

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Баляев Иван Алексеевич

Прогнозирование сближений и соударений  
астероидов с Землёй и другими планетами

Научная специальность 1.3.1. Физика космоса, астрономия

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
Шайдулин Вахит Шамильевич,  
к. ф.-м. н.

Санкт-Петербург  
2023

# Оглавление

Введение . . . . .	4
Развитие представлений об астероидной опасности . . . . .	4
Импактные события, произошедшие ранее . . . . .	6
Современное состояние проблемы . . . . .	7
Исследования, проводившиеся в СПбГУ . . . . .	10
Глава 1 Эксперименты с многомерным варьированием начальных данных . . . . .	22
1.1 Постановка задачи . . . . .	22
1.2 Эволюция взаимного расположения «щелей» . . . . .	22
1.3 Трёхмерное варьирование в пространстве скоростей . . . . .	26
1.4 Шестимерное варьирование по координатам и скоростям . . . . .	27
Глава 2 Ускорение численного интегрирования . . . . .	31
2.1 Предпосылки создания новой программы . . . . .	31
2.2 Модификация метода Гаусса–Эверхарта . . . . .	33
2.3 Организация и оптимизация вычислений . . . . .	37
2.4 Тестирование новой программы . . . . .	41
Глава 3 Эксперименты Монте-Карло . . . . .	44
3.1 200 астероидов . . . . .	44
3.2 Сканирование пространства элементов орбит . . . . .	49
3.3 Первый массовый расчёт вероятностей соударения . . . . .	53
3.4 Второй массовый расчёт вероятностей соударения . . . . .	56
Заключение . . . . .	60
Литература . . . . .	61

Приложение 1: вероятности соударения для 200 астероидов . . . . .	69
Пояснения к таблице . . . . .	69
Приложение 2: программный код $R^0$ . . . . .	75
Комментарий к коду . . . . .	75
Программный код . . . . .	75

# Введение

## Развитие представлений об астероидной опасности

В настоящее время мало кто сомневается в актуальности проблемы, однако далеко не всегда астероидная опасность была очевидной. Был даже случай, когда существование «падающих с неба камней» отрицалось научным сообществом. Кратко опишем историю знаний о малых телах Солнечной системы и опасности, которую они представляют. Существенная часть этого и следующего раздела составлены по материалам книги «Астероидно-кометная опасность. Вчера, сегодня, завтра» [2].

## Астероидная опасность в фольклоре

Описания падения небольших космических тел иногда можно обнаружить в устном народном творчестве. Неудивительно, ведь крупные болиды представляют собой весьма впечатляющее зрелище. Одним из примеров является карело-финский эпос «Калевала», отрывок из которого в прозаическом пересказе Крусанова приведён ниже.

«Содрогнулось небо, распахнулись двери воздуха, и помчалась огненная искра красной каплей вниз. Шипя в толщах туч, прошла она сквозь все девять небес и упала на землю. Увидел летящую искру старый Вяйнёмейнен и сказал Ильмаринену:

— Пойдем разузнаем, что за огонь спустился с небес на землю. И отправились герои в путь — туда, куда упало небесное пламя. Долго шли они в темноте под холодными звездами, пока не вышли к реке Неве, разлившейся перед ними в широкое море».

Этот отрывок примечателен также тем, что описывает явление электрофонного болида, когда одновременно с падением слышен специфический

звук. Иногда это падение отождествляют с кратером Каали в Эстонии возрастом около 3500 лет, но, естественно, наверняка сказать нельзя.

## XXVIII век и ранее

До открытия первых астероидов об опасности «падающих с неба камней» было известно немного. Настолько немного, что Парижская Академия Наук в 1772 году сделала заключение о невозможности падения камней с неба. Справедливости ради стоит отметить, что космическое происхождение камней тогда не рассматривалось, а имеющиеся гипотезы не выдерживали критики.

## XIX век

В начале XIX века было сделано сразу два важных шага к осознанию астероидно-кометной опасности. Во-первых, были открыты первые астероиды. Во-вторых, в это же время начиналось создание геохронологической шкалы. Тогда же были высказаны идеи катастрофизма, подразумевающие резкие изменения видового состава вследствие некоторых масштабных событий, катастроф. Действительно, ископаемые остатки, или фоссилии, демонстрируют резкие изменения состава между слоями при относительной однородности внутри слоя. Казалось бы, имеющихся данных уже хватает, чтобы высказать предположение о связи катастроф с астероидами. Однако, после открытия в 1801-1807 годах 4 астероидов наступил длительный перерыв до 1845 года. К тому времени идеи катастрофизма уже уступили место актуализму, представлениям об однообразии геологических процессов прошлого и настоящего. Только значительно позже произошло возрождение этих идей в форме неокатастрофизма.

Во второй половине XIX века быстро увеличивается количество открытых астероидов. В 1868 году был открыт сотый астероид, одновременно количество известных короткопериодических комет уже достигло десяти. В конце века для поиска астероидов начала применяться фотография. Наконец, в 1898 году был открыт первый астероид, сближающийся с Землёй, (433) Эрос.

## XX век

Первые астероиды, пересекающие орбиту Земли, были открыты в первой половине XX века, в частности, (1862) Аполлон в 1932 году и (1566) Икар в 1949 году. В 1908 году произошло Тунгусское событие, наиболее крупное вторжение космического тела в атмосферу Земли за последнее время. В начале XX века были проведены исследования Аризонского кратера с целью извлечения метеорита. Вопрос астероидно-кометной опасности постепенно обрастал научными данными.

Открытие импактитов, горных пород, образующихся при столкновении крупных метеоритов с поверхностью, а также аэро- и спутниковая съёмка позволили найти десятки крупных метеоритных кратеров на Земле. К середине века неплохой точности достигла радиоизотопная датировка, уточнившая абсолютные значения возраста слоёв на геохронологической шкале. Один из крупнейших кратеров, Чиксулуб, открытый в 1978 году, по возрасту совпал с массовым вымиранием видов примерно 65 миллионов лет назад. При этом развитие наблюдательной техники позволило открывать десятки, а потом и сотни околоземных астероидов ежегодно. В настоящее время даже тысячи.

Открытия второй половины XX века привели к окончательному осознанию астероидно-кометной опасности и способствовали пробуждению интереса к теме. Таким образом, только в последние десятилетия эта тема начала активно изучаться, а реальность опасности не вызывает сомнений.

## Импактные события, произошедшие ранее

На сегодняшний день известно множество примеров из прошлого, прежде всего из истории жизни на Земле. Не все известные столкновения можно надёжно связать с вымираниями, но, тем не менее, для цивилизации повторение подобного не сулит ничего хорошего. Некоторые меньшие по масштабу столкновения происходили в течение человеческой истории.

### Крупнейшие известные столкновения в истории Земли

Большие ударные кратеры на поверхности Земли также называют астроблемами. Ещё одно название для следов падения космических тел — им-

пактные структуры. Список подтверждённых импактных структур можно найти на сайте (<https://www.unb.ca/fredericton/science/research/passc/>). Более полный список, включающий предполагаемые и опровергнутые импактные структуры, есть на сайте ([labmpg.sccc.ru](http://labmpg.sccc.ru)).

Можно заметить, что подтверждённых кратеров возрастом менее миллиона лет в полтора раза больше, чем кратеров старше 600 млн лет. Под воздействием различных процессов кратеры на Земле постепенно разрушаются. Помимо обычной эрозии, одним из таких процессов является обновление океанической коры. Учитывая её характерный возраст, видимо, даже в пределах фанерозоя большая часть импактных событий прошлого так и останется неизвестной.

## Некоторые наиболее заметные столкновения в истории человечества

Пожалуй, самым известным до недавнего времени падением небесного тела было Тунгусское событие. 30 июня 1908 года в Восточной Сибири наблюдался очень яркий болид, полёт которого завершился мощным взрывом, слышимым на расстоянии в 1000 км.

### Челябинский метеорит

15 февраля 2013 года небольшой астероид вошёл в атмосферу Земли к востоку от Челябинска и двигался на запад. Вблизи Челябинска астероид разрушился, что привело к резкому увеличению свечения и выглядело как взрыв. Остатки выпали в виде множества метеоритов к западу, самый большой из которых, массой более 500 кг, попал в озеро Чебаркуль.

## Современное состояние проблемы

Тема астероидно-кометной опасности в настоящее время развивается особенно интенсивно. Помимо научного знания, представляющего самостоятельную ценность, эта тема содержит и прикладные задачи, прежде всего обеспечение астероидно-кометной безопасности. Данную задачу можно разделить на получение информации об астероидах путём наблюдений,

прогнозирование возможных соударений и минимизацию ущерба. Минимизация ущерба может быть достигнута, в том числе, эвакуацией из зоны поражения, что явно выходит за рамки астрономии и потому подробно обсуждаться здесь не будет.

## Наблюдения

В контексте астероидно-кометной опасности задачу астрономических наблюдений можно разделить на открытие и уточнение орбит опасных небесных тел. Для открытия важным является широкое поле зрения, в то время как точность измерений может быть посредственной. Для уточнения, наоборот, более важна точность измерения положения. Хотя, в принципе, снижение погрешности может быть достигнуто и количеством наблюдений. Почти все новые астероиды и кометы в настоящее время открываются с помощью автоматизированных обзоров неба. В последние годы по количеству открытий околоземных объектов лидируют Pan-STARRS и Catalina. Из российских проектов можно упомянуть ISON и МАСТЕР, но их возможности здесь существенно слабее. Тем не менее, их регулярные открытия подтверждают, что крупнейшие обзоры не обеспечивают полное слежение за небом и многое пропускают.

Важной частью как определения орбиты, так и прогнозирования соударений, является модель Солнечной системы. В контексте настоящей диссертации особого упоминания заслуживают разработанные в ИПА РАН эфемериды EPM (<https://iaaras.ru/dept/ephemeris/epm/>), а также эфемериды DE ([https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/eph\\_export.html](https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/eph_export.html)), созданные в JPL NASA.

Определение орбиты может производиться, например, на основе метода Гаусса, использующего три наблюдения. Каждое наблюдение представляет собой определение склонения и прямого восхождения, то есть две независимых величины. Таким образом, за три наблюдения можно получить шесть независимых величин, необходимых для определения шести элементов орбит. Одним из примеров является недавно разработанный в ИПА РАН метод [8] [7], основанный на переборе орбитальных плоскостей, то есть наклонения и долготы восходящего узла.

Когда астероид уже открыт, к обзорным наблюдениям добавляется це-



льный ряд новых возможностей, поскольку местоположение цели уже известно, хотя бы приблизительно.

## Прогнозирование соударений

Неопределённость орбиты, особенно для недавно открытых астероидов, чаще всего делает невозможным достоверное предсказание соударения. Поэтому, говоря о прогнозировании соударений астероидов с Землёй, обычно подразумевают оценку вероятностей.

Наиболее полные списки опасных астероидов и их возможных соударений опубликованы на сайтах NASA (<https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/>) и NEODyS (<https://newton.spacedys.com>). Их результаты в подавляющем большинстве случаев не отличаются принципиально, поэтому в дальнейшем сравнение полученных результатов будет производиться только с NASA. В России есть, например сайт СамГТУ ([smallbodies.ru](http://smallbodies.ru)), где своим методом определены вероятности соударений нескольких десятков астероидов.

Свой метод оценки вероятностей предложили в ИПА РАН [49]. В этом методе, однако, предполагается, что на всём расчётном интервале времени сохраняется нормальное распределение ошибок по координатам и скоростям. Очевидно, это условие не выполняется, если астероид на пути к соударению испытывает другие сближения.

В работе Соколова и др. [24] приводятся свидетельства, говорящие о сложной, подобной фракталу, структуре множества возможных соударений. Причиной этому являются резонансные возвраты, когда после сближения с Землёй астероид переходит на орбиту с резонансным периодом  $p/q$  лет. Если дробь несократимая, следующее сближение или, возможно, соударение произойдёт через  $p$  лет. Поскольку орбиты астероидов известны с некоторой погрешностью, параметры сближения с Землёй точно предсказать невозможно. Период обращения после сближения может быть представлен некоторым диапазоном, в котором могут оказаться резонансные значения с небольшими числителем и знаменателем. При этом каждое сближение значительно ухудшает предсказуемость дальнейшей траектории астероидов. После нескольких таких сближений движение становится совершенно неопределённым.

## Предотвращение соударений

Среди методов предотвращения соударений наиболее простым и готовым к применению является кинетический таран. Опционально с ядерным зарядом. Метод заключается в отправке космического аппарата на столкновение с астероидом. Импульс, переданный при столкновении, должен изменить орбиту астероида. Эксперимент DART должен состояться в 2022 году и продемонстрировать, как этот метод работает. В данном эксперименте планируется изменить орбиту спутника астероида (65803) Дидим.

### Астероид (99942) Апофис

В 2004 году был открыт астероид размером около 300 метров, получивший обозначение 2004 MN4 (<https://www.iau.org/public/themes/neo/nea2/>). Почти сразу после открытия его вероятность соударения с Землёй оценили в несколько процентов. С учётом его размера и предполагаемого ущерба, Апофис получил рекордно высокий балл по туринской шкале, 4.

## Исследования, проводившиеся в СПбГУ

Астероид Апофис стимулировал многочисленные исследования во всём мире и СПбГУ не стал исключением. Здесь будет рассказано о результатах, полученных в СПбГУ и предшествовавших настоящей диссертации.

### Некоторые ранние работы

Тема астероидной опасности хотя и не была обделена вниманием в СПбГУ, но всё же исследования проводились скорее от случая к случаю. Стоит упомянуть совместную работу Елькина и Соколова [?], в которой утверждается что на траектории соударения с Землёй обычно присутствуют сближения с ней. Сближения перед соударением имеют очевидную практическую ценность: астероиды в это время, как правило, проще наблюдать. Можно сказать также о работе Холшевникова [33], где приводится оценка вероятности соударения для невозмущённых орбит. Предполагается, что орбиты астероида и Земли имеют точку пересечения.

## Метод ТГС

Открытие астероида (99942) Апофис и оценка вероятности его соударения вновь пробудили интерес к астероидной опасности. В 2008 году вышла статья Соколова и др. [24], начиная с которой Соколов и его научная группа регулярно публикуют новые результаты своих исследований. Данная статья представляет особый интерес, поскольку демонстрирует применение метода точечных гравитационных сфер (ТГС) для предсказания возможных соударений. Этот метод легко реализовать без каких-либо громоздких вычислений и он позволяет сделать оценку возможных резонансных возвратов, ведущих к новым соударениям. Достоверность результатов проверена численным интегрированием.

### Программный комплекс v19

Задача программного комплекса v19 — поиск и изучение возможных соударений и сближений астероидов с Землёй. Критерий сближения для v19 — подход к Земле на расстояние менее 0,25 а. е. Критерий соударения — радиус Земли. Основная часть работы программного комплекса состоит из двух этапов, остальные функции применяются от случая к случаю.

На первом этапе в пространстве начальных данных, декартовых координат и скоростей либо элементов орбиты, v19 меняет одну из переменных и последовательно ищет сближения и соударения для каждого значения варьируемой переменной. Например, задаётся 40 тыс. значений большой полуоси в пределах 3 стандартных отклонений от номинала. Обычно на первом этапе удаётся идентифицировать лишь сближения, однако, если ведущая к соударению область большая, то возможно и прямое попадание в Землю. Если соседние точки (выбранные значения большой полуоси) ведут к похожему сближению с Землёй, это считается одним сближением. Схожесть определяется по дате сближения, в пределах одного года. Некоторые сближения занимают всего одну или несколько точек, некоторые весь заданный диапазон, а чаще всего что-то промежуточное.

На втором этапе для каждого найденного сближения ищется минимум расстояния. Для этого исследуемый отрезок варьируемой переменной, большой полуоси в нашем примере, дробится ещё сильнее, вплоть до машинной точности. Таким образом, находится минимальное расстояние

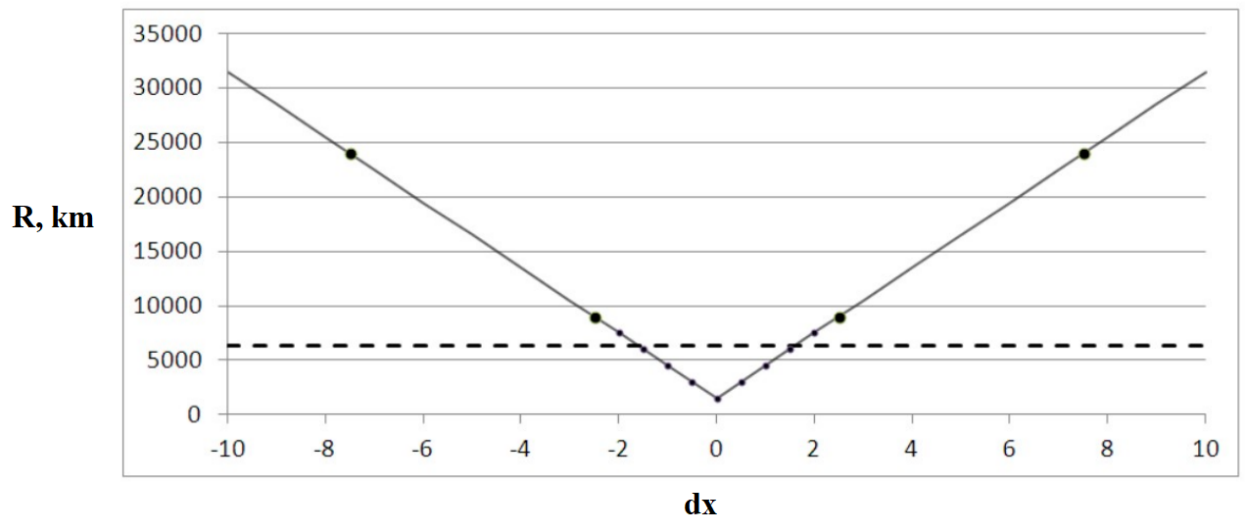


Рис. 1: Схематичное изображение зависимости расстояния сближения от варьируемой переменной (жирными точками обозначены результаты первого этапа расчёта, мелкими — второго)

сближения в зависимости от большой полуоси. Процесс расчёта схематично изображён на рис. (1).

## Актуальность темы

Тема астероидно-кометной опасности начала активно изучаться сравнительно недавно. Сейчас, особенно после Челябинского события в 2013 году [12], в актуальности темы усомниться сложно, но всё же следует сформулировать, почему эта тема важна сегодня. Астероиды представляют глобальную угрозу, вплоть до уничтожения цивилизации и даже жизни на Земле. Например, последнее массовое вымирание, произошедшее 65 миллионов лет назад, связывают именно с падением астероида [44]. По сравнению с возрастом Земли произошло это совсем недавно, так что опасность, по всей видимости, существует и сейчас. Использование ПЗС-матриц и автоматических телескопов резко повысило возможности поисковых наблюдений. В результате в настоящее время поступает огромный поток наблюдательных данных, требующих обработки. Центр малых планет (<https://minorplanetcenter.net/>) собирает информацию обо всех малых телах Солнечной системы. Более подробно о текущей ситуации с околоземными астероидами можно ознакомиться на сайте NASA (<https://cneos.jpl.nasa.gov/>). С началом освоения космоса стало теоретиче-

ски возможным повлиять на траекторию астероида и тем самым предотвратить соударение с Землёй.

## Цели и задачи

Диссертационная работа продолжает исследования астероидно-кометной опасности, проводимые в СПбГУ. Основной целью является поиск возможных соударений астероидов с Землёй и оценка вероятностей. В ходе выполнения работы были рассмотрены также другие планеты и Луна. Настоящая работа сосредоточена на актуальных угрозах и не затрагивает вопросы эволюции орбит астероидов на больших временных интервалах. Расчёт траекторий производился на 100-200 лет в будущее.

В работе поставлены и решаются следующие задачи.

1. Получение многомерных характеристик ведущих к соударению областей начальных данных (координат и скоростей в начальный момент времени). Разработанный в СПбГУ программный комплекс v19 ограничивался одномерным варьированием начальных данных.
2. Разработка и тестирование нового алгоритма и программы для быстрого расчёта сближений большого числа виртуальных астероидов. От алгоритма помимо производительности требовалась стабильность и достижение приемлемой точности при сближениях виртуальных астероидов с планетами. Однако стоит отметить, что после нескольких сближений погрешность вычислений неизбежно превысит радиус Земли, что сделает предсказание соударений, по меньшей мере, сомнительным.
3. Оценка применимости нового алгоритма к реальным астероидам. Для этого было проверено, найдёт ли программа возможные соударения для опасных астероидов, отслеживаемых NASA.
4. Определение области в пространстве элементов орбит, откуда астероиды могут представлять угрозу для Земли. Эта задача имеет важность для самостоятельного поиска опасных астероидов.

5. Массовый расчёт вероятностей соударения. Общая оценка астероидной угрозы от всех астероидов Солнечной системы (однако большое множество астероидов Главного Пояса, чья орбита не подходит близко ни к Марсу, ни к Юпитеру, было исключено априори).

## Выносимые на защиту результаты

1. Создан алгоритм, позволяющий рассчитывать движение миллионов виртуальных астероидов одновременно. Реализующее его программное обеспечение отличается высоким быстродействием и позволяет находить сближения и соударения с планетами Солнечной системы и Луной. С помощью данного ПО возможно рассчитывать вероятности соударения методом Монте-Карло для большого числа астероидов на настольных ПК за приемлемое время.
2. В пространстве орбитальных параметров: эксцентриситет  $e$ , перигелийное расстояние  $q$  и угол наклона  $i$ , — выделены области, содержащие астероиды, которые могут представлять опасность для Земли, то есть обнаружилось их сближение с Землёй в пределах 100 радиусов Земли до 2132 года.
3. В результате анализа эволюции 127 690 астероидов обнаружено 3200, сближающихся с планетами менее чем на 100 их радиусов до 2132 года. Примечательно, что 24 из 1611 сблизившихся с Землёй астероидов не относятся к классу околоземных, то есть имеют перигелийное расстояние более 1,3 а. е. При оценке вероятности столкновения обнаружилось, что соударение с какой-либо планетой возможно для 423 астероидов, из них 163 могут столкнуться с Землёй.
4. Результатами численного моделирования эволюции модельных астероидов подтверждена гипотеза о предваряющих соударения сближениях астероидов с планетой. Из 50 млн модельных астероидов с Землёй столкнулись 72, из них у 70 наблюдались сближения менее чем на 0,05 а. е. в течение 100 лет до соударения.

## Научная новизна

Представлен новый вариант реализации метода Эверхарта и оптимизированный алгоритм вычисления траекторий большого количества виртуальных астероидов. Оптимизация позволяет на настольном ПК методом Монте-Карло рассчитывать вероятности соударения всех астероидов Солнечной системы со всеми планетами. При подходящей адаптации полученный алгоритм можно успешно применять в других задачах, требующих расчёта траекторий движения большого количества объектов.

Впервые оценены вероятности соударения большого количества астероидов ( $>100000$ ) со всеми планетами Солнечной системы и Луной. Для ряда астероидов, считавшихся безопасными, найдены возможные соударения с Землёй. В их числе астероид 2015 СТ13, появившийся в списке NASA (<https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/>) только после публикации соответствующих результатов диссертационной работы.

Выявлена потенциальная угроза, исходящая от ряда неоколоземных астероидов, то есть имеющих перигелийное расстояние больше 1,3 а. е. Такие астероиды, как правило, крупнее околоземных, что объясняется эффектом селекции при наблюдениях. Исследования астероидно-кометной опасности почти всегда ограничены околоземными объектами, что может помешать заблаговременно обнаружить реальную угрозу.

Новым способом подтверждена гипотеза о сближениях перед соударениями. Ключевое отличие от большинства других работ — интегрирование траекторий в будущее.

## Значимость работы

Представленные в диссертационной работе результаты расширяют имеющиеся представления об астероидной опасности. В первую очередь стоит отметить выявление угрозы от реальных неоколоземных астероидов. Существующие программы в основном сфокусированы на астероидах, сближающихся с Землёй. Остальным, с точки зрения актуальной астероидной опасности, внимания уделяется гораздо меньше. Несмотря на ряд работ, посвящённых эволюции орбит и пополнению популяции АСЗ, актуальная угроза от неоколоземных объектов остаётся малоизученной.

Само по себе определение вероятностей соударения не представляет чего-то нового, однако каждый новый метод снижает вероятность пропустить опасный объект. Значимость нового результата особенно высока при разногласиях в разных источниках. Кроме того, в настоящей работе вычислены вероятности соударения со всеми планетами и Луной, а не только с Землёй. В ближайшие 100 лет весьма вероятно освоение, как минимум, Луны и Марса, что делает изучение астероидной угрозы на других планетах актуальной темой уже сегодня.

Новый вариант метода Эверхарта и предложенные оптимизации могут быть использованы в похожих задачах. Например, при расчёте траекторий большого количества обломков астероида после разрушения.

Гипотеза о сближениях перед соударениями неоднократно проверялась, поэтому сделанные в настоящей работе оценки являются скорее дополнением к существующим работам. Тем не менее, использованный подход, с расчётом траекторий в будущее, позволяет взглянуть на проблему с противоположной стороны. Обычный подход, с расчётом траекторий в прошлое от соударения, гораздо менее требователен к производительности вычислений.

Определения астероида, сближающегося с Землёй и потенциально опасного астероида содержат ограничения на орбиты. Полученные в настоящей работе результаты содержат некоторые оценки, насколько эти ограничения обоснованы с точки зрения изучения астероидной угрозы. В частности, как уже упомянуто выше, найден ряд астероидов, не относящихся к АСЗ, но потенциально представляющих угрозу до 2132 года.

## Методы

При относительной простоте использованных методов, большое внимание уделяется стабильной и надёжной работе с большим количеством входных данных. Это требование вызвано в том числе огромным прогрессом в открытии новых астероидов, ибо конечной целью, в максимальном варианте, является изучение всех известных астероидов. К числу таких простых методов относятся метод Монте-Карло, метод наименьших квадратов и т. п. Данные методы вряд ли нуждаются в развёрнутых комментариях. Вместе с тем, где необходимо, задействованы методы более специфические,



например, метод интегрирования Эверхарта и генератор псевдослучайных чисел вихрь Мерсенна. Кроме того, в ряде случаев используются методы чисто эвристические, являющиеся переложением интуиции исследователя на язык программирования.

Интегратор Эверхарта хорошо знаком небесным механикам, поскольку изначально разрабатывался для соответствующих задач. Это неявный коллокационный одношаговый метод из семейства Рунге-Кутты. Важной особенностью метода является лёгкое обобщение на произвольный порядок. Точнее, произвольную степень коллокационного многочлена. Кроме того, коллокационный многочлен предоставляет удобную аппроксимацию решения в промежуточных точках.

Вихрь Мерсенна — генератор псевдослучайных чисел, один из наиболее популярных в настоящее время. Генерация (псевдо)случайных чисел — важнейшая часть метода Монте-Карло, влияющая на достоверность результата. Применение простейших стандартных генераторов, встроенных в язык программирования, легко может привести к трудноуловимой систематической ошибке. Вихрь Мерсенна, разработанный в конце XX века, отличается исключительно большим периодом и равномерным распределением в 623-мерном пространстве.

## Степень достоверности

Достоверность результатов на всём протяжении исследований подвергалась различным проверкам. Метод Монте-Карло отличается высокой погрешностью при малом числе попаданий, однако, при надлежащей генерации (псевдо)случайных чисел, эта погрешность хорошо известна и не представляет проблемы при интерпретации результатов.

Основной потенциальный источник неизвестной погрешности — точность вычисления траектории. Поскольку часть результатов совершенно новые и сравнение с предыдущими не представляется возможным, предусмотрены возможности самоконтроля. Проверочный расчёт траектории выполняется тем же методом, но с меньшим шагом. По свойству метода интегрирования, неограниченное уменьшение шага позволяет достичь произвольной точности. На практике, точность ограничена из-за машин-

ного округления. Выбранные в процессе тестирования параметры метода нацелены именно на этот предел точности.

Помимо самоконтроля, производилось сравнение новой программы со старой, а также сравнение результатов с полученными другими исследователями, прежде всего NASA. Сравнение с NASA играет ключевую роль в оценке применимости новой программы к реальным астероидам.

## Апробация результатов

Результаты представлены на конференциях:

1. Пулковская молодёжная астрономическая конференция.
2. Всероссийская астрометрическая конференция.
3. Студенческая научная конференция «Физика космоса».
4. Поляховские чтения.
5. Королёвские чтения.
6. Околосемная астрономия.
7. Конференция планетарной защиты (Planetary Defense Conference).
8. Симпозиум МАС (IAU Symposium).

Результаты опубликованы в 15 работах, индексируемых РИНЦ, из них 6 работ, индексируемых в международных базах данных. Список работ:

1. Петров Н.А., Баляев И.А., Васильев А.А., Соколов Л.Л.  
ВОЗМОЖНЫЕ СБЛИЖЕНИЯ И СОУДАРЕНИЯ С ЗЕМЛЕЙ  
ОПАСНЫХ АСТЕРОИДОВ  
В сборнике: ИЗВЕСТИЯ ГЛАВНОЙ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ ОБ-  
СЕРВАТОРИИ В ПУЛКОВЕ. Труды Всероссийской астрометриче-  
ской конференции. 2018. С. 201-206.
2. Баляев И.А.  
ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ АСТЕ-  
РОИДОВ, ВЕДУЩИХ К СОУДАРЕНИЮ С ЗЕМЛЕЙ

В сборнике: Физика Космоса. Труды 48-й Международной студенческой научной конференции. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина. 2019. С. 171.

3. Баляев И.А.

УСКОРЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ АСТЕРОИДОВ И ПЕРВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В сборнике: Физика Космоса. Труды 49-й Международной студенческой научной конференции. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина. 2020. С. 149-150.

4. Соколов Л.Л., Баляев И.А., Кутеева Г.А., Петров Н.А., Эскин Б.Б.  
ЭФФЕКТ ГРАВИТАЦИОННОГО МАНЕВРА ПРИ СБЛИЖЕНИЯХ АСТЕРОИДОВ С ЗЕМЛЕЙ

В книге: XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. Сборник тезисов: в 2 т. Москва, 2020. С. 282-284.

5. Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B.  
POSSIBLE COLLISIONS AND APPROACHES OF SOME DANGEROUS ASTEROIDS WITH THE EARTH

Solar System Research. 2020. Т. 54, №6, С. 541-549.

6. Баляев И.А.

ОБ УСКОРЕНИИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ АСТЕРОИДОВ

Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы. 2020. Т. 54, №6, С. 567-576.

7. Соколов Л.Л., Баляев И.А., Кутеева Г.А., Петров Н.А., Эскин Б.Б.  
О СБЛИЖЕНИЯХ И СОУДАРЕНИЯХ АСТЕРОИДОВ С ЛУНОЙ И ПЛАНЕТАМИ

В сборнике: IX Поляховские чтения, материалы международной на-

учной конференции по механике. Санкт-Петербургский государственный университет. Санкт-Петербург, 2021. С. 169-171.

8. Баляев И. А.

МАССОВЫЙ РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОУДАРЕНИЯ АСТЕРОИДОВ: МЕТОДЫ, ПОДВОДНЫЕ КАМНИ, СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В сборнике: Астрономия и исследования космического пространства. Сборник научных трудов. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина. 2021. С. 87-88.

9. Соколов Л.Л., Баляев И.А., Кутеева Г.А., Петров Н.А., Эскин Б.Б.  
ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ СОУДАРЕНИЙ И СБЛИЖЕНИЙ АСТЕРОИДА С ЛУНОЙ И ПЛАНЕТАМИ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

В книге: XLV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. Сборник тезисов: в 4 т.. Москва, 2021. С. 404-408.

10. Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B.  
APPROACHES AND COLLISIONS OF ASTEROIDS WITH THE MOON AND PLANETS

В сборнике: Journal of Physics: Conference Series. Сер. «International Scientific Conference on Mechanics «The Ninth Polyahov's Reading», ISCM 2021» 2021. С. 012047.

11. Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B.  
THE EFFECT OF GRAVITATIONAL MANEUVER AT THE APPROACH OF AN ASTEROID TO THE EARTH

В сборнике: AIP Conference Proceedings. 44. Сер. «XLIV Academic Space Conference: Dedicated to the Memory of Academician S.P. Korolev and Other Outstanding Russian Scientists — Pioneers of Space Exploration» 2021. С. 050006.

12. Соколов Л.Л., Баляев И.А., Кутеева Г.А., Петров Н.А., Эскин Б.Б.  
ВОЗМОЖНЫЕ СОУДАРЕНИЯ И СБЛИЖЕНИЯ С ЗЕМЛЕЙ  
НЕКОТОРЫХ ОПАСНЫХ АСТЕРОИДОВ  
Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы. 2021.  
Т. 55, №1, С. 65-73.
13. Соколов Л.Л., Кутеева Г.А., Петров Н.А., Эскин Б.Б., Баляев И.А.,  
Васильев А.А.  
О ХАРАКТЕРИСТИКАХ ОСОБЫХ ТРАЕКТОРИЙ АСТЕРОИДА  
АПОФИС И ВОЗМОЖНОСТИ УВОДА ЕГО ОТ СОУДАРЕНИЙ С  
ЗЕМЛЕЙ  
Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы. 2021.  
Т. 55, №3, С. 265-271.
14. Холшевников К.С., Баляев И.А., Соколов Л.Л., Эскин Б.Б.  
РЕТРОСПЕКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ОРБИТ СТАЛКИВАЮЩИХСЯ  
С ЗЕМЛЕЙ АСТЕРОИДОВ  
Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механи-  
ка. Астрономия. 2021. Т. 8, №3, С. 523-532.
15. Соколов Л.Л., Баляев И.А., Холшевников К.С., Эскин Б.Б.  
О СБЛИЖЕНИЯХ И СОУДАРЕНИЯХ АСТЕРОИДОВ С ПЛАНЕ-  
ТАМИ  
Известия Национальной академии наук Таджикистана. Отделение  
физико-математических, химических, геологических и технических  
наук. 2021. №2 (183), С. 27-36.

# Глава 1

## Эксперименты с многомерным варьированием начальных данных

### 1.1 Постановка задачи

Принцип работы программного комплекса v19, как было описано выше, заключается в варьировании начальных данных (координат и скоростей) вдоль некоторого одномерного многообразия. Ведущая к соударению с Землёй область представляется в форме некоторого диапазона значений варьируемого параметра. Проще говоря, при варьировании параметра  $X$  ведущая к соударению область - это отрезок с центром в точке  $X_i$  и шириной  $W_i$ .

Представляет интерес рассмотрение устойчивости получаемого результата к различным вариациям способа выбора варьируемой переменной. Для этого был предложен ряд экспериментов: изменение начальной даты и смещение ортогонально варьируемой переменной. Далее вместо словосочетания «ведущая к соударению область» будет использоваться слово «щель».

### 1.2 Эволюция взаимного расположения «щелей»

Как изменится взаимное расположение «щелей», если варьировать начальные данные на другую дату?

## Результаты, предшествовавшие настоящей диссертации

Ранее были получены относительные положения «щелей» астероида Апофис вдоль большой полуоси на 4 момента времени: в 2006, 2016, 2026 и 2029 годах. Эти результаты представлены в таблице (1.1), где слева указан год соударения соответствующей «щели», сверху — начальная дата, а в самой таблице — разница большой полуоси в метрах. В качестве орбиты отсчёта использована траектория соударения 2068 года [29].

Таблица 1.1: Положения «щелей» астероида Апофис относительно «щели» 2068 года (разница большой полуоси в метрах)

	06.03.2006	08.03.2016	01.05.2026	08.03.2029
2075	-194	-304	-1020	-44000
2064	-191	-300	-1010	-43300
2056	-71.3	-112	-376	-16100
2060	-67.4	-106	-357	-15300
2055	-64.8	-102	-342	-14700
2074	-46.3	-72.7	-245	-10500
2066	-42.7	-67.0	-226	-9700
2065	-41.6	-65.3	-220	-9440
2078	-40.8	-64.1	-216	-9260
2091	-40.0	-62.8	-212	-9080
2077	-1.27	-2.00	-6.72	-288
2068	0	0	0	0
2076	33.9	53.1	179	7670

Было замечено, что структура «щелей» сохранила свою форму, увеличиваясь в размерах от 2006 к 2029 году. Относительное положение «щели» на 2016, 2026 и 2029 годы может быть получено умножением относительного положения в 2006 году на некоторый коэффициент  $k$ . Величина множителя  $k$ , полученная из приведённых здесь данных, составляет: в 2006 году — 1; в 2016 — 1,57; в 2026 — 5,29; на 08.03.2029 — 226,75. На рис. (1.1) изображена зависимость множителя от времени, точки соединены некоторой гладкой кривой.

## Модификация программного комплекса v19

Цель модификации — расчёт множителя  $k$  на большее количество моментов времени. Полноценный расчёт на каждую дату занимает немало вре-

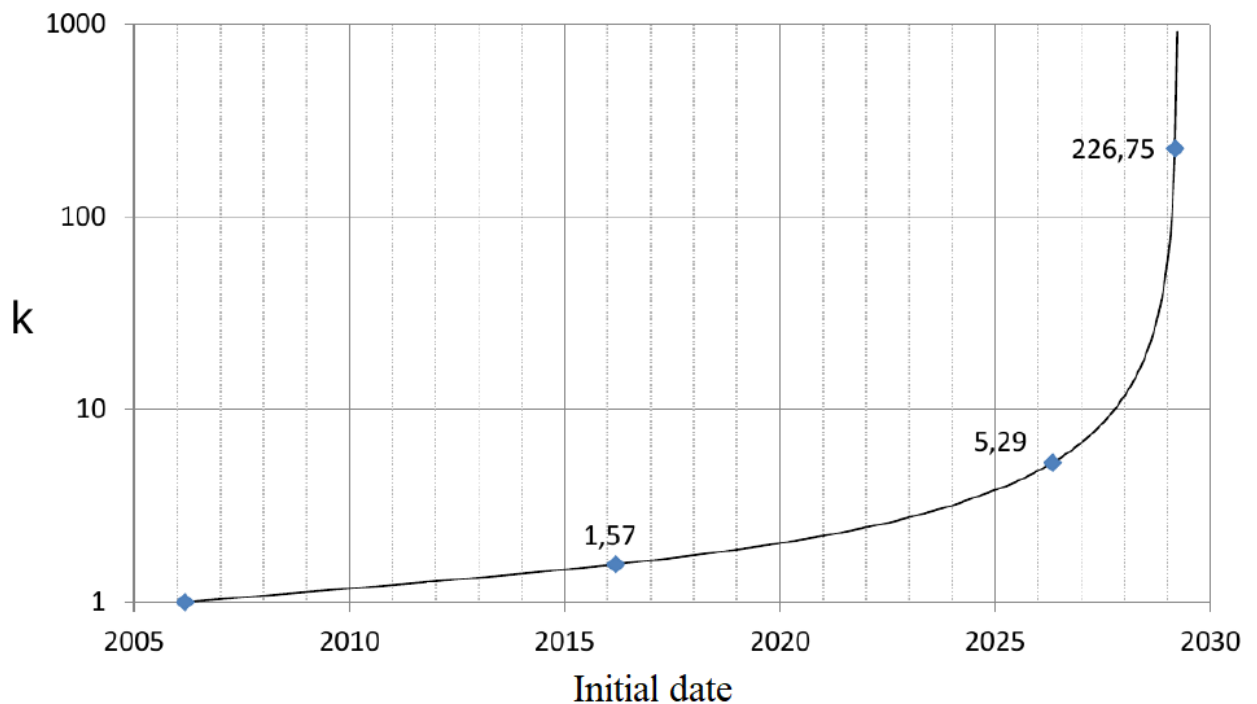


Рис. 1.1: Зависимость множителя  $k$  от времени по ранее полученным результатам

мени. Однако можно значительно ускорить процесс, если заранее знать приблизительное расположение «щелей». Этого можно добиться, меняя начальную дату с небольшим шагом. Впрочем, возможно существование особых точек, когда непрерывность нарушается. Учитывая предполагаемое количество запусков v19, было решено сделать управляющую программу, формирующую начальные данные и обрабатывающую результаты в процессе. Программа была названа «researcher» из-за некоторой схожести её действий с действиями живого пользователя v19.

Наличие управляющей программы позволило более гибко использовать программный комплекс v19. В частности, стало возможным производить варьирование вдоль произвольного параметра, а не только декартовых координат и скоростей или элементов орбит. Это было использовано для придания более практического смысла экспериментам. Импульсные методы воздействия на астероид пока что являются наиболее проработанными способами предотвращения соударений. Это, в первую очередь, кинетический удар и ядерный взрыв. Их воздействие на астероид можно представить в виде смещения начальных данных в пространстве скоростей. Из теоретических соображений, решающим является изменение скорости вдоль направ-



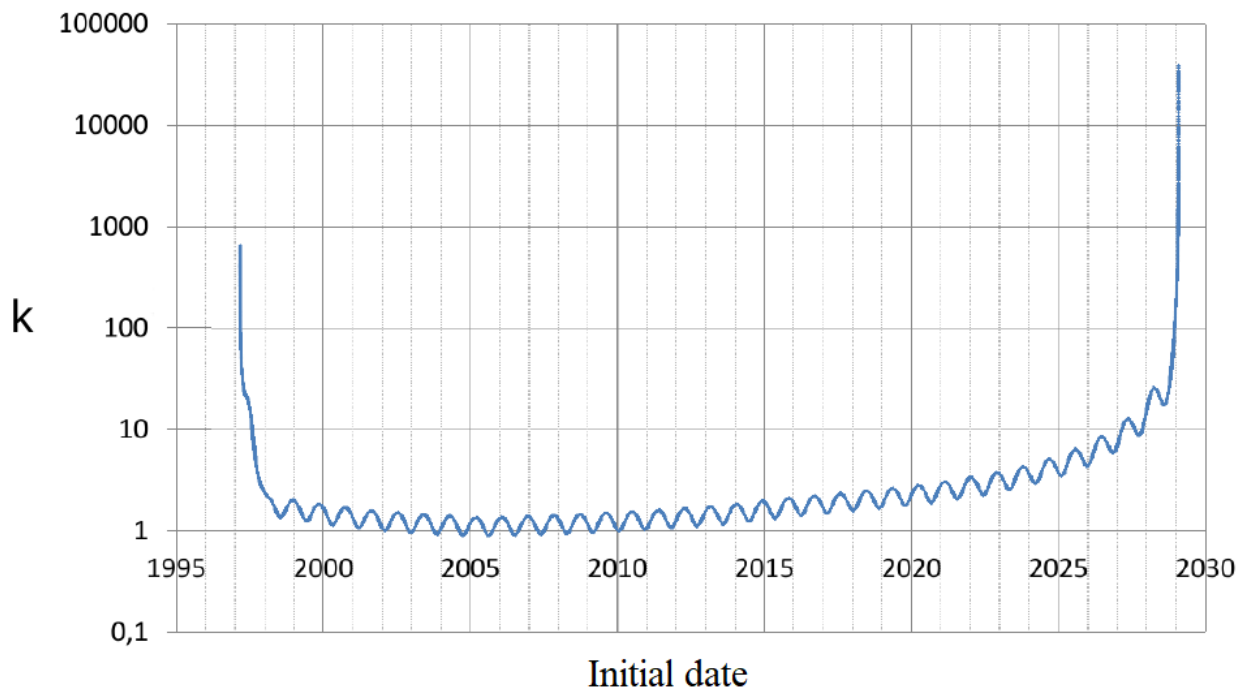


Рис. 1.2: Зависимость множителя  $k$  от времени по результатам эксперимента

ления движения, изменяющее большую полуось. Именно этот компонент скорости и выбран в качестве варьируемой переменной.

### Итоги эксперимента

Всего получены относительные положения «щелей» на 2613 моментов времени с 1997 по 2029 год. Структура «щелей» сжимается и растягивается в первом приближении пропорционально. Зависимость множителя  $k$  от времени изображена на рис. (1.2). Размер «щелей» плохо определён, поскольку близок к машинной точности. Тем не менее, усреднение результатов по множеству точек показывает точно такой же тренд. Помимо многолетнего тренда хорошо заметны колебания с периодом, равным периоду обращения Апофиса. Отсюда можно заключить, что воздействие на астероид вблизи перигелия наиболее эффективно.

### 1.3 Трёхмерное варьирование в пространстве скоростей

Произведя схожие модификации, можно не только исследовать устойчивость результата, но и получить многомерную картинку. Пространство скоростей представляет особый интерес, поскольку импульсное воздействие на астероид представляет собой смещение начальных данных в этом пространстве.

#### Модификация программного обеспечения

Для автоматизации используется управляющая программа, похожая на описанную в предыдущем эксперименте. По-прежнему будет производиться расчёт одномерных характеристик «щели», однако теперь начальные данные будут смещаться в двух перпендикулярных направлениях. Величина смещения, при которой одномерные характеристики начинают заметно меняться, вначале неизвестна. Поэтому использована логарифмическая сетка, начиная от машинной точности, с шагом в 2 раза. Зависимость положения «щели» от смещения оценена линейной функцией.

#### Базис

Основная переменная варьирования  $v_1$  — скорость вдоль направления движения, определяемого по номинальной орбите, либо иной орбите отсчёта. Остальные,  $v_2$  и  $v_3$ , дополняют её до правой тройки. Базис рассчитывается из координат и скоростей следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \\ \vec{e}_2 &= \frac{[\vec{r} \times \vec{v}]}{|[\vec{r} \times \vec{v}]|} \\ \vec{e}_3 &= [\vec{e}_1 \times \vec{e}_2] \end{aligned} \tag{1.1}$$

Таким образом, вторая компонента выбирается перпендикулярной плоскости орбиты, а третья в плоскости орбиты, но перпендикулярно направлению движения. Координаты и скорости используются барицентрические.

## Выбор «щелей»

Для эксперимента выбраны некоторые ранее найденные соударения астероидов (99942) Апофис и (443104) [22]. Для второго астероида даты соударений находятся в начале XXII века.

## Итоги эксперимента

В ходе эксперимента удалось установить первое, линейное приближение зависимости одномерных параметров «щели» от других переменных. В рассмотренных случаях, как и ожидалось, «щель» примерно перпендикулярна направлению движения, то есть импульс коллинеарно направлению движения наиболее эффективен для увода от соударения. Изменение других переменных приводит также к изменению минимального расстояния. При достаточно большом смещении минимальное расстояние становится больше радиуса Земли. Величина такого смещения на несколько порядков больше ширины «щели».

При достижении околонулевого минимального расстояния, менее 0,01 радиуса Земли, была замечена нестабильная работа программного комплекса v19. Время работы увеличивалось на порядки при том, что в результате программа могла вовсе не определить параметры сближения. До выяснения и устранения причин было решено не проводить расчёты для большого количества «щелей», а ограничиться несколькими примерами. Тем не менее, в рассмотрение были включены остальные три переменные.

## 1.4 Шестимерное варьирование по координатам и скоростям

Настоящий эксперимент оценит принципиальную возможность описания «щелей» в шестимерном пространстве координат и скоростей.

## Локальное представление «щели» в шестимерном пространстве

Как и в предыдущем эксперименте, можно представить одномерные характеристики «щели» в виде функций остальных переменных. Для окрестности номинальной орбиты, либо иной орбиты отсчёта, можно использовать полином пяти переменных. Расчёт коэффициентов произведён с помощью метода наименьших квадратов. Количество коэффициентов полинома очень быстро растёт с увеличением степени: Для первой степени — 6; для второй — 21; для третьей — 56 и далее нелинейно растёт с увеличением степени.

### Базис

Трёхмерный базис был дополнен компонентами, вдоль которых варьируются координаты  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ :

$$\begin{aligned} \vec{e}_4 &= \frac{[\vec{r} \times \vec{v}]}{|[\vec{r} \times \vec{v}]|} \\ \vec{e}_5 &= \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \\ \vec{e}_6 &= [\vec{e}_4 \times \vec{e}_5] \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь первая компонента перпендикулярна плоскости орбиты, вторая параллельна радиус-вектору, а третья ему перпендикулярна, оставаясь в плоскости орбиты. В случае, если вектор скорости перпендикулярен радиус-вектору, базисы для скоростей и координат совмещаются полностью. Перпендикулярная плоскости орбиты компонента совмещается всегда.

### Выбор «щелей»

Для исследований выбраны примеры от скорого соударения Апофиса в 2029 году до соударений (443104) в 2144 году. Хотя соударение Апофиса в 2029 году давно исключено, его ещё можно найти изменением начальных данных. К тому же увод от другого соударения вполне может привести к соударению более раннему.

## Результаты

Хотя были получены значимые коэффициенты второй степени, приведение полинома полностью сделало бы вывод слишком громоздким и неудобным для чтения. Представим линейную часть зависимости положения «щели»  $v_1(v_2, v_3, x_1, x_2, x_3)$  в форме:

$$v_1 = a_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3. \quad (1.3)$$

В таблице (1.2) приведены линейные коэффициенты положения некоторых «щелей». Во второй колонке указан год соударения, соответствующий «щели». Коэффициенты  $a_2$  и  $a_3$  безразмерные;  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$  имеют размерность частоты.

Таблица 1.2: Линейные коэффициенты положения некоторых «щелей»

Астероид	Год	$a_2$	$a_3$	$b_1, \text{с}^{-1}$	$b_2, \text{с}^{-1}$	$b_3, \text{с}^{-1}$
2004 MN4	2029	-0,00004	-0,00706	-1,6	-2808,4	5,7
2008 EX5	2072	0,00007	-0,00553	0,2	-1650,7	-18,5
2008 EX5	2075	0,00039	0,00059	-1,6	-1656,5	-11,9
2013 XK22	2101	0,00035	-0,01709	-1,0	-1867,8	-28,5
2013 XK22	2130	0,00034	-0,01711	-1,1	-1867,6	-28,5
2013 XK22	2144a	0,00035	-0,01710	-1,0	-1867,8	-28,5
2013 XK22	2144b	0,00034	-0,01711	-1,1	-1867,9	-28,5

Результаты для разных «щелей» и разных астероидов демонстрируют некоторые тенденции:

1. Положение «щели» очень слабо зависит от смещения в пространстве скоростей перпендикулярно плоскости орбиты. Зависимость от третьей компоненты скорости достигает почти 2%, но в целом «щель» расположена почти перпендикулярно вектору скорости.
2. Аналогичная тенденция наблюдается для зависимости от компонент радиус-вектора. Наиболее значима зависимость от второй компоненты, соответствующей изменению модуля радиус-вектора. Соотношение примерно соответствует постоянной большой полуоси.
3. Для астероида 2013 XK22 линейные коэффициенты отличаются очень мало, чего однако не наблюдается для астероида 2008 EX5.

## Итоги эксперимента

Получено локальное представление ведущей к соударению области в шестимерном пространстве начальных координат и скоростей. Для рассмотренных случаев расположение «щели» примерно соответствует постоянной большой полуоси, однако результаты также демонстрируют небольшое отклонение от этого правила. Программный комплекс v19 нуждается в совершенствовании или замене, поскольку ощущается недостаток производительности и стабильности работы для решения более масштабных задач.

## Глава 2

# Ускорение численного интегрирования

### 2.1 Предпосылки создания новой программы

Хотя программный комплекс v19 позволил получить немало интересных результатов, нет предела совершенству.

#### Критические недостатки программного комплекса v19

В ходе поиска минимумов геоцентрических расстояний довольно часто астероид попадал практически точно в центр Земли (менее 0,01 радиуса). Оказалось, что v19 при этом замедляет свою работу на несколько порядков, а в ряде случаев попросту игнорирует сближение с Землёй. Для учёта последнего фактора, как вариант, можно было использовать больше виртуальных астероидов. Однако увеличение времени работы тогда стало бы совершенно неприемлемым.

Указанный недостаток заметно не влияет на результаты, полученные одномерным варьированием. Во-первых, используемый метод несколько избыточен и единичные выбросы легко исключить из рассмотрения. Во-вторых, минимум геоцентрического расстояния очень редко опускается до столь малых величин. Однако одномерное варьирование не даёт полной картины шестимерной области неопределённости.

Возможным вариантом было бы использование метода Монте-Карло. Действительно, метод Монте-Карло позволяет получить очень надёжный

результат, а многомерная область неопределённости вполне может быть представлена роем виртуальных астероидов. Очевидный недостаток — скорость работы. Для наиболее ресурсоёмких расчётов было использовано порядка  $10^7$  виртуальных астероидов и это заняло около месяца. Таким образом, дальнейшее продвижение с имеющимся программным обеспечением представлялось невозможным.

## Постановка задачи

Сразу следует сказать, что задача сравнивать разные методы интегрирования не ставилась. Метод Эверхарта в различных вариантах уже давно зарекомендовал себя в задачах небесной механики, о чём можно судить хотя бы по многочисленным упоминаниям в публикациях [15][16][41][37]. Интегратор Эверхарта используется и в программном комплексе v19.

Уравнение движения астероида — ньютоновская задача  $N$  тел. Учитывается влияние Солнца, Луны и всех больших планет. Координаты и скорости планет удобно взять из эфемерид. Для расчёта выбраны эфемериды DE430, а начальные данные для астероидов берутся из базы данных NASA. Хотя модель движения простая, полученные с программным комплексом v19 данные позволяли предположить, что такого приближения достаточно для получения близких к реальности результатов. В любом случае, упрощённую Солнечную систему можно использовать для решения модельных задач. Очевидным преимуществом простоты модели движения является производительность вычислений, которую изначально планировалось сделать не хуже, чем в v19.

Обозначим  $x$  — барицентрический вектор положения астероида,  $x_i$  — положение массивного тела Солнечной системы,  $r_i$  — расстояние между массивным телом и астероидом,  $G$  — гравитационная постоянная,  $m_i$  — масса тела. Тогда уравнение движения астероида можно записать в виде:

$$\ddot{x} = G \cdot \sum_{i=1}^n m_i \frac{x_i - x}{r_i^3} \quad (2.1)$$

Конкретная задача программы — поиск и вычисление параметров сближений с планетами и Луной по заданным начальным данным. На вход подаётся начальная и конечная дата, а также список координат и скоростей виртуальных астероидов. На выходе получается список найденных сбли-



жений, в котором указываются: номер виртуального астероида, дата, тело, с которым произошло сближение, и минимальное расстояние. Программа должна иметь дело с произвольным числом виртуальных астероидов и выдавать разумный результат за разумное время при любых разумных начальных данных. Хотя последнее требование может показаться очевидным, в реальности далеко не каждая программа способна работать без сбоев.

### Название программы

Новая программа получила имя  $R^0$ . Название программы происходит от размерности множества начальных данных, для которого исследуются траектории астероидов. В данном случае это отдельные точки. Впрочем, задавать точки можно произвольным образом, так что они вполне могут представлять нечто многомерное. Собственно, в этом и смысл: предоставить максимальную свободу будущим исследованиям. Генерация начальных данных и обработка результата осуществляются либо вручную, либо внешней управляющей программой.

## 2.2 Модификация метода Гаусса–Эверхарта

Произведённая модификация метода интегрирования представляет собой в основном преобразование формул, поэтому самостоятельного названия у полученного метода нет. Фактически модификация производилась несколько месяцев, достигая всё более высокой производительности в условиях конкретной задачи, но описаны будут только исходный и конечный алгоритмы.

### Описание метода

Итак, математически задача заключается в решении уравнения (2.1) для некоторого набора заданных начальных условий. Поскольку это уравнение второго порядка в трёхмерном пространстве, его можно преобразовать в систему из шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В дальнейшем при описании метода и произведённой модифика-

ции будет рассматриваться задача Коши в следующем виде:

$$x' = f(x, t), \quad x_0 = x(t_0) \quad (2.2)$$

Здесь  $x$  представляет собой некоторую функцию времени  $t$ , по сути, траекторию астероида. Обозначим шаг интегрирования  $h$  и введём на шаге переменную  $\tau = (t - t_0)/h$ . Аппроксимируем правую часть уравнения многочленом степени  $k$ :

$$x' = f = f_0 + \sum_{i=1}^k A_i \tau^i \quad (2.3)$$

Многочлен несложно проинтегрировать, получив приближённое решение в виде:

$$x = x_0 + h \left( f_0 \tau + \sum_{i=1}^k A_i \frac{\tau^{i+1}}{i+1} \right) \quad (2.4)$$

Перепишем правую часть в виде интерполяционного многочлена Ньютона на сетке  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k$ ;  $\tau_0 = 0$ .

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \prod_{j=0}^{i-1} (\tau - \tau_j) \quad (2.5)$$

Коэффициенты  $A$  и  $\alpha$  связаны между собой соотношениями:

$$A_i = \sum_{j=i}^k c_{ji} \alpha_j \quad (2.6)$$

$$\alpha_i = \sum_{j=i}^k d_{ji} A_j \quad (2.7)$$

В свою очередь, коэффициенты  $c$  и  $d$  можно получить по рекуррентным формулам:

$$c_{ii} = d_{ii} = 1$$

$$c_{i0} = d_{i0} = 0 \quad (i > 0)$$

$$c_{ij} = c_{i-1,j-1} - \tau_{i-1} c_{i-1,j} \quad (i > j > 0) \quad (2.8)$$

$$d_{ij} = d_{i-1,j-1} + \tau_j c_{i-1,j} \quad (i > j > 0) \quad (2.9)$$

Коэффициенты  $A$  вычисляются с помощью итераций, выполняющихся следующим образом. Для каждого  $i = 1, 2, \dots, k$  последовательно выполняется цикл из четырёх действий  $A \rightarrow x_i \rightarrow f_i \rightarrow \alpha_i \rightarrow A$ . Первое действие  $A \rightarrow x_i$

производится по формуле (2.4), второе действие  $x_i \rightarrow f_i$  — с использованием исходного уравнения (2.1). Для третьего действия  $f_i \rightarrow \alpha_i$  потребуется преобразовать формулу (2.5)

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (f_1 - f_0)/\tau_1 \\ \alpha_2 &= ((f_2 - f_0)/\tau_2 - \alpha_1)/(\tau_2 - \tau_1) \\ \alpha_3 &= (((f_3 - f_0)/\tau_3 - \alpha_1)/(\tau_3 - \tau_1) - \alpha_2)/(\tau_3 - \tau_2) \\ &\dots\end{aligned}\tag{2.10}$$

Наконец, четвёртое действие  $\alpha \rightarrow A$  производится по формуле (2.6).

На старте интегрирования начальное приближение  $A$  можно взять равным нулю. На следующих шагах имеет смысл использовать начальное приближение  $\bar{A}$ , полученное из коэффициентов  $A$  на предыдущем шаге:

$$\bar{A}_i = r^i \sum_{j=i}^k e_{ji} A_j\tag{2.11}$$

Где  $r = \bar{h}/h$  — отношение нового шага к предыдущему. Коэффициенты  $e$  рассчитываются по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned}e_{ii} &= e_{i0} = 1 \\ e_{ij} &= e_{i-1,j-1} + e_{i-1,j} \quad (i > j > 0)\end{aligned}\tag{2.12}$$

Начальное приближение  $\bar{\alpha}$  можно получить по формуле (2.7).

Для повышения порядка метода узлы  $\tau_i$  следует выбирать из разбиений Гаусса–Лежандра, Гаусса–Радона или Гаусса–Лобатто. Последнее было выбрано для новой программы. Узлы в этом случае являются корнями уравнения:

$$(\tau^k(\tau - 1)^k)_\tau^{(k-1)} = 0\tag{2.13}$$

Тогда порядок метода будет равен  $2k$ ,  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_k = 1$ .

## Модификация метода

Задача данной модификации — при сохранении точности повысить производительность вычислений в условиях конкретной задачи. Как правило, вычисление правых частей уравнения представляет собой наиболее затратную часть. Рассмотрев нашу правую часть внимательнее, можно заметить,

что львиную долю вычислений занимает расчёт положений массивных тел из эфемерид. Расчёт ведётся на фиксированные моменты времени, соответствующие узловым значениям  $\tau_i$ . Это означает, во-первых, что положения массивных тел достаточно вычислить один раз за шаг (на каждый узел). Во-вторых, если множество виртуальных астероидов интегрировать одновременно, достаточно произвести эти вычисления один раз для всех астероидов. Таким образом, затраты на расчёт эфемерид можно сделать пренебрежимо малыми.

Чтобы представлять, где именно стоит оптимизировать, оценим количество арифметических операций, производимых за одну итерацию при  $k = 6$ . Интегрируемая переменная представляет собой 6-вектор, но при вычислении правых частей, например, только 3 компоненты из 6 требуют расчёта. Кроме того, величины  $Gm_i/r_i^3$  достаточно вычислить один раз для всех компонент. Для первого действия  $A \rightarrow x_i$  стоит заранее вычислить величины  $\tau_i^{j+1}/(j+1)$ , тогда потребуется  $6k(k+1) = 252$  сложений и  $6k(k+1) = 252$  умножений. Что касается второго действия  $x_i \rightarrow f_i$ , количество операций зависит от количества учитываемых массивных тел. Для 10 массивных тел в течение одной итерации нужно произвести:  $30k = 180$  вычитаний,  $10k = 60$  делений,  $10k = 60$  извлечений квадратного корня,  $30k = 180$  сложений и  $80k = 480$  умножений. Для третьего действия  $f_i \rightarrow \alpha_i$  вычислим заранее величины  $1/(\tau_i - \tau_j)$  и используем умножение вместо деления. Тогда количество операций составит  $6k(k+1)/2 = 126$  вычитаний и  $6k(k+1)/2 = 126$  умножений. Четвёртое действие  $\alpha \rightarrow A$  выполняется за  $6k^2(k-1)/2 = 540$  сложений и  $6k^2(k+1)/2 = 756$  умножений.

Последнее действие по затратам сопоставимо с вычислением правых частей. Соотношение изменится в пользу правых частей, если учесть дополнительные силы. В то же время, при увеличении степени полинома  $k$  затраты на четвёртое действие очень быстро растут. Например, при  $k = 8$  потребуется уже 1344 сложения и 1728 умножений. Вместо того чтобы оптимизировать это действие, объединим его с первым в сокращённой схеме  $\alpha \rightarrow x_i \rightarrow f_i \rightarrow \alpha_i$ . Тогда начальное приближение будет вычисляться по схеме  $\alpha \rightarrow A \rightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{\alpha}$ . Формула для объединённого действия  $\alpha \rightarrow x_i$ :

$$x_i = x_0 + h \left( f_0 \tau_i + \sum_{j=1}^k B_{ij} \alpha_j \right) \quad (2.14)$$

$$B_{ij} = \sum_{l=1}^j c_{jl} \frac{\tau_i^{l+1}}{l+1} \quad (2.15)$$

Количество арифметических операций не отличается от действия  $A \rightarrow x_i$ , при полном отсутствии четвёртого действия. Несколько усложняется получение начального приближения. Если попробовать упростить его аналогичным образом, получим:

$$\bar{\alpha}_i = \sum_{j=i}^k H_{ij} \alpha_j \quad (2.16)$$

$$H_{ij} = \sum_{l=i}^j \sum_{m=i}^l d_{mi} r^m e_{lm} c_{jl} \quad (2.17)$$

Если интегрирование производится с переменным шагом, коэффициенты  $H$  придётся вычислять каждый раз заново. Если интегрировать с постоянным шагом,  $r = 1$  и можно вычислить  $H$  заранее. Однако наши виртуальные астероиды регулярно испытывают тесные сближения с планетами, поэтому шаг менять необходимо. В результате была выбрана следующая стратегия. В большинстве случаев шаг равен предыдущему и используются заранее вычисленные коэффициенты  $H$ . При смене шага интегрирования берётся нулевое начальное приближение, как на первом шаге.

Исходная система уравнений имеет второй порядок, поэтому можно использовать другой вариант аппроксимации решения:

$$x'' = f = f_0 + \sum_{i=1}^k A_i \tau^i \quad (2.18)$$

Формула для действия  $\alpha \rightarrow x_i$  примет вид:

$$x_i = x_0 + h \left( x'_0 \tau_i + h \left( f_0 \frac{\tau_i^2}{2} + \sum_{j=1}^k W_{ij} \alpha_j \right) \right) \quad (2.19)$$

$$W_{ij} = \sum_{l=1}^j c_{jl} \frac{\tau_i^{l+2}}{(l+1)(l+2)} \quad (2.20)$$

Итерации производятся до полной сходимости положения и скорости на конце шага. Критерий прекращения итераций выбран с учётом машинной точности, составляющей 52 двоичных порядка для типа данных double.

## 2.3 Организация и оптимизация вычислений

Задача новой программы — не только расчёт траектории, но и вычисление параметров тесных сближений. Кроме того, расчёт траектории при

наличии тесных сближений требует особого подхода к выбору шага интегрирования.

## Алгоритм выбора шага и группировки виртуальных астероидов

Сама идея расчёта множества виртуальных астероидов одновременно выглядит просто. Если происходит сближение с какой-нибудь планетой, приходится уменьшать шаг, но это вполне можно сделать для всех виртуальных астероидов. Проблема заключается в том, что сближается чаще всего лишь небольшая доля, поэтому уменьшать шаг для всех астероидов сразу грозит большим количеством излишних вычислений. Помимо затрат времени, ненужное увеличение количества шагов увеличит накопление ошибок машинного округления. Очевидно, имеет смысл разбивать астероиды на группы в зависимости от шага интегрирования. Стоит предусмотреть также объединение астероидов, иначе число групп может вырасти до числа виртуальных астероидов, уничтожив тем самым основную идею оптимизации.

В качестве базового шага выбрана величина  $h_0 = 4^d$ , обеспечивающая удобное использование эфемерид DE430. Кроме того, в силу машинного представления чисел, умножение на целую степень  $2^i$  может быть выполнено без потери точности. Критерий уменьшения шага — эвристический, служащий для обнаружения тесных сближений. Если отношение планетоцентрической скорости к планетоцентрическому расстоянию превышает  $2^i M$ , шаг уменьшается до  $2^{-i} h_0$ . Величина  $M$  подбиралась в ходе тестирования. В итоге шаг выбирается из расчёта, чтобы изменение планетоцентрического радиус-вектора астероида не превышало четверти планетоцентрического расстояния. Степень полинома  $k$  подобрана для достижения наилучшей точности и равна 5. Контроль точности осуществлялся параллельным интегрированием с меньшим шагом.

Астероиды, не испытывающие тесного сближения согласно описанному выше критерию, интегрируются одновременно с шагом, равным базовому шагу  $h_0$ . Для астероидов, сближающихся с некоторым массивным телом, базовый шаг дробится на части, астероиды группируются по величине шага. Максимальная степень дробления  $i = 20$ , что соответствует минималь-

ному шагу около 0,33 секунды. Таким образом, максимальное число групп астероидов равно 21. Интегрирование на базовом шаге производится следующими итерациями:

1. Из множества астероидов выбираются те, для которых расчёт траектории завершён на наименьший момент времени. Благодаря использованию целых степеней  $2^i$ , ошибок машинного округления не возникает и моменты времени рассчитываются точно даже при использовании типа данных с плавающей запятой (точкой). Это не касается, впрочем, промежуточных узловых значений.
2. Для каждого астероида из отобранных независимо определяется шаг интегрирования. Если шаг меньше предыдущего, астероид переходит в другую группу. Если шаг больше предыдущего, то увеличение шага происходит только при возможности объединения с другой группой. При описанном способе дробления базового шага увеличение шага возможно каждый второй шаг.
3. Отобранные астероиды группируются по величине шага интегрирования, для каждого шага выполняется расчёт эфемерид в узловых значениях и, наконец, интегрирование на шаге.

Наконец, наименьший момент времени достигает правой границы базового шага и начинается интегрирование на следующем базовом шаге.

### Алгоритм уточнения сближений

С точки зрения программы, сближением астероида с планетой является локальный минимум функции планетоцентрического расстояния от времени. В ходе тестирования выяснилось, что за 10 минут программа может найти настолько большое количество сближений, что при использовании 50 байт для записи информации об одном сближении объём выходного файла превысит гигабайт. К счастью, это оказалось легко поправить, установив верхнюю границу минимального расстояния  $R_{min}$ . Для приемлемого объёма файлов вывода по умолчанию верхняя граница составляет 100 радиусов соответствующей планеты.

Итак, на каждом шаге интегрирования необходимо определить, достигнут ли минимум расстояния, и сравнить его с  $R_{min}$ . Для этого будем использовать планетоцентрические координаты и скорости астероида. Планетоцентрическое расстояние можно записать в виде:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.21)$$

Продифференцируем по времени:

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (2.22)$$

Признаком минимума будет смена знака производной с отрицательного на положительный. Для определения знака достаточно вычислить только верхнюю часть дроби, представляющую собой скалярное произведение планетоцентрических радиус-вектора и вектора скорости. Далее, если обнаружено сближение в пределах шага и планетоцентрическое расстояние на конце шага меньше  $2R_{min}$ , производится уточнение параметров сближения. Если после уточнения минимальное расстояние оказывается меньше  $R_{min}$ , параметры записываются в файл вывода.

Для уточнения момента времени сближения и минимального расстояния потребуется рассчитать планетоцентрические координаты и скорости астероида на произвольный промежуточный момент времени. Для планет можно использовать эфемериды, для астероида же возьмём полученную в методе Эверхарта аппроксимацию решения полиномом. Простейшим (и вполне пригодным) способом является бинарный поиск, когда отрезок времени делится пополам и вычисляется знак скалярного произведения в середине. После 10 итераций точность определения времени сближения улучшается в 1024 раза. Альтернативным способом является метод золотого сечения, при котором не требуется вычислять скорости, но медленнее сходимость. Тестирование показало, что бинарный поиск даёт заметно более стабильный результат, поэтому от метода золотого сечения было решено отказаться.

Запись об одном сближении занимает 50 байт, куда входят: номер виртуального астероида, юлианская дата, номер тела, с которым произошло сближение и минимальное расстояние. Размер записи подобран для того, чтобы можно было быстро оценить число сближений по размеру файла. В



наиболее часто используемой версии программы выводится три отдельных файла для сближений менее 100 радиусов планеты, 10 радиусов и 1 радиуса, то есть соударений. В случае соударения расчёт траектории данного виртуального астероида останавливается.

## 2.4 Тестирование новой программы

Итак, новая программа создана и удовлетворительно выполняет поставленную задачу. Представляет интерес оценка точности и производительности вычислений.

### Тестирование точности

Оценка точности осуществлялась двумя различными способами. Первый способ — параллельное интегрирование с меньшим шагом. Этот способ активно применялся в процессе внесения изменений. Предполагается, что при уменьшении шага результат стремится к точному решению. По опыту, это утверждение зачастую остаётся верным даже при ошибках в реализации метода, но сходимость сильно страдает. Естественно, точность остаётся ограниченной машинным округлением. Второй способ — сравнение со старой программой v19, использующей ту же модель движения. Данный способ позволяет убедиться, что результат действительно адекватен. Предположительно точность новой программы должна быть сопоставима со старой, поскольку в обоих случаях используется вариант метода Эверхарта.

Основным тестом точности стал расчёт траектории астероида (1036) Ганимед на 320 000 суток (около 900 лет). Результаты представлены на рис. (2.1). Такой промежуток времени на порядок превышает обычный для задач астероидной опасности. Кроме того, на траектории Ганимеда присутствует тесное сближение с Марсом. При сравнении траекторий рассматривалось расхождение в течение всего времени интегрирования. Разница результата между v19 и  $R^0$  не превышала  $10^{-6}$  а. е.; сравнение же траекторий, полученных  $R^0$  с нормальным и уменьшенным шагом, показало на порядок меньшую разницу.

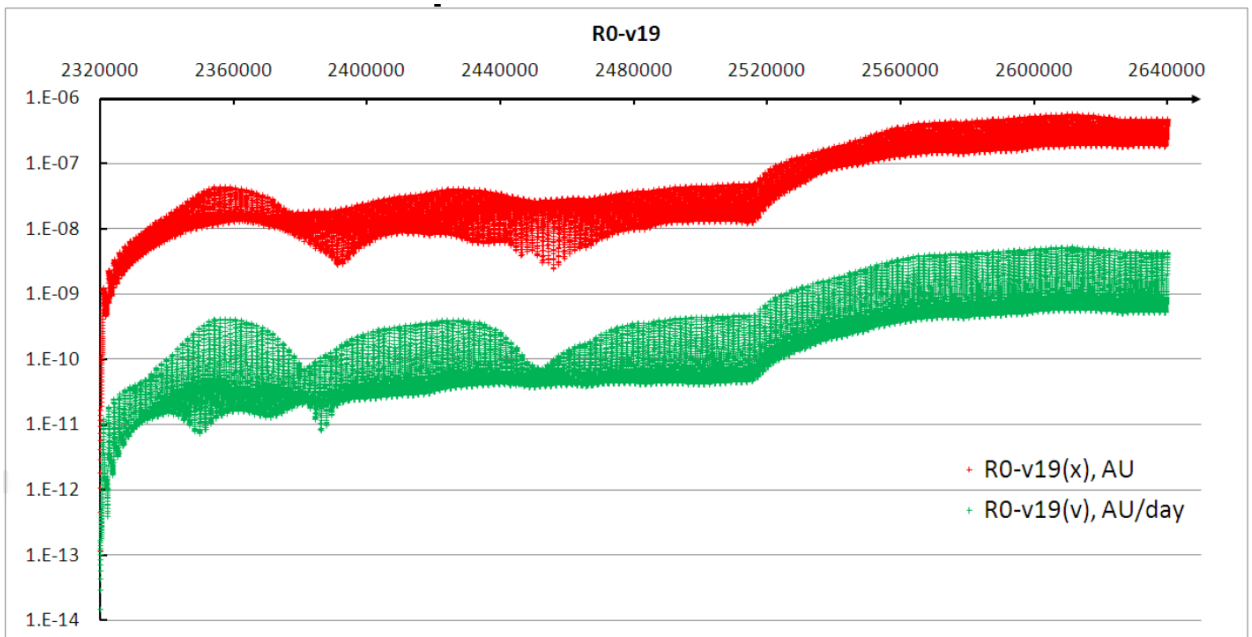


Рис. 2.1: Разница между  $R^0$  и v19 для положения и скорости астероида Ганимед в зависимости от юлианской даты

## Тестирование производительности

Важной особенностью новой программы является возможность вычисления сближений со всеми планетами за один расчёт траектории. При использовании программного комплекса v19 для достижения аналогичного результата пришлось бы запускать отдельный расчёт для каждой планеты. Уже поэтому производительность программы  $R^0$  на порядок выше. Однако это преимущество не имеет значения, если стоит задача вычислить сближения только с Землёй.

Для теста был выбран астероид (99942) Апофис, 1000 виртуальных астероидов в окрестности номинальной орбиты. Траектории быстро расходятся после сближения 2029 года, но многие виртуальные астероиды имеют больше одного сближения на траектории. Интегрирование производилось на 20 000 суток (около 55 лет), использовался процессор Intel G3260. У программы v19 среднее время, затрачиваемое на один астероид, составило 300 мс. Результат программы  $R^0$  составил 13 мс, что в 23 раза быстрее.

## Обсуждение результатов тестирования

Точность программы  $R^0$ , по всей видимости, не хуже, чем у v19. Более того, сравнение с результатом, полученным уменьшением шага интегрирова-

ния, позволяет предположить на порядок меньшую погрешность. Остаётся неясным, насколько применима упрощённая модель к оценке опасности реальных астероидов, однако, как минимум, для модельных исследований новая программа вполне пригодна. В принципе, добавление возмущений к правой части уравнения не представляет значительной проблемы, но увеличит время работы программы.

Производительность программы  $R^0$  заметно превзошла ожидания. На ранних тестах, когда выделение сближений не ограничивалось предельным расстоянием  $R_{min}$ , размер файла вывода получался неприлично большим. Позднее в качестве верхнего предела  $R_{min}$  по умолчанию бралось 100 радиусов соответствующей планеты. Для Земли это 0,0043 а. е., что почти на два порядка меньше 0,25 а.е., обычно используемых в v19.

Количество виртуальных астероидов в программе v19 было ограничено временем работы программы. Больше, чем  $10^5$  за раз, запускалось очень редко. В программе  $R^0$ , поскольку все виртуальные астероиды интегрируются одновременно, количество ограничено объёмом оперативной памяти. Для 8 гигабайт можно запустить около  $10^7$  виртуальных астероидов, при этом время работы новой программы остаётся приемлемым. Это делает потенциально возможным применение метода Монте-Карло, обычно отбрасываемого из-за своей ресурсоёмкости, но в то же время весьма надёжного и универсального. Данная модификация интегратора Эверхарта опубликована в [5].

## Глава 3

# Эксперименты Монте-Карло

### 3.1 200 астероидов

Цель эксперимента — продемонстрировать возможности программы в расчёте вероятностей соударения, оценить применимость метода к реальным астероидам и выявить возможные подводные камни при масштабных вычислениях. Всего в ходе эксперимента произведён расчёт траекторий  $2 \cdot 10^9$  виртуальных астероидов.

#### Выбор астероидов

Очевидно, лишь немногие астероиды имеют существенную вероятность соударения в ближайшие 100–200 лет. Поэтому, если брать совершенно произвольные астероиды, вычислительный ресурс будет потрачен впустую в 99% случаев. Чтобы результат был немного более интересным, чем массив нулей, астероиды были отобраны на основе результатов NASA (<https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/>). Использован следующий критерий: оценка размера астероида не менее 30 метров, вероятность соударения с Землёй не менее  $10^{-8}$ . На тот момент (декабрь 2019) таких астероидов набралось ровно 200 штук.

Критерий размера обусловлен двумя соображениями: во-первых, астероиды менее 30 метров не представляют большой опасности; во-вторых, при малом размере становится более значительным влияние негравитационных сил, которые в модели движения не учитываются. Критерий вероятности соударений был выбран исходя из предполагаемого количества

виртуальных астероидов, равного  $10^7$ . Даже если вероятность составляет минимальные  $10^{-8}$ , с шансом около 10% метод Монте-Карло обнаружит возможное соударение.

Номинальная орбита и ковариационная матрица для каждого астероида получены из базы данных NASA (<https://ssd.jpl.nasa.gov>). Начальная дата взята ровно та же, на которую даны элементы и матрица ковариаций в базе данных. Конечная дата — 1 сентября 2132 года или JD 2500000,5. Таким образом, поиск возможных соударений будет вестись на 100 лет вперёд с небольшим запасом. Поскольку в NASA в большинстве случаев ищут соударения на 100 лет вперёд, можно ожидать значительной корреляции результатов, то есть имеет смысл произвести сравнение.

### Процесс расчёта

Применение метода Монте-Карло требует генерации большого количества случайных чисел. Один виртуальный астероид задаётся 6 переменными (координаты и скорости), то есть на один реальный астероид нужно сгенерировать  $6 \cdot 10^7$  случайных чисел. Для данной задачи используется вихрь Мерсенна [43]. Этот генератор псевдослучайных чисел, помимо очень длинного периода, даёт равномерное распределение в пространствах размерности до 623.

Нормально распределённые величины можно получить из равномерно распределённых с помощью преобразования Бокса–Мюллера:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos 2\pi q_1 \sqrt{-2 \ln q_2} \\ z_2 &= \sin 2\pi q_1 \sqrt{-2 \ln q_2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Где  $q$  — независимые равномерно распределённые на интервале  $(0, 1)$  случайные величины, а  $z$  — независимые нормально распределённые случайные величины с математическим ожиданием 0 и стандартным отклонением 1. Затем сгенерированный вектор из шести нормально распределённых случайных величин преобразуется в соответствии с матрицей ковариаций. В итоге после многочисленных генераций получается рой виртуальных астероидов представляющих возможные элементы орбиты реального астероида. Для программы  $R^0$  элементы орбит преобразуются в барицентрические прямоугольные координаты.

## Результат

Результат опубликован и доступен по ссылке в форме электронной таблицы ([www.astro.spbu.ru/sites/default/files/stats.xls](http://www.astro.spbu.ru/sites/default/files/stats.xls)). Указано количество сближений с каждой планетой на 100, 10 и 1 радиус, суммарно от  $10^7$  виртуальных астероидов. Как и следовало ожидать, сближений и соударений с другими планетами относительно немного, всё же астероиды были отобраны из наиболее опасных для Земли. Тем не менее, помимо 156 млн сближений с Землёй найдено: 22 млн — с Луной, 8 млн — с Венерой, 1 млн — с Юпитером. Множество астероидов с высокими вероятностями соударения с Землёй имеют шанс столкнуться и с Луной. Для некоторых астероидов даже обнаружены возможные соударения с двумя и более планетами [20].

## Сравнение с NASA

Поскольку в NASA большинство астероидов считают примерно на тот же интервал времени, результаты можно ожидать очень похожими. Впрочем, в комментарии к полученным вероятностям они писали, что в ряде случаев результат сильно неустойчив по отношению к методике расчёта и отличие может достигать нескольких порядков. Кроме того, интервал, взятый для программы  $R^0$ , в большинстве случаев немного больше, поэтому и вероятность должна быть, в среднем, больше. Сопоставление результатов представлено на рис. (3.1).

При общем сходстве результатов можно отметить следующие особенности.

1. Для большинства астероидов, как и ожидалось, полученные вероятности несколько больше, чем у NASA. Нередко различие достигает одного-двух порядков, но чаще это десятки процентов. Наибольшие различия обычно возникают у астероидов с наихудшей точностью орбиты.
2. Для ряда астероидов программа  $R^0$  не обнаружила возможных соударений с Землёй. Прежде всего это астероиды с вероятностями менее  $10^{-7}$  по данным NASA. Очевидно, при использовании  $10^7$  виртуальных астероидов метод Монте-Карло не может надёжно определять

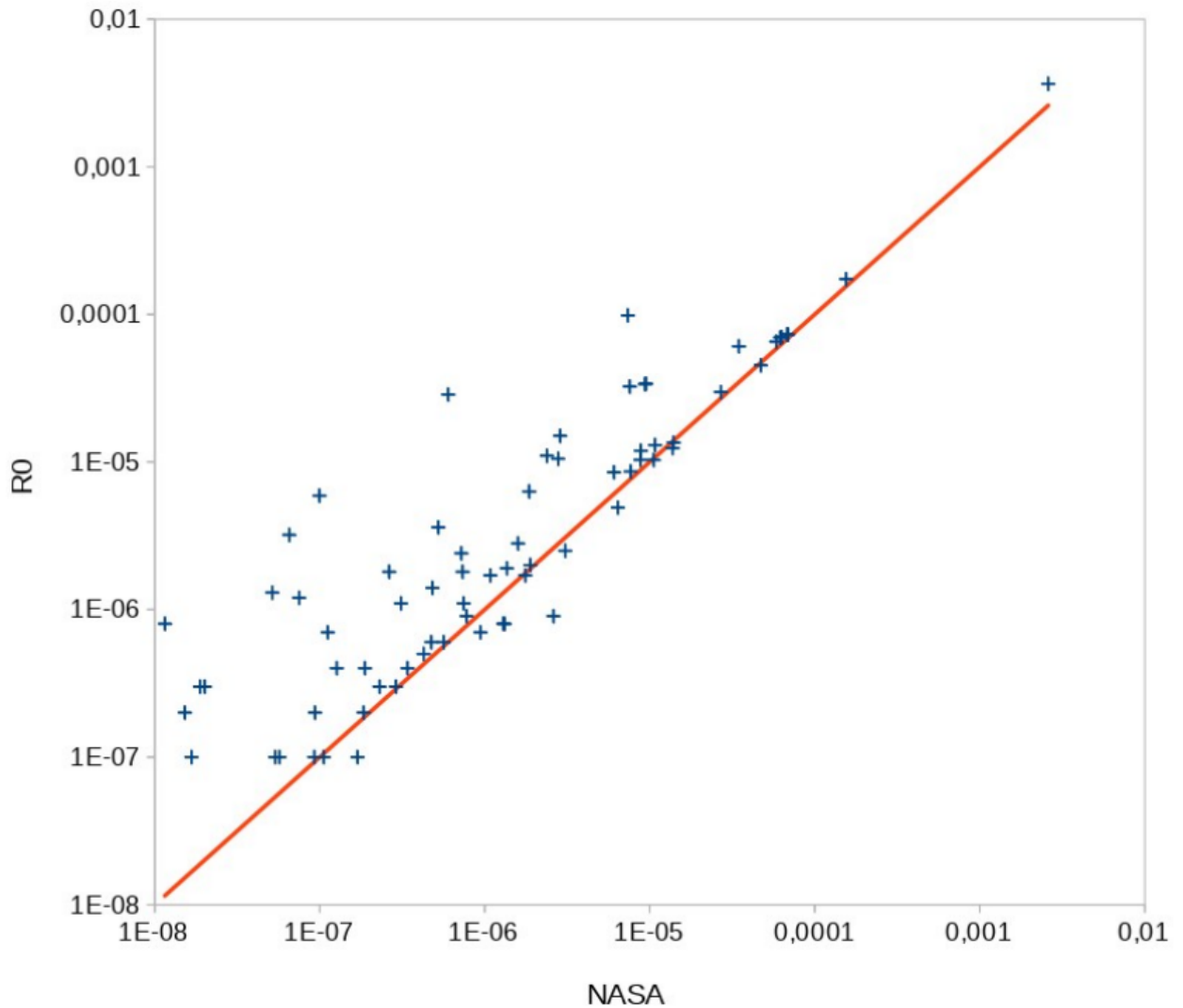


Рис. 3.1: Вероятности соударения, полученные программой  $R^0$  и NASA

столь малые вероятности. Тем не менее, возможные соударения в отдельных случаях нашлись.

3. Несколько астероидов с большими вероятностями по данным NASA имеют возможные соударения только после 2132 года. Для таких астероидов программа  $R^0$  также не обнаружила возможных соударений.
4. Астероид Апофис имеет очень точную орбиту и, соответственно, малый разброс начальных данных. Программа  $R^0$  не нашла возможных соударений Апофиса с Землёй несмотря на существенную вероятность по результатам NASA. По всей видимости, возмущения, не учитываемые программой  $R^0$ , в этом случае играют большую роль, чем неопределённость орбиты.

5. Указанные выше причины различий результатов не объясняли различие в 2 из 200 случаев. Для этих астероидов было произведено дополнительное сравнение с NEODyS, в ходе которого выяснилось, что различие с NASA составляло несколько порядков. Надо полагать, именно в этих случаях неустойчивость к методике расчёта наиболее высока.

## Итоги эксперимента

Получены вероятности соударения 200 астероидов с Землёй, Луной и другими планетами. Схожесть результата с результатами NASA говорит о том, что программа  $R^0$  вполне пригодна для оценки опасности реальных астероидов. Однако к результату всё равно необходимо относиться с большой осторожностью, поскольку модель движения очень простая. Особенно для астероидов с высокой точностью орбиты, у которых разброс начальных данных невелик и разница в модели движения играет более значительную роль. Впрочем, подавляющее большинство астероидов перестают быть опасными после уточнения орбиты. Апофис — это особый случай.

Примечательным является соотношение количества сближений и соударений. Понятно, что сближение намного более вероятно, но наличие конкретных значений позволит использовать информацию о сближениях для выделения опасных астероидов. Преимуществом является меньшее количество виртуальных астероидов, необходимое для поиска возможных сближений. Всё же планеты очень маленькие в масштабе Солнечной системы. Это даёт потенциальную возможность самостоятельного определения опасных астероидов из общего множества.

Астероиды, могущие столкнуться с Землёй, нередко имеют существенную вероятность столкновения и с другими телами Солнечной системы. Отчасти это связано с тем, что такие астероиды имеют плохо определённые орбиты, но высокая неопределённость возникает также в результате тесных сближений.



## 3.2 Сканирование пространства элементов орбит

Цель эксперимента — оценить расположение опасных для Земли астероидов в пространстве элементов орбит, а также сравнить полученный результат с определениями астероида, сближающегося с Землёй, и потенциально опасного астероида.

### Постановка задачи

По определению к околоземным астероидам, или астероидам, сближающимся с Землёй, относятся астероиды с перигелийным расстоянием менее 1,3 а. е. Ограничение на орбиту потенциально опасных астероидов ещё строже: MOID должен быть менее 0,05 а. е. Представляет интерес рассмотреть, насколько вообще вероятны сближения и соударения с Землёй в зависимости от элементов орбиты. Возможно, это позволит ограничить поиск опасных астероидов.

Среди давно обсуждаемых утверждений об астероидной опасности есть следующее: на траектории соударения вероятно тесное сближение незадолго до соударения. Обычно это утверждение проверяется расчётом траекторий от соударения в прошлое. Однако в ходе настоящего эксперимента имеется возможность получить траектории соударения противоположным образом.

Конкретная задача была поставлена следующим образом:

1. Для фиксированных эксцентриситета, перигелийного расстояния и наклона сгенерировать рой виртуальных астероидов со случайными остальными элементами.
2. Выполнить расчёт сближений и соударений.
3. Проверить наличие сближений на траекториях соударения.

### Выбор астероидов

Границы исследуемого пространства элементов орбит были выбраны исходя из элементов орбит реальных околоземных астероидов. Эксцентриситет от 0 до 0,9; перигелийное расстояние от 0,2 до 1,4 а. е.; наклонение от 0

до  $50^\circ$ . За пределами этих границ находится менее 2% известных АСЗ. Верхний предел перигелийного расстояния немного выходит за границы множества околоземных астероидов. Это сделано по результатам пробного эксперимента, показавшего возможность сближений с Землёй околоземных астероидов с наибольшим значением перигелийного расстояния.

В указанных границах выбрано 15 равномерно распределённых значений эксцентриситета, 15 — перигелийного расстояния, 25 — наклона. Например, эксцентриситет принимает значения от 0,03 до 0,87. Для каждой комбинации выбранных значений элементов сгенерировано по  $2 \cdot 10^5$  виртуальных астероидов. Начальным моментом выбран 2000 год, интегрирование производилось на 200 лет вперёд.

### Сближения перед соударениями

Данные результаты были получены в меньшем по масштабу пробном эксперименте, отличающимся следующими параметрами. Эксцентриситет от 0 до 0,8; перигелийное расстояние от 0,3 до 1,3 а. е.; наклонение от 0 до  $15^\circ$ . Значений эксцентриситета — 10, перигелийного расстояния — 10, наклонов — 5. Сгенерировано по  $10^5$  виртуальных астероидов. Описанные здесь результаты были отправлены в статью почти сразу же [34]. Впоследствии, в основном эксперименте, вопрос сближений перед соударениями уже не поднимался.

Из полученных траекторий соударения были исключены случаи в первые 100 лет. Оставшиеся траектории были проанализированы на предмет наличия сближений в течение 100 лет до соударения. Всего было получено 72 траектории соударения с Землёй. Из них 20 траекторий имели в течение 100 лет сближение с ней до 0,01 а. е.; 70 траекторий — до 0,05 а. е. Для 5 из 72 траекторий предыдущее сближение с Землёй происходит за 358-365 дней до соударения. Также получено 33 траектории соударения с Венерой. 18 из них имели сближение до 0,01 а. е.; все 33 траектории — до 0,05 а. е. С Юпитером получено 327 траекторий соударения, однако лишь 28 из них имели сближение до 0,05 а. е. Учитывая, что орбита Юпитера в 5 раз больше, а период в 12 раз, понятно, почему сближений перед соударениями так мало. С остальными планетами получено слишком мало траекторий соударения для каких-то новых выводов.

## Результаты

Каких-либо значимых особенностей в зависимости числа сближений от наклона обнаружить не удалось, поэтому в дальнейшем будет рассматриваться плоскость эксцентриситет — перигелийное расстояние. Единственное, это уменьшение числа сближений с ростом наклона. Однако, например, число сближений с Меркурием достигает максимума при наклоне  $7^\circ$ .

На следующих диаграммах площадь круга пропорциональна количеству астероидов. На рис. (3.2) приведены начальные эксцентриситет и перигелийное расстояние астероидов, столкнувшихся с Землёй. На рис. (3.3) приведены начальные элементы астероидов, сблизившихся с Землёй до 10 её радиусов. На рис. (3.4) то же самое, но для 100 радиусов Земли. Наконец, на рис. (3.5) использована логарифмическая шкала, чтобы показать всё множество начальных значений эксцентриситета и перигелийного расстояния, для которых обнаружили сближения с Землёй до 100 её радиусов.

Подавляющее большинство сближений с Землёй исходит от астероидов, чья начальная орбита пересекала орбиту Земли, то есть перигелийное расстояние меньше 1 а. е., а афелийное больше 1 а. е. В то же время немало виртуальных астероидов, чья орбита находилась полностью внутри или снаружи орбиты Земли, успели за 200 лет поменять свою орбиту и сблизится на расстояние менее 100 радиусов с Землёй. В основном это астероиды с высоким афелием, подвергающиеся воздействию Юпитера, но есть также небольшое количество под влиянием Венеры. Стоит отметить, что сблизилась с Землёй даже виртуальные астероиды с начальным перигелийным расстоянием более 1,3 а. е., то есть за пределами множества околоземных. Это позволяет предположить, что опасность для Земли, даже в относительно краткосрочной перспективе, не ограничивается лишь АСЗ. При сближении с Юпитером такой астероид вполне может перейти сразу в группу потенциально опасных.

## Итоги эксперимента

Исследован вопрос наличия тесного сближения незадолго до соударения. Особенностью настоящего исследования является противоположный оче-

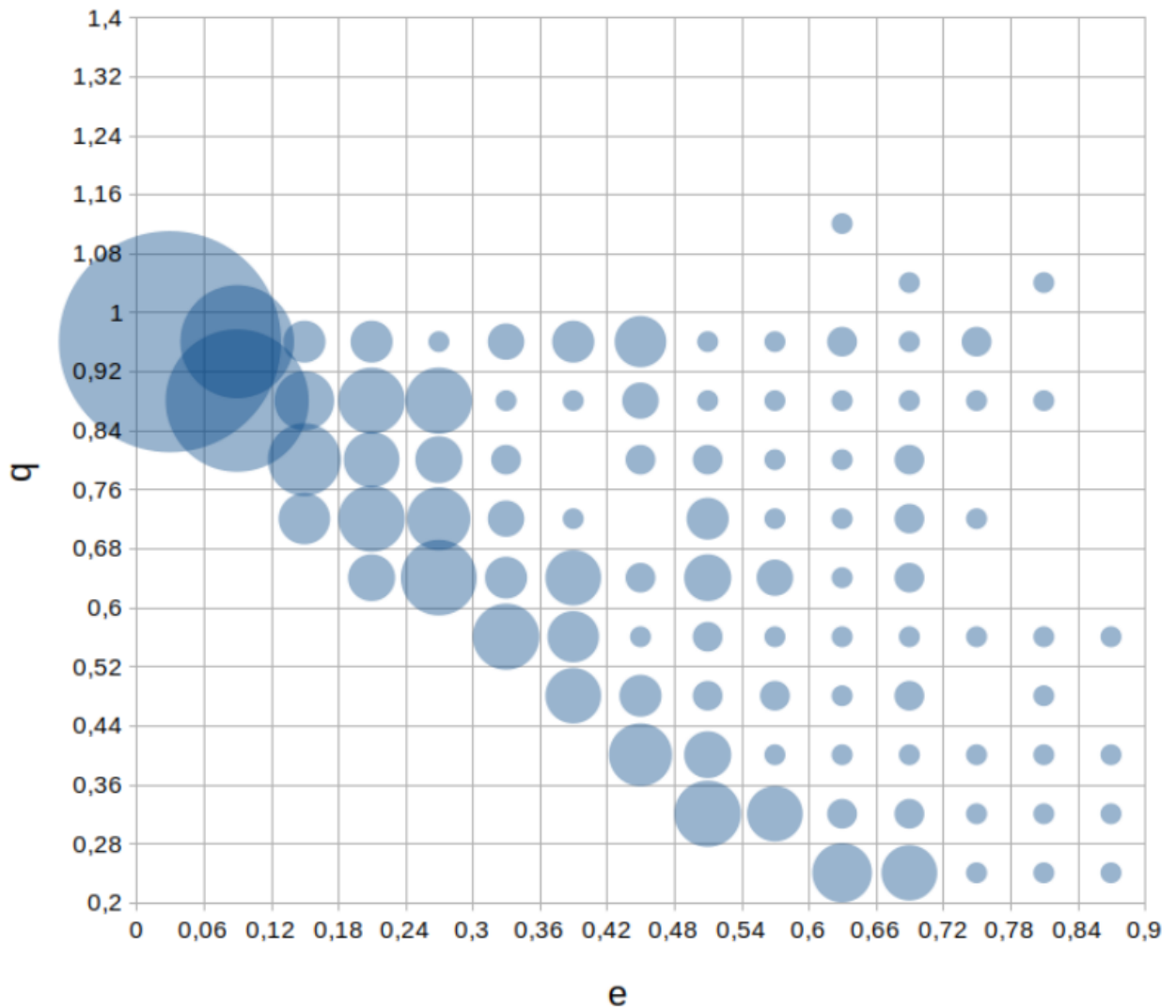


Рис. 3.2: Соударения с Землёй

видному подход: вместо интегрирования траекторий от соударения в прошлое производилось интегрирование в будущее. Кроме того, получен результат для Венеры и Юпитера. Для Земли в 97% случаев за 100 лет до соударения произошло сближение до 0,05 а. е., что говорит в пользу принятого определения потенциально опасного астероида. В 7% случаев сближение произошло за 358–365 дней, то есть произошёл резонансный возврат астероида с периодом 1/1.

Основной результат — вероятности сближений и соударений в зависимости от элементов орбит. Наиболее примечательны сближения с Землёй астероидов, чьё перигелийное расстояние в начальный момент превосходило 1,3 а. е. Причём это сближения не далее 100 радиусов Земли, что в масштабах Солнечной системы совсем немного. По всей видимости, про-

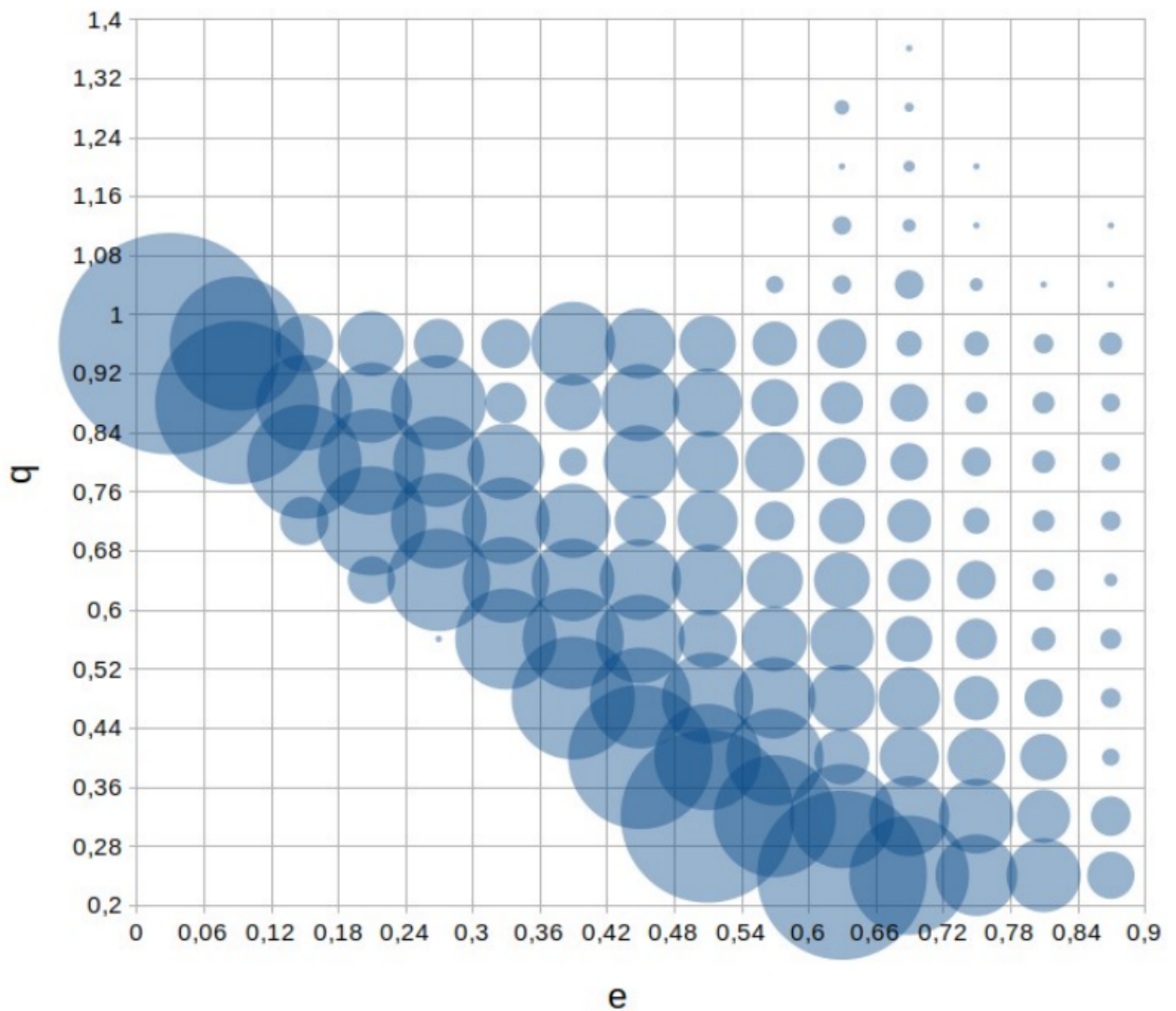


Рис. 3.3: Сближения с Землёй до 10 радиусов

блема астероидно-кометной опасности не ограничивается околоземными астероидами. Сближающиеся с другими планетами астероиды тоже могут представлять угрозу для Земли.

### 3.3 Первый массовый расчёт вероятностей соударения

Цель эксперимента — оценить возможности самостоятельного поиска опасных астероидов с использованием новой программы.

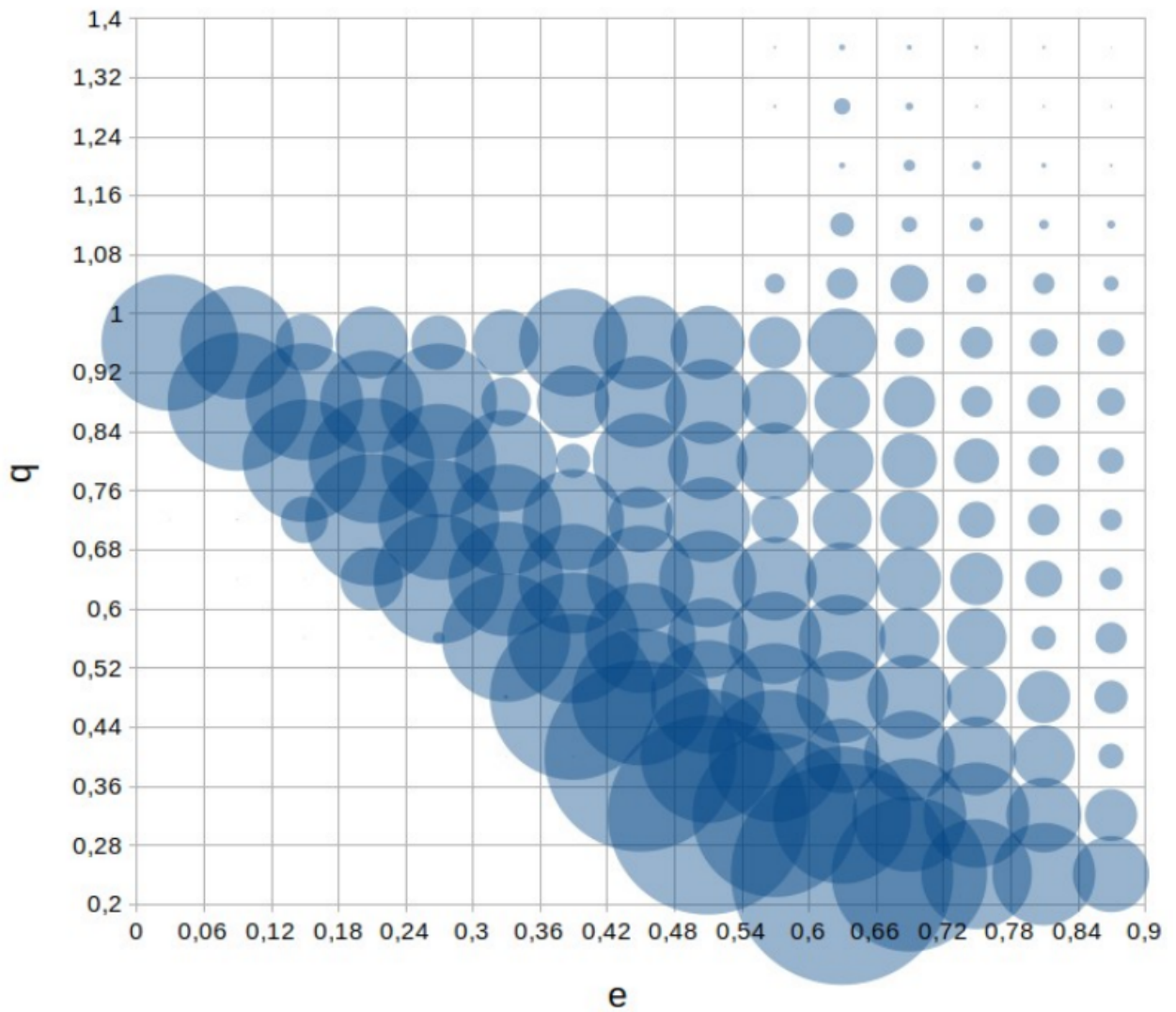


Рис. 3.4: Сближения с Землёй до 100 радиусов

### Выбор астероидов

Поскольку наиболее вероятная угроза исходит от астероидов, пересекающих орбиту Земли, были исключены астероиды с низким афелием  $Q < 0,9$  а. е. и с высоким перигелием  $q > 1,1$  а. е.. Таким образом, в данном эксперименте рассматриваются только околоземные астероиды, но без априорно известной вероятности соударения. Имеет также смысл исключить малые астероиды, что и было сделано по критерию  $H > 26$ . Граница примерно соответствует размеру тела, породившего Челябинский суперболид. В общей сложности отбор прошли 15909 астероидов, более половины известных околоземных.

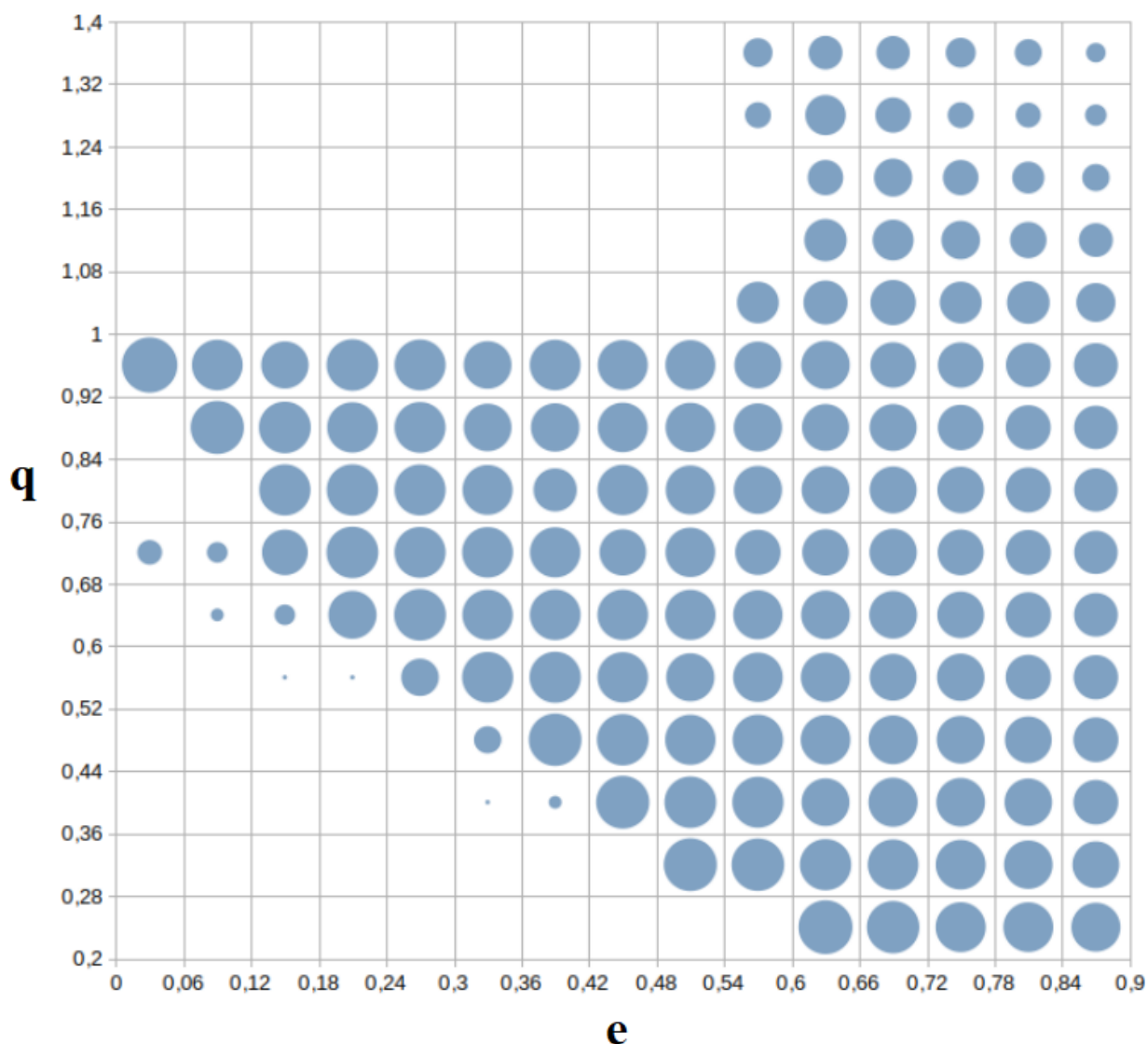


Рис. 3.5: Сближения с Землёй до 100 радиусов в логарифмической шкале

### Процесс расчёта

В первом эксперименте для 200 угрожающих Земле астероидов выявлено соотношение количества сближений на 100, 10 и 1 радиус. Это можно использовать для поиска опасных объектов методом Монте-Карло, ведь попасть в 100 радиусов вокруг Земли намного проще и виртуальных астероидов можно использовать меньше. При этом в масштабе Солнечной системы это всё ещё очень малая величина, так что случайный астероид столь близко вряд ли пролетит.

С учётом ранее полученных результатов и ограничений на время работы программы схема расчёта получилась следующей:

1. Для отобранных 15909 астероидов сгенерировано по 2000 виртуаль-

ных астероидов. Дальнейший отбор прошли астероиды с хотя бы одним сближением до 1000 радиусов с Землёй, всего 8463 астероидов.

2. Для отобранных на предыдущем этапе 8463 астероидов сгенерировано по 10000 виртуальных. Отбор прошли астероиды со сближением до 100 радиусов.
3. Для отобранного 661 астероида сгенерировано по 50000 виртуальных.

## Итоги эксперимента

Возможные соударения с одной из планет либо Луной выявлены для 143 астероидов, из них только 83 астероида — с Землёй. Примечательно, что многие астероиды, сближающиеся с Землёй, представляют угрозу и для других планет. Учитывая результаты предыдущего эксперимента, можно предположить и обратное: сближающиеся с другими планетами астероиды несут потенциальную угрозу для Земли. По всей видимости, даже для Земли задача астероидно-кометной безопасности не может быть решена, если рассматривать только околоземные астероиды.

## 3.4 Второй массовый расчёт вероятностей соударения

Цель эксперимента — произвести поиск опасных астероидов с учётом результатов сканирования пространства элементов орбит.

### Выбор астероидов

Поскольку ограничиваться околоземными астероидами уже не имеет смысла, выбор произведён из всех известных астероидов Солнечной системы, коих больше миллиона. Исключены самые малые астероиды по критерию  $H > 26$ . Исключены астероиды Главного Пояса, не испытывающие сближений с планетами, по критерию  $(q > 1,8 \text{ а. е.}) \text{ AND } (Q < 4,0 \text{ а. е.})$ . Осталось 127690 астероидов, для которых и будет производиться расчёт вероятности.



## Процесс расчёта

Расчёт производится до 2132 года. Аналогично предыдущему эксперименту, схема расчёта трёхступенчатая:

1. Для выбранных астероидов сгенерировано по 2000 виртуальных. Отбор прошли астероиды, имеющие хотя бы одно сближение до 1000 радиусов с любой планетой, всего 11291 астероид.
2. Для отобранных на предыдущем этапе астероидов сгенерировано по 20000 виртуальных. Отбор прошли астероиды, для которых нашлось хотя бы одно сближение до 100 радиусов, всего 3208 астероидов.
3. Для прошедших последний отбор астероидов сгенерировано по  $2 \cdot 10^5$  виртуальных, результат считается окончательным. Отметим, что при суммарной вероятности соударения астероида  $10^{-4}$  шанс не получить ни одной траектории соударения составляет  $2 \cdot 10^{-9}$ . При вероятности  $10^{-5}$  шанс отрицательного результата уже 13,5%, но всё же в большинстве случаев соударения находятся. При вероятности  $10^{-6}$  шанс отрицательного результата достигает 81,9%, но даже в этом случае остаётся неплохой шанс положительного результата. Учитывая количество исследуемых астероидов, траектории соударения вполне могут найтись и при намного меньших вероятностях, но, естественно, о надёжном выявлении соударений речи уже нет.

## Итоги эксперимента

Результаты доступны в форме электронной таблицы ([www.astro.spbu.ru/sites/default/files/stats\\_200000.xls](http://www.astro.spbu.ru/sites/default/files/stats_200000.xls)). Указано количество сближений астероидов с планетами до 100, 10 и 1 радиуса соответствующей планеты на 200 тыс. виртуальных астероидов.

Возможные соударения с одной из планет или Луной обнаружены для 423 астероидов, из которых 163 астероида — с Землёй. На сайте NASA, с учётом введённого ограничения на абсолютную звёздную величину, таких астероидов 377, но это только с Землёй. При непротиворечивости результатов в целом, бросается в глаза отсутствовавший на сайте NASA

(<https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/>) астероид 2015 СТ13, для которого полученная вероятность оказалась на втором месте. Детальное рассмотрение результата показало, что, по всей видимости, до возможного соударения NASA немного не досчитали, взяв более короткий интервал времени. Уже после представления результатов на Planetary Defense Conference этот астероид на сайте появился.

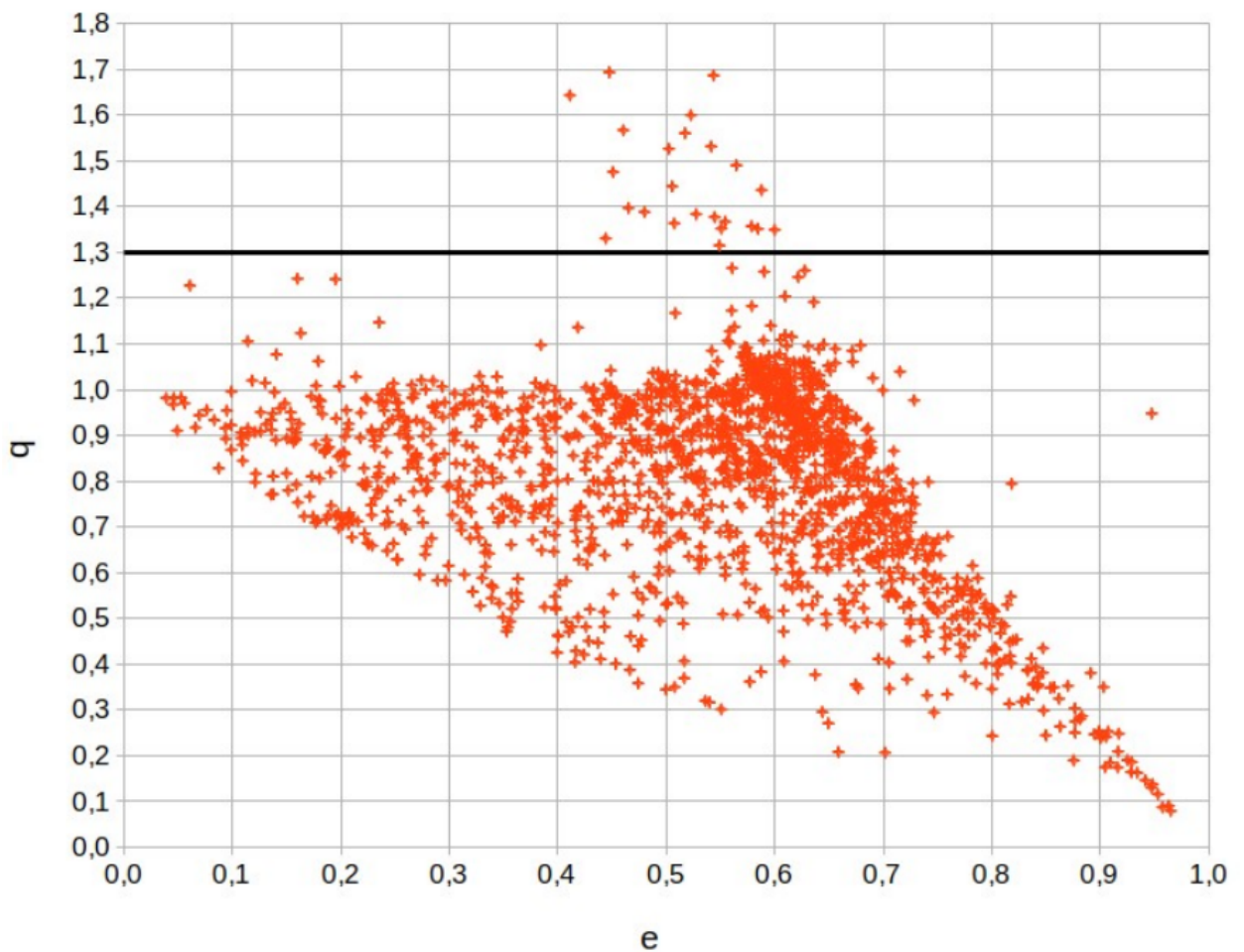


Рис. 3.6: Начальное положение астероидов, сблизившихся с Землёй до 100 радиусов, на плоскости эксцентриситет — перигелийное расстояние

Для 24 астероидов с перигелийным расстоянием более 1,3 а. е. найдены траектории сближения с Землёй до 100 радиусов до 2132 года (См. рис. 3.6). Эти астероиды имеют большой эксцентриситет и афелий вблизи орбиты Юпитера. Таким образом, эволюция орбит астероидов, приводящая к пополнению популяции АСЗ, вполне может создать значимую угрозу в течение 100 лет. Детальное рассмотрение результата выявило, что изменение орбиты происходит практически мгновенно из-за сближения с Юпитером. В отличие от большинства околоземных, эти астероиды большую часть времени проводят в районе орбиты Юпитера и даже в перигелии не подходят близко к Земле. То есть наблюдательная селекция скорее не в их пользу, особенно учитывая повышенное внимание именно к АСЗ.

# Заключение

## Выносимые на защиту результаты

1. Создан алгоритм, позволяющий рассчитывать движение миллионов виртуальных астероидов одновременно. Реализующее его программное обеспечение отличается высоким быстродействием и позволяет находить сближения и соударения с планетами Солнечной системы и Луной. С помощью данного ПО возможно рассчитывать вероятности соударения методом Монте-Карло для большого числа астероидов на настольных ПК за приемлемое время.
2. В пространстве орбитальных параметров: эксцентриситет  $e$ , перигелийное расстояние  $q$  и угол наклона  $i$ , — выделены области, содержащие астероиды, которые могут представлять опасность для Земли, то есть обнаружилось их сближение с Землёй в пределах 100 радиусов Земли до 2132 года.
3. В результате анализа эволюции 127 690 астероидов обнаружено 3200, сближающихся с планетами менее чем на 100 их радиусов до 2132 года. Примечательно, что 24 из 1611 сблизившихся с Землёй астероидов не относятся к классу околоземных, то есть имеют перигелийное расстояние более 1,3 а. е. При оценке вероятности столкновения обнаружилось, что соударение с какой-либо планетой возможно для 423 астероидов, из них 163 могут столкнуться с Землёй.
4. Результатами численного моделирования эволюции модельных астероидов подтверждена гипотеза о предваряющих соударения сближениях астероидов с планетой. Из 50 млн модельных астероидов с Землёй столкнулись 72, из них у 70 наблюдались сближения менее чем на 0,05 а. е. в течение 100 лет до соударения.

## Литература

- [1] Александрова А.Г., Галушина Т.Ю., Прищепенко А.Б., Холшевников К.В., Чечеткин В.М. О превентивном разрушении опасного астероида // *Астрономический журнал*. 2016. Т. 93. № 6. С. 595-603.
- [2] Артемьева Н.А., Баканас Е.С., Барабанов С.И., Витязев А.В., Волков В.А., Глазачев Д.О., Дегтярь В.Г., Емельяненко В.В., Иванов Б.А., Кочетова О.М., Куликова Н.В., Медведев Ю.Д., Нароенков С.А., Немчинов И.В., Печерникова Г.В., Поль В.Г., Попова О.П., Рыхлова Л.В., Светцов В.В., Симонов И.В., Соколов Л.Л., Тимербаев Р.М., Чернетенко Ю.А., Шор В.А., Шувалов В.В., Шустов Б.М. АСТЕРОИДНО-КОМЕТНАЯ ОПАСНОСТЬ: ВЧЕРА, СЕГОДНЯ, ЗАВТРА // Москва, 2010.
- [3] Баляев И.А.  
ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ АСТЕРОИДОВ, ВЕДУЩИХ К СОУДАРЕНИЮ С ЗЕМЛЕЙ  
В сборнике: *Физика Космоса. Труды 48-й Международной студенческой научной конференции*. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина. 2019. С. 171.
- [4] Баляев И.А.  
УСКОРЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ АСТЕРОИДОВ И ПЕРВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ  
В сборнике: *Физика Космоса. Труды 49-й Международной студенческой научной конференции*. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина. 2020. С. 149-150.

- [5] Баляев И.А.  
ОБ УСКОРЕНИИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ АСТЕРОИДОВ  
Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы. 2020. Т. 54, №6, С. 567-576.
- [6] Баляев И. А.  
МАССОВЫЙ РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОУДАРЕНИЯ АСТЕРОИДОВ: МЕТОДЫ, ПОДВОДНЫЕ КАМНИ, СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ  
В сборнике: Астрономия и исследования космического пространства. Сборник научных трудов. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина. 2021. С. 87-88.
- [7] Бондаренко Ю.С., Вавилов Д.Е., Медведев Ю.Д. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТ МАЛЫХ ТЕЛ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ, ОСНОВАННЫЙ НА ПЕРЕБОРЕ ОРБИТАЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ // Астрон. вестн. 2014, т. 48, №3, с. 229.
- [8] Вавилов Д.Е., Медведев Ю.Д. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТ АСТЕРОИДОВ, СБЛИЖАЮЩИХСЯ С ЗЕМЛЕЙ, С УЧЕТОМ АПРИОРНОЙ ТОЧНОСТИ ИХ НАБЛЮДЕНИЙ // Труды Института прикладной астрономии РАН. 2013, №27, с. 126-131.
- [9] Галушина Т. Ю., Раздымахина О. Н. О предсказуемости движения астероидов, проходящих через сферу тяготения Земли // Вестн. Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та. 2011. Вып. 6(39). С. 9-14.
- [10] Дегтярь В.Г., Волков В.А. Ракетная концепция системы противонастероидной защиты Земли. М.: Машиностроение, 2013.
- [11] Елькин А.В., Соколов Л.Л. О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРОХОЖДЕНИЯХ АСЗ В ОКРЕСТНОСТЯХ ЗЕМЛИ // Тез. докл. Всеросс. конф. с международным участием «Астероидная опасность-95» 23-25 мая 1995 г. Санкт-Петербург: ИТА РАН, МИПАО. 1995, т. 2, с. 41.

- [12] Емельяненко В.В., Шустов Б.М.; ЧЕЛЯБИНСКОЕ СОБЫТИЕ И АСТЕРОИДНО-КОМЕТНАЯ ОПАСНОСТЬ // Успехи физических наук, 2013, т. 183, №8, с. 885-888.
- [13] Ивашкин В.В., Стихно К.А. О проблеме коррекции орбиты сближающегося с Землей астероида (99942) Apophis // Докл. АН. Механика. 2008. Т. 419. № 5. С. 624-647.
- [14] Ивашкин В.В., Стихно К.А. О предотвращении возможного столкновения астероида Апофис с Землей // Астрон. вестн. 2009. Т. 43. № 6. С. 502-516 (Sol. Syst. Res. 2009. V. 43. № 6. P. 483-496).
- [15] Новиков Е.А., Исаева С.И. ЧИСЛЕННОЕ СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ МЕРСОНА И ЭВЕРХАРТА НА ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ // Системы управления и информационные технологии, 2011, №1 (43), с. 25-29.
- [16] Переворочаева Е.А., Галушина Т.Ю. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ МЕТОДА ЭВЕРХАРТА НА ПРИМЕРЕ ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ // Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики — 2017, 2018, с. 210-213.
- [17] Петров Н.А., Баляев И.А., Васильев А.А., Соколов Л.Л.  
ВОЗМОЖНЫЕ СБЛИЖЕНИЯ И СОУДАРЕНИЯ С ЗЕМЛЕЙ ОПАСНЫХ АСТЕРОИДОВ  
В сборнике: ИЗВЕСТИЯ ГЛАВНОЙ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ В ПУЛКОВЕ. Труды Всероссийской астрометрической конференции. 2018. С. 201-206.
- [18] Петров Н.А., Васильев А.А., Кутеева Г.А., Соколов Л.Л. О траекториях соударения астероидов 2015 RN35 и Апофис с Землей // Астрон. вестн. 2018. Т. 52. № 4. С. 330-342 (Sol. Syst. Res. 2018. V. 52. № 4. P. 326-337).
- [19] Соколов Л.Л., Баляев И.А., Кутеева Г.А., Петров Н.А., Эскин Б.Б.  
ЭФФЕКТ ГРАВИТАЦИОННОГО МАНЕВРА ПРИ СБЛИЖЕНИЯХ АСТЕРОИДОВ С ЗЕМЛЕЙ

В книге: XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. Сборник тезисов: в 2 т. Москва, 2020. С. 282-284.

- [20] Соколов Л.Л., Баляев И.А., Кутеева Г.А., Петров Н.А., Эскин Б.Б. О СБЛИЖЕНИЯХ И СОУДАРЕНИЯХ АСТЕРОИДОВ С ЛУНОЙ И ПЛАНЕТАМИ

В сборнике: IX Поляховские чтения, материалы международной научной конференции по механике. Санкт-Петербургский государственный университет. Санкт-Петербург, 2021. С. 169-171.

- [21] Соколов Л.Л., Баляев И.А., Кутеева Г.А., Петров Н.А., Эскин Б.Б. ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ СОУДАРЕНИЙ И СБЛИЖЕНИЙ АСТЕРОИДА С ЛУНОЙ И ПЛАНЕТАМИ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

В книге: XLV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. Сборник тезисов: в 4 т. Москва, 2021. С. 404-408.

- [22] Соколов Л.Л., Баляев И.А., Кутеева Г.А., Петров Н.А., Эскин Б.Б. ВОЗМОЖНЫЕ СОУДАРЕНИЯ И СБЛИЖЕНИЯ С ЗЕМЛЕЙ НЕКОТОРЫХ ОПАСНЫХ АСТЕРОИДОВ

Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы. 2021. Т. 55, №1, С. 65-73.

- [23] Соколов Л.Л., Баляев И.А., Холшевников К.С., Эскин Б.Б. О СБЛИЖЕНИЯХ И СОУДАРЕНИЯХ АСТЕРОИДОВ С ПЛАНЕТАМИ

Известия Национальной академии наук Таджикистана. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2021. №2 (183), С. 27-36.

- [24] Соколов Л.Л., Башаков А.А., Питъев Н.П. ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ АСТЕРОИДА 99942 АРОРНИС // Астрон. вестн. 2008, т. 42, №1, с. 54-65.



- [25] Соколов Л.Л., Башаков А.А., Питъев Н.П. Резонансные орбиты астероидов, сближающихся с землей // *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы*. 2009. Т. 43. № 4. С. 333-337.
- [26] Соколов Л.Л., Башаков А.А., Борисова Т.П., Петров Н.А., Питъев Н.П., Шайдулин В.Ш. Траектории соударения астероида Апофис с Землей в XXI веке // *Астрон. вестн.* 2012. Т. 46. № 4. С. 311-320. (Solar System Research 2012. V. 46. № 4. P. 291-300).
- [27] Соколов Л.Л., Борисова Т.П., Васильев А.А., Петров Н.А. Свойства траекторий соударения астероидов с Землей // *Астрон. вестн.* 2013. Т. 47. № 5. С. 441-447. (Solar System Research. 2013. V. 47. № 5. P. 408-413).
- [28] Соколов Л.Л., Кутеева Г.А. Возможные соударения астероида Апофис после уточнения его орбиты // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2015. Т. 2. № 1. С. 148-156.
- [29] Соколов Л.Л., Кутеева Г.А., Петров Н.А., Эскин Б.Б., Баляев И.А., Васильев А.А.  
О ХАРАКТЕРИСТИКАХ ОСОБЫХ ТРАЕКТОРИЙ АСТЕРОИДА АПОФИС И ВОЗМОЖНОСТИ УВОДА ЕГО ОТ СОУДАРЕНИЙ С ЗЕМЛЕЙ  
*Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы*. 2021. Т. 55, №3, С. 265-271.
- [30] Соколов Л.Л., Васильев А.А., Петров Н.А., Поль В.Г., Эскин Б.Б. О возможности предотвращения соударений с учетом резонансных возвратов астероидов // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2017. Т. 14. № 4-2. С. 135-139.
- [31] Соколов Л.Л., Петров Н.А., Васильев А.А., Кутеева Г.А., Шмыров А.С., Эскин Б.Б. О возможности увода астероида от соударений с Землей с использованием кинетического метода // *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы*. 2018. Т. 52. № 4. С. 343-350.

- [32] Соколов Л.Л., Петров Н.А., Эскин Б.Б., Кутеева Г.А. Сближения с Землей опасных астероидов // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. № 6(90).
- [33] Холшевников К.В. ВЕРОЯТНОСТЬ СТОЛКНОВЕНИЯ С ОБЪЕКТОМ, ДВИЖУЩИМСЯ ПО ОРБИТЕ СОУДАРЕНИЯ С ЗЕМЛЕЙ // Труды всесоюзного совещания «Астероидная опасность» 10-11 октября 1991 г. Санкт-Петербург. Под ред. А.Г. Сокольского. ИТА РАН, 1992.
- [34] Холшевников К.С., Баляев И.А., Соколов Л.Л., Эскин Б.Б. РЕТРОСПЕКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ОРБИТ СТАЛКИВАЮЩИХСЯ С ЗЕМЛЕЙ АСТЕРОИДОВ Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8, №3, С. 523-532.
- [35] Шустов Б.М., Рыхлова Л.В., Кулешов Ю.П., Дубов Ю.Н., Елкин К.С., Вениаминова С.С. и др. Концепция системы противодействия космическим угрозам: астрономические аспекты. Астрономический вестник, 2013, т. 47, № 4, с. 327-340.
- [36] Эйсмонт Н.А., Боярский М.Н., Ледков А.А., Назиров Р.Р., Данхем Д., Шустов Б.М. О возможности наведения малых астероидов на опасные небесные объекты с использованием гравитационного маневра // Астрономический вестник. 2013. Т. 47. № 4. С. 352-360.
- [37] Emel'yanenko N.Yu. TEMPORARY SATELLITE CAPTURE OF COMETS BY JUPITER // Solar System Research, 2012, т. 46, №3, с. 181-194.
- [38] Farnocchia D., Chesley S.R., Chodas P.W., Micheli M., Tholen D.J., Milani A., Elliott G.T., Bernardi F. Yarkovsky-driven impact risk analysis for asteroid (99942) Apophis. Icarus. 2013. V. 224. I. 1. P. 192-200.
- [39] Folkner W.M. et al. The Planetary and Lunar Ephemeris DE430 and DE431 // JPL Interplanet. Network Progress Report, 2014. V. 42-196. P. 1-81.

- [40] Kholoshevnikov K. V., Shor V. A. Velocity distribution of meteoroids in the vicinity of planets and satellites. *Earth, Moon, and Planets* 72, 419-423 (1996).
- [41] Kosmodamianskii G.A. NUMERICAL THEORY OF THE MOTION OF JUPITER'S GALILEAN SATELLITES // *Solar System Research*, 2009, т. 43, №6, с. 465-474.
- [42] Loucks M. E., Carrico J. P., Lu E. T., Chapman C. R. Asteroid Deflection Requirements as a Function of Warning Time. "Asteroids, Comets, Meteors 2017 April 2017, Montevideo, Uruguay (2017).
- [43] Makoto Matsumoto, Takuji Nishimura MERSENNE TWISTER: A 623-DIMENSIONALLY EQUIDISTRIBUTED UNIFORM PSEUDO-RANDOM NUMBER GENERATOR // *ACM Trans. Model. Comput. Simul.*, 1998, т. 8, №1, с. 3-30.
- [44] Schulte Peter , Alegret Laia , Arenillas Ignacio , Arz José A. , Barton Penny J. , Bown Paul R. , Bralower Timothy J. , Christeson Gail L. , Claeys Philippe , Cockell Charles S. , Collins Gareth S. , Deutsch Alexander , Goldin Tamara J. , Goto Kazuhisa , Grajales-Nishimura José M. , Grieve Richard A. F. , Gulick Sean P. S. , Johnson Kirk R. , Kiessling Wolfgang , Koeberl Christian , Kring David A. , MacLeod Kenneth G. , Matsui Takafumi , Melosh Jay , Montanari Alessandro , Morgan Joanna V. , Neal Clive R. , Nichols Douglas J. , Norris Richard D. , Pierazzo Elisabetta , Ravizza Greg , Rebolledo-Vieyra Mario , Reimold Wolf Uwe , Robin Eric , Salge Tobias , Speijer Robert P. , Sweet Arthur R. , Urrutia-Fucugauchi Jaime , Vajda Vivi , Whalen Michael T. , Willumsen Pi S.; THE CHICXULUB ASTEROID IMPACT AND MASS EXTINCTION AT THE CRETACEOUS-PALEOGENE BOUNDARY // *Science*, Volume 327, Issue 5970, pp. 1214- (2010).
- [45] Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B. POSSIBLE COLLISIONS AND APPROACHES OF SOME DANGEROUS ASTEROIDS WITH THE EARTH *Solar System Research*. 2020. T. 54, №6, C. 541-549.

- [46] Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B.  
APPROACHES AND COLLISIONS OF ASTEROIDS WITH THE  
MOON AND PLANETS  
В сборнике: Journal of Physics: Conference Series. Сер. «International  
Scientific Conference on Mechanics «The Ninth Polyahov's Reading»,  
ISCM 2021» 2021. С. 012047.
- [47] Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B.  
THE EFFECT OF GRAVITATIONAL MANEUVER AT THE  
APPROACH OF AN ASTEROID TO THE EARTH  
В сборнике: AIP Conference Proceedings. 44. Сер. «XLIV Academic  
Space Conference: Dedicated to the Memory of Academician S.P.  
Korolev and Other Outstanding Russian Scientists — Pioneers of Space  
Exploration» 2021. С. 050006.
- [48] Sokolov L., Kuteeva G., Petrov N., Eskin B. Hazardous near-Earth  
asteroids approach. AIP Conference Proceedings 2171, 13019 (2019).
- [49] Vavilov D.E., Medvedev Y.D. A FAST METHOD FOR ESTIMATION  
OF THE IMPACT PROBABILITY OF NEAR-EARTH OBJECTS //  
Monthly Notices of the Royal Astronomical society. 2014, т. 446, №1, с.  
705-709.
- [50] Wie B., Zimmerman B., Lyzhoft J., Vardaxis G. Planetary defense  
mission concepts for disrupting/pulverizing hazardous asteroids with  
short warning time. Astrodynamics, 2017, vol. 1, no. 1, pp. 3-21.

# Приложение 1: вероятности соударения для 200 астероидов

## Пояснения к таблице

В таблице представлены полученные методом Монте-Карло вероятности соударения для 200 астероидов. Расчёт производился в конце 2019 года. Траектории астероидов рассчитывались до 2132 года, то есть чуть больше 100 лет. В случае NASA конечная дата расчёта варьируется от астероида к астероиду, но обычно они считают на 100 лет вперёд. Разумно ожидать, что полученные программой  $R^0$  вероятности будут немного выше из-за слегка увеличенного интервала исследования, но в целом должны хорошо коррелировать.

Вероятности, полученные NASA, (для Земли) приведены во втором столбце. В остальных столбцах приведено полученное с помощью программы  $R^0$  количество попаданий в определённую планету или Луну на 10 млн виртуальных астероидов, то есть для оценки вероятности необходимо разделить на  $10^7$ . Данный формат использован, поскольку позволяет легко отделить ненадёжные результаты с малым количеством попаданий. Результаты NASA приведены как есть.

Астероид	Земля (NASA)	Земля	Луна	Венера	Меркурий	Марс	Юпитер
2000 SG344	2,60E-03	36034	110	0	0	0	0
2019 WG2	1,65E-04	1793	0	0	0	0	0
2000 SB45	1,55E-04	1676	8	0	0	0	0
2019 QS8	4,98E-06	1158	7	8	0	1	80
2017 VJ	1,86E-06	846	0	0	0	0	0
2010 DG77	7,38E-06	828	8	35	0	0	27
2014 JU15	5,63E-05	808	15	0	0	0	0
2010 GM23	6,31E-05	730	2	0	0	0	0
2005 QK76	6,81E-05	703	0	0	0	0	0

2007 DX40	6,18E-05	688	10	43	0	0	0
1994 GK	6,91E-05	662	1	0	0	0	0
2008 CC71	5,85E-05	653	8	0	0	0	0
2008 UB7	3,47E-05	571	25	0	0	0	0
2008 EX5	4,72E-05	502	91	0	0	0	0
2006 BC8	9,50E-06	350	5	0	0	0	0
2017 YM1	2,76E-05	342	28	0	0	0	0
2009 FJ	9,39E-06	327	1	0	0	0	0
2011 UM169	3,32E-05	311	1	0	0	0	0
2008 VS4	5,83E-07	295	3	8	0	0	319
2008 ST7	2,70E-05	276	19	0	0	0	0
2008 YO2	7,58E-06	269	10	0	0	0	0
2019 BE5	1,23E-05	250	25	2	4	0	0
2014 GN1	2,07E-05	212	0	0	0	0	0
2016 CY135	1,37E-06	208	9	0	0	0	0
2019 YV1	8,32E-06	195	1	0	0	0	0
2019 DP	5,95E-06	189	7	0	0	0	0
2009 HC	2,87E-06	174	0	0	0	0	0
2007 KE4	1,40E-05	158	0	0	0	0	0
2019 XS	5,16E-06	157	6	0	0	0	0
2006 HF6	1,08E-05	138	5	0	0	0	0
2009 FZ4	2,38E-06	136	1	10	0	2	14
2019 WU2	1,09E-05	133	3	0	0	0	0
2002 VU17	1,38E-05	133	13	0	0	0	0
2009 TH8	8,85E-06	121	0	0	0	0	0
2010 QG2	1,06E-05	114	8	0	0	0	0
443104	1,43E-06	107	0	0	0	0	0
2012 PB20	2,83E-06	106	10	0	0	0	0
2007 EV	8,79E-06	100	0	0	0	0	0
2002 MN	2,79E-06	98	8	0	0	0	0
2017 AE21	4,64E-06	98	0	77	0	0	0
2002 RB182	6,09E-06	92	0	0	0	0	2
2007 WP3	7,69E-06	88	0	0	0	0	0
2000 WJ107	2,89E-06	87	0	0	0	0	0
2016 WG	5,80E-06	80	8	0	0	0	0
2012 QD8	6,49E-06	79	1	70	0	0	0
2019 YX1	8,69E-06	76	1	0	0	0	0
2004 ME6	9,98E-08	74	1	0	0	0	522
2018 NF15	2,82E-08	74	0	4	0	21	8
2010 MZ112	4,68E-06	63	2	8	1	0	0

2006 SC	6,42E-06	62	0	0	0	0	0
2010 UB	3,65E-06	61	0	0	0	0	0
2015 HQ182	1,55E-07	61	2	15	0	1	0
2019 FE	4,90E-06	58	0	0	0	0	0
2007 KO4	4,30E-06	55	4	0	0	0	0
2004 VZ14	1,86E-06	52	2	0	0	0	0
2019 LU1	4,65E-06	52	5	0	0	0	0
2018 JN	1,65E-06	50	0	0	0	0	0
2019 RT3	2,01E-06	48	4	0	0	0	0
2019 ND7	3,18E-06	46	1	0	0	0	0
2017 UQ7	4,02E-08	40	2	0	0	0	0
2008 PK9	5,24E-07	40	3	0	0	0	0
2016 GU2	1,23E-08	39	0	0	0	0	0
2014 JV79	2,86E-07	37	0	0	0	0	0
2004 GE2	6,54E-08	33	0	0	0	101	0
2011 AK37	2,77E-06	32	6	0	0	0	0
2012 TV	3,06E-06	31	4	0	0	0	0
2010 UC7	5,11E-07	31	2	0	0	0	0
2019 UH9	2,95E-06	30	5	0	0	0	0
2002 EM7	6,06E-08	29	0	0	0	0	0
2006 DN	3,61E-07	28	1	0	0	0	0
2011 VG9	7,66E-07	28	0	0	0	0	0
2018 LM	1,15E-06	28	0	40	0	0	0
2019 QS	2,25E-07	26	1	1	0	0	0
2006 HX57	3,08E-06	24	0	0	0	0	0
2005 WG57	7,23E-07	24	0	0	0	0	0
2009 CZ1	7,46E-07	23	1	7	0	0	0
2006 QN111	1,89E-06	23	0	0	0	0	0
1997 TC25	2,64E-07	22	0	0	0	0	0
2007 FT3	1,36E-06	22	4	0	0	0	0
2017 QC36	4,84E-07	22	1	14	0	0	0
2007 XZ9	1,08E-06	21	0	0	0	0	0
2018 FE4	1,51E-06	20	3	0	0	0	0
2007 CS5	3,11E-07	20	0	0	0	0	0
2018 GG	1,91E-06	20	0	0	0	0	0
2005 CC37	1,30E-06	18	0	0	0	0	0
2006 JE	1,76E-06	18	0	0	0	0	0
2015 MN11	5,08E-07	15	0	0	0	0	0
2017 PY26	1,24E-06	15	11	0	0	0	0
2008 FF5	4,82E-07	15	0	0	0	0	0

1979 XB	7,36E-07	15	0	0	0	0	0
2015 ME131	3,20E-08	15	0	9	0	0	0
2011 BF40	1,15E-06	14	0	0	0	0	0
2017 NT5	5,77E-07	13	0	0	0	0	0
2016 AB166	3,10E-07	13	0	0	0	0	0
2011 BH40	1,42E-07	13	0	27	0	0	44
2013 BR15	1,64E-07	12	1	0	0	0	0
2011 XC2	6,68E-07	12	0	0	0	0	0
2012 ES10	1,64E-06	12	3	0	0	0	0
1999 RZ31	1,59E-06	12	0	0	0	0	0
2002 XV90	4,76E-07	11	0	0	0	0	0
2007 EH26	1,16E-08	11	0	0	0	0	0
2018 PA25	2,58E-08	11	0	13	0	0	0
2016 WN55	1,17E-07	11	1	39	0	1	0
1996 TC1	1,32E-06	10	0	0	0	0	0
2008 KO	7,78E-07	10	0	0	0	0	0
2016 NL56	7,18E-07	10	0	5	0	1	1
2004 FY3	7,51E-08	9	0	0	0	0	0
2005 NX55	4,32E-08	9	0	0	0	0	0
2017 UC52	4,01E-07	9	0	1	0	0	0
2011 CW46	5,00E-07	8	1	0	0	0	0
2016 JT38	1,81E-07	8	0	0	0	0	0
2010 XB73	2,78E-07	8	0	1	0	1	371
2010 XQ	2,06E-07	8	0	0	0	0	260
2014 FX32	1,12E-06	7	0	0	0	0	0
2017 KB3	3,67E-08	7	0	0	0	0	0
2019 YA2	1,77E-07	7	1	0	0	0	0
2005 TM173	9,40E-07	7	0	0	0	0	271
2018 EL4	7,60E-08	6	0	0	0	0	0
2006 UC64	8,67E-08	5	0	0	0	0	0
2018 BP6	7,32E-08	5	0	0	0	0	0
2017 UL7	3,47E-07	5	0	0	0	0	0
2005 ED224	2,61E-06	5	0	0	0	0	0
2001 HJ31	1,88E-07	5	1	0	0	0	0
2017 FB1	2,93E-07	5	0	2	0	0	0
2011 SE191	1,55E-08	5	0	0	0	0	0
2017 UE52	2,64E-08	5	0	2	0	3	443
2017 RZ17	2,48E-08	5	0	49	1	0	9
2017 MZ8	3,66E-08	5	0	0	0	4	122
2005 UL6	1,12E-07	4	7	0	0	0	0



2008 OO1	2,31E-07	4	189	0	0	0	0
2014 MO68	6,26E-07	4	0	0	0	0	0
2011 BT59	1,36E-07	4	0	0	3	2	32
2014 ML67	4,31E-07	4	1	2	0	0	510
1998 DK36	5,64E-07	4	0	136	6	0	0
2010 MY112	1,13E-08	4	0	4	3	0	0
2018 YH2	3,31E-07	4	0	0	0	0	0
2014 UX34	1,22E-08	3	0	0	0	0	0
2018 YW2	2,18E-07	3	0	0	0	0	0
2008 DA4	3,41E-07	3	0	0	0	0	0
2007 PR25	1,88E-08	3	0	0	0	0	0
2006 CM10	1,85E-07	3	0	0	0	0	0
2008 UY91	6,04E-08	3	0	5	0	0	0
2003 UQ25	9,38E-08	3	0	0	0	1	0
2014 CH13	1,34E-07	3	0	0	0	0	0
2016 PR66	1,17E-08	3	1	0	0	0	49
2014 HN197	6,48E-08	3	0	1	0	0	633
2016 JB29	1,70E-07	2	0	0	0	0	0
2016 BQ15	4,07E-08	2	0	0	0	0	0
2001 SB170	2,93E-08	2	0	0	0	0	0
2013 WM	4,27E-07	2	0	0	0	0	0
1997 UA11	2,91E-07	2	0	0	0	0	12
2016 AU193	9,36E-08	2	1	0	0	0	0
2011 QF48	3,09E-07	2	0	0	0	1	0
2017 OO1	3,50E-08	2	0	0	0	0	0
2019 DF2	1,34E-08	2	0	5	0	0	10
2018 LT5	1,27E-07	1	1	0	0	0	0
2009 BR5	1,70E-07	1	0	0	0	0	0
2009 MU	1,59E-08	1	1	0	0	0	0
2009 WQ25	9,29E-08	1	1	7	0	0	0
2010 CR5	7,54E-08	1	0	0	0	0	0
2001 SD286	5,74E-08	1	0	0	0	0	0
2015 FA345	1,65E-07	1	0	0	0	0	652
2010 JA43	8,11E-08	1	2	2	0	0	0
2010 LJ68	1,67E-08	1	1	0	0	0	0
2006 CD	2,02E-08	1	0	1	0	0	37
2004 FM4	1,46E-08	1	0	0	0	0	0
2018 LF16	3,32E-08	1	0	0	0	0	3
2005 GQ33	2,78E-08	1	0	1	0	13	38
2017 DC120	5,24E-08	1	0	0	0	1	7

2010 HV20	1,31E-07	1	0	1	0	0	0
2016 PA79	1,06E-08	0	0	0	0	5	256
2009 WZ53	1,15E-08	0	0	0	0	0	0
2017 DB120	1,16E-08	0	0	0	0	0	12
2016 UB26	1,17E-08	0	0	0	0	0	0
2001 CA21	1,25E-08	0	0	155	0	3	1
410777	1,50E-08	0	0	0	0	0	0
2016 RP41	1,71E-08	0	0	0	0	1	0
2015 RD36	2,04E-08	0	0	0	0	0	0
2017 SH33	2,31E-08	0	0	0	0	0	0
2014 HE199	2,37E-08	0	0	0	0	0	0
2018 HJ2	2,43E-08	0	0	0	0	0	0
2014 MR26	2,53E-08	0	0	49	1	0	0
2007 VH189	2,82E-08	0	0	1	0	8	0
2019 XQ2	3,24E-08	0	0	0	0	0	0
2015 HV182	3,49E-08	0	0	0	0	0	0
2008 KN11	3,60E-08	0	0	0	0	0	0
2014 XM7	3,78E-08	0	2	0	0	0	0
2001 UD5	4,09E-08	0	0	0	0	0	0
2006 QK33	5,71E-08	0	0	0	0	0	0
2006 WM3	5,83E-08	0	0	0	0	0	0
2010 JH80	6,34E-08	0	0	0	0	0	0
2007 SN6	1,06E-07	0	0	0	0	0	0
2013 NH6	1,06E-07	0	0	0	0	0	0
2005 EL70	1,27E-07	0	0	10	0	0	0
2011 AZ36	4,11E-07	0	0	0	0	1	0
2011 DV10	1,17E-06	0	0	0	0	0	0
99942	8,85E-06	0	0	0	0	0	0
2016 HF3	4,69E-05	0	0	0	0	0	0
29075	1,20E-04	0	0	0	0	0	0
101955	3,68E-04	0	0	0	0	0	0

# Приложение 2: программный код $R^0$

## Комментарий к коду

Код программы  $R^0$  приведён исключительно для ознакомления. Не пытайтесь его запустить. Для работы программы помимо прочего требуется файл эфемерид в специальном сжатом формате. Программа разработана в форме монолитной функции и не предусматривает произвольных изменений. Тем не менее, оставлена возможность для модификации программы.

1. Можно изменить величину критерия уменьшения шага интегрирования и степень коллокационного многочлена, что позволит контролировать точность решения. При изменении степени коллокационного многочлена коэффициенты метода требуют расчёта отдельной программой с произвольной точностью.
2. Можно изменить критерий сближения, отдельно для каждой планеты и Луны. Большой верхний предел расстояния обычно ведёт к чрезмерному увеличению размера файлов вывода, поэтому по умолчанию используется 100 радиусов самого тела.
3. Можно изменить правые части уравнений движения, чтобы учесть дополнительные силы. Как правило, учёт любых возмущений заметно увеличивает время работы.

## Программный код

```
#include <stdio.h>
#include <cmath>

const unsigned int _NP = 10;
const unsigned int _SP[_NP] = { 0, 168, 228, 306, 339, 363, 384,
    402, 420, 732 };
const unsigned int _SPT = 798;
const unsigned int _NC[_NP] = { 14, 10, 13, 11, 8, 7, 6,
    6, 13, 11 };
```

```

const unsigned int _NB[_NP] = { 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1,
    1, 8, 2 };

const double _JD0 = 2287184.5;
const double _JDN = 2688976.5;
const double _JDh = 32.0;
const unsigned int _JDI = 32;
const unsigned int _ND = _SPT * (int)((_JDN - _JD0) / _JDh);

const double _AU = 1.495978707000000000E+08;

const double _EMRAT = 0.8130056907419062E+02;
const double _GM1 = 0.4912480450364760E-10;
const double _GM2 = 0.7243452332644120E-09;
const double _GMB = 0.8997011390199871E-09;
const double _GM4 = 0.9549548695550771E-10;
const double _GM5 = 0.2825345840833870E-06;
const double _GM6 = 0.8459706073245031E-07;
const double _GM7 = 0.1292024825782960E-07;
const double _GM8 = 0.1524357347885110E-07;
const double _GMS = 0.2959122082855911E-03;
const double _GM[_NP] =
{
    _GM1,
    _GM2,
    _GMB * (_EMRAT / (_EMRAT + 1.0)),
    _GM4,
    _GM5,
    _GM6,
    _GM7,
    _GM8,
    _GMB / (_EMRAT + 1.0),
    _GMS
};

const double _Rmin[_NP] =
{
    0.016, // Mercury
    0.041, // Venus
    0.043, // Earth
    0.023, // Mars
    0.466, // Jupiter

```

```

    0.388, // Saturn
    0.169, // Uranus
    0.164, // Neptune
    0.0115, // Moon
    0.04642 // Sun
};

const double _Radius[_NP] =
{
    0.000016, // Mercury
    0.000041, // Venus
    0.000043, // Earth
    0.000023, // Mars
    0.000466, // Jupiter
    0.000388, // Saturn
    0.000169, // Uranus
    0.000164, // Neptune
    0.0000115, // Moon
    0.004642 // Sun
};

//const char _name[_NP][10] =
//{
//    "Mercury",
//    "Venus",
//    "Earth",
//    "Mars",
//    "Jupiter",
//    "Saturn",
//    "Uranus",
//    "Neptune",
//    "Moon",
//    "Sun"
//};

//const double phi = (1.0 + sqrt(5.0)) / 2;

const double _h0 = 4.0;
//const unsigned int _ih0 = 4;

const unsigned int _k = 5;

```

```

int main()
{
    // Объявление переменных
    unsigned int i, j, k, l, m; // Для циклов
    unsigned int n; // Количество точек
    int istart, istep; // Старт и шаг счёта точек
    unsigned int n6, k3, nk3; // Произведения n и _k
    double JD_start, JD_end; // Начальная и конечная дата
    double JD; // Текущая дата
    double c[(_k + 1)][(_k + 1)];
    double d[(_k + 1)][(_k + 1)]; // Матрицы основных преобразований
    double e[(_k + 1)][(_k + 1)];
    FILE *input; // Входные данные
    FILE *jpleph; // Файл эфемерид
    FILE *roots; // Узлы интегрирования
    FILE *arph; // Вывод сближений
    // FILE *iterations; // Вывод количества итераций для( оптимизации)
    // FILE *s6; // Вывод конечных координат и скоростей
    FILE *impacts; // Список попавших точек
    FILE *impacts_0; // Список начальных данных упавших точек
    FILE *clapp; // Особо тесные сближения
    double *XV0; // Массив начальных точек
    double *epharr; // Массив эфемерид
    double *tau; // Узлы интегрирования
    double *XV1; // Массив текущих координат и скоростей
    double *alpha2; // Конечные разности на текущем шаге
    double *alpha2_; // Начальное приближение конечных разностей на
    новом шаге
    double posiplanet[(_k + 1)][_NP][3]; // Положения планет в
    узлах интегрирования
    double veloplanetA[_NP][3]; // Скорости планет в начале шага
    double veloplanetB[_NP][3]; // Скорости планет в конце шага
    double alf_to_xi_pos[_k][_k]; // Вычисление координат при
    итерациях и в конце шага
    double alf_to_xi_vel[_k]; // Вычисление скоростей в конце шага
    double f_to_alf[_k][_k]; // Вторая матрица для итераций
    double H_alpha[_k][_k]; // Матрица начального приближения на
    новом шаге
    double tau_p[(_k + 3)]; // Массив целых степеней
    double *h_frac; // Прогресс интегрирования на шаге для каждой
    точки
    union {

```

```

    unsigned int h_frac_min_i[2];
    double h_frac_min; // Общий прогресс интегрирования на шаге
};
double h_frac_start; // Начальная позиция нулевая(, кроме первого шага)
double *h_step_prev; // Величина предыдущего шага
double *h_step_cur; // Величина текущего шага
double h_step_max, h_step_min; // Максимальный и минимальный шаг
double h_step; // Шаг группы точек
unsigned int ephpos; // Положение набора эфемерид на текущий отрезок времени
unsigned int ephsub[_NP]; // Номер субинтервала для каждой из планет
double ephtau[_NP]; // Момент времени на субинтервале от( -1.0 до +1.0)
double JD_i;//, JD_f; // Целочисленная и дробная части момента времени относительно начала эфемерид
unsigned int JD_int; // Целая часть момента времени относительно начала интервала
bool *mask; // Маска интегрируемых точек
bool *impact; // Упавшие точки
double ch_coef_pos[14]; // Коэффициенты для вычисления координат
double ch_coef_vel[14]; // Коэффициенты для вычисления скоростей
double rel_pos[3], rel_p[3]; // Относительные координаты
double rel_vel[3], rel_v[3]; // Относительные скорости
double abs_pos, abs_p, abs_vel;//, abs_v; // Модули относительных положения и скорости
double max_rel; // Максимальное отношение модулей скорости к положению
double XV1a[6]; // Рабочая переменная для координат и скоростей
double XV1b[6]; // Координаты и скорости с предыдущей итерации
double diff[6]; // Разница между итерациями
double max_diff; // Наибольшая разница между итерациями
double f0v2[3]; // Правая часть в начале промежутка шага
double fiv2[3]; // Правая часть в узле
double GM_r3; // Результат деления гравитационного параметра на куб радиусвектора—
unsigned int count_it; // Количество итераций
double gxvA[_NP]; // Скалярное произведение относительных скорости и положения в начале шага
double gxvB[_NP]; // Скалярное произведение относительных скорости

```

и положения в конце шага

```

double a_bs, b_bs, c_bs, h_bs;
double ra_bs[3], va_bs[3];
double ra_abs;
double rxv_bs_c;
double tau_bs;
double A_bs[(3 * _k)];
double ppos_bs[3], ppos_bs2[3], apos_bs[3], pvel_bs[3],
pvel_bs2[3], avel_bs[3];
// Чтение файлов
input = fopen("input.dat", "r");
fscanf(input, "%d_%d_%d", &n, &istart, &istep);
n6 = 6 * n;
k3 = 3 * _k;
nk3 = k3 * n;
fscanf(input, "%lf_%lf", &JD_start, &JD_end);
XV0 = new double[n6];
for (i = 0; i < n; i++) fscanf(input, "%lf_%lf_%lf_%lf_%lf_%lf",
", &XV0[(6 * i)], &XV0[(6 * i + 1)], &XV0[(6 * i + 2)], &XV0[(6
* i + 3)], &XV0[(6 * i + 4)], &XV0[(6 * i + 5)]);
fclose(input);
jpleph = fopen("JPLEPH", "rb");
epharr = new double[_ND];
fread(epharr, sizeof(double), _ND, jpleph);
fclose(jpleph);
roots = fopen("roots5.dat", "r");
tau = new double[(_k + 1)];
for (i = 0; i <= _k; i++) fscanf(roots, "%lf", &tau[i]);
fclose(roots);
printf("n=%d\nJD_start=%lf_JD_end=%lf\n", n, JD_start, JD_end)
;
aprch = fopen("aprch.txt", "w");
// iterations = fopen("it.txt", "w");
// s6 = fopen("s6.txt", "w");
impacts = fopen("impacts.txt", "w");
clapp = fopen("clapp.txt", "w");
impacts_0 = fopen("impacts_0.txt", "w");
// Инициализация вспомогательных массивов
XV1 = new double[n6];
for (i = 0; i < n6; i++) XV1[i] = XV0[i];
for (i = 0; i <= _k; i++)
{

```



```

    c[i][i] = 1.0;
    d[i][i] = 1.0;
    e[i][i] = 1.0;
}
for (i = 1; i <= _k; i++)
{
    c[i][0] = 0.0;
    d[i][0] = 0.0;
    e[i][0] = 1.0;
}
for (i = 2; i <= _k; i++) for (j = 1; j < i; j++)
{
    c[i][j] = c[(i - 1)][(j - 1)] - tau[(i - 1)] * c[(i - 1)][
j];
    d[i][j] = d[(i - 1)][(j - 1)] + tau[j] * d[(i - 1)][j];
    e[i][j] = e[(i - 1)][(j - 1)] + e[(i - 1)][j];
}
tau_p[0] = 1.0;
for (i = 0; i < _k; i++)
{
    for (j = 1; j < (_k + 3); j++) tau_p[j] = tau_p[(j - 1)] *
tau[(i + 1)];
    for (j = 0; j < _k; j++)
    {
        alf_to_xi_pos[i][j] = 0.0;
        for (k = 0; k <= j; k++) alf_to_xi_pos[i][j] += c[(j +
1)][(k + 1)] * tau_p[(k + 3)] / (double)((k + 2) * (k + 3));
        if (i == (_k - 1))
        {
            alf_to_xi_vel[j] = 0.0;
            for (k = 0; k <= j; k++) alf_to_xi_vel[j] += c[(j
+ 1)][(k + 1)] * tau_p[(k + 2)] / (double)(k + 2);
        }
    }
}
for (i = 0; i < _k; i++) for (j = 0; j <= i; j++) f_to_alf[i][
j] = 1.0 / (tau[(i + 1)] - tau[j]);
for (i = 0; i < _k; i++) for (j = 0; j < _k; j++)
{
    H_alpha[i][j] = 0.0;
    for (k = i; k <= j; k++) for (l = i; l <= k; l++) H_alpha[
i][j] += d[(l + 1)][(i + 1)] * e[(k + 1)][(l + 1)] * c[(j + 1)

```

```

][(k + 1)];
}
alpha2 = new double[nk3];
for (i = 0; i < nk3; i++) alpha2[i] = 0.0;
alpha2_ = new double[k3];
h_frac = new double[n];
for (i = 0; i < n; i++) h_frac[i] = 0.0;
h_step_prev = new double[n];
for (i = 0; i < n; i++) h_step_prev[i] = _h0;
h_step_cur = new double[n];
mask = new bool[n];
impact = new bool[n];
for (i = 0; i < n; i++) impact[i] = false;
h_frac_start = modf((JD_start - _JD0) / _h0, &JD_i);
JD_start = JD_i * _h0 + _JD0;
// Интегрирование
for (JD = JD_start; JD < JD_end; JD += _h0)
{
    // Инициализация переменных для интегрирования
    for (i = 0; i < n; i++) h_frac[i] = h_frac_start;
    h_frac_min = h_frac_start + 1.0;
    h_frac_start = 0.0;
    JD_i = JD - _JD0;
    ephpos = _SPT * ((int)JD_i / _JD1);
    JD_int = (int)JD_i % _JD1;
    for (i = 0; i < _NP; i++) ephsub[i] = (JD_int * _NB[i]) /
    _JD1;
    // Процесс интегрирования
    do {
        for (i = 0; i < n; i++) mask[i] = (((h_frac[i] + 1.0)
    == h_frac_min) && (!impact[i]));
        // Вычисление координат и скоростей планет
        for (i = 0; i < _NP; i++)
        {
            ephtau[i] = (((double)JD_int + (h_frac_min - 1.0)
    * _h0) * _NB[i]) / _JDh - (double)ephsub[i];
            ephtau[i] += ephtau[i] - 1.0;
        }
        for (i = 0; i < _NP; i++)
        {
            ch_coef_pos[0] = 1.0;
            ch_coef_vel[0] = 0.0;

```

```

    ch_coef_pos[1] = ephtau[i];
    ch_coef_vel[1] = 1.0;
    for (j = 2; j < _NC[i]; j++)
    {
        ch_coef_pos[j] = 2 * ephtau[i] * ch_coef_pos[(j - 1)] - ch_coef_pos[(j - 2)];
        ch_coef_vel[j] = 2 * ch_coef_pos[(j - 1)] + 2 * ephtau[i] * ch_coef_vel[(j - 1)] - ch_coef_vel[(j - 2)];
    }
    for (j = 0; j < 3; j++)
    {
        posiplanet[0][i][j] = epharr[(ephpos + _SP[i] + ephsub[i] * _NC[i] * 3 + j * _NC[i])];
        veloplanetA[i][j] = 0.0;
        for (k = 1; k < _NC[i]; k++)
        {
            posiplanet[0][i][j] += ch_coef_pos[k] * epharr[(ephpos + _SP[i] + ephsub[i] * _NC[i] * 3 + j * _NC[i] + k)];
            veloplanetA[i][j] += ch_coef_vel[k] * epharr[(ephpos + _SP[i] + ephsub[i] * _NC[i] * 3 + j * _NC[i] + k)];
        }
        posiplanet[0][i][j] /= _AU;
        veloplanetA[i][j] /= _AU;
        veloplanetA[i][j] *= 2 * _NB[i] / _JDh;
    }
}
for (i = 0; i < 3; i++)
{
    posiplanet[0][2][i] -= posiplanet[0][8][i] * (_GM[8] / _GMB);
    posiplanet[0][8][i] += posiplanet[0][2][i];
    veloplanetA[2][i] -= veloplanetA[8][i] * (_GM[8] / _GMB);
    veloplanetA[8][i] += veloplanetA[2][i];
}
// Определение величины шага для каждой точки из маски, а также минимальной и максимальной
h_step_max = _h0;
h_step_min = _h0 * exp2(-20);
for (i = 0; i < 20; i++) if (h_frac_min_i[1] & (

```

```

unsigned int)(exp2(i))
{
    h_step_max *= ldexp(1.0, i - 20);
    break;
}
for (i = 0; i < n; i++) if (mask[i])
{
    max_rel = 0.0;
    for (j = 0; j < _NP; j++)
    {
        for (k = 0; k < 3; k++)
        {
            rel_pos[k] = XV1[(6 * i + k)] - posiplanet
[0][j][k];
            rel_vel[k] = XV1[(6 * i + k + 3)] -
veloplanetA[j][k];
        }
        abs_pos = sqrt(rel_pos[0] * rel_pos[0] +
rel_pos[1] * rel_pos[1] + rel_pos[2] * rel_pos[2]);
        abs_vel = sqrt(rel_vel[0] * rel_vel[0] +
rel_vel[1] * rel_vel[1] + rel_vel[2] * rel_vel[2]);
        if ((abs_vel / abs_pos) > max_rel) max_rel =
abs_vel / abs_pos;
    }
    h_step_cur[i] = exp2(-ilogb(max_rel) - 3);
}
for (i = 0; i < n; i++) if (mask[i])
{
    if (h_step_cur[i] > h_step_max) h_step_cur[i] =
h_step_max;
    if (h_step_cur[i] < h_step_min) h_step_cur[i] =
h_step_min;
}
h_step_max = _h0 * exp2(-20);
h_step_min = _h0;
for (i = 0; i < n; i++) if (mask[i])
{
    if (h_step_max < h_step_cur[i]) h_step_max =
h_step_cur[i];
    if (h_step_min > h_step_cur[i]) h_step_min =
h_step_cur[i];
}

```

```

// Шаг вперёд
for (h_step = h_step_min; h_step <= h_step_max; h_step
*= 2)
{
// Вычисление координат планет в узлах
for (i = 1; i <= _k; i++) for (j = 0; j < _NP; j
++)
{
ephtau[j] = (((double)JD_int + (h_frac_min -
1.0) * _h0 + h_step * tau[i]) * _NB[j]) / _JDh - (double)ephsu
b[j];

ephtau[j] += ephtau[j] - 1.0;
ch_coef_pos[0] = 1.0;
ch_coef_pos[1] = ephtau[j];
for (k = 2; k < _NC[j]; k++) ch_coef_pos[k] =
2 * ephtau[j] * ch_coef_pos[(k - 1)] - ch_coef_pos[(k - 2)];
for (k = 0; k < 3; k++)
{
posiplanet[i][j][k] = epharr[(ephpos + _SP
[j] + ephsub[j] * _NC[j] * 3 + k * _NC[j])];
for (l = 1; l < _NC[j]; l++) posiplanet[i
][j][k] += ch_coef_pos[l] * epharr[(ephpos + _SP[j] + ephsub[j]
* _NC[j] * 3 + k * _NC[j] + l)];
posiplanet[i][j][k] /= _AU;
}
if (i == _k)
{
ch_coef_vel[0] = 0.0;
ch_coef_vel[1] = 1.0;
for (k = 2; k < _NC[j]; k++) ch_coef_vel[k
] = 2 * ch_coef_pos[(k - 1)] + 2 * ephtau[j] * ch_coef_vel[(k -
1)] - ch_coef_vel[(k - 2)];
for (k = 0; k < 3; k++)
{
veloplanetB[j][k] = 0.0;
for (l = 1; l < _NC[j]; l++)
veloplanetB[j][k] += ch_coef_vel[l] * epharr[(ephpos + _SP[j] +
ephsub[j] * _NC[j] * 3 + k * _NC[j] + l)];
veloplanetB[j][k] /= _AU;
veloplanetB[j][k] *= 2 * _NB[j] / _JDh
;
}
}
}

```

```

    }
  }
  for (i = 1; i <= _k; i++) for (j = 0; j < 3; j++)
  {
    posiplanet[i][2][j] -= posiplanet[i][8][j] * (
_GM[8] / _GMB);
    posiplanet[i][8][j] += posiplanet[i][2][j];
    if (i == _k)
    {
      veloplanetB[2][j] -= veloplanetB[8][j] * (
_GM[8] / _GMB);
      veloplanetB[8][j] += veloplanetB[2][j];
    }
  }
  for (i = 0; i < n; i++) if (mask[i]) if (h_step ==
h_step_cur[i])
  {
    // Получение начального приближения
    if (h_step_cur[i] == h_step_prev[i])
    {
      for (j = 0; j < k3; j++) alpha2_[j] = 0.0;
      for (j = 0; j < 3; j++) for (k = 0; k < _k
; k++) for (l = k; l < _k; l++) alpha2_[(j * _k + k)] +=
H_alpha[k][1] * alpha2[(i * k3 + j * _k + l)];
    }
    else for (j = 0; j < k3; j++) alpha2_[j] =
0.0;

    for (j = 0; j < 3; j++) f0v2[j] = 0.0;
    for (j = 0; j < _NP; j++)
    {
      for (k = 0; k < 3; k++) rel_pos[k] =
posiplanet[0][j][k] - XV1[(6 * i + k)];
      abs_pos = sqrt(rel_pos[0] * rel_pos[0] +
rel_pos[1] * rel_pos[1] + rel_pos[2] * rel_pos[2]);
      GM_r3 = _GM[j] / (abs_pos * abs_pos *
abs_pos);
      for (k = 0; k < 3; k++) f0v2[k] += GM_r3 *
rel_pos[k];
    }
    for (j = 0; j < 6; j++) XV1a[j] = 0.0;
    // Итерации
    count_it = 0;

```

```

do {
    for (j = 0; j < 6; j++) XV1b[j] = XV1a[j];
    for (j = 0; j < _k; j++)
    {
        for (k = 0; k < 3; k++) XV1a[k] = 0.0;
        for (k = 0; k < 3; k++) for (l = 0; l
< _k; l++) XV1a[k] += alf_to_xi_pos[j][l] * alpha2_[(k * _k + l
)];
        for (k = 0; k < 3; k++) XV1a[k] = (
XV1a[k] * h_step + f0v2[k] * tau[(j + 1)] * tau[(j + 1)] *
h_step / 2 + XV1[(6 * i + k + 3)] * tau[(j + 1)]) * h_step +
XV1[(6 * i + k)];
        // Начало вычисления правой части
        for (k = 0; k < 3; k++) fiv2[k] = 0.0;
        for (k = 0; k < _NP; k++)
        {
            for (l = 0; l < 3; l++) rel_pos[l]
= posiplanet[(j + 1)][k][l] - XV1a[l];
            abs_pos = sqrt(rel_pos[0] *
rel_pos[0] + rel_pos[1] * rel_pos[1] + rel_pos[2] * rel_pos[2])
;
            GM_r3 = _GM[k] / (abs_pos *
abs_pos * abs_pos);
            for (l = 0; l < 3; l++) fiv2[l] +=
GM_r3 * rel_pos[l];
        }
        // Дополнительные силы
        // Конец вычисления правой части
        for (k = 0; k < 3; k++) alpha2_[(k *
_k + j)] = (fiv2[k] - f0v2[k]) * f_to_alf[j][0];
        for (k = 0; k < j; k++) for (l = 0; l
< 3; l++) alpha2_[(l * _k + j)] = (alpha2_[(l * _k + j)] -
alpha2_[(l * _k + k)]) * f_to_alf[j][(k + 1)];
    }
    for (j = 0; j < 6; j++) XV1a[j] = 0.0;
    for (j = 0; j < 3; j++) for (k = 0; k < _k
; k++) XV1a[j] += alf_to_xi_pos[( _k - 1)][k] * alpha2_[(j * _k
+ k)];
    for (j = 0; j < 3; j++) for (k = 0; k < _k
; k++) XV1a[(j + 3)] += alf_to_xi_vel[k] * alpha2_[(j * _k + k)
];
    for (j = 0; j < 3; j++)

```

```

        {
            XV1a[j] = (XV1a[j] * h_step + f0v2[j]
* h_step / 2 + XV1[(6 * i + j + 3)]) * h_step + XV1[(6 * i + j)
];
            XV1a[(j + 3)] = (XV1a[(j + 3)] + f0v2[
j]) * h_step + XV1[(6 * i + j + 3)];
        }
        for (j = 0; j < 3; j++)
        {
            rel_pos[j] = XV1a[j] - XV1b[j];
            rel_vel[j] = XV1a[(j + 3)] - XV1b[(j +
3)];
        }
        abs_pos = sqrt(XV1a[0] * XV1a[0] + XV1a[1]
* XV1a[1] + XV1a[2] * XV1a[2]);
        abs_vel = sqrt(XV1a[3] * XV1a[3] + XV1a[4]
* XV1a[4] + XV1a[5] * XV1a[5]);
        for (j = 0; j < 3; j++)
        {
            diff[j] = fabs(rel_pos[j] / abs_pos);
            diff[(j + 3)] = fabs(rel_vel[j] /
abs_vel);
        }
        max_diff = 0.0;
        for (j = 0; j < 6; j++) if (diff[j] >
max_diff) max_diff = diff[j];
        count_it++;
        if (count_it == 16) break;
    } while (max_diff > exp2(-48));
// if (i == 0) fprintf(iterations, "JD= %lf
count_it= %d\n", JD + h_frac[i] * _h0, count_it);
// Запоминание
for (j = 0; j < k3; j++) alpha2[(i * k3 + j)]
= alpha2_[j];
// Проверка на близость
for (j = 0; j < _NP; j++)
{
    for (k = 0; k < 3; k++)
    {
        rel_p[k] = XV1[(6 * i + k)] -
posiplanet[0][j][k];
        rel_v[k] = XV1[(6 * i + k + 3)] -

```



```

veloplanetA[j][k];
    }
    rxvA[j] = rel_p[0] * rel_v[0] + rel_p[1] *
rel_v[1] + rel_p[2] * rel_v[2];
    for (k = 0; k < 3; k++)
    {
        rel_p[k] = XV1a[k] - posiplanet[_k][j
][k];
        rel_v[k] = XV1a[(k + 3)] - veloplanetB
[j][k];
    }
    rxvB[j] = rel_p[0] * rel_v[0] + rel_p[1] *
rel_v[1] + rel_p[2] * rel_v[2];
    abs_p = sqrt(rel_p[0] * rel_p[0] + rel_p
[1] * rel_p[1] + rel_p[2] * rel_p[2]);
    if ((rxvA[j] < 0.0) && (rxvB[j] > 0.0)) if
(abs_p < 2.0 * _Rmin[j])
    {
        // Процедура уточнения сближения
        a_bs = 0.0;
        b_bs = 1.0;
        h_bs = 1.0;
        c_bs = 0.5;
        for (k = 0; k < k3; k++) A_bs[k] =
0.0;

        for (k = 0; k < 3; k++) for (l = 0; l
< _k; l++) for (m = 1; m < _k; m++) A_bs[(k * _k + l) +
(m + 1)][(l + 1)] * alpha2_[(k * _k + m)];
        do {
            c_bs = (a_bs + b_bs) / 2;
            tau_bs = (((double)JD_int + (
h_frac_min - 1.0) * _h0 + h_step * c_bs) * _NB[j]) / _JDh - (
double)ephsub[j];

            tau_bs += tau_bs - 1.0;
            ch_coef_pos[0] = 1.0;
            ch_coef_vel[0] = 0.0;
            ch_coef_pos[1] = tau_bs;
            ch_coef_vel[1] = 1.0;
            for (k = 2; k < _NC[j]; k++)
            {
                ch_coef_pos[k] = 2 * tau_bs *
ch_coef_pos[(k - 1)] - ch_coef_pos[(k - 2)];

```





```

{
    apos_bs[k] = f0v2[k] * c_bs *
c_bs * h_step / 2 + XV1[(6 * i + k + 3)] * c_bs;
    avel_bs[k] = f0v2[k] * c_bs;
    for (l = 0; l < _k; l++)
    {
        apos_bs[k] += A_bs[(k * _k
+ 1)] * tau_p[(l + 3)] * h_step / (double)((l + 2) * (l + 3));
        avel_bs[k] += A_bs[(k * _k
+ 1)] * tau_p[(l + 2)] / (double)(l + 2);
    }
    apos_bs[k] = apos_bs[k] *
h_step + XV1[(6 * i + k)];
    avel_bs[k] = avel_bs[k] *
h_step + XV1[(6 * i + k + 3)];
}
for (k = 0; k < 3; k++)
{
    ra_bs[k] = apos_bs[k] -
ppos_bs[k];
    va_bs[k] = avel_bs[k] -
pvel_bs[k];
}
rxv_bs_c = ra_bs[0] * va_bs[0] +
ra_bs[1] * va_bs[1] + ra_bs[2] * va_bs[2];
if (rxv_bs_c < 0.0)
{
    a_bs = c_bs;
}
else
{
    b_bs = c_bs;
}
h_bs /= 2.0;
} while ((h_bs * h_step) > exp2(-25));
ra_abs = sqrt(ra_bs[0] * ra_bs[0] +
ra_bs[1] * ra_bs[1] + ra_bs[2] * ra_bs[2]);
if (ra_abs < (100 * _Radius[j])) if (j
!= 9)
{
    fprintf(aprch, "%8d_%16.7lf_%2d_
%20.15lf\n", istart + i * istep, JD + h_frac[i] * _h0 + c_bs *

```

```

h_step, j, ra_abs);
    }
    if (ra_abs < _Radius[j])
    {
        impact[i] = true;
        mask[i] = false;
        fprintf(impacts, "%8d_%16.7lf_%2d_
%20.15lf\n", istart + i * istep, JD + h_frac[i] * _h0 + c_bs *
h_step, j, ra_abs);
        fprintf(impacts_0, "%20.15e_%20.15
e_%20.15e_%20.15e_%20.15e\n", XV0[(6 * i)], XV0[(6 * i
+ 1)], XV0[(6 * i + 2)], XV0[(6 * i + 3)], XV0[(6 * i + 4)],
XV0[(6 * i + 5)]);
    }
    if (ra_abs < (10 * _Radius[j])) if (j
!= 9)
    {
        fprintf(clapp, "%8d_%16.7lf_%2d_
%20.15lf\n", istart + i * istep, JD + h_frac[i] * _h0 + c_bs *
h_step, j, ra_abs);
    }
}
}
h_frac[i] += h_step / _h0;
h_step_prev[i] = h_step_cur[i];
for (j = 0; j < 6; j++) XV1[(6 * i + j)] =
XV1a[j];
}
}
h_frac_min = 1.0;
for (i = 0; i < n; i++) if (!impact[i]) if (h_frac[i]
< h_frac_min) h_frac_min = h_frac[i];
h_frac_min += 1.0;
} while (h_frac_min != 2.0);
// printf("%lf\n", JD + _h0);
// if ((JD + _h0) >= JD_end) for (i = 0; i < n; i++)
// {
//     fprintf(s6, "JD= %lf i = %d XV1= %20.15f %20.15f
%20.15f %20.15f %20.15f %20.15f\n", JD + _h0, i, XV1[(6 * i)],
XV1[(6 * i + 1)], XV1[(6 * i + 2)], XV1[(6 * i + 3)], XV1[(6 *
i + 4)], XV1[(6 * i + 5)]);
// }

```

```
    }  
    fclose(aprch);  
    //    fclose(iterations);  
    //    fclose(s6);  
    fclose(impacts);  
    fclose(clapp);  
    fclose(impacts_0);  
    // Освобождение памяти  
    delete [] XV0;  
    delete [] epharr;  
    delete [] tau;  
    //    delete [] alpha;  
    //    delete [] alpha_;  
    delete [] alpha2;  
    delete [] alpha2_;  
    //    delete [] D_alpha;  
    delete [] h_frac;  
    delete [] h_step_prev;  
    delete [] h_step_cur;  
    delete [] mask;  
    delete [] impact;  
    return 0;  
}
```

Saint-Petersburg University

Manuscript copyright

Ivan Balyaev

Forecasting of close approaches and impacts of  
asteroids with the Earth and other planets

Scientific speciality 1.3.1. Space Physics, Astronomy

Thesis for the degree of  
Candidate of Physico-Mathematical Sciences

Translation from Russian

Scientific supervisor:  
Vakhit Shaidulin,  
Cand. Sc. (Physics and Mathematics)

Saint Petersburg

2023

# Contents

Introduction . . . . .	4
The development of ideas about asteroid hazard . . . . .	4
Impact events that occurred earlier . . . . .	6
Current state of the problem . . . . .	7
Research conducted at St. Petersburg State University . . . . .	10
Chapter 1 Experiments with multidimensional variation of initial data	21
1.1 Problem statement . . . . .	21
1.2 Evolution of the mutual arrangement of «gaps» . . . . .	21
1.3 Three-dimensional variation in velocity space . . . . .	24
1.4 Six-dimensional variation in coordinates and velocities . . . . .	26
Chapter 2 Acceleration of numerical integration . . . . .	29
2.1 Prerequisites for creating a new program . . . . .	29
2.2 Modification of the Gauss-Everhart method . . . . .	31
2.3 Organization and optimization of computing . . . . .	35
2.4 Testing a new program . . . . .	38
Chapter 3 Monte Carlo Experiments . . . . .	41
3.1 200 asteroids . . . . .	41
3.2 Scanning the space of elements of orbits . . . . .	45
3.3 The first mass calculation of collision probabilities . . . . .	50
3.4 The second mass calculation of collision probabilities . . . . .	52
Conclusion . . . . .	56
Bibliography . . . . .	57
Appendix 1: impact probabilities for 200 asteroids . . . . .	65



Explanations to the table . . . . .	65
Appendix 2: program code $R^0$ . . . . .	71
Code Comment . . . . .	71
Program code . . . . .	71

# Introduction

## The development of ideas about asteroid hazard

Currently, few people doubt the urgency of the problem, but the asteroid danger was not always obvious. There was even a case when the existence of stones falling from the sky was denied by the scientific community. We will briefly describe the history of knowledge about the small bodies of the Solar System and the danger they pose. A significant part of this and the next section are based on the materials of the book «Asteroid-comet hazard. Yesterday, today, tomorrow» [2].

## Asteroid danger in folklore

Descriptions of the fall of small cosmic bodies can sometimes be found in oral folk art. It is not surprising, because large cars are a very impressive sight. One example is the Karelo-Finnish epic «Kalevala», an excerpt from which in the prose retelling of Krusanov is given below.

«The sky shuddered, the doors of the air opened, and a fiery spark rushed down like a red drop. Hissing in the thick clouds, she passed through all nine heavens and fell to the ground. Old Vyainemeinen saw a flying spark and said to Ilmarinen:

— Let's go find out what kind of fire descended from heaven to earth. And the heroes set off — to the place where the heavenly flame fell. They walked for a long time in the dark under the cold stars, until they came to the Neva River, which spread out in front of them into a wide sea».

This passage is also notable for describing the phenomenon of an electro-  
phone car, when a specific sound is heard simultaneously with the fall. Sometimes this fall is identified with the Kaali crater in Estonia, which is about 3,500 years old, but, of course, it is impossible to say for sure.

## XXVIII century and earlier

Before the discovery of the first asteroids, little was known about the danger of «stones falling from the sky». So little that the Paris Academy of Sciences in 1772 concluded that it was impossible for stones to fall from the sky. In fairness, it should be noted that the cosmic origin of the stones was not considered at that time, and the existing hypotheses did not stand up to criticism.

## XIX century

At the beginning of the XIX century, two important steps were taken at once to realize the asteroid-comet danger. First, the first asteroids were discovered. Secondly, at the same time, the creation of a geochronological scale began. At the same time, ideas of catastrophism were expressed, implying sharp changes in species composition due to some large-scale events, catastrophes. Indeed, fossils, or fossils, show dramatic changes in composition between layers with relative uniformity within the layer. It would seem that the available data is already enough to make an assumption about the connection of catastrophes with asteroids. However, after the discovery of 4 asteroids in 1801-1807, there was a long break until 1845. By that time, the ideas of catastrophism had already given way to actualism, ideas about the monotony of geological processes of the past and present. Only much later there was a revival of these ideas in the form of neo-catastrophism.

In the second half of the XIX century, the number of discovered asteroids was rapidly increasing. In 1868, the hundredth asteroid was discovered, at the same time the number of known short-period comets has already reached ten. At the end of the century, photography began to be used to search for asteroids. Finally, in 1898, the first near-Earth asteroid, (433) Eros, was discovered.

## XX century

The first asteroids crossing the Earth's orbit were discovered in the first half of the XX century, in particular, (1862) Apollo in 1932 and (1566) Icarus in 1949. In 1908, the Tunguska event occurred, the largest invasion of a cosmic body into the Earth's atmosphere in recent times. At the beginning of the XX century, studies of the Arizona crater were conducted in order to extract

a meteorite. The issue of asteroid-comet danger gradually acquired scientific data.

The discovery of impactites, rocks formed when large meteorites collide with the surface, as well as aerial and satellite imagery have made it possible to find dozens of large meteorite craters on Earth. By the middle of the century, radioisotope dating had achieved good accuracy, which clarified the absolute values of the age of the layers on the geochronological scale. One of the largest craters, Chicxulub, discovered in 1978, coincided in age with the mass extinction of species about 65 million years ago. At the same time, the development of observational technology made it possible to discover dozens and then hundreds of near-Earth asteroids annually. Currently, even thousands.

The discoveries of the second half of the XX century led to the final awareness of the asteroid-comet danger and contributed to the awakening of interest in the topic. Thus, only in recent decades this topic has been actively studied, and the reality of the danger is beyond doubt.

## Impact events that occurred earlier

To date, there are many examples from the past, primarily from the history of life on Earth. Not all known collisions can be reliably associated with extinctions, but, nevertheless, a repetition of this does not bode well for civilization. Some smaller-scale collisions have occurred throughout human history.

### The largest known impacts in the history of the Earth

Large impact craters on the Earth's surface are also called astroblems. Another name for the traces of the fall of cosmic bodies — impact structures. A list of confirmed impact structures can be found on the website (<https://www.unb.ca/fredericton/science/research/passc/>). A more complete list, including the alleged and refuted impact structures, is available on the website ([labmpg.ssc.ru](http://labmpg.ssc.ru)).

It can be noted that there are one and a half times more confirmed craters less than a million years old than craters older than 600 million years. Under the influence of various processes, craters on Earth are gradually destroyed. In addition to the usual erosion, one of these processes is the renewal of the oceanic

crust. Given its characteristic age, it seems that even within the Phanerozoic, most of the impact events of the past will remain unknown.

## Some of the most notable collisions in human history

Perhaps the most famous fall of a celestial body until recently was the Tunguska event. On June 30, 1908, a very bright bolide was observed in Eastern Siberia, the flight of which ended with a powerful explosion, audible at a distance of 1000 km.

### Chelyabinsk meteorite

On February 15, 2013, a small asteroid entered the Earth's atmosphere east of Chelyabinsk and was moving west. Near Chelyabinsk, the asteroid collapsed, which led to a sharp increase in the glow and looked like an explosion. The remnants fell out in the form of many meteorites to the west, the largest of which, weighing more than 500 kg, fell into Lake Chebarkul.

## Current state of the problem

The topic of asteroid-comet danger is currently developing especially intensively. In addition to scientific knowledge, which is of independent value, this topic also contains applied tasks, primarily ensuring asteroid-comet safety. This task can be divided into obtaining information about asteroids by observation, forecasting possible collisions and minimizing damage. Minimization of damage can be achieved, including evacuation from the affected area, which is clearly beyond the scope of astronomy and therefore will not be discussed in detail here.

### Observations

In the context of asteroid-comet danger, the task of astronomical observations can be divided into the discovery and refinement of the orbits of dangerous celestial bodies. A wide field of view is important for discovery, while measurement accuracy can be mediocre. To clarify, on the contrary, the accuracy of position measurement is more important. Although, in principle, the reduction

of the error can also be achieved by the number of observations. Almost all new asteroids and comets are currently being discovered using automated sky surveys. In recent years, Pan-STARRS and Catalina have been leading in the number of discoveries of near-Earth objects. Of the Russian projects, we can mention ISON and MASTER, but their capabilities are significantly weaker here. However, their regular discoveries confirm that the largest surveys do not provide complete tracking of the sky and miss a lot.

An important part of both orbit determination and collision prediction is the model of the Solar System. In the context of this dissertation, EPM ephemerides developed at the IAA RAS deserve special mention (<https://iaaras.ru/dept/ephemeris/epm/>), as well as ephemerides DE ([https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/eph\\_export.html](https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/eph_export.html)) created at NASA's JPL.

The orbit can be determined, for example, on the basis of the Gauss method using three observations. Each observation is a definition of declination and right ascension, that is, two independent quantities. Thus, for three observations, it is possible to obtain six independent quantities necessary to determine the six elements of the orbits. One example is the [48] [7] method recently developed at the IAA RAS, based on the enumeration of orbital planes, that is, the inclination and longitude of the ascending node.

When the asteroid is already open, a number of new features are added to the survey observations, since the location of the target is already known, at least approximately.

## Impact prediction

The uncertainty of the orbit, especially for recently discovered asteroids, most often makes it impossible to reliably predict the impact. Therefore, when talking about the prediction of asteroid impacts with the Earth, they usually mean an assessment of probabilities.

The most complete lists of dangerous asteroids and their possible collisions are published on the websites NASA (<https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/>) and NEODyS (<https://newton.spacedys.com>). Their results in the vast majority of cases do not differ fundamentally, so in the future, the comparison of the results obtained will be made only with NASA. In Russia the cite of Samara State Technical University ([smallbodies.ru](http://smallbodies.ru)) deserve to be mentioned, where

the probabilities of collisions of several dozen asteroids are determined by their method.

The IAA RAS offered its own method of estimating probabilities [49]. In this method, however, it is assumed that the normal distribution of errors in coordinates and velocities is maintained over the entire calculated time interval. Obviously, this condition is not fulfilled if the asteroid experiences other approaches on the way to the collision.

In the work of Sokolov et al. [35], evidence is given that speaks of a complex, fractal-like structure of a multitude of possible collisions. The reason for this is resonant returns, when, after approaching the Earth, the asteroid goes into orbit with a resonant period of  $p/q$  years. If the fraction is irreducible, the next convergence or, possibly, collision will occur in  $p$  years. Since the orbits of asteroids are known with some error, it is impossible to accurately predict the parameters of the approach to the Earth. The period of rotation after convergence can be represented by a certain range in which resonant values with a small numerator and denominator may appear. At the same time, each approach significantly worsens the predictability of the further trajectory of asteroids. After several such approaches, the movement becomes completely uncertain.

## Impact prevention

Among the methods of collision prevention, the simplest and most ready-to-use is a kinetic ram. Optionally with a nuclear charge. The method consists in sending a spacecraft to collide with an asteroid. The momentum transmitted during the collision should change the asteroid's orbit. The DART experiment is due to take place in 2022 and demonstrate how this method works. In this experiment, it is planned to change the orbit of the asteroid satellite (65803) Didim.

## Asteroid (99942) Apophis

In 2004, an asteroid about 300 meters in size was discovered, designated 2004 MN4 (<https://www.iau.org/public/themes/neo/nea2/>). Almost immediately after its discovery, the probability of a collision with the Earth was estimated

at several percent. Taking into account its size and the alleged damage, Apophis received a record high score on the Torino scale, 4.

## Research conducted at St. Petersburg State University

The asteroid Apophis stimulated numerous studies around the world and St. Petersburg State University was no exception. Here we will talk about the results obtained at St. Petersburg State University and preceding this dissertation.

### Some early works

The topic of asteroid danger, although it was not deprived of attention at St. Petersburg State University, but still research was carried out rather on a case-by-case basis. It is worth mentioning the joint work of Elkin and Sokolov [?], which states that there are usually approaches to the Earth on the trajectory of impact with the Earth. Rendezvous before impact has obvious practical value: asteroids at this time are usually easier to observe. We can also say about the work of Kholshchikov [18], where an estimate of the collision probability for undisturbed orbits is given. It is assumed that the orbits of the asteroid and the Earth have an intersection point.

### The method of point gravitational spheres

The discovery of the asteroid (99942) Apophis and the assessment of the probability of its impact have reawakened interest in the asteroid hazard. In 2008, an article by Sokolov et al. [35] was published, starting with which Sokolov and his scientific group regularly publish new results of their research. This article is of particular interest because it demonstrates the application of the method of point gravitational spheres to predict possible collisions. This method is easy to implement without any cumbersome calculations and it allows you to make an assessment of possible resonant returns leading to new collisions. The reliability of the results is verified by numerical integration.



## Software package v19

The task of the software package v19 — search and study of possible collisions and approaches of asteroids with the Earth. Approach criterion for v19 — approach to the Earth at a distance of less than 0.25 au. Collision criterion — radius of the Earth. The main part of the work of the software package consists of two stages, the remaining functions are applied on a case-by-case basis.

At the first stage, in the space of initial data, Cartesian coordinates and velocities or elements of the orbit, v19 changes one of the variables and sequentially searches for approaches and collisions for each value of the variable being varied. For example, 40 thousand values of the large semi-axis are set within 3 standard deviations from the nominal value. Usually, at the first stage, it is possible to identify only the approaches, however, if the area leading to the collision is large, then a direct hit into the Ground is also possible. If adjacent points (the selected values of the semimajor axis) lead to a similar approach to the Earth, this is considered one approach. Similarity is determined by the date of convergence, within one year. Some approaches occupy only one or several points, some occupy the entire specified range, and most often something in between.

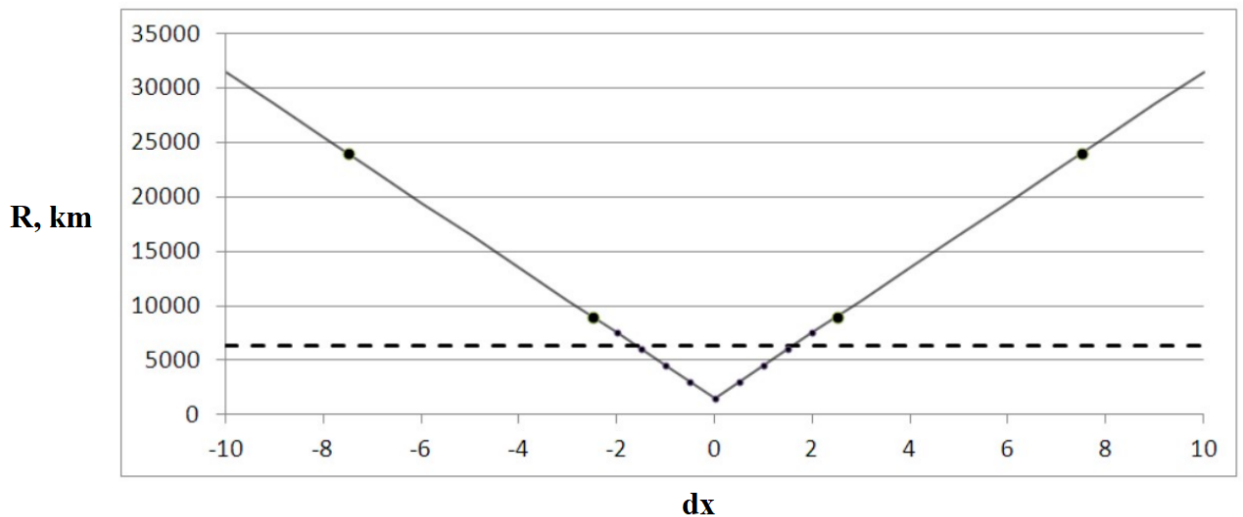


Figure 1: Schematic representation of the dependence of the approach distance on the variable being varied (bold dots indicate the results of the first stage of calculation, small dots — of the second)

At the second stage, a minimum distance is sought for each approach found. To do this, the studied segment of the variable variable, the large semi-axis in

our example, is split even more, up to machine accuracy. Thus, the minimum approach distance is found depending on the large semi-axis. The calculation process is schematically shown in Fig. (1).

## Relevance of the topic

The topic of asteroid-comet danger has been actively studied relatively recently. Now, especially after the Chelyabinsk event in 2013 [11], it is difficult to doubt the relevance of the topic, but still it is necessary to formulate why this topic is important today. Asteroids pose a global threat, up to the destruction of civilization and even life on Earth. For example, the last mass extinction that occurred 65 million years ago is associated with the fall of the asteroid [28]. Compared to the age of the Earth, this happened quite recently, so the danger probably exists now. The use of CCD arrays and automatic telescopes has dramatically increased the possibilities of search observations. As a result, there is currently a huge stream of observational data that requires processing. Minor Planet Center (<https://minorplanetcenter.net> //) collects information about all small bodies of the Solar system. More information about the current situation with near-Earth asteroids can be found on the NASA website (<https://cneos.jpl.nasa.gov/>). With the beginning of space exploration, it became theoretically possible to influence the trajectory of the asteroid and thereby prevent a collision with the Earth.

## Goals and objectives

The dissertation work continues the research of asteroid-comet danger conducted at St. Petersburg State University. The main goal is to search for possible asteroid impacts with the Earth and estimate the probabilities. In the course of the work, other planets and the moon were also considered. This work focuses on current threats and does not address the evolution of asteroid orbits over long time intervals. The trajectories were calculated 100-200 years into the future.

The following tasks are set and solved in the work.

1. Obtaining multidimensional characteristics leading to collision of initial

data regions (coordinates and velocities at the initial time). The v19 software package developed at St. Petersburg State University was limited to one-dimensional variation of initial data.

2. Development and testing of a new algorithm and program for fast calculation of approaches of a large number of virtual asteroids. In addition to performance, the algorithm required stability and achieving acceptable accuracy when approaching virtual asteroids with planets. However, it is worth noting that after several approaches, the calculation error will inevitably exceed the radius of the Earth, which will make the prediction of collisions at least doubtful.
3. Evaluation of the applicability of the new algorithm to real asteroids. To do this, it was checked whether the program would find possible collisions for dangerous asteroids tracked by NASA.
4. Determination of the area in the space of the elements of the orbits from where asteroids can pose a threat to the Earth. This task is important for the independent search for dangerous asteroids.
5. Mass calculation of collision probabilities. A general assessment of the asteroid threat from all asteroids of the Solar System (however, a large number of asteroids of the Main Belt, whose orbit does not come close to either Mars or Jupiter, was excluded a priori).

## Results to be defended

1. An algorithm has been created that allows calculating the movement of millions of virtual asteroids simultaneously. The software implementing it is characterized by high speed and allows you to find approaches and collisions with the planets of the Solar System and the Moon. With the help of this software, it is possible to calculate the probability of a Monte Carlo collision for a large number of asteroids on desktop PCs in an acceptable time.
2. In the space of orbital parameters: eccentricity  $e$ , perihelion distance  $q$  and angle of inclination  $i$ , — regions containing asteroids that may pose

a danger to the Earth have been identified, that is, their approach to the Earth was detected within 100 Earth radii before 2132.

3. As a result of the analysis of the evolution of 127 690 asteroids, 3200 were found approaching planets by less than 100 of their radii before 2132. It is noteworthy that 24 of the 1611 asteroids that have approached the Earth do not belong to the near-Earth class, that is, they have a perihelion distance of more than 1.3 au. When assessing the probability of a collision, it was found that a collision with any planet is possible for 423 asteroids, of which 163 may collide with the Earth.
4. The results of numerical simulation of the evolution of model asteroids have confirmed the hypothesis of asteroids approaching the planet prior to collisions. Of the 50 million model asteroids, 72 collided with the Earth, of which 70 had approaches of less than 0.05 AU for 100 years before the collision.

## Scientific novelty

A new implementation of the Everhart method and an optimized algorithm for calculating the trajectories of a large number of virtual asteroids are presented. Optimization allows you to calculate the probability of collision of all asteroids of the Solar System with all planets on a desktop PC using the Monte Carlo method. With a suitable adaptation, the resulting algorithm can be successfully applied in other tasks that require calculating the trajectories of a large number of objects.

For the first time, the probabilities of a large number of asteroids ( $>100,000$ ) colliding with all the planets of the Solar System and the Moon are estimated. For a number of asteroids that were considered safe, possible collisions with the Earth were found. Among them is the asteroid 2015 CT13, which appeared on the NASA list (<https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/>) only after the publication of the relevant results of the dissertation work.

A potential threat emanating from a number of near-Earth asteroids, that is, having a perihelion distance greater than 1.3 au, has been identified. Such asteroids are usually larger than near-Earth ones, which is explained by the effect of selection during observations. Studies of asteroid-comet hazards are

almost always limited to near-Earth objects, which can prevent the detection of a real threat in advance.

The hypothesis of convergence before collisions has been confirmed in a new way. The key difference from most other works is — integrating trajectories into the future.

## Significance of the work

The results presented in the dissertation work expand the existing ideas about the asteroid hazard. First of all, it is worth noting the identification of a threat from real non near-Earth asteroids. Existing programs are mainly focused on near-Earth asteroids. The rest, from the point of view of the actual asteroid danger, is paid much less attention. Despite a number of works devoted to the evolution of orbits and the replenishment of the NEAs population, the actual threat from near-Earth objects remains poorly understood.

By itself, determining the collision probabilities is not something new, but each new method reduces the likelihood of missing a dangerous object. The significance of the new result is especially high when there are disagreements in different sources. In addition, in this paper, the probabilities of collisions with all planets and the Moon, and not only with the Earth, are calculated. In the next 100 years, the exploration of at least the Moon and Mars is very likely, which makes the study of the asteroid threat on other planets an urgent topic today.

A new version of the Everhart method and the proposed optimizations can be used in similar tasks. For example, when calculating the trajectories of a large number of asteroid fragments after destruction.

The hypothesis of convergence before collisions has been repeatedly tested, so the estimates made in this paper are rather an addition to existing works. Nevertheless, the approach used, with the calculation of trajectories into the future, allows us to look at the problem from the opposite side. The usual approach, with the calculation of trajectories to the past from the collision, is much less demanding on computing performance.

Definitions of a near-Earth asteroid and a potentially dangerous asteroid contain restrictions on orbits. The results obtained in this paper contain some estimates of how well these limitations are justified from the point of view of

studying the asteroid threat. In particular, as mentioned above, a number of asteroids have been found that do not belong to the ASZ, but potentially pose a threat until 2132.

## Methods

With the relative simplicity of the methods used, much attention is paid to stable and reliable operation with a large number of input data. This requirement is caused, among other things, by the huge progress in the discovery of new asteroids, because the ultimate goal, in the maximum version, is to study all known asteroids. Such simple methods include the Monte Carlo method, the least squares method, etc. These methods hardly need detailed comments. At the same time, where necessary, more specific methods are involved, for example, the Everhart integration method and the Mersenne vortex pseudorandom number generator. In addition, in some cases, purely heuristic methods are used, which are a translation of the researcher's intuition into a programming language.

The Everhart integrator is well known to celestial mechanics, since it was originally developed for the corresponding tasks. This is an implicit collocation one-step method from the Runge-Kutta family. An important feature of the method is an easy generalization to an arbitrary order. More precisely, an arbitrary degree of the collocation polynomial. In addition, the collocation polynomial provides a convenient approximation of the solution at intermediate points.

Mersenne Vortex — pseudorandom number generator, one of the most popular at the moment. The generation of (pseudo)random numbers — is the most important part of the Monte Carlo method, affecting the reliability of the result. The use of the simplest standard generators built into programming languages can easily lead to an elusive systematic error. The Mersenne vortex, developed at the end of the XX century, is characterized by an exceptionally long period and uniform distribution in 623-dimensional space.

## Degree of reliability

The reliability of the results was subjected to various checks throughout the studies. The Monte Carlo method is characterized by a high error with a small number of hits, however, with proper generation of (pseudo)random numbers, this error is well known and does not pose a problem when interpreting the results.

The main potential source of unknown error is accuracy of trajectory calculation. Since some of the results are completely new and comparison with the previous ones is not possible, self-monitoring capabilities are provided. The verification calculation of the trajectory is performed by the same method, but with a smaller step. According to the property of the integration method, unlimited step reduction allows you to achieve arbitrary accuracy. In practice, accuracy is limited due to machine rounding. The method parameters selected during testing are aimed precisely at this limit of accuracy.

In addition to self-monitoring, the new program was compared with the old one, as well as the results were compared with those obtained by other researchers, primarily NASA. Comparison with NASA plays a key role in assessing the applicability of the new program to real asteroids.

## Approbation of results

The results are presented at conferences:

1. Pulkovo Youth Astronomical Conference.
2. All-Russian Astrometric Conference.
3. Student scientific conference «Physics of Space».
4. Polyakhov readings.
5. Korolyov readings.
6. Near-Earth astronomy.
7. Planetary Defense Conference.
8. IAU Symposium.

The results have been published in 15 papers indexed by the RSCI, of which 6 papers are indexed in international databases. List of works:

1. Petrov N.A., Balyaev I.A., Vasilyev A.A., Sokolov L.L.  
 POSSIBLE APPROACHES AND COLLISIONS WITH THE EARTH  
 OF DANGEROUS ASTEROIDS  
 In the collection: NEWS OF THE MAIN ASTRONOMICAL OBSER-  
 VATORY IN PULKOVO. Proceedings of the All-Russian Astrometric  
 Conference. 2018. P. 201-206.
2. Balyaev I.A.  
 INVESTIGATION OF THE INITIAL DATA AREAS OF ASTEROIDS  
 LEADING TO A COLLISION WITH THE EARTH  
 In the collection: Space Physics. Proceedings of the 48th International  
 Student Scientific Conference. Ministry of Science and Higher Education  
 of the Russian Federation, Ural Federal University named after the First  
 President of Russia B.N. Yeltsin. 2019. P. 171.
3. Balyaev I.A.  
 ACCELERATION OF NUMERICAL INTEGRATION OF ASTEROID  
 MOTION EQUATIONS AND FIRST RESULTS  
 In the collection: Space Physics. Proceedings of the 49th International  
 Student Scientific Conference. Ministry of Science and Higher Education  
 of the Russian Federation, Ural Federal University named after the First  
 President of Russia B.N. Yeltsin. 2020. P. 149-150.
4. Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B.  
 THE EFFECT OF THE GRAVITATIONAL MANEUVER WHEN AS-  
 TEROIDS APPROACH THE EARTH  
 In the book: XLIV Academic readings on Cosmonautics dedicated to the  
 memory of Academician P.P. Korolev and other outstanding Russian sci-  
 entists — pioneers of space exploration. Collection of abstracts: in 2 V..  
 Moscow, 2020. P. 282-284.
5. Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B.  
 POSSIBLE COLLISIONS AND APPROACHES OF SOME DANGER-



OUS ASTEROIDS WITH THE EARTH

Solar System Research. 2020. V. 54, №6, P. 541-549.

6. Balyaev I.A.  
ACCELERATION OF NUMERICAL INTEGRATION OF THE EQUATIONS OF MOTION OF ASTEROIDS  
Solar system research. 2020. V. 54, №6, P. 557-566.
7. Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B.  
THE APPROACHES AND COLLISIONS OF ASTEROIDS WITH THE MOON AND PLANETS  
In the collection: IX Polyakhov Readings, proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics. St. Petersburg State University. Saint-Petersburg, 2021. P. 169-171.
8. Balyaev I.A.  
MASS CALCULATION OF ASTEROID IMPACT PROBABILITIES: METHODS, PITFALLS, COMPARISON OF RESULTS  
In the collection: Astronomy and space exploration. Collection of scientific papers. Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin. 2021. P. 87-88.
9. Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B.  
ESTIMATION OF THE PROBABILITY OF ASTEROID COLLISIONS AND APPROACHES WITH THE MOON AND PLANETS OF THE SOLAR SYSTEM  
In the book: XLV Academic readings on Cosmonautics dedicated to the memory of Academician P.P. Korolev and other outstanding Russian scientists — pioneers of space exploration. Collection of abstracts: in 4 V.. Moscow, 2021. P. 404-408.
10. Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B.  
APPROACHES AND COLLISIONS OF ASTEROIDS WITH THE MOON AND PLANETS  
In the collection: Journal of Physics: Conference Series. Ser. «Interna-

tional Scientific Conference on Mechanics «The Ninth Polyahov's Reading», ISCM 2021» 2021. P. 012047.

11. Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B.  
 THE EFFECT OF GRAVITATIONAL MANEUVER AT THE APPROACH OF AN ASTEROID TO THE EARTH  
 In the collection: AIP Conference Proceedings. 44. Ser. «XLIV Academic Space Conference: Dedicated to the Memory of Academician S.P. Korolev and Other Outstanding Russian Scientists — Pioneers of Space Exploration» 2021. P. 050006.
12. Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B.  
 POSSIBLE COLLISIONS AND APPROACHES OF SOME DANGEROUS ASTEROIDS WITH THE EARTH  
 Solar system research. 2020. V. 54, №6, P. 541-549.
13. Sokolov L.L., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B., Balyaev I.A., Vasilyev A.A.  
 ON THE CHARACTERISTICS OF SINGULAR TRAJECTORIES OF THE ASTEROID APOPHIS AND THE POSSIBILITY OF DEFLECTING IT TO AVOID COLLISIONS WITH THE EARTH  
 Solar system research. 2021. V. 55, №3, P. 259-265.
14. Kholoshevnikov K.S., Balyaev I.A., Sokolov L.L., Eskin B.B.  
 RETROSPECTIVE ANALYSIS OF THE ORBITS OF ASTEROIDS COLLIDING WITH EARTH  
 Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics. 2021. V. 54, №3, P. 282-288.
15. Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kholoshevnikov K.S., Eskin B.B.  
 ON THE APPROACHES AND COLLISIONS OF ASTEROIDS WITH PLANETS  
 Proceedings of the National Academy of Sciences of Tajikistan. Department of Physical and Mathematical, Chemical, Geological and Technical Sciences. 2021. №2 (183), P. 27-36.

# Chapter 1

## Experiments with multidimensional variation of initial data

### 1.1 Problem statement

The principle of operation of the v19 software package, as described above, is to vary the initial data (coordinates and velocities) along some one-dimensional manifold. The area leading to the collision with the Ground is represented in the form of a certain range of values of the variable parameter. Simply put, when the parameter  $X$  is varied, the area leading to the collision is a segment centered at  $X_i$  and  $W_i$  wide.

It is of interest to consider the stability of the obtained result to various variations of the method of choosing the variable being varied. To do this, a number of experiments were proposed: changing the start date and shifting the orthogonally variable variable. Next, instead of the phrase «the area leading to the collision», the word «gap» will be used.

### 1.2 Evolution of the mutual arrangement of «gaps»

How will the relative position of the «gaps» change if you vary the initial data on a different date?

## The results preceding this dissertation

Previously, the relative positions of the Apophis asteroid «gaps» along the semimajor axis were obtained at 4 time points: in 2006, 2016, 2026 and 2029. These results are presented in the table (1.1), where the year of the collision of the corresponding «gap» is indicated on the left, the top is the start date, and in the table itself — the difference of the large semi-axis in meters. The trajectory of the 2068 collision was used as the reference orbit [40].

Table 1.1: The positions of the asteroid Apophis «gaps» relative to the 2068 year «gap» (the difference of the major semi-axis in meters)

	06.03.2006	08.03.2016	01.05.2026	08.03.2029
2075	-194	-304	-1020	-44000
2064	-191	-300	-1010	-43300
2056	-71.3	-112	-376	-16100
2060	-67.4	-106	-357	-15300
2055	-64.8	-102	-342	-14700
2074	-46.3	-72.7	-245	-10500
2066	-42.7	-67.0	-226	-9700
2065	-41.6	-65.3	-220	-9440
2078	-40.8	-64.1	-216	-9260
2091	-40.0	-62.8	-212	-9080
2077	-1.27	-2.00	-6.72	-288
2068	0	0	0	0
2076	33.9	53.1	179	7670

It was noticed that the structure of the slits retained its shape, increasing in size from 2006 to 2029. The relative position of the gap for 2016, 2026 and 2029 can be obtained by multiplying the relative position in 2006 by some coefficient  $k$ . The value of the multiplier  $k$  obtained from the data given here is: in 2006 — 1; in 2016 — 1.57; in 2026 — 5.29; on 08.03.2029 — 226.75. Fig. (1.1) shows the dependence of the multiplier on time, the points are connected by some smooth curve.

## Modification of the v19 software package

The purpose of the modification is — calculation of the  $k$  multiplier for a larger number of time points. A full-fledged calculation for each date takes a lot of time. However, you can significantly speed up the process if you know

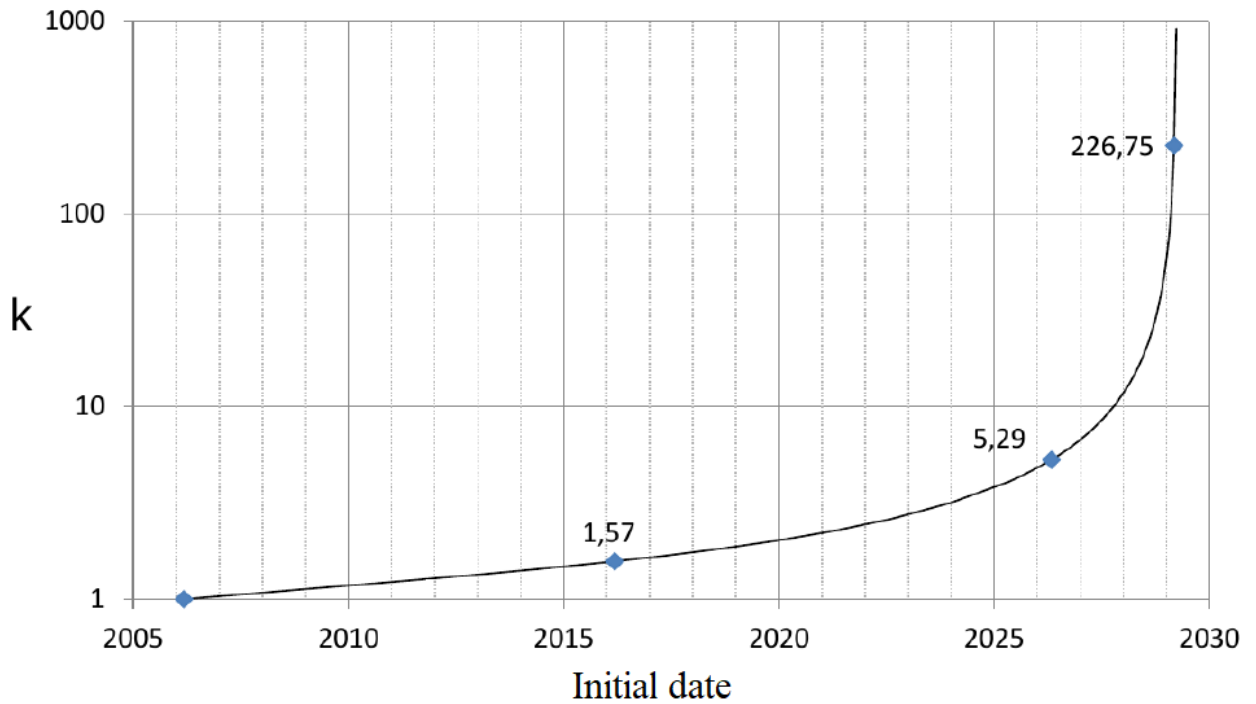


Figure 1.1: Dependence of the multiplier  $k$  on time according to previously obtained results

in advance the approximate location of the «slots». This can be achieved by changing the start date with a small step. However, there may be special points when continuity is broken. Given the estimated number of v19 launches, it was decided to make a control program that generates initial data and processes the results in the process. The program was named «researcher» because of some similarity of its actions with the actions of a live user v19.

The presence of a control program made it possible to use the v19 software package more flexibly. In particular, it has become possible to vary along an arbitrary parameter, and not just Cartesian coordinates and velocities or elements of orbits. This was used to give more practical meaning to the experiments. Pulsed methods of impact on an asteroid are so far the most developed ways to prevent collisions. This is, first of all, a kinetic impact and a nuclear explosion. Their impact on the asteroid can be represented as a displacement of the initial data in the velocity space. From theoretical considerations, it is crucial to change the speed along the direction of movement, changing the major semi-axis. It is this component of speed that is chosen as a variable variable.

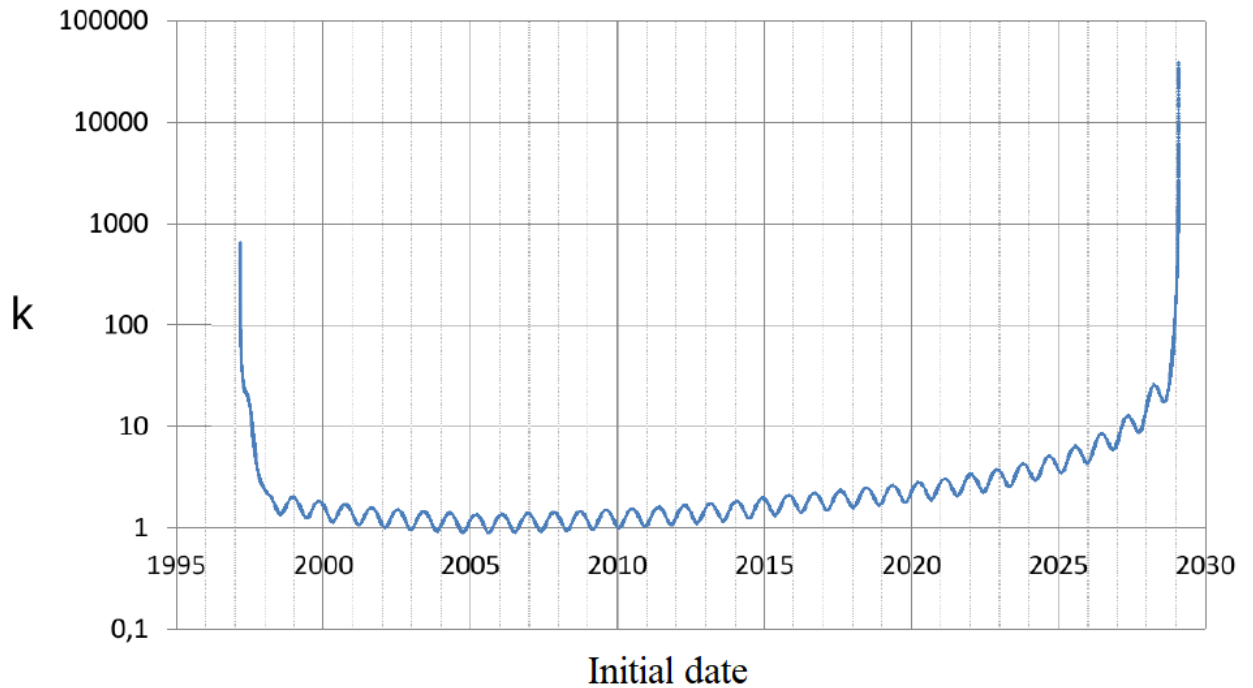


Figure 1.2: Dependence of the multiplier  $k$  on time according to the results of the experiment

### Results of the experiment

In total, the relative positions of «gaps» for 2613 time points from 1997 to 2029 were obtained. The structure of the «gaps» contracts and stretches proportionally in the first approximation. The dependence of the multiplier  $k$  on time is shown in Fig. (1.2). The size of the «gaps» is poorly defined, because it is close to machine accuracy. However, averaging the results across multiple points shows exactly the same trend. In addition to the long-term trend, fluctuations with a period equal to the period of Apophis circulation are clearly noticeable. From this we can conclude that the impact on the asteroid near perihelion is most effective.

### 1.3 Three-dimensional variation in velocity space

Having made similar modifications, it is possible not only to investigate the stability of the result, but also to obtain a multidimensional picture. The velocity space is of particular interest, since the pulsed impact on the asteroid is a displacement of the initial data in this space.

## Software modification

A control program similar to the one described in the previous experiment is used for automation. The one-dimensional characteristics of the «gap» will still be calculated, but now the initial data will shift in two perpendicular directions. The amount of displacement at which one-dimensional characteristics begin to change noticeably is initially unknown. Therefore, a logarithmic grid is used, starting from machine precision, in increments of 2 times. Dependence of the position of the «gap» the offset is estimated by a linear function.

## Basis

The main variable of variation  $v_1$  is the velocity along the direction of motion determined by the nominal orbit or other reference orbit. The others,  $v_2$  and  $v_3$ , complement it to the right triple. The basis is calculated from the coordinates and velocities as follows:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \\ \vec{e}_2 &= \frac{[\vec{r} \times \vec{v}]}{|[\vec{r} \times \vec{v}]|} \\ \vec{e}_3 &= [\vec{e}_1 \times \vec{e}_2] \end{aligned} \tag{1.1}$$

Thus, the second component is selected perpendicular to the plane of the orbit, and the third in the plane of the orbit, but perpendicular to the direction of motion. Coordinates and velocities are used barycentric.

## Selection of «gaps»

Some previously found collisions of asteroids (99942) Apophis and (443104) [33] were selected for the experiment. For the second asteroid, the dates of the collisions are at the beginning of the XXII century.

## Results of the experiment

During the experiment, it was possible to establish the first, linear approximation of the dependence of the one-dimensional parameters of the «gap» on other

variables. In the considered cases, as expected, the «gap» is approximately perpendicular to the direction of movement, that is, the impulse collinearly to the direction of movement is most effective for avoiding collision. Changing other variables also leads to a change in the minimum distance. With a sufficiently large displacement, the minimum distance becomes greater than the radius of the Earth. The magnitude of this displacement is several orders of magnitude greater than the width of the «gap».

Upon reaching the near-zero minimum distance, less than 0.01 of the Earth's radius, unstable operation of the v19 software package was noticed. The operating time increased by orders of magnitude, despite the fact that as a result, the program could not determine the parameters of convergence at all. Until the reasons were clarified and eliminated, it was decided not to carry out calculations for a large number of «slots», but to limit ourselves to a few examples. However, the other three variables were included in the consideration.

## 1.4 Six-dimensional variation in coordinates and velocities

The present experiment will evaluate the fundamental possibility of describing «gaps» in the six-dimensional space of coordinates and velocities.

### Local representation of a «gap» in a six-dimensional space

As in the previous experiment, one-dimensional characteristics of the «gap» can be represented as functions of other variables. For the neighborhood of the nominal orbit, or another reference orbit, you can use a polynomial of five variables. The coefficients were calculated using the least squares method. The number of coefficients of the polynomial grows very rapidly with increasing degree: For the first degree — 6; for the second — 21; for the third — 56 and further grows non-linearly with increasing degree.



## Basis

The three-dimensional basis was supplemented with components along which the coordinates  $x_1$ ,  $x_2$  and  $x_3$  vary:

$$\begin{aligned} \vec{e}_4 &= \frac{[\vec{r} \times \vec{v}]}{|[\vec{r} \times \vec{v}]|} \\ \vec{e}_5 &= \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \\ \vec{e}_6 &= [\vec{e}_4 \times \vec{e}_5] \end{aligned} \tag{1.2}$$

Here, the first component is perpendicular to the plane of the orbit, the second is parallel to the radius vector, and the third is perpendicular to it, remaining in the plane of the orbit. If the velocity vector is perpendicular to the radius vector, the bases for the velocities and coordinates are completely combined. The component perpendicular to the orbit plane is always aligned.

## Selection of «gaps»

Examples from the imminent Apophis collision in 2029 to the collisions (443104) in 2144 have been selected for research. Although the collision of Apophis in 2029 has long been ruled out, it can still be found by changing the initial data. In addition, withdrawal from another collision may well lead to an earlier collision.

## Results

Although significant coefficients of the second degree were obtained, the reduction of the polynomial completely would make the output too cumbersome and inconvenient to read. Let's imagine the linear part of the dependence of the position of «gap»  $v_1(v_2, v_3, x_1, x_2, x_3)$  in the form:

$$v_1 = a_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3. \tag{1.3}$$

The table (1.2) shows the linear position coefficients of some «gaps». The second column shows the year of the collision corresponding to the «gap». The coefficients  $a_2$  and  $a_3$  are dimensionless;  $b_1$ ,  $b_2$  and  $b_3$  have frequency dimension.

The results for different «gaps» and different asteroids show some trends:

Table 1.2: Linear position coefficients of some «gaps»

Asteroid	Year	$a_2$	$a_3$	$b_1, s^{-1}$	$b_2, s^{-1}$	$b_3, s^{-1}$
2004 MN4	2029	-0,00004	-0,00706	-1,6	-2808,4	5,7
2008 EX5	2072	0,00007	-0,00553	0,2	-1650,7	-18,5
2008 EX5	2075	0,00039	0,00059	-1,6	-1656,5	-11,9
2013 XK22	2101	0,00035	-0,01709	-1,0	-1867,8	-28,5
2013 XK22	2130	0,00034	-0,01711	-1,1	-1867,6	-28,5
2013 XK22	2144a	0,00035	-0,01710	-1,0	-1867,8	-28,5
2013 XK22	2144b	0,00034	-0,01711	-1,1	-1867,9	-28,5

1. The position of the «gap» very weakly depends on the displacement in space of the velocities perpendicular to the plane of the orbit. The dependence on the third component of the velocity reaches almost 2%, but in general the «gap» is located almost perpendicular to the velocity vector.
2. A similar trend is observed for the dependence on the components of the radius vector. The most significant dependence is on the second component corresponding to the change in the modulus of the radius vector. The ratio roughly corresponds to the constant of the large semi-axis.
3. For the asteroid 2013 XK22, the linear coefficients differ very little, which, however, is not observed for the asteroid 2008 EX5.

## Results of the experiment

A local representation of the region leading to the collision in the six-dimensional space of initial coordinates and velocities is obtained. For the cases considered, the location of the «gap» approximately corresponds to the constant of the large semi-axis, but the results also show a slight deviation from this rule. The v19 software package needs to be improved or replaced, because there is a lack of performance and stability to solve larger tasks.

## Chapter 2

# Acceleration of numerical integration

### 2.1 Prerequisites for creating a new program

Although the v19 software package has allowed us to get a lot of interesting results, there is no limit to perfection.

#### Critical shortcomings of the v19 software package

During the search for the minima of geocentric distances, quite often the asteroid fell almost exactly into the center of the Earth (less than 0.01 radius). It turned out that v19 at the same time slows down its work by several orders of magnitude, and in some cases simply ignores the approach to Earth. To account for the latter factor, as an option, more virtual asteroids could be used. However, an increase in the working time would then become completely unacceptable.

This disadvantage does not significantly affect the results obtained by one-dimensional variation. Firstly, the method used is somewhat redundant and single outliers can easily be excluded from consideration. Secondly, the minimum geocentric distance very rarely drops to such small values. However, one-dimensional variation does not give a complete picture of the six-dimensional uncertainty domain.

A possible option would be to use the Monte Carlo method. Indeed, the Monte Carlo method allows us to obtain a very reliable result, and a multidimensional area of uncertainty may well be represented by a swarm of virtual asteroids. The obvious drawback is — the speed of work. For the most resource-

intensive calculations, about  $10^7$  of virtual asteroids were used and it took about a month. Thus, further progress with the available software seemed impossible.

## Problem statement

It should be said right away that the task of comparing different integration methods was not set. The Everhart method in various variants has long proven itself in the problems of celestial mechanics, which can be judged at least by numerous references in publications [24][25][21][10]. The Everhart integrator is also used in the v19 software package.

The equation of motion of an asteroid is considered as Newtonian problem of  $N$  bodies. The influence of the Sun, Moon and all the major planets is taken into account. It is convenient to take the coordinates and velocities of the planets from ephemerides. The ephemerides DE430 are selected for the calculation, and the initial data for asteroids are taken from the NASA database. Although the motion model is simple, the data obtained with the v19 software package suggested that such an approximation is sufficient to obtain results close to reality. In any case, a simplified Solar system can be used to solve model problems. The obvious advantage of the simplicity of the motion model is the computing performance, which was originally planned to be no worse than in v19.

Denote  $x$  — the barycentric vector of the asteroid's position,  $x_i$  — the position of a massive body of the Solar system,  $r_i$  — the distance between the massive body and the asteroid,  $G$  — the gravitational constant,  $m_i$  — the mass of the body. Then the equation of motion of the asteroid can be written as:

$$\ddot{x} = G \cdot \sum_{i=1}^n m_i \frac{x_i - x}{r_i^3} \quad (2.1)$$

The specific task of the program — search and calculation of parameters of approaches to planets and the Moon according to the given initial data. The input is provided with the start and end date, as well as a list of coordinates and velocities of virtual asteroids. The output is a list of the approaches found, which indicates: the number of the virtual asteroid, the date, the body with which the approach occurred, and the minimum distance. The program must deal with an arbitrary number of virtual asteroids and produce a reasonable result in a reasonable time with any reasonable initial data. Although the latter

requirement may seem obvious, in reality not every program is able to work without failures.

## Program name

The new program was named  $R^0$ . The name of the program comes from the dimension of the initial data set for which the asteroid trajectories are studied. In this case, these are individual points. However, you can set points in an arbitrary way, so they may well represent something multidimensional. Actually, this is the point: to give maximum freedom to future research. Initial data generation and result processing are carried out either manually or by an external control program.

## 2.2 Modification of the Gauss-Everhart method

The modification of the integration method is mainly a transformation of formulas, so the resulting method does not have an independent name. In fact, the modification was carried out for several months, achieving ever higher performance in the conditions of a specific task, but only the initial and final algorithms will be described.

### Method Description

So, mathematically, the task is to solve the equation (2.1) for a certain set of given initial conditions. Since this is a second-order equation in three-dimensional space, it can be transformed into a system of six ordinary differential equations of the first order. In the future, when describing the method and the modification made, the Cauchy problem will be considered in the following form:

$$x' = f(x, t), \quad x_0 = x(t_0) \quad (2.2)$$

Here  $x$  represents some function of time  $t$ , in fact, the trajectory of the asteroid. Let's denote the integration step  $h$  and introduce the variable  $\tau = (t - t_0)/h$  at the step. We approximate the right side of the equation by a polynomial of degree  $k$ :

$$x' = f = f_0 + \sum_{i=1}^k A_i \tau^i \quad (2.3)$$

The polynomial is easy to integrate, obtaining an approximate solution in the form:

$$x = x_0 + h \left( f_0 \tau + \sum_{i=1}^k A_i \frac{\tau^{i+1}}{i+1} \right) \quad (2.4)$$

Let's rewrite the right part in the form of the Newton interpolation polynomial on the grid  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k$ ;  $\tau_0 = 0$ .

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \prod_{j=0}^{i-1} (\tau - \tau_j) \quad (2.5)$$

The coefficients  $A$  and  $\alpha$  are related by the relations:

$$A_i = \sum_{j=i}^k c_{ji} \alpha_j \quad (2.6)$$

$$\alpha_i = \sum_{j=i}^k d_{ji} A_j \quad (2.7)$$

In turn, the coefficients  $c$  and  $d$  can be obtained by recurrent formulas:

$$c_{ii} = d_{ii} = 1$$

$$c_{i0} = d_{i0} = 0 \quad (i > 0)$$

$$c_{ij} = c_{i-1,j-1} - \tau_{i-1} c_{i-1,j} \quad (i > j > 0) \quad (2.8)$$

$$d_{ij} = d_{i-1,j-1} + \tau_j c_{i-1,j} \quad (i > j > 0) \quad (2.9)$$

The coefficients  $A$  are calculated using iterations performed as follows. For each  $i = 1, 2, \dots, k$ , a cycle of four actions is performed sequentially  $A \rightarrow x_i \rightarrow f_i \rightarrow \alpha_i \rightarrow A$ . The first action  $A \rightarrow x_i$  is performed according to the formula (2.4), the second action  $x_i \rightarrow f_i$  — using the original equation (2.1). For the third action,  $f_i \rightarrow \alpha_i$  will need to convert the formula (2.5)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (f_1 - f_0)/\tau_1 \\ \alpha_2 &= ((f_2 - f_0)/\tau_2 - \alpha_1)/(\tau_2 - \tau_1) \\ \alpha_3 &= (((f_3 - f_0)/\tau_3 - \alpha_1)/(\tau_3 - \tau_1) - \alpha_2)/(\tau_3 - \tau_2) \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Finally, the fourth action of  $\alpha \rightarrow A$  is performed by the formula (2.6).

At the start of integration, the initial approximation of  $A$  can be taken equal to zero. In the following steps, it makes sense to use the initial approximation

$\bar{A}$  obtained from the coefficients  $A$  in the previous step:

$$\bar{A}_i = r^i \sum_{j=i}^k e_{ji} A_j \quad (2.11)$$

Where  $r = \bar{h}/h$  — the ratio of the new step to the previous one. The coefficients  $e$  are calculated using recurrent formulas:

$$\begin{aligned} e_{ii} &= e_{i0} = 1 \\ e_{ij} &= e_{i-1,j-1} + e_{i-1,j} \quad (i > j > 0) \end{aligned} \quad (2.12)$$

The initial approximation of  $\bar{\alpha}$  can be obtained by the formula (2.7).

To increase the order of the method, the nodes  $\tau_i$  should be selected from the Gauss-Legendre, Gauss-Radao or Gauss-Lobatto partitions. The latter was chosen for the new program. The nodes in this case are the roots of the equation:

$$\left(\tau^k(\tau - 1)^k\right)_\tau^{(k-1)} = 0 \quad (2.13)$$

Then the order of the method will be equal to  $2k$ ,  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_k = 1$ .

## Modification of the method

The task of this modification is — while maintaining accuracy, to increase the performance of calculations in the conditions of a specific task. As a rule, the calculation of the right-hand sides of the equation is the most expensive part. Having examined our right side more closely, we can see that the lion's share of calculations is occupied by calculating the positions of massive bodies from ephemerides. The calculation is carried out at fixed time points corresponding to the nodal values of  $\tau_i$ . This means, firstly, that it is enough to calculate the positions of massive bodies once per step (for each node). Secondly, if many virtual asteroids are integrated simultaneously, it is enough to perform these calculations once for all asteroids. Thus, the cost of calculating ephemerides can be made negligible.

To represent exactly where to optimize, let's estimate the number of arithmetic operations performed in one iteration at  $k = 6$ . The integrable variable is a 6-vector, but when calculating the right parts, for example, only 3 components out of 6 require calculation. In addition, the values of  $Gm_i/r_i^3$  are sufficient to calculate once for all components. For the first action  $A \rightarrow x_i$ , it is

worth calculating the values of  $\tau_i^{j+1}/(j+1)$  in advance, then  $6k(k+1) = 252$  additions and  $6k(k+1) = 252$  multiplications are required. As for the second action  $x_i \rightarrow f_i$ , the number of operations depends on the number of massive bodies taken into account. For 10 massive bodies during one iteration, you need to make:  $30k = 180$  subtractions,  $10k = 60$  divisions,  $10k = 60$  square root extractions,  $30k = 180$  additions and  $80k = 480$  multiplications. For the third action  $f_i \rightarrow \alpha_i$ , we calculate in advance the values of  $1/(\tau_i - \tau_j)$  and use multiplication instead of division. Then the number of operations will be  $6k(k+1)/2 = 126$  subtractions and  $6k(k+1)/2 = 126$  multiplications. The fourth action  $\alpha \rightarrow A$  is performed for  $6k^2(k-1)/2 = 540$  additions and  $6k^2(k+1)/2 = 756$  multiplications.

The last cost action is comparable to calculating the right parts. The ratio will change in favor of the right parts, if additional forces are taken into account. At the same time, as the degree of the  $k$  polynomial increases, the costs of the fourth action grow very quickly. For example, with  $k = 8$ , 1344 additions and 1728 multiplications will already be required. Instead of optimizing this action, let's combine it with the first one in the abbreviated scheme  $\alpha \rightarrow x_i \rightarrow f_i \rightarrow \alpha_i$ . Then the initial approximation will be calculated according to the scheme  $\alpha \rightarrow A \rightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{\alpha}$ . Formula for the combined action  $\alpha \rightarrow x_i$ :

$$x_i = x_0 + h \left( f_0 \tau_i + \sum_{j=1}^k B_{ij} \alpha_j \right) \quad (2.14)$$

$$B_{ij} = \sum_{l=1}^j c_{jl} \frac{\tau_i^{l+1}}{l+1} \quad (2.15)$$

The number of arithmetic operations does not differ from the action  $A \rightarrow x_i$ , in the complete absence of the fourth action. Getting an initial approximation is somewhat more complicated. If we try to simplify it in a similar way, we get:

$$\bar{\alpha}_i = \sum_{j=i}^k H_{ij} \alpha_j \quad (2.16)$$

$$H_{ij} = \sum_{l=i}^j \sum_{m=i}^l d_{mi} r^m e_{lm} c_{jl} \quad (2.17)$$

If the integration is performed with a variable step, the coefficients  $H$  will have to be calculated anew each time. If integrated with a constant step,  $r = 1$  and  $H$  can be calculated in advance. However, our virtual asteroids regularly



experience close approaches with planets, so it is necessary to change the step. As a result, the following strategy was chosen. In most cases, the step is equal to the previous one and the pre-calculated coefficients  $H$  are used. When changing the integration step, the zero initial approximation is taken, as in the first step.

The original system of equations has a second order, so you can use another version of the approximation of the solution:

$$x'' = f = f_0 + \sum_{i=1}^k A_i \tau^i \quad (2.18)$$

The formula for the action  $\alpha \rightarrow x_i$  will take the form:

$$x_i = x_0 + h \left( x'_0 \tau_i + h \left( f_0 \frac{\tau_i^2}{2} + \sum_{j=1}^k W_{ij} \alpha_j \right) \right) \quad (2.19)$$

$$W_{ij} = \sum_{l=1}^j c_{jl} \frac{\tau_i^{l+2}}{(l+1)(l+2)} \quad (2.20)$$

Iterations are performed until the position and velocity are completely converged at the end of the step. The iteration termination criterion was chosen taking into account the machine accuracy of 52 binary orders for the double data type.

## 2.3 Organization and optimization of computing

The task of the new program — is not only the calculation of the trajectory, but also the calculation of the parameters of close approaches. In addition, the calculation of the trajectory in the presence of close approaches requires a special approach to the choice of the integration step.

### Algorithm for choosing a step and grouping virtual asteroids

The very idea of calculating multiple virtual asteroids at the same time looks simple. If there is a rapprochement with some planet, you have to reduce the step, but this can be done for all virtual asteroids. The problem is that most often only a small fraction approaches, so reducing the step for all asteroids at once threatens with a lot of unnecessary calculations. In addition to wasting time, an unnecessary increase in the number of steps will increase the accumulation of machine rounding errors. Obviously, it makes sense to divide asteroids

into groups depending on the integration step. It is also worth considering the unification of asteroids, otherwise the number of groups may grow to the number of virtual asteroids, thereby destroying the basic idea of optimization.

The value  $h_0 = 4^d$  was chosen as the base step, which provides convenient use of the ephemerides DE430. In addition, due to the machine representation of numbers, multiplication by an integer power of  $2^i$  can be performed without loss of accuracy. The step reduction criterion — is a heuristic used to detect close approaches. If the ratio of the planetocentric velocity to the planetocentric distance exceeds  $2^i M$ , the step decreases to  $2^{-i} h_0$ . The value of  $M$  was selected during testing. As a result, the step is chosen from the calculation so that the change in the planetocentric radius vector of the asteroid does not exceed a quarter of the planetocentric distance. The degree of the polynomial  $k$  is selected to achieve the best accuracy and is equal to 5. Accuracy control was carried out by parallel integration with a smaller step.

Asteroids that do not experience close proximity according to the criterion described above are integrated simultaneously with a step equal to the base step  $h_0$ . For asteroids approaching some massive body, the base step is split into parts, asteroids are grouped by the magnitude of the step. The maximum degree of crushing is  $i = 20$ , which corresponds to a minimum step of about 0.33 seconds. Thus, the maximum number of asteroid groups is 21. Integration at the basic step is performed in the following iterations:

1. From the set of asteroids, those for which the trajectory calculation is completed at the shortest time are selected. Due to the use of integer powers of  $2^i$ , there are no machine rounding errors and time points are calculated accurately even when using a floating-point data type. This does not apply, however, to intermediate nodal values.
2. The integration step is independently determined for each asteroid from the selected ones. If the step is less than the previous one, the asteroid moves to another group. If the step is larger than the previous one, then the step increase occurs only if it is possible to merge with another group. With the described method of splitting the base step, an increase in the step is possible every second step.
3. The selected asteroids are grouped according to the magnitude of the

integration step, for each step, ephemerides are calculated in nodal values and, finally, integration at the step.

Finally, the smallest moment of time reaches the right boundary of the base step and integration begins at the next base step.

### Algorithm for clarifying approximations

From the point of view of the program, the approach of an asteroid to a planet is the local minimum of the function of the planetocentric distance from time. During testing, it turned out that in 10 minutes the program can find such a large number of approaches that when using 50 bytes to record information about one approach, the output file volume will exceed gigabytes. Fortunately, it turned out to be easy to correct this by setting the upper bound of the minimum distance  $R_{min}$ . For an acceptable amount of output files, by default, the upper bound is 100 radii of the corresponding planet.

So, at each integration step, it is necessary to determine whether the minimum distance has been reached and compare it with  $R_{min}$ . To do this, we will use the planetocentric coordinates and velocities of the asteroid. The planetocentric distance can be written as:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.21)$$

Differentiate by time:

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (2.22)$$

A sign of the minimum will be a change in the sign of the derivative from negative to positive. To determine the sign, it is enough to calculate only the upper part of the fraction, which is the scalar product of the planetocentric radius vector and velocity vector. Further, if a convergence is detected within the step and the planetocentric distance at the end of the step is less than  $2R_{min}$ , the parameters of the convergence are refined. If, after refinement, the minimum distance turns out to be less than  $R_{min}$ , the parameters are written to the output file.

To clarify the moment of approach and the minimum distance, it will be necessary to calculate the planetocentric coordinates and velocities of the asteroid at an arbitrary intermediate time. For planets, ephemerides can be used,

for an asteroid, let's take the approximation of the solution obtained in the Everhart method by a polynomial. The simplest (and quite suitable) way is binary search, when the time interval is divided in half and the sign of the scalar product in the middle is calculated. After 10 iterations, the accuracy of determining the approach time improves by 1024 times. An alternative method is the golden ratio method, in which it is not necessary to calculate the velocities, but the convergence is slower. Testing showed that binary search gives a noticeably more stable result, so it was decided to abandon the golden ratio method.

The record of one rendezvous takes 50 bytes, which includes: the number of the virtual asteroid, the Julian date, the number of the body with which the rendezvous occurred and the minimum distance. The size of the record is selected so that you can quickly estimate the number of file size approximations. In the most frequently used version of the program, three separate files are output for approaches of less than 100 radii of the planet, 10 radii and 1 radius, that is, collisions. In the event of a collision, the calculation of the trajectory of this virtual asteroid stops.

## 2.4 Testing a new program

So, the new program has been created and satisfactorily fulfills the task. It is of interest to evaluate the accuracy and performance of calculations.

### Accuracy Testing

The accuracy assessment was carried out in two different ways. The first method is — parallel integration with a smaller step. This method was actively used in the process of making changes. It is assumed that when the step decreases, the result tends to an exact solution. From experience, this statement often remains true even with errors in the implementation of the method, but convergence suffers greatly. Naturally, the accuracy remains limited by machine rounding. The second method — comparison with the old v19 program using the same motion model. This method allows you to make sure that the result is really adequate. Presumably, the accuracy of the new program should

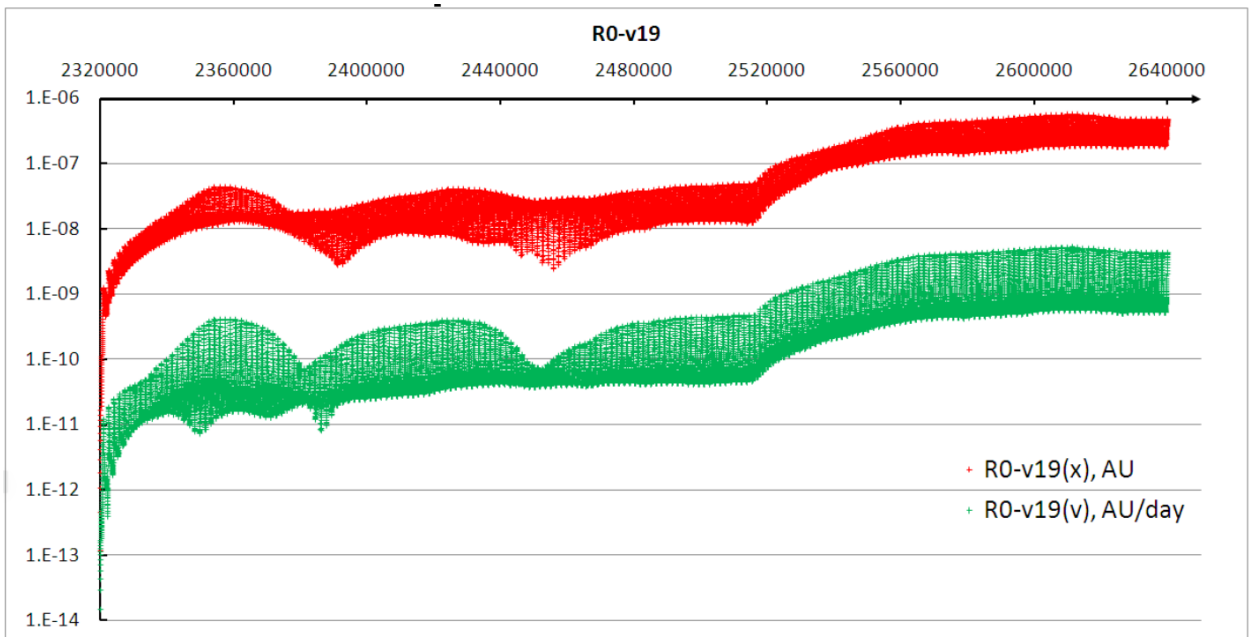


Figure 2.1: The difference between  $R^0$  and v19 for the position and velocity of the asteroid Ganymede depending on the Julian date

be comparable to the old one, since in both cases a variant of the Everhart method is used.

The main test of accuracy was the calculation of the asteroid trajectory (1036) Ganymede for 320 000 days (about 900 years). The results are shown in Fig. (2.1). Such a period of time is an order of magnitude longer than usual for asteroid hazard tasks. In addition, there is a close approach to Mars on the Ganymede trajectory. When comparing the trajectories, the discrepancy was considered during the entire integration time. The difference in the result between v19 and  $R^0$  did not exceed  $10^{-6}$  a. e.; comparison of the trajectories obtained by  $R^0$  with normal and reduced steps showed an order of magnitude smaller difference.

## Performance testing

An important feature of the new program is the ability to calculate approaches to all planets in one trajectory calculation. When using the v19 software package, in order to achieve a similar result, it would be necessary to run a separate calculation for each planet. That's why the performance of the  $R^0$  program is an order of magnitude higher. However, this advantage does not matter if the task is to calculate the approaches only to the Earth.

An asteroid (99942) was chosen for the test Apophis, 1000 virtual asteroids in the vicinity of the nominal orbit. Trajectories diverge rapidly after the 2029 rendezvous, but many virtual asteroids have more than one rendezvous per trajectory. Integration was performed for 20 000 days (about 55 years), an Intel G3260 processor was used. In the v19 program, the average time spent on one asteroid was 300 ms. The result of the  $R^0$  program was 13 ms, which is 23 times faster.

### Discussion of test results

The accuracy of the program  $R^0$ , apparently, is not worse than that of v19. Moreover, a comparison with the result obtained by reducing the integration step suggests an order of magnitude smaller error. It remains unclear how applicable the simplified model is to the assessment of the danger of real asteroids, however, at least for model studies, the new program is quite suitable. In principle, adding perturbations to the right side of the equation is not a significant problem, but it will increase the running time of the program.

The performance of the  $R^0$  program significantly exceeded expectations. In early tests, when the selection of approaches was not limited to the maximum distance  $R_{min}$ , the size of the output file turned out to be indecently large. Later, as the upper limit of  $R_{min}$ , 100 radii of the corresponding planet were taken by default. For Earth, this is 0.0043 AU, which is almost two orders of magnitude less than the 0.25 AU commonly used in v19.

The number of virtual asteroids in the v19 program was limited by the running time of the program. More than  $10^5$  at a time was launched very rarely. In the program  $R^0$ , since all virtual asteroids are integrated simultaneously, the amount is limited by the amount of RAM. For 8 gigabytes, you can run about  $10^7$  virtual asteroids, while the running time of the new program remains acceptable. This makes it potentially possible to use the Monte Carlo method, which is usually discarded due to its resource intensity, but at the same time very reliable and universal. This modification of the Everhart integrator is published in [5].

## Chapter 3

# Monte Carlo Experiments

### 3.1 200 asteroids

The purpose of the experiment — to demonstrate the capabilities of the program in calculating the collision probabilities, to evaluate the applicability of the method to real asteroids and to identify possible pitfalls in large-scale calculations. In total, the trajectories of  $2 \cdot 10^9$  virtual asteroids were calculated during the experiment.

#### Choosing Asteroids

Obviously, only a few asteroids have a significant probability of impact in the next 100 to 200 years. Therefore, if we take completely arbitrary asteroids, the computational resource will be wasted in 99%. To make the result a little more interesting than an array of zeros, asteroids were selected based on NASA results (<https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/>). The following criterion was used: an estimate of the size of an asteroid of at least 30 meters, the probability of a collision with the Earth is at least  $10^{-8}$ . At that time (December 2019) there were exactly 200 such asteroids.

The size criterion is due to two considerations: firstly, asteroids less than 30 meters do not pose a great danger; secondly, with a small size, the influence of non-gravitational forces becomes more significant, which are not taken into account in the motion model. The criterion for the probability of collisions was chosen based on the estimated number of virtual asteroids equal to  $10^7$ . Even if the probability is the minimum  $10^{-8}$ , with a chance of about 10%, the Monte

Carlo method will detect a possible collision.

The nominal orbit and covariance matrix for each asteroid are obtained from the NASA database (<https://ssd.jpl.nasa.gov>). The starting date is taken exactly the same as that for which the elements and the covariance matrix in the database are given. The end date is — September 1, 2132, or JD 2500000.5. Thus, the search for possible collisions will be conducted 100 years ahead with a small margin. Since NASA in most cases is looking for collisions 100 years in advance, we can expect a significant correlation of the results, that is, it makes sense to make a comparison.

### Calculation process

The use of the Monte Carlo method requires the generation of a large number of random numbers. One virtual asteroid is given by 6 variables (coordinates and velocities), that is,  $6 \cdot 10^7$  random numbers need to be generated for one real asteroid. The Mersenne vortex[23] is used for this task. This pseudorandom number generator, in addition to a very long period, gives a uniform distribution in spaces of dimension up to 623.

Normally distributed quantities can be obtained from uniformly distributed ones using the Box-Muller transformation:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos 2\pi q_1 \sqrt{-2 \ln q_2} \\ z_2 &= \sin 2\pi q_1 \sqrt{-2 \ln q_2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Where  $q$  is independent uniformly distributed random variables in the interval  $(0, 1)$ , and  $z$  is independent normally distributed random variables with mathematical expectation 0 and standard deviation 1. Then the generated vector of six normally distributed random variables is transformed according to the covariance matrix. As a result, after numerous generations, a swarm of virtual asteroids representing possible elements of the orbit of a real asteroid is obtained. For the program  $R^0$ , the elements of the orbits are transformed into barycentric rectangular coordinates.

### Results

The result is published and available by link in the form of a spreadsheet ([www.astro.spbu.ru/sites/default/files/stats.xls](http://www.astro.spbu.ru/sites/default/files/stats.xls)). The number of approaches



to each planet by 100, 10 and 1 radius is indicated, totaling from  $10^7$  virtual asteroids. As expected, there are relatively few approaches and collisions with other planets, yet asteroids have been selected from the most dangerous for Earth. Nevertheless, in addition to 156 million approaches to Earth, 22 million — with the Moon, 8 million — with Venus, 1 million — with Jupiter were found. Many asteroids with high probability of impact with the Earth have a chance to collide with the Moon. For some asteroids, possible collisions with two or more planets have even been detected [45].

### Comparison with NASA

Since NASA considers most asteroids to be about the same time interval, the results can be expected to be very similar. However, in the comments to the probabilities obtained, they wrote that in some cases the result is highly unstable in relation to the calculation method and the difference can reach several orders of magnitude. In addition, the interval taken for the program  $R^0$  is in most cases a little longer, so the probability should be, on average, greater. A comparison of the results is shown in Fig. (3.1).

With the general similarity of the results, the following features can be noted.

1. For most asteroids, as expected, the probabilities obtained are somewhat greater than those of NASA. Often the difference reaches one or two orders of magnitude, but more often it is tens of percent. The greatest differences usually occur in asteroids with the worst orbital accuracy.
2. For a number of asteroids, the  $R^0$  program did not detect possible collisions with the Earth. First of all, these are asteroids with probabilities less than  $10^{-7}$  according to NASA. Obviously, when using  $10^7$  virtual asteroids, the Monte Carlo method cannot reliably determine such small probabilities. Nevertheless, possible collisions were found in some cases.
3. Several asteroids with high probabilities according to NASA have possible collisions only after 2132. For such asteroids, the  $R^0$  program also did not detect possible collisions.

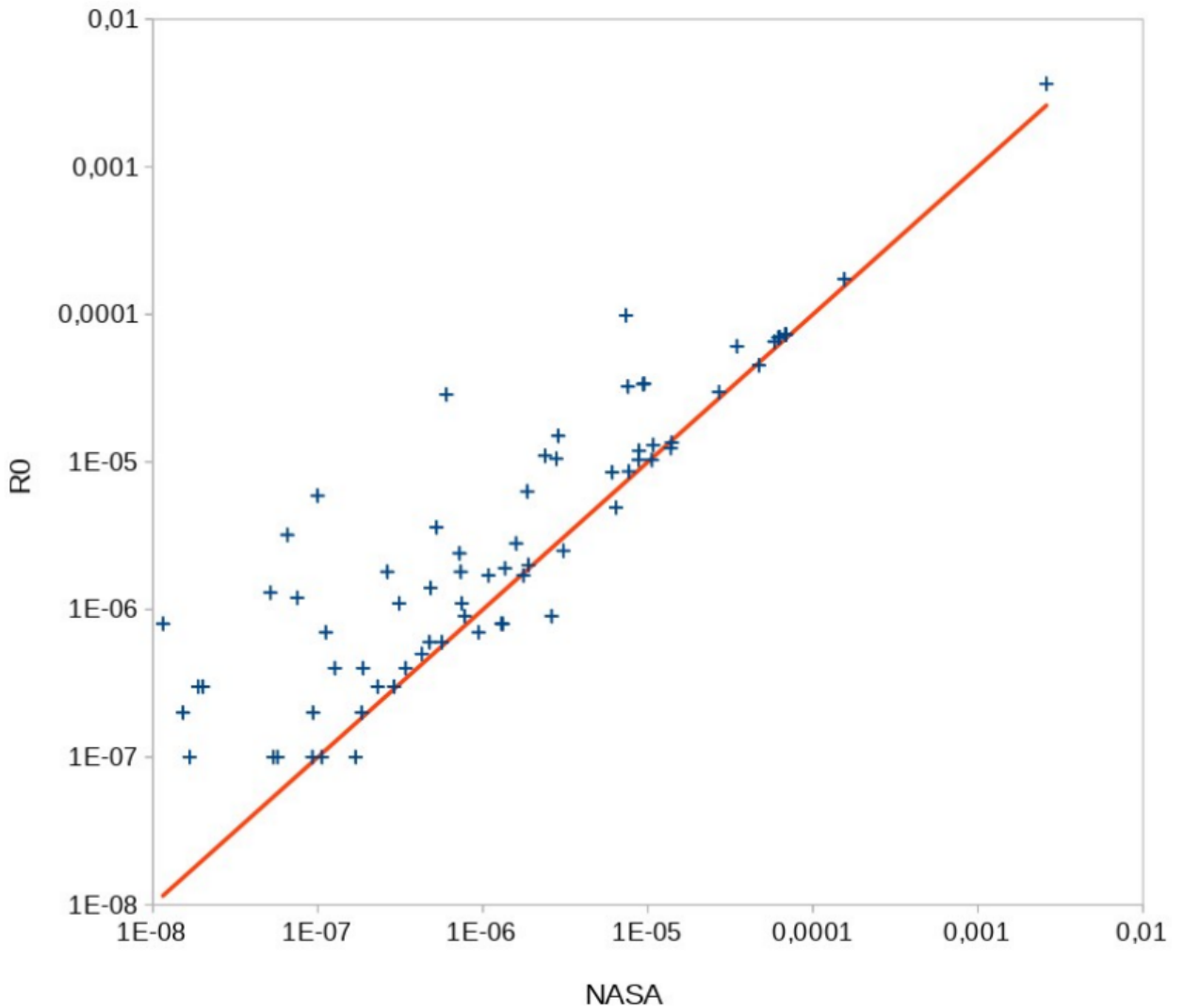


Figure 3.1: Collision probabilities obtained by the  $R^0$  program and NASA

4. The asteroid Apophis has a very precise orbit and, accordingly, a small spread of initial data. The program  $R^0$  did not find possible collisions of Apophis with the Earth, despite the significant probability according to the results of NASA. Apparently, perturbations that are not taken into account by the  $R^0$  program play a greater role in this case than the uncertainty of the orbit.
5. The above reasons for the differences in results did not explain the difference in 2 out of 200 cases. For these asteroids, an additional comparison was made with NEODyS, during which it turned out that the difference with NASA was several orders of magnitude. Presumably, it is in these cases that the instability to the calculation method is the highest.

## Results of the experiment

The probabilities of collisions of 200 asteroids with the Earth, Moon and other planets are obtained. The similarity of the result with the results of NASA suggests that the  $R^0$  program is quite suitable for assessing the danger of real asteroids. However, the result should still be treated with great caution, since the movement model is very simple. Especially for asteroids with high orbit accuracy, where the initial data spread is small and the difference in the motion model plays a more significant role. However, the vast majority of asteroids cease to be dangerous after clarifying the orbit. Apophis — this is a special case.

The ratio of the number of approaches and collisions is noteworthy. It is clear that a rendezvous is much more likely, but the presence of specific values will allow using information about the rendezvous to identify dangerous asteroids. The advantage is the smaller number of virtual asteroids needed to search for possible approaches. Yet the planets are very small on the scale of the Solar System. This gives the potential for self-determination of dangerous asteroids from the total set.

Asteroids that can collide with the Earth often have a significant probability of collision with other bodies of the Solar System. This is partly due to the fact that such asteroids have poorly defined orbits, but high uncertainty also arises as a result of close approaches.

### 3.2 Scanning the space of elements of orbits

The purpose of the experiment — to evaluate the location of asteroids dangerous to the Earth in the space of the elements of the orbits, as well as to compare the result with the definitions of an asteroid approaching the Earth and a potentially dangerous asteroid.

#### Problem statement

By definition, near-Earth asteroids, or near-Earth asteroids, include asteroids with a perihelion distance of less than 1.3 au. The restriction on the orbit of potentially dangerous asteroids is even stricter: MOID should be less than 0.05 au. It is interesting to consider how likely rendezvous and collisions with the

Earth are, depending on the elements of the orbit. Perhaps this will limit the search for dangerous asteroids.

Among the long-discussed statements about the asteroid danger is the following: a close approach is likely on the collision trajectory shortly before the collision. Usually this statement is verified by calculating the trajectories from the collision into the past. However, in the course of this experiment, it is possible to obtain collision trajectories in the opposite way.

The specific task was set as follows:

1. For fixed eccentricity, perihelion distance and inclination, generate a swarm of virtual asteroids with random remaining elements.
2. Perform the calculation of approaches and collisions.
3. Check for the presence of collisions on the collision trajectories.

## Choosing Asteroids

The boundaries of the studied space of the elements of the orbits were chosen based on the elements of the orbits of real near-Earth asteroids. Eccentricity from 0 to 0.9; perihelion distance from 0.2 to 1.4 au; inclination from 0 to  $50^\circ$ . Less than 2% of known NEAs are located outside these boundaries. The upper limit of the perihelion distance slightly goes beyond the boundaries of many near-Earth asteroids. This was done based on the results of a trial experiment that showed the possibility of near-Earth asteroids with the highest perihelion distance approaching the Earth.

Within the specified boundaries, 15 uniformly distributed values of eccentricity, 15 — perihelion distance, 25 — inclination were selected. For example, the eccentricity takes values from 0.03 to 0.87. For each combination of the selected element values,  $2 \cdot 10^5$  virtual asteroids were generated. The year 2000 was chosen as the starting point, the integration was carried out for 200 years ahead.

## Approaches before impacts

These results were obtained in a smaller-scale trial experiment, differing in the following parameters. Eccentricity from 0 to 0.8; perihelion distance from

0.3 to 1.3 au; inclination from 0 to  $15^\circ$ . Values of eccentricity — 10, perihelion distance — 10, inclinations — 5. Generated by  $10^5$  virtual asteroids. The results described here were sent to the article almost immediately [20]. Subsequently, in the main experiment, the issue of convergence before collisions was no longer raised.

Cases in the first 100 years were excluded from the collision trajectories obtained. The remaining trajectories were analyzed for the presence of approaches during the 100 years before the collision. A total of 72 collision trajectories were obtained. Of these, 20 trajectories had a 100-year approach to it up to 0.01 AU; 70 trajectories — up to 0.05 au. For 5 of the 72 trajectories, the previous approach to the Earth occurs 358-365 days before the collision. 33 collision trajectories with Venus were also obtained. 18 of them had a convergence of up to 0.01 AU; all 33 trajectories — up to 0.05 au. 327 collision trajectories were obtained with Jupiter, but only 28 of them had a convergence of up to 0.05 au. Given that the orbit of Jupiter is 5 times larger and the period is 12 times, it is clear why there are so few approaches before collisions. Too few collision trajectories have been obtained with the rest of the planets for any new conclusions.

## Results

It was not possible to detect any significant features depending on the number of approaches from the inclination, so in the future the plane of eccentricity — perihelion distance will be considered. The only thing is a decrease in the number of approaches with an increase in inclination. However, for example, the number of approaches to Mercury reaches a maximum at an inclination of  $7^\circ$ .

In the following diagrams, the area of the circle is proportional to the number of asteroids. Figure (3.2) shows the initial eccentricity and perihelion distance of asteroids that collided with the Earth. Fig. (3.3) shows the initial elements of asteroids that have approached the Earth up to 10 of its radii. In Fig. (3.4) the same thing, but for 100 Earth radii. Finally, in Fig. (3.5), a logarithmic scale is used to show the entire set of initial values of eccentricity and perihelion distance, for which approaches to the Earth up to 100 of its radii were detected.

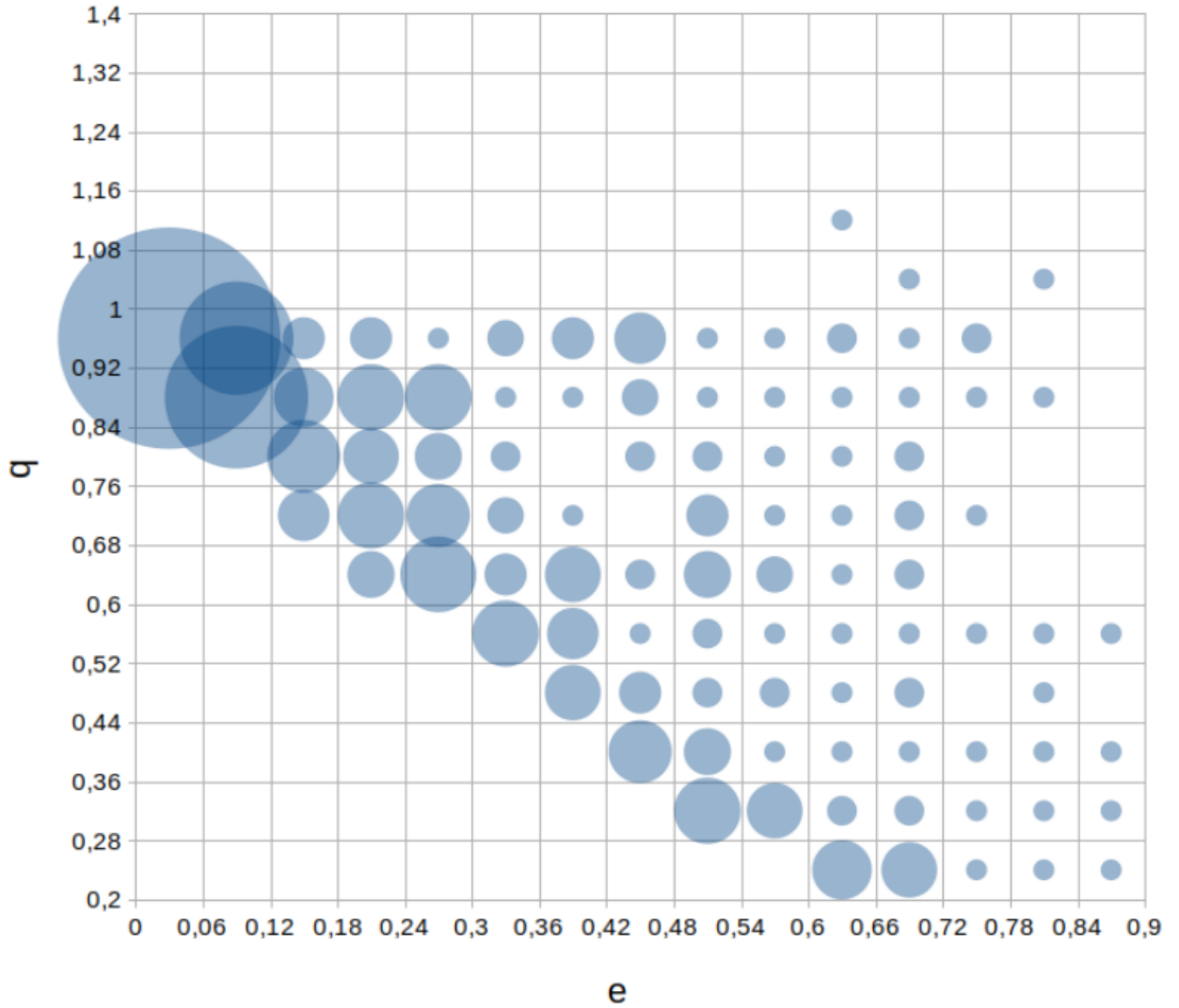


Figure 3.2: Impacts with the Earth

The vast majority of approaches to Earth come from asteroids whose initial orbit crossed the Earth's orbit, that is, the perihelion distance is less than 1 au, and the aphelion distance is more than 1 au. At the same time, many virtual asteroids whose orbit was completely inside or outside the Earth's orbit managed to change their orbit over 200 years and get closer at a distance of less than 100 radii from the Ground. These are mostly high aphelion asteroids exposed to Jupiter, but there are also a small number influenced by Venus. It is worth noting that even virtual asteroids with an initial perihelion distance of more than 1.3 au have approached the Earth, that is, beyond the set of near-Earth ones. This suggests that the danger to the Earth, even in the relatively short term, is not limited to NEAs. When approaching Jupiter, such an asteroid may well go directly into a group of potentially dangerous ones.

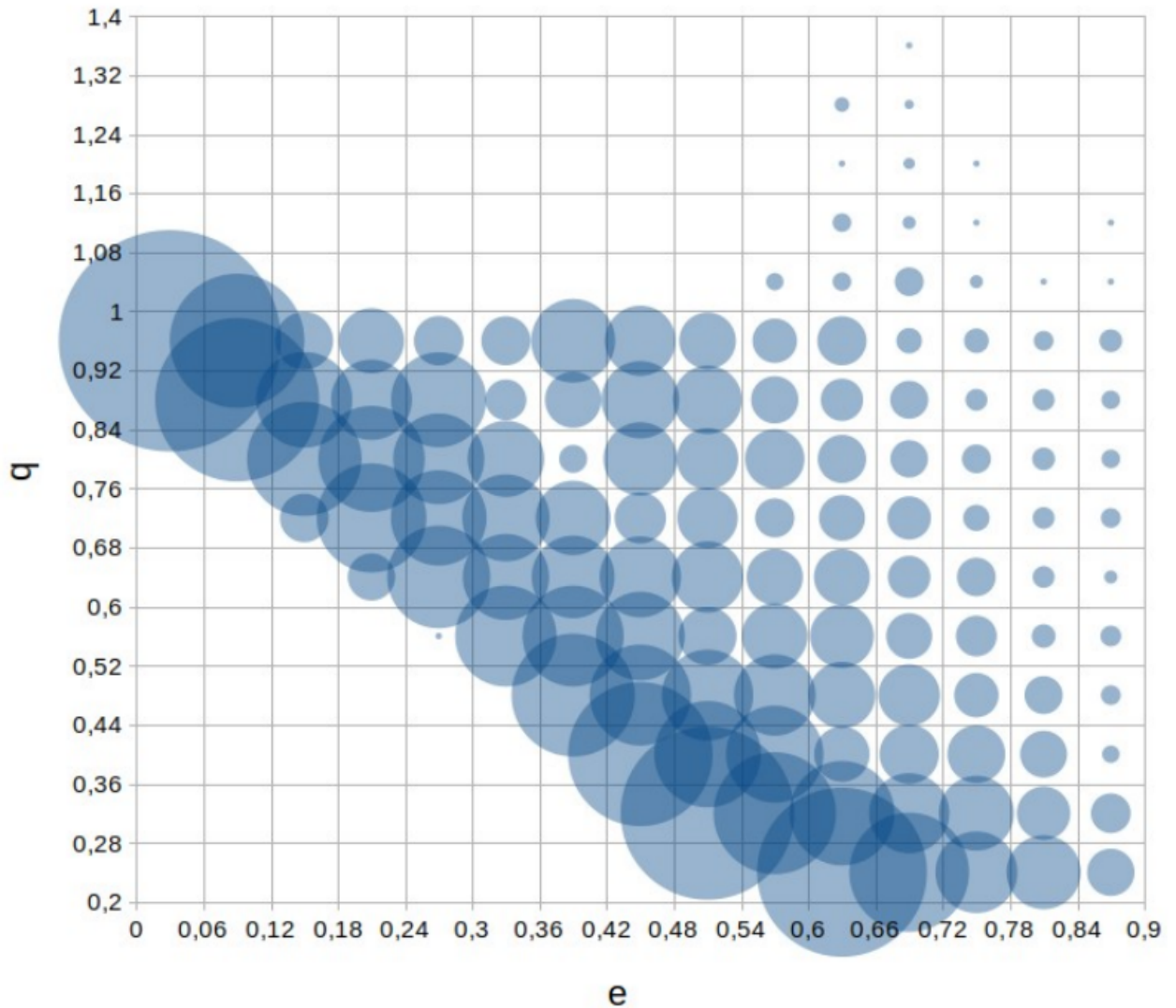


Figure 3.3: Approaches to 10 radii to the Earth

### Results of the experiment

The question of the presence of a close approach shortly before the collision is investigated. A feature of this study is the opposite approach to the obvious: instead of integrating trajectories from the collision into the past, integration into the future was performed. In addition, a result was obtained for Venus and Jupiter. For the Earth, in 97% of cases, 100 years before the collision, there was a convergence to 0.05 AU, which speaks in favor of the accepted definition of a potentially dangerous asteroid. In 7% of cases, the approach occurred in 358–365 days, that is, there was a resonant return of the asteroid with a period of 1/1.

The main result is — the probabilities of approaches and collisions depending on the elements of the orbits. The most notable are the approaches to the Earth

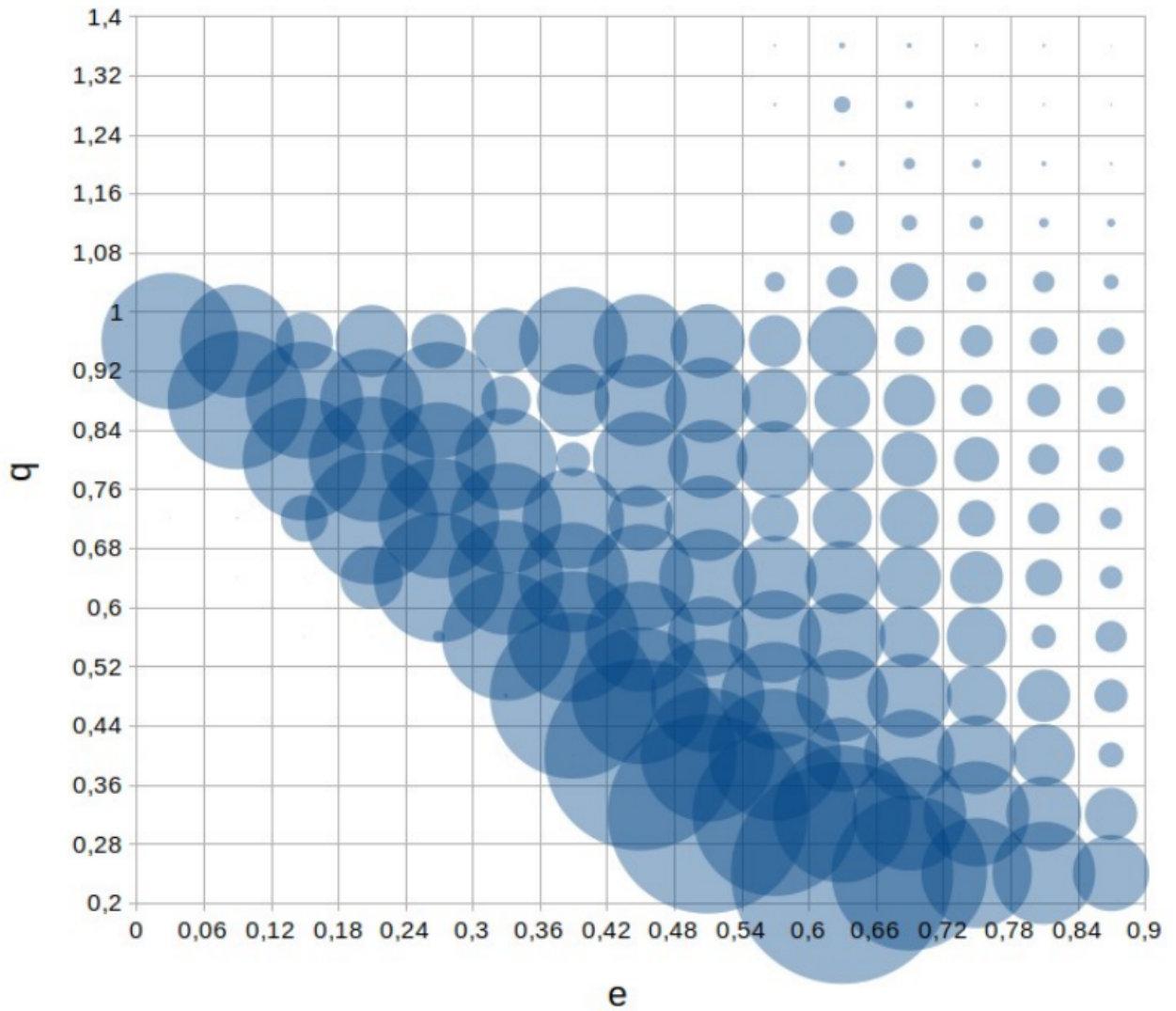


Figure 3.4: Approaches to 100 radii to the Earth

of asteroids, whose perihelion distance at the initial moment exceeded 1.3 au. Moreover, these approaches are no further than 100 Earth radii, which is quite a bit on the scale of the Solar System. Apparently, the problem of asteroid-comet danger is not limited to near-Earth asteroids. Asteroids approaching other planets can also pose a threat to the Earth.

### 3.3 The first mass calculation of collision probabilities

The purpose of the experiment — to evaluate the possibilities of independent search for dangerous asteroids using a new program.



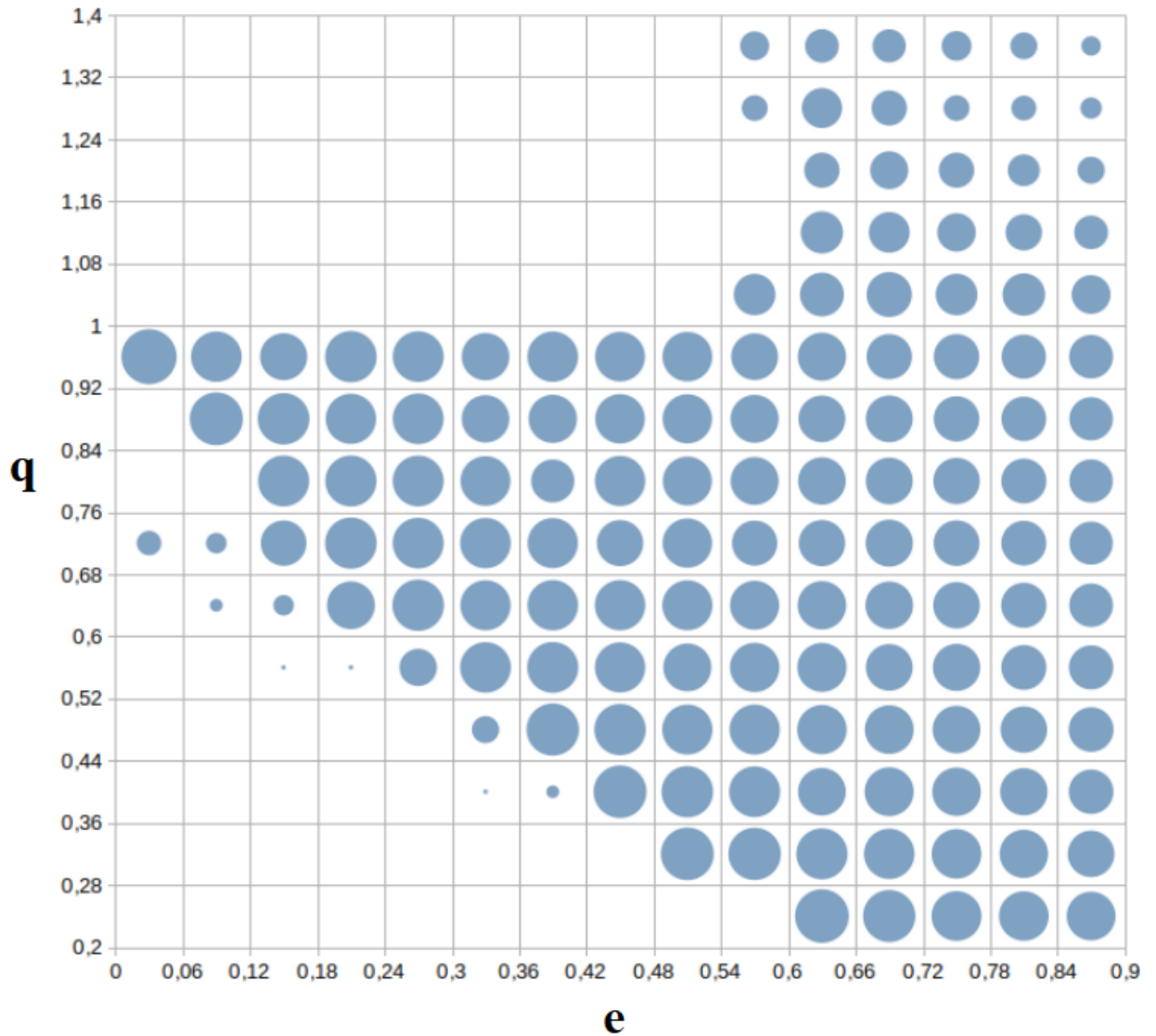


Figure 3.5: Approaches to 100 radii to the Earth in logarithmic scale

### Choosing Asteroids

Since the most likely threat comes from asteroids crossing the Earth's orbit, asteroids with a low aphelion  $Q < 0.9 \text{ au}$  and with a high perihelion  $q > 1.1 \text{ au}$  were excluded. Thus, in this experiment, only near-Earth asteroids are considered, but without a priori known probability of impact. It also makes sense to exclude small asteroids, which was done according to the criterion  $H > 26$ . The boundary roughly corresponds to the size of the body that gave birth to the Chelyabinsk superbolide. In total, 15909 asteroids were selected, more than half of the known near-Earth ones.

## Calculation process

In the first experiment, for 200 asteroids threatening the Earth, the ratio of the number of approaches per 100, 10 and 1 radius was revealed. This can be used to search for dangerous objects using the Monte Carlo method, because it is much easier to get into 100 radii around the Earth and virtual asteroids can be used less. At the same time, on the scale of the Solar System, this is still a very small value, so a random asteroid is unlikely to fly so close.

Taking into account the previously obtained results and limitations on the time of operation of the program, the calculation scheme turned out to be as follows:

1. 2000 virtual asteroids were generated for the selected 15909 asteroids. Asteroids with at least one approach of up to 1000 radii to the Earth were further selected, a total of 8463 asteroids.
2. For the 8463 asteroids selected at the previous stage, 10,000 virtual ones were generated. Asteroids with a convergence of up to 100 radii were selected.
3. 50,000 virtual asteroids were generated for the selected 661 asteroids.

## Results of the experiment

Possible collisions with one of the planets or the Moon were detected for 143 asteroids, of which only 83 asteroids — with the Earth. It is noteworthy that many asteroids approaching the Earth pose a threat to other planets. Given the results of the previous experiment, we can assume the opposite: asteroids approaching other planets pose a potential threat to the Earth. Apparently, even for the Earth, the problem of asteroid-comet safety cannot be solved if we consider only near-Earth asteroids.

### 3.4 The second mass calculation of collision probabilities

The purpose of the experiment — to search for dangerous asteroids taking into account the results of scanning the space of the elements of the orbits.

## Choosing Asteroids

Since it no longer makes sense to limit ourselves to near-Earth asteroids, the choice is made from all known asteroids of the Solar System, of which there are more than a million. The smallest asteroids are excluded according to the criterion  $H > 26$ . Asteroids of the Main Belt that do not experience approaches to planets are excluded, according to the criterion  $(q > 1.8 \text{ au}) \text{ AND } (Q < 4.0 \text{ au})$ . There are 127690 asteroids left, for which the probability calculation will be performed.

## Calculation process

The calculation is made until 2132. Similar to the previous experiment, the calculation scheme is three-stage:

1. 2000 virtual ones have been generated for the selected asteroids. Asteroids that have at least one approach of up to 1000 radii with any planet were selected, a total of 11291 asteroids.
2. For the asteroids selected at the previous stage, 20,000 virtual ones were generated. Asteroids were selected for which there was at least one approach up to 100 radii, a total of 3208 asteroids.
3. For the asteroids that passed the last selection,  $2 \cdot 10^5$  virtual were generated, the result is considered final. Note that with the total probability of an asteroid impact of  $10^{-4}$ , the chance of not getting any collision trajectory is  $2 \cdot 10^{-9}$ . With a probability of  $10^{-5}$ , the chance of a negative result is already 13.5%, but still in most cases there are collisions. With a probability of  $10^{-6}$ , the chance of a negative result reaches 81.9%, but even in this case there is a good chance of a positive result. Given the number of asteroids studied, collision trajectories may well be found with much lower probabilities, but, of course, there is no question of reliable detection of collisions.

## Results of the experiment

The results are available in spreadsheet form ([www.astro.spbu.ru/sites/default/files/stats\\_200000.xls](http://www.astro.spbu.ru/sites/default/files/stats_200000.xls)). The number of as-

teroids approaching planets up to 100, 10 and 1 of the radius of the corresponding planet per 200 thousand virtual asteroids is indicated.

Possible collisions with one of the planets or the Moon were detected for 423 asteroids, of which 163 asteroids — with the Earth. There are 377 such asteroids on the NASA website, taking into account the restrictions imposed on the absolute stellar magnitude, but this is only with the Earth. With the consistency of the results as a whole, the missing on the NASA website catches the eye (<https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/>) asteroid 2015 CT13, for which the obtained probability was in second place. A detailed examination of the result showed that, apparently, NASA did not count up to a possible collision, taking a shorter time interval. After the presentation of the results at the Planetary Defense Conference, this asteroid appeared on the site.

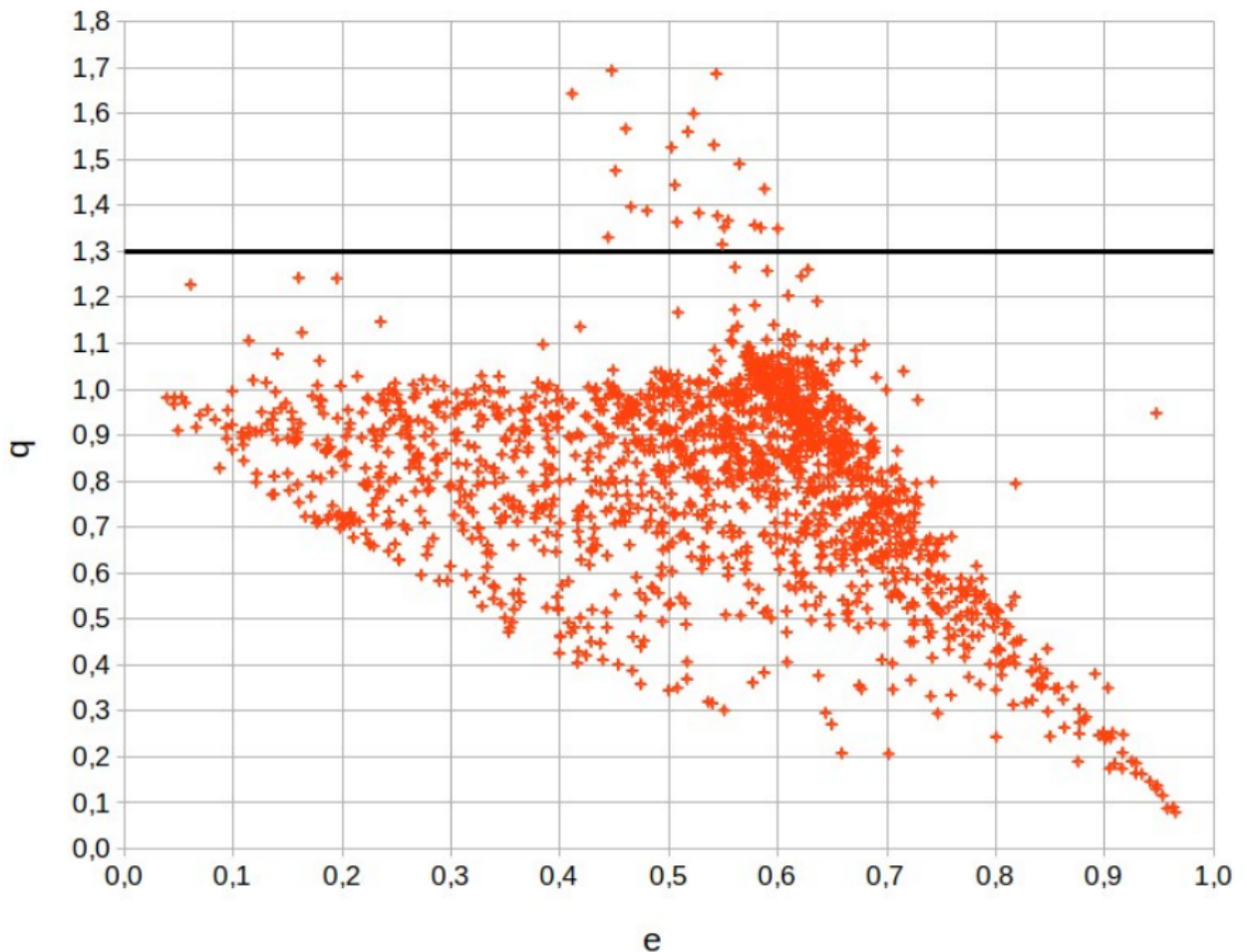


Figure 3.6: The initial position of asteroids approaching the Earth up to 100 radii on the plane of eccentricity — perihelion distance

For 24 asteroids with a perihelion distance of more than 1.3 au, the trajectories of approaching the Earth up to 100 radii up to 2132 were found (See Fig.

3.6). These asteroids have a large eccentricity and aphelion near the orbit of Jupiter. Thus, the evolution of asteroid orbits, leading to the replenishment of the NEA population, may well create a significant threat within 100 years. A detailed examination of the result revealed that the orbit change occurs almost instantly due to the approach to Jupiter. Unlike most near-Earth asteroids, these asteroids spend most of their time in the orbit of Jupiter and even in perihelion do not come close to Earth. That is, observational selection is rather not in their favor, especially given the increased attention to NEA.

# Conclusion

## Results to be defended

1. An algorithm has been created that allows calculating the movement of millions of virtual asteroids simultaneously. The software implementing it is characterized by high speed and allows you to find approaches and collisions with the planets of the Solar System and the Moon. With this software, it is possible to calculate the probability of a Monte Carlo collision for a large number of asteroids on desktop PCs in an acceptable time.
2. In the space of orbital parameters: eccentricity  $e$ , perihelion distance  $q$  and angle of inclination  $i$ , — regions containing asteroids that may pose a danger to the Earth have been identified, that is, their approach to the Earth has been detected within 100 Earth radii up to 2132.
3. As a result of the analysis of the evolution of 127 690 asteroids, 3200 were found approaching planets by less than 100 of their radii before 2132. It is noteworthy that 24 of the 1611 asteroids that have approached the Earth do not belong to the near-Earth class, that is, they have a perihelion distance of more than 1.3 au. When assessing the probability of a collision, it was found that a collision with any planet is possible for 423 asteroids, of which 163 may collide with the Earth.
4. The results of numerical simulation of the evolution of model asteroids have confirmed the hypothesis of pre-collision approaches of asteroids to the planet. Of the 50 million model asteroids, 72 collided with the Earth, of which 70 had approaches of less than 0.05 AU for 100 years before the collision.

# Bibliography

- [1] Alexandrova A.G., Galushina T.Yu., Prishchepenko A.B., Kholshchikov K.V., Chechetkin V.M. THE PREVENTIVE DESTRUCTION OF A HAZARDOUS ASTEROID // Astronomy Reports. 2016. V. 60. № 6. P. 611-619.
- [2] Artemyeva N.A., Bakanas E.S., Barabanov S.I., Vityazev A.V., Volkov V.A., Glazachev D.O., Degtyar' V.G., Emel'yanenko V.V., Ivanov B.A., Kochetova O.M., Kulikova N.V., Medvedev Yu.D., Naroyenkov S.A., Nemchinov I.V., Pechernikova G.V., Pol' V.G., Popova O.P., Rykhlova L.V., Svetsov V.V., Simonov I.V., Sokolov L.L., Timerbayev R.M., Chernetenko Yu.A., Shor V.A., Shuvalov V.V., Shustov B.M. ASTEROID-COMET HAZARD. YESTERDAY, TODAY, TOMORROW // Moscow, 2010.
- [3] Balyaev I.A.  
INVESTIGATION OF THE INITIAL DATA AREAS OF ASTEROIDS LEADING TO A COLLISION WITH THE EARTH  
In the collection: Space Physics. Proceedings of the 48th International Student Scientific Conference. Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin. 2019. P. 171.
- [4] Balyaev I.A.  
ACCELERATION OF NUMERICAL INTEGRATION OF ASTEROID MOTION EQUATIONS AND FIRST RESULTS  
In the collection: Space Physics. Proceedings of the 49th International Student Scientific Conference. Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin. 2020. P. 149-150.

- [5] Balyaev I.A.  
ACCELERATION OF NUMERICAL INTEGRATION OF THE EQUATIONS OF MOTION OF ASTEROIDS  
Solar system research. 2020. V. 54, №6, P. 557-566.
- [6] Balyaev I.A.  
MASS CALCULATION OF ASTEROID IMPACT PROBABILITIES: METHODS, PITFALLS, COMPARISON OF RESULTS  
In the collection: Astronomy and space exploration. Collection of scientific papers. Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin. 2021. P. 87-88.
- [7] Bondarenko Yu.S., Vavilov D.E., Medvedev Yu.D. METHOD OF DETERMINING THE ORBITS OF THE SMALL BODIES IN THE SOLAR SYSTEM BASED ON AN EXHAUSTIVE SEARCH OF ORBITAL PLANES // Solar System Research. 2014, V. 48, №3, P. 212-216.
- [8] Degtyar' V.G., Volkov V.A. Rocket concept of the Earth's anti-asteroid protection system. M.: Mechanical engineering, 2013.
- [9] El'kin A.V., Sokolov L.L. ABOUT SUCCESSIVE PASSES OF ASZ IN THE VICINITY OF THE EARTH // Abstracts of the All-Russian Conference with international participation «Asteroid danger-95» 1995 May 23-25, St. Petersburg: Institute of Theoretical Astronomy RAS, MIPAO. 1995, V. 2, P. 41.
- [10] Emel'yanenko N.Yu. TEMPORARY SATELLITE CAPTURE OF COMETS BY JUPITER // Solar System Research, 2012, V. 46, №3, P. 181-194.
- [11] Emel'yanenko V.V., Shustov B.M.; THE CHELYABINSK EVENT AND THE ASTEROID-COMET HAZARD // Physics-Uspekhi., 2013, V. 56, №8, P. 833-836.
- [12] Eysmont N.A., Boyarskiy M.N., Ledkov A.A., Nazirov R.R., Dankhem D., Shustov B.M. ON THE POSSIBILITY OF THE GUIDANCE OF



SMALL ASTEROIDS TO DANGEROUS CELESTIAL BODIES USING THE GRAVITY-ASSIST MANEUVER // Solar System Research. 2013. V. 47. № 4. C. 325-333.

- [13] Farnocchia D., Chesley S.R., Chodas P.W., Micheli M., Tholen D.J., Milani A., Elliott G.T., Bernardi F. Yarkovsky-driven impact risk analysis for asteroid (99942) Apophis. *Icarus*. 2013. V. 224. I. 1. P. 192-200.
- [14] Folkner W.M. et al. The Planetary and Lunar Ephemeris DE430 and DE431 // JPL Interplanet. Network Progress Report, 2014. V. 42-196. P. 1-81.
- [15] Galushina T.Yu., Razdymakhina O.N. On the predictability of the motion of asteroids passing through the sphere of gravity of the Earth // *Bulletin of the Siberian State Aerospace University* 2011. Release 6(39). P. 9-14.
- [16] Ivashkin V.V., Stikhno K.A. On the problem of correcting the orbit of the asteroid (99942) Apophis approaching the Earth // *Reports of the Academy of Sciences. Mechanics*. 2008. V. 419. № 5. P. 624-647.
- [17] Ivashkin V.V., Stikhno K.A. On the prevention of a possible collision of the asteroid Apophis with the Earth // *Astronomical Bulletin*. 2009. V. 43. № 6. P. 502-516 (*Sol. Syst. Res.* 2009. V. 43. № 6. P. 483-496).
- [18] Kholshevnikov K.V. THE PROBABILITY OF A COLLISION WITH AN OBJECT MOVING IN AN ORBIT OF COLLISION WITH THE EARTH // *Proceedings of the All-Union conference «Asteroid danger» 1991 October 10-11, St. Petersburg*. Edited by Sokolskiy A.G. Institute of Theoretical Astronomy RAS, 1992.
- [19] Kholshevnikov K. V., Shor V. A. Velocity distribution of meteoroids in the vicinity of planets and satellites. *Earth, Moon, and Planets* 72, 419-423 (1996).
- [20] Kholshevnikov K.S., Balyaev I.A., Sokolov L.L., Eskin B.B. RETROSPECTIVE ANALYSIS OF THE ORBITS OF ASTEROIDS COLLIDING WITH EARTH

Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics. 2021. V. 54, №3, P. 282-288.

- [21] Kosmodamianskii G.A. NUMERICAL THEORY OF THE MOTION OF JUPITER'S GALILEAN SATELLITES // Solar System Research, 2009, V. 43, №6, P. 465-474.
- [22] Loucks M. E., Carrico J. P., Lu E. T., Chapman C. R. Asteroid Deflection Requirements as a Function of Warning Time. "Asteroids, Comets, Meteors 2017", April 2017, Montevideo, Uruguay (2017).
- [23] Makoto Matsumoto, Takuji Nishimura MERSENNE TWISTER: A 623-DIMENSIONALLY EQUIDISTRIBUTED UNIFORM PSEUDO-RANDOM NUMBER GENERATOR // ACM Trans. Model. Comput. Simul., 1998, V. 8, №1, P. 3-30.
- [24] Novikov E.A., Isayeva S.I. NUMERICAL COMPARISON OF THE MERSON AND EVERHART METHODS ON THE TWO-BODY PROBLEM // Management systems and information technologies, 2011, №1 (43), P. 25-29.
- [25] Perevorochayeva E.A., Galushina T.Yu. INVESTIGATION OF THE EFFECTIVENESS OF USING VARIOUS PARAMETERS OF THE EVERHART METHOD ON THE EXAMPLE OF A PERTURBED TWO-BODY PROBLEM // Actual problems of modern continuum mechanics and celestial mechanics — 2017, 2018, P. 210-213.
- [26] Petrov N.A., Balyaev I.A., Vasilyev A.A., Sokolov L.L. POSSIBLE APPROACHES AND COLLISIONS WITH THE EARTH OF DANGEROUS ASTEROIDS  
In the collection: NEWS OF THE MAIN ASTRONOMICAL OBSERVATORY IN PULKOVO. Proceedings of the All-Russian Astrometric Conference. 2018. P. 201-206.
- [27] Petrov N.A., Vasilyev A.A., Kuteeva G.A., Sokolov L.L. ON THE TRAJECTORIES OF ASTEROID ENCOUNTERS WITH THE EARTH FOR 2015 RN35 AND APOPHIS // Sol. Syst. Res. 2018. V. 52. № 4. P. 326-337.

- [28] Schulte Peter , Alegret Laia , Arenillas Ignacio , Arz José A. , Barton Penny J. , Bown Paul R. , Bralower Timothy J. , Christeson Gail L. , Claeys Philippe , Cockell Charles S. , Collins Gareth S. , Deutsch Alexander , Goldin Tamara J. , Goto Kazuhisa , Grajales-Nishimura José M. , Grieve Richard A. F. , Gulick Sean P. S. , Johnson Kirk R. , Kiessling Wolfgang , Koeberl Christian , Kring David A. , MacLeod Kenneth G. , Matsui Takafumi , Melosh Jay , Montanari Alessandro , Morgan Joanna V. , Neal Clive R. , Nichols Douglas J. , Norris Richard D. , Pierazzo Elisabetta , Ravizza Greg , Rebolledo-Vieyra Mario , Reimold Wolf Uwe , Robin Eric , Salge Tobias , Speijer Robert P. , Sweet Arthur R. , Urrutia-Fucugauchi Jaime , Vajda Vivi , Whalen Michael T. , Willumsen Pi S.; THE CHICXULUB ASTEROID IMPACT AND MASS EXTINCTION AT THE CRETACEOUS-PALEOGENE BOUNDARY // Science, Volume 327, Issue 5970, pp. 1214- (2010).
- [29] Shustov B.M., Rykhlova L.V., Kuleshov Yu.P., Dubov Yu.N., Elkin K.S., Veniaminova S.S. et al. A CONCEPT OF A SPACE HAZARD COUNTERACTION SYSTEM: ASTRONOMICAL ASPECTS. Solar System Research, 2013, V. 47, № 4, P. 302-314.
- [30] Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B. THE EFFECT OF THE GRAVITATIONAL MANEUVER WHEN ASTEROIDS APPROACH THE EARTH  
In the book: XLIV Academic readings on Cosmonautics dedicated to the memory of Academician P.P. Korolev and other outstanding Russian scientists — pioneers of space exploration. Collection of abstracts: in 2 V.. Moscow, 2020. P. 282-284.
- [31] Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B. THE APPROACHES AND COLLISIONS OF ASTEROIDS WITH THE MOON AND PLANETS  
In the collection: IX Polyakhov Readings, proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics. St. Petersburg State University. Saint-Petersburg, 2021. P. 169-171.
- [32] Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B. ESTIMATION OF THE PROBABILITY OF ASTEROID COLLI-

SIONS AND APPROACHES WITH THE MOON AND PLANETS OF THE SOLAR SYSTEM

In the book: XLV Academic readings on Cosmonautics dedicated to the memory of Academician P.P. Korolev and other outstanding Russian scientists — pioneers of space exploration. Collection of abstracts: in 4 V.. Moscow, 2021. P. 404-408.

- [33] Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B. POSSIBLE COLLISIONS AND APPROACHES OF SOME DANGEROUS ASTEROIDS WITH THE EARTH  
Solar system research. 2020. V. 54, №6, P. 541-549.
- [34] Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kholoshevnikov K.S., Eskin B.B. ON THE APPROACHES AND COLLISIONS OF ASTEROIDS WITH PLANETS  
Proceedings of the National Academy of Sciences of Tajikistan. Department of Physical and Mathematical, Chemical, Geological and Technical Sciences. 2021. №2 (183), P. 27-36.
- [35] Sokolov L.L., Bashakov A.A., Pit'yev N.P. PECULIARITIES OF THE MOTION OF ASTEROID 99942 APOPHIS // Solar system research. 2008, V. 42, №1, P. 18-27.
- [36] Sokolov L.L., Bashakov A.A., Pit'yev N.P. RESONANCE ORBITS OF NEAR-EARTH ASTEROIDS // Solar system research. 2009. V. 43. № 4. P. 319-323.
- [37] Sokolov L.L., Bashakov A.A., Borisova T.P., Petrov N.A., Pit'yev N.P., Shaidulin V.S. Trajectories of the Apophis asteroid impact with the Earth in the XXI century // Astronomical Bulletin. 2012. V. 46. № 4. P. 311-320. (Solar System Research 2012. V. 46. № 4. P. 291-300).
- [38] Sokolov L.L., Borisova T.P., Vasilyev A.A., Petrov N.A. Properties of asteroid impact trajectories with the Earth // Astronomical Bulletin. 2013. V. 47. № 5. P. 441-447. (Solar System Research. 2013. V. 47. № 5. P. 408-413).

- [39] Sokolov L.L., Kuteeva G.A. Possible collisions of the asteroid Apophis after clarifying its orbit // Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics. 2015. V. 2. № 1. P. 148-156.
- [40] Sokolov L.L., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B., Balyaev I.A., Vasilyev A.A.  
ON THE CHARACTERISTICS OF SINGULAR TRAJECTORIES OF THE ASTEROID APOPHIS AND THE POSSIBILITY OF DEFLECTING IT TO AVOID COLLISIONS WITH THE EARTH  
Solar system research. 2021. V. 55, №3, P. 259-265.
- [41] Sokolov L.L., Vasilyev A.A., Petrov N.A., Pol' V.G., Eskin B.B. On the possibility of preventing collisions taking into account the resonant returns of asteroids // Ecological Bulletin of the Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation. 2017. V. 14. № 4-2. P. 135-139.
- [42] Sokolov L.L., Petrov N.A., Vasilyev A.A., Kuteeva G.A., Shmyrov A.S., Eskin B.B. ON THE POSSIBILITY OF DEFLECTING AN ASTEROID FROM COLLISION WITH THE EARTH USING THE KINETIC METHOD // Solar System Research. 2018. V. 52. № 4. P. 338-346.
- [43] Sokolov L.L., Petrov N.A., Eskin B.B., Kuteeva G.A. Rendezvous with the Earth of dangerous asteroids // Engineering Journal: Science and Innovation. 2019. № 6(90).
- [44] Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B.  
POSSIBLE COLLISIONS AND APPROACHES OF SOME DANGEROUS ASTEROIDS WITH THE EARTH  
Solar System Research. 2020. V. 54, №6, P. 541-549.
- [45] Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B.  
APPROACHES AND COLLISIONS OF ASTEROIDS WITH THE MOON AND PLANETS  
In the collection: Journal of Physics: Conference Series. Ser. «International Scientific Conference on Mechanics «The Ninth Polyahov's Reading», ISCM 2021» 2021. P. 012047.

- [46] Sokolov L.L., Balyaev I.A., Kuteeva G.A., Petrov N.A., Eskin B.B. THE EFFECT OF GRAVITATIONAL MANEUVER AT THE APPROACH OF AN ASTEROID TO THE EARTH  
In the collection: AIP Conference Proceedings. 44. Ser. «XLIV Academic Space Conference: Dedicated to the Memory of Academician S.P. Korolev and Other Outstanding Russian Scientists — Pioneers of Space Exploration» 2021. P. 050006.
- [47] Sokolov L., Kuteeva G., Petrov N., Eskin B. Hazardous near-Earth asteroids approach. AIP Conference Proceedings 2171, 13019 (2019).
- [48] Vavilov D.E., Medvedev Yu.D. DETERMINATION OF THE ORBITS OF ASTEROIDS APPROACHING THE EARTH, TAKING INTO ACCOUNT THE A PRIORI ACCURACY OF THEIR OBSERVATIONS // Proceedings of the Institute of Applied Astronomy of the Russian Academy of Sciences. 2013, №27, P. 126-131.
- [49] Vavilov D.E., Medvedev Y.D. A FAST METHOD FOR ESTIMATION OF THE IMPACT PROBABILITY OF NEAR-EARTH OBJECTS // Monthly Notices of the Royal Astronomical society. 2014, V. 446, №1, P. 705-709.
- [50] Wie B., Zimmerman B., Lyzhoft J., Vardaxis G. Planetary defense mission concepts for disrupting/pulverizing hazardous asteroids with short warning time. *Astrodynamics*, 2017, vol. 1, no. 1, pp. 3-21.

# Appendix 1: impact probabilities for 200 asteroids

## Explanations to the table

The table shows the Monte Carlo collision probabilities for 200 asteroids. The calculation was made at the end of 2019. Asteroid trajectories were calculated until 2132, that is, a little more than 100 years. In the case of NASA, the final calculation date varies from asteroid to asteroid, but they usually count 100 years ahead. It is reasonable to expect that the  $R^0$  probabilities obtained by the program will be slightly higher due to the slightly increased study interval, but in general they should correlate well.

The probabilities obtained by NASA (for Earth) are given in the second column. The remaining columns show the number of hits to a certain planet or Moon per 10 million virtual asteroids obtained using the  $R^0$  program, that is, to estimate the probability, it is necessary to divide by  $10^7$ . This format is used because it makes it easy to separate unreliable results with a small number of hits. The NASA results are given as is.

Asteroid	Earth (NASA)	Earth	Moon	Venus	Mercury	Mars	Jupiter
2000 SG344	2,60E-03	36034	110	0	0	0	0
2019 WG2	1,65E-04	1793	0	0	0	0	0
2000 SB45	1,55E-04	1676	8	0	0	0	0
2019 QS8	4,98E-06	1158	7	8	0	1	80
2017 VJ	1,86E-06	846	0	0	0	0	0
2010 DG77	7,38E-06	828	8	35	0	0	27
2014 JU15	5,63E-05	808	15	0	0	0	0
2010 GM23	6,31E-05	730	2	0	0	0	0
2005 QK76	6,81E-05	703	0	0	0	0	0
2007 DX40	6,18E-05	688	10	43	0	0	0
1994 GK	6,91E-05	662	1	0	0	0	0
2008 CC71	5,85E-05	653	8	0	0	0	0

2008 UB7	3,47E-05	571	25	0	0	0	0
2008 EX5	4,72E-05	502	91	0	0	0	0
2006 BC8	9,50E-06	350	5	0	0	0	0
2017 YM1	2,76E-05	342	28	0	0	0	0
2009 FJ	9,39E-06	327	1	0	0	0	0
2011 UM169	3,32E-05	311	1	0	0	0	0
2008 VS4	5,83E-07	295	3	8	0	0	319
2008 ST7	2,70E-05	276	19	0	0	0	0
2008 YO2	7,58E-06	269	10	0	0	0	0
2019 BE5	1,23E-05	250	25	2	4	0	0
2014 GN1	2,07E-05	212	0	0	0	0	0
2016 CY135	1,37E-06	208	9	0	0	0	0
2019 YV1	8,32E-06	195	1	0	0	0	0
2019 DP	5,95E-06	189	7	0	0	0	0
2009 HC	2,87E-06	174	0	0	0	0	0
2007 KE4	1,40E-05	158	0	0	0	0	0
2019 XS	5,16E-06	157	6	0	0	0	0
2006 HF6	1,08E-05	138	5	0	0	0	0
2009 FZ4	2,38E-06	136	1	10	0	2	14
2019 WU2	1,09E-05	133	3	0	0	0	0
2002 VU17	1,38E-05	133	13	0	0	0	0
2009 TH8	8,85E-06	121	0	0	0	0	0
2010 QG2	1,06E-05	114	8	0	0	0	0
443104	1,43E-06	107	0	0	0	0	0
2012 PB20	2,83E-06	106	10	0	0	0	0
2007 EV	8,79E-06	100	0	0	0	0	0
2002 MN	2,79E-06	98	8	0	0	0	0
2017 AE21	4,64E-06	98	0	77	0	0	0
2002 RB182	6,09E-06	92	0	0	0	0	2
2007 WP3	7,69E-06	88	0	0	0	0	0
2000 WJ107	2,89E-06	87	0	0	0	0	0
2016 WG	5,80E-06	80	8	0	0	0	0
2012 QD8	6,49E-06	79	1	70	0	0	0
2019 YX1	8,69E-06	76	1	0	0	0	0
2004 ME6	9,98E-08	74	1	0	0	0	522
2018 NF15	2,82E-08	74	0	4	0	21	8
2010 MZ112	4,68E-06	63	2	8	1	0	0
2006 SC	6,42E-06	62	0	0	0	0	0
2010 UB	3,65E-06	61	0	0	0	0	0
2015 HQ182	1,55E-07	61	2	15	0	1	0



2019 FE	4,90E-06	58	0	0	0	0	0
2007 KO4	4,30E-06	55	4	0	0	0	0
2004 VZ14	1,86E-06	52	2	0	0	0	0
2019 LU1	4,65E-06	52	5	0	0	0	0
2018 JN	1,65E-06	50	0	0	0	0	0
2019 RT3	2,01E-06	48	4	0	0	0	0
2019 ND7	3,18E-06	46	1	0	0	0	0
2017 UQ7	4,02E-08	40	2	0	0	0	0
2008 PK9	5,24E-07	40	3	0	0	0	0
2016 GU2	1,23E-08	39	0	0	0	0	0
2014 JV79	2,86E-07	37	0	0	0	0	0
2004 GE2	6,54E-08	33	0	0	0	101	0
2011 AK37	2,77E-06	32	6	0	0	0	0
2012 TV	3,06E-06	31	4	0	0	0	0
2010 UC7	5,11E-07	31	2	0	0	0	0
2019 UH9	2,95E-06	30	5	0	0	0	0
2002 EM7	6,06E-08	29	0	0	0	0	0
2006 DN	3,61E-07	28	1	0	0	0	0
2011 VG9	7,66E-07	28	0	0	0	0	0
2018 LM	1,15E-06	28	0	40	0	0	0
2019 QS	2,25E-07	26	1	1	0	0	0
2006 HX57	3,08E-06	24	0	0	0	0	0
2005 WG57	7,23E-07	24	0	0	0	0	0
2009 CZ1	7,46E-07	23	1	7	0	0	0
2006 QN111	1,89E-06	23	0	0	0	0	0
1997 TC25	2,64E-07	22	0	0	0	0	0
2007 FT3	1,36E-06	22	4	0	0	0	0
2017 QC36	4,84E-07	22	1	14	0	0	0
2007 XZ9	1,08E-06	21	0	0	0	0	0
2018 FE4	1,51E-06	20	3	0	0	0	0
2007 CS5	3,11E-07	20	0	0	0	0	0
2018 GG	1,91E-06	20	0	0	0	0	0
2005 CC37	1,30E-06	18	0	0	0	0	0
2006 JE	1,76E-06	18	0	0	0	0	0
2015 MN11	5,08E-07	15	0	0	0	0	0
2017 PY26	1,24E-06	15	11	0	0	0	0
2008 FF5	4,82E-07	15	0	0	0	0	0
1979 XB	7,36E-07	15	0	0	0	0	0
2015 ME131	3,20E-08	15	0	9	0	0	0
2011 BF40	1,15E-06	14	0	0	0	0	0

2017 NT5	5,77E-07	13	0	0	0	0	0
2016 AB166	3,10E-07	13	0	0	0	0	0
2011 BH40	1,42E-07	13	0	27	0	0	44
2013 BR15	1,64E-07	12	1	0	0	0	0
2011 XC2	6,68E-07	12	0	0	0	0	0
2012 ES10	1,64E-06	12	3	0	0	0	0
1999 RZ31	1,59E-06	12	0	0	0	0	0
2002 XV90	4,76E-07	11	0	0	0	0	0
2007 EH26	1,16E-08	11	0	0	0	0	0
2018 PA25	2,58E-08	11	0	13	0	0	0
2016 WN55	1,17E-07	11	1	39	0	1	0
1996 TC1	1,32E-06	10	0	0	0	0	0
2008 KO	7,78E-07	10	0	0	0	0	0
2016 NL56	7,18E-07	10	0	5	0	1	1
2004 FY3	7,51E-08	9	0	0	0	0	0
2005 NX55	4,32E-08	9	0	0	0	0	0
2017 UC52	4,01E-07	9	0	1	0	0	0
2011 CW46	5,00E-07	8	1	0	0	0	0
2016 JT38	1,81E-07	8	0	0	0	0	0
2010 XB73	2,78E-07	8	0	1	0	1	371
2010 XQ	2,06E-07	8	0	0	0	0	260
2014 FX32	1,12E-06	7	0	0	0	0	0
2017 KB3	3,67E-08	7	0	0	0	0	0
2019 YA2	1,77E-07	7	1	0	0	0	0
2005 TM173	9,40E-07	7	0	0	0	0	271
2018 EL4	7,60E-08	6	0	0	0	0	0
2006 UC64	8,67E-08	5	0	0	0	0	0
2018 BP6	7,32E-08	5	0	0	0	0	0
2017 UL7	3,47E-07	5	0	0	0	0	0
2005 ED224	2,61E-06	5	0	0	0	0	0
2001 HJ31	1,88E-07	5	1	0	0	0	0
2017 FB1	2,93E-07	5	0	2	0	0	0
2011 SE191	1,55E-08	5	0	0	0	0	0
2017 UE52	2,64E-08	5	0	2	0	3	443
2017 RZ17	2,48E-08	5	0	49	1	0	9
2017 MZ8	3,66E-08	5	0	0	0	4	122
2005 UL6	1,12E-07	4	7	0	0	0	0
2008 OO1	2,31E-07	4	189	0	0	0	0
2014 MO68	6,26E-07	4	0	0	0	0	0
2011 BT59	1,36E-07	4	0	0	3	2	32

2014 ML67	4,31E-07	4	1	2	0	0	510
1998 DK36	5,64E-07	4	0	136	6	0	0
2010 MY112	1,13E-08	4	0	4	3	0	0
2018 YH2	3,31E-07	4	0	0	0	0	0
2014 UX34	1,22E-08	3	0	0	0	0	0
2018 YW2	2,18E-07	3	0	0	0	0	0
2008 DA4	3,41E-07	3	0	0	0	0	0
2007 PR25	1,88E-08	3	0	0	0	0	0
2006 CM10	1,85E-07	3	0	0	0	0	0
2008 UY91	6,04E-08	3	0	5	0	0	0
2003 UQ25	9,38E-08	3	0	0	0	1	0
2014 CH13	1,34E-07	3	0	0	0	0	0
2016 PR66	1,17E-08	3	1	0	0	0	49
2014 HN197	6,48E-08	3	0	1	0	0	633
2016 JB29	1,70E-07	2	0	0	0	0	0
2016 BQ15	4,07E-08	2	0	0	0	0	0
2001 SB170	2,93E-08	2	0	0	0	0	0
2013 WM	4,27E-07	2	0	0	0	0	0
1997 UA11	2,91E-07	2	0	0	0	0	12
2016 AU193	9,36E-08	2	1	0	0	0	0
2011 QF48	3,09E-07	2	0	0	0	1	0
2017 OO1	3,50E-08	2	0	0	0	0	0
2019 DF2	1,34E-08	2	0	5	0	0	10
2018 LT5	1,27E-07	1	1	0	0	0	0
2009 BR5	1,70E-07	1	0	0	0	0	0
2009 MU	1,59E-08	1	1	0	0	0	0
2009 WQ25	9,29E-08	1	1	7	0	0	0
2010 CR5	7,54E-08	1	0	0	0	0	0
2001 SD286	5,74E-08	1	0	0	0	0	0
2015 FA345	1,65E-07	1	0	0	0	0	652
2010 JA43	8,11E-08	1	2	2	0	0	0
2010 LJ68	1,67E-08	1	1	0	0	0	0
2006 CD	2,02E-08	1	0	1	0	0	37
2004 FM4	1,46E-08	1	0	0	0	0	0
2018 LF16	3,32E-08	1	0	0	0	0	3
2005 GQ33	2,78E-08	1	0	1	0	13	38
2017 DC120	5,24E-08	1	0	0	0	1	7
2010 HV20	1,31E-07	1	0	1	0	0	0
2016 PA79	1,06E-08	0	0	0	0	5	256
2009 WZ53	1,15E-08	0	0	0	0	0	0

2017 DB120	1,16E-08	0	0	0	0	0	12
2016 UB26	1,17E-08	0	0	0	0	0	0
2001 CA21	1,25E-08	0	0	155	0	3	1
410777	1,50E-08	0	0	0	0	0	0
2016 RP41	1,71E-08	0	0	0	0	1	0
2015 RD36	2,04E-08	0	0	0	0	0	0
2017 SH33	2,31E-08	0	0	0	0	0	0
2014 HE199	2,37E-08	0	0	0	0	0	0
2018 HJ2	2,43E-08	0	0	0	0	0	0
2014 MR26	2,53E-08	0	0	49	1	0	0
2007 VH189	2,82E-08	0	0	1	0	8	0
2019 XQ2	3,24E-08	0	0	0	0	0	0
2015 HV182	3,49E-08	0	0	0	0	0	0
2008 KN11	3,60E-08	0	0	0	0	0	0
2014 XM7	3,78E-08	0	2	0	0	0	0
2001 UD5	4,09E-08	0	0	0	0	0	0
2006 QK33	5,71E-08	0	0	0	0	0	0
2006 WM3	5,83E-08	0	0	0	0	0	0
2010 JH80	6,34E-08	0	0	0	0	0	0
2007 SN6	1,06E-07	0	0	0	0	0	0
2013 NH6	1,06E-07	0	0	0	0	0	0
2005 EL70	1,27E-07	0	0	10	0	0	0
2011 AZ36	4,11E-07	0	0	0	0	1	0
2011 DV10	1,17E-06	0	0	0	0	0	0
99942	8,85E-06	0	0	0	0	0	0
2016 HF3	4,69E-05	0	0	0	0	0	0
29075	1,20E-04	0	0	0	0	0	0
101955	3,68E-04	0	0	0	0	0	0

# Appendix 2: program code $R^0$

## Code Comment

The program code  $R^0$  is provided solely for reference. Don't try to run it. For the program to work, among other things, an ephemeris file in a special compressed format is required. The program is designed in the form of a monolithic function and does not provide for arbitrary changes. However, the possibility for modification of the program is left.

1. You can change the value of the criterion for reducing the integration step and the degree of the collocation polynomial, which will allow you to control the accuracy of the solution. When changing the degree of the collocation polynomial, the coefficients of the method require calculation by a separate program with arbitrary accuracy.
2. You can change the criterion of convergence, separately for each planet and Moon. A large upper distance limit usually leads to an excessive increase in the size of the output files, so 100 radii of the body itself is used by default.
3. You can change the right-hand sides of the equations of motion to account for additional forces. As a rule, taking into account any disturbances significantly increases the operating time.

## Program code

```
#include <stdio.h>
#include <cmath>

const unsigned int _NP = 10;
const unsigned int _SP[_NP] = { 0, 168, 228, 306, 339, 363, 384,
    402, 420, 732 };
const unsigned int _SPT = 798;
const unsigned int _NC[_NP] = { 14, 10, 13, 11, 8, 7, 6,
    6, 13, 11 };
const unsigned int _NB[_NP] = { 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1,
    1, 8, 2 };
```

```

const double _JD0 = 2287184.5;
const double _JDN = 2688976.5;
const double _JDh = 32.0;
const unsigned int _JDl = 32;
const unsigned int _ND = _SPT * (int)((_JDN - _JD0) / _JDh);

const double _AU = 1.495978707000000000E+08;

const double _EMRAT = 0.8130056907419062E+02;
const double _GM1 = 0.4912480450364760E-10;
const double _GM2 = 0.7243452332644120E-09;
const double _GMB = 0.8997011390199871E-09;
const double _GM4 = 0.9549548695550771E-10;
const double _GM5 = 0.2825345840833870E-06;
const double _GM6 = 0.8459706073245031E-07;
const double _GM7 = 0.1292024825782960E-07;
const double _GM8 = 0.1524357347885110E-07;
const double _GMS = 0.2959122082855911E-03;
const double _GM[_NP] =
{
    _GM1,
    _GM2,
    _GMB * (_EMRAT / (_EMRAT + 1.0)),
    _GM4,
    _GM5,
    _GM6,
    _GM7,
    _GM8,
    _GMB / (_EMRAT + 1.0),
    _GMS
};

const double _Rmin[_NP] =
{
    0.016, // Mercury
    0.041, // Venus
    0.043, // Earth
    0.023, // Mars
    0.466, // Jupiter
    0.388, // Saturn
    0.169, // Uranus

```

```

    0.164, // Neptune
    0.0115, // Moon
    0.04642 // Sun
};

const double _Radius[_NP] =
{
    0.000016, // Mercury
    0.000041, // Venus
    0.000043, // Earth
    0.000023, // Mars
    0.000466, // Jupiter
    0.000388, // Saturn
    0.000169, // Uranus
    0.000164, // Neptune
    0.0000115, // Moon
    0.004642 // Sun
};

//const char _name[_NP][10] =
//{
//    "Mercury",
//    "Venus",
//    "Earth",
//    "Mars",
//    "Jupiter",
//    "Saturn",
//    "Uranus",
//    "Neptune",
//    "Moon",
//    "Sun"
//};

//const double phi = (1.0 + sqrt(5.0)) / 2;

const double _h0 = 4.0;
//const unsigned int _ih0 = 4;

const unsigned int _k = 5;

int main()
{

```

```

// Declaring variables
unsigned int i, j, k, l, m; // For cycles
unsigned int n; // Number of points
int istart, istep; // Start and step of point counting
unsigned int n6, k3, nk3; // Products of n and _k
double JD_start, JD_end; // Start and end date
double JD; // Current date
double c[(_k + 1)][(_k + 1)];
double d[(_k + 1)][(_k + 1)]; // Matrices of basic
transformations
double e[(_k + 1)][(_k + 1)];
FILE *input; // Input data
FILE *jpleph; // Ephemeris file
FILE *roots; // Integration nodes
FILE *aprch; // Derivation of approximations
// FILE *iterations; // Output of the number of iterations (for
optimization)
// FILE *s6; // Output of finite coordinates and velocities
FILE *impacts; // List of hit points
FILE *impacts_0; // List of initial data of fallen points
FILE *clapp; // Particularly close approaches
double *XV0; // Array of starting points
double *epharr; // Ephemeris Array
double *tau; // Integration nodes
double *XV1; // Array of current coordinates and velocities
double *alpha2; // Finite differences at the current step
double *alpha2_; // Initial approximation of finite
differences at a new step
double posiplanet[(_k + 1)][_NP][3]; // Positions of planets
in integration nodes
double veloplanetA[_NP][3]; // The velocities of the planets
at the beginning of the step
double veloplanetB[_NP][3]; // The velocities of the planets
at the end of the step
double alf_to_xi_pos[_k][_k]; // Calculating coordinates
during iterations and at the end of a step
double alf_to_xi_vel[_k]; // Calculating the speeds at the end
of the step
double f_to_alf[_k][_k]; // The second matrix for iterations
double H_alpha[_k][_k]; // The matrix of the initial
approximation at the new step
double tau_p[(_k + 3)]; // Array of integer powers

```



```

double *h_frac; // Integration progress per step for each
point
union {
    unsigned int h_frac_min_i[2];
    double h_frac_min; // Overall integration progress at step
};
double h_frac_start; // Starting position (zero, except for
the first step)
double *h_step_prev; // The value of the previous step
double *h_step_cur; // The value of the current step
double h_step_max, h_step_min; // Maximum and minimum step
double h_step; // Point Group Step
unsigned int ephpos; // The position of the ephemeris set for
the current time period
unsigned int ephsub[_NP]; // The number of the subinterval for
each of the planets
double ephtau[_NP]; // Time point on the subinterval (from
-1.0 to +1.0)
double JD_i;//, JD_f; // Integer and fractional parts of the
moment of time relative to the beginning of the ephemeris
unsigned int JD_int; // The whole part of the moment of time
relative to the beginning of the interval
bool *mask; // Mask of integrable points
bool *impact; // Fallen points
double ch_coef_pos[14]; // Coefficients for calculating
coordinates
double ch_coef_vel[14]; // Coefficients for calculating speeds
double rel_pos[3], rel_p[3]; // Relative coordinates
double rel_vel[3], rel_v[3]; // Relative speeds
double abs_pos, abs_p, abs_vel;//, abs_v; // Relative position
and velocity modules
double max_rel; // Maximum ratio of velocity modules to
position
double XV1a[6]; // Working variable for coordinates and
velocities
double XV1b[6]; // Coordinates and velocities from the
previous iteration
double diff[6]; // The difference between iterations
double max_diff; // The biggest difference between iterations
double f0v2[3]; // The right part at the beginning of the step
interval
double fiv2[3]; // The right part in the node

```

```

    double GM_r3; // The result of dividing the gravitational
parameter by the cube of the radius vector
    unsigned int count_it; // Number of iterations
    double rxvA[_NP]; // The scalar product of the relative
velocity and position at the beginning of the step
    double rxvB[_NP]; // The scalar product of the relative
velocity and position at the end of the step
    double a_bs, b_bs, c_bs, h_bs;
    double ra_bs[3], va_bs[3];
    double ra_abs;
    double rxv_bs_c;
    double tau_bs;
    double A_bs[(3 * _k)];
    double ppos_bs[3], ppos_bs2[3], apos_bs[3], pvel_bs[3],
pvel_bs2[3], avel_bs[3];
    // Reading files
    input = fopen("input.dat", "r");
    fscanf(input, "%d_%d_%d", &n, &istart, &istep);
    n6 = 6 * n;
    k3 = 3 * _k;
    nk3 = k3 * n;
    fscanf(input, "%lf_%lf", &JD_start, &JD_end);
    XV0 = new double[n6];
    for (i = 0; i < n; i++) fscanf(input, "%lf_%lf_%lf_%lf_%lf_%lf
", &XV0[(6 * i)], &XV0[(6 * i + 1)], &XV0[(6 * i + 2)], &XV0[(6
* i + 3)], &XV0[(6 * i + 4)], &XV0[(6 * i + 5)]);
    fclose(input);
    jpleph = fopen("JPLEPH", "rb");
    epharr = new double[_ND];
    fread(epharr, sizeof(double), _ND, jpleph);
    fclose(jpleph);
    roots = fopen("roots5.dat", "r");
    tau = new double[( _k + 1)];
    for (i = 0; i <= _k; i++) fscanf(roots, "%lf", &tau[i]);
    fclose(roots);
    printf("n=%d\nJD_start=%lf_JD_end=%lf\n", n, JD_start, JD_end)
;
    aprch = fopen("aprch.txt", "w");
//    iterations = fopen("it.txt", "w");
//    s6 = fopen("s6.txt", "w");
    impacts = fopen("impacts.txt", "w");
    clapp = fopen("clapp.txt", "w");

```

```

impacts_0 = fopen("impacts_0.txt", "w");
// Initializing auxiliary arrays
XV1 = new double[n6];
for (i = 0; i < n6; i++) XV1[i] = XV0[i];
for (i = 0; i <= _k; i++)
{
    c[i][i] = 1.0;
    d[i][i] = 1.0;
    e[i][i] = 1.0;
}
for (i = 1; i <= _k; i++)
{
    c[i][0] = 0.0;
    d[i][0] = 0.0;
    e[i][0] = 1.0;
}
for (i = 2; i <= _k; i++) for (j = 1; j < i; j++)
{
    c[i][j] = c[(i - 1)][(j - 1)] - tau[(i - 1)] * c[(i - 1)][
j];
    d[i][j] = d[(i - 1)][(j - 1)] + tau[j] * d[(i - 1)][j];
    e[i][j] = e[(i - 1)][(j - 1)] + e[(i - 1)][j];
}
tau_p[0] = 1.0;
for (i = 0; i < _k; i++)
{
    for (j = 1; j < (_k + 3); j++) tau_p[j] = tau_p[(j - 1)] *
tau[(i + 1)];
    for (j = 0; j < _k; j++)
    {
        alf_to_xi_pos[i][j] = 0.0;
        for (k = 0; k <= j; k++) alf_to_xi_pos[i][j] += c[(j +
1)][(k + 1)] * tau_p[(k + 3)] / (double)((k + 2) * (k + 3));
        if (i == (_k - 1))
        {
            alf_to_xi_vel[j] = 0.0;
            for (k = 0; k <= j; k++) alf_to_xi_vel[j] += c[(j
+ 1)][(k + 1)] * tau_p[(k + 2)] / (double)(k + 2);
        }
    }
}
for (i = 0; i < _k; i++) for (j = 0; j <= i; j++) f_to_alf[i][

```

```

j] = 1.0 / (tau[(i + 1)] - tau[j]);
for (i = 0; i < _k; i++) for (j = 0; j < _k; j++)
{
    H_alpha[i][j] = 0.0;
    for (k = i; k <= j; k++) for (l = i; l <= k; l++) H_alpha[
i][j] += d[(l + 1)][(i + 1)] * e[(k + 1)][(l + 1)] * c[(j + 1)
][(k + 1)];
}
alpha2 = new double[nk3];
for (i = 0; i < nk3; i++) alpha2[i] = 0.0;
alpha2_ = new double[k3];
h_frac = new double[n];
for (i = 0; i < n; i++) h_frac[i] = 0.0;
h_step_prev = new double[n];
for (i = 0; i < n; i++) h_step_prev[i] = _h0;
h_step_cur = new double[n];
mask = new bool[n];
impact = new bool[n];
for (i = 0; i < n; i++) impact[i] = false;
h_frac_start = modf((JD_start - _JD0) / _h0, &JD_i);
JD_start = JD_i * _h0 + _JD0;
// Integration
for (JD = JD_start; JD < JD_end; JD += _h0)
{
    // Initializing variables for integration
    for (i = 0; i < n; i++) h_frac[i] = h_frac_start;
    h_frac_min = h_frac_start + 1.0;
    h_frac_start = 0.0;
    JD_i = JD - _JD0;
    ephpos = _SPT * ((int)JD_i / _JD1);
    JD_int = (int)JD_i % _JD1;
    for (i = 0; i < _NP; i++) ephsub[i] = (JD_int * _NB[i]) /
_JD1;
    // Integration process
    do {
        for (i = 0; i < n; i++) mask[i] = (((h_frac[i] + 1.0)
== h_frac_min) && (!impact[i]));
        // Calculation of coordinates and velocities of
planets
        for (i = 0; i < _NP; i++)
        {
            ephtau[i] = (((double)JD_int + (h_frac_min - 1.0)

```

```

* _h0) * _NB[i]) / _JDh - (double)ephtau[i];
    ephtau[i] += ephtau[i] - 1.0;
}
for (i = 0; i < _NP; i++)
{
    ch_coef_pos[0] = 1.0;
    ch_coef_vel[0] = 0.0;
    ch_coef_pos[1] = ephtau[i];
    ch_coef_vel[1] = 1.0;
    for (j = 2; j < _NC[i]; j++)
    {
        ch_coef_pos[j] = 2 * ephtau[i] * ch_coef_pos[(j - 1)] - ch_coef_pos[(j - 2)];
        ch_coef_vel[j] = 2 * ch_coef_pos[(j - 1)] + 2
* ephtau[i] * ch_coef_vel[(j - 1)] - ch_coef_vel[(j - 2)];
    }
    for (j = 0; j < 3; j++)
    {
        posiplanet[0][i][j] = epharr[(ephpos + _SP[i]
+ ephtau[i] * _NC[i] * 3 + j * _NC[i])];
        veloplanetA[i][j] = 0.0;
        for (k = 1; k < _NC[i]; k++)
        {
            posiplanet[0][i][j] += ch_coef_pos[k] *
epharr[(ephpos + _SP[i] + ephtau[i] * _NC[i] * 3 + j * _NC[i] +
k)];
            veloplanetA[i][j] += ch_coef_vel[k] *
epharr[(ephpos + _SP[i] + ephtau[i] * _NC[i] * 3 + j * _NC[i] +
k)];
        }
        posiplanet[0][i][j] /= _AU;
        veloplanetA[i][j] /= _AU;
        veloplanetA[i][j] *= 2 * _NB[i] / _JDh;
    }
}
for (i = 0; i < 3; i++)
{
    posiplanet[0][2][i] -= posiplanet[0][8][i] * (_GM
[8] / _GMB);
    posiplanet[0][8][i] += posiplanet[0][2][i];
    veloplanetA[2][i] -= veloplanetA[8][i] * (_GM[8] /
_GMB);
}

```

```

        veloplanetA [8][i] += veloplanetA [2][i];
    }
    // Determining the step value for each point from the
mask, as well as the minimum and maximum
    h_step_max = _h0;
    h_step_min = _h0 * exp2(-20);
    for (i = 0; i < 20; i++) if (h_frac_min_i[1] & (
unsigned int)(exp2(i)))
    {
        h_step_max *= ldexp(1.0, i - 20);
        break;
    }
    for (i = 0; i < n; i++) if (mask[i])
    {
        max_rel = 0.0;
        for (j = 0; j < _NP; j++)
        {
            for (k = 0; k < 3; k++)
            {
                rel_pos[k] = XV1[(6 * i + k)] - posiplanet
[0][j][k];
                rel_vel[k] = XV1[(6 * i + k + 3)] -
veloplanetA [j][k];
            }
            abs_pos = sqrt(rel_pos[0] * rel_pos[0] +
rel_pos[1] * rel_pos[1] + rel_pos[2] * rel_pos[2]);
            abs_vel = sqrt(rel_vel[0] * rel_vel[0] +
rel_vel[1] * rel_vel[1] + rel_vel[2] * rel_vel[2]);
            if ((abs_vel / abs_pos) > max_rel) max_rel =
abs_vel / abs_pos;
        }
        h_step_cur[i] = exp2(-ilogb(max_rel) - 3);
    }
    for (i = 0; i < n; i++) if (mask[i])
    {
        if (h_step_cur[i] > h_step_max) h_step_cur[i] =
h_step_max;
        if (h_step_cur[i] < h_step_min) h_step_cur[i] =
h_step_min;
    }
    h_step_max = _h0 * exp2(-20);
    h_step_min = _h0;

```

```

    for (i = 0; i < n; i++) if (mask[i])
    {
        if (h_step_max < h_step_cur[i]) h_step_max =
h_step_cur[i];
        if (h_step_min > h_step_cur[i]) h_step_min =
h_step_cur[i];
    }
    // Step forward
    for (h_step = h_step_min; h_step <= h_step_max; h_step
*= 2)
    {
        // Calculating the coordinates of planets in nodes
        for (i = 1; i <= _k; i++) for (j = 0; j < _NP; j
++)
        {
            ephtau[j] = (((double)JD_int + (h_frac_min -
1.0) * _h0 + h_step * tau[i]) * _NB[j]) / _JDh - (double)ephsub
[j];

            ephtau[j] += ephtau[j] - 1.0;
            ch_coef_pos[0] = 1.0;
            ch_coef_pos[1] = ephtau[j];
            for (k = 2; k < _NC[j]; k++) ch_coef_pos[k] =
2 * ephtau[j] * ch_coef_pos[(k - 1)] - ch_coef_pos[(k - 2)];
            for (k = 0; k < 3; k++)
            {
                posiplanet[i][j][k] = epharr[(ephpos + _SP
[j] + ephsub[j] * _NC[j] * 3 + k * _NC[j])];
                for (l = 1; l < _NC[j]; l++) posiplanet[i
][j][k] += ch_coef_pos[l] * epharr[(ephpos + _SP[j] + ephsub[j]
* _NC[j] * 3 + k * _NC[j] + l)];
                posiplanet[i][j][k] /= _AU;
            }
            if (i == _k)
            {
                ch_coef_vel[0] = 0.0;
                ch_coef_vel[1] = 1.0;
                for (k = 2; k < _NC[j]; k++) ch_coef_vel[k]
= 2 * ch_coef_pos[(k - 1)] + 2 * ephtau[j] * ch_coef_vel[(k -
1)] - ch_coef_vel[(k - 2)];
                for (k = 0; k < 3; k++)
                {
                    veloplanetB[j][k] = 0.0;

```

```

                                for (l = 1; l < _NC[j]; l++)
veloplanetB[j][k] += ch_coef_vel[l] * epharr[(ephpos + _SP[j] +
    ephsub[j] * _NC[j] * 3 + k * _NC[j] + 1)];
                                veloplanetB[j][k] /= _AU;
                                veloplanetB[j][k] *= 2 * _NB[j] / _JDh
;
                                }
                                }
                                }
for (i = 1; i <= _k; i++) for (j = 0; j < 3; j++)
{
    posiplanet[i][2][j] -= posiplanet[i][8][j] * (
_GM[8] / _GMB);
    posiplanet[i][8][j] += posiplanet[i][2][j];
    if (i == _k)
    {
        veloplanetB[2][j] -= veloplanetB[8][j] * (
_GM[8] / _GMB);
        veloplanetB[8][j] += veloplanetB[2][j];
    }
}
for (i = 0; i < n; i++) if (mask[i]) if (h_step ==
h_step_cur[i])
{
    // Getting an initial approximation
    if (h_step_cur[i] == h_step_prev[i])
    {
        for (j = 0; j < k3; j++) alpha2_[j] = 0.0;
        for (j = 0; j < 3; j++) for (k = 0; k < _k
; k++) for (l = k; l < _k; l++) alpha2_[(j * _k + k)] +=
H_alpha[k][1] * alpha2[(i * k3 + j * _k + 1)];
    }
    else for (j = 0; j < k3; j++) alpha2_[j] =
0.0;

    for (j = 0; j < 3; j++) f0v2[j] = 0.0;
    for (j = 0; j < _NP; j++)
    {
        for (k = 0; k < 3; k++) rel_pos[k] =
posiplanet[0][j][k] - XV1[(6 * i + k)];
        abs_pos = sqrt(rel_pos[0] * rel_pos[0] +
rel_pos[1] * rel_pos[1] + rel_pos[2] * rel_pos[2]);
        GM_r3 = _GM[j] / (abs_pos * abs_pos *

```



```

abs_pos);
                                for (k = 0; k < 3; k++) f0v2[k] += GM_r3 *
rel_pos[k];
                                }
                                for (j = 0; j < 6; j++) XV1a[j] = 0.0;
                                // Iterations
                                count_it = 0;
                                do {
                                    for (j = 0; j < 6; j++) XV1b[j] = XV1a[j];
                                    for (j = 0; j < _k; j++)
                                        {
                                            for (k = 0; k < 3; k++) XV1a[k] = 0.0;
                                            for (k = 0; k < 3; k++) for (l = 0; l
< _k; l++) XV1a[k] += alf_to_xi_pos[j][l] * alpha2_[(k * _k + l
)];
                                            for (k = 0; k < 3; k++) XV1a[k] = (
XV1a[k] * h_step + f0v2[k] * tau[(j + 1)] * tau[(j + 1)] *
h_step / 2 + XV1[(6 * i + k + 3)] * tau[(j + 1)]) * h_step +
XV1[(6 * i + k)];
                                                // The beginning of the calculation of
the right part
                                                for (k = 0; k < 3; k++) fiv2[k] = 0.0;
                                                for (k = 0; k < _NP; k++)
                                                    {
                                                        for (l = 0; l < 3; l++) rel_pos[l]
= posiplanet[(j + 1)][k][l] - XV1a[l];
                                                        abs_pos = sqrt(rel_pos[0] *
rel_pos[0] + rel_pos[1] * rel_pos[1] + rel_pos[2] * rel_pos[2])
;
                                                        GM_r3 = _GM[k] / (abs_pos *
abs_pos * abs_pos);
                                                        for (l = 0; l < 3; l++) fiv2[l] +=
GM_r3 * rel_pos[l];
                                                    }
                                                // Additional forces
                                                // End of the calculation of the right
part
                                                for (k = 0; k < 3; k++) alpha2_[(k *
_k + j)] = (fiv2[k] - f0v2[k]) * f_to_alf[j][0];
                                                for (k = 0; k < j; k++) for (l = 0; l
< 3; l++) alpha2_[(l * _k + j)] = (alpha2_[(l * _k + j)] -
alpha2_[(l * _k + k)]) * f_to_alf[j][(k + 1)];

```

```

    }
    for (j = 0; j < 6; j++) XV1a[j] = 0.0;
    for (j = 0; j < 3; j++) for (k = 0; k < _k
; k++) XV1a[j] += alf_to_xi_pos[( _k - 1)][k] * alpha2_[(j * _k
+ k)];
    for (j = 0; j < 3; j++) for (k = 0; k < _k
; k++) XV1a[(j + 3)] += alf_to_xi_vel[k] * alpha2_[(j * _k + k)
];
    for (j = 0; j < 3; j++)
    {
        XV1a[j] = (XV1a[j] * h_step + f0v2[j]
* h_step / 2 + XV1[(6 * i + j + 3)]) * h_step + XV1[(6 * i + j)
];
        XV1a[(j + 3)] = (XV1a[(j + 3)] + f0v2[
j]) * h_step + XV1[(6 * i + j + 3)];
    }
    for (j = 0; j < 3; j++)
    {
        rel_pos[j] = XV1a[j] - XV1b[j];
        rel_vel[j] = XV1a[(j + 3)] - XV1b[(j +
3)];
    }
    abs_pos = sqrt(XV1a[0] * XV1a[0] + XV1a[1]
* XV1a[1] + XV1a[2] * XV1a[2]);
    abs_vel = sqrt(XV1a[3] * XV1a[3] + XV1a[4]
* XV1a[4] + XV1a[5] * XV1a[5]);
    for (j = 0; j < 3; j++)
    {
        diff[j] = fabs(rel_pos[j] / abs_pos);
        diff[(j + 3)] = fabs(rel_vel[j] /
abs_vel);
    }
    max_diff = 0.0;
    for (j = 0; j < 6; j++) if (diff[j] >
max_diff) max_diff = diff[j];
    count_it++;
    if (count_it == 16) break;
} while (max_diff > exp2(-48));
// if (i == 0) fprintf(iterations, "JD= %lf
count_it= %d\n", JD + h_frac[i] * _h0, count_it);
// Memorization
for (j = 0; j < k3; j++) alpha2[(i * k3 + j)]

```

```

= alpha2_[j];
// Proximity check
for (j = 0; j < _NP; j++)
{
    for (k = 0; k < 3; k++)
    {
        rel_p[k] = XV1[(6 * i + k)] -
posiplanet[0][j][k];
        rel_v[k] = XV1[(6 * i + k + 3)] -
veloplanetA[j][k];
    }
    rxvA[j] = rel_p[0] * rel_v[0] + rel_p[1] *
rel_v[1] + rel_p[2] * rel_v[2];
    for (k = 0; k < 3; k++)
    {
        rel_p[k] = XV1a[k] - posiplanet[_k][j
][k];
        rel_v[k] = XV1a[(k + 3)] - veloplanetB
[j][k];
    }
    rxvB[j] = rel_p[0] * rel_v[0] + rel_p[1] *
rel_v[1] + rel_p[2] * rel_v[2];
    abs_p = sqrt(rel_p[0] * rel_p[0] + rel_p
[1] * rel_p[1] + rel_p[2] * rel_p[2]);
    if ((rxvA[j] < 0.0) && (rxvB[j] > 0.0)) if
(abs_p < 2.0 * _Rmin[j])
    {
        // Procedure for clarifying
convergence

        a_bs = 0.0;
        b_bs = 1.0;
        h_bs = 1.0;
        c_bs = 0.5;
        for (k = 0; k < k3; k++) A_bs[k] =
0.0;

        for (k = 0; k < 3; k++) for (l = 0; l
< _k; l++) for (m = 1; m < _k; m++) A_bs[(k * _k + l)] += c[(m
+ 1)][(l + 1)] * alpha2_[(k * _k + m)];
        do {
            c_bs = (a_bs + b_bs) / 2;
            tau_bs = (((double)JD_int + (
h_frac_min - 1.0) * _h0 + h_step * c_bs) * _NB[j]) / _JDh - (

```

```

double)ephsub[j];

tau_bs += tau_bs - 1.0;
ch_coef_pos[0] = 1.0;
ch_coef_vel[0] = 0.0;
ch_coef_pos[1] = tau_bs;
ch_coef_vel[1] = 1.0;
for (k = 2; k < _NC[j]; k++)
{
    ch_coef_pos[k] = 2 * tau_bs *
ch_coef_pos[(k - 1)] - ch_coef_pos[(k - 2)];
    ch_coef_vel[k] = 2 *
ch_coef_pos[(k - 1)] + 2 * tau_bs * ch_coef_vel[(k - 1)] -
ch_coef_vel[(k - 2)];
}
for (k = 0; k < 3; k++)
{
    ppos_bs[k] = epharr[(ephpos +
_SP[j] + ephsub[j] * _NC[j] * 3 + k * _NC[j])];
    pvel_bs[k] = 0.0;
    for (l = 1; l < _NC[j]; l++)
    {
        ppos_bs[k] += ch_coef_pos[
l] * epharr[(ephpos + _SP[j] + ephsub[j] * _NC[j] * 3 + k * _NC
[j] + 1)];
        pvel_bs[k] += ch_coef_vel[
l] * epharr[(ephpos + _SP[j] + ephsub[j] * _NC[j] * 3 + k * _NC
[j] + 1)];
    }
    ppos_bs[k] /= _AU;
    pvel_bs[k] /= _AU;
    pvel_bs[k] *= 2 * _NB[j] /
_JDh;
}
if ((j == 2) || (j == 8))
{
    j = 10 - j;
    tau_bs = (((double)JD_int + (
h_frac_min - 1.0) * _h0 + h_step * c_bs) * _NB[j]) / _JDh - (
double)ephsub[j];

    tau_bs += tau_bs - 1.0;
    ch_coef_pos[0] = 1.0;
    ch_coef_vel[0] = 0.0;

```

```

ch_coef_pos[1] = tau_bs;
ch_coef_vel[1] = 1.0;
for (k = 2; k < _NC[j]; k++)
{
    ch_coef_pos[k] = 2 *
tau_bs * ch_coef_pos[(k - 1)] - ch_coef_pos[(k - 2)];
    ch_coef_vel[k] = 2 *
ch_coef_pos[(k - 1)] + 2 * tau_bs * ch_coef_vel[(k - 1)] -
ch_coef_vel[(k - 2)];
}
for (k = 0; k < 3; k++)
{
    ppos_bs2[k] = epharr[(
ephpos + _SP[j] + ephsub[j] * _NC[j] * 3 + k * _NC[j])];
    pvel_bs2[k] = 0.0;
    for (l = 1; l < _NC[j]; l
++)
    {
        ppos_bs2[k] +=
ch_coef_pos[l] * epharr[(ephpos + _SP[j] + ephsub[j] * _NC[j] *
3 + k * _NC[j] + l)];
        pvel_bs2[k] +=
ch_coef_vel[l] * epharr[(ephpos + _SP[j] + ephsub[j] * _NC[j] *
3 + k * _NC[j] + l)];
    }
    ppos_bs2[k] /= _AU;
    pvel_bs2[k] /= _AU;
    pvel_bs2[k] *= 2 * _NB[j]
/ _JDh;
}
j = 10 - j;
if (j == 2) for (k = 0; k < 3;
k++)
{
    ppos_bs[k] = ppos_bs[k] -
ppos_bs2[k] * (_GM[8] / _GMB);
    pvel_bs[k] = pvel_bs[k] -
pvel_bs2[k] * (_GM[8] / _GMB);
}
if (j == 8) for (k = 0; k < 3;
k++)
{

```

```

pvel_bs[k] * (_GM[2] / _GMB);
pvel_bs[k] * (_GM[2] / _GMB);
}
}
tau_p[0] = 1.0;
for (k = 1; k < (_k + 3); k++)
tau_p[k] = tau_p[(k - 1)] * c_bs;
for (k = 0; k < 3; k++)
{
apos_bs[k] = f0v2[k] * c_bs *
c_bs * h_step / 2 + XV1[(6 * i + k + 3)] * c_bs;
avel_bs[k] = f0v2[k] * c_bs;
for (l = 0; l < _k; l++)
{
apos_bs[k] += A_bs[(k * _k
+ 1)] * tau_p[(l + 3)] * h_step / (double)((l + 2) * (l + 3));
avel_bs[k] += A_bs[(k * _k
+ 1)] * tau_p[(l + 2)] / (double)(l + 2);
}
apos_bs[k] = apos_bs[k] *
h_step + XV1[(6 * i + k)];
avel_bs[k] = avel_bs[k] *
h_step + XV1[(6 * i + k + 3)];
}
for (k = 0; k < 3; k++)
{
ra_bs[k] = apos_bs[k] -
ppos_bs[k];
va_bs[k] = avel_bs[k] -
pvel_bs[k];
}
rxv_bs_c = ra_bs[0] * va_bs[0] +
ra_bs[1] * va_bs[1] + ra_bs[2] * va_bs[2];
if (rxv_bs_c < 0.0)
{
a_bs = c_bs;
}
else
{
b_bs = c_bs;
}

```

```

    }
    h_bs /= 2.0;
} while ((h_bs * h_step) > exp2(-25));
ra_abs = sqrt(ra_bs[0] * ra_bs[0] +
ra_bs[1] * ra_bs[1] + ra_bs[2] * ra_bs[2]);
if (ra_abs < (100 * _Radius[j])) if (j
!= 9)
{
    fprintf(aprch, "%8d_%16.7lf_%2d_
%20.15lf\n", istart + i * istep, JD + h_frac[i] * _h0 + c_bs *
h_step, j, ra_abs);
}
if (ra_abs < _Radius[j])
{
    impact[i] = true;
    mask[i] = false;
    fprintf(impacts, "%8d_%16.7lf_%2d_
%20.15lf\n", istart + i * istep, JD + h_frac[i] * _h0 + c_bs *
h_step, j, ra_abs);
    fprintf(impacts_0, "%20.15e_%20.15
e_%20.15e_%20.15e_%20.15e\n", XV0[(6 * i)], XV0[(6 * i
+ 1)], XV0[(6 * i + 2)], XV0[(6 * i + 3)], XV0[(6 * i + 4)],
XV0[(6 * i + 5)]);
}
if (ra_abs < (10 * _Radius[j])) if (j
!= 9)
{
    fprintf(clapp, "%8d_%16.7lf_%2d_
%20.15lf\n", istart + i * istep, JD + h_frac[i] * _h0 + c_bs *
h_step, j, ra_abs);
}
}
}
h_frac[i] += h_step / _h0;
h_step_prev[i] = h_step_cur[i];
for (j = 0; j < 6; j++) XV1[(6 * i + j)] =
XV1a[j];
}
}
h_frac_min = 1.0;
for (i = 0; i < n; i++) if (!impact[i]) if (h_frac[i]
< h_frac_min) h_frac_min = h_frac[i];

```

```

        h_frac_min += 1.0;
    } while (h_frac_min != 2.0);
//    printf("%lf\n", JD + _h0);
//    if ((JD + _h0) >= JD_end) for (i = 0; i < n; i++)
//    {
//        fprintf(s6, "JD= %lf i = %d XV1= %20.15f %20.15f
%20.15f %20.15f %20.15f %20.15f\n", JD + _h0, i, XV1[(6 * i)],
XV1[(6 * i + 1)], XV1[(6 * i + 2)], XV1[(6 * i + 3)], XV1[(6 *
i + 4)], XV1[(6 * i + 5)]);
//    }
    }
    fclose(aprch);
//    fclose(iterations);
//    fclose(s6);
    fclose(impacts);
    fclose(clapp);
    fclose(impacts_0);
//    Freeing up memory
    delete [] XV0;
    delete [] epharr;
    delete [] tau;
//    delete [] alpha;
//    delete [] alpha_;
    delete [] alpha2;
    delete [] alpha2_;
//    delete [] D_alpha;
    delete [] h_frac;
    delete [] h_step_prev;
    delete [] h_step_cur;
    delete [] mask;
    delete [] impact;
    return 0;
}

```