

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Белокурова Светлана Николаевна

**Корреляции и сильноинтенсивные переменные в
модели с образованием струнных кластеров при
энергиях БАК**

Научная специальность 1.3.3. Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
Вечернин Владимир Викторович

Санкт-Петербург – 2023

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Модель со слиянием струн в плоскости прицельного параметра	21
1.1. Определение коэффициента дальних корреляций	21
1.2. Формулировка модели со слиянием струн на решетке	22
1.3. Нахождение асимптотики коэффициентов корреляции как производных от функции регрессии	25
1.4. Алгоритм вычисления средних значений наблюдаемых в модели со слиянием струн на решетке	26
Глава 2. Вычисление асимптотического поведения коэффициентов дальних корреляций при большой плотности струн с учетом их неоднородного распределения в плоскости прицельного параметра	28
2.1. Коэффициент корреляции между множественностью и поперечным импульсом	28
2.2. Коэффициент корреляции между поперечными импульсами	35
2.3. Общие свойства корреляций с участием среднего поперечного импульса	49
Глава 3. Вычисление асимптотического поведения коэффициентов дальних корреляций для случая фиксированного числа начальных струн	52
3.1. Корреляции между множественностями заряженных частиц	52
3.2. Корреляции между множественностью и поперечным импульсом	59

3.3.	Корреляции в случае фиксированного общего числа начальных струн в модели без слияния	64
3.4.	Общие свойства корреляций с участием среднего поперечного импульса при фиксации общего числа струн	66
Глава 4. Использование сильно интенсивной наблюдаемой Σ для изучения образования кластеров кварк-глюонных струн в pp столкновениях при энергиях БАК.		
4.1.	Экстенсивные, интенсивные и сильно интенсивные переменные	68
4.2.	Сильноинтенсивная переменная $\Sigma(n_F, n_B)$ в модели со слиянием струн на решётке	70
4.3.	Связь переменной Σ с двухчастичной (парной) корреляционной функцией Λ	74
4.4.	Расчет переменной $\Sigma(n_F, n_B)$ на решетке методом Монте-Карло	77
4.5.	Сравнение с результатами эксперимента ALICE на Большом Адронном Коллайдере	85
Заключение		94
Список литературы		98
Приложение А. Усреднение по конфигурациям C_n^F		109
Приложение Б. Усреднение по конфигурациям C_η		115
Приложение В. Вычисления коррелятора и дисперсии в формуле (2.40) для коэффициента $p_t - p_t$ корреляций		128
Приложение Г. Методика расчета средних значений наблюдаемых при большой плотности струн с точностью до второго порядка по $1/\bar{\eta}$ при фиксированном общем числе струн		130

Г.1. Усреднение по струнным конфигурациям	131
Г.2. Расчет коэффициентов дальних корреляций	135

Введение

Известно, что изучение флуктуаций и корреляций различных наблюдаемых в процессах множественного рождения частиц при высоких энергиях дает информацию о самом начальном этапе взаимодействия адронов, отвечающем наибольшей плотности образующейся кварк-глюонной материи [1]. Это позволяет получить уникальные данные о новых объектах, образующихся на этом этапе, в том числе о кварк-глюонных струнах и струнных кластерах.

К сожалению, в настоящее время квантовая хромодинамика (КХД), которая весьма успешно применяется для описания жестких (с большими передачами импульса) процессов сильного взаимодействия [2], не позволяет получить количественное описание процессов множественного рождения частиц в мягкой области, так как в этой области неприменима теория возмущений. Для количественного описания мягких процессов, вклад которых в полное сечение рассеяния адронов высоких энергий является доминирующим, широко используется (в том числе и во всех существующих монтекарловских генераторах событий, таких как PYTHIA, VENUS, HIJING, AMPT, EPOS и др.) имеющая качественное обоснование в рамках КХД модель кварк-глюонных (цветных) струн [3—5].

В этой модели предполагается, что сильное взаимодействие происходит в два этапа: на первом этапе между партонами сталкивающихся адронов за счет процессов пересоединения цветовых потоков (color reconnection) происходит формирование протяженных объектов — трубок, заполненных цветным глюонным полем (color flux tubes), которые, если пренебречь их поперечными размерами по сравнению с продольными, можно рассматривать как одномерные струны. На втором этапе происходит распад струн с образованием адронов (адронизация).

Такая картина находит свое обоснование в результатах, получаемых монтекарловскими симуляциями стандартной КХД на решетке [6; 7], которые под-

тверждают ослабление фоновых флуктуаций глюонного поля, отвечающих за возникновение явления конфаймента, в области вдоль линии соединяющей кварк и антикварк (дикварк).

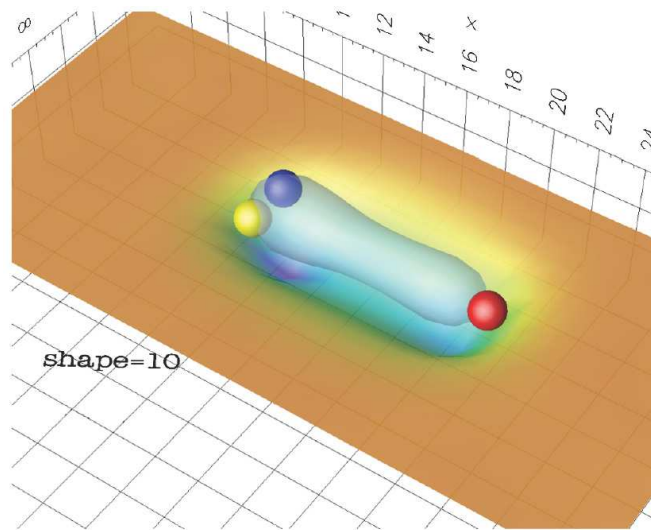


Рис. 1. Кварк-дикварковая струна в решеточной КХД [6]

Другое подтверждение струнная модель сильных взаимодействий получает через интерпретацию померона как цилиндрической структуры в рамках топологических разложений КХД в пределе большого числа цветов [8; 9]. В этом подходе рассеченный померон соответствует образованию двух струн, соединяющих кварки и дикварки мишени и снаряда (процесс пересоединения цвета), которые после их фрагментации дают две последовательности наблюдаемых адронов [10; 11].

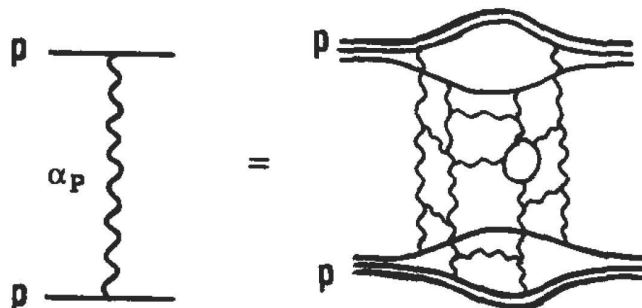


Рис. 2. Померон как цилиндрическая структура в пределе большого числа цветов [10]

Для описания процесса фрагментации струны в наблюдаемые адроны используется либо обобщение на случай КХД [12–15] механизма, предложенного

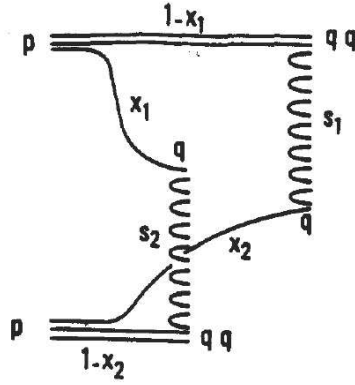


Рис. 3. Рассеченный померон как две струны [10]

Швингером для рождения частиц из вакуума в квантовой электродинамике [16–18], либо чисто геометрический подход, предложенный в работе [19] для математической модели струны Намбу в 3+1 измерениях [11; 20]. Оба подхода приводят к одному и тому же результату — равномерному распределению частиц, образующихся от распада одиночной струны, по переменной, именуемой быстротой

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{p_0 + p_z}{p_0 - p_z} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{p_z^2 + \mathbf{p}_t^2} + p_z}{\sqrt{p_z^2 + \mathbf{p}_t^2} - p_z}. \quad (1)$$

Поэтому обычно вместо продольной компоненты импульса частицы p_z , направленной вдоль оси столкновения, в паре с поперечным импульсом \mathbf{p}_t используется ее быстрота y .

При этом оказывается [11; 19; 20], что имеется статистическое соответствие между пространственной координатой сегмента струны (z) и быстротой частиц (y), образующихся при его распаде: частицы, образованные при фрагментации соседних сегментов струны, в среднем имеют и близкие значения быстроты. Это наблюдение позволяет изучать корреляции между частицами, образующимися от распада соседних или пространственно удаленных сегментов струны, исследуя корреляции между выходами частицами с быстротами в соседних или разнесенных быстротных интервалах (наблюдательных окнах).

При большой плотности струн в поперечной плоскости, например, при ядро-ядерных столкновениях и/или сверхвысоких энергиях ЛНС, необходимо учитывать взаимодействие между ними [21; 22]. Для случая взаимодействия

тяжелых ядер М.А.Брауном и К.Пахаресом в работах [23; 24] была предложена модель слияния (перколяции) первичных струн до начала их фрагментации как способ учета процессов взаимодействия между ними. Важными следствиями данного подхода являются уменьшение множественности рождающихся частиц и увеличение среднего поперечного импульса по сравнению с моделью независимых струн [25]. Еще одним следствием модели слияния струн является увеличение выхода странных частиц при большой плотности струн в ядро-ядерных столкновениях [26; 27].

Учет процессов слияния струн был также включен в генератор событий DIPSY в виде формирования так называемых “цветных веревок” (color ropes), приводящих к увеличенному выходу странных частиц [28]. В статье [29], посвященной экспериментальным исследованиям выхода мультистранных адронов в pp-взаимодействиях как функции центральности столкновения, при сравнении этих результатов с предсказаниями различных теоретических моделей коллаборация ALICE делает вывод, что модель DIPSY с учетом процессов образования “цветных веревок” описывает данные лучше, чем другие генераторы событий. Аналогичные результаты [30] были получены и в рамках мультипомеронной модели, в которой эффективным образом также учтен вклад процессов слияния струн [31; 32].

Рассматривают два варианта слияния струн: локальное и глобальное. В локальном варианте слияния струн (local fusion) предполагается что цветные поля складываются только в областях перекрытия струн [33]. В этом случае средняя множественность в заданном быстротном интервале и средний поперечный импульс заряженных частиц, излученных из области перекрытия k струн, описываются следующими выражениями:

$$\langle n \rangle_k = \mu_0 \frac{S_k}{\sigma_0} \sqrt{k}, \quad \langle p_t^2 \rangle_k = p_0^2 \sqrt{k}, \quad \langle p_t \rangle_k = p_0 \sqrt{4k}, \quad (2)$$

где S_k — поперечная площадь области перекрытия k струн, σ_0 — поперечная площадь струны, μ_0 — средняя множественность заряженных частиц на едини-

цу быстроты, рожденных от распада одной струны, p_0 — средний поперечный импульс частиц, рожденных от распада одной струны.

В глобальном варианте слияния струн (global fusion) предполагается что цветные поля складываются глобально с образованием кластера, занимающего всю область перекрытия струн [34]. В этом случае средняя множественность в заданном быстротном интервале и средний поперечный импульс заряженных частиц, кластером с поперечной площадью S_{cl} , описываются следующими выражениями:

$$\langle n \rangle_{cl} = \mu_0 \frac{S_{cl}}{\sigma_0} \sqrt{k_{cl}}, \quad \langle p_t^2 \rangle_{cl} = p_0^2 \sqrt{k_{cl}}, \quad \langle p_t \rangle_{cl} = p_0 \sqrt{4k_{cl}}, \quad k_{cl} = N_{cl} \frac{\sigma_0}{S_{cl}}, \quad (3)$$

где N_{cl} — число струн, формирующих кластер.

В предельных случаях малой или большой плотности струн эти варианты совпадают [35].

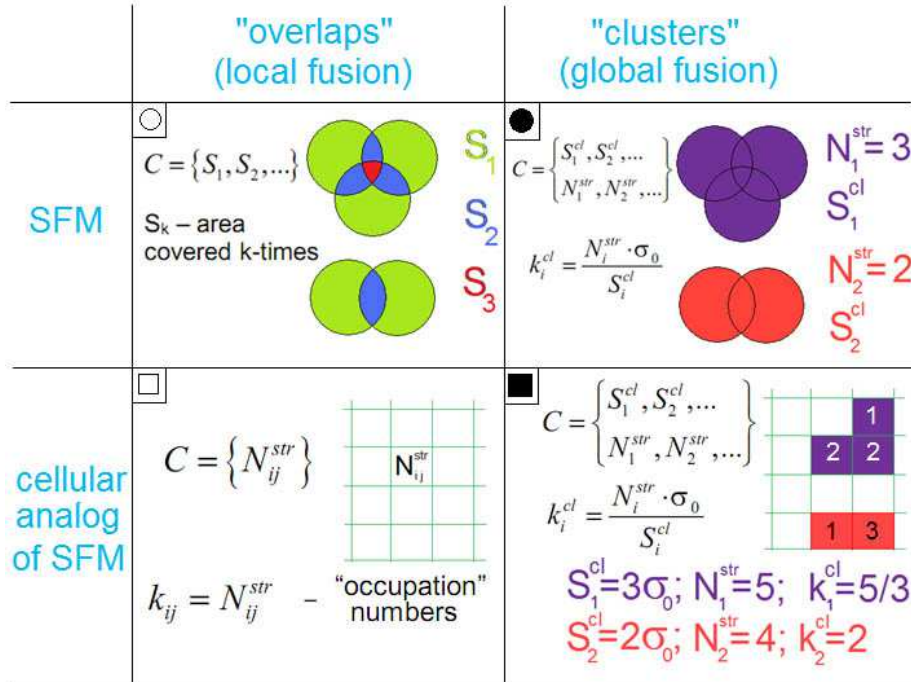


Рис. 4. Различные версии модели слияния струн [36]

Для упрощения рассмотрения эффектов слияния струн была предложена [37–39] и затем широко использовалась [35; 40–47] простая дискретная модель, в которой поперечная плоскость разбивается на ячейки размером порядка поперечного сечения струны (радиус сечения струны $r_{str} \sim 0,2 \div 0,3$ фм). В

таким подходе предполагается, что происходит слияние всех струн с центрами в данной ячейке решетки. Эффективно это приводит к разбиению поперечной области на домены с разными флуктуирующими от события к событию значениями плотности цветового поля внутри них, что похоже на попытки учесть изменение в поперечной плоскости в моделях, основанных на эволюции БФКЛ [48] и на подходе конденсата цветного стекла (colour glass condensate) [49].

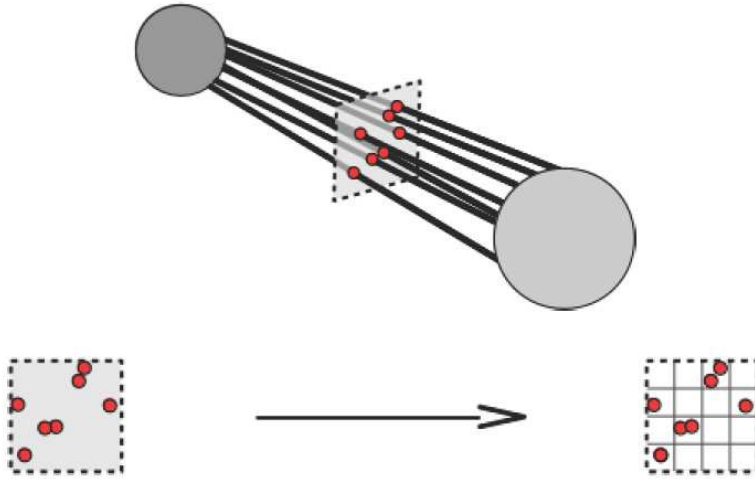


Рис. 5. Введение решетки в поперечной плоскости

В качестве одного из инструментов для изучения эффектов слияния струн было предложено [50] изучать так называемые корреляции вперед-назад (FB) между наблюдаемыми величинами для частиц, обнаруженных в двух разделенных по быстроте интервалах. Обычно эти два быстротных интервала (наблюдательных окна) выбираются симметрично, один в передней, а другой в задней полусфере реакции. Известно, что исследования дальних быстротных корреляций дают информацию о самых начальных стадиях адронных столкновений [1] и, в частности, о конфигурации струны, сформированной при данном столкновении.

В качестве наблюдаемых величин, F и B , обычно выбирают множественность (число) частиц, n_F и n_B , с быстротами, попадающими в выбранные интервалы, и средний поперечный импульс этих частиц в данном событии, p_t^F и

p_t^B ,

$$p_t^F = \frac{1}{n_F} \sum_{i=1}^{n_F} |\mathbf{p}_t^i|, \quad p_t^B = \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^{n_B} |\mathbf{p}_t^i|. \quad (4)$$

Было предложено [42] исследовать 3 типа корреляций: $n - n$, корреляции между множествами заряженных частиц, $p_t - p_t$, корреляции между значениями среднего поперечного импульса и $p_t - n$, корреляции между средним поперечным импульсом в одном быстройном окне и множественностью заряженных частиц в другом быстройном окне.

К сожалению, как было показано в [51], традиционный коэффициент FB корреляций между множественностью заряженных частиц в переднем и заднем быстройных окнах, n_F и n_B , зависит от колебаний числа струн от события к событию в pp-столкновениях, т.е. от так называемых “объемных флуктуаций” — тривиальных колебаний количества источников.

Существует два способа исключить влияние этих тривиальных флуктуаций “объема” по сравнению с вкладом от процессов слияния струн. Можно либо изучать корреляции, включающие интенсивные переменные, такие как, например, средние по событию поперечные импульсы p_F и p_B всех заряженных частиц, обнаруженных в данном событии, в переднем и заднем быстройных окнах наблюдения (вместо их множественностей n_F и n_B), как в [31; 32; 35; 42; 43; 52]. Другим способом избавиться от вклада тривиальных “объемных” флуктуаций является использование в анализе так называемых сильноинтенсивных наблюдаемых, нечувствительных к колебаниям количества источников (струн), но чувствительных к колебаниям свойств этих источников, в частности, к образованию струнных кластеров в результате процессов слияния струн.

В реальных экспериментах обычно весь массив событий разбивают на так называемые классы центральности и проводят анализ отдельно для каждого класса. В применении к струнной модели это означает наложение дополнительного условия, ограничивающего флуктуации общего числа струн. Анализ влияния этого дополнительного условия на коэффициенты корреляции позволяет

качественно сделать вывод о характере влияния фиксации класса центральности на величину этих коэффициентов в реальном эксперименте

В данной работе в рамках струнной модели на решетке исследуются асимптотики корреляции между множественностями, между поперечным импульсом и множественностью и между поперечными импульсами в разнесенных быстрых интервалах в процессах столкновения при высоких энергиях, в том числе для случая с фиксированным общим средним числом струн, а так же сильно-интенсивные наблюдаемые.

Актуальность темы исследования.

Изучение флуктуаций и корреляций различных наблюдаемых в процессах множественного рождения частиц при высоких энергиях дает информацию о самом начальном этапе взаимодействия адронов, отвечающем наибольшей плотности образующейся кварк-глюонной материи. Это позволяет получить уникальные данные о новых объектах, образующихся на этом этапе, в том числе о кварк-глюонных струнах и струнных кластерах.

В этом плане особое значение имеет изучение корреляций с использованием интенсивных и сильно-интенсивных наблюдаемых, которые позволяют минимизировать вклад тривиальных “объемных” флуктуаций, и дают возможность получить информацию непосредственно о свойствах объектов, образующихся на начальной стадии сильного взаимодействия. В диссертационной работе, с этой целью изучаются корреляции с участием в качестве интенсивной величины — среднего поперечного импульса частиц, регистрируемых в некотором быстром интервале, а также сильноинтенсивной переменной Σ , характеризующей корреляции между числом частиц в двух разнесенных интервалах быстроты.

Одним из аспектов, определяющих актуальность темы исследования, является необходимостью получения аналитических выражений для коэффициентов корреляции и сильноинтенсивной переменной Σ в рамках модели со слиянием струн для случая их реалистического неоднородного распределения в плоскости прицельного параметра. Это необходимо, чтобы качественно понять

влияние неоднородности в распределении струн на величину коэффициентов корреляции при их сравнении с экспериментальными данными.

Другой аспект вытекает из того, что в современных коллайдерных экспериментах по столкновению ультррелятивистских ядер анализ корреляций обычно производится отдельно для различных классов центральности столкновения. Это требует дополнительного теоретического анализа влияния фиксации класса центральности на величину корреляций.

Исследование в диссертации корреляций с использованием сильноинтенсивной переменной Σ и сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными коллаборации ALICE в ЦЕРН позволило, в частности, сделать принципиально важный вывод, о том, что при энергиях большого адронного коллайдера (БАК) образование струнных кластеров происходит уже в pp взаимодействиях, что свидетельствует об актуальности темы исследования.

Цели и задачи диссертационной работы.

Целью данной диссертационной работы является теоретическое исследование корреляций между наблюдаемыми (множественностью и поперечным импульсом) в разнесенных быструтных интервалах в процессах столкновения адронов и ядер при высоких энергиях, а также теоретическое исследование сильноинтенсивной переменной $\Sigma(n_F, n_B)$ которая характеризует корреляции между количеством частиц в двух разнесенных быструтных интервалах.

В частности, необходимо было исследовать влияние неоднородности в распределении струн в плоскости прицельного параметра на величину коэффициентов корреляции и влияние фиксации класса центральности на их величину, а также выполнить расчеты сильноинтенсивной переменной $\Sigma(n_F, n_B)$ в рамках модели с образованием струнных кластеров, и затем провести сравнения результатов расчетов с имеющимися предварительными экспериментальными данными коллаборации ALICE с целью поиска свидетельств об образовании струнных кластеров в pp взаимодействиях при энергиях БАК и извлечения параметров этих кластеров.

Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

1. Для реалистичного случая с неоднородным распределением струн в плоскости прицельного параметра были получены аналитические выражения для асимптотик коэффициентов дальних корреляций между поперечным импульсом и множественностью, а также между поперечными импульсами в двух разнесенных быстротных интервалах, при большой плотности струн и проанализированы их свойства. Дополнительно был также разработан монте-карловский (МК) алгоритм, позволяющий провести эти расчеты при произвольной плотности струн. Показано, что результаты МК расчетов при большой плотности струн выходят на асимптотику, рассчитанную аналитически, что подтверждает надежность, полученных результатов.
2. Получены аналитические выражения для асимптотик коэффициентов дальних корреляции между множественностями и между поперечным импульсом и множественностью при большой плотности струн с учетом дополнительного условия фиксации общего числа начальных струн, соответствующего отбору по классам центральности при анализе экспериментальных данных. Проанализировано влияние этого условия на величину коэффициентов корреляции.
3. В рамках этой же модели со слиянием струн на решётке изучена сильно-интенсивная переменная Σ , характеризующая корреляции между числом частиц, образующихся в двух разнесенных по быстроте интервалах наблюдения. Показано, что при учете эффектов слияния струн, приводящих к образованию струнных кластеров, эта переменная оказывается равна взвешенному среднему ее значений для различных струнных кластеров, зависящих только от параметров этих кластеров. Тогда как весовые коэффициенты, представляющие собой доли частиц рожденных от кластеров с

разным числом струн, оказываются зависящими от условий столкновения — его энергии и степени центральности.

4. Для случая pp рассеяния при высоких энергиях разработан монте-карловский алгоритм позволяющий, путем моделирования реалистического распределения струн в плоскости прицельного параметра, рассчитывать эти весовые коэффициенты для различных энергий и центральности pp столкновения. С их использованием рассчитана зависимость переменной Σ от расстояния по быстроте между окнами наблюдения, их ширины, энергии и центральности pp столкновения.
5. Проведено сравнение результатов расчетов Σ с экспериментальными данными коллаборации ALICE на БАК. Установлено, что наблюдаемое в эксперименте ALICE поведение этой переменной удается объяснить только при наличии источников разного типа, роль которых в нашей модели играют одиночные струны и кластеры, образованные слиянием нескольких струн. Показано, что сравнение результатов нашей модели с предварительными экспериментальными данными ALICE, полученными в min.bias (без отбора по центральности) pp -столкновениях при энергиях 0.9-13 ТэВ и для различных классов центральности при энергии 13 ТэВ, позволяет извлечь информацию о модельных параметрах, характеризующих кластеры с различным числом слившихся струн.

Теоретическая и практическая значимость.

Полученные аналитические выражения для асимптотик коэффициентов дальних корреляций при большой плотности струн с учетом условий, характерных для реальных экспериментов, позволяют качественно понять зависимость коэффициентов корреляции от параметров задачи и условий проведения эксперимента, что обычно трудно сделать, ограничиваясь только монте-карловским (МК) моделированием процесса взаимодействия адронов.

С другой стороны, сравнение результатов МК моделирования с полученными аналитическими выражениями для асимптотик коэффициентов дальних корреляций при большой плотности струн позволяет осуществлять процедуру контроля МК алгоритмов, которые затем могут быть использованы для расчетов процессов при произвольной плотности струн. Совпадение результатов аналитических и МК расчетов при большой плотности струн подтверждает надежность, полученных как МК, так и аналитических результатов.

Принципиально важное значение имеет вывод, полученный путем сравнения результатов расчетов сильно-интенсивной переменной Σ с экспериментальными данными коллаборации ALICE на БАК, о том, что при энергиях БАК образование струнных кластеров происходит уже в pp взаимодействиях. При этом экспериментально наблюдаемый рост этой переменной с увеличением начальной энергии и центральности pp столкновения можно объяснить только ростом вклада от образования струнных кластеров, состоящих из возрастающего числа слившихся струн.

Таким образом, результаты, изложенные в диссертации, уже были использованы, и будут использоваться в дальнейшем в работе международной коллаборации ALICE на БАК в Европейском центре ядерных исследований (ЦЕРН) при проведении текущих и планируемых в будущем экспериментов. В будущем они также могут применяться для изучения корреляций с использованием сильно-интенсивных переменных при анализе данных с детекторов MPD и SPD ускорительного комплекса NICA, создаваемого в настоящее время в ОИЯИ в Дубне.

Положения, выносимые на защиту:

1. В модели с реалистичным неоднородным распределением струн в плоскости прицельного параметра с учетом их слияния аналитически найден вид асимптотик при большой плотности струн для коэффициентов дальних корреляций между поперечным импульсом и множественностью, а

также между поперечными импульсами частиц, образующихся при взаимодействии адронов высоких энергий в двух разнесенных быстротных интервалах.

2. Получены аналитические выражения для асимптотик коэффициентов дальних корреляции между множественностями и между поперечным импульсом и множественностью с дополнительным условием фиксации общего числа начальных струн, что соответствует отбору по классам центральности при анализе экспериментальных данных. Проведен анализ влияния этого условия на коэффициенты корреляции.
3. Разработан монте-карловский алгоритм, позволяющий провести численный расчет коэффициентов корреляции для произвольной плотности струн с учетом их слияния. Показано, что результаты численных расчетов при большой плотности струн выходят на асимптотику, рассчитанную аналитически.
4. Показано, что в рамках модели со слиянием струн на решётке, сильно-интенсивная наблюдаемая Σ , характеризующая корреляции между числом частиц, образующихся в двух разнесенных по быстроте интервалах наблюдения, равна взвешенному среднему ее значений для различных типов струнных кластеров.
5. С использованием комбинации аналитических и монте-карловских методов рассчитана зависимость сильно-интенсивной переменной Σ от быстрого расстояния между окнами наблюдения и их ширины для случая pp столкновений при различных энергиях, в том числе и с учетом степени их центральности. Сделаны предсказания ее вида при различных энергиях, в том числе и с учетом степени центральности столкновения.
6. Показано, что сравнение результатов расчетов сильно-интенсивной переменной Σ с имеющимися предварительными экспериментальными данными

ми коллаборации ALICE свидетельствует об образовании струнных кластеров в pp взаимодействиях при энергиях БАК и увеличении их вклада с ростом начальной энергии и центральности столкновения.

Апробация результатов.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. IV RUSSIAN-SPANISH CONGRESS: Particle, Nuclear, Astroparticle Physics and Cosmology, Дубна, Россия, 04.09.2017 — 08.09.2017, устный доклад «Long-range correlations in the model with string fusion on a lattice»
2. Oslo Winter School Standard Model, Quantum Chromodynamics, Heavy Ion Collisions, Skeikampen, Norway, 02.01.2018 — 12.01.2018, устный доклад «Long-range correlations in the model with string fusion on a lattice»
3. QUARKS-2018, XXth International Seminar on High Energy Physics, Валдай, Россия, 27.05.2018 — 02.06.2018, устный доклад "Asymptotes of multiplicity and transverse momentum correlation coefficients at large string density"
4. International Schools of Subnuclear Physics 56th Course: From gravitational waves to QED, QFD and QCD, Эриче, Италия, 14.06.2018 — 23.06.2018, устный доклад «Long-range rapidity correlations in the model with string fusion on transverse lattice»
5. The Helmholtz International Summer School Matter under Extreme Conditions in Heavy-Ion Collisions and Astrophysics, Дубна, Россия, 20.08.2018 — 31.08.2018, устный доклад «Long-range rapidity correlations in the model with string fusion on transverse lattice»
6. NUCLEUS – 2021. Nuclear physics and elementary particle physics. Nuclear physics technologies, Санкт-Петербург, Россия, 20–25 сентября 2021, устный доклад «Strongly intense observables as a tool for studying clusters of

quark-gluon strings in relativistic hadronic interactions», Svetlana Belokurova, Vladimir Vechernin

Публикации.

Материалы диссертации опубликованы в 6 работах:

1. Belokurova S., Asymptotes of multiplicity and transverse momentum correlation coefficients at large string density, EPJ Web Conf. 191 04010 (2018), DOI: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201819104010>
2. С. Н. Белокурова, В. В. Вечернин, Сильноинтенсивные переменные и дальние корреляции в модели с решеткой в поперечной плоскости, ТМФ, 200:2 (2019), 195–214, <https://doi.org/10.4213/tmf9684>; Theoret. and Math. Phys., 200:2 (2019), 1094–1109, doi.org/10.1134/S0040577919080026
3. Belokurova, S.N., Vechernin, V.V. Calculation of Long-Range Rapidity Correlations in the Model with String Fusion on a Transverse Lattice. Phys. Part. Nuclei 51, 319–322 (2020). <https://doi.org/10.1134/S1063779620030053>
4. Belokurova, S.; Vechernin, V. Long-Range Correlations between Observables in a Model with Translational Invariance in Rapidity. Symmetry 2020, 12, 1107. <https://doi.org/10.3390/sym12071107>
5. Belokurova, S. Study of Strongly Intense Quantities and Robust Variances in Multi-Particle Production at LHC Energies. Phys. Part. Nuclei 53, 154–158 (2022). <https://doi.org/10.1134/S106377962202017413>
6. Belokurova, S.; Vechernin, V. Using a Strongly Intense Observable to Study the Formation of Quark-Gluon String Clusters in pp Collisions at LHC Energies. Symmetry 2022, 14, 1673. <https://doi.org/10.3390/sym14081673>

Личный вклад автора.

Все основные результаты были получены лично автором или в совместной работе с научным руководителем.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, библиографии и 4 приложений. Диссертация содержит 136 страниц, 17 рисунков. Библиография включает 79 наименований на 11 страницах.

В первой главе приводится формулировка дискретной версии модели со слиянием струн, вводятся основные понятия, используемые в работе.

Во второй главе анализируются корреляции между поперечным импульсом и множественностью и между поперечными импульсами в двух разделенных быстрой интервалах при высокой плотности струн в рамках струнной модели со слиянием на решетке для случая произвольного распределения струн в поперечной плоскости, вычисляются асимптотики коэффициентов корреляций.

В третьей главе вычисляются асимптоты коэффициентов дальних корреляций между множественностями и между множественностью и средним поперечным импульсом в двух разделенных быстрой интервалах при высокой плотности струн и с фиксацией общего числа начальных струн, что моделирует фиксацию класса центральности столкновения.

В четвертой главе приводятся результаты теоретического исследования сильно интенсивной переменной Σ , а также результаты численного моделирования и их сравнение с экспериментальными результатами.

В заключении представлены основные результаты данной работы.

В приложениях мы приводим подробные вычисления некоторых величин, используемых в работе.

Глава 1. Модель со слиянием струн в плоскости прицельного параметра

В этой главе описана модель, в рамках которой в последующих главах вычисляются коэффициенты дальних корреляций и сильно интенсивные наблюдаемые для взаимодействия адронов при энергиях БАК.

1.1. Определение коэффициента дальних корреляций

Обычно экспериментально изучают корреляций между двумя определенными физическими величинами, F и B , измеренными для частиц с быстротами в двух выбранных интервалах, δy_F и δy_B , условно называемых передним и задним окнами наблюдения, разделенных интервалом Δy . Такие корреляции получили название корреляций “вперед-назад” (forward-backward - FB).

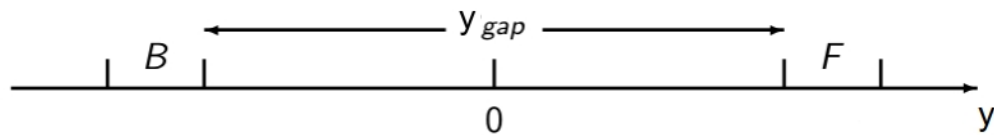


Рис. 1.1. Два быстротных окна, переднее и заднее, разделенные интервалом.

Одной из причин возникновения FB корреляций является рождение частиц от одного и того же или от соседних сегментов, образующихся в процессе фрагментации данной струны, что приводит лишь к корреляциям между выходами частиц с близкими значениями скорости, о которых обычно говорят как о ближних корреляциях (short-range). Вклад этих корреляций будет исчезать при разнесении окон наблюдения по скорости.

Другой причиной возникновения FB корреляций являются флуктуации числа образующихся источников (струн) от события к событию. Вклад этого механизма не зависит от величины зазора по скорости между окнами наблюдения и не убывает при увеличении этого зазора (в предположении, что при

высоких энергиях образуются достаточно протяженные струны, дающие вклад в широкую область быстрот), поэтому он получил название дальних корреляциях (long-range).

Существует два альтернативных определения коэффициентов корреляции между величинами F и B , причем оба используются в ряде работ.

Коэффициент корреляции может быть определен через функцию регрессии $\langle B \rangle_F = f(B)$, как, например, в [53]:

$$b_{BF}^{corr f} \equiv \left. \frac{d\langle B \rangle_F}{dF} \right|_{F=\langle F \rangle}. \quad (1.1)$$

Скобки $\langle \dots \rangle_F$ означают усреднение по событиям при фиксированном значении величины F .

Также коэффициент корреляции может быть определен через средние значения величин F и B [54]:

$$b_{BF}^{average} \equiv \frac{\langle FB \rangle - \langle F \rangle \langle B \rangle}{\langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2} = \frac{\text{cov}(F, B)}{D_F}. \quad (1.2)$$

где $\langle F \rangle$, $\langle B \rangle$ — средние значения величин F и B . Скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по всем событиям.

Определения (1.1) и (1.2) совпадают в случае линейной корреляционной функции

Часто рассматривают величину корреляции между относительными величинами $F/\langle F \rangle$, $B/\langle B \rangle$. Коэффициент корреляции между ними определяется как

$$b_{FB}^{rel} = \frac{\langle F \rangle}{\langle B \rangle} b_{FB}. \quad (1.3)$$

1.2. Формулировка модели со слиянием струн на решетке

Для учета процессов слияния цветных струн и образования струнных кластеров в настоящей работе использовался дискретный подход [37–39], о котором мы уже упоминали во введении. В этом подходе в поперечной к оси столкновения плоскости вводится конечная решетка (сетка) с площадью ячейки порядка

поперечного сечения струны (см. рис. 5). В этом упрощенном подходе предполагается, что происходит слияние всех струн с центрами в данной ячейке поперечной решетки. В результате любая возникающая в событии струнная конфигурация характеризуется набором целых чисел C_η :

$$C_\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_M\}, \quad (1.4)$$

где η_i — число центров струн, попавших в i -ую ячейку, M — число ячеек в поперечной плоскости струны.

В рамках данной модели любое событие будем характеризовать набором следующих величин

$$C = \{C_\eta, C_n^B, C_n^F, C_p^B, C_p^F\}, \quad (1.5)$$

где

$$C_n^F = \{n_1^F, \dots, n_M^F\}, \quad C_p^F = \{p_1^{1F}, \dots, p_1^{n_1^F}; \dots; p_M^{1F}, \dots, p_M^{n_M^F}\} \quad (1.6)$$

— число частиц, образовавшихся от распада струны в i -ой ячейке в переднем быстротном окне и значения их поперечных импульсов, и аналогично для заднего быстротного окна:

$$C_n^B = \{n_1^B, \dots, n_M^B\}, \quad C_p^B = \{p_1^{1B}, \dots, p_1^{n_1^B}; \dots; p_M^{1B}, \dots, p_M^{n_M^B}\}. \quad (1.7)$$

При большой плотности струн и большом числе рождающихся частиц мы также будем использовать гауссово приближение, сформулированное, например, в [44]: предполагается, что флуктуации числа частиц, образующихся от распада струн в данной ячейке в переднем и заднем быстротных окнах, происходят независимо около среднего значения с дисперсией, пропорциональной этому среднему значению по закону Гаусса:

$$P(n_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_i}}} e^{-\frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{2d_{n_i}}}, \quad (1.8)$$

$$d_{n_i^F} = \omega_\mu \bar{n}_i^F, \quad d_{n_i^B} = \omega_\mu \bar{n}_i^B. \quad (1.9)$$

Аналогично флуктуации числа струн в различных ячейках предполагаются независимыми, происходящими по закону Гаусса с дисперсией, пропорциональной среднему числу струн $\bar{\eta}_i$ в данной ячейке:

$$P(\eta_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{\eta_i}}} e^{-\frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2d_{\eta_i}}}, \quad (1.10)$$

$$d_{\eta_i} = \omega_{\eta} \bar{\eta}_i. \quad (1.11)$$

Аналогично работам [22; 24] будем предполагать, что средний поперечный импульс частиц, образующихся от распада i -ой ячейки зависит только от степени перекрытия струн в данной ячейке η_i и не зависит от числа образующихся частиц n_i^F, n_i^B . Дисперсия импульса отдельной частицы, рождающейся при распаде струн в i -той ячейке, из соображений размерности, предполагается пропорциональной квадрату среднего значения импульса:

$$d_{p_i}(\eta_i) = \overline{p^2}(\eta_i) - \bar{p}^2(\eta_i) = \gamma \bar{p}^2(\eta_i). \quad (1.12)$$

При вычислениях используется явный вид зависимостей среднего числа частиц, образовавшихся от распада струн в i -ой ячейке, и их поперечного импульса от числа струн в данной ячейке η_i , которые ожидаются в картине, основанной на модели слияния струн [21; 22; 24]:

$$\bar{n}(\eta_i) = \sqrt{\eta_i}, \quad \bar{p}(\eta_i) = p_0 \sqrt[4]{\eta_i}. \quad (1.13)$$

Тогда число частиц, образовавшихся от распада струн в i -ой ячейке, с быстройми в переднем и заднем быстройтных окнах

$$n_i^F = \mu_F \bar{n}(\eta_i), \quad n_i^B = \mu_B \bar{n}(\eta_i), \quad (1.14)$$

где μ_F, μ_B — число частиц, рожденных от распада одной струны в переднем и заднем быстройтном окне соответственно.

1.3. Нахождение асимптотики коэффициентов

корреляции как производных от функции регрессии

Обозначим $C' = \{C_\eta, C_n^B, C_n^F\}$. Условное среднее $\langle B \rangle_F$, входящее в определение (1.1), для случая дальних корреляций можно записать в виде [44]

$$\langle B \rangle_F = \frac{\sum_{C'} \langle B \rangle_{C'} P(C') P_{C'}(F)}{\sum_{C'} P(C') P_{C'}(F)}, \quad (1.15)$$

где $\langle B \rangle_{C'}$ — среднее значение величины B при фиксированной конфигурации C' , $P(C')$ — вероятность образования конфигурации C' , $P_{C'}(F)$ — вероятность наблюдения величины F в переднем быстротном окне при фиксированной струнной конфигурации C' .

Так как флуктуации числа частиц, образующихся от данной ячейки в переднем и заднем быстротных окнах, и флуктуации числа струн происходят независимо, вероятность образования конфигурации C' может быть записана в виде $P(C') = P(C_\eta) P_{C_\eta}(C_n^F) P_{C_\eta}(C_n^B)$, где

$$P(C_\eta) = \prod_{j=1}^M P(\eta_j) = \prod_{j=1}^M \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{\eta_j}}} e^{-\frac{(\eta_j - \bar{\eta}_j)^2}{2d_{\eta_j}}}, \quad (1.16)$$

$$P_{C_\eta}(C_n^F) = \prod_{i=1}^M P(n_i^F) = \prod_{i=1}^M \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_i^F}}} e^{-\frac{(n_i^F - \bar{n}_i^F)^2}{2d_{n_i^F}}}, \quad (1.17)$$

$$P_{C_\eta}(C_n^B) = \prod_{i=1}^M P(n_i^B) = \prod_{i=1}^M \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_i^B}}} e^{-\frac{(n_i^B - \bar{n}_i^B)^2}{2d_{n_i^B}}}. \quad (1.18)$$

Условное среднее $\langle B \rangle_F$ в этих обозначениях

$$\langle B \rangle_F = \frac{1}{P(F)} \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \left(\sum_{C_n^B} P_{C_\eta}(C_n^B) \langle B \rangle_{C_\eta C_n^B} \right) \left(\sum_{C_n^F} P_{C_\eta}(C_n^F) P_{C_\eta C_n^F}(F) \right), \quad (1.19)$$

$$P(F) = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \left(\sum_{C_n^B} P_{C_\eta}(C_n^B) \right) \left(\sum_{C_n^F} P_{C_\eta}(C_n^F) P_{C_\eta C_n^F}(F) \right), \quad (1.20)$$

где для $P_{C_\eta C_n^F}(F)$ при большом числе ячеек в силу центральной предельной теоремы имеем

$$P_{C_\eta C_n^F}(F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_F}} e^{-\frac{(F - \langle F \rangle_{C_\eta C_n^F})^2}{2d_F}}. \quad (1.21)$$

Сумму по конфигурациям при большой плотности струн можно приближенно записать в следующем виде:

$$\sum_{C_\eta} \dots = \prod_{j=1}^M \sum_{\eta_j=0}^{\infty} \dots \longrightarrow \prod_{j=1}^M \int_0^{\infty} d\eta_j \dots, \quad (1.22)$$

тогда (1.19) имеет вид:

$$\langle B \rangle_F = \frac{1}{P(F)} \prod_{j=1}^M \int_0^{\infty} d\eta_j P(C_{\eta_j}) \int_0^{\infty} dn_j^B P_{C_\eta}(C_n^B) \langle B \rangle_{C_\eta C_n^B} \int_0^{\infty} dn_j^F P_{C_\eta}(C_n^F) P_{C_\eta C_n^F}(F), \quad (1.23)$$

$$P(F) = \prod_{j=1}^M \int_0^{\infty} d\eta_j P(C_{\eta_j}) \int_0^{\infty} dn_j^B P_{C_\eta}(C_n^B) \int_0^{\infty} dn_j^F P_{C_\eta}(C_n^F) P_{C_\eta C_n^F}(F). \quad (1.24)$$

В следующей главе для нахождения асимптотик этих интегралов при большой плотности струн мы будем использовать метод перевала.

1.4. Алгоритм вычисления средних значений

наблюдаемых в модели со слиянием струн на решетке

Для вычисления коэффициента корреляции с помощью определения (1.2) необходимо вычислять средние значения наблюдаемых: $\langle F \rangle$, $\langle B \rangle$, $\langle FB \rangle$, $\langle F^2 \rangle$. В рамках модели со слиянием струн на решетке усреднение по событиям проводится в два этапа: сначала вычисляется среднее значение величины при фиксированной струнной конфигурации C_η , затем проводится усреднение по струнным конфигурациям. Средние вычисляются в гауссовом приближении (1.8), (1.10).

$$\langle F \rangle = \left\langle \left\langle \langle F \rangle_{C_p^F}^{C_n^F} \right\rangle^{C_n^F} \right\rangle^{C_\eta}, \quad (1.25)$$

где скобки $\langle \dots \rangle^C$ обозначают усреднение по конфигурации C ,

$$\langle F \rangle^{C_n} = \prod_{i=1}^M \int d\eta_i P(\eta_i) F, \quad (1.26)$$

$$\langle F \rangle^{C_n^F} = \prod_{i=1}^M \int dn_i^F P(n_i^F) F. \quad (1.27)$$

Асимптотики коэффициентов корреляции при большой плотности струн будем искать в приближении:

$$\frac{1}{\bar{\eta}_i} \ll 1, \quad \frac{1}{M} \ll 1. \quad (1.28)$$

Отметим, что в экспериментах на ЛНС в самых центральных столкновениях ядер свинца достигаются значения $\bar{\eta} \approx 10$ [55]. Зная размер ядра и радиус струны (приведенный выше), можно оценить число ячеек, для случая тяжелых ядер оно оказывается велико, $M \sim 10^3$.

Глава 2. Вычисление асимптотического поведения коэффициентов дальних корреляций при большой плотности струн с учетом их неоднородного распределения в плоскости прицельного параметра

В этой главе мы вычисляем асимптотики коэффициентов дальних корреляций при большой плотности струн с учетом их неоднородного распределения в плоскости прицельного параметра. В разделе 2.1 коэффициент корреляции между множественностью и поперечным импульсом $b_{p_t n}$ вычисляется как производная от функции регрессии. В разделе 2.2 коэффициент корреляции между поперечными импульсами $b_{p_t p_t}$ вычисляется двумя методами — через вычисление средних значений и как производная от функции регрессии. Глава основана на результатах, опубликованных в работах [56] и [57] (раздел 5).

2.1. Коэффициент корреляции между множественностью и поперечным импульсом

В работе [43] аналитические расчеты асимптоты коэффициента p_t - n -корреляции для общего случая произвольного распределения струн в поперечной плоскости были произведены с помощью определения (1.2), через вычисление средних значений наблюдаемых:

$$b_{p_t n}^{average} = \frac{\omega_\eta p_0 \left(\frac{3}{8} \frac{s_{1/4}}{s_{1/2}} - \frac{1}{4} \frac{s_{3/4}}{s_{1/2}^2} \right)}{M \omega_\mu s_{1/2} + \frac{\mu_F \omega_\eta M}{4}}, \quad (2.1)$$

где

$$s_\beta = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \bar{\eta}^\beta. \quad (2.2)$$

В этом разделе мы вычислим коэффициент корреляции $b_{p_t n}$, используя определение (1.1):

$$b_{p_t n}^{corr f} = \left. \frac{d\langle p_t^B \rangle_{n_F}}{dn_F} \right|_{n_F = \langle n_F \rangle}. \quad (2.3)$$

Для этого сначала методом перевала вычислим корреляционную функцию, далее коэффициент $b_{p_t n}$ найдем как производную от этой зависимости в точке $n_F = \langle n_F \rangle$. Запишем (1.23) для этого случая:

$$\begin{aligned} \langle p_t^B \rangle_{n_F} &= \frac{1}{P(n_F)} \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j \int_0^\infty dn_j^B \int_0^\infty dn_j^F \langle p_t^B \rangle_{C_\eta C_n^B} N(C_\eta, C_n^F, C_n^B) \times \\ &\times e^{-\frac{(n_i^F - \bar{n}_i^F)^2}{2d_{n_i^F}}} e^{-\frac{(n_i^B - \bar{n}_i^B)^2}{2d_{n_i^B}}} e^{-\frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2d_{\eta_i}}} e^{-\frac{(n_F - \langle n_F \rangle_{C_\eta C_n^F})^2}{2dn_F(C_\eta, C_n^F)}}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} P(n_F) &= \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j \int_0^\infty dn_j^B \int_0^\infty dn_j^F N(C_\eta, C_n^F, C_n^B) \times \\ &\times e^{-\frac{(n_i^F - \bar{n}_i^F)^2}{2d_{n_i^F}}} e^{-\frac{(n_i^B - \bar{n}_i^B)^2}{2d_{n_i^B}}} e^{-\frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2d_{\eta_i}}} e^{-\frac{(n_F - \langle n_F \rangle_{C_\eta C_n^F})^2}{2dn_F(C_\eta, C_n^F)}}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$n_F = \sum_{i=1}^M n_i^F \quad (2.6)$$

При оценке интегралов методом перевала нормировочные множители из гауссовых распределений $N(C_\eta, C_n^F, C_n^B)$ в перевальной точке выносятся как в числителе, так и в знаменателе формулы и сокращаются, поэтому можно не выписывать их в явном виде.

При оценке интеграла по n_i^B происходит замена n_i^B на \bar{n}_i^B ,

$$\begin{aligned} \langle p_t^B \rangle_{n_F} &= \frac{1}{P(n_F)} \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j \int_0^\infty dn_j^F \langle p_t^B \rangle_{C_\eta C_n^B} N(C_\eta, C_n^F, C_n^B) \times \\ &\times e^{-\frac{(n_i^F - \bar{n}_i^F)^2}{2d_{n_i^F}}} e^{-\frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2d_{\eta_i}}} e^{-\frac{(n_F - \langle n_F \rangle_{C_\eta C_n^F})^2}{2dn_F(C_\eta, C_n^F)}}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$P(n_F) = \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j \int_0^\infty dn_j^F N(C_\eta, C_n^F, C_{\bar{n}}^B) e^{-\frac{(n_i^F - \bar{n}_i^F)^2}{2d_{n_i^F}}} e^{-\frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2d_{\eta_i}}} e^{-\frac{(n_F - \langle n_F \rangle_{C_\eta C_n^F})^2}{2dn_F(C_\eta, C_n^F)}}. \quad (2.8)$$

При оценке интеграла по n_i^F происходит замена n_i^F на \bar{n}_i^F ,

$$\langle p_t^B \rangle_{n_F} = \frac{1}{P(n_F)} \int_0^\infty d\eta_1 \dots d\eta_M \langle p_t^B \rangle_{C_\eta C_{\bar{n}}^B} N(C_\eta, C_{\bar{n}}^F, C_{\bar{n}}^B) e^{-\phi}, \quad (2.9)$$

$$P(n_F) = \int_0^\infty d\eta_1 \dots d\eta_M N(C_\eta, C_{\bar{n}}^F, C_{\bar{n}}^B) e^{-\phi}, \quad (2.10)$$

где

$$\langle n_F \rangle_{C_\eta C_{\bar{n}}^F} = \sum_{i=1}^M \bar{n}_i^F = \mu_F \sum_{i=1}^M \eta_i^{1/2}, \quad (2.11)$$

$$d_{n_F}(C_\eta, C_{\bar{n}}^F) = \sum_{i=1}^M d_i^F = \omega_\mu \mu_F \sum_{i=1}^M \eta_i^{1/2}, \quad (2.12)$$

$$\phi = \sum_{i=1}^M \frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2d_{\eta_i}} + \frac{(n_F - \langle n_F \rangle_{C_\eta C_{\bar{n}}^F})^2}{2d_{n_F}} = \sum_{i=1}^M \frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2\omega_\mu \bar{\eta}_i} + \frac{\left(n_F - \mu_F \sum_{k=1}^M \eta_k^{1/2}\right)^2}{2\omega_\mu \mu_F \sum_{k=1}^M \eta_k^{1/2}} \quad (2.13)$$

Положение точки перевала η^* определяется условием:

$$\left. \frac{d\phi}{d\eta_i} \right|_{\eta_i = \eta_i^*} = 0, \quad (2.14)$$

При оценке интегралов по $d\eta_1 \dots d\eta_M$ множитель $\langle p_t^B \rangle_{C_\eta C_{\bar{n}}^B}$ в числителе выносится из-под знака интеграла в точке перевала, оставшиеся интегралы сокращаются:

$$\langle p_t^B \rangle_{n_F} = \langle p_t^B \rangle_{C_{\eta^*} C_{\bar{n}}^B} = p_0 \frac{\sum_{i=1}^M \eta_i^{*3/4}}{\sum_{i=1}^M \eta_i^{*1/2}}. \quad (2.15)$$

Перепишем (2.14) в явном виде:

$$\frac{\eta_i^* - \bar{\eta}_i}{\omega_\eta \bar{\eta}_i} - \frac{(n_F - \mu_F \sum_{k=1}^M \eta_k^{*1/2}) \eta_i^{*-1/2} \mu_F}{2\omega_\mu \mu_F \sum_{k=1}^M \eta_k^{*1/2}} - \frac{n_F^2 - 2n_F \mu_F \sum_{k=1}^M \eta_k^{*1/2} + \mu_F^2 \left(\sum_{k=1}^M \eta_k^{*1/2}\right)^2}{4\omega_\mu \mu_F \left(\sum_{k=1}^M \eta_k^{*1/2}\right)^2} \eta_i^{*-1/2} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\eta_i^*}{\bar{\eta}_i} - 1 = \frac{\mu_F \omega_\eta \eta_i^{*-1/2}}{4\omega_\mu} \left(\frac{n_F^2}{\mu_F^2 \left(\sum_{k=1}^M \eta_k^{*1/2} \right)^2} - 1 \right). \quad (2.17)$$

Сделаем замену переменных:

$$z_i = \sqrt{\frac{\eta_i^*}{\bar{\eta}_i}}, \quad f = \frac{n_F}{\langle n_F \rangle} = \frac{n_F}{\mu_F \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{1/2}}, \quad a_i = \frac{\mu_F \omega_\eta}{4\omega_\mu \sqrt{\bar{\eta}_i}}, \quad (2.18)$$

тогда

$$z_i^2 - 1 = a_i \frac{f^2 \frac{\sum_{k=1}^M \bar{\eta}_k^{1/2}}{\sum_{k=1}^M z_k \bar{\eta}_k^{1/2}} - 1}{z_i},$$

$$z_i^3 - z_i = a_i \left(f^2 \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{1/2} \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^M z_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right)^2} - 1 \right). \quad (2.19)$$

Уравнение (2.19) имеет решение $f = 1$, $z_i = 1$. Учитывая это, продифференцируем (2.19) и положим $f = 1$

$$z_i' = a_i \left(1 - \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{\eta}_k^{1/2} \right)} \sum_{k=1}^M z_k' \bar{\eta}_k^{1/2} \right),$$

$$\frac{z_i'}{a_i} + \frac{\sum_{k=1}^M z_k' \bar{\eta}_k^{1/2}}{\sum_{k=1}^M \bar{\eta}_k^{1/2}} = 1. \quad (2.20)$$

Уравнение имеет вид

$$p_i z_i' + \sum q_k z_k' = c. \quad (2.21)$$

Имеем серию уравнений вида

$$p_i z_i' + \sum q_k z_k' = c, \quad i = 1 \dots M. \quad (2.22)$$

Выберем одно из них, например, $i = 1$

$$p_1 z_1' + \sum q_k z_k' = c \quad (2.23)$$

и вычтем (2.23) из (2.22)

$$p_1 z'_1 = p_i z'_i, \quad i = 1 \dots M. \quad (2.24)$$

Таким образом все значения z_i могут быть выражены через z_1 :

$$z'_i = \frac{p_1}{p_i} z'_1. \quad (2.25)$$

Подставим выражение (2.25) в (2.22)

$$p_1 z'_1 + \sum q_k \frac{p_1}{p_k} z'_1 = c. \quad (2.26)$$

Отсюда можно выразить z'_1 :

$$p_1 z'_1 = \frac{c}{1 + \sum \frac{q_k}{p_k}}. \quad (2.27)$$

$$z'_i|_{f=1} = \left. \frac{dz_i^*}{df} \right|_{f=1} = \frac{c}{p_i \left(1 + \sum \frac{q_k}{p_k}\right)} \quad (2.28)$$

$$z'_i|_{f=1} = \left. \frac{dz_i^*}{df} \right|_{f=1} = a_i \frac{1}{1 + \left(\sum a_k \bar{\eta}_k^{1/2}\right) / \left(\sum_{k=1}^M \bar{\eta}_k^{1/2}\right)} = \frac{\mu_F \omega_\eta s_{1/2}}{\sqrt{\bar{\eta}_i} (4\omega_\mu s_{1/2} + \mu_F \omega_\eta)} \quad (2.29)$$

$$b_{p_t n}^{corr f} = p_0 \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^M \eta_i^{*1/2}} \frac{d}{dn_F} \sum_{i=1}^M \eta_i^{*3/4} - \frac{\sum_{i=1}^M \eta_i^{*3/4}}{\left(\sum_{i=1}^M \eta_i^{*1/2}\right)^2} \frac{d}{dn_F} \sum_{i=1}^M \eta_i^{*1/2} \right) \Bigg|_{n_F = \langle n_F \rangle} \quad (2.30)$$

С учетом замены переменных (2.18)

$$b_{p_t n}^{corr f} = \frac{p_0}{\langle n_F \rangle} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{1/2}} \frac{d}{df} \sum_{i=1}^M z_i^{3/2} \bar{\eta}_i^{3/4} \Bigg|_{f=1} - \frac{\sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{3/4}}{\left(\sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{1/2}\right)^2} \frac{d}{df} \sum_{i=1}^M z_i \bar{\eta}_i^{1/2} \Bigg|_{f=1} \right),$$

$$b_{p_t n}^{corr f} = \frac{p_0}{\mu_F M s_{1/2}} \left(\frac{1}{M s_{1/2}} \frac{3}{2} \sum_{i=1}^M z_i^{*'}(1) \bar{\eta}_i^{3/4} - \frac{s_{3/4}}{M (s_{1/2})^2} \sum_{i=1}^M z_i^{*'}(1) \bar{\eta}_i^{1/2} \right) \quad (2.31)$$

Вычислим выражения, входящие в (2.31):

$$\sum_{i=1}^M z'_i(1) \bar{\eta}_i^{1/2} = \frac{\mu_F \omega_\eta s_{1/2}}{(4\omega_\mu s_{1/2} + \mu_F \omega_\eta)} M, \quad (2.32)$$

$$\sum_{i=1}^M z'_i(1) \bar{\eta}_i^{3/4} = \frac{\mu_F \omega_\eta s_{1/2}}{(4\omega_\mu s_{1/2} + \mu_F \omega_\eta)} M s_{1/4}. \quad (2.33)$$

Окончательно

$$b_{p_t n}^{corr f} = \frac{p_0 \omega_\eta \left(\frac{3}{2} \frac{s_{1/4}}{s_{1/2}} - \frac{s_{3/4}}{(s_{1/2})^2} \right)}{4\omega_\mu M s_{1/2} + M \mu_F \omega_\eta} \quad (2.34)$$

Перейдем к относительному коэффициенту корреляции. При пересчете будем использовать значения для средних в главном порядке: $\langle p_t^B \rangle = p_0 \frac{s_{3/4}}{s_{1/2}}$, $\langle n_F \rangle = \mu_F M s_{1/2}$

$$b_{p_t n}^{rel} = \frac{\omega_\eta \mu_F}{4\omega_\mu s_{1/2} + \mu_F \omega_\eta} \left(\frac{3}{2} \frac{s_{1/4} s_{1/2}}{s_{3/4}} - 1 \right). \quad (2.35)$$

Обсуждение результатов

Вычисленная асимптотика коэффициента корреляции между поперечным импульсом и множественностью для неоднородного распределения струн (2.34) совпадает с асимптотикой, вычисленной в работе [43] с помощью определения (1.2)

$$b_{p_t n}^{corr f} = b_{p_t n}^{average}.$$

Совпадение этих выражений в рамках сделанных приближений заранее не является очевидным, так как для нелинейной функции регрессии два разных, (1.2) и (1.1), определения коэффициента корреляции не являются тождественно совпадающими и в принципе могут приводить к отличающимся результатам.

Рассмотрим однородное распределение $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}$:

$$b_{p_t n} = \frac{\mu_F \omega_\eta}{2(\mu_F \omega_\eta + 4\omega_\eta \sqrt{\bar{\eta}})}. \quad (2.36)$$

Полученная формула для асимптотики коэффициента корреляции (2.35) в случае однородного распределения струн переходит в выражение (2.36), полученное ранее другим способом в работах [35; 38; 39] при большой плотности струн.

Из выражения (2.35) видно, что этот коэффициент корреляции может принимать отрицательные значения в случае, когда разность $\frac{3}{2} \frac{s_{1/4} s_{1/2}}{s_{3/4}} - 1 < 0$. Покажем, что действительно существуют такие в среднем неоднородные распределения струн в плоскости прицельного параметра, для которых $b_{ptn} < 0$. Для этого введём неоднородное распределение струн в поперечной плоскости струны: пусть в $M_+ = mM$ ячейках имеется повышенная плотность струн: $\eta_+ = a\eta$, т.е. без ограничения общности можно рассматривать только $a > 1$, а в оставшихся $(1 - m)M$ ячейках η струн. Найдем параметры $a \geq 1$ и $0 \leq m \leq 1$, при которых $\frac{3}{2} \frac{s_{1/4} s_{1/2}}{s_{3/4}} - 1 < 0$ и, следовательно, $b_{ptn}^{rel} < 0$.

Для такого распределения сумма $s_\nu = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^\nu$ имеет вид $s_\nu = m(a\bar{\eta})^\nu + (1 - m)\bar{\eta}^\nu$. Условие

$$\frac{3}{2} \frac{s_{1/4} s_{1/2}}{s_{3/4}} - 1 < 0 \quad (2.37)$$

эквивалентно

$$m^2(3a^{3/4} - 3a^{1/2} - 3a^{1/4} + 3) + m(-2a^{3/4} + 3a^{1/2} + 3a^{1/4} - 4) + 1 < 0 \quad (2.38)$$

Обозначим

$$F(a, m) \equiv m^2(3a^{3/4} - 3a^{1/2} - 3a^{1/4} + 3) + m(-2a^{3/4} + 3a^{1/2} + 3a^{1/4} - 4) + 1. \quad (2.39)$$

Построим кривую $F(a, m) = 0$ — границу области, в которой $F(a, m) < 0$ при $a \geq 1$ и $0 \leq m \leq 1$.

Таким образом, коэффициент корреляции b_{ptn}^{rel} может становиться отрицательным в случае сильно неоднородного распределения, при $a \gtrsim 42.86$, т.е. если в некоторой доле ячеек плотность струн в $\gtrsim 43$ раза больше.

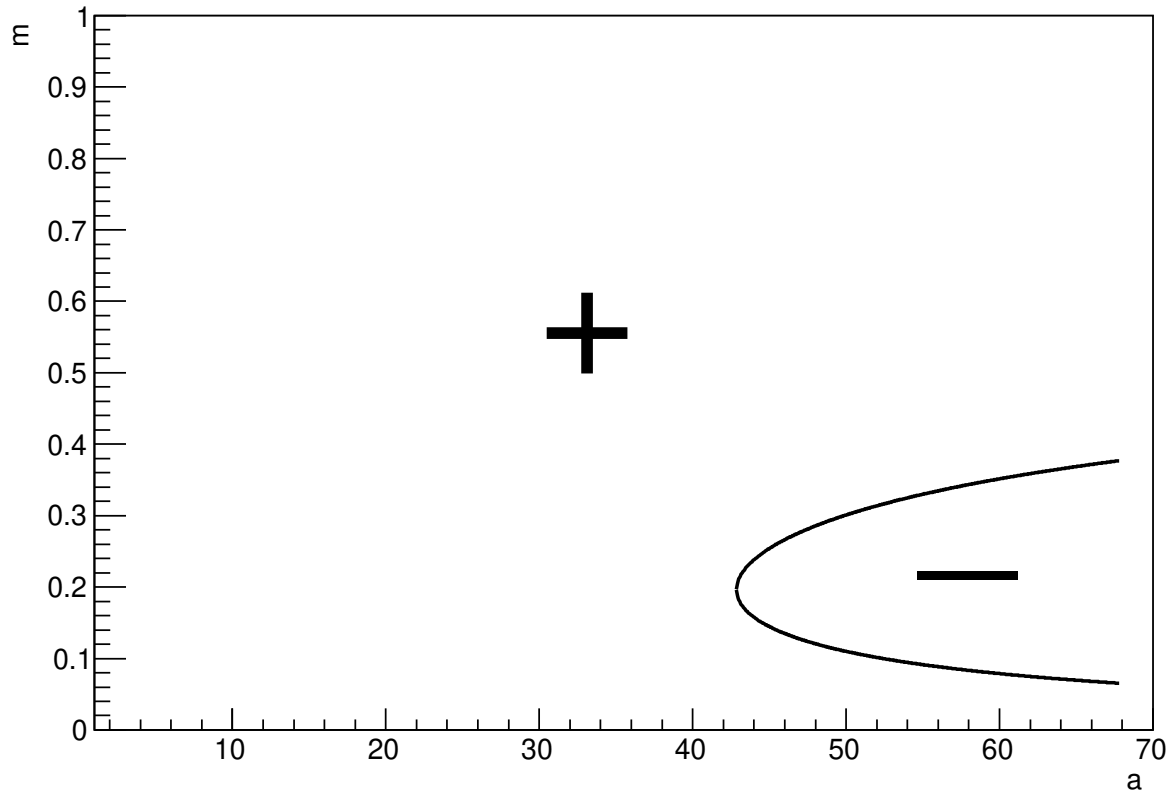


Рис. 2.1. График функции $F(a, m) = 0$, показывающий область параметров a и m , при которых значение коэффициента pt - pt корреляций становится отрицательным.

2.2. Коэффициент корреляции между поперечными импульсами

Ранее коэффициент pt - pt корреляции исследовался в работах [43; 44].

В работе [44], при вычислении коэффициента $b_{p_t p_t}$ первым способом (1.1), сначала методом перевала вычислялась функция регрессии $\langle p_t^B \rangle_{p_t^B}$, далее коэффициент $b_{p_t p_t}$ находился как производная от этой зависимости в точке $p_t^F = \langle p_t^F \rangle$. Асимптотика была рассчитана только для случая равномерного распределения струн в поперечной плоскости.

В работе [43] коэффициент $b_{p_t p_t}$ вычислялся вторым способом в гауссовом приближении (1.10), (1.8) при больших средних значениях плотности струн $\bar{\eta}_i \gg 1$ и числа ячеек решетки $M \gg 1$: вычислялись средние значения $\langle p_t^F \rangle$, $\langle p_t^B \rangle$, $\langle (p_t^F)^2 \rangle$ и $\langle p_t^F p_t^B \rangle$, входящие в формулу (1.2) для коэффициента корреля-

ции $b_{p_t p_t}$. Однако окончательное выражение для асимптоты $b_{p_t p_t}$ в более общем случае неравномерного распределения струн в плоскости прицельного параметра так и не было получено. В настоящем разделе мы находим выражение для асимптотики коэффициента корреляции между поперечными импульсами $b_{p_t p_t}$ для общего случая с неравномерным распределением струн, последовательно используя оба этих подхода.

Вычисление асимптотики коэффициента корреляции $b_{p_t p_t}$ через нахождение средних значений

Вычислим коэффициент корреляции

$$b_{p_t p_t}^{average} = \frac{\langle p_t^F p_t^B \rangle - \langle p_t^F \rangle \langle p_t^B \rangle}{\langle (p_t^F)^2 \rangle - \langle p_t^F \rangle^2} = \frac{\text{cov}(p_F, p_B)}{D_{p_F}}. \quad (2.40)$$

для неоднородного распределения струн.

Среднее $\langle p_t^B \rangle$ было вычислено в работе [43]:

$$\langle p_t^B \rangle = \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \left[1 - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\sqrt{\bar{\eta}_i} S_{1/2}} + \frac{\omega_\eta M}{4S_{1/2}^2} \right]}{S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2}}, \quad (2.41)$$

где

$$S_\alpha = \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i. \quad (2.42)$$

Вычислим $\langle p_F^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle p_t^{F2} \rangle &= \left\langle \frac{1}{n_F^2} \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i^F} p_i^{jF} \right)^2 \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{n_F^2} \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i^F} (p_i^{jF})^2 + \sum_{i=1}^M \sum_{j \neq l} p_i^{jF} p_i^{lF} + \sum_{i \neq k} \sum_{j=1}^{n_i^F} \sum_{l=1}^{n_k^F} p_i^{jF} p_k^{lF} \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \left\langle \frac{1}{n_F^2} \left(\sum_{i=1}^M n_i^F \bar{p}^2(\eta_i) + \sum_{i=1}^M n_i^F (n_i^F - 1) \bar{p}^2(\eta_i) + \sum_{i \neq k} n_i^F n_k^F \bar{p}(\eta_i) \bar{p}(\eta_k) \right) \right\rangle^{C_n^F} \right\rangle^{C_n} = \end{aligned}$$

$$= \left\langle \left\langle \frac{1}{n_F^2} \left(\sum_{i=1}^M n_i^F d_{p_i}(\eta_i) + \left(\sum_{i=1}^M n_i^F \bar{p}(\eta_i) \right)^2 \right) \right\rangle \right\rangle_{C_n^F}^{C_n}. \quad (2.43)$$

Используем (1.12)

$$\begin{aligned} \langle p_t^{F^2} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^M \left\langle \frac{n_i^F}{\left(\sum_{j=1}^M n_j^F \right)^2} \right\rangle_{C_n^F} \gamma \bar{p}^2(\eta_i) + \sum_{i=1}^M \left\langle \frac{n_i^{F^2}}{\left(\sum_{j=1}^M n_j^F \right)^2} \right\rangle_{C_n^F} \bar{p}^2(\eta_i) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \neq k} \left\langle \frac{n_i^F n_k^F}{\left(\sum_{j=1}^M n_j^F \right)^2} \right\rangle_{C_n^F} \bar{p}(\eta_i) \bar{p}(\eta_k) \right\rangle_{C_n}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Усреднение дробей, входящих в (2.44) проведено в приложении А. После усреднения получим

$$\begin{aligned} \langle p_t^{F^2} \rangle &= \frac{\gamma + \omega_\mu}{\mu_F} \left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle_{C_n} + \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle_{C_n} - \\ &\quad - \frac{\omega_\mu}{\mu_F} \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^3} \right\rangle_{C_n}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Усреднение по конфигурациям C_η описано в приложении Б:

$$\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle_{C_n} = \frac{1}{\Sigma'^2} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 - \frac{\omega_\eta}{\sqrt{\bar{\eta}_i} S_{1/2}} + \frac{3\omega_\eta M}{4 S_{1/2}^2} \right], \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle_{C_n} = \frac{1}{\Sigma'^2} \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3M'}{2\Sigma'^2} - \frac{3}{2} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3\omega_\eta}{8\bar{\eta}_i} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ 1 + \frac{3M'}{2\Sigma'^2} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{3}{32} \omega_\eta \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \right], \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^3} \right\rangle_{C_n} = \frac{1}{\Sigma'^3} \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3M\omega_\eta}{2 S_{1/2}^2} - \frac{9}{4} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2} \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3\omega_\eta}{8\bar{\eta}_i} \right) + \right.$$

$$+ \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ 1 + \frac{3 M \omega_\eta}{2 S_{1/2}^2} - \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2} \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2} \sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{3}{32} \omega_\eta \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\}, \quad (2.48)$$

где

$$\Sigma' = \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega_\eta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}}, \quad M' = \frac{\omega_\eta}{2} M + \frac{\omega_\eta^2}{16} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}. \quad (2.49)$$

Так как флуктуации множественностей и поперечных импульсов частиц в переднем и заднем окнах независимы и $\langle p_t^F \rangle = \langle p_t^B \rangle$, то при усреднении $\langle p_t^F p_t^B \rangle$ имеем

$$\langle p_t^F p_t^B \rangle = \left\langle \left\langle \langle p_t^F \rangle^{C_p^F} \right\rangle^{C_n^F} \left\langle \langle p_t^B \rangle^{C_p^B} \right\rangle^{C_n^B} \right\rangle^{C_\eta} = \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle^{C_\eta}. \quad (2.50)$$

Это выражение было вычислено выше (2.47).

Так как $\langle p_t^F \rangle = \langle p_t^B \rangle$,

$$\langle p_t^F \rangle \langle p_t^B \rangle = \langle p_t^F \rangle^2. \quad (2.51)$$

Возведем (2.41) в квадрат. В главном порядке получим

$$\begin{aligned} \langle p_t^F \rangle^2 &= \frac{1}{(S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2})^2} \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{M \omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2} \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \right) + \right. \\ &+ \left. \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{M \omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2} \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2} \sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_j} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Далее мы вычисляем числитель и знаменатель в формуле (2.40), берем их отношение и находим выражение для $b_{p_t p_t}$. Эти вычисления вынесены в Приложение В. Окончательно, для коэффициента корреляции между средними поперечными импульсами в относительных переменных для случая неоднородного распределения струн в плоскости прицельного параметра мы получаем:

$$b_{p_t p_t}^{average} = \frac{\frac{9}{16} \omega_\eta S_{1/2} + \frac{1}{4} \omega_\eta \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{4} \omega_\eta \frac{S_{3/4} S_{1/4}}{S_{1/2}}}{\frac{9}{16} \omega_\eta S_{1/2} + \frac{1}{4} \omega_\eta \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{4} \omega_\eta \frac{S_{3/4} S_{1/4}}{S_{1/2}} + \frac{\gamma + \omega_\mu}{\mu_F} S_1 - \frac{\omega_\mu S_{3/4}^2}{\mu_F S_{1/2}}}, \quad (2.53)$$

$$b_{p_t p_t}^{average} = \frac{\omega_\eta \mu_F \left(9s_{1/2}^3 - 12s_{1/4}s_{3/4}s_{1/2} + 4s_{3/4}^2 \right)}{16\gamma s_1 s_{1/2}^2 + \omega_\eta \mu_F \left(9s_{1/2}^3 - 12s_{1/4}s_{3/4}s_{1/2} + 4s_{3/4}^2 \right) + 16\omega_\mu s_{1/2} \left(s_1 s_{1/2} - s_{3/4}^2 \right)}. \quad (2.54)$$

Вычисление асимптотики коэффициента корреляции $b_{p_t p_t}$ методом перевала

Обобщим вычисления, проведенные в работе [44] на случай неоднородного распределения струн в поперечной плоскости.

Запишем формулу (1.23):

$$\langle p_B \rangle_{p_F} = \frac{1}{P(p_F)} \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j dn_j^B dn_j^F N(C_\eta, C_n^F) \langle p_B \rangle_{C_\eta C_n^B} e^{-\Phi} e^{-\Psi}, \quad (2.55)$$

$$P(p_F) = \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j dn_j^B dn_j^F N(C_\eta, C_n^F) e^{-\Phi} e^{-\Psi}, \quad (2.56)$$

где

$$\Phi = \sum_{i=1}^M \frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2d_{\eta_i}} + \sum_{i=1}^M \frac{(n_i^F - \bar{n}_i^F)^2}{2d_{n_i^F}} + \frac{[p_F - \langle p_F \rangle_{C_\eta C_n^F}]^2}{2d_{p_F}(C_\eta, C_n^F)}, \quad \Psi = \sum_{i=1}^M \frac{(n_i^B - \bar{n}_i^B)^2}{2d_{n_i^B}}. \quad (2.57)$$

$$\langle p_F \rangle_{C_\eta C_n^F} = \frac{\sum n_i^B(\eta_i) \bar{p}_i(\eta_i)}{\sum n_i^B(\eta_i)}, \quad d_{p_F}(C_\eta, C_n^F) = \frac{\sum n_i^B(\eta_i) d_{p_i}(\eta_i)}{(\sum n_i^B(\eta_i))^2}. \quad (2.58)$$

При оценке интеграла по n_i^B происходит замена n_i^B на \bar{n}_i^B ,

$$\langle p_B \rangle_{p_F} = \frac{1}{P(p_F)} \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j dn_j^F N(C_\eta, C_n^F) \langle p_B \rangle_{C_\eta C_n^B} e^{-\Phi}, \quad (2.59)$$

$$P(p_F) = \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j dn_j^F N(C_\eta, C_n^F) e^{-\Phi}. \quad (2.60)$$

При оценке интегралов по методу перевала нормировочные множители из гауссовых распределений $N(C_\eta^*, C_n^{*F})$ в перевальной точке $\eta_i^*(p_F)$, $n_i^*(p_F)$ выносятся как в числителе, так и в знаменателе формулы и сокращаются, тогда

$$\langle p_B \rangle_{p_F} = \langle p_B \rangle_{C_\eta^* C_{\bar{n}_i^B}^*} = \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}_i^B(\eta_i^*) \bar{p}_i(\eta_i^*)}{\sum_{i=1}^M \bar{n}_i^B(\eta_i^*)}. \quad (2.61)$$

Сделаем замену переменных:

$$z_i^4 = \frac{\eta_i}{\bar{\eta}_i}, \quad \rho_i = \frac{n_i^F}{\bar{n}_i^F(\bar{\eta}_i)}, \quad f = \frac{p_F}{\langle p_F \rangle}, \quad (2.62)$$

получим

$$\Phi = \sum_{i=1}^M \frac{(z_i^4 - 1)^2 \bar{\eta}_i}{2\omega_\eta} + \sum_{i=1}^M \frac{(\rho_i - z_i^2)^2 \sqrt{\bar{\eta}_i} \mu_F}{2\omega_\mu z_i^2} + \frac{\left(f \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i z_i \bar{\eta}_i^{3/4}}{\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2}} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right)^2 \mu_F}{2\gamma \sum_{i=1}^M \rho_i z_i^2 \bar{\eta}_i}. \quad (2.63)$$

Продифференцируем по z_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = & \frac{4z_i^3(z_i^4 - 1)\bar{\eta}_i}{\omega_\eta} - \frac{2(\rho_i - z_i^2)\sqrt{\bar{\eta}_i}\mu_F}{\omega_\mu z_i} - \frac{(\rho_i - z_i^2)^2\sqrt{\bar{\eta}_i}\mu_F}{\omega_\mu z_i^3} + \\ & - \frac{\rho_i \bar{\eta}_i^{3/4} \left(f \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i z_i \bar{\eta}_i^{3/4}}{\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2}} \right) \left(\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right) \mu_F}{\gamma \sum_{i=1}^M \rho_i z_i^2 \bar{\eta}_i} - \\ & - \frac{\left(f \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i z_i \bar{\eta}_i^{3/4}}{\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2}} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right)^2 \mu_F}{\gamma \left(\sum_{i=1}^M \rho_i z_i^2 \bar{\eta}_i \right)^2} \rho_i z_i \bar{\eta}_i. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Продифференцируем по ρ_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_i} = & \frac{(\rho_i - z_i^2)\sqrt{\bar{\eta}_i}\mu_F}{\omega_\mu z_i^2} - \frac{\left(f \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i z_i \bar{\eta}_i^{3/4}}{\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2}} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right)^2 \mu_F z_i^2 \bar{\eta}_i}{2\gamma \left(\sum_{i=1}^M \rho_i z_i^2 \bar{\eta}_i \right)^2} - \\ & + \frac{\left(f \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i z_i \bar{\eta}_i^{3/4}}{\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2}} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right) \mu_F \bar{\eta}_i^{1/2}}{\gamma \sum_{i=1}^M \rho_i z_i^2 \bar{\eta}_i} + \\ & + \frac{\left(f \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i z_i \bar{\eta}_i^{3/4}}{\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2}} \right) \left(\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right)^2 \mu_F}{\gamma \sum_{i=1}^M \rho_i z_i^2 \bar{\eta}_i} \left(\frac{-z_i \bar{\eta}_i^{3/4}}{\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2}} + \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i z_i \bar{\eta}_i^{3/4}}{\left(\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right)^2 \bar{\eta}_i^{1/2}} \right). \end{aligned} \quad (2.65)$$

В новых переменных (2.62) положение точки перевала $z_i = z_i^*(f)$, $\rho_i = \rho_i^*(f)$ определяется из условий:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_i} = 0. \quad (2.66)$$

Продифференцируем (2.66) по f и положим $f = 1$. Учитывая, что при $f = 1$ уравнения (2.66) имеют решения $z_i = 1$ и $\rho_i = 1$, получим

$$\frac{16z'_i\bar{\eta}_i}{\omega_\eta} - \frac{2(\rho'_i - 2z'_i)\sqrt{\bar{\eta}_i}\mu_F}{\omega_\mu z_i} - \frac{\bar{\eta}_i^{3/4} \left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M (\rho'_i + z'_i)\bar{\eta}_i^{3/4}}{S_{1/2}} + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}^2} \sum_{i=1}^M \rho'_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right) S_{1/2} \mu_F}{\gamma S_1} = 0, \quad (2.67)$$

$$\frac{(\rho'_i - 2z'_i)\sqrt{\bar{\eta}_i}\mu_F}{\omega_\mu} + \frac{\left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M (\rho'_i + z'_i)\bar{\eta}_i^{3/4}}{S_{1/2}} + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}^2} \sum_{i=1}^M \rho'_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right) \left(\sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{1/2} \right)^2 \mu_F}{\gamma \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i} \times$$

$$\times \left(\frac{-\bar{\eta}_i^{3/4}}{\sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{1/2}} + \frac{\sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{3/4}}{\left(\sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{1/2} \right)^2 \bar{\eta}_i^{1/2}} \right) = 0. \quad (2.68)$$

Преобразуем полученные выражения:

$$16z'_i - \frac{2\omega_\eta(\rho'_i - 2z'_i)\mu_F}{\sqrt{\bar{\eta}_i}\omega_\mu z_i} - \frac{\omega_\eta \bar{\eta}_i^{1/4} \left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M (\rho'_i + z'_i)\bar{\eta}_i^{3/4}}{S_{1/2}} + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}^2} \sum_{i=1}^M \rho'_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right) S_{1/2} \mu_F}{\sqrt{\bar{\eta}_i} \gamma S_1} = 0, \quad (2.69)$$

$$\frac{(\rho'_i - 2z'_i)\sqrt{\bar{\eta}_i}\mu_F}{\omega_\mu} + \frac{\left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M (\rho'_i + z'_i)\bar{\eta}_i^{3/4}}{S_{1/2}} + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}^2} \sum_{i=1}^M \rho'_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right) S_{1/2} \mu_F}{\gamma S_1} \left(\frac{-\bar{\eta}_i^{3/4}}{S_{1/2}} + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}^2} \bar{\eta}_i^{1/2} \right) = 0. \quad (2.70)$$

Получим систему уравнений:

$$\frac{16\gamma\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} z'_i \bar{\eta}_i^{1/2} - 2\gamma(\rho'_i - 2z'_i) - \omega_\mu \bar{\eta}_i^{1/4} \left(\frac{S_{3/4}}{S_1} - \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^M (\rho'_k + z'_k) \bar{\eta}_k^{3/4} + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2} S_1} \sum_{k=1}^M \rho'_k \bar{\eta}_k^{1/2} \right) = 0, \quad (2.71)$$

$$\gamma(\rho'_i - 2z'_i) + \omega_\mu \left(\frac{S_{3/4}}{S_1} - \frac{\sum_{k=1}^M (\rho'_k + z'_k) \bar{\eta}_k^{3/4}}{S_1} + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2} S_1} \sum_{k=1}^M \rho'_k \bar{\eta}_k^{1/2} \right) \left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \bar{\eta}_i^{1/4} \right) = 0. \quad (2.72)$$

Выразим ρ'_i :

$$\omega_\mu \left(\frac{S_{3/4}}{S_1} - \frac{\sum_{k=1}^M (\rho'_k + z'_k) \bar{\eta}_k^{3/4}}{S_1} + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2} S_1} \sum_{k=1}^M \rho'_k \bar{\eta}_k^{1/2} \right) \left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \bar{\eta}_i^{1/4} \right) = -\gamma(\rho'_i - 2z'_i), \quad (2.73)$$

$$\left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \bar{\eta}_i^{1/4} \right) \left(\frac{16\gamma\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} z'_i \bar{\eta}_i^{1/2} - 2\gamma(\rho'_i - 2z'_i) \right) + \bar{\eta}_i^{1/4} \gamma(\rho'_i - 2z'_i) = 0,$$

$$\rho'_i \left(-2 \left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \bar{\eta}_i^{1/4} \right) + \bar{\eta}_i^{1/4} \right) = z'_i \left(2\bar{\eta}_i^{1/4} - \left(4 + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} \bar{\eta}_i^{1/2} \right) \left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \bar{\eta}_i^{1/4} \right) \right),$$

$$\rho'_i = 2z'_i + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} \frac{\bar{\eta}_i^{-1/4} - \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}}{3\bar{\eta}_i^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} z'_i \bar{\eta}_i^{-1/2}. \quad (2.74)$$

Подставим (2.74) в (2.71):

$$\begin{aligned} & \frac{16\gamma\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} z'_i \bar{\eta}_i^{-1/2} - 2\gamma \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} \frac{\bar{\eta}_i^{-1/4} - \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}}{3\bar{\eta}_i^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} z'_i \bar{\eta}_i^{-1/2} - \bar{\eta}_i^{1/4} \frac{\omega_\mu}{S_1} \left[S_{3/4} - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^M \left(3 + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} \frac{\bar{\eta}_k^{-1/4} - \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} \bar{\eta}_k^{-1/2} \right) z'_k \bar{\eta}_k^{-3/4} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \sum_{k=1}^M \left(2 + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} \frac{\bar{\eta}_k^{-1/4} - \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} \bar{\eta}_k^{-1/2} \right) z'_k \bar{\eta}_k^{-1/2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{16\gamma}{\omega_\eta\mu_F} \frac{z'_i \bar{\eta}_i^{-1/2}}{3\bar{\eta}_i^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - \frac{1}{S_1} \left(S_{3/4} - \sum_{k=1}^M \left(3 + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} \frac{\bar{\eta}_k^{-1/4} - \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} \bar{\eta}_k^{-1/2} \right) z'_k \bar{\eta}_k^{-3/4} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \sum_{k=1}^M \left(2 + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} \frac{\bar{\eta}_k^{-1/4} - \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} \bar{\eta}_k^{-1/2} \right) z'_k \bar{\eta}_k^{-1/2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} & \frac{16\gamma S_1}{\omega_\eta\mu_F} \frac{z'_i \bar{\eta}_i^{-1/2}}{3\bar{\eta}_i^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - S_{3/4} + 3 \sum_{k=1}^M z'_k \bar{\eta}_k^{-3/4} + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} \sum_{k=1}^M \frac{z'_k \bar{\eta}_k^{-3/2}}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - 2 \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \sum_{k=1}^M \frac{z'_k \bar{\eta}_k^{-5/4}}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - \\ & \quad - 2 \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \sum_{k=1}^M z'_k \bar{\eta}_k^{-1/2} + \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}^2} \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} \sum_{k=1}^M \frac{z'_k \bar{\eta}_k}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} = 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} & z'_i \frac{16\gamma S_1}{\omega_\eta\mu_F} \frac{\bar{\eta}_i^{-1/2}}{3\bar{\eta}_i^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} + \sum_{k=1}^M z'_k \left(3\bar{\eta}_k^{-3/4} + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} \frac{\bar{\eta}_k^{-3/2}}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - \right. \\ & \quad \left. - 2 \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \frac{\bar{\eta}_k^{-5/4}}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - 2 \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \bar{\eta}_k^{-1/2} + \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}^2} \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} \frac{\bar{\eta}_k}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} \right) = S_{3/4} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Уравнение (2.78) имеет вид (2.21). Его решение (2.28):

$$z'_i|_{f=1} = \frac{dz_i^*}{df} \Big|_{f=1} = \frac{c}{p_i \left(1 + \sum \frac{q_k}{p_k} \right)}, \quad (2.79)$$

где $p_i = \frac{16\gamma S_1}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_i^{-1/2}}{3\bar{\eta}_i^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}}$,

$$q_k = \left(3\bar{\eta}_k^{3/4} + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_k^{3/2}}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - 2\frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \frac{\bar{\eta}_k^{5/4}}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \bar{\eta}_k^{-1/2} + \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}^2} \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_k}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} \right), \quad c = S_{3/4}.$$

По определению (1.1)

$$b_{p_t p_t} = \frac{d\langle p_B \rangle_{p_F}}{dp_F} \Big|_{p_F=\langle p_F \rangle} = \sum_{i=1}^M \frac{\partial}{\partial \eta_i^*} \langle p_B \rangle_{C_{\eta^*} C_{\bar{n}}^B} \frac{d\eta_i^*}{dp_F} \Big|_{p_F=\langle p_F \rangle}. \quad (2.80)$$

С учетом замены (2.62)

$$\frac{d\eta_i^*}{dp_F} \Big|_{p_F=\langle p_F \rangle} = \frac{d(z_i^{*4} \bar{\eta}_i)}{\langle p_F \rangle df} \Big|_{f=1} = \frac{4\bar{\eta}_i}{\langle p_F \rangle} \frac{dz_i^*}{df} \Big|_{f=1}. \quad (2.81)$$

Используем явный вид зависимости: $\bar{n}_F = \sum_{i=1}^M \bar{n}_i^F$, $\langle p_F \rangle = \frac{1}{\bar{n}_F} \sum_{i=1}^M \bar{n}_i^F \bar{p}_i$,

$$\bar{n}_i^F(\eta_i) = \mu_F \sqrt{\eta_i}, \quad \bar{p}_i(\eta_i) = p_0 \sqrt[4]{\eta_i},$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i^*} \langle p_B \rangle_{C_{\eta^*} C_{\bar{n}}^B} = \frac{\partial}{\partial \eta_i^*} p_0 \frac{\sum_k \eta_k^{*3/4}}{\sum_k \eta_k^{*1/2}} = \frac{3}{4} p_0 \frac{\eta_i^{*-1/4}}{S_{1/2}^*} - \frac{1}{2} p_0 \frac{S_{3/4}^*}{(S_{1/2}^*)^2} \eta_i^{*-1/2}. \quad (2.82)$$

Тогда

$$b_{p_t p_t} = \sum_{i=1}^M \frac{\partial}{\partial \eta_i^*} \langle p_B \rangle_{C_{\eta^*} C_{\bar{n}}^B} \frac{d\eta_i^*}{dp_F} \Big|_{p_F=\langle p_F \rangle} = \sum_{i=1}^M \frac{S_{1/2}}{S_{3/4}} \left(3 \frac{\bar{\eta}_i^{3/4}}{S_{1/2}} - 2 \frac{S_{3/4}}{(S_{1/2})^2} \bar{\eta}_i^{1/2} \right) \frac{dz_i^*}{df} \Big|_{f=1}, \quad (2.83)$$

формула (2.80) имеет вид:

$$b_{p_t p_t} = \sum_{i=1}^M \left(3 \frac{\bar{\eta}_i^{3/4}}{S_{3/4}} - 2 \frac{\bar{\eta}_i^{1/2}}{S_{1/2}} \right) \frac{dz_i^*}{df} \Big|_{f=1}. \quad (2.84)$$

Учитывая (2.79), формулу (2.84) можно переписать в виде:

$$b_{p_t p_t} = \frac{c}{1 + \sum \frac{q_k}{p_k}} \left(\frac{3}{S_{3/4}} \sum_{i=1}^M \frac{\bar{\eta}_i^{3/4}}{p_i} - \frac{2}{S_{1/2}} \sum_{i=1}^M \frac{\bar{\eta}_i^{1/2}}{p_i} \right). \quad (2.85)$$

Вычислим выражения, входящие в (2.85):

$$\sum \frac{q_k}{p_k} = \sum \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma S_1} \bar{\eta}_k^{-1/2} \left[3\bar{\eta}_k^{3/4} \left(3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \right) + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_k^{3/2}}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - \right. \\ \left. - 2\frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \frac{\bar{\eta}_k^{5/4}}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \bar{\eta}_k^{-1/2} \left(3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \right) + \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}^2} \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_k}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} \right], \quad (2.86)$$

$$\sum \frac{q_k}{p_k} = \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma S_1} \left(9S_{1/2} - 12 \frac{S_{1/4} S_{3/4}}{S_{1/2}} + 4M \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}^2} \right) + \frac{\omega_\mu}{\gamma S_1} \left(S_1 - \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}} \right). \quad (2.87)$$

$$\frac{c}{1 + \sum \frac{q_k}{p_k}} = \frac{S_{3/4}}{1 + \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma S_1} \left(9S_{1/2} - 12 \frac{S_{1/4} S_{3/4}}{S_{1/2}} + 4M \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}^2} \right) + \frac{\omega_\mu}{\gamma S_1} \left(S_1 - \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}} \right)}, \quad (2.88)$$

$$\frac{3}{S_{3/4}} \sum_{i=1}^M \frac{\bar{\eta}_i^{3/4}}{p_i} = \frac{3}{S_{3/4}} \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma S_1} \sum_{i=1}^M \left(3\bar{\eta}_i^{-1/4} - 2 \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \right) \bar{\eta}_i^{1/4} = \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma S_1} \left(\frac{9S_{1/2}}{S_{3/4}} - \frac{6S_{1/4}}{S_{1/2}} \right), \quad (2.89)$$

$$\frac{2}{S_{1/2}} \sum_{i=1}^M \frac{\bar{\eta}_i^{-1/2}}{p_i} = \frac{2}{S_{1/2}} \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma S_1} \sum_{i=1}^M \left(3\bar{\eta}_i^{-1/4} - 2 \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \right) = \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma S_1} \left(\frac{6S_{1/4}}{S_{1/2}} - \frac{4MS_{3/4}}{S_{1/2}^2} \right). \quad (2.90)$$

Окончательно

$$b_{p_t p_t}^{corr f} = \frac{S_{3/4} \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma S_1} \left(\frac{9s_{1/2}}{s_{3/4}} - \frac{12s_{1/4}}{s_{1/2}} + \frac{4s_{3/4}}{s_{1/2}^2} \right)}{1 + \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma s_1} \left(9s_{1/2} - 12 \frac{s_{1/4} s_{3/4}}{s_{1/2}} + 4 \frac{s_{3/4}^2}{s_{1/2}^2} \right) + \frac{\omega_\mu}{\gamma s_1} \left(s_1 - \frac{s_{3/4}^2}{s_{1/2}} \right)}, \quad (2.91)$$

$$b_{p_t p_t}^{corr f} = \frac{\omega_\eta \mu_F \left(9s_{1/2}^3 - 12s_{1/4} s_{3/4} s_{1/2} + 4s_{3/4}^2 \right)}{16\gamma s_1 s_{1/2}^2 + \omega_\eta \mu_F \left(9s_{1/2}^3 - 12s_{1/4} s_{3/4} s_{1/2} + 4s_{3/4}^2 \right) + 16\omega_\mu s_{1/2} \left(s_1 s_{1/2} - s_{3/4}^2 \right)}. \quad (2.92)$$

Обсуждение результатов

Асимптотики коэффициента корреляции между поперечными импульсами (2.54) и (2.92), вычисленные различными методами, совпадают. Отметим, что, как и в случае с коэффициентом корреляции $b_{p_t n}$, совпадение этих выражений для коэффициента корреляции $b_{p_t p_t}$ в рамках сделанных приближений заранее не является очевидным, так как для нелинейной корреляционной функции два разных, (1.2) и (1.1), определения коэффициента корреляции не являются тождественно совпадающими и могут приводить к отличающимся результатам.

Рассмотрим однородное распределение струн $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}$:

$$b_{p_t p_t} = \frac{\mu_F \omega_\eta}{\mu_F \omega_\eta + 16\gamma \sqrt{\bar{\eta}}}. \quad (2.93)$$

Полученная формула для асимптотики коэффициента корреляции (2.92) в случае однородного распределения струн переходит в выражение (2.93), полученное ранее другим способом в работе [44] при большой плотности струн. Важным отличием выражений для асимптотик в случае однородного и неоднородного распределений струн является то, что в случае однородного распределения

(2.93) пропадает зависимость коэффициента $p_t - p_t$ корреляций от параметра модели ω_μ , характеризующего ширину дисперсии числа частиц, попадающих в данный интервал быстроты от распада струны, которая имеется в формуле (2.92) в случае неоднородного распределения струн.

Исследование зависимости коэффициента корреляции $b_{p_t p_t}$ от среднего числа струн и параметра ω_μ

Рассмотрим неоднородное распределение струн в поперечной плоскости струны, описанное в разделе 2.1. Построим графики зависимости коэффициента корреляции $b_{p_t p_t}$ от числа струн η при различных значениях m .

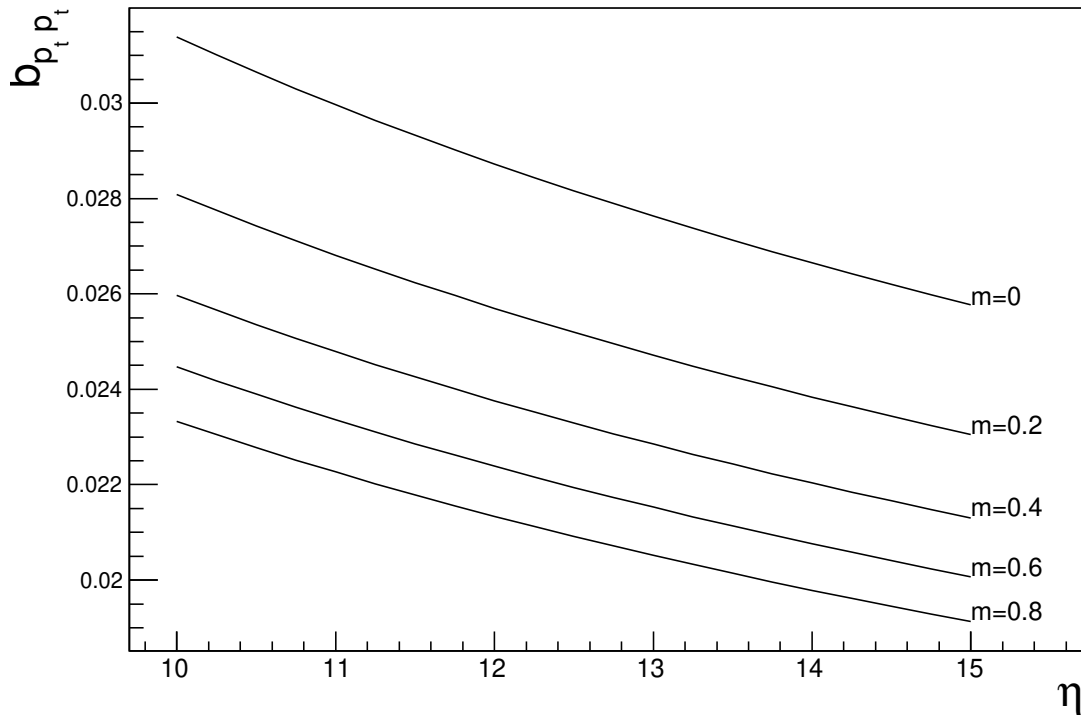


Рис. 2.2. Асимптотика коэффициента корреляции между поперечными импульсами $b_{p_t p_t}$ в зависимости от числа струн η при различных значениях неоднородности распределения m . Для остальных параметров были выбраны следующие значения: $M = 450$, $a = 2$, $\omega_\mu = \omega_\eta = 1$, $\mu_F = \mu_B = 1$, $\gamma = 0.61$

Из графика видно, что при увеличении степени неоднородности m значение коэффициента корреляции уменьшается.

Используем неоднородное распределение и построим график зависимости коэффициента корреляции $b_{p_t p_t}$ от параметра ω_μ при различных значениях m (рис. 2.3).

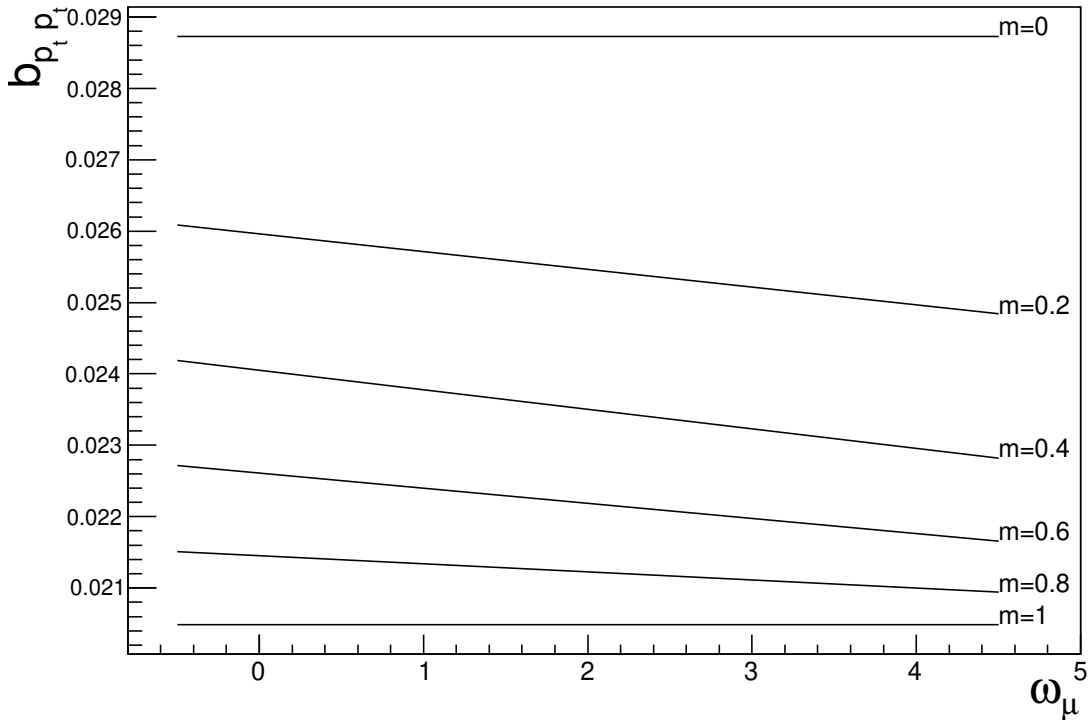


Рис. 2.3. Асимптотика коэффициента корреляции между поперечными импульсами $b_{p_t p_t}$ в зависимости от приведенной дисперсии ω_μ числа частиц, образующихся при фрагментации струны при различных значениях неоднородности распределения m . Для остальных параметров были выбраны следующие значения: $M = 450$, $a = 2$, $\eta = 12$, $\omega_\eta = 1$, $\mu_F = \mu_B = 1$, $\gamma = 0.61$

Из рис. 2.3 мы видим, что в случае однородного ($m = 0$, $m = 1$) распределения коэффициент корреляции между поперечными импульсами $b_{p_t p_t}$ не зависит от приведенной дисперсии числа частиц, образующихся при фрагментации струны ω_μ , как мы уже отмечали при анализе общих формул в конце предыдущего подраздела.

Численный расчет коэффициента корреляции $b_{p_t p_t}$ при произвольной плотности струн путем монте-карловских симуляций

Выше мы нашли аналитическое выражение для коэффициентов корреляции $b_{p_t p_t}$ при большой плотности струн $\eta \gg 1$. При малой плотности струн коэффициент корреляции может быть найден только численно.

Ниже мы проводим расчет этого коэффициента методом монте-карловских симуляций для нескольких распределений струн в поперечной плоскости. Сравнение результатов этих численных расчетов с аналитической асимптотической формулой (2.92) позволяет убедиться в корректности как аналитических вычислений, так и монте-карловского кода, а также увидеть при какой плотности струн происходит выход на эту асимптотику.

Опишем алгоритм монте-карловских вычислений:

1. Задается среднее число струн в данной ячейке $\bar{\eta}_i$;
2. По средним значениям $\bar{\eta}_i$ генерируется число струн в этой ячейке в данном событии η_i ;
3. По числу струн вычисляется среднее число частиц, образовавшихся при адронизации струн в i -ой ячейке, и их средний поперечный импульс $\bar{n}_i^F(\eta_i)$, $\bar{n}_i^B(\eta_i)$, $\bar{p}_t^F(\eta_i)$, $\bar{p}_t^B(\eta_i)$ по формулам

$$\bar{n}_i^F(\eta_i) = \mu_F \sqrt{\eta_i}, \quad \bar{n}_i^B(\eta_i) = \mu_B \sqrt{\eta_i}, \quad \bar{p}_t^F(\eta_i) = p_0 \sqrt[4]{\eta_i}, \quad \bar{p}_t^B(\eta_i) = p_0 \sqrt[4]{\eta_i};$$

4. По среднему числу частиц генерируется число частиц, образовавшихся при адронизации струн в i -ой ячейке, в данном событии $n_i^F(\eta_i)$, $n_i^B(\eta_i)$;
5. Вычисляются число частиц в переднем и заднем быстротных окнах в данном событии $n_F(\eta_i) = \sum_{i=1}^M n_i^F(\eta_i)$, $n_B(\eta_i) = \sum_{i=1}^M n_i^B(\eta_i)$, их поперечный импульс и квадрат поперечного импульса по формулам

$$p_t^F = \frac{1}{n_F} \sum_{i=1}^M n_i^F(\eta_i) \bar{p}_t^F(\eta_i), \quad p_t^B = \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^M n_i^B(\eta_i) \bar{p}_t^B(\eta_i),$$

$$(p_t^F)^2 = \sum_{i=1}^M \left(\bar{p}_t^{iF}(\eta_i) \right)^2 + \frac{1}{n_F^2} \sum_{i=1}^M n_i^F(\eta_i) \left(\bar{p}_t^{iF}(\eta_i) \right)^2$$

6. Пункты 1-5 повторяются N раз. Если в событии не образовалось ни одной частицы в каком-либо из окон $n_i^F(\eta_i) = 0$ или $n_i^B(\eta_i) = 0$, эти события не учитываются при усреднении;

7. Вычисляются средние значения $\langle p_t^F \rangle = \frac{\sum p_t^F}{N_{ev}}$, $\langle (p_t^F)^2 \rangle = \frac{\sum (p_t^F)^2}{N_{ev}}$, $\langle p_t^F p_t^B \rangle = \frac{\sum p_t^F p_t^B}{N_{ev}}$, где N_{ev} — число событий, в которых $n_i^F(\eta_i) \neq 0$, $n_i^B(\eta_i) \neq 0$

8. Вычисляется коэффициент корреляции

$$b_{p_t p_t} = \frac{\langle p_t^F p_t^B \rangle - \langle p_t^F \rangle \langle p_t^B \rangle}{\langle (p_t^F)^2 \rangle - \langle p_t^F \rangle^2}.$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_i &\longrightarrow \eta_i \longrightarrow \bar{n}_i^F(\eta_i), \bar{n}_i^B(\eta_i), \bar{p}_t^{iF}(\eta_i), \bar{p}_t^{iB}(\eta_i) \longrightarrow \\ &\longrightarrow n_i^F(\eta_i), n_i^B(\eta_i), p_t^{iF}(\eta_i), p_t^{iB}(\eta_i) \longrightarrow \\ &\longrightarrow p_t^F, p_t^B, (p_t^F)^2 \longrightarrow \langle p_t^F \rangle, \langle (p_t^F)^2 \rangle, \langle p_t^F p_t^B \rangle \longrightarrow b_{p_t p_t} \end{aligned}$$

При вычислениях использовались следующие значения параметров: общее число ячеек $M = 30$, параметры $\omega_\mu = \omega_\eta = 1$, $\mu_F = \mu_B = 1$. Результаты приведены на рис. 2.4, 2.5, точки — результат численных вычислений, линии — асимптотика (2.92).

Из графиков видно, что при $\bar{\eta} \gtrsim 5$ асимптотика хорошо приближает значения коэффициента корреляции $b_{p_t p_t}$.

Как видно из рис. 2.5, при малой плотности струн зависимость коэффициента корреляции $b_{p_t p_t}$ от неоднородности меняется на обратную по сравнению с той, которая имеет место при большой плотности струн. При малой плотности струн неоднородность их среднего распределения приводит к увеличению коэффициента корреляции $b_{p_t p_t}$.

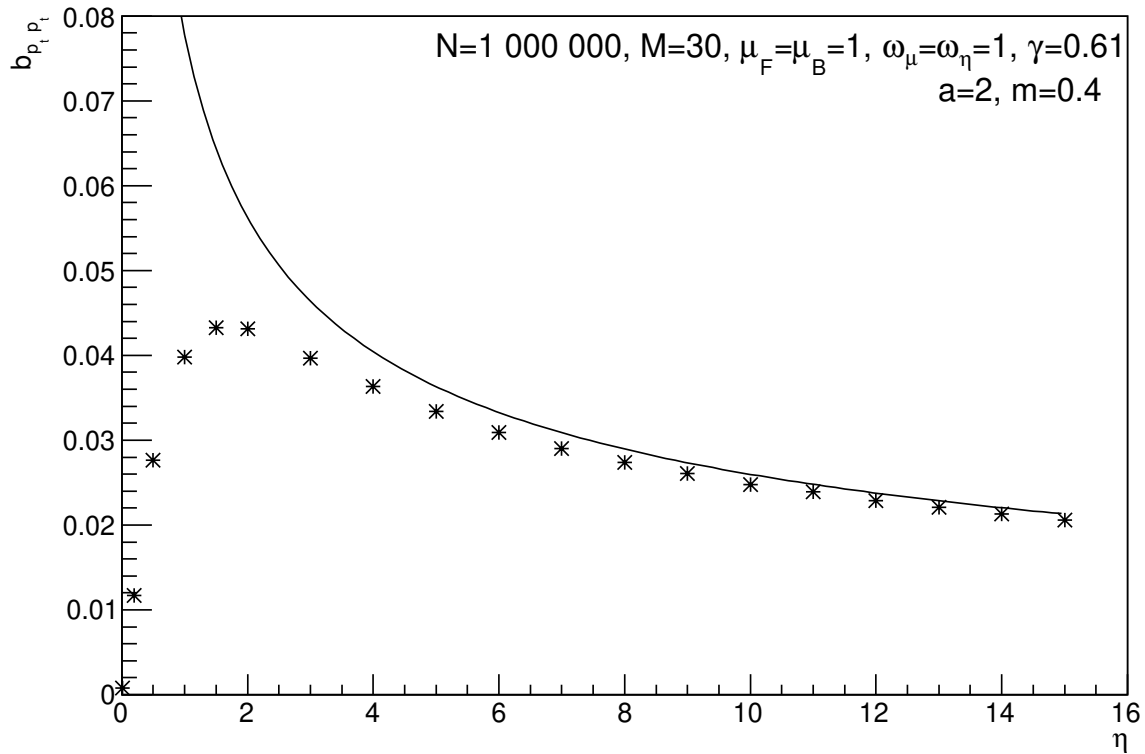


Рис. 2.4. Результат численных вычислений коэффициента корреляции $b_{p_t p_t}$ для неоднородного распределения струн: $a = 2, m = 0.4$

2.3. Общие свойства корреляций с участием среднего поперечного импульса

В этой главе были изучены дальние корреляции между средним поперечным импульсом и множественностью (pt-n) и между средними поперечными импульсами (pt-pt) заряженных частиц, образующихся при высокоэнергетических столкновениях адронов в двух разделённых по быстроте интервалах, в модели с кварк-глюонными струнами (трубками цветокого потока) в качестве источников [3; 4; 10]. Эффекты взаимодействия струн и слияния [21–24] учитывались в упрощённой форме путем введения решетки с ячейками конечного размера в плоскости прицельного параметра [37–39].

В рамках этой модели были получены аналитические выражения для асимптотических коэффициентов корреляции при большой неоднородной плотности струн

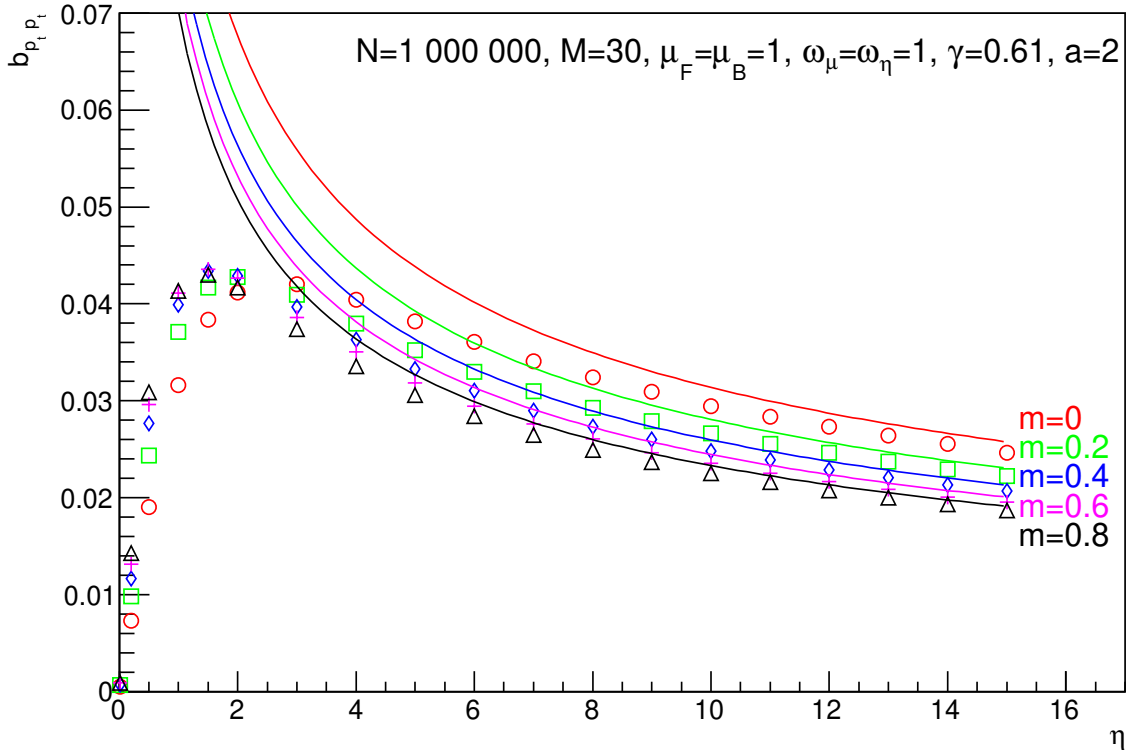


Рис. 2.5. Результат численных вычислений коэффициента корреляции $b_{p_t p_t}$

были получены двумя очень разными методами, основанными на альтернативных определениях коэффициентов корреляции. Было показано, что в главном порядке асимптоты коэффициентов корреляции, полученные этими двумя методами, совпадают. Полученные результаты позволяют качественно понять основные особенности поведения дальних корреляции при большой плотности струн. Таким образом, была обнаружена сильная зависимость коэффициента корреляции p_t - n от неоднородности распределения струн в отличие от n - n корреляций. В частности, было показано, что существуют такие распределения струн, для которых коэффициент корреляции p_t - n становится отрицательным.

Для коэффициента p_t - p_t корреляции анализировалась зависимость от приведенной дисперсии множественности частиц, рождённых при распаде одной струны. Было показано, что, как и ожидалось [44], зависимость от этого параметра исчезает для однородного распределения струн.

Аналитические выражения для асимптот коэффициентов корреляции, по-

лученные при большой плотности струн, сравнивались с результатами монтекарловских численных расчетов этих коэффициентов. Это позволило оценить плотность струн, при которой достигается асимптотический режим, а также проверить как аналитические асимптотические формулы, так и численные МС алгоритмы, которые затем могут быть применены для вычисления коэффициентов корреляции в неасимптотической области при малой плотности струн.

Напомним, что причиной выбора в качестве наблюдаемых интенсивных переменных p_t^f и p_t^B вместо экстенсивных n_F и n_B являлось желание избавиться от влияния на величину корреляций тривиальных “объемных” флуктуаций, то есть флуктуаций начального числа струн, но сохранить при этом сигнал от физически интересных процессов образования источников нового типа, например струнных кластеров.

Из формул (2.54) и (2.34) для коэффициентов pt-pt- и pt-n-корреляций видно, что этой цели удастся достичь лишь частично, так как зависимость от параметра ω_η , характеризующего флуктуации общего числа струн от события к событию, сохраняется даже в упрощенных выражениях (2.93) и (2.36) для однородного распределения струн в поперечной плоскости. С другой стороны, найденные для произвольного распределения струн в поперечной плоскости выражения (2.54) и (2.34) для коэффициентов pt-pt- и pt-n-корреляций позволяют явно учесть их зависимость от деталей столкновения при сравнении с экспериментальными данными. Это служит одним из обоснований для введения так называемых сильно-интенсивных переменных, изучению которых посвящена Глава 4.

Глава 3. Вычисление асимптотического поведения коэффициентов дальних корреляций для случая фиксированного числа начальных струн

Эта глава основана на результатах, полученных в работах [58; 59].

Ранее при нахождении асимптотик коэффициентов дальних корреляций для неоднородного распределения струн в поперечной плоскости усреднение производилось по всем конфигурациям, что соответствует анализу для `min.bias` событий. Однако в современных экспериментах массив событий разбивают на так называемые классы по множественности и анализ проводится отдельно для каждого класса. Простейшим способом имитировать фиксацию класса в теоретическом анализе коэффициента корреляции является усреднение по таким струнным конфигурациям, в которых фиксировано общее число начальных струн.

Далее мы найдём асимптотики коэффициентов корреляций между множественностями и между поперечным импульсом и множественностью для случая фиксированного общего числа начальных струн и проанализируем, как влияет наложение этого дополнительного условия.

3.1. Корреляции между множественностями заряженных частиц

Ранее [43] была получена асимптотика коэффициента корреляции между множественностями заряженных частиц в двух разнесенных по быстрой окнам для случая неоднородного распределения струн в поперечной плоскости

$$b_{nn}^{rel} = \frac{\mu_F \omega_\eta M}{4\omega_\mu \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8\eta_i}\right) + \mu_F \omega_\eta M}. \quad (3.1)$$

Вычислим коэффициент корреляции между множествами

$$b_{nn} = \frac{\langle n_F n_B \rangle - \langle n_F \rangle \langle n_B \rangle}{\langle n_F^2 \rangle - \langle n_F \rangle^2} \quad (3.2)$$

также для неоднородного распределения струн в поперечной плоскости, но с наложением дополнительного условия, фиксирующего общее число начальных струн.

Для его расчета по формуле (3.2) необходимо найти средние значения наблюдаемых, входящих в это определение с учетом наложенного условия. Это можно сделать, если при усреднении по струнным конфигурациям использовать распределение, в котором фиксировано общее число начальных струн:

$$P(\eta_1 \dots \eta_M) = \sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{N}} \delta(N - \bar{N}) \prod_{j=1}^M \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{\eta}_j}} e^{-\frac{(\eta_j - \bar{\eta}_j)^2}{2\omega_\eta \bar{\eta}_j}}. \quad (3.3)$$

где

$$N \equiv \sum_{j=1}^M \eta_j, \quad \bar{N} \equiv \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j, \quad \omega_\eta = \text{const} \sim 1. \quad (3.4)$$

Среднее число струн в каждой ячейке $\langle \eta_j \rangle$ равно параметру $\bar{\eta}_j$. Параметр распределения ω_η связан с приведенной дисперсией $d(\eta_j)$ числа струн в одной ячейке:

$$d(\eta_j) = \frac{\langle \eta_j^2 \rangle - \langle \eta_j \rangle^2}{\langle \eta_j \rangle} = \omega_\eta \bar{\eta}_j \left(1 - \frac{\bar{\eta}_j}{\bar{N}}\right). \quad (3.5)$$

Отметим, что условие сохранения общего числа струн приводит к возникновению слабых (порядка $1/M$) отрицательных корреляций между числом струн в любых двух ячейках:

$$\frac{\text{cov}(\eta_j, \eta_k)}{\langle \eta_j \rangle \langle \eta_k \rangle} = \frac{\langle \eta_j, \eta_k \rangle - \langle \eta_j \rangle \langle \eta_k \rangle}{\langle \eta_j \rangle \langle \eta_k \rangle} = -\frac{\omega_\eta}{\bar{N}}. \quad (3.6)$$

Среднее значение любой функции, зависящей от чисел струн в ячейках, которые флуктуируют согласно (3.3),

$$\langle X(\eta_1, \dots, \eta_M) \rangle = \int X(\eta_1, \dots, \eta_M) P(\eta_1 \dots \eta_M) d\eta_1 \dots d\eta_M \quad (3.7)$$

удобно представить в следующем виде:

$$\langle X(\eta_1, \dots, \eta_M) \rangle = \int C(\alpha) \langle X(\eta_1, \dots, \eta_M) \rangle_\alpha d\alpha, \quad (3.8)$$

где

$$C(\alpha) = \sqrt{\frac{\omega_\eta \bar{N}}{2\pi}} e^{-\frac{\omega_\eta \bar{N}}{2} \alpha^2}, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \langle X(\eta_1, \dots, \eta_M) \rangle_\alpha &= \int X(\eta_1, \dots, \eta_M) \prod_{j=1}^M \frac{d\eta_j}{\sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{\eta}_j}} e^{-\frac{(\eta_j - \bar{\eta}_j)^2}{2\omega_\eta \bar{\eta}_j} + i\alpha(\eta_j - \bar{\eta}_j) + \frac{\omega_\eta \bar{\eta}_j}{2} \alpha^2} = \\ &= \int X(\bar{\eta}_1 + \nu_1, \dots, \bar{\eta}_M + \nu_M) \prod_{j=1}^M \frac{d\nu_j}{\sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{\eta}_j}} e^{-\frac{\nu_j^2}{2\omega_\eta \bar{\eta}_j} + i\alpha\nu_j + \frac{\omega_\eta \bar{\eta}_j}{2} \alpha^2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для дальнейших вычислений удобно ввести величину

$$\nu_j \equiv \eta_j - \bar{\eta}_j. \quad (3.11)$$

Вычислим средние значения $\langle \nu_k^n \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle_\alpha &= 1, \quad \langle \nu_k^a \nu_j^b \rangle_\alpha = \langle \nu_k^a \rangle_\alpha \langle \nu_j^b \rangle_\alpha, \quad \langle \nu_k \rangle_\alpha = i\alpha\omega_\eta \bar{\eta}_k, \quad \langle \nu_k^2 \rangle_\alpha = \omega_\eta \bar{\eta}_k - \alpha^2 \omega_\eta^2 \bar{\eta}_k^2, \\ \langle \nu_k^3 \rangle_\alpha &= 3i\alpha \bar{\eta}_k^2 \omega_\eta^2 - i\alpha^3 \bar{\eta}_k^3 \omega_\eta^3, \quad \langle \nu_k^4 \rangle_\alpha = \bar{\eta}_k^4 \alpha^4 \omega_\eta^4 - 6\alpha^2 \omega_\eta^3 \bar{\eta}_k^3 + 3\omega_\eta^2 \bar{\eta}_k^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{1}{\omega_\eta \bar{N}}, \quad \langle \alpha^4 \rangle = \frac{3}{\omega_\eta^2 \bar{N}^2}, \quad \langle \alpha^{2n+1} \rangle = 0 \quad (3.13)$$

Подставив (3.13) в (3.12), найдем точные выражения для $\langle \nu_k^n \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle &= 1, \quad \langle \nu_k^{2n+1} \rangle = 0, \\ \langle \nu_k^2 \rangle &= \omega_\eta \bar{\eta}_k - \frac{\omega_\eta \bar{\eta}_k^2}{\bar{N}}, \quad \langle \nu_k \nu_j \rangle = -\frac{\omega_\eta \bar{\eta}_k \bar{\eta}_j}{\bar{N}}, \\ \langle \nu_k^2 \nu_j^2 \rangle &= \omega_\eta^2 \bar{\eta}_k \bar{\eta}_j - \frac{\omega_\eta^2}{\bar{N}} \bar{\eta}_k \bar{\eta}_j (\bar{\eta}_k + \bar{\eta}_j) + \frac{3\bar{\eta}_j^2 \bar{\eta}_k^2 \omega_\eta^2}{\bar{N}^2}, \\ \langle \nu_k^4 \rangle &= 3\omega_\eta^2 \bar{\eta}_k^2 - \frac{6\omega_\eta^2 \bar{\eta}_k^3}{\bar{N}} + \frac{3\bar{\eta}_k^4 \omega_\eta^2}{\bar{N}^2}, \quad \langle \nu_k^3 \nu_j \rangle = -\frac{3\omega_\eta^2 \bar{\eta}_k^2 \bar{\eta}_j}{\bar{N}} + \frac{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k^3 \omega_\eta^2}{\bar{N}^2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Заметим, что

$$\sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \langle \nu_k \nu_j \rangle = \sum_{j=1}^M \langle \nu_j^2 \rangle + \sum_{j \neq k} \langle \nu_k \nu_j \rangle = \sum_{j=1}^M \left(\omega_\eta \bar{\eta}_k - \frac{\omega_\eta \bar{\eta}_k^2}{N} \right) - \sum_{j \neq k} \frac{\omega_\eta \bar{\eta}_k \bar{\eta}_j}{N} = 0. \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \langle n_F \rangle &= \left\langle \langle n_F \rangle_{C_n^F} \right\rangle_{C_n} = \left\langle \mu_F \sum_{j=1}^M \bar{n}(\eta_j) \right\rangle = \left\langle \mu_F \sum_{j=1}^M \sqrt{\eta_j} \right\rangle = \\ &= \mu_F \sum_{j=1}^M \langle \sqrt{\eta_j + \nu_j} \rangle = \mu_F \sum_{j=1}^M \sqrt{\eta_j} \left\langle \sqrt{1 + \frac{\nu_j}{\eta_j}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Разложим корень $\sqrt{1 + \frac{\nu_j}{\eta_j}}$ в ряд по малому параметру $\frac{\nu_j}{\eta_j}$:

$$\begin{aligned} \langle n_F \rangle &\simeq \mu_F \sum_{j=1}^M \sqrt{\eta_j} \left\langle 1 + \frac{1}{2} \frac{\nu_j}{\eta_j} - \frac{1}{8} \frac{\nu_j^2}{\eta_j^2} + \frac{1}{16} \frac{\nu_j^3}{\eta_j^3} - \frac{5}{128} \frac{\nu_j^4}{\eta_j^4} \right\rangle = \\ &= \mu_F \sum_{j=1}^M \sqrt{\eta_j} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\langle \nu_j^2 \rangle}{\eta_j^2} - \frac{5}{128} \frac{\langle \nu_j^4 \rangle}{\eta_j^4} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Используем соотношения (3.14)

$$\langle n_F \rangle = \mu_F \sum_{j=1}^M \sqrt{\eta_j} \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8\bar{\eta}_j} + \frac{\omega_\eta}{8N} + \frac{15\omega_\eta^2}{64N\bar{\eta}_j} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\bar{\eta}_j^2} \right). \quad (3.18)$$

Окончательно для средней множественности в переднем окне

$$\langle n_F \rangle \simeq \mu_F M \left(s_{1/2} \left(1 + \frac{\omega_\eta}{8N} \right) - \frac{\omega_\eta}{8} s_{-1/2} - \frac{15\omega_\eta^2}{128} s_{-3/2} + \frac{15\omega_\eta^2}{64N} s_{-1/2} \right), \quad (3.19)$$

где использовано обозначение, введённое в (2.2).

Аналогично для заднего окна получим

$$\langle n_B \rangle = \mu_B M \left(s_{1/2} \left(1 + \frac{\omega_\eta}{8N} \right) - \frac{\omega_\eta}{8} s_{-1/2} - \frac{15\omega_\eta^2}{128} s_{-3/2} + \frac{15\omega_\eta^2}{64N} s_{-1/2} \right). \quad (3.20)$$

Вычислим среднее значение $\langle n_F n_B \rangle$:

$$\langle n_F n_B \rangle = \left\langle \langle n_F \rangle_{C_n^F} \langle n_B \rangle_{C_n^B} \right\rangle_{C_n} = \left\langle \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \sqrt{\eta_j} \sqrt{\eta_k} \right\rangle =$$

$$= \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \left\langle \sqrt{\bar{\eta}_j + \nu_j} \sqrt{\bar{\eta}_k + \nu_k} \right\rangle. \quad (3.21)$$

Разложим корни $\sqrt{1 + \frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j}}$ в ряд по малому параметру $\frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j}$:

$$\begin{aligned} \langle n_F n_B \rangle &\simeq \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \left\langle \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j} - \frac{1}{8} \frac{\nu_j^2}{\bar{\eta}_j^2} + \frac{1}{16} \frac{\nu_j^3}{\bar{\eta}_j^3} - \frac{5}{128} \frac{\nu_j^4}{\bar{\eta}_j^4} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\nu_k}{\bar{\eta}_k} - \frac{1}{8} \frac{\nu_k^2}{\bar{\eta}_k^2} + \frac{1}{16} \frac{\nu_k^3}{\bar{\eta}_k^3} - \frac{5}{128} \frac{\nu_k^4}{\bar{\eta}_k^4} \right) \right\rangle = \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\langle \nu_j^2 \rangle}{\bar{\eta}_j^2} - \right. \\ &- \frac{5}{128} \frac{\langle \nu_j^4 \rangle}{\bar{\eta}_j^4} + \frac{1}{32} \frac{\langle \nu_j^3 \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_j^3 \bar{\eta}_k} + \frac{1}{4} \frac{\langle \nu_j \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} - \frac{1}{8} \frac{\langle \nu_k^2 \rangle}{\bar{\eta}_k^2} + \\ &\left. + \frac{1}{64} \frac{\langle \nu_j^2 \nu_k^2 \rangle}{\bar{\eta}_j^2 \bar{\eta}_k^2} + \frac{1}{32} \frac{\langle \nu_j \nu_k^3 \rangle}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k^3} - \frac{5}{128} \frac{\langle \nu_k^4 \rangle}{\bar{\eta}_k^4} \right) = \\ &= \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j + \mu_F \mu_B \sum_{j \neq k} \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\langle \nu_j^2 \rangle}{\bar{\eta}_j^2} - \frac{5}{128} \frac{\langle \nu_j^4 \rangle}{\bar{\eta}_j^4} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{32} \frac{\langle \nu_j^3 \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_j^3 \bar{\eta}_k} + \frac{1}{4} \frac{\langle \nu_j \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} - \frac{1}{8} \frac{\langle \nu_k^2 \rangle}{\bar{\eta}_k^2} + \frac{1}{64} \frac{\langle \nu_j^2 \nu_k^2 \rangle}{\bar{\eta}_j^2 \bar{\eta}_k^2} + \frac{1}{32} \frac{\langle \nu_j \nu_k^3 \rangle}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k^3} - \frac{5}{128} \frac{\langle \nu_k^4 \rangle}{\bar{\eta}_k^4} \right). \end{aligned}$$

Окончательно для среднего значения $\langle n_F n_B \rangle$, используя (3.14), получим

$$\begin{aligned} \langle n_F n_B \rangle &= \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j + \mu_F \mu_B \sum_{j \neq k} \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8 \bar{\eta}_j} - \frac{\omega_\eta}{8 \bar{\eta}_k} - \frac{15 \omega_\eta^2}{128 \bar{\eta}_j^2} - \frac{15 \omega_\eta^2}{128 \bar{\eta}_k^2} + \frac{1}{64} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} + \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{N} \bar{\eta}_j} + \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{N} \bar{\eta}_k} \right). \quad (3.22) \end{aligned}$$

Используя (3.19), (3.20), (3.22), вычислим ковариацию $\text{cov}(n_F, n_B)$:

$$\begin{aligned} \langle n_F n_B \rangle - \langle n_F \rangle \langle n_B \rangle &= \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j + \mu_F \mu_B \sum_{j \neq k} \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8 \bar{\eta}_j} - \frac{\omega_\eta}{8 \bar{\eta}_k} - \frac{15 \omega_\eta^2}{128 \bar{\eta}_j^2} - \frac{15 \omega_\eta^2}{128 \bar{\eta}_k^2} + \frac{1}{64} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} + \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{N} \bar{\eta}_j} + \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{N} \bar{\eta}_k} \right) - \\ &- \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j \left(1 - \frac{\omega_\eta}{4 \bar{\eta}_j} + \frac{\omega_\eta}{4 \bar{N}} + \frac{7 \omega_\eta^2}{16 \bar{N} \bar{\eta}_j} - \frac{7 \omega_\eta^2}{32 \bar{\eta}_j^2} \right) - \mu_F \mu_B \sum_{j \neq k} \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8\bar{\eta}_k} - \frac{\omega_\eta}{8\bar{\eta}_j} + \frac{\omega_\eta}{4N} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\bar{\eta}_k^2} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\bar{\eta}_j^2} + \frac{\omega_\eta^2}{64\bar{\eta}_k\bar{\eta}_j} + \frac{7\omega_\eta^2}{32N\bar{\eta}_k} + \frac{7\omega_\eta^2}{32N\bar{\eta}_j} \right) = \\
& = \mu_F\mu_B \sum_{j \neq k} \sqrt{\bar{\eta}_j\bar{\eta}_k} \left(-\frac{\omega_\eta}{4N} - \frac{3\omega_\eta^2}{32N\bar{\eta}_k} - \frac{3\omega_\eta^2}{32N\bar{\eta}_j} \right) + \\
& + \mu_F\mu_B \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j \left(\frac{\omega_\eta}{4\bar{\eta}_j} - \frac{\omega_\eta}{4N} - \frac{7\omega_\eta^2}{16N\bar{\eta}_j} + \frac{7\omega_\eta^2}{32\bar{\eta}_j^2} \right). \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Окончательно для ковариации $\text{cov}(n_F, n_B)$ получим

$$\langle n_F n_B \rangle - \langle n_F \rangle \langle n_B \rangle = \mu_F\mu_B M \left(\frac{\omega_\eta}{4} - \frac{\omega_\eta}{4s_1} s_{1/2}^2 + \frac{7\omega_\eta^2}{32} s_{-1} - \frac{3\omega_\eta^2}{16s_1} s_{1/2} s_{-1/2} \right). \tag{3.24}$$

Вычислим $\langle n_F^2 \rangle$:

$$\langle n_F^2 \rangle = \left\langle \left\langle n_F^2 \right\rangle_{C_n^F} \right\rangle_{C_\eta} = \left\langle \sum_{i=1}^M \overline{n_i^{F^2}} + \sum_{i \neq j} \overline{n_i^F n_j^F} \right\rangle_{C_\eta}. \tag{3.25}$$

Используем (1.9): $\overline{n_i^2} = d_{n_i} + \bar{n}_i^2 = \omega_\mu \bar{n}_i + \bar{n}_i^2$:

$$\begin{aligned}
\langle n_F^2 \rangle & = \left\langle \sum_{i=1}^M \overline{n_i^{F^2}} + \sum_{i \neq j} \overline{n_i^F n_j^F} \right\rangle = \left\langle \omega_\mu \sum_{i=1}^M \overline{n_i^F} + \sum_{i=1}^M \overline{n_i^{F^2}} + \sum_{i \neq j} \overline{n_i^F n_j^F} \right\rangle = \\
& = \left\langle \omega_\mu \mu_F \sum_{i=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_i} + \mu_F^2 \sum_{i=1}^M \eta_i + \mu_F^2 \sum_{i \neq j} \sqrt{\eta_i \eta_j} \right\rangle = \\
& = \omega_\mu \mu_F \sum_{j=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_j} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\langle \nu_j^2 \rangle}{\bar{\eta}_j^2} - \frac{5}{128} \frac{\langle \nu_j^4 \rangle}{\bar{\eta}_j^4} \right) + \mu_F^2 \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j + \mu_F^2 \sum_{j \neq k} \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \left(1 - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{8} \frac{\langle \nu_j^2 \rangle}{\bar{\eta}_j^2} - \frac{5}{128} \frac{\langle \nu_j^4 \rangle}{\bar{\eta}_j^4} + \frac{1}{32} \frac{\langle \nu_j^3 \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_j^3 \bar{\eta}_k} + \frac{1}{4} \frac{\langle \nu_j \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} - \frac{1}{8} \frac{\langle \nu_k^2 \rangle}{\bar{\eta}_k^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{64} \frac{\langle \nu_j^2 \nu_k^2 \rangle}{\bar{\eta}_j^2 \bar{\eta}_k^2} + \frac{1}{32} \frac{\langle \nu_j \nu_k^3 \rangle}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k^3} - \frac{5}{128} \frac{\langle \nu_k^4 \rangle}{\bar{\eta}_k^4} \right) = \\
& = \omega_\mu \mu_F \sum_{j=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_j} \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8\bar{\eta}_j} + \frac{\omega_\eta}{8N} + \frac{15\omega_\eta^2}{64N\bar{\eta}_j} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\bar{\eta}_j^2} \right) + \mu_F^2 \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j + \mu_F^2 \sum_{j \neq k} \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \times
\end{aligned}$$

$$\times \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8\bar{\eta}_j} - \frac{\omega_\eta}{8\bar{\eta}_k} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\bar{\eta}_j^2} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\bar{\eta}_k^2} + \frac{1}{64} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{\eta}_j\bar{\eta}_k} - \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2}{N\bar{\eta}_j} - \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2}{N\bar{\eta}_k} \right) \quad (3.26)$$

Используя (3.26), (3.19), вычислим дисперсию $D(n_F)$:

$$\begin{aligned} \langle n_F^2 \rangle - \langle n_F \rangle^2 &= \omega_\mu \mu_F \sum_{j=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_j} \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8\bar{\eta}_j} + \frac{\omega_\eta}{8N} + \frac{15\omega_\eta^2}{64N\bar{\eta}_j} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\bar{\eta}_j^2} \right) + \mu_F^2 \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j + \\ &+ \mu_F^2 \sum_{j \neq k} \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8\bar{\eta}_j} - \frac{\omega_\eta}{8\bar{\eta}_k} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\bar{\eta}_j^2} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\bar{\eta}_k^2} + \frac{1}{64} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} - \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2}{N\bar{\eta}_j} - \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2}{N\bar{\eta}_k} \right) - \\ &- \mu_F^2 \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j \left(1 - \frac{\omega_\eta}{4\bar{\eta}_j} + \frac{\omega_\eta}{4N} + \frac{7\omega_\eta^2}{16N\bar{\eta}_j} - \frac{7\omega_\eta^2}{32\bar{\eta}_j^2} \right) - \mu_F^2 \sum_{j \neq k} \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8\bar{\eta}_k} - \frac{\omega_\eta}{8\bar{\eta}_j} + \frac{\omega_\eta}{4N} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\bar{\eta}_k^2} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\bar{\eta}_j^2} + \frac{\omega_\eta^2}{64\bar{\eta}_k \bar{\eta}_j} + \frac{7\omega_\eta^2}{32N\bar{\eta}_k} + \frac{7\omega_\eta^2}{32N\bar{\eta}_j} \right) \simeq \\ &\simeq \omega_\mu \mu_F M \left(s_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} s_{-1/2} \right) + \mu_F^2 M \frac{\omega_\eta}{4} \left(1 - \frac{s_{1/2}^2}{s_1} \right) \quad (3.27) \end{aligned}$$

Наконец, используя (3.24), (3.27) и сохраняя главный порядок по $\frac{1}{\eta}$, $\frac{1}{M}$, получим выражение для коэффициента корреляции

$$b_{nn} = \frac{\mu_B \frac{\omega_\eta}{4} \left(1 - \frac{s_{1/2}^2}{s_1} \right)}{\omega_\mu \left(s_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} s_{-1/2} \right) + \mu_F \frac{\omega_\eta}{4} \left(1 - \frac{s_{1/2}^2}{s_1} \right)}. \quad (3.28)$$

Можно показать, что $s_1 - s_{1/2}^2 > 0$, значит коэффициент корреляции положителен. В случае однородного распределения $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}$, $i = 1 \dots M$ выражение в числителе равно нулю, необходимо учесть следующий порядок:

$$b_{nn}^{uniform} = \frac{\mu_B \frac{\omega_\eta^2}{32\bar{\eta}}}{\omega_\mu \left(\bar{\eta}^{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} \bar{\eta}^{-1/2} \right) + \mu_B \frac{\omega_\eta^2}{32\bar{\eta}}}. \quad (3.29)$$

Для однородного распределения также $b_{nn}^{uniform} > 0$.

Коэффициент корреляции b_{nn} убывает с ростом $\bar{\eta}$:

$$b_{nn} \sim \frac{1}{\bar{\eta}^{1/2}}, \quad b_{nn}^{uniform} \sim \frac{1}{\bar{\eta}^{3/2}},$$

причем для случая однородного среднего распределения струн в поперечной плоскости это убывание оказывается более быстрым, чем для неоднородного.

3.2. Корреляции между множественностью и поперечным импульсом

Как и для коэффициента корреляции между множественностями, рассмотрим, как на коэффициент p_t - n -корреляции

$$b_{p_t n} = \frac{\langle p_t^B n_F \rangle - \langle p_t^B \rangle \langle n_F \rangle}{\langle n_F^2 \rangle - \langle n_F \rangle^2} \quad (3.30)$$

влияет условие фиксации общего числа начальных струн.

Вычислим $\langle p_t^B n_F \rangle$:

$$\langle p_t^B n_F \rangle = \left\langle \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i^F} p_i^{jF} \sum_{k=1}^M n_k^F \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^M \left\langle \frac{n_i^B}{\sum_{j=1}^M n_j^B} \right\rangle_{C_n^B} \bar{p}(\eta_i) \sum_{k=1}^M \langle n_k^F \rangle_{C_n^F} \right\rangle_{C_n}. \quad (3.31)$$

В работе [43] было показано, что

$$\left\langle \frac{n_i^B}{\sum_{k=1}^M n_k^B} \right\rangle_{C_n^B} = \frac{\bar{n}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)}, \quad (3.32)$$

тогда

$$\begin{aligned} \langle p_t^B n_F \rangle &= \left\langle \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)} \mu_F \sum_k \bar{n}(\eta_k) \right\rangle = \mu_F \sum_j \langle \bar{n}(\eta_j) \bar{p}(\eta_j) \rangle = \\ &= \mu_{FP_0} \sum_j \langle \eta_j^{3/4} \rangle = \mu_{FP_0} \sum_j \langle (\bar{\eta}_j + \nu_j)^{3/4} \rangle = \mu_{FP_0} \sum_j \bar{\eta}_j^{3/4} \left\langle \left(1 + \frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j} \right)^{3/4} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Разложим $\left(1 + \frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j} \right)^{3/4}$ в ряд по малому параметру $\frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j}$:

$$\begin{aligned} \langle p_t^B n_F \rangle &\simeq \mu_{FP_0} \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j^{3/4} \left\langle 1 + \frac{3}{4} \frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j} - \frac{3}{32} \frac{\nu_j^2}{\bar{\eta}_j^2} + \frac{5}{128} \frac{\nu_j^3}{\bar{\eta}_j^3} - \frac{45}{2048} \frac{\nu_j^4}{\bar{\eta}_j^4} \right\rangle = \\ &= \mu_{FP_0} \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j^{3/4} \left(1 - \frac{3}{32} \frac{\langle \nu_j^2 \rangle}{\bar{\eta}_j^2} - \frac{45}{2048} \frac{\langle \nu_j^4 \rangle}{\bar{\eta}_j^4} \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Используем соотношения (3.14):

$$\langle p_t^B n_F \rangle = \mu_F p_0 \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j^{3/4} \left(1 - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_j} + \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{N}} - \frac{135}{2048} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{\eta}_j^2} + \frac{135}{1024} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{N} \bar{\eta}_j} \right). \quad (3.35)$$

Окончательно для среднего значения $\langle p_t^B n_F \rangle$ получим

$$\langle p_t^B n_F \rangle = \mu_F p_0 M s_{3/4} \left(1 + \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{N}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta s_{-1/4}}{s_{3/4}} - \frac{135}{2048} \frac{\omega_\eta^2 s_{-5/4}}{s_{3/4}} + \frac{135}{1024} \frac{\omega_\eta^2 s_{-1/4}}{\bar{N} s_{3/4}} \right). \quad (3.36)$$

Вычислим $\langle p_t^B \rangle$:

$$\langle p_t^B \rangle = \left\langle \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)} \right\rangle = p_0 \left\langle \frac{\sum_i (\bar{\eta}_i + \nu_i)^{3/4}}{\sum_k (\bar{\eta}_k + \nu_k)^{1/2}} \right\rangle. \quad (3.37)$$

Разложим выражения в числителе и знаменателе в ряд по малому параметру

$\frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j}$:

$$\begin{aligned} \langle p_t^B \rangle &\simeq p_0 \left\langle \frac{\sum_j \bar{\eta}_j^{3/4} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j} - \frac{3}{32} \frac{\nu_j^2}{\bar{\eta}_j^2} \right)}{\sum_k \sqrt{\bar{\eta}_k} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\nu_k}{\bar{\eta}_k} - \frac{1}{8} \frac{\nu_k^2}{\bar{\eta}_k^2} \right)} \right\rangle = \\ &= \frac{p_0}{S_{1/2}} \left\langle \frac{\sum_j \bar{\eta}_j^{3/4} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j} - \frac{3}{32} \frac{\nu_j^2}{\bar{\eta}_j^2} \right)}{1 + \frac{1}{2S_{1/2}} \sum_k \frac{\nu_k}{\bar{\eta}_k^{1/2}} - \frac{1}{8S_{1/2}} \sum_k \frac{\nu_k^2}{\bar{\eta}_k^{3/2}}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Разложим знаменатель в ряд, сохраняя главный порядок:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \frac{1}{2S_{1/2}} \sum_k \frac{\nu_k}{\bar{\eta}_k^{1/2}} - \frac{1}{8S_{1/2}} \sum_k \frac{\nu_k^2}{\bar{\eta}_k^{3/2}}} &\simeq 1 - \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{2S_{1/2}} \frac{\nu_k}{\bar{\eta}_k^{1/2}} - \frac{1}{8S_{1/2}} \frac{\nu_k^2}{\bar{\eta}_k^{3/2}} \right) + \\ &+ \frac{1}{4S_{1/2}^2} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \frac{\nu_j \nu_k}{\bar{\eta}_k^{-1/2} \bar{\eta}_j^{-1/2}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \langle p_t^B \rangle &\simeq \frac{p_0}{S_{1/2}} \left\langle \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j^{3/4} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j} - \frac{3}{32} \frac{\nu_j^2}{\bar{\eta}_j^2} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left(1 - \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{2S_{1/2}} \frac{\nu_k}{\bar{\eta}_k^{1/2}} - \frac{1}{8S_{1/2}} \frac{\nu_k^2}{\bar{\eta}_k^{3/2}} \right) + \frac{1}{4S_{1/2}^2} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \frac{\nu_j \nu_k}{\bar{\eta}_k^{-1/2} \bar{\eta}_j^{-1/2}} \right) \right\rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p_0}{S_{1/2}} \left\langle \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j^{3/4} \left(1 - \frac{3}{32} \frac{\nu_j^2}{\bar{\eta}_j^2} \right) + \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j^{3/4} \left(\frac{1}{8S_{1/2}} \frac{\nu_k^2}{\bar{\eta}_k^{3/2}} - \frac{3}{8S_{1/2}} \frac{\nu_j \nu_k}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k^{1/2}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{S_{3/4}}{4S_{1/2}^2} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \frac{\nu_j \nu_k}{\bar{\eta}_k^{1/2} \bar{\eta}_j} \right\rangle = \\
&= \frac{p_0}{S_{1/2}} \left(S_{3/4} - \frac{3}{32} \omega_\eta S_{-1/4} + \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{N}} S_{3/4} + \sum_k \frac{S_{3/4}}{8S_{1/2}} \frac{\langle \nu_k^2 \rangle}{\bar{\eta}_k^{3/2}} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_k \sum_j \left(\frac{3}{8S_{1/2}} \frac{\langle \nu_j \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_j^{1/4} \bar{\eta}_k^{1/2}} - \frac{S_{3/4}}{4S_{1/2}^2} \frac{\langle \nu_i \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_k^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2}} \right) \right) = \\
&= \frac{p_0}{S_{1/2}} \left(S_{3/4} - \frac{3}{32} \omega_\eta S_{-1/4} + \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{N}} S_{3/4} + \frac{S_{3/4}}{8S_{1/2}} \omega_\eta S_{-1/2} - \frac{S_{3/4} \omega_\eta}{8\bar{N}} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_k \left(\frac{3}{8S_{1/2}} \frac{\langle \nu_k^2 \rangle}{\bar{\eta}_k^{3/4}} - \frac{S_{3/4}}{4S_{1/2}^2} \frac{\langle \nu_k^2 \rangle}{\bar{\eta}_k} \right) - \sum_{k \neq j} \left(\frac{3}{8S_{1/2}} \frac{\langle \nu_j \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_j^{1/4} \bar{\eta}_k^{1/2}} - \frac{S_{3/4}}{4S_{1/2}^2} \frac{\langle \nu_i \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_k^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2}} \right) \right) = \\
&= \frac{p_0}{S_{1/2}} \left(S_{3/4} - \frac{3}{32} \omega_\eta S_{-1/4} + \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{N}} S_{3/4} + \frac{S_{3/4}}{8S_{1/2}} \omega_\eta S_{-1/2} - \frac{S_{3/4} \omega_\eta}{8\bar{N}} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_k \left(\frac{3}{8S_{1/2}} \frac{1}{\bar{\eta}_k^{3/4}} \left(\omega_\eta \bar{\eta}_k - \frac{\omega_\eta \bar{\eta}_k^2}{\bar{N}} \right) - \frac{S_{3/4}}{4S_{1/2}^2} \frac{1}{\bar{\eta}_k} \left(\omega_\eta \bar{\eta}_k - \frac{\omega_\eta \bar{\eta}_k^2}{\bar{N}} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \omega_\eta \sum_{k \neq j} \left(\frac{3}{8S_{1/2}} \frac{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_k}{\bar{N} \bar{\eta}_j^{1/4} \bar{\eta}_k^{1/2}} - \frac{S_{3/4}}{4S_{1/2}^2} \frac{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_k}{\bar{N} \bar{\eta}_k^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2}} \right) \right). \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Окончательно для среднего значения импульса $\langle p_t^B \rangle$ получим

$$\langle p_t^B \rangle = \frac{p_0 s_{3/4}}{s_{1/2}} \left(1 - \frac{3\omega_\eta s_{-1/4}}{32s_{3/4}} + \frac{\omega_\eta s_{-1/2}}{8s_{1/2}} + \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{N}} - \frac{3}{8} \frac{s_{1/4}}{M s_{3/4} s_{1/2}} \omega_\eta + \frac{1}{4M s_{1/2}^2} \omega_\eta \right). \tag{3.41}$$

Используя (3.41), (3.19), (3.36), вычислим ковариацию $\text{cov}(p_t^B, n_F)$:

$$\langle p_t^B \rangle \langle n_F \rangle = \mu_F p_0 M s_{3/4} \left(1 + \frac{\omega_\eta}{8\bar{N}} - \frac{3}{32s_{3/4}} \omega_\eta s_{-1/4} + \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{N}} \right)$$

$$\left. -\frac{3}{8} \frac{s_{1/4}}{M s_{3/4} s_{1/2}} \omega_\eta + \frac{1}{4M s_{1/2}^2} \omega_\eta \right),$$

$$\langle p_t^B n_F \rangle - \langle p_t^B \rangle \langle n_F \rangle = -\mu_F p_0 M s_{3/4} \omega_\eta \left(\frac{1}{8\bar{N}} - \frac{3}{8} \frac{s_{1/4}}{M s_{3/4} s_{1/2}} + \frac{1}{4M s_{1/2}^2} \right) \quad (3.42)$$

Используя (3.42), (3.27), вычислим коэффициент корреляции между поперечным импульсом и множественностью:

$$b_{p_t n} = \frac{p_0 \omega_\eta \left(\frac{3}{8} \frac{s_{1/4}}{s_{1/2}} - \frac{s_{3/4}}{8s_1} - \frac{s_{3/4}}{4s_{1/2}^2} \right)}{\omega_\mu M \left(s_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} s_{-1/2} \right) + \mu_F M \frac{\omega_\eta}{4} \left(1 - \frac{s_{1/2}^2}{s_1} \right)}. \quad (3.43)$$

В случае однородного распределения $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}$, $i = 1 \dots M$ выражение в числителе равно нулю,

$$b_{p_t n}^{uniform} = 0, \quad (3.44)$$

необходимо учесть следующий порядок по $1/\bar{\eta}$.

Учет следующего порядка требует значительных усилий. Для этого в работе [59] нами была разработана специальная альтернативная методика расчета средних величин для распределения (3.3), не требующая введения промежуточного интегрирования (3.8) по α , изложенная в Приложении Г. Используя эту альтернативную методику, в Приложении Г мы еще раз воспроизводим все полученные в этой главе формулы, а также находим следующие выражение для $p_t - n$ коррелятора с точностью до второго порядка по $1/\bar{\eta}$ при фиксированном общем числе струн:

$$\frac{cov(p_B, n_F)}{p_0 \mu_F} = \frac{\langle p_B n_F \rangle - \langle p_t \rangle \langle n \rangle}{p_0 \mu_F} = \frac{\omega_\eta}{4} \left(\frac{3s_{1/4}}{2s_{1/2}} - \frac{s_{3/4}}{s_{1/2}^2} - \frac{s_{3/4}}{2s_1} \right) +$$

$$+ \frac{\omega_\eta^2}{8} \left(\frac{57 s_{-3/4}}{32 s_{1/2}} - \frac{21 s_{-1/4}}{32 s_1} + \frac{3 s_{-1/4}}{16 s_{1/2}^2} - \frac{7 s_{3/4} s_{-1}}{4 s_{1/2}^2} + \frac{3 s_{1/4} s_{-1/2}}{8 s_{1/2}^2} + \frac{M s_{3/4} s_{-1/2}}{s_{1/2}^3} - \frac{s_{3/4} s_{-1/2}}{s_1 s_{1/2}} \right). \quad (3.45)$$

Для однородного среднего распределения струн это дает

$$\frac{cov(p_B, n_F)}{p_0 \mu_F} = -\frac{\omega_\eta^2}{128 \bar{\eta}^{5/4}}. \quad (3.46)$$

То есть коэффициент pt - n корреляций в этом случае оказывается равен

$$b_{p_t n}^{uniform} = -\frac{p_0 \omega_\eta^2}{128 \omega_\mu M \bar{\eta}^{5/4} \left(\bar{\eta}^{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} \bar{\eta}^{-1/2} \right)}. \quad (3.47)$$

Мы видим, что в этом вырожденном однородном случае этот коэффициент, при фиксированном общем числе струн убывает как $1/\eta^{7/4}$ и коэффициент pt - n корреляций оказывается отрицательным.

Используя определение (1.3), перейдем к коэффициенту корреляции $b_{p_t n}^{rel}$ в относительных переменных. При пересчете будем использовать значения для средних в главном порядке: $\langle p_t^B \rangle = p_0 \frac{s_{3/4}}{s_{1/2}}$, $\langle n_F \rangle = \mu_F M s_{1/2}$.

$$b_{p_t n}^{rel} = \frac{\mu_F \omega_\eta \left(\frac{3s_{1/4}s_{1/2}}{2s_{3/4}} - \frac{s_{1/2}^2}{2s_1} - 1 \right)}{4\omega_\mu \left(s_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} s_{-1/2} \right) + \mu_F \omega_\eta \left(1 - \frac{s_{1/2}^2}{s_1} \right)}. \quad (3.48)$$

Оценим знак коэффициента корреляции $b_{p_t n}^{rel}$ при малых неоднородностях $\delta\bar{\eta}_j$ на фоне постоянной плотности струн $\bar{\eta}$:

$$\begin{aligned} s_\gamma &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\bar{\eta} + \delta\bar{\eta}_j)^\gamma \simeq \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \bar{\eta}^\gamma + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \gamma \bar{\eta}^{\gamma-1} \delta\bar{\eta}_j + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \bar{\eta}^{\gamma-2} \delta\bar{\eta}_j^2 = \\ &= \bar{\eta}^\gamma + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2M} \bar{\eta}^{\gamma-2} \sum_{j=1}^M \delta\bar{\eta}_j^2, \end{aligned} \quad (3.49)$$

где мы учли, что при фиксированном числе струн

$$\sum_{j=1}^M \delta\bar{\eta}_j = 0. \quad (3.50)$$

Знак коэффициента корреляции определяется знаком

$$\Phi = 3s_{1/4}s_{1/2}s_1 - s_{1/2}^2s_{3/4} - 2s_1s_{3/4}. \quad (3.51)$$

Подставляя (3.49) в (3.51), получим

$$\Phi = -\frac{1}{8M\bar{\eta}^{1/4}} \sum_{j=1}^M \delta\bar{\eta}_j^2 < 0. \quad (3.52)$$

При малых неоднородностях в распределении струн коэффициент корреляции $b_{p_t n}^{rel}$ будет отрицательным, что согласуется с формулой (3.2) для однородного распределения струн, полученной в Приложение Г при учете втором порядка по $1/\eta$. Это отличается от случая без сохранения общего числа струн, где отрицательные значения этого коэффициента могли быть получены только для случая сильно неоднородных распределений струн в поперечной плоскости, как было показано ранее.

3.3. Корреляции в случае фиксированного общего числа начальных струн в модели без слияния

Зависимость среднего числа частиц, образовавшихся от распада струн в i -ой ячейке, и их поперечного импульса от числа струн в данной ячейке η_i в модели независимых источников имеет следующий вид:

$$\bar{n}(\eta_i) = \eta_i, \bar{p}(\eta_i) = p_0 \eta_i. \quad (3.53)$$

Вычислим средние значения $\langle n_F \rangle$, $\langle n_F n_B \rangle$, $\langle p_t^B n_F \rangle$, $\langle p_t^B \rangle$, в модели без слияния для случая фиксированного общего числа начальных струн.

$$\langle n_F \rangle^{no\ fusion} = \left\langle \mu_F \sum_{j=1}^M \bar{n}(\eta_j) \right\rangle = \left\langle \mu_F \sum_{j=1}^M \eta_j \right\rangle = \mu_F \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j = \mu_F \bar{N}. \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \langle n_F n_B \rangle^{no\ fusion} &= \left\langle \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \eta_j \eta_k \right\rangle = \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \langle (\bar{\eta}_j + \nu_j) (\bar{\eta}_k + \nu_k) \rangle = \\ &= \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M (\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k + \langle \nu_j \nu_k \rangle) = \langle n_F \rangle^{no\ fusion} \langle n_B \rangle^{no\ fusion} + \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \langle \nu_j \nu_k \rangle. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Учитывая (3.15), получим

$$\langle n_F n_B \rangle^{no\ fusion} = \langle n_F \rangle^{no\ fusion} \langle n_B \rangle^{no\ fusion}. \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned}
\langle p_t^B n_F \rangle^{no\ fusion} &= \left\langle \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i^F} p_i^{jF} \sum_{k=1}^M n_k^F \right\rangle = \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^M \left\langle \frac{n_i^B}{\sum_{j=1}^{n_i^B} n_j^B} \right\rangle_{C_n^B} \bar{p}(\eta_i) \sum_{k=1}^M \langle n_k^F \rangle_{C_n^F} \right\rangle_{C_n}. \quad (3.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle p_t^B n_F \rangle^{no\ fusion} &= \left\langle \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)} \mu_F \sum_k \bar{n}(\eta_k) \right\rangle = \mu_F \sum_j \langle \bar{n}(\eta_j) \bar{p}(\eta_j) \rangle = \\
p_0 \mu_F \sum_j \langle \eta_j^2 \rangle &= p_0 \mu_F \sum_j \langle (\bar{\eta}_j + \nu_j)^2 \rangle = p_0 \mu_F \sum_{j=1}^M (\bar{\eta}_j^2 + \langle \nu_j^2 \rangle). \quad (3.58)
\end{aligned}$$

Используя соотношения (3.14), получим

$$\langle p_t^B n_F \rangle^{no\ fusion} = p_0 \mu_F S_2 + p_0 \mu_F \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j \omega_\eta \left(1 - \frac{\bar{\eta}_j}{\bar{N}} \right) = p_0 \mu_F S_2 + p_0 \mu_F \omega_\eta \left(\bar{N} - \frac{S_2}{\bar{N}} \right). \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned}
\langle p_t^B \rangle^{no\ fusion} &= \left\langle \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)} \right\rangle = \int d\eta_1 \dots d\eta_M P(\eta_1 \dots \eta_M) \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)} = \\
&= \frac{p_0 \sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{N}}}{\prod_{j=1}^M \sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{\eta}_j}} \int d\eta_1 \dots d\eta_M \delta(N - \bar{N}) e^{-\sum \frac{(\eta_j - \bar{\eta}_j)^2}{2\omega_\eta \bar{\eta}_j}} \frac{\sum_i \eta_i^2}{\sum_k \eta_k} = \\
&= \frac{p_0 \sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{N}}}{\bar{N} \prod_{j=1}^M \sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{\eta}_j}} \int d\eta_1 \dots d\eta_M \delta(N - \bar{N}) e^{-\sum \frac{(\eta_j - \bar{\eta}_j)^2}{2\omega_\eta \bar{\eta}_j}} \sum_i \eta_i^2 = \\
&= \frac{p_0}{\bar{N}} \sum_i \langle \eta_i^2 \rangle = \frac{1}{\mu_F \bar{N}} \langle p_t^B n_F \rangle^{no\ fusion} = \frac{1}{\langle n_F \rangle^{no\ fusion}} \langle p_t^B n_F \rangle^{no\ fusion}. \quad (3.60)
\end{aligned}$$

Тогда ковариации $\text{cov}(n_F, n_B)$ и $\text{cov}(p_t^B, n_F)$:

$$\langle n_F n_B \rangle^{no\ fusion} - \langle n_F \rangle^{no\ fusion} \langle n_B \rangle^{no\ fusion} = 0 \quad (3.61)$$

$$\langle p_t^B n_F \rangle^{no\ fusion} - \langle p_t^B \rangle^{no\ fusion} \langle n_F \rangle^{no\ fusion} = 0 \quad (3.62)$$

Таким образом, модели без слияния струн при фиксации общего числа начальных струн, как и ожидалось, коэффициенты корреляции b_{nn} и $b_{p_t n}$ равны нулю тождественно. Физически это совершенно понятно, так как распады каждой струны дают некоррелированные вклады в далекие по быстроте окна наблюдения. Полученные результаты для коэффициентов n-n и pt-n корреляции (3.28), (3.48) при фиксированном числе струн (для фиксированного класса по множественности) возникают благодаря эффектам от слияния струн.

3.4. Общие свойства корреляций с участием среднего поперечного импульса при фиксации общего числа струн

В этой главе мы представили разработанный метод аналитического расчета различных средних значений экстенсивных и интенсивных переменных при высоких плотностях струн на поперечной решетке с учетом эффектов слияния струн, приводящих к образованию струнных кластеров. Используя этот метод, мы вычисляем асимптоты коэффициентов дальних корреляций между множественностями, b_{nn} , и между множественностью и средним поперечным импульсом, $b_{p_t n}$, в двух разделенных быстрой интервалах при высокой плотности струн и с фиксацией общего числа начальных струн. Это последнее условие моделирует в нашем подходе фиксацию класса центральности столкновения, что является обычной практикой анализа экспериментальных данных в современных экспериментах на коллайдерах, таких как RHIC, LHC.

В результате мы обнаружили, что фиксация общего количества струн оказывает значительное влияние на поведение о поведении коэффициентов как n-n, так и pt-n корреляции. Мы обнаружили, что уже при малых неоднородностях в распределении струн коэффициент pt-n корреляции становится отрицательным, тогда как без фиксации общего числа струн, как показано в [56;

57], он обычно положительный, становясь отрицательным только для крайне неоднородных распределений струн в плоскости прицельного параметра. Для однородного распределения струн мы показали, что фиксация общего числа начальных струн приводит к более быстрому убыванию коэффициентов корреляции b_{nn} и $b_{p_i n}$ при большой плотности струн, чем в случае без фиксации [38; 39; 44; 45]. При этом коэффициент корреляции $b_{p_i n}$ оказывается отрицательным, тогда как без наложения этого дополнительного условия он всегда положителен для однородного распределения струн.

Глава 4. Использование сильно интенсивной наблюдаемой Σ для изучения образования кластеров кварк-глюонных струн в pp столкновениях при энергиях БАК.

Эта глава основана на результатах, полученных в работе [57] (разделы 2, 3, 4) и работах [60; 61].

4.1. Экстенсивные, интенсивные и сильно интенсивные переменные

В статистической физике используемые величины обычно делят на интенсивные и экстенсивные. К первым относятся давление, температура и тому подобные величины, значение которых остается неизменным при выделении из рассматриваемой системы какой-то ее части. Ко вторым относят объем, энтропию и другие величины, значение которых равно сумме их значений для отдельных частей системы.

При перенесении этих понятий на физику высоких энергий, например, на случай ядро-ядерных столкновений, объем образующейся системы считается пропорциональным суммарному числу нуклонов в сталкивающихся ядрах, принявших участие в процессе взаимодействия. Ясно, что в этом случае объем зависит от прицельного параметра, при котором происходит столкновение ядер. В более общем случае взаимодействия адронов высоких энергий считается, что объем образующейся системы пропорционален числу кварк-глюонных струн N , формирующихся на начальном этапе взаимодействия.

С этой точки зрения число частиц, n , с импульсом принадлежащим некоторой заданной области (в заданном аксептансе), представляет собой пример

экстенсивной величины, так как ее значение будет пропорционально объему образующейся системы. В каждом столкновении адронов значение n будет равно сумме вкладов, $n = n_1 + \dots + n_N$, от каждой из N образующихся струн. Очевидно, что величина n , будет флуктуировать от события к событию вместе с величиной объема образующейся системы (числом образующихся первичных струн), в том числе, из-за неизбежных флуктуаций прицельного параметра.

Однако, для нахождения вклада физически интересных флуктуаций и корреляций, несущих информацию о фундаментальных свойствах образующейся в результате взаимодействия адронов материи, необходимо уметь выделять их вклад на фоне тривиального вклада, возникающего из-за флуктуаций объема образующейся системы. В частности, это означает, что для получения информации о процессах слияния струн и образовании струнных кластеров из анализа флуктуаций и корреляций между различными наблюдаемыми необходимо уметь отделить в экспериментальных данных тривиальный затеняющий вклад этих объемных флуктуаций, возникающих из-за флуктуаций объема области взаимодействия (например, числа образующихся струн) от события к событию, в том числе, по причине принципиально неустраняемых флуктуаций прицельного параметра в реальном эксперименте.

С этой целью в физике высоких энергий, наряду с экстенсивными и интенсивными величинами, вводится понятие о сильно интенсивных (strongly intensive) переменных. Под ними понимаются такие наблюдаемые величины, значение которых не зависит не только от объема образующейся системы, но и от флуктуаций этого объема от события к событию.

Общие методы построения таких наблюдаемых исследовались в работе [62]. В ней, в частности, было показано, что в рамках определенного класса статистических моделей, рассмотренных в работе, величина

$$\Sigma(A, B) \equiv \frac{\langle A \rangle \omega_B + \langle B \rangle \omega_A - 2 \text{cov}(A, B)}{\langle A \rangle + \langle B \rangle}, \quad (4.1)$$

составленная из любых двух экстенсивных величин A и B является сильно интенсивной переменной. В этой формуле $\langle A \rangle$ и $\langle B \rangle$ — средние значения величин A и B , а ω_A и ω_B — их приведенные дисперсии:

$$\omega_A \equiv \frac{D_A}{\langle A \rangle} = \frac{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}{\langle A \rangle}, \omega_B \equiv \frac{D_B}{\langle B \rangle} = \frac{\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2}{\langle B \rangle}. \quad (4.2)$$

В формулу (4.1) входит также коррелятор этих переменных:

$$\text{cov}(A, B) = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle. \quad (4.3)$$

Позднее в работе [63] было предложено при построении переменной Σ по формуле (4.1) использовать в качестве этих экстенсивных переменных A и B значения множественности частиц, n_F и n_B , регистрируемых в данном событии в двух быстройных интервалах, δy_F и δy_B , так называемых окнах наблюдения:

$$\Sigma(n_F, n_B) \equiv \frac{\langle n_F \rangle \omega_{n_B} + \langle n_B \rangle \omega_{n_F} - 2\text{cov}(n_F, n_B)}{\langle n_F \rangle + \langle n_B \rangle}, \quad (4.4)$$

где $\omega_n \equiv D_n / \langle n \rangle = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle}$ — приведенная дисперсия множественности частиц, $\text{cov}(n_F, n_B) = \langle n_F n_B \rangle - \langle n_F \rangle \langle n_B \rangle$.

4.2. Сильноинтенсивная переменная $\Sigma(n_F, n_B)$ в модели со слиянием струн на решётке

В этом параграфе мы получим выражение для сильно интенсивной переменной $\Sigma(n_F, n_B)$ через аналогичные переменные определенные для отдельных струнных кластеров в рамках модели со слиянием струн на решётке для случая равных по ширине симметрично расположенных быстройных окон наблюдения и симметричной реакции:

$$\delta y_F = \delta y_B = \delta y,$$

$$\langle n_F \rangle = \langle n_B \rangle = \langle n \rangle, \quad D_{n_F} = D_{n_B} = D_n, \quad \omega_{n_F} = \omega_{n_B} = \omega_n = \frac{D_n}{\langle n \rangle}. \quad (4.5)$$

Тогда (4.4) может быть переписана в более простом виде:

$$\Sigma(n_F, n_B) = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n_F n_B \rangle}{\langle n \rangle}. \quad (4.6)$$

Введем следующие обозначения для усреднения по всевозможным струнным конфигурациям C_η :

$$P(X) = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) P_{C_\eta}(X), \quad \langle X \rangle = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \langle X \rangle_{C_\eta} \quad (4.7)$$

где $\langle X \rangle_{C_\eta}$ обозначает среднее значение величины X для данной конфигурации C_η . Тогда для средних, входящих в формулу (4.6), мы имеем

$$\langle n_F n_B \rangle = \left\langle \left[\sum_{i=1}^M n_i^F \right] \left[\sum_{k=1}^M n_k^B \right] \right\rangle = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \left[\sum_i \langle n_i^F n_i^B \rangle_{\eta_i} + \sum_{i \neq k} \langle n_i^F \rangle_{\eta_i} \langle n_k^B \rangle_{\eta_k} \right], \quad (4.8)$$

$$\langle n_F^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^M n_i^F \right)^2 \right\rangle = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \left[\sum_i \langle (n_i^F)^2 \rangle_{\eta_i} + \sum_{i \neq k} \langle n_i^F \rangle_{\eta_i} \langle n_k^F \rangle_{\eta_k} \right], \quad (4.9)$$

Если ввести ковариацию между числом частиц n_i^F и n_i^B , рождающихся в переднем и заднем быстройных интервалах от распада струнного кластера из η_i струн в i -той ячейке, и дисперсию числа частиц, рождающихся в данном быстройном интервале от распада струнного кластера из η_i струн в i -той ячейке:

$$\text{cov}_{\eta_i}(n_i^F, n_i^B) \equiv \langle n_i^F n_i^B \rangle_{\eta_i} - \langle n_i^F \rangle_{\eta_i} \langle n_i^B \rangle_{\eta_i}, \quad (4.10)$$

$$d_{\eta_i}(n_i^F) \equiv \langle (n_i^F)^2 \rangle_{\eta_i} - \langle n_i^F \rangle_{\eta_i}^2. \quad (4.11)$$

то выражения для $\langle n_F n_B \rangle$ и $\langle n_F^2 \rangle$ могут быть переписаны в следующем виде:

$$\langle n_F n_B \rangle = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \left[\sum_i \text{cov}_{\eta_i}(n_i^F, n_i^B) + \langle n_F \rangle_{C_\eta} \langle n_B \rangle_{C_\eta} \right], \quad (4.12)$$

$$\langle n_F^2 \rangle = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \left[\sum_i d_{\eta_i}(n_i^F) + \langle n_F \rangle_{C_\eta}^2 \right]. \quad (4.13)$$

где

$$\langle n_F \rangle_{C_\eta} = \sum_i \langle n_i^F \rangle_{\eta_i}, \quad \langle n_F \rangle = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \langle n_F \rangle_{C_\eta}, \quad (4.14)$$

Для симметричного случая мы имеем те же самые выражения и для другого наблюдательного окна, $d_{\eta_i}(n_i^F) = d_{\eta_i}(n_i^B) = d_{\eta_i}(n_i)$ и $\langle n_F \rangle_{C_\eta} = \langle n_B \rangle_{C_\eta} = \langle n \rangle_{C_\eta}$. Тогда, подставляя все полученные выражения в формулу (4.6), мы получаем:

$$\Sigma(n_F, n_B) = \frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \sum_i [d_{\eta_i}(n_i) - \text{cov}_{\eta_i}(n_i^F, n_i^B)]. \quad (4.15)$$

Далее введём переменную $\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B)$ для струнного кластера из η струн в i -той ячейке, которая будет полностью определяться свойствами этого кластера:

$$\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B) \equiv \frac{d_\eta(\mu) - \text{cov}_\eta(\mu_F, \mu_B)}{\langle \mu \rangle_\eta}. \quad (4.16)$$

Здесь μ_F и μ_B это число частиц, рождающихся в переднем и заднем быстротных интервалах от распада струнного кластера из η струн, а

$$\langle \mu_F \rangle_\eta = \langle \mu_B \rangle_\eta \equiv \langle \mu \rangle_\eta, \quad d_\eta(\mu_F) = d_\eta(\mu_B) \equiv d_\eta(\mu) \quad (4.17)$$

— соответствующие средние значения и дисперсии. С помощью (4.16) мы можем записать выражение (4.15) следующим образом:

$$\Sigma(n_F, n_B) = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \sum_{i=1}^M \frac{\langle n_i \rangle_{\eta_i}}{\langle n \rangle} \Sigma_{\eta_i}(n_i^F, n_i^B). \quad (4.18)$$

С физической точки зрения, для классов событий без отбора по центральности столкновения (так называемых, minimum bias events), когда общее число струн не фиксируется, в первом приближении разумно предположить, что флуктуации числа струн, попадающих в каждую ячейку решетки, независимы,

$$P(C_\eta) = \prod_{k=1}^M P_k(\eta_k), \quad (4.19)$$

и суммирование по струнным конфигурациям представляется в виде M -кратной суммы

$$\sum_{C_\eta} P(C_\eta) \dots = \prod_{k=1}^M \sum_{\eta_k=0}^{\infty} P_k(\eta_k) \dots \quad (4.20)$$

После подстановки (4.20) в формулу (4.18) результат сводится к двукратной сумме

$$\Sigma(n_F, n_B) = \sum_{i=1}^M \sum_{\eta_i=1}^{\infty} P_i(\eta_i) \frac{\langle n_i \rangle_{\eta_i}}{\langle n \rangle} \Sigma_{\eta_i}(n_i^F, n_i^B), \quad (4.21)$$

так как в (4.18) каждое слагаемое зависит только от одного η_i и имеет место нормировочное условие

$$\sum_{\eta_k=0}^{\infty} P_k(\eta_k) = 1. \quad (4.22)$$

В (4.21) мы также учли, что вклад слагаемых с $\eta_i = 0$, соответствующих отсутствию струн в i -той ячейке сетки, зануляется.

Переменные $\langle n_i \rangle_{\eta_i}$ и $\Sigma_{\eta_i}(n_i^F, n_i^B)$ в (4.21) зависят лишь от числа струн η_i в i -той ячейке сетки. Поэтому, переставляя порядок суммирования, формулу (4.21) можно записать в следующем виде:

$$\Sigma(n_F, n_B) = \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{\langle \mu \rangle_{\eta}}{\langle n \rangle} \Sigma_{\eta}(\mu_F, \mu_B) \sum_{i=1}^M P_i(\eta). \quad (4.23)$$

Рассмотрим среднее число частиц, образующихся от распада всех кластеров, состоящих из η струн каждый

$$\langle n \rangle_{\eta} = \langle m \rangle_{\eta} \langle \mu \rangle_{\eta}, \quad (4.24)$$

где $\langle m \rangle_{\eta}$ среднее число кластеров, составленных ровно из η струн. Для случая с неравномерным распределением струн в поперечной плоскости, когда $P_i(\eta) \neq P_k(\eta)$ и $\bar{\eta}_i \neq \bar{\eta}_k$

$$\langle m \rangle_{\eta} = \sum_{C_{\eta}} P(C_{\eta}) \sum_{i=1}^M \delta_{\eta_i \eta} = \sum_{i=1}^M P_i(\eta). \quad (4.25)$$

Учитывая (4.24), (4.25), выражение (4.23) можно переписать в виде

$$\Sigma(n_F, n_B) = \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{\langle n \rangle_{\eta}}{\langle n \rangle} \Sigma_{\eta}(\mu_F, \mu_B). \quad (4.26)$$

Заметим, что в силу нормировочного условия (4.22)

$$\sum_{\eta=0}^{\infty} \langle m \rangle_{\eta} = M \quad (4.27)$$

и

$$\sum_{\eta=1}^{\infty} \langle n \rangle_{\eta} = \sum_{\eta=1}^{\infty} \langle m \rangle_{\eta} \langle \mu \rangle_{\eta} = \sum_{i=1}^M \sum_{\eta=1}^{\infty} P_i(\eta) \langle \mu \rangle_{\eta} = \sum_{i=1}^M \langle n_i \rangle = \langle n \rangle . \quad (4.28)$$

Это означает, что можно ввести весовые множители

$$\alpha(\eta) \equiv \langle n \rangle_{\eta} / \langle n \rangle , \quad (4.29)$$

такие, что

$$\sum_{\eta=1}^{\infty} \langle n \rangle_{\eta} / \langle n \rangle = \sum_{\eta=1}^{\infty} \alpha(\eta) = 1 , \quad (4.30)$$

и переписать формулу (4.26) следующим образом

$$\Sigma(n_F, n_B) = \sum_{\eta=1}^{\infty} \alpha(\eta) \Sigma_{\eta}(\mu_F, \mu_B) . \quad (4.31)$$

Физический смысл этих весовых коэффициентов $\alpha(\eta)$ очень нагляден, это средняя доля частиц, образующихся от распада всех кластеров, образованных слиянием ровно η струн каждый, по отношению к общему среднему числу частиц, образующихся в событии.

4.3. Связь переменной Σ с двухчастичной (парной) корреляционной функцией Λ

В рамках модели со слиянием струн на поперечной решетке [38; 39] предполагается, что все η струн, которые оказались в данной ячейке сетки, сливаются, образуя единый кластер — новый объект — слившуюся струну с измененными физическими характеристиками. Подобно тому, как это делается для обычной струны [64], мы будем характеризовать свойства этой новой струны через одночастичную и двухчастичную функции распределения частиц (адронов), образующихся при фрагментации такой струны:

$$\lambda_{\eta}(y) = \frac{dN}{dy}, \quad \lambda_2^{\eta}(y_1, y_2) = \frac{d^2 N}{dy_1 dy_2}. \quad (4.32)$$

Проинтегрированные по соответствующим быстротным интервалам эти функции дают [64]:

$$\int_{\delta y_F} dy \lambda_\eta(y) = \langle \mu_F \rangle_\eta, \quad \int_{\delta y_B} dy \lambda_\eta(y) = \langle \mu_B \rangle_\eta, \quad (4.33)$$

$$\int_{\delta \eta_F} dy_1 \int_{\delta \eta_B} dy_2 \lambda_2^\eta(y_1, y_2) = \langle \mu_F \mu_B \rangle_\eta, \quad \int_{\delta \eta_F} dy_1 \int_{\delta \eta_F} dy_2 \lambda_2^\eta(y_1, y_2) = \langle \mu_F (\mu_F - 1) \rangle_\eta.$$

где μ_F и μ_B число частиц от распада такой струны в переднем, δy_F , и заднем, δy_B , быстротных окнах наблюдения.

Через эти функции распределения стандартным образом [64] определяется двухчастичная (парная) корреляционная функция

$$\Lambda_\eta(y_1, y_2) \equiv \frac{\lambda_2^\eta(y_1, y_2)}{\lambda_\eta(y_1)\lambda_\eta(y_2)} - 1, \quad (4.34)$$

характеризующая корреляции между частицами, образующимися от распада данной струны. Для рассматриваемого симметричного случая (4.17), используя выражения (4.33) и определение (4.16), можно получить следующее выражение переменной $\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B)$ для струнного кластера из η струн, через корреляционную функцию (4.34):

$$\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B) = 1 + \langle \mu \rangle_\eta [J_{FF}^\eta - J_{FB}^\eta], \quad (4.35)$$

где

$$J_{FB}^\eta \equiv \frac{1}{\langle \mu_F \rangle_\eta \langle \mu_B \rangle_\eta} \int_{\delta y_F} dy_1 \int_{\delta y_B} dy_2 \lambda_\eta(y_1) \lambda_\eta(y_2) \Lambda_\eta(y_1, y_2), \quad (4.36)$$

$$J_{FF}^\eta \equiv \frac{1}{\langle \mu_F \rangle_\eta^2} \int_{\delta y_F} dy_1 \int_{\delta y_F} dy_2 \lambda_\eta(y_1) \lambda_\eta(y_2) \Lambda_\eta(y_1, y_2). \quad (4.37)$$

Мы видим, что значение переменной $\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B)$ полностью определяются свойствами данного кластера из η струн — его одночастичной $\lambda_\eta(y)$ и двухчастичной функциями распределения $\lambda_2^\eta(y_1, y_2)$.

Если окна наблюдения δy_F и δy_B выбраны в центральной области быстрот так, что все образующиеся струны дают вклад сразу в оба этих быстротных

интервала, то, в силу локальности сильного взаимодействия в пространстве быстрот и вытекающей из нее однородности распределения частиц от фрагментации струны по быстроте, имеет место трансляционная инвариантность по быстроте. Это приближение хорошо работает при энергиях БАК, когда формирующиеся струны дают вклад в достаточно широкий интервал быстроты. В этом приближении одночастичные распределения постоянны, а двухчастичные зависят только от разности быстрот, образующихся частиц:

$$\lambda_\eta(y) = \langle \mu \rangle_\eta / \delta y = \mu_0^{(\eta)}, \quad \lambda_2^\eta(y_1, y_2) = \lambda_2^\eta(y_1 - y_2), \quad (4.38)$$

где $\mu_0^{(\eta)}$ — среднее число частиц рождающихся на единицу быстроты от распада этого струнного кластера, и определение парной корреляционной функции (4.34) принимает вид

$$\Lambda_\eta(y_1 - y_2) = \lambda_2^\eta(y_1 - y_2) / (\mu_0^{(\eta)})^2 - 1. \quad (4.39)$$

В этом случае выражения для J_{FB}^η и J_{FF}^η , входящие в выражение (4.35) для $\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B)$ упрощаются:

$$J_{FB}^\eta = \frac{1}{\delta y_F \delta y_B} \int_{\delta y_F} dy_1 \int_{\delta y_B} dy_2 \Lambda_\eta(y_1 - y_2) \approx \Lambda_\eta(\Delta y), \quad (4.40)$$

$$J_{FF}^\eta = \frac{1}{\delta y_F^2} \int_{\delta y_F} dy_1 \int_{\delta y_F} dy_2 \Lambda_\eta(y_1 - y_2) \approx \Lambda_\eta(0). \quad (4.41)$$

Последние переходы верны для малых быстротных окон наблюдения, когда $\delta y_F = \delta y_B \equiv \delta y \ll y_{corr}$, где $y_{corr} \simeq 1 \div 2$ - характерная длина корреляции в пространстве быстрот. Δy в формуле (4.40) — расстояние по быстроте между центрами этих малых окон наблюдения δy_F и δy_B .

Выражение (4.35) для $\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B)$ в этом простом случае принимает вид

$$\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B) = 1 + \mu_0^{(\eta)} \delta y [\Lambda_\eta(0) - \Lambda_\eta(\Delta y)]. \quad (4.42)$$

Эта упрощенная формула позволяет понять основные черты зависимости сильноинтенсивной переменной $\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B)$ для данного кластера из η струн от

ширины δy окон наблюдения и расстояния Δy по быстроте между ними. При малом расстоянии между окнами наблюдения $\Delta y \ll y_{corr}$, $\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B) \rightarrow 1$. С ростом Δy значение $\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B)$ возрастает, выходя на уровень $1 + \mu_0 \delta y \Lambda_\eta(0)$, т.к. $\Lambda_\eta(\Delta y) \rightarrow 0$ при $\Delta y \gg y_{corr}$. При этом скорость выхода на этот уровень и его величина пропорциональны ширине окон наблюдения δy .

4.4. Расчет переменной $\Sigma(n_F, n_B)$ на решетке методом Монте-Карло

Расчеты величины $\Sigma(n_F, n_B)$ для pp столкновений при энергиях БАК проводились на основе формулы (4.31). Сильноинтенсивные переменные для отдельных типов кластеров Σ_η вычислялись аналитически в рамках предположений теории слияния струн (см. формулы (4.56)- (4.63)).

Расчет весовых коэффициентов $\alpha(\eta)$ (4.29), входящих в эту формулу и определяющих соотношение вкладов кластеров с различным числом слившихся струн, которое зависит, от конкретных деталей pp столкновения, к сожалению, выполнить аналитически пока не удастся. Поэтому в этой части мы осуществили монте-карловское (МК) моделирование распределения струн в поперечной плоскости с учетом начальной энергии и степени центральности столкновения. Мы также использовали приведенные ниже аналитические результаты для полного недифракционного сечению pp рассеяния, полученные в рамках данной модели, для контроля разработанных МК кодов (см. Рис.4.1). Отметим, что при этом сравнении на Рис.4.1 необходимо иметь ввиду, что довольно трудно оценить погрешность недифракционного (ND) сечения, т.к. для этого из хорошо известного, так называемого, NSD (Non Single Diffractive) сечения надо еще вычесть плохо известное DD (Double Diffractive) сечение [65—69].

Расчет весовых коэффициентов $\alpha(\eta)$ в настоящей работе проводился в два этапа. Сначала нами проводилось моделирование распределения первичных струн в поперечной плоскости с учетом реальных условий pp столкновения,

согласно методике предложенной в работе [36]. На втором этапе мы моделировали процесс слияния первичных струн и образования струнных кластеров, вводя конечную решетку (грид) в плоскости прицельного параметра.

Важно, что для учета процессов наложения струн и образования струнных кластеров мы должны уметь на первом этапе моделировать не только общее количество первичных струн, образующихся при данной начальной энергии и заданном прицельном параметре b столкновения, но и их распределение в поперечной плоскости.

В нашем подходе каждый разрезанный померон соответствует образованию двух кварк-глюонных струн [10]. Для учета слияния струн необходимо знать не только среднее число померонов в pp -столкновениях при заданном прицельном параметре b , но и распределение числа померонов вокруг этого среднего значения. Это распределение при данном значении прицельного параметра b и $N \geq 1$ было выбрано в следующем виде:

$$\tilde{P}(N, b) = P(N, b) / [1 - P(0, b)], \quad (4.43)$$

где $P(N, b)$ является пуассоновским распределением с некоторым параметром $\bar{N}(b)$:

$$P(N, b) = e^{-\bar{N}(b)} \bar{N}(b)^N / N! . \quad (4.44)$$

Отличие распределения (4.43) от пуассоновского (4.44) заключается лишь в исключении из него случая $N = 0$: $\tilde{P}(0, b) = 0$, что соответствует отсутствию неупругого рассеяния.

Согласно [36], мы предполагаем, что в случае протон-протоновых столкновений при прицельном параметре b плотность распределения струн в поперечной плоскости в точке \vec{s} пропорциональна

$$w_{str}(\vec{s}, \vec{b}) \sim \frac{1}{\sigma_{pp}(b)} T(\vec{s} - \vec{b}/2) T(\vec{s} + \vec{b}/2) , \quad (4.45)$$

где $T(\vec{s})$ — профильная функция протона. Мы будем использовать простейшее

гауссово распределение:

$$T(s) = \frac{e^{-s^2/r_0^2}}{\pi r_0^2}. \quad (4.46)$$

Подставляя (4.46) в (4.45), получаем

$$w_{str}(\vec{s}, \vec{b}) \sim \frac{1}{\sigma_{pp}(b)} e^{-2s^2/r_0^2} e^{-b^2/2r_0^2}. \quad (4.47)$$

Одновременно $\bar{N}(b) = N_0 e^{-b^2/2r_0^2}$, где параметр N_0 зависит от начальной энергии.

Как было показано в [36], в рамках этих предположений среднее число померонов $\langle N_{pom}(E) \rangle$, приведенная дисперсия числа померонов $\omega_{N_{pom}}(E)$, поперечное сечение недифракционного рр-взаимодействия σ_{pp} и вероятность $P(N)$ иметь N разрезанных померонов в недифракционном рр-столкновении имеют следующую форму:

$$\langle N_{pom}(E) \rangle = \frac{N_0}{E_1(N_0) + \gamma + \ln N_0}, \quad E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad (4.48)$$

$$\omega_{N_{pom}}(E) = 1 + \frac{N_0}{2} - \langle N \rangle_{pom}(E), \quad (4.49)$$

$$\sigma_{pp} = 2\pi r_0^2 [E_1(N_0) + \gamma + \ln N_0], \quad (4.50)$$

$$P(N) = \frac{2\pi r_0^2}{\sigma_{pp} N} \left[1 - e^{-N_0} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{N_0^l}{l!} \right]. \quad (4.51)$$

Формула (4.51), полученная в рамках изложенного в этом разделе подхода, совпадает с хорошо известными результатами для $P(N)$, полученными в рамках квази-эйконального реджевского подхода [70; 71] :

$$P(N) = \frac{4\pi\lambda}{\sigma_{pp} C N} \left[1 - e^{-z} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{z^k}{k!} \right], \quad (4.52)$$

где

$$z = \frac{2\gamma C}{\lambda} \exp(\Delta\xi), \quad \lambda = R^2 + \alpha'\xi, \quad \xi = \ln(s/s_0). \quad (4.53)$$

Здесь $s_0 \simeq 1 \text{ GeV}^2$, а Δ и α' это интерсепт и наклон померонной траектории. Параметры γ и R описывают вершину присоединения померона к рассеивающимся адронам. Квази-эйкональный параметр C эффективно учитывает вклад в эту вершину дифракционных процессов.

Совпадение формул (4.51) и (4.52) позволяет фиксировать параметры N_0 и r_0 , используемые в нашем подходе, поскольку они однозначно выражаются через известные реджевские параметры:

$$N_0 = z = \frac{2\gamma C}{\lambda} \exp(\Delta\xi), \quad r_0 = \sqrt{\frac{2\lambda}{C}}, \quad \lambda = R^2 + \alpha'\xi \quad (4.54)$$

В наших расчетах при моделировании распределения струн в плоскости прицельного параметра мы использовали следующие значения этих параметров:

$$\Delta = 0.2, \quad \alpha' = 0.05 \text{ GeV}^{-2}, \quad (4.55)$$

$$\gamma_{pp} = 1.035 \text{ GeV}^{-2}, \quad R_{pp}^2 = 3.3 \text{ GeV}^{-2}, \quad C = 1.5,$$

которые позволяют описать поведение недифракционного сечения pp рассеяния при энергиях БАК [69; 72] (см. рис.4.1). Работы других авторов [69; 72] также подтверждают необходимость увеличения параметра Δ для описания данных при энергиях БАК.

На втором этапе мы моделировали процесс слияния первичных струн и образования струнных кластеров, вводя конечную решетку (грид) в плоскости прицельного параметра. В этих расчетах мы предполагали, что, согласно модели слияния струн, зависимость среднего числа частиц, образующихся при адронизации слившихся струн в ячейке, от числа струн в быстрой окне наблюдения шириной δy имеет следующий вид:

$$\langle \mu \rangle_\eta = \mu_0^{(\eta)} \delta y = \mu_0 \sqrt{\eta} \delta y \quad (4.56)$$

где $\mu_0^{(\eta)}$ и $\mu_0^{(1)} \equiv \mu_0$ — среднее число частиц, рождающихся на единицу быстроты, от распада струнного кластера из η струн и одиночной струны.

Для радиуса струны было выбрано следующее численное значение:

$$r_{str} = 0.2 \text{ fm}. \quad (4.57)$$

Как в работе [73] предполагаем, что число частиц, рожденных при адронизаций струн в i -й ячейке в быстротном окне наблюдения шириной δy , распределено по отрицательному биномиальному распределению (NBD) со средним значением (4.56) и приведенной дисперсией:

$$\omega_\mu(\delta y, \eta) = 1 + \delta y \mu_0^{(\eta)} J_{FF}^\eta, \quad (4.58)$$

где

$$J_{FF}^\eta = \frac{1}{(\delta y_F)^2} \int_{\delta y_F} dy_1 \int_{\delta y_F} dy_2 \Lambda_\eta(y_1 - y_2) \quad (4.59)$$

и $\Lambda_\eta(\Delta y)$ — двухчастичная (парная) корреляционная функция, которая была выбрана в простейшем виде

$$\Lambda_\eta(\Delta y) = \Lambda_0^\eta e^{-\frac{|\Delta y|}{y_{corr}^{(\eta)}}}, \quad (4.60)$$

$y_{corr}^{(\eta)}$ — характерная длина корреляции в пространстве быстрот.

Поскольку, согласно (4.56), число заряженных частиц рождающихся на единицу быстроты от распада струнного кластера предполагается пропорциональным $\sqrt{\eta}$, и корреляции имеют место только между соседними сегментами струнного кластера, разумно предположить, что характерная длина корреляции $y_{corr}^{(\eta)}$ уменьшается с увеличением η как $1/\sqrt{\eta}$. Некоторые дополнительные аргументы в пользу этого предположения были представлены в [74]. Поэтому мы предположим следующую зависимость параметров корреляционной функции струнного кластера от η :

$$y_{corr}^{(\eta)} = \frac{y^{(1)}}{\sqrt{\eta}}, \quad \Lambda_0^{(\eta)} = const. \quad (4.61)$$

Отметим, что варианту без учета слияния струн отвечает совсем другой вид этих зависимостей:

$$\tilde{\mu}_0^{(\eta)} = \eta \mu_0^{(1)}, \quad \tilde{y}_{corr}^{(\eta)} = const, \quad \tilde{\Lambda}_0^{(\eta)} = \Lambda_0^{(1)}/\eta. \quad (4.62)$$

Корреляционная функция была выбрана самым простым способом (4.60), и в этом случае интеграл J_{FF}^η может быть вычислен явно:

$$J_{FF}^\eta = \frac{2\Lambda_0^\eta}{(\delta y)^2} y_{corr}^{(\eta)} \left(\delta y - y_{corr}^{(\eta)} \left(1 - e^{-\frac{\delta y}{y_{corr}^{(\eta)}}} \right) \right). \quad (4.63)$$

Кратко опишем алгоритм генерации событий pp-столкновений в рамках описанных выше предположений:

1. генерируется значение прицельного параметра b : b_x и b_y генерируются независимо с равномерным распределением в интервале $(-3R_p, 3R_p)$, $R_p = 0.7$ фм, $b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$;
2. для заданной энергии $\sqrt{s} = E$ рассчитываются параметры померона (4.54);
3. для заданной энергии рассчитываются параметры решетки: постоянная решетки $a = R_{str} \sqrt{\pi}$, размер решетки $L = 10\sigma$, число ячеек $M = m^2$, $m = [L/a] + 1$, где r_{str} — радиус струны (4.57), $\sigma = \alpha/2$ — параметр гауссова распределения плотности струн (4.47), квадратные скобки $[x]$ означают целую часть x ;
4. для заданной энергии рассчитывается среднее число померонов $\langle N_{pom}(b) \rangle$ (4.48) ;
5. N_{pom} генерируется с помощью пуассоновского распределения (4.44). Если оказывается, что $N_{pom} = 0$, то мы возвращаемся к пункту 1. Заметим, что мы сохраняем число симуляций N_{sim}^0 , для которых $N_{pom} = 0$, что необходимо для вычисления $\sigma_{statistical}^{ND} = \frac{N_{sim} - N_{sim}^0}{N_{sim}} 36R_p^2$, где N_{sim} полное число симуляций (рис.4.1) ;
6. число струн = 2 * число померонов;
7. генерируется положение каждой струны \vec{s} , затем вычисляется номер ячейки, в которую попадает каждая струна;

8. вычисляется число струн в каждой ячейке;
9. число частиц n в быстротном наблюдательном окне δy рожденных при адронизации струн в каждой ячейке, генерируется с помощью отрицательного биномиального распределения: $NB\left(\frac{\bar{n}}{\omega_\mu - 1}, p = \frac{1}{\omega_\mu}\right)$ для обеспечения нужного значения среднего (4.56) и приведенной дисперсии (4.58).

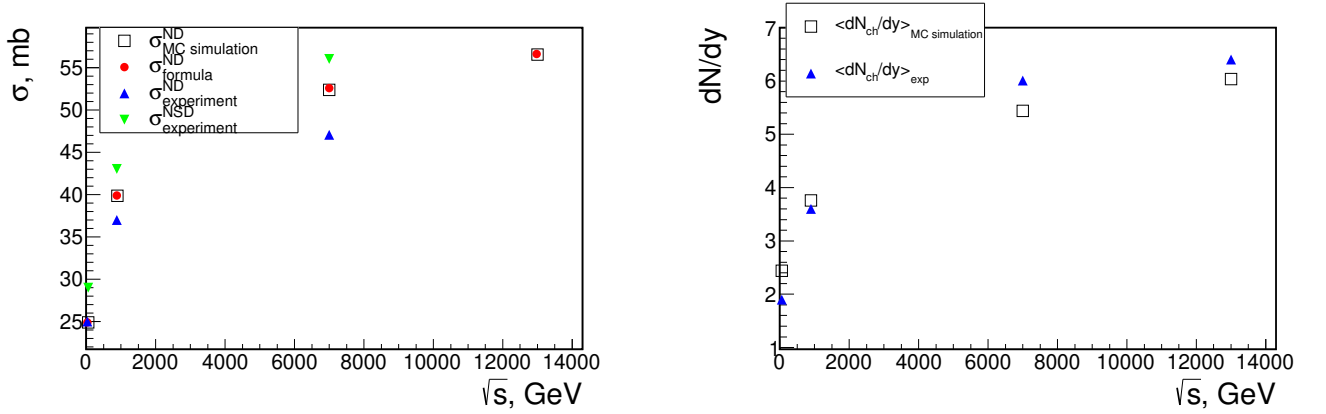


Рис. 4.1. Сечение недифракционного pp взаимодействия σ_{pp} и множественность $\langle dN_{ch}/dy \rangle$ как функции энергии \sqrt{s} . $\sigma_{statistical}^{ND}$ и $\langle dN_{ch}/dy \rangle_{statistical}$ вычислялись по данным, полученным в соответствии с описанным ранее алгоритмом; $\sigma_{formula}^{ND}$ вычислялось по формуле (4.50); σ_{exp}^{ND} и $\langle dN_{ch}/dy \rangle_{exp}$ экспериментальные данные из [65–68].

Значение параметра μ_0 (среднее число заряженных частиц на единицу быстроты от распада одиночной струны) необходимо было выбрать равным 0.7 для правильного описания экспериментальной множественности заряженных частиц в центральной области быстрот (см.Рис.4.1). Для фиксации двух оставшихся свободных параметров модели $\Lambda_0^{(1)}$ и $y_{corr}^{(1)}$, характеризующих корреляционную функцию одиночной струны (4.60), мы вычислили зависимость переменной $\Sigma(n_F, n_B)$ от размера зазора Δy между окнами наблюдения малой ширины по быстроте ($\delta y = 0.2$) для pp -столкновений без отбора по центральности столкновения (min.bias) при двух начальных энергиях, 0,9 и 7 ТэВ, и сравнили результаты расчета с предварительными экспериментальными данными коллаборации ALICE для $\Sigma(n_F, n_B)$ [75], полученными путем анализа

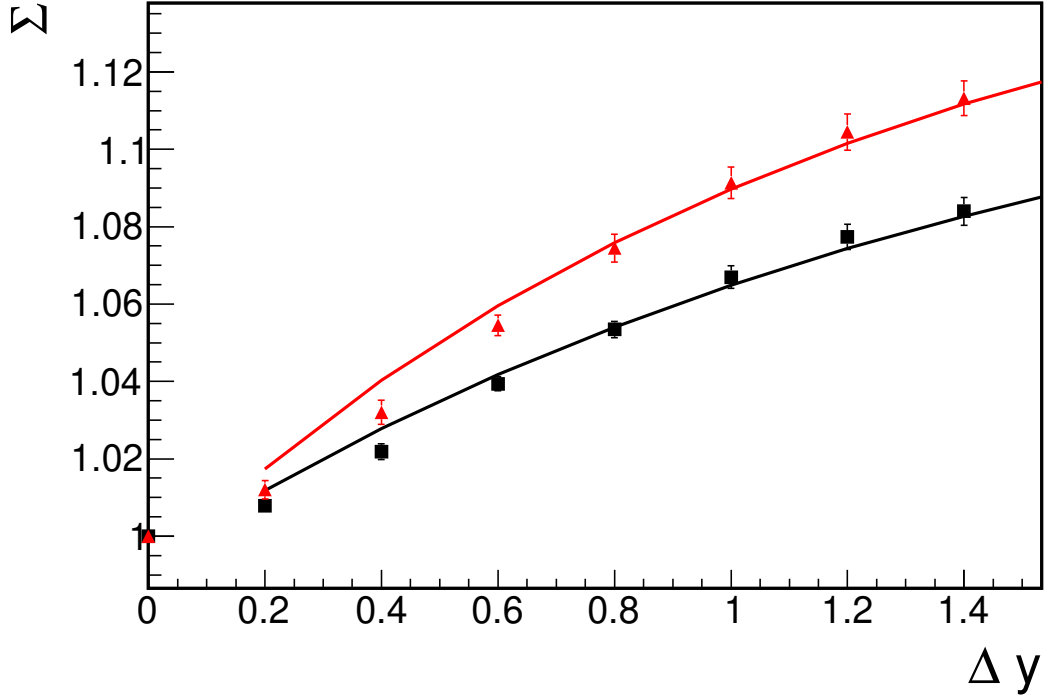


Рис. 4.2. Сильноинтенсивная переменная $\Sigma(n_F, n_B)$ как функция расстояния по быстрой между центрами окон Δy , для окон шириной $\delta y = 0, 2$, для minimum bias pp-столкновений для двух значений начальной энергии 0,9 ТэВ (нижняя кривая) и 7 ТэВ (верхняя кривая). Точки — экспериментальные значения, полученные коллаборацией ALICE [75] путем анализа данных о выходах заряженных частиц с поперечными импульсами, принадлежащими интервалу 0,3-1,5 ГэВ/с при pp-столкновениях при тех же энергиях - 0,9 ТэВ (■) и 7 ТэВ(▲).

образования заряженных частиц в мягкой области спектра с поперечными импульсами в диапазоне 0,3 - 1,5 ГэВ/с (рис. 4.2).

Это сравнение позволило извлечь значения этих двух оставшихся свободных параметров, характеризующих корреляционную функцию одиночной струны (4.60). В результате, для трех параметров для одной струны в зависимостях (4.56) и (4.61), характеризующих кластеры с разным количеством слившихся струн, мы нашли:

$$\mu_0 = 0.7, \quad y_{corr}^{(1)} = 2.7, \quad \Lambda_0^{(1)} = 0.8. \quad (4.64)$$

4.5. Сравнение с результатами эксперимента ALICE на Большом Адронном Коллайдере

Σ в minbias pp столкновениях

Используя MC-моделирование pp-столкновений, как описано в предыдущем разделе, мы последовательно генерируем распределения струн в поперечной плоскости, учитываем образование струнных кластеров и вычисляем весовые коэффициенты $\alpha(\eta)$ как среднюю долю частиц, образовавшихся в результате распадов кластеров, состоящих из η струн. Затем мы вычисляем $\Sigma(n_F, n_B)$, используя формулу (4.31).

С параметрами кластеров струн, зафиксированными как описано выше, мы вычислили переменную $\Sigma(n_F, n_B)$ для pp-столкновений min.bias при начальной энергии 13 ТэВ и сравнили результаты модели с экспериментальными данными ALICE [75]. Анализ этих данных при 13 ТэВ в эксперименте ALICE был проведен для более широкого диапазона поперечных импульсов 0,2 - 2 ГэВ/с, который в настоящее время используется в коллаборации ALICE при анализе образования заряженных частиц в мягкой области спектра, поэтому, чтобы учесть увеличение общей множественности частиц, коэффициент μ_0 был увеличен в соответствии с [76] в 1,28 раза до $\mu_0 = 0,9$. При этом были сохранены значения всех остальных параметров модели.

На рис.4.3 мы видим, что этот набор параметров также успешно описывает зависимость наблюдаемой $\Sigma(n_F, n_B)$ от расстояния по быстрой между центрами окон, Δy , при начальной энергии 13 ТэВ. Небольшое завышение $\Sigma(n_F, n_B)$ на рис.4.2 и 4.3 при малых значениях Δy может быть объяснено использованием упрощенного экспоненциального приближения для двухчастичной корреляционной функции струнного кластера (4.60). В [73] было показано, что экспоненциальная форма аппроксимации для быстрой зависимости двухчастичной корреляционной функции струны приводит к небольшому завышению коэффи-

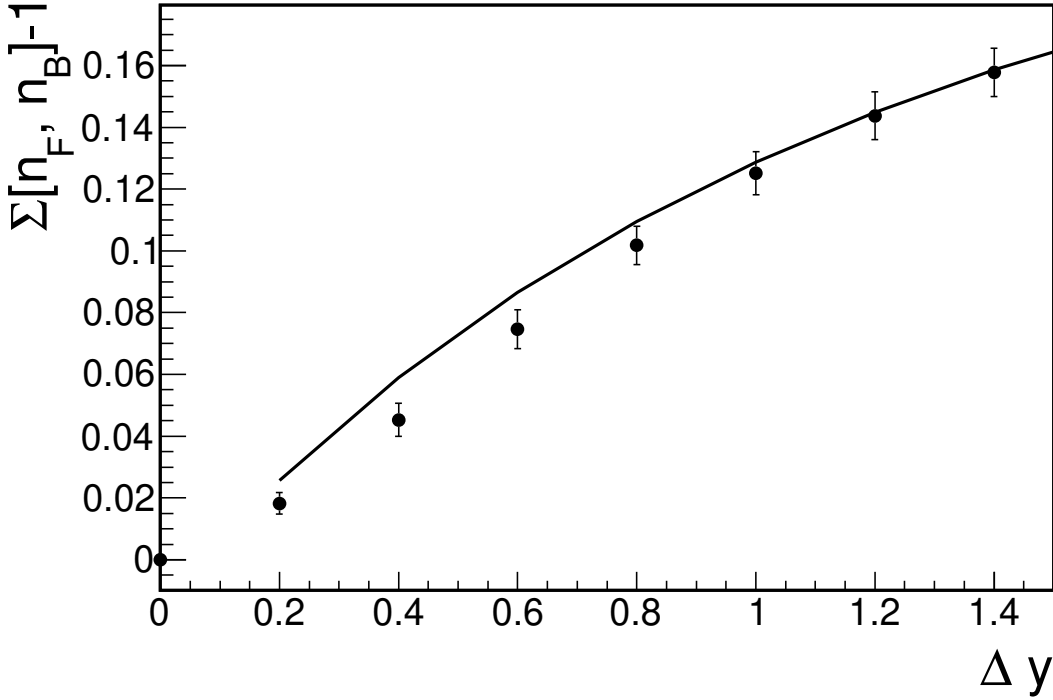


Рис. 4.3. Сильноинтенсивная переменная $\Sigma(n_F, n_B) - 1$ как функция расстояния по быстройроте между центрами окон Δy , для окон шириной $\delta y = 0, 2$, для minimum bias pp столкновений при начальной энергии 13 ТэВ (кривая). Точки — экспериментальные значения, полученные в коллаборации ALICE [75] путем анализа данных о выходах заряженных частиц с поперечными импульсами, принадлежащими интервалу 0,2-2 ГэВ/, в pp-столкновениях при той же энергии — 13 ТэВ.

циента корреляции вперед-назад в области пика прямой корреляции при малых значениях Δy .

Из рис.4.2 и 4.3 мы видим, что характер зависимости переменной $\Sigma(n_F, n_B)$ от расстояния по быстройроте между окнами наблюдения, Δy , в целом, соответствует предсказываемому нашей моделью (см. обсуждение после формулы (4.42)). Наблюдается рост $\Sigma(n_F, n_B)$ от значений порядка 1 при малых значениях δy с некоторой тенденцией к насыщению при больших значениях Δy (см. также рис.4.4 ниже).

Что касается зависимости от начальной энергии, то сравнивая зависимости при энергиях 0.9, 7 и 13 ТэВ, представленные на рис.4.2 и 4.3, мы видим, что в pp-столкновениях при энергиях БАК наблюдается рост наблюдаемой

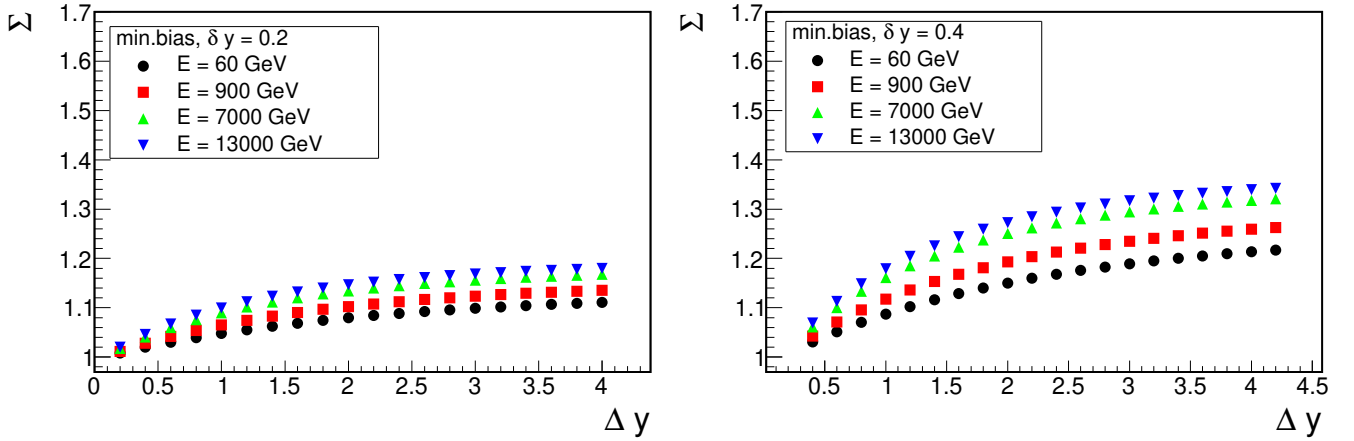


Рис. 4.4. Результаты для сильно интенсивной переменной $\Sigma(n_F, n_B)$, рассчитанные с помощью (4.31) как функция расстояния по быстрой между окнами наблюдения Δy для pp столкновений без отбора по центральности при энергиях 60-13000 ГэВ для окна наблюдения шириной $\delta y = 0.2$ и $\delta y = 0.4$ по быстрой.

$\Sigma(n_F, n_B)$ с увеличением начальной энергии. В нашей модели этот рост объясняется возрастающим с энергией вкладом от образования струнных кластеров с новыми свойствами, состоящих из все большего числа слившихся струн. Отметим, что в модели с одним типом струн, без учета процессов их слияния и образования струнных кластеров, все три кривые на рис.4.2 и 4.3 для разных начальных энергий оказались бы совпадающими друг с другом.

С данными струнными параметрами были также проведены расчеты сильноинтенсивной переменной Σ в более широкой области параметров, экспериментальные данные в которой пока недоступны. Сделаны предсказания ее поведения для min.bias pp столкновений вплоть до расстояния между окнами наблюдения $\Delta y = 4$ единицы быстрой при различных энергиях и для окон наблюдения различной ширины $\delta y = 0.2$ и 0.4 . Результаты этих расчетов представлены на Рис.4.4. На этом рисунке мы также видим характерные свойства переменной Σ , отмеченные нами после формулы (4.42). Более четко видна тенденция к насыщению с увеличением расстояния между окнами Δy , а также более быстрый рост Σ и выход на более высокий уровень насыщения для более

широкого окна наблюдения $\delta y=0.4$, чем 0.2.

Зависимость переменной Σ от класса центральности pp-столкновения

Поскольку в случае реальных столкновений pp прицельный параметр b неизвестен, экспериментальное определение степени центральности данного pp-столкновения может быть выполнено только по косвенным признакам. Следовательно, разделение массива всех min.bias pp-столкновений на так называемые классы центральности зависит от применяемой экспериментальной процедуры.

Сначала для разделения событий на классы центральности, мы в наших МК симуляциях использовали процедуру отбора событий с определенным числом частиц в каком-то фиксированном интервале быстроты. Это позволило нам исследовать, как изменяется зависимость переменной Σ от расстояния между окнами наблюдения Δy для pp столкновений различной центральности. Расчеты также были проведены при различных энергиях и для окон наблюдения различной ширины $\delta y=0.2$ и 0.4. Результаты этих расчетов представлены на Рис.4.5 и 4.6.

Из этих рисунков видно, что для более центральных событий значения Σ оказываются во всех случаях выше. Физически это объясняется увеличением доли слившихся струн для более центральных столкновений.

На следующем этапе для более аккуратного сравнения расчетной теоретической зависимости переменной Σ от центральности pp столкновения с имеющимися экспериментальными данными ALICE на БАК мы постарались максимально точно воспроизвести в наших МК расчетах процедуру, разбиения массива событий на классы центральности, используемую в эксперименте ALICE.

В эксперименте ALICE на БАК для определения степени центральности данного pp-столкновения используется сигнал от детектора V0 в произвольных единицах измерения [77; 78]. Этот детектор состоит из пары сцинтилляционных счетчиков, V0A и V0C, расположенных по обе стороны от точки взаи-

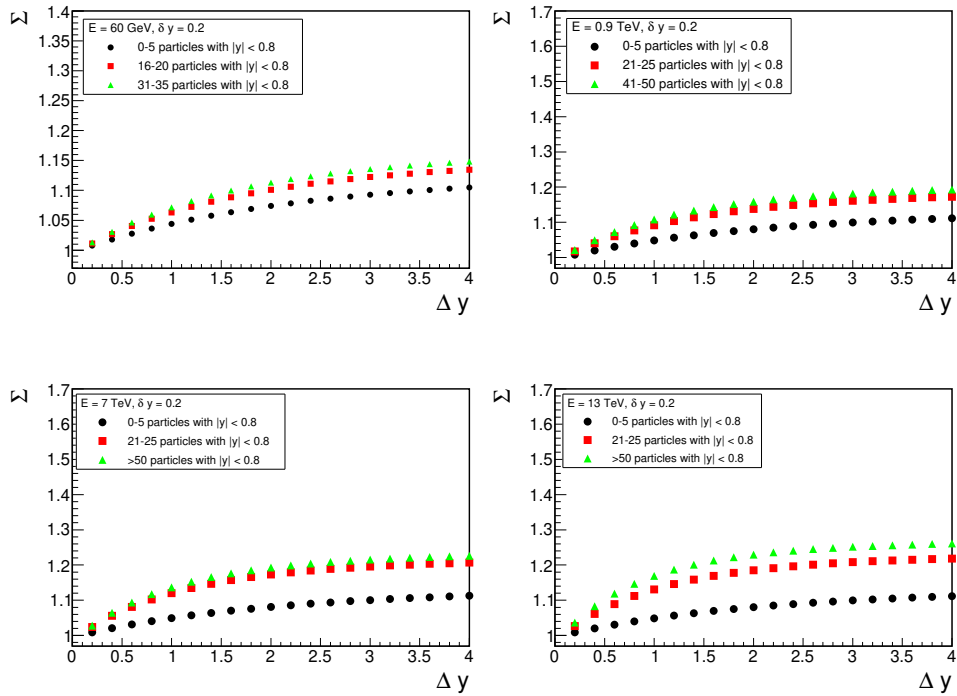


Рис. 4.5. Результаты для сильно интенсивной переменной $\Sigma(n_F, n_B)$, вычисленной с помощью (4.31) как функции расстояния по быстройре между окнами наблюдения Δy для различных классов центральности pp столкновений при энергиях 60 — 13000 ГэВ для окон шириной $\delta y = 0.2$ по быстройре.

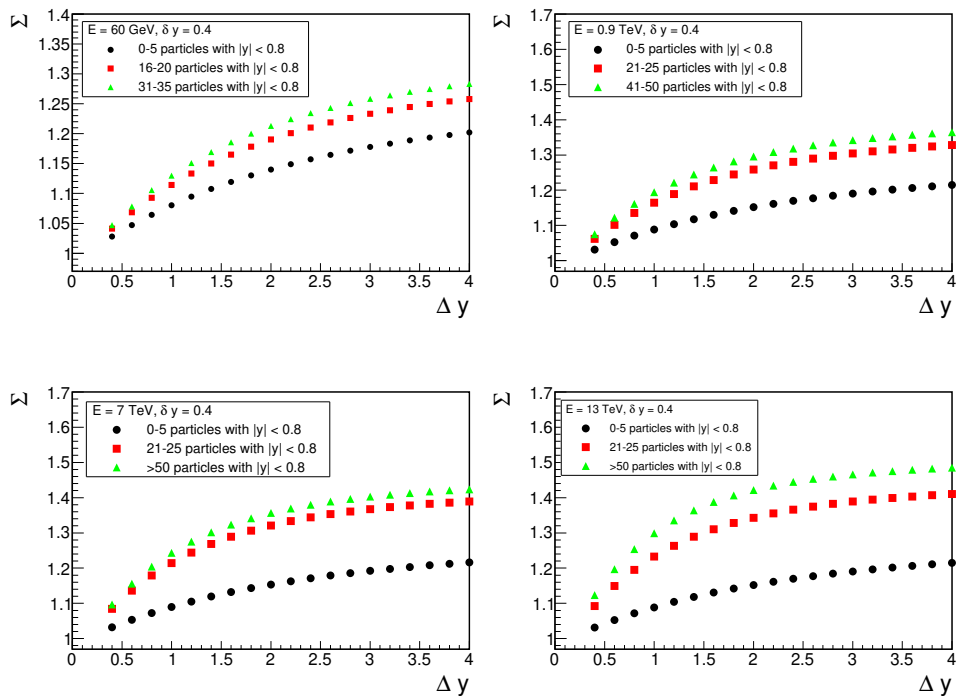


Рис. 4.6. То же, что на рис.4.5, но для окон шириной $\delta y = 0.4$ по быстройре.

модействия. События классифицируются по суммарной накопленной энергии в детекторе V0, так называемой “амплитуде V0M”, которая пропорциональна общему числу заряженных частиц, проходящих через детекторы V0A и V0C. То есть классы центральности в pp-столкновениях определяются множественностью в детекторах V0A и V0C и часто называются классами множественности. Классы множественности определяются как процентильные интервалы экспериментального распределения амплитуды V0M.

Чтобы имитировать эту процедуру в наших MC расчетах, мы сначала выполнили предварительное MC моделирование 1 000 000 min.bias pp-столкновений, определив множественность N в интервале быстроты $\delta y_{V_0} = 1$, соответствующем общему приему детекторов V0A и V0C. Затем, чтобы сгенерировать непрерывный сигнал амплитуды V0M, соответствующий этой множественности N , мы используем функцию отклика детектора:

$$P_N(V) = C\theta(V) \exp\left(-\frac{(V - \gamma N)^2}{2\beta\gamma N}\right) \quad (4.65)$$

что характерно для детекторов такого типа [79]. $P_N(V)$ дает плотность вероятности регистрации сигнала V от детектора V0 при попадании в него N заряженных частиц. θ -функция указывает, что сигнал V всегда положительный. C - константа нормализации. Обратите внимание, что в пределе $N \gg 1$ мы имеем

$$\langle N \rangle \longrightarrow \gamma N, \quad \omega_N \equiv \frac{D_N}{\langle N \rangle} \longrightarrow \beta. \quad (4.66)$$

Из формул (4.66) видно, что среднее значение сигнала $\langle V \rangle$ пропорционально количеству частиц N , попавших в детектор, а параметр β характеризует величину размытия сигнала вокруг этого среднего значения.

Используя распределение (4.65), мы генерируем V — отклик детектора V0M = V0A + V0C для числа заряженных частиц N , попадающих в него, для каждого события. Затем, используя это значение сигнала V , приписываемое каждому событию, мы можем разделить все события на классы центральности. Так как абсолютное значение сигнала не играет роли, а важно только от-

носительное значение V для разных событий, без потери общности мы можем установить параметр $\gamma = 1$.

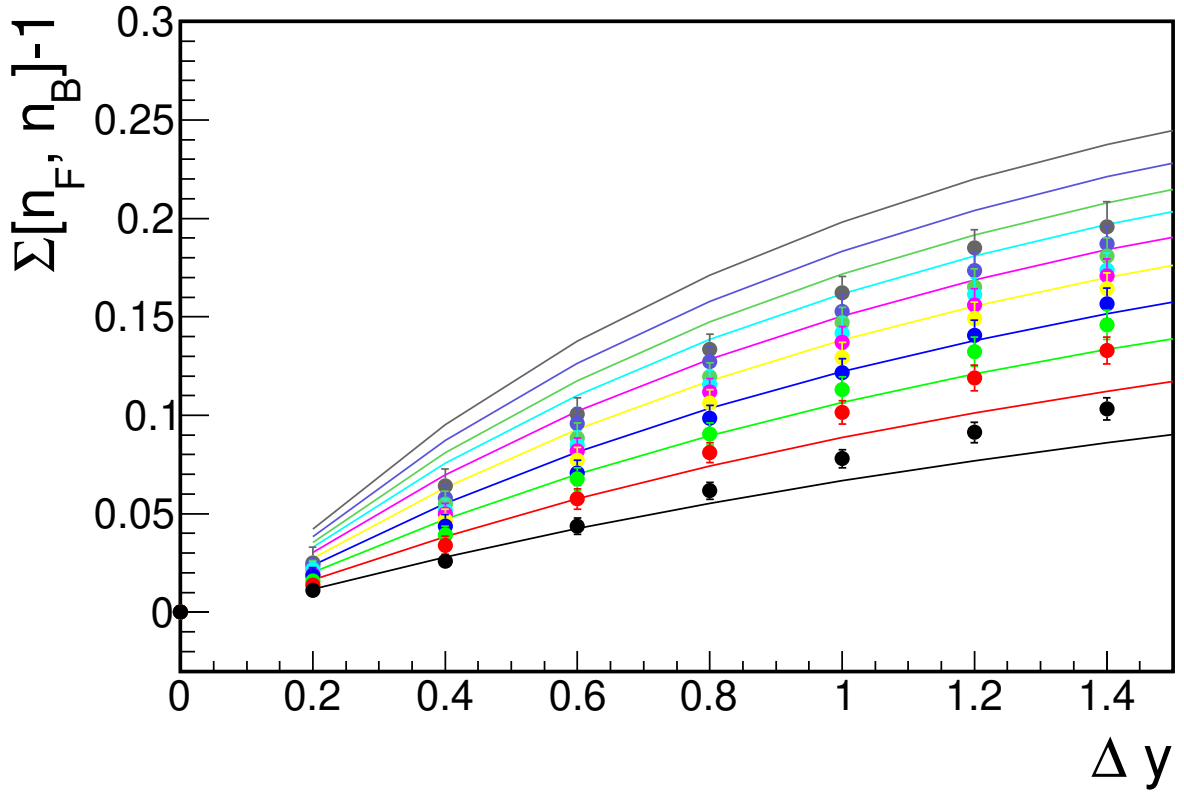


Рис. 4.7. Сильноинтенсивная переменная $\Sigma(n_F, n_B) - 1$ для различных классов центральности рр-столкновений при начальной энергии 13 ТэВ как функция расстояния по быстройроте между центрами окон наблюдения Δy , рассчитанная с окнами наблюдения шириной $\delta y = 0,2$. Точки — экспериментальные значения коллаборации ALICE [75] путем анализа данных о выходах заряженных частиц с поперечными импульсами в диапазоне 0,2 - 2 ГэВ/. Кривые — результаты наших расчетов в модели с образованием струнных кластеров, со значением параметра $\beta = 1$, характеризующего точность детектора V_0 . Классы центральности определены следующим образом (сверху вниз): 0-1%, 1-5%, 5-10%, 10-15%, 15-20%, 20-30%, 30-40%, 40-50%, 50-70%, 70-100%.

Сравнение для $\Sigma(n_F, n_B)$ как функции расстояния по быстройроте между центрами окон наблюдения Δy для различных классов центральности рр-столкновений при начальной энергии 13 ТэВ представлено на рис.4.7, 4.8, 4.9 для трех значений параметра β , характеризующего точность детектора V_0 . Из графиков видно, что наша модель с формированием кластеров струн также позволяет опи-

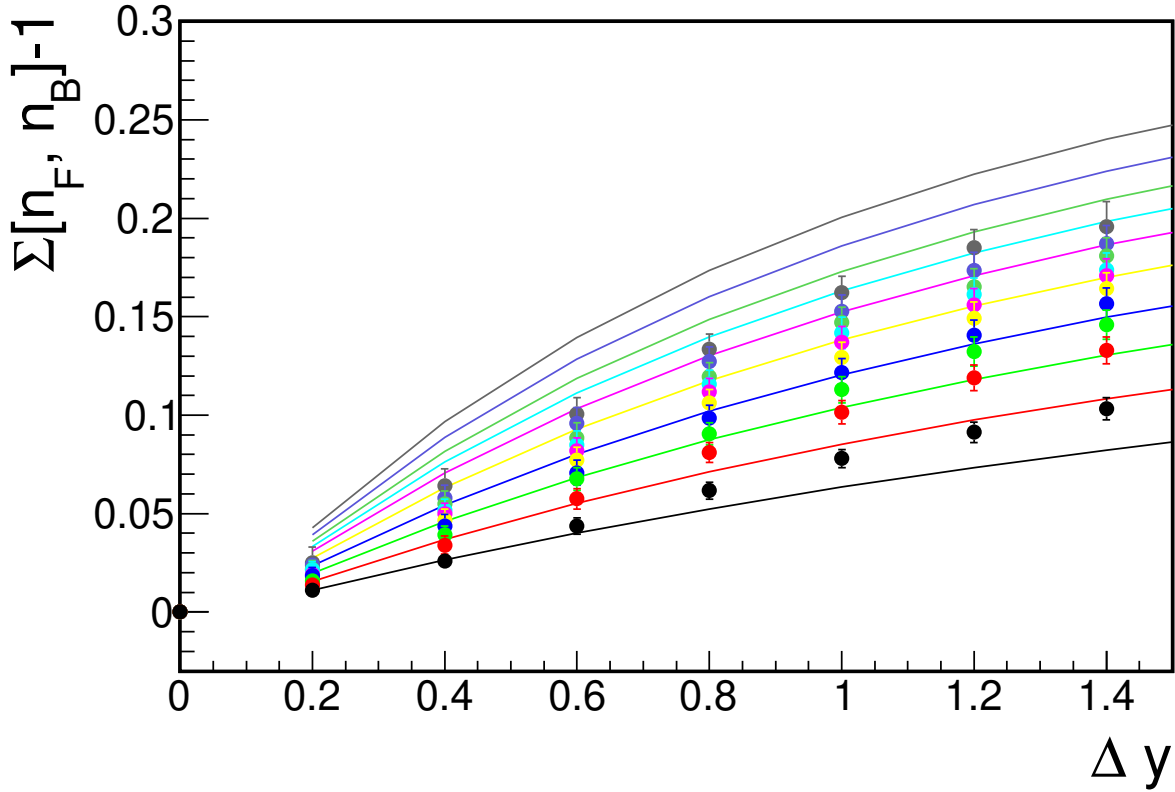


Рис. 4.8. То же, что и на рис.4.7, но для $\beta = 0,5$

сать экспериментальное поведение сильноинтенсивной переменной $\Sigma(n_F, n_B)$ для различных классов центральности рр-столкновений при одних и тех же значениях параметров, характеризующих кластеры струн. Таким образом, мы видим, что экспериментальные данные ALICE подтверждают более высокие значения $\Sigma(n_F, n_B)$ для более центральных событий, что в нашей модели объясняется более интенсивным слиянием струн и увеличением доли струнных кластеров с большим числом слившихся струн. Напомним, что согласно формуле (4.31) при отсутствии процессов слияния и наличии только одиночных струн величина $\Sigma(n_F, n_B)$ перестает зависеть от центральности рр столкновения и на всех Рис.4.7-4.9 мы имели бы только одну кривую (расщепление кривых по центральности отсутствовало бы).

В то же время сравнение графика на рис.4.7 с верхним графиком на рис.4.8 показывает, что разделение событий на классы центральности, используя зна-

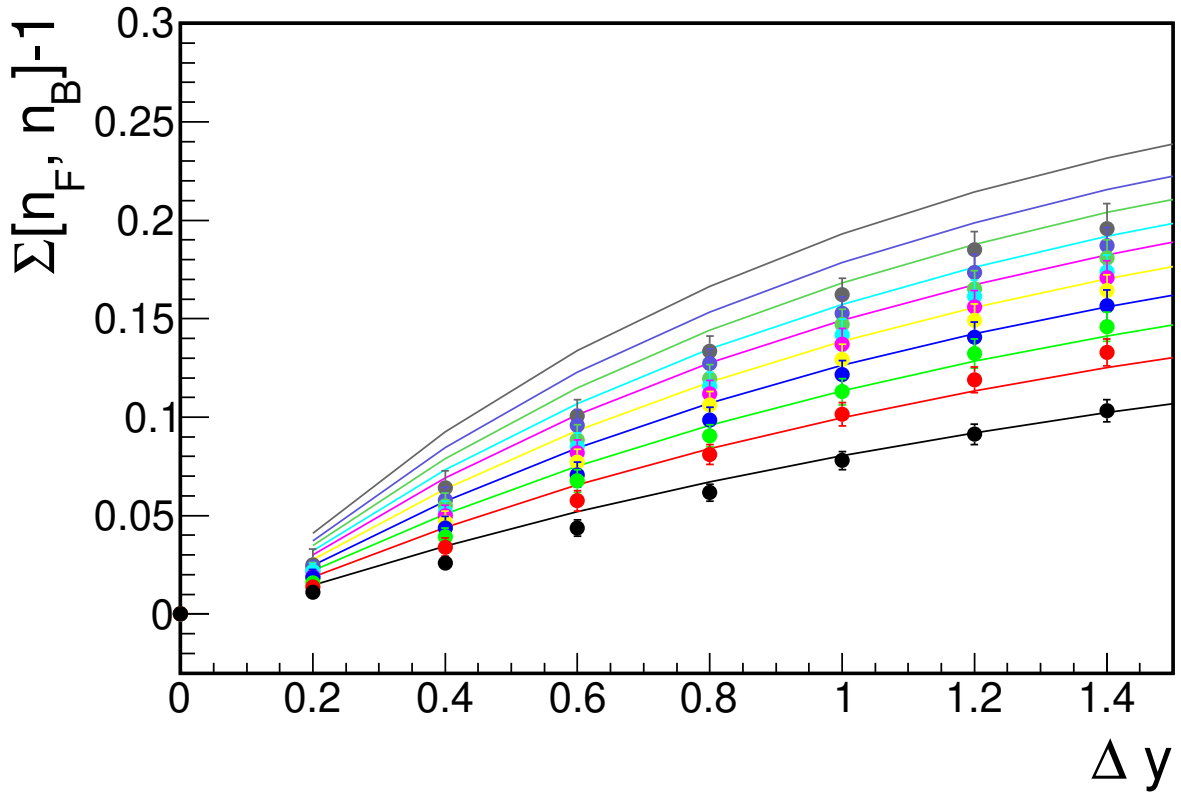


Рис. 4.9. То же, что и на рис.4.7, но для $\beta = 3$

чение параметра $\beta = 1$ и $\beta = 0,5$, остается практически неизменным. Рассчитанные кривые для $\Sigma(n_F, n_B)$ для этих значениях параметров практически совпадают. В то же время использование значения параметра $\beta = 3$ для характеристики детектора V0 при разделении массива событий на классы центральности приводит к лучшему согласию с экспериментальными данными.

Таким образом, мы видим, что соответствие между теорией и экспериментом может быть улучшено, если мы примем во внимание несовершенство детектора V0, используемого для разделения массива событий на классы центральности.

Заключение

В работе представлено теоретическое исследование корреляций между величинами (множественностью и средним поперечным импульсом частиц), наблюдаемыми в разнесенных быстротных интервалах в процессах множественного рождения частиц при взаимодействии адронов высоких энергий, а также теоретическое исследование сильноинтенсивной переменной $\Sigma(n_F, n_B)$, которая характеризует корреляции между количеством частиц в двух разнесенных быстротных интервалах.

Поскольку теория возмущений КХД для описания мягких процессов не применима, то исследование проводилось в рамках струнной модели, имеющей качественное обоснование в рамках КХД, и предполагающей формирование на самом начальном этапе взаимодействия адронов, некоторого количества, так называемых, кварк-глюонных (цветных) струн, понимаемых как трубки цветового потока (color flux tubes). Эффекты слияния струн и образования струнных кластеров учитывались путем введения конечной решетки (сетки) в плоскости поперечной к оси столкновения.

Были получены следующие результаты:

1. Получено аналитическое выражение для асимптотики коэффициента корреляции между поперечным импульсом и множественностью при большой плотности струн для реалистичного случая неоднородного распределения струн в плоскости прицельного параметра путем вычисления производной от функции регрессии. Показано, что найденное выражение переходит в выражение, полученное ранее другим методом с использованием альтернативного определения коэффициента корреляции.
2. При большой плотности струн, двумя независимыми аналитическими методами, найден явный вид асимптотики коэффициента корреляции между средними поперечными импульсами частиц в двух окнах наблюдения

для неоднородного распределения струн в поперечной плоскости. Разработан МК алгоритм, позволяющий провести расчет этого коэффициента корреляции при произвольной плотности струн. Показано, что результаты МК расчетов при большой плотности струн выходят на асимптотику, рассчитанную аналитически, что подтверждает надежность, полученных результатов. Показано, что для случая однородного распределения струн в поперечной плоскости найденное для асимптотики выражение переходит в полученное ранее, при этом зависимость от одного из параметров модели исчезает.

3. Проанализировано влияние условия фиксации общего числа начальных струн, соответствующего отбору по классам центральности при анализе экспериментальных данных, на величину коэффициентов дальних корреляции между множественностями и между поперечным импульсом и множественностью. Получены аналитические выражения для асимптотик этих коэффициентов при большой плотности струн для реалистического случая с неоднородным распределением струн в плоскости прицельного параметра и с учетом фиксации их общего числа. Показано, что с учетом этого условия убывание обоих коэффициентов корреляции с ростом плотности струн происходит быстрее при их в среднем однородном распределении в поперечной плоскости, чем при неоднородном. Проверено, что корреляции при фиксированном числе струн (для фиксированного класса по множественности) возникают только при учете эффектов от слияния струн.
4. Показано, что коэффициент корреляции между поперечным импульсом и множественностью при определенных условиях может становиться отрицательным. В случае без сохранения общего числа струн для этого требуется сильная неоднородность распределения струн в поперечной плоскости. Для случая с фиксацией общего числа струн этот коэффициент кор-

реляции является отрицательным даже для однородного распределения, сохраняя отрицательное значение и при малых неоднородностях в распределении струн. Коэффициент корреляции между множественностями при этом всегда остается положительным.

5. В рамках этой же модели со слиянием струн на решётке изучена сильно-интенсивная переменная $\Sigma(n_F, n_B)$, характеризующая корреляции между числом частиц, образующихся в двух разнесенных по быстроте интервалах наблюдения. Целью использования этой переменной является ослабление влияния на результат, так называемых, объемных флуктуаций, связанных, например, с флуктуацией от события к событию общего числа образующихся струн. Показано, что при учете эффектов слияния струн, приводящих к образованию струнных кластеров, эта переменная оказывается равна взвешенному среднему ее значений для различных струнных кластеров, зависящих только от параметров этих кластеров. В то время как весовые коэффициенты, представляющие собой доли частиц рожденных от кластеров с разным числом струн, оказываются зависящими от условий столкновения - его энергии и степени центральности.
6. Для случая pp рассеяния при высоких энергиях разработан монте-карловский алгоритм позволяющий, путем моделирования реалистического распределения струн в плоскости прицельного параметра, рассчитывать эти весовые коэффициенты для различных энергий и центральности pp столкновения. С их использованием рассчитана зависимость переменной $\Sigma(n_F, n_B)$ от расстояния по быстроте между окнами наблюдения, их ширины, энергии и центральности pp столкновения.
7. Проведено сравнение результатов расчетов $\Sigma(n_F, n_B)$ с экспериментальными данными коллаборации ALICE на БАК. Установлено, что наблюдаемое в эксперименте ALICE поведение этой переменной удается объяснить толь-

ко при наличии источников разного типа, роль которых в нашей модели играют одиночные струны и кластеры, образованные слиянием нескольких струн. Показано, что сравнение результатов нашей модели с предварительными экспериментальными данными ALICE, полученными в min.bias (без отбора по центральности) pp-столкновениях при энергиях 0.9-13 ТэВ и для различных классов центральности при энергии 13 ТэВ, позволяет извлечь информацию о модельных параметрах, характеризующих кластеры с различным числом слившихся струн. В целом, можно сделать вывод, что экспериментально наблюдаемый рост переменной $\Sigma(n_F, n_B)$ с увеличением начальной энергии и центральности pp столкновения при энергиях БАК можно объяснить только ростом вклада от образования струнных кластеров, состоящих из возрастающего числа слившихся струн.

Список литературы

1. Glasma flux tubes and the near side ridge phenomenon at RHIC / A. Dumitru [и др.] // Nuclear Physics A. — 2008. — Т. 810, № 1. — С. 91—108. — ISSN 0375-9474. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2008.06.012>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947408005927>.
2. *Kim V. T.* QCD Asymptotics at Collider Energies // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2019. — Т. 16, № 5. — С. 414—420. — DOI: [10.1134/S1547477119050169](https://doi.org/10.1134/S1547477119050169).
3. Jets in small-pT hadronic collisions, universality of quark fragmentation, and rising rapidity plateaus / A. Capella [и др.] // Physics Letters B. — 1979. — Т. 81, № 1. — С. 68—74. — ISSN 0370-2693. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(79\)90718-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(79)90718-4). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269379907184>.
4. *Kaidalov A.* The quark-gluon structure of the pomeron and the rise of inclusive spectra at high energies // Physics Letters B. — 1982. — Т. 116, № 6. — С. 459—463. — ISSN 0370-2693. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90168-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90168-X). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026938290168X>.
5. *Casher A., Kogut J. B., Susskind L.* Vacuum polarization and the absence of free quarks // Phys. Rev. D. — 1974. — Т. 10. — С. 732—745. — DOI: [10.1103/PhysRevD.10.732](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.10.732).
6. *Bissey F., Signal A. I., Leinweber D. B.* Comparison of gluon flux-tube distributions for quark-diquark and quark-antiquark hadrons // Phys. Rev. D. — 2009. — Дек. — Т. 80, вып. 11. — С. 114506. — DOI: [10.1103/PhysRevD.80.114506](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.114506). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.114506>.

7. Flux tubes in the QCD vacuum / P. Cea [и др.] // Phys. Rev. D. — 2017. — ИЮНЬ. — Т. 95, вып. 11. — С. 114511. — DOI: [10.1103/PhysRevD.95.114511](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.114511). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.114511>.
8. *Hooft G.* A planar diagram theory for strong interactions // Nuclear Physics B. — 1974. — Т. 72, № 3. — С. 461—473. — ISSN 0550-3213. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90154-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90154-0). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321374901540>.
9. *Veneziano G.* Some aspects of a unified approach to gauge, dual and Gribov theories // Nuclear Physics B. — 1976. — Т. 117, № 2. — С. 519—545. — ISSN 0550-3213. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(76\)90412-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(76)90412-0). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321376904120>.
10. Dual parton model / A. Capella [и др.] // Physics Reports. — 1994. — Т. 236, № 4. — С. 225—329. — ISSN 0370-1573. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(94\)90064-7](https://doi.org/10.1016/0370-1573(94)90064-7). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157394900647>.
11. *Werner K.* Strings, pomerons and the VENUS model of hadronic interactions at ultrarelativistic energies // Physics Reports. — 1993. — Т. 232, № 2. — С. 87—299. — ISSN 0370-1573. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(93\)90078-R](https://doi.org/10.1016/0370-1573(93)90078-R). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739390078R>.
12. *Gurvich E.* The quark-antiquark pair production mechanism in a quark jet // Physics Letters B. — 1979. — Т. 87, № 4. — С. 386—388. — ISSN 0370-2693. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(79\)90560-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(79)90560-4). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269379905604>.

13. *Casher A., Neuberger H., Nussinov S.* Chromoelectric-flux-tube model of particle production // *Phys. Rev. D.* — 1979. — Июль. — Т. 20, вып. 1. — С. 179—188. — DOI: [10.1103/PhysRevD.20.179](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.20.179). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.20.179>.
14. *Gyulassy M., Iwazaki A.* Quark and gluon pair production in SU(N) covariant constant fields // *Physics Letters B.* — 1985. — Т. 165, № 1. — С. 157—161. — ISSN 0370-2693. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(85\)90711-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(85)90711-7). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269385907117>.
15. *Bialas A.* Fluctuations of the string tension and transverse mass distribution // *Physics Letters B.* — 1999. — Т. 466, № 2. — С. 301—304. — ISSN 0370-2693. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(99\)01159-4](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(99)01159-4). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269399011594>.
16. *Schwinger J.* On Gauge Invariance and Vacuum Polarization // *Phys. Rev.* — 1951. — Июнь. — Т. 82, вып. 5. — С. 664—679. — DOI: [10.1103/PhysRev.82.664](https://doi.org/10.1103/PhysRev.82.664). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.82.664>.
17. *Nikishov A. I.* Barrier scattering in field theory removal of Klein paradox // *Nuclear Physics B.* — 1970. — Янв. — Т. 21, № 2. — С. 346—358. — DOI: [10.1016/0550-3213\(70\)90527-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(70)90527-4).
18. *Cohen T. D., McGady D. A.* Schwinger mechanism revisited // *Phys. Rev. D.* — 2008. — Авг. — Т. 78, вып. 3. — С. 036008. — DOI: [10.1103/PhysRevD.78.036008](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.036008). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.036008>.
19. *Artru X.* Classical string phenomenology. How strings work // *Physics Reports.* — 1983. — Т. 97, № 2. — С. 147—171. — ISSN 0370-1573. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(83\)90081-9](https://doi.org/10.1016/0370-1573(83)90081-9). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157383900819>.

20. *S. Ferreres-Solé T. S.* The space–time structure of hadronization in the Lund model. // Eur. Phys. J. C. — 2018. — T. 78. — DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6459-8>.
21. *Biro T. S., Nielsen H. B., Knoll J.* Color Rope Model for Extreme Relativistic Heavy Ion Collisions // Nucl. Phys. B. — 1984. — T. 245. — C. 449–468. — DOI: [10.1016/0550-3213\(84\)90441-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90441-3).
22. *Bialas A., Czyz W.* Conversion of Color Field Into $Q\bar{Q}$ Matter in the Central Region of High-energy Heavy Ion Collisions // Nucl. Phys. B. — 1986. — T. 267. — C. 242–252. — DOI: [10.1016/0550-3213\(86\)90153-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(86)90153-7).
23. *Braun M. A., Pajares C.* Particle production in nuclear collisions and string interactions // Phys. Lett. B. — 1992. — T. 287. — C. 154–158. — DOI: [10.1016/0370-2693\(92\)91892-D](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)91892-D).
24. *Braun M., Pajares C.* A Probabilistic model of interacting strings // Nucl. Phys. B. — 1993. — T. 390. — C. 542–558. — DOI: [10.1016/0550-3213\(93\)90467-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90467-4).
25. *Amelin N. S., Braun M. A., Pajares C.* Multiple production in the Monte Carlo string fusion model // Phys. Lett. B. — 1993. — T. 306. — C. 312–318. — DOI: [10.1016/0370-2693\(93\)90085-V](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)90085-V).
26. Strangeness enhancement and string fusion in nucleus-nucleus collisions / N. Armesto [и др.] // Phys. Lett. B. — 1995. — T. 344. — C. 301–307. — DOI: [10.1016/0370-2693\(94\)01511-A](https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)01511-A).
27. *Ferreiro E. G., Pajares C.* Strangeness enhancement in the string fusion model code // J. Phys. G / под ред. A. D. Panagiotou. — 1997. — T. 23. — C. 1961–1968. — DOI: [10.1088/0954-3899/23/12/021](https://doi.org/10.1088/0954-3899/23/12/021). — arXiv: [hep-ph/9705259](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9705259).
28. Effects of Overlapping Strings in pp Collisions / C. Bierlich [и др.] // JHEP. — 2015. — T. 03. — C. 148. — DOI: [10.1007/JHEP03\(2015\)148](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2015)148). — arXiv: [1412.6259](https://arxiv.org/abs/1412.6259) [hep-ph].

29. Enhanced production of multi-strange hadrons in high-multiplicity proton-proton collisions / J. Adam [и др.] // *Nature Phys.* — 2017. — Т. 13. — С. 535—539. — DOI: 10.1038/nphys4111. — arXiv: 1606.07424 [nucl-ex].
30. *Kovalenko V. N., Puchkov A. M., Feofilov G. A.* Production of strange particles in a multi-pomeron exchange model // *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* — 2016. — Т. 80, № 8. — С. 966—969. — DOI: 10.3103/S106287381608027X.
31. *Armesto N., Derkach D. A., Feofilov G. A.* p(t)-multiplicity correlations in a multi-Pomeron-exchange model with string collective effects // *Phys. Atom. Nucl.* — 2008. — Т. 71. — С. 2087—2095. — DOI: 10.1134/S1063778808120090.
32. Multipomeron Model with Collective Effects for High-Energy Hadron Collisions / V. Kovalenko [и др.] // *Universe.* — 2022. — Т. 8, № 4. — С. 246. — DOI: 10.3390/universe8040246.
33. *Braun M. A., Pajares C.* Implications of percolation of color strings on multiplicities, correlations and the transverse momentum // *Eur. Phys. J. C.* — 2000. — Т. 16. — С. 349—359. — DOI: 10.1007/s100520050027. — arXiv: hep-ph/9907332.
34. *Braun M. A., Del Moral F., Pajares C.* Percolation of strings and the first RHIC data on multiplicity and transverse momentum distributions // *Phys. Rev. C.* — 2002. — Т. 65. — С. 024907. — DOI: 10.1103/PhysRevC.65.024907. — arXiv: hep-ph/0105263.
35. *Vechernin V. V., Kolevatov R. S.* Long-range correlations between transverse momenta of charged particles produced in relativistic nucleus-nucleus collisions // *Phys. Atom. Nucl.* — 2007. — Т. 70. — С. 1809—1818. — DOI: 10.1134/S106377880710016X.
36. *Vechernin V., Lakomov I.* The dependence of the number of pomerons on the impact parameter and the long-range rapidity correlations in pp collisions //

- PoS. — 2012. — Т. Baldin-ISHEPP—XXI. — С. 072. — DOI: 10.22323/1.173.0072. — arXiv: 1212.2667 [nucl-th].
37. *Vechernin V. V., Kolevatov R. S.* Simple cellular model of long range multiplicity and $p(t)$ correlations in high-energy nuclear collisions. — 2003. — Апр. — arXiv: hep-ph/0304295.
38. *Vechernin V. V., Kolevatov R. S.* Cellular approach to long range $p(t)$ and multiplicity correlations in the string fusion model. — 2003. — Май. — arXiv: hep-ph/0305136.
39. Correlations between multiplicities and average transverse momentum in the percolating color strings approach / M. A. Braun [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2004. — Т. 32. — С. 535—546. — DOI: 10.1140/epjc/s2003-01443-6. — arXiv: hep-ph/0307056.
40. *Braun M. A., Pajares C.* Elliptic flow from color strings // Eur. Phys. J. C. — 2011. — Т. 71. — С. 1558. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-011-1558-9. — arXiv: 1008.0245 [hep-ph].
41. *Kovalenko V.* Modelling of exclusive parton distributions and long-range rapidity correlations for pp collisions at the LHC energy // Phys. Atom. Nucl. — 2013. — Т. 76. — С. 1189—1195. — DOI: 10.1134/S1063778813100098. — arXiv: 1211.6209 [hep-ph].
42. ALICE: Physics Performance Report / C. W. Fabjan [и др.] // J. Phys. G / под ред. B. Alessandro [и др.]. — 2006. — Т. 32. — С. 1295—2040. — DOI: 10.1088/0954-3899/32/10/001.
43. *Vechernin V. V.* Asymptotic behavior of the correlation coefficients of transverse momenta in the model with string fusion // Theor. Math. Phys. — 2017. — Т. 190, № 2. — С. 251—267. — DOI: 10.1134/S0040577917020076.

44. *Vechernin V. V.* Correlation between transverse momenta in the string fusion model // *Theor. Math. Phys.* — 2015. — Т. 184, № 3. — С. 1271—1280. — DOI: 10.1007/s11232-015-0334-7.
45. *Vechernin V. V., Kolevatov R. S.* On multiplicity and transverse-momentum correlations in collisions of ultrarelativistic ions // *Phys. Atom. Nucl.* — 2007. — Т. 70. — С. 1797—1808. — DOI: 10.1134/S1063778807100158.
46. *Braun M. A., Pajares C., Vechernin V. V.* Anisotropic flows from colour strings: Monte-Carlo simulations // *Nucl. Phys. A.* — 2013. — Т. 906. — С. 14—27. — DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2013.02.200. — arXiv: 1204.5829 [hep-ph].
47. *Braun M. A., Pajares C., Vechernin V. V.* Ridge from Strings // *Eur. Phys. J. A.* — 2015. — Т. 51, № 4. — С. 44. — DOI: 10.1140/epja/i2015-15044-9. — arXiv: 1407.4590 [hep-ph].
48. *Levin E., Rezaeian A. H.* The Ridge from the BFKL evolution and beyond // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Т. 84. — С. 034031. — DOI: 10.1103/PhysRevD.84.034031. — arXiv: 1105.3275 [hep-ph].
49. *Kovner A., Lublinsky M.* Angular Correlations in Gluon Production at High Energy // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Т. 83. — С. 034017. — DOI: 10.1103/PhysRevD.83.034017. — arXiv: 1012.3398 [hep-ph].
50. *N. S. Amelin, N. Armesto, M. A. Braun, E. G. Ferreira, and C. Pajares.* Long and Short Range Correlations: A Signature of String Fusion // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Ноябрь. — Т. 73, вып. 21. — С. 2813—2816. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.73.2813. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.73.2813>.
51. *Capella A., Krzywicki A.* Unitarity corrections to short-range order: Long-range rapidity correlations // *Phys. Rev. D.* — 1978. — Дек. — Т. 18, вып.

11. — С. 4120—4133. — DOI: 10.1103/PhysRevD.18.4120. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.18.4120>.
52. *Vechernin V.* Long-range rapidity correlations between mean transverse momenta in the model with string fusion // EPJ Web Conf. / под ред. V. A. Andrianov [и др.]. — 2016. — Т. 125. — С. 04022. — DOI: 10.1051/epjconf/201612504022.
53. ALICE: Physics Performance Report / C. W. Fabjan [и др.] // J. Phys. G / под ред. B. Alessandro [и др.]. — 2006. — Т. 32. — С. 1295—2040. — DOI: 10.1088/0954-3899/32/10/001.
54. Forward-backward multiplicity correlations in pp collisions at $\sqrt{s} = 0.9, 2.76$ and 7 TeV / J. Adam [и др.] // JHEP. — 2015. — Т. 05. — С. 097. — DOI: 10.1007/JHEP05(2015)097. — arXiv: 1502.00230 [nucl-ex].
55. Clustering of color sources and the shear viscosity of the QGP in heavy ion collisions at RHIC and LHC energies / J. Dias de Deus [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2012. — Т. 72. — С. 2123. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-012-2123-x.
56. *Svetlana Belokurova.* Asymptotes of multiplicity and transverse momentum correlation coefficients at large string density // EPJ Web Conf. — 2018. — Т. 191. — С. 04010. — DOI: 10.1051/epjconf/201819104010. — URL: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201819104010>.
57. *С. Н. Белокурова, В. В. Вечернин,* Сильноинтенсивные переменные и дальние корреляции в модели с решеткой в поперечной плоскости, ТМФ, 200:2 (2019), 195–214, <https://doi.org/10.4213/tmf9684>; Theoret. and Math. Phys., 200:2 (2019), 1094–1109, doi.org/10.1134/S0040577919080026. —
58. *Belokurova S. N., Vechernin V. V.* Calculation of Long-Range Rapidity Correlations in the Model with String Fusion on a Transverse Lattice // Phys. Part. Nucl. — 2020. — Т. 51, № 3. — С. 319—322. — DOI: 10.1134/S1063779620030053.

59. *Belokurova S., Vechernin V.* Long-Range Correlations between Observables in a Model with Translational Invariance in Rapidity // *Symmetry*. — 2020. — T. 12, № 7. — C. 1107. — DOI: 10.3390/sym12071107.
60. *Belokurova S.* Study of Strongly Intense Quantities and Robust Variances in Multi-Particle Production at LHC Energies // *Phys. Part. Nucl.* — 2022. — T. 53, № 2. — C. 154–158. — DOI: 10.1134/S1063779622020174. — arXiv: 2011.10434 [hep-ph].
61. *Belokurova S., Vechernin V.* Using a Strongly Intense Observable to Study the Formation of Quark-Gluon String Clusters in pp Collisions at LHC Energies // *Symmetry*. — 2022. — T. 14, № 8. — C. 1673. — DOI: 10.3390/sym14081673.
62. *Gorenstein M. I., Gazdzicki M.* Strongly Intensive Quantities // *Phys. Rev. C*. — 2011. — T. 84. — C. 014904. — DOI: 10.1103/PhysRevC.84.014904. — arXiv: 1101.4865 [nucl-th].
63. *Andronov E.* Influence of the quark–gluon string fusion mechanism on long-range rapidity correlations and fluctuations. // *Theor Math Phys.* — 2015. — Вып. 185. — C. 1383–1390. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11232-015-0347-2>.
64. *Pruneau C., Gavin S., Voloshin S.* Methods for the study of particle production fluctuations // *Phys. Rev. C*. — 2002. — T. 66. — C. 044904. — DOI: 10.1103/PhysRevC.66.044904. — arXiv: nucl-ex/0204011.
65. First measurement of the total proton-proton cross section at the LHC energy of $\sqrt{s} = 7$ TeV / G. Antchev [и др.] // *EPL*. — 2011. — T. 96, № 2. — C. 21002. — DOI: 10.1209/0295-5075/96/21002. — arXiv: 1110.1395 [hep-ex].
66. Transverse-momentum and pseudorapidity distributions of charged hadrons in *pp* collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / V. Khachatryan [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — T. 105. — C. 022002. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.022002. — arXiv: 1005.3299 [hep-ex].

67. Charged-particle multiplicity measurement in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV with ALICE at LHC / K. Aamodt [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2010. — Т. 68. — С. 345–354. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-010-1350-2. — arXiv: 1004.3514 [hep-ex].
68. First measurement of elastic, inelastic and total cross-section at $\sqrt{s} = 13$ TeV by TOTEM and overview of cross-section data at LHC energies / G. Antchev [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Т. 79, № 2. — С. 103. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6567-0. — arXiv: 1712.06153 [hep-ex].
69. *Capella A., Ferreiro E. G.* Charged multiplicities in pp and AA collisions at LHC // Eur. Phys. J. C. — 2012. — Т. 72. — С. 1936. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-012-1936-y. — arXiv: 1110.6839 [hep-ph].
70. *Ter-Martirosyan K. A.* On the particle multiplicity distributions at high energy // Phys. Lett. B. — 1973. — Т. 44. — С. 377–380. — DOI: 10.1016/0370-2693(73)90411-5.
71. *Kaidalov A. B., Ter-Martirosyan K. A.* Multihadron production at high energies in the model of quark gluon strings // Sov. J. Nucl. Phys. — 1984. — Т. 40. — С. 135–140.
72. *J. Bleibel, L. V. Bravina and E. E. Zabrodin.* How many of the scaling trends in pp collisions will be violated at $\sqrt{s_{NN}} = 14$ TeV ? - Predictions from Monte Carlo quark-gluon string model // Phys. Rev. D. — 2016. — Т. 93, № 11. — С. 114012. — DOI: 10.1103/PhysRevD.93.114012. — arXiv: 1011.2703 [hep-ph].
73. *Vechernin V. V.* Forward–backward correlations between multiplicities in windows separated in azimuth and rapidity // Nucl. Phys. A. — 2015. — Т. 939. — С. 21–45. — DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2015.03.009. — arXiv: 1210.7588 [hep-ph].

74. *Vechernin, Vladimir*. Short- and long-range rapidity correlations in the model with a lattice in transverse plane // EPJ Web Conf. — 2018. — T. 191. — C. 04011. — DOI: 10.1051/epjconf/201819104011. — URL: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201819104011>.
75. *Erokhin A., (for the ALICE Collaboration)*. Forward-backward multiplicity correlations with strongly intensive observables in pp collisions // The VI-th International Conference on the Initial Stages of High-Energy Nuclear Collisions (IS2021). — URL: indico.cern.ch/event/854124/contributions/4134683/.
76. *Andronov E., Vechernin V.* Strongly intensive observable between multiplicities in two acceptance windows in a string model // Eur. Phys. J. A. — 2019. — T. 55, № 1. — C. 14. — DOI: 10.1140/epja/i2019-12681-x. — arXiv: 1808.09770 [hep-ph].
77. Pseudorapidity distributions of charged particles as a function of mid- and forward rapidity multiplicities in pp collisions at $\sqrt{s} = 5.02, 7$ and 13 TeV / S. Acharya [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2021. — T. 81, № 7. — C. 630. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09349-5. — arXiv: 2009.09434 [nucl-ex].
78. Multiplicity dependence of charged-particle jet production in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV / S. Acharya [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2022. — T. 82, № 6. — C. 514. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10405-x. — arXiv: 2202.01548 [nucl-ex].
79. *Kurepin A. B., Litvinenko A. G., Litvinenko E.* Determining the Centrality of a Nuclear Collision Using a Hadron Calorimeter // Phys. Atom. Nucl. — 2020. — T. 83, № 9. — C. 1359–1362. — DOI: 10.1134/S106377882009015X. — arXiv: 2001.03747 [hep-ex].

Приложение А. Усреднение по конфигурациям

$$C_n^F$$

Вычислим $\left\langle \frac{n_i^F}{(\sum_{k=1}^M n_k^F)^2} \right\rangle_{C_n}$:

$$\left\langle \frac{n_i}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \prod_{j=1}^M \int dn_j \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_j}}} e^{-\frac{(n_j - \bar{n}_j)^2}{2d_{n_j}}} \frac{n_i}{(\sum_k n_k)^2}.$$

Подставим под интеграл 1, представленную в виде

$$1 = \int dn \delta \left(n - \sum_k n_k \right) = \int dn \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha(n - \sum_k n_k)},$$

получим

$$\left\langle \frac{n_i}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha n} \prod_{j=1}^M \int dn_j \frac{e^{i\alpha n_j}}{\sqrt{2\pi d_{n_j}}} e^{-\frac{(n_j - \bar{n}_j)^2}{2d_{n_j}}} n_i.$$

Преобразуем выражение в показателе экспоненты под интегралом по n_j :

$$\begin{aligned} \frac{(n_j - \bar{n}_j)^2}{2d_{n_j}} - i\alpha n_j &= \frac{n_j^2}{2d_{n_j}} - n_j \left(\frac{\bar{n}_j}{d_{n_j}} + i\alpha \right) + \frac{\bar{n}_j^2}{2d_{n_j}} = \\ &= \left(\frac{n_j}{\sqrt{2d_{n_j}}} - \left(\frac{\bar{n}_j}{\sqrt{2d_{n_j}}} + \frac{i\alpha\sqrt{d_{n_j}}}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 - i\alpha\bar{n}_j + \frac{\alpha^2 d_{n_j}}{2}. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл по n_i

$$J_i = \int dn_i \frac{e^{i\alpha n_i}}{\sqrt{2\pi d_{n_i}}} e^{-\frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{2d_{n_i}}} n_i.$$

Сделаем замену переменной:

$$y = \frac{n_i}{\sqrt{2d_{n_i}}} - \left(\frac{\bar{n}_i}{\sqrt{2d_{n_i}}} + \frac{i\alpha\sqrt{d_{n_i}}}{\sqrt{2}} \right), \quad (\text{A.1})$$

$$J_i = \sqrt{\frac{2d_{n_i}}{\pi}} e^{i\alpha\bar{n}_i - \frac{\alpha^2 d_{n_i}}{2}} \int dy e^{-y^2} \left(y + \frac{\bar{n}_i}{\sqrt{2d_{n_i}}} + \frac{i\alpha\sqrt{d_{n_i}}}{\sqrt{2}} \right).$$

$$J_i = e^{i\alpha\bar{n}_i - \frac{\alpha^2 d_{n_i}}{2}} (\bar{n}_i + i\alpha d_{n_i}) \quad (\text{A.2})$$

Вычислим интеграл по n_j , $j \neq i$

$$J_j = \int dn_j \frac{e^{i\alpha n_j}}{\sqrt{2\pi d_{n_j}}} e^{-\frac{(n_j - \bar{n}_j)^2}{2d_{n_j}}}.$$

После замены (A.1) получим

$$J_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\alpha \bar{n}_j - \frac{\alpha^2 d_{n_j}}{2}} \int dy e^{-y^2} = e^{i\alpha \bar{n}_j - \frac{\alpha^2 d_{n_j}}{2}}, \quad (\text{A.3})$$

$$\left\langle \frac{n_i}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha n} e^{i\alpha \sum_j \bar{n}_j} e^{-\frac{\alpha^2}{2} \sum_j d_{n_j}} (\bar{n}_i + i\alpha d_{n_i}).$$

Преобразуем выражение в показателе экспоненты:

$$\frac{\alpha^2}{2} \sum_j d_{n_j} + i\alpha \left(n - \sum_j \bar{n}_j \right) = \left(\alpha \sqrt{\frac{\sum_j d_{n_j}}{2}} + \frac{i \left(n - \sum_j \bar{n}_j \right)}{\sqrt{2 \sum_j d_{n_j}}} \right)^2 + \frac{\left(n - \sum_j \bar{n}_j \right)^2}{2 \sum_j d_{n_j}}.$$

Сделаем замену переменной:

$$x = \alpha \sqrt{\frac{\sum_j d_{n_j}}{2}} + \frac{i \left(n - \sum_j \bar{n}_j \right)}{\sqrt{2 \sum_j d_{n_j}}}, \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{n_i}{\sum_k n_k} \right\rangle_{C_n} = \\ & = \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{dx}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2 \sum_j d_{n_j}}} e^{-x^2} e^{-\frac{(n - \sum_j \bar{n}_j)^2}{2 \sum_j d_{n_j}}} \left(\bar{n}_i + i d_{n_i} x \sqrt{\frac{2}{\sum_j d_{n_j}}} + \frac{d_{n_i} \left(n - \sum_j \bar{n}_j \right)}{\sum_j d_{n_j}} \right) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sum d_{n_j}} \frac{\bar{n}_i}{\sum \bar{n}_j} \int \frac{dn}{n} e^{-\frac{(n - \sum_j \bar{n}_j)^2}{2 \sum_j d_{n_j}}} = \frac{\bar{n}_i}{\sqrt{2\pi} \sum d_{n_j} (\sum \bar{n}_j)^2} \int \frac{dn}{1 + \frac{n}{\sum \bar{n}_j}} e^{-\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}}} \end{aligned}$$

Экспонента $e^{-\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}}}$ дает основной вклад при $\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}} \sim 1$.

$$n \sim \sqrt{\sum_j d_{n_j}} \sim \sqrt{M \sqrt{\bar{\eta}}}$$

$$\frac{n}{\sum \bar{n}_j} \sim \frac{1}{\sqrt{M \sqrt{\bar{\eta}}}},$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{n}{\sum \bar{n}_j}\right)} \simeq 1 - \frac{n}{\sum \bar{n}_j} + \frac{n^2}{(\sum \bar{n}_j)^2}$$

$$\left\langle \frac{n_i}{\sum_k n_k} \right\rangle_{C_n} = \frac{\bar{n}_i}{\sqrt{2\pi} \sum d_{n_j} (\sum \bar{n}_j)^2} \int dn \left(1 - \frac{n}{\sum \bar{n}_j} + \frac{n^2}{(\sum \bar{n}_j)^2} \right) e^{-\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}}} =$$

$$= \frac{\bar{n}_i}{(\sum \bar{n}_j)^2} \left(1 + \frac{\sum d_{n_j}}{(\sum \bar{n}_j)^2} \right) = \frac{\bar{n}(\eta_i)}{\mu_F (\sum \bar{n}(\eta_j))^2} \left(1 + \frac{\omega_\mu}{\mu_F \sum \bar{n}(\eta_j)} \right).$$

Оценим слагаемые по порядку величины:

$$\frac{\bar{n}(\eta_i)}{\mu_F (\sum \bar{n}(\eta_j))^2} \sim \frac{\sqrt{\bar{\eta}}}{M^2 \bar{\eta}} = \frac{1}{M^2 \sqrt{\bar{\eta}}}, \quad \frac{\omega_\mu \bar{n}(\eta_i)}{\mu_F^2 (\sum \bar{n}(\eta_j))^3} \sim \frac{1}{M^3 \bar{\eta}}.$$

$$\left\langle \frac{n_i^F}{\sum_k n_k^F} \right\rangle_{C_n^F} = \frac{\bar{n}(\eta_i)}{\mu_F (\sum \bar{n}(\eta_j))^2}.$$

Вычислим $\left\langle \frac{n_i^{F^2}}{(\sum_{k=1}^M n_k^F)^2} \right\rangle_{C_n}$:

$$\left\langle \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \prod_{j=1}^M \int dn_j \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_j}}} e^{-\frac{(n_j - \bar{n}_j)^2}{2d_{n_j}}} \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2}.$$

Подставим под интеграл 1, представленную в виде

$$1 = \int dn \delta \left(n - \sum_k n_k \right) = \int dn \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha(n - \sum_k n_k)},$$

получим

$$\left\langle \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha n} \prod_{j=1}^M \int dn_j \frac{e^{i\alpha n_j}}{\sqrt{2\pi d_{n_j}}} e^{-\frac{(n_j - \bar{n}_j)^2}{2d_{n_j}}} n_i^2.$$

Вычислим интеграл по n_i :

$$J_i = \int dn_i \frac{e^{i\alpha n_i}}{\sqrt{2\pi d_{n_i}}} e^{-\frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{2d_{n_i}}} n_i^2.$$

Сделаем замену переменной (A.1):

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\alpha \bar{n}_i - \frac{\alpha^2 d_{n_i}}{2}} \int dy e^{-y^2} \left(\sqrt{2d_{n_i}} y + \bar{n}_i + i\alpha d_{n_i} \right)^2 = \\ &= e^{i\alpha \bar{n}_i - \frac{\alpha^2 d_{n_i}}{2}} \left((\bar{n}_i + i\alpha d_{n_i})^2 + d_{n_i} \right) \end{aligned}$$

Интеграл по n_j , $j \neq i$ – аналогично (A.3):

$$J_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\alpha \bar{n}_j - \frac{\alpha^2 d_{n_j}}{2}} \int dy e^{-y^2} = e^{i\alpha \bar{n}_j - \frac{\alpha^2 d_{n_j}}{2}}.$$

$$\left\langle \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha n} e^{i\alpha \sum_j \bar{n}_j} e^{-\frac{\alpha^2}{2} \sum_j d_{n_j}} (\bar{n}_i^2 + 2i\alpha d_{n_i} \bar{n}_i - \alpha^2 d_{n_i}^2 + d_{n_i})$$

Сделаем замену переменной (А.4):

$$\left\langle \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{dx}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2 \sum_j d_{n_j}}} e^{-x^2} e^{-\frac{(n - \sum_j \bar{n}_j)^2}{2 \sum_j d_{n_j}}} \times \\ \times \left(d_{n_i} + \bar{n}_i^2 + \frac{2d_{n_i} \bar{n}_i (n - \sum_j \bar{n}_j)}{\sum_j d_{n_j}} - \frac{2d_{n_i}^2 x^2}{\sum_j d_{n_j}} + \frac{d_{n_i}^2 (n - \sum_j \bar{n}_j)^2}{(\sum_j d_{n_j})^2} \right).$$

Вычислим интеграл по x :

$$\left\langle \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \\ = \int \frac{dn}{n^2} \left(d_{n_i} + \bar{n}_i^2 + \frac{2d_{n_i} \bar{n}_i (n - \sum_j \bar{n}_j) - d_{n_i}^2}{\sum_j d_{n_j}} + \frac{d_{n_i}^2 (n - \sum_j \bar{n}_j)^2}{(\sum_j d_{n_j})^2} \right) \frac{e^{-\frac{(n - \sum_j \bar{n}_j)^2}{2 \sum_j d_{n_j}}}}{\sqrt{2\pi d_{n_j}}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_j}}} \int \frac{dn}{(n + \sum_j \bar{n}_j)^2} \left(d_{n_i} + \bar{n}_i^2 + \frac{2d_{n_i} \bar{n}_i n}{\sum_j d_{n_j}} - \frac{d_{n_i}^2}{\sum_j d_{n_j}} + \frac{d_{n_i}^2 n^2}{(\sum_j d_{n_j})^2} \right) e^{-\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}}}.$$

Экспонента $e^{-\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}}}$ дает основной вклад при $\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}} \sim 1$.

$$n \sim \sqrt{\sum_j d_{n_j}} \sim \sqrt{M \sqrt{\bar{\eta}}}$$

$$\frac{n}{\sum \bar{n}_j} \sim \frac{1}{\sqrt{M \sqrt{\bar{\eta}}}},$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{n}{\sum \bar{n}_j}\right)^2} \simeq 1 - 2 \frac{n}{\sum \bar{n}_j} + 3 \frac{n^2}{(\sum \bar{n}_j)^2}$$

$$\left\langle \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_j}}} \int \frac{dn}{(\sum \bar{n}_j)^2} \left(1 - 2 \frac{n}{\sum \bar{n}_j} + 3 \frac{n^2}{(\sum \bar{n}_j)^2} \right) \times \\ \times \left(d_{n_i} + \bar{n}_i^2 + \frac{2d_{n_i} \bar{n}_i n}{\sum_j d_{n_j}} - \frac{d_{n_i}^2}{\sum_j d_{n_j}} + \frac{d_{n_i}^2 n^2}{(\sum_j d_{n_j})^2} \right) e^{-\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}}} \simeq \\ \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_j}} (\sum \bar{n}_j)^2} \int dn \left(d_{n_i} + \bar{n}_i^2 - \frac{d_{n_i}^2}{\sum_j d_{n_j}} + \frac{d_{n_i}^2 n^2}{(\sum_j d_{n_j})^2} - \frac{4d_{n_i} \bar{n}_i}{(\sum \bar{n}_j) (\sum d_{n_j})} n^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3d_{n_i}}{(\sum \bar{n}_j)^2} n^2 + \frac{3\bar{n}_i^2}{(\sum \bar{n}_j)^2} n^2 - \frac{3d_{n_i}^2 n^2}{(\sum \bar{n}_j)^2 (\sum d_{n_j})} \right) e^{-\frac{n^2}{2\sum_j d_{n_j}}}.$$

Учитывая $d_{n_i} = \omega_\mu \bar{n}_i$, упростим выражение:

$$\left\langle \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dn}{\sqrt{2\pi d_{n_j}} (\sum \bar{n}_j)^2} \left(\omega_\mu \bar{n}_i + \bar{n}_i^2 - \frac{\omega_\mu \bar{n}_i^2}{\sum_j \bar{n}_j} + \frac{3\omega_\mu \bar{n}_i}{(\sum \bar{n}_j)^2} n^2 - \frac{3\omega_\mu \bar{n}_i^2}{(\sum \bar{n}_j)^3} n^2 \right) e^{-\frac{n^2}{2\sum_j d_{n_j}}}$$

$$\left\langle \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \frac{\omega_\mu \bar{n}_i}{(\sum \bar{n}_j)^2} + \frac{\bar{n}_i^2}{(\sum \bar{n}_j)^2} - \frac{\omega_\mu \bar{n}_i^2}{(\sum \bar{n}_j)^3} + \frac{\sqrt{\omega_\mu}}{\sqrt{2} (\sum \bar{n}_j)^3} \left(\frac{3\omega_\mu \bar{n}_i}{(\sum \bar{n}_j)^2} - \frac{3\omega_\mu \bar{n}_i^2}{(\sum \bar{n}_j)^3} \right)$$

Оценим слагаемые по порядку величины:

$$\frac{\bar{n}(\eta_i)}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^2} \sim \frac{1}{M^2 \sqrt{\bar{\eta}}}, \quad \frac{\bar{n}^2(\eta_i)}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^2} \sim \frac{1}{M^2}, \quad \frac{\bar{n}^2(\eta_i)}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^3} \sim \frac{1}{M^3 \sqrt{\bar{\eta}}},$$

$$\frac{\sqrt{\omega_\mu}}{\sqrt{2} (\sum \bar{n}_j)^3} \frac{3\omega_\mu \bar{n}_i}{(\sum \bar{n}_j)^2} \sim \frac{\bar{n}(\eta_i)}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^{7/2}} \sim \frac{1}{M^{7/2} \bar{\eta}^{5/4}}$$

$$\left\langle \frac{n_i^{F^2}}{(\sum_k n_k^F)^2} \right\rangle_{C_n^F} = \frac{\omega_\mu \bar{n}(\eta_i)}{\mu_F (\sum \bar{n}(\eta_j))^2} + \frac{(\bar{n}(\eta_i))^2}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^2} - \frac{\omega_\mu (\bar{n}(\eta_i))^2}{\mu_F (\sum \bar{n}(\eta_j))^3}$$

Вычислим $\left\langle \frac{n_i^F n_j^F}{(\sum_{j=1}^M n_j^F)^2} \right\rangle_{C_n^F}$:

$$\left\langle \frac{n_i n_j}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \prod_{k=1}^M \int dn_k \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_k}}} e^{-\frac{(n_k - \bar{n}_k)^2}{2d_{n_k}}} \frac{n_i n_j}{(\sum_k n_k)^2} =$$

$$= \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha n} \prod_{k=1}^M \int dn_k \frac{e^{i\alpha n_k}}{\sqrt{2\pi d_{n_k}}} e^{-\frac{(n_k - \bar{n}_k)^2}{2d_{n_k}}} n_i n_j.$$

Интегрирование по n_k аналогично (А.2) и (А.3):

$$\left\langle \frac{n_i n_j}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha n} e^{i\alpha \sum_j \bar{n}_j} e^{-\frac{\alpha^2}{2} \sum_j d_{n_j}} (\bar{n}_i + i\alpha d_{n_i}) (\bar{n}_j + i\alpha d_{n_j}).$$

После замены (А.4) получим

$$\left\langle \frac{n_i n_j}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{dx}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2\sum_k d_{n_k}}} e^{-x^2} e^{-\frac{(n - \sum_k \bar{n}_k)^2}{2\sum_k d_{n_k}}} (\bar{n}_i \bar{n}_j +$$

$$+ i(d_{n_i} \bar{n}_j + d_{n_j} \bar{n}_i) \frac{\sum_k \bar{n}_k - n}{\sum_k d_{n_k}} - \frac{2d_{n_i} d_{n_j}}{\sum_k d_{n_k}} x^2 + d_{n_i} d_{n_j} \frac{(\sum_k \bar{n}_k - n)^2}{(\sum_k d_{n_k})^2}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_k d_{n_k}}} \int \frac{dn}{n^2} e^{-\frac{(n - \sum_k \bar{n}_k)^2}{2 \sum_k d_{n_k}}} \times \\
&\times \left(\bar{n}_i \bar{n}_j + i (d_{n_i} \bar{n}_j + d_{n_j} \bar{n}_i) \frac{\sum_k \bar{n}_k - n}{\sum_k d_{n_k}} - \frac{d_{n_i} d_{n_j}}{\sum_k d_{n_k}} + d_{n_i} d_{n_j} \frac{(\sum_k \bar{n}_k - n)^2}{(\sum_k d_{n_k})^2} \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_k d_{n_k}}} \int \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \sum_k d_{n_k}}} dn}{(n + \sum_k \bar{n}_k)^2} \left(\bar{n}_i \bar{n}_j - 2i \frac{\bar{n}_i \bar{n}_j}{\sum_k \bar{n}_k} n - \frac{\omega_\mu \bar{n}_i \bar{n}_j}{\sum_k \bar{n}_k} + \frac{\bar{n}_i \bar{n}_j}{(\sum_k \bar{n}_k)^2} n^2 \right)
\end{aligned}$$

Экспонента $e^{-\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}}}$ дает основной вклад при $\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}} \sim 1$.

$$n \sim \sqrt{\sum_j d_{n_j}} \sim \sqrt{M \sqrt{\eta}}$$

$$\frac{n}{\sum \bar{n}_j} \sim \frac{1}{\sqrt{M \sqrt{\eta}}},$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{n}{\sum \bar{n}_j}\right)^2} \simeq 1 - 2 \frac{n}{\sum \bar{n}_j} + 3 \frac{n^2}{(\sum \bar{n}_j)^2}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{n_i n_j}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_k d_{n_k}}} \int \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \sum_k d_{n_k}}}}{(\sum_k \bar{n}_k)^2} \left(1 - 2 \frac{n}{\sum \bar{n}_j} + 3 \frac{n^2}{(\sum \bar{n}_j)^2} \right) \times \\
&\times \left(\bar{n}_i \bar{n}_j - 2i \frac{\bar{n}_i \bar{n}_j}{\sum_k \bar{n}_k} n - \frac{\omega_\mu \bar{n}_i \bar{n}_j}{\sum_k \bar{n}_k} + \frac{\bar{n}_i \bar{n}_j}{(\sum_k \bar{n}_k)^2} n^2 \right) dn
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{n_i n_j}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} &= \int \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \sum_k d_{n_k}}}}{\sqrt{2\pi \sum_k d_{n_k}} (\sum_k \bar{n}_k)^2} \left(\bar{n}_i \bar{n}_j - \frac{\omega_\mu \bar{n}_i \bar{n}_j}{\sum_k \bar{n}_k} + \frac{4(1+i) \bar{n}_i \bar{n}_j}{(\sum_k \bar{n}_k)^2} n^2 - \frac{3\omega_\mu \bar{n}_i \bar{n}_j}{(\sum_k \bar{n}_k)^3} n^2 \right) = \\
&= \frac{1}{(\sum_k \bar{n}_k)^2} \left(\bar{n}_i \bar{n}_j - \frac{\omega_\mu \bar{n}_i \bar{n}_j}{\sum_k \bar{n}_k} + \sqrt{\frac{\sum_k d_{n_k}}{2}} \left(\frac{4(1+i) \bar{n}_i \bar{n}_j}{(\sum_k \bar{n}_k)^2} - \frac{3\omega_\mu \bar{n}_i \bar{n}_j}{(\sum_k \bar{n}_k)^3} \right) \right).
\end{aligned}$$

Оценим слагаемые по порядку величины:

$$\frac{\bar{n}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j)}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^2} \sim \frac{1}{M^2}, \quad \frac{\bar{n}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j)}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^3} \sim \frac{1}{M^3 \sqrt{\eta}},$$

$$\frac{\sqrt{\sum_k d_{n_k}} \bar{n}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j)}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^4} \sim \frac{1}{M^{7/2} \eta^{3/4}}$$

$$\left\langle \frac{n_i^F n_j^F}{(\sum_k n_k^F)^2} \right\rangle_{C_n^F} = \frac{\bar{n}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j)}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^2} - \frac{\omega_\mu \bar{n}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j)}{\mu_F (\sum \bar{n}(\eta_j))^3}.$$

Приложение Б. Усреднение по конфигурациям

$$C_\eta$$

Вычислим $\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k))^2} \right\rangle_{C_\eta}$:

$$\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k))^2} \right\rangle_{C_\eta} = \prod_{j=1}^M \int d\eta_j P(\eta_j) \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{(\sum_k \bar{n}(\eta_k))^2}.$$

Подставим под интеграл 1, представленную в виде

$$1 = \int dr \delta\left(r - \sum_k \bar{n}(\eta_k)\right) = \int dr \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta(r - \sum_k \bar{n}(\eta_k))},$$

получим

$$\int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} \prod_{j=1}^M \int d\eta_j P(\eta_j) e^{i\beta \bar{n}(\eta_j)} \sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i). \quad (\text{Б.1})$$

Интегралы по η_j сводятся к двум типам:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{\eta}}} \int d\eta e^{-\frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{2\omega_\eta \bar{\eta}}} e^{i\beta \bar{n}(\eta)},$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{\eta}}} \int d\eta e^{-\frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{2\omega_\eta \bar{\eta}}} e^{i\beta \bar{n}(\eta)} \bar{n}(\eta) \bar{p}^2(\eta).$$

Используем явный вид $\bar{n}(\eta_i)$ и $\bar{p}(\eta_i)$ при вычислении интегралов. Введем обозначения:

$$y = \frac{\eta}{\bar{\eta}} - 1, \quad a = \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}},$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int dy e^{-\frac{y^2}{2a}} e^{i\beta \sqrt{\bar{\eta}(1+y)}}. \quad (\text{Б.2})$$

Преобразуем выражение в показателе экспоненты в I_1 :

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2a} - i\beta \sqrt{\bar{\eta}(1+y)} &\approx \frac{y^2}{2a} - i\beta \sqrt{\bar{\eta}} \left(1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8}\right) = \\ &= \left(\sqrt{\frac{4 + ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}}{8a}} y - \sqrt{\frac{8a}{4 + ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}}} \frac{i\beta\sqrt{\bar{\eta}}}{4} \right)^2 - i\beta\sqrt{\bar{\eta}} + \frac{a\beta^2\bar{\eta}}{2(4 + ia\beta\sqrt{\bar{\eta}})}. \end{aligned}$$

Тогда

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}} - \frac{a\beta^2\bar{\eta}}{2(4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}})}} \sqrt{\frac{8a}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}}} \int e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}} - \frac{a\beta^2\bar{\eta}}{2(4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}})}} \sqrt{\frac{8a}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}}} \sqrt{\pi},$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{1+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}/4}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}}} e^{-\frac{a\beta^2\bar{\eta}}{8(1+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}/4)}}$$

Вычислим I_2 :

$$I_2 = \frac{p_0^2}{\sqrt{2\pi a}} \int dy e^{-\frac{y^2}{2a}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}(1+y)}} \bar{\eta} (1+y).$$

Выражение в показателе экспоненты совпадает с (Б.2). После аналогичных преобразований получим

$$I_2 = \frac{\bar{n}(\bar{\eta}) \bar{p}^2(\bar{\eta})}{\sqrt{2\pi a}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}} - \frac{a\beta^2\bar{\eta}}{2(4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}})}} \sqrt{\frac{8a}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}}} \int e^{-x^2} \left[1 + \frac{2ai\beta\sqrt{\bar{\eta}}}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}} \right] dx,$$

$$I_2 = \bar{n}(\bar{\eta}) \bar{p}^2(\bar{\eta}) I_1 \left[1 + \frac{2ai\beta\sqrt{\bar{\eta}}}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}} \right].$$

В исходных переменных

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}}} e^{-\frac{\omega_\eta\beta^2}{8}} e^{i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32\sqrt{\bar{\eta}}+8i\omega_\eta\beta}},$$

$$I_2 = \bar{n}(\bar{\eta}) \bar{p}^2(\bar{\eta}) I_1 \left[1 + \frac{\omega_\eta i\beta}{2\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right)\sqrt{\bar{\eta}}} \right].$$

$$\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} \prod_{j=1}^M \frac{e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}_j}} e^{-\frac{\omega_\eta\beta^2}{8}} e^{i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32\sqrt{\bar{\eta}_j}+8i\omega_\eta\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}}}} \times$$

$$\times \sum_i \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 + \frac{\omega_\eta i\beta}{2\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}}\right)\sqrt{\bar{\eta}_i}} \right].$$

Экспонента $e^{-\frac{\omega_\eta\beta^2}{8}}$ дает основной вклад при $\beta \sim 1$. Учитывая $\bar{\eta} \gg 1$, можно получить приближенные выражения в этой области для I_1 , I_2 :

$$32\sqrt{\bar{\eta}_i} + 8i\omega_\eta\beta \approx 32\sqrt{\bar{\eta}_i}, \quad e^{i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32\sqrt{\bar{\eta}_i}+8i\omega_\eta\beta}} \approx 1 + i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32} \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}_i}}.$$

$$\int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} e^{-\frac{\omega_\eta M \beta^2}{8}} e^{i\beta \sum_k \bar{n}(\bar{\eta}_k)} \prod_{j=1}^M \left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + i\frac{\omega_\eta^2 \beta^3}{32} \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 + \frac{\omega_\eta i \beta}{2 \left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}}\right) \sqrt{\bar{\eta}_i}}\right]$$

Основной вклад вносит область $\beta \sim \frac{1}{\sqrt{M}}$. С учетом этого добавка к 1 в произведении мала ($\sim \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}M}}$), тогда

$$\prod_{j=1}^M \left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \prod_{j=1}^M e^{-\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right)} \approx e^{-\frac{i\omega_\eta \beta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}} - \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{64} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}}.$$

Добавка к 1 в $\left(1 + i\frac{\omega_\eta^2 \beta^3}{32} \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right)$ порядка $\sim \frac{1}{\sqrt{M^3 \bar{\eta}}}$ и может быть отброшена. Рассмотрим выражение в квадратных скобках по порядку величины:

$$\frac{\omega_\eta i \beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}}\right) \sqrt{\bar{\eta}_i}} \approx \frac{\omega_\eta i \beta}{\sqrt{\bar{\eta}_i}} \left(1 - \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{16\bar{\eta}_i}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{M\bar{\eta}}} + \frac{1}{M\bar{\eta}} + \frac{1}{(M\bar{\eta})^{3/2}},$$

Будем рассматривать только следующие порядки малости: $\frac{1}{\bar{\eta}}$, $\frac{1}{\sqrt{M\bar{\eta}}}$, $\frac{1}{(M\bar{\eta})}$, все члены более высокого порядка отброшены.

$$\int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} e^{-\frac{\omega_\eta M \beta^2}{8}} e^{i\beta \sum_k \bar{n}(\bar{\eta}_k)} e^{-\frac{i\omega_\eta \beta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}} - \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{64} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 + \frac{\omega_\eta i \beta}{2\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{\beta^2 \omega_\eta^2}{8\bar{\eta}_i}\right]$$

Преобразуем выражение в показателе экспоненты в интеграле по β :

$$i\beta r + \frac{\omega_\eta M \beta^2}{8} - i\beta \sum_i \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} + \frac{i\omega_\eta \beta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}} + \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{64} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1} = (a\beta + ib)^2 + b^2,$$

где

$$a = \frac{\sqrt{8\omega_\eta M + \omega_\eta^2 \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}}}{8}, \quad b = 4 \frac{r - \sum_i \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} + \frac{\omega_\eta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{8\omega_\eta M + \omega_\eta^2 \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}}}.$$

$$\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-(a\beta + ib)^2} e^{-b^2} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 + \frac{\omega_\eta i \beta}{2\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{\beta^2 \omega_\eta^2}{8\bar{\eta}_i}\right].$$

Сделаем замену переменной $a\beta + ib = x$:

$$\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{dx}{2\pi a} e^{-x^2} e^{-b^2} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_\eta b}{a\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2 x^2}{a^2 \bar{\eta}_i} - \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2 \bar{\eta}_i}\right],$$

и выполним интегрирование по x :

$$\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{r^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} e^{-b^2} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_\eta b}{a\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{1}{16} \frac{\omega_\eta^2}{a^2 \bar{\eta}_i} - \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2 \bar{\eta}_i} \right].$$

Введем обозначения:

$$\Sigma' = \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega_\eta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}}, \quad M' = \frac{\omega_\eta}{2} M + \frac{\omega_\eta^2}{16} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1},$$

тогда

$$b = \frac{r - \Sigma'}{\sqrt{M'}}, \quad a = \frac{\sqrt{M'}}{2},$$

$$\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{(r + \Sigma')^2} \frac{e^{-\frac{r^2}{M'}}}{\sqrt{\pi M'}} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 + \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{1}{2} \frac{\omega_\eta^2}{M' \bar{\eta}_i} \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{M'} \right) \right]. \quad (\text{Б.3})$$

Основной вклад вносит область $r \sim 1/\sqrt{M'}$. $\Sigma' \sim M\sqrt{\bar{\eta}}$, тогда $r/\Sigma' \sim 1/\sqrt{M\bar{\eta}}$.

Разложим $1/(r + \Sigma')^2$ по степеням r/Σ' :

$$\frac{1}{(r + \Sigma')^2} = \frac{1}{\Sigma'^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{\Sigma'}\right)^2} \approx \frac{1}{\Sigma'^2} \left(1 - 2\frac{r}{\Sigma'} + 3\frac{r^2}{\Sigma'^2} \right) \quad (\text{Б.4})$$

и подставим разложение (Б.4) в (Б.3):

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} &= \int dr \left(1 - 2\frac{r}{\Sigma'} + 3\frac{r^2}{\Sigma'^2} \right) \frac{e^{-\frac{r^2}{M'}}}{\Sigma'^2 \sqrt{\pi M'}} \times \\ &\times \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 + \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{1}{2} \frac{\omega_\eta^2}{M' \bar{\eta}_i} \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{M'} \right) \right], \\ \left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} &= \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 - \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{2} \frac{M'}{\Sigma'^2} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta^2}{\Sigma'^2 \bar{\eta}_i} \right]}{\Sigma'^2}. \end{aligned}$$

Отбрасывая члены, более высокого порядка малости, чем $1/\bar{\eta}$ и $1/M$, получим

$$\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \frac{1}{\Sigma'^2} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 - \frac{\omega_\eta}{\sqrt{\bar{\eta}_i} S_{1/2}} + \frac{3\omega_\eta M}{4 S_{1/2}^2} \right]$$

Вычислим $\left\langle \frac{(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i))^2}{(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k))^2} \right\rangle_{C_\eta}$:

$$\left\langle \frac{(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i))^2}{(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k))^2} \right\rangle_{C_\eta} = \prod_{j=1}^M \int d\eta_j P(\eta_j) \frac{(\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i))^2}{(\sum_k \bar{n}(\eta_k))^2}.$$

Подставим под интеграл 1, представленную в виде

$$1 = \int dr \delta\left(r - \sum_k \bar{n}(\eta_k)\right) = \int dr \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta(r - \sum_k \bar{n}(\eta_k))}, \quad (\text{Б.5})$$

получим

$$\begin{aligned} & \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} \prod_{j=1}^M \int d\eta_j P(\eta_j) e^{i\beta \bar{n}(\eta_j)} \left(\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2 = \\ & = \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} \prod_{j=1}^M \int d\eta_j P(\eta_j) e^{i\beta \bar{n}(\eta_j)} \left(\sum_i \bar{n}^2(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j) \bar{p}(\eta_j) \right) \end{aligned}$$

Интегралы по η_j сводятся к трем типам:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{\eta}}} \int d\eta e^{-\frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{2\omega_\eta \bar{\eta}}} e^{i\beta \bar{n}(\eta)}, \quad (\text{Б.6})$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{\eta}}} \int d\eta e^{-\frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{2\omega_\eta \bar{\eta}}} e^{i\beta \bar{n}(\eta)} \bar{n}(\eta) \bar{p}(\eta), \quad (\text{Б.7})$$

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{\eta}}} \int d\eta e^{-\frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{2\omega_\eta \bar{\eta}}} e^{i\beta \bar{n}(\eta)} \bar{n}^2(\eta) \bar{p}^2(\eta). \quad (\text{Б.8})$$

Используем явный вид $\bar{n}(\eta_i)$ и $\bar{p}(\eta_i)$ при вычислении интегралов. Введем обозначения:

$$y = \frac{\eta}{\bar{\eta}} - 1, \quad a = \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}},$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int dy e^{-\frac{y^2}{2a}} e^{i\beta \sqrt{\bar{\eta}(1+y)}}.$$

Преобразуем выражение в показателе экспоненты в I_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{y^2}{2a} - i\beta \sqrt{\bar{\eta}(1+y)} \approx \frac{y^2}{2a} - i\beta \sqrt{\bar{\eta}} \left(1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} \right) = \\ & = \left(\sqrt{\frac{4 + ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}}{8a}} y - \sqrt{\frac{8a}{4 + ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}}} \frac{i\beta\sqrt{\bar{\eta}}}{4} \right)^2 - i\beta \sqrt{\bar{\eta}} + \frac{a\beta^2 \bar{\eta}}{2(4 + ia\beta\sqrt{\bar{\eta}})}. \end{aligned}$$

Тогда

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{i\beta\sqrt{\eta} - \frac{a\beta^2\eta}{2(4+ia\beta\sqrt{\eta})}} \sqrt{\frac{8a}{4+ia\beta\sqrt{\eta}}} \int e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{i\beta\sqrt{\eta} - \frac{a\beta^2\eta}{2(4+ia\beta\sqrt{\eta})}} \sqrt{\frac{8a}{4+ia\beta\sqrt{\eta}}} \sqrt{\pi},$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{1+ia\beta\sqrt{\eta}/4}} e^{i\beta\sqrt{\eta}} e^{-\frac{a\beta^2\eta}{8(1+ia\beta\sqrt{\eta}/4)}}$$

Вычислим I_2 :

$$I_2 = \frac{p_0^2}{\sqrt{2\pi a}} \int dy e^{-\frac{y^2}{2a}} e^{i\beta\sqrt{\eta(1+y)}} (\eta(1+y))^{\frac{3}{4}}.$$

$$(\eta(1+y))^{\frac{3}{4}} \approx \eta^{\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{3}{4}y - \frac{3}{32}y^2\right).$$

Выражение в показателе экспоненты совпадает с (Б.2). После аналогичных преобразований получим

$$I_2 = \frac{\bar{n}(\eta) \bar{p}(\eta)}{\sqrt{2\pi a}} e^{i\beta\sqrt{\eta} - \frac{a\beta^2\eta}{2(4+ia\beta\sqrt{\eta})}} \sqrt{\frac{8a}{4+ia\beta\sqrt{\eta}}} \times$$

$$\times \int e^{-x^2} \left[1 + \frac{3}{24} \frac{ai\beta\sqrt{\eta}}{4+ia\beta\sqrt{\eta}} - \frac{3}{44} \frac{ax^2}{4+ia\beta\sqrt{\eta}} + \frac{3}{8} \frac{a^2\beta^2\eta}{(4+ia\beta\sqrt{\eta})^2} \right] dx,$$

$$I_2 = \bar{n}(\eta) \bar{p}(\eta) I_1 \left[1 + \frac{3}{8} \frac{ai\beta\sqrt{\eta}}{1+ia\beta\sqrt{\eta}/4} - \frac{3}{32} \frac{a}{1+ia\beta\sqrt{\eta}/4} + \frac{3}{128} \frac{a^2\beta^2\eta}{(1+ia\beta\sqrt{\eta}/4)^2} \right].$$

Вычислим I_3 :

$$I_3 = \frac{p_0^2}{\sqrt{2\pi a}} \int dy e^{-\frac{y^2}{2a}} e^{i\beta\sqrt{\eta(1+y)}} (\eta(1+y))^{\frac{3}{2}}.$$

$$(\eta(1+y))^{\frac{3}{2}} \approx \eta^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{3}{2}y + \frac{3}{8}y^2\right).$$

Выражение в показателе экспоненты совпадает с (Б.2). После аналогичных преобразований получим

$$I_3 = \frac{\bar{n}^2(\eta) \bar{p}^2(\eta)}{\sqrt{2\pi a}} e^{i\beta\sqrt{\eta} - \frac{a\beta^2\eta}{2(4+ia\beta\sqrt{\eta})}} \sqrt{\frac{8a}{4+ia\beta\sqrt{\eta}}} \times$$

$$\times \int e^{-x^2} \left[1 + 3 \frac{ai\beta\sqrt{\eta}}{4+ia\beta\sqrt{\eta}} + 3 \frac{ax^2}{4+ia\beta\sqrt{\eta}} - \frac{3}{2} \frac{a^2\beta^2\eta}{(4+ia\beta\sqrt{\eta})^2} \right] dx,$$

$$I_3 = \bar{n}^2(\eta) \bar{p}^2(\eta) I_1 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{ai\beta\sqrt{\bar{\eta}}}{1 + ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}/4} + \frac{3}{8} \frac{a}{1 + ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}/4} - \frac{3}{32} \frac{a^2\beta^2\bar{\eta}}{(1 + ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}/4)^2} \right].$$

В исходных переменных

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}}} e^{-\frac{\omega_\eta\beta^2}{8}} e^{i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32\sqrt{\bar{\eta}}+8i\omega_\eta\beta}},$$

$$I_2 = \bar{n}(\bar{\eta}) \bar{p}(\bar{\eta}) I_1 \left[1 + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta i\beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \sqrt{\bar{\eta}}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \bar{\eta}} + \frac{3}{128} \frac{\omega_\eta^2\beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right)^2 \bar{\eta}} \right],$$

$$I_3 = \bar{n}^2(\bar{\eta}) \bar{p}^2(\bar{\eta}) I_1 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta i\beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \sqrt{\bar{\eta}}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \bar{\eta}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta^2\beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right)^2 \bar{\eta}} \right].$$

Обозначим

$$S_2(\bar{\eta}) \equiv \left[1 + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta i\beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \sqrt{\bar{\eta}}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \bar{\eta}} + \frac{3}{128} \frac{\omega_\eta^2\beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right)^2 \bar{\eta}} \right],$$

$$S_3(\bar{\eta}) \equiv \left[1 + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta i\beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \sqrt{\bar{\eta}}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \bar{\eta}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta^2\beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right)^2 \bar{\eta}} \right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_n} &= \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} \prod_{j=1}^M \frac{e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}}} e^{-\frac{\omega_\eta\beta^2}{8}} e^{i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32\sqrt{\bar{\eta}}+8i\omega_\eta\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}}} \times \\ &\times \left(\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) S_3(\bar{\eta}_i) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) S_2(\bar{\eta}_i) S_2(\bar{\eta}_j) \right) \end{aligned}$$

Экспонента $e^{-\frac{\omega_\eta\beta^2}{8}}$ дает основной вклад при $\beta \sim 1$. Учитывая $\bar{\eta} \gg 1$, можно получить приближенное выражение в этой области:

$$32\sqrt{\bar{\eta}_i} + 8i\omega_\eta\beta \approx 32\sqrt{\bar{\eta}_i}, \quad e^{i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32\sqrt{\bar{\eta}_i}+8i\omega_\eta\beta}} \approx 1 + i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32} \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}_i}}.$$

$$\int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} e^{-\frac{\omega_\eta M \beta^2}{8}} e^{i\beta \sum_k \bar{n}(\bar{\eta}_k)} \prod_{j=1}^M \left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + i\frac{\omega_\eta^2 \beta^3}{32} \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right) \times$$

$$\times \left(\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) S_3(\bar{\eta}_i) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) S_2(\bar{\eta}_i) S_2(\bar{\eta}_j) \right)$$

Основной вклад вносит область $\beta \sim \frac{1}{\sqrt{M}}$. С учетом этого добавка к 1 в произведении мала ($\sim \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}M}}$), тогда

$$\prod_{j=1}^M \left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \prod_{j=1}^M e^{-\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right)} \approx e^{-\frac{i\omega_\eta \beta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}} - \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{64} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}}.$$

Добавка к 1 в $\left(1 + i\frac{\omega_\eta^2 \beta^3}{32} \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right)$ порядка $\sim \frac{1}{\sqrt{M^3 \bar{\eta}}}$ и может быть отброшена.

$$\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} e^{-\frac{\omega_\eta M \beta^2}{8}} e^{i\beta \sum_k \bar{n}(\bar{\eta}_k)} e^{-\frac{i\omega_\eta \beta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}} - \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{64} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}} \times$$

$$\times \left(\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) S_3(\bar{\eta}_i) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) S_2(\bar{\eta}_i) S_2(\bar{\eta}_j) \right)$$

Рассмотрим выражения в $S_2(\eta_i) S_2(\eta_j)$ и S_3 по порядку величины:

Будем рассматривать только следующие порядки малости: $\frac{1}{\bar{\eta}}$, $\frac{1}{\sqrt{M\bar{\eta}}}$, $\frac{1}{(M\bar{\eta})}$.

$$S_2(\eta_i) S_2(\eta_j) = 1 + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta i \beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}}\right) \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}}\right) \bar{\eta}_i} + \frac{3}{128} \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}}\right)^2 \bar{\eta}_i} +$$

$$+ \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta i \beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right) \sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{9}{64} \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}}\right) \left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right) \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right) \bar{\eta}_j} + \frac{3}{128} \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right)^2 \bar{\eta}_j} + \dots$$

(следующие слагаемые дадут вклад более высокого порядка малости, чем рассматриваемые $\frac{1}{\bar{\eta}}$, $\frac{1}{\sqrt{M\bar{\eta}}}$, $\frac{1}{(M\bar{\eta})}$)

$$S_3(\bar{\eta}) = 1 + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta i \beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \sqrt{\bar{\eta}}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \bar{\eta}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right)^2 \bar{\eta}}.$$

$$\frac{\omega_\eta i \beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}}\right) \sqrt{\bar{\eta}_i}} \approx \frac{\omega_\eta i \beta}{\sqrt{\bar{\eta}_i}} \left(1 - \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{16\bar{\eta}_i}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{M\bar{\eta}}} + \frac{1}{M\bar{\eta}} + \frac{1}{(M\bar{\eta})^{3/2}},$$

$$\frac{\omega_\eta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}}\right) \bar{\eta}_i} \approx \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \left(1 - \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{\omega_\eta^2\beta^2}{16\bar{\eta}_i}\right) \sim \frac{1}{\bar{\eta}} + \frac{1}{\sqrt{M\bar{\eta}^3}} + \frac{1}{M\bar{\eta}^2},$$

$$\frac{\omega_\eta^2\beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}}\right)^2 \bar{\eta}_i} \approx \frac{\omega_\eta^2\beta^2}{\bar{\eta}_i} \left(1 - \frac{i\omega_\eta\beta}{2\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3\omega_\eta^2\beta^2}{16\bar{\eta}_i}\right) \sim \frac{1}{M\bar{\eta}} + \frac{1}{(M\bar{\eta})^{3/2}} + \frac{1}{(M\bar{\eta})^2}.$$

Тогда

$$S_3(\bar{\eta}_i) \approx 1 + \frac{3\omega_\eta i\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3\omega_\eta^2\beta^2}{32\bar{\eta}_i} + \frac{3\omega_\eta}{8\bar{\eta}_i},$$

$$S_2(\bar{\eta}_i)S_2(\bar{\eta}_j) \approx 1 + \frac{3\omega_\eta i\beta}{8\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3\omega_\eta i\beta}{8\sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{3\omega_\eta}{32\bar{\eta}_i} - \frac{3\omega_\eta}{32\bar{\eta}_j} + \frac{35\omega_\eta^2\beta^2}{128\bar{\eta}_i} + \frac{35\omega_\eta^2\beta^2}{128\bar{\eta}_j} - \frac{9\omega_\eta^2\beta^2}{64\sqrt{\bar{\eta}_i\bar{\eta}_j}}.$$

Преобразуем выражение в показателе экспоненты в интеграле по β :

$$i\beta r + \frac{\omega_\eta M\beta^2}{8} - i\beta \sum_i \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} + \frac{i\omega_\eta\beta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}} + \frac{\omega_\eta^2\beta^2}{64} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1} = (a\beta + ib)^2 + b^2,$$

где

$$a = \frac{\sqrt{8\omega_\eta M + \omega_\eta^2 \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}}}{8}, \quad b = 4 \frac{r - \sum_i \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} + \frac{\omega_\eta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{8\omega_\eta M + \omega_\eta^2 \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}}}.$$

$$\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-(a\beta+ib)^2} e^{-b^2} \times$$

$$\times \left(\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3\omega_\eta i\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3\omega_\eta^2\beta^2}{32\bar{\eta}_i} + \frac{3\omega_\eta}{8\bar{\eta}_i}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left(1 - \frac{9\omega_\eta^2\beta^2}{64\sqrt{\bar{\eta}_i\bar{\eta}_j}} + \frac{3\omega_\eta i\beta}{8\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3\omega_\eta i\beta}{8\sqrt{\bar{\eta}_j}} + \left(\frac{35}{128}\omega_\eta^2\beta^2 - \frac{3}{32}\omega_\eta\right) \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j}\right)\right)\right)$$

Сделаем замену переменной $a\beta + ib = x$:

$$\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{dx}{2\pi a} e^{-x^2} e^{-b^2} \times$$

$$\times \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3\omega_\eta b}{4a\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3\omega_\eta^2 x^2}{32a^2\bar{\eta}_i} - \frac{3\omega_\eta^2 b^2}{32a^2\bar{\eta}_i} + \frac{3\omega_\eta}{8\bar{\eta}_i}\right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ 1 - \frac{9}{64} \frac{\omega_\eta^2 x^2}{a^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{64} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \right. \\
& \left. + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta b}{a \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta b}{a \sqrt{\bar{\eta}_j}} \left(\frac{35}{128} \frac{\omega_\eta^2 x^2}{a^2} - \frac{35}{128} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2} - \frac{3}{32} \omega_\eta \right) \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\}
\end{aligned}$$

и выполним интегрирование по x :

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{2\sqrt{\pi}ar^2} e^{-b^2} \times \\
& \times \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta b}{a \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{64} \frac{\omega_\eta^2}{a^2 \bar{\eta}_i} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \right) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \times \right. \\
& \left. \times \left\{ 1 - \frac{9}{128} \frac{\omega_\eta^2}{a^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{64} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta b}{a \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta b}{a \sqrt{\bar{\eta}_j}} + \left(\frac{35}{256} \frac{\omega_\eta^2}{a^2} - \frac{35}{128} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2} - \frac{3}{32} \omega_\eta \right) \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \right] \quad (\text{Б.9})
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\Sigma' = \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega_\eta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}}, \quad M' = \frac{\omega_\eta}{2} M + \frac{\omega_\eta^2}{16} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1},$$

тогда

$$b = \frac{r - \Sigma'}{\sqrt{M'}}, \quad a = \frac{\sqrt{M'}}{2},$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{(r + \Sigma')^2} \frac{e^{-\frac{r^2}{M'}}}{\sqrt{\pi M'}} \times \\
& \times \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta^2}{M' \bar{\eta}_i} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \right) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \times \right. \\
& \times \left\{ 1 - \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{16} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_j}} + \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{35}{64} \frac{\omega_\eta^2}{M'} - \frac{3}{32} \omega_\eta - \frac{35}{32} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2} \right) \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

Основной вклад вносит область $r \sim 1/\sqrt{M'}$. $\Sigma' \sim M\sqrt{\bar{\eta}}$, тогда $r/\Sigma' \sim 1/\sqrt{M\bar{\eta}}$. Разложим $1/(r + \Sigma')^2$ по степеням r/Σ' (Б.4) и подставим это разложение:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int dr \left(1 - 2 \frac{r}{\Sigma'} + 3 \frac{r^2}{\Sigma'^2} \right) \frac{e^{-\frac{r^2}{M'}}}{\Sigma'^2 \sqrt{\pi M'}} \times \\
& \times \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta^2}{M' \bar{\eta}_i} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \right) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \times \right. \\
& \times \left\{ 1 - \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{16} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_j}} + \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{35}{64} \frac{\omega_\eta^2}{M'} - \frac{3}{32} \omega_\eta - \frac{35}{32} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2} \right) \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \right] \\
& \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \frac{1}{\Sigma'^2} \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \times \right. \\
& \times \left(1 + \frac{3}{2} \frac{M'}{\Sigma'^2} - \frac{3}{2} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{9}{16} \frac{\omega_\eta^2}{\Sigma'^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} + \frac{9}{16} \frac{\omega_\eta M'}{\Sigma'^2 \bar{\eta}_i} \right) + \\
& + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{M'}{\Sigma'^2} - \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} - \frac{27}{64} \frac{\omega_\eta^2}{M' \Sigma'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \right. \\
& \left. + \frac{81}{64} \frac{\omega_\eta^2}{\Sigma'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_j}} - \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \left(\frac{3}{32} \omega_\eta + \frac{9}{64} \frac{\omega_\eta M'}{\Sigma'^2} + \frac{105}{64} \frac{\omega_\eta^2}{\Sigma'^2} \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

Отбрасывая члены, более высокого порядка малости, чем $1/\bar{\eta}$ и $1/M$, получим

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \frac{1}{\Sigma'^2} \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{M'}{\Sigma'^2} - \frac{3}{2} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \right) + \right. \\
& \left. + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{M'}{\Sigma'^2} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{3}{32} \omega_\eta \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

Вычислим $\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^3} \right\rangle_{C_\eta}$:

$$\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^3} \right\rangle_{C_\eta} = \prod_{j=1}^M \int d\eta_j P(\eta_j) \frac{\left(\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_k \bar{n}(\eta_k) \right)^3}.$$

После преобразований, аналогичных (Б.5)-(Б.9), получим

$$\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^3} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{2\sqrt{\pi}ar^3} e^{-b^2} \times$$

$$\times \left[\sum_i \bar{n}^2(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i) \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta b}{a\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{64} \frac{\omega_\eta^2}{a^2 \bar{\eta}_i} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3\omega_\eta}{8 \bar{\eta}_i} \right) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j) \bar{p}(\eta_j) \times \right.$$

$$\left. \times \left\{ 1 - \frac{9}{128} \frac{\omega_\eta^2}{a^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{64} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta b}{a\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta b}{a\sqrt{\bar{\eta}_j}} + \left(\frac{35}{256} \frac{\omega_\eta^2}{a^2} - \frac{35}{128} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2} - \frac{3}{32} \omega_\eta \right) \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \right]$$

Введем обозначения:

$$\Sigma' = \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega_\eta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}}, \quad M' = \frac{\omega_\eta}{2} M + \frac{\omega_\eta^2}{16} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1},$$

тогда

$$b = \frac{r - \Sigma'}{\sqrt{M'}}, \quad a = \frac{\sqrt{M'}}{2},$$

$$\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^3} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{(r + \Sigma')^3} \frac{e^{-\frac{r^2}{M'}}}{\sqrt{\pi M'}} \times$$

$$\times \left[\sum_i \bar{n}^2(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta^2}{M' \bar{\eta}_i} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3\omega_\eta}{8 \bar{\eta}_i} \right) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j) \bar{p}(\eta_j) \times \right.$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{16} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_j}} + \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{35}{64} \frac{\omega_\eta^2}{M'} - \frac{3}{32} \omega_\eta - \frac{35}{32} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2} \right) \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \right]. \quad (\text{Б.10})$$

Основной вклад вносит область $r \sim 1/\sqrt{M'}$. $\Sigma' \sim M\sqrt{\bar{\eta}}$, тогда $r/\Sigma' \sim 1/\sqrt{M'\bar{\eta}}$. Разложим $1/(r + \Sigma')^3$ по степеням r/Σ' :

$$\frac{1}{(r + \Sigma')^3} = \frac{1}{\Sigma'^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{\Sigma'}\right)^3} \approx \frac{1}{\Sigma'^3} \left(1 - 3 \frac{r}{\Sigma'} + 6 \frac{r^2}{\Sigma'^2} \right) \quad (\text{Б.11})$$

и подставим это разложение в (Б.10):

$$\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^3} \right\rangle_{C_\eta} = \int dr \left(1 - 3 \frac{r}{\Sigma'} + 6 \frac{r^2}{\Sigma'^2} \right) \frac{e^{-\frac{r^2}{M'}}}{\Sigma'^3 \sqrt{\pi M'}} \times$$

$$\times \left[\sum_i \bar{n}^2(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta^2}{M' \bar{\eta}_i} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3\omega_\eta}{8 \bar{\eta}_i} \right) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j) \bar{p}(\eta_j) \times \right.$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{16} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_j}} + \left(\frac{35}{64} \frac{\omega_\eta^2}{M'} - \frac{3}{32} \omega_\eta - \frac{35}{32} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2} \right) \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\}.$$

Проинтегрируем по r :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^3} \right\rangle_{C_\eta} &= \frac{1}{\Sigma'^3} \left[\sum_i \bar{n}^2(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i) \left(1 + 3 \frac{M'}{\Sigma'^2} - \frac{9}{4} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta^2}{\Sigma'^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} + \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta M'}{\Sigma'^2 \bar{\eta}_i} \right) + \right. \\ &+ \sum_{i \neq j} \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j) \bar{p}(\eta_j) \left\{ 1 + 3 \frac{M'}{\Sigma'^2} - \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{27}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M' \Sigma'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{81}{32} \frac{\omega_\eta^2}{\Sigma'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} - \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_j}} - \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \left(\frac{3}{32} \omega_\eta + \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta M'}{\Sigma'^2} + \frac{105}{32} \frac{\omega_\eta^2}{\Sigma'^2} \right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Отбрасывая члены, более высокого порядка малости, чем $1/\bar{\eta}$ и $1/M$, получим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^3} \right\rangle_{C_\eta} &= \frac{1}{\Sigma'^3} \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{M \omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{9}{4} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2} \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \right) + \right. \\ &\left. + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{M \omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2} \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2} \sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{3}{32} \omega_\eta \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

Приложение В. Вычисления коррелятора и дисперсии в формуле (2.40) для коэффициента

$p_t - p_t$ корреляций

Вычислим числитель и знаменатель формулы (2.40):

$$\begin{aligned} \text{cov}(p_F, p_B) &= \frac{\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \frac{9}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} +}{\left(S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2}\right)^2} + \\ &+ \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ \frac{1}{4} \frac{M\omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right\}}{\left(S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2}\right)^2}, \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{p_F} &= \text{cov}(p_F, p_B) + \frac{\gamma + \omega_\mu}{\mu_F \left(S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2}\right)^2} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 - \frac{\omega_\eta}{\sqrt{\bar{\eta}_i} S_{1/2}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta M}{S_{1/2}^2}\right) - \\ &- \frac{\omega_\mu}{\mu_F \left(S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2}\right)^3} \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \times \right. \\ &\left. \times \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{M\omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} - \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_j} \right\} \right]. \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

Тогда для коэффициента корреляции $b_{p_t p_t}$

$$\begin{aligned} b_{p_t p_t} &= \left[\sum_{i=1}^M \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \frac{9}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ \frac{1}{4} \frac{M\omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right\} \right] \times \\ &\times \left[\sum_{i=1}^M \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\mu_F S_{1/2}} \right) + \frac{\gamma + \omega_\mu}{\mu_F} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 - \frac{\omega_\eta}{\sqrt{\bar{\eta}_i} S_{1/2}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta M}{S_{1/2}^2} \right) + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ \frac{1}{4} \frac{M\omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{\omega_\mu \left(1 - \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} - \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_j} \right)}{\mu_F S_{1/2}} \right\} \right]^{-1}, \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

Используем явный вид зависимостей (1.13):

$$\begin{aligned} b_{p_t p_t} &= \left[\sum_{i=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_i} \frac{9}{16} \omega_\eta + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_i^{3/4} \bar{\eta}_j^{-3/4} \left\{ \frac{1}{4} \frac{M\omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right\} \right] \times \\ &\times \left[\sum_{i=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_i} \omega_\eta \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\mu_F S_{1/2}} \right) + \frac{\gamma + \omega_\mu}{\mu_F} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i \left(1 - \frac{\omega_\eta}{\sqrt{\bar{\eta}_i} S_{1/2}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta M}{S_{1/2}^2} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_i^{-3/4} \bar{\eta}_j^{-3/4} \left\{ \frac{1}{4} \frac{M\omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{\omega_\mu \left(1 - \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} - \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_j}\right)}{\mu_F S_{1/2}} \right\}^{-1}, \quad (\text{B.4})$$

$$b_{p_i p_i} = \left[\frac{9}{16} \omega_\eta S_{1/2} + \frac{1}{4} \frac{M\omega_\eta S_{3/4}^2}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta S_{3/4} S_{1/4}}{S_{1/2}} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{9}{16} \omega_\eta S_{1/2} + \frac{M\omega_\eta S_{3/4}^2}{4S_{1/2}^2} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta S_{3/4} S_{1/4}}{S_{1/2}} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta^2}{\mu_F} + \frac{\gamma + \omega_\mu}{\mu_F} \left(S_1 - \omega_\eta + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta M S_1}{S_{1/2}^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\omega_\mu S_{3/4}^2}{\mu_F S_{1/2}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta \omega_\mu S_{-1/4} S_{3/4}}{\mu_F S_{1/2}} \right]^{-1}. \quad (\text{B.5})$$

Приложение Г. Методика расчета средних значений наблюдаемых при большой плотности струн с точностью до второго порядка по $1/\bar{\eta}$ при фиксированном общем числе струн

Можно легко проверить, что для струнного распределения (3.3) мы имеем следующие *точные* соотношения:

$$\langle 1 \rangle = 1, \langle \nu_k \rangle = 0, \langle \nu_k^2 \rangle = \bar{\eta}_k \omega_\eta \left(1 - \frac{\bar{\eta}_k}{N} \right), \langle \nu_k^4 \rangle = 3\bar{\eta}_k^2 \omega_\eta^2 \left(1 - \frac{\bar{\eta}_k}{N} \right)^2, \quad (\text{Г.1})$$

$$\langle \nu_k \nu_m \rangle = -\bar{\eta}_k \bar{\eta}_m \frac{\omega_\eta}{N}, \langle \nu_k \nu_m^3 \rangle = -3\bar{\eta}_k \bar{\eta}_m^2 \frac{\omega_\eta^2}{N} \left(1 - \frac{\bar{\eta}_m}{N} \right),$$

$$\langle \nu_i \nu_k \nu_m^2 \rangle = -\bar{\eta}_i \bar{\eta}_k \bar{\eta}_m \frac{\omega_\eta^2}{N} \left(1 - 3\frac{\bar{\eta}_m}{N} \right),$$

$$\langle \nu_k^2 \nu_m^2 \rangle = \bar{\eta}_k \bar{\eta}_m \omega_\eta^2, \langle \nu_i \nu_j \nu_k \nu_m \rangle = 3\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j \bar{\eta}_k \bar{\eta}_m \frac{\omega_\eta^2}{N^2}.$$

Если $\alpha \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i$ нечётное, тогда

$$\langle \nu_i^{\alpha_1} \nu_j^{\alpha_2} \nu_k^{\alpha_3} \dots \rangle = 0, \text{ при } \alpha \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2l + 1. \quad (\text{Г.2})$$

Отметим, что соотношения (Г.1) справедливы только при $i \neq j \neq k \neq m$. Действительно, мы видим, что $\langle \nu_k \nu_m \rangle|_{k=m} \neq \langle \nu_k^2 \rangle$, $\langle \nu_k \nu_m^3 \rangle|_{k=m} \neq \langle \nu_k^4 \rangle$ и так далее. Это является следствием корреляций между флуктуациями η_i в разных ячейках, возникающих из-за сохранения общего числа струн [58].

Использование соотношений (Г.1) и (Г.2) позволяет значительно упростить вычисление различных средних в этой модели, поскольку все интегрирования по η_i сводятся к использованию этих простых правил.

Мы вычислим асимптоты коэффициентов дальних корреляций (Г.3) при высокой плотности струн, предполагая, что все $\bar{\eta}_i \gg 1$. Мы также предположим, что $M \gg 1$, потому что, как это обсуждалось в [43; 52] с реалистичным

радиусом струны $r_{str} = 0.2 \div 0.3$ fm нам нужны решетки с большим количеством ячеек $M \sim 10^2$ и 10^4 для описания столкновений pp и AA соответственно.

$$b_{nn} = \frac{cov(n_B, n_F)}{\omega_\mu \langle n \rangle + cov(n_B, n_F)}, b_{pn} = \frac{\langle n \rangle}{\langle p_t \rangle} \frac{cov(p_B, n_F)}{\omega_\mu \langle n \rangle + cov(n_B, n_F)}. \quad (\text{Г.3})$$

Г.1. Усреднение по струнным конфигурациям

Мы продемонстрируем метод аналитического вычисления различных средних значений на решётке с распределением (3.3), используя в качестве примера наиболее сложное вычисление среднего значения интенсивной переменной — среднего поперечного импульса рождённых частиц, $\langle p_t \rangle$.

Для точности вычислений нам необходимо учитывать вклады порядка $1/\bar{\eta}$, $1/\bar{\eta}^2$, $1/(M\bar{\eta})$ и $1/(M\bar{\eta}^2)$. Потому что, как мы увидим позже, вклады порядка M ($1/\bar{\eta}$ и $1/\bar{\eta}^2$ в случае вычисления $\langle p_t \rangle$) взаимно уничтожаются при вычислении ковариаций, входящих в выражения для коэффициентов дальних корреляций b_{nn} и b_{pn} . Более того, в случае однородного распределения струн в поперечной плоскости, когда все $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}$, мы имеем дополнительное взаимное уничтожение вкладов порядка $1/(M\bar{\eta})$ в коэффициенты дальних корреляций, рассчитанных с использованием распределения (3.3), соответствующего фиксированному общему числу начальных струн. В последнем случае единственный вклад в коэффициент корреляции исходит от условий порядка $1/(M\bar{\eta}^2)$.

Как было показано в [43] с помощью (1.13) мы можем вычислить $\langle p_t \rangle$, выполнив усреднение по струнной конфигурации:

$$\frac{\langle p_B \rangle}{p_0} = \left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \eta_i^{\frac{3}{4}}}{\sum_{k=1}^M \eta_k^{\frac{1}{2}}} \right\rangle \equiv \langle YZ \rangle. \quad (\text{Г.4})$$

Здесь мы ввели следующее обозначение

$$Y \equiv \sum_{i=1}^M \eta_i^{\frac{3}{4}}, \quad Z \equiv \left(\sum_{i=1}^M \eta_i^{\frac{1}{2}} \right)^{-1}. \quad (\text{Г.5})$$

Учитывая определение (3.11) мы можем представить Y с точностью до ν_i^4 в виде

$$Y = M S_{3/4} \left[1 + \frac{1}{M S_{3/4}} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{3/4} \left(\frac{3\nu_i}{4\bar{\eta}_i} - \frac{3\nu_i^2}{32\bar{\eta}_i^2} + \frac{15\nu_i^3}{384\bar{\eta}_i^3} - \frac{45\nu_i^4}{2048\bar{\eta}_i^4} \right) \right], \quad (\Gamma.6)$$

где мы ввели следующие удобные обозначения

$$S_\beta \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^\beta. \quad (\Gamma.7)$$

Чтобы вычислить Z с той же точностью, мы сначала должны использовать разложение

$$\sum_{i=1}^M \eta_i^{1/2} = M S_{1/2} \left[1 + \frac{1}{M S_{1/2}} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{1/2} \left(\frac{\nu_i}{2\bar{\eta}_i} - \frac{\nu_i^2}{8\bar{\eta}_i^2} + \frac{\nu_i^3}{16\bar{\eta}_i^3} - \frac{5\nu_i^4}{128\bar{\eta}_i^4} \right) \right] \equiv M S_{1/2} [1+a], \quad (\Gamma.8)$$

где

$$a = \frac{1}{M S_{1/2}} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{1/2} \left(\frac{\nu_i}{2\bar{\eta}_i} - \frac{\nu_i^2}{8\bar{\eta}_i^2} + \frac{\nu_i^3}{16\bar{\eta}_i^3} - \frac{5\nu_i^4}{128\bar{\eta}_i^4} \right). \quad (\Gamma.9)$$

Тогда можно написать

$$Z \equiv \frac{1}{M S_{1/2} [1+a]} = \frac{1}{M S_{1/2}} [1 - a + a^2 - a^3 + a^4] \quad (\Gamma.10)$$

Умножая Y на Z и принимая во внимание только вклады порядка $\nu_i^{\alpha_1} \nu_j^{\alpha_2} \nu_k^{\alpha_3} \nu_m^{\alpha_4}$, удовлетворяющие условиям $\alpha = \sum_i \alpha_i = 2$ или 4 (см. формулы (Г.1) и (Г.2)), мы находим

$$YZ = \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} [1 + A_1 + A_2 + B_1 + B_2 + C]. \quad (\Gamma.11)$$

Здесь A_1 и A_2 включают четыре члена с $\alpha = 2$:

$$A_1 = \frac{1}{8M S_{1/2}} \sum_{i=1}^M \frac{\nu_i^2}{\bar{\eta}_i^{3/2}} - \frac{3}{32M S_{3/4}} \sum_{i=1}^M \frac{\nu_i^2}{\bar{\eta}_i^{5/4}}, \quad (\Gamma.12)$$

$$A_2 = \frac{1}{4M^2 S_{1/2}^2} \sum_{i,j} \frac{\nu_i \nu_j}{\bar{\eta}_i^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2}} - \frac{3}{8M^2 S_{1/2} S_{3/4}} \sum_{i,j} \frac{\nu_i \nu_j}{\bar{\eta}_i^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/4}} \quad (\Gamma.13)$$

и B_1 , B_2 и C включают двенадцать членов с $\alpha = 4$:

$$B_1 = \frac{5}{128MS_{1/2}} \sum_{i=1}^M \frac{\nu_i^4}{\bar{\eta}_i^{7/2}} - \frac{45}{2048MS_{3/4}} \sum_{i=1}^M \frac{\nu_i^4}{\bar{\eta}_i^{13/4}} + \quad (\text{Г.14})$$

$$+ \frac{1}{64M^2S_{1/2}^2} \sum_{i,j}^M \frac{\nu_i^2 \nu_j^2}{\bar{\eta}_i^{3/2} \bar{\eta}_j^{3/2}} - \frac{3}{256M^2S_{1/2}S_{3/4}} \sum_{i,j}^M \frac{\nu_i^2 \nu_j^2}{\bar{\eta}_i^{3/2} \bar{\eta}_j^{5/4}},$$

$$B_2 = \frac{1}{16M^2S_{1/2}^2} \sum_{i,j}^M \frac{\nu_i \nu_j^3}{\bar{\eta}_i^{1/2} \bar{\eta}_j^{5/2}} - \frac{5}{256M^2S_{1/2}S_{3/4}} \sum_{i,j}^M \frac{\nu_i \nu_j^3}{\bar{\eta}_i^{1/2} \bar{\eta}_j^{9/4}} - \frac{3}{64M^2S_{1/2}S_{3/4}} \sum_{i,j}^M \frac{\nu_i \nu_j^3}{\bar{\eta}_i^{1/4} \bar{\eta}_j^{5/2}} - \quad (\text{Г.15})$$

$$- \frac{3}{32M^3S_{1/2}^3} \sum_{i,j,k}^M \frac{\nu_i \nu_j \nu_k^2}{\bar{\eta}_i^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2} \bar{\eta}_k^{3/2}} - \frac{3}{128M^3S_{1/2}^2S_{3/4}} \sum_{i,j,k}^M \frac{\nu_i \nu_j \nu_k^2}{\bar{\eta}_i^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2} \bar{\eta}_k^{5/4}} - \frac{3}{32M^3S_{1/2}^2S_{3/4}} \sum_{i,j,k}^M \frac{\nu_i \nu_j \nu_k^2}{\bar{\eta}_i^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/4} \bar{\eta}_k^{3/2}},$$

$$C = \frac{1}{16M^4S_{1/2}^4} \sum_{i,j,k}^M M \frac{\nu_i \nu_j \nu_k \nu_m}{\bar{\eta}_i^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2} \bar{\eta}_k^{1/2} \bar{\eta}_m^{1/2}} - \frac{3}{32M^4S_{1/2}^3S_{3/4}} \sum_{i,j,k}^M M \frac{\nu_i \nu_j \nu_k \nu_m}{\bar{\eta}_i^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2} \bar{\eta}_k^{1/2} \bar{\eta}_m^{1/4}}. \quad (\text{Г.16})$$

Ниже мы увидим, что ведущие вклады в $\langle p_t \rangle$, происходящие от выражений A_1 , A_2 , B_1 , B_2 и C , имеют следующий порядок:

$$A_1 \sim \frac{1}{\bar{\eta}}, \quad A_2 \sim \frac{1}{M\bar{\eta}}, \quad B_1 \sim \frac{1}{\bar{\eta}^2}, \quad B_2 \sim \frac{1}{M\bar{\eta}^2}, \quad C \sim \frac{1}{M^2\bar{\eta}^2}. \quad (\text{Г.17})$$

Таким образом, принимая во внимание замечание в начале данного раздела, в первом приближении мы можем не принимать во внимание вклад C .

Теперь, чтобы вычислить $\langle p_t \rangle$ с помощью (Г.4), нам нужно усреднить выражение (Г.11) по колебаниям струн, заданным распределением (3.3):

$$\frac{\langle p_t \rangle}{p_0} = \langle YZ \rangle = \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} [1 + \langle A_1 \rangle + \langle A_2 \rangle + \langle B_1 \rangle + \langle B_2 \rangle + \langle C \rangle]. \quad (\text{Г.18})$$

Мы можем сделать это, используя правила (Г.1) и (Г.2), полученные выше. При этом мы должны учитывать, что эти правила действительны только для не совпадающих аргументов (см. примечание после формулы (Г.2)). Итак, сначала мы должны выразить все суммы, входящие в формулы (Г.12)-(Г.16) через суммы с не совпадающими аргументами. Мы можем легко сделать это, используя следующие очевидные соотношения:

$$\sum_{i,j} = \sum_{i \neq j} + \sum_{i=j}, \quad \sum_{i,j,k} = \sum_{i \neq j \neq k} + \sum_{i=j \neq k} + \sum_{i \neq j=k} + \sum_{i=k \neq j} + \sum_{i=j=k}, \quad (\text{Г.19})$$

и так далее. Тогда для вкладов в общей форме мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1} \nu_j^{\alpha_2} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1} \bar{\eta}_j^{\beta_2}} &= \sum_{i \neq j} \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1} \nu_j^{\alpha_2} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1} \bar{\eta}_j^{\beta_2}} + \sum_i \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1 + \alpha_2} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1 + \beta_2}}, \quad \sum_{i,j,k} \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1} \nu_j^{\alpha_2} \nu_k^{\alpha_3} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1} \bar{\eta}_j^{\beta_2} \bar{\eta}_k^{\beta_3}} = \\ &= \sum_{i \neq j \neq k} \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1} \nu_j^{\alpha_2} \nu_k^{\alpha_3} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1} \bar{\eta}_j^{\beta_2} \bar{\eta}_k^{\beta_3}} + \sum_{i \neq k} \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1 + \alpha_2} \nu_k^{\alpha_3} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1 + \beta_2} \bar{\eta}_k^{\beta_3}} + \sum_{i \neq j} \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1} \nu_j^{\alpha_2 + \alpha_3} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1} \bar{\eta}_j^{\beta_2 + \beta_3}} + \sum_{i \neq j} \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1 + \alpha_3} \nu_j^{\alpha_2} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1 + \beta_3} \bar{\eta}_j^{\beta_2}} + \sum_i \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}}. \end{aligned} \quad (\text{Г.20})$$

После этого, используя правила (Г.1) и (Г.2), принимая также во внимание, что $\bar{N} = M S_1$, мы находим ответ для $\langle p_t \rangle$ как линейной комбинации сумм следующего типа:

$$\sum_i \bar{\eta}_i^\beta = M S_1 \beta, \quad \sum_{i \neq j} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma, \quad \sum_{i \neq j \neq k} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma \bar{\eta}_k^\delta, \quad (\text{Г.21})$$

и так далее. Теперь, чтобы выразить все эти суммы через S_β , определенные в (Г.7), мы должны использовать соотношения, обратные (Г.19):

$$\sum_{i \neq j} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma = \sum_{i,j} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma - \sum_{i=j} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_i^\gamma = \left(\sum_i \bar{\eta}_i^\beta \right) \left(\sum_j \bar{\eta}_j^\gamma \right) - \sum_i \bar{\eta}_i^{\beta+\gamma} = M^2 S_\beta S_\gamma - M S_{\beta+\gamma}, \quad (\text{Г.22})$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j \neq k} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma \bar{\eta}_k^\delta &= \sum_{i,j,k} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma \bar{\eta}_k^\delta - \sum_{i=j,k} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma \bar{\eta}_k^\delta - \sum_{i,j=k} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma \bar{\eta}_k^\delta - \sum_{i=k,j} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma \bar{\eta}_k^\delta + 2 \sum_{i=j=k} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma \bar{\eta}_k^\delta = \\ &= M^3 S_\beta S_\gamma S_\delta - M^2 S_\beta S_{\gamma+\delta} - M^2 S_\gamma S_{\beta+\delta} - M^2 S_\delta S_{\beta+\gamma} + 2M S_{\beta+\gamma+\delta}. \end{aligned}$$

Используя этот метод, мы можем легко проверить, что главные вклады в A_1 , A_2 , B_1 , B_2 и C имеют порядок (Г.17). Затем, применяя этот подход и учитывая только слагаемые порядка $1/\bar{\eta}$, $1/\bar{\eta}^2$, $1/(M\bar{\eta})$ и $1/(M\bar{\eta}^2)$ во вкладах A_1 , A_2 , B_1 , B_2 (см. замечание в начале настоящего раздела), мы находим

$$\begin{aligned} \frac{\langle p_t \rangle}{p_0} = \langle YZ \rangle &= \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \left\{ 1 + \omega \left(\frac{S_{-1/2}}{8 S S_{12}} - \frac{3 S_{-1/4}}{32 S_{3/4}} \right) + \omega^2 \left(\frac{S_{-1/2}^2}{64 S_{1/2}^2} - \frac{3 S_{-1/2} S_{-1/4}}{256 S_{1/2} S_{3/4}} + \right. \right. \\ &+ \frac{15 S_{-3/2}}{128 S S_{12}} - \frac{135 S_{-5/4}}{2048 S_{3/4}} \left. \right) + \frac{1}{M} \left[\omega \left(\frac{3}{32 S_1} + \frac{1}{4 S_{1/2}^2} - \frac{3 S S_{14}}{8 S S_{12} S_{3/4}} \right) + \omega^2 \left(\frac{7 S_{-1}}{32 S_{1/2}^2} - \frac{3 S_{-1/2}}{32 S_{1/2}^3} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{29 S_{-1/2}}{256 S_1 S S_{12}} - \frac{3 S_{1/4} S_{-1/2}}{32 S_{1/2}^2 S_{3/4}} + \frac{231 S_{-1/4}}{1024 S_1 S_{3/4}} - \frac{3 S_{-1/4}}{128 S_{1/2}^2 S_{3/4}} - \frac{57 S_{-3/4}}{256 S_{1/2} S_{3/4}} \right) \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (\text{Г.23})$$

Г.2. Расчет коэффициентов дальних корреляций

Используя методы, разработанные в предыдущем разделе Г.1 на примере вычисления $\langle p_t \rangle$, теперь мы можем легко найти все остальные средние значения, входящие в коэффициенты корреляции b_{nn} и b_{pn} , определенные в (Г.3) с необходимой точностью.

В соответствии с (1.13), принимая во внимание (Г.8) и применяя разработанную методику, мы находим

$$\frac{\langle n \rangle}{\mu} = \left\langle \sum_{i=1}^M \eta_i^{\frac{1}{2}} \right\rangle = M S S_{12} \left\{ 1 - \omega \frac{S_{-1/2}}{8 S S_{12}} - \omega^2 \frac{15 S_{-3/2}}{128 S S_{12}} + \frac{1}{M} \left[\omega \frac{1}{8 S_1} + \omega^2 \frac{15 S_{-1/2}}{64 S_1 S S_{12}} \right] \right\}. \quad (\text{Г.24})$$

Используя общее выражение для $\langle p_B n_F \rangle$:

$$\frac{\langle p_B n_F \rangle}{p_0 \mu} = \left\langle \sum_{i=1}^M \eta_i^{\frac{3}{4}} \right\rangle, \quad (\text{Г.25})$$

полученное в [43] для коэффициентов дальних корреляций, и по формуле (Г.6) мы также находим, что в рамках разработанного подхода:

$$\frac{\langle p_B n_F \rangle}{p_0 \mu} = M S_{3/4} \left\{ 1 - \omega \frac{3 S_{-1/4}}{32 S_{3/4}} - \omega^2 \frac{135 S_{-5/4}}{2048 S_{3/4}} + \frac{1}{M} \left[\omega \frac{3}{32 S_1} + \omega^2 \frac{135 S_{-1/4}}{1024 S_1 S_{3/4}} \right] \right\}. \quad (\text{Г.26})$$

Наконец, с помощью этого метода, принимая во внимание формулу (Г.8), мы находим для вклада в $\langle n_B n_F \rangle$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\langle n_B n_F \rangle}{\mu^2} = M^2 S_{1/2}^2 & \left\{ 1 - \frac{\omega S_{-1/2}}{4 S S_{12}} - \frac{\omega^2}{64 S S_{12}} \left(\frac{S_{-1/2}^2}{S S_{12}} - 15 S_{-3/2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{M} \left[\frac{\omega}{4 S_{1/2}^2} + \frac{\omega^2}{4 S S_{12}} \left(\frac{7 S_{-1}}{8 S S_{12}} + \frac{S_{-1/2}}{S_1} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Г.27})$$

Теперь мы можем вычислить ковариации (корреляторы), входящие в коэффициенты корреляции b_{nn} и b_{pn} (см. формулы (Г.3)):

$$\frac{\text{cov}(n_B, n_F)}{\mu^2} = \frac{\langle n_B n_F \rangle - \langle n^2 \rangle}{\mu^2} = M \left[\frac{\omega_\eta}{4} \left(1 - \frac{S_{1/2}^2}{S_1} \right) + \frac{\omega_\eta^2}{32} \left(7 S_{-1} - 6 \frac{S_{1/2} S_{-1/2}}{S_1} \right) \right], \quad (\text{Г.28})$$

$$\frac{cov(p_B, n_F)}{p_0 \mu} = \frac{\langle p_B n_F \rangle - \langle p_t \rangle \langle n \rangle}{p_0 \mu} = \frac{\omega_\eta}{4} \left(\frac{3SS14}{2SS12} - \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}^2} - \frac{S_{3/4}}{2S_1} \right) + \quad (\text{Г.29})$$

$$+ \frac{\omega_\eta^2}{8} \left(\frac{57 S_{-3/4}}{32 SS12} - \frac{21 S_{-1/4}}{32 S_1} + \frac{3 S_{-1/4}}{16 S_{1/2}^2} - \frac{7 S_{3/4} S_{-1}}{4 S_{1/2}^2} + \frac{3 SS14 S_{-1/2}}{8 S_{1/2}^2} + \frac{S_{3/4} S_{-1/2}}{S_{1/2}^3} - \frac{S_{3/4} S_{-1/2}}{S_1 SS12} \right).$$

Мы действительно видим, что все члены, пропорциональные M^2 в формуле (Г.27) для $\langle n_B n_F \rangle$, взаимно уничтожаются в $\langle n^2 \rangle$. аналогично, все вклады, пропорциональные M в формуле (Г.26) для $\langle p_B n_F \rangle$, взаимно уничтожаются со вкладами из произведения $\langle p_t \rangle \langle n \rangle$, определяемого формулами (Г.23) и (Г.24).

Более того, если мы перейдем к случаю с однородным распределением струн в поперечной плоскости с некоторой средней плотностью струн, соответствующей одному и тому же среднему числу, $\bar{\eta}$, струн в ячейке решетки (grid), когда все $\bar{\eta}^i = \bar{\eta}$, тогда у нас будет

$$S_\beta \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^\beta = \bar{\eta}^\beta. \quad (\text{Г.30})$$

В этом случае все вклады, пропорциональные ω в формулах (Г.27) и (Г.26) для корреляторов (ковариаций) $cov(n_B, n_F)$ и $cov(p_B, n_F)$, также взаимно уничтожаются и сохраняются только вклады порядка ω^2 . В этом простом случае формулы для корреляторов (ковариаций) сводятся к

$$\frac{cov(n_B, n_F)}{\mu^2} = M \frac{\omega_\eta^2}{32 \bar{\eta}}, \quad (\text{Г.31})$$

$$\frac{cov(p_B, n_F)}{p_0 \mu} = -\frac{\omega_\eta^2}{128 \bar{\eta}^2}. \quad (\text{Г.32})$$

St.Petersburg State University

Manuscript copyright

Svetlana Belokurova

**Correlations and Strongly Intensive Variables in
the Model with the Formation of String Clusters at
LHC Energies**

Scientific specialization 1.3.3. Theoretical physics

Dissertation is submitted for the degree
of Candidate of Physical and Mathematical Sciences

Translation from Russian

Scientific Supervisor

Doctor in Physical and Mathematical Sciences

Vladimir Viktorovich Vechernin

Saint Petersburg – 2023

Contents

Introduction	140
Chapter 1. The model with string fusion in the plane of the impact parameter	155
1.1. The definition of the long range correlation coefficient	155
1.2. Formulation of the model with fusion strings on a lattice	156
1.3. Finding the asymptotics of the correlation coefficients as derivatives of the regression function	158
1.4. Algorithm for calculating average values of observables in the model with string fusion on a lattice	160
Chapter 2. Calculation of the asymptotic behavior of the long-range correlation coefficients at high string density for inhomogeneous distribution in the impact parameter plane	162
2.1. Coefficient of correlation between multiplicity and transverse momentum	162
2.2. Correlation coefficient between transverse momenta	168
2.3. General properties of correlations involving the mean transverse momentum	183
Chapter 3. Calculation of the asymptotic behavior of the long-range correlation coefficients for the case of a fixed number of initial strings	186
3.1. Correlations between multiplicities of charged particles	186
3.2. Correlations between multiplicity and transverse momentum	193
3.3. Correlations in the case of a fixed total number of initial strings in the model without fusion	198

3.4. General properties of correlations involving the average transverse momentum when the total number of strings is fixed	200
Chapter 4. Using the strongly intensive Σ observable to study the formation of quark-gluon string clusters in pp collisions at LHC energies.	201
4.1. Extensive, intensive, and strongly intensive variables	201
4.2. Strongly intensive variable $\Sigma(n_F, n_B)$ in the model with string fusion on a lattice	203
4.3. Relation between the variable Σ and the two-particle (pair) correlation function Λ	207
4.4. Calculation of the variable $\Sigma(n_F, n_B)$ on a lattice by the Monte Carlo method	209
4.5. Comparison with the results of the ALICE experiment at the Large Hadron Collider	217
Conclusion	226
Bibliography	230
Appendix A. Averaging over C_n^F configurations	241
Appendix B. Averaging over C_η configurations	247
Appendix C. Calculating the correlator and variance in the (2.40) formula for the $p_t - p_t$ correlation coefficient	260
Appendix D. Method for calculating average values of observables at high string density up to the second order in $1/\bar{\eta}$ for a fixed total number of strings	262
D.1. Averaging over String Configurations	263
D.2. Calculation of the Long-Range Correlation Coefficients	266

Introduction

It is known that the study of fluctuations and correlations of various observed in the processes of multiple particle production at high energies provides information about the very initial stage of the interaction of hadrons corresponding to the highest density of the formed quark-gluon matter [1]. This allows us to obtain unique data on new objects formed at this stage, including quark-gluon strings and string clusters.

Unfortunately, at present, quantum chromodynamics (QCD), which is very successfully used to describe hard (with large momentum transfers) processes of strong interaction [2], does not allow us to obtain the quantitative description of the processes of multiple particle production in the soft region, since perturbation theory is not applicable in this area. For the quantitative description of soft processes, whose contribution to the total scattering cross-section of high-energy hadrons is dominant, the model of quark-gluon (colored) strings, which has a qualitative justification in the framework of QCD, is widely used (including in all existing Montecarlo event generators, such as PYTHIA, VENUS, HIJNG, AMPT, EPOS, etc.). [3–5]

This model assumes that the strong interaction occurs in two stages: in the initial stage between partons of colliding hadrons, extended objects — tubes filled with a color gluon field (color flux tubes) are formed as a result of processes of reconnection of color currents, which we can regard as one-dimensional strings if we neglect their transverse dimensions compared with the longitudinal dimensions. At the second stage, the string disintegrates with the formation of hadrons (hadronization).

This picture is justified by results obtained using the Monte Carlo method via the standard lattice QCD simulations [6; 7], which confirm weakened background fluctuations of the gluon field responsible for the arising confinement phenomenon in the region along the line connecting the quark and antiquark (diquark).

Another confirmation of the string model of strong interactions comes from the interpretation of a pomeron-like cylindrical structure in the framework of topological expansions of QCD in the limit of a large number of colors proposed in [8; 9]. In this

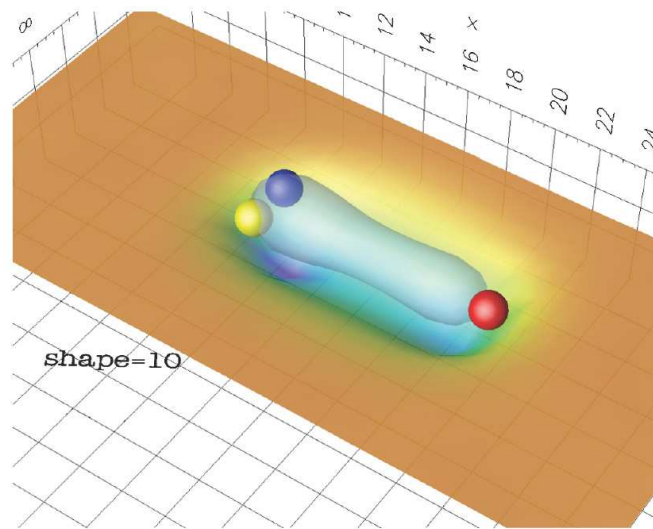


Figure 1. Quark-diquark string in lattice QCD [6]

approach, a cut pomeron corresponds to the production of two strings connecting quarks and diquarks of the target and impactor (a process of color reconnection), which after fragmentation give two sequences of observable hadrons [10; 11].

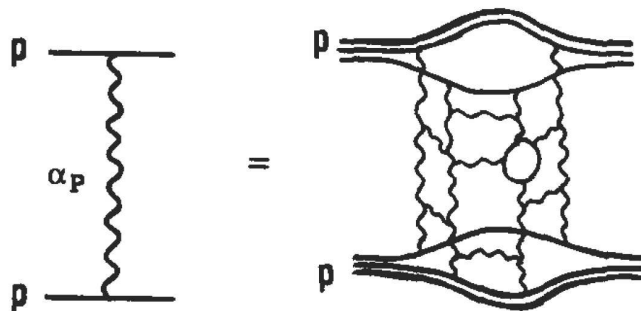


Figure 2. A pomeron as cylindrical structure in the framework of the limit of a large number of colors [10]

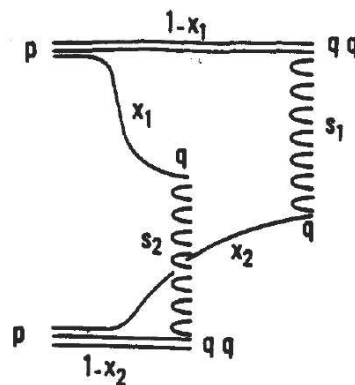


Figure 3. A cut pomeron as two strings [10]

To describe the process of string fragmentation in observable hadrons, either the mechanism generalized to the QCD case [12–15] proposed by Schwinger for particle creation from the vacuum in quantum electrodynamics [16–18] or the purely geometric approach proposed in [19] for a mathematical model of the Nambu string in 3+1 dimensions [11; 20] is used. Both approaches lead to the same important result: a uniform particle distribution produced from the decay of a single string with respect to a variable called rapidity:

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{p_0 + p_z}{p_0 - p_z} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{p_z^2 + \mathbf{p}_t^2} + p_z}{\sqrt{p_z^2 + \mathbf{p}_t^2} - p_z} . \quad (1)$$

Therefore, the particle rapidity y in a pair with its transverse momentum \mathbf{p}_t is generally used for analysis instead of the longitudinal component p_z of the particle momentum directed along the collision axis.

It turns out in this case [11; 19; 20] that there is a statistical correspondence between the spatial coordinate z of the string segment and the particle rapidity y originating from its decay: particles obtained from the fragmentation of adjacent string segments on the average also have close rapidity values. In view of investigations of correlations between yields of particles with rapidities in adjacent or separated rapidity intervals (observation windows), the noted correspondence allows studying correlations between particles produced from the decay of adjacent or spatially distant string segments.

At a high density of strings in the transverse plane, for example, in case of nucleus-nucleus collisions and/or ultrahigh energies of the LHC, it is necessary to take into account the interaction between strings [21; 22]. For the case of the interaction of heavy nuclei, M.A. Braun and K.Paxares in the works [23; 24] proposed a model of fusion (percolation) of primary strings before their fragmentation begins as a way to take into account the processes of interaction between them. Important consequences of this approach are a decrease in the multiplicity of produced particles and an increase in the average transverse momentum in comparison with the model of independent strings [25]. Another consequence of the string fusion model is an

increase in the yield of strange particles at high string density in nucleus-nucleus collisions [26; 27].

Accounting for string fusion processes was also included in the DIPSY event generator in the form of the formation of so-called “color ropes”, leading to an increased yield of strange particles [28]. In the paper [29], devoted to experimental studies of the yield of multistrange hadrons in pp interactions as a function of collision centrality, when comparing these results with the predictions of various theoretical models, the ALICE collaboration concludes that the DIPSY model, taking into account the processes of formation of “colored ropes” describes data better than other event generators. Similar results [30] were also obtained within the framework of the multipomeron model, which effectively takes into account the contribution of string fusion processes [31; 32].

Two variants of string merging are considered: local and global. In the local variant of string fusion, it is assumed that the color fields add up only in the areas where the strings overlap [33]. In this case the average multiplicity in a given rapidity interval and the average transverse momentum of charged particles emitted from the k string overlap region are described by the following expressions:

$$\langle n \rangle_k = \mu_0 \frac{S_k}{\sigma_0} \sqrt{k}, \quad \langle p_t^2 \rangle_k = p_0^2 \sqrt{k}, \quad \langle p_t \rangle_k = p_0 \sqrt{4k}, \quad (2)$$

where S_k is the transverse area of the overlap region of k strings, σ_0 — string transverse area, μ_0 — average multiplicity of charged particles per unit of rapidity, produced from the decay of one string, p_0 — average transverse momentum of particles produced from the decay of one string.

In the global version of string fusion, it is assumed that the color fields are added globally with the formation of a cluster that occupies the entire overlap area strings [34]. In this case, the average multiplicity in a given rapidity interval and the average transverse momentum of charged particles, a cluster with a transverse area S_{cl} , are described by the following expressions:

$$\langle n \rangle_{cl} = \mu_0 \frac{S_{cl}}{\sigma_0} \sqrt{k_{cl}}, \quad \langle p_t^2 \rangle_{cl} = p_0^2 \sqrt{k_{cl}}, \quad \langle p_t \rangle_{cl} = p_0 \sqrt{4k_{cl}}, \quad k_{cl} = N_{cl} \frac{\sigma_0}{S_{cl}}, \quad (3)$$

where N_{cl} is the number of strings forming the cluster.

In the limiting cases of low or high string density, these variants coincide [35].

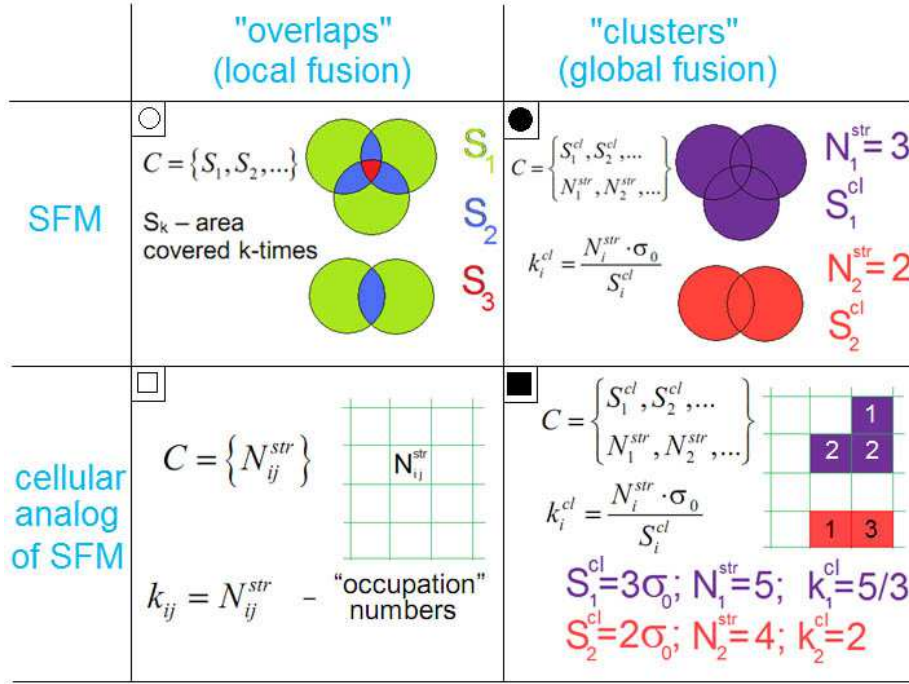


Figure 4. Various versions of the string fusion model [36]

To simplify the consideration of string fusion effects a simple discrete model in which the transverse plane is divided into cells of size of the order of the string cross section (the radius of the string section is $r_{str} \sim 0.2 \div 0.3$ fm) was proposed [37–39] and then [35; 40–47] was widely used. In this approach, it is assumed that all strings with centers in a given cell of the lattice fuse. This leads to the splitting of the transverse area into domains with different, fluctuating event by event values of color field within them. What is similar to the attempts to take into account the density variation in transverse plane in models based on the BFKL evolution [48] and on the colour glass condensate (CGC) approach [49].

As one of the tools for studying the effects of string fusion, it was proposed [50] to study the so-called forward-backward (FB) correlations between the observed quantities for particles detected in two rapidity intervals separated by gap. Usually these two rapidity intervals (observation windows) are chosen symmetrically, one in the forward and the other in the backward hemisphere of the reaction. It is known

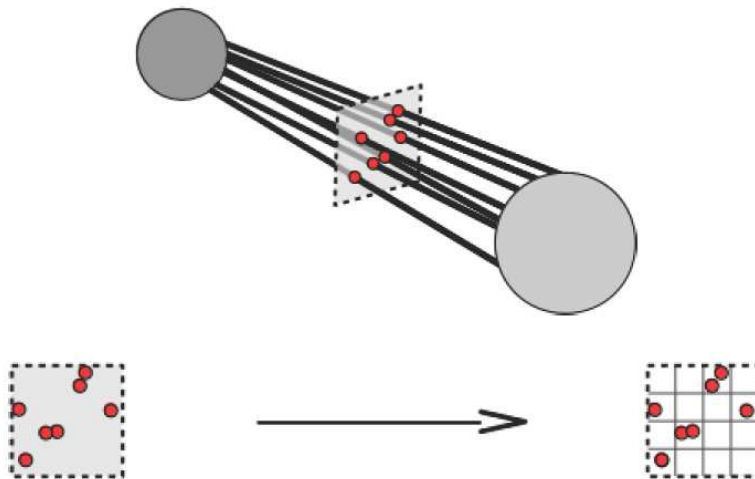


Figure 5. Introduction of the lattice in the transverse plane

that studies of long-range rapidity correlations provide information about the very initial stages of hadronic collisions [1] and, in particular, about the configuration of the string formed in a given collision.

As observable quantities, F and B , one usually chooses the multiplicity (number) of particles, n_F and n_B , with rapidities falling within the chosen intervals, and the average transverse momentum of these particles in this event, p_t^F and p_t^B ,

$$p_t^F = \frac{1}{n_F} \sum_{i=1}^{n_F} |\mathbf{p}_t^i|, \quad p_t^B = \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^{n_B} |\mathbf{p}_t^i|. \quad (4)$$

It was proposed [42] to investigate 3 types of correlations: $n - n$, correlations between multiplicities of charged particles, $p_t - p_t$, correlations between mean transverse momentum and $p_t - n$, correlations between the average transverse momentum in one rapidity window and the multiplicity of charged particles in another rapidity window.

Unfortunately, as was shown in [51], the traditional coefficient FB of correlations between the multiplicity of charged particles in the forward and backward rapidity windows, n_F and n_B , depends on the fluctuations in the number of strings from event to event in pp collisions, from the so-called “volume fluctuations” — trivial fluctuations in the number of sources.

There are two ways to exclude the influence of these trivial “volume” fluctu-

ations compared to the contribution from string fusion processes. One can either study correlations involving intensive variables, such as, for example, the event-averaged transverse momenta p_F and p_B of all charged particles detected in a given event in the forward and backward rapidity observation windows (instead of their multiplicities n_F and n_B), as in [31; 32; 35; 42; 43; 52]. Another way to get rid of the contribution of trivial “volume” fluctuations is to use in the analysis the so-called strongly intensive variables that are insensitive to fluctuations in the number of sources (strings) but sensitive to fluctuations in the properties of these sources, in particular, to the formation of string clusters as a result of string fusion processes.

In real experiments, the entire array of events is usually divided into so-called centrality classes and the analysis is carried out separately for each class. As applied to the string model, this means imposing an additional condition that limits fluctuations in the total number of strings. An analysis of the influence of this additional condition on the correlation coefficients allows us to qualitatively draw a conclusion about the nature of the influence of fixing the centrality class on the value of these coefficients in a real experiment

In this work, in the framework of the string model on a lattice, we study the asymptotics of the correlation between multiplicities, between transverse momentum and multiplicity, and between transverse momenta in spaced rapidity intervals in high-energy collision processes, including for the case with a fixed total average number of strings, as well as highly intense observables.

Relevance of the research topic.

The study of fluctuations and correlations of various particles observed in the processes of multiple production of particles at high energies provides information about the very initial stage of hadron interaction, which corresponds to the highest density of the resulting quark-gluon matter. This makes it possible to obtain unique data on new objects formed at this stage, including quark-gluon strings and string clusters.

In this regard, it is of particular importance to study correlations using intense

and strongly intensive variables, which make it possible to minimize the contribution of trivial “volume” fluctuations and make it possible to obtain information directly about the properties of objects formed at the initial stage of strong interaction. In the thesis, for this purpose, correlations are studied with the participation as an intensive quantity — the average transverse momentum of particles recorded in a certain rapidity interval, as well as the highly intense variable Σ , which characterizes the correlations between the number of particles in two spaced rapidity intervals.

One of the aspects that determine the relevance of the research topic is the need to obtain analytical expressions for the correlation coefficients and the strongly intensive variable Σ in the framework of the string fusion model for the case of their realistic inhomogeneous distribution in the impact parameter plane. This is necessary in order to qualitatively understand the effect of inhomogeneity in the distribution of strings on the magnitude of the correlation coefficients when compared with experimental data.

Another aspect follows from the fact that in modern collider experiments on collisions of ultrarelativistic nuclei, correlations are usually analyzed separately for different classes of collision centrality. This requires additional theoretical analysis of the effect of fixing the centrality class on the magnitude of correlations.

The study of correlations in the dissertation using the strongly intensive variable Σ and comparison of the calculation results with the experimental data of the ALICE collaboration at CERN made it possible, in particular, to draw a fundamentally important conclusion that at energies of the Large Hadron Collider (LHC) the formation of string clusters already occurs. in pp interactions, which indicates the relevance of the research topic.

Goals and objectives of the work.

The purpose of this thesis is a theoretical study of correlations between observables (multiplicity and transverse momentum) in spaced rapidity intervals in the processes of collisions of hadrons and nuclei at high energies, as well as a theoretical study of the highly intense variable $\Sigma(n_F, n_B)$ which characterizes the correlations

between the number of particles in two spaced rapidity intervals.

In particular, it was necessary to study the effect of inhomogeneity in the distribution of strings in the plane of the impact parameter on the value of the correlation coefficients and the effect of fixing the centrality class on their value, as well as to calculate the strongly intensive variable $\Sigma(n_F, n_B)$ within the framework of the model with the formation of strings clusters, and then compare the calculation results with the available preliminary experimental data of the ALICE collaboration in order to search for evidence of the formation of string clusters in pp interactions at LHC energies and extract the parameters of these clusters.

To achieve the goals set, the following tasks were solved:

1. For the realistic case with the non-uniform distribution of strings in the plane of the impact parameter, analytical expressions were obtained for the asymptotics of the long-range correlation coefficients between the transverse momentum and multiplicity, as well as between the transverse momenta in two spaced rapidity intervals, at a high string density, and their properties were analyzed. In addition, a Monte Carlo (MC) algorithm was also developed that allows one to carry out these calculations for an arbitrary string density. It is shown that the results of MC calculations at a high string density come to the asymptotics calculated analytically, which confirms the reliability of the results obtained.
2. Analytical expressions are obtained for the asymptotics of the long-range correlation coefficients between multiplicities and between transverse momentum and multiplicity at high string density, taking into account the additional condition of fixing the total number of initial strings corresponding to the selection by centrality classes in the analysis of experimental data. The influence of this condition on the value of the correlation coefficients is analyzed.
3. In the framework of the same model with string fusion on a lattice, the strongly intensive variable Σ which characterizes the correlations between the number of particles formed in two intervals of observation separated by rapidity was

studied. It is shown that when string merging effects leading to the formation of string clusters are taken into account, this variable turns out to be equal to the weighted average of its values for different string clusters, which depend only on the parameters of these clusters. Whereas the weight coefficients, which are the fractions of particles born from clusters with different numbers of strings, turn out to depend on the collision conditions — its energy and degree of centrality.

4. For the case of pp scattering at high energies, a Monte Carlo algorithm has been developed that allows, by simulating a realistic distribution of strings in the impact parameter plane, to calculate these weight coefficients for various energies and centrality pp of the collision. Using them, the dependence of the Σ variable on the rapidity distance between observation windows, their width, energy, and collision centrality pp is calculated.
5. The results of Σ calculations are compared with the experimental data of the ALICE collaboration at the LHC. It has been established that the behavior of this variable observed in the ALICE experiment can be explained only in the presence of sources of different types, the role of which in our model is played by single strings and clusters formed by the fusion of several strings. It is shown that a comparison of the results of our model with the preliminary experimental ALICE data obtained in min.bias (without centrality selection) pp collisions at energies of 0.9-13 TeV and for different centrality classes at an energy of 13 TeV allows one to extract information about the model parameters, characterizing clusters with different numbers of merged strings.

Theoretical and practical significance.

The obtained analytical expressions for the asymptotics of the long-range correlation coefficients at a high string density, taking into account the conditions typical for real experiments, make it possible to qualitatively understand the dependence of the correlation coefficients on the parameters of the task and the conditions of

the experiment, which is usually difficult to do, limited only to Monte Carlo (MC) simulation of the process hadron interactions.

On the other hand, comparison of the results of the MC simulation with the obtained analytical expressions for the asymptotics of the long-range correlation coefficients at a high string density makes it possible to control the MC algorithms, which can then be used to calculate processes for an arbitrary string density. The agreement between the results of analytical and MC calculations at high string density confirms the reliability of both MC and analytical results.

The conclusion obtained by comparing the results of calculations of the strongly intensive variable Σ with the experimental data of the ALICE collaboration at the LHC, that at LHC energies the formation of string clusters occurs already in pp interactions has fundamental importance. Herewith, the experimentally observed increase in this variable with an increase in the initial energy and centrality pp of the collision can only be explained by an increase in the contribution from the formation of string clusters consisting of an increasing number of merged strings.

Thus, the results presented in the thesis have already been used and will be used in the future in the work of the ALICE international collaboration at the LHC at the European Center for Nuclear Research (CERN) in the ongoing and future experiments. In the future, they can also be used to study correlations using strongly intense variables in the analysis of data from the MPD and SPD detectors of the NICA accelerator complex, which is currently being built at JINR in Dubna.

The statements and results put forward for defense:

1. In the model with a realistic inhomogeneous string distribution in the impact parameter plane, taking into account their fusion, the form of asymptotics at a high string density for the coefficients of long-range correlations between the transverse momentum and multiplicity, as well as between the transverse momenta of particles formed during the interaction of high-energy hadrons in two spaced speed intervals, is analytically found..

2. Analytic expressions are obtained for the asymptotics of the long-range correlation coefficients between multiplicities and between transverse momentum and multiplicity with an additional condition of fixing the total number of initial strings, which corresponds to the selection by centrality classes in the analysis of experimental data. The influence of this condition on the correlation coefficients is analyzed.
3. A Monte Carlo algorithm has been developed that makes it possible to numerically calculate the correlation coefficients for the arbitrary string density, taking into account their fusion. It is shown that the results of numerical calculations for a high string density come to the asymptotics calculated analytically.
4. It is shown that in the framework of the model with string fusion on the lattice, the strongly intense observable Σ , which characterizes the correlations between the number of particles produced in two observation intervals spaced apart in rapidity, is equal to the weighted average of its values for different types of string clusters.
5. Using a combination of analytical and Monte Carlo methods, the dependence of the strongly intense variable Σ on the rapidity distance between the observation windows and their width is calculated for the case of pp collisions at various energies, including taking into account their centrality. Predictions of its form at various energies, including taking into account the degree of centrality of the collision are made.
6. It is shown that a comparison of the results of calculations of the strongly intense variable Σ with the preliminary experimental data of the ALICE collaboration indicates the formation of string clusters in pp interactions at LHC energies and an increase in their contribution with an increase in the initial energy and centrality of the collision.

Approbation of the research.

The findings of the investigation were reported at the following conferences:

1. IV RUSSIAN-SPANISH CONGRESS: Particle, Nuclear, Astroparticle Physics and Cosmology, Dubna, Russia, 04.09.2017 — 08.09.2017, oral report «Long-range correlations in the model with string fusion on a lattice»
2. Oslo Winter School "Standard Model, Quantum Chromodynamics, Heavy Ion Collisions", Skeikampen, Norway, 02.01.2018 — 12.01.2018, oral report «Long-range correlations in the model with string fusion on a lattice»
3. QUARKS-2018, XXth International Seminar on High Energy Physics, Valday, Russia, 27.05.2018 — 02.06.2018, oral report "Asymptotes of multiplicity and transverse momentum correlation coefficients at large string density"
4. International Schools of Subnuclear Physics 56th Course: From gravitational waves to QED, QFD and QCD, Erice, Italy, 14.06.2018 — 23.06.2018, oral report «Long-range rapidity correlations in the model with string fusion on transverse lattice»
5. The Helmholtz International Summer School "Matter under Extreme Conditions in Heavy-Ion Collisions and Astrophysics", Dubna, Russia, 20.08.2018 — 31.08.2018, oral report «Long-range rapidity correlations in the model with string fusion on transverse lattice»
6. NUCLEUS – 2021. Nuclear physics and elementary particle physics. Nuclear physics technologies, Saint-Petersburg, Russia, 20–25 september 2021, oral report «Strongly intense observables as a tool for studying clusters of quark-gluon strings in relativistic hadronic interactions», Svetlana Belokurova, Vladimir Vechernin

Publications.

The results obtained within this study were published in 6 articles

1. Belokurova S., Asymptotes of multiplicity and transverse momentum correlation coefficients at large string density, EPJ Web Conf. 191 04010 (2018), DOI: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201819104010>
2. Belokurova S. N., Vechernin V. V. Strongly Intensive Variables and Long-Range Correlations in the Model with a Lattice in the Transverse Plane, TMΦ, 200:2 (2019), 195–214, <https://doi.org/10.4213/tmf9684>; Theoret. and Math. Phys., 200:2 (2019), 1094–1109, doi.org/10.1134/S0040577919080026
3. Belokurova, S.N., Vechernin, V.V. Calculation of Long-Range Rapidity Correlations in the Model with String Fusion on a Transverse Lattice. Phys. Part. Nuclei 51, 319–322 (2020). <https://doi.org/10.1134/S1063779620030053>
4. Belokurova, S.; Vechernin, V. Long-Range Correlations between Observables in a Model with Translational Invariance in Rapidity. Symmetry 2020, 12, 1107. <https://doi.org/10.3390/sym12071107>
5. Belokurova, S. Study of Strongly Intense Quantities and Robust Variances in Multi-Particle Production at LHC Energies. Phys. Part. Nuclei 53, 154–158 (2022). <https://doi.org/10.1134/S106377962202017413>
6. Belokurova, S.; Vechernin, V. Using a Strongly Intense Observable to Study the Formation of Quark-Gluon String Clusters in pp Collisions at LHC Energies. Symmetry 2022, 14, 1673. <https://doi.org/10.3390/sym14081673>

Personal contribution of the author.

All of the main findings submitted for defense were obtained personally by the applicant or in work with scientific supervisor.

Thesis structure.

The thesis consists of introduction, 4 chapters, conclusion, bibliography and 4 appendixes. The dissertation contains 132 pages, 17 figures. The bibliography includes 79 items on 11 pages.

In the first chapter, the formulation of the discrete version of the model with string fusion is given and the basic concepts used in the work are introduced.

In the second chapter, correlations between transverse momentum and multiplicity and between transverse momenta in two separated rapidity intervals at high string density are analyzed in the framework of the string model with lattice fusion for the case of an arbitrary distribution of strings in the transverse plane, and the asymptotics of the correlation coefficients are calculated.

In the third chapter, the asymptotes of the coefficients of long-range correlations between multiplicities and between the multiplicity and the average transverse momentum are calculated in two separated rapidity intervals at a high string density and with the total number of initial strings fixed, which models the fixation of the collision centrality class.

The fourth chapter presents the results of a theoretical study of the strongly intensive variable Σ , as well as the results of numerical simulation and their comparison with experimental results.

In conclusion, the main results of this work are presented.

In the appendices, we present detailed calculations of some of the quantities used in this work.

Chapter 1. The model with string fusion in the plane of the impact parameter

In this chapter we describe a model which used for calculations of the coefficients of long-range correlations and highly intense observables for the interaction of hadrons at LHC energies in subsequent chapters.

1.1. The definition of the long range correlation coefficient

Correlations between two physical quantities F and B are usually studied experimentally, measured for particles with rapidities in two chosen intervals δy_F and δy_B , conventionally called the forward and backward observation windows. Such correlations are therefore called forward–backward (FB) correlations.

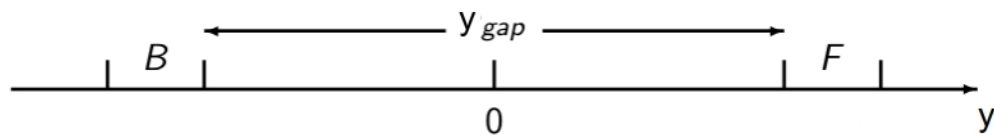


Figure 1.1. Two rapidity windows, forward and backward, separated by gap.

One reason for the appearance of FB correlations is particle production from the same or adjacent segments formed in the process of fragmentation of a given string, which, as noted above, only leads to correlations between yields of particles with close rapidity values; such correlations are usually called shortrange correlations. The contribution from these correlations vanishes if the observation windows are separated in rapidity.

Another reason for the appearance of FB correlations is fluctuations in number of produced sources (strings) from event to event. The contribution of this mechanism is independent of the rapidity gap between observation windows and does not decay as this gap increases (under the assumption that sufficiently long strings contributing to a wide rapidity domain are formed at high energies). They are therefore

called long-range (LR) correlations.

There are two alternative definitions of the correlation coefficients between the values F and B , and both are used in several papers.

The correlation coefficient can be defined via the regression function, as, for example, in [53]:

$$b_{BF}^{corr f} \equiv \left. \frac{d\langle B \rangle_F}{dF} \right|_{F=\langle F \rangle}. \quad (1.1)$$

The brackets $\langle \dots \rangle_F$ mean averaging over events at the fixed value of F .

Also, the correlation coefficient can be determined through the mean values of F and B [54]:

$$b_{BF}^{average} \equiv \frac{\langle FB \rangle - \langle F \rangle \langle B \rangle}{\langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2} = \frac{\text{cov}(F, B)}{D_F}. \quad (1.2)$$

where $\langle F \rangle$, $\langle B \rangle$ — the mean values of F и B . The brackets $\langle \dots \rangle$ mean averaging over all events.

These definitions (1.1) and (1.2) coincide for the linear regression function $\langle B \rangle_F = a + b_{BF}F$.

The value of the correlation between the relative values $F/\langle F \rangle$, $B/\langle B \rangle$ is often considered. The correlation coefficient between them is defined as

$$b_{FB}^{rel} = \frac{\langle F \rangle}{\langle B \rangle} b_{FB}. \quad (1.3)$$

1.2. Formulation of the model with fusion strings on a lattice

We used the discrete approach [37–39], which we already mentioned in the introduction, to take into account the processes of fusion of colored strings and the formation of string clusters. In this approach, in a transverse plane to the collision axis, a finite lattice (grid) is introduced with a cell area of the order of the cross section of the string (see Fig. 5). In this simplified approach, it is assumed that all strings centered in one cell of the transverse lattice fused. As a result, any string configuration appearing in the event is characterized by a set of integers C_η :

$$C_\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_M\}, \quad (1.4)$$

where η_i — number of string centers appeared in i -th cell, M — number of cells in transverse plain.

In the framework of this model any event will be characterized by a set of the following quantities

$$C = \{C_\eta, C_n^B, C_n^F, C_p^B, C_p^F\}, \quad (1.5)$$

where

$$C_n^F = \{n_1^F, \dots, n_M^F\}, \quad C_p^F = \{p_1^{1F}, \dots, p_1^{n_1^F}; \dots; p_M^{1F}, \dots, p_M^{n_M^F}\} \quad (1.6)$$

— the number of particles formed from the decay of the string in the i -th cell in the forward rapidity window and the values of their transverse momenta, and similarly for the backward rapidity window:

$$C_n^B = \{n_1^B, \dots, n_M^B\}, \quad C_p^B = \{p_1^{1B}, \dots, p_1^{n_1^B}; \dots; p_M^{1B}, \dots, p_M^{n_M^B}\}. \quad (1.7)$$

For a high string density and a large number of produced particles, we will also use the Gaussian approximation formulated, for example, in [44]: it is assumed that the fluctuations in the number of particles produced from the decay of strings in a given cell in the forward and backward rapidity windows, occur independently around the mean with a variance proportional to that mean according to the Gaussian distribution:

$$P(n_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_i}}} e^{-\frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{2d_{n_i}}}, \quad (1.8)$$

$$d_{n_i^F} = \omega_\mu \bar{n}_i^F, \quad d_{n_i^B} = \omega_\mu \bar{n}_i^B. \quad (1.9)$$

Similarly, fluctuations in the number of strings in different cells are assumed to be independent, occurring according to the Gauss distribution with a dispersion proportional to the average number of strings $\bar{\eta}_i$ in a given cell:

$$P(\eta_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{\eta_i}}} e^{-\frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2d_{\eta_i}}}, \quad (1.10)$$

$$d_{\eta_i} = \omega_{\eta} \bar{\eta}_i. \quad (1.11)$$

Similarly to [22; 24], we will assume that the average transverse momentum of particles produced from the decay of the i th cell depends only on the degree of string overlap in the given cell η_i and does not depend on the number of formed particles n_i^F, n_i^B . The variance of the momentum of an individual particle produced by the decay of strings in the i -th cell is assumed to be proportional to the square of the average value of the momentum, from dimensional considerations:

$$d_{p_i}(\eta_i) = \overline{p^2}(\eta_i) - \bar{p}^2(\eta_i) = \gamma \bar{p}^2(\eta_i). \quad (1.12)$$

The calculations use the explicit form of the dependences of the average number of particles formed from the decay of strings in the i -th cell and their transverse momentum on the number of strings in the given cell η_i , which are expected in the pattern based on the string fusion model [21; 22; 24]:

$$\bar{n}(\eta_i) = \sqrt{\eta_i}, \quad \bar{p}(\eta_i) = p_0 \sqrt[4]{\eta_i}. \quad (1.13)$$

Then the number of particles produced from the decay of strings in the i -th cell, with rapidities in the forward and backward rapidity windows

$$n_i^F = \mu_F \bar{n}(\eta_i), \quad n_i^B = \mu_B \bar{n}(\eta_i), \quad (1.14)$$

where μ_F, μ_B is the number of particles produced from the decay of one string in the forward and backward rapidity windows, respectively.

1.3. Finding the asymptotics of the correlation coefficients as derivatives of the regression function

Denote $C' = \{C_{\eta}, C_n^B, C_n^F\}$ The conditional mean $\langle B \rangle_F$, included in the definition of (1.1), for the case of long-range correlations can be written as [44]

$$\langle B \rangle_F = \frac{\sum_{C'} \langle B \rangle_{C'} P(C') P_{C'}(F)}{\sum_{C'} P(C') P_{C'}(F)}, \quad (1.15)$$

where $\langle B \rangle_{C'}$ – the mean value of B for a fixed configuration C' , $P(C')$ – the probability of forming a configuration C' , $P_{C'}(F)$ – probability observations of F in the forward rapidity window for a fixed string configuration C' .

Since the fluctuations in the number of particles produced from a given cell in the forward and backward rapidity windows and the fluctuations in the number of strings occur independently, the probability of formation of the C' configuration can be written as $P(C') = P(C_\eta)P_{C_\eta}(C_n^F)P_{C_\eta}(C_n^B)$, where

$$P(C_\eta) = \prod_{j=1}^M P(\eta_j) = \prod_{j=1}^M \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{\eta_j}}} e^{-\frac{(\eta_j - \bar{\eta}_j)^2}{2d_{\eta_j}}}, \quad (1.16)$$

$$P_{C_\eta}(C_n^F) = \prod_{i=1}^M P(n_i^F) = \prod_{i=1}^M \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_i^F}}} e^{-\frac{(n_i^F - \bar{n}_i^F)^2}{2d_{n_i^F}}}, \quad (1.17)$$

$$P_{C_\eta}(C_n^B) = \prod_{i=1}^M P(n_i^B) = \prod_{i=1}^M \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_i^B}}} e^{-\frac{(n_i^B - \bar{n}_i^B)^2}{2d_{n_i^B}}}. \quad (1.18)$$

The conditional mean $\langle B \rangle_F$ in this notation

$$\langle B \rangle_F = \frac{1}{P(F)} \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \left(\sum_{C_n^B} P_{C_\eta}(C_n^B) \langle B \rangle_{C_\eta C_n^B} \right) \left(\sum_{C_n^F} P_{C_\eta}(C_n^F) P_{C_\eta C_n^F}(F) \right), \quad (1.19)$$

$$P(F) = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \left(\sum_{C_n^B} P_{C_\eta}(C_n^B) \right) \left(\sum_{C_n^F} P_{C_\eta}(C_n^F) P_{C_\eta C_n^F}(F) \right), \quad (1.20)$$

where for $P_{C_\eta C_n^F}(F)$ for a large number of cells, by the central limit theorem, we have

$$P_{C_\eta C_n^F}(F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_F}} e^{-\frac{(F - \langle F \rangle_{C_\eta C_n^F})^2}{2d_F}}. \quad (1.21)$$

The sum over configurations at a high string density can be written approximately in the following form:

$$\sum_{C_\eta} \dots = \prod_{j=1}^M \sum_{\eta_j=0}^{\infty} \dots \longrightarrow \prod_{j=1}^M \int_0^{\infty} d\eta_j \dots, \quad (1.22)$$

then (1.19) looks like:

$$\langle B \rangle_F = \frac{1}{P(F)} \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j P(C_{\eta_j}) \int_0^\infty dn_j^B P_{C_\eta}(C_n^B) \langle B \rangle_{C_\eta C_n^B} \int_0^\infty dn_j^F P_{C_\eta}(C_n^F) P_{C_\eta C_n^F}(F), \quad (1.23)$$

$$P(F) = \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j P(C_{\eta_j}) \int_0^\infty dn_j^B P_{C_\eta}(C_n^B) \int_0^\infty dn_j^F P_{C_\eta}(C_n^F) P_{C_\eta C_n^F}(F). \quad (1.24)$$

In the next chapter, we will use the saddle-point method to find the asymptotics of these integrals at high string density.

1.4. Algorithm for calculating average values of observables in the model with string fusion on a lattice

To calculate the correlation coefficient using the (1.2) definition, it is necessary to calculate the average values of the observables: $\langle F \rangle$, $\langle B \rangle$, $\langle FB \rangle$, $\langle F^2 \rangle$. In the framework of the model with string fusion on a lattice, averaging over events is carried out in two stages: first, the average value of the quantity is calculated for a fixed string configuration C_η , then averaging over string configurations is performed. The averages are calculated in the Gaussian approximation (1.8), (1.10).

$$\langle F \rangle = \left\langle \left\langle \langle F \rangle^{C_n^F} \right\rangle^{C_\eta} \right\rangle^{C_\eta}, \quad (1.25)$$

where the brackets $\langle \dots \rangle^C$ mean the averaging over the C configuration,

$$\langle F \rangle^{C_\eta} = \prod_{i=1}^M \int d\eta_i P(\eta_i) F, \quad (1.26)$$

$$\langle F \rangle^{C_n^F} = \prod_{i=1}^M \int dn_i^F P(n_i^F) F. \quad (1.27)$$

We will look for the asymptotics of the correlation coefficients at a high string density in the approximation:

$$\frac{1}{\bar{\eta}_i} \ll 1, \quad \frac{1}{M} \ll 1. \quad (1.28)$$

We note that in experiments at the LHC, the values $\bar{\eta} \approx 10$ [55] are reached in the most central collisions of lead nuclei. Knowing the size of the nucleus and the radius of the string (given above), one can estimate the number of cells, for the case of heavy nuclei it turns out to be large, $M \sim 10^3$.

Chapter 2. Calculation of the asymptotic behavior of the long-range correlation coefficients at high string density for inhomogeneous distribution in the impact parameter plane

In this chapter, we calculate the asymptotics of the long-range correlation coefficients at high string density, taking into account their inhomogeneous distribution in the impact parameter plane. In the 2.1 section, the correlation coefficient between multiplicity and transverse momentum $b_{p_t n}$ is calculated as the derivative of the regression function. In the 2.2 section, the correlation coefficient between transverse impulses $b_{p_t p_t}$ is calculated by two methods — through the calculation of average values and as a derivative of the regression function. The chapter is based on the results published in [56] and [57] (section 5).

2.1. Coefficient of correlation between multiplicity and transverse momentum

In [43], analytical calculations of the asymptote of the pt-n-correlation coefficient for the general case of a nonuniform distribution of strings in the transverse plane were made using the definition (1.2), through the calculation of the average values of the observables:

$$b_{p_t n}^{average} = \frac{\omega_\eta p_0 \left(\frac{3}{8} \frac{s_{1/4}}{s_{1/2}} - \frac{1}{4} \frac{s_{3/4}}{s_{1/2}^2} \right)}{M \omega_\mu s_{1/2} + \frac{\mu_F \omega_\eta M}{4}}, \quad (2.1)$$

where

$$s_\beta = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \bar{\eta}^\beta. \quad (2.2)$$

In this section, we will calculate the correlation coefficient $b_{p_t n}$ using the defi-

inition (1.1):

$$b_{p_t n}^{corr f} = \left. \frac{d\langle p_t^B \rangle_{n_F}}{dn_F} \right|_{n_F=\langle n_F \rangle}. \quad (2.3)$$

For this, we first calculate the correlation function using the saddle point method, then find the coefficient $b_{p_t n}$ as a derivative of this dependence at the point $n_F = \langle n_F \rangle$. We can write (1.23) for this case:

$$\begin{aligned} \langle p_t^B \rangle_{n_F} &= \frac{1}{P(n_F)} \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j \int_0^\infty dn_j^B \int_0^\infty dn_j^F \langle p_t^B \rangle_{C_\eta C_n^B} N(C_\eta, C_n^F, C_n^B) \times \\ &\times e^{-\frac{(n_i^F - \bar{n}_i^F)^2}{2d_{n_i^F}}} e^{-\frac{(n_i^B - \bar{n}_i^B)^2}{2d_{n_i^B}}} e^{-\frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2d_{\eta_i}}} e^{-\frac{(n_F - \langle n_F \rangle_{C_\eta C_n^F})^2}{2dn_F(C_\eta, C_n^F)}}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} P(n_F) &= \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j \int_0^\infty dn_j^B \int_0^\infty dn_j^F N(C_\eta, C_n^F, C_n^B) \times \\ &\times e^{-\frac{(n_i^F - \bar{n}_i^F)^2}{2d_{n_i^F}}} e^{-\frac{(n_i^B - \bar{n}_i^B)^2}{2d_{n_i^B}}} e^{-\frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2d_{\eta_i}}} e^{-\frac{(n_F - \langle n_F \rangle_{C_\eta C_n^F})^2}{2dn_F(C_\eta, C_n^F)}}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

where

$$n_F = \sum_{i=1}^M n_i^F \quad (2.6)$$

When estimating the integrals by the saddle point method, the normalization factors from the Gaussian distributions $N(C_\eta, C_n^F, C_n^B)$ at the saddle point are taken out both in the numerator and in the denominator of the formula and are cancelled, so we can do not write them out explicitly.

When evaluating the integral over n_i^B , n_i^B is replaced by \bar{n}_i^B ,

$$\begin{aligned} \langle p_t^B \rangle_{n_F} &= \frac{1}{P(n_F)} \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j \int_0^\infty dn_j^F \langle p_t^B \rangle_{C_\eta C_n^B} N(C_\eta, C_n^F, C_n^B) \times \\ &\times e^{-\frac{(n_i^F - \bar{n}_i^F)^2}{2d_{n_i^F}}} e^{-\frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2d_{\eta_i}}} e^{-\frac{(n_F - \langle n_F \rangle_{C_\eta C_n^F})^2}{2dn_F(C_\eta, C_n^F)}}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$P(n_F) = \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j \int_0^\infty dn_j^F N(C_\eta, C_n^F, C_n^B) e^{-\frac{(n_i^F - \bar{n}_i^F)^2}{2d_{n_i^F}}} e^{-\frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2d_{\eta_i}}} e^{-\frac{(n_F - \langle n_F \rangle_{C_\eta C_n^F})^2}{2dn_F(C_\eta, C_n^F)}}. \quad (2.8)$$

When evaluating the integral over n_i^F , n_i^F is replaced by \bar{n}_i^F ,

$$\langle p_t^B \rangle_{n_F} = \frac{1}{P(n_F)} \int_0^\infty d\eta_1 \dots d\eta_M \langle p_t^B \rangle_{C_\eta C_{\bar{n}}^B} N(C_\eta, C_{\bar{n}}^F, C_{\bar{n}}^B) e^{-\phi}, \quad (2.9)$$

$$P(n_F) = \int_0^\infty d\eta_1 \dots d\eta_M N(C_\eta, C_{\bar{n}}^F, C_{\bar{n}}^B) e^{-\phi}, \quad (2.10)$$

where

$$\langle n_F \rangle_{C_\eta C_{\bar{n}}^F} = \sum_{i=1}^M \bar{n}_i^F = \mu_F \sum_{i=1}^M \eta_i^{1/2}, \quad (2.11)$$

$$d_{n_F}(C_\eta, C_{\bar{n}}^F) = \sum_{i=1}^M d_i^F = \omega_\mu \mu_F \sum_{i=1}^M \eta_i^{1/2}, \quad (2.12)$$

$$\phi = \sum_{i=1}^M \frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2d_{\eta_i}} + \frac{(n_F - \langle n_F \rangle_{C_\eta C_{\bar{n}}^F})^2}{2d_{n_F}} = \sum_{i=1}^M \frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2\omega_\mu \bar{\eta}_i} + \frac{\left(n_F - \mu_F \sum_{k=1}^M \eta_k^{1/2}\right)^2}{2\omega_\mu \mu_F \sum_{k=1}^M \eta_k^{1/2}} \quad (2.13)$$

The position of the saddle point η^* is determined by the condition:

$$\left. \frac{d\phi}{d\eta_i} \right|_{\eta_i=\eta_i^*} = 0, \quad (2.14)$$

When estimating the integrals over $d\eta_1 \dots d\eta_M$, the factor $\langle p_t^B \rangle_{C_\eta C_{\bar{n}}^B}$ in the numerator is taken out from under the sign integral at the saddle point, the remaining integrals cancel:

$$\langle p_t^B \rangle_{n_F} = \langle p_t^B \rangle_{C_{\eta^*} C_{\bar{n}}^B} = p_0 \frac{\sum_{i=1}^M \eta_i^{*3/4}}{\sum_{i=1}^M \eta_i^{*1/2}}. \quad (2.15)$$

We can rewrite (2.14) explicitly:

$$\frac{\eta_i^* - \bar{\eta}_i}{\omega_\eta \bar{\eta}_i} - \frac{(n_F - \mu_F \sum_{k=1}^M \eta_k^{*1/2}) \eta_i^{*-1/2} \mu_F}{2\omega_\mu \mu_F \sum_{k=1}^M \eta_k^{*1/2}} - \frac{n_F^2 - 2n_F \mu_F \sum_{k=1}^M \eta_k^{*1/2} + \mu_F^2 \left(\sum_{k=1}^M \eta_k^{*1/2}\right)^2}{4\omega_\mu \mu_F \left(\sum_{k=1}^M \eta_k^{*1/2}\right)^2} \eta_i^{*-1/2} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\eta_i^*}{\bar{\eta}_i} - 1 = \frac{\mu_F \omega_\eta \eta_i^{*-1/2}}{4\omega_\mu} \left(\frac{n_F^2}{\mu_F^2 \left(\sum_{k=1}^M \eta_k^{*1/2}\right)^2} - 1 \right). \quad (2.17)$$

We will make a change of variables:

$$z_i = \sqrt{\frac{\eta_i^*}{\bar{\eta}_i}}, \quad f = \frac{n_F}{\langle n_F \rangle} = \frac{n_F}{\mu_F \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{1/2}}, \quad a_i = \frac{\mu_F \omega_\eta}{4\omega_\mu \sqrt{\bar{\eta}_i}}, \quad (2.18)$$

when

$$z_i^2 - 1 = a_i \frac{f^2 \frac{\sum_{k=1}^M \bar{\eta}_k^{1/2}}{\sum_{k=1}^M z_k \bar{\eta}_k^{1/2}} - 1}{z_i},$$

$$z_i^3 - z_i = a_i \left(f^2 \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{1/2} \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^M z_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right)^2} - 1 \right). \quad (2.19)$$

The equation (2.19) has a solution $f = 1$, $z_i = 1$. Taking this into account, we differentiate (2.19) and put $f = 1$

$$z_i' = a_i \left(1 - \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{\eta}_k^{1/2} \right)} \sum_{k=1}^M z_k' \bar{\eta}_k^{1/2} \right),$$

$$\frac{z_i'}{a_i} + \frac{\sum_{k=1}^M z_k' \bar{\eta}_k^{1/2}}{\sum_{k=1}^M \bar{\eta}_k^{1/2}} = 1. \quad (2.20)$$

The equation has the following form

$$p_i z_i' + \sum q_k z_k' = c. \quad (2.21)$$

We have a series of equations of the form

$$p_i z_i' + \sum q_k z_k' = c, \quad i = 1 \dots M. \quad (2.22)$$

We will choose one of them, for example, $i = 1$

$$p_1 z_1' + \sum q_k z_k' = c \quad (2.23)$$

and subtract (2.23) from (2.22)

$$p_1 z_1' = p_i z_i', \quad i = 1 \dots M. \quad (2.24)$$

Thus, all values of z_i can be expressed in terms of z_1 :

$$z_i' = \frac{p_1}{p_i} z_1'. \quad (2.25)$$

Substitute the expression (2.25) into (2.22)

$$p_1 z'_1 + \sum q_k \frac{p_1}{p_k} z'_1 = c. \quad (2.26)$$

From here we can express z'_1 :

$$p_1 z'_1 = \frac{c}{1 + \sum \frac{q_k}{p_k}}. \quad (2.27)$$

$$z'_i|_{f=1} = \left. \frac{dz_i^*}{df} \right|_{f=1} = \frac{c}{p_i \left(1 + \sum \frac{q_k}{p_k}\right)} \quad (2.28)$$

$$z'_i|_{f=1} = \left. \frac{dz_i^*}{df} \right|_{f=1} = a_i \frac{1}{1 + \left(\sum a_k \bar{\eta}_k^{1/2}\right) / \left(\sum_{k=1}^M \bar{\eta}_k^{1/2}\right)} = \frac{\mu_F \omega_\eta s_{1/2}}{\sqrt{\bar{\eta}_i} (4\omega_\mu s_{1/2} + \mu_F \omega_\eta)} \quad (2.29)$$

$$b_{p_t n}^{corr f} = p_0 \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^M \eta_i^{*1/2}} \frac{d}{dn_F} \sum_{i=1}^M \eta_i^{*3/4} - \frac{\sum_{i=1}^M \eta_i^{*3/4}}{\left(\sum_{i=1}^M \eta_i^{*1/2}\right)^2} \frac{d}{dn_F} \sum_{i=1}^M \eta_i^{*1/2} \right) \Bigg|_{n_F = \langle n_F \rangle} \quad (2.30)$$

Taking into account the change of variables (2.18)

$$b_{p_t n}^{corr f} = \frac{p_0}{\langle n_F \rangle} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{1/2}} \frac{d}{df} \sum_{i=1}^M z_i^{3/2} \bar{\eta}_i^{3/4} \Bigg|_{f=1} - \frac{\sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{3/4}}{\left(\sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{1/2}\right)^2} \frac{d}{df} \sum_{i=1}^M z_i \bar{\eta}_i^{1/2} \Bigg|_{f=1} \right),$$

$$b_{p_t n}^{corr f} = \frac{p_0}{\mu_F M s_{1/2}} \left(\frac{1}{M s_{1/2}} \frac{3}{2} \sum_{i=1}^M z_i^{*'}(1) \bar{\eta}_i^{3/4} - \frac{s_{3/4}}{M (s_{1/2})^2} \sum_{i=1}^M z_i^{*'}(1) \bar{\eta}_i^{1/2} \right) \quad (2.31)$$

We will calculate the expressions included in (2.31):

$$\sum_{i=1}^M z_i'(1) \bar{\eta}_i^{1/2} = \frac{\mu_F \omega_\eta s_{1/2}}{(4\omega_\mu s_{1/2} + \mu_F \omega_\eta)} M, \quad (2.32)$$

$$\sum_{i=1}^M z_i'(1) \bar{\eta}_i^{3/4} = \frac{\mu_F \omega_\eta s_{1/2}}{(4\omega_\mu s_{1/2} + \mu_F \omega_\eta)} M s_{1/4}. \quad (2.33)$$

Finally

$$b_{p_t n}^{corr f} = \frac{p_0 \omega_\eta \left(\frac{3}{2} \frac{s_{1/4}}{s_{1/2}} - \frac{s_{3/4}}{(s_{1/2})^2} \right)}{4\omega_\mu M s_{1/2} + M \mu_F \omega_\eta} \quad (2.34)$$

We will move on to the relative correlation coefficient. When recalculating, we will use the values for the averages in the leading order: $\langle p_t^B \rangle = p_0 \frac{s_{3/4}}{s_{1/2}}$, $\langle n_F \rangle = \mu_F M s_{1/2}$

$$b_{p_t n}^{rel} = \frac{\omega_\eta \mu_F}{4\omega_\mu s_{1/2} + \mu_F \omega_\eta} \left(\frac{3}{2} \frac{s_{1/4} s_{1/2}}{s_{3/4}} - 1 \right). \quad (2.35)$$

The discussion of the results

The calculated asymptotic of the correlation coefficient between transverse momentum and multiplicity for a non-uniform distribution of strings (2.34) coincides with the asymptotic behavior calculated in [43] using the definition (1.2)

$$b_{p_t n}^{corr f} = b_{p_t n}^{average}.$$

The coincidence of these expressions within the framework of the approximations made is not obvious in advance, since for a nonlinear regression function, two different, (1.2) and (1.1), definitions of the correlation coefficient are not identically coinciding and, in principle, can lead to different results.

For the homogeneous distribution $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}$:

$$b_{p_t n} = \frac{\mu_F \omega_\eta}{2(\mu_F \omega_\eta + 4\omega_\eta \sqrt{\bar{\eta}})}. \quad (2.36)$$

The obtained formula for the asymptotics of the correlation coefficient (2.35) in the case of a uniform distribution of strings becomes the expression (2.36), which was previously obtained in a different way in [35; 38; 39] for a high string density.

It can be seen from the expression (2.35) that this correlation coefficient can take negative values when the difference $\frac{3}{2} \frac{s_{1/4} s_{1/2}}{s_{3/4}} - 1 < 0$. Let us show that there really exist such on average non-uniform distributions of strings in the impact parameter plane for which $b_{p_t n} < 0$. To do this, we introduce an inhomogeneous

distribution of strings in the transverse plane of the string: let $M_+ = mM$ cells have an increased string density: $\eta_+ = a\eta$, i.e. without loss of generality, only $a > 1$ can be considered, and in the remaining $(1 - m)M$ cells there are η strings. Let us find the parameters $a \geq 1$ and $0 \leq m \leq 1$ for which $\frac{3}{2} \frac{s_{1/4} s_{1/2}}{s_{3/4}} - 1 < 0$ and hence $b_{p_t n}^{rel} < 0$.

For this distribution, the sum $s_\nu = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^\nu$ has the form $s_\nu = m(a\bar{\eta})^\nu + (1 - m)\bar{\eta}^\nu$. The condition

$$\frac{3}{2} \frac{s_{1/4} s_{1/2}}{s_{3/4}} - 1 < 0 \quad (2.37)$$

is equivalent to

$$m^2(3a^{3/4} - 3a^{1/2} - 3a^{1/4} + 3) + m(-2a^{3/4} + 3a^{1/2} + 3a^{1/4} - 4) + 1 < 0. \quad (2.38)$$

Denote

$$F(a, m) \equiv m^2(3a^{3/4} - 3a^{1/2} - 3a^{1/4} + 3) + m(-2a^{3/4} + 3a^{1/2} + 3a^{1/4} - 4) + 1. \quad (2.39)$$

We will construct the curve $F(a, m) = 0$ — the boundary of the region where $F(a, m) < 0$ for $a \geq 1$ and $0 \leq m \leq 1$.

Thus, the correlation coefficient $b_{p_t n}^{rel}$ can become negative in the case of a strongly inhomogeneous distribution, at $a \gtrsim 42.86$, i.e. if in some fraction of the cells the string density is $\gtrsim 43$ times higher.

2.2. Correlation coefficient between transverse momenta

Previously, the pt-pt correlation coefficient was studied in [43; 44].

In [44], when calculating the coefficient $b_{p_t p_t}$ by the first method (1.1), first, the regression function $\langle p_t^B \rangle_{p_t^B}$ was calculated using the saddle point method, then the coefficient $b_{p_t p_t}$ was found as a derivative at the point $p_t^F = \langle p_t^F \rangle$. The asymptotics was calculated only for the case of the uniform distribution of strings in the transverse plane.

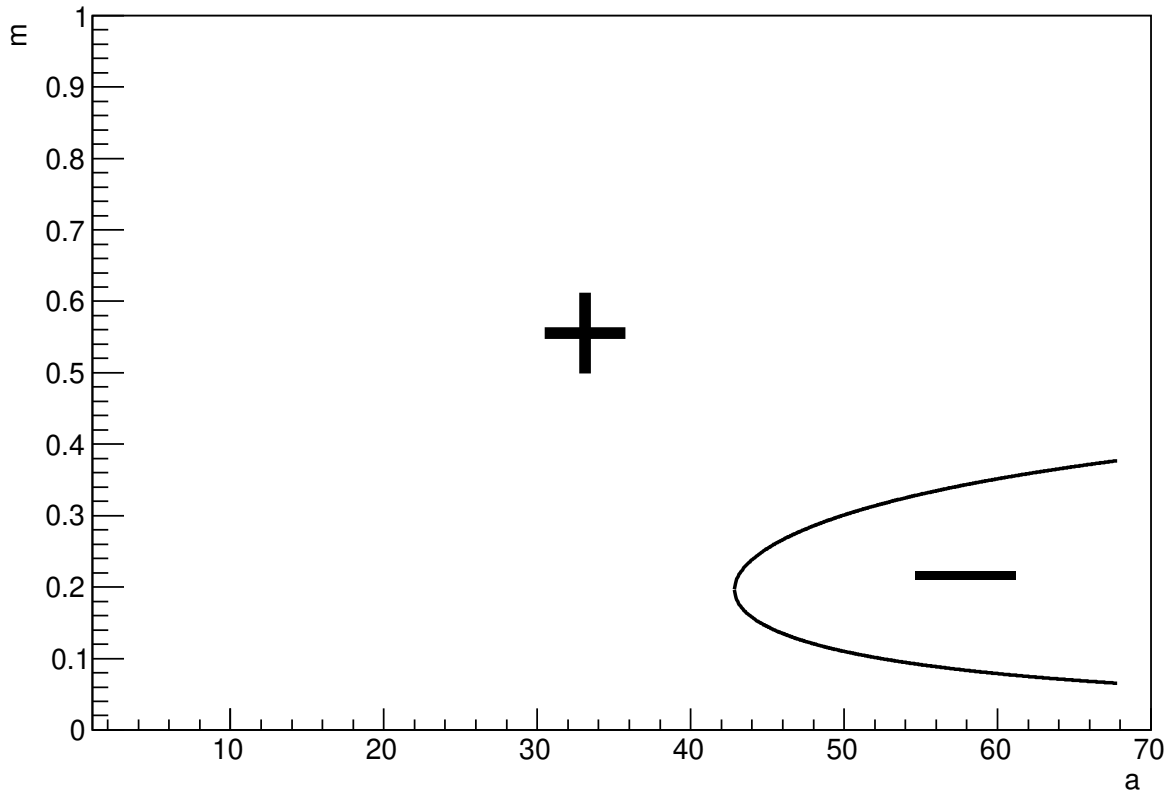


Figure 2.1. The function $F(a, m) = 0$ showing the range of parameters a and m at which the value of the p_t - n correlation coefficient becomes negative.

In [43] the coefficient $b_{p_t p_t}$ was calculated by the second method in the Gaussian approximation (1.10), (1.8) for large average string densities $\bar{\eta}_i \gg 1$ and the number of lattice cells $M \gg 1$: the average values of $\langle p_t^F \rangle$, $\langle p_t^B \rangle$, $\langle (p_t^F)^2 \rangle$ and $\langle p_t^F p_t^B \rangle$ included in the formula (1.2) for the correlation coefficient $b_{p_t p_t}$. However, the final expression for the asymptote $b_{p_t p_t}$ in the more general case of the non-uniform distribution of strings in the impact parameter plane has never been obtained. In this section, we find an expression for the asymptotics of the correlation coefficient between transverse momenta $b_{p_t p_t}$ for the general case with a nonuniform string distribution, successively using both of these approaches.

Calculation of the asymptotics of the correlation coefficient $b_{p_t p_t}$ by finding the average values

We will calculate the correlation coefficient

$$b_{p_t p_t}^{average} = \frac{\langle p_t^F p_t^B \rangle - \langle p_t^F \rangle \langle p_t^B \rangle}{\langle (p_t^F)^2 \rangle - \langle p_t^F \rangle^2} = \frac{\text{cov}(p_F, p_B)}{D_{p_F}}. \quad (2.40)$$

for an inhomogeneous distribution of strings.

The mean value $\langle p_t^B \rangle$ was calculated in the paper [43]:

$$\langle p_t^B \rangle = \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \left[1 - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\sqrt{\bar{\eta}_i} S_{1/2}} + \frac{\omega_\eta M}{4S_{1/2}^2} \right]}{S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2}}, \quad (2.41)$$

where

$$S_\alpha = \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i. \quad (2.42)$$

We will calculate $\langle p_F^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle p_t^{F^2} \rangle &= \left\langle \frac{1}{n_F^2} \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i^F} p_i^{jF} \right)^2 \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{n_F^2} \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i^F} (p_i^{jF})^2 + \sum_{i=1}^M \sum_{j \neq l} p_i^{jF} p_i^{lF} + \sum_{i \neq k} \sum_{j=1}^{n_i^F} \sum_{l=1}^{n_k^F} p_i^{jF} p_k^{lF} \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \left\langle \frac{1}{n_F^2} \left(\sum_{i=1}^M n_i^F \bar{p}^2(\eta_i) + \sum_{i=1}^M n_i^F (n_i^F - 1) \bar{p}^2(\eta_i) + \sum_{i \neq k} n_i^F n_k^F \bar{p}(\eta_i) \bar{p}(\eta_k) \right) \right\rangle^{C_n^F} \right\rangle^{C_\eta} = \\ &= \left\langle \left\langle \frac{1}{n_F^2} \left(\sum_{i=1}^M n_i^F d_{p_i}(\eta_i) + \left(\sum_{i=1}^M n_i^F \bar{p}(\eta_i) \right)^2 \right) \right\rangle^{C_n^F} \right\rangle^{C_\eta}. \quad (2.43) \end{aligned}$$

We will use (1.12)

$$\langle p_t^{F^2} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^M \left\langle \frac{n_i^F}{\left(\sum_{j=1}^M n_j^F \right)^2} \right\rangle_{C_n^F} \gamma \bar{p}^2(\eta_i) + \sum_{i=1}^M \left\langle \frac{n_i^{F^2}}{\left(\sum_{j=1}^M n_j^F \right)^2} \right\rangle_{C_n^F} \bar{p}^2(\eta_i) + \right.$$

$$+ \sum_{i \neq k} \left\langle \frac{n_i^F n_j^F}{\left(\sum_{j=1}^M n_j^F\right)^2} \right\rangle_{C_n^F} \left\langle \bar{p}(\eta_i) \bar{p}(\eta_k) \right\rangle_{C_\eta}. \quad (2.44)$$

The averaging of the fractions included in (2.44) was carried out in the appendix A.

After averaging, we get

$$\begin{aligned} \langle p_t^{F2} \rangle &= \frac{\gamma + \omega_\mu}{\mu_F} \left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} + \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} - \\ &\quad - \frac{\omega_\mu}{\mu_F} \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^3} \right\rangle_{C_\eta}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Averaging over C_η configurations is described in the appendix B:

$$\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \frac{1}{\Sigma'^2} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 - \frac{\omega_\eta}{\sqrt{\bar{\eta}_i} S_{1/2}} + \frac{3\omega_\eta M}{4 S_{1/2}^2} \right], \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} &= \frac{1}{\Sigma'^2} \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3M'}{2\Sigma'^2} - \frac{3\omega_\eta}{2\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3\omega_\eta}{8\bar{\eta}_i} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ 1 + \frac{3M'}{2\Sigma'^2} - \frac{3\omega_\eta}{4\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3\omega_\eta}{4\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{3}{32} \omega_\eta \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \right], \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^3} \right\rangle_{C_\eta} &= \frac{1}{\Sigma'^3} \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3M\omega_\eta}{2 S_{1/2}^2} - \frac{9\omega_\eta}{4 S_{1/2} \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3\omega_\eta}{8\bar{\eta}_i} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ 1 + \frac{3M\omega_\eta}{2 S_{1/2}^2} - \frac{9\omega_\eta}{8 S_{1/2} \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{9\omega_\eta}{8 S_{1/2} \sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{3}{32} \omega_\eta \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \right], \end{aligned} \quad (2.48)$$

where

$$\Sigma' = \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega_\eta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}}, \quad M' = \frac{\omega_\eta}{2} M + \frac{\omega_\eta^2}{16} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}. \quad (2.49)$$

Since the fluctuations of the multiplicities and transverse momenta of the particles in the front and back windows are independent and $\langle p_t^F \rangle = \langle p_t^B \rangle$, then with

averaging $\langle p_t^F p_t^B \rangle$ we have

$$\langle p_t^F p_t^B \rangle = \left\langle \left\langle \left\langle p_t^F \right\rangle^{C_p^F} \right\rangle^{C_n^F} \left\langle \left\langle p_t^B \right\rangle^{C_p^B} \right\rangle^{C_n^B} \right\rangle^{C_\eta} = \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle^{C_\eta}. \quad (2.50)$$

This expression has been calculated above (2.47).

$$\text{As } \langle p_t^F \rangle = \langle p_t^B \rangle,$$

$$\langle p_t^F \rangle \langle p_t^B \rangle = \langle p_t^F \rangle^2. \quad (2.51)$$

Let's square (2.41). In leading order, we get

$$\begin{aligned} \langle p_t^F \rangle^2 &= \frac{1}{(S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2})^2} \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{M\omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \right) + \right. \\ &+ \left. \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{M\omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_j} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Next, we calculate the numerator and denominator in the formula (2.40), we take their ratio and find an expression for $b_{p_t p_t}$. These calculations are included in the Appendix C. Finally, for the correlation coefficient between the average transverse momenta in relative variables for the case of an inhomogeneous distribution of strings in the plane of the impact parameter, we obtain:

$$b_{p_t p_t}^{average} = \frac{\frac{9}{16} \omega_\eta s_{1/2} + \frac{1}{4} \omega_\eta \frac{S_{3/4}^2}{s_{1/2}^2} - \frac{3}{4} \omega_\eta \frac{s_{3/4} s_{1/4}}{s_{1/2}}}{\frac{9}{16} \omega_\eta s_{1/2} + \frac{1}{4} \omega_\eta \frac{S_{3/4}^2}{s_{1/2}^2} - \frac{3}{4} \omega_\eta \frac{s_{3/4} s_{1/4}}{s_{1/2}} + \frac{\gamma + \omega_\mu}{\mu_F} s_1 - \frac{\omega_\mu s_{3/4}^2}{\mu_F s_{1/2}}}, \quad (2.53)$$

$$b_{p_t p_t}^{average} = \frac{\omega_\eta \mu_F \left(9s_{1/2}^3 - 12s_{1/4} s_{3/4} s_{1/2} + 4s_{3/4}^2 \right)}{16\gamma s_1 s_{1/2}^2 + \omega_\eta \mu_F \left(9s_{1/2}^3 - 12s_{1/4} s_{3/4} s_{1/2} + 4s_{3/4}^2 \right) + 16\omega_\mu s_{1/2} \left(s_1 s_{1/2} - s_{3/4}^2 \right)}. \quad (2.54)$$

Calculation of the asymptotics of the correlation coefficient $b_{p_t p_t}$ by the saddle-point method

Let us generalize the calculations carried out in [44] to the case of an inhomogeneous distribution of strings in the transverse plane.

We can write the formula (1.23):

$$\langle p_B \rangle_{p_F} = \frac{1}{P(p_F)} \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j dn_j^B dn_j^F N(C_\eta, C_n^F) \langle p_B \rangle_{C_\eta C_n^B} e^{-\Phi} e^{-\Psi}, \quad (2.55)$$

$$P(p_F) = \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j dn_j^B dn_j^F N(C_\eta, C_n^F) e^{-\Phi} e^{-\Psi}, \quad (2.56)$$

where

$$\Phi = \sum_{i=1}^M \frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2d_{\eta_i}} + \sum_{i=1}^M \frac{(n_i^F - \bar{n}_i^F)^2}{2d_{n_i^F}} + \frac{[p_F - \langle p_F \rangle_{C_\eta C_n^F}]^2}{2d_{p_F}(C_\eta, C_n^F)}, \quad \Psi = \sum_{i=1}^M \frac{(n_i^B - \bar{n}_i^B)^2}{2d_{n_i^B}}. \quad (2.57)$$

$$\langle p_F \rangle_{C_\eta C_n^F} = \frac{\sum n_i^B(\eta_i) \bar{p}_i(\eta_i)}{\sum n_i^B(\eta_i)}, \quad d_{p_F}(C_\eta, C_n^F) = \frac{\sum n_i^B(\eta_i) d_{p_i}(\eta_i)}{(\sum n_i^B(\eta_i))^2}. \quad (2.58)$$

When evaluating the integral over n_i^B , n_i^B is replaced by \bar{n}_i^B ,

$$\langle p_B \rangle_{p_F} = \frac{1}{P(p_F)} \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j dn_j^F N(C_\eta, C_n^F) \langle p_B \rangle_{C_\eta C_n^B} e^{-\Phi}, \quad (2.59)$$

$$P(p_F) = \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\eta_j dn_j^F N(C_\eta, C_n^F) e^{-\Phi}. \quad (2.60)$$

When estimating integrals by the saddle point method, the normalization factors from the Gaussian distributions $N(C_\eta^*, C_n^{*F})$ at the saddle point $\eta_i^*(p_F)$, $n_i^*(p_F)$ are taken out both in the numerator and in the denominator of the formula and are reduced, then

$$\langle p_B \rangle_{p_F} = \langle p_B \rangle_{C_\eta^* C_n^{*B}} = \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}_i^B(\eta_i^*) \bar{p}_i(\eta_i^*)}{\sum_{i=1}^M \bar{n}_i^B(\eta_i^*)}. \quad (2.61)$$

We make a change of variables

$$z_i^A = \frac{\eta_i}{\bar{\eta}_i}, \quad \rho_i = \frac{n_i^F}{\bar{n}_i^F(\bar{\eta}_i)}, \quad f = \frac{p_F}{\langle p_F \rangle}, \quad (2.62)$$

and get

$$\Phi = \sum_{i=1}^M \frac{(z_i^A - 1)^2 \bar{\eta}_i}{2\omega_\eta} + \sum_{i=1}^M \frac{(\rho_i - z_i^2)^2 \sqrt{\bar{\eta}_i} \mu_F}{2\omega_\mu z_i^2} + \frac{\left(f \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i z_i \bar{\eta}_i^{3/4}}{\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2}} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{-1/2} \right)^2 \mu_F}{2\gamma \sum_{i=1}^M \rho_i z_i^2 \bar{\eta}_i}. \quad (2.63)$$

Differentiate with respect to z_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = & \frac{4z_i^3(z_i^4 - 1)\bar{\eta}_i}{\omega_\eta} - \frac{2(\rho_i - z_i^2)\sqrt{\bar{\eta}_i}\mu_F}{\omega_\mu z_i} - \frac{(\rho_i - z_i^2)^2\sqrt{\bar{\eta}_i}\mu_F}{\omega_\mu z_i^3} + \\ & \frac{\rho_i \bar{\eta}_i^{3/4} \left(f \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i z_i \bar{\eta}_i^{3/4}}{\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2}} \right) \left(\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right) \mu_F}{\gamma \sum_{i=1}^M \rho_i z_i^2 \bar{\eta}_i} \\ & - \frac{\left(f \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i z_i \bar{\eta}_i^{3/4}}{\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2}} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right)^2 \mu_F}{\gamma \left(\sum_{i=1}^M \rho_i z_i^2 \bar{\eta}_i \right)^2} \rho_i z_i \bar{\eta}_i. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Differentiate with respect to ρ_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_i} = & \frac{(\rho_i - z_i^2)\sqrt{\bar{\eta}_i}\mu_F}{\omega_\mu z_i^2} - \frac{\left(f \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i z_i \bar{\eta}_i^{3/4}}{\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2}} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right)^2 \mu_F z_i^2 \bar{\eta}_i}{2\gamma \left(\sum_{i=1}^M \rho_i z_i^2 \bar{\eta}_i \right)^2} \\ & + \frac{\left(f \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i z_i \bar{\eta}_i^{3/4}}{\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2}} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right) \mu_F \bar{\eta}_i^{1/2}}{\gamma \sum_{i=1}^M \rho_i z_i^2 \bar{\eta}_i} + \\ & + \frac{\left(f \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i z_i \bar{\eta}_i^{3/4}}{\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2}} \right) \left(\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right)^2 \mu_F}{\gamma \sum_{i=1}^M \rho_i z_i^2 \bar{\eta}_i} \left(\frac{-z_i \bar{\eta}_i^{3/4}}{\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2}} + \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i z_i \bar{\eta}_i^{3/4}}{\left(\sum_{i=1}^M \rho_i \bar{\eta}_i^{1/2} \right)^2 \bar{\eta}_i^{1/2}} \right). \end{aligned} \quad (2.65)$$

In the new variables (2.62) the position of the saddle point $z_i = z_i^*(f)$, $\rho_i = \rho_i^*(f)$ is determined from the conditions:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_i} = 0. \quad (2.66)$$

Differentiate (2.66) with respect to f and set $f = 1$. Considering that for $f = 1$ the equations (2.66) have solutions $z_i = 1$ and $\rho_i = 1$, we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{16z_i' \bar{\eta}_i}{\omega_\eta} - \frac{2(\rho_i' - 2z_i')\sqrt{\bar{\eta}_i}\mu_F}{\omega_\mu z_i} \\ & - \frac{\bar{\eta}_i^{3/4} \left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M (\rho_i' + z_i') \bar{\eta}_i^{3/4}}{S_{1/2}} + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}^2} \sum_{i=1}^M \rho_i' \bar{\eta}_i^{1/2} \right) S_{1/2} \mu_F}{\gamma S_1} = 0, \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho'_i - 2z'_i)\sqrt{\bar{\eta}_i}\mu_F}{\omega_\mu} + \frac{\left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M(\rho'_i+z'_i)\bar{\eta}_i^{3/4}}{S_{1/2}} + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}^2} \sum_{i=1}^M \rho'_i \bar{\eta}_i^{1/2}\right) \left(\sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{1/2}\right)^2 \mu_F}{\gamma \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i} \times \\ & \times \left(\frac{-\bar{\eta}_i^{3/4}}{\sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{1/2}} + \frac{\sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{3/4}}{\left(\sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{1/2}\right)^2 \bar{\eta}_i^{1/2}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Let's transform the obtained expressions:

$$16z'_i - \frac{2\omega_\eta(\rho'_i - 2z'_i)\mu_F}{\sqrt{\bar{\eta}_i}\omega_\mu z_i} - \frac{\omega_\eta \bar{\eta}_i^{1/4} \left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M(\rho'_i+z'_i)\bar{\eta}_i^{3/4}}{S_{1/2}} + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}^2} \sum_{i=1}^M \rho'_i \bar{\eta}_i^{1/2}\right) S_{1/2}\mu_F}{\sqrt{\bar{\eta}_i}\gamma S_1} = 0, \quad (2.69)$$

$$\frac{(\rho'_i - 2z'_i)\sqrt{\bar{\eta}_i}\mu_F}{\omega_\mu} + \frac{\left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^M(\rho'_i+z'_i)\bar{\eta}_i^{3/4}}{S_{1/2}} + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}^2} \sum_{i=1}^M \rho'_i \bar{\eta}_i^{1/2}\right) S_{1/2}^2 \mu_F}{\gamma S_1} \left(\frac{-\bar{\eta}_i^{3/4}}{S_{1/2}} + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}^2} \bar{\eta}_i^{1/2}\right) = 0. \quad (2.70)$$

We get a system of equations:

$$\frac{16\gamma\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} z'_i \bar{\eta}_i^{-1/2} - 2\gamma(\rho'_i - 2z'_i) - \omega_\mu \bar{\eta}_i^{-1/4} \left(\frac{S_{3/4}}{S_1} - \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^M (\rho'_k + z'_k) \bar{\eta}_k^{3/4} + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}S_1} \sum_{k=1}^M \rho'_k \bar{\eta}_k^{1/2}\right) = 0, \quad (2.71)$$

$$\gamma(\rho'_i - 2z'_i) + \omega_\mu \left(\frac{S_{3/4}}{S_1} - \frac{\sum_{k=1}^M (\rho'_k + z'_k) \bar{\eta}_k^{3/4}}{S_1} + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}S_1} \sum_{k=1}^M \rho'_k \bar{\eta}_k^{1/2}\right) \left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \bar{\eta}_i^{1/4}\right) = 0. \quad (2.72)$$

We can denote ρ'_i :

$$\omega_\mu \left(\frac{S_{3/4}}{S_1} - \frac{\sum_{k=1}^M (\rho'_k + z'_k) \bar{\eta}_k^{3/4}}{S_1} + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}S_1} \sum_{k=1}^M \rho'_k \bar{\eta}_k^{1/2}\right) \left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \bar{\eta}_i^{1/4}\right) = -\gamma(\rho'_i - 2z'_i), \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \bar{\eta}_i^{1/4}\right) \left(\frac{16\gamma\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} z'_i \bar{\eta}_i^{-1/2} - 2\gamma(\rho'_i - 2z'_i)\right) + \bar{\eta}_i^{1/4} \gamma(\rho'_i - 2z'_i) = 0, \\ & \rho'_i \left(-2\left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \bar{\eta}_i^{1/4}\right) + \bar{\eta}_i^{1/4}\right) = z'_i \left(2\bar{\eta}_i^{1/4} - \left(4 + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} \bar{\eta}_i^{1/2}\right) \left(\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} - \bar{\eta}_i^{1/4}\right)\right), \\ & \rho'_i = 2z'_i + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} \frac{\bar{\eta}_i^{1/4} - \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}}{3\bar{\eta}_i^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} z'_i \bar{\eta}_i^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Substitute (2.74) into (2.71):

$$\frac{16\gamma\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} z'_i \bar{\eta}_i^{-1/2} - 2\gamma \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta\mu_F} \frac{\bar{\eta}_i^{-1/4} - \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}}{3\bar{\eta}_i^{1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} z'_i \bar{\eta}_i^{-1/2} - \bar{\eta}_i^{1/4} \frac{\omega_\mu}{S_1} \left[S_{3/4} -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^M \left(3 + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_k^{-1/4} - \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}}{3\bar{\eta}_k^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} \bar{\eta}_k^{-1/2} \right) z'_k \bar{\eta}_k^{-3/4} + \\
& + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \sum_{k=1}^M \left(2 + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_k^{-1/4} - \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}}{3\bar{\eta}_k^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} \bar{\eta}_k^{-1/2} \right) z'_k \bar{\eta}_k^{-1/2} \Big] = 0 \quad (2.75)
\end{aligned}$$

Let's transform the resulting expression:

$$\begin{aligned}
& \frac{16\gamma}{\omega_\eta \mu_F} \frac{z'_i \bar{\eta}_i^{-1/2}}{3\bar{\eta}_i^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - \frac{1}{S_1} \left(S_{3/4} - \sum_{k=1}^M \left(3 + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_k^{-1/4} - \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}}{3\bar{\eta}_k^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} \bar{\eta}_k^{-1/2} \right) z'_k \bar{\eta}_k^{-3/4} + \right. \\
& \left. + \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \sum_{k=1}^M \left(2 + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_k^{-1/4} - \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}}{3\bar{\eta}_k^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} \bar{\eta}_k^{-1/2} \right) z'_k \bar{\eta}_k^{-1/2} \right) = 0 \quad (2.76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{16\gamma S_1}{\omega_\eta \mu_F} \frac{z'_i \bar{\eta}_i^{-1/2}}{3\bar{\eta}_i^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - S_{3/4} + 3 \sum_{k=1}^M z'_k \bar{\eta}_k^{-3/4} + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \sum_{k=1}^M \frac{z'_k \bar{\eta}_k^{-3/2}}{3\bar{\eta}_k^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - 2 \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \sum_{k=1}^M \frac{z'_k \bar{\eta}_k^{-5/4}}{3\bar{\eta}_k^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - \\
& - 2 \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \sum_{k=1}^M z'_k \bar{\eta}_k^{-1/2} + \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}^2} \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \sum_{k=1}^M \frac{z'_k \bar{\eta}_k}{3\bar{\eta}_k^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} = 0 \quad (2.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& z'_i \frac{16\gamma S_1}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_i^{-1/2}}{3\bar{\eta}_i^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} + \sum_{k=1}^M z'_k \left(3\bar{\eta}_k^{-3/4} + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_k^{-3/2}}{3\bar{\eta}_k^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - \right. \\
& \left. - 2 \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \frac{\bar{\eta}_k^{-5/4}}{3\bar{\eta}_k^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - 2 \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \bar{\eta}_k^{-1/2} + \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}^2} \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_k}{3\bar{\eta}_k^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} \right) = S_{3/4} \quad (2.78)
\end{aligned}$$

The equation (2.78) has the form (2.21). His (2.28) solution:

$$z'_i \Big|_{f=1} = \frac{dz_i^*}{df} \Big|_{f=1} = \frac{c}{p_i \left(1 + \sum \frac{q_k}{p_k} \right)}, \quad (2.79)$$

$$\text{где } p_i = \frac{16\gamma S_1}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_i^{-1/2}}{3\bar{\eta}_i^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}},$$

$$q_k = \left(3\bar{\eta}_k^{-3/4} + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_k^{-3/2}}{3\bar{\eta}_k^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - 2 \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \frac{\bar{\eta}_k^{-5/4}}{3\bar{\eta}_k^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - 2 \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \bar{\eta}_k^{-1/2} + \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}^2} \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_k}{3\bar{\eta}_k^{-1/4} - 2\frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} \right), \quad c = S_{3/4}.$$

By definition (1.1)

$$b_{p_t p_t} = \frac{d\langle p_B \rangle_{p_F}}{dp_F} \Big|_{p_F=\langle p_F \rangle} = \sum_{i=1}^M \frac{\partial}{\partial \eta_i^*} \langle p_B \rangle_{C_{\eta^*} C_{\bar{n}}^B} \frac{d\eta_i^*}{dp_F} \Big|_{p_F=\langle p_F \rangle}. \quad (2.80)$$

Considering the replacement (2.62)

$$\left. \frac{d\eta_i^*}{dp_F} \right|_{p_F=\langle p_F \rangle} = \left. \frac{d(z_i^{*4} \bar{\eta}_i)}{\langle p_F \rangle df} \right|_{f=1} = \left. \frac{4\bar{\eta}_i dz_i^*}{\langle p_F \rangle df} \right|_{f=1}. \quad (2.81)$$

We use an explicit form of dependence: $\bar{n}_F = \sum_{i=1}^M \bar{n}_i^F$, $\langle p_F \rangle = \frac{1}{\bar{n}_F} \sum_{i=1}^M \bar{n}_i^F \bar{p}_i$, $\bar{n}_i^F(\eta_i) = \mu_F \sqrt{\eta_i}$, $\bar{p}_i(\eta_i) = p_0 \sqrt[4]{\eta_i}$,

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i^*} \langle p_B \rangle_{C_{\eta^*} C_{\bar{n}}^B} = \frac{\partial}{\partial \eta_i^*} p_0 \frac{\sum_k \eta_k^{*3/4}}{\sum_k \eta_k^{*1/2}} = \frac{3}{4} p_0 \frac{\eta_i^{*-1/4}}{S_{1/2}^*} - \frac{1}{2} p_0 \frac{S_{3/4}^*}{(S_{1/2}^*)^2} \eta_i^{*-1/2}. \quad (2.82)$$

Then

$$b_{p_t p_t} = \sum_{i=1}^M \frac{\partial}{\partial \eta_i^*} \langle p_B \rangle_{C_{\eta^*} C_{\bar{n}}^B} \left. \frac{d\eta_i^*}{dp_F} \right|_{p_F=\langle p_F \rangle} = \sum_{i=1}^M \frac{S_{1/2}}{S_{3/4}} \left(3 \frac{\bar{\eta}_i^{3/4}}{S_{1/2}} - 2 \frac{S_{3/4}}{(S_{1/2})^2} \bar{\eta}_i^{1/2} \right) \left. \frac{dz_i^*}{df} \right|_{f=1}, \quad (2.83)$$

the formula (2.80) has the form:

$$b_{p_t p_t} = \sum_{i=1}^M \left(3 \frac{\bar{\eta}_i^{3/4}}{S_{3/4}} - 2 \frac{\bar{\eta}_i^{1/2}}{S_{1/2}} \right) \left. \frac{dz_i^*}{df} \right|_{f=1}. \quad (2.84)$$

Taking into account (2.79), we can rewrite the formula (2.84) as:

$$b_{p_t p_t} = \frac{c}{1 + \sum \frac{q_k}{p_k}} \left(\frac{3}{S_{3/4}} \sum_{i=1}^M \frac{\bar{\eta}_i^{3/4}}{p_i} - \frac{2}{S_{1/2}} \sum_{i=1}^M \frac{\bar{\eta}_i^{1/2}}{p_i} \right). \quad (2.85)$$

Let's calculate the expressions included in (2.85):

$$\sum \frac{q_k}{p_k} = \sum \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma S_1} \bar{\eta}_k^{-1/2} \left[3\bar{\eta}_k^{3/4} \left(3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2 \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \right) + \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_k^{3/2}}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2 \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - \right. \\ \left. - 2 \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \frac{\bar{\eta}_k^{5/4}}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2 \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} - 2 \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \bar{\eta}_k^{1/2} \left(3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2 \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \right) + \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}^2} \frac{16\omega_\mu}{\omega_\eta \mu_F} \frac{\bar{\eta}_k}{3\bar{\eta}_k^{1/4} - 2 \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}}} \right], \quad (2.86)$$

$$\sum \frac{q_k}{p_k} = \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma S_1} \left(9S_{1/2} - 12 \frac{S_{1/4} S_{3/4}}{S_{1/2}} + 4M \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}^2} \right) + \frac{\omega_\mu}{\gamma S_1} \left(S_1 - \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}} \right). \quad (2.87)$$

$$\frac{c}{1 + \sum \frac{q_k}{p_k}} = \frac{S_{3/4}}{1 + \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma S_1} \left(9S_{1/2} - 12 \frac{S_{1/4} S_{3/4}}{S_{1/2}} + 4M \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}^2} \right) + \frac{\omega_\mu}{\gamma S_1} \left(S_1 - \frac{S_{3/4}^2}{S_{1/2}} \right)}, \quad (2.88)$$

$$\frac{3}{S_{3/4}} \sum_{i=1}^M \frac{\bar{\eta}_i^{3/4}}{p_i} = \frac{3}{S_{3/4}} \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma S_1} \sum_{i=1}^M \left(3\bar{\eta}_i^{1/4} - 2 \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \right) \bar{\eta}_i^{1/4} = \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma S_1} \left(\frac{9S_{1/2}}{S_{3/4}} - \frac{6S_{1/4}}{S_{1/2}} \right), \quad (2.89)$$

$$\frac{2}{S_{1/2}} \sum_{i=1}^M \frac{\bar{\eta}_i^{1/2}}{p_i} = \frac{2}{S_{1/2}} \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma S_1} \sum_{i=1}^M \left(3\bar{\eta}_i^{1/4} - 2 \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \right) = \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma S_1} \left(\frac{6S_{1/4}}{S_{1/2}} - \frac{4MS_{3/4}}{S_{1/2}^2} \right). \quad (2.90)$$

Finally

$$b_{p_t p_t}^{corr f} = \frac{s_{3/4} \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma s_1} \left(\frac{9s_{1/2}}{s_{3/4}} - \frac{12s_{1/4}}{s_{1/2}} + \frac{4s_{3/4}}{s_{1/2}^2} \right)}{1 + \frac{\omega_\eta \mu_F}{16\gamma s_1} \left(9s_{1/2} - 12 \frac{s_{1/4} s_{3/4}}{s_{1/2}} + 4 \frac{s_{3/4}^2}{s_{1/2}^2} \right) + \frac{\omega_\mu}{\gamma s_1} \left(s_1 - \frac{s_{3/4}^2}{s_{1/2}} \right)}, \quad (2.91)$$

$$b_{p_t p_t}^{corr f} = \frac{\omega_\eta \mu_F \left(9s_{1/2}^3 - 12s_{1/4} s_{3/4} s_{1/2} + 4s_{3/4}^2 \right)}{16\gamma s_1 s_{1/2}^2 + \omega_\eta \mu_F \left(9s_{1/2}^3 - 12s_{1/4} s_{3/4} s_{1/2} + 4s_{3/4}^2 \right) + 16\omega_\mu s_{1/2} \left(s_1 s_{1/2} - s_{3/4}^2 \right)}. \quad (2.92)$$

The discussion of the results

The asymptotics of the correlation coefficient between the transverse momenta (2.54) and (2.92) calculated by different methods coincide. Note that, as in the case of the correlation coefficient $b_{p_t n}$, the coincidence of these expressions for the correlation coefficient $b_{p_t p_t}$ within the framework of the approximations made is not obvious in advance, since for a nonlinear correlation two different functions, (1.2) and (1.1), definitions of the correlation coefficient are not identical and may lead to different results.

For the uniform string distribution $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}$:

$$b_{p_t p_t} = \frac{\mu_F \omega_\eta}{\mu_F \omega_\eta + 16\gamma \sqrt{\bar{\eta}}}. \quad (2.93)$$

The obtained formula for the asymptotics of the correlation coefficient (2.92) in the case of a uniform distribution of strings becomes the expression (2.93) obtained earlier in a different way in [44] for a high string density. An important difference between the expressions for the asymptotics in the case of homogeneous and inhomogeneous string distributions is that in the case of a homogeneous distribution (2.93) the dependence of the $p_t - p_t$ correlation coefficient on the model parameter ω_μ , which characterizes the dispersion width of the number of particles, disappears, falling into the given interval of rapidity from the decay of the string, which is available in the formula (2.92) in the case of an inhomogeneous distribution of strings.

Investigation of the dependence of the correlation coefficient $b_{p_t p_t}$ on the average number of strings and the parameter ω_μ

We will a nonuniform distribution of strings in the transverse plane of a string, described in the 2.1 section. Let us plot the dependence of the correlation coefficient $b_{p_t p_t}$ on the number of strings η for different values of m .

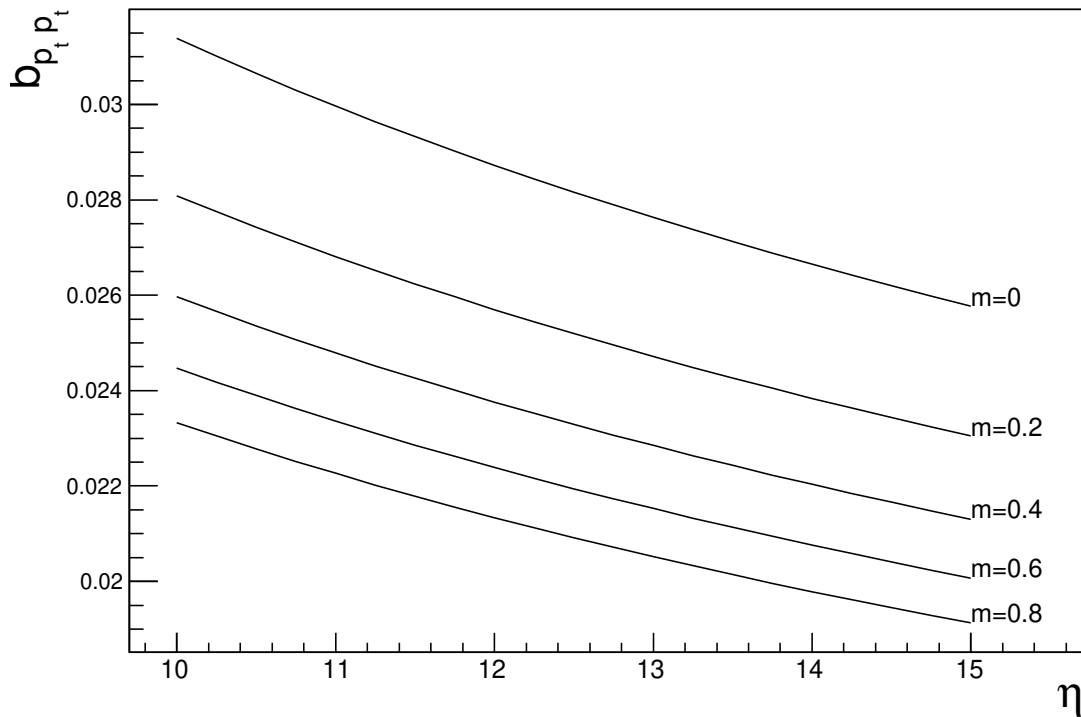


Figure 2.2. Asymptotic behavior of the correlation coefficient between transverse momenta $b_{p_t p_t}$ depending on the number of strings η for different values of the distribution inhomogeneity m . For the remaining parameters, the following values were chosen: $M = 450$, $a = 2$, $\omega_\mu = \omega_\eta = 1$, $\mu_F = \mu_B = 1$, $\gamma = 0.61$

It can be seen from the graph that as the degree of heterogeneity m increases, the value of the correlation coefficient decreases.

We will use the non-homogeneous distribution and plot correlation coefficient $b_{p_t p_t}$ on parameter ω_μ for different values of m (fig. 2.3).

From fig. 2.3 we see that in the case of a homogeneous ($m = 0$, $m = 1$) distribution, the correlation coefficient between transverse momenta $b_{p_t p_t}$ does not depend on the scaled variance the number of particles produced from the fragmen-

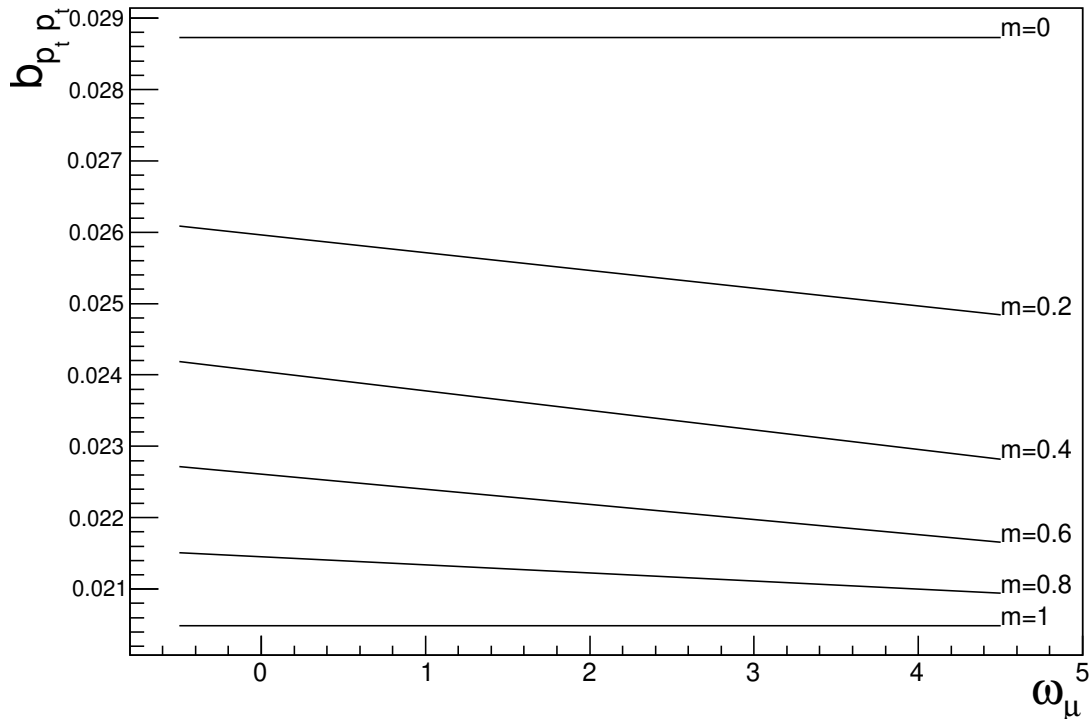


Figure 2.3. Asymptotic of the correlation coefficient between the transverse momenta $b_{p_t p_t}$ as a function of the scaled variance ω_μ of the number of particles formed from string fragmentation for different values of the distribution inhomogeneity m . For the remaining parameters, the following values were chosen: $M = 450$, $a = 2$, $\eta = 12$, $\omega_\eta = 1$, $\mu_F = \mu_B = 1$, $\gamma = 0.61$

tation of the string ω_μ , as we already noted when analyzing the general formulas at the end of the previous subsection.

Numerical calculation of the correlation coefficient $b_{p_t p_t}$ for random string density using Monte Carlo simulations

Above, we found an analytical expression for the correlation coefficients $b_{p_t p_t}$ for a high string density $\eta \gg 1$. For a low string density, the correlation coefficient can only be found numerically.

Below, we calculate this coefficient using Monte Carlo simulations for several string distributions in the transverse plane. Comparison of the results of these numerical calculations with the analytical asymptotic formula (2.92) makes it possible to verify the correctness of both the analytical calculations and the Monte Carlo

code, and also to see at what string density this asymptotic behavior occurs.

Let us describe the Monte Carlo algorithm:

1. The average number of strings in a given cell is set $\bar{\eta}_i$;
2. Using the average values of $\bar{\eta}_i$ generate the number of strings in this cell in this event η_i ;
3. The number of strings is used to calculate the average number of particles produced during hadronization of strings in the i th cell and their average transverse momentum $\bar{n}_i^F(\eta_i)$, $\bar{n}_i^B(\eta_i)$, $\bar{p}_t^{iF}(\eta_i)$, $\bar{p}_t^{iB}(\eta_i)$ by formulas

$$\bar{n}_i^F(\eta_i) = \mu_F \sqrt{\eta_i}, \quad \bar{n}_i^B(\eta_i) = \mu_F \sqrt{\eta_i}, \quad \bar{p}_t^{iF}(\eta_i) = p_0 \sqrt[4]{\eta_i}, \quad \bar{p}_t^{iB}(\eta_i) = p_0 \sqrt[4]{\eta_i};$$

4. Based on the average number of particles, the number of particles formed during hadronization of strings in the i -th cell is generated in this event $n_i^F(\eta_i)$, $n_i^B(\eta_i)$;
5. The number of particles in the forward and backward rapidity windows in a given event $n_F(\eta_i) = \sum_{i=1}^M n_i^F(\eta_i)$, $n_B(\eta_i) = \sum_{i=1}^M n_i^B(\eta_i)$, their transverse momentum and the squared transverse momentum are calculated by the formulas

$$p_t^F = \frac{1}{n_F} \sum_{i=1}^M n_i^F(\eta_i) \bar{p}_t^{iF}(\eta_i), \quad p_t^B = \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^M n_i^B(\eta_i) \bar{p}_t^{iB}(\eta_i),$$

$$(p_t^F)^2 = \sum_{i=1}^M \left(\bar{p}_t^{iF}(\eta_i) \right)^2 + \frac{1}{n_F^2} \sum_{i=1}^M n_i^F(\eta_i) \left(\bar{p}_t^{iF}(\eta_i) \right)^2$$

6. Items 1-5 are repeated N times. If no particles were formed in the event in any of the windows $n_i^F(\eta_i) = 0$ or $n_i^B(\eta_i) = 0$, these events are not taken into account when averaging;
7. The mean values $\langle p_t^F \rangle = \frac{\sum p_t^F}{N_{ev}}$, $\langle (p_t^F)^2 \rangle = \frac{\sum (p_t^F)^2}{N_{ev}}$, $\langle p_t^F p_t^B \rangle = \frac{\sum p_t^F p_t^B}{N_{ev}}$ are calculated, where N_{ev} — the number of events for which $n_i^F(\eta_i) \neq 0$, $n_i^B(\eta_i) \neq 0$

8. The correlation coefficient is calculated

$$b_{p_t p_t} = \frac{\langle p_t^F p_t^B \rangle - \langle p_t^F \rangle \langle p_t^B \rangle}{\langle (p_t^F)^2 \rangle - \langle p_t^F \rangle^2}.$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_i &\longrightarrow \eta_i \longrightarrow \bar{n}_i^F(\eta_i), \bar{n}_i^B(\eta_i), \bar{p}_t^{iF}(\eta_i), \bar{p}_t^{iB}(\eta_i) \longrightarrow \\ &\longrightarrow n_i^F(\eta_i), n_i^B(\eta_i), p_t^{iF}(\eta_i), p_t^{iB}(\eta_i) \longrightarrow \\ &\longrightarrow p_t^F, p_t^B, (p_t^F)^2 \longrightarrow \langle p_t^F \rangle, \langle (p_t^F)^2 \rangle, \langle p_t^F p_t^B \rangle \longrightarrow b_{p_t p_t} \end{aligned}$$

The following parameter values were used in calculations: total number of cells $M = 30$, parameters $\omega_\mu = \omega_\eta = 1$, $\mu_F = \mu_B = 1$. The results are shown in fig. 2.4, 2.5, points — result of numerical calculations, lines — asymptotic (2.92).

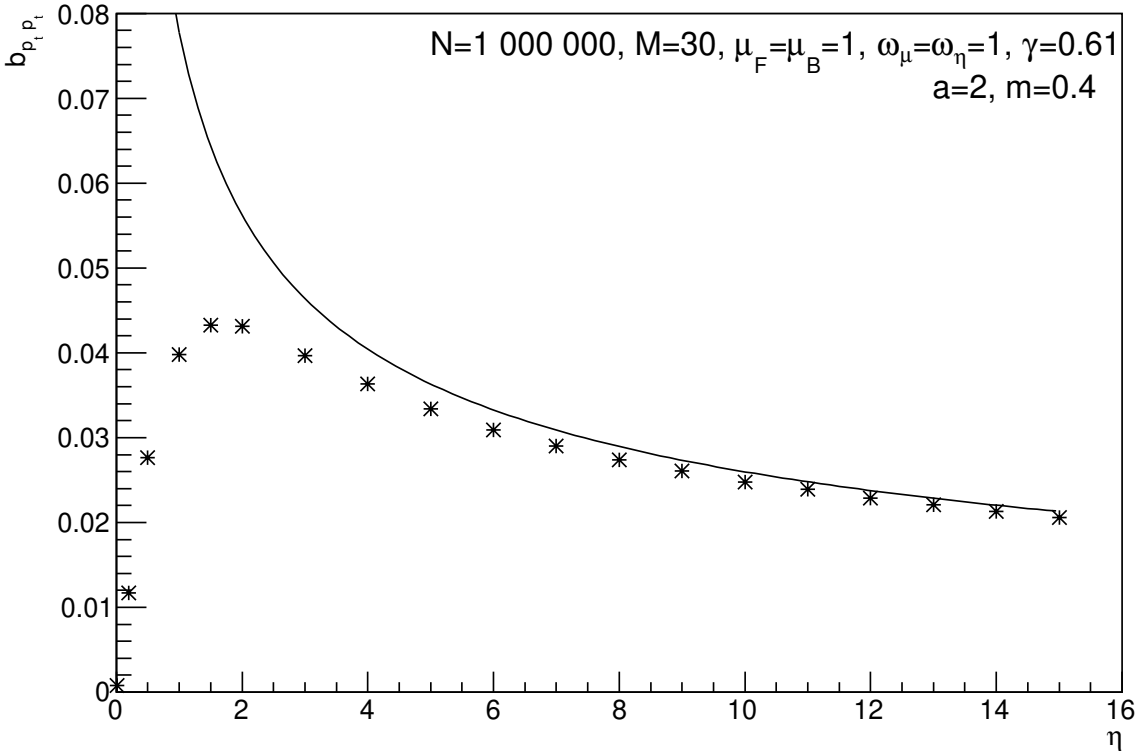


Figure 2.4. The result of numerical calculations of the correlation coefficient $b_{p_t p_t}$ for nonuniform string distribution: $a = 2$, $m = 0.4$

It can be seen from the graphs that for $\bar{\eta} \gtrsim 5$ the asymptotics approximates well the values of the correlation coefficient $b_{p_t p_t}$.

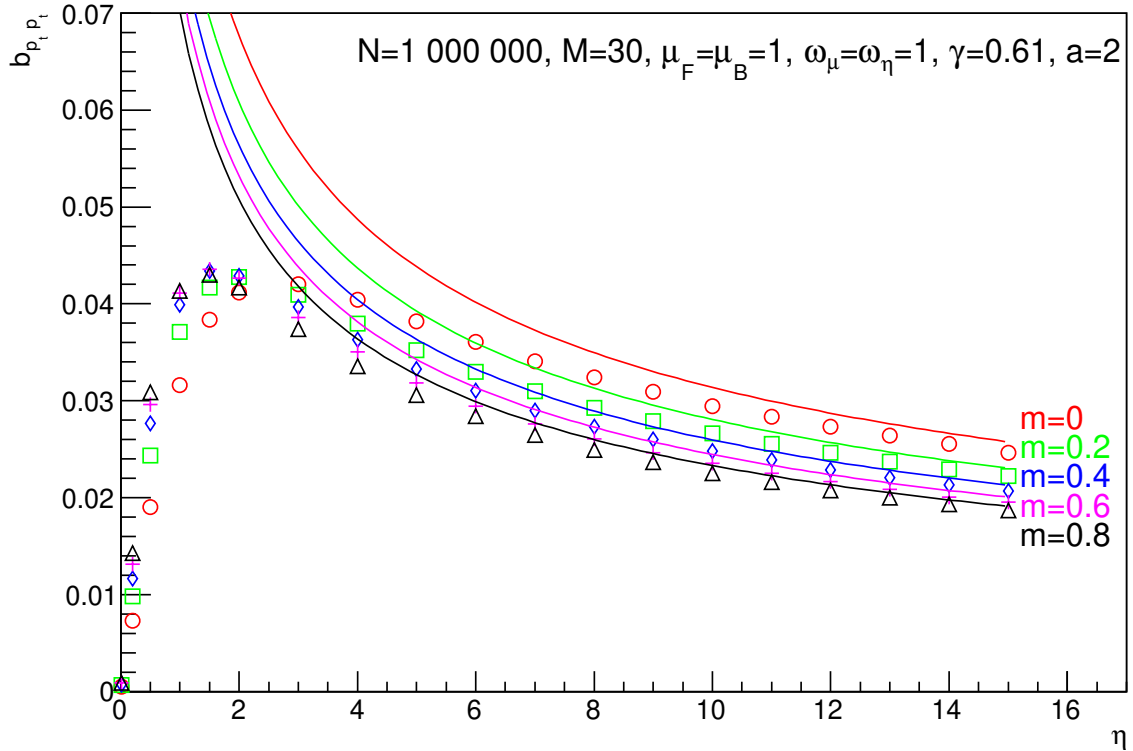


Figure 2.5. The result of numerical calculations of the correlation coefficient $b_{p_t p_t}$

As can be seen from fig.2.5, at a low string density, the dependence of the correlation coefficient $b_{p_t p_t}$ on the inhomogeneity is reversed compared to that which occurs at a high string density. At low string density, the inhomogeneity of their average distribution leads to an increase in the correlation coefficient $b_{p_t p_t}$.

2.3. General properties of correlations involving the mean transverse momentum

The long-range correlations between mean transverse momentum and multiplicity (pt-n) and between mean transverse momenta (pt-pt) of charged particles produced in high energy hadronic collisions in separated rapidity intervals are studied in the model with quark-gluon strings (color flux tubes) as sources [3; 4; 10]. The effects of the string interaction and fusion [21–24] are taken into account in the simplified form by implementing a finite lattice (grid) in the impact parameter plane

[37–39].

In the framework of the model the analytical expressions for the asymptotes of the correlation coefficients at large non-uniform string density were obtained by two very different methods basing on the alternative definitions of the correlation coefficients. It was shown that in the leading approximation the asymptotes of the correlation coefficients obtained by these two methods coincide. The obtained results enable to understand qualitatively the main features of the long-range correlation behavior at large string density. Thus, it was found the strong dependence of the pt-n correlation coefficient on the inhomogeneity of the string distribution in contrast to the n-n correlation between multiplicities. In particular it was shown that there are such distributions of strings for which the pt-n correlation coefficient becomes negative.

For the pt-pt correlation coefficient the dependence on the scaled variance of the number of particles produced from a single string is analyzed. It is shown that the dependence on this parameter disappears for a homogeneous string distribution, as it was expected in [44].

The analytical asymptotes of the correlation coefficients obtained at large string density are compared with the results of the MC numerical calculations of these coefficients. This enables to evaluate the string density at which the asymptotic regime is reached and also to check both the analytic asymptotic formulas and the MC numerical algorithms, which then can be applied for the calculations of the correlation coefficients in a non-asymptotic region at small string density.

Recall that the reason for choosing the intensive variables p_t^f and p_t^B instead of the extensive ones n_F and n_B as observables was the desire to get rid of the influence of trivial “volume” fluctuations on the magnitude of correlations, that is, fluctuations of the initial number of strings, but at the same time preserve the signal from physically interesting processes of formation of new types of sources, for example, string clusters.

It can be seen from the formulas (2.54) and (2.34) for the pt-pt- and pt-n-corre-

lation coefficients that this goal can only be partially achieved, since the dependence on the ω_η parameter characterizing fluctuations of the total number of strings from event to event is preserved even in the simplified expressions (2.93) and (2.36) for a uniform distribution of strings in the transverse plane. On the other hand, the expressions (2.54) and (2.34) for the pt-pt- and pt-n-correlation coefficients found for an random distribution of strings in the transverse plane make it possible to explicitly take into account their dependence on the collision details when compared with experimental data. This is one of the justifications for the introduction of the so-called strong-intensity variables, the study of which is devoted to Chapter 4.

Chapter 3. Calculation of the asymptotic behavior of the long-range correlation coefficients for the case of a fixed number of initial strings

This chapter is based on the results obtained in the papers [58; 59].

Previously, when finding the asymptotics of the long-range correlation coefficients for an inhomogeneous distribution of strings in the transverse plane, averaging was performed over all configurations, which corresponds to the analysis for min.bias events. However, in modern experiments, the array of events is divided into so-called multiplicity classes, and the analysis is carried out separately for each class. The simplest way to simulate class fixation in the theoretical analysis of the correlation coefficient is to average over such string configurations in which the total number of initial strings is fixed.

Next, we find the asymptotics of the correlation coefficients between the multiplicities and between the transverse momentum and the multiplicity for the case of a fixed total number of initial strings and analyze how the imposition of this additional condition affects.

3.1. Correlations between multiplicities of charged particles

Previously, [43], the asymptotics of the correlation coefficient between the multiplicities of charged particles in two windows separated by rapidity was obtained for the case of an inhomogeneous distribution of strings in the transverse plane

$$b_{nn}^{rel} = \frac{\mu_F \omega_\eta M}{4\omega_\mu \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8\eta_i}\right) + \mu_F \omega_\eta M}. \quad (3.1)$$

We will calculate the correlation coefficient between the multiplicities

$$b_{nn} = \frac{\langle n_F n_B \rangle - \langle n_F \rangle \langle n_B \rangle}{\langle n_F^2 \rangle - \langle n_F \rangle^2} \quad (3.2)$$

also for an inhomogeneous string distribution in the transverse plane, but with the imposition of an additional condition that fixes the total number of initial strings.

To calculate it using the formula (3.2), it is necessary to find the average values of the observables included in this definition, taking into account the imposed condition. This can be done if, when averaging over string configurations, we use a distribution in which the total number of initial strings is fixed:

$$P(\eta_1 \dots \eta_M) = \sqrt{2\pi\omega_\eta\bar{N}}\delta(N - \bar{N}) \prod_{j=1}^M \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_\eta\bar{\eta}_j}} e^{-\frac{(\eta_j - \bar{\eta}_j)^2}{2\omega_\eta\bar{\eta}_j}}. \quad (3.3)$$

where

$$N \equiv \sum_{j=1}^M \eta_j, \quad \bar{N} \equiv \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j, \quad \omega_\eta = \text{const} \sim 1. \quad (3.4)$$

The average number of strings in each cell $\langle \eta_j \rangle$ is equal to the parameter $\bar{\eta}_j$. The distribution parameter ω_η is related to the scaled variance $d(\eta_j)$ of the number of strings in one cell:

$$d(\eta_j) = \frac{\langle \eta_j^2 \rangle - \langle \eta_j \rangle^2}{\langle \eta_j \rangle} = \omega_\eta \bar{\eta}_j \left(1 - \frac{\bar{\eta}_j}{\bar{N}} \right). \quad (3.5)$$

Note that the condition of conservation of the total number of strings leads to weak (on the order of $1/M$) negative correlations between the number of strings in any two cells:

$$\frac{\text{cov}(\eta_j, \eta_k)}{\langle \eta_j \rangle \langle \eta_k \rangle} = \frac{\langle \eta_j, \eta_k \rangle - \langle \eta_j \rangle \langle \eta_k \rangle}{\langle \eta_j \rangle \langle \eta_k \rangle} = -\frac{\omega_\eta}{\bar{N}}. \quad (3.6)$$

The average value of any function that depends on the numbers of strings in the cells, which fluctuate according to (3.3),

$$\langle X(\eta_1, \dots, \eta_M) \rangle = \int X(\eta_1, \dots, \eta_M) P(\eta_1 \dots \eta_M) d\eta_1 \dots d\eta_M \quad (3.7)$$

can be conveniently represented as follows:

$$\langle X(\eta_1, \dots, \eta_M) \rangle = \int C(\alpha) \langle X(\eta_1, \dots, \eta_M) \rangle_\alpha d\alpha, \quad (3.8)$$

where

$$C(\alpha) = \sqrt{\frac{\omega_\eta \bar{N}}{2\pi}} e^{-\frac{\omega_\eta \bar{N}}{2} \alpha^2}, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
\langle X(\eta_1, \dots, \eta_M) \rangle_\alpha &= \int X(\eta_1, \dots, \eta_M) \prod_{j=1}^M \frac{d\eta_j}{\sqrt{2\pi\omega_\eta\bar{\eta}_j}} e^{-\frac{(\eta_j - \bar{\eta}_j)^2}{2\omega_\eta\bar{\eta}_j} + i\alpha(\eta_j - \bar{\eta}_j) + \frac{\omega_\eta\bar{\eta}_j}{2}\alpha^2} = \\
&= \int X(\bar{\eta}_1 + \nu_1, \dots, \bar{\eta}_M + \nu_M) \prod_{j=1}^M \frac{d\nu_j}{\sqrt{2\pi\omega_\eta\bar{\eta}_j}} e^{-\frac{\nu_j^2}{2\omega_\eta\bar{\eta}_j} + i\alpha\nu_j + \frac{\omega_\eta\bar{\eta}_j}{2}\alpha^2}. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

For further calculations, it is convenient to introduce the quantity

$$\nu_j \equiv \eta_j - \bar{\eta}_j. \quad (3.11)$$

Let us calculate the average values $\langle \nu_k^n \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle 1 \rangle_\alpha &= 1, \quad \langle \nu_k^a \nu_j^b \rangle_\alpha = \langle \nu_k^a \rangle_\alpha \langle \nu_j^b \rangle_\alpha, \quad \langle \nu_k \rangle_\alpha = i\alpha\omega_\eta\bar{\eta}_k, \quad \langle \nu_k^2 \rangle_\alpha = \omega_\eta\bar{\eta}_k - \alpha^2\omega_\eta^2\bar{\eta}_k^2, \\
\langle \nu_k^3 \rangle_\alpha &= 3i\alpha\bar{\eta}_k^2\omega_\eta^2 - i\alpha^3\bar{\eta}_k^3\omega_\eta^3, \quad \langle \nu_k^4 \rangle_\alpha = \bar{\eta}_k^4\alpha^4\omega_\eta^4 - 6\alpha^2\omega_\eta^3\bar{\eta}_k^3 + 3\omega_\eta^2\bar{\eta}_k^2. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{1}{\omega_\eta\bar{N}}, \quad \langle \alpha^4 \rangle = \frac{3}{\omega_\eta^2\bar{N}^2}, \quad \langle \alpha^{2n+1} \rangle = 0 \quad (3.13)$$

Substituting (3.13) into (3.12), we find exact expressions for $\langle \nu_k^n \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle 1 \rangle &= 1, \quad \langle \nu_k^{2n+1} \rangle = 0, \\
\langle \nu_k^2 \rangle &= \omega_\eta\bar{\eta}_k - \frac{\omega_\eta\bar{\eta}_k^2}{\bar{N}}, \quad \langle \nu_k \nu_j \rangle = -\frac{\omega_\eta\bar{\eta}_k\bar{\eta}_j}{\bar{N}}, \\
\langle \nu_k^2 \nu_j^2 \rangle &= \omega_\eta^2\bar{\eta}_k\bar{\eta}_j - \frac{\omega_\eta^2}{\bar{N}}\bar{\eta}_k\bar{\eta}_j(\bar{\eta}_k + \bar{\eta}_j) + \frac{3\bar{\eta}_j^2\bar{\eta}_k^2\omega_\eta^2}{\bar{N}^2}, \\
\langle \nu_k^4 \rangle &= 3\omega_\eta^2\bar{\eta}_k^2 - \frac{6\omega_\eta^2\bar{\eta}_k^3}{\bar{N}} + \frac{3\bar{\eta}_k^4\omega_\eta^2}{\bar{N}^2}, \quad \langle \nu_k^3 \nu_j \rangle = -\frac{3\omega_\eta^2\bar{\eta}_k^2\bar{\eta}_j}{\bar{N}} + \frac{\bar{\eta}_j\bar{\eta}_k^3\omega_\eta^2}{\bar{N}^2}. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Note, that

$$\sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \langle \nu_k \nu_j \rangle = \sum_{j=1}^M \langle \nu_j^2 \rangle + \sum_{j \neq k} \langle \nu_k \nu_j \rangle = \sum_{j=1}^M \left(\omega_\eta\bar{\eta}_k - \frac{\omega_\eta\bar{\eta}_k^2}{\bar{N}} \right) - \sum_{j \neq k} \frac{\omega_\eta\bar{\eta}_k\bar{\eta}_j}{\bar{N}} = 0. \quad (3.15)$$

$$\langle n_F \rangle = \left\langle \langle n_F \rangle_{C_n^F} \right\rangle_{C_n} = \left\langle \mu_F \sum_{j=1}^M \bar{n}(\eta_j) \right\rangle = \left\langle \mu_F \sum_{j=1}^M \sqrt{\eta_j} \right\rangle =$$

$$= \mu_F \sum_{j=1}^M \langle \sqrt{\bar{\eta}_j + \nu_j} \rangle = \mu_F \sum_{j=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_j} \left\langle \sqrt{1 + \frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j}} \right\rangle. \quad (3.16)$$

Let us expand the root $\sqrt{1 + \frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j}}$ into a series in the small parameter $\frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j}$:

$$\begin{aligned} \langle n_F \rangle &\simeq \mu_F \sum_{j=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_j} \left\langle 1 + \frac{1}{2} \frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j} - \frac{1}{8} \frac{\nu_j^2}{\bar{\eta}_j^2} + \frac{1}{16} \frac{\nu_j^3}{\bar{\eta}_j^3} - \frac{5}{128} \frac{\nu_j^4}{\bar{\eta}_j^4} \right\rangle = \\ &= \mu_F \sum_{j=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_j} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\langle \nu_j^2 \rangle}{\bar{\eta}_j^2} - \frac{5}{128} \frac{\langle \nu_j^4 \rangle}{\bar{\eta}_j^4} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

We use the relations (3.14)

$$\langle n_F \rangle = \mu_F \sum_{j=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_j} \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8\bar{\eta}_j} + \frac{\omega_\eta}{8N} + \frac{15\omega_\eta^2}{64N\bar{\eta}_j} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\bar{\eta}_j^2} \right). \quad (3.18)$$

Finally for the average multiplicity in the forward rapidity window

$$\langle n_F \rangle \simeq \mu_F M \left(s_{1/2} \left(1 + \frac{\omega_\eta}{8N} \right) - \frac{\omega_\eta}{8} s_{-1/2} - \frac{15\omega_\eta^2}{128} s_{-3/2} + \frac{15\omega_\eta^2}{64N} s_{-1/2} \right), \quad (3.19)$$

where we used the notation introduced in (2.2) .

Similarly, for the backward rapidity window we get

$$\langle n_B \rangle = \mu_B M \left(s_{1/2} \left(1 + \frac{\omega_\eta}{8N} \right) - \frac{\omega_\eta}{8} s_{-1/2} - \frac{15\omega_\eta^2}{128} s_{-3/2} + \frac{15\omega_\eta^2}{64N} s_{-1/2} \right). \quad (3.20)$$

We will calculate the average value $\langle n_F n_B \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle n_F n_B \rangle &= \left\langle \langle n_F \rangle_{C_n^F} \langle n_B \rangle_{C_n^B} \right\rangle_{C_n} = \left\langle \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_j} \sqrt{\bar{\eta}_k} \right\rangle = \\ &= \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \left\langle \sqrt{\bar{\eta}_j + \nu_j} \sqrt{\bar{\eta}_k + \nu_k} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Let us expand the roots $\sqrt{1 + \frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j}}$ into a series in the small parameter $\frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j}$:

$$\langle n_F n_B \rangle \simeq \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \left\langle \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j} - \frac{1}{8} \frac{\nu_j^2}{\bar{\eta}_j^2} + \frac{1}{16} \frac{\nu_j^3}{\bar{\eta}_j^3} - \frac{5}{128} \frac{\nu_j^4}{\bar{\eta}_j^4} \right) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\nu_k}{\bar{\eta}_k} - \frac{1}{8} \frac{\nu_k^2}{\bar{\eta}_k^2} + \frac{1}{16} \frac{\nu_k^3}{\bar{\eta}_k^3} - \frac{5}{128} \frac{\nu_k^4}{\bar{\eta}_k^4} \right) \Bigg\rangle = \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\langle \nu_j^2 \rangle}{\bar{\eta}_j^2} - \right. \\
& \quad - \frac{5}{128} \frac{\langle \nu_j^4 \rangle}{\bar{\eta}_j^4} + \frac{1}{32} \frac{\langle \nu_j^3 \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_j^3 \bar{\eta}_k} + \frac{1}{4} \frac{\langle \nu_j \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} - \frac{1}{8} \frac{\langle \nu_k^2 \rangle}{\bar{\eta}_k^2} + \\
& \quad \left. + \frac{1}{64} \frac{\langle \nu_j^2 \nu_k^2 \rangle}{\bar{\eta}_j^2 \bar{\eta}_k^2} + \frac{1}{32} \frac{\langle \nu_j \nu_k^3 \rangle}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k^3} - \frac{5}{128} \frac{\langle \nu_k^4 \rangle}{\bar{\eta}_k^4} \right) = \\
& = \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j + \mu_F \mu_B \sum_{j \neq k} \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\langle \nu_j^2 \rangle}{\bar{\eta}_j^2} - \frac{5}{128} \frac{\langle \nu_j^4 \rangle}{\bar{\eta}_j^4} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{32} \frac{\langle \nu_j^3 \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_j^3 \bar{\eta}_k} + \frac{1}{4} \frac{\langle \nu_j \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} - \frac{1}{8} \frac{\langle \nu_k^2 \rangle}{\bar{\eta}_k^2} + \frac{1}{64} \frac{\langle \nu_j^2 \nu_k^2 \rangle}{\bar{\eta}_j^2 \bar{\eta}_k^2} + \frac{1}{32} \frac{\langle \nu_j \nu_k^3 \rangle}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k^3} - \frac{5}{128} \frac{\langle \nu_k^4 \rangle}{\bar{\eta}_k^4} \right).
\end{aligned}$$

Finally, for the mean $\langle n_F n_B \rangle$, using (3.14), we get

$$\begin{aligned}
\langle n_F n_B \rangle & = \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j + \mu_F \mu_B \sum_{j \neq k} \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \times \\
& \times \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8 \bar{\eta}_j} - \frac{\omega_\eta}{8 \bar{\eta}_k} - \frac{15 \omega_\eta^2}{128 \bar{\eta}_j^2} - \frac{15 \omega_\eta^2}{128 \bar{\eta}_k^2} + \frac{1}{64} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} + \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{N} \bar{\eta}_j} + \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{N} \bar{\eta}_k} \right). \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Using (3.19), (3.20), (3.22), calculate the covariance $\text{cov}(n_F, n_B)$:

$$\begin{aligned}
\langle n_F n_B \rangle - \langle n_F \rangle \langle n_B \rangle & = \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j + \mu_F \mu_B \sum_{j \neq k} \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \times \\
& \times \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8 \bar{\eta}_j} - \frac{\omega_\eta}{8 \bar{\eta}_k} - \frac{15 \omega_\eta^2}{128 \bar{\eta}_j^2} - \frac{15 \omega_\eta^2}{128 \bar{\eta}_k^2} + \frac{1}{64} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} + \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{N} \bar{\eta}_j} + \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{N} \bar{\eta}_k} \right) - \\
& - \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j \left(1 - \frac{\omega_\eta}{4 \bar{\eta}_j} + \frac{\omega_\eta}{4 \bar{N}} + \frac{7 \omega_\eta^2}{16 \bar{N} \bar{\eta}_j} - \frac{7 \omega_\eta^2}{32 \bar{\eta}_j^2} \right) - \mu_F \mu_B \sum_{j \neq k} \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \times \\
& \times \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8 \bar{\eta}_k} - \frac{\omega_\eta}{8 \bar{\eta}_j} + \frac{\omega_\eta}{4 \bar{N}} - \frac{15 \omega_\eta^2}{128 \bar{\eta}_k^2} - \frac{15 \omega_\eta^2}{128 \bar{\eta}_j^2} + \frac{\omega_\eta^2}{64 \bar{\eta}_k \bar{\eta}_j} + \frac{7 \omega_\eta^2}{32 \bar{N} \bar{\eta}_k} + \frac{7 \omega_\eta^2}{32 \bar{N} \bar{\eta}_j} \right) = \\
& = \mu_F \mu_B \sum_{j \neq k} \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \left(-\frac{\omega_\eta}{4 \bar{N}} - \frac{3 \omega_\eta^2}{32 \bar{N} \bar{\eta}_k} - \frac{3 \omega_\eta^2}{32 \bar{N} \bar{\eta}_j} \right) + \\
& + \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j \left(\frac{\omega_\eta}{4 \bar{\eta}_j} - \frac{\omega_\eta}{4 \bar{N}} - \frac{7 \omega_\eta^2}{16 \bar{N} \bar{\eta}_j} + \frac{7 \omega_\eta^2}{32 \bar{\eta}_j^2} \right). \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Finally, for the covariance $\text{cov}(n_F, n_B)$ we get

$$\langle n_F n_B \rangle - \langle n_F \rangle \langle n_B \rangle = \mu_F \mu_B M \left(\frac{\omega_\eta}{4} - \frac{\omega_\eta}{4s_1} s_{1/2}^2 + \frac{7\omega_\eta^2}{32} s_{-1} - \frac{3\omega_\eta^2}{16s_1} s_{1/2} s_{-1/2} \right) \quad (3.24)$$

Let us calculate $\langle n_F^2 \rangle$:

$$\langle n_F^2 \rangle = \left\langle \left\langle n_F^2 \right\rangle_{C_n^F} \right\rangle_{C_\eta} = \left\langle \sum_{i=1}^M \overline{n_i^{F^2}} + \sum_{i \neq j} \overline{n_i^F n_j^F} \right\rangle_{C_\eta}. \quad (3.25)$$

We will use (1.9): $\overline{n_i^2} = d_{n_i} + \overline{n_i^2} = \omega_\mu \overline{n_i} + \overline{n_i^2}$:

$$\begin{aligned} \langle n_F^2 \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^M \overline{n_i^{F^2}} + \sum_{i \neq j} \overline{n_i^F n_j^F} \right\rangle = \left\langle \omega_\mu \sum_{i=1}^M \overline{n_i^F} + \sum_{i=1}^M \overline{n_i^{F^2}} + \sum_{i \neq j} \overline{n_i^F n_j^F} \right\rangle = \\ &= \left\langle \omega_\mu \mu_F \sum_{i=1}^M \sqrt{\overline{\eta_i}} + \mu_F^2 \sum_{i=1}^M \eta_i + \mu_F^2 \sum_{i \neq j} \sqrt{\overline{\eta_i \eta_j}} \right\rangle = \\ &= \omega_\mu \mu_F \sum_{j=1}^M \sqrt{\overline{\eta_j}} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\langle \nu_j^2 \rangle}{\overline{\eta_j^2}} - \frac{5}{128} \frac{\langle \nu_j^4 \rangle}{\overline{\eta_j^4}} \right) + \mu_F^2 \sum_{j=1}^M \overline{\eta_j} + \mu_F^2 \sum_{j \neq k} \sqrt{\overline{\eta_j \eta_k}} \left(1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \frac{\langle \nu_j^2 \rangle}{\overline{\eta_j^2}} - \frac{5}{128} \frac{\langle \nu_j^4 \rangle}{\overline{\eta_j^4}} + \frac{1}{32} \frac{\langle \nu_j^3 \nu_k \rangle}{\overline{\eta_j^3 \eta_k}} + \frac{1}{4} \frac{\langle \nu_j \nu_k \rangle}{\overline{\eta_j \eta_k}} - \frac{1}{8} \frac{\langle \nu_k^2 \rangle}{\overline{\eta_k^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{64} \frac{\langle \nu_j^2 \nu_k^2 \rangle}{\overline{\eta_j^2 \eta_k^2}} + \frac{1}{32} \frac{\langle \nu_j \nu_k^3 \rangle}{\overline{\eta_j \eta_k^3}} - \frac{5}{128} \frac{\langle \nu_k^4 \rangle}{\overline{\eta_k^4}} \right) = \\ &= \omega_\mu \mu_F \sum_{j=1}^M \sqrt{\overline{\eta_j}} \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8\overline{\eta_j}} + \frac{\omega_\eta}{8\overline{N}} + \frac{15\omega_\eta^2}{64\overline{N}\overline{\eta_j}} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\overline{\eta_j^2}} \right) + \mu_F^2 \sum_{j=1}^M \overline{\eta_j} + \mu_F^2 \sum_{j \neq k} \sqrt{\overline{\eta_j \eta_k}} \times \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8\overline{\eta_j}} - \frac{\omega_\eta}{8\overline{\eta_k}} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\overline{\eta_j^2}} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\overline{\eta_k^2}} + \frac{1}{64} \frac{\omega_\eta^2}{\overline{\eta_j \eta_k}} - \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2}{\overline{N}\overline{\eta_j}} - \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2}{\overline{N}\overline{\eta_k}} \right) \quad (3.26) \end{aligned}$$

Using (3.26), (3.19), we will calculate the variance $D(n_F)$:

$$\langle n_F^2 \rangle - \langle n_F \rangle^2 = \omega_\mu \mu_F \sum_{j=1}^M \sqrt{\overline{\eta_j}} \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8\overline{\eta_j}} + \frac{\omega_\eta}{8\overline{N}} + \frac{15\omega_\eta^2}{64\overline{N}\overline{\eta_j}} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\overline{\eta_j^2}} \right) + \mu_F^2 \sum_{j=1}^M \overline{\eta_j} +$$

$$\begin{aligned}
& +\mu_F^2 \sum_{j \neq k} \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8\bar{\eta}_j} - \frac{\omega_\eta}{8\bar{\eta}_k} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\bar{\eta}_j^2} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\bar{\eta}_k^2} + \frac{1}{64} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} - \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2}{N\bar{\eta}_j} - \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2}{N\bar{\eta}_k} \right) - \\
& -\mu_F^2 \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j \left(1 - \frac{\omega_\eta}{4\bar{\eta}_j} + \frac{\omega_\eta}{4N} + \frac{7\omega_\eta^2}{16N\bar{\eta}_j} - \frac{7\omega_\eta^2}{32\bar{\eta}_j^2} \right) - \mu_F^2 \sum_{j \neq k} \sqrt{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k} \times \\
& \times \left(1 - \frac{\omega_\eta}{8\bar{\eta}_k} - \frac{\omega_\eta}{8\bar{\eta}_j} + \frac{\omega_\eta}{4N} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\bar{\eta}_k^2} - \frac{15\omega_\eta^2}{128\bar{\eta}_j^2} + \frac{\omega_\eta^2}{64\bar{\eta}_k \bar{\eta}_j} + \frac{7\omega_\eta^2}{32N\bar{\eta}_k} + \frac{7\omega_\eta^2}{32N\bar{\eta}_j} \right) \simeq \\
& \simeq \omega_\mu \mu_F M \left(s_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} s_{-1/2} \right) + \mu_F^2 M \frac{\omega_\eta}{4} \left(1 - \frac{s_{1/2}^2}{s_1} \right) \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Finally, using (3.24), (3.27) and preserving the principal order in $\frac{1}{\bar{\eta}}$, $\frac{1}{M}$, we get the expression for correlation coefficient

$$b_{nn} = \frac{\mu_B \frac{\omega_\eta}{4} \left(1 - \frac{s_{1/2}^2}{s_1} \right)}{\omega_\mu \left(s_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} s_{-1/2} \right) + \mu_F \frac{\omega_\eta}{4} \left(1 - \frac{s_{1/2}^2}{s_1} \right)}. \quad (3.28)$$

It can be shown that $s_1 - s_{1/2}^2 > 0$, so the correlation coefficient is positive. In the case of a homogeneous distribution $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}$, $i = 1 \dots M$, the expression in the numerator is equal to zero, the following order must be taken into account:

$$b_{nn}^{uniform} = \frac{\mu_B \frac{\omega_\eta^2}{32\bar{\eta}}}{\omega_\mu \left(\bar{\eta}^{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} \bar{\eta}^{-1/2} \right) + \mu_B \frac{\omega_\eta^2}{32\bar{\eta}}}. \quad (3.29)$$

For a uniform distribution also $b_{nn}^{uniform} > 0$.

The correlation coefficient b_{nn} decreases as $\bar{\eta}$ increases:

$$b_{nn} \sim \frac{1}{\bar{\eta}^{1/2}}, \quad b_{nn}^{uniform} \sim \frac{1}{\bar{\eta}^{3/2}},$$

moreover, for the case of a uniform average distribution of strings in the transverse plane, this decrease turns out to be faster than for inhomogeneous.

3.2. Correlations between multiplicity and transverse momentum

As for the correlation coefficient between multiplicities, consider how the pt-n-correlation coefficient

$$b_{p_t n} = \frac{\langle p_t^B n_F \rangle - \langle p_t^B \rangle \langle n_F \rangle}{\langle n_F^2 \rangle - \langle n_F \rangle^2} \quad (3.30)$$

is affected by the condition of fixing the total number of initial strings.

We will calculate $\langle p_t^B n_F \rangle$:

$$\langle p_t^B n_F \rangle = \left\langle \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i^F} p_i^{jF} \sum_{k=1}^M n_k^F \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^M \left\langle \frac{n_i^B}{\sum_{j=1}^M n_j^B} \right\rangle_{C_n^B} \bar{p}(\eta_i) \sum_{k=1}^M \langle n_k^F \rangle_{C_n^F} \right\rangle_{C_n}. \quad (3.31)$$

[43] showed that

$$\left\langle \frac{n_i^B}{\sum_{k=1}^M n_k^B} \right\rangle_{C_n^B} = \frac{\bar{n}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)}, \quad (3.32)$$

then

$$\begin{aligned} \langle p_t^B n_F \rangle &= \left\langle \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)} \mu_F \sum_k \bar{n}(\eta_k) \right\rangle = \mu_F \sum_j \langle \bar{n}(\eta_j) \bar{p}(\eta_j) \rangle = \\ &= \mu_F p_0 \sum_j \langle \eta_j^{3/4} \rangle = \mu_F p_0 \sum_j \langle (\bar{\eta}_j + \nu_j)^{3/4} \rangle = \mu_F p_0 \sum_j \bar{\eta}_j^{3/4} \left\langle \left(1 + \frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j}\right)^{3/4} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Let us expand $\left(1 + \frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j}\right)^{3/4}$ into a series in the small parameter $\frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j}$:

$$\begin{aligned} \langle p_t^B n_F \rangle &\simeq \mu_F p_0 \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j^{3/4} \left\langle 1 + \frac{3\nu_j}{4\bar{\eta}_j} - \frac{3\nu_j^2}{32\bar{\eta}_j^2} + \frac{5\nu_j^3}{128\bar{\eta}_j^3} - \frac{45\nu_j^4}{2048\bar{\eta}_j^4} \right\rangle = \\ &= \mu_F p_0 \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j^{3/4} \left(1 - \frac{3}{32} \frac{\langle \nu_j^2 \rangle}{\bar{\eta}_j^2} - \frac{45}{2048} \frac{\langle \nu_j^4 \rangle}{\bar{\eta}_j^4} \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

We use the (3.14) relations:

$$\langle p_t^B n_F \rangle = \mu_F p_0 \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j^{3/4} \left(1 - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_j} + \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{N}} - \frac{135}{2048} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{\eta}_j^2} + \frac{135}{1024} \frac{\omega_\eta^2}{\bar{N}\bar{\eta}_j} \right). \quad (3.35)$$

Finally, for the mean value $\langle p_t^B n_F \rangle$ we get

$$\langle p_t^B n_F \rangle = \mu_F p_0 M s_{3/4} \left(1 + \frac{3 \omega_\eta}{32 \bar{N}} - \frac{3 \omega_\eta s_{-1/4}}{32 s_{3/4}} - \frac{135 \omega_\eta^2 s_{-5/4}}{2048 s_{3/4}} + \frac{135 \omega_\eta^2 s_{-1/4}}{1024 \bar{N} s_{3/4}} \right). \quad (3.36)$$

We will calculate $\langle p_t^B \rangle$:

$$\langle p_t^B \rangle = \left\langle \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)} \right\rangle = p_0 \left\langle \frac{\sum_i (\bar{\eta}_i + \nu_i)^{3/4}}{\sum_k (\bar{\eta}_k + \nu_k)^{1/2}} \right\rangle. \quad (3.37)$$

We expand the expressions in the numerator and denominator in a series in terms of a small parameter $\frac{\nu_j}{\bar{\eta}_j}$:

$$\begin{aligned} \langle p_t^B \rangle &\simeq p_0 \left\langle \frac{\sum_j \bar{\eta}_j^{3/4} \left(1 + \frac{3 \nu_j}{4 \bar{\eta}_j} - \frac{3 \nu_j^2}{32 \bar{\eta}_j^2} \right)}{\sum_k \sqrt{\bar{\eta}_k} \left(1 + \frac{1 \nu_k}{2 \bar{\eta}_k} - \frac{1 \nu_k^2}{8 \bar{\eta}_k^2} \right)} \right\rangle = \\ &= \frac{p_0}{S_{1/2}} \left\langle \frac{\sum_j \bar{\eta}_j^{3/4} \left(1 + \frac{3 \nu_j}{4 \bar{\eta}_j} - \frac{3 \nu_j^2}{32 \bar{\eta}_j^2} \right)}{1 + \frac{1}{2 S_{1/2}} \sum_k \frac{\nu_k}{\bar{\eta}_k^{1/2}} - \frac{1}{8 S_{1/2}} \sum_k \frac{\nu_k^2}{\bar{\eta}_k^{3/2}}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Expand the denominator into a series, preserving the principal order:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \frac{1}{2 S_{1/2}} \sum_k \frac{\nu_k}{\bar{\eta}_k^{1/2}} - \frac{1}{8 S_{1/2}} \sum_k \frac{\nu_k^2}{\bar{\eta}_k^{3/2}}} &\simeq 1 - \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{2 S_{1/2}} \frac{\nu_k}{\bar{\eta}_k^{1/2}} - \frac{1}{8 S_{1/2}} \frac{\nu_k^2}{\bar{\eta}_k^{3/2}} \right) + \\ &+ \frac{1}{4 S_{1/2}^2} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \frac{\nu_j \nu_k}{\bar{\eta}_k^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \langle p_t^B \rangle &\simeq \frac{p_0}{S_{1/2}} \left\langle \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j^{3/4} \left(1 + \frac{3 \nu_j}{4 \bar{\eta}_j} - \frac{3 \nu_j^2}{32 \bar{\eta}_j^2} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left(1 - \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{2 S_{1/2}} \frac{\nu_k}{\bar{\eta}_k^{1/2}} - \frac{1}{8 S_{1/2}} \frac{\nu_k^2}{\bar{\eta}_k^{3/2}} \right) + \frac{1}{4 S_{1/2}^2} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \frac{\nu_j \nu_k}{\bar{\eta}_k^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2}} \right) \right\rangle = \\ &= \frac{p_0}{S_{1/2}} \left\langle \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j^{3/4} \left(1 - \frac{3 \nu_j^2}{32 \bar{\eta}_j^2} \right) + \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j^{3/4} \left(\frac{1}{8 S_{1/2}} \frac{\nu_k^2}{\bar{\eta}_k^{3/2}} - \frac{3}{8 S_{1/2}} \frac{\nu_j \nu_k}{\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k^{1/2}} \right) \right\rangle + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{S_{3/4}}{4S_{1/2}^2} \left\langle \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \frac{\nu_j \nu_k}{\bar{\eta}_k \bar{\eta}_j^{1/2-1/2}} \right\rangle = \\
& = \frac{p_0}{S_{1/2}} \left(S_{3/4} - \frac{3}{32} \omega_\eta S_{-1/4} + \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{N}} S_{3/4} + \sum_k \frac{S_{3/4}}{8S_{1/2}} \frac{\langle \nu_k^2 \rangle}{\bar{\eta}_k^{3/2}} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_k \sum_j \left(\frac{3}{8S_{1/2}} \frac{\langle \nu_j \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_j^{1/4} \bar{\eta}_k^{1/2}} - \frac{S_{3/4}}{4S_{1/2}^2} \frac{\langle \nu_i \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_k^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2}} \right) \right) = \\
& = \frac{p_0}{S_{1/2}} \left(S_{3/4} - \frac{3}{32} \omega_\eta S_{-1/4} + \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{N}} S_{3/4} + \frac{S_{3/4}}{8S_{1/2}} \omega_\eta S_{-1/2} - \frac{S_{3/4} \omega_\eta}{8\bar{N}} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_k \left(\frac{3}{8S_{1/2}} \frac{\langle \nu_k^2 \rangle}{\bar{\eta}_k^{3/4}} - \frac{S_{3/4}}{4S_{1/2}^2} \frac{\langle \nu_k^2 \rangle}{\bar{\eta}_k} \right) - \sum_{k \neq j} \left(\frac{3}{8S_{1/2}} \frac{\langle \nu_j \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_j^{1/4} \bar{\eta}_k^{1/2}} - \frac{S_{3/4}}{4S_{1/2}^2} \frac{\langle \nu_i \nu_k \rangle}{\bar{\eta}_k^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2}} \right) \right) = \\
& = \frac{p_0}{S_{1/2}} \left(S_{3/4} - \frac{3}{32} \omega_\eta S_{-1/4} + \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{N}} S_{3/4} + \frac{S_{3/4}}{8S_{1/2}} \omega_\eta S_{-1/2} - \frac{S_{3/4} \omega_\eta}{8\bar{N}} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_k \left(\frac{3}{8S_{1/2}} \frac{1}{\bar{\eta}_k^{3/4}} \left(\omega_\eta \bar{\eta}_k - \frac{\omega_\eta \bar{\eta}_k^2}{\bar{N}} \right) - \frac{S_{3/4}}{4S_{1/2}^2} \frac{1}{\bar{\eta}_k} \left(\omega_\eta \bar{\eta}_k - \frac{\omega_\eta \bar{\eta}_k^2}{\bar{N}} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. + \omega_\eta \sum_{k \neq j} \left(\frac{3}{8S_{1/2}} \frac{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_k}{\bar{N} \bar{\eta}_j^{1/4} \bar{\eta}_k^{1/2}} - \frac{S_{3/4}}{4S_{1/2}^2} \frac{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_k}{\bar{N} \bar{\eta}_k^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2}} \right) \right). \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Finally, for the mean momentum $\langle p_t^B \rangle$ we get

$$\langle p_t^B \rangle = \frac{p_0 s_{3/4}}{s_{1/2}} \left(1 - \frac{3\omega_\eta s_{-1/4}}{32s_{3/4}} + \frac{\omega_\eta s_{-1/2}}{8s_{1/2}} + \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{N}} - \frac{3}{8} \frac{s_{1/4}}{M s_{3/4} s_{1/2}} \omega_\eta + \frac{1}{4M s_{1/2}^2} \omega_\eta \right). \tag{3.41}$$

Using (3.41), (3.19), (3.36), we will calculate the covariance $\text{cov}(p_t^B, n_F)$:

$$\begin{aligned}
\langle p_t^B \rangle \langle n_F \rangle & = \mu_F p_0 M s_{3/4} \left(1 + \frac{\omega_\eta}{8\bar{N}} - \frac{3}{32s_{3/4}} \omega_\eta s_{-1/4} + \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\bar{N}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{3}{8} \frac{s_{1/4}}{M s_{3/4} s_{1/2}} \omega_\eta + \frac{1}{4M s_{1/2}^2} \omega_\eta \right), \\
\langle p_t^B n_F \rangle - \langle p_t^B \rangle \langle n_F \rangle & = -\mu_F p_0 M s_{3/4} \omega_\eta \left(\frac{1}{8\bar{N}} - \frac{3}{8} \frac{s_{1/4}}{M s_{3/4} s_{1/2}} + \frac{1}{4M s_{1/2}^2} \right) \tag{3.42}
\end{aligned}$$

Using (3.42), (3.27), we will calculate the correlation coefficient between transverse momentum and multiplicity:

$$b_{p_t n} = \frac{p_0 \omega_\eta \left(\frac{3 s_{1/4}}{8 s_{1/2}} - \frac{s_{3/4}}{8 s_1} - \frac{s_{3/4}}{4 s_{1/2}^2} \right)}{\omega_\mu M \left(s_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} s_{-1/2} \right) + \mu_F M \frac{\omega_\eta}{4} \left(1 - \frac{s_{1/2}^2}{s_1} \right)}. \quad (3.43)$$

In the case of a homogeneous distribution $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}$, $i = 1 \dots M$ the expression in the numerator is equal to zero,

$$b_{p_t n}^{uniform} = 0, \quad (3.44)$$

it is necessary to take into account the next order in $1/\bar{\eta}$.

Accounting for the next order requires considerable effort. For this purpose, in [59], we developed a special alternative method for calculating average values for the (3.3) distribution, which does not require the introduction of intermediate integration (3.8) over α , described in the Appendix D. Using this alternative technique, in the Appendix D we once again reproduce all the formulas obtained in this chapter, and also find the following expression for the $p_t - n$ correlator up to second order in $1/\overline{eta}$ for a fixed total number of strings:

$$\begin{aligned} \frac{cov(p_B, n_F)}{p_0 \mu_F} &= \frac{\langle p_B n_F \rangle - \langle p_t \rangle \langle n \rangle}{p_0 \mu_F} = \frac{\omega_\eta}{4} \left(\frac{3 s_{1/4}}{2 s_{1/2}} - \frac{s_{3/4}}{s_{1/2}^2} - \frac{s_{3/4}}{2 s_1} \right) + \\ &+ \frac{\omega_\eta^2}{8} \left(\frac{57 s_{-3/4}}{32 s_{1/2}} - \frac{21 s_{-1/4}}{32 s_1} + \frac{3 s_{-1/4}}{16 s_{1/2}^2} - \frac{7 s_{3/4} s_{-1}}{4 s_{1/2}^2} + \frac{3 s_{1/4} s_{-1/2}}{8 s_{1/2}^2} + \frac{M s_{3/4} s_{-1/2}}{s_{1/2}^3} - \frac{s_{3/4} s_{-1/2}}{s_1 s_{1/2}} \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

For a uniform average string distribution, this gives

$$\frac{cov(p_B, n_F)}{p_0 \mu_F} = -\frac{\omega_\eta^2}{128 \bar{\eta}^{5/4}}. \quad (3.46)$$

So the coefficient of pt-n correlations in this case turns out to be equal to

$$b_{p_t n}^{uniform} = -\frac{p_0 \omega_\eta^2}{128 \omega_\mu M \bar{\eta}^{5/4} \left(\bar{\eta}^{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} \bar{\eta}^{-1/2} \right)}. \quad (3.47)$$

We see that in this homogeneous case this coefficient, for a fixed total number of strings, decreases as $1/\eta^{7/4}$ and the pt-n correlation coefficient turns out to be negative.

Using the definition of (1.3), let's move on to the correlation coefficient $b_{p_t n}^{rel}$ in relative variables. When recalculating, we will use the values for the averages in the leading order: $\langle p_t^B \rangle = p_0 \frac{s_{3/4}}{s_{1/2}}$, $\langle n_F \rangle = \mu_F M s_{1/2}$.

$$b_{p_t n}^{rel} = \frac{\mu_F \omega_\eta \left(\frac{3s_{1/4}s_{1/2}}{2s_{3/4}} - \frac{s_{1/2}^2}{2s_1} - 1 \right)}{4\omega_\mu \left(s_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} s_{-1/2} \right) + \mu_F \omega_\eta \left(1 - \frac{s_{1/2}^2}{s_1} \right)}. \quad (3.48)$$

Let us estimate the sign of the correlation coefficient $b_{p_t n}^{rel}$ for small inhomogeneities $\delta\bar{\eta}_j$ against the background of constant string density $\bar{\eta}$:

$$\begin{aligned} s_\gamma &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\bar{\eta} + \delta\bar{\eta}_j)^\gamma \simeq \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \bar{\eta}^\gamma + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \gamma \bar{\eta}^{\gamma-1} \delta\bar{\eta}_j + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \bar{\eta}^{\gamma-2} \delta\bar{\eta}_j^2 = \\ &= \bar{\eta}^\gamma + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2M} \bar{\eta}^{\gamma-2} \sum_{j=1}^M \delta\bar{\eta}_j^2, \end{aligned} \quad (3.49)$$

where we took into account that for the fixed number of strings

$$\sum_{j=1}^M \delta\bar{\eta}_j = 0. \quad (3.50)$$

The sign of the correlation coefficient is determined by the sign of

$$\Phi = 3s_{1/4}s_{1/2}s_1 - s_{1/2}^2s_{3/4} - 2s_1s_{3/4}. \quad (3.51)$$

Substituting (3.49) into (3.51), we get

$$\Phi = -\frac{1}{8M\bar{\eta}^{1/4}} \sum_{j=1}^M \delta\bar{\eta}_j^2 < 0. \quad (3.52)$$

For small inhomogeneities in the distribution of strings, the correlation coefficient $b_{p_t n}^{rel}$ will be negative, which agrees with the formula (3.2) for a uniform string distribution obtained in Appendix D taking into account the second order in $1/\eta$. This differs from the case without conservation of the total number of strings, where negative values of this coefficient could only be obtained for the case of highly inhomogeneous distributions of strings in the transverse plane, as shown earlier.

3.3. Correlations in the case of a fixed total number of initial strings in the model without fusion

The dependence of the average number of particles formed from the decay of strings in the i -th cell and their transverse momentum on the number of strings in the given cell η_i in the model of independent sources has the following form:

$$\bar{n}(\eta_i) = \eta_i, \bar{p}(\eta_i) = p_0 \eta_i. \quad (3.53)$$

We will calculate the averages $\langle n_F \rangle$, $\langle n_F n_B \rangle$, $\langle p_t^B n_F \rangle$, $\langle p_t^B \rangle$, in the model without fusion for the case of the fixed total number of initial strings.

$$\langle n_F \rangle^{no\ fusion} = \left\langle \mu_F \sum_{j=1}^M \bar{n}(\eta_j) \right\rangle = \left\langle \mu_F \sum_{j=1}^M \eta_j \right\rangle = \mu_F \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j = \mu_F \bar{N}. \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \langle n_F n_B \rangle^{no\ fusion} &= \left\langle \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \eta_j \eta_k \right\rangle = \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \langle (\bar{\eta}_j + \nu_j) (\bar{\eta}_k + \nu_k) \rangle = \\ &= \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M (\bar{\eta}_j \bar{\eta}_k + \langle \nu_j \nu_k \rangle) = \langle n_F \rangle^{no\ fusion} \langle n_B \rangle^{no\ fusion} + \mu_F \mu_B \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \langle \nu_j \nu_k \rangle. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Given (3.15), we get

$$\langle n_F n_B \rangle^{no\ fusion} = \langle n_F \rangle^{no\ fusion} \langle n_B \rangle^{no\ fusion}. \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \langle p_t^B n_F \rangle^{no\ fusion} &= \left\langle \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i^F} p_i^{jF} \sum_{k=1}^M n_k^F \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^M \left\langle \frac{n_i^B}{\sum_{j=1}^{n_i^B} n_j^B} \right\rangle_{C_n^B} \bar{p}(\eta_i) \sum_{k=1}^M \langle n_k^F \rangle_{C_n^F} \right\rangle_{C_n}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\langle p_t^B n_F \rangle^{no\ fusion} = \left\langle \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)} \mu_F \sum_k \bar{n}(\eta_k) \right\rangle = \mu_F \sum_j \langle \bar{n}(\eta_j) \bar{p}(\eta_j) \rangle =$$

$$p_0\mu_F \sum_j \langle \eta_j^2 \rangle = p_0\mu_F \sum_j \langle (\bar{\eta}_j + \nu_j)^2 \rangle = p_0\mu_F \sum_{j=1}^M (\bar{\eta}_j^2 + \langle \nu_j^2 \rangle). \quad (3.58)$$

Using the relations (3.14), we get

$$\langle p_t^B n_F \rangle^{no\ fusion} = p_0\mu_F S_2 + p_0\mu_F \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_j \omega_\eta \left(1 - \frac{\bar{\eta}_j}{\bar{N}}\right) = p_0\mu_F S_2 + p_0\mu_F \omega_\eta \left(\bar{N} - \frac{S_2}{\bar{N}}\right). \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \langle p_t^B \rangle^{no\ fusion} &= \left\langle \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)} \right\rangle = \int d\eta_1 \dots d\eta_M P(\eta_1 \dots \eta_M) \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)}{\sum_k \bar{n}(\eta_k)} = \\ &= \frac{p_0 \sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{N}}}{\prod_{j=1}^M \sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{\eta}_j}} \int d\eta_1 \dots d\eta_M \delta(N - \bar{N}) e^{-\sum \frac{(\eta_j - \bar{\eta}_j)^2}{2\omega_\eta \bar{\eta}_j}} \frac{\sum_i \eta_i^2}{\sum_k \eta_k} = \\ &= \frac{p_0 \sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{N}}}{\bar{N} \prod_{j=1}^M \sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{\eta}_j}} \int d\eta_1 \dots d\eta_M \delta(N - \bar{N}) e^{-\sum \frac{(\eta_j - \bar{\eta}_j)^2}{2\omega_\eta \bar{\eta}_j}} \sum_i \eta_i^2 = \\ &= \frac{p_0}{\bar{N}} \sum_i \langle \eta_i^2 \rangle = \frac{1}{\mu_F \bar{N}} \langle p_t^B n_F \rangle^{no\ fusion} = \frac{1}{\langle n_F \rangle^{no\ fusion}} \langle p_t^B n_F \rangle^{no\ fusion}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Then the covariances $\text{cov}(n_F, n_B)$ и $\text{cov}(p_t^B, n_F)$:

$$\langle n_F n_B \rangle^{no\ fusion} - \langle n_F \rangle^{no\ fusion} \langle n_B \rangle^{no\ fusion} = 0 \quad (3.61)$$

$$\langle p_t^B n_F \rangle^{no\ fusion} - \langle p_t^B \rangle^{no\ fusion} \langle n_F \rangle^{no\ fusion} = 0 \quad (3.62)$$

Thus, for models without string fusion, when the total number of initial strings is fixed, as expected, the correlation coefficients b_{nn} and $b_{p_t n}$ are equal to zero identically. Physically, this is completely understandable, since the decays of each string give uncorrelated contributions to the observation windows that are far in rapidity. The results obtained for the n-n and pt-n correlation coefficients (3.28), (3.48) for a fixed number of strings (for a fixed multiplicity class) arise due to string fusion effects.

3.4. General properties of correlations involving the average transverse momentum when the total number of strings is fixed

In this chapter, we present the developed method the analytical calculation of various average values of extensive and intensive variables at high string densities on the transverse lattice with taking into account the string fusion effects leading to the formation of string clusters. Using this technique we calculate the asymptotes of the LRC coefficients between the multiplicities, b_{nn} , and between the multiplicity and the event-mean transverse momentum, b_{ptn} , in two separated rapidity intervals at high string density and with the fixation of the total number of initial strings. This last condition models in our approach the fixation of the collision centrality class, which is the usual practice of analyzing experimental data in modern collider experiments, like RHIC, LHC and so on. As a result we found that the fixation of the total number of strings has a significant impact

on the behavior of the both n - n and pt - n correlation coefficients. We found that already at small inhomogeneities in string distribution the coefficient of pt - n correlation becomes negative, whereas without fixing the total number of strings, as shown in [56; 57], it is usually positive, becoming negative only for extremely inhomogeneous string distributions in the impact parameter plane. For homogeneous string distribution we show that fixing the total number of initial strings leads to the faster decrease of the and correlation coefficients at large string density than without this fixing [38; 39; 44; 45]. At that the correlation coefficient remains negative, whereas without imposing this additional condition it is always positive for a homogeneous string distribution.

Chapter 4. Using the strongly intensive Σ observable to study the formation of quark-gluon string clusters in pp collisions at LHC energies.

This chapter is based on the results obtained in [57] (sections 2, 3, 4) and [60; 61].

4.1. Extensive, intensive, and strongly intensive variables

In statistical physics, the quantities used are usually divided into intensive and extensive. The first ones include pressure, temperature, and similar quantities, the value of which remains unchanged when some part of the system is separated. The second includes volume, entropy and other quantities, the value of which is equal to the sum of their values for individual parts of the system.

When these concepts are transferred to high-energy physics, for example, to the case of nucleus-nucleus collisions, the volume of the resulting system is considered to be proportional to the total number of nucleons in the colliding nuclei that took part in the interaction process. It is clear that in this case the volume depends on the impact parameter at which the collision of the nuclei occurs. In a more general case of the interaction of high-energy hadrons, it is considered that the volume of the resulting system is proportional to the number of quark-gluon strings N formed at the initial stage of the interaction.

From this point of view, the number of particles, n , with a momentum belonging to some given region (in a given acceptance), is an example of an extensive quantity, since its value will be proportional to the volume of the resulting system. In each hadron collision, the value of n will be equal to the sum of the contributions, $n = n_1 + \dots + n_N$, from each of the N resulting strings. It is obvious that the value of n will fluctuate from event to event together with the value of the volume of

the resulting system (the number of primary strings formed), including due to the inevitable fluctuations of the impact parameter.

However, in order to find the contribution of physically interesting fluctuations and correlations that carry information about the fundamental properties of the matter formed as a result of the interaction of hadrons, it is necessary to be able to distinguish their contribution against the background of a trivial contribution arising from fluctuations in the volume of the resulting system. In particular, this means that in order to obtain information about the processes of string fusion and the formation of string clusters from the analysis of fluctuations and correlations between different observables, it is necessary to be able to separate in the experimental data the trivial shading contribution of these volume fluctuations arising due to fluctuations in the volume of the interaction region (for example, number of formed strings) from event to event, including due to fundamentally irremovable fluctuations of the impact parameter in a real experiment.

For this purpose, in high-energy physics, along with extensive and intensive quantities, the concept of strongly intensive variables is introduced. They are understood as observable quantities, the value of which does not depend not only on the volume of the resulting system, but also on fluctuations of this volume from event to event.

General methods for constructing such observables were studied in [62]. In it, in particular, it was shown that within a certain class of statistical models considered in the work, the value

$$\Sigma(A, B) \equiv \frac{\langle A \rangle \omega_B + \langle B \rangle \omega_A - 2 \text{cov}(A, B)}{\langle A \rangle + \langle B \rangle}, \quad (4.1)$$

composed of any two extensive quantities A and B is a strongly intensive variable. In this formula, $\langle A \rangle$ and $\langle B \rangle$ are the averages of A and B , and ω_A and ω_B - their scaled variances:

$$\omega_A \equiv \frac{D_A}{\langle A \rangle} = \frac{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}{\langle A \rangle}, \omega_B \equiv \frac{D_B}{\langle B \rangle} = \frac{\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2}{\langle B \rangle}. \quad (4.2)$$

The (4.1) formula also includes the correlator of these variables:

$$\text{cov}(A, B) = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle. \quad (4.3)$$

Later, in [63], when constructing the variable Σ according to the formula (4.1), it was proposed to use the multiplicity of particles, n_F and n_B , as these extensive variables A and B , produced in this event in two rapidity intervals, δy_F and δy_B , the so-called observation windows:

$$\Sigma(n_F, n_B) \equiv \frac{\langle n_F \rangle \omega_{n_B} + \langle n_B \rangle \omega_{n_F} - 2\text{cov}(n_F, n_B)}{\langle n_F \rangle + \langle n_B \rangle}, \quad (4.4)$$

where $\omega_n \equiv D_n / \langle n \rangle = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle}$ – scaled variance of the particle multiplicity , $\text{cov}(n_F, n_B) = \langle n_F n_B \rangle - \langle n_F \rangle \langle n_B \rangle$.

4.2. Strongly intensive variable $\Sigma(n_F, n_B)$ in the model with string fusion on a lattice

In this section, we will obtain an expression for the strongly intensive variable $\Sigma(n_F, n_B)$ in terms of similar variables defined for individual string clusters in the framework of the model with string fusion on a lattice for the case of equal width symmetrically located rapidity windows and symmetrical reaction:

$$\delta y_F = \delta y_B = \delta y,$$

$$\langle n_F \rangle = \langle n_B \rangle = \langle n \rangle, \quad D_{n_F} = D_{n_B} = D_n, \quad \omega_{n_F} = \omega_{n_B} = \omega_n = \frac{D_n}{\langle n \rangle}. \quad (4.5)$$

Then we can rewrite expression (4.4) for in the simpler form

$$\Sigma(n_F, n_B) = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n_F n_B \rangle}{\langle n \rangle}. \quad (4.6)$$

We introduce the notation for the average over all possible string configurations C_η :

$$P(X) = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) P_{C_\eta}(X), \quad \langle X \rangle = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \langle X \rangle_{C_\eta} \quad (4.7)$$

where $\langle X \rangle_{C_\eta}$ denotes the mean of X for a given configuration C_η . For the averages in formula (4.6), we then have

$$\langle n_F n_B \rangle = \left\langle \left[\sum_{i=1}^M n_i^F \right] \left[\sum_{k=1}^M n_k^B \right] \right\rangle = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \left[\sum_i \langle n_i^F n_i^B \rangle_{\eta_i} + \sum_{i \neq k} \langle n_i^F \rangle_{\eta_i} \langle n_k^B \rangle_{\eta_k} \right], \quad (4.8)$$

$$\langle n_F^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^M n_i^F \right)^2 \right\rangle = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \left[\sum_i \langle (n_i^F)^2 \rangle_{\eta_i} + \sum_{i \neq k} \langle n_i^F \rangle_{\eta_i} \langle n_k^F \rangle_{\eta_k} \right], \quad (4.9)$$

If we also introduce the covariance between the particle numbers n_i^F and n_i^B produced in forward and backward rapidity intervals from the decay of a string cluster with η_i strings in cell i , and the variance of the number of particles produced in a given rapidity interval from the decay of a string cluster with η_i strings in cell i ,

$$\text{cov}_{\eta_i}(n_i^F n_i^B) \equiv \langle n_i^F n_i^B \rangle_{\eta_i} - \langle n_i^F \rangle_{\eta_i} \langle n_i^B \rangle_{\eta_i}, \quad (4.10)$$

$$d_{\eta_i}(n_i^F) \equiv \langle (n_i^F)^2 \rangle_{\eta_i} - \langle n_i^F \rangle_{\eta_i}^2. \quad (4.11)$$

then the expressions for $\langle n_F n_B \rangle$ and $\langle n_F^2 \rangle$ can be rewritten as follows:

$$\langle n_F n_B \rangle = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \left[\sum_i \text{cov}_{\eta_i}(n_i^F n_i^B) + \langle n_F \rangle_{C_\eta} \langle n_B \rangle_{C_\eta} \right], \quad (4.12)$$

$$\langle n_F^2 \rangle = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \left[\sum_i d_{\eta_i}(n_i^F) + \langle n_F \rangle_{C_\eta}^2 \right]. \quad (4.13)$$

where

$$\langle n_F \rangle_{C_\eta} = \sum_i \langle n_i^F \rangle_{\eta_i}, \quad \langle n_F \rangle = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \langle n_F \rangle_{C_\eta}, \quad (4.14)$$

In our symmetric case, we also have the same expressions for another observation window $d_{\eta_i}(n_i^F) = d_{\eta_i}(n_i^B) = d_{\eta_i}(n_i)$ и $\langle n_F \rangle_{C_\eta} = \langle n_B \rangle_{C_\eta} = \langle n \rangle_{C_\eta}$. Substituting all the obtained expressions in formula (4.6), we then obtain

$$\Sigma(n_F, n_B) = \frac{1}{\langle n \rangle} \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \sum_i [d_{\eta_i}(n_i) - \text{cov}_{\eta_i}(n_i^F n_i^B)]. \quad (4.15)$$

We can define a variable $\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B)$ for a string cluster with η strings, which can be completely determined by the properties of this cluster:

$$\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B) \equiv \frac{d_\eta(\mu) - \text{cov}_\eta(\mu_F, \mu_B)}{\langle \mu \rangle_\eta} . \quad (4.16)$$

Here, μ_F and μ_B are the numbers of particles produced in the forward and backward rapidity intervals from the decay of a string cluster with η strings, and

$$\langle \mu_F \rangle_\eta = \langle \mu_B \rangle_\eta \equiv \langle \mu \rangle_\eta , d_\eta(\mu_F) = d_\eta(\mu_B) \equiv d_\eta(\mu) \quad (4.17)$$

are the corresponding means and variances. Using formula (4.16), we can write expression (4.15) as

$$\Sigma(n_F, n_B) = \sum_{C_\eta} P(C_\eta) \sum_{i=1}^M \frac{\langle n_i \rangle_{\eta_i}}{\langle n \rangle} \Sigma_{\eta_i}(n_i^F, n_i^B) . \quad (4.18)$$

From the physical standpoint, for event classes without central collision selection (so-called minimum bias events) where the total number of strings is not fixed, it is natural to assume that in the first approximation, the fluctuations of the number of strings in each grid cell are independent, i.e.,

$$P(C_\eta) = \prod_{k=1}^M P_k(\eta_k), \quad (4.19)$$

and summation over strings configurations is represented as an M -fold sum,

$$\sum_{C_\eta} P(C_\eta) \dots = \prod_{k=1}^M \sum_{\eta_k=0}^{\infty} P_k(\eta_k) \dots . \quad (4.20)$$

After (4.20) is substituted in formula (4.18), the result reduces to the double sum

$$\Sigma(n_F, n_B) = \sum_{i=1}^M \sum_{\eta_i=1}^{\infty} P_i(\eta_i) \frac{\langle n_i \rangle_{\eta_i}}{\langle n \rangle} \Sigma_{\eta_i}(n_i^F, n_i^B), \quad (4.21)$$

because every term in (4.18) depends on only one η_i and by virtue of the normalization condition

$$\sum_{\eta_k=0}^{\infty} P_k(\eta_k) = 1. \quad (4.22)$$

In (4.21) we also take into account that the contribution of terms with $\eta_i = 0$ vanishes (strings are absent from grid cell i).

$\langle n_i \rangle_{\eta_i}$ and $\Sigma_{\eta_i}(n_i^F, n_i^B)$ in (4.21) depend only on the number η_i of strings in grid cell i . Therefore, changing the summation order, we can rewrite (4.21) in the form

$$\Sigma(n_F, n_B) = \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{\langle \mu \rangle_{\eta}}{\langle n \rangle} \Sigma_{\eta}(\mu_F, \mu_B) \sum_{i=1}^M P_i(\eta). \quad (4.23)$$

Let us consider the average number of particles formed from the decay of all clusters consisting of η strings each

$$\langle n \rangle_{\eta} = \langle m \rangle_{\eta} \langle \mu \rangle_{\eta}, \quad (4.24)$$

where $\langle m \rangle_{\eta}$ the average number of clusters composed of exactly η strings. For the case with a nonuniform distribution of strings in the transverse plane, when $P_i(\eta) \neq P_k(\eta)$ and $\bar{\eta}_i \neq \bar{\eta}_k$

$$\langle m \rangle_{\eta} = \sum_{C_{\eta}} P(C_{\eta}) \sum_{i=1}^M \delta_{\eta_i \eta} = \sum_{i=1}^M P_i(\eta). \quad (4.25)$$

taking into account (4.24), (4.25), the expression (4.23) can be rewritten as

$$\Sigma(n_F, n_B) = \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{\langle n \rangle_{\eta}}{\langle n \rangle} \Sigma_{\eta}(\mu_F, \mu_B). \quad (4.26)$$

Note that due to the normalization condition (4.22)

$$\sum_{\eta=0}^{\infty} \langle m \rangle_{\eta} = M \quad (4.27)$$

and

$$\sum_{\eta=1}^{\infty} \langle n \rangle_{\eta} = \sum_{\eta=1}^{\infty} \langle m \rangle_{\eta} \langle \mu \rangle_{\eta} = \sum_{i=1}^M \sum_{\eta=1}^{\infty} P_i(\eta) \langle \mu \rangle_{\eta} = \sum_{i=1}^M \langle n_i \rangle = \langle n \rangle. \quad (4.28)$$

This means that we can introduce weight factors

$$\alpha(\eta) \equiv \langle n \rangle_{\eta} / \langle n \rangle, \quad (4.29)$$

such that

$$\sum_{\eta=1}^{\infty} \langle n \rangle_{\eta} / \langle n \rangle = \sum_{\eta=1}^{\infty} \alpha(\eta) = 1 , \quad (4.30)$$

and rewrite formula (4.26) in the form

$$\Sigma(n_F, n_B) = \sum_{\eta=1}^{\infty} \alpha(\eta) \Sigma_{\eta}(\mu_F, \mu_B) . \quad (4.31)$$

The physical meaning of the weight coefficient $\alpha(\eta)$ is very clear: of the total average number of particles formed in an event, this is the average share of particles formed in the decay of all clusters, each formed by the fusion of exactly η strings.

4.3. Relation between the variable Σ and the two-particle (pair) correlation function Λ

In the framework of the model with string fusion in the transverse lattice [38; 39], it is assumed that all η strings in a given grid cell fuse to form a single cluster. The new object is a fused string with changed physical characteristics. Similarly to what is done for the usual string [64], we characterize these new string properties in terms of one- and two-particle distribution functions of particles (hadrons) produced by the fragmentation (from decay) of such a string:

$$\lambda_{\eta}(y) = \frac{dN}{dy}, \quad \lambda_2^{\eta}(y_1, y_2) = \frac{d^2N}{dy_1 dy_2}. \quad (4.32)$$

Integrated over the corresponding rapidity intervals, these functions give [64]

$$\int_{\delta y_F} dy \lambda_{\eta}(y) = \langle \mu_F \rangle_{\eta}, \quad \int_{\delta y_B} dy \lambda_{\eta}(y) = \langle \mu_B \rangle_{\eta}, \quad (4.33)$$

$$\int_{\delta \eta_F} dy_1 \int_{\delta \eta_B} dy_2 \lambda_2^{\eta}(y_1, y_2) = \langle \mu_F \mu_B \rangle_{\eta}, \quad \int_{\delta \eta_F} dy_1 \int_{\delta \eta_F} dy_2 \lambda_2^{\eta}(y_1, y_2) = \langle \mu_F(\mu_F - 1) \rangle_{\eta}.$$

where μ_F and μ_B are the numbers of particles from such a string decay in the forward (δy_F) and backward (δy_B) rapidity observation windows.

The two-particle (pair) correlation function is defined standardly [64] in terms of these distribution functions,

$$\Lambda_\eta(y_1, y_2) \equiv \frac{\lambda_2^\eta(y_1, y_2)}{\lambda_\eta(y_1)\lambda_\eta(y_2)} - 1, \quad (4.34)$$

characterizing correlations between particles formed from the decay of a given string. For a string cluster with η strings in the considered symmetric case (4.17), we easily obtain an expression for $\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B)$ in terms of correlation function (4.34) using expressions (4.33) and definition (4.16):

$$\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B) = 1 + \langle \mu \rangle_\eta [J_{FF}^\eta - J_{FB}^\eta], \quad (4.35)$$

where

$$J_{FB}^\eta \equiv \frac{1}{\langle \mu_F \rangle_\eta \langle \mu_B \rangle_\eta} \int_{\delta y_F} dy_1 \int_{\delta y_B} dy_2 \lambda_\eta(y_1) \lambda_\eta(y_2) \Lambda_\eta(y_1, y_2), \quad (4.36)$$

$$J_{FF}^\eta \equiv \frac{1}{\langle \mu_F \rangle_\eta^2} \int_{\delta y_F} dy_1 \int_{\delta y_F} dy_2 \lambda_\eta(y_1) \lambda_\eta(y_2) \Lambda_\eta(y_1, y_2). \quad (4.37)$$

We see that the value of the variable $\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B)$ is completely determined by the properties of a given cluster with η strings: its one- and two-particle distribution functions $\lambda_\eta(y)$ and $\lambda_2^\eta(y_1, y_2)$.

If the observation windows δy_F and δy_B are chosen in the central rapidity domain such that all produced strings contribute to both of these rapidity intervals at the same time, then because the strong interaction is local in the rapidity space and the resulting distribution of particles from string fragmentation is uniform with respect to rapidity, we have translation invariance with respect to rapidity. This approximation works well for energies at the Large Hadron Collider (LHC), where the produced strings contribute to a sufficiently wide rapidity interval. In this approximation, the one-particle distributions are constants, and the two-particle distributions depend on only the difference between the rapidities of the produced particles:

$$\lambda_\eta(y) = \langle \mu \rangle_\eta / \delta y = \mu_0^{(\eta)}, \quad \lambda_2^\eta(y_1, y_2) = \lambda_2^\eta(y_1 - y_2), \quad (4.38)$$

where $\mu_0^{(\eta)}$ is the average number of particles produced per rapidity unit from a given string cluster decay, and pair correlation function definition (4.34) becomes

$$\Lambda_\eta(y_1 - y_2) = \lambda_2^\eta(y_1 - y_2) / (\mu_0^{(\eta)})^2 - 1 . \quad (4.39)$$

In this case, the expressions for J_{FB}^η and J_{FF}^η in (4.35) for $\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B)$ are simplified

$$J_{FB}^\eta = \frac{1}{\delta y_F \delta y_B} \int_{\delta y_F} dy_1 \int_{\delta y_B} dy_2 \Lambda_\eta(y_1 - y_2) \approx \Lambda_\eta(\Delta y) , \quad (4.40)$$

$$J_{FF}^\eta = \frac{1}{\delta y_F^2} \int_{\delta y_F} dy_1 \int_{\delta y_F} dy_2 \Lambda_\eta(y_1 - y_2) \approx \Lambda_\eta(0) . \quad (4.41)$$

The last transitions hold for small rapidity observation windows where $\delta y_F = \delta y_B \equiv \delta y \ll y_{corr}$, where $y_{corr} \simeq 1 \div 2$ is a typical correlation length in the rapidity space. In (4.40), Δy denotes the rapidity distance between the centers of these small observation windows δy_F and δy_B .

In this simple case, expression (4.35) for $\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B)$ becomes

$$\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B) = 1 + \mu_0^{(\eta)} \delta y [\Lambda_\eta(0) - \Lambda_\eta(\Delta y)] . \quad (4.42)$$

This simplified formula allows qualitatively understanding the main features of the dependence of the strongly intensive variable $\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B)$ for a given cluster of η strings on the width δy of the observation windows and rapidity distances Δy between them. For a small distance between observation windows (where $\Delta y \ll y_{corr}$), $\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B) \rightarrow 1$. As Δy increases, $\Sigma_\eta(\mu_F, \mu_B)$ increases, reaching the level $1 + \mu_0 \delta y \Lambda_\eta(0)$ because $\Lambda_\eta(\Delta y) \rightarrow 0$ for $\Delta y \gg y_{corr}$. The rate of reaching this level and its magnitude are proportional to the observation window width δy .

4.4. Calculation of the variable $\Sigma(n_F, n_B)$ on a lattice by the Monte Carlo method

Calculations of the $\Sigma(n_F, n_B)$ for pp collisions at LHC energies were carried out on the basis of the formula (4.31). The strongly intensive variables for individual

types of clusters Σ_η were calculated analytically under the assumptions of string fusion theory (see formulas (4.56)-(4.63)).

Calculation of the weight coefficients $\alpha(\eta)$ (4.29), which are included in this formula and determine the ratio of the contributions of clusters with different numbers of merged strings, which depends on the specific details of the pp collision, unfortunately, cannot yet be performed analytically. Therefore, in this part, we carried out a Monte Carlo (MC) simulation of the distribution of strings in the transverse plane, taking into account the initial energy and the degree of centrality of the collision. We also used the analytical results below for the total non-diffractive cross section pp obtained within this model to control the developed MC codes (see Fig.4.1). Note that when making this comparison in Fig.4.1, it must be borne in mind that it is rather difficult to estimate the error of the non-diffractive (ND) section, since to do this, from the well-known, so-called NSD (Non Single Diffractive) section, one must also subtract the poorly known DD (Double Diffractive) section [65–69].

The calculation of the weight coefficients $\alpha(\eta)$ in this work was carried out in two stages. First, we simulated the distribution of primary strings in the transverse plane, taking into account the real conditions of pp collision, according to the methodology proposed in [36]. At the second stage, we simulated the process of fusion of primary strings and the formation of string clusters by introducing a finite lattice (grid) in the impact parameter plane.

It is important that, in order to take into account the processes of string imposition and the formation of string clusters, at the first stage we must be able to model not only the total number of primary strings formed at a given initial energy and a given impact parameter pp of the collision, but also their distribution in the transverse plane.

In our approach, each cut pomeron corresponds to the formation of two quark-gluon strings [10]. To take into account string fusion one should know not only the mean number of pomerons in pp collisions at a given impact parameter b, but also the event by event distribution of the number of pomerons around this mean value.

This distribution at a given value of the impact parameter b and $N \geq 1$ was chosen in the following form:

$$\tilde{P}(N, b) = P(N, b)/[1 - P(0, b)], \quad (4.43)$$

where $P(N, b)$ is the poissonian distribution with some parameter $\bar{N}(b)$:

$$P(N, b) = e^{-\bar{N}(b)} \bar{N}(b)^N / N! \quad . \quad (4.44)$$

The difference of our distribution (4.43) from the poissonian one (4.44) is only in excluding of the case $N = 0$: $\tilde{P}(0, b) = 0$, which corresponds to the absence of the non-diffractive scattering.

According to [36], we suppose that in the pp collision at the impact parameter b the string density in transverse plane at a point \vec{s} is proportional to

$$w_{str}(\vec{s}, \vec{b}) \sim \frac{1}{\sigma_{pp}(b)} T(\vec{s} - \vec{b}/2) T(\vec{s} + \vec{b}/2) \quad , \quad (4.45)$$

where the $T(\vec{s})$ is the partonic profile function of proton. We will use for the partonic profile function of nucleon the simplest gaussian distribution:

$$T(s) = \frac{e^{-s^2/r_0^2}}{\pi r_0^2} \quad . \quad (4.46)$$

Substituting (4.46) in (4.45) one gets

$$w_{str}(\vec{s}, \vec{b}) \sim \frac{1}{\sigma_{pp}(b)} e^{-2s^2/r_0^2} e^{-b^2/2r_0^2} \quad . \quad (4.47)$$

Simultaneously in this approach we have $\bar{N}(b) = N_0 e^{-b^2/2r_0^2}$, where the parameter N_0 depends on initial energy.

As has been shown in [36], in the framework of this assumptions the average number of pomerons $\langle N_{pom}(E) \rangle$, the scaled variance of number of pomerons $\omega_{N_{pom}}(E)$, the cross-section of non-diffractive pp interaction σ_{pp} and the probability $P(N)$ to have N cut pomerons in a non-diffractive pp collision has the following form

$$\langle N_{pom}(E) \rangle = \frac{N_0}{E_1(N_0) + \gamma + \ln N_0} \quad , \quad E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad (4.48)$$

$$\omega_{N_{pom}}(E) = 1 + \frac{N_0}{2} - \langle N \rangle_{pom}(E), \quad (4.49)$$

$$\sigma_{pp} = 2\pi r_0^2 [E_1(N_0) + \gamma + \ln N_0], \quad (4.50)$$

$$P(N) = \frac{2\pi r_0^2}{\sigma_{pp} N} \left[1 - e^{-N_0} \sum_{l=0}^{N-1} N_0^l / l! \right]. \quad (4.51)$$

The formula (4.51) obtained in the framework of the approach presented in this section coincides with the well-known results for $P(N)$ obtained in the framework of the quasi-eikonal Regge approach [70; 71] :

$$P(N) = \frac{4\pi\lambda}{\sigma_{pp} C N} \left[1 - e^{-z} \sum_{k=0}^{N-1} z^k / k! \right], \quad (4.52)$$

where

$$z = \frac{2\gamma C}{\lambda} \exp(\Delta\xi), \quad \lambda = R^2 + \alpha'\xi, \quad \xi = \ln(s/s_0). \quad (4.53)$$

Here $s_0 \simeq 1 \text{ GeV}^2$, Δ and α' are the intercept and the slope of the pomeron trajectory. The parameters γ and R characterize the coupling of the pomeron trajectory with the initial hadrons. The quasi-eikonal parameter C is related to the small-mass diffraction dissociation of incoming hadrons.

The coincidence of the formulas (4.51) and (4.52) allows us to fix the parameters N_0 and r_0 used in our approach, since they are uniquely expressed in terms of the known Regge parameters:

$$N_0 = z = \frac{2\gamma C}{\lambda} \exp(\Delta\xi), \quad r_0 = \sqrt{\frac{2\lambda}{C}}, \quad \lambda = R^2 + \alpha'\xi \quad (4.54)$$

In our calculations, when modeling the distribution of strings in the plane of the impact parameter, we used the following values of these parameters:

$$\Delta = 0.2, \quad \alpha' = 0.05 \text{ GeV}^{-2}, \quad (4.55)$$

$$\gamma_{pp} = 1.035 \text{ GeV}^{-2}, \quad R_{pp}^2 = 3.3 \text{ GeV}^{-2}, \quad C = 1.5,$$

which allow one to describe the behavior of the nondiffractive cross section pp scattering at LHC energies [69; 72] (see Fig.4.1). The papers of other authors [69; 72] also confirm the need to increase the Δ parameter to describe data at LHC energies.

At the second stage, we simulated the process of fusion of primary strings and the formation of string clusters by introducing a finite lattice (grid) in the impact parameter plane. In these calculations, we assumed that, according to the string fusion model, the dependence of the average number of particles produced during the hadronization of merged strings in a cell on the number of strings in a fast observation window of width δy has the following form:

$$\langle \mu \rangle_\eta = \mu_0^{(\eta)} \delta y = \mu_0 \sqrt{\eta} \delta y \quad (4.56)$$

where $\mu_0^{(\eta)}$ and $\mu_0^{(1)} \equiv \mu_0$ is the average number of particles produced per unit rapidity from the decay of a string cluster of η strings and single string.

The following numerical value of the string radius was chosen:

$$r_{str} = 0.2 \text{ fm}. \quad (4.57)$$

As in [73] we assume that the number of particles produced from the hadronizations of the strings in i th cell in the rapidity observation window of width δy is distributed over the negative binomial distribution (NBD) with mean value (4.56) and scaled variance:

$$\omega_\mu(\delta y, \eta) = 1 + \delta y \mu_0^{(\eta)} J_{FF}^\eta, \quad (4.58)$$

where

$$J_{FF}^\eta = \frac{1}{(\delta y_F)^2} \int_{\delta y_F} dy_1 \int_{\delta y_F} dy_2 \Lambda_\eta(y_1 - y_2) \quad (4.59)$$

and $\Lambda_\eta(\Delta y)$ — is the two-particle (pair) correlation function, which was chosen in the simplest form

$$\Lambda_\eta(\Delta y) = \Lambda_0^\eta e^{-\frac{|\Delta y|}{y_{corr}^{(\eta)}}}, \quad (4.60)$$

$y_{corr}^{(\eta)}$ — is a characteristic correlation length in the rapidity space.

Since, according to (4.56), the number of charged particles produced per unit of rapidity from the decay of a string cluster is assumed to be proportional to $\sqrt{\eta}$, and correlations take place only between neighboring segments of a string cluster, it is reasonable to assume that the characteristic length of the correlation $y_{corr}^{(\eta)}$ decreases

as η increases as $1/\sqrt{\eta}$. Some additional arguments in favor of this assumption were presented in [74]. Therefore, we assume the following dependence of the parameters of the correlation function of the string cluster on η :

$$y_{corr}^{(\eta)} = \frac{y^{(1)}}{\sqrt{\eta}}, \quad \Lambda_0^{(\eta)} = const. \quad (4.61)$$

Note that the version without string fusion corresponds to a completely different form of these dependences:

$$\tilde{\mu}_0^{(\eta)} = \eta\mu_0^{(1)}, \quad \tilde{y}_{corr}^{(\eta)} = const, \quad \tilde{\Lambda}_0^{(\eta)} = \Lambda_0^{(1)}/\eta. \quad (4.62)$$

The correlation function was chosen in a simplest way (4.60), and in this case integral J_{FF}^η can be calculated:

$$J_{FF}^\eta = \frac{2\Lambda_0^\eta}{(\delta y)^2} y_{corr}^{(\eta)} \left(\delta y - y_{corr}^{(\eta)} \left(1 - e^{-\frac{\delta y}{y_{corr}^{(\eta)}}} \right) \right). \quad (4.63)$$

Let us briefly describe the algorithm for generating pp-collision events under the assumptions described above:

1. value of impact parameter b are generated: b_x and b_y are generated independently with uniform distribution on the interval $(-3R_p, 3R_p)$, $R_p = 0.7$ fm, $b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$;
2. for given energy $\sqrt{s} = E$ pomeron parameters (4.54) are calculated;
3. lattice parameters at a fixed energy are calculated: lattice constant $a = R_{str}\sqrt{\pi}$, lattice size $L = 10\sigma$, number of cells $M = m^2$, $m = [L/a] + 1$, where r_{str} — string radius (4.57), $\sigma = \alpha/2$ — parameter of the gaussian distributed density of the strings (4.47), square brackets $[x]$ mean integer part of x ;
4. average number of the pomerons at a fixed energy $\langle N_{pom}(b) \rangle$ (4.48) are calculated;

5. N_{pom} was generated by Poisson distribution (4.44). If it occurs equal 0, than we go back to 1. Note that we store the number N_{sim}^0 of such simulations with $N_{pom} = 0$, what enables to calculate $\sigma_{statistical}^{ND} = \frac{N_{sim} - N_{sim}^0}{N_{sim}} 36R_p^2$, where N_{sim} is the total number of simulations (see Figure 4.1);
6. number of pomerons N_{pom} in this event are generated, number of strings = 2 * number of pomerons;
7. position \vec{s} of each string are generated, after that number of cell are calculated;
8. number of strings in every cell is calculated;
9. number of particles n on rapidity observation window δy produced from hadronisation of the strings in every cell are generated with NBD: $NB\left(\frac{\bar{n}}{\omega_\mu - 1}, p = \frac{1}{\omega_\mu}\right)$ to provide the desired mean (4.56) and reduced variance (4.58).

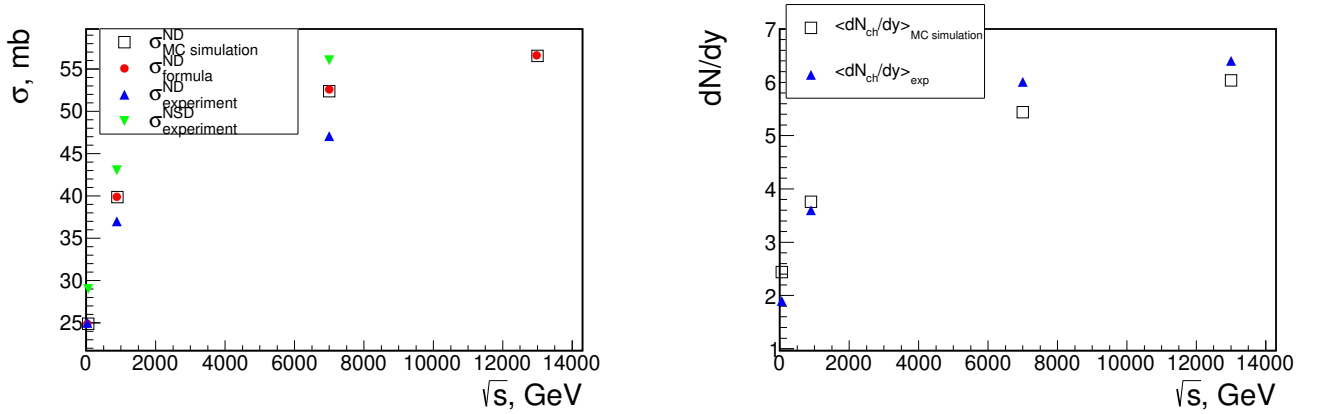


Figure 4.1. The cross-section of non-diffractive pp interaction σ_{pp} and multiplicity $\langle dN_{ch}/dy \rangle$ as a function of energy \sqrt{s} . $\sigma_{statistical}^{ND}$ and $\langle dN_{ch}/dy \rangle_{statistical}$ was calculated from the data generated accordingly to the algorithm described earlier; $\sigma_{formula}^{ND}$ was calculated according (4.50); σ_{exp}^{ND} and $\langle dN_{ch}/dy \rangle_{exp}$ are the experimental results taken from [65–68] .

The value of the parameter μ_0 (the average number of charged particles per unit of rapidity from the decay of a single string) had to be chosen equal to 0.7 in order to correctly describe the experimental multiplicity of charged particles in the central

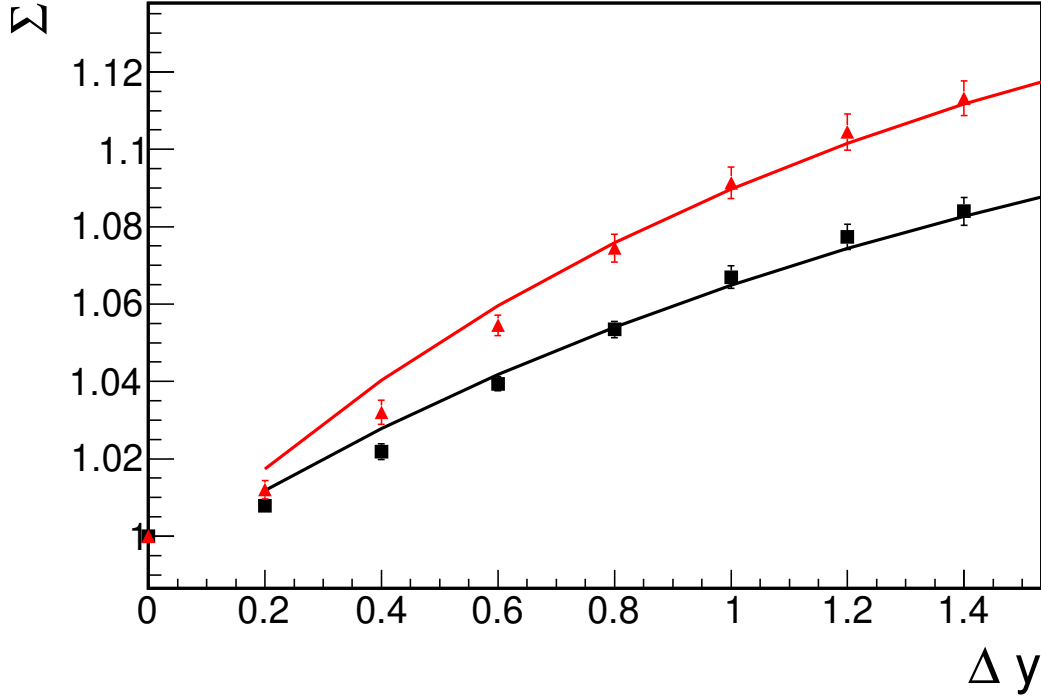


Figure 4.2. Strongly intensive variable $\Sigma(n_F, n_B)$ as a function of the distance in rapidity between the centers of windows Δy , for windows with width $\delta y = 0.2$, for minimum bias pp-collisions for two values of initial energy 0.9 TeV (lower curve) and 7 TeV (upper curve). The dots are the experimental values obtained by the ALICE [75] collaboration by analyzing data on the yields of charged particles with transverse momenta belonging to the interval 0.3-1.5 GeV/c in pp-collisions at the same energies - 0.9 TeV (■) and 7 TeV (▲).

rapidity region (see Fig.4.1). To fix the two remaining free model parameters $\Lambda_0^{(1)}$ and $y_{corr}^{(1)}$ characterizing the single string correlation function (4.60), we calculated the dependence of the variable $\Sigma(n_F, n_B)$ on the size of the gap Δy between observation windows of small width in rapidity ($\delta y = 0.2$) for pp-collisions without selection by collision centrality (min.bias) at two initial energies, 0.9 and 7 TeV, and compared the calculation results with the preliminary experimental data of the ALICE collaboration for $\Sigma(n_F, n_B)$ [75], obtained by analyzing the formation of charged particles in soft region of the spectrum with transverse momenta in the range 0.3 - 1.5 GeV/c (Fig. 4.2).

This comparison made it possible to extract the values of these two remaining

free parameters characterizing the single string correlation function (4.60). As a result, for three parameters for one string in the dependences (4.56) and (4.61), characterizing clusters with different numbers of merged strings, we found:

$$\mu_0 = 0.7, y_{corr}^{(1)} = 2.7, \Lambda_0^{(1)} = 0.8. \quad (4.64)$$

4.5. Comparison with the results of the ALICE experiment at the Large Hadron Collider

Σ in minbias pp collisions

Using the MC simulation of pp-collisions as described in the previous section, we sequentially generate string distributions in the transverse plane, take into account the formation of string clusters, and calculate the weighting coefficients $\alpha(\eta)$ as the average fraction of particles produced as a result of cluster decays, consisting of η strings. We then compute $\Sigma(n_F, n_B)$ using the (4.31) formula.

With the parameters of string clusters fixed in this way, we calculated the variable $\Sigma(n_F, n_B)$ for the case of min-bias pp collisions at the initial energy 13 TeV and compared the model results with the ALICE experimental data [75]. Note that, since the analysis of these data at 13 TeV in the ALICE experiment was carried out for a wider range of transverse momenta 0.2–2 GeV/ c , which is currently used in the ALICE collaboration when analyzing the production of charged particles in the soft region of the spectra, then to take into account increase in the total multiplicity of particles, the coefficient μ_0 was increased according to [76] by a factor of 1.28 to the value $\mu_0 = 0,9$. At the same time, the values of all other parameters of the model were saved.

In Figure 4.3 we see that this set of parameters also successfully describes the dependence of the observable $\Sigma(n_F, n_B)$ on the rapidity distance between the centers of observation windows, Δy , at initial energy 13 TeV. The slight overestimation of $\Sigma(n_F, n_B)$ in Figures 4.2 and 4.3 at small values of Δy , can be explained by using

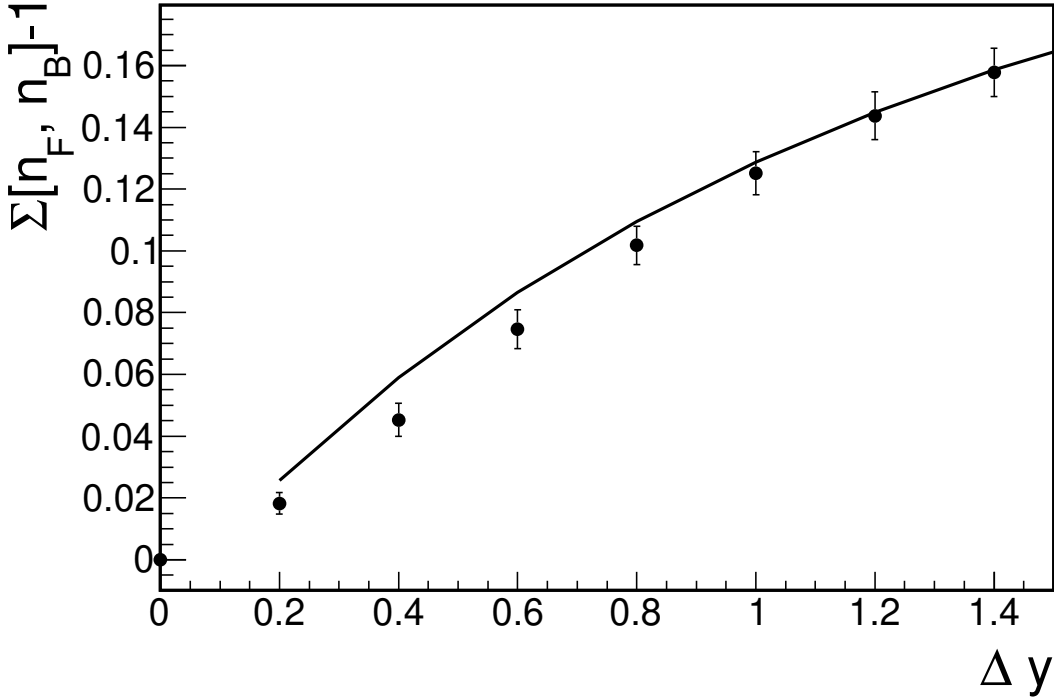


Figure 4.3. The strongly intense variable $\Sigma(n_F, n_B) - 1$ as a function of the distance in rapidity between the centers of observation windows Δy , for windows of width $\delta y = 0, 2$, for minimum bias pp collisions at initial energy 13 TeV (the curve). Points — experimental values obtained by the ALICE collaboration [75] by the analysis of data on the yields of charged particles with transverse momenta belonging to the interval 0.2–2 GeV/c in pp collisions at the same energy — 13 TeV.

a simplified (exponential) approximation for the two-particle correlation function of a string cluster (4.60). It was shown in [73] that the exponential form of approximation for the rapidity dependence of the two-particle correlation function of the string leads to a slight overestimation of the FB correlation coefficient in the region of the forward correlation peak at small values of Δy .

From Fig.4.2 and 4.3 we see that the pattern of the dependence of the variable $\Sigma(n_F, n_B)$ on the rapidity distance between observation windows, Δy , in general, corresponds to that predicted by our model (see the discussion after the (4.42) formula). There is an increase in $\Sigma(n_F, n_B)$ from values of order 1 at small values δy with some tendency to saturate at large values of Δy (see also fig.4.4 below).

As regards the dependence on the initial energy, comparing the dependences

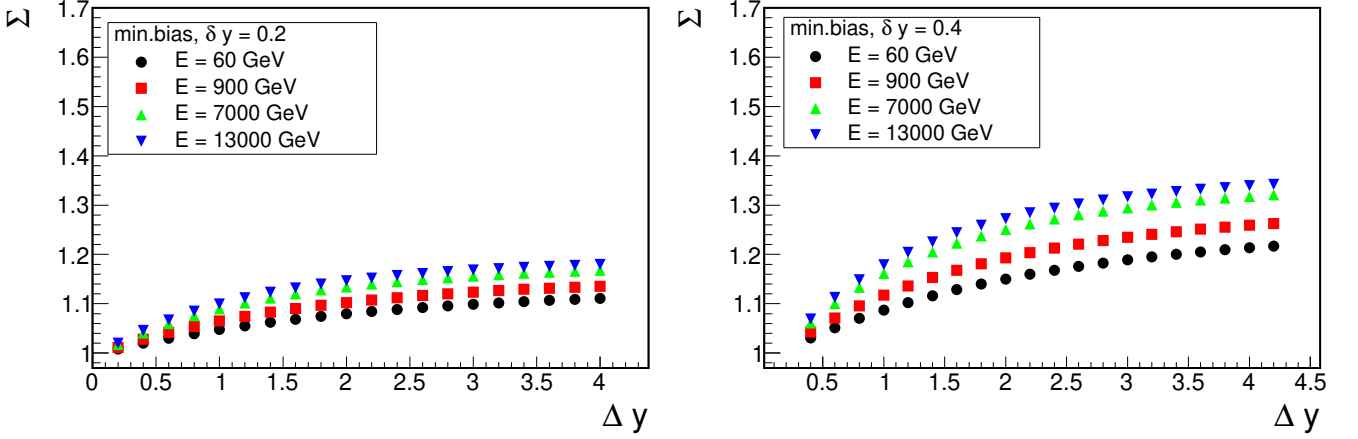


Figure 4.4. Results for the strongly intensive variable $\Sigma(n_F, n_B)$ calculated with help of (4.31) as a function of the rapidity distance between the observation windows Δy for min.bias pp interactions at energies 60 - 13000 GeV for rapidity width of the observation windows $\delta y = 0.2$ and $\delta y = 0.4$.

at initial energies of 0.9, 7 and 13 TeV presented in Figures 4.2 and 4.3, we see that in pp collisions at LHC energies, string fusion effects have a significant effect on the behavior of the strongly intense observable $\Sigma(n_F, n_B)$, and the growth of this variable with initial energy is explained by the increasing contribution from the formation of string clusters with new properties, consisting of an increasing number of merged strings.

With these string parameters, the calculations of the highly intense variable Σ were also carried out in a wider range of parameters, in which experimental data are not yet available. Predictions are made of its behavior for min.bias pp collisions up to the distance between observation windows $\Delta y = 4$ units of rapidity at various energies and for observation windows of various widths $\delta y = 0.2$ and 0.4 . The results of these calculations are shown in Fig.4.4. In this figure, we also see the characteristic properties of the Σ variable, which we noted after the (4.42) formula. The tendency to saturation with increasing distance between windows Δy is more clearly seen, as well as a faster increase in Σ and reaching a higher saturation level for a wider observation window $\delta y = 0.4$ than 0.2 .

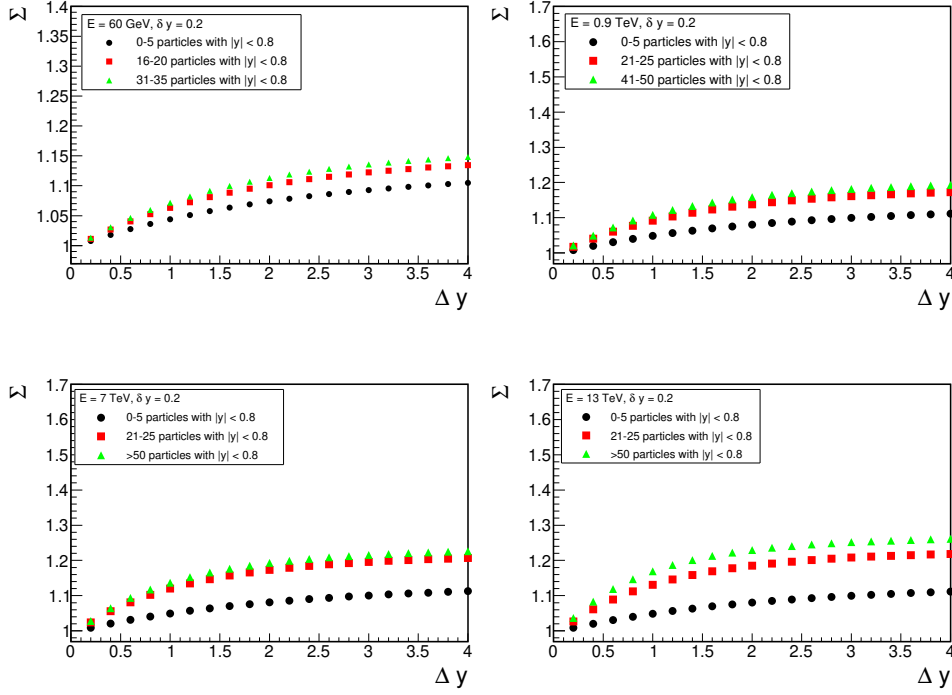


Figure 4.5. Results for the strongly intensive variable $\Sigma(n_F, n_B)$ calculated with help of (4.31) as a function of the rapidity distance between the observation windows Δy for different centralities of pp interactions at energies 60 - 13000 GeV for rapidity width of the observation windows $\delta y = 0.2$.

Dependence of the Observable Σ on the Centrality of the pp Collision

Since in the case of real pp collisions the impact parameter b is not known, the experimental determination of the degree of centrality of a given pp collision can be carried out only by indirect indications. Therefore, the division of the array of all min-bias pp events into the so-called centrality classes depends on the applied experimental procedure.

First, in order to separate events into centrality classes, in our MC simulations, we used the procedure for selecting events with a certain number of particles in some fixed interval of rapidity. This allowed us to investigate how the dependence of the variable Σ on the distance between observation windows Δy changes for pp collisions of different centrality. The calculations were also carried out at various energies and for observation windows of various widths $\delta y = 0.2$ and 0.4 . The results of these calculations are shown in Fig.4.5 and 4.6.

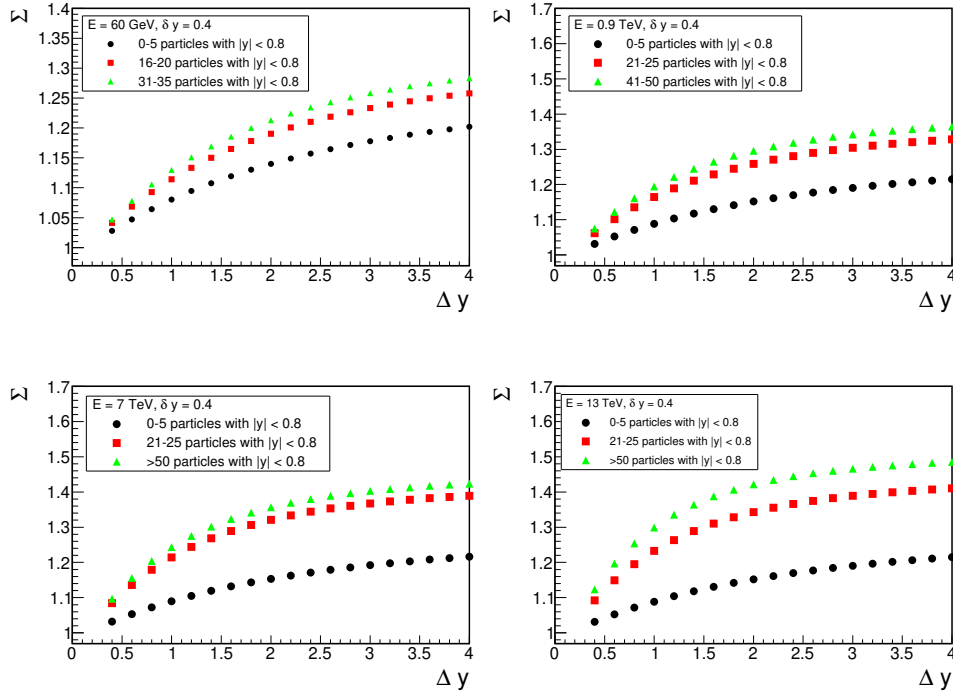


Figure 4.6. The same as in fig.4.5 but for rapidity width of the observation windows $\delta y = 0.4$.

It can be seen from these figures that for more central events the values of Σ turn out to be higher in all cases. Physically, this is explained by an increase in the proportion of merged strings for more central collisions.

At the next stage, for a more accurate comparison of the calculated theoretical dependence of the variable Σ on the centrality pp of the collision with the available experimental data from ALICE at the LHC, we tried to reproduce as accurately as possible in our MC calculations the procedure for dividing the array of events into centrality classes used in the ALICE experiment.

In the ALICE experiment at the LHC, to determine the degree of centrality of a given pp -collision, the signal from the V0 detector is used in arbitrary units [77; 78]. This detector consists of a pair of scintillation counters, V0A and V0C, located on either side of the interaction point. Events are classified by the total accumulated energy in the V0 detector, the so-called “amplitude V0M”, which is proportional to the total number of charged particles passing through the V0A and V0C detectors. That is, the centrality classes in pp collisions are determined by the multiplicity in

the detectors V0A and V0C and are often called multiplicity classes. The multiplicity classes are defined as percentile intervals of the experimental distribution of the V0M amplitude.

To imitate this procedure in our MC model calculations we first carried out a preliminary MC simulation of 1,000,000 min-bias pp events, determining the multiplicity N in the rapidity interval $\delta y_{V_0} = 1$, corresponding to the total acceptance of V0A and V0C detectors. Then to generate the continuous signal, V0M amplitude, corresponding to this multiplicity N , we use a detector response function:

$$P_N(V) = C\theta(V) \exp\left(-\frac{(V - \gamma N)^2}{2\beta\gamma N}\right) \quad (4.65)$$

which is typical for detectors of this kind [79]. Here $P_N(V)$ gives the probability density of registering a signal V from the detector V0 when N charged particles hit it. The θ -function indicates that the signal V is always positive $V > 0$. C is the normalization constant. Note that in the limit $N \gg 1$ we have

$$\langle N \rangle \longrightarrow \gamma N, \quad \omega_N \equiv \frac{D_N}{\langle N \rangle} \longrightarrow \beta. \quad (4.66)$$

It can be seen from formulas (4.66) that the average value of the signal, $\langle V \rangle$, is proportional to the number of particles N that hit the detector, and the parameter β characterizes the magnitude of the signal smear around this average value.

Using the distribution (4.65), we generate the V0M = V0A + V0C detector response, V , for the number of charged particles, N , hitting it, for each event. Then using this value of the signal, V , attributed to each event, we can split all events into centrality classes. Note that in this procedure the absolute value of the signal does not play a role, but only the relative value of V for different events is important. Experimentally, in ALICE, the signal from the V0 detector is presented in arbitrary units. Thus, in our MC simulation, without loss of generality, we can set the parameter $\gamma = 1$.

The comparison for $\Sigma(n_F, n_B)$ as a function of the rapidity distance between the centers of the observation windows Δy for different pp-collision centrality classes

at an initial energy of 13 TeV is shown in Fig.4.7, 4.8, 4.9 for three values of the β parameter characterizing the detector accuracy V0. It can be seen from the graphs that our model with the formation of string clusters also makes it possible to describe the experimental behavior of the highly intense variable $\Sigma(n_F, n_B)$ for different centrality classes of pp-collisions for the same values of the parameters characterizing string clusters. Thus, we see that the ALICE experimental data confirm higher values of $\Sigma(n_F, n_B)$ for more central events, which in our model is explained by more intense string fusion and an increase in the proportion of string clusters with a large number fused strings. Recall that, according to the formula (4.31), in the absence of fusion processes and the presence of only single strings, the value of $\Sigma(n_F, n_B)$ ceases to depend on the centrality pp of the collision and on all Fig.4.7-4.9 we would have only one curve (there would be no splitting of curves by centrality).

At the same time, a comparison of the plot in Figure 4.7 with the upper plot in Figure 4.8 shows that the division of events into centrality classes, using the value of the parameter $\beta = 1$ and $\beta = 0,5$, stays practically unchanged. The calculated curves for $\Sigma(n_F, n_B)$ in practically coincides. Whereas using the value of the parameter $\beta = 3$ to characterize the detector V0 when splitting the array of events into centrality classes leads to better agreement with the experimental data.

Thus we see that the agreement between theory and experiment can be improved if we take into account the imperfection of the detector V0 used to split the array of events into centrality classes.

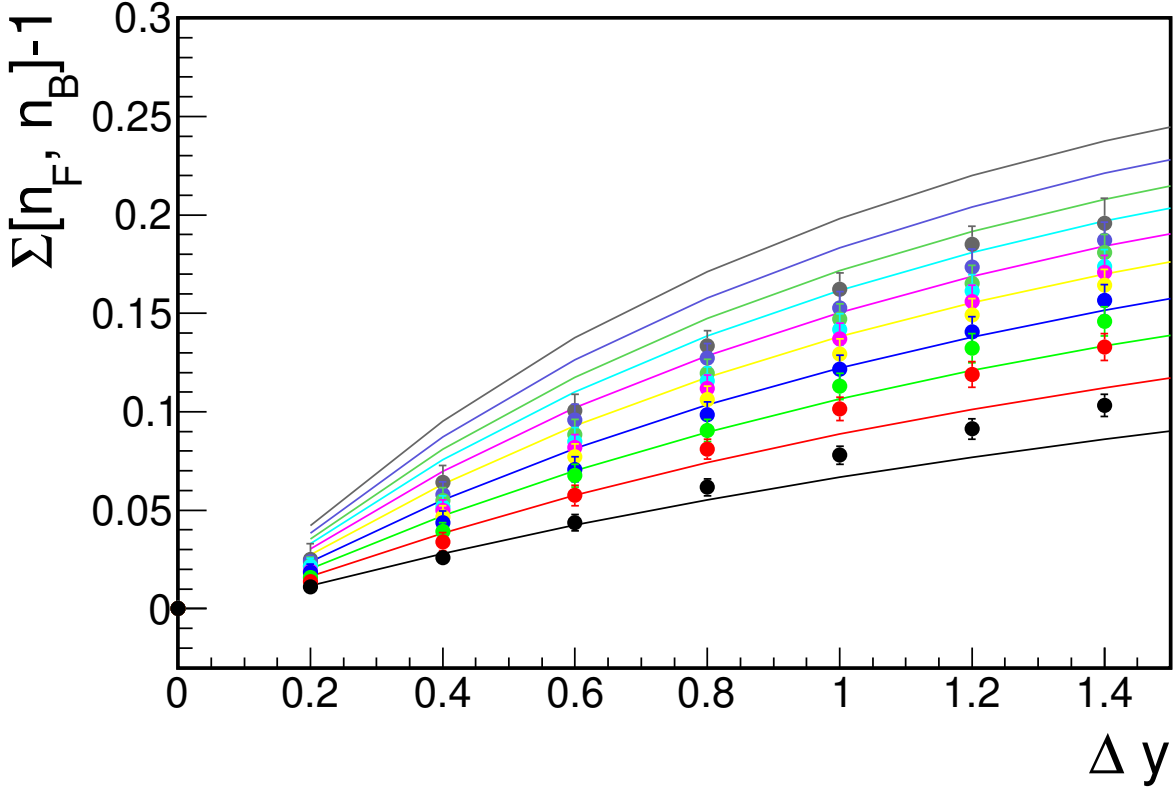


Figure 4.7. The strongly intensive variable $\Sigma(n_F, n_B) - 1$ for different pp-collision centrality classes at initial energy 13 TeV, as a function of the distance in rapidity between the centers of the observation windows Δy , calculated with the observation windows of $\delta y = 0, 2$ width. Points — experimental values obtained by the ALICE collaboration [75] by the analysis of data on the yields of charged particles with transverse momenta in the range 0.2–2 GeV/ c . Curves — the results of our calculations in the model with the formation of string clusters, with the value of the parameter $\beta = 1$, characterizing the accuracy of the detector V0. The centrality classes defined as follows (top down): 0–1%, 1–5%, 5–10%, 10–15%, 15–20%, 20–30%, 30–40%, 40–50%, 50–70%, 70–100%.

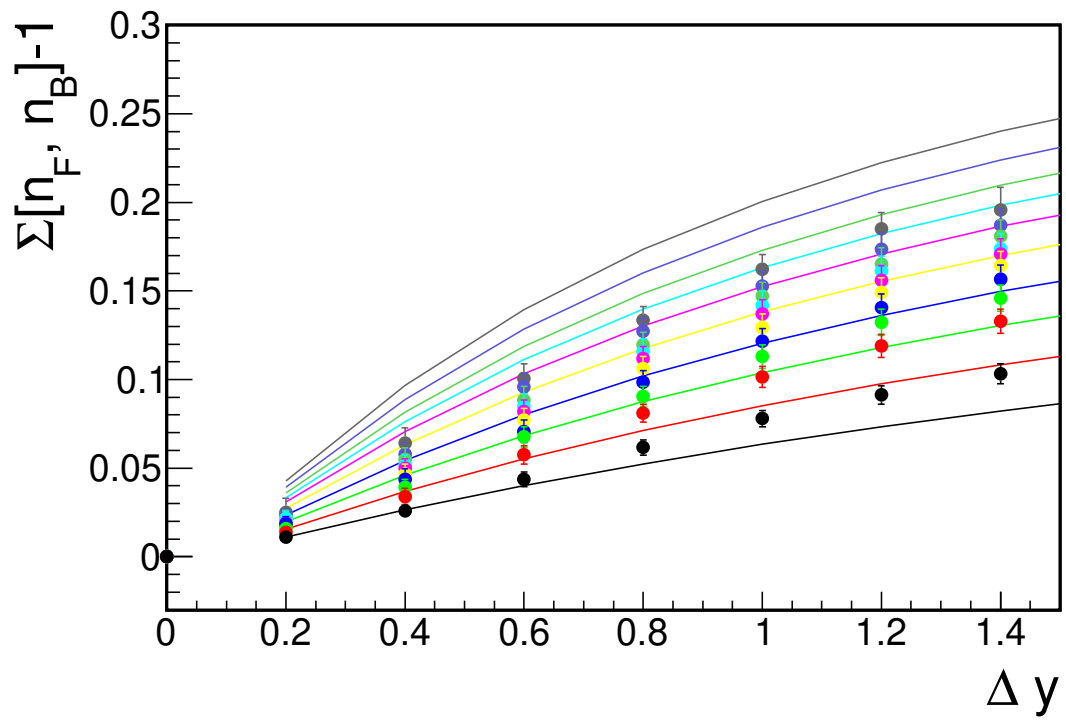


Figure 4.8. The same as in Figure 4.7, but for $\beta = 0.5$.

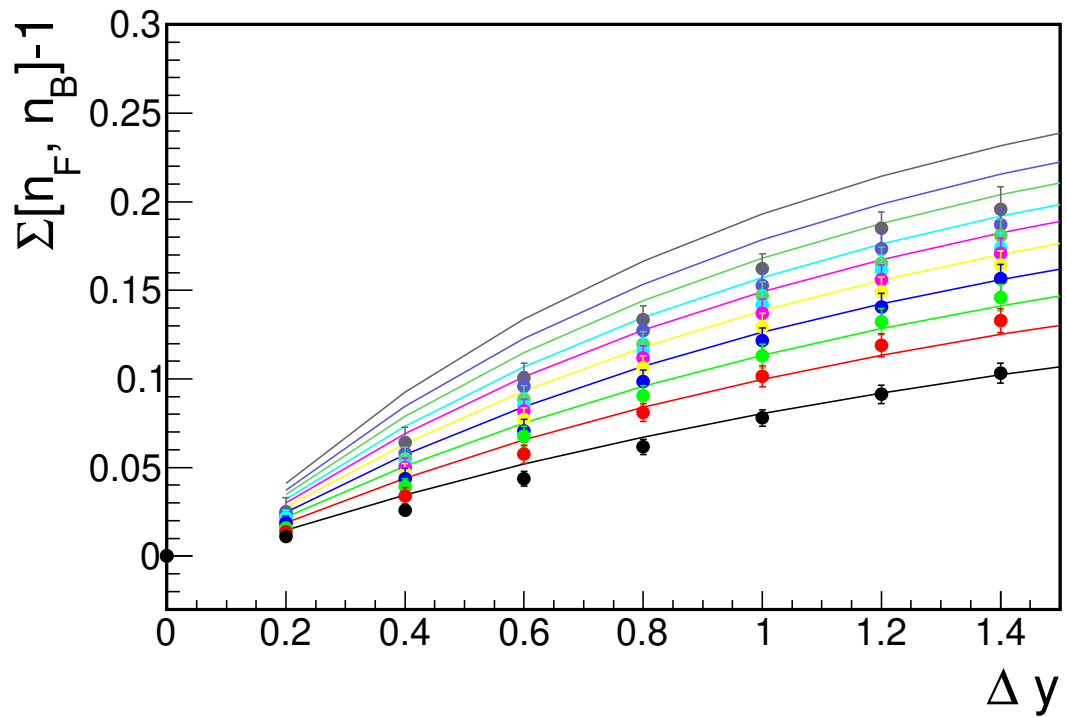


Figure 4.9. The same as in Figure 4.7, but for $\beta = 3$.

Conclusion

The thesis presents a theoretical study of the correlations between the quantities (multiplicity and average transverse momentum of particles) observed in spaced rapidity intervals in the processes of multiple particle production in the interaction of high-energy hadrons, as well as a theoretical study of the strongly intensive variable $\Sigma(n_F, n_B)$, which characterizes the correlations between the number of particles in two separated rapidity intervals.

Since the QCD perturbation theory is not applicable to describe soft processes, the study was carried out within the framework of the string model, which has a qualitative justification in the framework of QCD and assumes the formation at the very initial stage of hadron interaction of a certain number of so-called quark-gluon (colored) strings, understood as color flux tubes. The effects of string fusion and the formation of string clusters were taken into account by introducing a finite lattice (grid) in the plane transverse to the collision axis.

The following results were obtained:

1. An analytical expression is obtained for the asymptotics of the correlation coefficient between the transverse momentum and multiplicity at high string density for a realistic case of inhomogeneous distribution of strings in the impact parameter plane by calculating the derivative of the regression function. It is shown that the found expression goes into the expression obtained earlier by another method using an alternative definition of the correlation coefficient.
2. At a high density of strings, two independent analytical methods are used to find an explicit form of the asymptotics of the correlation coefficient between the average transverse momenta of particles in two observation windows for an inhomogeneous distribution of strings in the transverse plane. An MC algorithm has been developed that makes it possible to calculate this correlation coefficient for an arbitrary string density. It is shown that the results of MC

calculations at a high string density come to the asymptotics calculated analytically, which confirms the reliability of the results obtained. It is shown that for the case of a uniform distribution of strings in the transverse plane, the expression found for the asymptotics goes over into the one obtained earlier, and the dependence on one of the model parameters disappears.

3. The influence of the condition of fixing the total number of initial strings, which corresponds to the selection by centrality classes in the analysis of experimental data, on the magnitude of the long-range correlation coefficients between multiplicities and between transverse momentum and multiplicity is analyzed. Analytic expressions are obtained for the asymptotics of these coefficients at a high string density for a realistic case with a non-uniform distribution of strings in the impact parameter plane and taking into account the fixation of their total number. It is shown that, taking this condition into account, the decrease in both correlation coefficients with increasing string density occurs faster for their average uniform distribution in the transverse plane than for an inhomogeneous one. It has been verified that correlations for a fixed number of strings (for a fixed multiplicity class) happen only when the effects of string merging are taken into account.
4. It is shown that the correlation coefficient between transverse momentum and multiplicity can become negative under certain conditions. In the case where the total number of strings is not fixed, this requires a strong inhomogeneity in the distribution of strings in the transverse plane. For the case where the total number of strings is fixed, this correlation coefficient is negative even for a uniform distribution, retaining a negative value even for small inhomogeneities in the distribution of strings. The correlation coefficient between the multiplicities always remains positive.
5. In the framework of the same model with string merging on a lattice, the

strongly intensive variable $\Sigma(n_F, n_B)$, which characterizes the correlations between the number of particles formed in two separated rapidity windows is studied. The purpose of using this variable is to weaken the effect on the result of the so-called volume fluctuations associated, for example, with the fluctuation from event to event of the total number of strings formed. It is shown that when string merging effects leading to the formation of string clusters are taken into account, this variable turns out to be equal to the weighted average of its values for different string clusters, which depend only on the parameters of these clusters. While the weight coefficients, which are the fractions of particles born from clusters with different numbers of strings, turn out to depend on the collision conditions - its energy and degree of centrality.

6. For the case of pp collisions at high energies, a Monte Carlo algorithm has been developed that allows, by simulating a realistic distribution of strings in the impact parameter plane, to calculate these weight coefficients for various energies and centrality pp of the collision. Using them, the dependence of the variable $\Sigma(n_F, n_B)$ on the rapidity distance between observation windows, their width, energy, and collision centrality pp is calculated.
7. The results of $\Sigma(n_F, n_B)$ calculations are compared with the experimental data of the ALICE collaboration at the LHC. It has been established that the behavior of this variable observed in the ALICE experiment can be explained only in the presence of sources of different types, the role of which in our model is played by single strings and clusters formed by the merging of several strings. It is shown that a comparison of the results of our model with the preliminary experimental ALICE data obtained in min.bias (without centrality selection) pp collisions at energies of 0.9-13 TeV and for different centrality classes at an energy of 13 TeV allows one to extract information about the model parameters, characterizing clusters with different numbers of merged strings. In general, we can conclude that the experimentally observed increase

in the variable $\Sigma(n_F, n_B)$ with an increase in the initial energy and centrality pp of the collision at LHC energies can only be explained by an increase in the contribution from the formation of string clusters consisting of an increasing number of merged strings.

Bibliography

1. Glasma flux tubes and the near side ridge phenomenon at RHIC / A. Dumitru [et al.] // Nuclear Physics A. — 2008. — Vol. 810, no. 1. — P. 91–108. — ISSN 0375-9474. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2008.06.012>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947408005927>.
2. *Kim V. T.* QCD Asymptotics at Collider Energies // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2019. — Vol. 16, no. 5. — P. 414–420. — DOI: [10.1134/S1547477119050169](https://doi.org/10.1134/S1547477119050169).
3. Jets in small-pT hadronic collisions, universality of quark fragmentation, and rising rapidity plateaus / A. Capella [et al.] // Physics Letters B. — 1979. — Vol. 81, no. 1. — P. 68–74. — ISSN 0370-2693. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(79\)90718-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(79)90718-4). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269379907184>.
4. *Kaidalov A.* The quark-gluon structure of the pomeron and the rise of inclusive spectra at high energies // Physics Letters B. — 1982. — Vol. 116, no. 6. — P. 459–463. — ISSN 0370-2693. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90168-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90168-X). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026938290168X>.
5. *Casher A., Kogut J. B., Susskind L.* Vacuum polarization and the absence of free quarks // Phys. Rev. D. — 1974. — Vol. 10. — P. 732–745. — DOI: [10.1103/PhysRevD.10.732](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.10.732).
6. *Bissey F., Signal A. I., Leinweber D. B.* Comparison of gluon flux-tube distributions for quark-diquark and quark-antiquark hadrons // Phys. Rev. D. — 2009. — Dec. — Vol. 80, issue 11. — P. 114506. — DOI: [10.1103/PhysRevD.80.114506](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.114506). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.114506>.

7. Flux tubes in the QCD vacuum / P. Cea [et al.] // Phys. Rev. D. — 2017. — June. — Vol. 95, issue 11. — P. 114511. — DOI: [10.1103/PhysRevD.95.114511](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.114511). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.114511>.
8. *Hooft G.* A planar diagram theory for strong interactions // Nuclear Physics B. — 1974. — Vol. 72, no. 3. — P. 461–473. — ISSN 0550-3213. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90154-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90154-0). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321374901540>.
9. *Veneziano G.* Some aspects of a unified approach to gauge, dual and Gribov theories // Nuclear Physics B. — 1976. — Vol. 117, no. 2. — P. 519–545. — ISSN 0550-3213. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(76\)90412-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(76)90412-0). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321376904120>.
10. Dual parton model / A. Capella [et al.] // Physics Reports. — 1994. — Vol. 236, no. 4. — P. 225–329. — ISSN 0370-1573. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(94\)90064-7](https://doi.org/10.1016/0370-1573(94)90064-7). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157394900647>.
11. *Werner K.* Strings, pomerons and the VENUS model of hadronic interactions at ultrarelativistic energies // Physics Reports. — 1993. — Vol. 232, no. 2. — P. 87–299. — ISSN 0370-1573. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(93\)90078-R](https://doi.org/10.1016/0370-1573(93)90078-R). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739390078R>.
12. *Gurvich E.* The quark-antiquark pair production mechanism in a quark jet // Physics Letters B. — 1979. — Vol. 87, no. 4. — P. 386–388. — ISSN 0370-2693. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(79\)90560-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(79)90560-4). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269379905604>.

13. *Casher A., Neuberger H., Nussinov S.* Chromoelectric-flux-tube model of particle production // *Phys. Rev. D.* — 1979. — July. — Vol. 20, issue 1. — P. 179–188. — DOI: [10.1103/PhysRevD.20.179](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.20.179). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.20.179>.
14. *Gyulassy M., Iwazaki A.* Quark and gluon pair production in SU(N) covariant constant fields // *Physics Letters B.* — 1985. — Vol. 165, no. 1. — P. 157–161. — ISSN 0370-2693. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(85\)90711-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(85)90711-7). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269385907117>.
15. *Bialas A.* Fluctuations of the string tension and transverse mass distribution // *Physics Letters B.* — 1999. — Vol. 466, no. 2. — P. 301–304. — ISSN 0370-2693. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(99\)01159-4](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(99)01159-4). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269399011594>.
16. *Schwinger J.* On Gauge Invariance and Vacuum Polarization // *Phys. Rev.* — 1951. — June. — Vol. 82, issue 5. — P. 664–679. — DOI: [10.1103/PhysRev.82.664](https://doi.org/10.1103/PhysRev.82.664). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.82.664>.
17. *Nikishov A. I.* Barrier scattering in field theory removal of Klein paradox // *Nuclear Physics B.* — 1970. — Jan. — Vol. 21, no. 2. — P. 346–358. — DOI: [10.1016/0550-3213\(70\)90527-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(70)90527-4).
18. *Cohen T. D., McGady D. A.* Schwinger mechanism revisited // *Phys. Rev. D.* — 2008. — Aug. — Vol. 78, issue 3. — P. 036008. — DOI: [10.1103/PhysRevD.78.036008](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.036008). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.036008>.
19. *Artru X.* Classical string phenomenology. How strings work // *Physics Reports.* — 1983. — Vol. 97, no. 2. — P. 147–171. — ISSN 0370-1573. — DOI:

- [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(83\)90081-9](https://doi.org/10.1016/0370-1573(83)90081-9). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157383900819>.
20. *S. Ferreres-Solé T. S.* The space–time structure of hadronization in the Lund model. // Eur. Phys. J. C. — 2018. — Vol. 78. — DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6459-8>.
 21. *Biro T. S., Nielsen H. B., Knoll J.* Color Rope Model for Extreme Relativistic Heavy Ion Collisions // Nucl. Phys. B. — 1984. — Vol. 245. — P. 449–468. — DOI: [10.1016/0550-3213\(84\)90441-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90441-3).
 22. *Bialas A., Czyz W.* Conversion of Color Field Into $Q\bar{Q}$ Matter in the Central Region of High-energy Heavy Ion Collisions // Nucl. Phys. B. — 1986. — Vol. 267. — P. 242–252. — DOI: [10.1016/0550-3213\(86\)90153-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(86)90153-7).
 23. *Braun M. A., Pajares C.* Particle production in nuclear collisions and string interactions // Phys. Lett. B. — 1992. — Vol. 287. — P. 154–158. — DOI: [10.1016/0370-2693\(92\)91892-D](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)91892-D).
 24. *Braun M., Pajares C.* A Probabilistic model of interacting strings // Nucl. Phys. B. — 1993. — Vol. 390. — P. 542–558. — DOI: [10.1016/0550-3213\(93\)90467-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90467-4).
 25. *Amelin N. S., Braun M. A., Pajares C.* Multiple production in the Monte Carlo string fusion model // Phys. Lett. B. — 1993. — Vol. 306. — P. 312–318. — DOI: [10.1016/0370-2693\(93\)90085-V](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)90085-V).
 26. Strangeness enhancement and string fusion in nucleus-nucleus collisions / N. Armesto [et al.] // Phys. Lett. B. — 1995. — Vol. 344. — P. 301–307. — DOI: [10.1016/0370-2693\(94\)01511-A](https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)01511-A).
 27. *Ferreiro E. G., Pajares C.* Strangeness enhancement in the string fusion model code // J. Phys. G / ed. by A. D. Panagiotou. — 1997. — Vol. 23. — P. 1961–1968. — DOI: [10.1088/0954-3899/23/12/021](https://doi.org/10.1088/0954-3899/23/12/021). — arXiv: [hep-ph/9705259](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9705259).

28. Effects of Overlapping Strings in pp Collisions / C. Bierlich [et al.] // JHEP. — 2015. — Vol. 03. — P. 148. — DOI: 10.1007/JHEP03(2015)148. — arXiv: 1412.6259 [hep-ph].
29. Enhanced production of multi-strange hadrons in high-multiplicity proton-proton collisions / J. Adam [et al.] // Nature Phys. — 2017. — Vol. 13. — P. 535–539. — DOI: 10.1038/nphys4111. — arXiv: 1606.07424 [nucl-ex].
30. *Kovalenko V. N., Puchkov A. M., Feofilov G. A.* Production of strange particles in a multi-pomeron exchange model // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. — 2016. — Vol. 80, no. 8. — P. 966–969. — DOI: 10.3103/S106287381608027X.
31. *Armesto N., Derkach D. A., Feofilov G. A.* p(t)-multiplicity correlations in a multi-Pomeron-exchange model with string collective effects // Phys. Atom. Nucl. — 2008. — Vol. 71. — P. 2087–2095. — DOI: 10.1134/S1063778808120090.
32. Multipomeron Model with Collective Effects for High-Energy Hadron Collisions / V. Kovalenko [et al.] // Universe. — 2022. — Vol. 8, no. 4. — P. 246. — DOI: 10.3390/universe8040246.
33. *Braun M. A., Pajares C.* Implications of percolation of color strings on multiplicities, correlations and the transverse momentum // Eur. Phys. J. C. — 2000. — Vol. 16. — P. 349–359. — DOI: 10.1007/s100520050027. — arXiv: hep-ph/9907332.
34. *Braun M. A., Del Moral F., Pajares C.* Percolation of strings and the first RHIC data on multiplicity and transverse momentum distributions // Phys. Rev. C. — 2002. — Vol. 65. — P. 024907. — DOI: 10.1103/PhysRevC.65.024907. — arXiv: hep-ph/0105263.
35. *Vechernin V. V., Kolevatov R. S.* Long-range correlations between transverse momenta of charged particles produced in relativistic nucleus-nucleus collisions // Phys. Atom. Nucl. — 2007. — Vol. 70. — P. 1809–1818. — DOI: 10.1134/S106377880710016X.

36. *Vechernin V., Lakomov I.* The dependence of the number of pomerons on the impact parameter and the long-range rapidity correlations in pp collisions // PoS. — 2012. — Vol. Baldin-ISHEPP–XXI. — P. 072. — DOI: 10.22323/1.173.0072. — arXiv: 1212.2667 [nucl-th].
37. *Vechernin V. V., Kolevatov R. S.* Simple cellular model of long range multiplicity and $p(t)$ correlations in high-energy nuclear collisions. — 2003. — Apr. — arXiv: hep-ph/0304295.
38. *Vechernin V. V., Kolevatov R. S.* Cellular approach to long range $p(t)$ and multiplicity correlations in the string fusion model. — 2003. — May. — arXiv: hep-ph/0305136.
39. Correlations between multiplicities and average transverse momentum in the percolating color strings approach / M. A. Braun [et al.] // Eur. Phys. J. C. — 2004. — Vol. 32. — P. 535–546. — DOI: 10.1140/epjc/s2003-01443-6. — arXiv: hep-ph/0307056.
40. *Braun M. A., Pajares C.* Elliptic flow from color strings // Eur. Phys. J. C. — 2011. — Vol. 71. — P. 1558. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-011-1558-9. — arXiv: 1008.0245 [hep-ph].
41. *Kovalenko V.* Modelling of exclusive parton distributions and long-range rapidity correlations for pp collisions at the LHC energy // Phys. Atom. Nucl. — 2013. — Vol. 76. — P. 1189–1195. — DOI: 10.1134/S1063778813100098. — arXiv: 1211.6209 [hep-ph].
42. ALICE: Physics Performance Report / C. W. Fabjan [et al.] // J. Phys. G / ed. by B. Alessandro [et al.]. — 2006. — Vol. 32. — P. 1295–2040. — DOI: 10.1088/0954-3899/32/10/001.
43. *Vechernin V. V.* Asymptotic behavior of the correlation coefficients of transverse momenta in the model with string fusion // Theor. Math. Phys. — 2017. — Vol. 190, no. 2. — P. 251–267. — DOI: 10.1134/S0040577917020076.

44. *Vechernin V. V.* Correlation between transverse momenta in the string fusion model // *Theor. Math. Phys.* — 2015. — Vol. 184, no. 3. — P. 1271–1280. — DOI: 10.1007/s11232-015-0334-7.
45. *Vechernin V. V., Kolevatov R. S.* On multiplicity and transverse-momentum correlations in collisions of ultrarelativistic ions // *Phys. Atom. Nucl.* — 2007. — Vol. 70. — P. 1797–1808. — DOI: 10.1134/S1063778807100158.
46. *Braun M. A., Pajares C., Vechernin V. V.* Anisotropic flows from colour strings: Monte-Carlo simulations // *Nucl. Phys. A.* — 2013. — Vol. 906. — P. 14–27. — DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2013.02.200. — arXiv: 1204.5829 [hep-ph].
47. *Braun M. A., Pajares C., Vechernin V. V.* Ridge from Strings // *Eur. Phys. J. A.* — 2015. — Vol. 51, no. 4. — P. 44. — DOI: 10.1140/epja/i2015-15044-9. — arXiv: 1407.4590 [hep-ph].
48. *Levin E., Rezaeian A. H.* The Ridge from the BFKL evolution and beyond // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Vol. 84. — P. 034031. — DOI: 10.1103/PhysRevD.84.034031. — arXiv: 1105.3275 [hep-ph].
49. *Kovner A., Lublinsky M.* Angular Correlations in Gluon Production at High Energy // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Vol. 83. — P. 034017. — DOI: 10.1103/PhysRevD.83.034017. — arXiv: 1012.3398 [hep-ph].
50. *N. S. Amelin, N. Armesto, M. A. Braun, E. G. Ferreira, and C. Pajares.* Long and Short Range Correlations: A Signature of String Fusion // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Nov. — Vol. 73, issue 21. — P. 2813–2816. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.73.2813. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.73.2813>.
51. *Capella A., Krzywicki A.* Unitarity corrections to short-range order: Long-range rapidity correlations // *Phys. Rev. D.* — 1978. — Dec. — Vol. 18, issue 11. —

- P. 4120–4133. — DOI: 10.1103/PhysRevD.18.4120. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.18.4120>.
52. *Vechernin V.* Long-range rapidity correlations between mean transverse momenta in the model with string fusion // EPJ Web Conf. / ed. by V. A. Andrianov [et al.]. — 2016. — Vol. 125. — P. 04022. — DOI: 10.1051/epjconf/201612504022.
53. ALICE: Physics Performance Report / C. W. Fabjan [et al.] // J. Phys. G / ed. by B. Alessandro [et al.]. — 2006. — Vol. 32. — P. 1295–2040. — DOI: 10.1088/0954-3899/32/10/001.
54. Forward-backward multiplicity correlations in pp collisions at $\sqrt{s} = 0.9, 2.76$ and 7 TeV / J. Adam [et al.] // JHEP. — 2015. — Vol. 05. — P. 097. — DOI: 10.1007/JHEP05(2015)097. — arXiv: 1502.00230 [nucl-ex].
55. Clustering of color sources and the shear viscosity of the QGP in heavy ion collisions at RHIC and LHC energies / J. Dias de Deus [et al.] // Eur. Phys. J. C. — 2012. — Vol. 72. — P. 2123. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-012-2123-x.
56. *Svetlana Belokurova.* Asymptotes of multiplicity and transverse momentum correlation coefficients at large string density // EPJ Web Conf. — 2018. — Vol. 191. — P. 04010. — DOI: 10.1051/epjconf/201819104010. — URL: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201819104010>.
57. *С. Н. Белокурова, В. В. Вечернин,* Сильноинтенсивные переменные и дальние корреляции в модели с решеткой в поперечной плоскости, ТМФ, 200:2 (2019), 195–214, <https://doi.org/10.4213/tmf9684>; Theoret. and Math. Phys., 200:2 (2019), 1094–1109, doi.org/10.1134/S0040577919080026. —
58. *Belokurova S. N., Vechernin V. V.* Calculation of Long-Range Rapidity Correlations in the Model with String Fusion on a Transverse Lattice // Phys. Part. Nucl. — 2020. — Vol. 51, no. 3. — P. 319–322. — DOI: 10.1134/S1063779620030053.

59. *Belokurova S., Vechernin V.* Long-Range Correlations between Observables in a Model with Translational Invariance in Rapidity // Symmetry. — 2020. — Vol. 12, no. 7. — P. 1107. — DOI: 10.3390/sym12071107.
60. *Belokurova S.* Study of Strongly Intense Quantities and Robust Variances in Multi-Particle Production at LHC Energies // Phys. Part. Nucl. — 2022. — Vol. 53, no. 2. — P. 154–158. — DOI: 10.1134/S1063779622020174. — arXiv: 2011.10434 [hep-ph].
61. *Belokurova S., Vechernin V.* Using a Strongly Intense Observable to Study the Formation of Quark-Gluon String Clusters in pp Collisions at LHC Energies // Symmetry. — 2022. — Vol. 14, no. 8. — P. 1673. — DOI: 10.3390/sym14081673.
62. *Gorenstein M. I., Gazdzicki M.* Strongly Intensive Quantities // Phys. Rev. C. — 2011. — Vol. 84. — P. 014904. — DOI: 10.1103/PhysRevC.84.014904. — arXiv: 1101.4865 [nucl-th].
63. *Andronov E.* Influence of the quark–gluon string fusion mechanism on long-range rapidity correlations and fluctuations. // Theor Math Phys. — 2015. — Issue 185. — P. 1383–1390. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11232-015-0347-2>.
64. *Pruneau C., Gavin S., Voloshin S.* Methods for the study of particle production fluctuations // Phys. Rev. C. — 2002. — Vol. 66. — P. 044904. — DOI: 10.1103/PhysRevC.66.044904. — arXiv: nucl-ex/0204011.
65. First measurement of the total proton-proton cross section at the LHC energy of $\sqrt{s} = 7$ TeV / G. Antchev [et al.] // EPL. — 2011. — Vol. 96, no. 2. — P. 21002. — DOI: 10.1209/0295-5075/96/21002. — arXiv: 1110.1395 [hep-ex].
66. Transverse-momentum and pseudorapidity distributions of charged hadrons in *pp* collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV / V. Khachatryan [et al.] // Phys. Rev. Lett. —

2010. — Vol. 105. — P. 022002. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.022002. — arXiv: 1005.3299 [hep-ex].
67. Charged-particle multiplicity measurement in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV with ALICE at LHC / K. Aamodt [et al.] // Eur. Phys. J. C. — 2010. — Vol. 68. — P. 345–354. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-010-1350-2. — arXiv: 1004.3514 [hep-ex].
68. First measurement of elastic, inelastic and total cross-section at $\sqrt{s} = 13$ TeV by TOTEM and overview of cross-section data at LHC energies / G. Antchev [et al.] // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79, no. 2. — P. 103. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6567-0. — arXiv: 1712.06153 [hep-ex].
69. *Capella A., Ferreiro E. G.* Charged multiplicities in pp and AA collisions at LHC // Eur. Phys. J. C. — 2012. — Vol. 72. — P. 1936. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-012-1936-y. — arXiv: 1110.6839 [hep-ph].
70. *Ter-Martirosyan K. A.* On the particle multiplicity distributions at high energy // Phys. Lett. B. — 1973. — Vol. 44. — P. 377–380. — DOI: 10.1016/0370-2693(73)90411-5.
71. *Kaidalov A. B., Ter-Martirosyan K. A.* Multihadron production at high energies in the model of quark gluon strings // Sov. J. Nucl. Phys. — 1984. — Vol. 40. — P. 135–140.
72. *J. Bleibel, L. V. Bravina and E. E. Zabrodin.* How many of the scaling trends in pp collisions will be violated at $\sqrt{s_{NN}} = 14$ TeV ? - Predictions from Monte Carlo quark-gluon string model // Phys. Rev. D. — 2016. — Vol. 93, no. 11. — P. 114012. — DOI: 10.1103/PhysRevD.93.114012. — arXiv: 1011.2703 [hep-ph].
73. *Vechernin V. V.* Forward–backward correlations between multiplicities in windows separated in azimuth and rapidity // Nucl. Phys. A. — 2015. — Vol.

939. — P. 21–45. — DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2015.03.009. — arXiv: 1210.7588 [hep-ph].
74. *Vechernin, Vladimir*. Short- and long-range rapidity correlations in the model with a lattice in transverse plane // EPJ Web Conf. — 2018. — Vol. 191. — P. 04011. — DOI: 10.1051/epjconf/201819104011. — URL: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201819104011>.
75. *Erokhin A., (for the ALICE Collaboration)*. Forward-backward multiplicity correlations with strongly intensive observables in pp collisions // The VI-th International Conference on the Initial Stages of High-Energy Nuclear Collisions (IS2021). — — URL: indico.cern.ch/event/854124/contributions/4134683/.
76. *Andronov E., Vechernin V.* Strongly intensive observable between multiplicities in two acceptance windows in a string model // Eur. Phys. J. A. — 2019. — Vol. 55, no. 1. — P. 14. — DOI: 10.1140/epja/i2019-12681-x. — arXiv: 1808.09770 [hep-ph].
77. Pseudorapidity distributions of charged particles as a function of mid- and forward rapidity multiplicities in pp collisions at $\sqrt{s} = 5.02, 7$ and 13 TeV / S. Acharya [et al.] // Eur. Phys. J. C. — 2021. — Vol. 81, no. 7. — P. 630. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09349-5. — arXiv: 2009.09434 [nucl-ex].
78. Multiplicity dependence of charged-particle jet production in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV / S. Acharya [et al.] // Eur. Phys. J. C. — 2022. — Vol. 82, no. 6. — P. 514. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10405-x. — arXiv: 2202.01548 [nucl-ex].
79. *Kurepin A. B., Litvinenko A. G., Litvinenko E.* Determining the Centrality of a Nuclear Collision Using a Hadron Calorimeter // Phys. Atom. Nucl. — 2020. — Vol. 83, no. 9. — P. 1359–1362. — DOI: 10.1134/S106377882009015X. — arXiv: 2001.03747 [hep-ex].

Appendix A. Averaging over C_n^F configurations

We will calculate $\left\langle \frac{n_i^F}{(\sum_{k=1}^M n_k^F)^2} \right\rangle_{C_n}$:

$$\left\langle \frac{n_i}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \prod_{j=1}^M \int dn_j \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_j}}} e^{-\frac{(n_j - \bar{n}_j)^2}{2d_{n_j}}} \frac{n_i}{(\sum_k n_k)^2}.$$

We substitute under the integral 1, presented in the form,

$$1 = \int dn \delta\left(n - \sum_k n_k\right) = \int dn \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha(n - \sum_k n_k)},$$

and we get

$$\left\langle \frac{n_i}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha n} \prod_{j=1}^M \int dn_j \frac{e^{i\alpha n_j}}{\sqrt{2\pi d_{n_j}}} e^{-\frac{(n_j - \bar{n}_j)^2}{2d_{n_j}}} n_i.$$

Let's transform the expression in the exponent under the integral over n_j :

$$\begin{aligned} \frac{(n_j - \bar{n}_j)^2}{2d_{n_j}} - i\alpha n_j &= \frac{n_j^2}{2d_{n_j}} - n_j \left(\frac{\bar{n}_j}{d_{n_j}} + i\alpha \right) + \frac{\bar{n}_j^2}{2d_{n_j}} = \\ &= \left(\frac{n_j}{\sqrt{2d_{n_j}}} - \left(\frac{\bar{n}_j}{\sqrt{2d_{n_j}}} + \frac{i\alpha\sqrt{d_{n_j}}}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 - i\alpha\bar{n}_j + \frac{\alpha^2 d_{n_j}}{2}. \end{aligned}$$

We calculate the integral over n_i

$$J_i = \int dn_i \frac{e^{i\alpha n_i}}{\sqrt{2\pi d_{n_i}}} e^{-\frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{2d_{n_i}}} n_i.$$

Let's change the variable:

$$y = \frac{n_i}{\sqrt{2d_{n_i}}} - \left(\frac{\bar{n}_i}{\sqrt{2d_{n_i}}} + \frac{i\alpha\sqrt{d_{n_i}}}{\sqrt{2}} \right), \quad (\text{A.1})$$

$$J_i = \sqrt{\frac{2d_{n_i}}{\pi}} e^{i\alpha\bar{n}_i - \frac{\alpha^2 d_{n_i}}{2}} \int dy e^{-y^2} \left(y + \frac{\bar{n}_i}{\sqrt{2d_{n_i}}} + \frac{i\alpha\sqrt{d_{n_i}}}{\sqrt{2}} \right).$$

$$J_i = e^{i\alpha\bar{n}_i - \frac{\alpha^2 d_{n_i}}{2}} (\bar{n}_i + i\alpha d_{n_i}) \quad (\text{A.2})$$

We calculate the integral over n_j , $j \neq i$

$$J_j = \int dn_j \frac{e^{i\alpha n_j}}{\sqrt{2\pi d_{n_j}}} e^{-\frac{(n_j - \bar{n}_j)^2}{2d_{n_j}}}.$$

After replacing (A.1) we get

$$J_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\alpha \bar{n}_j - \frac{\alpha^2 d_{n_j}}{2}} \int dy e^{-y^2} = e^{i\alpha \bar{n}_j - \frac{\alpha^2 d_{n_j}}{2}}, \quad (\text{A.3})$$

$$\left\langle \frac{n_i}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha n} e^{i\alpha \sum_j \bar{n}_j} e^{-\frac{\alpha^2}{2} \sum_j d_{n_j}} (\bar{n}_i + i\alpha d_{n_i}).$$

Let's transform the expression into an exponent:

$$\frac{\alpha^2}{2} \sum_j d_{n_j} + i\alpha \left(n - \sum_j \bar{n}_j \right) = \left(\alpha \sqrt{\frac{\sum_j d_{n_j}}{2}} + \frac{i \left(n - \sum_j \bar{n}_j \right)}{\sqrt{2 \sum_j d_{n_j}}} \right)^2 + \frac{\left(n - \sum_j \bar{n}_j \right)^2}{2 \sum_j d_{n_j}}.$$

Let's change the variable:

$$x = \alpha \sqrt{\frac{\sum_j d_{n_j}}{2}} + \frac{i \left(n - \sum_j \bar{n}_j \right)}{\sqrt{2 \sum_j d_{n_j}}}, \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{n_i}{\sum_k n_k} \right\rangle_{C_n} = \\ & = \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{dx}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2 \sum_j d_{n_j}}} e^{-x^2} e^{-\frac{(n - \sum_j \bar{n}_j)^2}{2 \sum_j d_{n_j}}} \left(\bar{n}_i + i d_{n_i} x \sqrt{\frac{2}{\sum_j d_{n_j}}} + \frac{d_{n_i} \left(n - \sum_j \bar{n}_j \right)}{\sum_j d_{n_j}} \right) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sum d_{n_j}} \frac{\bar{n}_i}{\sum \bar{n}_j} \int \frac{dn}{n} e^{-\frac{(n - \sum_j \bar{n}_j)^2}{2 \sum_j d_{n_j}}} = \frac{\bar{n}_i}{\sqrt{2\pi} \sum d_{n_j} (\sum \bar{n}_j)^2} \int \frac{dn}{1 + \frac{n}{\sum \bar{n}_j}} e^{-\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}}} \end{aligned}$$

The exponent $e^{-\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}}}$ makes the main contribution at $\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}} \sim 1$.

$$n \sim \sqrt{\sum_j d_{n_j}} \sim \sqrt{M \sqrt{\eta}}$$

$$\frac{n}{\sum \bar{n}_j} \sim \frac{1}{\sqrt{M \sqrt{\eta}}},$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{n}{\sum \bar{n}_j}\right)} \simeq 1 - \frac{n}{\sum \bar{n}_j} + \frac{n^2}{(\sum \bar{n}_j)^2}$$

$$\left\langle \frac{n_i}{\sum_k n_k} \right\rangle_{C_n} = \frac{\bar{n}_i}{\sqrt{2\pi} \sum d_{n_j} (\sum \bar{n}_j)^2} \int dn \left(1 - \frac{n}{\sum \bar{n}_j} + \frac{n^2}{(\sum \bar{n}_j)^2} \right) e^{-\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}}} =$$

$$= \frac{\bar{n}_i}{(\sum \bar{n}_j)^2} \left(1 + \frac{\sum d_{n_j}}{(\sum \bar{n}_j)^2} \right) = \frac{\bar{n}(\eta_i)}{\mu_F (\sum \bar{n}(\eta_j))^2} \left(1 + \frac{\omega_\mu}{\mu_F \sum \bar{n}(\eta_j)} \right).$$

Let us estimate the terms in order of magnitude:

$$\frac{\bar{n}(\eta_i)}{\mu_F (\sum \bar{n}(\eta_j))^2} \sim \frac{\sqrt{\bar{\eta}}}{M^2 \bar{\eta}} = \frac{1}{M^2 \sqrt{\bar{\eta}}}, \quad \frac{\omega_\mu \bar{n}(\eta_i)}{\mu_F^2 (\sum \bar{n}(\eta_j))^3} \sim \frac{1}{M^3 \bar{\eta}}.$$

$$\left\langle \frac{n_i^F}{\sum_k n_k^F} \right\rangle_{C_n^F} = \frac{\bar{n}(\eta_i)}{\mu_F (\sum \bar{n}(\eta_j))^2}.$$

Let us calculate $\left\langle \frac{n_i^{F^2}}{(\sum_{k=1}^M n_k^F)^2} \right\rangle_{C_n}$:

$$\left\langle \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \prod_{j=1}^M \int dn_j \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_j}}} e^{-\frac{(n_j - \bar{n}_j)^2}{2d_{n_j}}} \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2}.$$

We substitute under the integral 1, represented as

$$1 = \int dn \delta \left(n - \sum_k n_k \right) = \int dn \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha(n - \sum_k n_k)},$$

we get

$$\left\langle \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha n} \prod_{j=1}^M \int dn_j \frac{e^{i\alpha n_j}}{\sqrt{2\pi d_{n_j}}} e^{-\frac{(n_j - \bar{n}_j)^2}{2d_{n_j}}} n_i^2.$$

Let's calculate the integral over n_i :

$$J_i = \int dn_i \frac{e^{i\alpha n_i}}{\sqrt{2\pi d_{n_i}}} e^{-\frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{2d_{n_i}}} n_i^2.$$

Let's change the (A.1) variable:

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\alpha \bar{n}_i - \frac{\alpha^2 d_{n_i}}{2}} \int dy e^{-y^2} \left(\sqrt{2d_{n_i}} y + \bar{n}_i + i\alpha d_{n_i} \right)^2 = \\ &= e^{i\alpha \bar{n}_i - \frac{\alpha^2 d_{n_i}}{2}} \left((\bar{n}_i + i\alpha d_{n_i})^2 + d_{n_i} \right) \end{aligned}$$

Integral over n_j , $j \neq i$ is similar to (A.3):

$$J_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\alpha \bar{n}_j - \frac{\alpha^2 d_{n_j}}{2}} \int dy e^{-y^2} = e^{i\alpha \bar{n}_j - \frac{\alpha^2 d_{n_j}}{2}}.$$

$$\left\langle \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha n} e^{i\alpha \sum_j \bar{n}_j} e^{-\frac{\alpha^2}{2} \sum_j d_{n_j}} (\bar{n}_i^2 + 2i\alpha d_{n_i} \bar{n}_i - \alpha^2 d_{n_i}^2 + d_{n_i})$$

Let's change the variable (A.4):

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} &= \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{dx}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2 \sum_j d_{n_j}}} e^{-x^2} e^{-\frac{(n - \sum_j \bar{n}_j)^2}{2 \sum_j d_{n_j}}} \times \\ &\times \left(d_{n_i} + \bar{n}_i^2 + \frac{2d_{n_i} \bar{n}_i (n - \sum_j \bar{n}_j)}{\sum_j d_{n_j}} - \frac{2d_{n_i}^2 x^2}{\sum_j d_{n_j}} + \frac{d_{n_i}^2 (n - \sum_j \bar{n}_j)^2}{(\sum_j d_{n_j})^2} \right). \end{aligned}$$

We will calculate the integral over x :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} &= \\ &= \int \frac{dn}{n^2} \left(d_{n_i} + \bar{n}_i^2 + \frac{2d_{n_i} \bar{n}_i (n - \sum_j \bar{n}_j)}{\sum_j d_{n_j}} - \frac{d_{n_i}^2}{\sum_j d_{n_j}} + \frac{d_{n_i}^2 (n - \sum_j \bar{n}_j)^2}{(\sum_j d_{n_j})^2} \right) \frac{e^{-\frac{(n - \sum_j \bar{n}_j)^2}{2 \sum_j d_{n_j}}}}{\sqrt{2\pi d_{n_j}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_j}}} \int \frac{dn}{(n + \sum_j \bar{n}_j)^2} \left(d_{n_i} + \bar{n}_i^2 + \frac{2d_{n_i} \bar{n}_i n}{\sum_j d_{n_j}} - \frac{d_{n_i}^2}{\sum_j d_{n_j}} + \frac{d_{n_i}^2 n^2}{(\sum_j d_{n_j})^2} \right) e^{-\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}}}. \end{aligned}$$

The exponent $e^{-\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}}}$ makes the main contribution at $\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}} \sim 1$.

$$n \sim \sqrt{\sum_j d_{n_j}} \sim \sqrt{M \sqrt{\bar{\eta}}}$$

$$\frac{n}{\sum \bar{n}_j} \sim \frac{1}{\sqrt{M \sqrt{\bar{\eta}}}},$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{n}{\sum \bar{n}_j}\right)^2} \simeq 1 - 2 \frac{n}{\sum \bar{n}_j} + 3 \frac{n^2}{(\sum \bar{n}_j)^2}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_j}}} \int \frac{dn}{(\sum \bar{n}_j)^2} \left(1 - 2 \frac{n}{\sum \bar{n}_j} + 3 \frac{n^2}{(\sum \bar{n}_j)^2} \right) \times \\ &\times \left(d_{n_i} + \bar{n}_i^2 + \frac{2d_{n_i} \bar{n}_i n}{\sum_j d_{n_j}} - \frac{d_{n_i}^2}{\sum_j d_{n_j}} + \frac{d_{n_i}^2 n^2}{(\sum_j d_{n_j})^2} \right) e^{-\frac{n^2}{2 \sum_j d_{n_j}}} \simeq \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_j}} (\sum \bar{n}_j)^2} \int dn \left(d_{n_i} + \bar{n}_i^2 - \frac{d_{n_i}^2}{\sum_j d_{n_j}} + \frac{d_{n_i}^2 n^2}{(\sum_j d_{n_j})^2} - \frac{4d_{n_i} \bar{n}_i}{(\sum \bar{n}_j) (\sum d_{n_j})} n^2 + \right. \end{aligned}$$

$$+\frac{3d_{n_i}}{(\sum \bar{n}_j)^2}n^2 + \frac{3\bar{n}_i^2}{(\sum \bar{n}_j)^2}n^2 - \frac{3d_{n_i}^2 n^2}{(\sum \bar{n}_j)^2 (\sum d_{n_j})} \Big) e^{-\frac{n^2}{2\sum_j d_{n_j}}}.$$

Taking into account $d_{n_i} = \omega_\mu \bar{n}_i$, one can simplify the expression:

$$\left\langle \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dn}{\sqrt{2\pi d_{n_j}} (\sum \bar{n}_j)^2} \left(\omega_\mu \bar{n}_i + \bar{n}_i^2 - \frac{\omega_\mu \bar{n}_i^2}{\sum_j \bar{n}_j} + \frac{3\omega_\mu \bar{n}_i}{(\sum \bar{n}_j)^2} n^2 - \frac{3\omega_\mu \bar{n}_i^2}{(\sum \bar{n}_j)^3} n^2 \right) e^{-\frac{n^2}{2\sum_j d_{n_j}}}$$

$$\left\langle \frac{n_i^2}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \frac{\omega_\mu \bar{n}_i}{(\sum \bar{n}_j)^2} + \frac{\bar{n}_i^2}{(\sum \bar{n}_j)^2} - \frac{\omega_\mu \bar{n}_i^2}{(\sum \bar{n}_j)^3} + \frac{\sqrt{\omega_\mu}}{\sqrt{2} (\sum \bar{n}_j)^3} \left(\frac{3\omega_\mu \bar{n}_i}{(\sum \bar{n}_j)^2} - \frac{3\omega_\mu \bar{n}_i^2}{(\sum \bar{n}_j)^3} \right)$$

Let us estimate the terms in order of magnitude:

$$\frac{\bar{n}(\eta_i)}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^2} \sim \frac{1}{M^2 \sqrt{\bar{\eta}}}, \quad \frac{\bar{n}^2(\eta_i)}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^2} \sim \frac{1}{M^2}, \quad \frac{\bar{n}^2(\eta_i)}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^3} \sim \frac{1}{M^3 \sqrt{\bar{\eta}}},$$

$$\frac{\sqrt{\omega_\mu}}{\sqrt{2} (\sum \bar{n}_j)^3} \frac{3\omega_\mu \bar{n}_i}{(\sum \bar{n}_j)^2} \sim \frac{\bar{n}(\eta_i)}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^{7/2}} \sim \frac{1}{M^{7/2} \bar{\eta}^{5/4}}$$

$$\left\langle \frac{n_i^{F^2}}{(\sum_k n_k^F)^2} \right\rangle_{C_n^F} = \frac{\omega_\mu \bar{n}(\eta_i)}{\mu_F (\sum \bar{n}(\eta_j))^2} + \frac{(\bar{n}(\eta_i))^2}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^2} - \frac{\omega_\mu (\bar{n}(\eta_i))^2}{\mu_F (\sum \bar{n}(\eta_j))^3}$$

We will calculate $\left\langle \frac{n_i^F n_j^F}{(\sum_{j=1}^M n_j^F)^2} \right\rangle_{C_n^F}$:

$$\left\langle \frac{n_i n_j}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \prod_{k=1}^M \int dn_k \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{n_k}}} e^{-\frac{(n_k - \bar{n}_k)^2}{2d_{n_k}}} \frac{n_i n_j}{(\sum_k n_k)^2} =$$

$$= \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha n} \prod_{k=1}^M \int dn_k \frac{e^{i\alpha n_k}}{\sqrt{2\pi d_{n_k}}} e^{-\frac{(n_k - \bar{n}_k)^2}{2d_{n_k}}} n_i n_j.$$

Integration over n_k is similar to (A.2) and (A.3):

$$\left\langle \frac{n_i n_j}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha n} e^{i\alpha \sum_j \bar{n}_j} e^{-\frac{\alpha^2}{2} \sum_j d_{n_j}} (\bar{n}_i + i\alpha d_{n_i}) (\bar{n}_j + i\alpha d_{n_j}).$$

After replacing (A.4) we get

$$\left\langle \frac{n_i n_j}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dn}{n^2} \int \frac{dx}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2 \sum_k d_{n_k}}} e^{-x^2} e^{-\frac{(n - \sum_k \bar{n}_k)^2}{2 \sum_k d_{n_k}}} (\bar{n}_i \bar{n}_j +$$

$$+ i (d_{n_i} \bar{n}_j + d_{n_j} \bar{n}_i) \frac{\sum_k \bar{n}_k - n}{\sum_k d_{n_k}} - \frac{2d_{n_i} d_{n_j}}{\sum_k d_{n_k}} x^2 + d_{n_i} d_{n_j} \frac{(\sum_k \bar{n}_k - n)^2}{(\sum_k d_{n_k})^2} \Big) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_k d_{n_k}}} \int \frac{dn}{n^2} e^{-\frac{(n-\sum_k \bar{n}_k)^2}{2\sum_k d_{n_k}}} \times \\
&\times \left(\bar{n}_i \bar{n}_j + i (d_{n_i} \bar{n}_j + d_{n_j} \bar{n}_i) \frac{\sum_k \bar{n}_k - n}{\sum_k d_{n_k}} - \frac{d_{n_i} d_{n_j}}{\sum_k d_{n_k}} + d_{n_i} d_{n_j} \frac{(\sum_k \bar{n}_k - n)^2}{(\sum_k d_{n_k})^2} \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_k d_{n_k}}} \int \frac{e^{-\frac{n^2}{2\sum_k d_{n_k}}} dn}{(n + \sum_k \bar{n}_k)^2} \left(\bar{n}_i \bar{n}_j - 2i \frac{\bar{n}_i \bar{n}_j}{\sum_k \bar{n}_k} n - \frac{\omega_\mu \bar{n}_i \bar{n}_j}{\sum_k \bar{n}_k} + \frac{\bar{n}_i \bar{n}_j}{(\sum_k \bar{n}_k)^2} n^2 \right)
\end{aligned}$$

The exponent $e^{-\frac{n^2}{2\sum_j d_{n_j}}}$ makes the main contribution at $\frac{n^2}{2\sum_j d_{n_j}} \sim 1$.

$$n \sim \sqrt{\sum_j d_{n_j}} \sim \sqrt{M\sqrt{\eta}}$$

$$\frac{n}{\sum \bar{n}_j} \sim \frac{1}{\sqrt{M\sqrt{\eta}}},$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{n}{\sum \bar{n}_j}\right)^2} \simeq 1 - 2\frac{n}{\sum \bar{n}_j} + 3\frac{n^2}{(\sum \bar{n}_j)^2}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{n_i n_j}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_k d_{n_k}}} \int \frac{e^{-\frac{n^2}{2\sum_k d_{n_k}}}}{(\sum_k \bar{n}_k)^2} \left(1 - 2\frac{n}{\sum \bar{n}_j} + 3\frac{n^2}{(\sum \bar{n}_j)^2} \right) \times \\
&\times \left(\bar{n}_i \bar{n}_j - 2i \frac{\bar{n}_i \bar{n}_j}{\sum_k \bar{n}_k} n - \frac{\omega_\mu \bar{n}_i \bar{n}_j}{\sum_k \bar{n}_k} + \frac{\bar{n}_i \bar{n}_j}{(\sum_k \bar{n}_k)^2} n^2 \right) dn
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{n_i n_j}{(\sum_k n_k)^2} \right\rangle_{C_n} &= \int \frac{e^{-\frac{n^2}{2\sum_k d_{n_k}}}}{\sqrt{2\pi \sum_k d_{n_k}} (\sum_k \bar{n}_k)^2} \left(\bar{n}_i \bar{n}_j - \frac{\omega_\mu \bar{n}_i \bar{n}_j}{\sum_k \bar{n}_k} + \frac{4(1+i)\bar{n}_i \bar{n}_j}{(\sum_k \bar{n}_k)^2} n^2 - \frac{3\omega_\mu \bar{n}_i \bar{n}_j}{(\sum_k \bar{n}_k)^3} n^2 \right) dn = \\
&= \frac{1}{(\sum_k \bar{n}_k)^2} \left(\bar{n}_i \bar{n}_j - \frac{\omega_\mu \bar{n}_i \bar{n}_j}{\sum_k \bar{n}_k} + \sqrt{\frac{\sum_k d_{n_k}}{2}} \left(\frac{4(1+i)\bar{n}_i \bar{n}_j}{(\sum_k \bar{n}_k)^2} - \frac{3\omega_\mu \bar{n}_i \bar{n}_j}{(\sum_k \bar{n}_k)^3} \right) \right).
\end{aligned}$$

Let us estimate the terms in order of magnitude:

$$\frac{\bar{n}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j)}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^2} \sim \frac{1}{M^2}, \quad \frac{\bar{n}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j)}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^3} \sim \frac{1}{M^3 \sqrt{\eta}},$$

$$\frac{\sqrt{\sum_k d_{n_k}} \bar{n}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j)}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^4} \sim \frac{1}{M^{7/2} \eta^{3/4}}$$

$$\left\langle \frac{n_i^F n_j^F}{(\sum_k n_k^F)^2} \right\rangle_{C_n^F} = \frac{\bar{n}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j)}{(\sum \bar{n}(\eta_j))^2} - \frac{\omega_\mu \bar{n}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j)}{\mu_F (\sum \bar{n}(\eta_j))^3}.$$

Appendix B. Averaging over C_η configurations

We will calculate $\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta}$:

$$\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \prod_{j=1}^M \int d\eta_j P(\eta_j) \frac{\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_k \bar{n}(\eta_k)\right)^2}.$$

Substituting under the integral 1, presented in the form

$$1 = \int dr \delta\left(r - \sum_k \bar{n}(\eta_k)\right) = \int dr \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta(r - \sum_k \bar{n}(\eta_k))},$$

one will get

$$\int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} \prod_{j=1}^M \int d\eta_j P(\eta_j) e^{i\beta \bar{n}(\eta_j)} \sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i). \quad (\text{B.1})$$

Integrals over η_j are reduced to two types:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_\eta\bar{\eta}}} \int d\eta e^{-\frac{(\eta-\bar{\eta})^2}{2\omega_\eta\bar{\eta}}} e^{i\beta\bar{n}(\eta)},$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_\eta\bar{\eta}}} \int d\eta e^{-\frac{(\eta-\bar{\eta})^2}{2\omega_\eta\bar{\eta}}} e^{i\beta\bar{n}(\eta)} \bar{n}(\eta) \bar{p}^2(\eta).$$

We use the explicit form $\bar{n}(\eta_i)$ and $\bar{p}(\eta_i)$ when calculating integrals. Let us introduce the notation:

$$y = \frac{\eta}{\bar{\eta}} - 1, \quad a = \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}},$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int dy e^{-\frac{y^2}{2a}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}(1+y)}}. \quad (\text{B.2})$$

Let's convert the expression in the exponent to I_1 :

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2a} - i\beta\sqrt{\bar{\eta}(1+y)} &\approx \frac{y^2}{2a} - i\beta\sqrt{\bar{\eta}} \left(1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8}\right) = \\ &= \left(\sqrt{\frac{4 + ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}}{8a}} y - \sqrt{\frac{8a}{4 + ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}}} \frac{i\beta\sqrt{\bar{\eta}}}{4} \right)^2 - i\beta\sqrt{\bar{\eta}} + \frac{a\beta^2\bar{\eta}}{2(4 + ia\beta\sqrt{\bar{\eta}})}. \end{aligned}$$

Then

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}} - \frac{a\beta^2\bar{\eta}}{2(4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}})}} \sqrt{\frac{8a}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}}} \int e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}} - \frac{a\beta^2\bar{\eta}}{2(4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}})}} \sqrt{\frac{8a}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}}} \sqrt{\pi},$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{1+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}/4}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}}} e^{-\frac{a\beta^2\bar{\eta}}{8(1+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}/4)}}$$

We will calculate I_2 :

$$I_2 = \frac{p_0^2}{\sqrt{2\pi a}} \int dy e^{-\frac{y^2}{2a}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}(1+y)}} \bar{\eta} (1+y).$$

The expression in the exponent is the same as (B.2). After similar transformations, we get

$$I_2 = \frac{\bar{n}(\bar{\eta}) \bar{p}^2(\bar{\eta})}{\sqrt{2\pi a}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}} - \frac{a\beta^2\bar{\eta}}{2(4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}})}} \sqrt{\frac{8a}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}}} \int e^{-x^2} \left[1 + \frac{2ai\beta\sqrt{\bar{\eta}}}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}} \right] dx,$$

$$I_2 = \bar{n}(\bar{\eta}) \bar{p}^2(\bar{\eta}) I_1 \left[1 + \frac{2ai\beta\sqrt{\bar{\eta}}}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}} \right].$$

In the original variables

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}}} e^{-\frac{\omega_\eta\beta^2}{8}} e^{i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32\sqrt{\bar{\eta}}+8i\omega_\eta\beta}},$$

$$I_2 = \bar{n}(\bar{\eta}) \bar{p}^2(\bar{\eta}) I_1 \left[1 + \frac{\omega_\eta i\beta}{2\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right)\sqrt{\bar{\eta}}} \right].$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} &= \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} \prod_{j=1}^M \frac{e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}_j}} e^{-\frac{\omega_\eta\beta^2}{8}} e^{i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32\sqrt{\bar{\eta}_j}+8i\omega_\eta\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}}}} \times \\ &\times \sum_i \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 + \frac{\omega_\eta i\beta}{2\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}}\right)\sqrt{\bar{\eta}_i}} \right]. \end{aligned}$$

The exponent $e^{-\frac{\omega_\eta\beta^2}{8}}$ makes the main contribution at $\beta \sim 1$. Taking into account $\bar{\eta} \gg 1$, one can get approximate expressions in this area for I_1 , I_2 :

$$32\sqrt{\bar{\eta}_i} + 8i\omega_\eta\beta \approx 32\sqrt{\bar{\eta}_i}, \quad e^{i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32\sqrt{\bar{\eta}_i}+8i\omega_\eta\beta}} \approx 1 + i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32} \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}_i}}.$$

$$\int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} e^{-\frac{\omega_\eta M \beta^2}{8}} e^{i\beta \sum_k \bar{n}(\bar{\eta}_k)} \prod_{j=1}^M \left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + i\frac{\omega_\eta^2 \beta^3}{32} \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 + \frac{\omega_\eta i \beta}{2 \left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}}\right) \sqrt{\bar{\eta}_i}}\right]$$

The main contribution is made by the region $\beta \sim \frac{1}{\sqrt{M}}$. With this in mind, the addition to 1 in the product is small ($\sim \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}M}}$), then

$$\prod_{j=1}^M \left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \prod_{j=1}^M e^{-\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right)} \approx e^{-\frac{i\omega_\eta \beta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}} - \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{64} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}}.$$

Addition 1 to $\left(1 + i\frac{\omega_\eta^2 \beta^3}{32} \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}_j}}\right)$ order $\sim \frac{1}{\sqrt{M^3 \bar{\eta}}}$ and can be discarded. We will consider the expression in square brackets in order of magnitude:

$$\frac{\omega_\eta i \beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}}\right) \sqrt{\bar{\eta}_i}} \approx \frac{\omega_\eta i \beta}{\sqrt{\bar{\eta}_i}} \left(1 - \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{16\bar{\eta}_i}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{M\bar{\eta}}} + \frac{1}{M\bar{\eta}} + \frac{1}{(M\bar{\eta})^{3/2}},$$

We will consider only the following orders of smallness: $\frac{1}{\bar{\eta}}$, $\frac{1}{\sqrt{M\bar{\eta}}}$, $\frac{1}{(M\bar{\eta})}$, all higher order terms are discarded.

$$\int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} e^{-\frac{\omega_\eta M \beta^2}{8}} e^{i\beta \sum_k \bar{n}(\bar{\eta}_k)} e^{-\frac{i\omega_\eta \beta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}} - \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{64} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 + \frac{\omega_\eta i \beta}{2\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{\beta^2 \omega_\eta^2}{8\bar{\eta}_i}\right]$$

Let's transform the expression in the exponent in the integral over β :

$$i\beta r + \frac{\omega_\eta M \beta^2}{8} - i\beta \sum_i \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} + \frac{i\omega_\eta \beta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}} + \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{64} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1} = (a\beta + ib)^2 + b^2,$$

where

$$a = \frac{\sqrt{8\omega_\eta M + \omega_\eta^2 \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}}}{8}, \quad b = 4 \frac{r - \sum_i \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} + \frac{\omega_\eta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{8\omega_\eta M + \omega_\eta^2 \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}}}.$$

$$\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-(a\beta + ib)^2} e^{-b^2} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 + \frac{\omega_\eta i \beta}{2\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{\beta^2 \omega_\eta^2}{8\bar{\eta}_i}\right].$$

Let's change the variable $a\beta + ib = x$:

$$\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{dx}{2\pi a} e^{-x^2} e^{-b^2} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_\eta b}{a\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2 x^2}{a^2 \bar{\eta}_i} - \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2 \bar{\eta}_i}\right],$$

and perform integration over x :

$$\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{r^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} e^{-b^2} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_\eta b}{a\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{1}{16} \frac{\omega_\eta^2}{a^2 \bar{\eta}_i} - \frac{1}{8} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2 \bar{\eta}_i} \right].$$

Let us introduce the notation:

$$\Sigma' = \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega_\eta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}}, \quad M' = \frac{\omega_\eta}{2} M + \frac{\omega_\eta^2}{16} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1},$$

then

$$b = \frac{r - \Sigma'}{\sqrt{M'}}, \quad a = \frac{\sqrt{M'}}{2},$$

$$\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{(r + \Sigma')^2} \frac{e^{-\frac{r^2}{M'}}}{\sqrt{\pi M'}} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 + \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{1}{2} \frac{\omega_\eta^2}{M' \bar{\eta}_i} \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{M'} \right) \right]. \quad (\text{B.3})$$

The main contribution is made by the region $r \sim 1/\sqrt{M'}$. $\Sigma' \sim M\sqrt{\bar{\eta}}$, then $r/\Sigma' \sim 1/\sqrt{M\bar{\eta}}$. Let us expand $1/(r + \Sigma')^2$ in powers of r/Σ' :

$$\frac{1}{(r + \Sigma')^2} = \frac{1}{\Sigma'^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{\Sigma'}\right)^2} \approx \frac{1}{\Sigma'^2} \left(1 - 2\frac{r}{\Sigma'} + 3\frac{r^2}{\Sigma'^2} \right) \quad (\text{B.4})$$

and substitute the decomposition of (B.4) into (B.3):

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} &= \int dr \left(1 - 2\frac{r}{\Sigma'} + 3\frac{r^2}{\Sigma'^2} \right) \frac{e^{-\frac{r^2}{M'}}}{\Sigma'^2 \sqrt{\pi M'}} \times \\ &\times \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 + \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{1}{2} \frac{\omega_\eta^2}{M' \bar{\eta}_i} \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{M'} \right) \right], \\ \left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} &= \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 - \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{2} \frac{M'}{\Sigma'^2} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta^2}{\Sigma'^2 \bar{\eta}_i} \right]}{\Sigma'^2}. \end{aligned}$$

Discarding terms of a higher order of smallness than $1/\bar{\eta}$ and $1/M$, we get

$$\left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i)}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \frac{1}{\Sigma'^2} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left[1 - \frac{\omega_\eta}{\sqrt{\bar{\eta}_i} S_{1/2}} + \frac{3\omega_\eta M}{4 S_{1/2}^2} \right]$$

We will calculate $\left\langle \frac{(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i))^2}{(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k))^2} \right\rangle_{C_\eta}$:

$$\left\langle \frac{(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i))^2}{(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k))^2} \right\rangle_{C_\eta} = \prod_{j=1}^M \int d\eta_j P(\eta_j) \frac{(\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i))^2}{(\sum_k \bar{n}(\eta_k))^2}.$$

Substituting under the integral 1, presented in the form

$$1 = \int dr \delta\left(r - \sum_k \bar{n}(\eta_k)\right) = \int dr \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta(r - \sum_k \bar{n}(\eta_k))}, \quad (\text{B.5})$$

one will get

$$\begin{aligned} & \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} \prod_{j=1}^M \int d\eta_j P(\eta_j) e^{i\beta \bar{n}(\eta_j)} \left(\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2 = \\ & = \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} \prod_{j=1}^M \int d\eta_j P(\eta_j) e^{i\beta \bar{n}(\eta_j)} \left(\sum_i \bar{n}^2(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j) \bar{p}(\eta_j) \right) \end{aligned}$$

Integrals over η_j are reduced to three types:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{\eta}}} \int d\eta e^{-\frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{2\omega_\eta \bar{\eta}}} e^{i\beta \bar{n}(\eta)}, \quad (\text{B.6})$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{\eta}}} \int d\eta e^{-\frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{2\omega_\eta \bar{\eta}}} e^{i\beta \bar{n}(\eta)} \bar{n}(\eta) \bar{p}(\eta), \quad (\text{B.7})$$

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_\eta \bar{\eta}}} \int d\eta e^{-\frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{2\omega_\eta \bar{\eta}}} e^{i\beta \bar{n}(\eta)} \bar{n}^2(\eta) \bar{p}^2(\eta). \quad (\text{B.8})$$

We use the explicit form $\bar{n}(\eta_i)$ and $\bar{p}(\eta_i)$ when calculating integrals. Let us introduce the notation:

$$y = \frac{\eta}{\bar{\eta}} - 1, \quad a = \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}},$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int dy e^{-\frac{y^2}{2a}} e^{i\beta \sqrt{\bar{\eta}(1+y)}}.$$

Let's convert the expression in the exponent to I_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{y^2}{2a} - i\beta \sqrt{\bar{\eta}(1+y)} \approx \frac{y^2}{2a} - i\beta \sqrt{\bar{\eta}} \left(1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} \right) = \\ & = \left(\sqrt{\frac{4 + ia\beta \sqrt{\bar{\eta}}}{8a}} y - \sqrt{\frac{8a}{4 + ia\beta \sqrt{\bar{\eta}}} \frac{i\beta \sqrt{\bar{\eta}}}{4}} \right)^2 - i\beta \sqrt{\bar{\eta}} + \frac{a\beta^2 \bar{\eta}}{2(4 + ia\beta \sqrt{\bar{\eta}})}. \end{aligned}$$

Then

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}} - \frac{a\beta^2\bar{\eta}}{2(4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}})}} \sqrt{\frac{8a}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}}} \int e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}} - \frac{a\beta^2\bar{\eta}}{2(4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}})}} \sqrt{\frac{8a}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}}} \sqrt{\pi},$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{1+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}/4}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}}} e^{-\frac{a\beta^2\bar{\eta}}{8(1+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}/4)}}$$

We will calculate I_2 :

$$I_2 = \frac{p_0^2}{\sqrt{2\pi a}} \int dy e^{-\frac{y^2}{2a}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}(1+y)}} (\bar{\eta}(1+y))^{\frac{3}{4}}.$$

$$(\bar{\eta}(1+y))^{\frac{3}{4}} \approx \bar{\eta}^{\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{3}{4}y - \frac{3}{32}y^2\right).$$

The expression in the exponent is the same as (B.2). After similar transformations, we get

$$I_2 = \frac{\bar{n}(\bar{\eta})\bar{p}(\bar{\eta})}{\sqrt{2\pi a}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}} - \frac{a\beta^2\bar{\eta}}{2(4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}})}} \sqrt{\frac{8a}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}}} \times$$

$$\times \int e^{-x^2} \left[1 + \frac{3}{24} \frac{ai\beta\sqrt{\bar{\eta}}}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}} - \frac{3}{44+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}} \frac{ax^2}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}} + \frac{3}{8} \frac{a^2\beta^2\bar{\eta}}{(4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}})^2} \right] dx,$$

$$I_2 = \bar{n}(\bar{\eta})\bar{p}(\bar{\eta}) I_1 \left[1 + \frac{3}{8} \frac{ai\beta\sqrt{\bar{\eta}}}{1+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}/4} - \frac{3}{32} \frac{a}{1+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}/4} + \frac{3}{128} \frac{a^2\beta^2\bar{\eta}}{(1+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}/4)^2} \right].$$

We will calculate I_3 :

$$I_3 = \frac{p_0^2}{\sqrt{2\pi a}} \int dy e^{-\frac{y^2}{2a}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}(1+y)}} (\bar{\eta}(1+y))^{\frac{3}{2}}.$$

$$(\bar{\eta}(1+y))^{\frac{3}{2}} \approx \bar{\eta}^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{3}{2}y + \frac{3}{8}y^2\right).$$

The expression in the exponent is the same as (B.2). After similar transformations, we get

$$I_3 = \frac{\bar{n}^2(\bar{\eta})\bar{p}^2(\bar{\eta})}{\sqrt{2\pi a}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}} - \frac{a\beta^2\bar{\eta}}{2(4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}})}} \sqrt{\frac{8a}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}}} \times$$

$$\times \int e^{-x^2} \left[1 + 3 \frac{ai\beta\sqrt{\bar{\eta}}}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}} + 3 \frac{ax^2}{4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}} - \frac{3}{2} \frac{a^2\beta^2\bar{\eta}}{(4+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}})^2} \right] dx,$$

$$I_3 = \bar{n}^2(\bar{\eta})\bar{p}^2(\bar{\eta}) I_1 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{ai\beta\sqrt{\bar{\eta}}}{1+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}/4} + \frac{3}{8} \frac{a}{1+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}/4} - \frac{3}{32} \frac{a^2\beta^2\bar{\eta}}{(1+ia\beta\sqrt{\bar{\eta}}/4)^2} \right].$$

In the original variables

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}}} e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}}} e^{-\frac{\omega_\eta\beta^2}{8}} e^{i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32\sqrt{\bar{\eta}}+8i\omega_\eta\beta}},$$

$$I_2 = \bar{n}(\bar{\eta}) \bar{p}(\bar{\eta}) I_1 \left[1 + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta i\beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \sqrt{\bar{\eta}}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \bar{\eta}} + \frac{3}{128} \frac{\omega_\eta^2\beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right)^2 \bar{\eta}} \right],$$

$$I_3 = \bar{n}^2(\bar{\eta}) \bar{p}^2(\bar{\eta}) I_1 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta i\beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \sqrt{\bar{\eta}}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \bar{\eta}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta^2\beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right)^2 \bar{\eta}} \right].$$

Denote

$$S_2(\bar{\eta}) \equiv \left[1 + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta i\beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \sqrt{\bar{\eta}}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \bar{\eta}} + \frac{3}{128} \frac{\omega_\eta^2\beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right)^2 \bar{\eta}} \right],$$

$$S_3(\bar{\eta}) \equiv \left[1 + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta i\beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \sqrt{\bar{\eta}}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right) \bar{\eta}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta^2\beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}\right)^2 \bar{\eta}} \right].$$

Then

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} &= \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} \prod_{j=1}^M \frac{e^{i\beta\sqrt{\bar{\eta}}} e^{-\frac{\omega_\eta\beta^2}{8}} e^{i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32\sqrt{\bar{\eta}}+8i\omega_\eta\beta}}}{\sqrt{1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}}}} \times \\ &\times \left(\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) S_3(\bar{\eta}_i) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) S_2(\bar{\eta}_i) S_2(\bar{\eta}_j) \right) \end{aligned}$$

The exponent $e^{-\frac{\omega_\eta\beta^2}{8}}$ makes the main contribution at $\beta \sim 1$. Given $\bar{\eta} \gg 1$, one can get an approximate expression in this area:

$$32\sqrt{\bar{\eta}_i} + 8i\omega_\eta\beta \approx 32\sqrt{\bar{\eta}_i}, \quad e^{i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32\sqrt{\bar{\eta}_i}+8i\omega_\eta\beta}} \approx 1 + i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32} \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}_i}}.$$

$$\int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} e^{-\frac{\omega_\eta M\beta^2}{8}} e^{i\beta \sum_k \bar{n}(\bar{\eta}_k)} \prod_{j=1}^M \left(1 + \frac{i\omega_\eta\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + i\frac{\omega_\eta^2\beta^3}{32} \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right) \times$$

$$\times \left(\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) S_3(\bar{\eta}_i) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) S_2(\bar{\eta}_i) S_2(\bar{\eta}_j) \right)$$

The main contribution is made by the region $\beta \sim \frac{1}{\sqrt{M}}$. With this in mind, the addition to 1 in the product is small ($\sim \frac{1}{\sqrt{\eta M}}$), then

$$\prod_{j=1}^M \left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right)^{-\frac{1}{2}} = \prod_{j=1}^M e^{-\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right)} \approx e^{-\frac{i\omega_\eta \beta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}} - \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{64} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}}.$$

Adding 1 to $\left(1 + i\frac{\omega_\eta^2 \beta^3}{32} \frac{1}{\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right)$ order $\sim \frac{1}{\sqrt{M^3 \bar{\eta}}}$ and can be discarded.

$$\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-i\beta r} e^{-\frac{\omega_\eta M \beta^2}{8}} e^{i\beta \sum_k \bar{n}(\bar{\eta}_k)} e^{-\frac{i\omega_\eta \beta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}} - \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{64} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}} \times$$

$$\times \left(\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) S_3(\bar{\eta}_i) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) S_2(\bar{\eta}_i) S_2(\bar{\eta}_j) \right)$$

Consider the expressions in $S_2(\eta_i) S_2(\eta_j)$ and S_3 in order of magnitude:

We will consider only the following orders of smallness: $\frac{1}{\eta}$, $\frac{1}{\sqrt{M\bar{\eta}}}$, $\frac{1}{(M\bar{\eta})}$.

$$S_2(\eta_i) S_2(\eta_j) = 1 + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta i \beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} \right) \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} \right) \bar{\eta}_i} + \frac{3}{128} \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} \right)^2 \bar{\eta}_i}$$

$$+ \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta i \beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right) \sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{9}{64} \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} \right) \left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right) \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right) \bar{\eta}_j} + \frac{3}{128} \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right)^2 \bar{\eta}_j} + \dots$$

(the following terms will give a contribution of a higher order of smallness than those considered $\frac{1}{\eta}$, $\frac{1}{\sqrt{M\bar{\eta}}}$, $\frac{1}{(M\bar{\eta})}$)

$$S_3(\bar{\eta}) = 1 + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta i \beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}} \right) \sqrt{\bar{\eta}}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}} \right) \bar{\eta}} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}}} \right)^2 \bar{\eta}}$$

$$\frac{\omega_\eta i \beta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} \right) \sqrt{\bar{\eta}_i}} \approx \frac{\omega_\eta i \beta}{\sqrt{\bar{\eta}_i}} \left(1 - \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{16\bar{\eta}_i} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{M\bar{\eta}}} + \frac{1}{M\bar{\eta}} + \frac{1}{(M\bar{\eta})^{3/2}},$$

$$\frac{\omega_\eta}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} \right) \bar{\eta}_i} \approx \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \left(1 - \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{16\bar{\eta}_i} \right) \sim \frac{1}{\bar{\eta}} + \frac{1}{\sqrt{M\bar{\eta}^3}} + \frac{1}{M\bar{\eta}^2},$$

$$\frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{\left(1 + \frac{i\omega_\eta \beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}}\right)^2 \bar{\eta}_i} \approx \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{\bar{\eta}_i} \left(1 - \frac{i\omega_\eta \beta}{2\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3\omega_\eta^2 \beta^2}{16\bar{\eta}_i}\right) \sim \frac{1}{M\bar{\eta}} + \frac{1}{(M\bar{\eta})^{3/2}} + \frac{1}{(M\bar{\eta})^2}.$$

Then

$$S_3(\bar{\eta}_i) \approx 1 + \frac{3\omega_\eta i\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3\omega_\eta^2 \beta^2}{32\bar{\eta}_i} + \frac{3\omega_\eta}{8\bar{\eta}_i},$$

$$S_2(\bar{\eta}_i)S_2(\bar{\eta}_j) \approx 1 + \frac{3\omega_\eta i\beta}{8\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3\omega_\eta i\beta}{8\sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{3\omega_\eta}{32\bar{\eta}_i} - \frac{3\omega_\eta}{32\bar{\eta}_j} + \frac{35\omega_\eta^2 \beta^2}{128\bar{\eta}_i} + \frac{35\omega_\eta^2 \beta^2}{128\bar{\eta}_j} - \frac{9\omega_\eta^2 \beta^2}{64\sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}}.$$

Let's transform the expression in the exponent in the integral over β :

$$i\beta r + \frac{\omega_\eta M \beta^2}{8} - i\beta \sum_i \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} + \frac{i\omega_\eta \beta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}} + \frac{\omega_\eta^2 \beta^2}{64} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1} = (a\beta + ib)^2 + b^2,$$

where

$$a = \frac{\sqrt{8\omega_\eta M + \omega_\eta^2 \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}}}{8}, \quad b = 4 \frac{r - \sum_i \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} + \frac{\omega_\eta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{8\omega_\eta M + \omega_\eta^2 \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1}}}.$$

$$\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{d\beta}{2\pi} e^{-(a\beta+ib)^2} e^{-b^2} \times$$

$$\times \left(\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3\omega_\eta i\beta}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3\omega_\eta^2 \beta^2}{32\bar{\eta}_i} + \frac{3\omega_\eta}{8\bar{\eta}_i}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left(1 - \frac{9\omega_\eta^2 \beta^2}{64\sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{3\omega_\eta i\beta}{8\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3\omega_\eta i\beta}{8\sqrt{\bar{\eta}_j}} + \left(\frac{35\omega_\eta^2 \beta^2}{128} - \frac{3\omega_\eta}{32}\right) \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j}\right)\right)\right)$$

Let's change the variable $a\beta + ib = x$:

$$\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{r^2} \int \frac{dx}{2\pi a} e^{-x^2} e^{-b^2} \times$$

$$\times \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3\omega_\eta b}{4a\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3\omega_\eta^2 x^2}{32a^2 \bar{\eta}_i} - \frac{3\omega_\eta^2 b^2}{32a^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3\omega_\eta}{8\bar{\eta}_i}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{1 - \frac{9\omega_\eta^2 x^2}{64a^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9\omega_\eta^2 b^2}{64a^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{3\omega_\eta b}{8a\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3\omega_\eta b}{8a\sqrt{\bar{\eta}_j}} + \right.\right.$$

$$+ \left(\frac{35}{128} \frac{\omega_\eta^2 x^2}{a^2} - \frac{35}{128} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2} - \frac{3}{32} \omega_\eta \right) \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \Bigg\}$$

and perform integration over x :

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{2\sqrt{\pi}ar^2} e^{-b^2} \times \\ & \times \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta b}{a\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{64} \frac{\omega_\eta^2}{a^2 \bar{\eta}_i} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \right) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \times \right. \\ & \left. \times \left\{ 1 - \frac{9}{128} \frac{\omega_\eta^2}{a^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{64} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta b}{a\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta b}{a\sqrt{\bar{\eta}_j}} + \left(\frac{35}{256} \frac{\omega_\eta^2}{a^2} - \frac{35}{128} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2} - \frac{3}{32} \omega_\eta \right) \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \right] \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

Let us introduce the notation:

$$\Sigma' = \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega_\eta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}}, \quad M' = \frac{\omega_\eta}{2} M + \frac{\omega_\eta^2}{16} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1},$$

then

$$b = \frac{r - \Sigma'}{\sqrt{M'}}, \quad a = \frac{\sqrt{M'}}{2},$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{(r + \Sigma')^2} \frac{e^{-\frac{r^2}{M'}}}{\sqrt{\pi M'}} \times \\ & \times \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta^2}{M' \bar{\eta}_i} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \right) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \times \right. \\ & \times \left\{ 1 - \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{16} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_j}} + \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{35}{64} \frac{\omega_\eta^2}{M'} - \frac{3}{32} \omega_\eta - \frac{35}{32} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2} \right) \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

The main contribution is made by the region $r \sim 1/\sqrt{M'}$. $\Sigma' \sim M\sqrt{\bar{\eta}}$, then $r/\Sigma' \sim 1/\sqrt{M'\bar{\eta}}$. Let us expand $1/(r + \Sigma')^2$ in powers of r/Σ' (B.4) and substitute this expansion:

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \int dr \left(1 - 2 \frac{r}{\Sigma'} + 3 \frac{r^2}{\Sigma'^2} \right) \frac{e^{-\frac{r^2}{M'}}}{\Sigma'^2 \sqrt{\pi M'}} \times \\ & \times \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta^2}{M' \bar{\eta}_i} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \right) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ 1 - \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{16} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_j}} + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{35}{64} \frac{\omega_\eta^2}{M'} - \frac{3}{32} \omega_\eta - \frac{35}{32} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2} \right) \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \\
& \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \frac{1}{\Sigma'^2} \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \times \right. \\
& \quad \times \left(1 + \frac{3 M'}{2 \Sigma'^2} - \frac{3}{2} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{9}{16} \frac{\omega_\eta^2}{\Sigma'^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3 \omega_\eta}{8 \bar{\eta}_i} + \frac{9}{16} \frac{\omega_\eta M'}{\Sigma'^2 \bar{\eta}_i} \right) + \\
& \quad + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ 1 + \frac{3 M'}{2 \Sigma'^2} - \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} - \frac{27}{64} \frac{\omega_\eta^2}{M' \Sigma'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{81}{64} \frac{\omega_\eta^2}{\Sigma'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_j}} - \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \left(\frac{3}{32} \omega_\eta + \frac{9}{64} \frac{\omega_\eta M'}{\Sigma'^2} + \frac{105}{64} \frac{\omega_\eta^2}{\Sigma'^2} \right) \right\} \Big]
\end{aligned}$$

Discarding terms of a higher order of smallness than $1/\bar{\eta}$ and $1/M$, we get

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^2} \right\rangle_{C_\eta} = \frac{1}{\Sigma'^2} \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3 M'}{2 \Sigma'^2} - \frac{3}{2} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3 \omega_\eta}{8 \bar{\eta}_i} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ 1 + \frac{3 M'}{2 \Sigma'^2} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{3}{32} \omega_\eta \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

We will calculate $\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^3} \right\rangle_{C_\eta}$:

$$\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^3} \right\rangle_{C_\eta} = \prod_{j=1}^M \int d\eta_j P(\eta_j) \frac{\left(\sum_i \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_k \bar{n}(\eta_k) \right)^3}.$$

After transformations similar to (B.5)-(B.9), we get

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^3} \right\rangle_{C_\eta} = \int \frac{dr}{2\sqrt{\pi}ar^3} e^{-b^2} \times \\
& \times \left[\sum_i \bar{n}^2(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i) \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta b}{a\sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{64} \frac{\omega_\eta^2}{a^2 \bar{\eta}_i} - \frac{3}{32} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3 \omega_\eta}{8 \bar{\eta}_i} \right) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j) \bar{p}(\eta_j) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{9}{128} \frac{\omega_\eta^2}{a^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{64} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta b}{a \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta b}{a \sqrt{\bar{\eta}_j}} + \left(\frac{35}{256} \frac{\omega_\eta^2}{a^2} - \frac{35}{128} \frac{\omega_\eta^2 b^2}{a^2} - \frac{3}{32} \omega_\eta \right) \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \Bigg]$$

Let us introduce the notation:

$$\Sigma' = \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega_\eta}{8} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-\frac{1}{2}}, \quad M' = \frac{\omega_\eta}{2} M + \frac{\omega_\eta^2}{16} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{-1},$$

then

$$b = \frac{r - \Sigma'}{\sqrt{M'}}, \quad a = \frac{\sqrt{M'}}{2},$$

$$\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^3} \right\rangle_{C_n} = \int \frac{dr}{(r + \Sigma')^3} \frac{e^{-\frac{r^2}{M'}}}{\sqrt{\pi M'}} \times$$

$$\times \left[\sum_i \bar{n}^2(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta^2}{M' \bar{\eta}_i} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \right) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j) \bar{p}(\eta_j) \times \right. \\ \times \left\{ 1 - \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{16} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_j}} + \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{35}{64} \frac{\omega_\eta^2}{M'} - \frac{3}{32} \omega_\eta - \frac{35}{32} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2} \right) \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \right]. \quad (\text{B.10})$$

The main contribution is made by the region $r \sim 1/\sqrt{M}$. $\Sigma' \sim M\sqrt{\bar{\eta}}$, then $r/\Sigma' \sim 1/\sqrt{M\bar{\eta}}$. Let us expand $1/(r + \Sigma')^3$ in powers of r/Σ' :

$$\frac{1}{(r + \Sigma')^3} = \frac{1}{\Sigma'^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{\Sigma'}\right)^3} \approx \frac{1}{\Sigma'^3} \left(1 - 3 \frac{r}{\Sigma'} + 6 \frac{r^2}{\Sigma'^2} \right) \quad (\text{B.11})$$

and substitute this decomposition into (B.10):

$$\left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k) \right)^3} \right\rangle_{C_n} = \int dr \left(1 - 3 \frac{r}{\Sigma'} + 6 \frac{r^2}{\Sigma'^2} \right) \frac{e^{-\frac{r^2}{M'}}}{\Sigma'^3 \sqrt{\pi M'}} \times$$

$$\times \left[\sum_i \bar{n}^2(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta^2}{M' \bar{\eta}_i} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \right) + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j) \bar{p}(\eta_j) \times \right. \\ \times \left\{ 1 - \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{16} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta r}{M' \sqrt{\bar{\eta}_j}} + \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{35}{64} \frac{\omega_\eta^2}{M'} - \frac{3}{32} \omega_\eta - \frac{35}{32} \frac{\omega_\eta^2 r^2}{M'^2} \right) \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \right].$$

We integrate over r :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^3} \right\rangle_{C_\eta} &= \frac{1}{\Sigma'^3} \left[\sum_i \bar{n}^2(\eta_i) \bar{p}^2(\eta_i) \left(1 + 3 \frac{M'}{\Sigma'^2} - \frac{9}{4} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta^2}{\Sigma'^2 \bar{\eta}_i} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} + \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta M'}{\Sigma'^2 \bar{\eta}_i} \right) + \right. \\ &+ \sum_{i \neq j} \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i) \bar{n}(\eta_j) \bar{p}(\eta_j) \left\{ 1 + 3 \frac{M'}{\Sigma'^2} - \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{27}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M' \Sigma'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta^2}{M' \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{81}{32} \frac{\omega_\eta^2}{\Sigma'^2 \sqrt{\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j}} - \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta}{\Sigma' \sqrt{\bar{\eta}_j}} - \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \left(\frac{3}{32} \omega_\eta + \frac{9}{32} \frac{\omega_\eta M'}{\Sigma'^2} + \frac{105}{32} \frac{\omega_\eta^2}{\Sigma'^2} \right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Discarding terms of a higher order of smallness than $1/\bar{\eta}$ and $1/M$, we get

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\left(\sum_{i=1}^M \bar{n}(\eta_i) \bar{p}(\eta_i)\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M \bar{n}(\eta_k)\right)^3} \right\rangle_{C_\eta} &= \frac{1}{\Sigma'^3} \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{M \omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{9}{4} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2} \sqrt{\bar{\eta}_i}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \right) + \right. \\ &\left. + \sum_{i \neq j} \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{M \omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2} \sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2} \sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{3}{32} \omega_\eta \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i} + \frac{1}{\bar{\eta}_j} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

Appendix C. Calculating the correlator and variance in the (2.40) formula for the $p_t - p_t$ correlation coefficient

We will calculate the numerator and denominator of the formula (2.40):

$$\begin{aligned} \text{cov}(p_F, p_B) &= \frac{\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \frac{9}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i}}{\left(S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2}\right)^2} + \\ &+ \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ \frac{1}{4} \frac{M\omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right\}}{\left(S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2}\right)^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} D_{p_F} &= \text{cov}(p_F, p_B) + \frac{\gamma + \omega_\mu}{\mu_F \left(S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2}\right)^2} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 - \frac{\omega_\eta}{\sqrt{\bar{\eta}_i} S_{1/2}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta M}{S_{1/2}^2}\right) - \\ &- \frac{\omega_\mu}{\mu_F \left(S_{1/2} - \frac{\omega_\eta}{8} S_{-1/2}\right)^3} \left[\sum_i \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \times \right. \\ &\left. \times \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{M\omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{9}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} - \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_j} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Then for the correlation coefficient $b_{p_t p_t}$

$$\begin{aligned} b_{p_t p_t} &= \left[\sum_{i=1}^M \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \frac{9}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ \frac{1}{4} \frac{M\omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right\} \right] \times \\ &\times \left[\sum_{i=1}^M \bar{n}^2(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\mu_F S_{1/2}} \right) + \frac{\gamma + \omega_\mu}{\mu_F} \sum_{i=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}^2(\bar{\eta}_i) \left(1 - \frac{\omega_\eta}{\sqrt{\bar{\eta}_i} S_{1/2}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta M}{S_{1/2}^2} \right) + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{n}(\bar{\eta}_i) \bar{p}(\bar{\eta}_i) \bar{n}(\bar{\eta}_j) \bar{p}(\bar{\eta}_j) \left\{ \frac{1}{4} \frac{M\omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{\omega_\mu \left(1 - \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} - \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_j} \right)}{\mu_F S_{1/2}} \right\} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Using an explicit form of dependencies (1.13):

$$\begin{aligned} b_{p_t p_t} &= \left[\sum_{i=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_i} \frac{9}{16} \omega_\eta + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_i^{3/4} \bar{\eta}_j^{-3/4} \left\{ \frac{1}{4} \frac{M\omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_j}} \right\} \right] \times \\ &\times \left[\sum_{i=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_i} \omega_\eta \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta}{\mu_F S_{1/2}} \right) + \frac{\gamma + \omega_\mu}{\mu_F} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i \left(1 - \frac{\omega_\eta}{\sqrt{\bar{\eta}_i} S_{1/2}} + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta M}{S_{1/2}^2} \right) + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_i^{3/4} \bar{\eta}_j^{-3/4} \left\{ \frac{1}{4} \frac{M\omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{\omega_\mu \left(1 - \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} - \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_j} \right)}{\mu_F S_{1/2}} \right\} \right]^{-1}, \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{\eta}_i^{-3/4} \bar{\eta}_j^{-3/4} \left\{ \frac{1}{4} \frac{M\omega_\eta}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_i}} - \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta}{S_{1/2}\sqrt{\bar{\eta}_j}} - \frac{\omega_\mu \left(1 - \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_i} - \frac{3}{16} \frac{\omega_\eta}{\bar{\eta}_j}\right)}{\mu_F S_{1/2}} \right\}^{-1}, \quad (\text{C.4})$$

$$b_{p_i p_i} = \left[\frac{9}{16} \omega_\eta S_{1/2} + \frac{1}{4} \frac{M\omega_\eta S_{3/4}^2}{S_{1/2}^2} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta S_{3/4} S_{1/4}}{S_{1/2}} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{9}{16} \omega_\eta S_{1/2} + \frac{M\omega_\eta S_{3/4}^2}{4S_{1/2}^2} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta S_{3/4} S_{1/4}}{S_{1/2}} - \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta^2}{\mu_F} + \frac{\gamma + \omega_\mu}{\mu_F} \left(S_1 - \omega_\eta + \frac{3}{4} \frac{\omega_\eta M S_1}{S_{1/2}^2} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega_\mu S_{3/4}^2}{\mu_F S_{1/2}} + \frac{3}{8} \frac{\omega_\eta \omega_\mu S_{-1/4} S_{3/4}}{\mu_F S_{1/2}} \right]^{-1}. \quad (\text{C.5})$$

Appendix D. Method for calculating average values of observables at high string density up to the second order in $1/\bar{\eta}$ for a fixed total number of strings

One can easily verify that for the string distribution (3.3) we have the following *exact* relations:

$$\langle 1 \rangle = 1, \langle \nu_k \rangle = 0, \langle \nu_k^2 \rangle = \bar{\eta}_k \omega_\eta \left(1 - \frac{\bar{\eta}_k}{N} \right), \langle \nu_k^4 \rangle = 3\bar{\eta}_k^2 \omega_\eta^2 \left(1 - \frac{\bar{\eta}_k}{N} \right)^2, \quad (\text{D.1})$$

$$\langle \nu_k \nu_m \rangle = -\bar{\eta}_k \bar{\eta}_m \frac{\omega_\eta}{N}, \langle \nu_k \nu_m^3 \rangle = -3\bar{\eta}_k \bar{\eta}_m^2 \frac{\omega_\eta^2}{N} \left(1 - \frac{\bar{\eta}_m}{N} \right),$$

$$\langle \nu_i \nu_k \nu_m^2 \rangle = -\bar{\eta}_i \bar{\eta}_k \bar{\eta}_m \frac{\omega_\eta^2}{N} \left(1 - 3\frac{\bar{\eta}_m}{N} \right),$$

$$\langle \nu_k^2 \nu_m^2 \rangle = \bar{\eta}_k \bar{\eta}_m \omega_\eta^2, \langle \nu_i \nu_j \nu_k \nu_m \rangle = 3\bar{\eta}_i \bar{\eta}_j \bar{\eta}_k \bar{\eta}_m \frac{\omega_\eta^2}{N^2}.$$

If $\alpha \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i$ is odd, then we have

$$\langle \nu_i^{\alpha_1} \nu_j^{\alpha_2} \nu_k^{\alpha_3} \dots \rangle = 0, \text{ at } \alpha \equiv \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2l + 1. \quad (\text{D.2})$$

We note that the relations (D.1) are valid only if $i \neq j \neq k \neq m$. Really, we see that $\langle \nu_k \nu_m \rangle|_{k=m} \neq \langle \nu_k^2 \rangle$, $\langle \nu_k \nu_m^3 \rangle|_{k=m} \neq \langle \nu_k^4 \rangle$ and so on. That is a consequence of the correlations between fluctuations of the η_i in different cells arising due to the conservation of the total number of strings (see [58]).

Use of the relations (D.1) and (D.2) enables drastically simplify the calculation of various averages in this model, because all integrations over the η_i come down to using these simple rules.

We will calculate the asymptotes of the LRC coefficients (D.3) at high string density supposing that all $\bar{\eta}_i \gg 1$. We will also suppose that $M \gg 1$, because as it was discussed in [43; 52] with a realistic string radius $r_{str} = 0.2 \div 0.3$ fm we need

lattices with a large number of cells $M \sim 10^2$ and 10^4 for a description of pp and AA collisions correspondingly.

$$b_{nn} = \frac{\text{cov}(n_B, n_F)}{\omega_\mu \langle n \rangle + \text{cov}(n_B, n_F)}, \quad b_{pn} = \frac{\langle n \rangle}{\langle p_t \rangle} \frac{\text{cov}(p_B, n_F)}{\omega_\mu \langle n \rangle + \text{cov}(n_B, n_F)}. \quad (\text{D.3})$$

D.1. Averaging over String Configurations

We will demonstrate the technique of the analytical calculation of the different lattice averages with the distribution (3.3) by using as example the most complicated calculation of the mean value of the intensive variable — the mean transverse momentum of the produced particles, $\langle p_t \rangle$.

Regarding the accuracy of the calculation, we need to take into account the terms of the order $1/\bar{\eta}$, $1/\bar{\eta}^2$, $1/(M\bar{\eta})$ and $1/(M\bar{\eta}^2)$. Because, as we will see later, the terms of the leading order in M (the $1/\bar{\eta}$ and $1/\bar{\eta}^2$ in the case of $\langle p_t \rangle$ calculation) are cancelled when calculating the covariances entering expressions (D.3) for the LRC coefficients b_{nn} and b_{pn} . Moreover, in the case of homogeneous string spreading in transverse plane, when all $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}$, we have additional mutually cancellation of the contributions of the order of $1/(M\bar{\eta})$ to the LRC coefficients calculated with the distribution (3.3) corresponding to a fixed total number of initial strings. In last case the only contribution to the LRC coefficient originates from the terms of the order of $1/(M\bar{\eta}^2)$.

As it was shown in [43] with the prescriptions (1.13) we can find $\langle p_t \rangle$ by calculating the following average over string configurations:

$$\frac{\langle p_B \rangle}{p_0} = \left\langle \frac{\sum_{i=1}^M \eta_i^{\frac{3}{4}}}{\sum_{k=1}^M \eta_k^{\frac{1}{2}}} \right\rangle \equiv \langle Y Z \rangle. \quad (\text{D.4})$$

Here we introduce the following notations

$$Y \equiv \sum_{i=1}^M \eta_i^{\frac{3}{4}}, \quad Z \equiv \left(\sum_{i=1}^M \eta_i^{\frac{1}{2}} \right)^{-1}. \quad (\text{D.5})$$

Taking into account the definition (3.11) we can present the Y with the accuracy up to ν_i^4 as follows

$$Y = M S_{3/4} \left[1 + \frac{1}{M S_{3/4}} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{\frac{3}{4}} \left(\frac{3\nu_i}{4\bar{\eta}_i} - \frac{3\nu_i^2}{32\bar{\eta}_i^2} + \frac{15\nu_i^3}{384\bar{\eta}_i^3} - \frac{45\nu_i^4}{2048\bar{\eta}_i^4} \right) \right], \quad (\text{D.6})$$

where we have introduced the following convenient notation

$$S_\beta \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^\beta. \quad (\text{D.7})$$

To calculate the Z with the same accuracy we at first have to use the expansion

$$\sum_{i=1}^M \eta_i^{\frac{1}{2}} = M S_{1/2} \left[1 + \frac{1}{M S_{1/2}} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu_i}{2\bar{\eta}_i} - \frac{\nu_i^2}{8\bar{\eta}_i^2} + \frac{\nu_i^3}{16\bar{\eta}_i^3} - \frac{5\nu_i^4}{128\bar{\eta}_i^4} \right) \right] \equiv M S_{1/2} [1+a], \quad (\text{D.8})$$

where

$$a = \frac{1}{M S_{1/2}} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu_i}{2\bar{\eta}_i} - \frac{\nu_i^2}{8\bar{\eta}_i^2} + \frac{\nu_i^3}{16\bar{\eta}_i^3} - \frac{5\nu_i^4}{128\bar{\eta}_i^4} \right). \quad (\text{D.9})$$

Then we can write

$$Z \equiv \frac{1}{M S_{1/2} [1+a]} = \frac{1}{M S_{1/2}} [1 - a + a^2 - a^3 + a^4] \quad (\text{D.10})$$

Multiplying Y by Z and taking into account only the terms $\nu_i^{\alpha_1} \nu_j^{\alpha_2} \nu_k^{\alpha_3} \nu_m^{\alpha_4}$, satisfying the conditions $\alpha = \sum_i \alpha_i = 2$ or 4 (see formulas (D.1) and (D.2)), we find

$$YZ = \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} [1 + A_1 + A_2 + B_1 + B_2 + C]. \quad (\text{D.11})$$

Here the A_1 and A_2 collects four terms with $\alpha = 2$:

$$A_1 = \frac{1}{8M S_{1/2}} \sum_{i=1}^M \frac{\nu_i^2}{\bar{\eta}_i^{3/2}} - \frac{3}{32M S_{3/4}} \sum_{i=1}^M \frac{\nu_i^2}{\bar{\eta}_i^{5/4}}, \quad (\text{D.12})$$

$$A_2 = \frac{1}{4M^2 S_{1/2}^2} \sum_{i,j}^M \frac{\nu_i \nu_j}{\bar{\eta}_i^{-1/2} \bar{\eta}_j^{-1/2}} - \frac{3}{8M^2 S_{1/2} S_{3/4}} \sum_{i,j}^M \frac{\nu_i \nu_j}{\bar{\eta}_i^{-1/2} \bar{\eta}_j^{-1/4}} \quad (\text{D.13})$$

and the B_1 , B_2 and the C collect twelve terms with $\alpha = 4$:

$$B_1 = \frac{5}{128M S_{1/2}} \sum_{i=1}^M \frac{\nu_i^4}{\bar{\eta}_i^{7/2}} - \frac{45}{2048M S_{3/4}} \sum_{i=1}^M \frac{\nu_i^4}{\bar{\eta}_i^{13/4}} + \quad (\text{D.14})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{64M^2S_{1/2}^2} \sum_{i,j}^M \frac{\nu_i^2 \nu_j^2}{\bar{\eta}_i^{3/2} \bar{\eta}_j^{3/2}} - \frac{3}{256M^2S_{1/2}S_{3/4}} \sum_{i,j}^M \frac{\nu_i^2 \nu_j^2}{\bar{\eta}_i^{3/2} \bar{\eta}_j^{5/4}}, \\
B_2 = & \frac{1}{16M^2S_{1/2}^2} \sum_{i,j}^M \frac{\nu_i \nu_j^3}{\bar{\eta}_i^{1/2} \bar{\eta}_j^{5/2}} - \frac{5}{256M^2S_{1/2}S_{3/4}} \sum_{i,j}^M \frac{\nu_i \nu_j^3}{\bar{\eta}_i^{1/2} \bar{\eta}_j^{9/4}} - \frac{3}{64M^2S_{1/2}S_{3/4}} \sum_{i,j}^M \frac{\nu_i \nu_j^3}{\bar{\eta}_i^{1/4} \bar{\eta}_j^{5/2}} \quad (D.15) \\
& - \frac{3}{32M^3S_{1/2}^3} \sum_{i,j,k}^M \frac{\nu_i \nu_j \nu_k^2}{\bar{\eta}_i^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2} \bar{\eta}_k^{3/2}} - \frac{3}{128M^3S_{1/2}^2S_{3/4}} \sum_{i,j,k}^M \frac{\nu_i \nu_j \nu_k^2}{\bar{\eta}_i^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2} \bar{\eta}_k^{5/4}} - \frac{3}{32M^3S_{1/2}^2S_{3/4}} \sum_{i,j,k}^M \frac{\nu_i \nu_j \nu_k^2}{\bar{\eta}_i^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/4} \bar{\eta}_k^{3/2}}, \\
C = & \frac{1}{16M^4S_{1/2}^4} \sum_{i,j,k}^M M \frac{\nu_i \nu_j \nu_k \nu_m}{\bar{\eta}_i^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2} \bar{\eta}_k^{1/2} \bar{\eta}_m^{1/2}} - \frac{3}{32M^4S_{1/2}^3S_{3/4}} \sum_{i,j,k}^M M \frac{\nu_i \nu_j \nu_k \nu_m}{\bar{\eta}_i^{1/2} \bar{\eta}_j^{1/2} \bar{\eta}_k^{1/2} \bar{\eta}_m^{1/4}}. \quad (D.16)
\end{aligned}$$

We will see below that the leading contributions to $\langle p_t \rangle$ originating from the terms A_1 , A_2 , B_1 , B_2 and C are of the following order:

$$A_1 \sim \frac{1}{\bar{\eta}}, \quad A_2 \sim \frac{1}{M\bar{\eta}}, \quad B_1 \sim \frac{1}{\bar{\eta}^2}, \quad B_2 \sim \frac{1}{M\bar{\eta}^2}, \quad C \sim \frac{1}{M^2\bar{\eta}^2}. \quad (D.17)$$

So taking into account the remark in the beginning of the present Section D.1 in the leading approximation we can do not take the C contribution into consideration.

Now to calculate the $\langle p_t \rangle$ by (D.4) we need to average the expression (D.11) over string fluctuations, given by the distribution (3.3):

$$\frac{\langle p_t \rangle}{p_0} = \langle YZ \rangle = \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} [1 + \langle A_1 \rangle + \langle A_2 \rangle + \langle B_1 \rangle + \langle B_2 \rangle + \langle C \rangle]. \quad (D.18)$$

We can do this using the rules (D.1) and (D.2) obtained above. At that we have to take into account that these rules are valid only for non coinciding arguments (see the remark after the formula (D.2)). So at first we must express all sums entering the formulae (D.12)-(D.16) through the sums with non coinciding arguments. We can do it easily using the following obvious relations:

$$\sum_{i,j} = \sum_{i \neq j} + \sum_{i=j}, \quad \sum_{i,j,k} = \sum_{i \neq j \neq k} + \sum_{i=j \neq k} + \sum_{i \neq j=k} + \sum_{i=k \neq j} + \sum_{i=j=k}, \quad (D.19)$$

and so on. Then for terms of the general form we have

$$\sum_{i,j} \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1} \nu_j^{\alpha_2} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1} \bar{\eta}_j^{\beta_2}} = \sum_{i \neq j} \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1} \nu_j^{\alpha_2} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1} \bar{\eta}_j^{\beta_2}} + \sum_i \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1 + \alpha_2} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1 + \beta_2}}, \quad \sum_{i,j,k} \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1} \nu_j^{\alpha_2} \nu_k^{\alpha_3} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1} \bar{\eta}_j^{\beta_2} \bar{\eta}_k^{\beta_3}} = \quad (D.20)$$

$$= \sum_{i \neq j \neq k} \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1} \nu_j^{\alpha_2} \nu_k^{\alpha_3} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1} \bar{\eta}_j^{\beta_2} \bar{\eta}_k^{\beta_3}} + \sum_{i \neq k} \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1 + \alpha_2} \nu_k^{\alpha_3} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1 + \beta_2} \bar{\eta}_k^{\beta_3}} + \sum_{i \neq j} \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1} \nu_j^{\alpha_2 + \alpha_3} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1} \bar{\eta}_j^{\beta_2 + \beta_3}} + \sum_{i \neq j} \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1 + \alpha_3} \nu_j^{\alpha_2} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1 + \beta_3} \bar{\eta}_j^{\beta_2}} + \sum_i \frac{\langle \nu_i^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \rangle}{\bar{\eta}_i^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}}.$$

After that, using the rules (D.1) and (D.2) and taking also into account that $\bar{N} = M S_1$, we find the answer for $\langle p_t \rangle$ as the linear combination of the sums of the following type:

$$\sum_i \bar{\eta}_i^\beta = M S_1 \beta, \quad \sum_{i \neq j} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma, \quad \sum_{i \neq j \neq k} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma \bar{\eta}_k^\delta, \quad (\text{D.21})$$

and so on. Now to express all these sums through the S_β , defined by (D.7), we have to use the relations inverse to (D.19):

$$\sum_{i \neq j} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma = \sum_{i,j} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma - \sum_{i=j} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma = \left(\sum_i \bar{\eta}_i^\beta \right) \left(\sum_j \bar{\eta}_j^\gamma \right) - \sum_i \bar{\eta}_i^{\beta+\gamma} = M^2 S_\beta S_\gamma - M S_{\beta+\gamma}, \quad (\text{D.22})$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j \neq k} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma \bar{\eta}_k^\delta &= \sum_{i,j,k} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma \bar{\eta}_k^\delta - \sum_{i=j,k} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma \bar{\eta}_k^\delta - \sum_{i,j=k} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma \bar{\eta}_k^\delta - \sum_{i=k,j} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma \bar{\eta}_k^\delta + 2 \sum_{i=j=k} \bar{\eta}_i^\beta \bar{\eta}_j^\gamma \bar{\eta}_k^\delta = \\ &= M^3 S_\beta S_\gamma S_\delta - M^2 S_\beta S_{\gamma+\delta} - M^2 S_\gamma S_{\beta+\delta} - M^2 S_\delta S_{\beta+\gamma} + 2M S_{\beta+\gamma+\delta}. \end{aligned}$$

Using this technique we can easily check that the leading orders of the terms in the A_1 , A_2 , B_1 , B_2 and the C are given by (D.17). Then, applying this approach and taking into account only the terms of the order $1/\bar{\eta}$, $1/\bar{\eta}^2$, $1/(M\bar{\eta})$ and $1/(M\bar{\eta}^2)$ in the contributions A_1 , A_2 , B_1 , B_2 (see the remark in the beginning of the present Section) we find

$$\begin{aligned} \frac{\langle p_t \rangle}{p_0} = \langle YZ \rangle &= \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}} \left\{ 1 + \omega \left(\frac{S_{-1/2}}{8 S S 12} - \frac{3 S_{-1/4}}{32 S_{3/4}} \right) + \omega^2 \left(\frac{S_{-1/2}^2}{64 S_{1/2}^2} - \frac{3 S_{-1/2} S_{-1/4}}{256 S_{1/2} S_{3/4}} + \right. \right. \\ &+ \frac{15 S_{-3/2}}{128 S S 12} - \frac{135 S_{-5/4}}{2048 S_{3/4}} \left. \right) + \frac{1}{M} \left[\omega \left(\frac{3}{32 S_1} + \frac{1}{4 S_{1/2}^2} - \frac{3 S S 14}{8 S S 12 S_{3/4}} \right) + \omega^2 \left(\frac{7 S_{-1}}{32 S_{1/2}^2} - \frac{3 S_{-1/2}}{32 S_{1/2}^3} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{29 S_{-1/2}}{256 S_1 S S 12} - \frac{3 S_{1/4} S_{-1/2}}{32 S_{1/2}^2 S_{3/4}} + \frac{231 S_{-1/4}}{1024 S_1 S_{3/4}} - \frac{3 S_{-1/4}}{128 S_{1/2}^2 S_{3/4}} - \frac{57 S_{-3/4}}{256 S_{1/2} S_{3/4}} \right) \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

D.2. Calculation of the Long-Range Correlation Coefficients

Using the methods, developed in previous Section D.1 with the example of the $\langle p_t \rangle$ calculation, we can now easily to find all other averages entering the correlation coefficients b_{nn} and b_{pn} defined by (D.3) with necessary accuracy.

In accordance with the prescriptions (1.13), taking into account (D.8) and applying the developed technique we find

$$\frac{\langle n \rangle}{\mu} = \left\langle \sum_{i=1}^M \eta_i^{\frac{1}{2}} \right\rangle = M S S_{12} \left\{ 1 - \omega \frac{S_{-1/2}}{8 S S_{12}} - \omega^2 \frac{15 S_{-3/2}}{128 S S_{12}} + \frac{1}{M} \left[\omega \frac{1}{8 S_1} + \omega^2 \frac{15 S_{-1/2}}{64 S_1 S S_{12}} \right] \right\}. \quad (\text{D.24})$$

Using the general expression for $\langle p_B n_F \rangle$:

$$\frac{\langle p_B n_F \rangle}{p_0 \mu} = \left\langle \sum_{i=1}^M \eta_i^{\frac{3}{4}} \right\rangle, \quad (\text{D.25})$$

obtained in [43] for the LRC, and the formula (D.6) we also find that in the framework of the developed approach:

$$\frac{\langle p_B n_F \rangle}{p_0 \mu} = M S_{3/4} \left\{ 1 - \omega \frac{3 S_{-1/4}}{32 S_{3/4}} - \omega^2 \frac{135 S_{-5/4}}{2048 S_{3/4}} + \frac{1}{M} \left[\omega \frac{3}{32 S_1} + \omega^2 \frac{135 S_{-1/4}}{1024 S_1 S_{3/4}} \right] \right\}. \quad (\text{D.26})$$

Finally by this technique taking into account the formula (D.8) we find for the contribution of the LRC to $\langle n_B n_F \rangle$ the following expression:

$$\begin{aligned} \frac{\langle n_B n_F \rangle}{\mu^2} = M^2 S_{1/2}^2 \left\{ 1 - \frac{\omega S_{-1/2}}{4 S S_{12}} - \frac{\omega^2}{64 S S_{12}} \left(\frac{S_{-1/2}^2}{S S_{12}} - 15 S_{-3/2} \right) + \right. & (\text{D.27}) \\ \left. + \frac{1}{M} \left[\frac{\omega}{4 S_{1/2}^2} + \frac{\omega^2}{4 S S_{12}} \left(\frac{7 S_{-1}}{8 S S_{12}} + \frac{S_{-1/2}}{S_1} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Now we can calculate the covariances (the correlators) entering the correlation coefficients b_{nn} and b_{pn} (see the formulae (D.3)):

$$\frac{\text{cov}(n_B, n_F)}{\mu^2} = \frac{\langle n_B n_F \rangle - \langle n^2 \rangle}{\mu^2} = M \left[\frac{\omega_\eta}{4} \left(1 - \frac{S_{1/2}^2}{S_1} \right) + \frac{\omega_\eta^2}{32} \left(7 S_{-1} - 6 \frac{S_{1/2} S_{-1/2}}{S_1} \right) \right], \quad (\text{D.28})$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{cov}(p_B, n_F)}{p_0 \mu} = \frac{\langle p_B n_F \rangle - \langle p_t \rangle \langle n \rangle}{p_0 \mu} = \frac{\omega_\eta}{4} \left(\frac{3 S S_{14}}{2 S S_{12}} - \frac{S_{3/4}}{S_{1/2}^2} - \frac{S_{3/4}}{2 S_1} \right) + & (\text{D.29}) \\ + \frac{\omega_\eta^2}{8} \left(\frac{57 S_{-3/4}}{32 S S_{12}} - \frac{21 S_{-1/4}}{32 S_1} + \frac{3 S_{-1/4}}{16 S_{1/2}^2} - \frac{7 S_{3/4} S_{-1}}{4 S_{1/2}^2} + \frac{3 S S_{14} S_{-1/2}}{8 S_{1/2}^2} + \frac{S_{3/4} S_{-1/2}}{S_{1/2}^3} - \frac{S_{3/4} S_{-1/2}}{S_1 S S_{12}} \right). \end{aligned}$$

We really see that all terms proportional M^2 in formula (D.27) for $\langle n_B n_F \rangle$ are cancelled by the terms of this order in $\langle n^2 \rangle$. similarly, all terms proportional M in

formula (D.26) for $\langle p_B n_F \rangle$ are cancelled by the terms of this order in the product $\langle p_t \rangle \langle n \rangle$, given by the formulas (D.23) and (D.24).

Moreover if we will go to the case with a homogenous string distribution in the transverse plane with some mean string density, corresponding to the same mean number, $\bar{\eta}$, of initial strings in a lattice (grid) cell, when all $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}$, then we will have

$$S_\beta \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i^\beta = \bar{\eta}^\beta . \quad (\text{D.30})$$

In this case all contributions proportional to ω in formulae (D.27) and (D.26) for the correlators (covariances) $\text{cov}(n_B, n_F)$ and $\text{cov}(p_B, n_F)$ are also mutually cancelled and only the contributions of the terms of the order ω^2 survive. In this simple case the formulae for the correlators (covariances) reduce to

$$\frac{\text{cov}(n_B, n_F)}{\mu^2} = M \frac{\omega_\eta^2}{32 \bar{\eta}} , \quad (\text{D.31})$$

$$\frac{\text{cov}(p_B, n_F)}{p_0 \mu} = -\frac{\omega_\eta^2}{128 \bar{\eta}^2} . \quad (\text{D.32})$$