands R., Ootes L. S., Cumming A., Degenaar N., and Beznogov M. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*.. — 2020. — Apr. — Vol. 493, no. 4. — P. 4936–4944. — 2003.09307.
- [R178] Potekhin A. Y., Chabrier G. Crust structure and thermal evolution of neutron stars in soft X-ray transients // *Astron. Astrophys.*.. — 2021. — Jan. — Vol. 645. — P. A102. — 2011.10490.
- [R179] Haensel P., Zdunik J. L. Non-equilibrium processes in the crust of an accreting neutron star // *Astron. Astrophys.*.. — 1990. — Jan. — Vol. 227. — P. 431–436.
- [R180] Haensel P., Zdunik J. L. Equation of state and structure of the crust of an accreting neutron star // *Astron. Astrophys.*.. — 1990. — Mar. — Vol. 229, no. 1. — P. 117–122.
- [R181] Haensel P., Zdunik J. L. Nuclear composition and heating in accreting neutron-star crusts // *Astron. Astrophys.*.. — 2003. — June. — Vol. 404. — P. L33–L36. — astro-ph/0305220.

- [R182] Haensel P., Zdunik J. L. Models of crustal heating in accreting neutron stars // *Astron. Astrophys.* — 2008. — Mar. — Vol. 480. — P. 459–464. — 0708.3996.
- [R183] Steiner A. W. Deep crustal heating in a multicomponent accreted neutron star crust // *Phys. Rev. C* . — 2012. — May. — Vol. 85, no. 5. — P. 055804. — 1202.3378.
- [R184] Nuclear Reactions in the Crusts of Accreting Neutron Stars / Lau R., Beard M., Gupta S. S., Schatz H., Afanasjev A. V., Brown E. F., Deibel A., Gasques L. R., Hitt G. W., Hix W. R., Keek L., Möller P., Shternin P. S., Steiner A. W., Wiescher M., and Xu Y. // *Astrophys. J.* . — 2018. — May. — Vol. 859. — P. 62. — 1803.03818.
- [R185] Crustal heating in accreting neutron stars from the nuclear energy-density functional theory. I. Proton shell effects and neutron-matter constraint / Fantina A. F., Zdunik J. L., Chamel N., Pearson J. M., Haensel P., and Goriely S. // *Astron. Astrophys.* — 2018. — Dec. — Vol. 620. — P. A105. — 1806.03861.
- [R186] Shchechilin N. N., Chugunov A. I. Crust of accreting neutron stars within simplified reaction network // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2019. — P. 2428. — 1910.03932.
- [R187] Chugunov A. I., Shchechilin N. N. Crucial role of neutron diffusion in the crust of accreting neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2020. — June. — Vol. 495, no. 1. — P. L32–L36. — 2004.00997.
- [R188] A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities Part II. Nuclei far from stabilities / Chabanat E., Bonche P., Haensel P., Meyer J., and Schaeffer R. // *Nucl. Phys. A* — 1998. — May. — Vol. 635, no. 1-2. — P. 231–256.
- [R189] Crystallization of the inner crust of a neutron star and the influence of shell effects / Carreau T., Gulminelli F., Chamel N., Fantina A. F., and Pearson J. M. // *Astron. Astrophys.* — 2020. — Mar. — Vol. 635. — P. A84. — 1912.01265.
- [R190] Goriely S., Chamel N., Pearson J. M. Latest results of Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov mass formulas // *Journal of Physics Conference Series*. — 2016. — Jan. — Vol. 665 of *Journal of Physics Conference Series*. — P. 012038.
- [R191] Nuclear ground-state masses and deformations: FRDM(2012) / Möller P., Sierk A. J., Ichikawa T., and Sagawa H. // *Atomic Data and Nuclear Data Tables*. — 2016. — May. — Vol. 109. — P. 1–204. — 1508.06294.
- [R192] Odrzywolek A., Plewa T. Probing thermonuclear supernova explosions with neutrinos // *Astron. Astrophys.* — 2011. — May. — Vol. 529. — P. A156. — 1006.0490.
- [R193] Landau L. D., Lifshitz E. M. *Statistical physics. Pt.2.* — Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [R194] Bardeen J. Critical Fields and Currents in Superconductors // *Reviews of Modern Physics*. — 1962. — Vol. 34, no. 4. — P. 667–681.
- [R195] Glampedakis K., Jones D. I. Three evolutionary paths for magnetar oscillations // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2014. — Apr. — Vol. 439, no. 2. — P. 1522–1535. — 1307.7078.
- [R196] Goriely S., Chamel N., Pearson J. M. Further explorations of Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov mass formulas. XII. Stiffness and stability of neutron-star matter // *Phys. Rev. C* . — 2010. — Sep. — Vol. 82, no. 3. — P. 035804. — 1009.3840.
- [R197] Prakash M., Ainsworth T. L., Lattimer J. M. Equation of state and the maximum mass of neutron stars // *Phys. Rev. Lett.* . — 1988. — Nov. — Vol. 61, no. 22. — P. 2518–2521.
- [R198] Hartle J. B. Slowly Rotating Relativistic Stars. I. Equations of Structure // *Astrophys. J.* . — 1967. — Dec. — Vol. 150. — P. 1005.
- [R199] Precision Timing of PSR J0437-4715: An Accurate Pulsar Distance, a High Pulsar Mass, and a Limit on the Variation of Newton’s Gravitational Constant / Verbiest J. P. W., Bailes M., van Straten W., Hobbs G. B., Edwards R. T., Manchester R. N., Bhat N. D. R., Sarkissian J. M., Jacoby B. A., and Kulkarni S. R. // *Astrophys. J.* . — 2008. — May. — Vol. 679, no. 1. — P. 675–680. — 0801.2589.

- [R200] Vortex creep and the internal temperature of neutron stars. I - General theory / Alpar M. A., Pines D., Anderson P. W., and Shaham J. // *Astrophys. J.* . — 1984. — Jan. — Vol. 276. — P. 325–334.
- [R201] Reisenegger A. Deviations from Chemical Equilibrium Due to Spin-down as an Internal Heat Source in Neutron Stars // *Astrophys. J.* . — 1995. — Apr. — Vol. 442. — P. 749. — astro-ph/9410035.
- [R202] Fernández R., Reisenegger A. Rotochemical Heating in Millisecond Pulsars: Formalism and Nonsuperfluid Case // *Astrophys. J.* . — 2005. — May. — Vol. 625, no. 1. — P. 291–306. — astro-ph/0502116.

A.F. IOFFE PHYSICAL-TECHNICAL INSTITUTE

Manuscript copyright

Gusakov Mikhail Evgen'evich

Dynamical processes in neutron stars

Scientific specialization 1.3.1. Physics of cosmos, astronomy

SCIENTIFIC REPORT
IS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

Translation from Russian

Saint-Petersburg – 2023

CONTENTS

1	Introduction	62
1.1	The studied scientific problem and its significance; a brief description of the specific tasks considered in the dissertation	62
1.2	Personal contribution of the candidate to the results of dissertation	64
1.3	Degree of reliability of the results obtained by the candidate	65
1.4	Scientific novelty of work	65
1.5	Practical relevance	65
2	Hydrodynamics of superfluid mixtures in NSs: calculation of a number of key microscopic parameters of the theory [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]	66
2.1	Introduction: hydrodynamic equations, key parameters of the theory	66
2.2	Relativistic entrainment matrix and response functions in superfluid mixtures	68
2.3	Bulk viscosity in superfluid NS mixtures	69
2.4	Superfluid hydrodynamics and bulk viscosity in nucleon-hyperon mixtures; sound waves and their damping in nucleon-hyperon mixtures	71
2.5	Diffusion as a leading dissipation mechanism in superconducting NSs	71
3	Global oscillations of superfluid nonrotating NSs: the spectrum and damping of various oscillation modes [3, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 14]	73
3.1	Introduction	73
3.2	Influence of finite-temperature effects on NS oscillations; approximate method to calculate the oscillation spectra	74
3.3	Damping of superfluid NS oscillations	76
3.4	Thermal and composition g -modes in superfluid NSs	77
3.5	Role of the diffusion on damping of global oscillation modes in NSs	78
4	Relativistic dissipative magnetohydrodynamics of superfluid mixtures in NSs: accounting for the effects of finite temperatures, Feynman-Onsager and Abrikosov vortices [5, 24, 15, 25]	79
5	Oscillations of rotating NSs: r -modes and scenarios of r -mode instability suppression [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 13, 33, 34]	81
6	Accelerated evolution of magnetic field in NS cores [35, 36, 37, 38, 39]	86
7	Physics of accreted NS crust: equation of state, deep crustal heating, and thermodynamic potential [40, 41, 42, 43]	88
7.1	Formulation of the problem; equation of state of a fully accreted crust	88
7.2	Deep crustal heating in the fully accreted crust	91
7.3	Thermodynamic potential for the inner crust	93
8	Effects and processes [46, 47, 48, 44, 49, 50, 45]	94
8.1	Introduction	94
8.2	Dynamically varying nucleon gap and its impact on the dynamics of neutron stars	95
8.3	New heating mechanism for millisecond pulsars	97
	Defense statements	99
	Publication list	101
	References	104

1 Introduction

1.1 The studied scientific problem and its significance; a brief description of the specific tasks considered in the dissertation

The proposed dissertation is devoted to the physics of neutron stars (NSs) and to the study of the properties of superdense matter under extreme conditions unattainable on Earth.

NSs have masses of about $M \sim 1.4M_{\odot}$ (M_{\odot} is the solar mass) and a radius $R \sim 12$ km. The density in their interiors exceeds the nuclear saturation density, 2.8×10^{14} g cm⁻³, making these objects unique astrophysical laboratories for studying the superdense matter and testing such fundamental physical theories as the theory of strong interactions, general relativity theory, and many-body quantum theory.

Besides the enormous densities, NSs also host huge magnetic fields that cannot be reached in terrestrial conditions. Depending on a NS type, these fields range from relatively small (for NSs), $\sim 10^8$ G (in millisecond pulsars), to standard, $\sim 10^{12}$ G (in radiopulsars), and up to the extreme ones $\sim (10^{15} - 10^{16})$ G. NSs with the strongest fields are called magnetars, and the magnetic field plays a crucial role in their evolution and observational manifestations.

Despite the fact that NSs were discovered more than 50 years ago, the equation of state, and even the composition of matter in their deepest layers are known insufficiently well. Various theoretical models predict a composition ranging from a purely nucleon one (neutrons, protons, electrons, and muons) to nucleon-hyperon and quark matter. Laboratory studies of such dense matter are not feasible and the only way of testing the theories is to compare the NS observations with predictions of theoretical models.

An important and in many situations crucial feature of not too hot NSs is the presence of baryon superfluidity/superconductivity in their interiors. Superfluidity of baryons (e.g., neutrons and protons in the case of the simplest NS matter composition) has a dramatic impact on the NS dynamics and is predicted by microscopic calculations [R1, R2, R3], as well as required to explain observations (e.g., [1, 2], [R4, R5, R6, R7, R8, R9, R10]).¹

Observational manifestations of NSs include the thermal and non-thermal electromagnetic radiation from their surface and from the NS magnetosphere, bursts of various nature in the near-surface NS layers (e.g., in magnetars and X-ray bursters), pulsar glitches, modulation of the electromagnetic radiation during NS oscillations, variation of the NS rotation frequency due to either magneto-dipole radiation or the development of gravitational-wave instability resulting in the excitation of NS oscillations. One of the most notable observational manifestations is the real-time cooling of NSs in low-mass X-ray binaries after an accretion episode. Finally, the remarkable recent event GW170817 is the observation of the NS binary coalescence and detection, along with the electromagnetic signal, of the gravitational-wave signal from this event by the LIGO and Virgo observatories.

To interpret the continuously growing amount of NS observations, it is necessary not only to have information about the properties of superdense matter, but

¹Here and below, the references in the usual format refer to publications of the candidate (e.g., [1]). The other references are denoted by the letter R (e.g., [R1]). The list of candidate's papers and the cited literature are presented in the end of the scientific report.

also to understand how these properties are reflected in the large-scale dynamics of NSs and, eventually, in the observations. One of the dissertation goals is to elucidate the relationships between the processes occurring on micro and macro scales, in particular, to develop the hydrodynamic theory describing macroscopic phenomena in the magnetized, superfluid, and superconducting NSs. The formulation of such a theory is difficult for several reasons: (i) As noted above, the matter composition in the inner NS layers is poorly known; (ii) The kinetic coefficients entering the hydrodynamic equations are often known with a large degree of uncertainty; (iii) Baryon superfluidity and superconductivity significantly complicates the NS hydrodynamics, giving rise to many new interesting dynamical properties; (iv) Finally, since NSs are compact objects, they should be treated within the framework of general theory of relativity (GR). Significant part of the proposed dissertation is devoted to determining the corresponding dynamical equations and studying their solutions in different situations.

It is worth emphasizing that NSs play an important role in modern observational astrophysics. This is confirmed by launches of the NICER and the Russian-German space observatory Spectrum RG, as well as by the recent launch of the IXPE mission. One of the basic tasks of the scientific program of these space missions is NS observations. Moreover, recent LIGO and Virgo observations of gravitational wave signals from NS mergers have opened a new era in NS research. It is likely that the detection of gravitational waves from merging NSs will soon become a standard tool of observational astrophysics. Next-generation observatories (e.g., Einstein Telescope) are expected to be able to detect the gravitational waves from isolated and accreting NSs, in particular, from unstable r -modes. Thus, the amount of observational data from space and ground-based observatories will increase significantly in the near future. This will provide qualitatively new opportunities for testing and improving the theoretical NS models and makes the proposed dissertation relevant.

The dissertation consists of eight chapters, the first of which is introductory, and of the defense statements.

Chapter 2 discusses the hydrodynamics of superfluid mixtures, suitable for modeling non-rotating NSs; a number of key parameters of this hydrodynamics are calculated. Section 2.1 is an introduction in which the dynamical equations are introduced and the main parameters of the theory are presented. Section 2.2 discusses an important ingredient of the theory, the relativistic entrainment matrix, as well as the response functions to scalar and vector perturbations in superfluid charged mixtures. Section 2.3 considers one of the most important mechanisms of dissipation, the bulk viscosity generated by nonequilibrium processes of mutual particle transformations in superfluid nucleon matter. In section 2.4, the results of the previous sections are generalized to the more complicated case of nucleon-hyperon matter of NSs; the obtained results are illustrated by considering sound waves and their damping in such matter. Finally, in section 2.5 we describe a new dissipation mechanism related to diffusion of different particle species in NS matter.

In chapter 3 the results of the previous chapter are applied to studying the global oscillations of superfluid non-rotating relativistic NSs and their damping. Section 3.1 contains a brief introduction. Section 3.2 discusses the impact of temperature effects on the oscillations of superfluid NSs and formulates an approxi-

mate method for calculating the oscillation spectra. Section 3.3 briefly discusses the main results concerning damping of oscillations in superfluid NSs. In section 3.4 a specific class of oscillations, thermal and composition g -modes, which can exist only in the complex mixtures of the inner NS layers, are considered. Finally, section 3.5 elucidates the role of diffusion in damping of global NS oscillation modes.

Chapter 4 discusses the works devoted to generalization of the hydrodynamics of superfluid mixtures from chapter 2 to the case of rotating, magnetized, dissipative, relativistic NSs, containing topological defects: Feynman-Onsager and Abrikosov vortices.

Chapter 5 is devoted to the study of oscillations in rotating superfluid NSs (mainly, to r -modes), and to a detailed analysis of a number of scenarios allowing to suppress the r -mode instability in low-mass X-ray binaries. The constraints on the properties of superdense matter following from these scenarios are also discussed.

In chapter 6 a self-consistent method for calculating the particle velocities and electric field in NSs for a given magnetic field configuration is developed. A new mechanism for the accelerated evolution of the magnetic field in the inner layers of both normal and superconducting NSs is proposed; impact of this mechanism on the field evolution in magnetars and ordinary radiopulsars is discussed.

Chapter 7 is devoted to developing the theory of the accreted NS crust, in particular, to determining the equation of state and the energy release in the accreting crust. Section 7.1 contains a general introduction, the problem set up, and the results for the equation of state of the accreted crust. Section 7.2 discusses calculations of the energy release due to nonequilibrium nuclear reactions in the crust. Section 7.3 introduces a new thermodynamic potential that should be minimized in the nonequilibrium crust instead of the standard Gibbs potential, and discusses a specific instability that converts atomic nuclei into neutrons near the crust-core boundary.

Finally, chapter 8 contains a brief discussion of a number of effects and processes not directly related to the results of the previous chapters. Section 8.1 is introduction. Section 8.2 considers the effect of dynamical variation of the nucleon gap in the moving NS matter and analyzes impact of this effect on NS dynamics. Section 8.3 discusses a new efficient heating mechanism in spinning down millisecond pulsars.

Note that most of the results of the second and (to a much lesser extent) the third chapter were obtained by the candidate more than 10 years ago and therefore are not included in the defense statements. Still, these results constitute a basis for the further presentation and are thus included in the proposed work.

1.2 Personal contribution of the candidate to the results of dissertation

The content of the dissertation is chosen in such a way that the contribution of the candidate to the results presented in the defense statements is decisive.

1.3 Degree of reliability of the results obtained by the candidate

The reliability of the results is confirmed by the fact that they have been published in international peer-reviewed journals (such as Physical Review Letters, MNRAS, Physical Review D), reported at seminars of the theoretical astrophysics department of the Ioffe Institute and other scientific centers, at all-Russian and international conferences and have been time-tested. A number of results obtained by the candidate are reproduced and confirmed in the works of independent researchers published in peer-reviewed journals. The candidate's works are well-known among specialists and are widely cited.

1.4 Scientific novelty of work

The original results, which were obtained by the candidate for the first time, are discussed in chapters 2–8 and summarized in the defense statements in the end of the scientific report.

1.5 Practical relevance

The results of this dissertation provide the basis for a systematic study of a wide range of dynamical processes in superfluid and superconducting NSs.

In particular, the relativistic dissipative magnetohydrodynamics developed in this work, which describes dynamical phenomena in superfluid/superconducting mixtures at finite temperatures, can be used to study the oscillations and magneto-thermal evolution of magnetized and rotating NSs.

An adequate description of the oscillations in superfluid NSs, taking into account the effects of finite temperatures, is crucial for modeling the instabilities in rotating NSs, as well as for modeling the gravitational signal from coalescing NSs. Such a signal can carry “imprints” of the processes occurring in the inner layers of inspiralling NSs. The correct interpretation of the signal is important for imposing constraints on the properties of superdense matter.

The temperature-dependent avoided-crossings (“resonances”) of superfluid and normal oscillation modes and the mechanism of enhanced damping of oscillations near the resonances, found by the candidate, were used to explain the observed stability of rapidly rotating NSs in low-mass X-ray binaries with respect to excitation of r -modes. Using the proposed theory of resonant stabilization of r -modes, an original method was formulated for studying the internal structure of NSs. It was subsequently applied to impose new constraints on the parameters of neutron superfluidity in the NS inner layers. Further development of this method, based on more refined calculations of oscillation spectra and new observations, will eventually lead to more detailed predictions about the properties of superdense matter.

The proposed method for calculating particle velocities, perturbations of chemical potentials, and the self-consistent electric field for a given configuration of the magnetic field can be used in future calculations of the magnetic field evolution in normal and superconducting NSs. The mechanism of accelerated evolution of the magnetic field found in the proposed work should be taken into account in future calculations and can significantly affect the interpretation of observations of magnetized NSs.

As shown in the dissertation, the effect of redistribution of free neutrons in the inner crust of accreted NSs modifies the crustal equation of state and strongly affects the deep crustal heating. These results indicate a need to revise the standard cooling theory of such sources, as well as to reinterpret available observations of cooling NSs in low-mass X-ray binaries.

2 Hydrodynamics of superfluid mixtures in NSs: calculation of a number of key microscopic parameters of the theory [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]

2.1 Introduction: hydrodynamic equations, key parameters of the theory

The nonrelativistic hydrodynamics of a superfluid liquid composed of identical particles – the so-called two-fluid model – has been developed mainly in the works of Tisza [R11], Landau [R12, R13], and Khalatnikov [R14]. In such hydrodynamics, the mass-current density is given by

$$\mathbf{j} = (\rho - \rho_s)\mathbf{u} + \rho_s\mathbf{V}_s, \quad (1)$$

where \mathbf{V}_s is the velocity of the superfluid component; \mathbf{u} is the velocity of the normal (non-superfluid) component of the fluid; ρ is the density; ρ_s is the superfluid density, which varies from 0 at temperature $T \geq T_c$ to ρ at $T = 0$ (T_c is the critical temperature for transition into superfluid state).

Unfortunately, the standard hydrodynamics of a single-component fluid is insufficient to describe the processes occurring in NSs, because the matter of NS inner layers is a mixture of strongly interacting liquids, which, moreover, is relativistic.

A generalization of nonrelativistic superfluid hydrodynamics to superfluid/superconducting mixtures has been made in [R15, R16, R17, R18, R19]. Subsequently, this hydrodynamics has been studied (e.g., [R20, R21]) in application to NSs. An important difference between the hydrodynamics of mixtures and superfluid hydrodynamics [R12, R13] is the so-called Andreev-Bashkin effect [R17]. It states that the superfluid motion of particles of one species contributes to the mass current density of particles of another species. Assume, for simplicity, that there is a mixture of two superfluid species, n and p , which can move with the superfluid velocities \mathbf{V}_{sn} and \mathbf{V}_{sp} , respectively. Then the mass current density for particles of each species is given by the formulas

$$\mathbf{j}_n = (\rho_n - \rho_{nn} - \rho_{np})\mathbf{u} + \rho_{nn}\mathbf{V}_{sn} + \rho_{np}\mathbf{V}_{sp}, \quad (2)$$

$$\mathbf{j}_p = (\rho_p - \rho_{pn} - \rho_{pp})\mathbf{u} + \rho_{pn}\mathbf{V}_{sn} + \rho_{pp}\mathbf{V}_{sp}. \quad (3)$$

The Andreev-Bashkin effect manifests itself in the appearance of the superfluid density matrix ρ_{ik} with nonzero off-diagonal elements ρ_{np} and ρ_{pn} in Eqs. (2) and (3). The superfluid density matrix (also called entrainment matrix) is a function of particle number densities and temperature. In the application to NSs this matrix was calculated, at zero temperature, in Refs. [R22, R23, R24, R25]. Calculations of ρ_{ik} at $T \neq 0$ were first performed in the candidate's works [6, 7]. To do that, Refs. [6, 7] employed the Landau Fermi-liquid theory for mixtures, generalized by

Leggett to the case of superfluidity [R26, R27]. Later, the results of [6, 7] were fully confirmed in the independent calculations of Refs. [R28, R29].

Relativistic effects have been taken into account (for a superfluid consisting of identical particles) in Refs. [R30, R31, R32, R33, R34, R35]. The relativistic hydrodynamics of mixtures was first considered, in application to NSs, in [R36, R37]. Only the limit of vanishing temperature was investigated, while dissipative effects were ignored.

In Ref. [3] the version of superfluid relativistic hydrodynamics proposed by Son [R35] has been rewritten in natural variables allowing for easy comparison with nonrelativistic equations, and generalized to the case of mixtures at finite temperatures. In the simplest case of NS matter composed of superfluid neutrons (n), superconducting protons (p), and electrons (e), the corresponding equations, neglecting dissipative effects, consist of: (i) the energy-momentum and particle conservation laws

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu j_{(j)}^\mu = 0, \quad (4)$$

where

$$T^{\mu\nu} = (P + \varepsilon) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu} + Y_{ik} \left(w_{(i)}^\mu w_{(k)}^\nu + \mu_i w_{(k)}^\mu u^\nu + \mu_k w_{(i)}^\nu u^\mu \right), \quad (5)$$

$$j_{(i)}^\mu = n_i u^\mu + Y_{ik} w_{(k)}^\mu, \quad (6)$$

$$j_{(e)}^\mu = n_e u^\mu, \quad (7)$$

(ii) potentiality condition for neutron superfluid component

$$\partial_\mu [w_{(n)\nu} + \mu_n u_\nu] - \partial_\nu [w_{(n)\mu} + \mu_n u_\mu] = 0, \quad (8)$$

and (iii) second law of thermodynamics

$$d\varepsilon = T dS + \mu_i dn_i + \mu_e dn_e + \frac{Y_{ik}}{2} d \left(w_{(i)}^\alpha w_{(k)\alpha} \right). \quad (9)$$

These equations must be supplemented by the condition of quasi-neutrality of the electron-proton liquid, which leads to the constraint [3]: $Y_{pk} w_{(k)}^\mu = 0$, as well as by the conditions of normalization and orthogonality on the four-vectors u^μ and w^μ [5]:

$$u^\mu u_\mu = -1, \quad u_\mu w_{(i)}^\mu = 0. \quad (10)$$

In the above equations, the indices $i, k = n, p$ refer to nucleons (neutrons and protons); Greek letters μ, ν, \dots denote the space-time indices. Unless otherwise stated, summation is assumed over the twice repeated indices (Latin and Greek). Further, $\varepsilon, P, S, \mu_j, n_j$ are the energy density, pressure, entropy density, chemical potential, and number density of particle species $j = n, p, e$; $g^{\mu\nu}$ is the metric tensor; u^μ is the four-velocity of normal (non-superfluid) matter component, which includes electrons, as well as neutron and proton thermal Bogoliubov excitations; $w_{(k)}^\mu$ are the four-vectors describing the superfluid degrees of freedom. In the nonrelativistic limit, the spatial part of the vector $w_{(k)}^\mu$ is proportional to the

difference between the superfluid and normal velocities. Finally, the *symmetric* matrix Y_{ik} in equations (4)–(10) is the relativistic superfluid density matrix (or relativistic entrainment matrix). It is the generalization of the matrix ρ_{ik} to the relativistic case. In the nonrelativistic limit $Y_{ik} = \rho_{ik}/(m_i m_k c^2)$, where c is the speed of light, m_i is the mass of nucleon species $i = n, p$. This crucial parameter of relativistic superfluid hydrodynamics is introduced into the theory in Ref. [3].

2.2 Relativistic entrainment matrix and response functions in superfluid mixtures

The relativistic matrix Y_{ik} was calculated in [8] for $T = 0$ and in [9] for arbitrary temperatures. The calculation is performed within the relativistic Landau Fermi-liquid theory [R38], accounting for the effects of baryon superfluidity. It is shown that the matrix Y_{ik} depends on the Landau parameters f^{ik} of the baryon (e.g., neutron-proton) mixture and the universal temperature functions $\Phi_i(T)$:

$$Y_{ik} = n_i \gamma_{ik} (1 - \Phi_i), \quad (11)$$

where

$$\gamma_{ii} = \frac{(n_i + G_{ii} m_i^*) (n_k + G_{kk} m_k^* \Phi_k) - G_{ik}^2 m_i^* m_k^* \Phi_k}{m_i^* S}, \quad (12)$$

$$\gamma_{ik} = \frac{G_{ik} n_k (1 - \Phi_k)}{S}, \quad (13)$$

$$S = (n_i + G_{ii} m_i^* \Phi_i) (n_k + G_{kk} m_k^* \Phi_k) - G_{ik}^2 m_i^* m_k^* \Phi_i \Phi_k, \quad (14)$$

$$G_{ik} = \frac{1}{9\pi^4} p_{Fi}^2 p_{Fk}^2 f_1^{ik}. \quad (15)$$

In equations (12)–(14) p_{Fi} and m_i^* are the Fermi momenta and effective masses for particle species i ; the indices i and k refer to different particle species, $i \neq k$; no summation over repeated indices is assumed.

In [8] it was shown that the matrix Y_{ik} satisfies the sum rule, valid at $T = 0$:

$$\sum_i \mu_i Y_{ik} = n_k. \quad (16)$$

This result was later confirmed in [R39].

As an example, the elements of the matrix Y_{ik} are shown in Fig. 1 as functions of temperature T for BSk24 equation of state [R40]. The figure is plotted for the density $\rho = 5 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$; the critical neutron and proton temperatures are chosen to be $T_{cn} = 6 \times 10^8 \text{ K}$ and $T_{cp} = 5 \times 10^9 \text{ K}$, respectively. One can see that the elements of the matrix change dramatically with temperature at $T \sim T_{cn}$ and $T \sim T_{cp}$ despite the fact that the NS matter is strongly degenerate. This happens because Y_{ik} depends (via the functions Φ_i) on the ratios T/T_{cn} and T/T_{cp} , which can be of the order of 1 in NSs.

As shown in [7], the entrainment matrix is directly related to the response functions of the system to a long-wave static vector perturbation. The response functions for mixtures of strongly interacting superfluid Fermi liquids have been calculated in [7] for arbitrary wave numbers q and frequencies ω of an applied

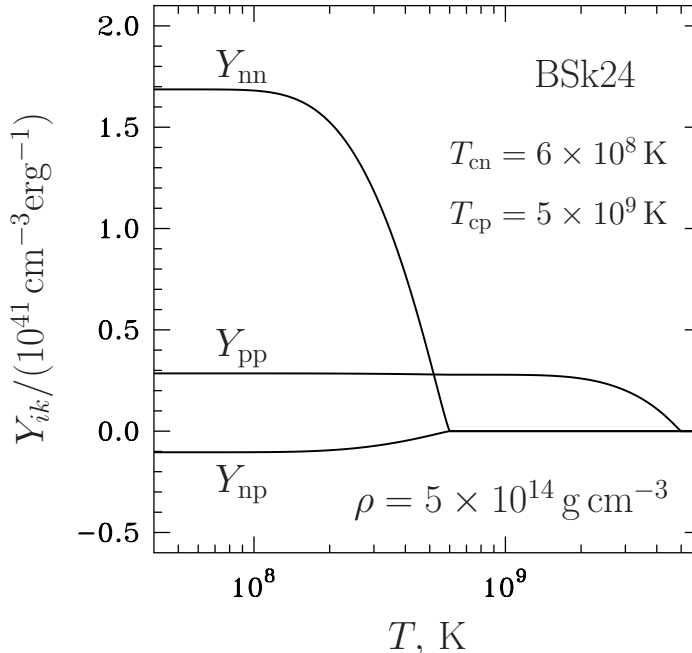


Figure 1: Elements of the entrainment matrix for neutron-proton mixture as a function of temperature T . See text for details.

external scalar or vector perturbation, satisfying the relations $\hbar q v_F \ll \mu$ and $\hbar \omega \ll \mu$ (v_F and μ are, respectively, the Fermi-velocity and chemical potential of any component of the mixture). For this purpose, a system of kinetic equations describing superfluid mixtures in an external electromagnetic field was formulated and applied. The resulting equations have a wide range of applicability and can be used, e.g., to systematically calculate the kinetic coefficients in superfluid mixtures, accounting for the Fermi-liquid effects. They can also be applied to study various modes propagating in mixtures (plasmons, phonons, ...), and to calculate the neutrino processes. As for the response functions, they explicitly arise, in particular, in the expressions for the neutrino energy losses in the processes of neutron (or proton) Cooper-pair breaking and formation [R41], which are important cooling mechanisms in superfluid NSs.

The results obtained in Ref. [7] reduce to solutions known in the literature [R26, R42, R43, R44, R45], [6] in all limiting cases.

2.3 Bulk viscosity in superfluid NS mixtures

In the non-superfluid matter the standard momentum flux density tensor, accounting for the viscous terms, takes the form [R46]

$$\Pi_{lm} = P\delta_{lm} + \rho u_l u_m - \eta \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{lm} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) - \xi \delta_{lm} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \quad (17)$$

where δ_{lm} is the Kronecker symbol; η is the shear viscosity coefficient; and ξ is the bulk viscosity coefficient.

It is well-known that for a degenerate NS matter the collisional bulk viscosity is negligible [R47]. Nevertheless, as shown in [R48, R49], large bulk viscosity can

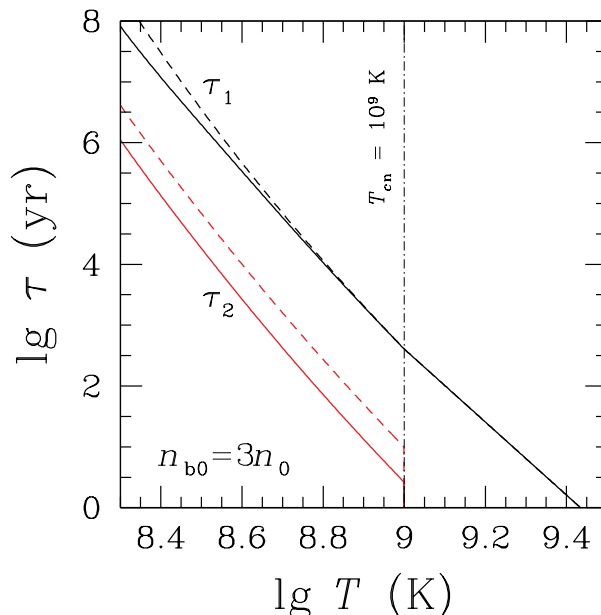
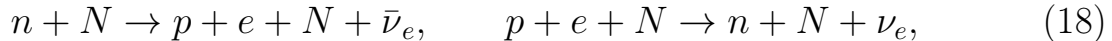


Figure 2: Damping times τ due to bulk viscosity of the superfluid (red lines) and normal (black lines) sound modes as functions of temperature, T . Dashed line: only the standard bulk viscosity coefficient ξ_2 is considered; solid lines: all 4 bulk viscosity coefficients are accounted for. See text for details.

be effectively generated by nonequilibrium processes of mutual particle transformations, for example, by the modified Urca-process



where $N = n$ or p . For superfluid NS matter, the bulk viscosity coefficient ξ has been calculated in many works (e.g., [R50, R51, R52, R53, R54, R55]). The effect of superfluidity on the bulk viscosity has usually been accounted for by introducing a gap in the baryon dispersion relation when calculating the reaction rates. However, it is known [R14, R56] that several bulk viscosity coefficients (at least 4) arise in superfluid matter. For example, the correction $\tau_{\text{bv}}^{\mu\nu}$ to the energy-momentum tensor caused by the bulk viscosity takes the form ($\perp^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$)

$$\tau_{\text{bv}}^{\mu\nu} = -\xi_1 \perp^{\mu\nu} \partial_\gamma \left[Y_{nk} w_{(k)}^\gamma \right] - \xi_2 \perp^{\mu\nu} \partial_\gamma u^\gamma \quad (19)$$

and depends on two bulk viscosity coefficients, ξ_1 and ξ_2 . Two more coefficients appear when viscosity is allowed for in the superfluid equation (8). In Ref. [4] it was shown that all these coefficients are generally non-vanishing, i.e., they are all generated by nonequilibrium reactions. These coefficients were calculated for npe -matter in [4] for the first time. This work gave rise to a number of similar studies of superfluid bulk viscosity coefficients in other phases of NS matter (e.g., [R57, R58, R59, R60, R61]).

As an example, in Fig. 2 we demonstrate the characteristic sound damping times τ due to the bulk viscosity. The figure shows τ as a function of temperature for superfluid npe -matter with the baryon number density $n_b = 3n_0$ ($n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ is the baryon number density in atomic nuclei). The critical

temperature of neutron superfluidity is chosen to be $T_{cn} = 10^9$ K. The figure is plotted for two sound modes existing in such matter, the “normal” one (whose velocity is virtually the same as in the non-superfluid matter; shown in black) and the “superfluid” one (whose velocity depends strongly on T and which does not exist in normal matter; shown in red). The dashed lines show τ due to the “standard” bulk viscosity coefficient ξ_2 , which has been the only coefficient previously considered in the literature. The solid lines show the calculation allowing for all four bulk viscosity coefficients found in [4]. One sees that account for all bulk viscosity coefficients can decrease τ for sound waves in superfluid nucleon matter by a factor of few.

2.4 Superfluid hydrodynamics and bulk viscosity in nucleon-hyperon mixtures; sound waves and their damping in nucleon-hyperon mixtures

Many microscopic theories predict the appearance of hyperons in addition to nucleons in the central regions of massive NSs [R62]. It is of considerable interest to study nucleon-hyperon matter, particularly, because it has a much larger bulk viscosity comparing to nucleon matter. This could have important implications for the theory of NS oscillations (especially, for the mechanism of r -mode damping). Therefore, in this section we extend the results obtained in sections 2.1–2.3 for nucleon matter to the more general case of superfluid and superconducting nucleon-hyperon matter. Such a generalization has been achieved in Refs. [8, 9, 10, 11, 12, 13].

In particular, Refs. [8, 9] found analytical expressions for the entrainment matrix of nucleon-hyperon matter; Ref. [10] calculated all bulk viscosity coefficients (16 in total, of which only 3 are independent), and revealed and corrected a widespread error in the literature in calculating the bulk viscosity coefficient of normal nucleon-hyperon matter. These results were used in Ref. [11] to systematically study sound waves in superfluid nucleon-hyperon mixture and their damping due to shear and bulk viscosities in the regime of both fast and slow reactions of mutual particle transformations. In addition, in Ref. [13], the rates of nonequilibrium reactions involving hyperons were calculated for a number of modern nucleon-hyperon equations of state in the one-meson exchange approximation. These rates have been used to derive the updated expressions for the bulk viscosity [13]. Finally, in Ref. [12] the three nucleon-hyperon equations of state obtained within the relativistic mean-field approach, were used to generate tables containing all the necessary information for modeling the superfluid NS oscillations. The tables contain the entrainment matrix elements, Landau parameters, effective masses, and particle chemical potentials as functions of n_b . They are publicly available on the Internet and have already been used in simulations of NS oscillations, thermal evolution, and in other calculations in Refs. [R63, R64, R65, R66, R67, R68, R69].

2.5 Diffusion as a leading dissipation mechanism in superconducting NSs

Usually, in studies of NS oscillations, the bulk and shear viscosity are considered as the main sources of dissipation. It is well-known that the effect of thermal conductivity on the oscillation damping is negligible [R70]. However, the matter of the inner layers of NSs consists of mixtures of different particle species. In

mixtures, as one knows, there is an additional mechanism of dissipation related to particle diffusion. The question is how effective it is in NSs.

As an example, consider a normal (non-superfluid and non-superconducting) matter consisting of neutrons, protons, and electrons. Each of the components $\alpha, \beta = n, p, e$ has a different velocity $\mathbf{u}_\alpha \neq \mathbf{u}_\beta$. In the hydrodynamic regime, however, these velocities are very close to each other because of frequent collisions (friction between different particle species). The loss of mechanical energy due to diffusion (for instance, in a sound wave) is equal to [R71]

$$\dot{E}_{\text{diff}} = -\frac{1}{2} \int \sum_{\alpha\beta} J_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta)^2 dV, \quad (20)$$

where $J_{\alpha\beta}$ is the momentum transfer rate between the particle species α and β , the quantity provided by the transport theory; integration is carried out over the system volume, V .

For npe -matter in a sound wave, electrons and protons are coupled by the quasi-neutrality condition, that is, the velocities of the electron and proton components coincide with great accuracy. In this case, the main contribution to the dissipation is provided by the friction of neutrons with protons. Using the system of transport equations for particles, it can be shown that the corresponding contribution to the dissipation of mechanical energy equals

$$\dot{E}_{\text{diff}} \approx - \int \frac{1}{J_{np}} \left[\frac{n_{n0} n_{e0}}{n_{b0}} \nabla \delta\mu \right]^2 dV, \quad (21)$$

where $\delta\mu \equiv \mu_n - \mu_p - \mu_e$ is the chemical potential imbalance of neutrons, protons, and electrons. The integrand in (21) is inversely proportional to J_{np} , which is very large because of the extremely effective collision friction between neutrons and protons. As a result, diffusion is inefficient for sound damping in normal NS matter.

The situation changes dramatically if protons in a NS are in the superconducting state, which is predicted by modern microscopic theories [R72, R2, R3]. In this case, neutron scattering on protons is completely suppressed at $T \ll T_{cp}$. Consequently, neutrons are mainly interact with electrons (due to electromagnetic rather than strong interaction). It can be shown that in this case

$$\dot{E}_{\text{diff}} = - \int \frac{1}{J_{en}} \left[\frac{n_{n0} n_{e0}}{n_{b0}} \nabla \delta\mu \right]^2 dV. \quad (22)$$

Since $J_{en} \ll J_{np}$, the dissipation is stronger than in nonsuperconducting matter. This result is not surprising: the limit of ideal (nondissipative) hydrodynamics corresponds to infinite friction between the components of the mixture.

To illustrate the effect, Fig. 3 shows the ratio $\tau_{\text{diff}}/\tau_\eta$ of the characteristic damping times due to diffusion, τ_{diff} , and shear viscosity, τ_η , as a function of baryon number density, n_b . The figure is plotted for npe -matter with an admixture of muons. The dashed lines show results for normal matter at $T = 10^7$ K and $T = 10^8$ K; the solid line represents the ratio $\tau_{\text{diff}}/\tau_\eta$ for superconducting matter at $T \ll T_{cp}$. The employed equation of state is BSk24 [R40]; the momentum

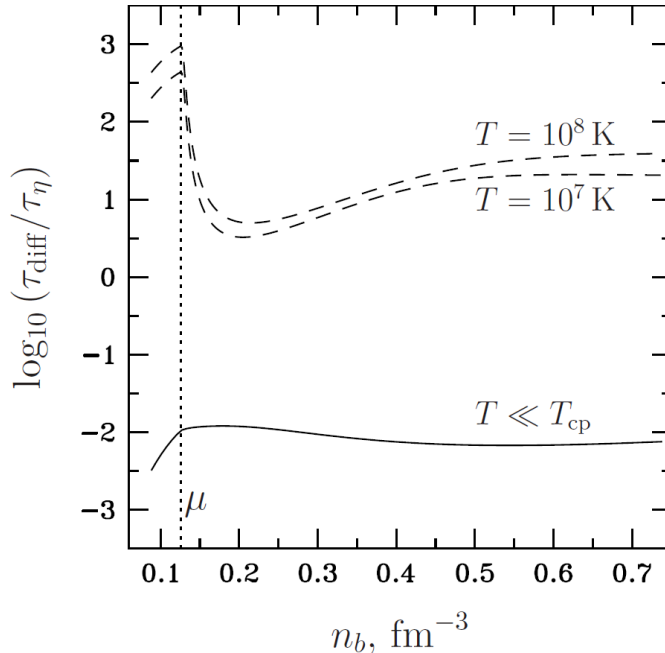


Figure 3: $\tau_{\text{diff}}/\tau_{\eta}$ as a function of n_b for sound waves. Dashes: $\tau_{\text{diff}}/\tau_{\eta}$ for normal matter at $T = 10^7$ K and $T = 10^8$ K. Solid line: $\tau_{\text{diff}}/\tau_{\eta}$ for superconducting matter and $T \ll T_{cp}$. The vertical dots show the threshold for muon appearance. See text for details.

transfer rates J_{np} , J_{ne} are taken from [15]; the shear viscosity coefficient is from [R73]. The figure demonstrates that the diffusion is about 100 times more effective (for sound waves) than the shear viscosity in superconducting NSs.

3 Global oscillations of superfluid nonrotating NSs: the spectrum and damping of various oscillation modes [3, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 14]

3.1 Introduction

NS oscillations can arise either as a result of the development of an internal instability (e.g., r -mode instability or instability caused by magnetic activity in magnetars) or due to an external perturbation (tidal interaction of coalescing NSs; accretion in a binary system, etc.). The excitation of oscillations in inspiraling NSs is particularly interesting because these oscillations affect the accompanying gravitational signal (e.g., [R74, R75]). Generally, f -modes are excited during inspiral, but it can also be p - and g -modes (e.g., [R76]), as well as inertial modes [R77]. It is important to be able to describe the oscillations correctly, because the information encoded in the gravitational signal from inspiraling and oscillating NSs is used to impose constraints on the properties of superdense matter (e.g., [R78]).

The theory of NS oscillations has a long story. The first who considered global oscillations of NSs within full GR were Chandrasekar [R79] and Thorne with collaborators in a series of works in 1967–1970 [R80, R81, R82, R83, R84]. The theory was further developed in Refs. [R85, R86, R87, R70, R88, R89, R90, R91, R92] and many others.

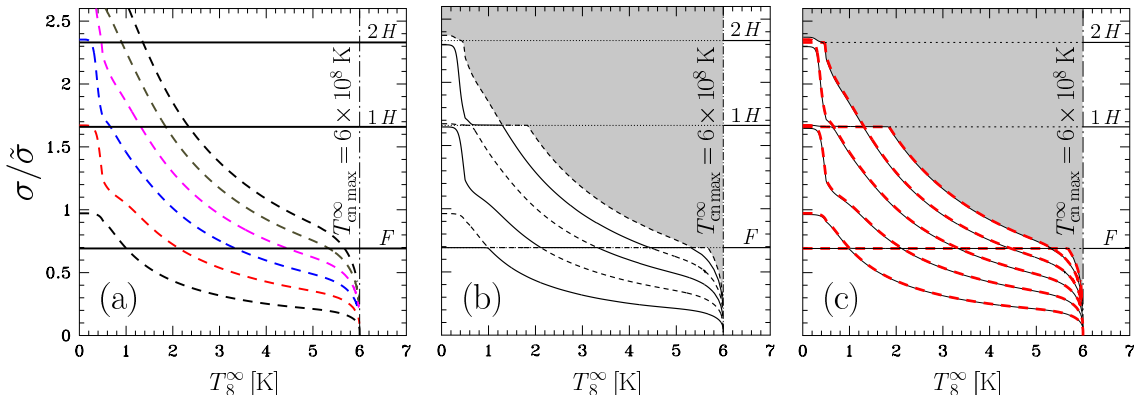


Figure 4: Radial oscillation frequencies σ of a superfluid star in units of $\bar{\sigma} = c/R = 2.46 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$ as a function of the redshifted temperature T^∞ (in units of 10^8 K) for a number of oscillation modes. Panel (a): approximate solution for completely decoupled superfluid and normal oscillation modes; panel (b): accurate solution without any approximation; panel (c): approximate solution superimposed on the accurate solution. In the gray region the spectrum was not plotted; the vertical dashed line shows the value of the maximum critical temperature for the employed neutron superfluidity model from Ref. [19].

The first study of global non-radial oscillations of superfluid NSs was published by Lindblom and Mendell [R93]. This pioneering work was followed by many others (see, e.g., Refs. [R94, R95, R96, R97, R98, R99, R100, R101, R102]), but they all considered oscillations of various types ignoring GR and finite stellar temperature effects ($T = 0$). The oscillations of superfluid NSs in the framework of GR have been analyzed only in Refs. [R103, R104, R91, R92], where the authors have made a number of simplifying assumptions (polytropic equation of state, approximation of vanishing temperature).

When studying dissipation of oscillations, the effect of superfluidity, as a rule, was taken into account only on transport coefficients, while the hydrodynamics employed was standard (non-superfluid). The exception is a few works, in particular, [R105, R95, R97, R106, R107, R58, R108]. However, all these works considered Newtonian stars and used superfluid hydrodynamics, valid at zero temperature.

Thus, the main candidate's goal in this chapter was to study the global oscillations of superfluid NSs and their dissipation in the framework of GR and accounting for the finite-temperature effects.

3.2 Influence of finite-temperature effects on NS oscillations; approximate method to calculate the oscillation spectra

The main properties of temperature-dependent spectra of superfluid NSs can be explained using, as an example, a radially oscillating superfluid NS [3, 16, 19]. These properties turn out to be very similar for other oscillation types (particularly, for f -, p -, and r -modes).

Figure 4(b) shows the typical eigenfrequency spectrum of a radially oscillating star with the mass $M = 1.4M_\odot$ and radius $R = 12.2$ km as a function of the redshifted temperature, T^∞ [19]. Here and below the superscript $^\infty$ indicates that the corresponding quantity is redshifted. The spectrum is plotted for the neutron superfluidity model with the maximum of the redshifted critical temperature at

the center of the star $T_{cn,\max}^\infty = 6 \times 10^8$ K (model 1 from Ref. [19]). In the gray region the spectrum was not calculated. At $T > T_{cn,\max}$ the star is completely non-superfluid and in the frequency domain shown in the figure there are only 3 oscillation modes (F , $1H$, $2H$), which are independent of temperature, as it should be in a strongly degenerate normal star. At $T < T_{cn,\max}$ the number of modes increases. The first 6 oscillation modes of the superfluid star are shown by alternating solid and dashed lines. The main features of the oscillation spectrum (correct also for other oscillation types) are: (i) strong temperature dependence of oscillation eigenfrequencies; (ii) the presence of very close avoided crossings of modes; (iii) the fact that at any temperature of the star there are frequencies in its oscillation spectrum, which are almost identical to those of normal (nonsuperfluid) star of the same mass.²

All these features can be explained under the assumption of weak coupling of the equations describing purely superfluid and non-superfluid (normal) oscillation modes. This is the basis of the approximate method of calculation of NS oscillation spectra [18, 19], which allows to dramatically simplify all calculations within full GR. This method is briefly described below.

Already in the pioneering paper by Lindblom and Mendell [R93], who considered the oscillations of superfluid Newtonian NSs in the $T = 0$ limit, it was noticed that the global oscillations of superfluid NSs can be divided into two types: (i) non-superfluid (or normal) modes, whose oscillation frequencies practically coincide with eigenfrequencies of the non-superfluid star and (ii) superfluid modes, which almost do not perturb the mass current density of matter. Subsequent studies confirmed the result of Lindblom and Mendell, but no explanation of this fact was given. In Ref. [18] we propose such an explanation for a NS model with the nucleon core (*npe*-matter). In particular, we demonstrate that non-superfluid and superfluid modes are indeed described by two weakly coupled systems of equations, interacting by means of just one dimensionless parameter

$$s = \frac{n_e \partial P(n_b, n_e) / \partial n_e}{n_b \partial P(n_b, n_e) / \partial n_b}, \quad (23)$$

which depends on the equation of state. The parameter s is quite small for realistic equations of state, $|s| \sim 0.01 - 0.05$. This allows us to simplify calculations of the spectra of superfluid NSs by finding the eigenfrequencies with just a few percent error already in the zero approximation in s ($s = 0$, when the systems are completely decoupled).

In the $s = 0$ approximation, the non-superfluid (normal) modes coincide exactly with the modes of a nonsuperfluid star (but the damping times for these modes are different!), while the superfluid modes have the following properties: (1) they do not perturb the metric, i.e., do not emit gravitational waves; (2) they do not perturb the pressure and baryon current density; (3) they are localized in the superfluid region and do not appear at the surface.

Figure 4(a) shows the spectrum of a radially oscillating superfluid NS calculated in the $s = 0$ approximation. The superfluid modes are shown by dashed lines, the normal modes are shown by solid lines. It can be seen that instead of the avoided-crossings in the accurate solution [Fig. 4(b)] there are ordinary crossings

²Note that the latter property does not hold for g -modes [22].

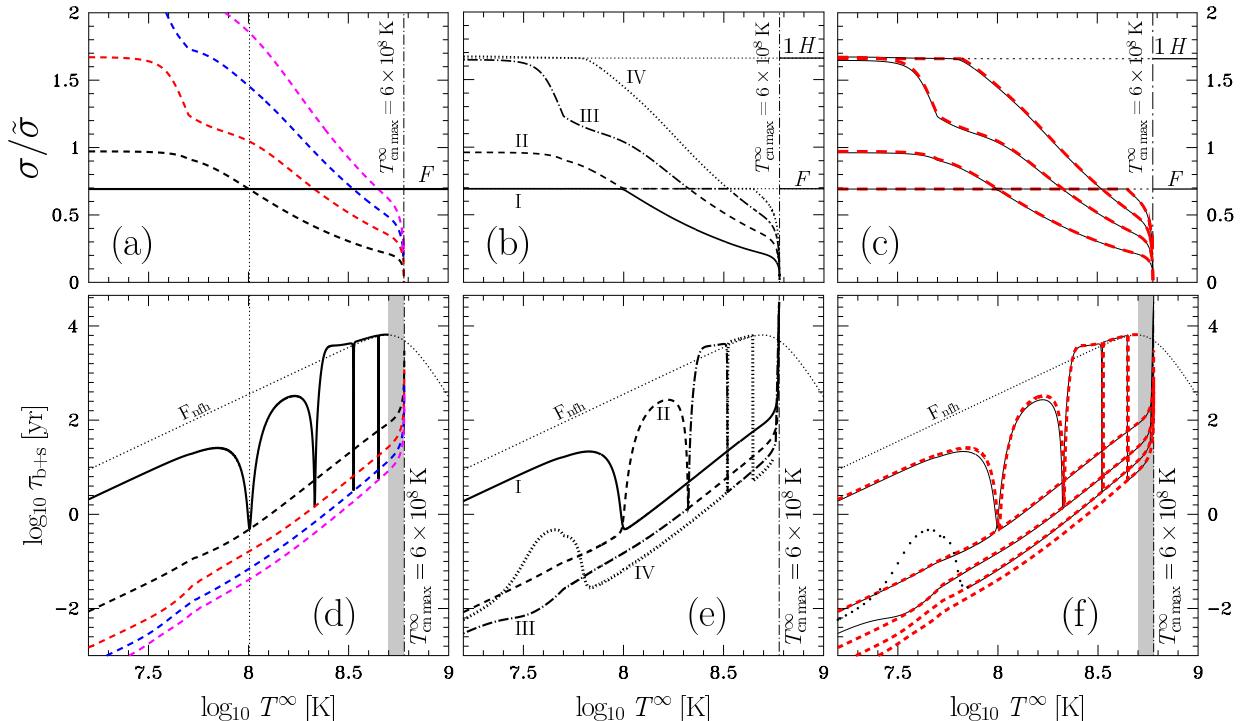


Figure 5: Eigenfrequencies σ [panels (a, b, c)] and damping times τ_{b+s} [panels (d, e, f)] of a radially oscillating NS versus T^∞ for model 1 of nucleon superfluidity from Ref. [19]. Panels (a, d): Approximate solution (normal F -mode and first four superfluid modes 1, ..., 4 are shown by solid and dashed lines, respectively); Panels (b, e): Exact solution (first four exact modes I, ..., IV are shown by solid, dashed, dot-dashed, and dotted lines, respectively); Panels (c, f): Both approximate (dashed lines) and exact (solid lines) solutions. Panels (a, b, c) are the same spectra as those plotted, respectively, in Fig. 4(a, b, c). Normal F -mode is not shown in the shaded region because of technical reasons (too many resonances). Dotted lines in panels (d, e, f) show damping times for F -mode calculated using ordinary normal-fluid hydrodynamics. See Ref. [19] for more details.

of modes in the approximate solution: superfluid and normal modes “do not feel” each other, since the corresponding equations are completely independent in the $s = 0$ limit. To compare the two solutions, accurate and approximate, they are both shown in Fig. 4(c). The difference between them does not exceed $\sim 1 - 3\%$.

Using the method of approximate decoupling of modes, detailed temperature-dependent spectra of f - and p -modes were calculated in Refs. [17, 19] for realistic models of superfluid NSs. Later, the validity of this method was additionally confirmed in Ref. [20] by accurate (without any approximation) calculation of the spectrum of nonradial oscillations. The method was further generalized to nucleon-hyperon composition of NS cores in Ref. [23].

3.3 Damping of superfluid NS oscillations

The damping of superfluid NS oscillations has been studied in detail in Ref. [19] in full GR, taking into account the effects of finite temperatures. It was found that not only the oscillation spectrum, but also the dissipation timescales are well described by approximate method of superfluid and normal mode decoupling. Calculations revealed that superfluid modes decay 1–2 orders of magnitude faster than normal modes (this result is valid for dissipation due to shear and bulk

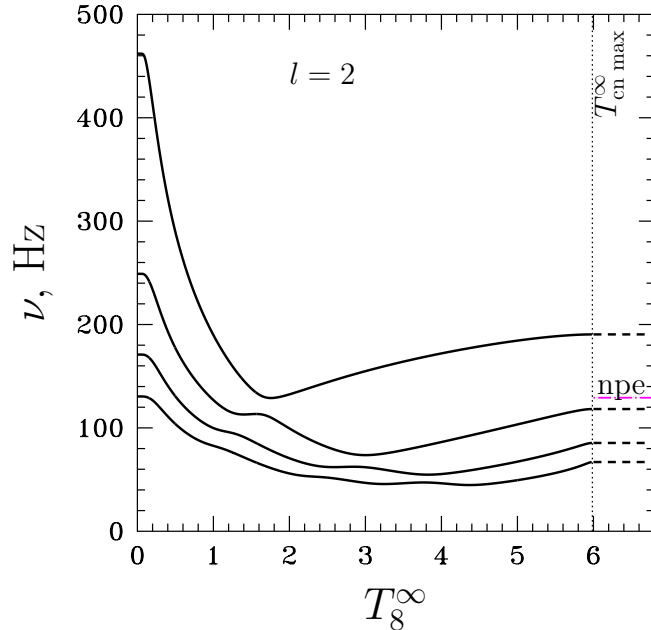


Figure 6: Spectrum of the quadrupole ($l = 2$) g -mode as a function of T_8^∞ for the model II of nucleon superfluidity from [22]. Solid/dashed lines show the eigenfrequencies ν for the first 4 g -modes in superfluid/non-superfluid NSs with $npe\mu$ compositions of their cores. Dot-dashed line indicates the eigenfrequency of the fundamental g -mode of a non-superfluid star with npe -core composition. Dotted line shows the maximum of the neutron critical temperature in the core (which, for the chosen superfluidity model, is reached at the stellar center).

viscosities). Nevertheless, near resonances (when eigenfrequencies of normal and superfluid modes coincide) the damping of normal modes becomes comparable to that of superfluid modes. Indeed, near the resonances superfluid modes admix to the normal solutions, and this leads to increasing dissipation. Another important result was that the damping times of normal modes calculated within the framework of superfluid hydrodynamics can noticeably (up to a factor of 10) differ from the corresponding timescales calculated within the normal fluid hydrodynamics (as was usually done in the literature). These properties are inherent to both radial modes, as well as to f - and p -modes, and are illustrated in Fig. 5 (see the caption to the figure).

3.4 Thermal and composition g -modes in superfluid NSs

The g -modes are the class of oscillations, whose restoring force is buoyancy. If buoyancy is caused by the gradient of chemical composition, one calls them composition g -modes, if by gradient of temperature, one talks about thermal g -modes. In matter unstable with respect to g -mode oscillations, convection is developed. The g -modes in NSs have been studied in a number of works (e.g., [R109, R110, R111]). In all these works, the NS matter was considered non-superfluid.

Up until recently, it was generally accepted (e.g., [R94, R112, R104, R96]) that g -modes are absent in superfluid NS matter, which is a consequence of a substantial modification of the hydrodynamic equations for such matter (for instance, it is well-known that g -modes are absent in superfluid helium-4). This conclusion was based on the analysis of simplified composition of NS inner layers (neutrons,

protons, and electrons) and on the assumption of vanishing stellar temperature, $T = 0$.

In our works [21, 22] we have shown that, generally, this conclusion is incorrect and that allowing for the finite temperatures and/or admixture of additional particles (for example, muons), leads to emergence of g -modes in the oscillation spectrum of the star. For example, Fig. 6 shows a fragment of the g -mode spectrum in a superfluid NS with the core composed of $npe\mu$ -matter. The frequencies of the first 4 oscillation modes are shown as functions of the redshifted stellar temperature, T^∞ . As in the case of radial oscillations, as well as f - and p -modes, the frequencies of g -modes depend on temperature in spite of the fact that the NS matter is strongly degenerate. At the same time, for a non-superfluid star (dashes in the figure) the frequencies do not depend on T^∞ . It is noteworthy that the maximum frequency of g -modes in superfluid $npe\mu$ -matter can reach ~ 500 Hz and be several times higher than the corresponding frequency in a normal star.

The frequencies of g -modes strongly depend on T for two reasons: (i) because the size of the superfluid region depends on T for realistic superfluidity models; (ii) because the Brunt-Väisälä frequency \mathcal{N} (the characteristic frequency of g -modes) depends on the entrainment matrix, which in turn depends on T :

$$\mathcal{N}^2 = -\frac{g}{\mu_n n_b} e^{\nu-\lambda} Y(T) \frac{\partial w(P, \mu_n, x_{e\mu})}{\partial x_{e\mu}} \nabla x_{e\mu}, \quad (24)$$

where $Y(T)$ is a known function of the (temperature-dependent) entrainment matrix; g is the gravitational acceleration; ν and λ are metric coefficients; $w = \varepsilon + P$; $x_{e\mu} = n_\mu/n_e$.

In addition, Ref. [21] has shown that, under certain conditions, in superfluid npe -matter convection is possible, and, depending on the superfluidity model and equation of state, it can occur either when matter is heated or when it is cooled from below.

The results obtained in [21, 22] were later reproduced by three independent groups [R113, R75, R114, R115] and generalized to the case of nucleon-hyperon matter in Ref. [23], for the first time in the literature. It is noteworthy that the maximum frequencies of g -modes in nucleon-hyperon matter can be even larger than in $npe\mu$ -matter and reach values of the order of 750 Hz. The results of [23] were confirmed in [R115] and led to a series of papers devoted to g -mode calculations in exotic phases of NS matter (e.g., [R116, R117, R118, R65, R119, R120]).

3.5 Role of the diffusion on damping of global oscillation modes in NSs

The effect of diffusion (section 2.5) on damping of global oscillations in superconducting NSs was studied in detail in Ref. [14]. It is shown that diffusion can be the most effective mechanism of dissipation, outranging the shear and bulk viscosities in efficiency. This statement is illustrated in Fig. 7, where the characteristic damping times τ due to diffusion (black dots) and shear viscosity (red dots) are presented as functions of oscillation frequency, σ . The figure is plotted for a NS with the mass $M = 1.4M_\odot$. The stellar temperature is $T^\infty = 10^8$ K, and is assumed to be much lower than the proton critical temperature, T_{cp} . For

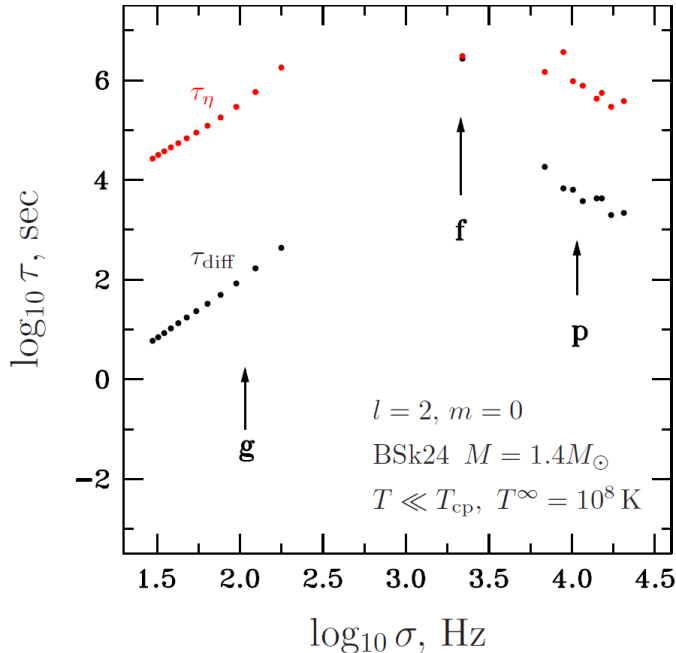


Figure 7: Damping times as functions of oscillation frequency σ for the first f -, p -, and g -modes with $l = 2$ in superconducting NSs due to shear viscosity (red dots) and diffusion (black dots).

such T^∞ , the bulk viscosity is less efficient dissipation agent than the shear viscosity, so the corresponding τ is not presented. Fig. 7 shows, as an example, τ for g -, p -, and f -modes with the azimuthal quantum number $l = 2$. It can be seen that g - and p -modes are damped, respectively, by factors of ~ 5000 and ~ 100 more effectively by diffusion than by shear viscosity. At the same time for f -modes, which are practically incompressible, the difference is not so dramatic (but diffusion is still more efficient).

The obtained results indicate that all the phenomena leading to excitation of oscillation modes in superconducting NSs should be revisited. In particular, an extremely effective dissipation of g - and p -modes by diffusion can affect the gravitational signal during the late stages of binary NS inspirals. This may happen as a result of suppression of the p - g instability, in which a pair of modes, consisting of a low-frequency g -mode and a high-frequency p -mode [R76, R121], is excited in an NS distorted by the tidal interaction. A detailed study of these issues, however, is beyond the scope of the proposed dissertation.

4 Relativistic dissipative magnetohydrodynamics of superfluid mixtures in NSs: accounting for the effects of finite temperatures, Feynman-Onsager and Abrikosov vortices [5, 24, 15, 25]

It is well-known that NSs rotate and have strong magnetic fields. Superfluidity and superconductivity of baryons leads to the appearance of Feynman-Onsager vortices in rotating NSs and Abrikosov vortices (in the case of a type II superconductor) in magnetized NSs. It is important to understand what are the dynamical properties of NSs with vortices. They play a major role in stellar oscillations, NS magneto-thermal evolution, and likely responsible for the pulsar glitches. The distance between neighboring vortices is very small (much smaller

than the NS radius), there are too many of them, so one needs to develop some “smooth-averaged” description in order to treat them. The development of appropriate smooth-averaged hydrodynamic equations, incorporating vortices, began with the pioneering works of Hall and Vinen [R122, R123] and Bekarevich and Khalatnikov [R124]. These authors formulated a coarse-grained description of Feynman-Onsager vortices in liquid helium-4. In application to multicomponent NS matter, the corresponding hydrodynamic equations have been considered in [R20, R125, R126, R127, R128] and a number of other works. As a rule, the authors studied only nonrelativistic equations and restricted themselves to the limit of vanishing temperature and type II proton superconductivity. Therefore, the main goal of a series of works [5, 24, 15, 25] was to formulate a relativistic analog of equations describing superfluid/superconducting mixtures taking into account the electromagnetic field, vortices, finite-temperature effects and a wide range of dissipative effects. The necessary hydrodynamic equations were derived from the requirements of particle and energy-momentum conservation and the condition that the entropy of a closed system does not decrease. The following was done:

- The most general form of dissipative relativistic Hall-Vinen-Bekarevich-Khalatnikov hydrodynamics was formulated in Ref. [5]. It is valid at arbitrary temperature and describes an uncharged one-component fluid in the presence of vortices. Almost simultaneously with this work a similar work [R129] appeared, in which analogous equations were derived. However, Ref. [R129] considered a less general case of $T = 0$ and disregarded the effect of vortex energy on the dynamics.
- The results of Ref. [5] were generalized to charged superfluid and superconducting mixtures in [24]. Possible presence of Feynman-Onsager and Abrikosov vortices (for a superconductor of type II), or an intermediate state (for a superconductor of type I) was allowed for. All the obtained equations are applicable at arbitrary temperatures. Subsequently, Rau and Wasserman [R130] derived similar equations (using other variables) from the Carter’s convective variational principle [R32], and proved the full equivalence of both formulations.
- In Ref. [15] a relativistic dissipative magnetohydrodynamics (MHD) for non-superfluid mixtures was formulated, in which the effects of diffusion, thermal conductivity and viscosity in the magnetized NS matter were taken into account.
- Finally, the results of Refs. [24, 15] were generalized to formulate the most general (at the moment) relativistic MHD of superfluid and superconducting mixtures at finite temperatures, accounting for the presence of vortices, as well as the effects of diffusion of different particle species with respect to each other [25].

The superfluid MHD obtained in Ref. [25] is formulated for the first time not only for relativistic, but also for nonrelativistic mixtures. It describes an extremely broad range of phenomena, which is not limited just to NSs. For example, the resulting equations can describe any (not necessarily superfluid) liquid, in which the vector of electric induction is not equal to the electric field and the vector of

magnetic induction is not equal to the magnetic field. An account of diffusion in these equations leads to an interesting effect, when the diffusion current of particles of one species produces an additional force on vortices, which begin to move, acting themselves on other components of matter. In Ref. [25] it was shown how to express the diffusion coefficients emerging in our MHD through the momentum transfer rates $J_{\alpha\beta}$, calculated from the transport theory. The diffusion coefficients were expressed in two limiting cases: (i) non-superfluid matter consisting of neutrons, protons, electrons, and muons in the magnetic field, and (ii) fully superfluid and superconducting nucleons, together with electrons and muons in the presence of Abrikosov vortices. In application to NSs, the developed MHD can be used to calculate the oscillation modes and their damping in rotating relativistic NSs; to model the stellar magnetic and/or magneto-thermal evolution. This MHD has already been used to analyze the effect of diffusion on the r -mode damping [14] and to calculate the diffusion damping times for f -, p -, and g -modes (see previous chapter).

5 Oscillations of rotating NSs: r -modes and scenarios of r -mode instability suppression [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 13, 33, 34]

It was shown in 1998 [R131, R132], that NSs should be unstable with respect to excitation of the so called r -modes, which are toroidal oscillations in a rotating star, whose restoring force is the Coriolis force. Neglecting dissipation, this instability develops at any rotational frequency of an NS. Dissipation suppresses the r -mode instability in most NSs. However, working within the standard assumptions about the properties of superdense matter, dissipation is insufficient to stabilize hot and fast-rotating NSs observed in low-mass X-ray binaries (see, e.g., recent reviews [R133, R134]).

Figure 8 shows the “classical” instability window calculated with minimal assumptions about the properties of superdense matter [26, 27]. The instability window is plotted for the most unstable r -mode with the magnetic quantum number $m = 2$. The vertical axis shows the rotation frequency ν of a star, the horizontal axis – its internal temperature, T^∞ . In the region filled with gray (below the curve), the dissipation is effective enough to suppress the instability. Above the curve, the dissipation is insufficient, and the stars in the white region are unstable with respect to the excitation of r -modes. Blue filled circles show the observed neutron stars in low-mass X-ray binaries (LMXBs), for which ν and T^∞ have been measured. One sees that a number of objects appear to be unstable with respect to r -mode excitation. This presents a problem, because the excited r -mode emits gravitational waves, which carry away stellar angular momentum. As a result, such stars should decelerate rapidly (e.g., [R135], [27]). As a consequence, the probability to find NSs in the unstable region is negligible, so we should not detect them there. However, observations suggest the opposite.

A possible solution to this problem could be identification of a mechanism that enhances dissipation. However, if, for example, the aim is to stabilize all the observed NSs by shear viscosity, the latter would have to be increased by a factor of 1000, which is completely unrealistic. One can try to stabilize hot and fast-rotating NSs by the bulk viscosity, which is generated by the reactions of mutual particle transformations. For the minimal composition of NS cores (neutrons,

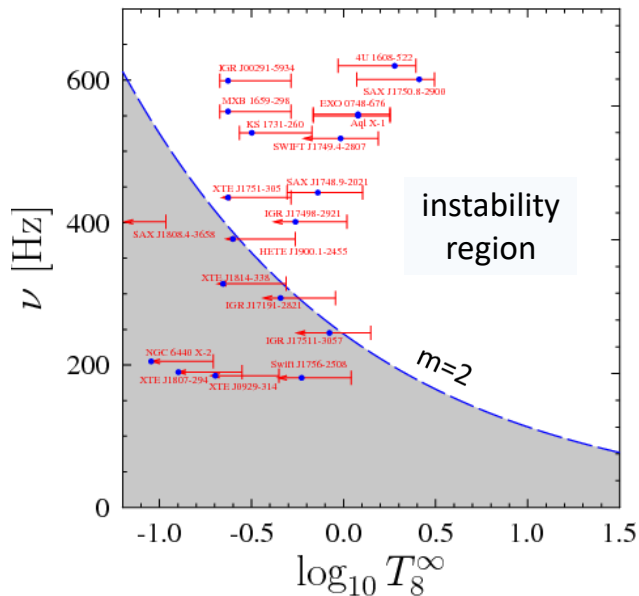


Figure 8: Rotation frequency ν as a function of redshifted internal temperature T_8^∞ (in units of 10^8 K) for a number of NSs from low-mass X-ray binary systems (data taken from [27]). Sources in the gray region are stable relative to the r -mode excitation, in the white region – unstable. The dashed curve shows the boundary of the unstable region for the most unstable r -mode with $m = 2$.

protons, leptons, $npe\mu$ -matter), the bulk viscosity is ineffective at temperatures typical to NSs in LMXBs. However, account for hyperons in the inner layers of NSs leads to a number of lepton-free reactions, which proceed faster than those involving leptons in $npe\mu$ -matter and provide effective dissipation due to the bulk viscosity in the range of temperatures typical to NSs in LMXBs. In Ref. [13], under the assumption of weak superfluidity of neutral baryons, the rates of lepton-free reactions in nucleon-hyperon matter were calculated within the one-meson exchange approximation. It turned out that inclusion of these processes allows to effectively suppress the r -mode instability in the observed NSs.

Figure 9 shows the instability windows modified by nonequilibrium reactions involving hyperons [13]. The two panels correspond to the two nucleon-hyperon equations of state, FSU2H [R136] (left panel) and TM1C [12] (right panel). The lower curve in both panels describes the boundary of the stability region with respect to the excitation of r -modes in the absence of hyperons. The stars above the curve are unstable. The other curves show the stability boundary for heavier NSs, for which hyperons are present in the inner layers and lepton-free reactions are active (to plot the figure, only the reaction $n + \Lambda \leftrightarrow \Lambda + \Lambda$ was taken into account, since, as assumed in [13], it is the only reaction, which is not suppressed by baryon superfluidity). As can be seen, the FSU2H equation of state [R136] allows one to stabilize all the observed NSs in LMXBs by the hyperon bulk viscosity, assuming that they have a sufficiently large mass ($\sim 1.9M_\odot$).

Another, more “economical” way of solving the r -mode problem was proposed by the candidate and co-authors in Refs. [26, 27]. In these works, a minimal scenario of r -mode stabilization has been developed, which does not require exotic assumptions about the properties of superdense matter (e.g., the presence of hyperons). The main idea of the scenario is to use the property of r -modes

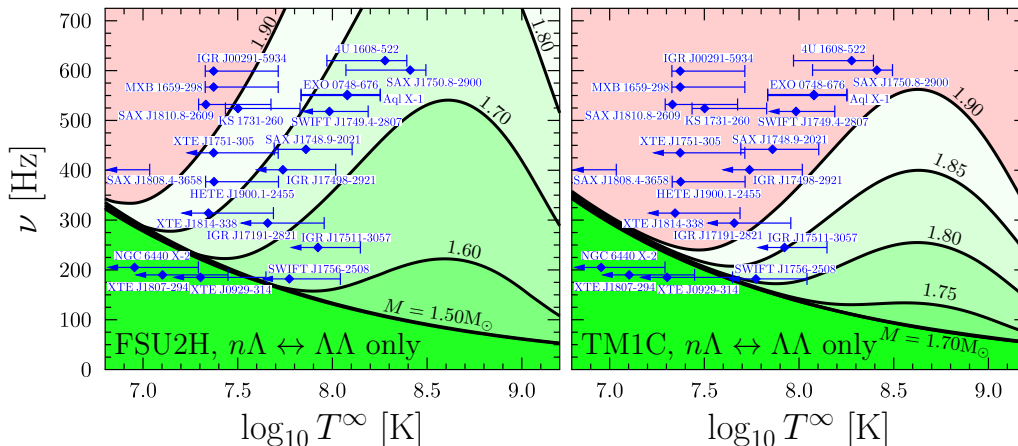


Figure 9: The instability windows for NSs of various masses (indicated in the figure) and observational data [27, 13] on the ν - T^∞ diagram for FSU2H [R136] (left panel) and TM1C [12] (right panel) nucleon-hyperon equations of state. Only one hyperon reaction $n + \Lambda \rightarrow \Lambda + \Lambda$ was taken into account to plot the figure (it was assumed that all other reactions are strongly suppressed by baryon superfluidity).

to dissipate strongly (resonantly) when their eigenfrequencies approach those of superfluid modes.

Let us remind that baryon superfluidity in NS cores leads to appearance of additional superfluid modes in the spectrum of oscillating star (see chapter 3). While normal modes are almost insensitive to the stellar temperature, the eigenfrequencies of superfluid modes strongly depend on it. As a result, normal and superfluid modes exhibit avoided-crossings at certain (resonance) temperatures [19]. In addition, the superfluid modes are very effectively damped by the mutual friction mechanism arising due to electron scattering off the neutron vortices [R137]. In the vicinity of the avoided-crossings (resonances) the eigenfunctions of the superfluid mode admix to the eigenfunctions of the normal mode, and the latter also start to dissipate strongly. As a result, the instability region is modified by the “stability peaks”.

Figure 10 shows an example of such an instability window. The two peaks in the figure correspond to the two resonances of the most unstable normal $m = 2$ r -mode with superfluid modes. This figure is based on a phenomenological spectrum of oscillation modes, assuming that the resonance temperature is independent of the rotation frequency of the star. Modeling in Refs. [26, 27] shows that during the evolution in the LMXB, an NS spends most of its life moving along the left edge of the peak. Therefore, according to this scenario, the observed hot fast-rotating stars should be on one of the peaks.

This scenario was originally proposed as a purely phenomenological one. In order to determine the positions of the peaks and thus justify the outlined scenario [26, 27], we calculated the temperature-dependent oscillation spectrum of a superfluid rotating NS [30, 32, 33, 34]. It is worth noting that this spectrum is crucially affected by the two properties: stratification of matter and the entrainment effect between neutron and proton superfluid liquid component (Andreev-Bashkin effect [R17]; chapter 2). Therefore, it is important to take both these effects into account, which proven to be a technically difficult task. Thus, as a first step, in Ref. [30], we calculated the r -mode spectrum of a superfluid NS ignoring the entrainment effect, but assuming that its core consists of neutrons, protons, elec-

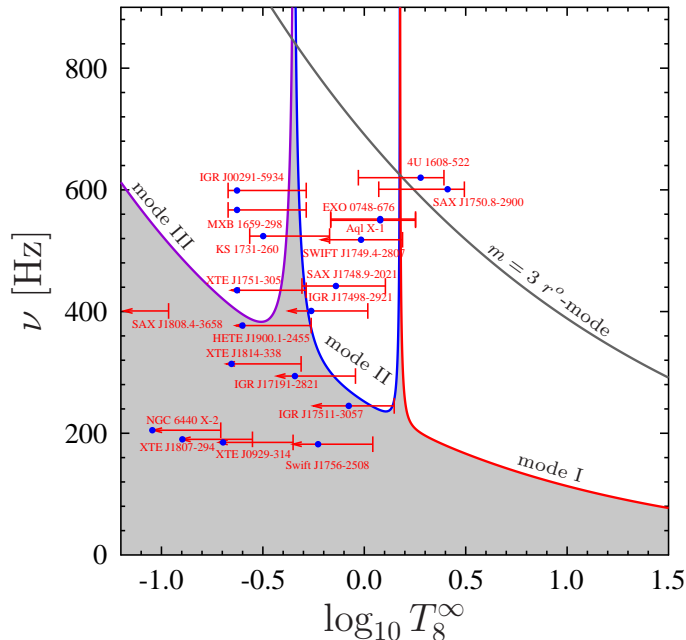


Figure 10: Instability window for the r -mode with $m = 2$, experiencing two avoided-crossings with superfluid modes, which lead to two stability peaks in the figure. The gray line marked $m = 3$ r^o -mode corresponds to the boundary of the stability region for the normal r -mode with $m = 3$. Other notations are the same as in Fig. 8.

trons, and muons ($npe\mu$ matter), i.e., it is stratified (the Brunt-Väisälä frequency is not zero). This approach is justified when neutron superfluidity and proton superconductivity are localized in different parts of the NS core. As a result, it was shown that the r -mode does experience avoided-crossings with the superfluid modes, and the resonance temperatures fall in the temperature domain observed for NSs in LMXBs. The stability peaks in this case are vertical, as assumed in the phenomenological scenario described above. In the subsequent work [32] the rotational modes of a superfluid NS were calculated taking into account the entrainment effect. However, it was assumed that the superfluid NS core consists of neutrons, protons, and electrons. As discussed in chapter 3, such matter is effectively nonstratified (the Brunt-Väisälä frequency is zero, g -modes are absent).

Finally, in Refs. [33, 34] the r -mode spectrum of a superfluid NS was calculated taking into account both effects – stratification of matter by muons ($npe\mu$ -matter) and the entrainment effect between neutrons and protons. It turned out that accounting for both these effects makes the r -mode solution a non-analytic function of rotation frequency. As a result, the standard method of r -mode calculation, which uses Taylor expansion in rotation-frequency, cannot be applied. This led us to develop an original approach to finding the r -modes in superfluid NSs. This approach was then applied to calculate the r -mode spectra and instability windows for few specific equations of state and critical temperature profiles. We found that the spectra indeed contain avoided crossings of modes, which enhance dissipation of r -modes near resonances and lead to emergence of peaks in the instability windows.

An example of such instability window is shown in Fig. 11. One sees that accounting for stratification and entrainment makes the stability peaks not vertical, which, however, does not affect the main conclusions drawn in Refs. [26, 27]

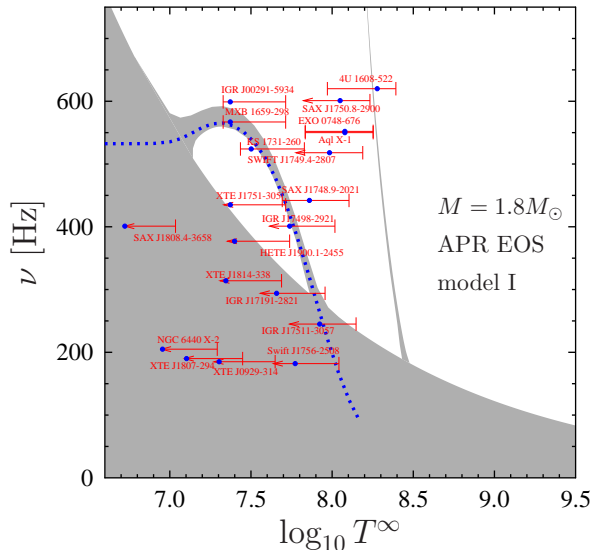


Figure 11: Instability window for the normal $m = 2$ r -mode, calculated for an NS with $M = 1.8M_{\odot}$, the APR equation of state [R138], and the nucleon superfluidity model I from [34]. The region shown in gray is stable with respect to r -mode excitation. The figure shows two stability peaks corresponding to the avoided-crossing of the normal and superfluid oscillation modes. In contrast to the phenomenological model, the peaks are not straight, since the positions of the avoided-crossings depend on the rotation frequency of the star. Other notations are the same as in Fig. 8.

on the basis of the phenomenological spectrum model. The fact that the stability peaks pass through the sources in the classical instability window justifies the phenomenological scenario of resonant r -mode stabilization and makes it the quantitative theory that explains observations.

As shown in Refs. [31, 33, 34], these results can be used to study internal structure of NSs. The idea is to constrain, e.g., neutron critical temperature profile from the requirement that each observable source should lie in the stability region. Using this requirement, it was demonstrated that to describe the available observational data within the scenario of resonant stabilization, the profile should be wide (neutrons must be superfluid in almost entire core), with the maximum of neutron critical temperature at least 3×10^8 K. Such profiles are predicted by some modern microscopic models [R2].

The proposed scenario also allowed us to predict the existence of a new class of NSs – HOFNARs (from “HOt and Fast Non-Accreting Rotators”). These are hot fast-rotating stars originating from LMXB. Their low-mass companion has stopped filling the Roche lobe and the accretion in the system has ceased. Still, these stars remain hot, as they are at one of the stability peaks in the classical instability window. Simulations show [26, 27] that they cannot “leave” the peak, but instead slowly evolve along its left edge. The r -mode in such stars remains excited in order to maintain the temperature of the star corresponding to the resonance. It is interesting to note that evolution of an NS along the peak may be accompanied by oscillations of stellar parameters [29], which could be observed in the future. Reference [28] suggested that some of the qLMXBs (hot NSs in LMXBs with almost purely thermal spectrum that have never demonstrated outbursts) may in fact be HOFNARs. Although there is no direct evidence for this assumption, a number of indirect indications support this hypothesis [28].

6 Accelerated evolution of magnetic field in NS cores [35, 36, 37, 38, 39]

Magnetic fields in NSs vary over a wide range from $10^8 - 10^9$ G to $10^{15} - 10^{16}$ G. Magnetars, whose observational properties (e.g., bursting activity, surface temperature) are determined by the magnetic field, have the largest fields. Because magnetars are hot and the magnetic field is of the order of the critical field that destroys superconductivity, they can be modeled as non-superfluid/nonsuperconducting NSs.

What do we need to model the quasi-stationary evolution of the magnetic field in the core of a normal (non-superconducting) star? Suppose that the configuration of the magnetic field in the star is known at the initial moment of time, t_0 . The magnetic field deviates the stellar matter from the diffusive and beta-equilibrium state. This process is accompanied by perturbation of chemical potentials of different particle species in the system. Particle currents arise, tending to return the system to equilibrium. As a result, a self-consistent electric field $\mathbf{E}(t_0)$ is generated. Knowledge of this field allows one, using Faraday's equation, to calculate the magnetic field at the next moment: $B(t_0 + dt) = B(t_0) - c \operatorname{rot} E(t_0)$ and to loop this procedure. Thus, the main problem in the studies of the quasi-stationary evolution of the magnetic field with time is to determine the self-consistent electric field from a given magnetic field in the system.

Since 1992 (e.g., [R139, R140, R141, R142, R143, R144, R145, R146, R147, 49, R149, R150]) the standard approach to this problem was to use the assumption that the NS matter as a whole is immobile to a good approximation (i.e., there are only relative "diffusion" motions of different particle species with respect to each other). This assumption allowed one to considerably simplify equations of multicomponent MHD and easily find a self-consistent electric field in the system. To check the validity of this assumption, the candidate and co-authors developed a self-consistent (without simplifying approximations) method for calculating the parameters of the star for a given magnetic field [35], which was then applied to study the velocity fields and electric field in Ref. [36].

Figure 12 shows a typical picture of the velocity fields in NS generated by the magnetic field. The mass of the selected star is $M = 1.4M_\odot$, the internal temperature $T^\infty = 2 \times 10^8$ K. The figure shows the equatorial cut through NS. From left to right, we present the poloidal component $\mathbf{U}_b^{(p)}$ of the mean baryon velocity, \mathbf{U}_b , as well as the diffusion (relative) velocities of protons $\mathbf{w}_p = \mathbf{u}_p - \mathbf{U}_b$ and neutrons $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n - \mathbf{U}_b$ (\mathbf{u}_n and \mathbf{u}_p are average velocities of neutron and proton species, respectively). The arrows indicate directions of the velocities, different colors show the absolute values of the decimal logarithm of these velocities. Although the figure is plotted for a particular model of an axisymmetric magnetic field (the "minimal" model from Ref. [36] with a maximum field value 5×10^{15} G), the main conclusions discussed below are practically model-independent. It follows from the figure, that in most of the star $U_b^{(p)} \sim 10w_p \sim 100w_n$. In other words, the approximation of immobile NS matter is unjustified, the matter as a whole moves with the velocity, which is an order of magnitude greater than the relative particle velocities. This means that the main contribution to the self-consistent electric field comes from the term $\mathbf{U}_b \times \mathbf{B}$, which turns out to be an order of

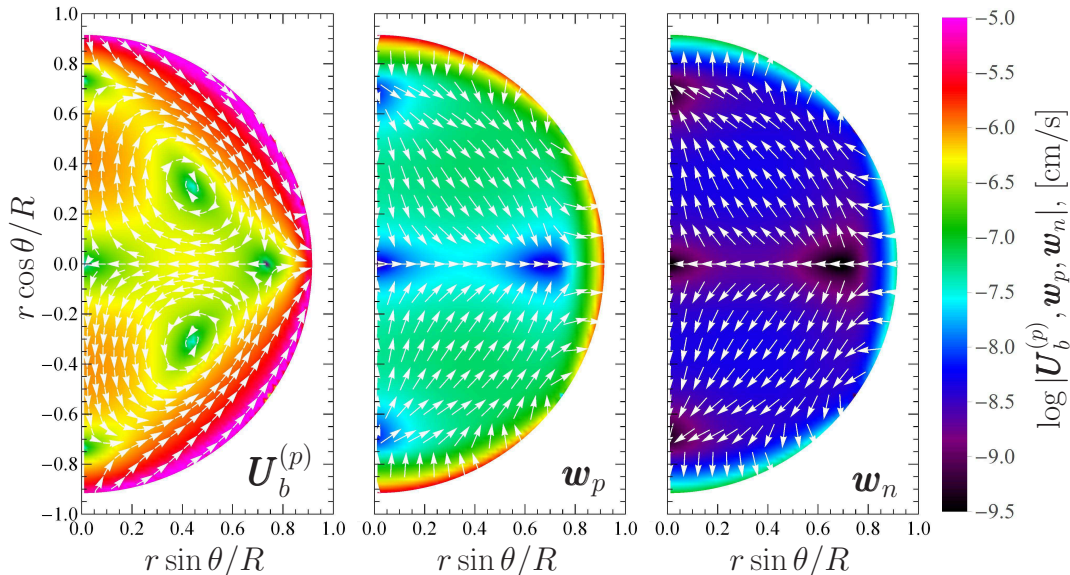


Figure 12: The magnitude (shown in color) and direction of the following velocity fields in the star (from left to right): the poloidal component of the baryon velocity $\mathbf{U}_b^{(p)}$, proton diffusion velocity \mathbf{w}_p , and neutron diffusion velocity \mathbf{w}_n . Figure shows the meridional cut through NS and is plotted for $T^\infty = 2 \times 10^8$ K and a “minimal” axisymmetric magnetic field model from Ref. [36] with a maximum field value $B_{\max} = 5 \times 10^{15}$ G.

magnitude larger than previously thought. The corresponding timescale of *accelerated* magnetic field evolution can, using Faraday’s equation, be estimated as: $\tau_U = B/|\text{rot}[\mathbf{U}_b \times \mathbf{B}]|$ and is 300 – 5000 years [36], comparable to the typical magnetar age ($\sim 10^4$ years). The original conclusion about the accelerated evolution of the magnetic field in normal NSs has recently been confirmed in the independent calculations of the two groups [R151, R152].

The results above were obtained assuming a non-superfluid/non-superconducting NS, which is a good model of a magnetar. However, most NSs are superfluid and superconducting (e.g., radio pulsars). The evolution of the magnetic field in such stars obeys quite different dynamical equations and was studied in Refs. [37, 39], which are briefly discussed below.

In Ref. [37], the magnetic field dissipation in superfluid (but non-superconducting) NSs was studied. It was shown that for *npe*-matter of NSs, the main dissipative mechanisms are ohmic dissipation and nonequilibrium beta-processes, while the main dissipative mechanism in normal NSs – ambipolar diffusion – is completely ineffective. At the same time, the role of ambipolar diffusion is restored to some extent in *npeμ*-matter, in which muons are present.

Additional allowance for proton superconductivity significantly affects the formulation of the problem of the magnetic field evolution in NSs. In superconducting NSs, the magnetic flux (assuming type II superconductor) is confined in proton vortices (or Abrikosov vortices, see chapter 4). Accordingly, the magnetic field is carried by the vortices and the basic evolutionary equation takes the form

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{V}_L \times \mathbf{B}), \quad (25)$$

where \mathbf{V}_L is the vortex velocity. Vortices in this problem behave as additional

“particles”, i.e., they can diffuse relative to other particle species, interact with them, and this interaction can be both dissipative and non-dissipative. The vortex velocity and, consequently, the field evolution strongly depends on the value of transport coefficients describing interaction of vortices with particles. For these coefficients, there have been orders of magnitude different estimates in the literature (e.g. [R153, R154, R155, R144, R150]). They were calculated by the candidate in Ref. [38], and the contradictory results of other authors were explained. The calculated coefficients were implemented in the MHD describing the combined evolution of particles and vortices, which was formulated in Ref. [R128] and in the works [24, 15, 25] discussed in chapter 4. Using this MHD, Ref. [39] has extended to superconducting NSs the self-consistent approach to the magnetic field evolution, which does not appeal to any ad hoc assumptions about the immobility of matter in NSs. The main qualitative results obtained by applying this approach and the properties of the solution are summarized below:

- The configuration of the magnetic field in a sufficiently cold superconducting NS cannot be arbitrary and must satisfy a number of conditions. For example, for $npe\mu$ -matter of NS cores, the magnetic field must rapidly (on the NS cooling timescale) relax to the configuration, for which the difference in the redshifted chemical potentials of electrons and muons remains constant along the magnetic field lines.
- As in the case of normal NSs, particles of all species and vortices move with good accuracy as a single fluid (the approximation of immobile matter does not work). This leads to an accelerated evolution of the magnetic field in the stellar core.
- The typical magnetic field evolution timescale in the NS core is of the order of the typical age of radio pulsars, $\sim 3 \times 10^7$ years. As a consequence, the magnetic field in the cores of NSs cannot be considered “frozen”, as it is often assumed in the literature.

7 Physics of accreted NS crust: equation of state, deep crustal heating, and thermodynamic potential [40, 41, 42, 43]

7.1 Formulation of the problem; equation of state of a fully accreted crust

This chapter is devoted to a study of the physics of NS crust. The crust is a rather thin region of an NS with a thickness of 1 – 2 km [R156, R157]. It consists of the outer crust, composed of atomic nuclei and degenerate electrons, and the inner crust, which, in addition, hosts free neutrons.

NSs are born very hot, so that the crust can easily relax to a state close to the full thermodynamic equilibrium (the so called catalyzed matter). However, during the subsequent evolution, NSs may experience accretion episodes (e.g., if they are in the low-mass X-ray binaries), in which the accreted matter gradually replaces the initial equilibrium nuclear composition. The accreted matter falls on the surface of the NS and compresses the underlying layers, pushing them deeper inside the star and perturbing them out of thermodynamic equilibrium. The compressed matter of the crust tries to relax to thermodynamic equilibrium through a series

of exothermal nuclear reactions (beta captures, neutron emissions, pycnonuclear reactions, ...) – the so-called deep crustal heating paradigm [R158]. How much heat is released during the compression and how it is distributed throughout the crust depends on the equation of state of the accreted crust.

Deep crustal heating manifests itself in the high observed surface temperatures of NSs in low-mass X-ray binaries in the quiescent state (when accretion is temporarily switched off; see, e.g., [R159, R160, R161, R162, R163, R164, R165, R166, R167, R168]), as well as in the real-time observations of thermal relaxation (cooling) of NSs after end of the accretion episode [R169, R170, R171, R172, R173, R174, R175, R176, R177, R178]. It is possible that the deep crustal heating also plays an important role in explaining the relatively high temperatures of millisecond pulsars (see Refs. [44, 45] and the chapter 8).

How is the equation of state of the accreted crust usually derived in the literature (see, e.g., [R179, R180, R181, R182, R183, R184, R185, R186])? One usually chooses a volume element near the surface of the star containing a certain number of atomic nuclei with a certain (initial) nuclear composition. It is assumed that the volume element is “attached” to these nuclei, i.e., moves with them. As accretion proceeds, the newly accreted material compresses the chosen volume element, which begins to sink towards the stellar center. As a result of sinking, the pressure in this volume element gradually increases, which eventually initiates nuclear reactions that change the element’s nuclear composition. The composition is determined from the analysis of a chain of the allowed nuclear reactions that decrease the suitably chosen thermodynamic potential (e.g., for the outer crust this is the Gibbs free energy).

It is important to stress that before the series of works of the candidate and co-authors [40, 41, 42, 43] all calculations of this kind assumed that free neutrons in the inner crust do not leave the selected volume element “attached” to the atomic nuclei, that is, they move with the same velocity as the nuclei do. But how legitimate is this assumption? Generally, it is not justified because: (i) according to microscopic calculations [R3, R72] free neutrons in the inner crust are in a superfluid state and can redistribute over the crust at their independent superfluid velocity; (ii) even if they are not superfluid (which may be the case in the very vicinity of the outer-inner crust interface), they can move (diffuse) independently of nuclei in order to reach the diffusion equilibrium set by the condition

$$\mu_n^\infty = \text{const}, \quad (26)$$

stating that the redshifted neutron chemical potential, μ_n^∞ , must remain constant in the inner crust. As demonstrated in Ref. [R187], this condition must be fulfilled in the accreted crust, since diffusion is a very efficient mechanism of neutron redistribution. It can be shown [40] that in the case of neutron superfluidity the condition (26) also takes place and is necessary for *hydrostatic* equilibrium of superfluid neutrons in the crust.

In what follows, the equation of state (EOS), satisfying the condition (26), will be referred to as nHD EOS (from “neutrons in the Hydrostatic/Diffusion equilibrium”). The nHD EOS has been derived for a fully accreted crust in Ref. [40] (fully accreted crust is the crust whose equation of state does not change with time during accretion). The derivation has been performed within a compressible

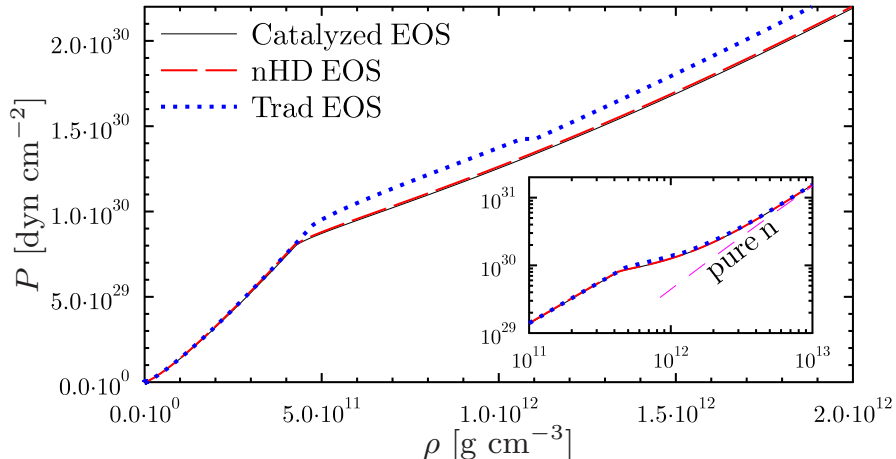


Figure 13: Pressure P vs density ρ for three equations of state of the NS crust: equilibrium or catalyzed EOS (solid line), nHD EOS (dashes), and the traditional accreted crust EOS (Trad EOS, dots). In the inset, EOS of pure neutron liquid is shown by short dashes.

liquid drop (CLD) model of crust matter. All numerical results for the CLD model, discussed in this section, are obtained with the SLy4 functional from Ref. [R188]. The main conclusions of Ref. [40] are summarized below:

- Any EOS of the accreted crust, satisfying the condition (26), is fully parameterized by setting the pressure P_{oi} at the boundary between the outer and inner crust (where the free neutrons appear for the first time).
- The real EOS of the fully accreted crust corresponds (for CLD SLy4 model) to only one specific value of P_{oi} , at which the inner crust can be matched with the NS core in a thermodynamically consistent way.
- The nHD EOS is close to the EOS of catalyzed crust and is quite different from the traditional EOSs usually obtained in the literature. To illustrate this point, Fig. 13 shows the dependence of the pressure P versus density ρ for three equations of state calculated within the CLD SLy4 model: the catalyzed (equilibrium) equation of state (Catalyzed EOS, solid line); the traditional accreted crust EOS obtained by neglecting the effect of neutron diffusion (Trad EOS, dots); and the equation of state satisfying the condition (26) (nHD EOS, dashes). One can see that the latter EOS is very close to the catalyzed EOS. This is not surprising, since by allowing neutrons to move independently of nuclei, we can thereby lower the system energy, making the resulting EOS closer to the equilibrium one. Figure 14 compares the other parameters of the equations of state discussed above, namely, the atomic mass number A and charge number Z as functions of pressure, P . In addition to these EOSs, we also present two traditional equations of state from Ref. [R185] (dot-dashed lines), which agree well with the traditional EOS obtained in Ref. [40] using the CLD SLy4 model (dots). One sees from Fig. 14 that not only the $P(\rho)$ dependence, but also the other parameters of the catalyzed and nHD EOSs are very close to each other in most of the inner crust.
- The pressure P_{oi} , at which free neutrons first appear for nHD EOS is close to the neutron-drip pressure for catalyzed crust.

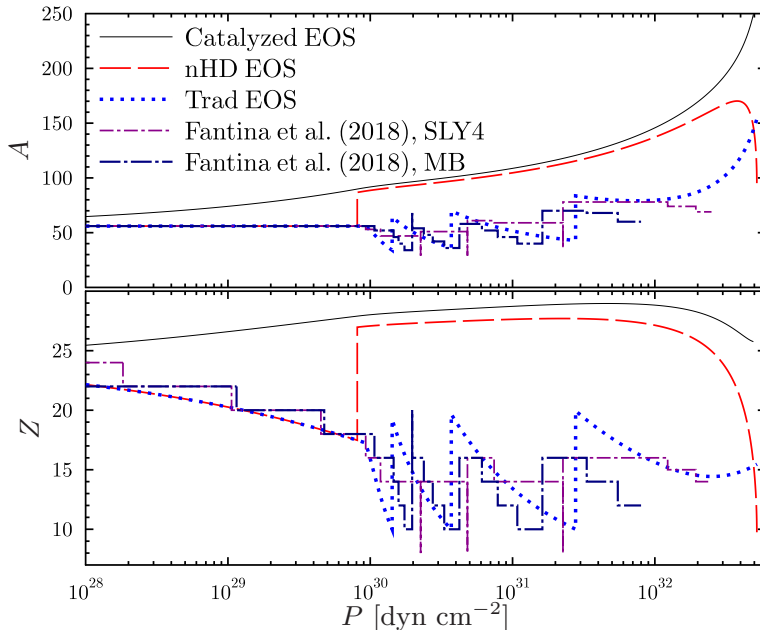


Figure 14: Atomic mass number, A (upper panel) and charge number, Z (lower panel) as functions of pressure P for the same equations of state as in Fig. 13. In addition, the results for the two traditional equations of state, SLY4 and MB from Ref. [R185] are shown by thick and thin dot-dashed lines (see [41] for more details).

- At the crust-core boundary of a fully accreted crust (or near that boundary), there is an instability at which nuclei become unstable with respect to decay into neutrons. This instability sets in at the pressures for which beta-equilibrium solution ceases to exist, see section 7.3 for more details. The presence of the instability allows one to conserve the total number of nuclei in the crust despite the continuous accretion of matter on the stellar surface, and makes EOS of the fully accreted crust time-independent [41].

Most of the above conclusions remain valid for the second (more realistic) model we studied in Ref. [41]: CLD+sh model of Ref. [R189]. This is a one-component model (in the sense that only identical nuclei are present at a given pressure), which approximately accounts for shell effects in the inner crust. The main difference between this (more realistic) model and the CLD model of Ref. [40] is that for this model one cannot explicitly determine the pressure P_{oi} at the outer-inner crust interface; one can only impose certain constraints on the possible values of this pressure. For example, for the CLD+sh model based on the BSk24 functional [R40], the range of admissible P_{oi} is: $0.92P_{nd}^{(cat)} \leq P_{oi} \leq P_{nd}^{(cat)}$. The actually established P_{oi} depends on how the fully accreted crust was formed.

7.2 Deep crustal heating in the fully accreted crust

To model cooling of NSs in low-mass X-ray binaries, it is not sufficient just to know the equation of state of the accreted crust: one needs also to understand what heat is released in the crust due to nuclear reactions induced by accretion of matter onto an NS from the star-companion. This problem was addressed in Ref. [41]. In that work, a formula was derived for the energy release per accreted

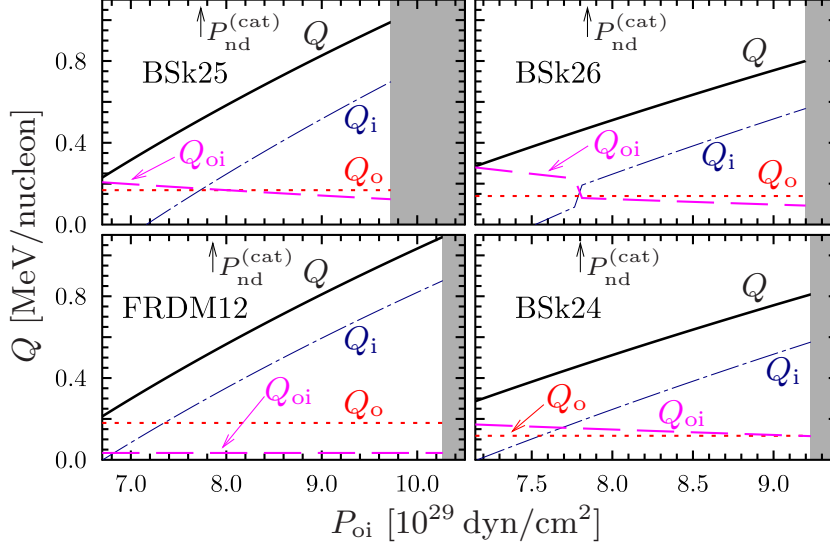


Figure 15: Energy releases Q (solid lines), Q_o (dots), Q_{oi} (dashes), and Q_i (dot-dashed lines) as functions of P_{oi} for several nuclear models. BSk24, BSk25, BSk26: calculations within the Hartree-Fock-Bogoliubov theory [R190]; FRDM12: macroscopic finite-range liquid-drop model [R191]. The vertical arrows show the neutron-drip pressure $P_{nd}^{(cat)}$ for catalyzed crust. For each model, the region of pressures in which free neutrons exist in the accreted NS crust, calculated within the traditional approach, is shown in gray.

nucleon (correct for both the traditional and nHD EOSs):

$$Q^\infty = \bar{m}_{b,ash} e^{\nu_s/2} - \mu_{b,core}^\infty, \quad (27)$$

where $\bar{m}_{b,ash}$ is the average baryon mass in the nuclear matter near the NS surface (the initial nuclear composition or ash of heavy elements); $e^{\nu_s/2}$ is the redshift at the stellar surface; $\mu_{b,core}^\infty$ is the redshifted chemical potential of baryons in the NS core. This formula can be transformed to the form valid only for the nHD-crust:

$$Q^\infty = e^{\nu_{oi}/2} \left[\bar{m}_{b,ash} \exp \left(\int_0^{P_{oi}} \frac{dP}{P + \epsilon} \right) - m_n \right], \quad (28)$$

where $e^{\nu_{oi}/2}$ is the redshift at the boundary between the outer and inner crust. In Eq. (28), the integration is carried out over the outer crust up to the pressure $P = P_{oi}$, at which free neutrons appear for the first time. By determining P_{oi} and knowing EOS in the outer crust (which can be found within the traditional approach and is fairly well-known), we can determine the energy release in the entire crust. As an example, Fig. 15 shows the energy release in different regions of the accreting NS crust as a function of pressure P_{oi} for four EOSs in the outer crust based on the nuclear models BSk24, BSk25, BSk26 and FRDM12 (see [41] for a more detailed explanation). The plotted quantities are the total energy release in the crust Q (solid lines), the energy release in the inner crust, Q_i (dot-dashed lines), in the outer crust, Q_o (dots), and at the outer-inner crust interface, Q_{oi} (dashed lines). Bearing in mind that, e.g., for the CLD+sh model based on the BSk24 functional the pressure P_{oi} is bounded in the interval $0.92P_{nd}^{(cat)} \leq P_{oi} \leq P_{nd}^{(cat)}$ [41], it follows from Fig. 15 that the total energy release should be

(0.29 – 0.46) MeV/nucleon, i.e. 2 – 5 times smaller than the value predicted in the traditional approach [R182, R185].

7.3 Thermodynamic potential for the inner crust

To find EOS of the accreted crust within the traditional approach, one usually minimizes the Gibbs free energy [R179, R180, R181, R182, R183, R185, R186] and ignores the hydrostatic/diffusion equilibrium condition (26). The question arises, what thermodynamic potential must be minimized to account for this condition? The answer is obtained in Ref. [42] and below we proceed to a brief discussion of the results of this work.

In Ref. [42] it is shown that if there is a mixture of nuclei in the inner crust in some (initial) volume V , then nuclear reactions in this volume proceed at a fixed pressure and neutron chemical potential, and they tend to decrease the new thermodynamic potential Ψ , given by

$$\Psi = E + PV - \mu_n N_b, \quad (29)$$

where E is the energy of matter in the volume V ; N_b is the number of baryons in that volume. If the number of atomic nuclei in reactions is conserved, then the search for the minimal of Ψ is equivalent to minimization of the quantity ψ :

$$\psi = \frac{\varepsilon + P - \mu_n n_b}{n_N}, \quad (30)$$

where n_N is the number density of atomic nuclei. Minimization of the potential Ψ is a very convenient way of finding the equation of state of the inner NS crust, and it is especially useful when dealing with the mixtures of atomic nuclei. It can be shown that knowledge of the potential Ψ is sufficient for calculating the heat release *distribution* in the fully accreted crust,

$$\delta Q^\infty(P) = -\frac{d\Psi^\infty}{dP} dP, \quad (31)$$

where $\delta Q^\infty(P)$ is the amount of (redshifted) heat released in the range of pressures from P to $P + dP$ and associated with the change in the (redshifted) potential, $d\Psi^\infty$. This formula is extremely useful because it allows one to directly relate EOS of the fully accreted crust to the distribution of heat released during accretion on the star. In particular, using Eq. (31) one can obtain the formula (27) for the total energy release derived in Ref. [41] in a completely different way (from thermodynamic arguments).

Finally, using the concept of the potential Ψ , it is easy to explain the nature of the instability at (or near) the crust-core boundary, which converts atomic nuclei into neutrons and allows the fully accreted crust to remain unchanged over time (section 7.1). As an example, let us consider the instability in the CLD model. It can be shown that Ψ can be presented as the only function of P , μ_n , and the charge number Z , $\Psi = \Psi(P, \mu_n, Z)$. Moreover, setting the boundary pressure P_{oi} completely fixes μ_n as a function of P . This means that the real equilibrium state of matter at a given pressure P can be found by minimizing the potential Ψ with

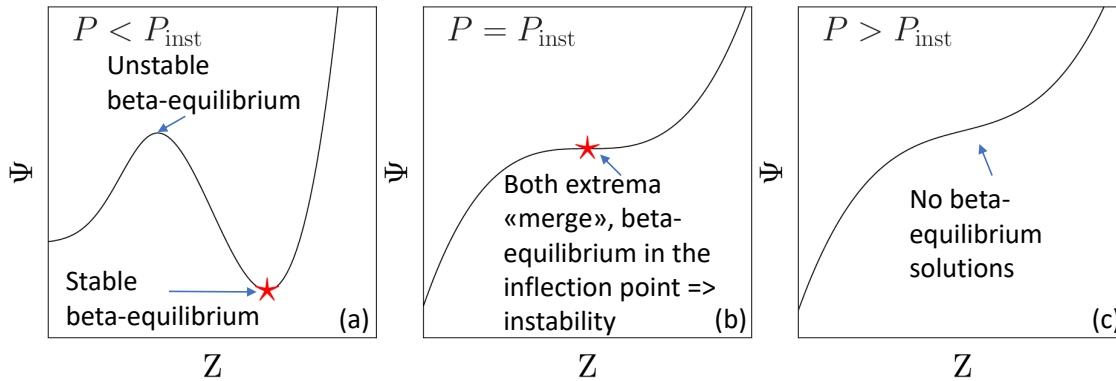


Figure 16: Qualitative behavior of the thermodynamic potential Ψ as a function of charge number Z when P and μ_n are kept fixed. Panel (a): $P < P_{\text{inst}}$, panel (b): $P = P_{\text{inst}}$, panel (c): $P > P_{\text{inst}}$.

respect to Z at fixed P and μ_n . Let the instability occur at pressure $P = P_{\text{inst}}$. Then at $P < P_{\text{inst}}$ the minimum of $\Psi(Z)$ is determined by the requirement

$$\frac{\partial \Psi(P, \mu_n, Z)}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi(P, \mu_n, Z)}{\partial Z^2} > 0 \quad (32)$$

and corresponds to the stable beta-equilibrium state of matter. A typical qualitative picture of the behavior of Ψ as a function Z at $P < P_{\text{inst}}$ is shown in Fig. 16(a), the asterisk marks the true solution. It can be seen that in addition to the minimum, at $P < P_{\text{inst}}$ there is always a maximum of the function Ψ at smaller Z (unstable beta-equilibrium). At $P = P_{\text{inst}}$ the maximum and minimum of Ψ merge, and we reach the instability, in which

$$\frac{\partial \Psi(P, \mu_n, Z)}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi(P, \mu_n, Z)}{\partial Z^2} = 0. \quad (33)$$

This situation is shown in Fig. 16(b), the last stable solution corresponds to an inflection point. Finally, at $P > P_{\text{inst}}$ the Ψ -potential no longer has a minimum, beta-equilibrium solutions are absent, and the nuclei disintegrate completely into neutrons [see Fig. 16(c)]. A more detailed, but also more technical (and less transparent) consideration of this instability can be found in Ref. [41].

8 Effects and processes [46, 47, 48, 44, 49, 50, 45]

8.1 Introduction

This chapter contains a number of works not included in the previous chapters and not united by a single idea. Most of them are mentioned only in passing. Only Refs. [47, 44] (and related Refs. [48, 45]), are considered in some more detail, since their results were included in the defence statements.

Reference [46] studied the plasmon decay process $\gamma \rightarrow \nu + \bar{\nu}$. This process is calculated over a wide range of temperatures and densities and fitted by analytical formulas. The results are publicly available in the form of tables at <http://www.ioffe.ru/astro/NSG/plasmon/table.dat>. These calculations are often

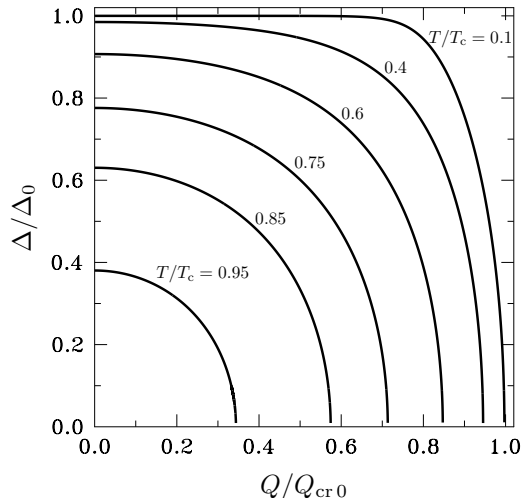


Figure 17: Superfluid energy gap (in units of Δ_0) as a function of $Q = m\Delta V$ (in units of Q_{cr}) for a set of temperatures: $T/T_c = 0.1, 0.4, 0.6, 0.75, 0.85$ and 0.95 . See text for details.

used in modeling cooling of white dwarfs and NSs; they were reproduced in Ref. [R192].

Reference [49] considers the buoyancy effect of proton and neutron vortices in NSs. It is shown that the generally accepted expression for the buoyancy force is not correct and should be modified. The correct expression for both neutron and proton vortices is proposed. The relation between the obtained expressions for the buoyancy force and the corresponding terms in the Bekarevich-Khalatnikov coarse-grained hydrodynamics [R124] and its various extensions is clarified.

Reference [50] calculates the bulk viscosity in two phases of nonspherical nuclei in the mantle of an oscillating NS. Bulk viscosity arises due to nonequilibrium direct Urca reactions, which are not completely forbidden because neutrons and protons in the mantle move in a periodic lattice potential created by nonspherical nuclei, which can absorb the excess of particle momentum. It is shown that the resulting bulk viscosity can, under certain conditions, exceed the bulk viscosity due to the modified Urca-processes in the outer NS core, as well as the shear viscosity.

8.2 Dynamically varying nucleon gap and its impact on the dynamics of neutron stars

As is well-known [R193], the energy of nucleon excitations with momentum p in superfluid matter is given by the formula $E_p = \sqrt{v_F^2(p - p_F)^2 + \Delta^2}$, where v_F is the Fermi velocity, Δ is the energy gap, which is a function of temperature that varies from 0 at $T = T_c$ to Δ_0 at $T = 0$ (T_c is the critical temperature). However, if there is a current of superfluid matter component in the system relative to the normal component, then the gap starts to depend on the difference $\Delta\mathbf{V}$ between the velocities of these components [R194]. This effect is illustrated in Fig. 17, which shows the gap dependence (in units of Δ_0) on $Q = m\Delta V$ in units of $Q_{\text{cr}} = m\Delta V_{\text{cr}}$, where $\Delta V_{\text{cr}} = (e/2)(\Delta_0/p_F) \sim 10^7 \text{ cm s}^{-1}$ and m is the particle mass. The impact of this effect on the NS dynamics has been completely ignored until recently. Meanwhile, as shown in Ref. [47] the proposed effect is important

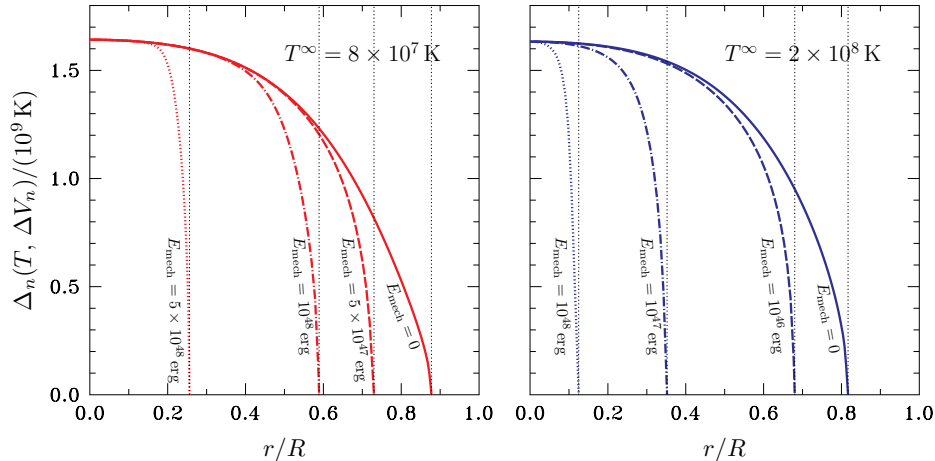


Figure 18: Neutron superfluidity gap $\Delta_n(T, \Delta V_n)$ (in units of 10^9 K) as a function of r/R for two stellar temperatures $T^\infty = 8 \times 10^7$ K (left panel) and $T^\infty = 2 \times 10^8$ K (right panel) and for several oscillation energies E_{mech} (indicated near each curve). The vertical dotted line shows r at which the neutron superfluidity disappears ($\Delta_n = 0$).

for a number of aspects of NS physics, including NS oscillations and transport properties:

- Neutron star oscillations

The dependence of the gap on hydrodynamic velocities makes the NS oscillation equations nonlinear at much lower oscillation amplitudes than is usually assumed. (As a rule, the NS oscillations are studied by analyzing linearized hydrodynamic equations for which it is implied that the gap is the sole function of density.)

For illustration, Fig. 18 presents the neutron gap $\Delta_n(T, \Delta V_n)$ (ΔV_n is the difference between the neutron superfluid velocity and the velocity of normal component) as a function of the distance to the stellar center, r (in units of NS radius R). The figure is plotted for the first radial oscillation mode of a superfluid NS. The employed superfluidity model is described in Ref. [47] (see [47] for a more detailed description). The curves in the figure are shown for two temperatures, $T = 8 \times 10^7$ K and $T = 2 \times 10^8$ K and for oscillations with different mechanical energy E_{mech} (indicated near each curve), that is, with different amplitude of oscillations. The vertical dotted lines show r at which the superfluidity disappears (the gap vanishes; ΔV_n is too large). The larger E_{mech} , the smaller the size of the superfluid region. As can be seen, the gap is very sensitive to the value of E_{mech} .

- Transport properties

The coefficients of bulk and shear viscosity, which determine the damping of oscillations, significantly depend on the size of the energy gap. Hence, its variation in the course of oscillations affects these coefficients.

The effect proposed in Ref. [47] was considered without taking into account the Fermi-liquid effects associated with interaction of baryons of different species. The possible role of these effects was discussed only qualitatively. In particular, it was predicted that the Fermi-liquid effects could lead to, e.g., sensitivity of the

proton gap to the relative velocity between superfluid neutrons and normal liquid component. A quantitative study of these effects was performed by Leinson [R24], who, in particular, confirmed the main conclusions of Ref. [47]. The effect of the gap dependence on the difference between the superfluid and normal velocities was used in the analysis of oscillations in magnetars [R195] and was invoked as a possible mechanism for explaining antiglitches in magnetars [48].

8.3 New heating mechanism for millisecond pulsars

It is generally believed that millisecond pulsars (MSPs) originate from low-mass X-ray binaries, where they are spun-by accretion. The crust of NSs in LMXBs consist of the accreted matter, i.e., MSPs must also possess an accreted crust. An important difference (for us) between the accreted and catalyzed crust (as in isolated NSs) is that even small compression of the accreted crust initiates exothermal nuclear reactions at the phase transitions between layers with different nuclear composition, which lead to NS heating. For comparison, in order to initiate nuclear reactions in the catalyzed crust, the density near the phase transitions must change appreciably [by $\sim (1 - 10)\%$].

Another important property of MSPs (in addition to the presence of an accreted crust) is the fact that they are rapidly rotating NSs. As a consequence, their shape is noticeably distorted by the centrifugal force.

These two properties of MSPs lead to the heating mechanism discussed in Ref. [44]. The basic idea is as follows. Due to magneto-dipole losses, an MSP gradually slows down over time and the centrifugal force decreases. Eventually, the pressure in each given volume element increases and heat-producing nuclear reactions are induced at the boundaries in the crust between phases with different nuclear composition. As a result, the MSP heats up. How effectively does the heating occur? This question was investigated in Ref. [44] using, as an example, the one-component model from Ref. [R182]. It was demonstrated that the proposed mechanism is one of the leading mechanisms of MSP heating and should be taken into account when interpreting the observations. For illustration, Fig. 19 shows the MSP heating rate as a function of NS mass for six equations of state: three of the BSk family (BSk19, BSk20, BSk21, see Ref. [R196]) and three of the PAL family (PAL I, PAL II, PAL III, see Ref. [R197]). The figure is plotted for the stellar rotation rate $\nu = 100$ Hz, and the typical MSP deceleration rate $\dot{\Omega} = -10^{-14} \text{ sec}^{-2}$. Solid curves show the results for the stellar model calculated in the slow rotation approximation (the Hartle method [R198]), triangles illustrate the results obtained using the publicly available RNS code (<http://www.gravity.phys.uwm.edu/rns/>) without making any approximations. Finally, dashes show the heating rate calculated from the approximated analytic formula,

$$\dot{E} \approx -7 \times 10^{28} a \frac{R_6^7}{M_{1.4}^2} \Omega_3 \dot{\Omega}_{-14} \sum_i \frac{P_i}{10^{31} \text{ erg cm}^{-3}} \frac{q_i}{1 \text{ MeV}} \text{ erg s}^{-1}, \quad (34)$$

which, as can be seen, qualitatively correctly describes the energy release for not too massive NSs. In this formula $a = 0.5$; $R_6 = R/(10^6 \text{ cm})$, $M_{1.4} = M/(1.4M_\odot)$; $\Omega_3 = \Omega/(10^3 \text{ s}^{-1})$ is the NS rotation frequency; $\dot{\Omega}_{-14} = \dot{\Omega}/(10^{-14} \text{ s}^{-2})$; P_i is the

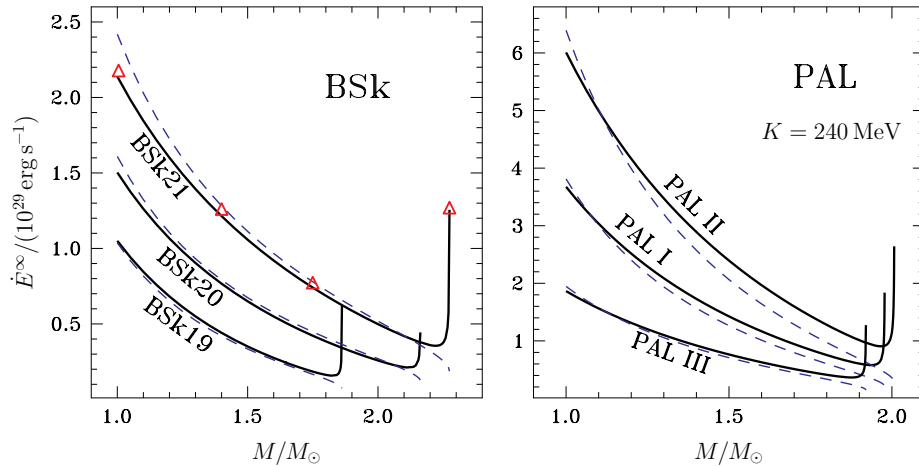


Figure 19: Crustal heating rate in units of $10^{29} \text{ erg s}^{-1}$ as a function of NS mass for the three equations of state of BSk family [R196] (left panel) and PAL family [R197] (right panel). Thick solid lines show the results obtained in the slow rotation approximation. Thin dashes illustrate the calculation with the approximation formula (34) and $a = 0.5$. Triangles show the exact calculation of \dot{E}^∞ assuming BSk21 equation of state, without using the slow rotation approximation. All the curves are plotted for the rotation frequency $\nu = 100 \text{ Hz}$ and $\dot{\Omega} = -10^{-14} \text{ s}^{-2}$.

pressure at the i -th phase transition; q_i is the energy release at the i -th phase transition (in MeV/nucleon).

One sees from Eq. (34) that the corresponding heating rate is very sensitive to the NS radius ($\sim R^7/M^2$), and hence to the equation of state of superdense matter, which is confirmed by Fig. 19.

Figure 20 shows the surface temperature T_{eff}^∞ as a function of the NS radius, R_∞ (as seen by a distant observer), calculated for the same equations of state as before and for parameters of PSR J0437-4715 (the nearest and best studied MSP). Only the MSP heating due to nonequilibrium nuclear reactions in the crust was accounted for when plotting the figure. Bearing in mind that according to the new data (see Ref. [45] and references therein) the temperature of this source is $T_{\text{eff}}^\infty \sim (1 - 1.5) \times 10^5 \text{ K}$, we can conclude that, although the deep crustal heating alone cannot explain such T_{eff}^∞ (without involving other heating mechanisms), it still predicts temperatures which are close enough to the required ones.

It is important to note that the proposed mechanism of MSP heating does not depend on the nucleon superfluidity model in the inner layers of NSs (unlike other heating mechanisms [R200, R201] considered in the literature) and, therefore, is much less model-dependent. It is worth emphasizing, however, that the consideration in Ref. [44] was based on the traditional deep crustal heating model from Ref. [R182] and should be revised to account for the results of chapter 7. Preliminary estimates indicate that for a more realistic model of a fully accreted crust, the total MSP heating rate could be higher.

There is another possible mechanism of MSP heating, suggested in Refs. [R201, R202], and the work [45] contributes to its development. Rotochemical heating of MSPs proposed in Ref. [R201] uses the fact that when an NS slows down, the matter in its core deviates from the beta-equilibrium state, which initiates

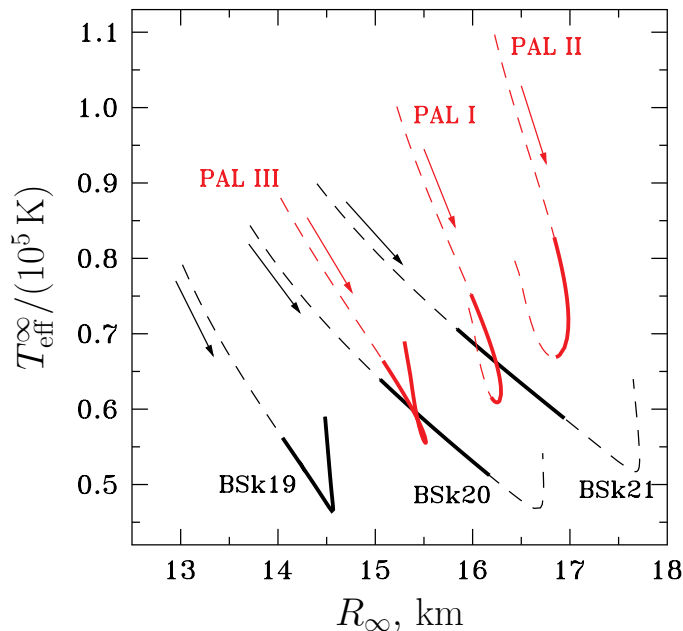


Figure 20: The effective stellar temperature T_{eff}^{∞} (in units of 10^5 K) as a function of the redshifted circumferential radius R_{∞} for the six equations of state (see Fig. 19) with ν and $\dot{\Omega}$ taken as for PSR J0437-4715. Thin dashes show the masses $M_{\odot} < M < M_{\text{max}}$ for each equation of state; solid thick lines correspond to the region of admissible masses for PSR J0437-4715 [R199] (68% significance level). The arrows indicate directions of increasing mass.

the nonequilibrium particle transformation reactions (direct and modified Urca processes), leading to NS heating. In Ref. [45] the role of the two additional effects on the thermal evolution of MSPs was elucidated: (i) the stellar magnetic field and (ii) the residence of the future MSP at the stage of accreting NS in a low-mass X-ray binary. It is shown that due to these two effects, high MSP temperatures ($\sim 10^5$ K) can be maintained for more than a billion years after accretion ceases, regardless of the rotation frequency and deceleration rate of the pulsar. With these effects in mind one can explain, in particular, the observations of PSR J0437-4715.

Defense statements:

- Development of a formalism for calculation and analysis of the spectra and damping times of superfluid oscillating neutron stars (NSs), taking into account the effects of finite temperatures in the framework of general relativity theory [19, 12, 20, 23, 30, 32].

Clarification: This statement includes the following specific results. Conclusion about the weak coupling of two systems of equations describing superfluid and normal oscillation modes in superfluid NSs. Development of an approximate approach for the systematic calculations of the eigenfrequencies and characteristic damping times of NS oscillations within full GR. Conclu-

sion about the strong temperature dependence of the oscillation spectra of superfluid NSs. Conclusion about the existence of avoided-crossings (resonances) between superfluid and normal modes in the temperature-dependent spectra of oscillating NSs. A detailed study of characteristic damping times of superfluid and normal modes in relativistic NSs. Conclusion about the enhanced dissipation of normal modes near resonances.

- Prediction and identification in numerical calculations of the thermal and composition g -modes in the spectrum of superfluid NSs [21, 22, 23].
- Conclusion about diffusion as the leading mechanism of dissipation in superconducting NSs [14].
- Formulation of the relativistic dissipative magnetohydrodynamics describing dynamical phenomena in finite-temperature superfluid/superconducting mixtures in the presence of Feynman-Onsager and Abrikosov vortices. A self-consistent calculation of the kinetic coefficients responsible for the interaction of leptons (electrons and muons) in superfluid and superconducting NS matter with Abrikosov vortices [5, 24, 49, 15, 25, 38].
- Formulation and development of a minimal scenario of resonance r -mode stabilization explaining the existence of fast-rotating NSs in LMXBs. Proposal of a method for studying the properties of superdense NS matter, based on comparing the predictions of the theory of resonance r -mode stabilization with observational data. Constraints on the neutron superfluidity parameters following from the comparison of the proposed theory of resonance stabilization with observational data [26, 27, 29, 33, 34].
- Conclusion about the possibility of effective stabilization of r -modes in massive warm NSs ($T \sim 10^8$ K) by the bulk viscosity generated by nonequilibrium processes in the nucleon-hyperon matter of NS cores, especially by the processes involving neutral baryons [13].
- Proposal of a method for calculating the particle velocities, perturbations of chemical potentials, and the self-consistent electric field in the inner layers of NSs from a given quasi-stationary magnetic field of the star. The conclusion that the magnetic field leads to generation of large-scale motions of matter in NS cores, which can have velocities significantly (by order of magnitude) exceeding the relative (diffusion) particle velocities. Mechanism of accelerated evolution of the magnetic field in NS cores, associated with the motion of matter as a whole [35, 37, 36, 39].
- Development of a theory of a fully accreted NS crust, in which the neutron hydrostatic and diffusion equilibrium condition [40, 41, 42, 43] is met.

Clarification: This statement includes the following specific results. Theoretical derivation of the equation of state describing an accreted NS crust in which the neutron hydrostatic and diffusion equilibrium condition is satisfied. Conclusion that the equation of state in such a crust is parameterized by the pressure at the interface between the outer and inner crust. Calculation of the equation of state of the inner accreted crust using compressible liquid drop

models with and without the shell effects. Conclusion about the strong difference of the obtained equation of state from the traditional equation of state of the accreted crust and its similarity to the equation of state of catalyzed crust. Prediction of the instability near the crust-core boundary, in which atomic nuclei become unstable with respect to decay into neutrons. Explanation of the physical mechanism behind the instability and its universal character in the framework of the compressible liquid drop model. Derivation of the formula describing, in the plane-parallel approximation, the energy release in the fully accreted crust, applicable for any ash composition. Introduction into the theory the thermodynamic potential, which must be minimized to find the equation of state of the accreted crust (with arbitrarily complex crust composition). Relation of the thermodynamic potential to the heat release distribution in the fully accreted crust.

- Conclusion about the importance of the effect of dynamically changing superfluid nucleon gap for dynamics of neutron stars [47].
- The heating mechanism for millisecond pulsars with accreted crust and detailed calculations of the corresponding heating rate within the traditional accreted crust model [44].

Publication list

- [1] Enhanced cooling of neutron stars via Cooper-pairing neutrino emission / Gusakov M. E., Kaminker A. D., Yakovlev D. G., and Gnedin O. Y. // *Astron. Astrophys.* — 2004. — Sep. — Vol. 423. — P. 1063–1071. — astro-ph/0404002.
- [2] The cooling of Akmal-Pandharipande-Ravenhall neutron star models / Gusakov M. E., Kaminker A. D., Yakovlev D. G., and Gnedin O. Y. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2005. — Vol. 363, no. 2. — P. 555–562. — astro-ph/0507560.
- [3] Gusakov M. E., Andersson N. Temperature-dependent pulsations of superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2006. — Nov. — Vol. 372, no. 4. — P. 1776–1790. — astro-ph/0602282.
- [4] Gusakov M. E. Bulk viscosity of superfluid neutron stars // *Phys. Rev. D* . — 2007. — Vol. 76, no. 8. — P. 083001. — 0704.1071.
- [5] Gusakov M. E. Relativistic formulation of the Hall-Vinen-Bekarevich-Khalatnikov superfluid hydrodynamics // *Phys. Rev. D* . — 2016. — Mar. — Vol. 93, no. 6. — P. 064033. — 1601.07732.
- [6] Gusakov M. E., Haensel P. The entrainment matrix of a superfluid neutron proton mixture at a finite temperature // *Nuclear Physics A* . — 2005. — Nov. — Vol. 761. — P. 333–348. — astro-ph/0508104.
- [7] Gusakov M. E. Transport equations and linear response of superfluid Fermi mixtures in neutron stars // *Phys. Rev. C* . — 2010. — Feb. — Vol. 81, no. 2. — P. 025804. — 1001.4452.
- [8] Gusakov M. E., Kantor E. M., Haensel P. Relativistic entrainment matrix of a superfluid nucleon-hyperon mixture: The zero temperature limit // *Phys. Rev. C* . — 2009. — May. — Vol. 79, no. 5. — P. 055806. — 0904.3467.
- [9] Gusakov M. E., Kantor E. M., Haensel P. Relativistic entrainment matrix of a superfluid nucleon-hyperon mixture. II. Effect of finite temperatures // *Phys. Rev. C* . — 2009. — July. — Vol. 80, no. 1. — P. 015803. — 0907.0010.
- [10] Gusakov M. E., Kantor E. M. Bulk viscosity of superfluid hyperon stars // *Phys. Rev. D* . — 2008. — Vol. 78, no. 8. — P. 083006. — 0806.4914.

- [11] Kantor E. M., Gusakov M. E. Damping of sound waves in superfluid nucleon-hyperon matter of neutron stars // *Phys. Rev. D* . — 2009. — Feb. — Vol. 79, no. 4. — P. 043004. — 0901.4108.
- [12] Gusakov M. E., Haensel P., Kantor E. M. Physics input for modelling superfluid neutron stars with hyperon cores // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2014. — Mar. — Vol. 439, no. 1. — P. 318–333. — 1401.2827.
- [13] Bulk viscosity in neutron stars with hyperon cores / Ofengeim D. D., Gusakov M. E., Haensel P., and Fortin M. // *Phys. Rev. D* . — 2019. — Nov. — Vol. 100, no. 10. — P. 103017. — 1911.08407.
- [14] Kraav K. Y., Gusakov M. E., Kantor E. M. Diffusion as a leading dissipative mechanism in superconducting neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2021. — Sep. — Vol. 506, no. 1. — P. L74–L78. — 2105.08121.
- [15] Dommes V. A., Gusakov M. E., Shternin P. S. Dissipative relativistic magnetohydrodynamics of a multicomponent mixture and its application to neutron stars // *Phys. Rev. D* . — 2020. — May. — Vol. 101, no. 10. — P. 103020. — 2006.09840.
- [16] Kantor E. M., Gusakov M. E. Temperature effects in pulsating superfluid neutron stars // *Phys. Rev. D* . — 2011. — May. — Vol. 83, no. 10. — P. 103008. — 1105.4040.
- [17] Chugunov A. I., Gusakov M. E. Non-radial superfluid modes in oscillating neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2011. — Nov. — Vol. 418, no. 1. — P. L54–L58. — 1107.4242.
- [18] Gusakov M. E., Kantor E. M. Decoupling of superfluid and normal modes in pulsating neutron stars // *Phys. Rev. D* . — 2011. — Apr. — Vol. 83, no. 8. — P. 081304. — 1007.2752.
- [19] Dissipation in relativistic superfluid neutron stars / Gusakov M. E., Kantor E. M., Chugunov A. I., and Gualtieri L. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2013. — Jan. — Vol. 428, no. 2. — P. 1518–1536. — 1211.2452.
- [20] Quasinormal modes of superfluid neutron stars / Gualtieri L., Kantor E. M., Gusakov M. E., and Chugunov A. I. // *Phys. Rev. D* . — 2014. — July. — Vol. 90, no. 2. — P. 024010. — 1404.7512.
- [21] Gusakov M. E., Kantor E. M. Thermal g-modes and unexpected convection in superfluid neutron stars // *Phys. Rev. D* . — 2013. — Nov. — Vol. 88, no. 10. — P. 101302.
- [22] Kantor E. M., Gusakov M. E. Composition temperature-dependent g modes in superfluid neutron stars. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2014. — July. — Vol. 442. — P. L90–L94. — 1404.6768.
- [23] Dommes V. A., Gusakov M. E. Oscillations of superfluid hyperon stars: decoupling scheme and g-modes // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2016. — Jan. — Vol. 455, no. 3. — P. 2852–2870. — 1512.04900.
- [24] Gusakov M. E., Dommes V. A. Relativistic dynamics of superfluid-superconducting mixtures in the presence of topological defects and an electromagnetic field with application to neutron stars // *Phys. Rev. D* . — 2016. — Vol. 94, no. 8. — P. 083006. — 1607.01629.
- [25] Dommes V. A., Gusakov M. E. Dissipative superfluid relativistic magnetohydrodynamics of a multicomponent fluid: The combined effect of particle diffusion and vortices // *Phys. Rev. D* . — 2021. — Dec. — Vol. 104, no. 12. — P. 123008. — 2111.00999.
- [26] Gusakov M. E., Chugunov A. I., Kantor E. M. Instability Windows and Evolution of Rapidly Rotating Neutron Stars // *Phys. Rev. Lett.* . — 2014. — Apr. — Vol. 112, no. 15. — P. 151101. — 1310.8103.
- [27] Gusakov M. E., Chugunov A. I., Kantor E. M. Explaining observations of rapidly rotating neutron stars in low-mass x-ray binaries // *Phys. Rev. D* . — 2014. — Sep. — Vol. 90, no. 6. — P. 063001. — 1305.3825.
- [28] Chugunov A. I., Gusakov M. E., Kantor E. M. New possible class of neutron stars: hot and fast non-accreting rotators // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2014. — Nov. — Vol. 445, no. 1. — P. 385–391. — 1408.6770.

- [29] Kantor E. M., Gusakov M. E., Chugunov A. I. Observational signatures of neutron stars in low-mass X-ray binaries climbing a stability peak // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2016. — Jan. — Vol. 455, no. 1. — P. 739–753. — 1512.02428.
- [30] Kantor E. M., Gusakov M. E. Temperature-dependent r modes in superfluid neutron stars stratified by muons // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2017. — Aug. — Vol. 469, no. 4. — P. 3928–3945. — 1705.06027.
- [31] Chugunov A. I., Gusakov M. E., Kantor E. M. R modes and neutron star recycling scenario // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2017. — June. — Vol. 468, no. 1. — P. 291–304. — 1610.06380.
- [32] Dommès V. A., Kantor E. M., Gusakov M. E. Temperature-dependent oscillation modes in rotating superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2019. — Jan. — Vol. 482, no. 2. — P. 2573–2587. — 1810.08005.
- [33] Kantor E. M., Gusakov M. E., Dommès V. A. Constraining Neutron Superfluidity with R -Mode Physics // *Phys. Rev. Lett.* . — 2020. — Vol. 125, no. 15. — P. 151101. — 2009.12553.
- [34] Kantor E. M., Gusakov M. E., Dommès V. A. Resonance suppression of the r -mode instability in superfluid neutron stars: Accounting for muons and entrainment // *Phys. Rev. D* . — 2021. — Jan. — Vol. 103, no. 2. — P. 023013. — 2102.02716.
- [35] Gusakov M. E., Kantor E. M., Ofengeim D. D. Evolution of the magnetic field in neutron stars // *Phys. Rev. D* . — 2017. — Nov. — Vol. 96, no. 10. — P. 103012. — 1705.00508.
- [36] Ofengeim D. D., Gusakov M. E. Fast magnetic field evolution in neutron stars: The key role of magnetically induced fluid motions in the core // *Phys. Rev. D* . — 2018. — Aug. — Vol. 98, no. 4. — P. 043007. — 1805.03956.
- [37] Kantor E. M., Gusakov M. E. A note on the ambipolar diffusion in superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2018. — Jan. — Vol. 473, no. 3. — P. 4272–4277. — 1703.09216.
- [38] Gusakov M. E. Force on proton vortices in superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2019. — June. — Vol. 485, no. 4. — P. 4936–4950. — 1904.01363.
- [39] Gusakov M. E., Kantor E. M., Ofengeim D. D. Magnetic field evolution time-scales in superconducting neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2020. — Dec. — Vol. 499, no. 3. — P. 4561–4569. — 2010.07673.
- [40] Gusakov M. E., Chugunov A. I. Thermodynamically Consistent Equation of State for an Accreted Neutron Star Crust // *Phys. Rev. Lett.* . — 2020. — May. — Vol. 124, no. 19. — P. 191101. — 2004.04195.
- [41] Gusakov M. E., Chugunov A. I. Heat release in accreting neutron stars // *Phys. Rev. D* . — 2021. — May. — Vol. 103, no. 10. — P. L101301. — 2011.09354.
- [42] Gusakov M. E., Kantor E. M., Chugunov A. I. Nonequilibrium thermodynamics of accreted neutron-star crust // *Phys. Rev. D* . — 2021. — Vol. 104, no. 8. — P. L081301. — 2109.06614.
- [43] Shchepochin N. N., Gusakov M. E., Chugunov A. I. Deep crustal heating for realistic compositions of thermonuclear ashes // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2021. — Nov. — Vol. 507, no. 3. — P. 3860–3870. — 2105.01991.
- [44] Gusakov M. E., Kantor E. M., Reisenegger A. Rotation-induced deep crustal heating of millisecond pulsars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2015. — Vol. 453, no. 1. — P. L36–L40. — 1507.04586.
- [45] Kantor E. M., Gusakov M. E. Long-lasting accretion-powered chemical heating of millisecond pulsars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2021. — Dec. — Vol. 508, no. 4. — P. 6118–6127. — 2110.02881.
- [46] Kantor E. M., Gusakov M. E. The neutrino emission due to plasmon decay and neutrino luminosity of white dwarfs // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2007. — Nov. — Vol. 381, no. 4. — P. 1702–1710. — 0708.2093.
- [47] Gusakov M. E., Kantor E. M. Velocity-dependent energy gaps and dynamics of superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2013. — Jan. — Vol. 428, no. 1. — P. L26–L30. — 1206.6580.

- [48] Kantor E. M., Gusakov M. E. Anti-glitches within the Standard Scenario of Pulsar Glitches // *Astrophys. J. Lett.* — 2014. — Dec. — Vol. 797, no. 1. — P. L4. — 1411.2777.
- [49] Dommès V. A., Gusakov M. E. Vortex buoyancy in superfluid and superconducting neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2017. — May. — Vol. 467, no. 1. — P. L115–L119. — 1701.06870.
- [50] Yakovlev D. G., Gusakov M. E., Haensel P. Bulk viscosity in a neutron star mantle // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2018. — Dec. — Vol. 481, no. 4. — P. 4924–4930. — 1809.08609.

References

- [R1] Lombardo U., Schulze H.-J. Superfluidity in Neutron Star Matter // *Physics of Neutron Star Interiors* / ed. by Blaschke D., Glendenning N. K., Sedrakian A. — 2001. — Vol. 578 of Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag. — P. 30.
- [R2] Pairing in high-density neutron matter including short- and long-range correlations / Ding D., Rios A., Dussan H., Dickhoff W. H., Witte S. J., Carbone A., and Polls A. // *Phys. Rev. C* . — 2016. — Aug. — Vol. 94. — P. 025802. — Access mode: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.94.025802>.
- [R3] Sedrakian A., Clark J. W. Superfluidity in nuclear systems and neutron stars // *European Physical Journal A*. — 2019. — Sep. — Vol. 55, no. 9. — P. 167. — 1802.00017.
- [R4] Minimal Cooling of Neutron Stars: A New Paradigm / Page D., Lattimer J. M., Prakash M., and Steiner A. W. // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* — 2004. — Dec. — Vol. 155. — P. 623–650. — arXiv:astro-ph/0403657.
- [R5] Cooling neutron star in the Cassiopeia A supernova remnant: evidence for superfluidity in the core / Shternin P. S., Yakovlev D. G., Heinke C. O., Ho W. C. G., and Patnaude D. J. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2011. — Mar. — Vol. 412. — P. L108–L112.
- [R6] Rapid Cooling of the Neutron Star in Cassiopeia A Triggered by Neutron Superfluidity in Dense Matter / Page D., Prakash M., Lattimer J. M., and Steiner A. W. // *Phys. Rev. Lett.* . — 2011. — Feb. — Vol. 106, no. 8. — P. 081101.
- [R7] Measuring the Cooling of the Neutron Star in Cassiopeia A with all Chandra X-Ray Observatory Detectors / Elshamouty K. G., Heinke C. O., Sivakoff G. R., Ho W. C. G., Shternin P. S., Yakovlev D. G., Patnaude D. J., and David L. // *Astrophys. J.* . — 2013. — Nov. — Vol. 777, no. 1. — P. 22. — 1306.3387.
- [R8] Tests of the nuclear equation of state and superfluid and superconducting gaps using the Cassiopeia A neutron star / Ho W. C. G., Elshamouty K. G., Heinke C. O., and Potekhin A. Y. // *Phys. Rev. C* . — 2015. — Jan. — Vol. 91, no. 1. — P. 015806. — 1412.7759.
- [R9] Constraining superfluidity in dense matter from the cooling of isolated neutron stars / Beloin S., Han S., Steiner A. W., and Page D. // *Phys. Rev. C* . — 2018. — Jan. — Vol. 97, no. 1. — P. 015804.
- [R10] Model-independent constraints on superfluidity from the cooling neutron star in Cassiopeia A / Shternin P. S., Ofengeim D. D., Ho W. C. G., Heinke C. O., Wijngaarden M. J. P., and Patnaude D. J. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2021. — Sep. — Vol. 506, no. 1. — P. 709–726. — 2106.05692.
- [R11] Tisza L. Transport Phenomena in Helium II // *Nature*. — 1938. — May. — Vol. 141. — P. 913.
- [R12] Landau L. D. Theory of superfluidity of Helium-II // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 1941. — Dec. — Vol. 11. — P. 592.
- [R13] Landau L. D. // *J. Physics*. — 1947. — Dec. — Vol. 11. — P. 91.
- [R14] Khalatnikov I. M. // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 1952. — Dec. — Vol. 23. — P. 169.
- [R15] Arkhipov R., Khalatnikov I. M. // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 1957. — Dec. — Vol. 33. — P. 758.

- [R16] Khalatnikov I. M. Sound Propagation in Solutions of Two Superfluid Liquids // Pisma v ZhETF. — 1973. — May. — Vol. 17. — P. 534.
- [R17] Andreev A. F., Bashkin E. P. Three-velocity hydrodynamics of superfluid solutions // Sov. J. Exp. Theor. Phys. — 1976. — Vol. 42. — P. 164.
- [R18] Vardanyan G. A., Sedrakyan D. M. // Sov. J. Exp. Theor. Phys. — 1981. — Nov. — Vol. 54. — P. 919.
- [R19] Holm D. D., Kupersmidt B. A. Superfluid plasmas - Multivelocity nonlinear hydrodynamics of superfluid solutions with charged condensates coupled electromagnetically // Phys. Rev. A. — 1987. — Vol. 36. — P. 3947–3956.
- [R20] Mendell G., Lindblom L. The coupling of charged superfluid mixtures to the electromagnetic field // Annals of Physics. — 1991. — Jan. — Vol. 205. — P. 110–129.
- [R21] Sedrakian A. D., Sedrakian D. M. Superfluid Core Rotation in Pulsars. I. Vortex Cluster Dynamics // Astrophys. J. . — 1995. — July. — Vol. 447. — P. 305.
- [R22] Borumand M., Joynt R., Kluźniak W. Superfluid densities in neutron-star matter // Phys. Rev. C . — 1996. — Nov. — Vol. 54. — P. 2745–2750.
- [R23] Chamel N., Haensel P. Entrainment parameters in a cold superfluid neutron star core // Phys. Rev. C . — 2006. — Apr. — Vol. 73, no. 4. — P. 045802. — nucl-th/0603018.
- [R24] Leinson L. B. Non-linear approach to the entrainment matrix of superfluid nucleon mixture at zero temperature // Mon. Not. R. Astron. Soc.. — 2017. — Sep. — Vol. 470, no. 3. — P. 3374–3387. — 1706.01272.
- [R25] Chamel N., Allard V. Entrainment effects in neutron-proton mixtures within the nuclear energy-density functional theory: Low-temperature limit // Phys. Rev. C . — 2019. — Dec. — Vol. 100, no. 6. — P. 065801. — 2102.02474.
- [R26] Leggett A. J. Theory of a Superfluid Fermi Liquid. I. General Formalism and Static Properties // Physical Review. — 1965. — Dec. — Vol. 140, no. 6A. — P. 1869–1888.
- [R27] Leggett A. J. A theoretical description of the new phases of liquid ^3He // Reviews of Modern Physics. — 1975. — Apr. — Vol. 47, no. 2. — P. 331–414.
- [R28] Leinson L. B. The entrainment matrix of a superfluid nucleon mixture at finite temperatures // Mon. Not. R. Astron. Soc.. — 2018. — Sep. — Vol. 479, no. 3. — P. 3778–3790. — 1806.05072.
- [R29] Allard V., Chamel N. Entrainment effects in neutron-proton mixtures within the nuclear energy-density functional theory. II. Finite temperatures and arbitrary currents // Phys. Rev. C . — 2021. — Feb. — Vol. 103, no. 2. — P. 025804. — 2006.15317.
- [R30] Lebedev V. V., Khalatnikov I. M. The relativistic hydrodynamics of a superfluid // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 1982. — Nov. — Vol. 56. — P. 923.
- [R31] Khalatnikov I. M., Lebedev V. V. Relativistic hydrodynamics of a superfluid liquid // Physics Letters A. — 1982. — Aug. — Vol. 91. — P. 70–72.
- [R32] Carter B. The canonical treatment of heat conduction and superfluidity in relativistic hydrodynamics. // A Random Walk in Relativity and Cosmology. — 1985. — Jan. — P. 48–62.
- [R33] Carter B., Khalatnikov I. M. Momentum, vorticity, and helicity in covariant superfluid dynamics // Annals of Physics. — 1992. — Nov. — Vol. 219. — P. 243–265.
- [R34] Carter B., Khalatnikov I. M. Equivalence of convective and potential variational derivations of covariant superfluid dynamics // Phys. Rev. D . — 1992. — June. — Vol. 45. — P. 4536–4544.
- [R35] Son D. T. Hydrodynamics of Relativistic Systems with Broken Continuous Symmetries // International Journal of Modern Physics A. — 2001. — Vol. 16. — P. 1284–1286. — hep-ph/0011246.

- [R36] Langlois D., Sedrakian D. M., Carter B. Differential rotation of relativistic superfluid in neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1998. — July. — Vol. 297. — P. 1189–1201. — astro-ph/9711042.
- [R37] Carter B., Langlois D. Relativistic models for superconducting-superfluid mixtures // *Nuclear Physics B*. — 1998. — Vol. 531. — P. 478–504. — gr-qc/9806024.
- [R38] Baym G., Chin S. A. Landau theory of relativistic Fermi liquids // *Nucl. Phys. A*. — 1976. — Vol. 262, no. 3. — P. 527–538.
- [R39] Sourie A., Oertel M., Novak J. Numerical models for stationary superfluid neutron stars in general relativity with realistic equations of state // *Phys. Rev. D*. — 2016. — Apr. — Vol. 93, no. 8. — P. 083004. — 1602.06228.
- [R40] Goriely S., Chamel N., Pearson J. M. Hartree-Fock-Bogoliubov nuclear mass model with 0.50 MeV accuracy based on standard forms of Skyrme and pairing functionals // *Phys. Rev. C*. — 2013. — Dec. — Vol. 88, no. 6. — P. 061302.
- [R41] Leinson L. B. Neutrino emission from triplet pairing of neutrons in neutron stars // *Phys. Rev. C*. — 2010. — Feb. — Vol. 81, no. 2. — P. 025501. — 0912.2164.
- [R42] Betbeder-Matibet O., Nozières P. Transport equation for quasiparticles in a system of interacting fermions colliding on dilute impurities // *Annals of Physics*. — 1966. — Mar. — Vol. 37, no. 1. — P. 17–54.
- [R43] Aronov A. G., Gurevich V. L. // *Solid State Physics*. — 1974. — Vol. 16. — P. 2656.
- [R44] Effects of strong and electromagnetic correlations on neutrino interactions in dense matter / Reddy S., Prakash M., Lattimer J. M., and Pons J. A. // *Phys. Rev. C*. — 1999. — May. — Vol. 59, no. 5. — P. 2888–2918. — astro-ph/9811294.
- [R45] Leinson L. B. Superfluid response and the neutrino emissivity of baryon matter: Fermi-liquid effects // *Phys. Rev. C*. — 2009. — Apr. — Vol. 79, no. 4. — P. 045502. — 0904.0320.
- [R46] Landau L., Lifshitz E. *Fluid mechanics*. — Pergamon Press, Oxford, 1987.
- [R47] Brooker G. A., Sykes J. Transport Properties of a Fermi Liquid // *Phys. Rev. Lett.* . — 1968. — July. — Vol. 21, no. 5. — P. 279–282.
- [R48] Finzi A., Wolf R. A. Hot, Vibrating Neutron Stars // *Astrophys. J.* . — 1968. — Sep. — Vol. 153. — P. 835.
- [R49] Sawyer R. F. Bulk viscosity of hot neutron-star matter and the maximum rotation rates of neutron stars // *Phys. Rev. D*. — 1989. — June. — Vol. 39, no. 12. — P. 3804–3806.
- [R50] Haensel P., Levenfish K. P., Yakovlev D. G. Bulk viscosity in superfluid neutron star cores. I. Direct Urca processes in npmu matter // *Astron. Astrophys.* — 2000. — May. — Vol. 357. — P. 1157–1169. — astro-ph/0004183.
- [R51] Haensel P., Levenfish K. P., Yakovlev D. G. Bulk viscosity in superfluid neutron star cores. II. Modified Urca processes in npe mu matter // *Astron. Astrophys.* — 2001. — June. — Vol. 372. — P. 130–137. — astro-ph/0103290.
- [R52] Haensel P., Levenfish K. P., Yakovlev D. G. Bulk viscosity in superfluid neutron star cores. III. Effects of Sigma⁻ hyperons // *Astron. Astrophys.* — 2002. — Jan. — Vol. 381. — P. 1080–1089. — astro-ph/0110575.
- [R53] Lindblom L., Owen B. J. Effect of hyperon bulk viscosity on neutron-star r-modes // *Phys. Rev. D*. — 2002. — Mar. — Vol. 65, no. 6. — P. 063006. — astro-ph/0110558.
- [R54] Nayyar M., Owen B. J. R-modes of accreting hyperon stars as persistent sources of gravitational waves // *Phys. Rev. D*. — 2006. — Apr. — Vol. 73, no. 8. — P. 084001. — astro-ph/0512041.

- [R55] Sa'D B. A., Shovkovy I. A., Rischke D. H. Bulk viscosity of spin-one color superconductors with two quark flavors // *Phys. Rev. D* . — 2007. — Mar. — Vol. 75, no. 6. — P. 065016. — astro-ph/0607643.
- [R56] Khalatnikov I. M. An introduction to the theory of superfluidity. — Westview Press, New York, 2000.
- [R57] Mannarelli M., Manuel C. Bulk viscosities of a cold relativistic superfluid: Color-flavor locked quark matter // *Phys. Rev. D* . — 2010. — Feb. — Vol. 81, no. 4. — P. 043002. — 0909.4486.
- [R58] Haskell B., Andersson N. Superfluid hyperon bulk viscosity and the r-mode instability of rotating neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2010. — Nov. — Vol. 408, no. 3. — P. 1897–1915. — 1003.5849.
- [R59] Bierkandt R., Manuel C. Bulk viscosity coefficients due to phonons and kaons in superfluid color-flavor locked quark matter // *Phys. Rev. D* . — 2011. — July. — Vol. 84, no. 2. — P. 023004. — 1104.5624.
- [R60] Haskell B., Andersson N., Comer G. L. Dynamics of dissipative multifluid neutron star cores // *Phys. Rev. D* . — 2012. — Sep. — Vol. 86, no. 6. — P. 063002. — 1204.2894.
- [R61] Manuel C., Tarrús J., Tolos L. Bulk viscosity coefficients due to phonons in superfluid neutron stars // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2013. — July. — Vol. 2013, no. 7. — P. 003. — 1302.5447.
- [R62] Neutron stars and the nuclear equation of state / Burgio G. F., Schulze H. J., Vidaña I., and Wei J. B. // *Progress in Particle and Nuclear Physics*. — 2021. — Sep. — Vol. 120. — P. 103879. — 2105.03747.
- [R63] Fast cooling and internal heating in hyperon stars / Anzuini F., Melatos A., Dehman C., Viganò D., and Pons J. A. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2022. — Jan. — Vol. 509, no. 2. — P. 2609–2623. — 2110.14039.
- [R64] Bayesian Nonparametric Inference of the Neutron Star Equation of State via a Neural Network / Han M.-Z., Jiang J.-L., Tang S.-P., and Fan Y.-Z. // *Astrophys. J.* . — 2021. — Sep. — Vol. 919, no. 1. — P. 11. — 2103.05408.
- [R65] g -mode oscillations in hybrid stars: A tale of two sounds / Jaikumar P., Semposki A., Prakash M., and Constantinou C. // *Phys. Rev. D* . — 2021. — June. — Vol. 103, no. 12. — P. 123009. — 2101.06349.
- [R66] Alford M. G., Haber A. Strangeness-changing rates and hyperonic bulk viscosity in neutron star mergers // *Phys. Rev. C* . — 2021. — Apr. — Vol. 103, no. 4. — P. 045810. — 2009.05181.
- [R67] Cooling of hypernuclear compact stars: Hartree-Fock models and high-density pairing / Raduta A. R., Li J. J., Sedrakian A., and Weber F. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2019. — Aug. — Vol. 487, no. 2. — P. 2639–2652. — 1903.01295.
- [R68] Raduta A. R., Sedrakian A., Weber F. Cooling of hypernuclear compact stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2018. — Apr. — Vol. 475, no. 4. — P. 4347–4356. — 1712.00584.
- [R69] Yu H., Weinberg N. N. Dynamical tides in coalescing superfluid neutron star binaries with hyperon cores and their detectability with third-generation gravitational-wave detectors // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2017. — Sep. — Vol. 470, no. 1. — P. 350–360. — 1705.04700.
- [R70] Cutler C., Lindblom L. The Effect of Viscosity on Neutron Star Oscillations // *Astrophys. J.* . — 1987. — Mar. — Vol. 314. — P. 234.
- [R71] Braginskii S. I. Transport Processes in a Plasma // *Reviews of Plasma Physics*. — 1965. — Jan. — Vol. 1. — P. 205.
- [R72] Stellar Superfluids / Page D., Lattimer J. M., Prakash M., and Steiner A. W. // arXiv e-prints. — 2013. — Feb. — P. arXiv:1302.6626. — 1302.6626.
- [R73] Shternin P. S. Transport coefficients of leptons in superconducting neutron star cores // *Phys. Rev. D* . — 2018. — Sep. — Vol. 98, no. 6. — P. 063015. — 1805.06000.

- [R74] Flanagan É. É., Hinderer T. Constraining neutron-star tidal Love numbers with gravitational-wave detectors // *Phys. Rev. D* . — 2008. — Jan. — Vol. 77, no. 2. — P. 021502. — 0709.1915.
- [R75] Yu H., Weinberg N. N. Resonant tidal excitation of superfluid neutron stars in coalescing binaries // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2017. — Jan. — Vol. 464, no. 3. — P. 2622–2637. — 1610.00745.
- [R76] Weinberg N. N., Arras P., Burkart J. An Instability due to the Nonlinear Coupling of p-modes to g-modes: Implications for Coalescing Neutron Star Binaries // *Astrophys. J.* . — 2013. — June. — Vol. 769, no. 2. — P. 121. — 1302.2292.
- [R77] Poisson E. Gravitomagnetic tidal resonance in neutron-star binary inspirals // *Phys. Rev. D* . — 2020. — May. — Vol. 101, no. 10. — P. 104028. — 2003.10427.
- [R78] Abbott B. P., et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral // *Phys. Rev. Lett.* . — 2017. — Vol. 119, no. 16. — P. 161101. — 1710.05832.
- [R79] Chandrasekhar S. The Dynamical Instability of Gaseous Masses Approaching the Schwarzschild Limit in General Relativity. // *Astrophys. J.* . — 1964. — Aug. — Vol. 140. — P. 417.
- [R80] Thorne K. S., Campolattaro A. Non-Radial Pulsation of General-Relativistic Stellar Models. I. Analytic Analysis for $L \geq 2$ // *Astrophys. J.* . — 1967. — Sep. — Vol. 149. — P. 591.
- [R81] Price R., Thorne K. S. Non-Radial Pulsation of General-Relativistic Stellar Models. II. Properties of the Gravitational Waves // *Astrophys. J.* . — 1969. — Jan. — Vol. 155. — P. 163.
- [R82] Thorne K. S. Nonradial Pulsation of General-Relativistic Stellar Models. III. Analytic and Numerical Results for Neutron Stars // *Astrophys. J.* . — 1969. — Vol. 158. — P. 1.
- [R83] Thorne K. S. Nonradial Pulsation of General-Relativistic Stellar Models. IV. The Weakfield Limit // *Astrophys. J.* . — 1969. — Dec. — Vol. 158. — P. 997.
- [R84] Campolattaro A., Thorne K. S. Nonradial Pulsation of General-Relativistic Stellar Models. V. Analytic Analysis for $L = 1$ // *Astrophys. J.* . — 1970. — Mar. — Vol. 159. — P. 847.
- [R85] Detweiler S. L., Ipser J. R. A Variational Principle and a Stability Criterion for the Non-Radial Modes of Pulsation of Stellar Models in General Relativity // *Astrophys. J.* . — 1973. — Vol. 185. — P. 685–708.
- [R86] Lindblom L., Detweiler S. L. The quadrupole oscillations of neutron stars. // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* — 1983. — Sep. — Vol. 53. — P. 73–92.
- [R87] Detweiler S., Lindblom L. On the nonradial pulsations of general relativistic stellar models // *Astrophys. J.* . — 1985. — May. — Vol. 292. — P. 12–15.
- [R88] Cutler C., Lindblom L., Splinter R. J. Damping Times for Neutron Star Oscillations // *Astrophys. J.* . — 1990. — Nov. — Vol. 363. — P. 603.
- [R89] Chandrasekhar S., Ferrari V. On the non-radial oscillations of a star // *Proceedings of the Royal Society of London Series A*. — 1991. — Feb. — Vol. 432, no. 1885. — P. 247–279.
- [R90] Kokkotas K. D., Schutz B. F. W-modes - A new family of normal modes of pulsating relativistic stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1992. — Mar. — Vol. 255. — P. 119–128.
- [R91] Yoshida S., Lee U. r-modes in relativistic superfluid stars // *Phys. Rev. D* . — 2003. — June. — Vol. 67, no. 12. — P. 124019. — gr-qc/0304073.
- [R92] Lin L.-M., Andersson N., Comer G. L. Oscillations of general relativistic multifluid/multilayer compact stars // *Phys. Rev. D* . — 2008. — Vol. 78, no. 8. — P. 083008. — 0709.0660.
- [R93] Lindblom L., Mendell G. The Oscillations of Superfluid Neutron Stars // *Astrophys. J.* . — 1994. — Feb. — Vol. 421. — P. 689.
- [R94] Lee U. Nonradial oscillations of neutron stars with the superfluid core. // *Astron. Astrophys.* — 1995. — Nov. — Vol. 303. — P. 515.

- [R95] Lindblom L., Mendell G. r-modes in superfluid neutron stars // *Phys. Rev. D* . — 2000. — May. — Vol. 61, no. 10. — P. 104003. — gr-qc/9909084.
- [R96] Prix R., Rieutord M. Adiabatic oscillations of non-rotating superfluid neutron stars // *Astron. Astrophys.* — 2002. — Vol. 393. — P. 949–963. — astro-ph/0204520.
- [R97] Lee U., Yoshida S. r-Modes of Neutron Stars with Superfluid Cores // *Astrophys. J.* . — 2003. — Mar. — Vol. 586, no. 1. — P. 403–418. — astro-ph/0211580.
- [R98] Prix R., Comer G. L., Andersson N. Inertial modes of non-stratified superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2004. — Feb. — Vol. 348, no. 2. — P. 625–637. — astro-ph/0308507.
- [R99] Samuelsson L., Andersson N. Axial quasi-normal modes of neutron stars: accounting for the superfluid in the crust // *Classical and Quantum Gravity*. — 2009. — Aug. — Vol. 26, no. 15. — P. 155016. — 0903.2437.
- [R100] Wong K. S., Lin L. M., Leung P. T. Universality in Oscillation Modes of Superfluid Neutron Stars? // *Astrophys. J.* . — 2009. — July. — Vol. 699, no. 2. — P. 1809–1821. — 0812.3708.
- [R101] Passamonti A., Andersson N. Hydrodynamics of rapidly rotating superfluid neutron stars with mutual friction // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2011. — May. — Vol. 413, no. 1. — P. 47–70. — 1004.4563.
- [R102] Passamonti A., Andersson N. Towards real neutron star seismology: accounting for elasticity and superfluidity // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2012. — Jan. — Vol. 419, no. 1. — P. 638–655. — 1105.4787.
- [R103] Comer G. L., Langlois D., Lin L. M. Quasinormal modes of general relativistic superfluid neutron stars // *Phys. Rev. D* . — 1999. — Nov. — Vol. 60, no. 10. — P. 104025. — gr-qc/9908040.
- [R104] Andersson N., Comer G. L., Langlois D. Oscillations of general relativistic superfluid neutron stars // *Phys. Rev. D* . — 2002. — Nov. — Vol. 66, no. 10. — P. 104002. — gr-qc/0203039.
- [R105] Lindblom L., Mendell G. Does Gravitational Radiation Limit the Angular Velocities of Superfluid Neutron Stars? // *Astrophys. J.* . — 1995. — May. — Vol. 444. — P. 804.
- [R106] Haskell B., Andersson N., Passamonti A. r modes and mutual friction in rapidly rotating superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2009. — Aug. — Vol. 397, no. 3. — P. 1464–1485. — 0902.1149.
- [R107] Andersson N., Glampedakis K., Haskell B. Oscillations of dissipative superfluid neutron stars // *Phys. Rev. D* . — 2009. — May. — Vol. 79, no. 10. — P. 103009. — 0812.3023.
- [R108] Passamonti A., Glampedakis K. Non-linear viscous damping and gravitational wave detectability of the f-mode instability in neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2012. — June. — Vol. 422, no. 4. — P. 3327–3338. — 1112.3931.
- [R109] McDermott P. N., van Horn H. M., Scholl J. F. Nonradial g-mode oscillations of warm neutron stars // *Astrophys. J.* . — 1983. — May. — Vol. 268. — P. 837–848.
- [R110] Finn L. S. G-modes in zero-temperature neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1987. — July. — Vol. 227. — P. 265–293.
- [R111] Reisenegger A., Goldreich P. A New Class of g-Modes in Neutron Stars // *Astrophys. J.* . — 1992. — Aug. — Vol. 395. — P. 240.
- [R112] Andersson N., Comer G. L. On the dynamics of superfluid neutron star cores // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2001. — Dec. — Vol. 328, no. 4. — P. 1129–1143. — astro-ph/0101193.
- [R113] Passamonti A., Andersson N., Ho W. C. G. Buoyancy and g-modes in young superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2016. — Jan. — Vol. 455, no. 2. — P. 1489–1511. — 1504.07470.
- [R114] Rau P. B., Wasserman I. Compressional modes in two-superfluid neutron stars with leptonic buoyancy // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2018. — Dec. — Vol. 481, no. 4. — P. 4427–4444. — 1802.08741.

- [R115] Yu H., Weinberg N. N. Dynamical tides in coalescing superfluid neutron star binaries with hyperon cores and their detectability with third-generation gravitational-wave detectors // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2017. — Sep. — Vol. 470, no. 1. — P. 350–360. — 1705.04700.
- [R116] Kumar D., Mishra H., Malik T. Non-radial oscillation modes in hybrid stars: consequences of a mixed phase // *arXiv e-prints*. — 2021. — P. arXiv:2110.00324. — 2110.00324.
- [R117] Bai Z., Fu W.-j., Liu Y.-x. Identifying QCD Phase Transitions via the Gravitational Wave Frequency from a Supernova Explosion // *Astrophys. J.* . — 2021. — Dec. — Vol. 922, no. 2. — P. 266. — 2109.12614.
- [R118] g modes of neutron stars with hadron-to-quark crossover transitions / Constantinou C., Han S., Jaikumar P., and Prakash M. // *Phys. Rev. D* . — 2021. — Dec. — Vol. 104, no. 12. — P. 123032. — 2109.14091.
- [R119] Lifting the Veil on Quark Matter in Compact Stars with Core g-mode Oscillations / Wei W., Salinas M., Klähn T., Jaikumar P., and Barry M. // *Astrophys. J.* . — 2020. — Dec. — Vol. 904, no. 2. — P. 187.
- [R120] Oscillation modes of hybrid stars within the relativistic Cowling approximation / Ranea-Sandoval I. F., Guilera O. M., Mariani M., and Orsaria M. G. // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2018. — Dec. — Vol. 2018, no. 12. — P. 031. — 1807.02166.
- [R121] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, Weinberg N. N. Constraining the p -Mode-g -Mode Tidal Instability with GW170817 // *Phys. Rev. Lett.* . — 2019. — Feb. — Vol. 122, no. 6. — P. 061104. — 1808.08676.
- [R122] Hall H. E., Vinen W. F. The Rotation of Liquid Helium II. II. The Theory of Mutual Friction in Uniformly Rotating Helium II // *Proceedings of the Royal Society of London Series A*. — 1956. — Dec. — Vol. 238. — P. 215–234.
- [R123] Hall H. E. The rotation of liquid helium II // *Advances in Physics*. — 1960. — Jan. — Vol. 9. — P. 89–146.
- [R124] Bekarevich I., Khalatnikov I. Phenomenological Derivation of the Equations of Vortex Motion in He II // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 1961. — Vol. 13. — P. 643.
- [R125] Mendell G. Superfluid hydrodynamics in rotating neutron stars. I - Nondissipative equations. II - Dissipative effects // *Astrophys. J.* . — 1991. — Vol. 380. — P. 515–540.
- [R126] Mendell G. Superfluid Hydrodynamics in Rotating Neutron Stars. II. Dissipative Effects // *Astrophys. J.* . — 1991. — Vol. 380. — P. 530.
- [R127] Mendell G. Magnetohydrodynamics in superconducting-superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 1998. — June. — Vol. 296, no. 4. — P. 903–912. — astro-ph/9702032.
- [R128] Glampedakis K., Andersson N., Samuelsson L. Magnetohydrodynamics of superfluid and superconducting neutron star cores // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2011. — Jan. — Vol. 410. — P. 805–829. — 1001.4046.
- [R129] Andersson N., Wells S., Vickers J. A. Quantised vortices and mutual friction in relativistic superfluids // *Classical and Quantum Gravity*. — 2016. — Dec. — Vol. 33, no. 24. — P. 245010. — 1601.07395.
- [R130] Rau P. B., Wasserman I. Relativistic finite temperature multifluid hydrodynamics in a neutron star from a variational principle // *Phys. Rev. D* . — 2020. — Sep. — Vol. 102, no. 6. — P. 063011. — 2004.07468.
- [R131] Andersson N. A New Class of Unstable Modes of Rotating Relativistic Stars // *Astrophys. J.* . — 1998. — Aug. — Vol. 502, no. 2. — P. 708–713. — gr-qc/9706075.
- [R132] Friedman J. L., Morsink S. M. Axial Instability of Rotating Relativistic Stars // *Astrophys. J.* . — 1998. — Aug. — Vol. 502, no. 2. — P. 714–720. — gr-qc/9706073.
- [R133] Haskell B. R-modes in neutron stars: Theory and observations // *International Journal of Modern Physics E*. — 2015. — Aug. — Vol. 24. — P. 1541007. — 1509.04370.

- [R134] Glampedakis K., Gualtieri L. Gravitational Waves from Single Neutron Stars: An Advanced Detector Era Survey // *Astrophysics and Space Science Library* / ed. by Rezzolla L., Piz-zochero P., Jones D. I. et al. — 2018. — Jan. — Vol. 457 of *Astrophysics and Space Science Library*. — P. 673. — 1709.07049.
- [R135] Levin Y. Runaway Heating by R-Modes of Neutron Stars in Low-Mass X-Ray Binaries // *Astrophys. J.* . — 1999. — May. — Vol. 517. — P. 328–333. — astro-ph/9810471.
- [R136] Hyperonic stars and the symmetry energy / Providência C., Fortin M., Pais H., and Rabhi A. // *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*. — 2019. — Mar. — Vol. 6. — P. 13. — 1811.00786.
- [R137] Alpar M. A., Langer S. A., Sauls J. A. Rapid postglitch spin-up of the superfluid core in pulsars // *Astrophys. J.* . — 1984. — July. — Vol. 282. — P. 533–541.
- [R138] Heiselberg H., Hjorth-Jensen M. Phase Transitions in Neutron Stars and Maximum Masses // *Astrophys. J. Lett.*. — 1999. — Nov. — Vol. 525. — P. L45–L48. — astro-ph/9904214.
- [R139] Goldreich P., Reisenegger A. Magnetic Field Decay in Isolated Neutron Stars // *Astrophys. J.* . — 1992. — Aug. — Vol. 395. — P. 250.
- [R140] Thompson C., Duncan R. C. The Soft Gamma Repeaters as Very Strongly Magnetized Neutron Stars. II. Quiescent Neutrino, X-Ray, and Alfvén Wave Emission // *Astrophys. J.* . — 1996. — Dec. — Vol. 473. — P. 322.
- [R141] Hoyos J., Reisenegger A., Valdivia J. A. Magnetic field evolution in neutron stars: one-dimensional multi-fluid model // *Astron. Astrophys.*. — 2008. — Sep. — Vol. 487. — P. 789–803. — 0801.4372.
- [R142] Hoyos J. H., Reisenegger A., Valdivia J. A. Asymptotic, non-linear solutions for ambipolar diffusion in one dimension // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2010. — Nov. — Vol. 408. — P. 1730–1741. — 1003.5262.
- [R143] Glampedakis K., Jones D. I., Samuelsson L. Ambipolar diffusion in superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2011. — May. — Vol. 413. — P. 2021–2030. — 1010.1153.
- [R144] Magnetic field evolution in superconducting neutron stars / Graber V., Andersson N., Glampedakis K., and Lander S. K. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2015. — Vol. 453. — P. 671–681. — 1505.00124.
- [R145] Simulated magnetic field expulsion in neutron star cores / Elfritz J. G., Pons J. A., Rea N., Glampedakis K., and Viganò D. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2016. — Mar. — Vol. 456. — P. 4461–4474. — 1512.07151.
- [R146] Beloborodov A. M., Li X. Magnetar Heating // *Astrophys. J.* . — 2016. — Dec. — Vol. 833. — P. 261. — 1605.09077.
- [R147] Castillo F., Reisenegger A., Valdivia J. A. Magnetic field evolution and equilibrium configurations in neutron star cores: the effect of ambipolar diffusion // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2017. — Vol. 471, no. 1. — P. 507–522. — 1705.10020.
- [R148] Dommès V. A., Gusakov M. E. Vortex buoyancy in superfluid and superconducting neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2017. — May. — Vol. 467, no. 1. — P. L115–L119. — 1701.06870.
- [R149] The relevance of ambipolar diffusion for neutron star evolution / Passamonti A., Akgün T., Pons J. A., and Miralles J. A. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2017. — Mar. — Vol. 465. — P. 3416–3428. — 1608.00001.
- [R150] Bransgrove A., Levin Y., Beloborodov A. Magnetic field evolution of neutron stars - I. Basic formalism, numerical techniques and first results // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2018. — Jan. — Vol. 473, no. 2. — P. 2771–2790. — 1709.09167.
- [R151] Castillo F., Reisenegger A., Valdivia J. A. Two-fluid simulations of the magnetic field evolution in neutron star cores in the weak-coupling regime // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2020. — Vol. 498, no. 2. — P. 3000–3012. — 2006.13186.

- [R152] Bransgrove A., Levin Y., Beloborodov A. // private communication. — 2021.
- [R153] Jones P. B. Neutron superfluid spin-down and magnetic field decay in pulsars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1991. — Nov. — Vol. 253. — P. 279–286.
- [R154] Jones P. B. Type II superconductivity and magnetic flux transport in neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2006. — Jan. — Vol. 365. — P. 339–344. — astro-ph/0510396.
- [R155] Alford M. G., Sedrakian A. Color-magnetic flux tubes in quark matter cores of neutron stars // *Journal of Physics G Nuclear Physics*. — 2010. — July. — Vol. 37, no. 7. — P. 075202. — 1001.3346.
- [R156] Haensel P., Potekhin A. Y., Yakovlev D. G. *Neutron Stars 1 : Equation of State and Structure*. — 2007. — Vol. 326.
- [R157] Chamel N., Haensel P. *Physics of Neutron Star Crusts* // *Living Reviews in Relativity*. — 2008. — Dec. — Vol. 11, no. 1. — P. 10. — 0812.3955.
- [R158] Brown E. F., Bildsten L., Rutledge R. E. Crustal Heating and Quiescent Emission from Transiently Accreting Neutron Stars // *Astrophys. J. Lett.* — 1998. — Sep. — Vol. 504, no. 2. — P. L95–L98. — astro-ph/9807179.
- [R159] Yakovlev D. G., Levenfish K. P., Haensel P. Thermal state of transiently accreting neutron stars // *Astron. Astrophys.* — 2003. — Aug. — Vol. 407. — P. 265–271. — astro-ph/0209027.
- [R160] Thermal states of coldest and hottest neutron stars in soft X-ray transients / Yakovlev D. G., Levenfish K. P., Potekhin A. Y., Gnedin O. Y., and Chabrier G. // *Astron. Astrophys.* — 2004. — Apr. — Vol. 417. — P. 169–179.
- [R161] Constraints on Thermal X-Ray Radiation from SAX J1808.4-3658 and Implications for Neutron Star Neutrino Emission / Heinke C. O., Jonker P. G., Wijnands R., and Taam R. E. // *Astrophys. J.* — 2007. — May. — Vol. 660. — P. 1424–1427. — arXiv:astro-ph/0612232.
- [R162] Further Constraints on Thermal Quiescent X-Ray Emission from SAX J1808.4-3658 / Heinke C. O., Jonker P. G., Wijnands R., Deloye C. J., and Taam R. E. // *Astrophys. J.* — 2009. — Feb. — Vol. 691. — P. 1035–1041. — 0810.0497.
- [R163] Wijnands R., Degenaar N., Page D. Testing the deep-crustal heating model using quiescent neutron-star very-faint X-ray transients and the possibility of partially accreted crusts in accreting neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2013. — July. — Vol. 432. — P. 2366–2377. — 1208.4273.
- [R164] Han S., Steiner A. W. Cooling of neutron stars in soft x-ray transients // *Phys. Rev. C* . — 2017. — Sep. — Vol. 96, no. 3. — P. 035802. — 1702.08452.
- [R165] Thermal states of neutron stars with a consistent model of interior / Fortin M., Taranto G., Burgio G. F., Haensel P., Schulze H. J., and Zdunik J. L. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2018. — Apr. — Vol. 475, no. 4. — P. 5010–5022. — 1709.04855.
- [R166] Rapid Neutrino Cooling in the Neutron Star MXB 1659-29 / Brown E. F., Cumming A., Fattoyev F. J., Horowitz C. J., Page D., and Reddy S. // *Phys. Rev. Lett.* . — 2018. — May. — Vol. 120, no. 18. — P. 182701. — 1801.00041.
- [R167] Potekhin A. Y., Chugunov A. I., Chabrier G. Thermal evolution and quiescent emission of transiently accreting neutron stars // *Astron. Astrophys.* — 2019. — Sep. — Vol. 629. — P. A88. — 1907.08299.
- [R168] Thermal evolution of relativistic hyperonic compact stars with calibrated equations of state / Fortin M., Raduta A. R., Avancini S., and Providencia C. // arXiv e-prints. — 2021. — Feb. — P. arXiv:2102.07565. — 2102.07565.
- [R169] Crustal Emission and the Quiescent Spectrum of the Neutron Star in KS 1731-96260 / Rutledge R. E., Bildsten L., Brown E. F., Pavlov G. G., Zavlin V. E., and Ushomirsky G. // *Astrophys. J.* . — 2002. — Vol. 580, no. 1. — P. 413. — Access mode: <http://stacks.iop.org/0004-637X/580/i=1/a=413>.

- [R170] Neutron star cooling after deep crustal heating in the X-ray transient KS 1731-260 / Shternin P. S., Yakovlev D. G., Haensel P., and Potekhin A. Y. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2007. — Nov. — Vol. 382. — P. L43–L47.
- [R171] Brown E. F., Cumming A. Mapping Crustal Heating with the Cooling Light Curves of Quasi-Persistent Transients // *Astrophys. J.* . — 2009. — June. — Vol. 698. — P. 1020–1032.
- [R172] Continued Cooling of the Crust in the Neutron Star Low-mass X-ray Binary KS 1731-260 / Cackett E. M., Brown E. F., Cumming A., Degenaar N., Miller J. M., and Wijnands R. // *Astrophys. J. Lett.* — 2010. — Vol. 722, no. 2. — P. L137–L141. — 1008.4727.
- [R173] Page D., Reddy S. Forecasting Neutron Star Temperatures: Predictability and Variability // *Phys. Rev. Lett.* . — 2013. — Dec. — Vol. 111, no. 24. — P. 241102. — 1307.4455.
- [R174] Degenaar N., Wijnands R., Miller J. M. A Direct Measurement of the Heat Release in the Outer Crust of the Transiently Accreting Neutron Star XTE J1709-267 // *Astrophys. J. Lett.* — 2013. — Apr. — Vol. 767, no. 2. — P. L31. — 1212.1453.
- [R175] Nuclear physics of the outer layers of accreting neutron stars / Meisel Z., Deibel A., Keek L., Shternin P., and Elfritz J. // *Journal of Physics G Nuclear Physics.* — 2018. — Sep. — Vol. 45, no. 9. — P. 093001. — 1807.01150.
- [R176] Consistent accretion-induced heating of the neutron-star crust in MXB 1659-29 during two different outbursts / Parikh A. S., Wijnands R., Ootes L. S., Page D., Degenaar N., Bahramian A., Brown E. F., Cackett E. M., Cumming A., Heinke C., Homan J., Rouco Escorial A., and Wijngaarden M. J. P. // *Astron. Astrophys.* — 2019. — Apr. — Vol. 624. — P. A84. — 1810.05626.
- [R177] The effect of diffusive nuclear burning in neutron star envelopes on cooling in accreting systems / Wijngaarden M. J. P., Ho W. C. G., Chang P., Page D., Wijnands R., Ootes L. S., Cumming A., Degenaar N., and Beznogov M. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2020. — Apr. — Vol. 493, no. 4. — P. 4936–4944. — 2003.09307.
- [R178] Potekhin A. Y., Chabrier G. Crust structure and thermal evolution of neutron stars in soft X-ray transients // *Astron. Astrophys.* — 2021. — Jan. — Vol. 645. — P. A102. — 2011.10490.
- [R179] Haensel P., Zdunik J. L. Non-equilibrium processes in the crust of an accreting neutron star // *Astron. Astrophys.* — 1990. — Jan. — Vol. 227. — P. 431–436.
- [R180] Haensel P., Zdunik J. L. Equation of state and structure of the crust of an accreting neutron star // *Astron. Astrophys.* — 1990. — Mar. — Vol. 229, no. 1. — P. 117–122.
- [R181] Haensel P., Zdunik J. L. Nuclear composition and heating in accreting neutron-star crusts // *Astron. Astrophys.* — 2003. — June. — Vol. 404. — P. L33–L36. — astro-ph/0305220.
- [R182] Haensel P., Zdunik J. L. Models of crustal heating in accreting neutron stars // *Astron. Astrophys.* — 2008. — Mar. — Vol. 480. — P. 459–464. — 0708.3996.
- [R183] Steiner A. W. Deep crustal heating in a multicomponent accreted neutron star crust // *Phys. Rev. C* . — 2012. — May. — Vol. 85, no. 5. — P. 055804. — 1202.3378.
- [R184] Nuclear Reactions in the Crusts of Accreting Neutron Stars / Lau R., Beard M., Gupta S. S., Schatz H., Afanasjev A. V., Brown E. F., Deibel A., Gasques L. R., Hitt G. W., Hix W. R., Keek L., Möller P., Shternin P. S., Steiner A. W., Wiescher M., and Xu Y. // *Astrophys. J.* . — 2018. — May. — Vol. 859. — P. 62. — 1803.03818.
- [R185] Crustal heating in accreting neutron stars from the nuclear energy-density functional theory. I. Proton shell effects and neutron-matter constraint / Fantina A. F., Zdunik J. L., Chamel N., Pearson J. M., Haensel P., and Goriely S. // *Astron. Astrophys.* — 2018. — Dec. — Vol. 620. — P. A105. — 1806.03861.
- [R186] Shchechilin N. N., Chugunov A. I. Crust of accreting neutron stars within simplified reaction network // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2019. — P. 2428. — 1910.03932.

- [R187] Chugunov A. I., Shchechilin N. N. Crucial role of neutron diffusion in the crust of accreting neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2020. — June. — Vol. 495, no. 1. — P. L32–L36. — 2004.00997.
- [R188] A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities Part II. Nuclei far from stabilities / Chabanat E., Bonche P., Haensel P., Meyer J., and Schaeffer R. // *Nucl. Phys. A.* — 1998. — May. — Vol. 635, no. 1-2. — P. 231–256.
- [R189] Crystallization of the inner crust of a neutron star and the influence of shell effects / Carreau T., Gulminelli F., Chamel N., Fantina A. F., and Pearson J. M. // *Astron. Astrophys.*. — 2020. — Mar. — Vol. 635. — P. A84. — 1912.01265.
- [R190] Goriely S., Chamel N., Pearson J. M. Latest results of Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov mass formulas // *Journal of Physics Conference Series.* — 2016. — Jan. — Vol. 665 of *Journal of Physics Conference Series.* — P. 012038.
- [R191] Nuclear ground-state masses and deformations: FRDM(2012) / Möller P., Sierk A. J., Ichikawa T., and Sagawa H. // *Atomic Data and Nuclear Data Tables.* — 2016. — May. — Vol. 109. — P. 1–204. — 1508.06294.
- [R192] Odrzywolek A., Plewa T. Probing thermonuclear supernova explosions with neutrinos // *Astron. Astrophys.*. — 2011. — May. — Vol. 529. — P. A156. — 1006.0490.
- [R193] Landau L. D., Lifshitz E. M. *Statistical physics. Pt.2.* — Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [R194] Bardeen J. Critical Fields and Currents in Superconductors // *Reviews of Modern Physics.* — 1962. — Vol. 34, no. 4. — P. 667–681.
- [R195] Glampedakis K., Jones D. I. Three evolutionary paths for magnetar oscillations // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. — 2014. — Apr. — Vol. 439, no. 2. — P. 1522–1535. — 1307.7078.
- [R196] Goriely S., Chamel N., Pearson J. M. Further explorations of Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov mass formulas. XII. Stiffness and stability of neutron-star matter // *Phys. Rev. C.* — 2010. — Sep. — Vol. 82, no. 3. — P. 035804. — 1009.3840.
- [R197] Prakash M., Ainsworth T. L., Lattimer J. M. Equation of state and the maximum mass of neutron stars // *Phys. Rev. Lett.* . — 1988. — Nov. — Vol. 61, no. 22. — P. 2518–2521.
- [R198] Hartle J. B. Slowly Rotating Relativistic Stars. I. Equations of Structure // *Astrophys. J.* . — 1967. — Dec. — Vol. 150. — P. 1005.
- [R199] Precision Timing of PSR J0437-4715: An Accurate Pulsar Distance, a High Pulsar Mass, and a Limit on the Variation of Newton’s Gravitational Constant / Verbiest J. P. W., Bailes M., van Straten W., Hobbs G. B., Edwards R. T., Manchester R. N., Bhat N. D. R., Sarkissian J. M., Jacoby B. A., and Kulkarni S. R. // *Astrophys. J.* . — 2008. — May. — Vol. 679, no. 1. — P. 675–680. — 0801.2589.
- [R200] Vortex creep and the internal temperature of neutron stars. I - General theory / Alpar M. A., Pines D., Anderson P. W., and Shaham J. // *Astrophys. J.* . — 1984. — Jan. — Vol. 276. — P. 325–334.
- [R201] Reisenegger A. Deviations from Chemical Equilibrium Due to Spin-down as an Internal Heat Source in Neutron Stars // *Astrophys. J.* . — 1995. — Apr. — Vol. 442. — P. 749. — astro-ph/9410035.
- [R202] Fernández R., Reisenegger A. Rotochemical Heating in Millisecond Pulsars: Formalism and Nonsuperfluid Case // *Astrophys. J.* . — 2005. — May. — Vol. 625, no. 1. — P. 291–306. — astro-ph/0502116.