Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Алисейко Алексей Николаевич

Математические методы анализа и синтеза систем с запаздывающим аргументом

Научная специальность 2.3.1.

Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель,

д-р физ.-мат. наук,

профессор

Жабко А. П.

Санкт-Петербург — 2022

Содержание

Обозначения и сокращения

- $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества вещественных и комплексных чисел, соответственно;
- $\mathbb{R}^n$ — множество векторов размерности n с вещественными компонентами;
- $\mathbb{R}^{m\times n}$ — множество матриц размерности $m \times n$ с вещественными компонентами;
- $\operatorname{Re} s$ — вещественная часть комплексного числа s;
- i — мнимая единица;
- $\overline{\cdot}$ — комплексное сопряжение;
- E — единичная матрица;
- E_n — единичная матрица размерности $n \times n$;
- $\mathbf{0}$ — нулевая матрица или вектор;
- $\mathbf{0}_{m\times n}$ — нулевая матрица размерности $m \times n$;
- A^T — матрица, получаемая транспонированием матрицы A;
- A^* — матрица, получаемая эрмитовым сопряжением матрицы A, $A^* = \overline{A^T}$;
- A^{-1} — матрица, обратная к матрице A;
- $\det A$ — определитель матрицы A;
- $M \otimes N$ — произведение Кронекера матриц M и N;
- $M \oplus N$ — сумма Кронекера матриц M и N;
- $\operatorname{vect} X$ — векторизация матрицы X;
- $\operatorname{sp}\{v_1, \ldots, v_k\}$ — линейная оболочка векторов $v_1, \ldots, v_k$;
- $\lambda_{min}(W)$ — минимальное собственное число симметрической матрицы W;
- $\|x\|$ — евклидова норма вектора;
- $\|A\|$ — операторная норма матрицы;
- $\|\varphi\|_h$ — равномерная норма ограниченной функции, заданной на $[-h, 0]$;
- $\bigvee f$ — вариация функции;
- $\operatorname{res}_{s_0} f(s)$ — вычет комплекснозначной функции $f(s)$ в точке s_0;
- $f'(+0), f'(-0)$ — правая и левая производная функции f в точке $t = 0$, соответственно;
- $f^{(k)}(t)$ — k-тая производная функции f;
- $C(X, Y)$ — пространство непрерывных функций из X в Y;
- $PC([a, b], Y)$ — пространство кусочно-непрерывных функций, отображающих отрезок $[a, b]$ в множество Y;

- $BV([a,b],Y)$ — пространство функций ограниченной вариации, отображающих отрезок $[a,b]$ в множество Y;
- $NBV([a,b],Y)$ — пространство нормализованных функций ограниченной вариации, отображающих отрезок $[a,b]$ в множество Y;
- $\xrightarrow{\rho}$ — сходимость по метрике ρ;
- $\xrightharpoonup{*}$ — слабая-* сходимость;
- $\dot{x}(t)$ — производная решения системы x в момент t;
- $x(t,\varphi)$ — решение системы, соответствующее начальной функции φ;
- x_t — состояние системы в момент t, $x_t : \theta \mapsto x(t+\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$.

Введение

Математическое модели систем самой разнообразной природы, например, процессов и явлений, возникающих в механике, биологии, химии, экономике и других дисциплинах, зачастую описываются зависимостями скоростей изменений одних величин от других величин. Математическим инструментом, описывающим скорость изменения какой-либо величины, является производная, а значит такие зависимости естественным образом выражаются или обыкновенными дифференциальными уравнениями, или же уравнениями в частных производных.

При более детальном исследовании тех или иных процессов, однако, оказывается, что недостаточно ограничиться рассмотрением моделей, где будущее состояние системы зависит только от текущего, и не зависит от ее прошлого. Более того, в некоторых системах исключить зависимость от прошлого оказывается принципиально невозможным. Например в управляемых системах с обратной связью между моментом измерения регулируемой величины до момента определения сигнала управления проходит некоторое время. Возникает запаздывание, игнорирование которого, как отмечает N. Minorsky [58], может привести к нежелательным колебаниям в системе. В эпидемиологических модели, рассмотренной K. L. Cooke [21], роль запаздывания играет инкубационный период — отрезок времени от момента заражения до проявления симптомов болезни. В популяционных моделях идеи, связанные с запаздыванием, восходят еще к работам V. Volterra о системах типа «хищник — жертва» [68], а в статье M. S. Bartlett [19] запаздывание используется для моделирования возрастной структуры популяции. Уравнение с запаздыванием, описывающее модель ядерного реактора, является предметом статьи J. A.Nohel [61], а N. MacDonald [56] исследует роль запаздывания при моделировании роста одноклеточных организмов в хемостате.

Вышеприведенные примеры — это лишь немногие из многочисленных статей, посвященных моделям процессов, в которых присутствует запаздывание. По мере возникновения все большего и большего числа работ, исследующих системы и уравнения с запаздыванием, стала очевидной необходимость построения общей теории таких систем. Подобным исследованиям посвящены многие книги: от первых работ А. Д. Мышкиса [7], Л. Э. Эльсгольца, С. Б. Норкина [9], В. И. Зубова [4], R. Bellman, K. L. Cooke [20], использующих более непосредственный подход к исследованию систем с запаздыванием, до более поздних монографий J. K Hale, S. M. Verduyn Lunel [39] и O. Diekman, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel, H. O. Walther [23], излагающих теорию систем с запаздыванием в более современном, абстрактном виде с привлечением методов функционального анализа.

Во многих приложениях важную роль играют предельные свойства решений. Долгосрочное прогнозирование поведения процессов и явлений имеет смысл лишь тогда, когда малые отклонения или погрешности в начальных данных не приводят к существенным изменениям в функционировании систем. Подобные вопросы, являющиеся предметом теории устойчивости, глубоко исследованы для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Один из наиболее выдающихся результатов в этом направлении принадлежит А. М. Ляпунову, который в своей знаменитой диссертации «Общая задача об устойчивости движения» [6] предложил метод, позволяющий оценить поведение решений системы с помощью некоторой вспомогательной функции, получившей название функции Ляпунова.

Однако построение аналогичной теории для систем с запаздыванием оказывается весьма не тривиальным. Наиболее существенным отличием между системами с запаздываниями и системами без запаздываний оказывается пространство состояний. Для обыкновенных дифференциальных уравнений состоянием является конечномерный вектор, а для систем с запаздыванием — функция, представляющая собой элемент некоторого бесконечномерного пространства. Обобщение теории Ляпунова на системы с запаздыванием получило развитие в двух основных направлениях. Один подход принадлежит Н. Н. Красовскому [5], который предложил вместо скалярных функций Ляпунова применять функционалы, используя тем самым истинное состояние системы — целый сегмент ее траектории. Почти одновременно появился и другой подход, принадлежащий Б. С. Разумихину [8], согласно которому можно сохранить скалярные функции Ляпунова, исследуя их значения на некотором подмножестве, удовлетворяющем специальному ограничению, получившему название условия Разумихина. Изложению современного состояния теории устойчивости для систем с запаздыванием посвящены монографии V. B. Kolmanovskii, V. R. Nosov [54] и K. Gu, V. L. Kharitonov, J. Chen [37].

Для линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений известен следующий классический критерий устойчивости Ляпунова: система устойчива тогда и только тогда, когда найдется положительно-определенная квадратичная форма, производная которой вдоль решений системы есть отрицательно-определенная квадратичная форма. Обобщение этого критерия на линейные стационарные системы с запаздыванием было предметом активных исследований, осуществленных в последние десятилетия. И вот если подход Б. С. Разумихина здесь оказался принципиально не применим (он дает лишь достаточные условия устойчивости), то метод функционалов Ляпунова—Красовского хорошо зарекомендовал себя.

Существует два основных способа использования метода функционалов Ляпунова—Красовского. С одной стороны, можно сначала выбрать функционал некоторого общего вида, заведомо являющийся положительно-определенным, продифференцировать его в силу решений системы и выявить условия отрицательной определенности производной. Этим способом можно получить множество различных достаточных для устойчивости условий, имеющих вид линейных матричных неравенств. Многочисленные примеры условий такого вида содержатся, например, в монографии S.-I. Niculescu [60]. С другой стороны, можно сначала выбрать вид производной функционала, а затем найти функционал, производная которого вдоль решений будет совпадать с заданной. Зачастую функционалы полученные таким образом оказываются значительно более сложной структуры и существенную трудность представляет проверка их на положительную определенность.

Отметим, что использование классического критерия Ляпунова имеет три составных части. Во-первых, по заданной производной в виде квадратичной формы нужно найти восстановить функцию Ляпунова. Оказывается, что и эта функция Ляпунова также имеет вид квадратичной формы. Во-вторых, оказывается, что матрицы этих двух квадратичных форм связаны между собой матричным уравнением Ляпунова, которое можно свести к системе линейных алгебраических уравнений. В-третьих, остается проверить построенную квадратичную форму на положительную определенность, что возможно сделать, воспользовавшись критерием Сильвестра. Дальнейшее развитие теории для систем с запаздыванием можно проследить по схожим трем основным направлениям.

Первая трудность, которую приходится преодолеть, состоит в построении функционала по заданной производной. Основополагающей здесь является работа Ю. М. Репина [64], где для систем с одним запаздыванием рассматривается квадратичный функционал достаточно общего вида, которым затем дифференцируется и его производная приравнивается к заданной. Получается система дифференциальных уравнений для матриц, определяющих искомый функционал. Хотя условия существования решения этой системы не были рассмотрены, можно сказать, что статья опередила свое время и во многом предопределила дальнейшее развитие теории. Похожие результаты были получены и в статье R. Datko [22], подошедшего к проблеме с абстрактной функционально-аналитической стороны.

Следующей вехой в развитии теории становится работа E. F. Infante, W. B. Castelan [44]. В ней впервые в явном виде отмечается, что для построения функционала достаточно знания одной функциональной матрицы, и отмечаются основные условия, которыми она определяется. В дальнейшем эта матрица получит название матрицы Ляпунова, хотя условия, приведенные в статье [44] и отличаются от современного ее определения. Можно провести параллель между нахождением матрицы Ляпунова для систем с запаздыванием и решением матричного уравнения Ляпунова для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому, вопросы, связанные с ее нахождением и с проблемой ее существования и единственности, занимают ключевую роль для второго пункта намеченной выше программы.

Большим шагом в развитии теории стала статья W. Huang [41]. В ней рассматриваются системы общего вида, правые части которых описываются интегралом Стилтьеса с ядром в виде матрицы из функций ограниченной вариации. Условия, определяющие матрицу Ляпунова, впервые даются в современном виде, и доказывается, что достаточным условием ее существования является отсутствие у системы собственных чисел, расположенных симметрично относительно нуля комплексной плоскости. Следует отметить, что точно такое же по форме условие для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений является критерием единственности решения матричного уравнения Ляпунова. В дальнейшем это условие станет известно как условие Ляпунова. В работе [41] также впервые в современной форме выписывается в явном виде функционал, имеющий в качестве производной вдоль решений системы квадратичную форму. Доказывается и положительная определенность этого функционала в случае экспоненциальной устойчивости, хотя, к сожалению полученная автором оценка на функционал снизу оказалась лишь локальной и кубической.

Некоторое время спустя А. П. Жабко будет построен пример [51], демонстрирующий, что подобный функционал в принципе не допускает квадратичную оценку снизу. В статье В. Л. Харитонова и А. П. Жабко [46] предлагается модифицированный функционал. В его производную вдоль решений добавляются квадратичные слагаемые использующие полное состояние системы. Вследствие этого новые функционалы приобретают название функционалов полного типа. Они допускают квадратичную оценку как сверху, так, для экспоненциально устойчивых систем, и снизу. Тем самым доказывается, что теорема Красовского [5], дающая для систем с запаздыванием достаточное условие экспоненциальной устойчивости, для линейных стационарных систем является и необходимым условием. Таким образом можно говорить о полноценном обобщении критерия Ляпунова на системы с запаздыванием.

Разобравшись с построением функционалов, основным направлением дальнейших исследований становятся матрицы Ляпунова. Статья В. Л. Харитонова [50] дополняет раннюю работу W. Huang [41], устанавливая, что условие Ляпунова является не только достаточным, но и необходимым условием существования и единственности матриц Ляпунова. Многие работы посвящаются нахождению матриц Ляпунова для различных классов систем с запаздыванием. Основой всех дальнейших исследований становится работа V. L. Kharitonov, E. Plischke [49], в которой впервые в законченным виде излагается способ нахождения матриц Ляпунова для систем с одним запаздыванием. Этот метод обобщается на системы с несколькими соизмеримыми запаздываниями в статье H. Garcia-Lozano, V. L. Kharitonov [34] и на системы с распределенным запаздыванием и экспоненциальным ядром в статье В. Л. Харитонова [48]. Отметим, что метод из статьи [48] оказывается не полон, в статье M. Abu-Khalaf, S. Gumussoy [14] рассматривается пример, в котором этот метод не позволяет найти матрицу Ляпунова, хотя условие Ляпунова и выполнено. Одна из возможных модификаций метода была предложена теми же авторами в работе [38].

Стоит сказать, что системы с распределенным запаздыванием и экспоненциальным ядром оказываются важны для теории управления. Ранее уже отмечалось, что запаздывание в управлении для систем с обратной связью практически неизбежно. В статье A. Z. Manitius, A. W. Olbrot [57] для линейных систем с запаздыванием в управлении был предложен способ стабилизации таких систем по обратной связи. Рассматриваемое там управление типа «предиктор» содержит интегральный член, в котором присутствует матричная экспонента. Однако, как было установлено в статье K. Engelborghs, M. Dambrine, D. Roose [30], реализация такого управления оказывается сложна на практике, поэтому в работе S. Mondié, W. Michiels [59] был предложен динамический закон управления. Замыкание системы этим динамическим регулятором приводит к системе с распределенным запаздыванием и экспоненциальным ядром.

Статья S. Gumussoy, M. Abu-Khalaf [38] интересна еще и с той стороны, что там выносится на обсуждение вопрос исследования устойчивости систем с распределенным запаздыванием и нахождения их матриц Ляпунова путем сведения их к системам с одним запаздыванием. Подобные идеи не новы и поднимались ранее в работах E. I. Verriest [67], B. Ficak [31] и G. Ochoa, D. Melchor-Aguilar, S.Mondié [63], хотя и не повергались систематическим исследованиям.

Все вышеприведенные работы рассматривают нахождение матриц Ляпунова для конкретных классов систем. Хотя вопрос нахождения новых классов систем, для которых это возможно, и представляет существенный исследовательский интерес, ясно, что таким образом невозможно прийти к нахождению матриц Ляпунова для линейных систем общего вида. Приходится обращаться к приближенным методам. Статья H. Garcia-Lozano, V. L. Kharitonov [35] рассматривает кусочно-линейные приближение, а в работах E. Huesca, S. Mondié, O. Santos [42] и E. Jarlebring, J. Vanbiervliet, W. Michiels [45] предлагается полиномиальная аппроксимация матриц Ляпунова. Следует отметить, что вышеперечисленные методы в некотором смысле эвристические, для них имеются лишь качественные оценки получаемых приближений и не гарантируется близость аппроксимаций к искомой матрице Ляпунова.

В совсем другом ключе выполнены работы A. V. Egorov, V.L. Kharitonov [29] и V. L. Kharitonov [53]. В первой из них устанавливается, что для экспоненциально устойчивых систем с несколькими запаздываниями их матрицы Ляпунова могут быть сколь угодно точно приближены матрицами Ляпунова для систем с несколькими соизмеримыми запаздываниями. Во второй работе доказывается, что матрицы Ляпунова для экспоненциально устойчивых систем с распределенным запаздыванием могут быть сколько угодно точно приближены матрицами Ляпунова для систем с несколькими кратными запаздываниями, получаемыми заменой интегрального члена конечной суммой. Требование экспоненциальной устойчивости, критически важное для этих двух статей, является их главным недостатком, существенно ограничивающим область их применения.

Третьим и последним из пунктов намеченной выше программы было нахождение условий положительной определенности функционалов Ляпунова—Красовского, аналогичных условию положительной определенности решения матричного уравнения Ляпунова. Из вышесказанного следует, что если такие условия и существует, то они должны выражаться через матрицу Ляпунова. Долгое время данная проблема оставалась открытым вопросом, пока в серии работ A. V. Egorov, S. Mondié [24–26] и A. V. Egorov, C. Cuvas, S. Mondié [28] не было получено необходимое и достаточное условие экспоненциальной устойчивости, выражаемое в виде положительной определенности бесконечной последовательности блочных матриц, составляемых из значений матрицы Ляпунова в различные моменты времени. То, что достаточно проверки на положительную определенность лишь некоторого конечного числа членов этой последовательности, было установлено в статье А. В. Егорова [27].

С работы В. Л. Харитонова и А. П. Жабко [46] начинается эффективное применение функционалов Ляпунова—Красовского и матриц Ляпунова в разнообразных приложениях. Статья [46] использует функционалы полного типа для анализа робастности, в работе V. L. Kharitonov, D. Hinrichsen [47] они используются для нахождения экспоненциальных оценок на решения. Определению критических значений запаздывания посвящена статья G. Ochoa, V. L. Kharitonov, S. Mondié [62], а в работе O. Santos, S. Mondié, V. L. Kharitonov [66] предлагается итерационная схема нахождения последовательности субоптимальных управлений, последовательно снижающих на каждом шаге значения квадратичного функционала качества. Статья E. Jarlebring, J. Vanbiervliet, W. Michiels [45] использует матрицу Ляпунова для вычисления $\mathcal{H}_2$ нормы передаточной матрицы системы, а В. А. Сумачева в работе [10] предлагает схему, позволяющую построить управление, уменьшающее $\mathcal{H}_2$ норму передаточной матрицы системы.

Резюмируем вышеизложенное. Функционалы Ляпунова—Красовского оказались чрезвычайно удобны для анализа устойчивости систем с запаздыванием и нашли множество различных приложений. Одной из ключевых проблем, ограничивающих область их применения является необходимость нахождения матриц Ляпунова, что возможно лишь для некоторых классов систем. Представляется важным нахождение новых классов систем с запаздываем для которых возможно конструктивное построение матриц Ляпунова, а также разработка новых конструктивных методов приближенного нахождения матриц Ляпунова. Этому и посвящено настоящее исследование.

Цели исследования:

- Нахождение новых классов систем с запаздыванием, для которых возможно точное нахождение матриц Ляпунова и построение для таких систем теории, аналогичной известной для систем с одним запаздыванием.
- Распространение метода функционалов Ляпунова—Красовского на управляемые системы с запаздыванием и получение экспоненциальных оценок на решения таких систем.
- Разработка конструктивных методов нахождения матриц Ляпунова для систем с запаздыванием общего вида без ограничения на случай их экспоненциальной устойчивости. Нахождение условий, достаточных для сходимости последовательности приближенных матриц Ляпунова к искомой.

Научная новизна. Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа посвящена развитию метода функционалов Ляпунова—Красовского, расширению класса систем, для которых возможно нахождение матрицы Ляпунова, и переносу метода функционалов Ляпунова—Красовского на управляемые системы с запаздыванием. Данные результаты представляют и практический интерес, так как системы с запаздыванием используются для описания биологических, механических, химических и др. процессов, а также естественным образом возникают в любых управляемых системах с обратной связью.

Структура и основное содержание работы. Диссертация состоит из шести глав и двух приложений. В **первой главе** приводится краткая сводка известных результатов, используемых в последующих главах. В параграфах 1.1 и 1.2 вводятся основные понятия для линейных систем с запаздыванием, в параграфе 1.3 излагается метод функционалов Ляпунова—Красовского полного типа, а в параграфе 1.4 вводится понятие матриц Ляпунова. Также в параграфе 1.5 приводится обзор метода нахождения матриц Ляпунова для систем с одним запаздыванием, а в параграфе 1.6 даются определение и основные свойства произведения и суммы Кронекера.

Вторая глава посвящена проблеме нахождения матриц Ляпунова для систем с распределенным запаздыванием и экспоненциальным ядром. Для подобных систем в параграфе 2.2 предлагаются новые граничные условия для вспомогательной системы линейных дифференциальных уравнений без запаздывания, которая может быть использована для определения матрицы Ляпунова. В параграфе 2.3 описывается конструктивный способ решения вспомогательной граничной задачи, а в параграфе 2.4 доказывается, что существование и единственность матрицы Ляпунова равносильна единственности решения данной граничной задачи. Эти результаты иллюстрируются в параграфе 2.5.

В **третьей главе** рассматривается подход к нахождению матриц Ляпунова для систем с распределенным запаздыванием и экспоненциальным ядром путем введения дополнительных переменных и трансформации их в системы большей размерности с одним запаздыванием. В параграфе 3.1 выводятся соотношения между решениями, характеристическими функциями и фундаментальными матрицами исходной и расширенной систем. Исследованию связи между матрицами Ляпунова двух систем посвящен параграф 3.2. В параграфах 3.3 и 3.4 исследуются дополнительные свойства, возникающие при предположении о выполнении условия Ляпунова и при наличии экспоненциальной устойчивости, соответственно. В параграфе 3.5 приводятся примеры систем, у которых есть матрица Ляпунова, но при этом для расширенной системы матрицы Ляпунова не существует.

Четвертая глава посвящена линейным управляемым системам с запаздыванием в управлении. В параграфе 4.1 предлагается функционал Ляпунова—Красовского для систем, замкнутых стабилизирующим управлением. В параграфе 4.2 эти функционалы используются для нахождения экспоненциальных оценок на решения таких систем. Глава завершается демонстративным примером в параграфе 4.3.

Пятая глава посвящена проблеме нахождения матриц Ляпунова для систем с распределенным запаздыванием и кусочно-постоянным ядром. В параграфе 5.2 рассматривается вспомогательная граничная задача, которая может быть использована для построения матрицы Ляпунова подобных систем. В параграфе 5.3 вопрос решения этой граничной задачи сводится к нахождению решения системы линейных алгебраических уравнений. Параграф 5.4 посвящен доказательству того, что граничная задача имеет единственное решение тогда и только тогда, когда существует единственная матрица Ляпунова. Завершает главу пример использования граничной задачи для нахождения критического значения запаздывания в параграфе 5.5.

В **шестой главе** ставится вопрос о непрерывной зависимости матриц Ляпунова от правых частей уравнений с запаздыванием. В параграфе 6.1 для описания правых частей систем вводится пространство нормализованных матричных функций ограниченной вариации и формулируется основная теорема о сходимости матриц Ляпунова при сходимости правых частей. Доказательство этого результата разбито на две части и приводится в параграфах 6.2 и 6.3. Вопрос непрерывной зависимости матриц Ляпунова от правых частей систем в зависимости от топологии на функциях ограниченной вариации обсуждается в параграфе 6.4. Последний параграф 6.5 демонстрирует описываемый подход на примере.

В **приложении А** приводится реализация алгоритма нахождения матриц Ляпунова для систем с распределенным запаздыванием и экспоненциальным ядром, описанного в главе 2. Реализация метода построения матриц Ляпунова для систем с распределенным запаздыванием и кусочно-постоянным ядром, представленного в главе 5, приведена в **приложении Б**.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на научных конференциях: 47-я международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» факультета ПМ-ПУ СПбГУ (Санкт-Петербург, 2016), «XIII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2019)» (Москва, ИПУ РАН, 2019) и «15th IFAC Workshop on Time Delay Systems» (Синая, Румыния, 2019). Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1, 15–18]. Из них статья [1] опубликована в рецензируемом журнале из списка ВАК, а статьи [15–18] в иностранных журналах, входящих в наукометрические базы Scopus и Web of Science.

Положения, выносимые на защиту:

- конструктивный метод нахождения матриц Ляпунова для систем с распределенным запаздыванием и экспоненциальным ядром;
- исследование подхода к анализу устойчивости систем с распределенным запаздыванием путем их преобразования к системам с одним запаздыванием;
- построение функционалов Ляпунова—Красовского полного типа для управляемых систем с запаздыванием и нахождение экспоненциальных оценок для решений таких систем;
- конструктивный метод нахождения матриц Ляпунова для систем с кусочно-постоянным ядром;
- конструктивный метод приближенного нахождения матриц Ляпунова для произвольных линейных стационарных систем с запаздыванием.

Глава 1. Функционалы и матрицы Ляпунова

В данном разделе вводятся основные понятия и определения, используемые в дальнейшей части работы.

1.1. Общие сведения

В данной работе изучаются линейные стационарные дифференциальные системы с запаздыванием. Формы, которые могут иметь такие системы, и описывающие их уравнения могут быть весьма разнообразны в зависимости от конкретной задачи. Например, часто рассматриваются системы с одним запаздыванием вида
$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \tag{1.1}$$
где A_0, A_1 есть вещественные матрицы порядка $n \times n$, а запаздывание $h > 0$. Интерес могут представлять и системы с несколькими запаздываниями:
$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t-h_j), \tag{1.2}$$
где матрицы $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $0 \leqslant j \leqslant m$ и $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_m = h$. Рассматриваться могут и системы с распределенным запаздыванием вида
$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \int_{-h}^{0} G(\theta) x(t+\theta) d\theta, \tag{1.3}$$
где $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $h > 0$, а $G(\theta)$ является кусочно-непрерывной функцией из $[-h, 0]$ в $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Чтобы избежать необходимости рассмотрения теории для каждого из приведенных видов систем с запаздыванием и не вводить требуемые обозначения несколько раз, перейдем к рассмотрению более общего вида систем, для которого все вышеперечисленные являются частными случаями.

А именно, будем рассматривать системы вида
$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^{0} dQ(\theta) x(t+\theta), \tag{1.4}$$
где запаздывание $h > 0$, а компоненты матричной функции $Q : [-h, 0] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ являются функциями ограниченной вариации. Следует отметить, что

члены в интеграле нужно записывать именно в указанном в (1.4) порядке из соображений размерности. Системы (1.1), (1.2) и (1.3) можно получить из (1.4) выбором соответствующего ядра Q, так что в дальнейшем изложение пока будем рассматривать именно системы вида (1.4).

Для обыкновенных дифференциальных уравнений для определения конкретного решения достаточно указать его значение в одной точке. Из вида системы (1.4) очевидно, что чтобы найти значение производной в одной точке t, нужно знать решение во все моменты времени предшествующие t на целом отрезке длины h, то есть на $[t-h, t]$. Это мотивирует два определения:

Определение 1.1. Состоянием системы (1.4) в момент времени t будем называть функцию $x_t : [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$, определяемую как $x_t(\theta) = x(t+\theta)$.

Определение 1.2. Пусть заданы момент времени $t_0 \in \mathbb{R}$ и функция $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Начальная задача для уравнения (1.4) заключается в нахождении решения $x(t)$ системы (1.4), удовлетворяющего условию $x_{t_0} = \varphi$. Такое решение будем обозначать $x(t, t_0, \varphi)$.

Нетрудно видеть, что в силу стационарности системы (1.4), если известно решение $x(t, t_0, \varphi)$ начальной задачи в момент t_0, то $x_1(t) = x(t + t_0, t_0, \varphi)$ будет решением начальной задачи с той же функцией φ, но с начальным моментом $t_1 = 0$. Поскольку в дальнейшем нас будут интересовать поведение решений на бесконечности, то будем рассматривать только решения с начальным моментом $t_0 = 0$ и опускать начальный момент при обозначении таких решений: $x(t, \varphi)$ вместо $x(t, 0, \varphi)$.

Наконец установим некоторые обозначения связанные с нормами. Для векторов с вещественными или комплексными компонентами будем использовать евклидову норму $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$, а для матриц — соответствующую операторную норму:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| .$$

Для ограниченных функций, заданных на отрезке $[-h, 0]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, также иногда будем применять норму

$$\|\varphi\|_h = \sup_{\theta \in [-h,0]} \|\varphi(\theta)\| .$$

1.2. Основные определения

По аналогии с системами линейных дифференциальных уравнений без запаздывания для системы (1.4) можно определить фундаментальную матрицу.

Определение 1.3. Матричную функцию $K(t)$ порядка $n \times n$ будем называть фундаментальной матрицей системы (1.4), если

$$\frac{d}{dt}K(t) = \int_{-h}^{0} K(t+\theta)dQ(\theta), \quad t \geqslant 0,$$
$$K(0) = E, \quad K(t) = \mathbf{0}, \quad t < 0.$$

Зная фундаментальную матрицу любое решение $x(t,\varphi)$ начальной задачи можно получить по формуле Коши.

Теорема 1.1 (формула Коши, [39])**.** *Если* $\varphi \in PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ *есть начальная функция, то решение начальной задачи имеет вид*

$$x(t,\varphi) = K(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\int_{\theta}^{0} K(t-\xi+\theta)dQ(\theta)\varphi(\xi)d\xi.$$

Как и для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для систем с запаздыванием можно определить понятие собственных чисел.

Определение 1.4. Матрицу

$$F(s) = sE - \int_{-h}^{0} e^{s\theta}dQ(\theta),$$

определенную для всех комплексных чисел $s \in \mathbb{C}$, будем называть характеристической матрицей системы (1.4). Определитель этой матрицы $f(s) = \det F(s)$ есть характеристическая функция системы (1.4).

Определение 1.5. Множество нулей характеристической функции $\Lambda = \{s \in \mathbb{C} : \det F(s) = 0\}$ будем называть спектром системы (1.4), а комплексные числа в него входящие — собственными числами системы (1.4).

Определение 1.6. Будем говорить, что система (1.4) является экспоненциально устойчивой, если найдутся $\gamma \geqslant 1$ и $\sigma > 0$, что для любого решения

$$\|x(t,\varphi)\| \leqslant \gamma e^{-\sigma t}\left\|\varphi\right\|_h, \quad t \geqslant 0.$$

Связь собственных чисел с экспоненциальной устойчивостью дает следующая

Теорема 1.2 ([20]). *Система (1.4) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда все ее собственные числа имеют отрицательные вещественные части.*

1.3. Метод функционалов Ляпунова—Красовского

Непосредственное применение теоремы 1.2 для проверки систем на экспоненциальную устойчивость затруднено необходимостью нахождения собственных чисел системы (1.4). Эта проблема усугубляется тем, что спектр подобных систем обычно содержит счетное число собственных чисел, а не конечное, как в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Хотя для систем с запаздыванием разработаны специальные алгоритмы позволяющие найти часть спектра, содержащуюся, например, в некотором прямоугольнике [69], в этом разделе будет представлен принципиально иной подход к проверке систем на экспоненциальную устойчивость.

Достаточное условие экспоненциальной устойчивости дает теорема Красовского. Нам не потребуется полная форма этого сильного результата, применимого для широкого класса систем с запаздыванием (не обязательно линейных), для систем вида (1.4) вполне достаточной оказывается следующая формулировка.

Теорема 1.3 (Красовский, [5, 51]). *Если существует функционал v, определенный на $PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$, принимающий вещественные значения и удовлетворяющий условиям*

1. $\alpha_1 \|\varphi(0)\|^2 \leqslant v(\varphi) \leqslant \alpha_2 \|\varphi\|_h^2$ *для некоторых положительных постоянных* α_1 *и* α_2*,*
2. *значение функционала вдоль решений $v(x_t)$ дифференцируемо по t и*

$$\frac{dv(x_t)}{dt} \leqslant -\beta \|x(t)\|^2, \quad t \geqslant 0,$$

для некоторого числа $\beta > 0$,

то система (1.4) является экспоненциально устойчивой.

Таким образом проверка систем на экспоненциальную устойчивость сводится к построению соответствующего функционала. Для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax$ хорошо известна теория Ляпунова, согласно которой, если выбрать положительно определенную квадратичную форму $w(x) = x^T W x$ и попытаться построить функцию $v(x)$ такую, что ее производная вдоль решений $\frac{d}{dt} v(x(t)) = -w(x)$, то эта функция также оказывается квадратичной формой: $v(x) = x^T V x$, матрица которой связана с матрицей W уравнением Ляпунова: $A^T V + VA = -W$. После этого для экспоненциальной устойчивости системы $\dot{x} = Ax$ оказывается достаточным проверить на положительную определенность квадратичную форму $v(x) = x^T V x$.

Возникает идея выбрать функционал $w(\varphi)$, заведомо удовлетворяющей оценке из пункта 2 теоремы Красовского: $w(x_t) \leqslant -\beta \left\|x(t)\right\|^2$, и попытаться найти функционал $v(\varphi)$, производного которого вдоль решений $\frac{d}{dt} v(x_t)$ будет равна $w(x_t)$. По аналогии с системами обыкновенных дифференциальных уравнений в качестве такого функционала также выберем отрицательно определенную квадратичную форму: $w_0(\varphi) = -\varphi(0)^T W \varphi(0)$.

Теорема 1.4 ([41]). *Если существует матричная функция $U(t)$, непрерывная в нуле и удовлетворяющая условиям*

$$
\begin{gathered}
U'(t) = \int_{-h}^{0} U(t+\theta) dQ(\theta), \quad t \geqslant 0, \\
U(-t) = U^T(t), \\
U'(+0) - U'(-0) = -W,
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

то для функционала

$$
v_0(\varphi) = \varphi^T(0) U(0) \varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^{0} \int_{\theta}^{0} U(\xi - \theta) dQ(\theta) \varphi(\xi) d\xi +
$$
$$
+ \int_{-h}^{0} \int_{\theta}^{0} d\xi_1 \varphi^T(\xi_1) dQ^T(\theta_1) \left[\int_{-h}^{0} \int_{\theta}^{0} U(\xi_1 - \xi_2 - \theta_1 + \theta_2) dQ(\theta_2) \varphi(\xi_2) d\xi_2 \right]
$$

выполняется

$$
\frac{d}{dt} v_0(x_t) = w_0(x_t), \quad t \geqslant 0.
$$

К сожалению, для функционала $v_0(\varphi)$ оказывается принципиально невозможным построить квадратичные оценки (см. пример 2.1 из книги [51]). Поэтому в работе [46] были предложено выбирать производную функционала в виде

$$
w(\varphi) = -\varphi(0)^T W_0 \varphi(0) - \varphi^T(-h) W_1 \varphi(-h) - \int_{-h}^{0} \varphi^T(\xi) W_2 \varphi(\xi) d\xi,
$$

где W_0, W_1, W_2 есть три положительно определенные матрицы.

Теорема 1.5 ([46]). *Если существует матричная функция $U(t)$, непрерывная в нуле и удовлетворяющая условиям* (1.5) *с* $W = W_0 + W_1 + hW_2$, *то для функционала*

$$v(\varphi) = v_0(\varphi) + \int_{-h}^{0} \varphi^T(\xi)[W_1 + (h+\xi)W_2]\varphi(\xi)d\xi,$$

выполняется

$$\frac{d}{dt}v(x_t) = w(x_t), \quad t \geqslant 0.$$

Функционалы из теоремы 1.5 получили название функционалов Ляпунова—Красовского полного типа, так как теперь их производная вдоль решений содержит полную информация о состоянии системы x_t, а не только значение в последней точке $x(t)$. В отличие от первоначального функционала v_0 функционал полного типа v допускает квадратичные оценки сверху и снизу. Однако построение таких функционалов оказалось зависящим от существования некоторой матричной функции $U(t)$, удовлетворяющей условиям (1.5). Перейдем к рассмотрению этого вопроса.

1.4. Матрицы Ляпунова

Определение 1.7 ([51]). Пусть W есть некоторая симметрическая матрица. Непрерывную в нуле матричную функцию, удовлетворяющую условиям

$$U'(t) = \int_{-h}^{0} U(t+\theta)dQ(\theta), \quad t \geqslant 0,$$

$$U(-t) = U^T(t),$$

$$U'(+0) - U'(-0) = -W,$$

будем называть матрицей Ляпунова, ассоциированной с W. Данные три условия также будем называть, соответственно, динамическим, симметрическим и алгебраическим свойствами матрицы Ляпунова.

В теории функционалов Ляпунова—Красовского исследование матриц Ляпунова играет ту же роль, что и исследование матричного уравнения Ляпунова во втором методе Ляпунова. Критерий существования матриц Ляпунова практически дословно повторяет критерий единственности решения матричного уравнения Ляпунова.

Определение 1.8. Будем говорить, что система (1.4) удовлетворяет условию Ляпунова, если у нее нет пары собственных чисел расположенных симметрично относительно нуля комплексной плоскости. Иначе говоря, для любых $s_1, s_2 \in \Lambda$ выполняется $s_1 + s_2 \neq 0$.

Заметим, что если выполнено условие Ляпунова, то у системы (1.4) не может быть чисто мнимых собственных чисел. Действительно, из вещественности $Q(\theta)$ следует, что $F(\bar{s}) = \overline{F(s)}$, так что если $s_0 = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, есть собственное число, то и $\bar{s}_0 = -i\omega = -s_0$ будет собственным числом системы. Значит, при выполнении условия Ляпунова спектр системы Λ можно разбить на две части: Λ_+, содержащую собственные числа с положительными вещественными частями, и Λ_-, содержащую собственные числа с отрицательными вещественными частями. Отметим, что множество Λ_+ не более чем конечно ([20], см. также следствие 6.3).

Теорема 1.6 ([41, 51]). *Если система* (1.4) *удовлетворяет условию Ляпунова, то*

$$\begin{aligned} U(t) = \sum_{s\in\Lambda_+} \operatorname{res}_s[H^T(s)WH(-s)e^{-ts}] + \sum_{s\in\Lambda_+} \operatorname{res}_s[H^T(-s)WH(s)e^{ts}] \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} H^T(\omega)WH(-\omega)e^{-t\omega}d\omega, \end{aligned} \tag{1.6}$$

есть единственная матрица Ляпунова системы (1.4), *ассоциированная с* W. *Обратное тоже верно: если для любой симметрической матрицы* W *найдется единственная ассоциированная с ней матрица Ляпунова, то выполняется условие Ляпунова.*

Из теоремы 1.2 следует, что в случае экспоненциальной устойчивости условие Ляпунова заведомо выполнено и $\Lambda_+ = \varnothing$. Значит в (1.6) остается только интегральный член и выражение для матриц Ляпунова можно упростить, перейдя от частотной области к временной.

Теорема 1.7 ([51]). *Если система* (1.4) *экспоненциально устойчива, то матрица*

$$U(t) = \int_0^\infty K^T(\theta) W K(t+\theta) d\theta, \quad t \geqslant 0,$$

и $U(t) = U^T(-t)$ *при* $t < 0$, *является (единственной) матрицей Ляпунова системы* (1.4), *ассоциированной с* W.

Ранее отмечалось, что функционалы полного типа допускают квадратичные оценки сверху и снизу. Сформулируем данные результаты.

Теорема 1.8 ([51]). *Предположим, что система* (1.4) *является экспоненциально устойчивой, а матрицы* W_0, W_1, W_2 *положительно определены. Тогда найдутся положительные числа* β_1, β_2, *что для всех* $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ *выполняется*

$$\beta_1 \left\|\varphi(0)\right\|^2 + \beta_2 \int_{-h}^0 \left\|\varphi(\xi)\right\|^2 d\xi \leqslant v(\varphi).$$

Теорема 1.9 ([51]). *Предположим, что система* (1.4) *удовлетворяет условию Ляпунова, а матрицы* W_0, W_1, W_2 *симметрические. Тогда найдутся положительные числа* δ_1, δ_2, *что для всех* $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ *выполняется*

$$v(\varphi) \leqslant \delta_1 \left\|\varphi(0)\right\|^2 + \delta_2 \int_{-h}^0 \left\|\varphi(\xi)\right\|^2 d\xi.$$

Из теорем 1.5, 1.6, 1.8, 1.9 следует, что теорема Красовского 1.3 является для линейных систем с запаздыванием не только достаточным, но и необходимым условием экспоненциальной устойчивости.

1.5. Построение матриц Ляпунова для систем с одним запаздыванием

В следующих главах данной работы будет обсуждаться вопросы, связанные с построением матриц Ляпунова для некоторых классов систем с запаздыванием. Для более предметного анализа кратко изложим уже известную теорию нахождения матриц Ляпунова для систем с одним запаздыванием (1.1).

Лемма 1.10 ([49]). *Пусть* $U(t)$ *есть некоторая матрица Ляпунова системы* (1.1), *ассоциированная с* W. *Определим функции*

$$Z(t) = U(t), \quad V(t) = U(t-h).$$

Тогда

$$\begin{cases} Z'(t) = Z(t)A_0 + V(t)A_1, \\ V'(t) = -A_0^T V(t) - A_1^T Z(t), \end{cases} \tag{1.7}$$

а также выполняются соотношения

$$\begin{cases} Z(0) = V(h), \\ Z(0)A_0 + A_0^T V(h) + V(0)A_1 + A_1^T Z(h) = -W. \end{cases} \tag{1.8}$$

Таким образом, можно построить вспомогательную систему (1.7), (1.8) уже не содержащую уравнений с запаздыванием, решение которой порождается матрицами Ляпунова. То, что возможно и обратное, устанавливает следующая

Лемма 1.11 ([49]). *Пусть существует решение системы* (1.7)*, удовлетворяющее* (1.8)*, тогда матричная функция* $U(t)$*, определенная как*

$$U(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[Z(t) + V^T(h-t)\right], & t \in [0, h], \\ \frac{1}{2}\left[V(h+t) + Z^T(-t)\right], & t \in [-h, 0), \end{cases}$$

является матрицей Ляпунова системы (1.1)*, ассоциированной с* W*.*

Здесь пока не накладывается никах ограничений на систему (1.1) и матриц Ляпунова, ассоциированных с W может быть как несколько, так и не существовать вовсе. Гораздо интереснее случай, когда выполнено условие Ляпунова и матрица Ляпунова единственна. Если решение единственно, то выражение для матриц Ляпунова можно несколько упростить.

Теорема 1.12 ([49]). *Пусть существует единственное решение* $(Z(t), V(t))$ *системы* (1.7)*, удовлетворяющее* (1.8)*, тогда матричная функция* $U(t)$*, определенная как*

$$U(t) = \begin{cases} Z(t), & t \in [0, h], \\ Z^T(-t), & t \in [-h, 0), \end{cases}$$

является единственной матрицей Ляпунова системы (1.1)*, ассоциированной с* W*.*

Тем самым из единственности решения граничной задачи следует условие Ляпунова. Верно и обратное.

Теорема 1.13 ([49]). *Решение вспомогательной системы* (1.7) *с граничными условиями* (1.8) *существует и единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие Ляпунова.*

Можно сделать вывод, что граничная задача (1.7), (1.8) полностью решает вопрос нахождения матриц Ляпунова для систем с одним запаздыванием.

1.6. Произведение и сумма Кронекера

В дальнейшем в работе потребуется использование произведения Кронекера. Напомним связанные с ним понятия.

Произведение Кронекера матриц M и N будем обозначать $M \otimes N$, то есть

$$M \otimes N = \begin{pmatrix} m_{11}N & \dots & m_{1q}N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1}N & \dots & m_{pq}N \end{pmatrix},$$

где m_{ij} – соответствующие компоненты матрицы M. Заметим, что если для матриц M, N, S, T существуют произведения MS и NT, то

$$(M \otimes N)(S \otimes T) = \begin{pmatrix} m_{11}N & \dots & m_{1q}N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1}N & \dots & m_{pq}N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11}T & \dots & s_{1r}T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{q1}T & \dots & s_{qr}T \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{q} m_{1i}s_{i1}NT & \dots & \sum\limits_{i=1}^{q} m_{1i}s_{ir}NT \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{q} m_{pi}s_{i1}NT & \dots & \sum\limits_{i=1}^{q} m_{pi}s_{ir}NT \end{pmatrix} = MS \otimes NT.$$

Будем писать $\operatorname{vect} X$ для обозначения вектора, получаемого из матрицы X последовательным записыванием ее столбцов один под другим, начиная с первого. Векторизация и произведение Кронекера связаны соотношением

$$\operatorname{vect}(AXB) = (B^T \otimes A) \operatorname{vect} X.$$

Покажем, что $e^{M \otimes E} = e^M \otimes E$. Действительно,

$$e^{M \otimes E} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(M \otimes E)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{M^j \otimes E}{j!} = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{M^j}{j!} \right] \otimes E = e^M \otimes E.$$

Аналогично проверяется, что $e^{E\otimes M} = E \otimes e^M$.

Также потребуется и сумма Кронекера двух квадратных матриц M размерности $m\times m$ и N размерности $n\times n$, определяемая как $M\oplus N = M\otimes E_n + E_m\otimes N$. Ее основной свойство заключается в том, что $e^{M\oplus N} = e^M \otimes e^N$.

Действительно, нетрудно видеть, что $(M \otimes E_n)(E_m \otimes N) = M \otimes N = (E_m \otimes N)(M \otimes E_n)$, откуда следует, что

$$e^{M\otimes E_n + E_m\otimes N} = e^{M\otimes E_n} e^{E_m\otimes N} = (e^M \otimes E_n)(E_m \otimes e^N) = e^M \otimes e^N.$$

Глава 2. Матрицы Ляпунова для систем с экспоненциальным ядром

Данная глава посвящена построению матриц Ляпунова для систем с распределенным запаздыванием и экспоненциальным ядром. Исследуется граничная задача, рассмотренная в статье [48] и предлагаются новые граничные условия. Показывается, что новая граничная задача позволяет полностью повторить для рассматриваемого класса систем все результаты, полученные в [49] для систем с одним запаздыванием.

2.1. Постановка задачи

Будем рассматривать системы вида

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \sum_{i=1}^{m} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) B_i x(t+\theta) d\theta, \tag{2.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$, матрицы A_0, A_1, B_i вещественные и имеют размерность $n \times n$, а скалярные функции $\eta_i(\theta)$ удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений

$$\eta_i'(\theta) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \eta_j(\theta), \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Обозначим $\eta(\theta) = (\eta_1(\theta), \dots, \eta_m(\theta))^T$,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\eta'(\theta) = A\eta(\theta)$, а значит $\eta(\theta) = e^{A\theta}\eta(0)$, вследствие чего ядро и было названо экспоненциальным. Следует отметить, что класс систем (2.1) включает в себя и системы с полиномиальными ядрами.

Определение 1.7 для систем класса (2.1) принимает вид:

Определение 2.1. Непрерывная в нуле матрица $U(t)$ называется матрицей Ляпунова системы (2.1), ассоциированной с симметрической матрицей W, если выполнены

1. динамическое свойство: при $t > 0$

$$U'(t) = U(t)A_0 + U(t-h)A_1 + \sum_{i=1}^{m} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta)U(t+\theta)B_i d\theta,$$

2. симметрическое свойство:

$$U(-t) = U^T(t),$$

3. алгебраическое свойство:

$$U'(+0) - U'(-0) = -W.$$

Ставится задача конструктивного нахождения матриц Ляпунова для систем вида (2.1).

2.2. Вспомогательная система

Аналогично случаю систем с одним запаздыванием в работе [48] была предложена граничная задача для системы дифференциальных уравнений без запаздывания, решением которой является матрица Ляпунова. А именно, было доказано следующее утверждение:

Лемма 2.1. *Пусть $U(t)$ есть некоторая матрица Ляпунова, ассоциированная с W. Определим функции*

$$\begin{aligned} Z(t) &= U(t), & X_i(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta)U(t+\theta)d\theta, \\ V(t) &= U(t-h), & Y_i(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta)V(t-\theta)d\theta, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $i = 1, \ldots, m$.

Тогда

$$\begin{cases} Z'(t) = Z(t)A_0 + V(t)A_1 + \sum_{i=1}^{m} X_i(t)B_i, \\ V'(t) = -A_0^T V(t) - A_1^T Z(t) - \sum_{i=0}^{m} B_i^T Y_i(t), \\ X_i'(t) = \eta_i(0)Z(t) - \eta_i(-h)V(t) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} X_j(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \\ Y_i'(t) = \eta_i(-h)Z(t) - \eta_i(0)V(t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} Y_j(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \end{cases} \tag{2.3}$$

а также выполняются соотношения

$$\begin{cases} Z(0) = V(h), \\ X_i(0) = Y_i^T(h), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \\ Y_i(0) = X_i^T(h), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \\ Z(0)A_0 + A_0^T V(h) + V(0)A_1 + A_1^T Z(h) + \sum\limits_{i=1}^{m} \big[X_i(0)B_i + B_i^T Y_i(h)\big] = -W. \end{cases} \tag{2.4}$$

Возникает естественная идея воспользоваться системой (2.3), (2.4) для нахождения матриц Ляпунова. Однако в отличие от случая с одним запаздыванием в статье [48] не приводятся обратные результаты, гарантирующие, что любое решение граничной задачи позволяет построить матрицу Ляпунова (ср. с леммой 1.11). Более того, в статье [14] было показано, что для примера, рассмотренного в работе [48], решение граничной задачи всегда не единственно, то есть требуемые обратные результаты получить принципиально невозможно. Сравнив (1.8) и (2.4), отметим, что для систем с одним запаздыванием граничные условия возникают вполне естественно, а для систем с экспоненциальным ядром они были выбраны достаточно произвольным образом. Поэтому рассмотрим новые граничные условия:

$$X_i(0) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(h+\theta)d\theta, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{2.5a}$$

$$X_i(h) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(h+\theta)d\theta, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{2.5b}$$

$$Y_i(0) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(-\theta)d\theta, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{2.5c}$$

$$Y_i(h) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(-\theta)d\theta, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{2.5d}$$

Сперва покажем, что не все из условий (2.5) являются независимыми. Для упрощения обозначений запишем

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \dots \\ X_m(t) \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ \dots \\ Y_m(t) \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.2. *Для любого решения* $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$ *системы уравнений* (2.3)

1. (2.5a) *выполнено тогда и только тогда, когда* (2.5b),

2. (2.5c) *выполнено тогда и только тогда, когда* (2.5d).

Доказательство. Поскольку доказательства пунктов 1 и 2 леммы полностью аналогичны, покажем, что утверждение верно для $X(t)$.

Используя произведение Кронекера, (2.5a), (2.5b) и систему уравнений для $X_i(t)$ из (2.3) перепишем в виде

$$X(0) = \int_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes V(h+\theta)d\theta, \quad X(h) = \int_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes Z(h+\theta)d\theta,$$
$$X'(t) = \eta(0) \otimes Z(t) - \eta(-h) \otimes V(t) - \mathcal{A}X(t),$$

где $\mathcal{A} = A \otimes E$. Ясно, что $e^{\mathcal{A}t} = e^{At} \otimes E$, тогда

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{-\mathcal{A}t}X(0) + \int_0^t \left[e^{A(\xi-t)} \otimes E\right] \left[\eta(0) \otimes Z(\xi) - \eta(-h) \otimes V(\xi)\right] d\xi = \\ &= e^{-\mathcal{A}t}X(0) + \int_0^t \left[e^{A(\xi-t)}\eta(0) \otimes Z(\xi) - e^{A(\xi-t)}\eta(-h) \otimes V(\xi)\right] d\xi = \\ &= e^{-\mathcal{A}t}X(0) + \int_{-h}^{t-h} \left[\eta(\theta+h-t) \otimes Z(h+\theta) - \eta(\theta-t) \otimes V(h+\theta)\right] d\theta. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Если выполнены условия (2.5a), то

$$\begin{aligned} e^{-\mathcal{A}h}X(0) &= \left[e^{-Ah} \otimes E\right] \int_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes V(h+\theta)d\theta = \\ &= \int_{-h}^{0} \eta(\theta-h) \otimes V(h+\theta)d\theta, \end{aligned}$$

что вместе с (2.6) дает (2.5b).

Обратно, если выполнены условия (2.5b), то

$$\begin{aligned} X(h) &= \int_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes Z(h+\theta)d\theta = \\ &= \int_{-h}^{0} \eta(\theta-h) \otimes V(h+\theta)d\theta + \\ &\quad + \int_{-h}^{0} \left[\eta(\theta) \otimes Z(h+\theta) - \eta(\theta-h) \otimes V(h+\theta)\right] d\theta. \end{aligned}$$

Сравнив с (2.6), получим

$$X(0) = e^{\mathcal{A}h} \int_{-h}^{0} \eta(\theta - h) \otimes V(h+\theta) d\theta = \int_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes V(h+\theta) d\theta. \qquad \blacksquare$$

Следствие 2.3. *Для любого решения* $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$ *системы уравнений* (2.3), *удовлетворяющего условиям* (2.5) *имеем*

$$\begin{aligned} X_i(t) &= \int_{-h}^{-t} \eta_i(\theta) V(t+h+\theta) d\theta + \int_{-t}^{0} \eta_i(\theta) Z(t+\theta) d\theta, \\ Y_i(t) &= \int_{-h}^{t-h} \eta_i(\theta) Z(t-\theta-h) d\theta + \int_{t-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Доказательство. Действительно, из (2.6) и (2.5a) получим требуемое для $X(t)$. Как и ранее, утверждение для $Y(t)$ доказывается аналогично. $\blacksquare$

Из леммы 2.2 видно, что имеется четыре эквивалентных способа выбрать граничные условия из (2.5): (2.5a) и (2.5c), (2.5a) и (2.5d), (2.5b) и (2.5c), (2.5b) и (2.5d). Из старых граничных условий (2.4) оставим первое и последнее условие:

$$\begin{gathered} Z(0) = V(h), \\ -W = Z(0)A_0 + A_0^T V(h) + V(0)A_1 + A_1^T Z(h) + \sum_{i=1}^{m} \left[X_i(0) B_i + B_i^T Y_i(h) \right], \end{gathered} \tag{2.7}$$

что вместе, например, с условиями (2.5a), (2.5c) даст $2m+2$ условия на $2m+2$ матричных функции $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$. Для простоты далее будем предполагать, что выполняются все условия (2.5), не указывая какая из четырех эквивалентных формулировок граничных условий была выбрана.

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 2.4. *Пусть* $U(t)$ *— матрица Ляпунова уравнения* (2.1), *ассоциированная с* W. *Тогда вспомогательные функции, определяемые* (2.2), *являются решением граничной задачи* (2.3), (2.5), (2.7).

Итак, была получена новая вспомогательная система. Покажем, что она решает поставленную задачу.

Лемма 2.5. *Пусть существует решение системы* (2.3), *удовлетворяющее* (2.5), (2.7), *тогда матричная функция* $U(t)$, *определенная как*

$$U(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[Z(t) + V^T(h-t)\right], & t \in [0, h], \\ \frac{1}{2}\left[V(h+t) + Z^T(-t)\right], & t \in [-h, 0), \end{cases}$$

является матрицей Ляпунова системы (2.1), *ассоциированной с* W.

Доказательство. По построению, $U^T(t) = U(-t)$ для всех $t \neq 0$, покажем, что это верно и для $t = 0$:

$$U(0) = \frac{1}{2}\left[Z(0) + V^T(h)\right] = \frac{1}{2}\left[V(h) + Z^T(0)\right] = U^T(0).$$

Значит $U(t)$ удовлетворяет свойству симметрии.

Пусть теперь $t \in (0, h]$, тогда

$$U'(t) = U(t)A_0 + U(t-h)A_1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}\left[X_i(t) + Y_i^T(h-t)\right] B_i.$$

Из следствия 2.3 получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[X_i(t) + Y_i^T(h-t)\right] = \frac{1}{2}\int_{-h}^{-t} \eta_i(\theta)\left[V(h+t+\theta) + Z^T(-t-\theta)\right] d\theta + \\ + \frac{1}{2}\int_{-t}^{0} \eta_i(\theta)\left[Z(t+\theta) + V^T(h-t-\theta)\right] d\theta = \\ = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) U(t+\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Из полученных равенств следует динамическое свойство:

$$U'(t) = U(t)A_0 + U(t-h)A_1 + \sum_{i=1}^{m} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) U(t+\theta) B_i d\theta.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} U'(+0) - U'(-0) = \frac{1}{2}\left[Z'(0) - V'^T(h)\right] - \frac{1}{2}\left[V'(h) - Z'^T(0)\right] = \\ = \frac{1}{2}\left[Z'(0) - V'(h)\right] + \frac{1}{2}\left[Z'(0) - V'(h)\right]^T = \\ = -\frac{1}{2}W - \frac{1}{2}W^T = -W, \end{aligned}$$

то есть алгебраическое свойство также выполнено, а значит $U(t)$ является матрицей Ляпунова системы (2.1), ассоциированной с W. ■

Лемма 2.5 позволяет находить матрицу Ляпунова по решении системы дифференциальных уравнений с граничными условиями. Уже это есть значительное усиление результатов, полученных в [48] для старой граничной задачи. Далее будет показано, что для новой граничной задачи возможно построение теории полностью аналогичной случаю систем с одним запаздыванием.

Теорема 2.6. *Пусть существует единственное решение* $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$ *системы* (2.3), *удовлетворяющее* (2.5), (2.7), *тогда матричная функция* $U(t)$, *определенная как*

$$U(t) = \begin{cases} Z(t), & t \in [0, h], \\ Z^T(-t), & t \in [-h, 0), \end{cases}$$

является единственной матрицей Ляпунова системы (2.1), *ассоциированной с* W.

Доказательство. Проверим сначала, что набор

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}(t) &= V^T(h-t), \\ \widetilde{V}(t) &= Z^T(h-t), \\ \widetilde{X}_i(t) &= Y_i^T(h-t), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \\ \widetilde{Y}_i(t) &= X_i^T(h-t), \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \end{aligned}$$

является решением той же граничной задачи. Тогда из единственности и леммы 2.5 будет следовать, что определенная в формулировке теоремы матричная функция $U(t)$ есть ассоциированная с W матрица Ляпунова системы (2.1).

Действительно,

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}'(t) &= V^T(h-t)A_0 + Z^T(h-t)A_1 + \sum_{i=0}^{m} Y_i^T(h-t)B_i = \\ &= \widetilde{Z}(t)A_0 + \widetilde{V}(t)A_1 + \sum_{i=0}^{m} \widetilde{X}_i(t)B_i, \\ \widetilde{V}'(t) &= -A_0^T Z(h-t) - A_1^T V(h-t) - \sum_{i=1}^{m} B_i^T X_i(h-t) = \\ &= -A_0^T \widetilde{V}(t) - A_1^T \widetilde{Z}(t) - \sum_{i=1}^{m} B_i^T \widetilde{X}_i(t), \end{aligned}$$

$$\widetilde{X}_i'(t) = \eta_i(0)V^T(h-t) - \eta_i(-h)Z^T(h-t) - \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} Y_j^T(h-t) =$$

$$= \eta_i(0)\widetilde{Z}(t) - \eta_i(-h)\widetilde{V}(t) - \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\widetilde{X}_j(t),$$

$$\widetilde{Y}_i'(t) = \eta_i(-h)V^T(h-t) - \eta_i(0)Z^T(h-t) + \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} X_j^T(h-t) =$$

$$= \eta_i(-h)\widetilde{Z}(t) - \eta_i(0)\widetilde{V}(t) + \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\widetilde{Y}(t).$$

Нетрудно проверить и граничные условия

$$\widetilde{Z}(0) = V^T(h) = Z^T(0) = \widetilde{V}(h),$$

$$\widetilde{Z}(0)A_0 + A_0^T\widetilde{V}(h) + \widetilde{V}(0)A_1 + A_1^T\widetilde{Z}(h) + \sum_{i=1}^m \left[\widetilde{X}_i(0)B_i + B_i^T\widetilde{Y}_i(h)\right] =$$

$$= V^T(h)A_0 + A_0^T Z^T(0) + Z^T(h)A_1 + A_1^T V^T(0) + \sum_{i=1}^m \left[Y_i^T(h)B_i + B_i^T X_i^T(0)\right] =$$

$$= -W^T = -W,$$

$$\widetilde{X}_i(0) = \int_{-h}^0 \eta_i(\theta)Z^T(-\theta)d\theta = \int_{-h}^0 \eta_i(\theta)\widetilde{V}(h+\theta)d\theta,$$

$$\widetilde{Y}_i(0) = \int_{-h}^0 \eta_i(\theta)Z^T(h+\theta)d\theta = \int_{-h}^0 \eta_i(\theta)\widetilde{V}(-\theta)d\theta.$$

Здесь согласно лемме 2.2 достаточно было проверить только две группы условий.

Итак, $U(t)$ — матрица Ляпунова. То что она при этом единственна снова следует из единственности решения граничной задачи. Действительно, по лемме 2.4 формулы (2.2) задают решение вспомогательной системы, удовлетворяющее граничным условиям. Очевидно, для различных матриц Ляпунова (ассоциированных с одной и той же матрицей W) эти решения будут различны, чего по условию теоремы не может быть, то есть не может существовать двух различных матриц Ляпунова. ■

С практической точки зрения наиболее интересным представляется случай, когда существует единственная матрица Ляпунова. Из доказанной теоремы следует, что для этого достаточно, чтобы вспомогательная система имела единственное решение. Поэтому важно выяснить, когда же это условие выполнено.

Если мы покажем, что оно эквивалентно условию Ляпунова, то тем самым будет установлено, что единственность матрицы Ляпунова равносильна единственности решения вспомогательной системы с граничными условиями. Таким образом будет показано, что граничная задача хорошо поставлена. Установим сперва несколько промежуточных результатов.

2.3. Матричная форма вспомогательной системы

Покажем, что для решения граничной задачи (2.3), (2.5), (2.7) достаточно решить одну систему линейных уравнений. Тем самым мы также получим и простой способ ее решения, который хотя может не быть наиболее эффективным с численной точки зрения, достаточно удобен в теоретических целях. Обозначим

$$\begin{aligned} z(t) &= \mathrm{vect}(Z(t)), \\ v(t) &= \mathrm{vect}(V(t)), \\ x_i(t) &= \mathrm{vect}(X_i(t)), \\ y_i(t) &= \mathrm{vect}(Y_i(t)), \end{aligned} \qquad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}.$$

Векторизуя систему (2.3), получим

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z(t) \\ y(t) \\ x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{B} & \mathbf{0} \\ -\mathfrak{A}_1 & -\mathfrak{A}_0 & \mathbf{0} & -\mathfrak{B} \\ \eta(0)\otimes E & -\eta(-h)\otimes E & -A\otimes E & \mathbf{0} \\ \eta(-h)\otimes E & -\eta(0)\otimes E & \mathbf{0} & A\otimes E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ y(t) \\ x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= A_0^T \otimes E, \quad \mathcal{A}_1 = A_1^T \otimes E, \\ \mathfrak{A}_0 &= E \otimes A_0^T, \quad \mathfrak{A}_1 = E \otimes A_1^T, \\ \mathcal{B} &= \begin{pmatrix} B_1^T \otimes E & \dots & B_m^T \otimes E \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{B} &= \begin{pmatrix} E \otimes B_1^T & \dots & E \otimes B_m^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Пусть L есть матрица полученной системы, тогда граничные условия можно представить в виде

$$\left[M - \int_{-h}^{0} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \eta(\theta) \otimes \mathcal{E} e^{L(h+\theta)} \\ \eta(\theta) \otimes \mathcal{E} e^{-L\theta} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} d\theta + N e^{Lh}\right] \begin{pmatrix} z(0) \\ y(0) \\ x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \operatorname{vect} W \end{pmatrix}, \qquad (2.9)$$

где

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n^2 \times n^2} & E_{n^2} & \mathbf{0}_{n^2 \times mn^2} & \mathbf{0}_{n^2 \times mn^2} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E \\ \mathcal{A}_0 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -E & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_0 & \mathbf{0} & \mathfrak{B} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для решения граничной задачи достаточно найти значение в нуле $(z(0), y(0), x(0), y(0))$ из уравнения (2.9). Покажем, что интегральный член можно свести к вычислению матричной экспоненты.

Лемма 2.7. *Для любой квадратной матрицы L и любой матрицы B такой, что существует произведение BL, выполнено*

$$\exp \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & L \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} E & B \int_0^t e^{L\tau} d\tau \\ \mathbf{0} & e^{Lt} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Так как степенной ряд для матричной экспоненты можно интегрировать почленно, то

$$\exp \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & L \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & BL^{k-1} \\ \mathbf{0} & L^k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E & B \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^{k+1}}{(k+1)!} L^k \\ \mathbf{0} & \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{k!} L^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & B \int_0^t e^{L\tau} d\tau \\ \mathbf{0} & e^{Lt} \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Используя эту лемму, можно показать, что

$$\exp \left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & E_m \otimes \mathcal{E} \\ \mathbf{0} & A \oplus L \end{pmatrix} h \right] \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \eta(-h) \otimes I_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes \mathcal{E} e^{L(h+\theta)} d\theta \\ \eta(0) \otimes e^{Lh} \end{pmatrix},$$

$$\exp\left[-\begin{pmatrix}\mathbf{0} & -E_m\otimes\mathcal{E}\\ \mathbf{0} & A\oplus(-L)\end{pmatrix}h\right]\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \eta(0)\otimes I_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\int_{-h}^{0}\eta(\theta)\otimes\mathcal{E}e^{-L\theta}d\theta\\ \eta(-h)\otimes e^{Lh}\end{pmatrix}.$$

Установим, например, первое из этих тождеств:

$$\exp\left[\begin{pmatrix}\mathbf{0} & E_m\otimes\mathcal{E}\\ \mathbf{0} & A\oplus L\end{pmatrix}h\right]\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \eta(-h)\otimes E_l\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\displaystyle\int_0^h(E_m\otimes\mathcal{E})(e^{At}\otimes e^{Lt})(\eta(-h)\otimes E_l)dt\\ (e^{Ah}\otimes e^{Lh})(\eta(-h)\otimes E_l)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\displaystyle\int_{-h}^{0}\eta(\theta)\otimes\mathcal{E}e^{L(h+\theta)}d\theta\\ \eta(0)\otimes e^{Lh}\end{pmatrix},$$

где было использовано соотношение $e^{A(h+\theta)}\eta(-h)=\eta(\theta)$.

2.4. Единственность решения граничной задачи

В предыдущем разделе проблема решения граничной задачи была сведена к решению системы (2.9). Но система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда единственным решением однородной системы является тривиальное. Таким образом, для разрешения поставленного ранее вопроса об эквивалентности условия Ляпунова и единственности решения граничной задачи следует сперва выяснить свойства решений при $W=\mathbf{0}$.

Лемма 2.8. *Пусть* $(Z(t),V(t),X(t),Y(t))$ *– решение системы* (2.3)*, удовлетворяющее* (2.5)*,* (2.7) *при* $W=\mathbf{0}$*. Тогда для всех* $t\in\mathbb{R}$ *выполняется*

$$Z(t)=V(h+t).$$

Доказательство. Из (2.8) видно, что любое решение системы (2.3) является матричной функцией, элементы которой аналитичны. Отсюда, в частности, следует, что любое решение бесконечное число раз непрерывно дифференцируемо; из линейности (2.3) следует, что $(Z'(t),V'(t),X'(t),Y'(t))$ также будет решением этой системы.

Покажем, что граничные условия с $W = \mathbf{0}$ также выполнены и для производных. Из (2.3), (2.7) и $W = \mathbf{0}$ имеем

$$Z'(0) - V'(h) = Z(0)A_0 + A_0^T V(h) + V(0)A_1 + A_1^T Z(h) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \left[X_i(0)B_i + B_i^T Y_i(h) \right] = \mathbf{0},$$

то есть $Z'(0) = V'(h)$. Далее, интегрируя по частям, получим

$$\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V'(h+\theta) d\theta = \eta_i(0)V(h) - \eta_i(-h)V(0) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \int_{-h}^{0} \eta_j(\theta) V(h+\theta) d\theta = \\ = \eta_i(0)Z(0) - \eta_i(-h)V(0) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} X_j(0) = X_i'(0),$$

$$\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V'(-\theta) d\theta = -\eta_i(0)V(0) + \eta_i(-h)V(h) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \int_{-h}^{0} \eta_j(\theta) V(-\theta) d\theta = \\ = \eta_i(-h)Z(0) - \eta_i(0)V(0) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} Y_j(0) = Y_i'(0),$$

что вместе с леммой 2.2 означает выполнение условий (2.5) для производных. Проверим, что

$$\mathcal{S} = Z'(0)A_0 + A_0^T V'(h) + V'(0)A_1 + A_1^T Z'(h) + \sum_{i=1}^{m} \left[X_i'(0)B_i + B_i^T Y_i'(h) \right] = \mathbf{0}.$$

Заметим, что

$$Z'(0)A_0 + A_0^T V'(h) = V'(h)A_0 + A_0^T Z'(0)$$

и, учитывая, что $V(h) = Z(0)$, подставим выражения для производных из (2.3), тогда

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{m} \left[X_i'(0) + A_0^T X_i(0) + A_1^T X_i(h) \right] B_i + \sum_{i=1}^{m} B_i^T \left[Y_i'(h) - Y_i(h)A_0 - Y_i(0)A_1 \right].$$

Преобразуем выражения в квадратных скобках:

$$X_i'(0) + A_0^T X_i(0) + A_1^T X_i(h) = \\ = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) \left[V'(h+\theta) + A_0^T V(h+\theta) + A_1^T Z(h+\theta) \right] d\theta = \\ = -\sum_{j=1}^{m} B_j^T \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Y_j(h+\theta) d\theta,$$

$$Y_i'(h) - Y_i(h)A_0 - Y_i(0)A_1 =$$
$$= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta)\left[Z'(-\theta) - Z(-\theta)A_0 - V(-\theta)A_1\right] d\theta =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) X_j(-\theta) d\theta B_j.$$

Таким образом,

$$\mathcal{S} = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} B_j^T \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Y_j(h+\theta) d\theta B_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} B_i^T \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) X_j(-\theta) d\theta B_j =$$
$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} B_j^T \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Y_j(h+\theta) d\theta B_i + \sum_{\bar{i}=1}^{m}\sum_{\bar{j}=1}^{m} B_{\bar{j}}^T \int_{-h}^{0} \eta_{\bar{j}}(\theta) X_{\bar{i}}(-\theta) d\theta B_{\bar{i}}.$$

Остается проверить, что

$$\int_{-h}^{0} \eta_j(\theta) X_i(-\theta) d\theta = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Y_j(h+\theta) d\theta,$$

Действительно, применяя следствие 2.3 и переставляя порядок интегрирования, имеем

$$\int_{-h}^{0} \eta_j(\theta) X_i(-\theta) d\theta =$$
$$= \int_{-h}^{0} \eta_j(\theta) \left[\int_{-h}^{\theta} \eta_i(\xi) V(-\theta+h+\xi) d\xi + \int_{\theta}^{0} \eta_i(\xi) Z(-\theta+\xi) d\xi\right] d\theta =$$
$$= \int_{-h}^{0} \eta_i(\xi) \left[\int_{\xi}^{0} \eta_j(\theta) V(h+\xi-\theta) d\theta + \int_{-h}^{\xi} \eta_j(\theta) Z(\xi-\theta) d\theta\right] d\xi =$$
$$= \int_{-h}^{0} \eta_i(\xi) Y_j(h+\xi) d\xi.$$

Значит, $\mathcal{S} = \mathbf{0}$, что завершает проверку выполнения граничных условий для производных. Но теперь по индукции нетрудно показать, что для всех $k \geqslant 0$ набор функций $(Z^{(k)}(t), V^{(k)}(t), X^{(k)}(t), Y^{(k)}(t))$ является решением системы (2.3) с граничными условиями (2.5), (2.7) при $W = \mathbf{0}$. В частности, для всех $k \geqslant 0$ верны равенства

$$Z^{(k)}(0) = V^{(k)}(h).$$

Но это значит, что две аналитических на $\mathbb{R}$ функции $Z(t)$ и $V(h+t)$ вместе со всеми своими производными равны между собой при $t = 0$, а следовательно и тождественно равны, что и требовалось доказать. ■

Из леммы 2.8 и следствия 2.3 непосредственно получим:

Следствие 2.9. *Пусть* $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$ *– решение системы* (2.3)*, удовлетворяющее* (2.5)*,* (2.7) *при* $W = \mathbf{0}$*. Тогда для всех* $t \in \mathbb{R}$ *выполняется*

$$X_i(t) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(t+\theta) d\theta, \quad Y_i(t) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta.$$

Теперь в нашем распоряжении есть все необходимое, чтобы установить эквивалентность условия Ляпунова и единственность решения граничной задачи.

Теорема 2.10. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Существует единственное решение вспомогательной системы* (2.3) *с граничными условиями* (2.5)*,* (2.7)*.*
2. *Существует единственная матрица Ляпунова, ассоциированная с* W*.*
3. *Система* (2.1) *удовлетворяет условию Ляпунова.*

Доказательство.

То, что из 1 следует 2 было доказано в теореме 2.6. Эквивалентность условий 2 и 3 также хорошо известна (см. теорему 1.6). Покажем, что из 3 следует 1, а точнее, что если утверждение 1 не выполнено, то не выполнено и условие Ляпунова. Как было отмечено ранее, вспомогательная граничная задача сводится к решению системы алгебраических уравнений (2.9). Значит, если решение вспомогательной задачи или не существует, или не единственно, то соответствующая однородная система должна иметь нетривиальное решение. Это означает, что существует нетривиальное решение $(Z(t), V(t), X(t), Y(t)) \not\equiv \mathbf{0}$ для $W = \mathbf{0}$.

Для данного решения по лемме 2.8 и следствию 2.9 имеем

$$\begin{aligned} V(t) &= Z(t-h), \\ X_i(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(t+\theta) d\theta, \\ Y_i(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Из этих соотношений очевидно, что $Z(t) \not\equiv \mathbf{0}$ (в противном случае решение тривиально). Аналогично, $V(t) \not\equiv \mathbf{0}$.

Любое решение системы (2.3) имеет вид

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\mathcal{P}_k(t), \quad V(t) = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\mathcal{Q}_k(t), \\ X_i(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\mathcal{R}_{ik}(t), \;\; Y_i(t) = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\mathcal{S}_{ik}(t), \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $1 \leqslant i \leqslant m$, $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ — различные собственные числа системы (2.3), $\mathcal{P}_k(t), \mathcal{Q}_k(t)$, $\mathcal{R}_{ik}(t), \mathcal{S}_{ik}(t)$ — полиномы с матричными коэффициентами. Так как $Z(t) \not\equiv \mathbf{0}$, то для некоторого номера d выполнено $\mathcal{P}_d(t) \not\equiv \mathbf{0}$, то есть $\mathcal{P}_d(t) = t^l P_0 + \ldots + P_l$ с $P_0 \neq \mathbf{0}$. Но тогда

$$V(t) = Z(t-h) = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} e^{-s_k h}\mathcal{P}_k(t-h),$$

откуда $\deg \mathcal{Q}_d(t) = l$ и старший коэффициент $\mathcal{Q}_d(t)$ равен $P_0 e^{-s_d h}$. Далее,

$$\begin{aligned} X_i(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(t+\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s_k \theta}\mathcal{P}_k(t+\theta) d\theta, \\ Y_i(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{-s_k \theta}\mathcal{Q}_k(t-\theta) d\theta, \end{aligned}$$

значит $\deg \mathcal{R}_{id}(t) \leqslant l$, $\deg \mathcal{S}_{id}(t) \leqslant l$, и полиномы $\mathcal{R}_{id}(t)$, $\mathcal{S}_{id}(t)$ имеют при t^l коэффициенты

$$\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s_d \theta} d\theta P_0, \quad e^{-s_d h} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{-s_d \theta} d\theta P_0,$$

соответственно. Подставим представления (2.10) в систему (2.3):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\left[s_k \mathcal{P}_k(t) + \mathcal{P}_k'(t)\right] &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\left[\mathcal{P}_k(t) A_0 + \mathcal{Q}_k(t) A_1 + \sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{ik}(t) B_i\right], \\ \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\left[s_k \mathcal{Q}_k(t) + \mathcal{Q}_k'(t)\right] &= -\sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\left[A_1^T \mathcal{P}_k(t) + A_0^T \mathcal{Q}_k(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i^T \mathcal{S}_{ik}(t)\right]. \end{aligned}$$

Так как все показатели s_k различны, то равенство квазиполиномов возможно только при равенстве полиномиальных множителей, значит

$$s_d \mathcal{P}_d(t) + \mathcal{P}_d'(t) = \mathcal{P}_d(t) A_0 + \mathcal{Q}_d(t) A_1 + \sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{id}(t) B_i,$$

$$-s_d\mathcal{Q}_d(t) - \mathcal{Q}_d'(t) = A_1^T\mathcal{P}_d(t) + A_0^T\mathcal{Q}_d(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i^T\mathcal{S}_{id}(t).$$

Рассматривая коэффициенты при t^l, получим

$$s_dP_0 = P_0\left[A_0 + e^{-s_dh}A_1 + \sum_{i=1}^{m}\int_{-h}^{0}\eta_i(\theta)e^{s_d\theta}B_id\theta\right],$$

$$-s_de^{-s_dh}P_0 = \left[e^{s_dh}A_1^T + A_0^T + \sum_{i=1}^{m}\int_{-h}^{0}\eta_i(\theta)e^{-s_d\theta}B_i^Td\theta\right]e^{-s_dh}P_0.$$

Так как $P_0 \neq \mathbf{0}$, то

$$\det\left[s_dE - A_0 - e^{-s_dh}A_1 - \sum_{i=1}^{m}\int_{-h}^{0}\eta_i(\theta)e^{s_d\theta}B_id\theta\right] = 0,$$

$$\det\left[-s_dE - A_0 - e^{s_dh}A_1 - \sum_{i=1}^{m}\int_{-h}^{0}\eta_i(\theta)e^{-s_d\theta}B_id\theta\right] = 0,$$

значит, как s_d, так и $-s_d$ являются собственными числами системы (2.1). Иначе говоря, условие Ляпунова не выполнено, что и требовалось доказать. ■

2.5. Пример

Рассмотрим пример из статьи [48]:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-1) + \int_{-1}^{0}[\sin(\pi\theta)B_1 + \cos(\pi\theta)B_2]x(t+\theta)d\theta, \qquad (2.11)$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 \\ -0.3 & 0 \end{pmatrix}.$$

В статье [14] было показано, что приведенная в статье [48] допускает не единственное решение (существует четыре линейно независимых решения однородной системы), хотя система (2.11) и удовлетворяет условию Ляпунова, то есть для любой симметрической матрицы W ассоциированная с ней матрица Ляпунова единственна. Таким образом, граничная задача из статьи [48] не подходит для нахождения матрицы Ляпунова, а приведенный в ней график компонент матрицы Ляпунова не воспроизводим.

Рассмотрим, что получается в результате описанного в предыдущих параграфах подхода. Вспомогательная система (2.3) имеет вид

$$\begin{cases} Z'(t) = Z(t)A_0 + V(t)A_1 + X_1(t)B_1 + X_2(t)B_2, \\ V'(t) = -A_0^T V(t) - A_1^T Z(t) - B_1^T Y_1(t) - B_2^T Y_2(t), \\ X_1'(t) = -\pi X_2(t), \\ X_2'(t) = Z(t) + V(t) + \pi X_1(t), \\ Y_1'(t) = \pi Y_2(t), \\ Y_2'(t) = -Z(t) - V(t) - \pi Y_1(t), \end{cases}$$

а граничные условия (2.7), (2.5a), (2.5c) превратятся в

$$\begin{cases} Z(0) = V(h), \\ X_1(0) = \int_{-h}^{0} \sin(\pi\theta) V(h+\theta) d\theta, \\ X_2(0) = \int_{-h}^{0} \cos(\pi\theta) V(h+\theta) d\theta, \\ Y_1(0) = \int_{-h}^{0} \sin(\pi\theta) V(-\theta) d\theta, \\ Y_2(0) = \int_{-h}^{0} \cos(\pi\theta) V(-\theta) d\theta, \\ Z(0)A_0 + A_0^T V(h) + V(0)A_1 + A_1^T Z(h) + \\ \qquad + X_1(0)B_1 + B_1^T Y_1(h) + X_2(0)B_2 + B_2^T Y_2(h) = -W. \end{cases}$$

Корректная матрица Ляпунова для системы (2.11) при $W = E$ приведена на рисунке 1.

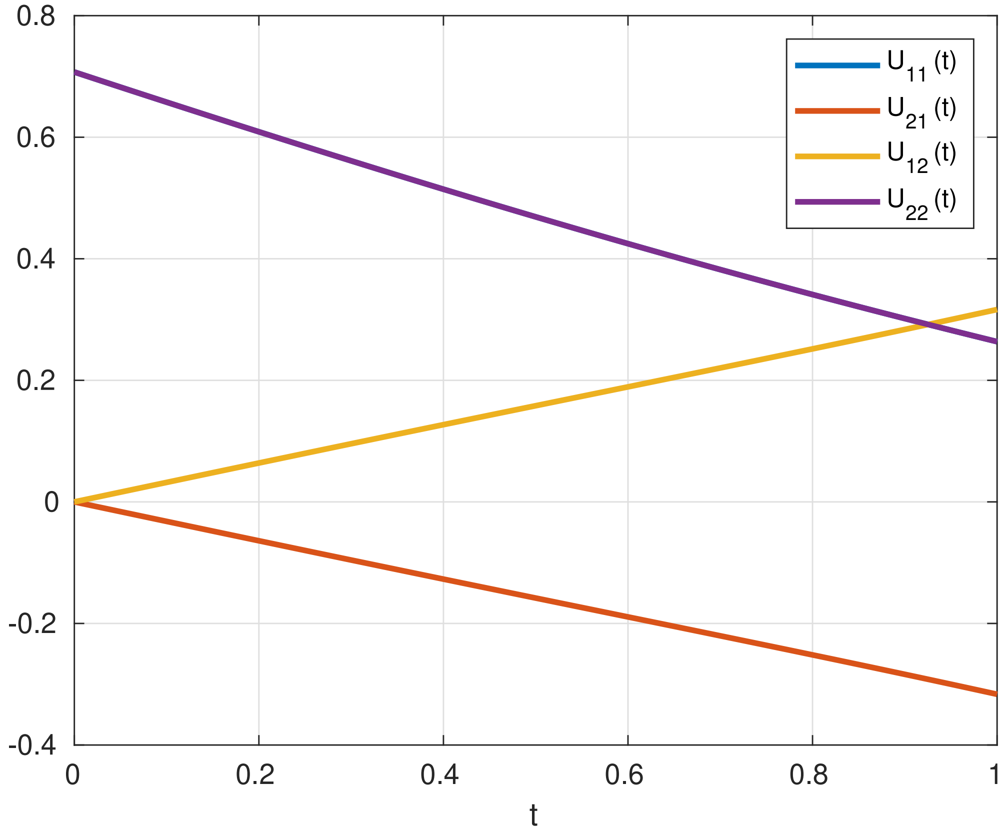

Рис. 1: Компоненты матрицы Ляпунова $U(t)$, $U_{11}(t) = U_{22}(t)$

Глава 3. Расширение пространства состояний и матрицы Ляпунова

В этой главе будет охарактеризован предложенный в статье [38] подход к построению матриц Ляпунова, связанный со сведением задачи к случаю с одним запаздыванием.

3.1. Основные свойства

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \int_{-h}^{0} Ce^{A\theta} B x(t+\theta) d\theta, \quad t \geqslant 0, \tag{3.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, A_0 и A_1 есть квадратные матрицы порядка n, матрица A — квадратная порядка m, матрицы B и C имеют размерности $m \times n$ и $n \times m$, соответственно.

Как и в случае предыдущей главы, система (3.1) имеет экспоненциальное ядро, поэтому первый вопрос на который стоит ответить, — это установление связи между системами вида (2.1) и (3.1).

Лемма 3.1. *Любое ядро $Q(\theta) = Ce^{A\theta}B$ можно представить в виде*

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i(\theta) B_i, \quad \eta'(\theta) = \bar{A}\eta(\theta), \tag{3.2}$$

и наоборот, любое ядро вида (3.2) *можно переписать в виде $Q(\theta) = Ce^{A\theta}B$. Здесь $\eta(\theta) = (\eta_1(\theta), \ldots, \eta_m(\theta))^T$.*

Доказательство. Пусть дано ядро вида $Q(\theta) = Ce^{A\theta}B$, тогда известно, что

$$e^{A\theta} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(\theta) A^{i-1},$$

причем найдется вещественная матрица $\bar{A}$, что $\eta'(\theta) = \bar{A}\eta(\theta)$. Тогда

$$Q(\theta) = C\left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i(\theta) A^{i-1}\right] B = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(\theta) C A^{i-1} B.$$

Обратно, если дано ядро вида (3.2), то

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i(\theta) B_i = \begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(\theta)E \\ \vdots \\ \eta_m(\theta)E \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_m \end{bmatrix} ([e^{A\theta}\eta(0)] \otimes E) =$$

$$= \begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_m \end{bmatrix} ([e^{A\theta} \otimes E][\eta(0) \otimes E]) =$$

$$= \begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_m \end{bmatrix} e^{(A\otimes E)\theta}[\eta(0) \otimes E]. \qquad \blacksquare$$

В работе [38] была предложена следующая идея. Введем новые переменные состояния

$$y(t) = \int_{-h}^{0} e^{A\theta} B x(t+\theta) d\theta, \tag{3.3}$$

и перепишем систему (3.1) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + C y(t) + A_1 x(t-h), \\ \dot{y}(t) = B x(t) - A y(t) - e^{-Ah} B x(t-h). \end{cases} \tag{3.4}$$

Система (3.4) — это система с одним точечным запаздыванием, поэтому для нахождения ее матрицы Ляпунова применимы результаты первой главы. Тем не менее, в статье [38] отмечается, что связь между матрицами Ляпунова исходной системы (3.1) и расширенной системы (3.4) совсем не очевидна. Отметим, что матрица Ляпунова системы (3.1) имеет размерность $n \times n$, а системы (3.4) — $(n+m)\times(n+m)$. Соответственно, матрицы Ляпунова этих систем ассоциированы с матрицами $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$.

Начнем исследование с установления зависимости между решениями двух данных систем.

Лемма 3.2. *Если $\varphi \in PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$, а ψ функция из $PC([-h,0],\mathbb{R}^m)$ такова, что*

$$\psi(0) = \int_{-h}^{0} e^{A\theta} B \varphi(\theta) d\theta, \tag{3.5}$$

то $x(t)$ является решением системы (3.1) с начальной функцией φ тогда и только тогда, когда найдется функция $y(t)$ такая, что пара $(x(t), y(t))$ является решением системы (3.4) с начальными функциями (φ, ψ).

Доказательство.

Необходимость. По решению $x(t)$ системы (3.1) зададим $y(t)$ формулой (3.3) для $t \geqslant 0$ и $y(t) = \psi(t)$ при $t \in [-h, 0)$. Заметим, что $y(0) = \psi(0)$. Ясно, что пара $(x(t), y(t))$ удовлетворяет системе (3.4) с начальными функциями (φ, ψ).

Достаточность. Из второго уравнения системы (3.4) по формуле Коши имеем

$$y(t) = e^{-At}\psi(0) + \int_0^t e^{A(\theta-t)}[Bx(\theta) - e^{-Ah}Bx(\theta-h)]d\theta.$$

Подставив $\psi(0)$ из (3.5), получим

$$y(t) = \int_{-h}^0 e^{A\theta}Bx(t+\theta)d\theta.$$

Используя полученное выражение в первом уравнении системы (3.4), получим, что $x(t)$ есть решение системы (3.1). ■

Довольно показательной оказывается связь между характеристическими функциями двух систем. Прежде чем переходить к установлению данной зависимости и вытекающей из нее следствий, введем некоторые обозначения. Во-первых, положим

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & C \\ B & -A \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ -e^{-Ah}B & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} x(t), \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (3.4) можно записать в виде

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}_0 z(t) + \mathcal{A}_1 z(t-h).$$

Во-вторых, характеристические функции исходной и расширенной систем будем обозначать $f_1(s)$ и $f_2(s)$ соотвественно:

$$f_1(s) = \det\left[sE - A_0 - e^{-sh}A_1 - \int_{-h}^0 e^{s\theta}Ce^{A\theta}Bd\theta\right],$$
$$f_2(s) = \det\left[sE - \mathcal{A}_0 - e^{-sh}\mathcal{A}_1\right].$$

Лемма 3.3. *Выполняется соотношение*

$$f_2(s) = f_1(s)\det[sE + A].$$

Доказательство. Из равенства

$$-B + e^{-sh}e^{-Ah}B = -(sE + A)\int_{-h}^{0} e^{s\xi}e^{A\xi}Bd\xi,$$

получим, что $f_2(s)$ можно представить в виде

$$\det \begin{bmatrix} sE - A_0 - e^{-sh}A_1 - \int_{-h}^{0} e^{s\xi}Ce^{A\xi}Bd\xi & -C \\ \mathbf{0} & sE + A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & \mathbf{0} \\ -\int_{-h}^{0} e^{s\xi}e^{A\xi}Bd\xi & E \end{bmatrix},$$

откуда и следует требуемое. ■

Следствие 3.4. *Система* (3.4) *будет экспоненциально устойчивой тогда и только тогда, когда экспоненциально устойчива система* (3.1)*, а матрица A антигурвицева, то есть все ее собственные числа имеют положительную вещественную часть.*

Следствие 3.5. *Система* (3.4) *удовлетворяет условию Ляпунова тогда и только тогда, когда*

(A) *система* (3.1) *удовлетворяет условию Ляпунова,*

(B) *у системы* (3.1) *и матрицы A нет общих собственных чисел,*

(C) *матрица A удовлетворяет условию Ляпунова.*

Таким образом, может оказаться, что расширенная система не является экспоненциально устойчивой, даже если исходная система была экспоненциально устойчивой. Аналогично, даже если система (3.1) удовлетворяет условию Ляпунова и для любой симметрической матрицы W существует единственная матрица Ляпунова исходной системы, ассоциированная с W, может оказаться, что система (3.4) не удовлетворяет условию Ляпунова, и не существует матрицы Ляпунова расширенной системы, ассоциированной с некоторой симметрической матрицей $\mathcal{W}$. Далее будет выведены дополнительные условия, при выполнении которых нахождение матрицы Ляпунова исходной системы можно свести к вычислению матрицы Ляпунова расширенной системы.

В дальнейшем нам также потребуется связь между фундаментальными матрицами исходной и расширенной систем.

Лемма 3.6. *Пусть дана фундаментальная матрица $K(t)$ системы* (3.1). *Тогда фундаментальную матрицу $\mathcal{K}(t)$ системы* (3.4) *можно найти по формуле*

$$\mathcal{K}(t) = \begin{bmatrix} K_{11}(t) & K_{12}(t) \\ K_{21}(t) & K_{22}(t) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
K_{11}(t) &= K(t),\\
K_{12}(t) &= \int_0^t K(t-\tau)Ce^{-A\tau}d\tau,\\
K_{21}(t) &= \int_{-h}^0 e^{A\theta}BK(t+\theta)d\theta,\\
K_{22}(t) &= e^{-At} + \int_{-h}^0 e^{A\theta}B\left[\int_0^{t+\theta} K(t+\theta-\tau)Ce^{-A\tau}d\tau\right]d\theta.
\end{aligned}$$

Доказательство. Первые n столбцов матрицы $\mathcal{K}(t)$, соответствующие блокам $K_{11}(t)$ и $K_{21}(t)$, удовлетворяют условию (3.5) Леммы 3.2, откуда и следуют соответствующие выражения. Так как

$$K'_{22}(t) = BK_{12}(t) - AK_{22}(t) - e^{-Ah}BK_{12}(t-h),$$

то по формуле Коши

$$\begin{aligned}
K_{22}(t) = e^{-At}K_{22}(0) &+ \int_0^t e^{A(\tau-t)}BK_{12}(\tau)d\tau - \int_0^t e^{A(\tau-t-h)}BK_{12}(\tau-h)d\tau =\\
&= e^{-At} + \int_{-h}^0 e^{A\theta}BK_{12}(t+\theta)d\theta,
\end{aligned}$$

так как $K_{22}(0) = E$, а $K_{12}(t) = \mathbf{0}$ при $t \leqslant 0$. Значит,

$$K'_{12}(t) = A_0K_{12}(t) + A_1K_{12}(t-h) + \int_{-h}^0 Ce^{A\theta}BK_{12}(t+\theta)d\theta + Ce^{-At}.$$

Применяя формулу Коши [20] для уравнений с запаздыванием получим требуемое выражение для $K_{12}(t)$, откуда выражение для $K_{22}(t)$ следует простой подстановкой. ■

3.2. Матрицы Ляпунова исходной и расширенной систем

Аналогично решениям, фундаментальным матрицам и характеристическим функциям хотелось бы найти связь и между матрицами Ляпунова двух рассматриваемых систем. Один из первых вопросов, который возникает при этом, заключается в выборе $\mathcal{W}$ по W. Действительно, симметрическая матрица W определяется по $n(n+1)/2$ компонентам, а для $\mathcal{W}$ нужно задать $(n+m)(n+m+1)/2$ компонент. Определим отображение

$$W \mapsto \bar{W} = \begin{bmatrix} W & \mathbf{0}_{n\times m} \\ \mathbf{0}_{m\times n} & \mathbf{0}_m \end{bmatrix},$$

и по заданной W будет рассматривать матрицы Ляпунова системы (3.4), ассоциированные с $\bar{W}$. Следующая лемма сыграет ключевую роль в дальнейшем анализе, раскрывая структуру матриц Ляпунова расширенной системы, ассоциированных с $\bar{W}$.

Лемма 3.7. *Любая матрица Ляпунова системы* (3.4)*, ассоциированная с* $\bar{W}$ *имеет вид*

$$\mathcal{U}(t) = \begin{bmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ U_{21}(t) & U_{22}(t) \end{bmatrix},$$

где $U_{11}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и*

$$\begin{aligned} U_{12}(t) &= U_{12}(0)e^{-At} + \int_0^t U_{11}(\tau)Ce^{A(\tau-t)}d\tau, \\ U_{21}(t) &= e^{A^Tt}U_{21}(0) - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^TU_{11}(\tau)d\tau, \\ U_{22}(t) &= e^{A^Tt}U_{22}(0) - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^TU_{12}(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Доказательство. Запишем динамическое свойство для $\mathcal{U}(t)$ по блокам:

$$\begin{aligned} U_{11}'(t) &= U_{11}(t)A_0 + U_{12}(t)B + U_{11}(t-h)A_1 - U_{12}(t-h)e^{-Ah}B, \\ U_{12}'(t) &= U_{11}(t)C - U_{12}(t)A, \\ U_{21}'(t) &= U_{21}(t)A_0 + U_{22}(t)B + U_{21}(t-h)A_1 - U_{22}(t-h)e^{-Ah}B, \\ U_{22}'(t) &= U_{21}(t)C - U_{22}(t)A, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $t > 0$. Введем две функции

$$\begin{aligned} S(t) &= e^{A^Tt}U_{21}(0) - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^TU_{11}(\tau)d\tau, \\ T(t) &= e^{A^Tt}U_{22}(0) - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^TU_{12}(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Из свойства симметрии следует, что при $t < 0$ выполняется

$$U'_{21}(t) = -C^T U_{11}(t) + A^T U_{21}(t),$$
$$U'_{22}(t) = -C^T U_{12}(t) + A^T U_{22}(t),$$

откуда выходит, что $S(t) \equiv U_{21}(t)$ и $T(t) \equiv U_{22}(t)$ при $t \leqslant 0$. Докажем, что это верно и для положительных значений t.

Рассмотрим выражение

$$S(t)A_0 + T(t)B = e^{A^T t}[S(0)A_0 + T(0)B] - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)} C^T [U_{11}(\tau)A_0 + U_{12}(\tau)B] d\tau,$$

более того, заметим что,

$$S(-h) = e^{-A^T h} U_{21}(0) - \int_0^{-h} e^{A^T(-h-\tau)} C^T U_{11}(\tau) d\tau,$$

$$S(t-h) = e^{A^T t} e^{-A^T h} U_{21}(0) - e^{A^T t} \int_0^{-h} e^{A^T(-h-\tau)} C^T U_{11}(\tau) d\tau -$$
$$- \int_{-h}^{t-h} e^{A^T(t-h-\tau)} C^T U_{11}(\tau) d\tau =$$
$$= e^{A^T t} S(-h) - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)} C^T U_{11}(\tau - h) d\tau,$$

аналогично,

$$T(t-h) = e^{A^T t} T(-h) - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)} C^T U_{12}(\tau - h) d\tau.$$

Таким образом,

$$S(t)A_0 + T(t)B + S(t-h)A_1 - T(t-h)e^{-Ah}B = -\int_0^t e^{A^T(t-\tau)} C^T U'_{11}(\tau) d\tau +$$
$$+ e^{A^T t}[S(0)A_0 + T(0)B + S(-h)A_1 - T(-h)e^{-Ah}B].$$

Поскольку $S(t) \equiv U_{21}(t)$ и $T(t) \equiv U_{22}(t)$ для $t \leqslant 0$, выражение в квадратных скобках совпадает с $U'_{21}(+0)$. Интегрирование по частям дает

$$-\int_0^t e^{A^T(t-\tau)} C^T U'_{11}(\tau) d\tau =$$
$$= -C^T U_{11}(t) + e^{A^T t} C^T U_{11}(0) - A^T \int_0^t e^{A^T(t-\tau)} C^T U_{11}(\tau) d\tau =$$

$$= e^{A^Tt}C^TU_{11}(0) - e^{A^Tt}A^TU_{21}(0) + A^Te^{A^Tt}U_{21}(0) -$$
$$- C^TU_{11}(t) - A^T\int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^TU_{11}(\tau)d\tau =$$
$$= -e^{A^Tt}U_{21}'(-0) + S'(t).$$

Но тогда,

$$S(t)A_0 + T(t)B + S(t-h)A_1 - T(t-h)e^{-Ah}B =$$
$$= S'(t) + e^{A^Tt}[U_{21}'(+0) - U_{21}'(-0)] =$$
$$= S'(t),$$

так как $U_{21}'(+0) = U_{21}'(-0)$ в силу алгебраического свойства и вида матрицы $\mathcal{W}$.

Далее имеем, что

$$S(t)C - T(t)A = e^{A^Tt}[S(0)C - T(0)A] - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^T[U_{11}(\tau)C - U_{12}(\tau)A]d\tau =$$
$$= e^{A^Tt}U_{22}'(+0) - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^TU_{12}'(\tau)d\tau =$$
$$= e^{A^Tt}[U_{22}'(+0) - U_{22}'(-0)] + T'(t) = T'(t).$$

Но это значит, что функции $(U_{11}(t), U_{12}(t), S(t), T(t))$ при $t > 0$ удовлетворяют системе (3.6), совпадая при этом с решением системы $(U_{11}(t), U_{12}(t), U_{21}(t), U_{22}(t))$ этой же системы (3.6) на отрезке $[-h, 0]$. Из теоремы единственности для систем с запаздыванием [51] следует, что при $t > 0$ выполняется $U_{21}(t) \equiv S(t)$, $U_{22}(t) \equiv T(t)$, что и требовалось доказать. Остающееся выражение для $U_{12}(t)$ теперь непосредственно вытекает из симметрического свойства. ■

Замечание 3.1. Из симметрического свойства также следует, что

$$U_{22}(t) = U_{22}(0)e^{-At} + \int_0^t U_{21}(\tau)Ce^{A(\tau-t)}d\tau.$$

В дальнейшем будем использовать обозначения леммы 3.7 для блоков матрицы $\mathcal{U}(t)$.

Теорема 3.8. *Пусть существует матрица Ляпунова $\mathcal{U}(t)$ системы* (3.4), *ассоциированная с некоторой матрицей $\bar{W}$, тогда $U_{11}(t)$ является матрицей Ляпунова системы* (3.1), *ассоциированной с W.*

Доказательство. Так как $U_{11}(t)$ есть верхний левый блок матрицы $\mathcal{U}(t)$, то из симметрического и алгебраического свойств для $\mathcal{U}(t)$ вытекает выполнение этих же двух свойств для $U_{11}(t)$. Из леммы 3.7 следует, что

$$U_{12}(t)B - U_{12}(t-h)e^{-Ah}B = \int_{t-h}^{t} U_{11}(\tau)Ce^{A(\tau-t)}Bd\tau,$$

откуда

$$U_{11}'(t) = U_{11}(t)A_0 + U_{11}(t-h)A_1 + \int_{-h}^{0} U_{11}(t+\xi)Ce^{A\xi}Bd\xi,$$

а значит динамическое свойство также выполнено и $U_{11}(t)$ является матрицей Ляпунова системы (3.1). ■

Таким образом, мы приходим к выводу, что из матрицы Ляпунова расширенной системы (если такая существует) можно получить матрицу Ляпунова исходной системы. Вместе с тем, следствие 3.5 намекает, что возможна ситуация при которой существует матрица Ляпунова исходной, но не расширенной системы. Возникает естественное желание охарактеризовать такие случаи. Возникающие условия оказываются довольно громоздкими.

Теорема 3.9. *Пусть W есть произвольная симметрическая матрица порядка n. Матрица Ляпунова системы* (3.4)*, ассоциированная с $\bar{W}$, существует тогда и только когда, когда выполнены условия:*

1. *существует матрица Ляпунова $U(t)$ системы* (3.1)*, ассоциированная с W,*
2. *существует матрица $L \in \mathbb{R}^{n\times m}$, удовлетворяющая матричному уравнению*

$$\begin{aligned} LA - A_0^T L - A_1^T L e^{-Ah} - \int_{-h}^{0} B^T e^{A^T\tau} C^T L e^{A\tau} d\tau = \\ = U(0)C + A_1^T \int_0^h U(\tau)Ce^{A(\tau-h)}d\tau + \\ + \int_{-h}^{0} B^T e^{A^T\tau} C^T \int_0^{-\tau} U(\xi)Ce^{A(\xi+\tau)}d\xi d\tau, \end{aligned} \tag{3.7}$$

3. *существует симметрическая матрица $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$, удовлетворяющая матричному уравнению Ляпунова*

$$A^T M + MA = L^T C + C^T L. \tag{3.8}$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть существует матрица Ляпунова $\mathcal{U}(t)$ системы (3.4). В теореме 3.8 было установлено, что $U(t) = U_{11}(t)$ является матрицей Ляпунова системы (3.1). Из алгебраического условия следует, что

$$U_{12}(0)A - U_{11}(0)C = A_0^T U_{12}(0) + B^T U_{22}(0) + A_1^T U_{12}(h) - B^T e^{-A^T h} U_{22}(h),$$
$$U_{21}(0)C - U_{22}(0)A + C^T U_{12}(0) - A^T U_{22}(0) = \mathbf{0}.$$

В лемме 3.7 были получены выражения для блоков матрицы $\mathcal{U}(t)$, подставив их, получим

$$U_{12}(0)A - A_0^T U_{12}(0) - A_1^T U_{12}(0)e^{-Ah} - \int_{-h}^{0} B^T e^{A^T\tau} C^T U_{12}(0) e^{A\tau} d\tau =$$
$$= U(0)C + A_1^T \int_0^h U(\tau) C e^{A(\tau-h)} d\tau + \int_{-h}^{0} B^T e^{A^T\tau} C^T \int_0^{-\tau} U(\xi) C e^{A(\xi+\tau)} d\xi d\tau,$$
$$A^T U_{22}(0) + U_{22}(0)A = U_{12}^T(0)C + C^T U_{12}(0).$$

Таким образом, матрицы $L = U_{12}(0)$ и $M = U_{22}(0) = U_{22}^T(0)$, удовлетворяют уравнениям (3.7) и (3.8), соответственно.

Достаточность. Положим

$$\begin{aligned}
U_{11}(t) &= U(t),\\
U_{12}(t) &= Le^{-At} + \int_0^t U_{11}(\tau) C e^{A(\tau-t)} d\tau,\\
U_{21}(t) &= e^{A^T t} L^T - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)} C^T U_{11}(\tau) d\tau,\\
U_{22}(t) &= e^{A^T t} M - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)} C^T U_{12}(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Покажем, что матрица $\mathcal{U}(t)$ с данными блоками удовлетворяет динамическому, симметрическому и алгебраическому свойствам.

По построению выполняется алгебраическое свойство. Действительно,

$$U_{11}'(+0) - U_{11}'(-0) = U'(+0) - U'(-0) = -W,$$

а остальные блоки непрерывно дифференцируемы. Заметим, что

$$U_{11}'(t) = U_{11}(t)A_0 + U_{11}(t-h)A_1 + \int_{-h}^{0} U_{11}(t+\xi) C e^{A\xi} B d\xi =$$

$$
\begin{aligned}
&= U_{11}(t)A_0 + U_{11}(t-h)A_1 + U_{12}(t)B - U_{12}(t-h)e^{-Ah}B,\\
U_{12}'(t) &= U_{11}(t)C - U_{12}(t)A.
\end{aligned}
$$

при $t > 0$. Также, $U_{11}^T(t) = U^T(t) = U(-t) = U_{11}(-t)$, поэтому

$$
\begin{aligned}
U_{12}^T(t) &= e^{-A^T t}L^T + \int_0^t e^{A^T(\tau-t)}C^T U_{11}^T(\tau)d\tau\\
&= e^{-A^T t}L^T - \int_0^{-t} e^{A^T(-t-\tau)}C^T U_{11}(\tau)d\tau\\
&= U_{21}(-t).
\end{aligned}
$$

Совершая вычисления, аналогичные произведенным в доказательстве леммы 3.7, найдем, что

$$
\begin{aligned}
U_{22}'(t) &= e^{A^T t}[A^T M - C^T L - L^T C + MA] + U_{21}(t)C - U_{22}(t)A\\
&= U_{21}(t)C - U_{22}(t)A,
\end{aligned}
$$

так как M удовлетворяет уравнению (3.8). Находя производную от

$$
R(t) = U_{22}^T(-t) = Me^{-At} + \int_0^t U_{21}(\tau)Ce^{A(\tau-t)}d\tau,
$$

придем к дифференциальному уравнению

$$
R'(t) = U_{21}(t)C - R(t)A.
$$

Но $R(0) = U_{22}(0)$, так что $R(t) \equiv U_{22}(t)$ по теореме о единственности, то есть $U_{22}^T(t) = U_{22}(-t)$ для всех t. Этим завершается доказательство симметрического свойства.

Аналогичные рассуждения для $U_{21}(t)$ приводят к

$$
\begin{aligned}
U_{21}'(t) = e^{A^T t}\left[A^T L^T - L^T A_0 - C^T U_{11}(0) - U_{21}(-h)A_1 - \int_{-h}^0 U_{21}(\tau)Ce^{A\tau}Bd\tau\right] +\\
+U_{21}(t)A_0 + U_{21}(t-h)A_1 + \int_{-h}^0 U_{21}(t+\xi)Ce^{A\xi}Bd\xi.
\end{aligned}
$$

Ясно, что

$$
\int_{-h}^0 U_{21}(t+\xi)Ce^{A\xi}Bd\xi = R(t)B - R(t-h)e^{-Ah}B =
$$

$$= U_{22}(t)B - U_{22}(t-h)e^{-Ah}B.$$

Вспомним как определялась матрица $U_{21}(t)$ и подставим соответствующее выражение в квадратные скобки, тогда из (3.7) будет следовать, что вся скобка равна $\mathbf{0}$, откуда

$$U_{21}'(t) = U_{21}(t)A_0 + U_{21}(t-h)A_1 + U_{22}(t)B - U_{22}(t-h)e^{-Ah}B,$$

так что и динамическое свойство выполнено. Но это и значит, что матрица $\mathcal{U}(t)$ является матрицей Ляпунова расширенной системы. ■

3.3. Случай единственности

Теорема 3.9 была доказана предъявлением явных выражений, позволяющих получить из матрицы Ляпунова одной системы матрицу Ляпунова другой системы. Нетрудно понять, что тогда верен и следующий результат.

Теорема 3.10. *Пусть W — это произвольная симметрическая матрица порядка n. Существует и при том единственная матрица Ляпунова системы* (3.4)*, ассоциированная с $\bar{W}$, если и только если выполнены условия:*

1. *существует единственная матрица Ляпунова $U(t)$ системы* (3.1)*, ассоциированная с W,*
2. *существует единственная матрица L, удовлетворяющая матричному уравнению* (3.7)*,*
3. *существует единственная матрица M, удовлетворяющая матричному уравнению Ляпунова* (3.8)*.*

Замечание 3.2. Следует обратить внимание, что если известна матрица Ляпунова $U(t)$ исходной системы, то можно последовательно найти сначала матрицу L из уравнения (3.7), а затем матрицу M из уравнения (3.8). После этого, матрица Ляпунова расширенной системы может быть найдена как в части достаточности теоремы 3.9.

Представляет интерес проследить, как условия теоремы 3.10 связаны со спектром системы (3.4). В следствии 3.5 были получены три условия, выполнение которых эквивалентно выполнению условия Ляпунова для расширенной системы. Эквивалентность условия (A), то есть выполнение условия Ляпунова для исходной системы, и части 1 теоремы 3.10, то есть существование единственной матрицы Ляпунова для любой W, хорошо известна (см. теорему 1.6)). Более того, свойство (C) эквивалентно единственности решений матричного уравнения Ляпунова (3.8). Вследствие этого не кажется неожиданным наличие связи между свойством (B) и единственностью решений матричного уравнения (3.7).

Лемма 3.11. *Решение матричного уравнения*

$$LA - A_0^T L - A_1^T L e^{-Ah} - \int_{-h}^{0} B^T e^{A^T\tau} C^T L e^{A\tau} d\tau = X, \tag{3.9}$$

существует и единственно для любой матрицы $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *тогда и только тогда, когда у системы* (3.1) *и матрицы* A *нет общих собственных чисел,.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть для некоторого $s_0 \in \mathbb{C}$ и двух векторов $\mu, \nu \neq \mathbf{0}$ выполняется

$$s_0\mu^T = \mu^T \left[A_0 + e^{-s_0 h} A_1 + \int_{-h}^{0} e^{s_0\xi} C e^{A\xi} B d\xi \right],$$
$$s_0\nu^T = \nu^T A.$$

Но тогда и $e^{s_0 t}\nu^T = \nu^T e^{At}$. Положим $L_0 = \mu\nu^T \neq \mathbf{0}$, откуда

$$L_0 A - A_0^T L_0 - A_1^T L_0 e^{-Ah} - \int_{-h}^{0} B^T e^{A^T\tau} C^T L_0 e^{A\tau} d\tau = \mathbf{0}.$$

Так как уравнение (3.9) линейно по L, то для любой матрицы X либо нет решений, либо их бесконечно много.

Достаточность. Пусть ни для какого X уравнение (3.9) не имеет единственное решение. Значит однородное уравнение с $X = \mathbf{0}$ допускает ненулевое решение L_0. Приведем матрицу A к ее жордановой нормальной форме: $A = QJQ^{-1}$, следовательно $e^{At} = Qe^{Jt}Q^{-1}$ и

$$L_0 QJ - A_0^T L_0 Q - A_1^T L_0 Q e^{-Jh} - \int_{-h}^{0} B^T e^{A^T\tau} C^T L_0 Q e^{J\tau} d\tau = \mathbf{0}.$$

Ясно, что матрица $L_0 Q$ не может быть нулевой, пусть ℓ есть ее первый ненулевой столбец, скажем, k-тый столбец. В k-том столбце матрицы J стоит собственное число s_k матрицы A, при этом

$$s_k\ell - A_0^T\ell - A_1^T\ell e^{-s_k h} - \int_{-h}^{0} B^T e^{A^T\tau} C^T \ell e^{s_k\tau} d\tau = \mathbf{0}.$$

Значит, s_k также является собственным числом системы (3.1). Полученное противоречие завершает доказательство леммы. ∎

3.4. Случай экспоненциальной устойчивости

Для экспоненциально устойчивых систем матрицу Ляпунова можно представить в виде несобственного интеграла от фундаментальной матрицы. В силу следствия 3.4 для экспоненциальной устойчивости обоих систем достаточно предположить, что расширенная система является экспоненциальной устойчивой. В этом случае дополнительно получаем, что все собственные числа матрицы $-A$ лежат в левой полуплоскости. Таким образом для некоторых постоянных $\gamma_1, \gamma_2 \geqslant 1$ и $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ выполняется

$$\|K(t)\| \leqslant \gamma_1 e^{-\sigma_1 t}, \quad \left\|e^{-At}\right\| \leqslant \gamma_2 e^{-\sigma_2 t}, \quad t \geqslant 0. \tag{3.10}$$

Для матрицы Ляпунова системы (3.4), ассоциированной с $\bar{W}$ имеем представление (теорема 1.7)

$$\mathcal{U}(t) = \int_0^\infty \mathcal{K}^T(\tau) \begin{bmatrix} W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathcal{K}(t+\tau) d\tau.$$

В лемме 3.6 было показано, что $K_{11}(t) = K(t)$, так что

$$U_{11}(t) = \int_0^\infty K^T(\tau) W K(t+\tau) d\tau,$$

то есть $U_{11}(t)$ является матрицей Ляпунова системы (3.1), что согласуется с результатами, полученными в теореме 3.8. Следует обратить внимание, что матрица Ляпунова номинальной системы возникает в верхнем левом блоке матрицы Ляпунова расширенной системы только при $\mathcal{W} = \bar{W}$. Отметим, что при этом соответствующий функционал Ляпунова–Красовского для расширенной системы будет зависеть только от $x(t)$ и не будет содержать члены, включающие $y(t)$.

Рассмотрим остальные блоки матрицы $\mathcal{U}(t)$. Начнем с

$$U_{12}(t) = \int_0^\infty K^T(\tau) \left[\int_0^{t+\tau} W K(t+\tau-\theta) C e^{-A\theta} d\theta \right] d\tau.$$

Из экспоненциальных оценок (3.10) следует, что можно изменить порядок интегрирования, откуда

$$U_{12}(t) = \int_0^\infty U^T(\theta) C e^{-A(\theta+t)} d\theta + \int_0^t U(t-\theta) C e^{-A\theta} d\theta.$$

Сравнивая с леммой 3.7 и вспоминая, что в рассматриваем экспоненциально устойчивом случае уравнение (3.7) должно иметь единственное решение, приходим к выводу, что им является матрица

$$L = U_{12}(0) = \int_0^\infty U^T(\theta) C e^{-A\theta} d\theta,$$

в чем, впрочем, несложно убедиться и непосредственно.

Так как $U_{21}(t) = U_{12}^T(-t)$, то нет смысла рассматривать соответствующий блок в $\mathcal{U}(t)$.

Наконец,

$$U_{22}(t) = \int_0^\infty U_{12}^T(\theta) C e^{-A(\theta+t)} d\theta + \int_0^t U_{21}(\tau-\theta) C e^{-A\theta} d\theta.$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к выводу, что $M = U_{22}(0)$ есть единственное решение уравнения Ляпунова (3.8). Подставив выражение для $U_{12}^T(\theta)$, получим

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\infty U_{12}^T(\theta) C e^{-A\theta} d\theta = \\ &= \int_0^\infty e^{-A^T\theta} L^T C e^{-A\theta} d\theta + \int_0^\infty e^{-A^T\theta} C^T \left[\int_\theta^\infty U^T(\xi-\theta) C e^{-A\xi} d\xi \right] d\theta = \\ &= \int_0^\infty e^{-A^T\theta} \left[L^T C + C^T L \right] e^{-A\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Последнее из представлений для M есть не что иное, как стандартная формула для решения матричного уравнения Ляпунова (3.8) в случае экспоненциальной устойчивости.

3.5. Примеры

Приведем примеры двух систем, для которых исходная система удовлетворяет условию Ляпунова, а расширенная система — нет.

Рассмотрим сначала уравнение

$$\dot{x}(t) = x(t) + \int_{-1}^{0} x(t+\theta)d\theta.$$

Предположим, что для какого-то $s_0 \in \mathbb{C}$ выполняется

$$s_0 = 1 + \int_{-1}^{0} e^{s_0\theta}d\theta, \quad -s_0 = 1 + \int_{-1}^{0} e^{-s_0\theta}d\theta.$$

Очевидно, что любое такое $s_0 \neq 0$, так что

$$-1 = \int_{-1}^{0} \cosh(s_0\theta)d\theta = \frac{\sinh(s_0)}{s_0},$$

и

$$s_0 = \int_{-1}^{0} \sinh(s_0\theta)d\theta = \frac{1-\cosh(s_0)}{s_0}.$$

Поэтому, $1 = \cosh^2(s_0) - \sinh^2(s_0) = s_0^4 - 3s_0^2 + 1$ и $s_0^2 = 3$. Но единственным вещественным решением уравнения $-x = \sinh(x)$ является $x = 0$, что противоречит исходному предположению.

Таким образом для исходной системы (уравнения) выполнено условие Ляпунова и существует единственная матрица Ляпунова, ассоциированная с $W = 1$:

$$U(t) = \alpha e^{\sqrt{3}t} + \beta e^{-\sqrt{3}t} - \frac{1}{6}, \quad t \in [0,1],$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{-e^{-\sqrt{3}}}{2-\sqrt{3}+e^{-\sqrt{3}}}, \quad \beta = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}+e^{-\sqrt{3}}}.$$

Уравнения (3.7) приобретает вид $-2L = -1/4$, откуда $L = 1/8$. Наконец, уравнение (3.8) примет форму $0M = 1/4$, чего не может быть. Из теоремы 3.9 следует, что мне существует матрицы Ляпунова, ассоциированной с $\bar{W}$.

Теперь рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}ex(t-1) + \int_{-1}^{0} e^{-\theta}x(t+\theta)d\theta.$$

Нетрудно убедиться, что $s = A = -1$ является собственным числом данного уравнения, а $s = 1$ собственным числом не является. Покажем, что выполнено условие Ляпунова. Предположив противное после некоторых преобразований получим, что для какого-то комплексного числа $s_0 \neq \pm 1$ должно выполняться

$$3 - 2s_0 = e^{1-s_0}, \quad 3 + 2s_0 = e^{1+s_0}.$$

Но тогда $9 - 4s_0^2 = e^2$ и $2s_0 = \pm\sqrt{9-e^2}$. Можно проверить, что оба этих значения не являются собственными числами системы (уравнения), а значит выполняется условие Ляпунова.

Матрица Ляпунова, ассоциированная с $W = 1$ имеет вид

$$U(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t} + \gamma e^{\sqrt{9-e^2}t/2} + \delta e^{-\sqrt{9-e^2}t/2}, \quad t \in [0,1],$$

где выражения для α, β, γ и δ можно привести в явном, но весьма громоздком виде. Уравнение (3.7) примет форму $0L = 1$, то есть не имеет решений. Значит и в этом примере не существует матрицы Ляпунова, ассоциированной с $\bar{W}$.

Глава 4. Функционалы Ляпунова–Красовского для систем с запаздыванием в управлении

В данной главе будут построены функционалы типа Ляпунова–Красовского для анализа систем с запаздыванием в управлении, замкнутых стабилизирующим управлением, основанным на методе назначения конечного спектра.

4.1. Построение функционалов

Будем рассматривать систему вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-h), \quad t \geqslant 0, \tag{4.1}$$

где $h > 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, а матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ таковы, что пара (A, B) является полностью управляемой. В статье [57] было доказано, что замыкание системы (4.1) управлением вида

$$u(t) = Ke^{Ah}x(t) + K\int_{-h}^{0} e^{-A\theta}Bu(t+\theta)d\theta \tag{4.2}$$

приводит к системе с конечным числом собственных чисел, удовлетворяющих характеристическому уравнению

$$\det[sE - A - BK] = 0.$$

Матрицу K выберем так, чтобы все собственные числа замкнутой системы оказались в левой полуплоскости, что можно сделать в силу предположения о полной управляемости пары (A, B). Для $\theta \in [-h, 0]$ нужно задать некоторую начальную функцию $u(\theta) = \psi(\theta)$, будем считать, что она непрерывна: $\psi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^m)$.

Вместе с тем управление (4.2) трудно реализовать непосредственно. Если попытаться его продифференцировать, то в характеристическое уравнение добавиться множитель $\det[sE - A]$, а значит получающаяся при этом вместе с (4.1) система уравнений оказывается уже неустойчивой. Если же вычислять интеграл в (4.2) численно, заменяя его на некоторую конечную сумму, то в работе [30] было показано, что для некоторых систем дискретизированное управление никогда (вне зависимости от числа слагаемых, используемых при аппроксимации) не будет стабилизирующим.

В статье [59] был предложен динамический регулятор вида

$$\dot{u}(t) = (F+KB)u(t)+(KA-FK)e^{Ah}x(t)+(KA-FK)\int_{-h}^{0} e^{-A\theta}Bu(t+\theta)d\theta, \quad (4.3)$$

получаемый применением дифференциального оператора $\frac{d}{dt} - F$ к управлению (4.2). Относительно матрицы $F \in \mathbb{R}^{m\times m}$ будем предполагать, что она является гурвицевой. Спектр системы (4.1), замкнутой управлением (4.3), все еще конечен и описывается характеристическим уравнением

$$\det[sE - F]\det[sE - A - BK] = 0. \quad (4.4)$$

Таким образом, динамическое управление также является стабилизирующим, но в отличии от управления (4.2) интегральный член в (4.3) может быть заменен конечной суммой без потери устойчивости [59].

Вводя некоторые обозначения:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ (KA-FK)e^{Ah} & F+KB \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (KA-FK)e^{-A\theta}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ KA-FK \end{pmatrix} e^{-A\theta} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \end{pmatrix},$$

и новые переменные $z(t) = \binom{x(t)}{u(t)}$, перепишем систему (4.1), (4.3) в виде

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}_0 z(t) + \mathcal{A}_1 z(t-h) + \int_{-h}^{0} \mathcal{Q}(\theta)z(t+\theta)d\theta. \quad (4.5)$$

Замечание 4.1. Так как управление (4.3) было получено применением оператора $\frac{d}{dt} - F$ к (4.2), то любое решения $(x(t), u(t))$ системы (4.1), (4.2) также удовлетворяет системе (4.1), (4.3). Таким образом, анализ решений (4.5) позволяет также делать выводы о поведении решений системы (4.1), (4.2).

Система (4.5) есть обычная система с распределенным запаздыванием, поэтому для нее определены функционалы Ляпунова–Красовского, определяемые в терминах матрицы Ляпунова. Вспомним, что спектр системы (4.5) описывается уравнением (4.4), то есть в силу выдвинутых предположений она является экспоненциально устойчивой, а значит матрица Ляпунова существует и единственна. При этом ядро $\mathcal{Q}(\theta)$ этой системы является экспоненциальным и нахождение матрицы Ляпунова для подобных систем было детально изучено в двух последних главах.

Выберем три произвольные симметрические матрицы $W^{(0)}, W^{(1)}, W^{(2)}$, и построим матрицу Ляпунова $U(t)$, ассоциированную с $W = W^{(0)} + W^{(1)} + hW^{(2)}$. Тогда функционал Ляпунова–Красовского полного типа для системы (4.5) имеет вид (теорема 1.5)

$$v(\zeta) = \zeta^T(0)U(0)\zeta(0)+$$
$$+2\zeta^T(0)\int_{-h}^{0}\left[U(-h-\theta)\mathcal{A}_1 + \int_{-h}^{\theta} U(\xi-\theta)\mathcal{Q}(\xi)d\xi\right]\zeta(\theta)d\theta+$$
$$+\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\zeta^T(\theta_1)\left[\mathcal{A}_1^T U(\theta_1-\theta_2)\mathcal{A}_1 + 2\int_{-h}^{\theta_2}\mathcal{A}_1^T U(h+\theta_1-\theta_2+\xi)\mathcal{Q}(\xi)d\xi+\right.$$
$$\left.+\int_{-h}^{\theta_1}\int_{-h}^{\theta_2}\mathcal{Q}^T(\xi_1)U(\theta_1-\theta_2-\xi_1+\xi_2)\mathcal{Q}(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2\right]\zeta(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2+$$
$$+\int_{-h}^{0}\zeta^T(\theta)[W^{(1)} + (h+\theta)W^{(2)}]\zeta(\theta)d\theta.$$

Выпишем данный функционал в явном виде, как зависимость от x_0 и ψ. Для этого разобьем матрицу Ляпунова на блоки

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ U_{21}(t) & U_{22}(t) \end{pmatrix},$$

и также предположим, что матрица $W^{(0)}$ является положительно определенной, а матрицы $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ имеют вид

$$W^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W_{22}^{(i)} \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

где $W_{22}^{(i)}$ положительно определены, $i = 1, 2$. В итоге мы придем к выражению

$$
\begin{gathered}
v(x_0, \psi) = x_0^T U_{11}(0) x_0 + 2 x_0^T U_{12}(0) \psi(0) + \psi^T(0) U_{22}(0) \psi(0) + \\
+2 \int_{-h}^{0} [x_0^T U_{11}(-h-\theta) + \psi^T(0) U_{21}(-h-\theta)] B \psi(\theta) d\theta + \\
+2 \int_{-h}^{0} \int_{-h}^{\theta} [x_0^T U_{12}(\xi-\theta) + \psi^T(0) U_{22}(\xi-\theta)](KA - FK) e^{-A\xi} B d\xi \psi(\theta) d\theta + \\
+ \int_{-h}^{0} \int_{-h}^{0} \psi^T(\theta_1) B^T \Bigg[U_{11}(\theta_1 - \theta_2) + \\
+ 2 \int_{-h}^{\theta_2} U_{12}(h + \theta_1 - \theta_2 + \xi)(KA - FK) e^{-A\xi} d\xi \\
+ \int_{-h}^{\theta_1} \int_{-h}^{\theta_2} e^{-A^T \xi_1} (KA - FK)^T U_{22}(\theta_1 - \theta_2 - \xi_1 + \xi_2) \times \\
\times (KA - FK) e^{-A\xi_2} d\xi_1 d\xi_2 \Bigg] B \psi(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 + \\
+ \int_{-h}^{0} \psi^T(\theta) \left[W_{22}^{(1)} + (h+\theta) W_{22}^{(2)} \right] \psi(\theta) d\theta.
\end{gathered}
\tag{4.7}
$$

По построению производная данного функционала вдоль решений системы (4.5) есть

$$
\begin{gathered}
\frac{dv(x(t), u_t)}{dt} = - \begin{pmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{pmatrix} W^{(0)} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} - u^T(t-h) W_{22}^{(1)} u(t-h) - \\
- \int_{-h}^{0} u^T(t+\theta) W_{22}^{(2)} u(t+\theta) d\theta.
\end{gathered}
\tag{4.8}
$$

Прокомментируем выбранную в (4.6) форму матриц $W^{(1)}$, $W^{(2)}$. Задав их подобным образом мы добились того, что значение как функционала, так и его производной вдоль решений системы (4.1), (4.2) зависит только от текущего положения $x(t)$, но не от полного состояния x_t. Тем самым для вычисления значения функционала более не требуется задавать некоторую «фиктивную» начальную функцию для $x(t)$, которая не требуется для нахождения решений системы (4.1), (4.2). Тем не менее, возникают и некоторые проблемы. Как известно (теоремы 1.8 и 1.9), при положительно определенных $W^{(0)}, W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ в силу экспоненциальной устойчивости системы (4.5) можно найти постоянные

$\beta_1, \beta_2 > 0$ такие, что

$$\beta_1 \left\|\zeta(0)\right\|^2 + \beta_2 \int_{-h}^{0} \left\|\zeta(\theta)\right\|^2 d\theta \leqslant v(\zeta), \tag{4.9}$$

и также $\delta_1, \delta_2 > 0$, при которых

$$v(\zeta) \leqslant \delta_1 \left\|\zeta(0)\right\|^2 + \delta_2 \int_{-h}^{0} \left\|\zeta(\theta)\right\|^2 d\theta. \tag{4.10}$$

Оценка 4.10 верна при любых симметрических матрицах $W^{(0)}, W^{(1)}, W^{(2)}$, а функционал $v(x_0, \psi)$ совпадает с $v(\zeta)$ для выбранных матриц (4.6), но вот оценку снизу так просто перенести на функционал $v(x_0, \psi)$ не получится. Действительно, матрицы $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ вида (4.6) не являются положительно-определенными, только полуопределенными, а значит нельзя напрямую применить результаты, полученные для функционалов полного типа, к функционалу (4.7). В качестве примера того, что эту трудность можно преодолеть, далее выведем новую оценку для построенного функционала и получим новые экспоненциальные оценки решений.

4.2. Экспоненциальные оценки решений

Лемма 4.1. *Существуют постоянные $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\psi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^m)$ выполняется оценка*

$$v(x_0, \psi) \leqslant \delta_1(\left\|x_0\right\|^2 + \left\|\psi(0)\right\|^2) + \delta_2 \int_{-h}^{0} \left\|\psi(\theta)\right\|^2 d\theta.$$

Доказательство. Как уже было отмечено ранее, для матриц $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ вида (4.6) имеем $v(\zeta) = v(x_0, \psi)$. Ясно, что

$$\left\|\zeta(0)\right\|^2 = \left\|x_0\right\|^2 + \left\|\psi(0)\right\|^2,$$

а так как начальная функция для $x(t)$ не требуется для нахождения решений системы (4.1), (4.3), то можно считать, что $x(t) = 0$ при $t < 0$ и $x(0) = x_0$, откуда

$$\int_{-h}^{0} \left\|\zeta(\theta)\right\|^2 d\theta = \int_{-h}^{0} \left\|\psi(\theta)\right\|^2 d\theta,$$

и утверждение леммы следует из теоремы 1.9. ∎

Замечание 4.2. Оценка (4.10) верна и для систем, не являющихся экспоненциально устойчивыми, так что утверждение леммы 4.1 остается верным и в случае, если система (4.1), (4.3) не является экспоненциально устойчивой. Достаточно, чтобы существовала матрица Ляпунова для данной системы, ассоциированная с $W^{(0)} + W^{(1)} + hW^{(2)}$.

Лемма 4.2. *Если система* (4.1), (4.3) *экспоненциально устойчива, то найдутся постоянные* $\beta_1, \beta_2 > 0$ *такие, что для любых* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *и* $\psi \in C([-h,0],\mathbb{R}^m)$ *выполняется оценка*

$$v(x_0,\psi) \geqslant \beta_1(\|x_0\|^2 + \|\psi(0)\|^2) + \beta_2 \int_{-h}^{0} \|\psi(\theta)\|^2 \, d\theta.$$

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$\bar{v}(x_0,\psi) = v(x_0,\psi) - \beta_1(\|x_0\|^2 + \|\psi(0)\|^2) - \beta_2 \int_{-h}^{0} \|\psi(\theta)\|^2 \, d\theta.$$

Мы докажем утверждение леммы, если найдем положительные β_1, β_2 при которых $\bar{v}(x_0,\psi) \geqslant 0$. Найдем производную данного функционала вдоль решений системы (4.1), (4.3):

$$\begin{gathered}
\frac{d\bar{v}(x(t),u_t)}{dt} = -x^T(t)W_{11}^{(0)}x(t) - 2x^T(t)W_{12}^{(0)}u(t) - \\
-u^T(t)W_{22}^{(0)}u(t) - u^T(t-h)W_{22}^{(1)}u^T(t-h) - \\
-\int_{-h}^{0} u^T(t+\theta)W_{22}^{(2)}u(t+\theta)d\theta - \\
-2\beta_1 x^T(t)[Ax(t) + Bu(t-h)] - 2\beta_1 u^T(t)[F+KB]u(t) - \\
-2\beta_1 u^T(t)[KA - FK]\left[e^{Ah}x(t) + \int_{-h}^{0} e^{-A\theta}Bu(t+\theta)d\theta\right] - \\
-\beta_2 u^T(t)Eu(t) + \beta_2 u^T(t-h)Eu(t-h).
\end{gathered}$$

Ее можно оценить как

$$\begin{gathered}
\frac{d\bar{v}(x(t),u_t)}{dt} \leqslant -\begin{pmatrix} x(t) & u(t) & u(t-h) \end{pmatrix} R_1(\beta_1,\beta_2) \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ u(t-h) \end{pmatrix} \\
-\int_{-h}^{0} u^T(t+\theta)R_2(\theta,\beta_1)u(t+\theta)d\theta,
\end{gathered}$$

где

$$R_1(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix} W_{11}^{(0)} & W_{12}^{(0)} & \mathbf{0}\\ W_{21}^{(0)} & W_{22}^{(0)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_{22}^{(1)}\end{pmatrix}$$

$$+\beta_1\begin{pmatrix} A+A^T & e^{A^Th}[KA-FK]^T & B\\ [KA-FK]e^{Ah} & F+KB+[F+KB]^T-E & \mathbf{0}\\ B^T & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}+\beta_2\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & E & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -E\end{pmatrix},$$

$$R_2(\theta,\beta_1)=W_{22}^{(2)}-\beta_1B^Te^{-A^T\theta}[KA-FK]^T[KA-FK]e^{-A\theta}B.$$

При $\beta_1=\beta_2=0$ матрицы $R_1(\beta_1,\beta_2)$ и $R_2(\theta,\beta_1)$ положительно определены, так что и для некоторых небольших положительных β_1,β_2 они останутся положительно определенными. Тогда при этих значениях постоянных β_1,β_2 будем иметь $d\bar{v}(x(t),u_t)/dt\leqslant 0$, откуда

$$\bar{v}(x_0,\psi)=-\int_0^\infty\frac{d\bar{v}(x(t,x_0,\psi),u_t(x_0,\psi))}{dt}dt\geqslant 0,$$

так как система (4.1), (4.3) экспоненциально устойчива, а значит несобственный интеграл сходится. Но это и есть то, что требовалось доказать. ■

Используем данные неравенства, чтобы получить экспоненциальные оценки решений системы (4.1), (4.3), а следовательно и решений системы (4.1), (4.2). Из (4.8) следует, что

$$\frac{dv(x(t),u_t)}{dt}\leqslant-\lambda_{min}(W^{(0)})(\|x(t)\|^2+\|u(t)\|^2)-\lambda_{min}(W_{22}^{(2)})\int_{-h}^0\|u_t(\theta)\|\,d\theta.$$

Выберем $\sigma>0$ так, чтобы

$$2\sigma\delta_1\leqslant\lambda_{min}(W^{(0)}),\quad 2\sigma\delta_2\leqslant\lambda_{min}(W_{22}^{(2)}),$$

где δ_1,δ_2 были получены в лемме 4.2, тогда при $t>0$ имеем

$$\frac{dv(x(t),u_t)}{dt}+2\sigma v(x(t),u_t)\leqslant 0.$$

Используя неравенства, полученные в леммах 4.1, 4.2, придем к

$$\beta_1(\|x(t)\|^2+\|u(t)\|^2)\leqslant v(x(t),u_t)\leqslant v(x_0,\psi)e^{-2\sigma t}\leqslant$$

$$\leqslant [\delta_1 \|x_0\|^2 + (\delta_1 + \delta_2 h) \|\psi\|^2] e^{-2\sigma t} \leqslant$$
$$\leqslant (\delta_1 + \delta_2 h)[\|x_0\|^2 + \|\psi\|^2] e^{-2\sigma t}.$$

Отсюда и следует требуемая оценка

$$\sqrt{\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2} \leqslant \sqrt{\frac{\delta_1 + h\delta_2}{\beta_1}} \sqrt{\|x_0\|^2 + \|\psi\|^2} e^{-\sigma t}, \tag{4.11}$$

где $t \geqslant 0$.

Замечание 4.3. В статье [55] для замкнутой системы (4.1), (4.2) рассматриваются функционалы Ляпунова специального вида. Стоит отметить, что предложенный в работе [55] функционал имеет весьма специфическую структуру. Построенный в настоящей главе функционал, напротив, использует хорошо проработанную теорию функционалов Ляпунова—Красовского полного типа.

Замечание 4.4. Построение функционалов можно расширить на случай, где запаздывание присутствует не только в управлении, но и в состоянии системы. Построение динамических регуляторов для подобного типа систем и исследование систем, получаемых после замыкания соответствующим управлением, было предметом исследования статьи [52]. Следует отметить, что не только анализ такого рода систем значительно труднее, но и получаемые системы больше не имеют вид систем с экспоненциальным ядром. Значит требуется иной, скорее всего, приблизительный метод построения матриц Ляпунова для таких систем, что и будет исследовано в главе 6.

4.3. Пример

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t-1).$$

Пусть $K = (-2, 0)$, тогда система, замкнутая управлением (4.2) будет устойчивой с собственными числами $-1 \pm i$. Выберем $F = -1$ и матрицы

$$W^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad W_{22}^{(1)} = W_{22}^{(2)} = 1/3,$$

откуда следует, что $W = W^{(0)} + W^{(1)} + hW^{(2)} = E_3$. Используя метод из главы 2 найдем матрицу Ляпунова системы (4.1), (4.3), ее компоненты отображены на Рис. 2.

Находя $\delta_1 \approx 2.40 \cdot 10^4$, $\delta_2 \approx 7.81 \cdot 10^5$, $\beta_1 \approx 0.03$, выберем $\sigma = 2 \cdot 10^{-7}$ и оценка (4.11) приобретает вид

$$\sqrt{\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2} \leqslant 5.16 \cdot 10^3 \sqrt{\|x_0\|^2 + \|\psi\|^2} e^{-2 \cdot 10^{-7} t}.$$

Следует отметить, что полученная оценка весьма консервативна, учитывая, что собственные числа матрицы $A + BK$ есть $-1 \pm i$. Тем не менее, изменяя $W^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$ или F, можно получить и другие оценки на решения системы (4.1), (4.2). Таким образом, можно поставить проблему оптимизации для нахождения лучшей (в каком-то смысле) экспоненциальной оценки решений.

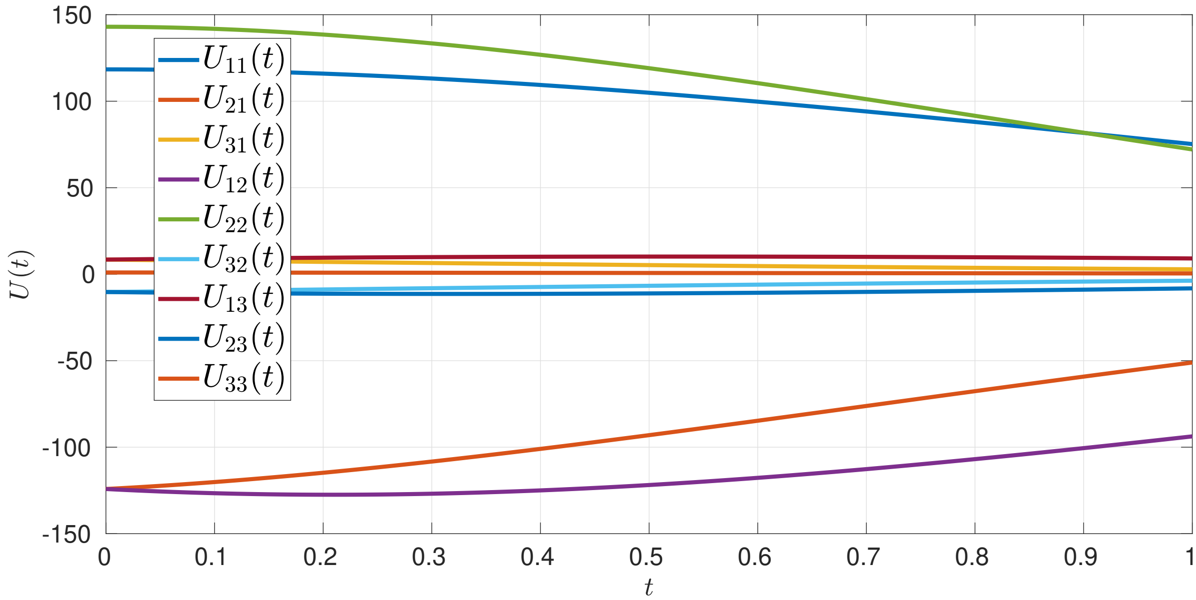

Рис. 2: Компоненты матрицы Ляпунова

Глава 5. Матрицы Ляпунова для систем с кусочно-постоянным ядром

В данной главе будут рассмотрены системы с распределенным запаздыванием и кусочно-постоянным ядром. Для таких систем будет предложена вспомогательная граничная задача и будет приведен метод построения матриц Ляпунова.

5.1. Постановка задачи

В этой главе рассматриваются системы вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t - jr) + \sum_{j=0}^{m-1} C_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} x(t+\theta)d\theta, \tag{5.1}$$

где $r > 0$, а матрицы $A_j, C_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Здесь полное запаздывание системы есть $h = mr$.

Определение 1.7 для систем класса (5.1) принимает вид:

Определение 5.1. Непрерывная в нуле матрица $U(t)$ называется матрицей Ляпунова системы (5.1), ассоциированной с симметрической матрицей W, если выполнены

1. динамическое свойство: при $t > 0$
$$U'(t) = \sum_{j=0}^{m} U(t - jr)A_j + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{-(j+1)r}^{-jr} U(t+\theta)C_j d\theta$$
2. симметрическое свойство:
$$U(-t) = U^T(t),$$
3. алгебраическое свойство:
$$U'(+0) - U'(-0) = -W.$$

Из динамического и симметрического свойств следует, что при $t < 0$ имеем

$$U'(t) = -\left[U'(-t)\right]^T = -\sum_{j=0}^{m} A_j^T U(t + jr) - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T \int_{jr}^{(j+1)r} U(t+\theta)d\theta. \tag{5.2}$$

Отсюда следует, что алгебраическое свойство можно записать в виде

$$\sum_{j=0}^{m}\left[U(-jr)A_j + A_j^T U(jr)\right] + \\ + \sum_{j=0}^{m-1}\left[\int_{-(j+1)r}^{-jr} U(\theta)C_j d\theta + C_j^T \int_{jr}^{(j+1)r} U(\theta)d\theta\right] = -W. \quad (5.3)$$

Ставится задача конструктивного нахождения матриц Ляпунова для систем вида (5.1).

5.2. Вспомогательная система

В этом параграфе будет представлена граничная задача, позволяющая свести нахождение матрицы Ляпунова для систем вида (5.1) к нахождению решений системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющих ряду дополнительных условий.

Предположим, что существует матрица Ляпунова $U(t)$ системы (5.1), ассоциированная с симметрической матрицей W. Введем $4m-1$ вспомогательную матричную функцию:

$$\begin{aligned} Y_i(t) &= U(t+ir), && -m \leqslant i \leqslant m-1, \\ Z_i(t) &= \int_{(i-1)r}^{ir} U(t+\theta)d\theta, && -m+1 \leqslant i \leqslant m-1, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $t \in [0, r]$. Для упрощения обозначений также введем

$$Y(t) = \big(Y_{m-1}(t), \ldots, Y_{-m}(t)\big), \quad Z(t) = \big(Z_{m-1}(t), \ldots, Z_{-m+1}(t)\big).$$

Лемма 5.1. *Пусть* $U(t)$ *— матрица Ляпунова уравнения* (5.1). *Тогда вспомогательные функции, определяемые* (5.4), *удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} Y_i'(t) = \sum\limits_{j=0}^{m} Y_{i-j}(t)A_j + \sum\limits_{j=0}^{m-1} Z_{i-j}(t)C_j, & 0 \leqslant i \leqslant m-1, \\ Y_i'(t) = -\sum\limits_{j=0}^{m} A_j^T Y_{i+j}(t) - \sum\limits_{j=0}^{m-1} C_j^T Z_{i+j+1}(t), & -m \leqslant i \leqslant -1, \\ Z_i'(t) = Y_i(t) - Y_{i-1}(t), & -m+1 \leqslant i \leqslant m-1, \end{cases} \quad (5.5)$$

и граничным условиям

$$
\begin{cases}
Y_i(0) = Y_{i-1}(r), & -m+1 \leqslant i \leqslant m-1, \\
Z_i(0) = Z_{i-1}(r), & -m+2 \leqslant i \leqslant m-1, \\
Z_0(0) = \int\limits_0^r Y_{-1}(\xi)d\xi, & \\
\sum\limits_{j=0}^{m} \left[Y_{-j}(0)A_j + A_j^T Y_{j-1}(r)\right] + \sum\limits_{j=0}^{m-1} \left[Z_{-j}(0)C_j + C_j^T Z_j(r)\right] = -W. &
\end{cases}
\tag{5.6}
$$

Доказательство. Уравнения (5.5) получаются непосредственной подстановкой определений (5.4) в динамическое свойство и уравнение (5.2). Граничные условия (5.6) очевидны из задания вспомогательных функций (5.4) и алгебраического свойства (5.3). ■

Лемма 5.2. *Для любого решения системы* (5.5), (5.6) *выполняется:*

$$
Z_i(0) = \int_0^r Y_{i-1}(\xi)d\xi, \quad Z_i(r) = \int_0^r Y_i(\xi)d\xi,
$$

где $-m+1 \leqslant i \leqslant m-1$.

Доказательство. Ясно, что утверждение леммы справедливо для $Z_0(0)$ и $Z_{-1}(r)$. Тогда,

$$
\begin{aligned}
Z_1(0) = Z_0(r) = Z_0(0) + \int_0^r \left[Y_0(\xi) - Y_{-1}(\xi)\right] d\xi = \\
= \int_0^r Y_0(\xi)d\xi, \\
Z_{-2}(r) = Z_{-1}(0) = Z_{-1}(r) - \int_0^r \left[Y_{-1}(\xi) - Y_{-2}(\xi)\right] d\xi = \\
= \int_0^r Y_{-2}(\xi)d\xi.
\end{aligned}
$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны. ■

Следствие 5.3. *Для любого решения системы* (5.5), (5.6) *выполняется:*

$$
Z_i(t) = \int_0^t Y_i(\xi)d\xi + \int_t^r Y_{i-1}(\xi)d\xi.
$$

Замечание 5.1. Утверждение леммы 5.2 и следствия 5.3 остается верным и для любого решения системы (5.5), удовлетворяющего всем граничным условиям (5.6) кроме последнего, которое не используется в доказательстве.

Отметим, что лемма 5.2 играет для систем (5.1) роль, схожую с леммой 2.2 для систем (2.1). Действительно, из леммы 5.2 следует, что интегральное условие, использованное в (5.6), ничем не отличается от ему подобных. Значит, любое из условий, приведенных в формулировке леммы 5.2, равносильно может быть использовано при построение вспомогательной граничной задачи.

Лемма 5.4. *Пусть* $(Y(t), Z(t))$ *являются решением системы* (5.5), (5.6). *Тогда матрица* $U(t)$, *определяемая как*

$$U(t) = \frac{1}{2}\left[Y_i(t-ir) + Y^T_{-i-1}\left((i+1)r-t\right)\right], \quad t \in [ir,(i+1)r], \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1,$$

и $U(t) = U^T(-t)$ *для* $t < 0$, *является матрицей Ляпунова, ассоциированной с* W.

Доказательство. Проверим, что определение матрицы $U(t)$ однозначно. Действительно, при $t = ir$ $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$ имеем

$$U(ir+0) = \frac{1}{2}\left[Y_i(0) + Y^T_{-i-1}(r)\right] = \frac{1}{2}\left[Y_{i-1}(r) + Y^T_{-i}(0)\right] = U(ir-0).$$

Так как

$$U(0) = \frac{1}{2}\left[Y_0(0) + Y^T_{-1}(r)\right] = \frac{1}{2}\left[Y_{-1}(r) + Y^T_0(0)\right] = U(0)^T,$$

то функция $U(t)$ непрерывна и удовлетворяет симметрическому свойству.

Рассмотрим $t \in [ir,(i+1)r]$, из следствия 5.3 получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[Z_{i-j}(t-ir) + Z^T_{j-i}((i+1)r-t)\right] &= \frac{1}{2}\int_0^{t-ir}\left[Y_{i-j}(\xi) + Y^T_{j-i-1}(r-\xi)\right]d\xi = \\ &+ \frac{1}{2}\int_{t-ir}^{r}\left[Y_{i-j-1}(\xi) + Y^T_{j-i}(r-\xi)\right]d\xi = \\ &= \int_{(i-j)r}^{t-jr} U(\theta)d\theta + \int_{t-(j-1)r}^{(i-j)r} U(\theta)d\theta = \\ &= \int_{-(j-1)r}^{-jr} U(t+\eta)d\eta.\end{aligned}$$

Значит,

$$U'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[Y_i(t-ir) + Y^T_{-i-1}\left((i+1)r-t\right)\right] =$$
$$= \sum_{j=0}^{m} U(t-jr)A_j + \sum_{j=0}^{m-1}\int_{-(j+1)r}^{-jr} U(t+\eta)C_j d\eta.$$

Правая часть полученного выражения не зависит от i, а функция $U(t)$ непрерывна, значит и ее производная $U'(t)$ непрерывна, то есть динамическое свойство выполнено.

Остается проверить алгебраическое свойство:

$$U'(+0) - U'(-0) = \frac{1}{2}\left[Y_0'(0) - Y'^T_{-1}(r)\right] - \frac{1}{2}\left[Y'_{-1}(r) - Y'^T_0(0)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[Y_0'(0) - Y'_{-1}(r)\right] + \frac{1}{2}\left[Y_0'(0) - Y'_{-1}(r)\right]^T =$$
$$= -\frac{1}{2}W - \frac{1}{2}W^T = -W. \qquad \blacksquare$$

Теорема 5.5. *Пусть система* (5.5), (5.6) *имеет единственное решение, тогда существует единственная ассоциированная с* W *матрица Ляпунова* $U(t)$, *определяемая как*

$$U(t) = Y_i(t-ir), \quad t \in [ir, (i+1)r], \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1,$$

и $U(t) = U^T(-t)$ *при* $t < 0$.

Доказательство. Единственность матрицы Ляпунова очевидна, ведь получаемые по формулам (5.4) вспомогательные матрицы с одной стороны различны для различных $U(t)$, а с другой стороны по лемме 5.1 являются решениями (5.5), (5.6). Докажем, что в рассматриваем случае $U(t)$ можно находить указанным образом.

Пусть $(Y(t), Z(t))$ — решение системы. Рассмотрим

$$\tilde{Y}_i(t) = Y^T_{-i-1}(r-t), \;\; -m \leqslant i \leqslant m-1,$$
$$\tilde{Z}_i(t) = Z^T_{-i}(r-t), \qquad -m+1 \leqslant i \leqslant m-1.$$

Тогда, при $i \geqslant 0$

$$\tilde{Y}_i'(t) = -\left[Y'_{-i-1}(r-t)\right]^T =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{m} Y_{j-i-1}^{T}(r-t)A_j + \sum_{j=0}^{m-1} Z_{j-i}^{T}(r-t)C_j = \\
&= \sum_{j=0}^{m} \tilde{Y}_{i-j}(t)A_j + \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{Z}_{i-j}(t)C_j,
\end{aligned}
$$

при $i < 0$

$$
\begin{aligned}
\tilde{Y}_i'(t) &= -\left[Y_{-i-1}'(r-t)\right]^T = \\
&= -\sum_{j=0}^{m} A_j^T Y_{-i-1-j}^T(r-t) - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T Z_{-i-j-1}^T(r-t) = \\
&= -\sum_{j=0}^{m} A_j^T \tilde{Y}_{i+j}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T \tilde{Z}_{i+j+1}^T(t),
\end{aligned}
$$

наконец

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z}_i'(t) = -\left[Z_{-i}'(r-t)\right]^T = -Y_{-i}^T(r-t) + Y_{-i-i}^T(r-t) = \\
= \tilde{Y}_i(t) - \tilde{Y}_{i-1}(t).
\end{aligned}
$$

Далее, для всех рассматриваемых в (5.6) индексов i выполняется

$$
\begin{aligned}
\tilde{Y}_i(0) = Y_{-i-1}^T(r) = Y_{-i}^T(0) = \tilde{Y}_{i-1}(r), \\
\tilde{Z}_i(0) = Z_{-i}^T(r) = Z_{-i+1}^T(0) = \tilde{Z}_{i-1}(r).
\end{aligned}
$$

Нетрудно видеть, что и

$$
\tilde{Z}_0(0) = Z_0^T(r) = \int_0^r Y_0^T(\theta)d\theta = \int_0^r \tilde{Y}_{-1}(\theta)d\theta.
$$

Остается лишь заметить, что

$$
\tilde{Y}_0{}'(0) - \tilde{Y}_{-1}'(r) = \left[-Y_{-1}'(r) + Y_0'(0)\right]^T = W^T = W.
$$

Таким образом и $(\tilde{Y}(t), \tilde{Z}(t))$ являются решением (5.5), (5.6). Единственность позволяет утверждать, что $Y_i(t) = Y_{-i-1}^T(r-t)$, $Z_i(t) = Z_{-i}^T(r-t)$, откуда из леммы 5.4 и следует требуемое. ■

5.3. Матричная форма вспомогательной системы

Покажем, как решение вспомогательной системы сводится к решению системы линейных алгебраический уравнений.

Пусть $\mathcal{A}_i = A_i^T \otimes E$, $\mathcal{C}_i = C_i^T \otimes E$, $\mathfrak{A}_i = E \otimes A_i^T$, $\mathfrak{C}_i = E \otimes C_i^T$, $y_i(t) = \mathrm{vect}(Y_i(t))$, $z_i(t) = \mathrm{vect}(Z_i(t))$ и

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_{m-1}(t) \\ \vdots \\ y_{-m}(t) \end{pmatrix}, \qquad z(t) = \begin{pmatrix} z_{m-1}(t) \\ \vdots \\ z_{-m+1}(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{E}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \dots & E & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{E}_i$ состоит из $4m-1$ блоков, один из которых имеет вид единичной матрицы и стоит на i-том месте. Векторизуя систему (5.5), придем к

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} A & C \\ D & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

где A — квадратная матрица порядка $2mn^2$, C и D — матрицы порядков $2mn^2 \times (2m-1)n^2$ и $(2m-1)n^2 \times 2mn^2$, соответственно:

$$A = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_0 & \dots & \mathcal{A}_{m-1} & \mathcal{A}_m & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathcal{A}_0 & \mathcal{A}_1 & \dots & \mathcal{A}_m \\ -\mathfrak{A}_m & \dots & -\mathfrak{A}_1 & -\mathfrak{A}_0 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & -\mathfrak{A}_m & -\mathfrak{A}_{m-1} & \dots & -\mathfrak{A}_0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_0 & \dots & \mathcal{C}_{m-1} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathcal{C}_0 & \dots & \mathcal{C}_{m-1} \\ -\mathfrak{C}_{m-1} & \dots & -\mathfrak{C}_0 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & -\mathfrak{C}_{m-1} & \dots & -\mathfrak{C}_0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} E & -E & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E & -E & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & E & -E \end{bmatrix}.$$

Граничные условия (5.6) примут вид

$$M \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + \tilde{N} \int_0^r \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} dt + N \begin{pmatrix} y(r) \\ z(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -w \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

где $w = \mathrm{vect}(W)$, $\tilde{N} = -\mathcal{E}^T_{4m-2}\mathcal{E}_{m+1}$ и

$$M = \begin{array}{c}
\begin{matrix} y_{m-1} & \dots & y_0 & \dots & y_{-m+1} & y_{-m} & z_{m-1} & \dots & z_0 & \dots & z_{-m+2} & z_{-m+1} \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
E & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \dots & E & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & E & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & E & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & E & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \dots & \mathcal{A}_0 & \dots & \mathcal{A}_{m-1} & \mathcal{A}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathcal{C}_0 & \dots & \mathcal{C}_{m-2} & \mathcal{C}_{m-1}
\end{bmatrix}
\end{array},$$

$$N = \begin{array}{c}
\begin{matrix} y_{m-1} & y_{m-2} & \dots & y_{-1} & \dots & y_{-m} & z_{m-1} & z_{m-2} & \dots & z_0 & \dots & z_{-m+1} \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
\mathbf{0} & -E & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -E & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & -E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -E & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -E & \dots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & -E \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\mathfrak{A}_m & \mathfrak{A}_{m-1} & \dots & \mathfrak{A}_0 & \dots & \mathbf{0} & \mathfrak{C}_{m-1} & \mathfrak{C}_{m-2} & \dots & \mathfrak{C}_0 & \dots & \mathbf{0}
\end{bmatrix}
\end{array}.$$

Для того, чтобы избавиться от интегрального члена в (5.8), применим лемму 2.7. В результате система (5.7), (5.8) приводится к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\underbrace{\left[M + \begin{pmatrix} -\mathcal{E}_{4m-2}^T & N \end{pmatrix} \exp\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{E}_{m+1} \\ \mathbf{0} & L \end{pmatrix} r\right\} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ E \end{pmatrix}\right]}_{X} \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ w \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Нетрудно видеть, что вспомогательная система (5.5), (5.6) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\det X \neq 0$.

5.4. Единственность решения граничной задачи

Покажем, что условие Ляпунова обеспечивает единственность решения вспомогательной граничной задачи. Как и для систем (2.1), начнем рассмотрение с одного вспомогательного утверждения.

Лемма 5.6. *Для любого решения* (5.5), (5.6) *с* $W = \mathbf{0}$ *выполнено*

$$\begin{aligned} Y_i(t) &= Y_{i-1}(t+r), \quad -m+1 \leqslant i \leqslant m-1, \\ Z_i(t) &= Z_{i-1}(t+r), \quad -m+2 \leqslant i \leqslant m-1. \end{aligned}$$

Доказательство. Схема доказательства такая же, как и в лемме 2.8. Так как любое решение (5.5) аналитично на $\mathbb{R}$, то и непрерывно дифференцируемо любое число раз.

Продифференцировав (5.5), получим, что функции $(Y'(t), Z'(t))$ являются решением системы (5.5). Проверим, что и граничные условия (5.6) с $W = \mathbf{0}$ выполнены для $(Y'(t), Z'(t))$. Из (5.5), (5.6) видно, что

$$\begin{aligned} Z_i'(0) &= Z_{i-1}'(r) \\ Y_i'(0) &= Y_{i-1}'(r), \quad i \neq 0. \end{aligned}$$

Так как $W = \mathbf{0}$, то

$$Y_0'(0) - Y_{-1}'(r) = \sum_{j=0}^{m} \left[Y_{-j}(0)A_j + A_j^T Y_{j-1}(r)\right] + \sum_{j=0}^{m-1} \left[Z_{-j}(0)C_j + C_j^T Z_j(r)\right] = \mathbf{0}.$$

Также,

$$Z_0'(0) = Y_0(0) - Y_{-1}(0) = Y_{-1}(r) - Y_{-1}(0) = \int_0^r Y_{-1}'(\xi) d\xi.$$

Остается проверить последнее граничное условие, сперва заметим, что

$$\sum_{i=1}^{m} Y'_{-i}(0)A_i = -\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=0}^{m} A_j^T Y_{-i+j}(0) + \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T Z_{-i+j+1}(0)\right] A_i =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} A_0^T Y_{-i}(0)A_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} A_j^T Y_{j-i}(0)A_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1} C_j^T Z_{j-i+1}(0)A_i,$$

аналогично,

$$\sum_{i=1}^{m} A_i^T Y'_{i-1}(r) = \sum_{i=1}^{m} A_i^T\left[\sum_{j=0}^{m} Y_{i-j-1}(r)A_j + \sum_{j=0}^{m} Z_{i-j-1}(r)C_j\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} A_i^T Y_{i-1}(r)A_0 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} A_i^T Y_{i-j-1}(r)A_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1} A_i^T Z_{i-j-1}(r)C_j.$$

Отметим, что

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} A_j^T Y_{j-i}(0)A_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} A_i^T Y_{i-j-1}(r)A_j.$$

Остается рассмотреть еще следующие слагаемые:

$$A_0^T Y'_{-1}(r) = A_0^T Y'_0(0) = A_0^T Y_0(0)A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_0^T Y_{-i}(0)A_i + \sum_{j=0}^{m-1} A_0^T Z_{-j}(0)C_j,$$

$$Y'_0(0)A_0 = Y'_{-1}(r)A_0 = -A_0^T Y_{-1}(r)A_0 - \sum_{i=1}^{m} A_i^T Y_{i-1}(r)A_0 - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T Z_j(r)A_0.$$

Учитывая $Y_0(0) = Y_{-1}(r)$, получим

$$\sum_{i=0}^{m}\left[Y'_{-i}(0)A_i + A_i^T Y'_{i-1}(r)\right] + \sum_{j=0}^{m-1}\left[Z'_{-j}(0)C_j + C_j^T Z'_j(r)\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1}\left[Z'_{-j}(0) + A_0^T Z_{-j}(0) + \sum_{i=1}^{m} A_i^T Z_{i-j-1}(r)\right] C_j +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T\left[Z'_j(r) - Z_j(r)A_0 - \sum_{i=1}^{m} Z_{j-i+1}(0)A_i\right].$$

Используя лемму 5.2 и замечание 5.1, преобразуем выражения в квадратных скобках

$$Z'_{-j}(0) + A_0^T Z_{-j}(0) + \sum_{i=1}^{m} A_i^T Z_{i-j-1}(r) = \int_0^r\left[Y'_{-j-1}(\xi) + \sum_{i=0}^{m} A_i^T Y_{i-j-1}(\xi)\right] d\xi =$$

$$= -\sum_{l=0}^{m-1} \int_0^r C_l^T Z_{l-j}(\xi) d\xi,$$

$$Z_j'(r) - Z_j(r)A_0 - \sum_{i=1}^{m} Z_{j-i+1}(0)A_i = \int_0^r \left[Y_j'(\xi) - \sum_{i=0}^{m} Y_{j-i}(\xi)A_i \right] d\xi =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} \int_0^r Z_{j-l}(\xi) C_l d\xi.$$

Подставив эти выражения, придем к

$$-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1} \int_0^r C_l^T Z_{l-j}(\xi) C_j d\xi + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1} \int_0^r C_j^T Z_{j-l}(\xi) C_l d\xi = \mathbf{0},$$

что и требовалось доказать.

По индукции $(Y^{(k)}(t), Z^{(k)}(t))$ также будет решением (5.5), (5.6) для всех $k \geqslant 0$. В частности, для всех $k \geqslant 0$

$$Y_i^{(k)}(0) = Y_{i-1}^{(k)}(r), \quad -m+1 \leqslant i \leqslant m-1,$$
$$Z_i^{(k)}(0) = Z_{i-1}^{(k)}(r), \quad -m+2 \leqslant i \leqslant m-1.$$

Утверждение леммы теперь следует из аналитичности функций $Y_i(t)$, $Z_i(t)$. ■

Из предыдущей леммы и следствия 5.3 получим

Следствие 5.7. *Пусть* $(Y(t), Z(t))$ *является решением* (5.5), (5.6) *при* $W = \mathbf{0}$. *Тогда*

$$Z_i(t) = \int_{-r}^{0} Y_i(t+\theta) d\theta,$$

где $-m+1 \leqslant i \leqslant m-1$.

Теорема 5.8. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Вспомогательная система* (5.5)–(5.6) *имеет единственное решение.*
2. *Существует единственная матрица Ляпунова уравнения* (5.1), *ассоциированная с* w.
3. *Уравнение* (5.1) *удовлетворяет условию Ляпунова.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.8.

В теореме 5.5 было показано, что из утверждения 1 следует утверждение 2. Эквивалентность условий 2 и 3 установлена для более широкого класса систем (см. Теорему 1.6). Покажем, что из утверждения 3 следует утверждение

1. Пусть условие Ляпунова выполнено. Как было показано ранее, существование единственного решения системы (5.5), (5.6) эквивалентно существованию единственного решения системы линейных алгебраических уравнений (5.9). В свою очередь система (5.9) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда единственным решением однородной системы является тривиальное. Напротив, предположим, что существует $(Y(0), Z(0)) \neq \mathbf{0}$, являющееся решением (5.9) при нулевой правой части. Данному начальному условию соответствует нетривиальное решение (5.5), (5.6) при $W = \mathbf{0}$.

Заметим, что не все $Y_i(t) \equiv \mathbf{0}$. Действительно, иначе из следствия 5.7 и все $Z_i(t) \equiv \mathbf{0}$, что противоречит нетривиальности решения. Из леммы 5.6 следует, что все $Y_i(t) \not\equiv \mathbf{0}$.

Любое решение системы (5.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} Y_i(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \mathcal{P}_{i,k}(t), \quad -m \leqslant i \leqslant m-1, \\ Z_i(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \mathcal{Q}_{i,k}(t), \quad -m+1 \leqslant i \leqslant m-1, \end{aligned} \tag{5.10}$$

где $s_1, \ldots, s_\nu$ — различные собственные числа системы (5.5); $\mathcal{P}_{i,k}(t)$, $\mathcal{Q}_{i,k}(t)$ — полиномы с матричными коэффициентами. Так как $Y_0(t) \not\equiv 0$, то найдется d, для которого $\mathcal{P}_{0,d}(t) \not\equiv 0$. Пусть $\deg \mathcal{P}_{0,d} = l$:

$$\mathcal{P}_{0,d}(t) = P_0 t^l + P_1 t^{l-1} + \ldots + P_l,$$

где $P_0 \neq \mathbf{0}$. Из следствия 5.7, получим

$$\sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \mathcal{Q}_{0,k}(t) = Z_0(t) = \int_{-r}^{0} Y_0(t+\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \int_{-r}^{0} e^{s_k \theta} \mathcal{P}_{0,k}(t+\theta) d\theta.$$

Значит $\deg \mathcal{Q}_{0,d}(t) \leqslant l$, а коэффициент полинома $\mathcal{Q}_{0,d}(t)$ при t^l имеет вид

$$P_0 \int_{-r}^{0} e^{s_d \theta} d\theta.$$

Из леммы 5.6 следует, что $Y_i(t) = Y_0(t+ir)$, $Z_i(t) = Z_0(t+ir)$, значит степени полиномов $\mathcal{P}_{i,d}(t)$ также равны l со старшим коэффициентом $P_0 e^{s_d ir}$, а $\deg \mathcal{Q}_{i,d}(t) \leqslant l$ с коэффициентом при t^l вида

$$P_0 e^{s_d ir} \int_{-r}^{0} e^{s_d \theta} d\theta = P_0 \int_{(i-1)r}^{ir} e^{s_d \xi} d\xi.$$

Подставив представления (5.10) в (5.5) получим

$$\sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\left[s_k \mathcal{P}_{0,k}(t) + \mathcal{P}'_{0,k}(t)\right] = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\left[\sum_{j=0}^{m} \mathcal{P}_{-j,k}(t) A_j + \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{Q}_{-j,k}(t) C_j\right],$$

$$\sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\left[s_k \mathcal{P}_{-1,k}(t) + \mathcal{P}'_{-1,k}(t)\right] = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\left[-\sum_{j=0}^{m} A_j^T \mathcal{P}_{j-1,k}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T \mathcal{Q}_{j,k}(t)\right].$$

Так как $s_1, \ldots, s_\nu$ — различны, то квазиполиномы с обеих частей равенства могут быть равны только при равенстве полиномиальных множителей; при $e^{s_d t}$ получим:

$$s_d \mathcal{P}_{0,d}(t) + \mathcal{P}'_{0,d}(t) = \sum_{j=0}^{m} \mathcal{P}_{-j,d}(t) A_j + \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{Q}_{-j,d}(t) C_j,$$

$$s_d \mathcal{P}_{-1,d}(t) + \mathcal{P}'_{-1,d}(t) = -\sum_{j=0}^{m} A_j^T \mathcal{P}_{j-1,d}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T \mathcal{Q}_{j,d}(t).$$

Рассматривая коэффициенты при t^l, получим

$$s_d P_0 = P_0 \left[\sum_{j=0}^{m} A_j e^{-s_d j r} + \sum_{j=0}^{m-1} C_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{s_d \xi} d\xi\right],$$

$$-s_d P_0 e^{-s_d r} = \left[\sum_{j=0}^{m} A_j^T e^{s_d j r} + \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T \int_{(j-1)r}^{jr} e^{s_d(\xi + r)} d\xi\right] P_0 e^{-s_d r}.$$

Так как $P_0 \neq \mathbf{0}$, то

$$\det\left[s_d E - \sum_{j=0}^{m} A_j e^{-s_d j r} - \sum_{j=0}^{m-1} C_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{s_d \xi} d\xi\right] = 0,$$

$$\det\left[-s_d E - \sum_{j=0}^{m} A_j e^{s_d j r} - \sum_{j=0}^{m-1} C_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{-s_d \eta} d\eta\right] = 0.$$

значит $s_d \in \Lambda$ и $-s_d \in \Lambda$, что невозможно в силу условия Ляпунова. Данное противоречие завершает доказательство теоремы. ■

5.5. Пример

В работе [36] была рассмотрена система вида

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + C_0 \int_{-r}^{0} x(t+\theta) d\theta + C_1 \int_{-2r}^{-r} x(t+\theta) d\theta, \tag{5.11}$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1.5 & 0 \\ 0.5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В статье [36] было получено, что система (5.11) экспоненциальна устойчива при $r \in [0, 1)$.

Вспомогательная система (5.5) примет вид

$$\begin{cases} Y_1'(t) = Y_1(t)A_0 + Z_1(t)C_0 + Z_0(t)C_1, \\ Y_0'(t) = Y_0(t)A_0 + Z_0(t)C_0 + Z_{-1}(t)C_1, \\ Y_{-1}'(t) = -A_0^T Y_{-1}(t) - C_0^T Z_0(t) - C_1^T Z_1(t), \\ Y_{-2}'(t) = -A_0^T Y_{-2}(t) - C_0^T Z_{-1}(t) - C_1^T Z_0(t), \\ Z_1'(t) = Y_1'(t) - Y_0'(t), \\ Z_0'(t) = Y_0'(t) - Y_{-1}'(t), \\ Z_{-1}'(t) = Y_{-1}'(t) - Y_{-2}'(t), \end{cases}$$

а граничные условия (5.6)

$$\begin{cases} Y_1(0) = Y_0(r), \\ Y_0(0) = Y_{-1}(r), \\ Y_{-1}(0) = Y_{-2}(r), \\ Z_1(0) = Z_0(r), \\ Z_0(0) = Z_{-1}(r), \\ Z_0(0) = \int\limits_0^r Y_{-1}(\xi)d\xi, \\ Y_0(0)A_0 + A_0^T Y_{-1}(r) + Z_0(0)C_0 + C_0^T Z_0(r) + Z_{-1}(0)C_1 + C_1^T Z_1(r) = -W. \end{cases}$$

В данном случае соответствующая система линейных уравнений (5.9) имеет порядок 28×28. Ясно, что система (5.11) экспоненциально устойчива при $r = 0$. На отрезке $[0, 1.05]$ определитель матрицы X обращается в нуль только при $r = 1$ (рисунок 3). Так как собственные числа системы (5.11) зависят непрерывно

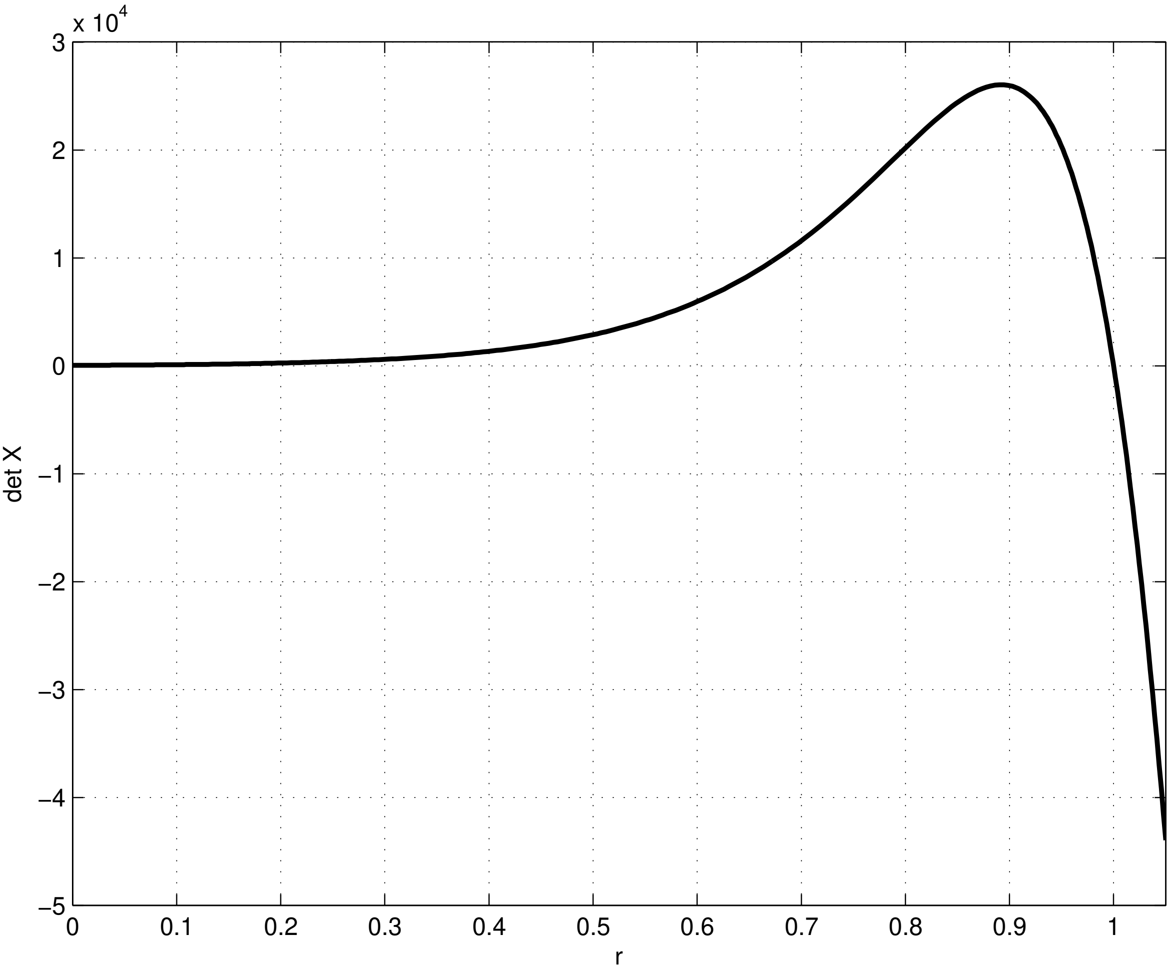

Рис. 3: Определитель матрицы X

от r, а по теореме 5.8 вспомогательная система имеет не единственное решение тогда и только тогда, когда не выполнено условие Ляпунова, то при $r < 1$ все собственные числа имеют отрицательные вещественные части, а при $r = 1$ попадают на мнимую ось. Значит система (5.11) экспоненциальна устойчива при всех $r \in [0, 1)$, что совпадает с результатом из [36]. Ассоциированная с $W = E$ матрица Ляпунова системы (5.11) при $r = 0.5$ приведена на рисунке 4.

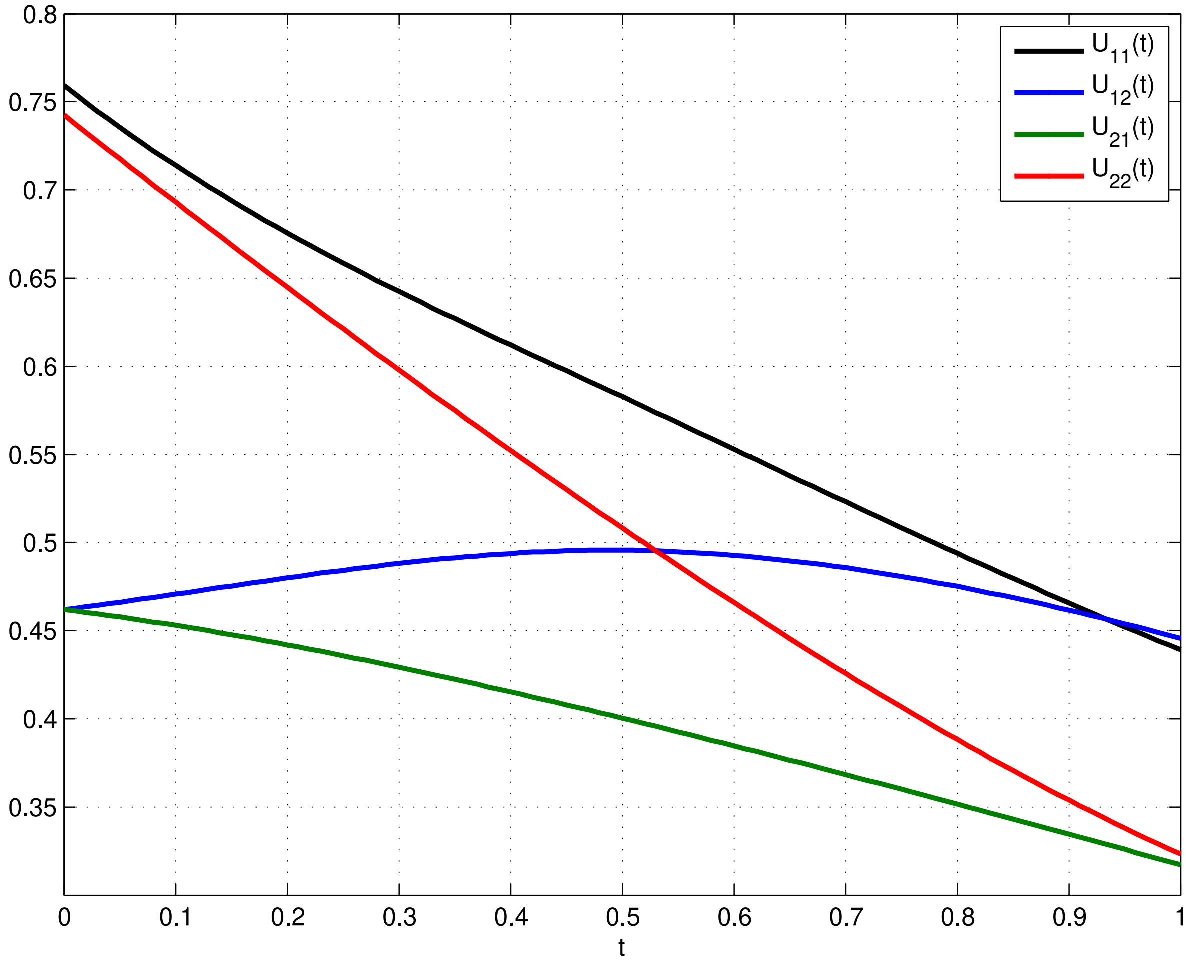

Рис. 4: Компоненты матрицы Ляпунова $U(t)$, $r = 0.5$

Глава 6. Непрерывная зависимость матриц Ляпунова от правых частей

В данной главе будет доказано, что малые в некотором смысле изменения правых частей систем с запаздыванием приводит к малым изменениям их матриц Ляпунова. В частности, это открывает возможность построения с заданной точностью матрицы Ляпунова произвольной системы за счет приближения ее правой части такой, для которой возможно аналитическое нахождение матрицы Ляпунова.

6.1. Предварительные замечания

Будем рассматривать системы вида

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^{0} dQ(\theta)x(t+\theta), \tag{6.1}$$

где запаздывание $h > 0$, а компоненты матричной функции $Q : [-h, 0] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ являются функциями ограниченной вариации. Далее будем писать, что $Q \in BV([-h, 0], \mathbb{R}^{n\times n})$, и говорить, что Q есть (матричная) функция ограниченной вариации. Известно, что Q может иметь не более чем счетное множество точек разрыва, причем все только первого рода.

Замечание 6.1. Ясно, что правая часть системы (6.1) является непрерывным линейным функционалом на $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Обратное тоже верно. Из теоремы Рисса о представлении непрерывных линейных функционалов следует, что любая система вида $\dot{x}(t) = l(x_t)$, где l есть непрерывный линейный функционал из $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ в $\mathbb{R}^n$, может быть записана в виде (6.1) с некоторой функцией ограниченной вариации Q.

Следует отметить, что соответствие между линейными функционалами и функциями ограниченной вариации не является взаимно однозначным. Действительно, из выполнения равенства

$$\int_{-h}^{0} dQ_1(\theta)f(\theta) = \int_{-h}^{0} dQ_2(\theta)f(\theta),$$

для всех непрерывных функций $f \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ следует лишь, что найдется постоянная матрица C, что $Q_1(\theta) = Q_2(\theta) + C$ для всех $\theta \in [-h,0]$ кроме, возможно, не более чем счетного множества точек, где это равенство может быть нарушено. В связи с этим необходимо тем или иным образом нормализовать рассматриваемые в правых частях функции ограниченной вариации.

Будем говорить, что Q является нормализованной функцией ограниченной вариации на отрезке $[-h,0]$, и писать $Q \in NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n})$, если $Q \in BV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n})$, а также $Q(-h) = \mathbf{0}$ и $Q(\theta)$ является непрерывной слева для всех $\theta \in (-h,0)$. Теперь между функциями $Q \in NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n})$ и непрерывными линейными функционалами из $C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ в $\mathbb{R}^n$ можно установить биекцию.

Поясним это определение. Условие $Q(-h) = \mathbf{0}$ выбрано достаточно произвольно, но оно позволит упростить дальнейшие рассуждения. Известно, что для определенности интеграла $\int_{-h}^{0} dQf$ необходимо, чтобы у функций Q и f не было общих точек разрыва, в которых они одновременно разрывны слева (или справа). Требование непрерывности слева функции Q, таким образом, обеспечивает существование интеграла $\int_{-h}^{0} dQK_t$ при $t > 0$, где K есть фундаментальное решение системы (6.1).

Пусть $P : -h = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 0$, есть произвольное дробление отрезка $[-h,0]$. Супремум по всем дроблениям величин вида

$$\sum_{k=1}^{m} \|Q(x_k) - Q(x_{k-1})\|,$$

будем называть вариацией матричной функции Q и обозначать $\mathsf{V}Q$. Отметим, что вариация матричной функции ограничена тогда и только тогда, когда все компоненты данной функции имеют ограниченную вариацию (в стандартном смысле), так что новое определение совпадает со старым. Нетрудно проверить, что

$$\left\| \int_{-h}^{0} dQ(\theta) f(\theta) \right\| \leqslant \|f\|_h \, \mathsf{V}Q.$$

В соответствии с теоремой 1.6 можно говорить об отображении $\mathcal{L} : Q \mapsto U$, заданном на множестве

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{Q \in NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n}) : \text{выполняется условие Ляпунова}\}.$$

Основной результат данной главы теперь можно сформулировать в следующим виде:

Теорема 6.1. *Пусть* $Q, Q_k \in NBV([-h,0], \mathbb{R}^{n\times n})$, $k = 1, 2, \ldots$, $Q \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ *и выполняются условия*

1. $Q_k(0)$ *сходится к* $Q(0)$,
2. $(Q_k)_1^\infty$ *сходится к* Q *в* L^1 *норме:*

$$\int_{-h}^{0} \|Q_k(\theta) - Q(\theta)\| \, d\theta \to 0,$$

тогда найдется N_1, *что для любого* $k \geqslant N_1$ *система с ядром* Q_k *удовлетворяет условие Ляпунова, и для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $N_2 \geqslant N_1$, *что для всех* $k \geqslant N_2$ *выполняется*

$$\max_{t\in[-h,h]} \|U(t) - U_k(t)\| < \varepsilon,$$

где $U = \mathcal{L}(Q)$ *и* $U_k = \mathcal{L}(Q_k)$.

Таким образом, для нахождения матрицы Ляпунова исходной системы можно построить последовательность приближенных систем, матрицы Ляпунова которых будут давать приближения исходной матрицы Ляпунова.

Интересно также поставить вопрос о непрерывности отображения $\mathcal{L}$. Ожидаемо, что данная проблема оказывается существенным образом связанной с выбором топологий на $NBV([-h,0], \mathbb{R}^{n\times n})$ и $C([-h,h], \mathbb{R}^{n\times n})$. Связь теоремы 6.1 с этим вопросом будет рассмотрена после ее установлеimpliesния.

6.2. Условие Ляпунова

Сначала докажем первую часть теоремы 6.1, то есть покажем, что все члены некоторой последовательности $(Q_k)_1^\infty$, сходящейся к Q из $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ в смысле теоремы 6.1, начиная с некоторого номера N_1 удовлетворяют условию Ляпунова. В дальнейшем будем использовать обозначения

$$F(s) = sE - \int_{-h}^{0} e^{s\theta} dQ(\theta),$$

для характеристической матрицы системы (6.1), $H(s) = F^{-1}(s)$ для обратной к ней, $f(s) = \det F(s)$ для характеристической функции системы и $\Lambda = \{s \in$

$\mathbb{C} : f(s) = 0\}$ для спектра, то есть множества всех собственных чисел системы. Аналогичные обозначения, но с индексом k, будут использоваться для соответствующих систем с ядрами Q_k.

Сперва докажем несколько вспомогательных утверждений. Применяя интегрирование по частям, имеем

$$F(s) = sE - Q(0) + s\int_{-h}^{0} Q(\theta)e^{s\theta}d\theta. \tag{6.2}$$

Лемма 6.2. *Для любого вещественного α найдется число $R(\alpha) > 0$, что все собственные числа $s \in \Lambda$, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant \alpha$, расположены в круге $|s| \leqslant R(\alpha)$.*

Доказательство. Если $s \in \Lambda$, то найдется $\gamma \neq \mathbf{0}$, что

$$s\gamma = \int_{-h}^{0} e^{s\theta}dQ(\theta)\gamma,$$

откуда, находя нормы левой и правой части и сокращая на $\|\gamma\| \neq 0$, получим

$$|s| \leqslant \left\| \int_{-h}^{0} e^{s\theta}dQ(\theta) \right\| \leqslant \max\{1, e^{-h\alpha}\}\mathsf{V}Q = R(\alpha). \qquad \blacksquare$$

Из этой леммы следует полезное

Следствие 6.3. *Множество Λ_+ конечно.*

Доказательство. Действительно, из леммы 6.2 следует, что все собственные числа $s_0 \in \Lambda_+$ с положительной вещественной частью лежат внутри окружности радиуса $R(0)$. Но функция $\det F(s)$, будучи аналитической, может иметь лишь конечное число нулей на любом компактном множестве. $\blacksquare$

Лемма 6.4. *Для любого вещественного α выполняется оценка*

$$\|H(s)\| \leqslant \frac{1}{|s| - R(\alpha)},$$

где $s \in \mathbb{C}$ с $|s| > R(\alpha)$ и $\operatorname{Re} s \geqslant \alpha$.

Доказательство. Действительно, по лемме 6.2 для таких s определена матрица $H(s)$ и

$$sH(s) = E + H(s)\int_{-h}^{0} e^{s\theta}dQ(\theta),$$

значит
$$|s|\,\|H(s)\| \leqslant 1 + \|H(s)\|\,R(\alpha).$$
откуда и следует утверждение леммы. ■

Лемма 6.5. *Если последовательность* $(Q_k)_1^\infty$ *сходится к* Q *в смысле теоремы 6.1, то характеристические матрицы* $F_k(s)$ *сходятся к* $F(s)$ *равномерно по* s *на любом ограниченном множестве* $X \subset \mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть $|s| \leqslant \sigma$ для всех $s \in X$. Рассмотрим норму разности
$$\|F(s) - F_k(s)\| = \left\| \int_{-h}^{0} e^{s\theta} d(Q_k(\theta) - Q(\theta)) \right\|.$$
и применим равенство (6.2):
$$\|F(s) - F_k(s)\| \leqslant \|Q_k(0) - Q(0)\| + \int_{-h}^{0} \left\| s e^{s\theta}(Q_k(\theta) - Q(\theta)) \right\| d\theta \leqslant$$
$$\leqslant \|Q_k(0) - Q(0)\| + \sigma e^{\sigma h} \int_{-h}^{0} \|Q_k(\theta) - Q(\theta)\|\, d\theta \to 0,$$
при $k \to \infty$ равномерно по $s \in X$. ■

Следствие 6.6. *Если последовательность* $(Q_k)_1^\infty$ *сходится к* Q *в смысле теоремы 6.1, то характеристические функции* $\det F_k(s)$ *сходятся к* $\det F(s)$ *равномерно по* s *на любом ограниченном множестве* $X \subset \mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть $|s| \leqslant \sigma$ для всех $s \in X$. Так как функция $F(s)$ аналитическая, то на круге $|s| \leqslant \sigma$ она ограничена некоторой величиной B. Из леммы 6.5 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти K такое, что при $k \geqslant K$ и $s \in X$ выполнено неравенство $\|F(s) - F_k(s)\| < \varepsilon$. Значит при $k \geqslant K$ нормы функций $F_k(s)$ ограничены на X величиной $B + \varepsilon$. Применив неравенство из [33], получим
$$|\det F(s) - \det F_k(s)| \leqslant n\,\|F(s) - F_k(s)\| \max\{\|F(s)\|^{n-1}, \|F_k(s)\|^{n-1}\} <$$
$$< n\varepsilon(B+\varepsilon)^{n-1}.$$
Таким образом, $\det F_k(s) \to \det F(s)$ равномерно по $s \in X$. ■

В лемме 6.2 было установлено, что для любой полуплоскости вида $\operatorname{Re} s \geqslant \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, модули собственных чисел системы, лежащих в этой полуплоскости, ограничены сверху. Для дальнейший рассуждений важно установить, что для последовательности систем-приближений эту оценку возможно выбрать независимо от номера k.

Лемма 6.7. *Если последовательность $(Q_k)_1^\infty$ сходится к Q в смысле теоремы 6.1, то для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ можно указать $R > 0$ и число K, что для всех $k \geqslant K$ собственные числа $s \in \Lambda_k$ с $\operatorname{Re} s \geqslant \alpha$ лежат в круге $|s| \leqslant R$.*

Доказательство. Выберем произвольное $R > R(\alpha)$ и $d \in (0, 1)$. Если мы докажем, что при достаточно больших k для s с $\operatorname{Re} s \geqslant \alpha$ и $|s| > R$ существует $H_k(s)$, то тем самым будет установлено утверждение леммы. С этой целью оценим по норме произведение $[F(s) - F_k(s)]H(s)$. Сперва выберем K так, чтобы при $k \geqslant K$ выполнялось

$$\|Q_k(0) - Q(0)\| < d\frac{R - R(\alpha)}{1 + R\max\{1, e^{-\alpha h}\}},$$
$$\int_{-h}^{0} \|Q_k(\theta) - Q(\theta)\|\, d\theta < d\frac{R - R(\alpha)}{1 + R\max\{1, e^{-\alpha h}\}}.$$

Тогда,

$$\begin{aligned}\|F(s) - F_k(s)\|\,\|H(s)\| \leqslant \frac{1}{|s| - R(\alpha)}\Bigg[&\|Q_k(0) - Q(0)\| + \\ &+ \int_{-h}^{0} \left\|se^{s\theta}(Q_k(\theta) - Q(\theta))\right\| d\theta\Bigg] \leqslant \\ &\leqslant d\frac{R - R(\alpha)}{1 + R\max\{1, e^{-\alpha h}\}}\,\frac{1 + |s|\max\{1, e^{-\alpha h}\}}{|s| - R(\alpha)}.\end{aligned}$$

Функция
$$g(p) = \frac{1 + p\max\{1, e^{-\alpha h}\}}{p - R(\alpha)}$$
монотонно убывает, так что из $|s| > R$ следует $g(|s|) < g(R)$, откуда получим

$$\|F(s) - F_k(s)\|\,\|H(s)\| < d < 1.$$

Но тогда сходится ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty}([F(s) - F_k(s)]H(s))^j = (E - [F(s) - F_k(s)]H(s))^{-1},$$

а значит матрица

$$F_k(s) = (E - [F(s) - F_k(s)]H(s))F(s),$$

имеет обратную как произведение двух обратимых матриц, что и требовалось доказать. ■

Замечание 6.2. Из доказательства леммы следует, что при $k \geqslant K$ и таких комплексных числах s, что $\operatorname{Re} s \geqslant \alpha$ и $|s| > R$, выполняется

$$\|H_k(s)\| \leqslant \frac{\|H(s)\|}{1-d}.$$

Теорема 6.8. *Если последовательность $(Q_k)_1^\infty$ сходится к Q в смысле теоремы 6.1, то найдется N_1 такое, что для любого $k \geqslant N_1$ система с ядром Q_k удовлетворяет условию Ляпунова, то есть $Q_k \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$.*

Доказательство. Хорошо известно [20], что спектр Λ системы (6.1) представляет собой не более чем счетное множество, причем в любой полосе $\alpha \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant \beta$ может находиться только конечное число собственных чисел. Так как система (6.1) удовлетворяет условию Ляпунова, то у нее нет чисто мнимых собственных чисел. Выберем $\alpha < 0$ так, чтобы в полосе $\alpha \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 0$ не было ни одного собственного числа системы. Из леммы 6.7 следует, что можно найти $R > R(\alpha)$ и K такие, что при $k \geqslant K$ для всех $s \in \Lambda_k$ с $\operatorname{Re} s \geqslant \alpha$ выполняется условие $|s| \leqslant R$. Более того, для всех собственных числа системы (6.1) с положительными вещественными частями выполнено условие $|s| \leqslant R(\alpha) < R$.

Рассмотрим контур Γ состоящий из части окружности $|s| = R$ лежащей справа от прямой $\operatorname{Re} s = \alpha$ и той части данной прямой, которая лежит внутри указанной окружности. Функция $f(s)$ — аналитическая, а по следствию 6.6 последовательность $f_k(s)$ равномерно по s сходится к $f(s)$ на любом ограниченном множестве. Из теоремы Гурвица [43] теперь следует, что найдется K_1, что для всех $k \geqslant K_1$ характеристические функции $f_k(s)$ имеют внутри контура Γ столько же нулей (с учетом кратности), сколько и характеристическая функция $f(s)$. Более того, по построению это будут все нули функций $f_k(s)$, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant \alpha$. В частности, для экспоненциально устойчивых систем отсюда следует требуемое.

Если же система (6.1) не является экспоненциально устойчивой, то в силу условия Ляпунова можно построить конечный набор контуров $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$, что каждый из нулей $f(s)$ с $\operatorname{Re} s > 0$ лежит внутри какого-то из контуров Γ_j, а внутри отраженных симметрично относительно нуля комплексой плоскости контуров $-\Gamma_1, \ldots, -\Gamma_r$ собственных чисел системы (6.1) нет. Применяя теорему Гурвица еще раз к системе контуров $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r, -\Gamma_1, \ldots, -\Gamma_r$ получим такое число $N_1 \geqslant K_1$, что при $k \geqslant N_1$ каждая из функций $f_k(s)$ имеет столько же нулей внутри каждого из контуров Γ_j, сколько и $f(s)$, а внутри контуров $-\Gamma_j$ не обращается в нуль $(j = 1, \ldots, r)$.

Так как внутри системы контуров $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ лежат все нули функции $f(s)$, расположенные в правой полуплоскости, то общее число нулей (с учетом кратности) функций $f_k(s)$, $k \geqslant N_1$ внутри данной системы контуров совпадает с общим числом нулей $f(s)$ в правой полуплоскости, откуда следует, что вне этой системы контуров в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant \alpha$ нулей функций $f_k(s)$ нет. Но по построению отсюда следует, что для всех систем с ядрами Q_k, при $k \geqslant N_1$ выполняется условие Ляпунова, что и требовалось доказать. ∎

6.3. Доказательство теоремы о сходимости матриц Ляпунова

Теперь, когда установлено существование матриц Ляпунова при $k \geqslant N_1$, оценивая напрямую разность между $U_k(t)$ и $U(t)$, покажем, что она становится бесконечно малой при k стремящимся к бесконечности. Вспомнив представление для матриц Ляпунова из теоремы 1.6, рассмотрим сначала разницу интегральных членов:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1^{(k)}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} H^T(s)WH(-s)e^{-ts}ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} H_k^T(s)WH_k(-s)e^{-ts}ds = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} H^T(s)W[H(-s) - H_k(-s)]e^{-ts}ds + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} [H(s) - H_k(s)]^T WH_k(-s)e^{-ts}ds.\end{aligned} \tag{6.3}$$

Для $H(s) - H_k(s)$ имеем

$$H(s) - H_k(s) = H(s)[F_k(s) - F(s)]H_k(s). \tag{6.4}$$

Так как $\operatorname{Re} s = 0$, то

$$\|F_k(s) - F(s)\| = \left\| \int_{-h}^{0} e^{s\theta} d[Q(\theta) - Q_k(\theta)] \right\| \leqslant \mathsf{V}[Q - Q_k],$$

и из леммы 6.4 следует, что норма $\|H(s) - H_k(s)\|$ имеет порядок $O(|s|^{-2})$ для любого заданного k, откуда следует, что подынтегральные функции в правой части равенства (6.3) имеют порядок $O(|s|^{-3})$. Значит оба интеграла сходятся абсолютно и представление (6.3) имеет смысл.

Проводя рассуждения, аналогичные проведенным в доказательстве леммы 6.7 для $d = 1/2$ и некоторого $R > R(0)$, найдем $K_1 \geqslant N_1$, чтобы при всех $k \geqslant K_1$ неравенство

$$\|F(s) - F_k(s)\| \, \|H(s)\| < \frac{1}{2} \tag{6.5}$$

было выполнено для всех чисто мнимых $s \in \mathbb{C}$ с $|s| > R$. Используем лемму 6.5, согласно которой характеристические матрицы $F_k(s)$ сходятся к $F(s)$ равномерно на ограниченных подмножествах, в частности, и на интервале $s = i\omega$, $\omega \in [-R, R]$. На этом отрезке определена и непрерывна функция $H(s)$, а значит она и ограничена на нем. Следовательно, существует $K_2 \geqslant K_1$ такое, что при всех $k \geqslant K_2$ неравенство 6.5 оказывается выполненным уже для всех чисто мнимых s. Также имеем

$$H_k(s) = H(s)(E - [F(s) - F_k(s)]H(s))^{-1}, \tag{6.6}$$

откуда $\|H_k(s)\| \leqslant 2 \|H(s)\|$, а значит

$$\begin{aligned}\|H_k(s) - H(s)\| &\leqslant \|H(s)\| \, \|F_k(s) - F(s)\| \, \|H_k(s)\| \\ &\leqslant \frac{1}{2} \|H_k(s)\| \leqslant \|H(s)\| \, .\end{aligned}$$

Отметим также, что при $\operatorname{Re} s = 0$ выполняется

$$\begin{gathered}\left\|H^T(s)\right\| = \|H^*(-s)\| = \|H(-s)\| \, , \\ \left\|[H(s) - H_k(s)]^T\right\| = \|[H(-s) - H_k(-s)]^*\| = \|H(-s) - H_k(-s)\| \, , \\ \left|e^{-ts}\right| = 1.\end{gathered}$$

Подставив полученную оценку в (6.3), получим

$$\left\|\mathcal{S}_1^{(k)}(t)\right\| \leqslant \frac{3}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \|H(-s)\| \, \|W\| \, \|H(-s) - H_k(-s)\| \, |ds| =$$

$$= \frac{3\left\|W\right\|}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\|H(i\omega)\right\|\left\|H(i\omega)-H_k(i\omega)\right\|d\omega.$$

Функция $\|H(i\omega)\|\,\|H(i\omega)-H_k(i\omega)\| \leqslant \|H(i\omega)\|^2$ имеет порядок $O(\omega^{-2})$, значит последний из написанных выше интегралов сходится и для любого $\varepsilon_1 > 0$ можно найти $r > 0$, чтобы

$$\int_{|\omega|>r}\left\|H(i\omega)\right\|\left\|H(i\omega)-H_k(i\omega)\right\|d\omega < \varepsilon_1.$$

А на отрезке $\omega \in [-r, r]$ из выражения (6.4) следует, что

$$\left\|H(i\omega)\right\|\left\|H(i\omega)-H_k(i\omega)\right\| \leqslant 2\left\|H(i\omega)\right\|^3\left\|F_k(i\omega)-F(i\omega)\right\|.$$

По лемме 6.5 о равномерной сходимости F_k к F на ограниченных множествах получим, что найдется $K_3 \geqslant K_2$ такое, что

$$\int_{|\omega|\leqslant r}\left\|H(i\omega)\right\|\left\|H(i\omega)-H_k(i\omega)\right\|d\omega \leqslant 2\int_{|\omega|\leqslant r}\left\|H(i\omega)\right\|^3\left\|F_k(i\omega)-F(i\omega)\right\|d\omega < \\ < \varepsilon_1$$

при всех $k \geqslant K_3$, а $\|H(i\omega)\|$ ограничена на рассматриваемом отрезке.

Итак,

$$\left\|\mathcal{S}_1^{(k)}(t)\right\| \leqslant \frac{3\left\|W\right\|}{\pi}\varepsilon_1, \tag{6.7}$$

а значит $\mathcal{S}_1^{(k)}(t)$ стремится к нулю при $k \to \infty$ равномерно по t.

Замечание 6.3. Тем самым теорема 6.1 доказана в случае экспоненциальной устойчивости. Действительно, тогда имеем $U(t) - U_k(t) = \mathcal{S}_1^{(k)}(t)$, и, заметив, что произведенные вычисления верны при всех вещественных t, а не только при $t \in [-h, h]$, получим $U_k(t) \to U(t)$ равномерно по $t \in \mathbb{R}$. Тем самым мы повторили результат статей [29, 53] для произвольных линейных систем запаздывающего типа. В равномерной сходимости на всей вещественной оси, а не только на отрезке $[-h, h]$ нет ничего удивительного, поскольку для экспоненциально устойчивых систем их матрицы Ляпунова также являются экспоненциально убывающими.

Перейдем к оценке разницы вычетов:

$$\mathcal{S}_2^{(k)}(t) = \sum_{s\in\Lambda_+}\operatorname{res}_s[H^T(s)WH(-s)e^{-ts}] + \sum_{s\in\Lambda_+}\operatorname{res}_s[H^T(-s)WH(s)e^{ts}]$$

$$-\sum_{s\in\Lambda_+^{(k)}}\mathrm{res}_s[H_k^T(s)WH_k(-s)e^{-ts}]-\sum_{s\in\Lambda_+^{(k)}}\mathrm{res}_s[H_k^T(-s)WH_k(s)e^{ts}]. \quad (6.8)$$

Пронумеруем собственные числа из $\Lambda_+=\{s_1,\dots,s_m\}$ и найдем небольшой радиус $\delta>0$ такой, чтобы m кругов $\Gamma_1,\dots,\Gamma_m$ радиуса δ, описанных около каждого из собственных чисел s_j, $1\leqslant j\leqslant m$ не пересекали друг друга и не содержали других собственных чисел системы (6.1) кроме s_j. Дополнительно потребуем, чтобы внутри отраженных кругов $-\Gamma_1,\dots,-\Gamma_m$ не было собственных чисел системы (6.1). Это можно обеспечить в силу предположения о выполнении условия Ляпунова для системы (6.1). После того, как такое δ найдено, мы имеем право записать

$$\sum_{s\in\Lambda_+}\mathrm{res}_s[H^T(s)WH(-s)e^{-ts}]+\sum_{s\in\Lambda_+}\mathrm{res}_s[H^T(-s)WH(s)e^{ts}]=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^m\oint_{\Gamma_j}[H^T(s)WH(-s)e^{-ts}+H^T(-s)WH(s)e^{ts}]ds.$$

Проводя рассуждения, аналогичные проведенным в доказательстве теоремы 6.8, найдем $K_4\geqslant K_3$, чтобы для всех $k\geqslant K_4$ все собственные числа из $\Lambda_+^{(k)}$ располагались в кругах $\Gamma_1,\dots,\Gamma_m$, а внутри кругов $-\Gamma_1,\dots,-\Gamma_m$ не было собственных чисел из $\Lambda^{(k)}$. Тогда,

$$\sum_{s\in\Lambda_+^{(k)}}\mathrm{res}_s[H_k^T(s)WH_k(-s)e^{-ts}]+\sum_{s\in\Lambda_+^{(k)}}\mathrm{res}_s[H_k^T(-s)WH_k(s)e^{ts}]=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^m\oint_{\Gamma_j}[H_k^T(s)WH_k(-s)e^{-ts}+H_k^T(-s)WH_k(s)e^{ts}]ds.$$

Подставив полученные выражения в (6.8), получим

$$\mathcal{S}_2^{(k)}(t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^m\oint_{\Gamma_j}[H^T(s)WH(-s)-H_k^T(s)WH_k(-s)]e^{-ts}ds+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^m\oint_{\Gamma_j}[H^T(-s)WH(s)-H_k^T(-s)WH_k(s)]e^{ts}ds,$$

что можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_2^{(k)}(t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\oint_{\Gamma_j} H^T(s)W[H(-s)-H_k(-s)]e^{-ts}ds+\\
+\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\oint_{\Gamma_j}[H(s)-H_k(s)]^T W H_k(-s)e^{-ts}ds+\\
+\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\oint_{\Gamma_j} H^T(-s)W[H(s)-H_k(s)]e^{ts}ds+\\
+\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\oint_{\Gamma_j}[H(-s)-H_k(-s)]^T W H_k(s)e^{ts}ds.
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

Теперь мы можем оценить каждый из интегралов в (6.9) способом, подобным уже примененному для оценки несобственных интегралов ранее. Так как каждый из рассматриваемых кругов ограничен и их конечное число, то $|s| \leqslant R$ для всех $s \in \Gamma_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Но тогда и $|e^{-ts}| \leqslant e^{hR}$, $|e^{ts}| \leqslant e^{hR}$ для рассматриваемых t из $[-h, h]$. Нормы $\left\|H^T(s)\right\| = \|H(s)\|$, $\left\|H^T(-s)\right\| = \|H(-s)\|$ очевидно ограничены некоторой константой $B > 0$ на совокупности контуров Γ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$. Снова применим лемму 6.5 о равномерной сходимости и найдем $K_5 \geqslant K_4$ такое, что при всех $k \geqslant K_5$ и $s \in \Gamma_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$ выполняются условия

$$
\begin{aligned}
\left\|[F(s)-F_k(s)]^T\right\| = \|F(s)-F_k(s)\| < \max\left\{\varepsilon_1, \frac{1}{2B}\right\},\\
\left\|[F(-s)-F_k(-s)]^T\right\| = \|F(-s)-F_k(-s)\| < \max\left\{\varepsilon_1, \frac{1}{2B}\right\}.
\end{aligned}
$$

Значит для рассматриваемых s имеем $\|H(s)\|\,\|F(s)-F_k(s)\| < 1/2$, как и $\|H(-s)\|\,\|F(-s)-F_k(-s)\| < 1/2$, что после подстановки в (6.6) дает $\|H_k(s)\| < 2B$ и $\|H_k(-s)\| < 2B$. Подставляя равенство (6.4) в (6.9) и используя все предыдущие оценки получим

$$
\left\|\mathcal{S}_2^{(k)}(t)\right\| \leqslant 12\delta m B^3 \|W\| e^{hR}\varepsilon_1. \tag{6.10}
$$

Мы получили два неравенства (6.7) и (6.10), которые вместе означают, что при всех $k \geqslant K_5$ и $t \in [-h, h]$ выполняется

$$
\|U(t)-U_k(t)\| \leqslant \left\|\mathcal{S}_1^{(k)}(t)\right\| + \left\|\mathcal{S}_2^{(k)}(t)\right\| \leqslant \left[\frac{3}{\pi} + 12\delta m B^3 e^{hR}\right]\|W\|\varepsilon_1.
$$

Так как число $\varepsilon_1 > 0$ было выбрано произвольно, то правая часть предыдущего неравенства может быть сделана сколь угодно малой независимо от $t \in [-h, h]$. Тем самым доказательство теоремы 6.1 завершено.

6.4. Непрерывная зависимость

Из предыдущих работ известны два результата, о которых можно сказать, что в них доказана непрерывная зависимость матриц Ляпунова в том или ином смысле. В первой статье [29] были рассмотрены системы вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t - h_j), \tag{6.11}$$

где $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_m = h$. Было установлено, что для систем с теми же матрицами A_j, но с запаздываниями $\bar{h}_j$, если как исходная система (6.11), так и ее возмущение, являются экспоненциально устойчивыми, то при достаточно малой разнице

$$\max\left\{\left|h_j - \bar{h}_j\right|, 1 \leqslant j \leqslant m\right\},$$

разница между матрицами Ляпунова двух систем также будет малой. Это позволило авторам утверждать о непрерывной зависимости матриц Ляпунова от запаздываний.

Подобный результат был получен и в статье [53], где рассматривались системы вида

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h) + \int_{-h}^{0} G(\theta) x(t + \theta) d\theta. \tag{6.12}$$

Здесь $G(\theta)$ есть непрерывная матричная функция, а возмущенные системы получались при аппроксимации интегрального члена конечной суммой:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h) + \sum_{j=0}^{k-1} G_j^{(k)} x\left(t - j\delta_k\right),$$

$$G_j^{(k)} = \int_{-(j+1)\delta_k}^{-j\delta_k} G(\theta) d\theta, \quad \delta_k = \frac{h}{k}.$$

Было показано, что в случае экспоненциальной устойчивости системы (6.12) для достаточно больших k возмущенные системы тоже оказываются экспоненциально устойчивыми, а разница между матрицами Ляпунова будет малой. Таким образом, тоже можно говорить о некоторого рода непрерывной зависимости матриц Ляпунова от правых частей.

Прежде чем переходить к обсуждению непрерывности отображения $\mathcal{L}$ необходимо определится с топологией на его множествах аргументов $\mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n})$ и значений $C([-h,h],\mathbb{R}^{n\times n})$. Что считать близостью для самих матриц Ляпунова достаточно очевидно из требуемых приложений, что приводит нас к банахову пространству $C([-h,h],\mathbb{R}^{n\times n})$ с равномерной нормой

$$\|U\|_C = \max_{t\in[-h,h]} \|U(t)\|.$$

Для области определения, однако нет явного понятия близости или сходимости ядер из $NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n})$, в явном отличии от приведенных выше примеров. Например, можно рассмотреть норму

$$\|Q\| = \|Q(-h)\| + \mathsf{V}Q = \mathsf{V}Q,$$

и тем самым превратить $NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n})$ также в банахово пространство. Так как $\|Q(\theta)\| = \|Q(\theta) - Q(-h)\| \leqslant \mathsf{V}Q$ для любого $\theta \in [-h,0]$, то из сходимости по этой норме следует и сходимость в смысле теоремы 6.1, откуда следует открытость множества $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ в $(NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n}), \|\cdot\|)$ и непрерывность $\mathcal{L}$ как отображения из $(\mathcal{D}(\mathcal{L}),\rho)$ в $C([-h,h],\mathbb{R}^{n\times n})$, где $\rho(Q_1,Q_2) = \|Q_1 - Q_2\|$ есть соответствующая данной норме метрика (следует отметить, что $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ не является векторным подпространством). Однако оказывается, что определяемая этой нормой топология является слишком сильной и не включает в себя приведенные примеры, так как в обоих случаях ядра приближений не сходятся к ядрам исходных систем по норме $\|\cdot\|$.

Следуя статье [13], можно рассмотреть метрику вида

$$\rho_a(Q_1,Q_2) = \int_{-h}^{0} \|Q_1(\theta) - Q_2(\theta)\|\, d\theta + \|Q_1(0) - Q_2(0)\| + |\mathsf{V}Q_1 - \mathsf{V}Q_2|.$$

Сходимость $Q_k \xrightarrow{\rho_a} Q$ по данной метрике равносильна выполнению трех условий: сходимость Q_k к Q в L_1-норме, сходимость последовательности матриц $Q_k(0)$ к $Q(0)$ и последовательность $\mathsf{V}Q_k$ к $\mathsf{V}Q$. Первые два условия используются в теореме 6.1, что приводит к аналогичному заключению: множество $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ открыто в $(NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n}),\rho_a)$ и отображение $\mathcal{L}$ из $(\mathcal{D}(\mathcal{L}),\rho_a)$ в $C([-h,h],\mathbb{R}^{n\times n})$

непрерывно. Нетрудно убедиться, что все три условия выполнены для обоих примеров, так что приближения из статей [29, 53] подпадают под случай сходимости по метрике ρ_a. Можно сделать вывод, что доказанная теорема 6.1 существенно усиливает результаты этих двух статей, ведь не требуется ни экспоненциальная устойчивость рассматриваемых систем, ни сходимость вариаций $\mathsf{V}Q_k$ к $\mathsf{V}Q$.

Следует рассмотреть также топологию более грубую, чем определяемая метрикой ρ_a, но широко известную и теоретически важную. В замечании 6.1 отмечалось, что функции ограниченной вариации находятся в соответствии в линейными функционалами. Вспомним следующее

Определение 6.1. Пусть A есть некоторое направленное множество. Будем говорить, что обобщенная последовательность $(Q_\alpha)_{\alpha\in A}$ нормализованных функций ограниченной вариации слабо-* сходится к $Q \in NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n})$ (и писать $Q_\alpha \xrightharpoonup{*} Q$), если для любой функции $f \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ выполняется предельное соотношение

$$\int_{-h}^{0} dQ_\alpha(\theta) f(\theta) \to \int_{-h}^{0} dQ(\theta) f(\theta).$$

По теореме Банаха—Штейнгауза [3], если последовательность $(Q_k)_1^\infty$ слабо-* сходится к Q, то она является равномерно ограниченной по норме, то есть $\sup\{\mathsf{V}Q_k\} < \infty$. В этом случае известен следующий результат.

Теорема 6.9 ([2, 40])**.** *Последовательность $(Q_k)_1^\infty$ слабо-* сходится к Q тогда и только тогда, когда*

1. *$Q_k(0)$ сходится $Q(0)$,*
2. *$(Q_k)_1^\infty$ сходится к Q в L^1-норме,*
3. *эта последовательность равномерно ограничена:* $\sup\{\mathsf{V}Q_k\} < \infty$.

Таким образом, можно говорить, что слабая-* сходимость последовательностей на шаг облегчает условия, накладываемые сходимостью по метрике ρ_a. Тем не менее оказывается, что обобщенные последовательности могут вести себя гораздо хуже. Определим на $NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n})$ топологию, называемую слабой-* топологией, как грубейшую из топологий, при которой все линейные функционалы $Q \mapsto \int dQf$ оказываются непрерывными, где $f \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$. В силу этого определения, обобщенные последовательности, сходящиеся в слабой-* топологии, есть только слабо-* сходящиеся обобщенные последовательности и наоборот.

Теорема 6.10. *Пусть $Q \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, тогда можно построить обобщенную последовательность $(Q_\alpha)_{\alpha\in A}$ такую, что $Q_\alpha \notin \mathcal{D}(\mathcal{L})$ для всех $\alpha \in A$, но $Q_\alpha \xrightharpoonup{*} Q$.*

Доказательство. Выберем в качестве A направленное множество всех слабо-* открытых множеств, содержащих Q, и упорядочим A по включению: $U \preceq V$ тогда и тогда тогда, когда $U \supset V$. По определению, любое слабо-* открытое множество U содержит слабо-* открытую окрестность ядра Q вида

$$N = \left\{ R \in NBV([-h,0], \mathbb{R}^{n\times n}) : \left\| \int_{-h}^{0} d(Q(\theta) - R(\theta)) f_j(\theta) \right\| < \varepsilon, 1 \leqslant j \leqslant m \right\}$$

для каких-то функций $f_1, \ldots, f_m \in C([-h,0], \mathbb{R}^n)$. Без ограничения общности будем считать, что функции $f_1, \ldots, f_l$ линейно независимы, а функции $f_{l+1}, \ldots, f_m$ могут быть выражены в виде линейных комбинаций первых l функций. Выберем произвольный вектор $\gamma \in \mathbb{R}^n$ и число $\omega_0 \in \mathbb{R}$ такие, что функции $c(\theta) = \cos(\omega_0\theta)\gamma$ и $s(\theta) = \sin(\omega_0\theta)\gamma$ линейно независимы с функциями $f_1, \ldots, f_l$. На линейной оболочке $\mathrm{sp}\{f_1, \ldots, f_m, c, s\}$ определим линейный функционал ℓ:

$$\begin{aligned} \ell(f_1) = \ell(f_2) = \ldots = \ell(f_l) = \mathbf{0}, \\ \ell(c) = -\int_{-h}^{0} dQ(\theta)[\cos(\omega_0\theta)\gamma], \\ \ell(s) = \omega_0\gamma - \int_{-h}^{0} dQ(\theta)[\sin(\omega_0\theta)\gamma]. \end{aligned}$$

Ясно, что $\ell(f_{l+1}) = \cdots = \ell(f_m) = \mathbf{0}$. По теореме Хана—Банаха [3], этот функционал (или, точнее говоря, n функционалов) можно продолжить до непрерывного линейного функционала на всем пространстве $C([-h,0], \mathbb{R}^n)$. По замечанию 6.1 полученный функционал ℓ_U соответствует некоторой функции ограниченной вариации, нормализовав которую придем к функции ограниченной вариации $R_U(\theta)$. Положим $Q_U(\theta) = Q(\theta) + R_U(\theta)$. По построению, $Q_U \in N \subset U$ для всех $U \in A$.

Проверим, что $Q_U \notin \mathcal{D}(\mathcal{L})$, а обобщенная последовательность $(Q_U)_{U\in A}$ слабо-* сходится к Q. Первое утверждение следует из

$$\int_{-h}^{0} dQ_U(\theta)[e^{i\omega_0\theta}\gamma] = \int_{-h}^{0} dQ(\theta)[e^{i\omega_0\theta}\gamma] + \ell_U(c + is) = i\omega_0\gamma,$$

откуда

$$\det\left[i\omega_0 E - \int_{-h}^{0} e^{i\omega_0\theta} dQ_U(\theta) \right] = 0,$$

что означает, что $i\omega_0$ есть собственное число системы с ядром Q_U. Аналогично, $-i\omega_0$ есть также собственное число такой системы и для нее не выполнено условие Ляпунова.

Чтобы проверить второе утверждение, выберем слабо-* открытое множество $\hat{U}$, содержащее Q. Для любого слабо-* открытого множества V такого, что $\hat{U} \preceq V$, выполняется $Q_V \in V$, а значит и $Q_V \in \hat{U}$, что по определению сходимости обобщенных последовательностей и означает $Q_U \xrightarrow{*} Q$. ■

Из доказанной теоремы следует, что множество $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ не является открытым в слабой-* топологии. Из этого вытекает, что нет никакого практического смысла пытаться аппроксимировать матрицы Ляпунова рассматривая слабо-* сходящиеся обобщенные последовательности, так как без дополнительных ограничений нельзя утверждать, что условие Ляпунова будет выполнено хоть какими-то элементами этих последовательностей. Тем не менее, ранее мы уже убедились, что слабо-* сходящиеся последовательности удовлетворяют искомым целям. Следует отметить, что можно определить топологию, где достаточно рассмотрения только обычных последовательностей, а не обобщенных последовательностей.

Ограниченная слабая-* топология есть сильнейшая из топологий, совпадающих со слабой-* топологией на всех ограниченных множествах [3]. Можно показать [65], что в ограниченной слабой-* топологии множество является замкнутым тогда и только тогда, когда оно слабо-* секвенциально замкнуто, то есть если из $Q_k \xrightarrow{*} Q$ с $Q_k \in F \subset NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n})$, $k = 1, 2, \ldots$ следует, что и $Q \in F$. Таким образом, пространство $NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n})$ с ограниченной слабой-* топологией является секвенциальным пространством. Из теорем 6.1 и 6.9 следует, что множество $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ в этом пространстве открыто, а, так как открытые подмножества секвенциальных пространств сами является секвенциальными пространствами [11, 32], то из секвенциальной непрерывности отображения $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \to C([-h,h],\mathbb{R}^{n\times n})$ следует и непрерывность в обычном смысле. Таким образом, отображение $\mathcal{L}$ есть непрерывное отображение из $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ с относительной топологией, индуцированной ограниченной слабой-* топологией в $C([-h,h],\mathbb{R}^{n\times n})$.

Наконец, можно напрямую рассмотреть топологию, индуцированную метрикой

$$\rho_t(Q_1, Q_2) = \int_{-h}^{0} \|Q_1(\theta) - Q_2(\theta)\| \, d\theta + \|Q_1(0) - Q_2(0)\| \, ,$$

полученной сразу из теоремы 6.1. Заключение не меняется: множество $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ открыто, а отображение $\mathcal{L}$ непрерывно. Тем не менее, следует отметить одно важное свойство.

Теорема 6.11 ([12,13]). *Множество полигональных (кусочно-линейных) функций с рациональными концами всюду плотно в* $(NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n}),\rho_a)$ *(и в* $(NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n}),\rho_t)$*). Таким образом, эти пространства являются сепарабельными.*

Эта теорема может быть установлена построением специальной последовательности кусочно-линейных функций с концами $(-h_j, Q(-h_j))$ и дальнейшим приближением этих концов точками с рациональными координатами. Системы соответствующие кусочно-линейным ядрам это есть не что иное, как системы с распределенным запаздыванием с кусочно-постоянными ядрами, то есть системы вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j \int_{-h_{j+1}}^{-h_j} x(t+\theta)d\theta.$$

Ясно, что конечные точки интегрирования можно сделать рационально кратными запаздывания h, то есть выбрать запаздывания h_j таким образом, чтобы все они были кратны некоторому r. Построение матриц Ляпунова для подобных систем уже рассматривалось в главе 5. Таким образом, результаты главы 5 и теорем 6.1 и 6.11 означают, что для любой стационарной системы с постоянным запаздыванием, удовлетворяющей условию Ляпунова, соответствующую матрицу Ляпунова можно построить сколь угодно точно.

6.5. Пример

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = x(t) + e^{-1}x(t-1) - x(t-2). \tag{6.13}$$

Его ядром является функция

$$Q(\theta)=\begin{cases}0, & \theta=-2,\\ -1, & -2<\theta\le -1,\\ -1+e^{-1}, & -1<\theta<0,\\ e^{-1}, & \theta=0.\end{cases} \tag{6.14}$$

Разобьем отрезок $[-2,0]$ на подотрезки длины $\delta_k=2^{-k}$ и построим кусочно-линейные функции $Q_k(\theta)$, проходящие через точки $(-j\delta_k, Q(-j\delta_k))$, где $j=0,\ldots,2\cdot 2^k$. Несколько таких функций представлены на рисунке 5. Получим системы вида

$$\dot{x}(t)=-2^k\int_{-2}^{-2+2^{-k}}x(t+\theta)d\theta+e^{-1}2^k\int_{-1}^{-1+2^{-k}}x(t+\theta)d\theta+2^k\int_{-2^{-k}}^{0}x(t+\theta)d\theta.$$

Ясно, что построенные приближения основываются на том, что для любой непрерывной функции f выполняется

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+h}f(\theta)d\theta\to f(a),$$

при $h\to 0$.

Видно, что $Q_k(0)=Q(0)$ для всех k, и

$$\int_{-2}^{0}|Q(\theta)-Q_k(\theta)|\,d\theta=\int_{-2}^{-2+2^{-k}}1-2^k(\theta+2)d\theta+e^{-1}\int_{-1}^{-1+2^{-k}}1-2^k(\theta+1)d\theta+$$
$$+\int_{-2^{-k}}^{0}1+2^k\theta d\theta=(2+e^{-1})2^{-(k+1)}\to 0,$$

при $k\to\infty$. Таким образом, выполнены оба условия теоремы 6.1. Нетрудно проверить выполнение условия Ляпунова для уравнения (6.13), но экспоненциальной устойчивости здесь нет, так как $s_0=1$ является собственным числом. Из рисунка 6 можно сделать вывод, что построенные приближения неплохо аппроксимирует спектр исходной системы.

Построим матрицы Ляпунова исходной и возмущенных систем, ассоциированные с $W=1$. Полученные графики представлены на рисунке 7. Для исходной системы 6.13 матрица Ляпунова была построена с использованием результатов

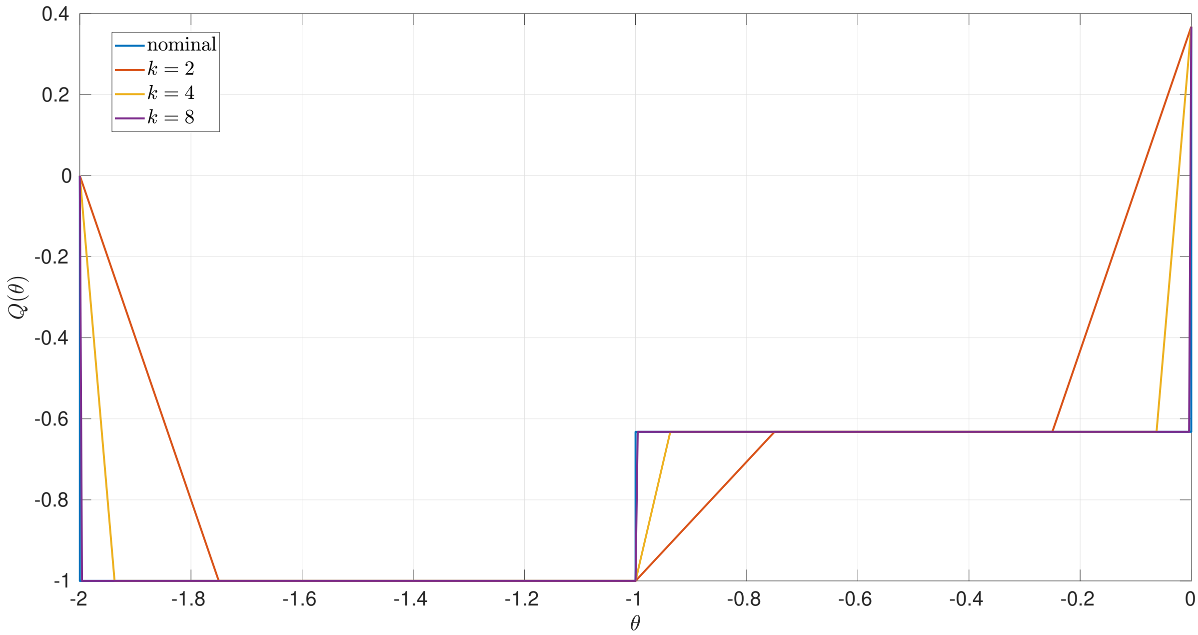

Рис. 5: Ядра исходной системы и ее возмущений при $k = 2, 4, 8$.

статьи [34], а для возмущений — главы 5. Ясно, что последовательность приближенных матриц Ляпунова сходится к матрице Ляпунова номинальной системы (6.13). Численные результаты резюмированы в таблице 1.

k	δ_k	число интервалов	$\|U - U_k\|_C$
2	0.25	8	0.8209
4	0.0625	32	0.1615
8	0.0039	512	0.0094

Таблица 1: Зависимость погрешности матрицы Ляпунова от k

Можно сделать вывод о приблизительно линейном характере уменьшения погрешности приближений при увеличении числа интервалов разбиения.

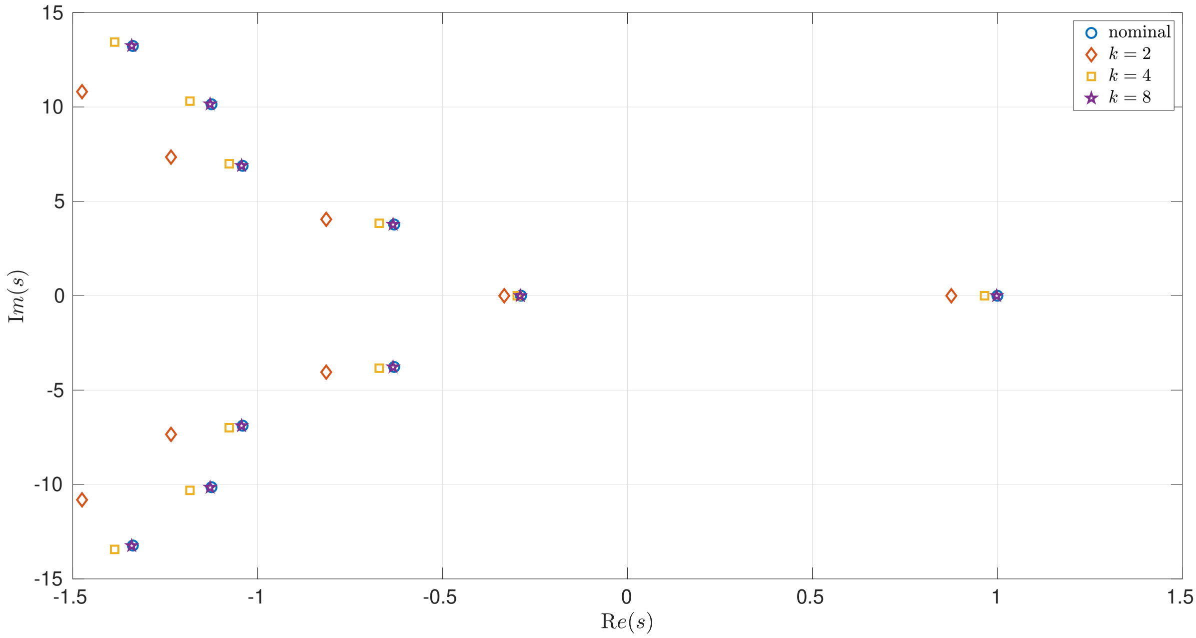

Рис. 6: Собственные числа исходной системы и ее возмущений при $k = 2, 4, 8$.

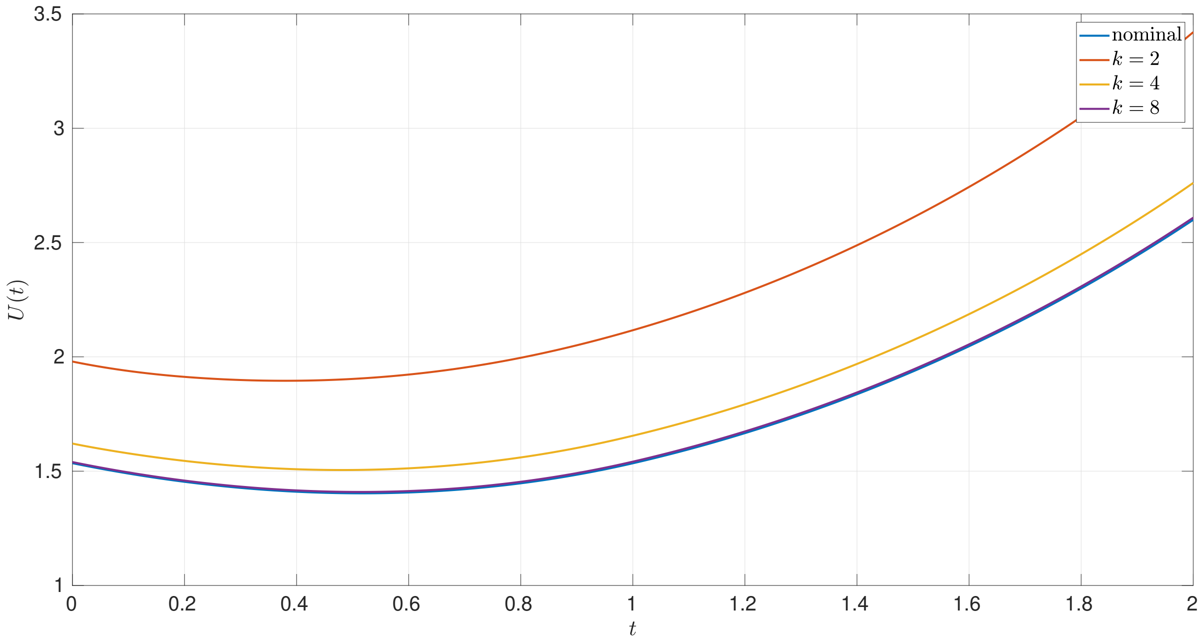

Рис. 7: Матрицы Ляпунова исходной системы и ее возмущений при $k = 2, 4, 8$.

Заключение

В работе рассматривалась проблема нахождения матриц Ляпунова. Во второй главе для систем с распределенным запаздыванием и экспоненциальным ядром была предложена новая вспомогательная граничная задача, которая позволяет однозначно определить матрицы Ляпунова для систем, удовлетворяющих условию Ляпунова. Проверка условия Ляпунова при этом может быть произведена непосредственно в процессе решения граничной задачи и сводится к невырожденности системы линейных алгебраических уравнений.

В третьей главе рассматривался подход к анализу устойчивости систем и построению матриц Ляпунова для систем с распределенным запаздыванием и экспоненциальным ядром путем сведения их к системам с одним запаздыванием. Как для систем с распределенным запаздыванием и экспоненциальным ядром, так и для систем с одним запаздыванием возможно построение матриц Ляпунова, но граничная задача для расширенной системы с одним запаздыванием оказывается большей размерности, чем граничная задача для исходной системы. Более того, было показано, что в некоторых случаях расширенная система может не иметь матрицы Ляпунова, даже если для исходной системы условие Ляпунова было выполнено. Стоит также отметить, что переход к расширенной системе в некоторых случаях приводит к потере свойства экспоненциальной устойчивости. Таким образом, следует признать, что вычисление матриц Ляпунова путем преобразования системы к одному запаздыванию нельзя рекомендовать в силу меньшей области применения и больших вычислительных затрат.

В четвертой главе рассматривались линейные системы с запаздыванием в управлении. Используя преобразование стабилизирующего управления к динамическому регулятору и метод функционалов Ляпунова—Красовского был построен функционал, применимый для анализа устойчивости системы, замкнутой исходным управлением. С использованием построенного функционала были получены экспоненциальные оценки решений системы.

В пятой главе был представлен новый класс систем, для которых возможно конструктивное нахождение матриц Ляпунова — системы с распределенным запаздыванием и кусочно-постоянным ядром. Было показано, что для такого класса систем возможно построить теорию, полностью повторяющую известные результаты для систем с одним запаздыванием. Показано, что единственность матриц Ляпунова эквивалентна единственности решения предложенной вспомогательной граничной задачи.

В шестой главе был рассмотрен вопрос нахождения матриц Ляпунова для стационарных систем с ограниченным запаздыванием, правые части которых описываются интегралом Стилтьеса. Было показано, что при некоторых довольно слабых ограничениях из сходимости ядер правых частей систем следует сходимость соответствующих матриц Ляпунова. Тем самым предыдущие результаты в этом направлении удалось расширить на существенно больший класс систем, причем удалось снять требование экспоненциальной устойчивости рассматриваемых систем. Полученный результат можно использовать как основу разного рода численных методов нахождения матриц Ляпунова.

Таким образом, класс систем с запаздыванием для которых возможно конструктивное использование метода функционалов Ляпунова—Красовского в данной работе был существенно расширен.

Список литературы

[1] Алисейко А. Н. Матрицы Ляпунова для класса систем с экспоненциальным ядром // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, 2017. Т. 13, Вып. 3. С. 228–240.

[2] Гливенко В. И. Интеграл Стилтьеса (2-е изд.). М.: URSS, 2007. 216 с.

[3] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Том 1. Общая теория. М.: Издательство иностранной литературы, 1962. 895 с.

[4] Зубов В. И. К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом // Известия высших учебных заведений. Математика, 1958. Вып. 6. С. 86–95.

[5] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

[6] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 472 с.

[7] Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Успехи матем. наук, 1949. Т. 4, Вып. 5. С. 99–141.

[8] Разумихин Б. С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика, 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 500–512.

[9] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., Наука, 1971. 296 с.

[10] Сумачева В. А. О минимизации $\mathcal{H}_2$ нормы передаточной матрицы для систем запаздывающего типа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, 2014. Вып. 1. С. 128–137.

[11] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.

[12] Adams C. R., Lewy H. On convergence in length // Duke Mathematical Journal, 1935. Vol. 1, No 1. P. 19–26.

[13] Adams C. R. The Space of Functions of Bounded Variation and Certain General Spaces. // Transactions of the American Mathematical Society, 1936. Vol. 40, No 3. P. 421–438.

[14] Abu-Khalaf M., Gumussoy S. Comments on: “Lyapunov matrices for a class of time delay systems” by V. L. Kharitonov // arXiv:1802.06831v1 [cs.SY], 2018.

[15] Aliseyko A. N. Lyapunov matrices for a class of time-delay systems with piecewise-constant kernel // International Journal of Control, 2019. Vol. 92, No. 6. P. 1298-1305.

[16] Aliseyko A. N., Kharitonov V. L. Lyapunov–Krasovskii functionals for linear systems with input delay // IFAC-PapersOnLine, 2019. Vol. 52, No 18. P. 19–24.

[17] Aliseyko A. N. Extension of State Space and Lyapunov Matrices // IEEE Transactions on Automatic Control, 2021. Vol. 66, No. 4, P. 1771–1777.

[18] Aliseyko A. N. Continuous dependence of Lyapunov matrices with respect to perturbations for linear delay systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022. Vol. 32, No 6. P. 3126–3140.

[19] Bartlett M. S. On Theoretical Models for Competitive and Predatory Biological Systems // Biometrika, 1957. Vol. 44, No 1/2. P. 27–42.

[20] Bellman R., Cooke K. L. Differential-Difference Equations. N. Y.: Academic Press, 1963. 482 p.

[21] Cooke K. L. Stability analysis for a vector disease model // The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1979. Vol. 9, No 1. P. 31–42.

[22] Datko R. An algorithm for computing Lyapunov functionals for some differential difference equations // Ordinary Differential Equations / ed. L. Weiss. New York: Academic Press, 1972, P. 387–398.

[23] Diekman O., van Gils S. A., Verduyn Lunel S. M., Walther H. O. Delay Equations: Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis. N. Y.: Springer-Verlag, 1995. 536 p.

[24] Egorov A. V., Mondié S. A stability criterion for the single delay equation in terms of the Lyapunov matrix // Vestnik St. Petersburg University Series 10, 2013. No 1, P. 106–115.

[25] Egorov A. V., Mondié S. Necessary conditions for the exponential stability of time-delay systems via the Lyapunov delay matrix // Journal of Robust and Nonlinear Control, 2014. Vol. 24, No 12. P. 1760–1771.

[26] Egorov A. V., Mondié S. Necessary stability conditions for linear delay systems // Automatica, 2014. Vol. 50, No 12. P. 3204–3208.

[27] Egorov A. V. A finite necessary and sufficient stability condition for linear retarded type systems // Proceedings of the 55th IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, USA, 2016. P. 3155–3160.

[28] Egorov A. V., Cuvas C., Mondié S. Necessary and sufficient stability conditions for linear systems with pointwise and distributed delays // Automatica, 2017. Vol. 80. P. 218–224.

[29] Egorov A. V., Kharitonov V.L. Approximation of delay Lyapunov matrices // International Journal of Control, 2018. Vol. 91. P. 2588–2596.

[30] Engelborghs K., Dambrine M., Roose D. Limitations of a class of stabilization methods for delay systems // IEEE Transactions on Automatic Control, 2001. Vol. 46, No 2. P. 336–339.

[31] Ficak B. Point delay methods applied to the investigation of stability for a class of distributed delay systems // Systems & Control Letters, 2007. Vol. 56, No 3. P. 223–229.

[32] Franklin S. Spaces in which sequences suffice // Fundamenta Mathematicae, 1965. Vol. 57, No 1. P. 107–115.

[33] Friedland S. Variation of tensor powers and spectra // Linear and Multilinear Algebra, 1982. Vol. 12, No 2. P. 81–98.

[34] Garcia-Lozano H., Kharitonov V. L. Lyapunov matrices for time delay systems with commensurate delays // 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control / ed. S. Mondié. Oxford: Elsevier, 2004. Vol. 1. P. 91–95.

[35] Garcia-Lozano H., Kharitonov V. L. Numerical computation of time-delay Lyapunov matrices // IFAC Proceedings Volumes, 2006. Vol. 39, No 10. P. 60–65.

[36] Gu K. An improved stability criterion for systems with distributed delays // International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2003. Vol. 13, No 9. P. 819–831.

[37] Gu K., Kharitonov V. L., Chen J. Stability of time delay systems. Boston: Birkhäuser, 2003. 353 p.

[38] Gumussoy S., Abu-Khalaf M. Analytic solution of a delay differential equation arising in cost functionals for systems with distributed delays // IEEE Transactions on Automatic Control, 2019. Vol. 64, No 11. P. 4833–4840.

[39] Hale J. K, Verduyn Lunel S. M. Introduction to Functional Differential Equations. N. Y.: Springer-Verlag, 1993. 447 p.

[40] Högnäs G. Characterization of weak convergence of signed measures on $[0, 1]$ // Mathematica Scandinavica, 1978. Vol. 41, No 1. P. 175–184.

[41] Huang W. Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1989. Vol. 142, No 1. P. 83–94.

[42] Huesca E., Mondié S., Santos O. Polynomial approximations of the Lyapunov matrix of a class of time delay systems // IFAC Proceedings Volumes, 2009. Vol. 42, No 14. P. 261–266.

[43] Hurwitz A. Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function // Mathematische Annalen, 1889. Vol. 33. P. 246–266.

[44] Infante E. F., Castelan W. B. A Liapunov functional for a matrix difference-differential equation // Journal of Differential Equations, 1978. Vol. 29, No 3. P. 439–451.

[45] Jarlebring E., Vanbiervliet J., Michiels W. Characterizing and computing the H_2 norm of time-delay systems by solving the delay Lyapunov equation // IEEE Transactions on Automatic Control, 2011. Vol. 56, No 4. P. 814–825.

[46] Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica, 2003. Vol. 39, No 1. P. 15–20.

[47] Kharitonov V. L., Hinrichsen D. Exponential estimates for time delay systems // Systems & Control Letters, 2004. Vol 53, No 5. P. 395–405.

[48] Kharitonov V. L. Lyapunov matrices for a class of time delay systems // Systems & Control Letters, 2006. Vol. 55, No 7. P. 610–617.

[49] Kharitonov V. L., Plischke E. Lyapunov matrices for time-delay systems // Systems & Control Letters, 2006. Vol. 55, No 9. P. 697–706.

[50] Kharitonov V. L. On the uniqueness of Lyapunov matrices for a time-delay system // Systems & Control Letters, 2012. Vol. 61, No 3. P. 397–402.

[51] Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.

[52] Kharitonov V. L. Predictor-based controls: The implementation problem. // Differential Equations, 2015. Vol. 51, No 13. P. 1675–1682.

[53] Kharitonov V. L. Approximate Lyapunov matrices for time-delay systems // IFAC-PapersOnLine, 2018, Vol. 51, No. 14. P. 142–146.

[54] Kolmanovskii V. B., Nosov V. R. Stability of Functional Differential Equations. N.Ỹ.: Academic Press, 1986. 217 p.

[55] Krstic M., Smyshlyaev A. Backstepping boundary control for first-order hyperbolic PDEs and application to systems with actuator and sensor delays // Systems & Control Letters, 2008. Vol. 57, No 9. P 750–758.

[56] MacDonald N. Time delay in simple chemostat models // Biotechnology and Bioengineering, 1976. Vol. 18, No 6. P. 805–812.

[57] Manitius A. Z., Olbrot A. W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Transactions on Automatic Control, 1979. Vol. 24, No 4. P. 541–552.

[58] Minorsky N. Self-Excited Oscillations in Dynamical Systems Possessing Retarded Actions // Journal of Applied Mechanics, 1942. Vol. 9, No 2. P. 65–71.

[59] Mondié S., Michiels W. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation // IEEE Transactions on Automatic Control, 2003. Vol. 48, No 12. P. 2207–2212.

[60] Niculescu S.-I. Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach. Heidelberg: Springer, 2001. 388 p.

[61] Nohel J. A. A Class of Nonlinear Delay Differential Equations // Journal of Mathematics and Physics, 1959. Vol. 38. P. 295–311.

[62] Ochoa G., Kharitonov V. L., Mondié S. Critical frequencies and parameters for linear delay systems: A Lyapunov matrix approach. // Systems & Control Letters, 2013. Vol. 62, No 9. P. 781–790.

[63] Ochoa G., Melchor-Aguilar D., and Mondié S. Critical parameters of integral delay systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2013. Vol. 25, No 7. P. 1094–1105.

[64] Repin Iu. M. Quadratic Liapunov functionals for systems with delay // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1965. Vol. 29, No 3. P. 669–672.

[65] Rubel L. A., Ryff J. V. The Bounded Weak-Star Topology and the Bounded Analytic Functions // Journal of Functional Analysis, 1970. Vol. 5, No 2. P. 167–183.

[66] Santos O., Mondié S., Kharitonov V. L. Linear quadratic suboptimal control for time delays systems. // International Journal of Control, 2009. Vol. 82, No 1, P. 147–154.

[67] Verriest E. I. Linear systems with rational distributed delay: Reduction and stability // Proceedings of the 1999 European Control Conference, Karlsruhe, Germany, 1999. P. 3637–3642.

[68] Volterra V. Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditair // Journal de mathématiques pures et appliquées, 1928. Vol. 7. P. 249–298.

[69] Vyhlídal T., Zítek P. Mapping Based Algorithm for Large-Scale Computation of Quasi-Polynomial Zeros // IEEE Transactions on Automatic Control, 2009. Vol. 54, No 1. P. 171–177.

Приложение А. Программная реализация нахождения матриц Ляпунова для систем с экспоненциальным ядром в среде MATLAB

```
function [T, Uv] = Lmatrix_exp(A0, A1, B, A, e0, h, W)
n = size(A0, 1);
m = size(A, 1);
ni = 1 : n;
n2i = 1 : n^2;
d = (2 * m + 2) * n ^ 2;

eh = expm(-A * h) * e0;

xA0 = kron(A0', eye(n));
A0x = kron(eye(n), A0');
xA1 = kron(A1', eye(n));
A1x = kron(eye(n), A1');
xB = zeros(n * fliplr(size(B)));
Bx = zeros(size(xB));
for i = 0 : m - 1
  s = i * n;
  t = s * n;
  xB(:, t + n2i) = kron(B(s + ni, :)', eye(n));
  Bx(:, t + n2i) = kron(eye(n), B(s + ni, :)');
end

L = [xA0,          xA1,           xB,              zeros(n^2, m * n^2);
    -A1x,         -A0x,           zeros(n^2, m * n^2),    -Bx;
    kron(e0, eye(n^2)),  -kron(eh, eye(n^2)),  -kron(A, eye(n^2)),     zeros(m * n^2, m * n^2);
    kron(eh, eye(n^2)),  -kron(e0, eye(n^2)),  zeros(m * n^2, m * n^2),  kron(A, eye(n^2))];

E = [zeros(n^2), eye(n^2), zeros(n^2, m * n^2), zeros(n^2, m * n^2)];
I1 = [eye(m*n^2), zeros(m*n^2, m*d)] * expm(-[zeros(m*n^2), -kron(eye(m), E); zeros(m*d, m*n^2),
    kron(A, eye(d)) - kron(eye(m), L)]) * [zeros(m*n^2, d); kron(e0, eye(d))];
I2 = [eye(m*n^2), zeros(m*n^2, m*d)] * expm([zeros(m*n^2), kron(eye(m), E); zeros(m*d, m*n^2),
    kron(A, eye(d)) + kron(eye(m), L)]) * [zeros(m*n^2, d); kron(eh, eye(d))];

M = [eye(n^2),          zeros(n^2),          zeros(n^2, m * n^2),     zeros(n^2, m * n^2);
  [zeros(m * n^2, n^2), zeros(m * n^2, n^2),  zeros(m * n^2),          eye(m * n^2)] - I1;
  [zeros(m * n^2, n^2), zeros(m * n^2, n^2),  eye(m * n^2),            zeros(m * n^2)] - I2;
   xA0,            xA1,            xB,              zeros(n^2, m * n^2)];
N = [zeros(n^2),         -eye(n^2),          zeros(n^2, m * n^2),     zeros(n^2, m * n^2);
   zeros(m * n^2, d);
   zeros(m * n^2, d);
   A1x,            A0x,            zeros(n^2, m * n^2),     Bx];
X = M + N * expm(L * h);
w = -[zeros((2 * m + 1) * n^2, 1); W(:)];
U0 = linsolve(X, w);
T = 0 : 0.01 : h;
Uv = zeros(n ^ 2, size(T, 2));
for i = 1 : size(T, 2)
  Uv(:, i) = [eye(n^2), zeros(n^2, (2 * m + 1) * n^2)] * expm(L * T(i)) * U0;
end
```

Приложение Б. Программная реализация нахождения матриц Ляпунова для систем с кусочно-постоянным ядром в среде MATLAB

```
function [T, Uv] = Lmatrix_pc(A, C, m, r, W)
n = size(A, 2);
ni = 1 : n;
n2i = 1 : n^2;

d = (4 * m - 1) * n ^ 2;

Ac = zeros(n * fliplr(size(A)));
Af = zeros(size(Ac));
da = size(Ac, 2);
dai = 1 : da;
Cc = zeros(n * fliplr(size(C)));
Cf = zeros(size(Cc));
dc = size(Cc, 2);
dci = 1 : dc;
for i = 0 : m - 1
  s = i * n;
  t = s * n;
  Ac(:, t + n2i) = kron(A(s + ni, :)', eye(n));
  Cc(:, t + n2i) = kron(C(s + ni, :)', eye(n));
  Af(:, end - (t + n^2) + n2i) = kron(eye(n), A(s + ni, :)');
  Cf(:, end - (t + n^2) + n2i) = kron(eye(n), C(s + ni, :)');
end
s = s + n; t = t + n ^ 2;
Ac(:, t + n2i) = kron(A(s + ni, :)', eye(n));
Af(:, n2i) = kron(eye(n), A(s + ni, :)');

AA = zeros(2 * dc);
CC = zeros(2 * dc, 2 * dc - n ^ 2);
for i = 0 : m - 1
  t = i * n ^ 2;
  AA(t + n2i , t + dai) = Ac;
  CC(t + n2i, t + dci) = Cc;
  AA(t + dc + n2i, t + dai) = -Af;
  CC(t + dc + n2i, t + dci) = -Cf;
end
II = eye(fliplr(size(CC)));
II(:, n^2 + 1 : end) = II(:, n^2 + 1 : end) - eye(size(II, 1));
L = [AA, CC; II, zeros(size(CC, 2))];

M = zeros(d);
t = (2 * m - 1) * n ^ 2 ;
M(1 : t, 1 : t) = eye(t);
M(t + 1 : 2 * t - n ^ 2, t + n ^ 2 + 1 : 2 * t) = eye(t - n ^ 2);
M(end - 2 * n ^ 2 + n2i, (3 * m - 1) * n ^ 2 + n2i) = eye(n ^ 2);
M(end - n ^ 2 + n2i, (m - 1) * n ^ 2 + dai) = Ac;
M(end - n ^ 2 + n2i, (3 * m - 1) * n ^ 2 + dci) = Cc;
Nt = zeros(d, n^2);
Nt(end - 2 * n ^ 2 + n2i, :) = -eye(n ^ 2);
eNt = zeros(n ^ 2, d);
```

```
eNt(:, m * n ^ 2 + n2i) = eye(n ^ 2);
N = zeros(d);
N(1 : end - 2 * n ^ 2, n ^ 2 + 1 : end) = -M(1 : end - 2 * n ^ 2, 1 : end - n ^ 2);
N(end - n ^ 2 + n2i, dai) = Af;
N(end - n ^ 2 + n2i, 2 * m * n ^ 2 + dci) = Cf;

X = M + [Nt, N] * expm(r * [zeros(n ^ 2), eNt; zeros(d, n ^ 2), L]) * [zeros(n ^ 2, d); eye(d)];

w = [zeros(d - n ^ 2, 1); reshape(W, n ^ 2, 1)];
yz0 = linsolve(X, -w);

T = 0 : 0.01 : m * r;
Uv = zeros(n ^ 2, size(T, 2));
for i = 1 : size(T, 2)
  Uv(:, i) = reshape(U(T(i)), n ^ 2, 1);
end
```

Saint Petersburg State University

As manuscript

Aliseiko Aleksei

Mathematical methods of analysis and synthesis of time-delay systems

Scientific specialty 2.3.1.
System analysis, information control and processing, statistics

Thesis is submitted for the degree of
Candidate of Physical and Mathematical Sciences

Translation from Russian

Supervisor,
Doctor of Physical
and Mathematical Sciences,
Professor
A. P. Zhabko

Saint Petersburg — 2022

Contents

List of symbols

- $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ — the sets of real and complex numbers, respectively;
- $\mathbb{R}^n$ — the set of n-dimensional vectors with real components;
- $\mathbb{R}^{m\times n}$ — the set of matrices of dimensions $m \times n$ with real components;
- $\operatorname{Re} s$ — the real part of a complex number s;
- i — the imaginary unit;
- $\bar{\cdot}$ — the complex conjugate;
- I — the identity matrix;
- I_n — the identity matrix of dimensions $n \times n$;
- $\mathbf{0}$ — the zero matrix or vector;
- $\mathbf{0}_{m\times n}$ — the zero matrix of dimensions $m \times n$;
- A^T — the transpose of a matrix A;
- A^* — the conjugate transpose of a matrix A, $A^* = \overline{A^T}$;
- A^{-1} — the inverse of a matrix A;
- $\det A$ — the determinant of a matrix A;
- $M \otimes N$ — the Kronecker product of matrices M and N;
- $M \oplus N$ — the Kronecker sum of matrices M and N;
- $\operatorname{vect} X$ — the vectorization of a matrix X;
- $\operatorname{sp}\{v_1, \ldots, v_k\}$ — the linear span of vectors $v_1, \ldots, v_k$;
- $\lambda_{min}(W)$ — the minimal eigenvalue of a symmetric matrix W;
- $\|x\|$ — the euclidean norm of a vector;
- $\|A\|$ — the induced norm of a matrix;
- $\|\varphi\|_h$ — the uniform norm of a bounded function φ defined on $[-h, 0]$;
- $\mathsf{V} f$ — the total variation of a function f;
- $\operatorname{res}_{s_0} f(s)$ — the residue of a complex-valued function $f(s)$ at a point s_0;
- $f'(+0), f'(-0)$ — the right hand and the left hand derivatives of a function f at a point $t = 0$, respectively;
- $f^{(k)}(t)$ — the kth derivative of a function f;
- $C(X, Y)$ — the space of all continuous functions from X to Y;
- $PC([a, b], Y)$ — the space of all piecewise-continuous functions defined on $[a, b]$ with values in Y;
- $BV([a, b], Y)$ — the space of all functions of bounded variation defined on $[a, b]$

with values in Y;

- $NBV([a,b],Y)$ — the space of all functions of normalized bounded variation defined on $[a,b]$ with values in Y;
- $\xrightarrow{\rho}$ — convergence in metric ρ;
- $\stackrel{*}{\rightharpoonup}$ — weak* convergence;
- $\dot{x}(t)$ — the derivative of a solution x of a system at t;
- $x(t,\varphi)$ — the solution of the initial value problem with the initial function φ;
- x_t — the state of the system at a moment t, $x_t : \theta \mapsto x(t+\theta)$, $\theta \in [-h,0]$.

Introduction

Mathematical models of systems of the most diverse nature, for example, processes and phenomena that arise in mechanics, biology, chemistry, economics and other disciplines, are often described by the relations between the rates of change of some quantities and other quantities. A mathematical tool that describes the rate of change is a derivative, which means that such dependencies are usually expressed either by ordinary differential equations or by partial differential equations.

On closer study of certain processes, however, it becomes apparent that it is not enough to consider only models where the future state of the system depends only on the current state and does not depend on the past. Moreover, for some systems it is fundamentally impossible to exclude such dependence. For example, in feedback control systems, some time passes between the moment of measuring the controlled variable and the moment the control signal is determined. Thus arises a delay, which, as was noted by N. Minorsky [58], cannot be ignored, as that can lead to undesirable oscillations in the system. In the epidemiological model considered by K. L. Cooke [21], the delay is induced by the incubation period, that is the length of time from the moment of infection to the onset of symptoms of the disease. In population models, ideas related to delay go back to the works of V. Volterra on «predator — prey» systems [68], and in the paper by M. S. Bartlett [19] delay is used to model the age structure of the population. A delay equation describing a nuclear reactor model is the subject of J. A.Nohel [61], while N. MacDonald [56] investigates the role of delay in modeling the growth of unicellular organisms in a chemostat.

All of the examples above show just a few of the many articles on models of processes that involve lag or delay. As more and more of these papers started to appear, it became apparent that it is necessary to develop a general theory of time-delay systems. There are many books devoted to such research. Early works of A. D. Myshkis [7], L. E. Elsgolt's, S. B. Norkin [9], V. I. Zubov [4], R. Bellman, K. L. Cooke [20] use a more direct approach to the study of systems with delay, while the later monographs by J. K Hale , S. M. Verduyn Lunel [39] and O. Diekman, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel, H. O. Walther [23], present the theory of time-delay systems in a more modern, abstract fashion, involving methods of functional analysis.

In many applications, a lot of attention is given to the properties of solutions as time approaches infinity. Long-term forecast of the behavior of processes and phenomena is only possible when small deviations or errors in the initial data do not lead to significant changes in the operation of systems. Such questions are the subject of stability theory, and for systems of ordinary differential equations they have been studied in depth for decades. One of the most outstanding results in this direction belongs to A. M. Lyapunov, who in his dissertation «The general problem of the stability of motion» [6] proposed a method to estimate the behavior of solutions using auxiliary functions. They came to be known as Lyapunov functions.

However, the development of a similar theory for systems with delay turned out to be far from trivial. The most significant difference between time-delay systems and systems without delay is their respective state space. For ordinary differential equations, the state is a finite-dimensional vector, while for systems with delay it turns out to be a function, meaning that it is an element of some infinite-dimensional space. The generalization of the Lyapunov theory to time-delay systems has branched out in two main directions. One approach belongs to N. N. Krasovskii [5], who proposed to use functionals instead of scalar Lyapunov functions, hence fully utilizing the true state of the system. Almost simultaneously another approach due to B. S. Razumikhin [8] appeared. It was shown that it is, in fact, still possible to use the scalar Lyapunov functions by restricting the attention to their values on some subset satisfying a special constraint called the Razumikhin condition. The books by V. B. Kolmanovskii, V. R. Nosov [54] and by K. Gu, V. L. Kharitonov, J Chen [37] are devoted to the current state of the stability theory for systems with delay.

For linear time-invariant systems of ordinary differential equations the following classical stability criterion is known. The system is stable if and only if there exists a positive-definite quadratic form such that its derivative along the solutions of the system is a negative-definite quadratic form. The generalization of this criterion to linear time-invariant systems with delay has been the subject of active research carried out in recent decades. However, the approach of B. S. Razumikhin turned out to be inapplicable here (it can provide only sufficient conditions for stability), while the method of Lyapunov–Krasovskii functionals proved to be more suitable.

There are two main ways to use the framework of Lyapunov–Krasovskii functionals. On the one hand, one can first choose a positive-definite functional of some general form, find its derivative along the solutions of the system, and try to obtain some conditions that would ensure that the derivative is negative definite. In this way one can obtain many various sufficient stability conditions having the form of linear matrix inequalities. Numerous examples of this type are contained, e. g. in the monograph by S.-I. Niculescu [60]. On the other hand, one can go in the other direction, first choosing the form of the derivative of the functional, and then attempt to find a functional such that the derivative of this functional along the solutions will coincide with the initially prescribed one. Often the functionals obtained in this way turn out to have way more complex structure, and it is quite difficult to check if they are positive definite.

The classical Lyapunov criterion has three notable components. Firstly, from a given derivative in the form of a quadratic form, it is necessary to recover the Lyapunov function having such derivative. It turns out that this Lyapunov function also has the form of a quadratic form. Secondly, it turns out that the matrices of these two quadratic forms are related by the Lyapunov matrix equation. It can be shown that this matrix equation can be reduced to a system of linear algebraic equations. Thirdly, it remains to check whether the quadratic form that was obtained is positive definite, which can be done by involving Sylvester's criterion. All further development of the theory for linear time-delay systems can be traced along similar three ideas.

The first difficulty that was encountered involves reconstruction of a functional from a given derivative. The first fundamental work in this direction is due to Y. M. Repin [64], who considered a quadratic functional of a sufficiently general form for systems with one delay, then found its derivative and equated it to a prescribed one. This resulted in a system of differential equations for the matrices that define the desired functional. Although the issue of the existence of solutions to this system was not considered, it can be said that the article was ahead of its time and largely predicted the subsequent developments of the theory. Similar results were obtained in the paper by R. Datko [22], who approached the problem from an abstract functional-analytical side.

The next milestone in the development is the work of E. F. Infante, W. B. Castelan [44]. In this article, for the first time it was explicitly noted that to construct a functional it is sufficient to find one functional matrix, and the main properties determining this matrix were listed. Later this matrix will become known as the Lyapunov matrix, although the properties given in the paper [44] slightly differ from the modern definition of Lyapunov matrices. Parallels can be drawn between finding the Lyapunov matrix for time-delay systems and solving the Lyapunov matrix equation for systems of ordinary differential equations. Therefore, questions related to construction of the Lyapunov matrix and the issue of whether it exists and is unique are key for the second point of the program outlined above.

The next big step in the development of the theory came with the article by W. Huang [41]. Systems of general kind with the right-hand sides represented by the Stieltjes integral and kernel having the form of a matrix of functions of bounded variation were considered. The properties of the Lyapunov matrix are given in their modern form for the first time, and it was proved that Lyapunov matrices exist whenever the system has no eigenvalues located symmetrically with respect to the origin of the complex plane. It should be noted that for systems of linear ordinary differential equations the exact same condition is known to be necessary and sufficient for the existence and uniqueness of the solution of the Lyapunov matrix equation. This property is now known as the Lyapunov condition. Moreover, the paper [41] for the first time gives explicitly a functional that has a quadratic form as a derivative along the solutions of the system. The positive definiteness of this functional was established in the case of exponential stability, although, unfortunately, the estimate for the functional from below turned out to be only local and cubic.

Few years later, an example due to A. P. Zhabko [51] will demonstrate that such a functional cannot have a quadratic estimate from below. The article by V. L. Kharitonov and A. P. Zhabko [46] thus introduced a modified functional. Quadratic terms using the full state of the system were added to the derivative along the solutions. Hence, these new functionals were given the name of full-type functionals. Such functionals admit a quadratic estimate both from above and from below (for exponentially stable systems). Therefore, it was proven that the Krasovskii theorem [5], which normally is just a sufficient condition for the exponential stability for time-delay systems, for linear time-invariant systems is also a necessary condition. From this point, it can be said that the Lyapunov criterion was fully generalized to linear time-delay systems.

Now that construction of the functionals was dealt with, a lot of further research revolves around the Lyapunov matrices. The paper by V. L. Kharitonov [50] supplements the earlier work of W. Huang [41] by establishing that the Lyapunov condition is not only sufficient, but also a necessary condition for the existence and uniqueness of Lyapunov matrices. Many papers were dedicated to the problem of finding Lyapunov matrices for various classes of systems with delay. The framework was established in the paper by V. L. Kharitonov, E. Plischke [49] that presented for the first time the method of computation of Lyapunov matrices for systems with one delay in a complete form. Similar methods were developed for systems with several commensurable delays in the article by H. Garcia-Lozano, V. L. Kharitonov [34] and for systems with distributed delay and exponential kernel in the paper by V. L. Kharitonov [48]. It should be noted, however, that the results of the article [48] were incomplete, and in the paper due to M. Abu-Khalaf, S. Gumussoy [14] it was shown on an example that it is not possible to find the Lyapunov matrix using the methods from [48], even though the Lyapunov condition was satisfied. Same authors presented one possible modifications to remedy this issue in [38].

It is worth noting that systems with distributed delay and exponential kernel are of significant importance in the field of control theory. As was already observed earlier, feedback control almost inevitably introduces delay in the system. In the article by A. Z. Manitius, A. W. Olbrot [57] a way of feedback stabilization of linear systems with input control was proposed. This “predictor” type control contains an integral term involving a matrix exponent. However, later in the paper by K. Engelborghs, M. Dambrine, D. Roose [30] it would be established that the implementation of such control is difficult in practice. To fix this issue in the work of S. Mondié, W. Michiels [59] a dynamic control law was introduced. The close-loop system with this dynamic controller has a from of a distributed delay system with an exponential kernel.

Another interesting idea that came out of the article by S. Gumussoy, M. Abu-Khalaf [38] was to consider a transformation of systems with distributed delay to systems with one delay and then to use the resulting simpler system for the stability analysis and computation of the Lyapunov matrix of the nominal system. Such ideas already made appearances in the papers by E. I. Verriest [67], B. Ficak [31] and G. Ochoa, D. Melchor-Aguilar, S. Mondié [63], although they have not been subjected to any systematic study.

All research that was outlined above deals with the issue of finding Lyapunov matrices for specific classes of systems. Although the problem of finding new classes of systems for which it is possible to compute Lyapunov matrices is of significant research interest, it is clear that such approach would never result in an algorithm for the computation of Lyapunov matrices for general linear systems. Thus, it is necessary to involve approximate methods. In the article by H. Garcia-Lozano, V. L. Kharitonov [35] piecewise linear approximations were considered, and in the papers due to E. Huesca, S. Mondié, O. Santos [42] and E. Jarlebring, J. Vanbiervliet, W. Michiels [45] a polynomial approximation of Lyapunov matrices was studied. However, these approaches were heuristic in some sense, as no qualitative estimates of the resulting approximations were obtained and the closeness of the approximations to the desired Lyapunov matrix is not guaranteed.

The papers by A. V. Egorov, V.L. Kharitonov [29] and by V. L. Kharitonov [53] introduced a completely different approach. Firstly, it was established that for exponentially stable systems with several delays the Lyapunov matrices can be approximated with arbitrarily precision by the Lyapunov matrices for systems with several commensurate delays. Secondly, it was proved that Lyapunov matrices for exponentially stable systems with distributed delay can be approximated well by Lyapunov matrices for systems with several multiple delays obtained by approximating the integral term with a finite sum. Unfortunately, both papers assumed that all systems under consideration are exponentially stable. This assumption could not be eliminated easily, significantly limiting the scope of application of these results.

The third and the last issue mentioned above is to find ways to check the positive definiteness of the Lyapunov– Krasovskii functionals similar in nature to the condition for the positive definiteness of the solution of the Lyapunov matrix equation. Thus, if there are any such conditions, then they must be expressed using Lyapunov matrices. For some significant amount of time this problem remained an open question until in the series of papers by A. V. Egorov, S. Mondié [24–26] and A. V. Egorov, C. Cuvas , S. Mondié [28], a necessary and sufficient condition for exponential stability was obtained. As it turned out it is enough to verify the positive definiteness of an infinite sequence of block matrices constructed using the values of the Lyapunov matrix at different time instances. Later, this necessary and sufficient condition was relaxed to involve only some finite number of block matrices from this sequence [27].

The Lyapunov–Krasovskii functionals and Lyapunov matrices found various applications starting from the paper by V. L. Kharitonov and A. P. Zhabko [46]. In the article [46] the functionals of the complete type were used for robustness analysis, while in the paper by V. L. Kharitonov, D. Hinrichsen [47] they were applied to find exponential estimates on solutions. In the paper by G. Ochoa, V. L. Kharitonov, S. Mondié [62] critical values of the delay were determined, while in the article by O. Santos, S. Mondié, V. L. Kharitonov [66] an iterative scheme allowing to find suboptimal control laws, each successively reducing the value of the quadratic performance index, was proposed. In the article by E. Jarlebring, J. Vanbiervliet, W. Michiels [45] the Lyapunov matrices were used to calculate the $\mathcal{H}_2$ norm of the transfer matrix, and in the work of V. A. Sumacheva [10] a scheme allowing to construct a control law reducing the $\mathcal{H}_2$ norm of the transfer matrix was proposed.

To sum up, the Lyapunov–Krasovskii functionals proved to be an extremely convenient and adaptable tool in stability analysis of time-delay systems with many different applications. One of the key issues surrounding these functionals is the necessity to compute the corresponding Lyapunov matrices, which is possible only for certain classes of systems. Thus, it is important not only to find new classes of time-delay systems for which it is possible to construct Lyapunov matrices analytically, but also to develop new approximate algorithms that can be used to obtain Lyapunov matrices. This is the main subject of this research.

Aims:

- Determine new classes of time-delay systems, for which it is possible to find the Lyapunov matrices analytically and develop for such systems a theory similar to that known for systems with one delay.
- Extend the framework of Lyapunov–Krasovskii functionals to control systems with input delay and obtain exponential estimates on solutions of these systems.
- Develop new constructive methods of computation of Lyapunov matrices for time-delay systems of general form without assuming their exponential stability. Find conditions that would ensure convergence of a sequence of approximations to the nominal Lyapunov matrix.

Scientific novelty. All the results presented in this thesis are new.

Theoretical and practical value of the research. This contribution is devoted to the development of the framework of Lyapunov–Krasovskii functionals, extending the class of systems for which it is possible to find the Lyapunov matrix, and generalizing Lyapunov–Krasovskii functionals to control systems with input delay. These results are also of practical interest, since systems with delay are used to describe biological, mechanical, chemical, and other processes, and also naturally arise in any feedback control systems.

Scope and structure of work. The thesis consists of six chapters and two appendices. The **first chapter** provides a brief summary of the general theory and is freely referenced in later chapters. In Sections 1.1 and 1.2 the basic concepts for linear systems with delay are introduced, in Section 1.3 the framework of Lyapunov–Krasovskii functionals of full type is presented, and in Section 1.4 the concept of Lyapunov matrices is introduced. In Section 1.5 the method of computation of Lyapunov matrices for systems with one delay is reviewed, and in Section 1.6 the definition and main properties of the Kronecker product and the Kronecker sum are given.

The **second chapter** is devoted to the issue of computation of Lyapunov matrices for systems with distributed delay and exponential kernel. For such systems, in Section 2.2 new boundary conditions for the auxiliary system of linear differential equations without delay are proposed, and this auxiliary system is used to find the Lyapunov matrix. In Section 2.3 a constructive method for solving the auxiliary boundary value problem is described, and in Section 2.4 it is proved that the existence and uniqueness of the Lyapunov matrix is equivalent to the uniqueness of the solution of this boundary value problem. These results are illustrated in section 2.5.

In the **third chapter** an approach to computation of Lyapunov matrices for systems with distributed delay and exponential kernel by extending their state space and transforming them into systems of higher dimension with one delay is considered. In Section 3.1 relationships between solutions, characteristic functions, and fundamental matrices of the nominal and extended systems are derived. Section 3.2 is devoted to the study of the relations between the Lyapunov matrices of two systems. In Sections 3.3 and 3.4 extra properties that appear when the Lyapunov condition is satisfied and when the systems are exponentially stable, respectively, are investigated. In Section 3.5 examples of systems that admit a Lyapunov matrix, but no Lyapunov matrix for the extended system exists are given.

The **fourth chapter** is devoted to linear control systems with input delay. In Section 4.1, the Lyapunov–Krasovskii functional for closed-loop systems is proposed. In Section 4.2, these functionals are applied to obtain exponential estimates on the solutions. The chapter ends with an example in Section 4.3.

The **fifth chapter** is devoted to the problem of computation of Lyapunov matrices for systems with distributed delay and piecewise-constant kernel. In Section 5.2 an auxiliary boundary value problem that can be used to construct the Lyapunov matrix of such systems is considered. In Section 5.3, the problem of solving this boundary value problem is reduced to finding a solution to a system of linear algebraic equations. In Section 5.4 it is proved that the boundary value problem has a unique solution if and only if there exists a unique Lyapunov matrix. The chapter ends with an example of applying the boundary value problem to find the critical value of delay in Section 5.5.

In the **sixth chapter** the issue of continuous dependence of the Lyapunov matrices on the right-hand sides of time-delay systems is studied. In Section 6.1, the space of normalized functions of bounded variation is introduced to describe the right-hand sides of systems and the main theorem on the convergence of Lyapunov matrices is stated. The proof of this result is divided in two parts and is given in Sections 6.2 and 6.3. The issue of continuous dependence of the Lyapunov matrices on the right-hand sides depending on the topology on functions of bounded variation is discussed in Section 6.4. Finally, in Section 6.5 the suggested computational method is demonstrated on an example.

In **Appendix A** an implementation of the algorithm for computation of Lyapunov matrices for systems with distributed delay and exponential kernel, described in Chapter 2 is provided. The implementation of the method for computation of Lyapunov matrices for systems with distributed delay and piecewise-constant kernel, presented in Chapter 5, is given in **Appendix B**.

Approbation. The results of the work were reported and discussed at several conferences: 47th International Scientific Conference of Postgraduates and Students "Control Processes and Stability" at the Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University (St. Petersburg, 2016), "XIII All-Russian Meeting on Control Problems (VSPU-2019)" (Moscow, ICS RAS, 2019) and "15th IFAC Workshop on Time Delay Systems" (Sinaia, Romania, 2019). The main results of the thesis were published in the papers [1, 15–18]. Of these, the article [1] was published in a peer-reviewed journal from the list by Higher Attestation Commission (HAC), while the articles [15–18] were published in journals indexed by Scopus and Web of Science.

Basic provisions for defense:

- a method that can be used to find Lyapunov matrices for systems with distributed delay and exponential kernel constructively;
- an analysis of the approach to the stability analysis of systems with distributed delay by their transformation to systems with one delay;
- a construction of Lyapunov–Krasovskii functionals of full type for control systems with input delay and an application of these functionals to obtain exponential estimates on solutions;
- a method that can be used to find Lyapunov matrices for systems with distributed delay and piecewise-constant kernel constructively;
- a method that can be used to compute Lyapunov matrices for general linear time-invariant systems with delay with any specified precision.

Chapter 1. Lyapunov functional and matrices

In this chapter the main concepts and definitions used in the rest of the work are introduced.

1.1. General theory

In this work linear time-invariant differential systems with delay are studied. Forms that can be taken by such systems and the corresponding equations can vary greatly depending on a particular problem at hand. For example, systems having one delay are often studied:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \tag{1.1}$$

where the matrices $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and the delay $h > 0$. Systems having multiple delays can also be of interest:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t-h_j), \tag{1.2}$$

where $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $0 \le j \le m$ and $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_m = h$. Sometimes systems having a distributed delay term are considered:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \int_{-h}^{0} G(\theta) x(t+\theta) d\theta, \tag{1.3}$$

where $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $h > 0$, and $G(\theta)$ is a piecewise-continuous function from $[-h, 0]$ to $\mathbb{R}^{n\times n}$.

To avoid the necessity of developing the theory for each of the above types of time-delay systems and as to not to introduce all the necessary definitions multiple times, we will have to consider a more general class of systems, such that these three classes of time-delay systems are merely a special cases of it.

That is, we consider systems of the form

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^{0} dQ(\theta) x(t+\theta), \tag{1.4}$$

where the delay $h > 0$, and the components of the matrix function $Q : [-h, 0] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ are functions of the bounded variation. It should be noted that the terms under the integral sign should be written in that particular order due to their dimensions. Systems (1.1), (1.2), and (1.3) can be obtained from (1.4) by specific choices of the kernel Q, therefore we will focus for now on systems of form (1.4).

For ordinary differential equations to define a particular solution it is enough to specify its value at just one point. The form of system (1.4) suggests that just to find the value of the derivative at one moment t it is necessary to know the solution at all moments of time preceding t on an interval of length h, that is on $[t-h, t]$. This observation prompts two definitions.

Definition 1.1. The state of system (1.4) at a moment t is a function $x_t : [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$, defined by $x_t(\theta) = x(t+\theta)$.

Definition 1.2. Let a time instance $t_0 \in \mathbb{R}$ and a function $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ be given. The initial value problem for system (1.4) is to find a solution $x(t)$ of system (1.4), such that $x_{t_0} = \varphi$. This solution will be denoted by $x(t, t_0, \varphi)$.

Since system (1.4) is time-invariant, once the solution $x(t, t_0, \varphi)$ of the initial value problem at time $t = t_0$ is known, $x_1(t) = x(t+t_0, t_0, \varphi)$ will be a solution of the initial value problem with the same initial function φ, yet at the initial time $t_1 = 0$. As in the future discussion we will be primarily concerned with the behavior of solutions as $t \to \infty$, henceforth we will consider only solutions with $t_0 = 0$, omitting the initial time instance in the notation: that is, we will write $x(t, \varphi)$ instead of $x(t, 0, \varphi)$.

Finally, let us establish some definitions related to norms. For vectors with real or complex components the euclidean norm is used: $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$, and for matrices we use the operator norm induced by the euclidean norm for vectors, that is

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| .$$

Occasionally we will also need a norm for bounded functions defined on the interval $[-h, 0]$ taking values in $\mathbb{R}^n$. In such cases we will the uniform norm

$$\|\varphi\|_h = \sup_{\theta \in [-h,0]} \|\varphi(\theta)\| .$$

1.2. Main definitions

Similarly to systems of linear differential equations without delay, for systems (1.4) it is possible to define a concept of fundamental matrix.

Definition 1.3. A matrix function $K(t)$ of dimensions $n \times n$ is called the fundamental matrix of system (1.4), if

$$\frac{d}{dt}K(t) = \int_{-h}^{0} K(t+\theta)dQ(\theta), \quad t \geq 0,$$
$$K(0) = I, \quad K(t) = \mathbf{0}, \quad t < 0.$$

Given the fundamental matrix, any solution $x(t, \varphi)$ of any initial value problem can be expressed by the Cauchy formula.

Theorem 1.1 (Cauchy formula, [39]). *Let $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ be an initial function. The solution to the initial value problem with the initial function φ has the form*

$$x(t, \varphi) = K(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \int_{\theta}^{0} K(t - \xi + \theta)dQ(\theta)\varphi(\xi)d\xi.$$

As in the case of linear systems of ordinary differential equations, systems with delay have eigenvalues.

Definition 1.4. The matrix

$$F(s) = sI - \int_{-h}^{0} e^{s\theta} dQ(\theta),$$

defined for all complex numbers $s \in \mathbb{C}$ is called the characteristic matrix of system (1.4). Its determinant $f(s) = \det F(s)$ is called the characteristic function of system (1.4).

Definition 1.5. The set of zeroes of the characteristic function $\Lambda = \{s \in \mathbb{C} : \det F(s) = 0\}$ is called the spectrum of system (1.4), and complex numbers $s \in \Lambda$ are called the eigenvalues of system (1.4).

Definition 1.6. We will say that system (1.4) is exponentially stable is there exist $\gamma \geq 1$ and $\sigma > 0$ such that for every solution the inequality

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \gamma e^{-\sigma t} \|\varphi\|_h, \quad t \geq 0,$$

holds.

The relation between eigenvalues and exponential stability is given by the following crucial result.

Theorem 1.2 ([20]). *System* (1.4) *is exponentially stable if and only if all its eigenvalues have negative real parts.*

1.3. Lyapunov–Krasovskii functionals

It is difficult to apply theorem 1.2 to test systems for exponential stability directly, since one would need to find the eigenvalues of system (1.4). The problem is further complicated by the fact that the spectrum of such systems usually contains a countable number of eigenvalues, and not a finite number like it is in the case of systems of ordinary differential equations. Although special algorithms have been developed for time-delay systems that allow to find the part of the spectrum located, for example, in a certain rectangle [69], this section will present a fundamentally different approach to verifying if a system is exponentially stable.

The sufficient condition for exponential stability is given by Krasovskii's theorem . This strong result established for a considerably general class of systems (not necessarily linear or time-invariant) will not be needed here in its full form. For systems (1.4) we will state it in the following way.

Theorem 1.3 (Krasovskii, [5, 51]). *If there exists a real-valued functional v, defined on $PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$, such that*

1. $\alpha_1 \|\varphi(0)\|^2 \leq v(\varphi) \leq \alpha_2 \|\varphi\|_h^2$ *for some positive* α_1 *u* α_2*,*
2. *the value of the functional along the solutions of the system* $v(x_t)$ *is differentiable and*
$$\frac{dv(x_t)}{dt} \leq -\beta \|x(t)\|^2, \quad t \geq 0,$$
for some $\beta > 0$*,*

then system (1.4) *is exponentially stable.*

Thus, the problem of verifying whether a system is exponentially stable is reduction to construction of corresponding functional. For linear systems of ordinary differential equations $\dot{x} = Ax$ the Lyapunov theory is very well-developed. According to it, should a positive definite quadratic form $w(x) = x^T W x$ be chosen, then there exists a function $v(x)$ such that its derivative along the solutions $\frac{d}{dt}v(x(t)) = -w(x)$, and, moreover, this function is also a quadratic form $v(x) = x^T V x$. The matrices V and W satisfy the Lyapunov equation $A^T V + V A = -W$. Given all that to check is the system $\dot{x} = Ax$ is exponentially stable, it is enough to check if the quadratic form $v(x) = x^T V x$ is positive definite.

In the same vein, one can choose a functional $w(\varphi)$, satisfying the second part of the Krasovskii theorem, i. e. $w(x_t) \le -\beta \|x(t)\|^2$, and try to find a functional $v(\varphi)$, such that its derivative along the solutions $\frac{d}{dt}v(x_t)$ would coincide with $w(x_t)$. Like in the case of systems of ordinary differential equations, let us choose a negative definite quadratic form $w_0(\varphi) = -\varphi(0)^T W \varphi(0)$.

Theorem 1.4 ([41]). *If there exists a matrix function $U(t)$, continuous at $t = 0$ and satisfying the conditions*

$$
\begin{gathered}
U'(t) = \int_{-h}^{0} U(t+\theta) dQ(\theta), \quad t \ge 0, \\
U(-t) = U^T(t), \\
U'(+0) - U'(-0) = -W,
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

then for the functional

$$
\begin{aligned}
v_0(\varphi) = \varphi^T(0) U(0) \varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^{0} \int_{\theta}^{0} U(\xi - \theta) dQ(\theta) \varphi(\xi) d\xi + \\
+ \int_{-h}^{0} \int_{\theta}^{0} d\xi_1 \varphi^T(\xi_1) dQ^T(\theta_1) \left[\int_{-h}^{0} \int_{\theta}^{0} U(\xi_1 - \xi_2 - \theta_1 + \theta_2) dQ(\theta_2) \varphi(\xi_2) d\xi_2 \right]
\end{aligned}
$$

the following equality holds:

$$
\frac{d}{dt} v_0(x_t) = w_0(x_t), \quad t \ge 0.
$$

Unfortunately, the functional $v_0(\varphi)$ does not admit the necessary quadratic estimates (cf. example 2.1 from the book [51]). Thus in the article [46] a different derivative for the functional was suggested:

$$
w(\varphi) = -\varphi(0)^T W_0 \varphi(0) - \varphi^T(-h) W_1 \varphi(-h) - \int_{-h}^{0} \varphi^T(\xi) W_2 \varphi(\xi) d\xi,
$$

where W_0, W_1, W_2 are three positive definite matrices.

Theorem 1.5 ([46]). *If there exists a matrix function $U(t)$, continuous at $t = 0$ and satisfying the conditions* (1.5) *with $W = W_0 + W_1 + hW_2$, then for the functional*

$$v(\varphi) = v_0(\varphi) + \int_{-h}^{0} \varphi^T(\xi)[W_1 + (h+\xi)W_2]\varphi(\xi)d\xi,$$

the following equality holds:

$$\frac{d}{dt}v(x_t) = w(x_t), \quad t \geq 0.$$

Such functionals are called Lyapunov–Krasovskii functional of complete type, since now their derivative along the solutions involves the full state of the system x_t and not just the value at the final moment $x(t)$. It can be shown that complete type functionals admit quadratic estimates from both above and below. Nonetheless, construction of such functionals depends heavily on existence of some matrix function $U(t)$ satisfying conditions (1.5). Let us now consider this issue.

1.4. Lyapunov matrices

Definition 1.7 ([51]). Let W be a symmetric matrix. The continuous at $t = 0$ matrix function $U(t)$ is called a Lyapunov matrix of system (1.4) associated with the matrix W, if it satisfies the conditions

$$U'(t) = \int_{-h}^{0} U(t+\theta)dQ(\theta), \quad t \geq 0,$$
$$U(-t) = U^T(t),$$
$$U'(+0) - U'(-0) = -W,$$

These three conditions are known, respectively, as the dynamic, symmetric and algebraic properties.

In the theory of Lyapunov–Krasovskii functionals, the study of Lyapunov matrices plays the same role as the study of the Lyapunov matrix equation for ordinary differential equations. The criterion for the existence of Lyapunov matrices almost verbatim repeats the criterion for the uniqueness of the solution of the Lyapunov matrix equation.

Definition 1.8. We will say the system (1.4) satisfies the Lyapunov condition if it does not have eigenvalues symmetric with respect to the origin, that is for any two eigenvalues $s_1, s_2 \in \Lambda$ their sum $s_1 + s_2 \neq 0$.

Note that if the Lyapunov condition is satisfied, then system (1.4) cannot have purely imaginary eigenvalues. Indeed, since $Q(\theta)$ is real, it follows that $F(\bar{s}) = \overline{F(s)}$, so if $s_0 = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, is an eigenvalue, then $\bar{s}_0 = -i\omega = -s_0$ is also an eigenvalue. Hence, assuming that the Lyapunov condition holds, the spectrum Λ of the system can be divided into two parts: Λ_+ of eigenvalues with positive real parts and Λ_- having eigenvalues with negative real parts. Note that the set Λ_+ is at most finite ([20], see also corollary 6.3).

Theorem 1.6 ([41, 51]). *If system* (1.4) *satisfies the Lyapunov condition then the matrix*

$$\begin{aligned} U(t) = \sum_{s\in\Lambda_+} \mathrm{res}_s[H^T(s)WH(-s)e^{-ts}] + \sum_{s\in\Lambda_+} \mathrm{res}_s[H^T(-s)WH(s)e^{ts}] \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} H^T(\omega)WH(-\omega)e^{-t\omega}d\omega, \end{aligned} \tag{1.6}$$

is a unique Lyapunov matrix of system (1.4) *associated with W. Conversely, if for any symmetric matrix W there exists a unique Lyapunov matrix associated with W, then the Lyapunov condition is satisfied.*

It is clear from 1.2 that for exponentially stable systems the Lyapunov conditions is always satisfied and $\Lambda_+ = \varnothing$. Hence, in equation (1.6) only the integral term will remain and the expression for Lyapunov matrices can be simplified by passing from the frequency domain to the time domain.

Theorem 1.7 ([51]). *Assume that system* (1.4) *is exponentially stable, then the matrix*

$$U(t) = \int_0^{\infty} K^T(\theta)WK(t+\theta)d\theta, \quad t \geq 0,$$

and $U(t) = U^T(-t)$ for $t < 0$, is a unique Lyapunov matrix of system (1.4) *associated with W.*

Earlier it was mentioned that complete type functions admit quadratic estimates from above and below. The exact results can be stated as follows.

Theorem 1.8 ([51]). *Assume that system* (1.4) *is exponentially stable and the matrices W_0, W_1, W_2 are positive definite. Then there exist positive β_1, β_2, such that for all $\varphi \in PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ the inequality*

$$\beta_1 \|\varphi(0)\|^2 + \beta_2 \int_{-h}^{0} \|\varphi(\xi)\|^2 d\xi \leq v(\varphi),$$

holds.

Theorem 1.9 ([51]). *Assume that system* (1.4) *satisfies the Lyapunov condition and the matrices* W_0, W_1, W_2 *are symmetric. Then there exist positive* δ_1, δ_2*, such that for all* $\varphi \in PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ *the inequality*

$$v(\varphi) \leq \delta_1 \|\varphi(0)\|^2 + \delta_2 \int_{-h}^{0} \|\varphi(\xi)\|^2 d\xi,$$

holds.

Theorems 1.5, 1.6, 1.8, 1.9 imply that the Krasovskii theorem 1.3 is not only sufficient but also necessary condition for the exponential stability of linear systems with delay.

1.5. Lyapunov matrices for systems with one delay

In the following chapters issues related to the construction of Lyapunov matrices for some classes of systems with delay will be discussed. For a better point of reference, let us briefly outline the already known results concerning finding Lyapunov matrices for systems with one delay (1.1).

Lemma 1.10 ([49]). *Let* $U(t)$ *be a Lyapunov matrix of system* (1.1) *associated with a symmetric matrix* W*. Define two auxiliary functions*

$$Z(t) = U(t), \quad V(t) = U(t-h).$$

Then

$$\begin{cases} Z'(t) = Z(t)A_0 + V(t)A_1, \\ V'(t) = -A_0^T V(t) - A_1^T Z(t), \end{cases} \tag{1.7}$$

as well as

$$\begin{cases} Z(0) = V(h), \\ Z(0)A_0 + A_0^T V(h) + V(0)A_1 + A_1^T Z(h) = -W. \end{cases} \tag{1.8}$$

Hence, we can construct an auxiliary system (1.7) with boundary conditions (1.8) that is no longer a time-delay system. Moreover, among the solutions of this system Lyapunov matrices are contained. The converse is established by the following lemma.

Lemma 1.11 ([49]). *If* $(Z(t), V(t))$ *is a solution of system* (1.7), (1.8), *then the matrix* $U(t)$, *defined by*

$$U(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[Z(t) + V^T(h-t)\right], & t \in [0, h], \\ \frac{1}{2}\left[V(h+t) + Z^T(-t)\right], & t \in [-h, 0), \end{cases}$$

is a Lyapunov matrix of system (1.1) *associated with* W.

So far, no extra assumptions on system (1.1) were given and, quite possibly, there can be several Lyapunov matrices, associated with W, or, possibly, none at all. The case when the Lyapunov condition is satisfied and there exists a unique Lyapunov matrix is much more interesting. In such case the expression for Lyapunov matrices can be slightly simplified.

Theorem 1.12 ([49]). *If* $(Z(t), V(t))$ *is a unique solution of system* (1.7), (1.8), *then the matrix* $U(t)$, *defined by*

$$U(t) = \begin{cases} Z(t), & t \in [0, h], \\ Z^T(-t), & t \in [-h, 0), \end{cases}$$

is a unique Lyapunov matrix of system (1.1) *associated with* W.

Therefore, if the auxiliary system has a unique solution, then the Lyapunov condition is satisfies. The converse is also true.

Theorem 1.13 ([49]). *Auxiliary system* (1.7) *with boundary conditions* (1.8) *has a unique solution if and only if the Lyapunov condition holds.*

It can be concluded that the boundary value problem (1.7), (1.8) completely solves the problem of finding Lyapunov matrices for systems with one delay.

1.6. Kronecker sum and product

In the future we will need the notion of the Kronecker product and sum. Let us recall the related concepts.

The Kronecker product of matrices M и N is denoted by $M \otimes N$ and defined by

$$M \otimes N = \begin{pmatrix} m_{11}N & \dots & m_{1q}N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1}N & \dots & m_{pq}N \end{pmatrix},$$

where m_{ij} are the components of the matrix M. Note that if matrices M, N, S, T are of such dimensions that the products MS and NT are valid

$$(M \otimes N)(S \otimes T) = \begin{pmatrix} m_{11}N & \dots & m_{1q}N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1}N & \dots & m_{pq}N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11}T & \dots & s_{1r}T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{q1}T & \dots & s_{qr}T \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{q} m_{1i}s_{i1}NT & \dots & \sum\limits_{i=1}^{q} m_{1i}s_{ir}NT \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{q} m_{pi}s_{i1}NT & \dots & \sum\limits_{i=1}^{q} m_{pi}s_{ir}NT \end{pmatrix} = MS \otimes NT.$$

We will write $\operatorname{vect} X$ to denote the vector obtained from the matrix X by stacking its columns on top of one another. Matrix vectorization and the Kronecker product are related by the identity

$$\operatorname{vect}(AXB) = (B^T \otimes A) \operatorname{vect} X.$$

Let us prove that $e^{M \otimes I} = e^M \otimes I$. Indeed,

$$e^{M \otimes I} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(M \otimes I)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{M^j \otimes I}{j!} = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{M^j}{j!} \right] \otimes I = e^M \otimes I.$$

Similarly, $e^{I \otimes M} = I \otimes e^M$.

We will also need the Kronecker sum of two square matrices M of dimensions $m \times m$ and N of dimensions $n \times n$, defined as $M \oplus N = M \otimes I_n + I_m \otimes N$. The main property of the Kronecker sum is its relation to the matrix exponent $e^{M \oplus N} = e^M \otimes e^N$.

Indeed, since $(M \otimes I_n)(I_m \otimes N) = M \otimes N = (I_m \otimes N)(M \otimes I_n)$, it follows that

$$e^{M \otimes I_n + I_m \otimes N} = e^{M \otimes I_n} e^{I_m \otimes N} = (e^M \otimes I_n)(I_m \otimes e^N) = e^M \otimes e^N.$$

Chapter 2. Lyapunov matrices for a class of systems with exponential kernel

In this chapter we consider the problem of construction of Lyapunov matrices for systems with distributed delay and exponential kernel. We examine the auxiliary problem introduced in the paper [48] and present new set of boundary conditions. We show that new auxiliary problem can used to reproduce for systems with exponential kernel all results obtained in the article [49] for systems with one delay.

2.1. Preliminaries

In this chapter we consider systems of the form

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \sum_{i=1}^{m} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) B_i x(t+\theta) d\theta, \tag{2.1}$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$, there matrices A_0, A_1, B_i are real of dimensions $n \times n$, and the scalar functions $\eta_i(\theta)$ satisfy the system of linear differential equations

$$\eta_i'(\theta) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \eta_j(\theta), \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Let $\eta(\theta) = (\eta_1(\theta), \ldots, \eta_m(\theta))^T$, and

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}.$$

Clearly, $\eta'(\theta) = A\eta(\theta)$, hence $\eta(\theta) = e^{A\theta}\eta(0)$. For this exact reason, we say that the kernel is of exponential type. Note that systems of form (2.1) also include systems with polynomial kernels.

Definition 1.7 for systems (2.1) has the form:

Definition 2.1. The continuous at $t = 0$ matrix function $U(t)$ is called a Lyapunov matrix of system (2.1) associated with a symmetric matrix W, if it satisfies

1. the dynamic property: for $t > 0$

$$U'(t) = U(t)A_0 + U(t-h)A_1 + \sum_{i=1}^{m} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta)U(t+\theta)B_i d\theta,$$

2. the symmetric property: for $t \geq 0$

$$U(-t) = U^T(t),$$

3. the algebraic property:

$$U'(+0) - U'(-0) = -W.$$

We consider the issue of finding of Lyapunov matrices for systems (2.1) constructively.

2.2. Auxiliary system

Similarly to the case of systems with one delay, in the paper [48] an auxiliary boundary value problem was introduced. It was shown that if a Lyapunov matrix exists it is also a solution of this problem, that is the following was proven:

Lemma 2.1. *Let $U(t)$ be a Lyapunov matrix associated with W. Define*

$$\begin{aligned} Z(t) &= U(t), & X_i(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta)U(t+\theta)d\theta, \\ V(t) &= U(t-h), & Y_i(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta)V(t-\theta)d\theta, \end{aligned} \tag{2.2}$$

where $i = 1, \ldots, m$.

Then

$$\begin{cases} Z'(t) = Z(t)A_0 + V(t)A_1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} X_i(t)B_i, \\ V'(t) = -A_0^T V(t) - A_1^T Z(t) - \displaystyle\sum_{i=0}^{m} B_i^T Y_i(t), \\ X_i'(t) = \eta_i(0)Z(t) - \eta_i(-h)V(t) - \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}X_j(t), \quad 1 \leq i \leq m, \\ Y_i'(t) = \eta_i(-h)Z(t) - \eta_i(0)V(t) + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}Y_j(t), \quad 1 \leq i \leq m, \end{cases} \tag{2.3}$$

and

$$\begin{cases} Z(0) = V(h), \\ X_i(0) = Y_i^T(h), \quad 1 \le i \le m, \\ Y_i(0) = X_i^T(h), \quad 1 \le i \le m, \\ Z(0)A_0 + A_0^T V(h) + V(0)A_1 + A_1^T Z(h) + \sum_{i=1}^{m} \left[X_i(0)B_i + B_i^T Y_i(h)\right] = -W. \end{cases} \tag{2.4}$$

The main idea is, of course, to apply system (2.3), (2.4) to find the Lyapunov matrices. However, in contrast to the case of systems with one delay, the paper [48] does not provide results that guarantee that one can construct the Lyapunov matrix from a solution of the boundary value problem (cf. lemma 1.11). Moreover, it was shown in [14] that for the example considered in [48], the solution to the boundary value problem is always not unique, that is, such results cannot be obtained. Comparing (1.8) and (2.4), we observe that for systems with one delay, boundary conditions arise quite naturally, while for systems with exponential kernel they seem to be chosen rather arbitrary. Therefore, we consider new boundary conditions:

$$X_i(0) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(h+\theta) d\theta, \quad 1 \le i \le m, \tag{2.5a}$$

$$X_i(h) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(h+\theta) d\theta, \quad 1 \le i \le m, \tag{2.5b}$$

$$Y_i(0) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(-\theta) d\theta, \qquad 1 \le i \le m, \tag{2.5c}$$

$$Y_i(h) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(-\theta) d\theta, \qquad 1 \le i \le m. \tag{2.5d}$$

We first show that conditions (2.5) are, in fact, not independent. Let us adopt the notation

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \dots \\ X_m(t) \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ \dots \\ Y_m(t) \end{pmatrix}.$$

Lemma 2.2. *Any solution* $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$ *of system* (2.3)

1. *satisfies* (2.5a) *if and only if it satisfies* (2.5b),

2. satisfies (2.5c) *if and only if it satisfies* (2.5d).

Proof. The proofs of statement 1 and 2 are fairly similar, so we only show that the lemma holds for $X(t)$.

Using the Kronecker product, we rewrite (2.5a), (2.5b) and the system of equations for $X_i(t)$ from (2.3) as

$$X(0) = \int_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes V(h+\theta)d\theta, \quad X(h) = \int_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes Z(h+\theta)d\theta,$$
$$X'(t) = \eta(0) \otimes Z(t) - \eta(-h) \otimes V(t) - \mathcal{A}X(t),$$

where $\mathcal{A} = A \otimes I$. Since $e^{\mathcal{A}t} = e^{At} \otimes I$, we have

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{-\mathcal{A}t}X(0) + \int_0^t \left[e^{A(\xi-t)} \otimes I\right] [\eta(0) \otimes Z(\xi) - \eta(-h) \otimes V(\xi)]\, d\xi = \\ &= e^{-\mathcal{A}t}X(0) + \int_0^t \left[e^{A(\xi-t)}\eta(0) \otimes Z(\xi) - e^{A(\xi-t)}\eta(-h) \otimes V(\xi)\right] d\xi = \\ &= e^{-\mathcal{A}t}X(0) + \int_{-h}^{t-h} [\eta(\theta+h-t) \otimes Z(h+\theta) - \eta(\theta-t) \otimes V(h+\theta)]\, d\theta. \end{aligned} \tag{2.6}$$

If conditions (2.5a) hold, then

$$\begin{aligned} e^{-\mathcal{A}h}X(0) &= \left[e^{-Ah} \otimes I\right] \int_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes V(h+\theta)d\theta = \\ &= \int_{-h}^{0} \eta(\theta-h) \otimes V(h+\theta)d\theta, \end{aligned}$$

which together with (2.6) implies (2.5b).

Conversely, if conditions (2.5b) are satisfied, then

$$\begin{aligned} X(h) &= \int_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes Z(h+\theta)d\theta = \\ &= \int_{-h}^{0} \eta(\theta-h) \otimes V(h+\theta)d\theta + \\ &\quad + \int_{-h}^{0} [\eta(\theta) \otimes Z(h+\theta) - \eta(\theta-h) \otimes V(h+\theta)]\, d\theta. \end{aligned}$$

Comparing this equation with (2.6), we obtain

$$X(0) = e^{\mathcal{A}h} \int_{-h}^{0} \eta(\theta-h) \otimes V(h+\theta)d\theta = \int_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes V(h+\theta)d\theta. \qquad \blacksquare$$

Corollary 2.3. *Any solution* $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$ *of system* (2.3), (2.5) *satisfies*

$$X_i(t) = \int_{-h}^{-t} \eta_i(\theta) V(t+h+\theta) d\theta + \int_{-t}^{0} \eta_i(\theta) Z(t+\theta) d\theta,$$
$$Y_i(t) = \int_{-h}^{t-h} \eta_i(\theta) Z(t-\theta-h) d\theta + \int_{t-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta.$$

Proof. Indeed, from (2.6) and (2.5a) we obtain the expression for $X(t)$. The second part of the corollary can be established similarly. ∎

Lemma 2.2 implies that there are four equivalent choices of boundary conditions: (2.5a) and (2.5c), (2.5a) and (2.5d), (2.5b) and (2.5c), (2.5b) and (2.5d). Keeping the first and the last boundary condition from (2.4):

$$Z(0) = V(h),$$
$$-W = Z(0)A_0 + A_0^T V(h) + V(0)A_1 + A_1^T Z(h) + \sum_{i=1}^{m} \left[X_i(0) B_i + B_i^T Y_i(h) \right], \tag{2.7}$$

and using, for example, conditions (2.5a), (2.5c) we get $2m+2$ conditions on $2m+2$ matrix functions $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$. For simplicity from now on we assume that all boundary conditions (2.5) hold, without specifying one of the four equivalent choices.

The following assertion is obvious.

Lemma 2.4. *Let* $U(t)$ *be a Lyapunov matrix of system* (2.1) *associated with* W. *Then auxiliary functions* (2.2) *satisfy boundary value problem* (2.3), (2.5), (2.7).

Therefore, we obtained a new auxiliary system. Let us show that it can be used to obtain Lyapunov matrices.

Lemma 2.5. *If there exists a solution of* (2.3), *satisfying* (2.5), (2.7), *then the matrix function* $U(t)$, *defined by*

$$U(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[Z(t) + V^T(h-t) \right], & t \in [0, h], \\ \frac{1}{2} \left[V(h+t) + Z^T(-t) \right], & t \in [-h, 0), \end{cases}$$

is a Lyapunov matrix of (2.1) *associated with* W.

Proof. By definition, $U^T(t) = U(-t)$ for all $t \neq 0$, let us show that it holds also for $t = 0$:
$$U(0) = \frac{1}{2}\left[Z(0) + V^T(h)\right] = \frac{1}{2}\left[V(h) + Z^T(0)\right] = U^T(0).$$
Hence, $U(t)$ satisfies the symmetric property.

Consider $t \in (0, h]$, then

$$U'(t) = U(t)A_0 + U(t-h)A_1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}\left[X_i(t) + Y_i^T(h-t)\right] B_i.$$

Corollary 2.3 implies

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[X_i(t) + Y_i^T(h-t)\right] &= \frac{1}{2}\int_{-h}^{-t} \eta_i(\theta)\left[V(h+t+\theta) + Z^T(-t-\theta)\right] d\theta + \\
&+ \frac{1}{2}\int_{-t}^{0} \eta_i(\theta)\left[Z(t+\theta) + V^T(h-t-\theta)\right] d\theta = \\
&= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta)U(t+\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

These equalities imply the dynamic property:

$$U'(t) = U(t)A_0 + U(t-h)A_1 + \sum_{i=1}^{m} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta)U(t+\theta)B_i d\theta.$$

Finally,

$$\begin{aligned}
U'(+0) - U'(-0) &= \frac{1}{2}\left[Z'(0) - V'^T(h)\right] - \frac{1}{2}\left[V'(h) - Z'^T(0)\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[Z'(0) - V'(h)\right] + \frac{1}{2}\left[Z'(0) - V'(h)\right]^T = \\
&= -\frac{1}{2}W - \frac{1}{2}W^T = -W,
\end{aligned}$$

and the algebraic property also holds, that is $U(t)$ is a Lyapunov matrix of system (2.1) associated with W. ■

Using lemma 2.5 we can obtain Lyapunov matrices from solutions of the auxiliary system. This already considerably improves upon results of the paper [48]. In what follows we will show that the new auxiliary system can be used to fully replicate the results for systems with one delay.

Theorem 2.6. *Assume that system* (2.3) *has a unique solution, satisfying* (2.5), (2.7)*, then the matrix function* $U(t)$*, defined by*

$$U(t) = \begin{cases} Z(t), & t \in [0,h], \\ Z^T(-t), & t \in [-h,0), \end{cases}$$

is a unique Lyapunov matrix of (2.1) *associated with* W*.*

Proof. First, we show that functions

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z}(t) &= V^T(h-t), \\
\widetilde{V}(t) &= Z^T(h-t), \\
\widetilde{X}_i(t) &= Y_i^T(h-t), \quad 1 \le i \le m, \\
\widetilde{Y}_i(t) &= X_i^T(h-t), \quad 1 \le i \le m.
\end{aligned}$$

also satisfy the same boundary value problem. Then, as there is only one solution, the statement of the lemma would follow from lemma 2.5.

Indeed,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z}'(t) &= V^T(h-t)A_0 + Z^T(h-t)A_1 + \sum_{i=0}^{m} Y_i^T(h-t)B_i = \\
&= \widetilde{Z}(t)A_0 + \widetilde{V}(t)A_1 + \sum_{i=0}^{m} \widetilde{X}_i(t)B_i, \\
\widetilde{V}'(t) &= -A_0^T Z(h-t) - A_1^T V(h-t) - \sum_{i=1}^{m} B_i^T X_i(h-t) = \\
&= -A_0^T \widetilde{V}(t) - A_1^T \widetilde{Z}(t) - \sum_{i=1}^{m} B_i^T \widetilde{X}_i(t), \\
\widetilde{X}_i'(t) &= \eta_i(0)V^T(h-t) - \eta_i(-h)Z^T(h-t) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} Y_j^T(h-t) = \\
&= \eta_i(0)\widetilde{Z}(t) - \eta_i(-h)\widetilde{V}(t) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \widetilde{X}_j(t), \\
\widetilde{Y}_i'(t) &= \eta_i(-h)V^T(h-t) - \eta_i(0)Z^T(h-t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} X_j^T(h-t) = \\
&= \eta_i(-h)\widetilde{Z}(t) - \eta_i(0)\widetilde{V}(t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \widetilde{Y}(t).
\end{aligned}$$

The boundary conditions are also easily verified

$$\widetilde{Z}(0) = V^T(h) = Z^T(0) = \widetilde{V}(h),$$

$$\widetilde{Z}(0)A_0 + A_0^T\widetilde{V}(h) + \widetilde{V}(0)A_1 + A_1^T\widetilde{Z}(h) + \sum_{i=1}^{m}\left[\widetilde{X}_i(0)B_i + B_i^T\widetilde{Y}_i(h)\right] =$$

$$= V^T(h)A_0 + A_0^T Z^T(0) + Z^T(h)A_1 + A_1^T V^T(0) + \sum_{i=1}^{m}\left[Y_i^T(h)B_i + B_i^T X_i^T(0)\right] =$$

$$= -W^T = -W,$$

$$\widetilde{X}_i(0) = \int_{-h}^{0}\eta_i(\theta)Z^T(-\theta)d\theta = \int_{-h}^{0}\eta_i(\theta)\widetilde{V}(h+\theta)d\theta,$$

$$\widetilde{Y}_i(0) = \int_{-h}^{0}\eta_i(\theta)Z^T(h+\theta)d\theta = \int_{-h}^{0}\eta_i(\theta)\widetilde{V}(-\theta)d\theta.$$

Here, we applied 2.2 after verifying two sets of boundary conditions from (2.5).

Hence, $U(t)$ is a Lyapunov matrix of the system. The uniqueness follows from the uniqueness of the solution of the auxiliary system. Indeed, by lemma 2.4 equations (2.2) defined a solution of the auxiliary boundary value problem. The auxiliary matrices are different for different $U(t)$, and so there are cannot be two different Lyapunov matrices. ■

From a practical standpoint, it is most interesting to consider the case when the Lyapunov matrix exists and unique. It follows from the previous theorem that to this end it is sufficient for the auxiliary system to have a unique solution. Therefore, it is important to find out when this happens. If we can show that it is, in fact, equivalent to the Lyapunov condition, then we will establish that the uniqueness of the Lyapunov matrix is equivalent to the uniqueness of the solution of the auxiliary system with boundary conditions. Thus, it will be shown that the boundary value problem is well posed. Let us first establish some intermediate results.

2.3. Matrix representation of the auxiliary system

We start by showing that the auxiliary problem (2.3), (2.5), (2.7) can be reduced to solving a system of linear algebraic equations. Thus, we will also obtain a simple method for solving the auxiliary boundary value problem, which, while probably being not the most efficient numerically, is theoretically convenient. Define

$$\begin{aligned} z(t) &= \operatorname{vect}(Z(t)), \\ v(t) &= \operatorname{vect}(V(t)), \\ x_i(t) &= \operatorname{vect}(X_i(t)), \\ y_i(t) &= \operatorname{vect}(Y_i(t)), \end{aligned} \qquad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}.$$

Vectorizing system (2.3) we obtain

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z(t) \\ y(t) \\ x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{B} & \mathbf{0} \\ -\mathfrak{A}_1 & -\mathfrak{A}_0 & \mathbf{0} & -\mathfrak{B} \\ \eta(0)\otimes I & -\eta(-h)\otimes I & -A\otimes I & \mathbf{0} \\ \eta(-h)\otimes I & -\eta(0)\otimes I & \mathbf{0} & A\otimes I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z(t) \\ y(t) \\ x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= A_0^T \otimes I, \quad \mathcal{A}_1 = A_1^T \otimes I, \\ \mathfrak{A}_0 &= I \otimes A_0^T, \quad \mathfrak{A}_1 = I \otimes A_1^T, \\ \mathcal{B} &= \begin{pmatrix} B_1^T \otimes I & \dots & B_m^T \otimes I \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{B} &= \begin{pmatrix} I \otimes B_1^T & \dots & I \otimes B_m^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Let L be the matrix of that system, then the boundary conditions have the form

$$\left[M - \int_{-h}^{0} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \eta(\theta)\otimes \mathcal{E}e^{L(h+\theta)} \\ \eta(\theta)\otimes \mathcal{E}e^{-L\theta} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} d\theta + Ne^{Lh} \right] \begin{pmatrix} z(0) \\ y(0) \\ x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \operatorname{vect} W \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

with

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n^2\times n^2} & I_{n^2} & \mathbf{0}_{n^2\times mn^2} & \mathbf{0}_{n^2\times mn^2} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \\ \mathcal{A}_0 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_0 & \mathbf{0} & \mathfrak{B} \end{pmatrix}.$$

Thus, to solve the boundary value problem it is enough to find the values $(z(0), y(0), x(0), y(0))$ from equation (2.9). Let us show that the integral term can be reduced to the computation of the matrix exponent.

Lemma 2.7. *For any square matrix L and any matrix B of suitable order the following holds:*

$$\exp\begin{pmatrix}\mathbf{0} & B\\ \mathbf{0} & L\end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} I & B\displaystyle\int_0^t e^{L\tau}d\tau \\ \mathbf{0} & e^{Lt}\end{pmatrix}.$$

Proof. Power series for exponential can be integrated term-by-term, therefore

$$\exp\begin{pmatrix}\mathbf{0} & B\\ \mathbf{0} & L\end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & I\end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & BL^{k-1}\\ \mathbf{0} & L^k\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I & B\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}L^k \\ \mathbf{0} & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}L^k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B\displaystyle\int_0^t e^{L\tau}d\tau \\ \mathbf{0} & e^{Lt}\end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Using this result, we can show that

$$\exp\left[\begin{pmatrix}\mathbf{0} & I_m\otimes\mathcal{E}\\ \mathbf{0} & A\oplus L\end{pmatrix} h\right]\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \eta(-h)\otimes I_l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\int_{-h}^0 \eta(\theta)\otimes\mathcal{E}e^{L(h+\theta)}d\theta\\ \eta(0)\otimes e^{Lh}\end{pmatrix},$$

$$\exp\left[-\begin{pmatrix}\mathbf{0} & -I_m\otimes\mathcal{E}\\ \mathbf{0} & A\oplus(-L)\end{pmatrix} h\right]\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \eta(0)\otimes I_l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\int_{-h}^0 \eta(\theta)\otimes\mathcal{E}e^{-L\theta}d\theta\\ \eta(-h)\otimes e^{Lh}\end{pmatrix}.$$

For example, the first equality can be shown as follows.

$$\exp\left[\begin{pmatrix}\mathbf{0} & I_m\otimes\mathcal{E}\\ \mathbf{0} & A\oplus L\end{pmatrix} h\right]\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \eta(-h)\otimes I_l\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\displaystyle\int_0^h (I_m\otimes\mathcal{E})(e^{At}\otimes e^{Lt})(\eta(-h)\otimes I_l)dt\\ (e^{Ah}\otimes e^{Lh})(\eta(-h)\otimes I_l)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\displaystyle\int_{-h}^0 \eta(\theta)\otimes\mathcal{E}e^{L(h+\theta)}d\theta\\ \eta(0)\otimes e^{Lh}\end{pmatrix},$$

where we used the equality $e^{A(h+\theta)}\eta(-h) = \eta(\theta)$.

2.4. Uniqueness of solutions

In the previous section the problem of computation of solutions to the auxiliary system was reduced to the problem of solving system (2.9). But a system of linear algebraic equations has a unique solution if and only if the homogeneous system has only trivial solution. As such, to answer the question whether the Lyapunov condition is equivalent to the uniqueness of solution to (2.3), (2.5), (2.7) we first must consider solutions of auxiliary systems with $W = \mathbf{0}$.

Lemma 2.8. *Let $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$ be a solution of system (2.3), satisfying (2.5), (2.7) with $W = \mathbf{0}$. Then for all $t \in \mathbb{R}$ the equality*

$$Z(t) = V(h + t)$$

holds.

Proof. Equation (2.8) implies that any solution of (2.3) is a matrix function, whose components are analytic functions. Thus, any solution has derivatives of all orders and linearity of system (2.3) implies that $(Z'(t), V'(t), X'(t), Y'(t))$ is also a solution of this system.

We will now show that the boundary conditions with $W = \mathbf{0}$ are also satisfied by the derivatives. From (2.3), (2.7) and $W = \mathbf{0}$ we have

$$Z'(0) - V'(h) = Z(0)A_0 + A_0^T V(h) + V(0)A_1 + A_1^T Z(h)+ \\ + \sum_{i=1}^{m} \left[X_i(0)B_i + B_i^T Y_i(h)\right] = \mathbf{0},$$

so $Z'(0) = V'(h)$. Using integration by parts we get

$$\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta)V'(h+\theta)d\theta = \eta_i(0)V(h) - \eta_i(-h)V(0) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \int_{-h}^{0} \eta_j(\theta)V(h+\theta)d\theta = \\ = \eta_i(0)Z(0) - \eta_i(-h)V(0) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}X_j(0) = X_i'(0),$$

$$\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta)V'(-\theta)d\theta = -\eta_i(0)V(0) + \eta_i(-h)V(h) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \int_{-h}^{0} \eta_j(\theta)V(-\theta)d\theta = \\ = \eta_i(-h)Z(0) - \eta_i(0)V(0) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}Y_j(0) = Y_i'(0),$$

which together with 2.2 implies that conditions (2.5) are also satisfied. Let us show that

$$\mathcal{S} = Z'(0)A_0 + A_0^T V'(h) + V'(0)A_1 + A_1^T Z'(h) + \sum_{i=1}^{m} \left[X_i'(0)B_i + B_i^T Y_i'(h)\right] = \mathbf{0}.$$

Note that

$$Z'(0)A_0 + A_0^T V'(h) = V'(h)A_0 + A_0^T Z'(0)$$

and using the equality $V(h) = Z(0)$ and expressions for derivatives from (2.3) we obtain

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^m \left[X_i'(0) + A_0^T X_i(0) + A_1^T X_i(h)\right] B_i + \sum_{i=1}^m B_i^T \left[Y_i'(h) - Y_i(h)A_0 - Y_i(0)A_1\right].$$

Now we transform the expressions in square brackets:

$$\begin{aligned} &X_i'(0) + A_0^T X_i(0) + A_1^T X_i(h) = \\ &\quad = \int_{-h}^0 \eta_i(\theta)\left[V'(h+\theta) + A_0^T V(h+\theta) + A_1^T Z(h+\theta)\right] d\theta = \\ &\qquad\qquad = -\sum_{j=1}^m B_j^T \int_{-h}^0 \eta_i(\theta) Y_j(h+\theta) d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Y_i'(h) - Y_i(h)A_0 - Y_i(0)A_1 = \\ &\quad = \int_{-h}^0 \eta_i(\theta)\left[Z'(-\theta) - Z(-\theta)A_0 - V(-\theta)A_1\right] d\theta = \\ &\qquad\qquad = \sum_{j=1}^m \int_{-h}^0 \eta_i(\theta) X_j(-\theta) d\theta B_j. \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m B_j^T \int_{-h}^0 \eta_i(\theta) Y_j(h+\theta) d\theta B_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m B_i^T \int_{-h}^0 \eta_i(\theta) X_j(-\theta) d\theta B_j = \\ &= -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m B_j^T \int_{-h}^0 \eta_i(\theta) Y_j(h+\theta) d\theta B_i + \sum_{\bar{i}=1}^m \sum_{\bar{j}=1}^m B_{\bar{j}}^T \int_{-h}^0 \eta_{\bar{j}}(\theta) X_{\bar{i}}(-\theta) d\theta B_{\bar{i}}. \end{aligned}$$

It remains to show that

$$\int_{-h}^0 \eta_j(\theta) X_i(-\theta) d\theta = \int_{-h}^0 \eta_i(\theta) Y_j(h+\theta) d\theta,$$

Indeed, by corollary 2.3 after changing the order of integration we get

$$\begin{aligned} &\int_{-h}^0 \eta_j(\theta) X_i(-\theta) d\theta = \\ &= \int_{-h}^0 \eta_j(\theta) \left[\int_{-h}^\theta \eta_i(\xi) V(-\theta+h+\xi) d\xi + \int_\theta^0 \eta_i(\xi) Z(-\theta+\xi) d\xi\right] d\theta = \end{aligned}$$

$$= \int_{-h}^{0} \eta_i(\xi) \left[\int_{\xi}^{0} \eta_j(\theta) V(h+\xi-\theta) d\theta + \int_{-h}^{\xi} \eta_j(\theta) Z(\xi-\theta) d\theta \right] d\xi =$$

$$= \int_{-h}^{0} \eta_i(\xi) Y_j(h+\xi) d\xi.$$

Therefore, $\mathcal{S} = \mathbf{0}$, and it follows that all boundary conditions are satisfied by the derivatives. We obtain by induction that $(Z^{(k)}(t), V^{(k)}(t), X^{(k)}(t), Y^{(k)}(t))$ is a solution of (2.3), (2.5), (2.7) with $W = \mathbf{0}$ for all $k \geq 0$. In particular, for all $k \geq 0$ we have

$$Z^{(k)}(0) = V^{(k)}(h).$$

But then two analytic functions $Z(t)$ и $V(h+t)$ together with all their derivatives coincide at $t = 0$, and thus are equal. ∎

From lemma 2.8 and corollary 2.3 we obtain the following:

Corollary 2.9. *Let* $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$ *be a solution of* (2.3),(2.5), (2.7) *with* $W = \mathbf{0}$. *Then for all* $t \in \mathbb{R}$ *we have*

$$X_i(t) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(t+\theta) d\theta, \quad Y_i(t) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta.$$

Now we have everything we need to establish the equivalence of the Lyapunov condition and the uniqueness of the solution to the boundary value problem.

Theorem 2.10. *The following statements are equivalent:*

1. *There exists a unique solution to auxiliary system* (2.3), (2.5), (2.7).
2. *There exists a unique Lyapunov matrix associated with* W.
3. *System* (2.1) *satisfies the Lyapunov condition.*

Proof.

In theorem 2.6 it was shown that statement 1 implies statement 2. The fact that statements 2 and 3 are equivalent is known for all linear time-invariant delay systems (theorem 1.6). We are going to show that statement 3 implies statement 1 or, to be precise, that that if condition 1 is not satisfied then the Lyapunov condition does not hold. As was noticed earlier, the auxiliary system is equivalent to linear algebraic system (2.9). Hence, if solution of the auxiliary system does not exist, or is not unique, then the corresponding homogeneous system has a non-trivial solution.

Therefore the auxiliary system with $W = \mathbf{0}$ system (5.5), (5.6) with $W = \mathbf{0}$ admits a non-trivial solution $(Z(t), V(t), X(t), Y(t)) \not\equiv \mathbf{0}$.

For this solution lemma 2.8 and corollary 2.9 imply that

$$\begin{aligned} V(t) &= Z(t-h), \\ X_i(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(t+\theta) d\theta, \\ Y_i(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta. \end{aligned}$$

It follows that $Z(t) \not\equiv \mathbf{0}$ (otherwise the solution would be trivial). Similarly, $V(t) \not\equiv \mathbf{0}$.

Every solution of (2.3) can be represented as

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \mathcal{P}_k(t), \quad & V(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \mathcal{Q}_k(t), \\ X_i(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \mathcal{R}_{ik}(t), \quad & Y_i(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \mathcal{S}_{ik}(t), \end{aligned} \tag{2.10}$$

where $1 \le i \le m$, $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ are distinct eigenvalues of (2.3), $\mathcal{P}_k(t), \mathcal{Q}_k(t), \mathcal{R}_{ik}(t), \mathcal{S}_{ik}(t)$ are polynomials with matrix coefficients. Since $Z(t) \not\equiv \mathbf{0}$, for some d, the polynomial $\mathcal{P}_d(t) \not\equiv \mathbf{0}$, that is $\mathcal{P}_d(t) = t^l P_0 + \ldots + P_l$ c $P_0 \ne \mathbf{0}$. Therefore,

$$V(t) = Z(t-h) = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} e^{-s_k h} \mathcal{P}_k(t-h),$$

and deg $\mathcal{Q}_d(t) = l$ and and its coefficient for t^l has form $P_0 e^{-s_d h}$. Moreover

$$\begin{aligned} X_i(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(t+\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s_k \theta} \mathcal{P}_k(t+\theta) d\theta, \\ Y_i(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{-s_k \theta} \mathcal{Q}_k(t-\theta) d\theta, \end{aligned}$$

so $\deg \mathcal{R}_{id}(t) \le l$, $\deg \mathcal{S}_{id}(t) \le l$, and the leading coefficients of $\mathcal{R}_{id}(t)$, $\mathcal{S}_{id}(t)$ are

$$\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s_d \theta} d\theta P_0, \quad e^{-s_d h} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{-s_d \theta} d\theta P_0,$$

respectively. Substituting expression (2.10) into system (2.3) we get

$$\sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \left[s_k \mathcal{P}_k(t) + \mathcal{P}_k'(t) \right] = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \left[\mathcal{P}_k(t) A_0 + \mathcal{Q}_k(t) A_1 + \sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{ik}(t) B_i \right],$$

$$\sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\left[s_k \mathcal{Q}_k(t) + \mathcal{Q}_k'(t)\right] = -\sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\left[A_1^T \mathcal{P}_k(t) + A_0^T \mathcal{Q}_k(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i^T \mathcal{S}_{ik}(t)\right].$$

Since all eigenvalues $s_1, \dots, s_\nu$ are distinct, the preceding equalities imply that

$$s_d \mathcal{P}_d(t) + \mathcal{P}_d'(t) = \mathcal{P}_d(t) A_0 + \mathcal{Q}_d(t) A_1 + \sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{id}(t) B_i,$$

$$-s_d \mathcal{Q}_d(t) - \mathcal{Q}_d'(t) = A_1^T \mathcal{P}_d(t) + A_0^T \mathcal{Q}_d(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i^T \mathcal{S}_{id}(t).$$

Therefore, for terms with degree l we obtain

$$s_d P_0 = P_0\left[A_0 + e^{-s_d h} A_1 + \sum_{i=1}^{m}\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s_d \theta} B_i d\theta\right],$$

$$-s_d e^{-s_d h} P_0 = \left[e^{s_d h} A_1^T + A_0^T + \sum_{i=1}^{m}\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{-s_d \theta} B_i^T d\theta\right] e^{-s_d h} P_0.$$

As $P_0 \neq \mathbf{0}$, it follows that

$$\det\left[s_d I - A_0 - e^{-s_d h} A_1 - \sum_{i=1}^{m}\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s_d \theta} B_i d\theta\right] = 0,$$

$$\det\left[-s_d I - A_0 - e^{s_d h} A_1 - \sum_{i=1}^{m}\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{-s_d \theta} B_i d\theta\right] = 0,$$

therefore both s_d and $-s_d$ are eigenvalues of system (2.1). It follows that the Lyapunov conditions does not hold, as required. ■

2.5. Example

We consider the example from the paper [48]:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-1) + \int_{-1}^{0}[\sin(\pi\theta) B_1 + \cos(\pi\theta) B_2] x(t+\theta) d\theta, \qquad (2.11)$$

where

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 \\ -0.3 & 0 \end{pmatrix}.$$

It was shown in the article [14] that the auxiliary system presented in [48] admits multiple solutions (in fact, there are four linearly independent solutions of the homogeneous system), even though system (2.11) satisfies the Lyapunov condition, that is for any symmetric matrix W there exists a unique Lyapunov matrix. Thus, the boundary value problem from the article [48] cannot be used for computation of the Lyapunov matrix, and the graph of the components of the Lyapunov matrix in the article is not reproducible.

Let us consider the approach presented in this chapter. The auxiliary system (2.3) has the form

$$\begin{cases} Z'(t) = Z(t)A_0 + V(t)A_1 + X_1(t)B_1 + X_2(t)B_2, \\ V'(t) = -A_0^T V(t) - A_1^T Z(t) - B_1^T Y_1(t) - B_2^T Y_2(t), \\ X_1'(t) = -\pi X_2(t), \\ X_2'(t) = Z(t) + V(t) + \pi X_1(t), \\ Y_1'(t) = \pi Y_2(t), \\ Y_2'(t) = -Z(t) - V(t) - \pi Y_1(t), \end{cases}$$

while boundary conditions (2.7), (2.5a), (2.5c) have the form

$$\begin{cases} Z(0) = V(h), \\ X_1(0) = \displaystyle\int_{-h}^{0} \sin(\pi\theta)V(h+\theta)d\theta, \\ X_2(0) = \displaystyle\int_{-h}^{0} \cos(\pi\theta)V(h+\theta)d\theta, \\ Y_1(0) = \displaystyle\int_{-h}^{0} \sin(\pi\theta)V(-\theta)d\theta, \\ Y_2(0) = \displaystyle\int_{-h}^{0} \cos(\pi\theta)V(-\theta)d\theta, \\ Z(0)A_0 + A_0^T V(h) + V(0)A_1 + A_1^T Z(h) + \\ \qquad + X_1(0)B_1 + B_1^T Y_1(h) + X_2(0)B_2 + B_2^T Y_2(h) = -W. \end{cases}$$

The real Lyapunov matrix (2.11) associated with $W = I$ is depicted in Figure 1.

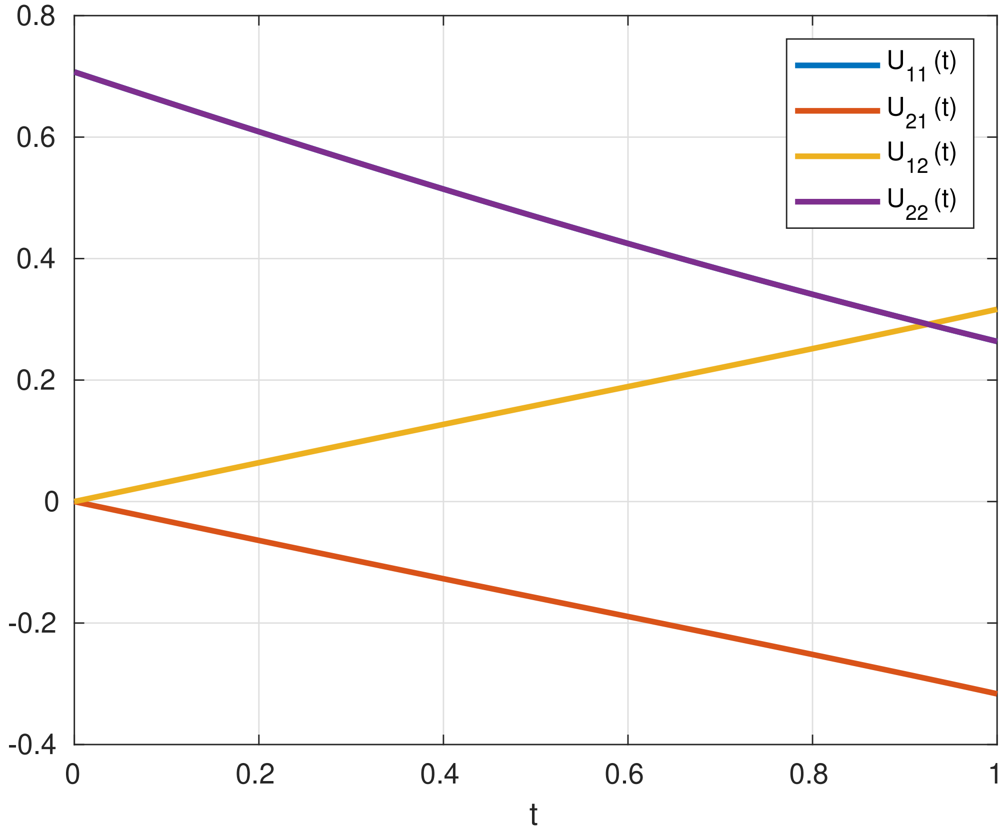

Figure 1: Components of the Lyapunov matrix $U(t)$, $U_{11}(t) = U_{22}(t)$

Chapter 3. Extension of state space and Lyapunov matrices

In this chapter we characterize the approach suggested in the paper [38] to construct the Lyapunov matrices for systems with distributed delay by their transformation to systems with one delay.

3.1. Basic properties

Consider the system

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \int_{-h}^{0} Ce^{A\theta} B x(t+\theta) d\theta, \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, and $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

As in the case of the previous chapter, the kernel of system (3.1) is of exponential type. Hence, firstly we establish the relationship between the systems of form (2.1) and of form (3.1).

Lemma 3.1. *Every kernel $Q(\theta) = Ce^{A\theta}B$ admits a representation of form*

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i(\theta) B_i, \quad \eta'(\theta) = \bar{A}\eta(\theta), \tag{3.2}$$

and conversely, any kernel of form (3.2) *can be rewritten as $Q(\theta) = Ce^{A\theta}B$. Here, $\eta(\theta) = (\eta_1(\theta), \ldots, \eta_m(\theta))^T$.*

Proof. Consider the kernel $Q(\theta) = Ce^{A\theta}B$. It is well-known that

$$e^{A\theta} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(\theta) A^{i-1},$$

moreover there exists a real matrix $\bar{A}$, such that $\eta'(\theta) = \bar{A}\eta(\theta)$. Therefore,

$$Q(\theta) = C\left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i(\theta) A^{i-1}\right] B = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(\theta) C A^{i-1} B.$$

Conversely, for kernel (3.2) we have

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i(\theta) B_i = \begin{bmatrix} B_1 & \ldots & B_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(\theta) I \\ \vdots \\ \eta_m(\theta) I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_m \end{bmatrix} ([e^{A\theta}\eta(0)] \otimes I) =$$
$$= \begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_m \end{bmatrix} ([e^{A\theta} \otimes I][\eta(0) \otimes I]) =$$
$$= \begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_m \end{bmatrix} e^{(A\otimes I)\theta}[\eta(0) \otimes I]. \qquad \blacksquare$$

In the paper [38] the following idea was suggested. Introducing new state variables

$$y(t) = \int_{-h}^{0} e^{A\theta} Bx(t+\theta)d\theta, \tag{3.3}$$

we may rewrite system (3.1) as

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + Cy(t) + A_1x(t-h), \\ \dot{y}(t) = Bx(t) - Ay(t) - e^{-Ah}Bx(t-h). \end{cases} \tag{3.4}$$

System (3.4) has only one delay, therefore we can apply the results of the first chapter to find its Lyapunov matrix. Nonetheless, in the article [38] it was mentioned that the relation between the Lyapunov matrices of nominal system (3.1) and extended system (3.4) is not obvious. We also note that the Lyapunov matrix of system (3.1) has dimensions $n \times n$, while for systems (3.4) the corresponding dimensions are $(n+m) \times (n+m)$. Therefore, the Lyapunov matrices of these systems are associated with matrices $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$.

We start by establishing connections between solutions of these two systems.

Lemma 3.2. *Let $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ and ψ be any function from $PC([-h, 0], \mathbb{R}^m)$ such that*

$$\psi(0) = \int_{-h}^{0} e^{A\theta} B\varphi(\theta)d\theta. \tag{3.5}$$

Then $x(t)$ is a solution of system (3.1) with the initial function φ iff for some $y(t)$ the pair $(x(t), y(t))$ is a solution of system (3.4) with the initial functions (φ, ψ).

Proof.

Necessity. Defining $y(t)$ by (3.3) for $t \geq 0$ and by $y(t) = \psi(t)$ for $t \in [-h, 0)$ we immediately notice that $(x(t), y(t))$ is a solution of system (3.4) with the initial functions (φ, ψ).

Sufficiency. By the variation of constants formula we obtain from (3.4) that

$$y(t) = e^{-At}\psi(0) + \int_{0}^{t} e^{A(\theta-t)}[Bx(\theta) - e^{-Ah}Bx(\theta - h)]d\theta.$$

Replacing $\psi(0)$ with (3.5), after some computations we get

$$y(t) = \int_{-h}^{0} e^{A\theta} Bx(t+\theta)d\theta.$$

Substituting this in the first equation of (3.4), we see that $x(t)$ is a solution of system (3.1). ■

The relationship between the characteristic functions of the two systems is quite indicative. Before proceeding, however, we adopt the following notation:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & C \\ B & -A \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ -e^{-Ah}B & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} x(t), \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Therefore system (3.4) has the form

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}_0 z(t) + \mathcal{A}_1 z(t-h).$$

We also denote the characteristic functions of the nominal and extended systems by $f_1(s)$ and $f_2(s)$, respectively:

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \det \left[sI - A_0 - e^{-sh}A_1 - \int_{-h}^{0} e^{s\theta} C e^{A\theta} B d\theta \right], \\ f_2(s) &= \det \left[sI - \mathcal{A}_0 - e^{-sh}\mathcal{A}_1 \right]. \end{aligned}$$

Lemma 3.3. *The characteristic functions of systems* (3.1) *and* (3.4) *satisfy*

$$f_2(s) = f_1(s) \det[sI + A].$$

Proof. Notice that

$$-B + e^{-sh}e^{-Ah}B = -(sI + A) \int_{-h}^{0} e^{s\xi} e^{A\xi} B d\xi,$$

hence

$$\det \begin{bmatrix} sI - A_0 - e^{-sh}A_1 - \int_{-h}^{0} e^{s\xi} C e^{A\xi} B d\xi & -C \\ \mathbf{0} & sI + A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ -\int_{-h}^{0} e^{s\xi} e^{A\xi} B d\xi & I \end{bmatrix},$$

and the result follows by taking determinants of both sides. ■

Corollary 3.4. *System* (3.4) *is exponentially stable if and only if system* (3.1) *is exponentially stable and all eigenvalues of the matrix A have positive real parts.*

Corollary 3.5. *System* (3.4) *satisfies the Lyapunov condition iff the following conditions hold:*

(A) *system* (3.1) *satisfies the Lyapunov condition,*

(B) *system* (3.1) *and the matrix A have no common eigenvalues,*

(C) *the matrix A has no eigenvalues symmetric with respect to the origin.*

Therefore, the extended system may not be exponentially stable even if the nominal system was. Similarly, if the nominal system satisfies the Lyapunov property and there exists a unique Lyapunov matrix for any W, system (3.4) may not satisfy the Lyapunov condition and a Lyapunov matrix of the extended system exists not for all $\mathcal{W}$. In what follows we will show that under certain assumptions it is still possible to reduce the computation of Lyapunov matrices of the nominal system to the obtaining a Lyapunov matrix of the extended system.

We will also need the relationship between the fundamental matrices of the nominal and extended systems.

Lemma 3.6. *Let $K(t)$ be the fundamental matrix of system* (3.1), *then the fundamental matrix $\mathcal{K}(t)$ of system* (3.4) *has the form*

$$\mathcal{K}(t) = \begin{bmatrix} K_{11}(t) & K_{12}(t) \\ K_{21}(t) & K_{22}(t) \end{bmatrix},$$

where

$$\begin{aligned}
K_{11}(t) &= K(t), \\
K_{12}(t) &= \int_0^t K(t-\tau)Ce^{-A\tau}d\tau, \\
K_{21}(t) &= \int_{-h}^0 e^{A\theta}BK(t+\theta)d\theta, \\
K_{22}(t) &= e^{-At} + \int_{-h}^0 e^{A\theta}B\left[\int_0^{t+\theta} K(t+\theta-\tau)Ce^{-A\tau}d\tau\right]d\theta.
\end{aligned}$$

Proof. Since for columns of $K_{11}(t)$ and $K_{21}(t)$ condition (3.5) holds, the expressions for these two blocks follow from lemma 3.2. Since

$$K_{22}'(t) = BK_{12}(t) - AK_{22}(t) - e^{-Ah}BK_{12}(t-h),$$

we can use the variation of constants formula for $K_{22}(t)$ to get

$$K_{22}(t) = e^{-At}K_{22}(0) + \int_0^t e^{A(\tau-t)}BK_{12}(\tau)d\tau - \int_0^t e^{A(\tau-t-h)}BK_{12}(\tau-h)d\tau =$$

$$= e^{-At} + \int_{-h}^{0} e^{A\theta} B K_{12}(t+\theta) d\theta,$$

as $K_{22}(0) = I$, and $K_{12}(t) = \mathbf{0}$ for $t \le 0$. Therefore,

$$K_{12}'(t) = A_0 K_{12}(t) + A_1 K_{12}(t-h) + \int_{-h}^{0} C e^{A\theta} B K_{12}(t+\theta) d\theta + C e^{-At}.$$

The Cauchy formula [20] for time-delay systems yields the expression for $K_{12}(t)$ and the expression for $K_{22}(t)$ readily follows. ■

3.2. Lyapunov matrices of the nominal and extended systems

Similarly to solutions, fundamental matrices and characteristic functions we would like to find relations between Lyapunov matrices of the two systems under consideration. The first problem we have to address is the choice of $\mathcal{W}$. Indeed, Lyapunov matrices of system (3.1) depend on the choice of a symmetric matrix W having $n(n+1)/2$ parameters, while for system (3.4) we must choose $(n+m)(n+m+1)/2$ parameters for a symmetric $\mathcal{W}$. To this end, we define the mapping

$$W \mapsto \bar{W} = \begin{bmatrix} W & \mathbf{0}_{n\times m} \\ \mathbf{0}_{m\times n} & \mathbf{0}_m \end{bmatrix},$$

and simply set $\mathcal{W} = \bar{W}$. The next lemma will be crucial in the further analysis, revealing the structure of the Lyapunov matrices of the extended system associated with $\bar{W}$.

Lemma 3.7. *Any Lyapunov matrix of system* (3.4) *associated with* $\bar{W}$ *has the form*

$$\mathcal{U}(t) = \begin{bmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ U_{21}(t) & U_{22}(t) \end{bmatrix},$$

where $U_{11}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *and*

$$U_{12}(t) = U_{12}(0) e^{-At} + \int_0^t U_{11}(\tau) C e^{A(\tau-t)} d\tau,$$
$$U_{21}(t) = e^{A^T t} U_{21}(0) - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)} C^T U_{11}(\tau) d\tau,$$
$$U_{22}(t) = e^{A^T t} U_{22}(0) - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)} C^T U_{12}(\tau) d\tau.$$

Proof. The dynamic property can be written as

$$
\begin{aligned}
U_{11}'(t) &= U_{11}(t)A_0 + U_{12}(t)B + U_{11}(t-h)A_1 - U_{12}(t-h)e^{-Ah}B,\\
U_{12}'(t) &= U_{11}(t)C - U_{12}(t)A,\\
U_{21}'(t) &= U_{21}(t)A_0 + U_{22}(t)B + U_{21}(t-h)A_1 - U_{22}(t-h)e^{-Ah}B,\\
U_{22}'(t) &= U_{21}(t)C - U_{22}(t)A,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

where $t > 0$. Define two functions:

$$
\begin{aligned}
S(t) &= e^{A^Tt}U_{21}(0) - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^TU_{11}(\tau)d\tau,\\
T(t) &= e^{A^Tt}U_{22}(0) - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^TU_{12}(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Using the symmetry property we obtain for $t < 0$ that

$$
\begin{aligned}
U_{21}'(t) &= -C^TU_{11}(t) + A^TU_{21}(t),\\
U_{22}'(t) &= -C^TU_{12}(t) + A^TU_{22}(t),
\end{aligned}
$$

therefore $S(t) \equiv U_{21}(t)$ и $T(t) \equiv U_{22}(t)$ for $t \leq 0$. We want to show that these relations also hold for all $t > 0$.

Consider

$$
S(t)A_0 + T(t)B = e^{A^Tt}[S(0)A_0 + T(0)B] - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^T[U_{11}(\tau)A_0 + U_{12}(\tau)B]d\tau,
$$

furthermore,

$$
\begin{aligned}
S(-h) &= e^{-A^Th}U_{21}(0) - \int_0^{-h} e^{A^T(-h-\tau)}C^TU_{11}(\tau)d\tau,\\
S(t-h) &= e^{A^Tt}e^{-A^Th}U_{21}(0) - e^{A^Tt}\int_0^{-h} e^{A^T(-h-\tau)}C^TU_{11}(\tau)d\tau-\\
&\qquad - \int_{-h}^{t-h} e^{A^T(t-h-\tau)}C^TU_{11}(\tau)d\tau =\\
&= e^{A^Tt}S(-h) - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^TU_{11}(\tau-h)d\tau,
\end{aligned}
$$

similarly,

$$
T(t-h) = e^{A^Tt}T(-h) - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^TU_{12}(\tau-h)d\tau.
$$

Hence,

$$S(t)A_0 + T(t)B + S(t-h)A_1 - T(t-h)e^{-Ah}B = -\int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^T U_{11}'(\tau)d\tau +$$
$$+e^{A^Tt}[S(0)A_0 + T(0)B + S(-h)A_1 - T(-h)e^{-Ah}B].$$

Since $S(t) \equiv U_{21}(t)$ and $T(t) \equiv U_{22}(t)$ for non-positive t, the expression in square brackets is $U_{21}'(+0)$. Integrating by parts, we get

$$-\int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^T U_{11}'(\tau)d\tau =$$
$$= -C^T U_{11}(t) + e^{A^Tt}C^T U_{11}(0) - A^T \int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^T U_{11}(\tau)d\tau =$$
$$= e^{A^Tt}C^T U_{11}(0) - e^{A^Tt}A^T U_{21}(0) + A^T e^{A^Tt}U_{21}(0) -$$
$$- C^T U_{11}(t) - A^T \int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^T U_{11}(\tau)d\tau =$$
$$= -e^{A^Tt}U_{21}'(-0) + S'(t).$$

But then,

$$S(t)A_0 + T(t)B + S(t-h)A_1 - T(t-h)e^{-Ah}B =$$
$$= S'(t) + e^{A^Tt}[U_{21}'(+0) - U_{21}'(-0)] =$$
$$= S'(t),$$

as $U_{21}'(+0) = U_{21}'(-0)$ by the algebraic property and the form of $\bar{W}$.

Moreover,

$$S(t)C - T(t)A = e^{A^Tt}[S(0)C - T(0)A] - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^T[U_{11}(\tau)C - U_{12}(\tau)A]d\tau =$$
$$= e^{A^Tt}U_{22}'(+0) - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)}C^T U_{12}'(\tau)d\tau =$$
$$= e^{A^Tt}[U_{22}'(+0) - U_{22}'(-0)] + T'(t) = T'(t).$$

Thus, the functions $(U_{11}(t), U_{12}(t), S(t), T(t))$ satisfy system (3.6). They also coincide with the solution $(U_{11}(t), U_{12}(t), U_{21}(t), U_{22}(t))$ of system (3.6) on $[-h, 0]$. Therefore, by the uniqueness theorem for time-delay systems [51] we have for $t > 0$ that $U_{21}(t) \equiv S(t)$, $U_{22}(t) \equiv T(t)$, as required. The expression for $U_{12}(t)$ follows easily from the symmetric property. ■

Remark 3.1. From the symmetric property we also have

$$U_{22}(t) = U_{22}(0)e^{-At} + \int_0^t U_{21}(\tau)Ce^{A(\tau-t)}d\tau.$$

Henceforth we will use the notations of lemma 3.7 to denote blocks of $\mathcal{U}(t)$.

Theorem 3.8. *Assume that there exists a Lyapunov matrix $\mathcal{U}(t)$ of system* (3.4) *associated with $\bar{W}$, then $U_{11}(t)$ is a Lyapunov matrix of system* (3.1) *associated with W.*

Proof. Since $U_{11}(t)$ is the upper left block of the matrix $\mathcal{U}(t)$, the symmetric and the algebraic properties for $\mathcal{U}(t)$ imply that the symmetric and the algebraic properties hold also for $U_{11}(t)$. Furthermore, by lemma 3.7 we have

$$U_{12}(t)B - U_{12}(t-h)e^{-Ah}B = \int_{t-h}^t U_{11}(\tau)Ce^{A(\tau-t)}Bd\tau,$$

therefore,

$$U_{11}'(t) = U_{11}(t)A_0 + U_{11}(t-h)A_1 + \int_{-h}^0 U_{11}(t+\xi)Ce^{A\xi}Bd\xi,$$

and the dynamic property is satisfied. Thus, $U_{11}(t)$ is a Lyapunov matrix of system (3.1). ∎

Therefore, the extended system (when it exists) can be used for the computation of Lyapunov matrices of the nominal system. At the same time, corollary 3.5 implies that it is possible that there exists a Lyapunov matrix of the original system, but not of the extended system. Naturally, we would like to characterize such cases. The resulting conditions turn out to be rather cumbersome.

Theorem 3.9. *Let W be a symmetric matrix of order n. There exists a Lyapunov matrix of system* (3.4) *associated with $\bar{W}$ iff the following conditions hold:*

1. *there exists a Lyapunov matrix $U(t)$ of system* (3.1) *associated with W,*
2. *there exists a solution $L \in \mathbb{R}^{n\times m}$, of the matrix equation*

$$\begin{gathered} LA - A_0^T L - A_1^T Le^{-Ah} - \int_{-h}^0 B^T e^{A^T\tau}C^T Le^{A\tau}d\tau = \\ = U(0)C + A_1^T \int_0^h U(\tau)Ce^{A(\tau-h)}d\tau + \\ + \int_{-h}^0 B^T e^{A^T\tau}C^T \int_0^{-\tau} U(\xi)Ce^{A(\xi+\tau)}d\xi d\tau, \end{gathered} \tag{3.7}$$

3. there exists a symmetric solution $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ of the Lyapunov matrix equation

$$A^T M + MA = L^T C + C^T L. \tag{3.8}$$

Proof.

Necessity. Assume that there exists a Lyapunov matrix $\mathcal{U}(t)$ of system (3.4). By theorem 3.8 it follows that $U(t) = U_{11}(t)$ is a Lyapunov matrix of system (3.1). From the algebraic condition we obtain

$$\begin{gathered} U_{12}(0)A - U_{11}(0)C = A_0^T U_{12}(0) + B^T U_{22}(0) + A_1^T U_{12}(h) - B^T e^{-A^T h} U_{22}(h), \\ U_{21}(0)C - U_{22}(0)A + C^T U_{12}(0) - A^T U_{22}(0) = \mathbf{0}. \end{gathered}$$

Substituting the expressions from lemma 3.7 we get

$$\begin{gathered} U_{12}(0)A - A_0^T U_{12}(0) - A_1^T U_{12}(0)e^{-Ah} - \int_{-h}^{0} B^T e^{A^T\tau} C^T U_{12}(0) e^{A\tau} d\tau = \\ = U(0)C + A_1^T \int_0^h U(\tau) C e^{A(\tau-h)} d\tau + \int_{-h}^{0} B^T e^{A^T\tau} C^T \int_0^{-\tau} U(\xi) C e^{A(\xi+\tau)} d\xi d\tau, \\ A^T U_{22}(0) + U_{22}(0)A = U_{12}^T(0)C + C^T U_{12}(0). \end{gathered}$$

Thus, equations (3.7) and (3.8) have solutions $L = U_{12}(0)$ and $M = U_{22}(0) = U_{22}^T(0)$, respectively.

Sufficiency. Set

$$\begin{aligned} U_{11}(t) &= U(t), \\ U_{12}(t) &= Le^{-At} + \int_0^t U_{11}(\tau) C e^{A(\tau-t)} d\tau, \\ U_{21}(t) &= e^{A^T t} L^T - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)} C^T U_{11}(\tau) d\tau, \\ U_{22}(t) &= e^{A^T t} M - \int_0^t e^{A^T(t-\tau)} C^T U_{12}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

We will show that matrix $\mathcal{U}(t)$ with these blocks satisfies the dynamic, symmetric and algebraic condition of Lyapunov matrices.

By construction, the algebraic property is satisfied. Indeed,

$$U_{11}'(+0) - U_{11}'(-0) = U'(+0) - U'(-0) = -W,$$

and all other matrices are continuously differentiable. It is easy to see that

$$U'_{11}(t) = U_{11}(t)A_0 + U_{11}(t-h)A_1 + \int_{-h}^{0} U_{11}(t+\xi)Ce^{A\xi}Bd\xi =$$
$$= U_{11}(t)A_0 + U_{11}(t-h)A_1 + U_{12}(t)B - U_{12}(t-h)e^{-Ah}B,$$
$$U'_{12}(t) = U_{11}(t)C - U_{12}(t)A.$$

for $t > 0$. Also, $U^T_{11}(t) = U^T(t) = U(-t) = U_{11}(-t)$, hence

$$\begin{aligned} U^T_{12}(t) &= e^{-A^Tt}L^T + \int_0^t e^{A^T(\tau-t)}C^TU^T_{11}(\tau)d\tau \\ &= e^{-A^Tt}L^T - \int_0^{-t} e^{A^T(-t-\tau)}C^TU_{11}(\tau)d\tau \\ &= U_{21}(-t). \end{aligned}$$

Similarly to the proof of lemma 3.7, one can find that

$$\begin{aligned} U'_{22}(t) &= e^{A^Tt}[A^TM - C^TL - L^TC + MA] + U_{21}(t)C - U_{22}(t)A \\ &= U_{21}(t)C - U_{22}(t)A, \end{aligned}$$

by (3.8). Note that the derivative of

$$R(t) = U^T_{22}(-t) = Me^{-At} + \int_0^t U_{21}(\tau)Ce^{A(\tau-t)}d\tau,$$

satisfies the differential equation

$$R'(t) = U_{21}(t)C - R(t)A.$$

Since $R(0) = U_{22}(0)$, we have $R(t) \equiv U_{22}(t)$ by Picard's theorem, thus $U^T_{22}(t) = U_{22}(-t)$ for all real t. This completes the proof of the symmetric property.

Similar computations can be done for $U_{21}(t)$ to obtain

$$U'_{21}(t) = e^{A^Tt}\left[A^TL^T - L^TA_0 - C^TU_{11}(0) - U_{21}(-h)A_1 - \int_{-h}^{0} U_{21}(\tau)Ce^{A\tau}Bd\tau\right] +$$
$$+U_{21}(t)A_0 + U_{21}(t-h)A_1 + \int_{-h}^{0} U_{21}(t+\xi)Ce^{A\xi}Bd\xi.$$

Obviously,

$$\int_{-h}^{0} U_{21}(t+\xi)Ce^{A\xi}Bd\xi = R(t)B - R(t-h)e^{-Ah}B =$$

$$= U_{22}(t)B - U_{22}(t-h)e^{-Ah}B.$$

Substituting the definition of $U_{21}(t)$ and using (3.7) we obtain that the expression in square brackets equals $\mathbf{0}$, therefore

$$U_{21}'(t) = U_{21}(t)A_0 + U_{21}(t-h)A_1 + U_{22}(t)B - U_{22}(t-h)e^{-Ah}B,$$

and the dynamical property is satisfied. But then the matrix $\mathcal{U}(t)$ is indeed a Lyapunov matrix of the extended system. ∎

3.3. Uniqueness issue

Theorem 3.9 was established by obtaining the explicit expressions showing how to obtain a Lyapunov matrix of one system using a Lyapunov matrix of another system. The following result then follows easily.

Theorem 3.10. *Let W be a symmetric matrix of order n. There exists a unique Lyapunov matrix of system* (3.4) *associated with $\bar{W}$ iff the following conditions hold:*

1. *there exists a unique Lyapunov matrix $U(t)$ of system* (3.1) *associated with W,*
2. *there exists a unique solution L of equation* (3.7)*,*
3. *there exists a unique solution M of equation* (3.8)*.*

Remark 3.2. Note that once we know the Lyapunov matrix $U(t)$ of the nominal system, the matrices L and M can be found successively from equations (3.7) and (3.8), respectively. After that, the Lyapunov matrix of the extended system can be obtained as in the sufficiency part of theorem 3.9.

It is interesting, however, to see how the conditions of theorem 3.10 are related to the spectrum of system (3.4). By corollary 3.5 there are three requirements for the extended system to satisfy the Lyapunov condition. It is well known 1.6 that property (A), the Lyapunov condition for the nominal system, is satisfied iff there exists a unique Lyapunov matrix for any W (part 1 of theorem 3.10). Moreover, property (C) is equivalent to the uniqueness of the solution to Lyapunov matrix equation (3.8). It seems natural that there also exists a connection between property (B) and matrix equation (3.7).

Lemma 3.11. *The matrix equation*

$$LA - A_0^T L - A_1^T L e^{-Ah} - \int_{-h}^{0} B^T e^{A^T\tau} C^T L e^{A\tau} d\tau = X, \tag{3.9}$$

has a unique solution for any $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *if and only if system* (3.1) *and the matrix* A *have no common eigenvalues.*

Proof.

Necessity. Suppose there exists $s_0 \in \mathbb{C}$ and two vectors $\mu, \nu \neq \mathbf{0}$ such that

$$\begin{aligned} s_0\mu^T &= \mu^T \left[A_0 + e^{-s_0 h} A_1 + \int_{-h}^{0} e^{s_0\xi} C e^{A\xi} B d\xi \right], \\ s_0\nu^T &= \nu^T A. \end{aligned}$$

This implies that $e^{s_0 t}\nu^T = \nu^T e^{At}$. Let $L_0 = \mu\nu^T \neq \mathbf{0}$, then

$$L_0 A - A_0^T L_0 - A_1^T L_0 e^{-Ah} - \int_{-h}^{0} B^T e^{A^T\tau} C^T L_0 e^{A\tau} d\tau = \mathbf{0}.$$

The equation (3.9) in linear in L, therefore for any X either there is no solution, or there are infinitely many solutions.

Sufficiency. Assume that equation (3.9) does not have a unique solution for any X. Thus, there exists a nonzero solution L_0 of the homogeneous equation. Let $A = QJQ^{-1}$, where J is the Jordan normal form of A, then $e^{At} = Qe^{Jt}Q^{-1}$ and we have

$$L_0 QJ - A_0^T L_0 Q - A_1^T L_0 Q e^{-Jh} - \int_{-h}^{0} B^T e^{A^T\tau} C^T L_0 Q e^{J\tau} d\tau = \mathbf{0}.$$

Obviously, the matrix $L_0 Q$ is nonzero, denote its first nonzero column as ℓ, say it's the kth. Let s_k be the eigenvalue of A in the kth column of J, then

$$s_k\ell - A_0^T \ell - A_1^T \ell e^{-s_k h} - \int_{-h}^{0} B^T e^{A^T\tau} C^T \ell e^{s_k\tau} d\tau = \mathbf{0}.$$

It follows that s_k is also an eigenvalue of system (3.1), a contradiction. ∎

3.4. The exponentially stable case

In the exponentially stable case the Lyapunov matrix can be expressed as an improper integral of the fundamental matrix. To ensure convergence we assume in this section that the extended system is exponentially stable. By corollary 3.4 it follows that the nominal system and the matrix $-A$ are stable. Hence, for some $\gamma_1, \gamma_2 \geq 1$ and $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ we have

$$\|K(t)\| \leq \gamma_1 e^{-\sigma_1 t}, \quad \left\|e^{-At}\right\| \leq \gamma_2 e^{-\sigma_2 t}, \quad t \geq 0. \tag{3.10}$$

The Lyapunov matrix of system (3.4) associated with $\bar{W}$ has the form (theorem 1.7)

$$\mathcal{U}(t) = \int_0^\infty \mathcal{K}^T(\tau) \begin{bmatrix} W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathcal{K}(t+\tau) d\tau.$$

Recall lemma 3.6, since $K_{11}(t) = K(t)$, the fundamental matrix of the nominal system, we obtain

$$U_{11}(t) = \int_0^\infty K^T(\tau) W K(t+\tau) d\tau,$$

the Lyapunov matrix of system (3.1), which agrees with the results obtained in theorem 3.8. Note that $\mathcal{W} = \bar{W}$ is the only choice allowing us to obtain the Lyapunov matrix of the nominal system in the top-left block. Also the corresponding Lyapunov–Krasovskii functional for the extended system will only have the terms containing $x(t)$ but not $y(t)$.

In the same way, we get

$$U_{12}(t) = \int_0^\infty K^T(\tau) \left[\int_0^{t+\tau} W K(t+\tau-\theta) C e^{-A\theta} d\theta \right] d\tau.$$

Using exponential estimates (3.10) it is easy to prove that the order of integration can be changed and after some computations we obtain

$$U_{12}(t) = \int_0^\infty U^T(\theta) C e^{-A(\theta+t)} d\theta + \int_0^t U(t-\theta) C e^{-A\theta} d\theta.$$

the same expression as in lemma 3.7. Recall that in the exponentially stable case equation (3.7) has a unique solution, given by the matrix

$$L = U_{12}(0) = \int_0^\infty U^T(\theta) C e^{-A\theta} d\theta,$$

which also can be proven by a direct computation.

Since $U_{21}(t) = U_{12}^T(-t)$ we omit the corresponding calculations.

Likewise, one can obtain

$$U_{22}(t) = \int_0^\infty U_{12}^T(\theta) C e^{-A(\theta+t)} d\theta + \int_0^t U_{21}(\tau - \theta) C e^{-A\theta} d\theta.$$

Similarly, $M = U_{22}(0)$ is the unique solution of equation (3.8). Using the expression for $U_{12}^T(\theta)$ we obtain

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\infty U_{12}^T(\theta) C e^{-A\theta} d\theta = \\ &= \int_0^\infty e^{-A^T\theta} L^T C e^{-A\theta} d\theta + \int_0^\infty e^{-A^T\theta} C^T \left[\int_\theta^\infty U^T(\xi - \theta) C e^{-A\xi} d\xi \right] d\theta = \\ &= \int_0^\infty e^{-A^T\theta} \left[L^T C + C^T L \right] e^{-A\theta} d\theta. \end{aligned}$$

This is the usual formula for the solution of Lyapunov matrix equation (3.8) in the stable case.

3.5. Examples

Here we present two example of such systems that the nominal system admits a Lyapunov matrix, but for the extended system no Lyapunov matrix associated with $\bar{W}$ exists.

Consider first the following equation

$$\dot{x}(t) = x(t) + \int_{-1}^0 x(t+\theta) d\theta.$$

Suppose that for some $s_0 \in \mathbb{C}$ we have

$$s_0 = 1 + \int_{-1}^0 e^{s_0\theta} d\theta, \quad -s_0 = 1 + \int_{-1}^0 e^{-s_0\theta} d\theta.$$

Obviously, $s_0 = 0$ does not satisfy the above equations, hence

$$-1 = \int_{-1}^0 \cosh(s_0\theta) d\theta = \frac{\sinh(s_0)}{s_0},$$

and

$$s_0 = \int_{-1}^0 \sinh(s_0\theta) d\theta = \frac{1 - \cosh(s_0)}{s_0}.$$

Thus, $1 = \cosh^2(s_0) - \sinh^2(s_0) = s_0^4 - 3s_0^2 + 1$ and $s_0^2 = 3$. But the only real solution of the equation $-x = \sinh(x)$ is $x = 0$, a contradiction.

We conclude that the Lyapunov condition holds and there exists a unique Lyapunov matrix for $W = 1$; it has the form

$$U(t) = \alpha e^{\sqrt{3}t} + \beta e^{-\sqrt{3}t} - \frac{1}{6}, \quad t \in [0,1],$$

where

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{-e^{-\sqrt{3}}}{2-\sqrt{3}+e^{-\sqrt{3}}}, \quad \beta = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}+e^{-\sqrt{3}}}.$$

From equation (3.7) we obtain $-2L = -1/4$, or $L = 1/8$. Finally, by equation (3.8) we get $0M = 1/4$, which has no solutions. By theorem 3.9, no Lyapunov matrix associated with $\bar{W}$ exists.

Now, consider the equation

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}ex(t-1) + \int_{-1}^{0} e^{-\theta} x(t+\theta)d\theta.$$

It is easy to see that $s = A = -1$ is an eigenvalue of the above equation and that $s = 1$ is not an eigenvalue. Let us prove that the Lyapunov condition holds. Assuming the contrary, after some simplifications for a complex $s_0 \neq \pm 1$ we will have

$$3 - 2s_0 = e^{1-s_0}, \quad 3 + 2s_0 = e^{1+s_0}.$$

But then $9 - 4s_0^2 = e^2$ and $2s_0 = \pm\sqrt{9-e^2}$. It can be seen that neither of these values is an eigenvalue, so the Lyapunov condition holds.

The Lyapunov matrix associated with $W = 1$ has the form

$$U(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{-t} + \gamma e^{\sqrt{9-e^2}t/2} + \delta e^{-\sqrt{9-e^2}t/2}, \quad t \in [0,1],$$

where the expressions for α, β, γ, and δ can be found explicitly, but quite unwieldy. Equation (3.7) takes the form $0L = 1$ and has no solutions. Thus, in this example, too, no Lyapunov matrix associated with $\bar{W}$ exists.

Chapter 4. Lyapunov–Krasovskii functionals for linear systems with input delay

In this chapter we provide the complete type Lyapunov–Krasovskii functionals for the analysis of closed-loop systems with predictor-based control, based on the standard finite spectrum assignment method.

4.1. The construction of functionals

We start with the system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-h), \quad t \geq 0, \tag{4.1}$$

where $h > 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, and the matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ are such that the pair (A, B) is controllable. It is well-known (e. g. [57]) that the control law

$$u(t) = Ke^{Ah}x(t) + K\int_{-h}^{0} e^{-A\theta}Bu(t+\theta)d\theta \tag{4.2}$$

yields a closed-loop system with a finite number of eigenvalues satisfying the characteristic equation

$$\det[sI - A - BK] = 0.$$

Choose the matrix K so that all eigenvalues of the closed-loop system have negative real parts, which is possible as the pair (A, B) is assumed to be controllable. For $\theta \in [-h, 0]$ we need to define an initial function $u(\theta) = \psi(\theta)$, we assume that it is continuous : $\psi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^m)$.

At the same time, the implementation of control (4.2) is challenging, since it cannot be obtained by differentiating (4.2) and solving the resulting system of differential equations as it introduces the unstable factor $\det[sI - A]$ into the characteristic equation, nor can the integral in (4.2) be discretized since resulting controls may never stabilize system (4.1) no matter how many terms are used in a finite-sum approximation (see [30]).

In the paper [59] it was proposed to use the dynamic control

$$\dot{u}(t) = (F+KB)u(t)+(KA-FK)e^{Ah}x(t)+(KA-FK)\int_{-h}^{0} e^{-A\theta}Bu(t+\theta)d\theta, \tag{4.3}$$

that can be obtained by applying the differential operator $\frac{d}{dt} - F$ to both sides of (4.2). We will assume that the matrix $F \in \mathbb{R}^{m\times m}$ is stable. The spectrum of closed-loop system (4.1), (4.3) then coincides with the set of solutions of the equation

$$\det[sI - F]\det[sI - A - BK] = 0. \tag{4.4}$$

Thus, the dynamic control law also stabilizes the system, but the integral in (4.3) can be safely implemented by discretization [59].

Let us adopt the notations

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ (KA - FK)e^{Ah} & F + KB \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (KA - FK)e^{-A\theta}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ KA - FK \end{pmatrix} e^{-A\theta}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \end{pmatrix}.$$

Introducing new variables $z(t) = \binom{x(t)}{u(t)}$, we can see that closed-loop system (4.1), (4.3) has the form

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}_0 z(t) + \mathcal{A}_1 z(t-h) + \int_{-h}^{0} \mathcal{Q}(\theta)z(t+\theta)d\theta. \tag{4.5}$$

Remark 4.1. Since control (4.3) was obtained by applying the differential operator $\frac{d}{dt} - F$ to (4.2), any solution $(x(t), u(t))$ of system (4.1), (4.2) also satisfies system (4.1), (4.3). Thus, we can analyze solutions of (4.5) to draw conclusions about the behavior of the solutions of system (4.1), (4.2).

System (4.5) is an ordinary system with distributed delay, therefore, we can apply the standard results to define the Lyapunov–Krasovskii functionals expressed in terms of the corresponding Lyapunov matrix. Recall that the spectrum of the (4.5) system is governed by equation (4.4), that is, due to the above assumptions, the system is exponentially stable, which means that the Lyapunov matrix exists and is unique. Moreover, the kernel $\mathcal{Q}(\theta)$ of this system is of exponential type, and the problem of construction of the Lyapunov matrix for such systems was studied in detail in the last two chapters.

Let $W^{(0)}, W^{(1)}, W^{(2)}$ be any symmetric matrices, and let $U(t)$ be a unique Lyapunov matrix associated with $W = W^{(0)} + W^{(1)} + hW^{(2)}$, then we define a complete-type functional of the form (theorem 1.5)

$$v(\zeta) = \zeta^T(0)U(0)\zeta(0)+$$

$$+2\zeta^T(0)\int_{-h}^{0}\left[U(-h-\theta)\mathcal{A}_1+\int_{-h}^{\theta}U(\xi-\theta)\mathcal{Q}(\xi)d\xi\right]\zeta(\theta)d\theta+$$

$$+\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\zeta^T(\theta_1)\Bigg[\mathcal{A}_1^TU(\theta_1-\theta_2)\mathcal{A}_1+2\int_{-h}^{\theta_2}\mathcal{A}_1^TU(h+\theta_1-\theta_2+\xi)\mathcal{Q}(\xi)d\xi+$$

$$+\int_{-h}^{\theta_1}\int_{-h}^{\theta_2}\mathcal{Q}^T(\xi_1)U(\theta_1-\theta_2-\xi_1+\xi_2)\mathcal{Q}(\xi_2)d\xi_1d\xi_2\Bigg]\zeta(\theta_2)d\theta_1d\theta_2+$$

$$+\int_{-h}^{0}\zeta^T(\theta)[W^{(1)}+(h+\theta)W^{(2)}]\zeta(\theta)d\theta.$$

We will now give an explicit form of the functional. Partition

$$U(t)=\begin{pmatrix}U_{11}(t) & U_{12}(t)\\ U_{21}(t) & U_{22}(t)\end{pmatrix},$$

and assume that the matrix $W^{(0)}$ is positive definite and the matrices $W^{(1)}$ and $W^{(2)}$ have the form

$$W^{(i)}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & W_{22}^{(i)}\end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

where $W_{22}^{(i)}$ are positive definite, $i=1,2$, then we can write

$$v(x_0,\psi)=x_0^TU_{11}(0)x_0+2x_0^TU_{12}(0)\psi(0)+\psi^T(0)U_{22}(0)\psi(0)+$$

$$+2\int_{-h}^{0}[x_0^TU_{11}(-h-\theta)+\psi^T(0)U_{21}(-h-\theta)]B\psi(\theta)d\theta+$$

$$+2\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{\theta}[x_0^TU_{12}(\xi-\theta)+\psi^T(0)U_{22}(\xi-\theta)](KA-FK)e^{-A\xi}Bd\xi\psi(\theta)d\theta+$$

$$+\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\psi^T(\theta_1)B^T\Bigg[U_{11}(\theta_1-\theta_2)+$$

$$+2\int_{-h}^{\theta_2}U_{12}(h+\theta_1-\theta_2+\xi)(KA-FK)e^{-A\xi}d\xi$$

$$+\int_{-h}^{\theta_1}\int_{-h}^{\theta_2}e^{-A^T\xi_1}(KA-FK)^TU_{22}(\theta_1-\theta_2-\xi_1+\xi_2)\times$$

$$\times(KA-FK)e^{-A\xi_2}d\xi_1d\xi_2\Bigg]B\psi(\theta_2)d\theta_1d\theta_2+$$

$$+\int_{-h}^{0}\psi^T(\theta)\left[W_{22}^{(1)}+(h+\theta)W_{22}^{(2)}\right]\psi(\theta)d\theta. \tag{4.7}$$

By construction, along the solutions of system (4.5) it has the derivative

$$\frac{dv(x(t),u_t)}{dt} = -\begin{pmatrix} x^T(t) & u^T(t)\end{pmatrix} W^{(0)} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t)\end{pmatrix} - u^T(t-h)W_{22}^{(1)}u(t-h) - \\ - \int_{-h}^{0} u^T(t+\theta)W_{22}^{(2)}u(t+\theta)d\theta. \tag{4.8}$$

Let us explain the form of the matrices $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ selected in (4.6). By choosing the matrices in this way, we ensure that the value of both the functional and its derivative along the solutions of system (4.1), (4.2) depends only on the current position of $x(t)$, but not on the full state x_t. Thus, to calculate the value of the functional, it is no longer necessary to specify some "fictional" initial function for $x(t)$, which is not necessary to find solutions of system (4.1), (4.2) in the first place. However, some issues also arise. As is well-known (theorems 1.8 and 1.9), for positive definite $W^{(0)}, W^{(1)}$ and $W^{(2)}$ if system (4.5) is exponentially stable then there exist $\beta_1, \beta_2 > 0$ such that

$$\beta_1 \|\zeta(0)\|^2 + \beta_2 \int_{-h}^{0} \|\zeta(\theta)\|^2 d\theta \leq v(\zeta), \tag{4.9}$$

and there exist $\delta_1, \delta_2 > 0$ such that

$$v(\zeta) \leq \delta_1 \|\zeta(0)\|^2 + \delta_2 \int_{-h}^{0} \|\zeta(\theta)\|^2 d\theta. \tag{4.10}$$

The estimate 4.10 holds for any symmetric matrix $W^{(0)}, W^{(1)}, W^{(2)}$, and the functional $v(x_0, \psi)$ coincides with $v(\zeta)$ for matrices (4.6), but it is not so easy to apply the estimate from below to the functional $v(x_0, \psi)$. Indeed, the matrices $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ of form (4.6) are not positive definite, only positive semi-definite, which means that the results obtained for functionals of full type cannot be directly applied to functional (4.7). Further we will derive a new estimate for the obtained functional and will obtain new exponential estimates for solutions.

4.2. Exponential estimates

Lemma 4.1. *There exist $\delta_1, \delta_2 > 0$ such that for all $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\psi \in C([-h,0], \mathbb{R}^m)$ the following estimate holds:*

$$v(x_0, \psi) \leq \delta_1(\|x_0\|^2 + \|\psi(0)\|^2) + \delta_2 \int_{-h}^{0} \|\psi(\theta)\|^2 d\theta.$$

Proof. As was noted previously for the matrices $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ of form (4.6) we have $v(\zeta) = v(x_0, \psi)$. Clearly,

$$\|\zeta(0)\|^2 = \|x_0\|^2 + \|\psi(0)\|^2,$$

and since the initial function for $x(t)$ is not requited to obtain solutions of system (4.1), (4.3), we can assume that $x(t) = 0$ for $t < 0$ and $x(0) = x_0$, therefore

$$\int_{-h}^{0} \|\zeta(\theta)\|^2 d\theta = \int_{-h}^{0} \|\psi(\theta)\|^2 d\theta,$$

and the statement of the lemma follows from theorem 1.9. ■

Remark 4.2. Estimate (4.10) holds also for exponentially unstable systems, therefore lemma 4.1 also holds in the case of exponentially unstable system (4.1), (4.3). In such case it is only necessary that the Lyapunov matrix, associated with $W^{(0)} + W^{(1)} + hW^{(2)}$, exists for this system.

Lemma 4.2. *If system* (4.1), (4.3)*is exponentially stable then there exist* $\beta_1, \beta_2 > 0$ *such that for all* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\psi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^m)$ *the following estimate holds:*

$$v(x_0, \psi) \geq \beta_1(\|x_0\|^2 + \|\psi(0)\|^2) + \beta_2 \int_{-h}^{0} \|\psi(\theta)\|^2 d\theta.$$

Proof. Consider the functional

$$\bar{v}(x_0, \psi) = v(x_0, \psi) - \beta_1(\|x_0\|^2 + \|\psi(0)\|^2) - \beta_2 \int_{-h}^{0} \|\psi(\theta)\|^2 d\theta.$$

To prove the lemma it is enough to find some positive β_1, β_2 such that $\bar{v}(x_0, \psi) \geq 0$. Along the solutions of system (4.1), (4.3) this functional has the derivative:

$$\begin{gathered}
\frac{d\bar{v}(x(t), u_t)}{dt} = -x^T(t)W_{11}^{(0)}x(t) - 2x^T(t)W_{12}^{(0)}u(t) - \\
-u^T(t)W_{22}^{(0)}u(t) - u^T(t-h)W_{22}^{(1)}u^T(t-h) - \\
-\int_{-h}^{0} u^T(t+\theta)W_{22}^{(2)}u(t+\theta)d\theta - \\
-2\beta_1 x^T(t)[Ax(t) + Bu(t-h)] - 2\beta_1 u^T(t)[F + KB]u(t) - \\
-2\beta_1 u^T(t)[KA - FK]\left[e^{Ah}x(t) + \int_{-h}^{0} e^{-A\theta}Bu(t+\theta)d\theta\right] - \\
-\beta_2 u^T(t)Iu(t) + \beta_2 u^T(t-h)Iu(t-h).
\end{gathered}$$

Let us estimate the derivative as

$$\frac{d\bar{v}(x(t),u_t)}{dt} \leq -\begin{pmatrix} x(t) & u(t) & u(t-h) \end{pmatrix} R_1(\beta_1,\beta_2) \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ u(t-h) \end{pmatrix}$$
$$-\int_{-h}^{0} u^T(t+\theta) R_2(\theta,\beta_1) u(t+\theta) d\theta,$$

where

$$R_1(\beta_1,\beta_2) = \begin{pmatrix} W_{11}^{(0)} & W_{12}^{(0)} & \mathbf{0} \\ W_{21}^{(0)} & W_{22}^{(0)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$$
$$+\beta_1 \begin{pmatrix} A+A^T & e^{A^T h}[KA-FK]^T & B \\ [KA-FK]e^{Ah} & F+KB+[F+KB]^T - I & \mathbf{0} \\ B^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -I \end{pmatrix},$$
$$R_2(\theta,\beta_1) = W_{22}^{(2)} - \beta_1 B^T e^{-A^T\theta}[KA-FK]^T[KA-FK]e^{-A\theta}B.$$

If $\beta_1 = \beta_2 = 0$ then the matrices $R_1(\beta_1,\beta_2)$ и $R_2(\theta,\beta_1)$ are positive definite, hence for some small positive β_1,β_2 these matrices are also positive definite. For these values of β_1,β_2 we have $d\bar{v}(x(t),u_t)/dt \leq 0$, therefore

$$\bar{v}(x_0,\psi) = -\int_0^{\infty} \frac{d\bar{v}(x(t,x_0,\psi),u_t(x_0,\psi))}{dt} dt \geq 0,$$

since system (4.1), (4.3) is exponentially stable and the indefinite integral converges. We conclude that the lemma is proved. ■

We will these two inequalities to derive exponential estimates for solutions of system (4.1), (4.3), and, hence, for solutions of system (4.1), (4.2). From (4.8) we have

$$\frac{dv(x(t),u_t)}{dt} \leq -\lambda_{min}(W^{(0)})(\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2) - \lambda_{min}(W_{22}^{(2)}) \int_{-h}^{0} \|u_t(\theta)\| \, d\theta.$$

Choose $\sigma > 0$ such that

$$2\sigma\delta_1 \leq \lambda_{min}(W^{(0)}), \quad 2\sigma\delta_2 \leq \lambda_{min}(W_{22}^{(2)}),$$

where δ_1, δ_2 are as in lemma 4.2, therefore for $t > 0$ we have

$$\frac{dv(x(t), u_t)}{dt} + 2\sigma v(x(t), u_t) \leq 0.$$

Therefore, using the estimates from lemmas 4.1, 4.2 we get

$$\begin{gathered}\beta_1(\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2) \leq v(x(t), u_t) \leq v(x_0, \psi)e^{-2\sigma t} \leq \\ \leq [\delta_1 \|x_0\|^2 + (\delta_1 + \delta_2 h) \|\psi\|^2]e^{-2\sigma t} \leq \\ \leq (\delta_1 + \delta_2 h)[\|x_0\|^2 + \|\psi\|^2]e^{-2\sigma t}.\end{gathered}$$

Finally, we obtain the desired estimate

$$\sqrt{\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2} \leq \sqrt{\frac{\delta_1 + h\delta_2}{\beta_1}}\sqrt{\|x_0\|^2 + \|\psi\|^2}e^{-\sigma t}, \tag{4.11}$$

where $t \geq 0$.

Remark 4.3. In the paper [55] using a backstepping transformation a Lyapunov functional was constructed for the closed-loop system. However, it should be noted that this functional has a very special form. In contrast, the functional obtained in this chapter was obtained using the general theory of the complete type Lyapunov–Krasovskii functionals with a given derivative.

Remark 4.4. The construction of the functionals can be extended to the case with delays in both the state and control variables. The corresponding dynamical control and the issues concerning practical implementation of the controller for such systems were studied in [52]. However, not only the analysis becomes more cumbersome, but the dynamical system in this case no longer has an exponential kernel. Thus, some different (most likely approximate) method is required to compute the Lyapunov matrix. This will be done in chapter 6.

4.3. Example

Consider the system

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t-1).$$

Let $K = (-2, 0)$, then closed-loop with control (4.2) is stable with the eigenvalues

$-1 \pm i$. Let $F = -1$ and choose the matrices

$$W^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad W_{22}^{(1)} = W_{22}^{(2)} = 1/3,$$

so that $W = W^{(0)} + W^{(1)} + hW^{(2)} = I_3$. Using the method described in chapter 2 we can compute the Lyapunov matrix of closed-loop system (4.1), (4.3), the components are depicted in Figure 2.

We find that $\delta_1 \approx 2.40 \cdot 10^4$, $\delta_2 \approx 7.81 \cdot 10^5$, $\beta_1 \approx 0.03$, and select $\sigma = 2 \cdot 10^{-7}$, and estimate (4.11) yields

$$\sqrt{\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2} \leq 5.16 \cdot 10^3 \sqrt{\|x_0\|^2 + \|\psi\|^2} e^{-2 \cdot 10^{-7} t}.$$

It should be noted that this is very conservative estimate, given that the eigenvalues of $A + BK$ are $-1 \pm i$. However, varying $W^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ or F, different estimates on the solutions of system (4.1), (4.2) can be obtained. Thus, an optimization problem can be posed to get an optimal (in some sense) exponential estimate.

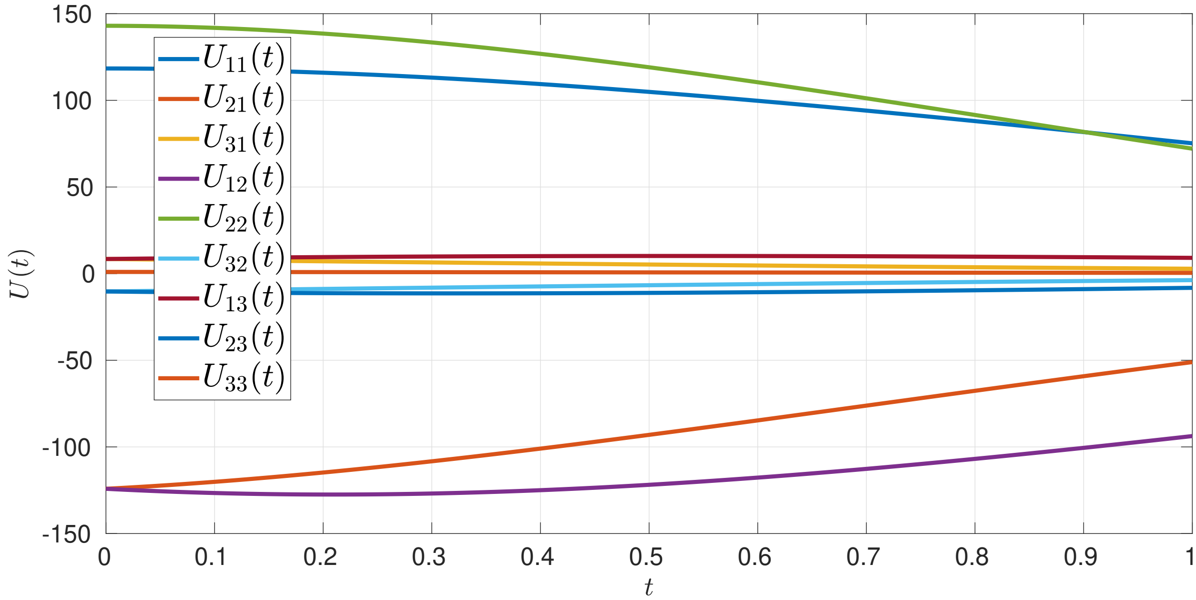

Figure 2: The components of the Lyapunov matrix

Chapter 5. Lyapunov matrices for a class of systems with piecewise-constant kernel

In this chapter we consider systems with distributed delay and piecewise-constant kernel. For such systems we introduce an auxiliary system of linear differential equations with boundary conditions and apply it to the problem of finding Lyapunov matrices.

5.1. Preliminaries

In this chapter we consider systems of the form

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t - jr) + \sum_{j=0}^{m-1} C_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} x(t+\theta)d\theta, \tag{5.1}$$

where $r > 0$, and the matrices $A_j, C_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Here the full delay of the system is $h = mr$.

Definition 1.7 for systems (5.1) has the form:

Definition 5.1. The continuous at $t = 0$ matrix function $U(t)$ is called a Lyapunov matrix of system (5.1), associated with a symmetric matrix W, if it satisfies

1. the dynamic property: for $t > 0$

$$U'(t) = \sum_{j=0}^{m} U(t - jr)A_j + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{-(j+1)r}^{-jr} U(t+\theta)C_j d\theta$$

2. the symmetric property: for $t \geq 0$

$$U(-t) = U^T(t),$$

3. the algebraic property:

$$U'(+0) - U'(-0) = -W.$$

It follows from the dynamic and symmetric properties that for $t < 0$

$$U'(t) = -\left[U'(-t)\right]^T = -\sum_{j=0}^{m} A_j^T U(t + jr) - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T \int_{jr}^{(j+1)r} U(t+\theta)d\theta. \tag{5.2}$$

Now the algebraic property can be explicitly rewritten as

$$\sum_{j=0}^{m}\left[U(-jr)A_j + A_j^T U(jr)\right] + \\ + \sum_{j=0}^{m-1}\left[\int_{-(j+1)r}^{-jr} U(\theta)C_j d\theta + C_j^T \int_{jr}^{(j+1)r} U(\theta)d\theta\right] = -W. \quad (5.3)$$

We consider the issue of construction of Lyapunov matrices for systems (5.1) constructively..

5.2. Auxiliary system

In this section we introduce an auxiliary boundary value problem, that allows to reduce the problem of finding the Lyapunov matrix of system (5.1) to the computation of solutions to a system of linear differential equations satisfying several additional conditions.

Assume that $U(t)$ is a Lyapunov matrix of system (5.1), associated with a symmetric matrix W. We define $4m-1$ auxiliary matrices:

$$\begin{aligned} Y_i(t) &= U(t+ir), & -m \le i \le m-1, \\ Z_i(t) &= \int_{(i-1)r}^{ir} U(t+\theta)d\theta, & -m+1 \le i \le m-1, \end{aligned} \quad (5.4)$$

where $t \in [0, r]$. Also define

$$Y(t) = \big(Y_{m-1}(t), \ldots, Y_{-m}(t)\big), \quad Z(t) = \big(Z_{m-1}(t), \ldots, Z_{-m+1}(t)\big).$$

Lemma 5.1. *Let $U(t)$ be a Lyapunov matrix of system (5.1), associated with a symmetric matrix W. Then the auxiliary matrices (5.4) satisfy the system of linear differential equations*

$$\begin{cases} Y_i'(t) = \sum_{j=0}^{m} Y_{i-j}(t)A_j + \sum_{j=0}^{m-1} Z_{i-j}(t)C_j, & 0 \le i \le m-1, \\ Y_i'(t) = -\sum_{j=0}^{m} A_j^T Y_{i+j}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T Z_{i+j+1}(t), & -m \le i \le -1, \\ Z_i'(t) = Y_i(t) - Y_{i-1}(t), & -m+1 \le i \le m-1, \end{cases} \quad (5.5)$$

and the boundary conditions

$$\begin{cases} Y_i(0) = Y_{i-1}(r), & -m+1 \le i \le m-1, \\ Z_i(0) = Z_{i-1}(r), & -m+2 \le i \le m-1, \\ Z_0(0) = \int\limits_0^r Y_{-1}(\xi)d\xi, & \\ \sum\limits_{j=0}^{m} \left[Y_{-j}(0)A_j + A_j^T Y_{j-1}(r)\right] + \sum\limits_{j=0}^{m-1} \left[Z_{-j}(0)C_j + C_j^T Z_j(r)\right] = -W. & \end{cases} \tag{5.6}$$

Proof. Equations (5.5) follow after substitution of definitions (5.4) into the dynamical property and equation (5.2). Boundary conditions (5.6) are obvious from definitions (5.4) and the algebraic property (5.3). ■

Lemma 5.2. *Any solution of system* (5.5), (5.6) *satisfies*

$$Z_i(0) = \int_0^r Y_{i-1}(\xi)d\xi, \quad Z_i(r) = \int_0^r Y_i(\xi)d\xi,$$

where $-m+1 \le i \le m-1$.

Proof. It is clear that the above equalities hold for $Z_0(0)$ и $Z_{-1}(r)$. Notice that

$$\begin{aligned} Z_1(0) = Z_0(r) = Z_0(0) + \int_0^r \left[Y_0(\xi) - Y_{-1}(\xi)\right] d\xi = \\ = \int_0^r Y_0(\xi)d\xi, \\ Z_{-2}(r) = Z_{-1}(0) = Z_{-1}(r) - \int_0^r \left[Y_{-1}(\xi) - Y_{-2}(\xi)\right] d\xi = \\ = \int_0^r Y_{-2}(\xi)d\xi, \end{aligned}$$

and the remaining equalities are similarly checked. ■

Corollary 5.3. *Any solution of system* (5.5), (5.6) *satisfies*

$$Z_i(t) = \int_0^t Y_i(\xi)d\xi + \int_t^r Y_{i-1}(\xi)d\xi.$$

Remark 5.1. The statements of lemma 5.2 and corollary 5.3 remain true for any solution of (5.5) which satisfies all of boundary conditions (5.6) except the last, since it was not used in the proof.

We remark that lemma 5.2 has the same role for systems (5.1) as lemma 2.2 has for systems (2.1). Indeed, it follows from lemma 5.2 that the integral condition used in (5.6) is equivalent to any other similar integral condition. Therefore, any of the conditions of lemma 5.2 can be used to construct the auxiliary system.

Lemma 5.4. *If $(Y(t), Z(t))$ is a solution of system (5.5), (5.6), then the matrix $U(t)$, defined by*

$$U(t) = \frac{1}{2}\left[Y_i(t-ir) + Y^T_{-i-1}\left((i+1)r-t\right)\right], \quad t \in [ir,(i+1)r], \quad 0 \leq i \leq m-1,$$

and $U(t) = U^T(-t)$ for $t < 0$, is a Lyapunov matrix, associated with W.

Proof. Firstly, notice that for $t = ir$ $(1 \leq i \leq m-1)$:

$$U(ir+0) = \frac{1}{2}\left[Y_i(0) + Y^T_{-i-1}(r)\right] = \frac{1}{2}\left[Y_{i-1}(r) + Y^T_{-i}(0)\right] = U(ir-0).$$

so that $U(t)$ is well defined. Since

$$U(0) = \frac{1}{2}\left[Y_0(0) + Y^T_{-1}(r)\right] = \frac{1}{2}\left[Y_{-1}(r) + Y^T_0(0)\right] = U(0)^T,$$

the function $U(t)$ is continuous and satisfies the symmetric property.

Consider $t \in [ir,(i+1)r]$, the application of corollary 5.3 yields

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[Z_{i-j}(t-ir) + Z^T_{j-i}((i+1)r-t)\right] &= \frac{1}{2}\int_0^{t-ir}\left[Y_{i-j}(\xi) + Y^T_{j-i-1}(r-\xi)\right]d\xi = \\ &+ \frac{1}{2}\int_{t-ir}^{r}\left[Y_{i-j-1}(\xi) + Y^T_{j-i}(r-\xi)\right]d\xi = \\ &= \int_{(i-j)r}^{t-jr} U(\theta)d\theta + \int_{t-(j-1)r}^{(i-j)r} U(\theta)d\theta = \\ &= \int_{-(j-1)r}^{-jr} U(t+\eta)d\eta.\end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}U'(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[Y_i(t-ir) + Y^T_{-i-1}\left((i+1)r-t\right)\right] = \\ &= \sum_{j=0}^{m} U(t-jr)A_j + \sum_{j=0}^{m-1}\int_{-(j+1)r}^{-jr} U(t+\eta)C_j d\eta.\end{aligned}$$

Since the right-hand side of the equality doesn't depend on i and $U(t)$ is continuous, it follows that $U'(t)$ is also continuous, which implies that the dynamic property holds.

The algebraic property is readily verified. Indeed,

$$\begin{aligned} U'(+0) - U'(-0) &= \frac{1}{2}\left[Y_0'(0) - Y_{-1}'^T(r)\right] - \frac{1}{2}\left[Y_{-1}'(r) - Y_0'^T(0)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[Y_0'(0) - Y_{-1}'(r)\right] + \frac{1}{2}\left[Y_0'(0) - Y_{-1}'(r)\right]^T = \\ &= -\frac{1}{2}W - \frac{1}{2}W^T = -W. \end{aligned}$$

∎

Theorem 5.5. *Assume that system* (5.5), (5.6) *has a unique solution, then the matrix* $U(t)$ *defined by*

$$U(t) = Y_i(t - ir), \quad t \in [ir, (i+1)r], \quad 0 \le i \le m-1,$$

and $U(t) = U^T(-t)$ *for* $t < 0$, *is a unique Lyapunov matrix of* (5.1), *associated with* W.

Proof. The uniqueness of the Lyapunov matrix is obvious, because the auxiliary matrices obtained from (5.4) are different for different $U(t)$, and by lemma 5.1 satisfy auxiliary system (5.5), (5.6). Let us prove that $U(t)$ can be found as in the statement of the theorem.

Let $(Y(t), Z(t))$ be the solution of the auxiliary system. Consider the matrices

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_i(t) &= Y_{-i-1}^T(r - t), \quad -m \le i \le m-1, \\ \tilde{Z}_i(t) &= Z_{-i}^T(r - t), \qquad -m+1 \le i \le m-1. \end{aligned}$$

Then for $i \ge 0$ we have

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_i'(t) &= -\left[Y_{-i-1}'(r-t)\right]^T = \\ &= \sum_{j=0}^{m} Y_{j-i-1}^T(r-t)A_j + \sum_{j=0}^{m-1} Z_{j-i}^T(r-t)C_j = \\ &= \sum_{j=0}^{m} \tilde{Y}_{i-j}(t)A_j + \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{Z}_{i-j}(t)C_j, \end{aligned}$$

while $i < 0$ we get

$$\tilde{Y}_i'(t) = -\left[Y_{-i-1}'(r-t)\right]^T =$$

$$= -\sum_{j=0}^{m} A_j^T Y_{-i-1-j}^T(r-t) - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T Z_{-i-j-1}^T(r-t) =$$
$$= -\sum_{j=0}^{m} A_j^T \tilde{Y}_{i+j}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T \tilde{Z}_{i+j+1}^T(t),$$

and finally

$$\tilde{Z}_i'(t) = -\left[Z_{-i}'(r-t)\right]^T = -Y_{-i}^T(r-t) + Y_{-i-i}^T(r-t) =$$
$$= \tilde{Y}_i(t) - \tilde{Y}_{i-1}(t).$$

Furthermore, for all indices i in (5.6) we obtain

$$\tilde{Y}_i(0) = Y_{-i-1}^T(r) = Y_{-i}^T(0) = \tilde{Y}_{i-1}(r),$$
$$\tilde{Z}_i(0) = Z_{-i}^T(r) = Z_{-i+1}^T(0) = \tilde{Z}_{i-1}(r).$$

It can be seen easily that

$$\tilde{Z}_0(0) = Z_0^T(r) = \int_0^r Y_0^T(\theta)d\theta = \int_0^r \tilde{Y}_{-1}(\theta)d\theta.$$

Finally,

$$\tilde{Y_0}'(0) - \tilde{Y}_{-1}'(r) = \left[-Y_{-1}'(r) + Y_0'(0)\right]^T = W^T = W.$$

Therefore, $(\tilde{Y}(t), \tilde{Z}(t))$ is a solution of (5.5), (5.6). But the auxiliary system admits a unique solution, hence $Y_i(t) = Y_{-i-1}^T(r-t)$, $Z_i(t) = Z_{-i}^T(r-t)$, and lemma 5.4 implies the statement of the theorem. ∎

5.3. Matrix representation of the auxiliary system

The main purpose of this section is to show how the problem of finding a solution of the auxiliary system can be reduced to solving a system of linear algebraic equations. First let us introduce some notation.

Let $\mathcal{A}_i = A_i^T \otimes I$, $\mathcal{C}_i = C_i^T \otimes I$, $\mathfrak{A}_i = I \otimes A_i^T$, $\mathfrak{C}_i = I \otimes C_i^T$, $y_i(t) = \mathrm{vect}(Y_i(t))$, $z_i(t) = \mathrm{vect}(Z_i(t))$ and

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_{m-1}(t) \\ \vdots \\ y_{-m}(t) \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} z_{m-1}(t) \\ \vdots \\ z_{-m+1}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \dots & I & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

where $\mathcal{E}_i$ consists of $4m-1$ blocks, with the identity matrix E being on the ith place. Vectorizing system (5.5) we obtain

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} A & C \\ D & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

where A is a square matrix of order $2mn^2$, C and D have orders $2mn^2 \times (2m-1)n^2$ and $(2m-1)n^2 \times 2mn^2$, respectively:

$$A = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_0 & \dots & \mathcal{A}_{m-1} & \mathcal{A}_m & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathcal{A}_0 & \mathcal{A}_1 & \dots & \mathcal{A}_m \\ -\mathfrak{A}_m & \dots & -\mathfrak{A}_1 & -\mathfrak{A}_0 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & -\mathfrak{A}_m & -\mathfrak{A}_{m-1} & \dots & -\mathfrak{A}_0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_0 & \dots & \mathcal{C}_{m-1} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathcal{C}_0 & \dots & \mathcal{C}_{m-1} \\ -\mathfrak{C}_{m-1} & \dots & -\mathfrak{C}_0 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & -\mathfrak{C}_{m-1} & \dots & -\mathfrak{C}_0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} I & -I & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & -I & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & I & -I \end{bmatrix}.$$

Boundary conditions (5.6) have the form

$$M\begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + \tilde{N}\int_0^r \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} dt + N\begin{pmatrix} y(r) \\ z(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -w \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

where $w = \mathrm{vect}(W)$, $\tilde{N} = -\mathcal{E}_{4m-2}^T \mathcal{E}_{m+1}$ and

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} y_{m-1} & \dots & y_0 & \dots & y_{-m+1} & y_{-m} & z_{m-1} & \dots & z_0 & \dots & z_{-m+2} & z_{-m+1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} I & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & I & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & I & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & I & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathcal{A}_0 & \dots & \mathcal{A}_{m-1} & \mathcal{A}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathcal{C}_0 & \dots & \mathcal{C}_{m-2} & \mathcal{C}_{m-1} \end{bmatrix} \end{array},$$

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} y_{m-1} & y_{m-2} & \dots & y_{-1} & \dots & y_{-m} & z_{m-1} & z_{m-2} & \dots & z_0 & \dots & z_{-m+1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -I & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -I & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -I & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -I & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & -I \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathfrak{A}_m & \mathfrak{A}_{m-1} & \dots & \mathfrak{A}_0 & \dots & \mathbf{0} & \mathfrak{C}_{m-1} & \mathfrak{C}_{m-2} & \dots & \mathfrak{C}_0 & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Applying lemma 2.7 we can compute the integral term in (5.8). Now, system

(5.7), (5.8) can be reduced to the system of linear equations:

$$\underbrace{\left[M + \begin{pmatrix} -\mathcal{E}_{4m-2}^T & N \end{pmatrix} \exp\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{E}_{m+1} \\ \mathbf{0} & L \end{pmatrix} r \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ I \end{pmatrix}\right]}_{X} \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ w \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Obviously, the system (5.5), (5.6) has a unique solution if and only if $\det X \neq 0$.

5.4. Uniqueness of solutions

We will show that the Lyapunov condition ensures that the auxiliary problem is going to have a unique solution. Similarly to systems of form (2.1), we start from one helpful lemma.

Lemma 5.6. *Any solution of* (5.5), (5.6) *with* $W = \mathbf{0}$ *satisfies*

$$Y_i(t) = Y_{i-1}(t+r), \quad -m+1 \leq i \leq m-1,$$
$$Z_i(t) = Z_{i-1}(t+r), \quad -m+2 \leq i \leq m-1.$$

Proof. The proof of this lemma follows along the same lines as the proof of lemma 2.8. Since any solution of (5.5) an analytic function on $\mathbb{R}$, it has derivatives of all orders.

By taking the derivative of (5.5), we obtain that the functions $(Y'(t), Z'(t))$ also satisfy system (5.5). We will show that the boundary conditions (5.6) with $W = \mathbf{0}$ are also satisfied. From (5.5), (5.6), we get

$$Z_i'(0) = Z_{i-1}'(r)$$
$$Y_i'(0) = Y_{i-1}'(r), \quad i \neq 0.$$

Since $W = \mathbf{0}$, it follows that

$$Y_0'(0) - Y_{-1}'(r) = \sum_{j=0}^{m} \left[Y_{-j}(0)A_j + A_j^T Y_{j-1}(r)\right] + \sum_{j=0}^{m-1} \left[Z_{-j}(0)C_j + C_j^T Z_j(r)\right] = \mathbf{0}.$$

Also,

$$Z_0'(0) = Y_0(0) - Y_{-1}(0) = Y_{-1}(r) - Y_{-1}(0) = \int_0^r Y_{-1}'(\xi)d\xi.$$

Now we must only prove the last boundary condition. We obtain that

$$\sum_{i=1}^{m} Y'_{-i}(0)A_i = -\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=0}^{m} A_j^T Y_{-i+j}(0) + \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T Z_{-i+j+1}(0)\right] A_i =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} A_0^T Y_{-i}(0)A_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} A_j^T Y_{j-i}(0)A_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1} C_j^T Z_{j-i+1}(0)A_i,$$

similarly,

$$\sum_{i=1}^{m} A_i^T Y'_{i-1}(r) = \sum_{i=1}^{m} A_i^T \left[\sum_{j=0}^{m} Y_{i-j-1}(r)A_j + \sum_{j=0}^{m-1} Z_{i-j-1}(r)C_j\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} A_i^T Y_{i-1}(r)A_0 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} A_i^T Y_{i-j-1}(r)A_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1} A_i^T Z_{i-j-1}(r)C_j.$$

Note that

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} A_j^T Y_{j-i}(0)A_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} A_i^T Y_{i-j-1}(r)A_j.$$

We also have the following terms

$$A_0^T Y'_{-1}(r) = A_0^T Y'_0(0) = A_0^T Y_0(0)A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_0^T Y_{-i}(0)A_i + \sum_{j=0}^{m-1} A_0^T Z_{-j}(0)C_j,$$

$$Y'_0(0)A_0 = Y'_{-1}(r)A_0 = -A_0^T Y_{-1}(r)A_0 - \sum_{i=1}^{m} A_i^T Y_{i-1}(r)A_0 - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T Z_j(r)A_0.$$

As $Y_0(0) = Y_{-1}(r)$, we get

$$\sum_{i=0}^{m}\left[Y'_{-i}(0)A_i + A_i^T Y'_{i-1}(r)\right] + \sum_{j=0}^{m-1}\left[Z'_{-j}(0)C_j + C_j^T Z'_j(r)\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1}\left[Z'_{-j}(0) + A_0^T Z_{-j}(0) + \sum_{i=1}^{m} A_i^T Z_{i-j-1}(r)\right] C_j +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T \left[Z'_j(r) - Z_j(r)A_0 - \sum_{i=1}^{m} Z_{j-i+1}(0)A_i\right].$$

Using lemma 5.2 and remark 5.1, we transform the expressions in square brackets:

$$Z'_{-j}(0) + A_0^T Z_{-j}(0) + \sum_{i=1}^{m} A_i^T Z_{i-j-1}(r) = \int_0^r \left[Y'_{-j-1}(\xi) + \sum_{i=0}^{m} A_i^T Y_{i-j-1}(\xi)\right] d\xi =$$

$$= -\sum_{l=0}^{m-1}\int_0^r C_l^T Z_{l-j}(\xi)d\xi,$$

$$Z_j'(r) - Z_j(r)A_0 - \sum_{i=1}^{m} Z_{j-i+1}(0)A_i = \int_0^r \left[Y_j'(\xi) - \sum_{i=0}^{m} Y_{j-i}(\xi)A_i \right] d\xi =$$
$$= \sum_{l=0}^{m-1} \int_0^r Z_{j-l}(\xi)C_l d\xi.$$

Substituting these expressions, we get

$$-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1} \int_0^r C_l^T Z_{l-j}(\xi)C_j d\xi + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1} \int_0^r C_j^T Z_{j-l}(\xi)C_l d\xi = \mathbf{0}.$$

We obtain by induction that $(Y^{(k)}(t), Z^{(k)}(t))$ is a solution of (5.5), (5.6) for all $k \geq 0$. In particular, for all $k \geq 0$ we have

$$Y_i^{(k)}(0) = Y_{i-1}^{(k)}(r), \quad -m+1 \leq i \leq m-1,$$
$$Z_i^{(k)}(0) = Z_{i-1}^{(k)}(r), \quad -m+2 \leq i \leq m-1.$$

The statement of the lemma follows from the analyticity of the functions $Y_i(t)$, $Z_i(t)$. ■

By the previous lemma and corollary 5.3 we get

Corollary 5.7. *Let* $(Y(t), Z(t))$ *be a solution of* (5.5), (5.6) *with* $W = \mathbf{0}$, *then*

$$Z_i(t) = \int_{-r}^{0} Y_i(t+\theta)d\theta,$$

where $-m+1 \leq i \leq m-1$.

Theorem 5.8. *The following statements are equivalent:*

1. *There exists a unique solution to auxiliary system* (5.5), (5.6).
2. *There exists a unique Lyapunov matrix of system* (5.1), *associated with* W.
3. *System* (5.1) *satisfies the Lyapunov condition.*

Proof. The proof is similar to the proof of theorem 5.8.

In theorem 5.5 it was shown that statement 1 implies statement 2. The fact that statements 2 and 3 are equivalent is known for all linear time-invariant delay systems (theorem 1.6). We are going to show that statement 3 implies statement 1. Assume that the Lyapunov condition holds. Earlier it was established that system (5.5), (5.6) has a unique solution iff system of linear algebraic equations (5.9) has a unique solution, which, in turns, holds iff the homogeneous system has only zero solution. Assume the converse, that is suppose that there exists a non-zero solution $(Y(0), Z(0)) \neq \mathbf{0}$ of (5.9) with $w = \mathbf{0}$. Hence system (5.5), (5.6) with $W = \mathbf{0}$ admits a non-trivial solution $(Y(t), Z(t))$.

First note that at least one of $Y_i(t) \equiv \mathbf{0}$. Indeed, otherwise by corollary 5.7 also all $Z_i(t) \equiv \mathbf{0}$, which contradicts non-triviality of the solution. By lemma 5.6 it follows that all $Y_i(t) \not\equiv \mathbf{0}$.

Every solution of (5.5) can be represented as

$$\begin{aligned} Y_i(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \mathcal{P}_{i,k}(t), \quad -m \le i \le m-1, \\ Z_i(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \mathcal{Q}_{i,k}(t), \quad -m+1 \le i \le m-1, \end{aligned} \tag{5.10}$$

where $s_1, \ldots, s_\nu$ are distinct eigenvalues of (5.5); $\mathcal{P}_{i,k}(t)$, $\mathcal{Q}_{i,k}(t)$ are polynomials with matrix coefficients. Since $Y_0(t) \not\equiv 0$, for some d, the polynomial $\mathcal{P}_{0,d}(t) \not\equiv 0$. Let $\deg \mathcal{P}_{0,d} = l$:

$$\mathcal{P}_{0,d}(t) = P_0 t^l + P_1 t^{l-1} + \ldots + P_l,$$

with $P_0 \neq \mathbf{0}$. By corollary 5.7

$$\sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \mathcal{Q}_{0,k}(t) = Z_0(t) = \int_{-r}^{0} Y_0(t+\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \int_{-r}^{0} e^{s_k \theta} \mathcal{P}_{0,k}(t+\theta) d\theta.$$

Thus, $\deg \mathcal{Q}_{0,d}(t) \le l$, and its coefficient for t^l has form

$$P_0 \int_{-r}^{0} e^{s_d \theta} d\theta.$$

Applying lemma 5.6 we conclude that $Y_i(t) = Y_0(t+ir)$, $Z_i(t) = Z_0(t+ir)$, therefore $\deg \mathcal{P}_{i,d} = l$ and its leading coefficient is $P_0 e^{s_d ir}$, and $\deg \mathcal{Q}_{i,d} \le l$, where coefficient for t^l is

$$P_0 e^{s_d ir} \int_{-r}^{0} e^{s_d \theta} d\theta = P_0 \int_{(i-1)r}^{ir} e^{s_d \xi} d\xi.$$

Substituting expressions (5.10) into (5.5) results in

$$\sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \left[s_k \mathcal{P}_{0,k}(t) + \mathcal{P}'_{0,k}(t) \right] = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \left[\sum_{j=0}^{m} \mathcal{P}_{-j,k}(t) A_j + \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{Q}_{-j,k}(t) C_j \right],$$

$$\sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\left[s_k \mathcal{P}_{-1,k}(t) + \mathcal{P}'_{-1,k}(t)\right] = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\left[-\sum_{j=0}^{m} A_j^T \mathcal{P}_{j-1,k}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T \mathcal{Q}_{j,k}(t)\right].$$

Since all eigenvalues $s_1, \ldots, s_\nu$ are distinct, the preceding equality implies that

$$s_d \mathcal{P}_{0,d}(t) + \mathcal{P}'_{0,d}(t) = \sum_{j=0}^{m} \mathcal{P}_{-j,d}(t) A_j + \sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{Q}_{-j,d}(t) C_j,$$

$$s_d \mathcal{P}_{-1,d}(t) + \mathcal{P}'_{-1,d}(t) = -\sum_{j=0}^{m} A_j^T \mathcal{P}_{j-1,d}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T \mathcal{Q}_{j,d}(t).$$

Therefore, for terms with degree l we obtain

$$s_d P_0 = P_0 \left[\sum_{j=0}^{m} A_j e^{-s_d j r} + \sum_{j=0}^{m-1} C_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{s_d \xi} d\xi\right],$$

$$-s_d P_0 e^{-s_d r} = \left[\sum_{j=0}^{m} A_j^T e^{s_d j r} + \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T \int_{(j-1)r}^{jr} e^{s_d(\xi + r)} d\xi\right] P_0 e^{-s_d r}.$$

Since $P_0 \neq \mathbf{0}$, we conclude that

$$\det\left[s_d I - \sum_{j=0}^{m} A_j e^{-s_d j r} - \sum_{j=0}^{m-1} C_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{s_d \xi} d\xi\right] = 0,$$

$$\det\left[-s_d I - \sum_{j=0}^{m} A_j e^{s_d j r} - \sum_{j=0}^{m-1} C_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{-s_d \eta} d\eta\right] = 0.$$

Thus, $s_d \in \Lambda$. In the same way, considering equation for $Y'_{-1}(t)$ in system (5.5), one can obtain that $-s_d \in \Lambda$. Consequently, the system does not satisfy the Lyapunov condition. This contradiction proves the theorem. ■

5.5. Example

In [36], the following system was considered:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + C_0 \int_{-r}^{0} x(t+\theta) d\theta + C_1 \int_{-2r}^{-r} x(t+\theta) d\theta, \tag{5.11}$$

where

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1.5 & 0 \\ 0.5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In the paper [36] it was shown that system (5.11) is exponentially stable for $r \in [0, 1)$.

Auxiliary system (5.5) has the form

$$\begin{cases} Y_1'(t) = Y_1(t)A_0 + Z_1(t)C_0 + Z_0(t)C_1, \\ Y_0'(t) = Y_0(t)A_0 + Z_0(t)C_0 + Z_{-1}(t)C_1, \\ Y_{-1}'(t) = -A_0^T Y_{-1}(t) - C_0^T Z_0(t) - C_1^T Z_1(t), \\ Y_{-2}'(t) = -A_0^T Y_{-2}(t) - C_0^T Z_{-1}(t) - C_1^T, \\ Z_1'(t) = Y_1'(t) - Y_0'(t), \\ Z_0'(t) = Y_0'(t) - Y_{-1}'(t), \\ Z_{-1}'(t) = Y_{-1}'(t) - Y_{-2}'(t), \end{cases}$$

while boundary conditions (5.6) has the form

$$\begin{cases} Y_1(0) = Y_0(r), \\ Y_0(0) = Y_{-1}(r), \\ Y_{-1}(0) = Y_{-2}(r), \\ Z_1(0) = Z_0(r), \\ Z_0(0) = Z_{-1}(r), \\ Z_0(0) = \int\limits_0^r Y_{-1}(\xi)d\xi, \\ Y_0(0)A_0 + A_0^T Y_{-1}(r) + Z_0(0)C_0 + C_0^T Z_0(r) + Z_{-1}(0)C_1 + C_1^T Z_1(r) = -W. \end{cases}$$

In this case, we obtain linear system (5.9) with matrix X of order 28×28. In the interval $[0, 1.05]$ the determinant of matrix X vanishes only at $r = 1$ (Figure 3). Since system (5.11) is obviously stable for $r = 0$, the eigenvalues of (5.11) depend continuously on r and by Theorem 5.8 the auxiliary system has non-unique solution if and only if the Lyapunov condition is not satisfied, we conclude that system (5.11) is exponentially stable for all $r \in [0, 1)$. This result coincides with that obtained in [36]. The Lyapunov matrix of system (5.11) for $r = 0.5$ and $W = I$ is depicted in Figure 4.

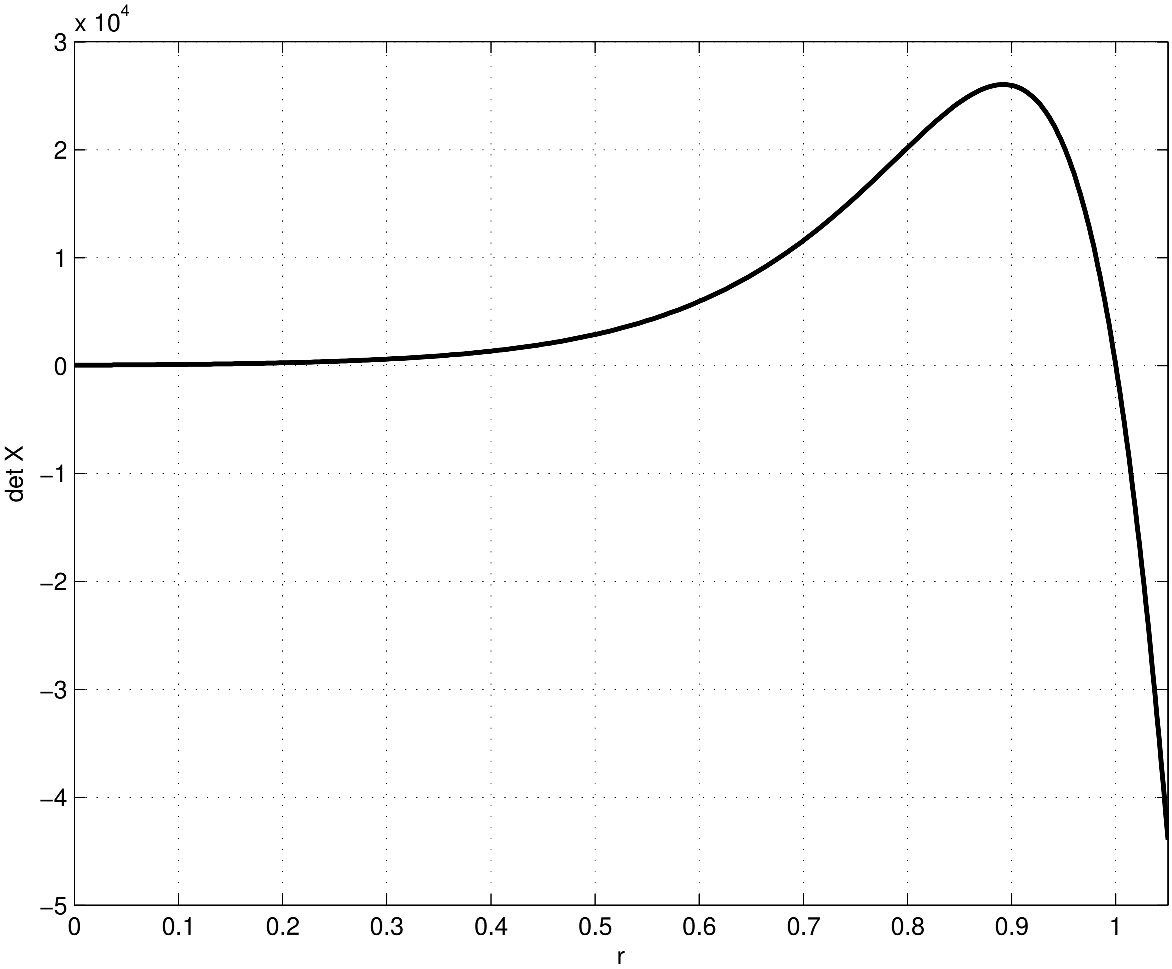

Figure 3: Determinant of matrix X

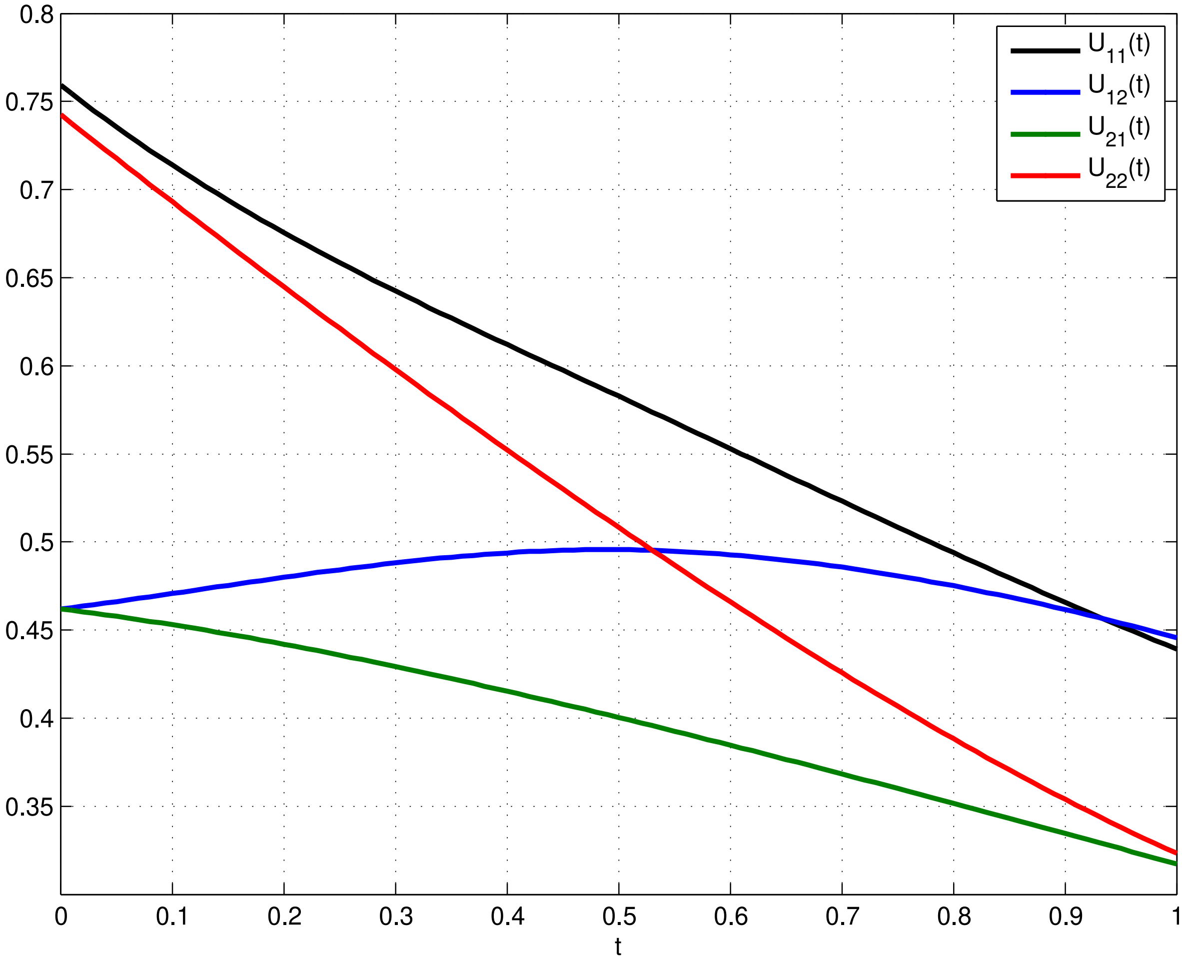

Figure 4: Components of $U(t)$, $r = 0.5$

Chapter 6. Continuous dependence of Lyapunov matrices with respect to perturbations

In this chapter, we will prove that small perturbations of the right-hand sides of time-delay systems lead to small changes in their corresponding Lyapunov matrices. In particular, this opens up the possibility of constructing the Lyapunov matrix of an arbitrary system with a given accuracy by approximating its right-hand side with a system, for which the Lyapunov matrix can be found analytically.

6.1. Preliminaries

Consider the system

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^{0} dQ(\theta)x(t+\theta), \tag{6.1}$$

where the delay $h > 0$, and $Q(\theta)$ is a matrix function $[-h, 0] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ such that every component of Q is a function of bounded variation. To denote this we will write $Q \in BV([-h, 0], \mathbb{R}^{n\times n})$ and say that Q is a matrix function of bounded variation. As is well known, Q is continuous on $[-h, 0]$ except for at most a countable set of jump discontinuities.

Remark 6.1. Clearly the right-hand side of system (6.1) defines a linear continuous functional on the space $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. The reverse is also true. As a corollary to the Riesz representation theorem it follows that every system of the form $\dot{x}(t) = l(x_t)$ can be expressed in the form (6.1) with some matrix function Q of bounded variation, where l is a linear continuous functional from $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ to $\mathbb{R}^n$ and x_t is the state, that is the function $[-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ defined by $\theta \mapsto x(t+\theta)$.

However the correspondence mentioned in the previous remark is not one-to-one. Indeed, if the equality

$$\int_{-h}^{0} dQ_1(\theta)f(\theta) = \int_{-h}^{0} dQ_2(\theta)f(\theta),$$

holds for every $f \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ one can only conclude that there exists a constant matrix C such that $Q_1(\theta) = Q_2(\theta) + C$ for all $\theta \in [-h, 0]$ except for at most a countable set of points. In view of this fact, we restrict our attention only to matrix functions of bounded variation Q normalized in a some way.

We say that Q is a normalized function of bounded variation on $[-h, 0]$, and write $Q \in NBV([-h,0], \mathbb{R}^{n\times n})$, if $Q \in BV([-h,0], \mathbb{R}^{n\times n})$, $Q(-h) = \mathbf{0}$, and $Q(\theta)$ is continuous from the left for all $\theta \in (-h, 0)$. Now every linear functional from $C([-h,0], \mathbb{R}^n)$ to $\mathbb{R}^n$ defines one function of normalized bounded variation $Q \in NBV([-h,0], \mathbb{R}^{n\times n})$ and vice versa.

Let us clarify the above definition. The condition $Q(-h) = \mathbf{0}$ is to some extent arbitrary, though it does allow to simplify certain calculations later. It is known the integral $\int_{-h}^{0} dQf$ is defined when the functions Q и f do not have common points of discontinuity such that they are simultaneously on the left (or on the right). Thus, if the function Q is continuous from the left, the integral $\int_{-h}^{0} dQK_t$ exists for $t > 0$, where K is the fundamental solution of system (6.1).

Let $P : -h = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 0$ be a partition of $[-h, 0]$. Supremum of

$$\sum_{k=1}^{m} \|Q(x_k) - Q(x_{k-1})\|,$$

taken over all possible partitions is called the total variation of the matrix function Q and is denoted by $\mathsf{V}Q$. It can be shown that $\mathsf{V}Q < \infty$ iff Q is of bounded variation (as defined previously), thus these two definitions coincide. It can be seen easily that

$$\left\| \int_{-h}^{0} dQ(\theta) f(\theta) \right\| \leq \|f\|_h \mathsf{V}Q.$$

Theorem 1.6 allows us to define a mapping $\mathcal{L} : Q \mapsto U$ having the domain

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{Q \in NBV([-h,0], \mathbb{R}^{n\times n}) : \text{the Lyapunov condition is satisfied}\}.$$

Now we are ready to state the main result of the chapter:

Theorem 6.1. *Let $Q, Q_k \in NBV([-h,0], \mathbb{R}^{n\times n})$, $k = 1, 2, \ldots$, $Q \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ and suppose that*

1. *$Q_k(0)$ converges to $Q(0)$,*
2. *$(Q_k)_1^\infty$ converges to Q in L^1-norm, that is:*

$$\int_{-h}^{0} \|Q_k(\theta) - Q(\theta)\| \, d\theta \to 0,$$

then there exists a number N_1 such that for all $k \geq N_1$ we have $Q_k \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, and for any $\varepsilon > 0$, however small, there exists a number $N_2 \geq N_1$, such that for all $k \geq N_2$ the following inequality holds:

$$\max_{t\in[-h,h]} \|U(t) - U_k(t)\| < \varepsilon,$$

where $U = \mathcal{L}(Q)$ u $U_k = \mathcal{L}(Q_k)$.

Hence, to obtain the Lyapunov matrix of the nominal system, we can consider a sequence of approximate systems, and their Lyapunov matrices would approximate the nominal Lyapunov matrix.

It is also interesting to consider the issue of the continuity of the mapping $\mathcal{L}$. One would think that this problem is closely related to the choice of topologies on $NBV([-h, 0], \mathbb{R}^{n\times n})$ and $C([-h, h], \mathbb{R}^{n\times n})$. The relation of the 6.1 theorem to this issue will be considered later.

6.2. The Lyapunov condition

We start by establishing the first part of theorem 6.1, that is we will show that from some N_1 all terms of the sequence $(Q_k)_1^{\infty}$, converging to $Q \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ in the sense of theorem 6.1, satisfy the Lyapunov condition. Let us adopt the notation

$$F(s) = sI - \int_{-h}^{0} e^{s\theta} dQ(\theta),$$

for the characteristic matrix of system (6.1), $H(s) = F^{-1}(s)$ for its inverse, $f(s) = \det F(s)$ for the characteristic function and $\Lambda = \{s \in \mathbb{C} : f(s) = 0\}$ for the spectrum, that is for the set of all eigenvalues of the system (6.1). Similar notations, but with index k, are used for the systems with the kernels Q_k.

We start this section with some results concerning the behavior of characteristic matrices and functions. First, using integration by parts we rewrite $F(s)$ in the form

$$F(s) = sI - Q(0) + s\int_{-h}^{0} Q(\theta)e^{s\theta} d\theta. \tag{6.2}$$

Lemma 6.2. *For every $\alpha \in \mathbb{R}$ there exists $R(\alpha) > 0$, such that for all eigenvalues $s \in \Lambda$ with $\operatorname{Re} s \geq \alpha$ we have $|s| \leq R(\alpha)$.*

Proof. If $s \in \Lambda$, then for some vector $\gamma \neq \mathbf{0}$ we have

$$s\gamma = \int_{-h}^{0} e^{s\theta} dQ(\theta)\gamma,$$

and thus

$$|s| \leq \left\| \int_{-h}^{0} e^{s\theta} dQ(\theta) \right\| \leq \max\{1, e^{-h\alpha}\} \mathsf{V} Q = R(\alpha). \qquad \blacksquare$$

The following corollary is quite useful.

Corollary 6.3. *The set Λ_+ is finite.*

Proof. By Lemma 6.2 every eigenvalue $s_0 \in \Lambda_+$ is inside the circle $|s| \leq R(0)$. But the analytic function $f(s)$ can have only finite number of zeros on any compact set, hence the assertion follows. $\blacksquare$

Lemma 6.4. *For every $\alpha \in \mathbb{R}$ the inequality*

$$\|H(s)\| \leq \frac{1}{|s| - R(\alpha)},$$

is satisfied, where $s \in \mathbb{C}$ with $|s| > R(\alpha)$ and $\operatorname{Re} s \geq \alpha$.

Proof. Indeed, if $|s| > R(\alpha)$ and $\operatorname{Re} s \geq \alpha$, then the matrix $H(s)$ is well-defined by Lemma 6.2 and

$$sH(s) = I + H(s) \int_{-h}^{0} e^{s\theta} dQ(\theta),$$

hence

$$|s| \, \|H(s)\| \leq 1 + \|H(s)\| \, R(\alpha).$$

and the statement of the lemma follows. $\blacksquare$

Lemma 6.5. *If the sequence $(Q_k)_1^\infty$ converges to Q in the sense of theorem 6.1, then $F_k(s)$ converges to $F(s)$ uniformly in s on every bounded set $X \subset \mathbb{C}$.*

Proof. Assume that $|s| \leq \sigma$ for all $s \in X$. Consider the difference

$$\|F(s) - F_k(s)\| = \left\| \int_{-h}^{0} e^{s\theta} d(Q_k(\theta) - Q(\theta)) \right\|.$$

using (6.2) we get

$$\|F(s) - F_k(s)\| \leq \|Q_k(0) - Q(0)\| + \int_{-h}^{0} \left\| s e^{s\theta} (Q_k(\theta) - Q(\theta)) \right\| d\theta \leq$$

$$\leq \|Q_k(0) - Q(0)\| + \sigma e^{\sigma h} \int_{-h}^{0} \|Q_k(\theta) - Q(\theta)\| \, d\theta \to 0,$$

as $k \to \infty$ uniformly in $s \in X$. ■

Corollary 6.6. *If the sequence $(Q_k)_1^\infty$ converges to Q in the sense of theorem 6.1, then $f_k(s)$ converges to $f(s)$ uniformly in s on every bounded set $X \subset \mathbb{C}$.*

Proof. Again, assume that $|s| \leq \sigma$ for all $s \in X$. The function $F(s)$ is analytic, hence it is bounded on the circle $|s| \leq \sigma$ by a constant B. From Lemma 6.5 we conclude that for every $\varepsilon > 0$ there exists a number K such that for all $k \geq K$ and $s \in X$ the inequality $\|F(s) - F_k(s)\| < \varepsilon$ is satisfied. Thus, for all $k \geq K$ the norms of the characteristic functions $F_k(s)$ are bounded on X by $B + \varepsilon$. Hence [33],

$$|\det F(s) - \det F_k(s)| \leq n \|F(s) - F_k(s)\| \max\{\|F(s)\|^{n-1}, \|F_k(s)\|^{n-1}\} <$$
$$< n\varepsilon(B + \varepsilon)^{n-1}.$$

for all $s \in X$. In other words, $f_k(s)$ converges to $f(s)$ uniformly in $s \in X$. ■

It was proved previously that for every right half-plane $\operatorname{Re} s \geq \alpha$ of the complex plane roots of the characteristic function in that half-plane are located in a certain semi-circle. Now we will prove that for sufficiently large numbers k the radius of the semi-circle can be chosen independently of k.

Lemma 6.7. *If the sequence $(Q_k)_1^\infty$ converges to Q in the sense of theorem 6.1, then for all $\alpha \in \mathbb{R}$ and $R > R(\alpha)$ there exists a number K such that for all $k \geq K$ the eigenvalues $s \in \Lambda^{(k)}$ with $\operatorname{Re} s \geq \alpha$ satisfy $|s| \leq R$.*

Proof. Select $R > R(\alpha)$ and $d \in (0, 1)$. We will show that for sufficiently large k if $\operatorname{Re} s \geq \alpha$ and $|s| > R$ then the matrix $H_k(s)$ exists. Since the poles of $H_k(s)$ are exactly the eigenvalues $s \in \Lambda^{(k)}$, this is enough to establish the statement of the lemma. To this end we consider the product $[F(s) - F_k(s)]H(s)$. Choose K such that the inequalities

$$\|Q_k(0) - Q(0)\| < d\frac{R - R(\alpha)}{1 + R\max\{1, e^{-\alpha h}\}},$$
$$\int_{-h}^{0} \|Q_k(\theta) - Q(\theta)\| \, d\theta < d\frac{R - R(\alpha)}{1 + R\max\{1, e^{-\alpha h}\}}.$$

are satisfied for $k \geq K$. Then using lemma 6.4 and (6.2) we obtain,

$$\begin{aligned}\|F(s) - F_k(s)\| \, \|H(s)\| \leq \frac{1}{|s| - R(\alpha)} \Bigg[\|Q_k(0) - Q(0)\| + \\ + \int_{-h}^{0} \left\|se^{s\theta}(Q_k(\theta) - Q(\theta))\right\| d\theta \Bigg] \leq \\ \leq d \frac{R - R(\alpha)}{1 + R\max\{1, e^{-\alpha h}\}} \frac{1 + |s| \max\{1, e^{-\alpha h}\}}{|s| - R(\alpha)}.\end{aligned}$$

Consider the function

$$g(p) = \frac{1 + p\max\{1, e^{-\alpha h}\}}{p - R(\alpha)}.$$

It is monotonously decreasing, so $|s| > R$ implies $g(|s|) < g(R)$, and therefore

$$\|F(s) - F_k(s)\| \, \|H(s)\| < d < 1.$$

But this implies convergence of the series

$$\sum_{j=0}^{\infty} ([F(s) - F_k(s)]H(s))^j = (I - [F(s) - F_k(s)]H(s))^{-1},$$

and therefore the matrix

$$F_k(s) = (I - [F(s) - F_k(s)]H(s))F(s),$$

is invertible as a product of two invertible matrices. ■

Remark 6.2. From the proof of the lemma it follows that for $k \geq K$ for all complex numbers s, such that $\operatorname{Re} s \geq \alpha$ and $|s| > R$, we have

$$\|H_k(s)\| \leq \frac{\|H(s)\|}{1 - d}.$$

Theorem 6.8. *If the sequence $(Q_k)_1^\infty$ converges to $Q \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ in the sense of theorem 6.1, then there exists a number N_1 such that for all $k \geq N_1$ we have $Q_k \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$.*

Proof. It is well-known [20] that the spectrum Λ of system (6.1) is at most countable, and in any strip $\alpha \leq \operatorname{Re} s \leq \beta$ there can be at most a finite number of eigenvalues. Since system (6.1) satisfies the Lyapunov condition, it does not have purely imaginary eigenvalues. Let $\alpha < 0$ be such that the strip $\alpha \leq \operatorname{Re} s \leq 0$ has no eigenvalues of the system. It follows from lemma 6.7 that we can find $R > R(\alpha)$ and K such that for $k \geq K$ for all eigenvalues $s \in \Lambda_k$ with $\operatorname{Re} s \geq \alpha$ the condition $|s| \leq R$ is satisfied. Moreover, for all eigenvalues of system (6.1) with positive real parts, we have $|s| \leq R(\alpha) < R$.

Consider the contour Γ formed by the straight segment $s = i\omega$, $\omega \in [-R, R]$ and closed by a semi-circle at radius R to the right of it. The function $f(s)$ is analytic, and by corollary 6.6 the sequence $f_k(s)$ converges uniformly in s to $f(s)$ on any bounded set . It now follows from the Hurwitz theorem [43] that there exists a number K_1, such that for all $k \geq K_1$ the characteristic functions $f_k(s)$ have the same number of zeros inside the contour Γ (counted with multiplicity) as the characteristic function $f(s)$. Moreover, by construction, there can be no other zeros of the functions $f_k(s)$ located in the half-plane $\operatorname{Re} s \geq \alpha$. In particular, for exponentially stable systems, the statement of the theorem follows.

If the system (6.1) is not exponentially stable, then since it satisfies the Lyapunov condition we can construct a set of contours $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ such that each eigenvalue s of system (6.1) with $\operatorname{Re} s > 0$ is located inside one of the contours Γ_j, and and that there are no eigenvalues of system (6.1) located inside their reflections in the origin, $-\Gamma_1, \ldots, -\Gamma_r$. Applying Hurwitz's theorem once more to the contours $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r, -\Gamma_1, \ldots, -\Gamma_r$ we obtain a number $N_1 \geq K_1$ such that for $k \geq N_1$ each of the functions $f_k(s)$ has the same number of zeros inside each contour Γ_j as $f(s)$, and has no zeroes inside the contours $-\Gamma_j$, $j = 1, \ldots, r$.

Since all zeros of the function $f(s)$ located in the right half-plane lie inside the contours $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$, the total number of zeros (counted with multiplicity) of the functions $f_k(s)$, $k \geq N_1$ inside these contours coincides with the total number of zeros of $f(s)$ in the right half-plane, whence it follows that outside these contours there are can be no zeroes of the functions $f_k(s)$ in the half-plane $\operatorname{Re} s \geq \alpha$. But by construction, this implies that for all systems with kernels Q_k, $k \geq N_1$, the Lyapunov condition is satisfied. ■

6.3. Proof of the convergence theorem

Now that the existence of Lyapunov matrices for $k \geq N_1$ is established, we proceed with the direct analysis of the difference between $U_k(t)$ and $U(t)$ using the expression given in Theorem 1.6. First, we estimate the difference between integrals.

$$\mathcal{S}_1^{(k)}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} H^T(s)WH(-s)e^{-ts}ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} H_k^T(s)WH_k(-s)e^{-ts}ds =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} H^T(s)W[H(-s) - H_k(-s)]e^{-ts}ds +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} [H(s) - H_k(s)]^T WH_k(-s)e^{-ts}ds. \tag{6.3}$$

For $H(s) - H_k(s)$ we have the expression

$$H(s) - H_k(s) = H(s)[F_k(s) - F(s)]H_k(s). \tag{6.4}$$

Since $\operatorname{Re} s = 0$ we get

$$\|F_k(s) - F(s)\| = \left\| \int_{-h}^{0} e^{s\theta} d[Q(\theta) - Q_k(\theta)] \right\| \leq \mathsf{V}[Q - Q_k],$$

and Lemma 6.4 implies that the norm $\|H(s) - H_k(s)\|$ is of order $O(|s|^{-2})$ for any given k, hence both functions under integrals in the right-hand side of (6.3) are of order $O(|s|^{-3})$, that is those integrals are absolutely convergent.

Arguing as in the proof of Lemma 6.7 with $d = 1/2$ and some $R > R(0)$ we find a number $K_1 \geq N_1$ such that for all $k \geq K_1$ the inequality

$$\|F(s) - F_k(s)\| \, \|H(s)\| < \frac{1}{2} \tag{6.5}$$

holds for all $s \in \mathbb{C}$ with $|s| > R$ and $\operatorname{Re} s = 0$. But by Lemma 6.5 the characteristic matrices $F_k(s)$ converge to $F(s)$ uniformly on all bounded subsets, in particular on the interval $s = i\omega$, $\omega \in [-R, R]$, while $H(s)$ is defined and therefore continuous and bounded on that interval. Thus, we can find $K_2 \geq K_1$ such that for all $k \geq K_2$ inequality 6.5 holds for all s with $\operatorname{Re} s = 0$. For such s we also have

$$H_k(s) = H(s)(I - [F(s) - F_k(s)]H(s))^{-1}, \tag{6.6}$$

therefore $\|H_k(s)\| \leq 2\,\|H(s)\|$. We finally obtain that

$$\|H_k(s) - H(s)\| \leq \|H(s)\| \, \|F_k(s) - F(s)\| \, \|H_k(s)\|$$
$$\leq \frac{1}{2}\|H_k(s)\| \leq \|H(s)\|\,.$$

Before estimating the integrals in (6.3) we also note that

$$\begin{gathered}\left\|H^T(s)\right\| = \|H^*(-s)\| = \|H(-s)\|\,,\\ \left\|[H(s)-H_k(s)]^T\right\| = \|[H(-s)-H_k(-s)]^*\| = \|H(-s)-H_k(-s)\|\,,\\ \left|e^{-ts}\right| = 1.\end{gathered}$$

It follows that

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{S}_1^{(k)}(t)\right\| &\le \frac{3}{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty} \|H(-s)\|\,\|W\|\,\|H(-s)-H_k(-s)\|\,|ds| = \\ &= \frac{3\,\|W\|}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|H(i\omega)\|\,\|H(i\omega)-H_k(i\omega)\|\,d\omega.\end{aligned}$$

As the function $\|H(i\omega)\|\,\|H(i\omega)-H_k(i\omega)\| \le \|H(i\omega)\|^2$ is of order $O(\omega^{-2})$, the latter integral converges and for any $\varepsilon_1 > 0$ there exists $r > 0$ such that

$$\int_{|\omega|>r} \|H(i\omega)\|\,\|H(i\omega)-H_k(i\omega)\|\,d\omega < \varepsilon_1.$$

But on the interval $\omega \in [-r, r]$ we get from (6.4) that

$$\|H(i\omega)\|\,\|H(i\omega)-H_k(i\omega)\| \le 2\,\|H(i\omega)\|^3\,\|F_k(i\omega)-F(i\omega)\|\,,$$

and lemma 6.5 implies that there exists $K_3 \ge K_2$ such that

$$\begin{gathered}\int_{|\omega|\le r} \|H(i\omega)\|\,\|H(i\omega)-H_k(i\omega)\|\,d\omega \le 2\int_{|\omega|\le r} \|H(i\omega)\|^3\,\|F_k(i\omega)-F(i\omega)\|\,d\omega < \\ < \varepsilon_1\end{gathered}$$

for all $k \ge K_3$ as $\|H(i\omega)\|$ is clearly bounded on that interval.

It follows that

$$\left\|\mathcal{S}_1^{(k)}(t)\right\| \le \frac{3\,\|W\|}{\pi}\varepsilon_1, \tag{6.7}$$

or, in other words, $\mathcal{S}_1^{(k)}(t) \to \mathbf{0}$ as $k \to \infty$ uniformly in t.

Remark 6.3. In the exponentially stable case $U(t) - U_k(t) = \mathcal{S}_1^{(k)}(t)$. The computations thus far were viable for any real t and not just for $t \in [-h, h]$. It follows that in the case of exponential stability $U_k(t) \to U(t)$ uniformly in $t \in \mathbb{R}$, similarly to the papers [29, 53]. This is hardly surprising due to the fact that for exponentially stable systems their Lyapunov matrices themselves decay exponentially.

Now we need to estimate the difference

$$\mathcal{S}_2^{(k)}(t) = \sum_{s\in\Lambda_+} \mathrm{res}_s[H^T(s)WH(-s)e^{-ts}] + \sum_{s\in\Lambda_+} \mathrm{res}_s[H^T(-s)WH(s)e^{ts}]$$
$$- \sum_{s\in\Lambda_+^{(k)}} \mathrm{res}_s[H_k^T(s)WH_k(-s)e^{-ts}] - \sum_{s\in\Lambda_+^{(k)}} \mathrm{res}_s[H_k^T(-s)WH_k(s)e^{ts}]. \quad (6.8)$$

Let $\Lambda_+ = \{s_1, \ldots, s_m\}$, we can find some small radius $\delta > 0$ so that m circles $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ around each eigenvalue s_j, $1 \le j \le m$ of the radius d will not intersect each other, while each circle contains exactly one eigenvalue of system (6.1), and the Lyapunov condition also allows us to ensure that no eigenvalues of (6.1) are going to be located inside $-\Gamma_1, \ldots, -\Gamma_m$. Therefore,

$$\sum_{s\in\Lambda_+} \mathrm{res}_s[H^T(s)WH(-s)e^{-ts}] + \sum_{s\in\Lambda_+} \mathrm{res}_s[H^T(-s)WH(s)e^{ts}] =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m} \oint_{\Gamma_j} [H^T(s)WH(-s)e^{-ts} + H^T(-s)WH(s)e^{ts}]ds.$$

Arguing in the same way as in the proof of Theorem 6.8 we obtain $K_4 \ge K_3$ such that for all $k \ge K_4$ all eigenvalues from $\Lambda_+^{(k)}$ are located inside the circles $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ and there are no eigenvalues from $\Lambda^{(k)}$ inside $-\Gamma_1, \ldots, -\Gamma_m$. It follows that

$$\sum_{s\in\Lambda_+^{(k)}} \mathrm{res}_s[H_k^T(s)WH_k(-s)e^{-ts}] + \sum_{s\in\Lambda_+^{(k)}} \mathrm{res}_s[H_k^T(-s)WH_k(s)e^{ts}] =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m} \oint_{\Gamma_j} [H_k^T(s)WH_k(-s)e^{-ts} + H_k^T(-s)WH_k(s)e^{ts}]ds.$$

Substitution of these expressions in (6.8) leads to

$$\mathcal{S}_2^{(k)}(t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m} \oint_{\Gamma_j} [H^T(s)WH(-s) - H_k^T(s)WH_k(-s)]e^{-ts}ds+$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m} \oint_{\Gamma_j} [H^T(-s)WH(s) - H_k^T(-s)WH_k(s)]e^{ts}ds,$$

and then to

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_2^{(k)}(t) = & \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\oint_{\Gamma_j} H^T(s)W[H(-s)-H_k(-s)]e^{-ts}ds+ \\
& + \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\oint_{\Gamma_j} [H(s)-H_k(s)]^T W H_k(-s)e^{-ts}ds+ \\
& + \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\oint_{\Gamma_j} H^T(-s)W[H(s)-H_k(s)]e^{ts}ds+ \\
& + \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\oint_{\Gamma_j} [H(-s)-H_k(-s)]^T W H_k(s)e^{ts}ds.
\end{aligned} \tag{6.9}
$$

Now we can analyze each integral in (6.9) in the same manner as with the improper integrals before. Since each circle is bounded and we have only a finite number of circles, we obtain that $|s| \leq R$ for all $s \in \Gamma_j$, $1 \leq j \leq m$ for some $R > 0$. Thus, $|e^{-ts}| \leq e^{hR}$ and $|e^{ts}| \leq e^{hR}$ as we only consider $t \in [-h, h]$. The norms $\left\|H^T(s)\right\| = \|H(s)\|$, $\left\|H^T(-s)\right\| = \|H(-s)\|$ are obviously bounded by some constant $B > 0$ for all $s \in \Gamma_j$, $1 \leq j \leq m$. Using lemma 6.5 we find $K_5 \geq K_4$ such that for all $k \geq K_5$ and $s \in \Gamma_j$, $1 \leq j \leq m$ we have

$$
\begin{aligned}
\left\|[F(s)-F_k(s)]^T\right\| = \|F(s)-F_k(s)\| < \max\left\{\varepsilon_1, \frac{1}{2B}\right\}, \\
\left\|[F(-s)-F_k(-s)]^T\right\| = \|F(-s)-F_k(-s)\| < \max\left\{\varepsilon_1, \frac{1}{2B}\right\}.
\end{aligned}
$$

Thus, $\|H(s)\| \, \|F(s)-F_k(s)\| < \frac{1}{2}$ and $\|H(-s)\| \, \|F(-s)-F_k(-s)\| < \frac{1}{2}$, which together with (6.6) implies the inequalities $\|H_k(s)\| < 2B$ and $\|H_k(-s)\| < 2B$. Substituting (6.4) into (6.9) and using all of the preceding estimates gives us

$$
\left\|\mathcal{S}_2^{(k)}(t)\right\| \leq 12\delta m B^3 \|W\| e^{hR}\varepsilon_1. \tag{6.10}
$$

Finally, inequalities (6.7) and (6.10) imply that for all $k \geq K_5$ and $t \in [-h, h]$ we have

$$
\|U(t)-U_k(t)\| \leq \left\|\mathcal{S}_1^{(k)}(t)\right\| + \left\|\mathcal{S}_2^{(k)}(t)\right\| \leq \left[\frac{3}{\pi} + 12\delta m B^3 e^{hR}\right]\|W\|\,\varepsilon_1.
$$

Since ε_1 was arbitrary, the right-hand side of the above inequality can be made arbitrarily small independent of $t \in [-h, h]$. This concludes the proof of Theorem 6.1.

6.4. Continuous dependence

We start this section with two examples. In the paper [29] systems of the form

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t - h_j), \tag{6.11}$$

were considered, where $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_m = h$. Then systems with the same matrices A_j but with $\bar{h}_j$ in place of h_j were examined and it was proved in the case of exponential stability of both system (6.11) and its perturbation that as long as

$$\max\left\{\left|h_j - \bar{h}_j\right|, 1 \le j \le m\right\},$$

is small enough, the norm of the difference between the Lyapunov matrices of two systems is also going to be small, thus “the delay Lyapunov matrix depends continuously on the system delays”.

The second example comes from the paper [53]. Here systems of the form

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \int_{-h}^{0} G(\theta) x(t+\theta) d\theta, \tag{6.12}$$

were considered, where $G(\theta)$ is a continuous matrix function and perturbed systems are obtained when the distributed delay term is approximated by a finite sum:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \sum_{j=0}^{k-1} G_j^{(k)} x\left(t - j\delta_k\right),$$

$$G_j^{(k)} = \int_{-(j+1)\delta_k}^{-j\delta_k} G(\theta) d\theta, \quad \delta_k = \frac{h}{k}.$$

It is then proved that if (6.12) is exponentially stable, then for large enough k the perturbed system is also exponentially stable and the difference between the Lyapunov matrices of the two systems is small.

Before discussing any sort of continuity of a function topologies on both its domain $\mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset NBV([-h,0], \mathbb{R}^{n\times n})$ and codomain $C([-h,h], \mathbb{R}^{n\times n})$ must be clearly specified. The notion of closeness for Lyapunov matrices is self-evident from applications, leading us to consider the Banach space $C([-h,h], \mathbb{R}^{n\times n})$ with the norm

$$\|U\|_C = \max_{t\in[-h,h]} \|U(t)\|.$$

However, as opposed to the two examples above, there is no self-evident notion of closeness or convergence on the set $NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n})$. One obvious idea is to consider the norm

$$\|Q\| = \|Q(-h)\| + \mathsf{V}Q = \mathsf{V}Q,$$

making it into a Banach space. Since $\|Q(\theta)\| = \|Q(\theta) - Q(-h)\| \leq \mathsf{V}Q$ for all $\theta \in [-h,0]$, convergence in this norm clearly implies both conditions of Theorem 6.1 and thus $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ is open in $(NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n}), \|\cdot\|)$ and $\mathcal{L}$ is continuous as a mapping from $(\mathcal{D}(\mathcal{L}),\rho)$ to $C([-h,h],\mathbb{R}^{n\times n})$, where $\rho(Q_1,Q_2) = \|Q_1 - Q_2\|$ is the metric induced by that norm (indeed, $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ is not a linear space). Remarkably, the topology defined by this norm is too fine and fails to capture subtleties in either of the two examples, as in both of the cases kernels of approximations do not converge to the nominal systems in the norm $\|\cdot\|$.

Similarly to the paper [13] one can consider the following metric:

$$\rho_a(Q_1,Q_2) = \int_{-h}^{0} \|Q_1(\theta) - Q_2(\theta)\|\, d\theta + \|Q_1(0) - Q_2(0)\| + |\mathsf{V}Q_1 - \mathsf{V}Q_2|\,.$$

Convergence $Q_k \xrightarrow{\rho_a} Q$ is clearly equivalent to the following three conditions: Q_k converges to Q in L_1-norm, $Q_k(0)$ converges to $Q(0)$ and $\mathsf{V}Q_k$ converges to $\mathsf{V}Q$. The first two are the same as in Theorem 6.1 hence we arrive at the same conclusion: $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ is open in $(NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n}),\rho_a)$ and $\mathcal{L}$ is continuous as a mapping from $(\mathcal{D}(\mathcal{L}),\rho_a)$ to $C([-h,h],\mathbb{R}^{n\times n})$. It is not hard to check that both of the examples above satisfy the three listed conditions and thus approximations in the articles [29,53] fall under the case convergence in the metric ρ_a. Thus, the result obtained in Theorem 6.1 has two significant advantages: it doesn't demand exponential stability of the system under consideration, nor the requirement of convergence of $\mathsf{V}Q_k$ to $\mathsf{V}Q$ is necessary.

There is one important step down from the metric ρ_a that has to be considered first. In remark 6.1 it was noticed that functions of bounded variation define linear functionals. This observations prompts the following definition:

Definition 6.1. Let A be directed set. A net $(Q_\alpha)_{\alpha\in A}$ of functions of normalized bounded variation is said to be weak* convergent to $Q \in NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n})$ (written as $Q_\alpha \xrightarrow{*} Q$) if for every $f \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ we have

$$\int_{-h}^{0} dQ_\alpha(\theta) f(\theta) \to \int_{-h}^{0} dQ(\theta) f(\theta).$$

By the Banach-Steinhaus Theorem [3], if a sequence $(Q_k)_1^\infty$ weak* converges to Q, then it is uniformly bounded in norm, that is $\sup\{\mathsf{V}Q_k\} < \infty$. The following result can then be obtained.

Theorem 6.9 ([2, 40]). *A sequence $(Q_k)_1^\infty$ weak* converges to Q if and only if the following three conditions are satisfied:*

1. *$Q_k(0)$ converges to $Q(0)$,*
2. *$(Q_k)_1^\infty$ converges to Q in L^1-norm,*
3. *the sequence is uniformly bounded:* $\sup\{\mathsf{V}Q_k\} < \infty$.

Thus, weak* convergence of sequences is placed directly below the one in the metric ρ_a, as instead of convergence of variations it needs variations of approximations to be only uniformly bounded. Arbitrary nets are not that well-behaved, however. Recall that there is a topology on $NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n})$, called the weak* topology, defined as the weakest topology making all functionals $Q \mapsto \int dQf$ continuous, where $f \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$. Thus, nets that converge in the weak* topology are exactly weak* convergent nets.

Theorem 6.10. *Let $Q \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, there exists a net $(Q_\alpha)_{\alpha\in A}$ such that $Q_\alpha \notin \mathcal{D}(\mathcal{L})$ for all $\alpha \in A$, but $Q_\alpha \overset{*}{\rightharpoonup} Q$.*

Proof. Let A be the directed set of all weak* open sets containing Q ordered by reverse inclusion: $U \preceq V$ iff $U \supset V$. By definition, each weak* open set U contains a basic weak* open neighborhood of the form

$$N = \left\{ R \in NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n}) : \left\| \int_{-h}^{0} d(Q(\theta) - R(\theta)) f_j(\theta) \right\| < \varepsilon, 1 \le j \le m \right\},$$

for some functions $f_1, \ldots, f_m \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$. Without loss of generality we can assume that $f_1, \ldots, f_l$ are linearly independent and that $f_{l+1}, \ldots, f_m$ can be expressed as linear combinations of the first l functions. Choose any nonzero vector $\gamma \in \mathbb{R}^n$ and a number $\omega_0 \in \mathbb{R}$ such that the functions $c(\theta) = \cos(\omega_0\theta)\gamma$ and $s(\theta) = \sin(\omega_0\theta)\gamma$ are linearly independent from the functions $f_1, \ldots, f_l$. Now define a linear functional on $\operatorname{sp}\{f_1, \ldots, f_m, c, s\}$ by

$$\ell(f_1) = \ell(f_2) = \ldots = \ell(f_l) = \mathbf{0},$$
$$\ell(c) = -\int_{-h}^{0} dQ(\theta)[\cos(\omega_0\theta)\gamma],$$

$$\ell(s) = \omega_0\gamma - \int_{-h}^{0} dQ(\theta)[\sin(\omega_0\theta)\gamma].$$

It follows that $\ell(f_{l+1}) = \cdots = \ell(f_m) = \mathbf{0}$. By the Hahn-Banach theorem [3], this functional (or, rather, n functionals) can be extended to a continuous linear functional on the whole space $C([-h,0],\mathbb{R}^n)$. By remark 6.1 the resulting functional ℓ_U corresponds to some function of bounded variation, normalizing it we obtain the function $R_U(\theta)$. Set $Q_U(\theta) = Q(\theta) + R_U(\theta)$. Notice that by construction we have $Q_U \in N \subset U$ for all $U \in A$.

We claim that $Q_U \notin \mathcal{D}(\mathcal{L})$ and that the net $(Q_U)_{U\in A}$ weak* converges to Q. For the first part, note that

$$\int_{-h}^{0} dQ_U(\theta)[e^{i\omega_0\theta}\gamma] = \int_{-h}^{0} dQ(\theta)[e^{i\omega_0\theta}\gamma] + \ell_U(c+is) = i\omega_0\gamma,$$

therefore

$$\det\left[i\omega_0 I - \int_{-h}^{0} e^{i\omega_0\theta} dQ_U(\theta)\right] = 0,$$

and $i\omega_0$ is an eigenvalue of the system with the kernel Q_U. Similarly, $-i\omega_0$ is also an eigenvalue and the Lyapunov condition is not satisfied.

For the second assertion, let $\hat{U}$ be a weak* open set containing Q. For any weak* open V such that $\hat{U} \preceq V$, we have $Q_V \in V$ and hence $Q_V \in \hat{U}$, which, by definition, means that $Q_U \xrightarrow{*} Q$. ■

It follows from the previous Theorem that $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ is not open in the weak* topology. This practically precludes any attempts at trying to use weak* convergent nets of kernels to approximate Lyapunov matrices, as without additional assumptions it is impossible to establish if the Lyapunov condition is ever going to be satisfied by some elements of those nets. But earlier it was mentioned that weak* convergent sequences are well-suited for our purposes. We remark that it is possible to define a topology where sequences suffice.

The bounded weak* topology is defined as the strongest topology that coincides with the weak* topology on bounded sets [3]. It can be shown [65] that in the bounded weak* topology a set is closed if only if it is weak* sequentially closed, that is if from $Q_k \xrightarrow{*} Q$ with $Q_k \in F \subset NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n})$ for $k = 1,2,\ldots$ follows that $Q \in F$. It follows that $NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n})$ equipped with the bounded weak* topology is a sequential space. Theorems 6.1 and 6.9 imply that $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ is open in that space, and as open subsets of sequential spaces are themselves sequential [32], the sequential continuity of the mapping $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \to C([-h,h],\mathbb{R}^{n\times n})$ implies its continuity in the usual sense. Thus, $\mathcal{L}$ is a continuous mapping from $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ with the relative topology induced by the bounded weak* topology to $C([-h,h],\mathbb{R}^{n\times n})$.

Finally, it is possible to consider even weaker topology induced by the metric

$$\rho_t(Q_1,Q_2) = \int_{-h}^{0} \|Q_1(\theta) - Q_2(\theta)\|\, d\theta + \|Q_1(0) - Q_2(0)\|\,,$$

taken directly from Theorem 6.1. The conclusion is still the same: $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ is open and $\mathcal{L}$ is continuous, but we would like to note one property especially important for applications.

Theorem 6.11 ([12, 13]). *The set of piecewise linear functions with rational endpoints is everywhere dense in the metric space* $(NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n}),\rho_a)$ *(as well as in* $(NBV([-h,0],\mathbb{R}^{n\times n}),\rho_t)$*). Therefore, those spaces are separable.*

This theorem was established by first constructing a special sequence of piecewise linear functions with the endpoints $(-h_j, Q(-h_j))$ and then approximating them with points having rational coordinates. But systems corresponding to piecewise linear kernels have the form of distributed delay systems with piecewise constant kernel, that is

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j \int_{-h_{j+1}}^{-h_j} x(t+\theta)d\theta.$$

Clearly we can make the endpoints to be rational multiples of the delay h, hence all the delays h_j will be multiples of some basic delay. Thus, in general, Theorems 6.1 and 6.11 together with the results obtained in chapter 5 imply that for any linear time-invariant system with constant delay of retarded type satisfying the Lyapunov condition, the corresponding Lyapunov matrix can be obtained with arbitrary precision.

6.5. Example

Consider the system

$$\dot{x}(t) = x(t) + e^{-1}x(t-1) - x(t-2). \tag{6.13}$$

Its kernel is given by

$$Q(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta = -2, \\ -1, & -2 < \theta \leq -1, \\ -1 + e^{-1}, & -1 < \theta < 0, \\ e^{-1}, & \theta = 0. \end{cases} \tag{6.14}$$

Now we divide the interval $[-2, 0]$ into subintervals of the length $\delta_k = 2^{-k}$ and consider polygonal functions $Q_k(\theta)$ having the endpoints $(-j\delta_k, Q(-j\delta_k))$, as $j = 0, \ldots, 2 \cdot 2^k$, see Figure 5. The resulting systems have the form

$$\dot{x}(t) = -2^k \int_{-2}^{-2+2^{-k}} x(t+\theta)d\theta + e^{-1}2^k \int_{-1}^{-1+2^{-k}} x(t+\theta)d\theta + 2^k \int_{-2^{-k}}^{0} x(t+\theta)d\theta.$$

The nature of this approximation is quite clear, as for any continuous function f

$$\frac{1}{h}\int_{a}^{a+h} f(\theta)d\theta \to f(a),$$

as $h \to 0$.

It is readily seen that $Q_k(0) = Q(0)$ for all k and that

$$\int_{-2}^{0} |Q(\theta) - Q_k(\theta)|\, d\theta = \int_{-2}^{-2+2^{-k}} 1 - 2^k(\theta+2)d\theta + e^{-1}\int_{-1}^{-1+2^{-k}} 1 - 2^k(\theta+1)d\theta +$$
$$+ \int_{-2^{-k}}^{0} 1 + 2^k\theta d\theta = (2 + e^{-1})2^{-(k+1)} \to 0,$$

as $k \to \infty$. Thus both conditions of Theorem 6.1 are satisfied. It can be checked that the Lyapunov condition is satisfied for system (6.13), but it is not exponentially stable as $s_0 = 1$ is an eigenvalue of the system. As Figure 6 indicates, the perturbations approximate the spectrum of the nominal system quite well.

Now we consider the Lyapunov matrices of these systems associated with $W = 1$. They are shown in Figure 7. For system (6.13) the Lyapunov matrix was computed using the algorithm from [34] and for its perturbations using the results from chapter 5. It is clear that the sequence of approximation converges to the Lyapunov matrix of system (6.13). The numerical results are summarized in the table below.

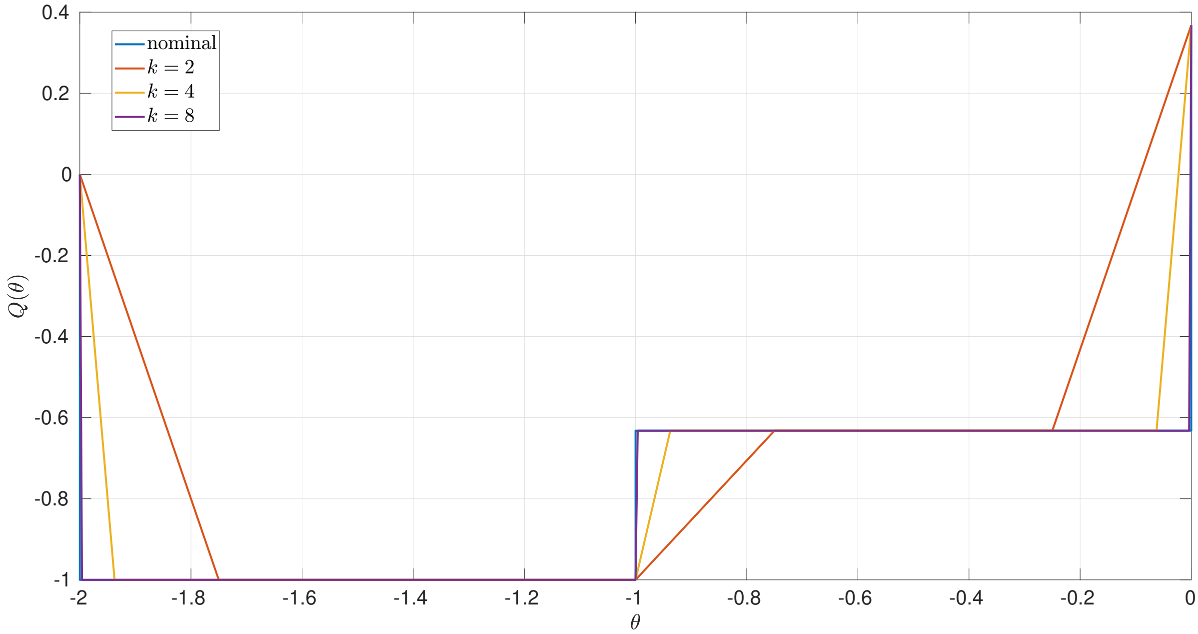

Figure 5: Kernels of the nominal system and its perturbations for $k = 2, 4, 8$.

k	δ_k	number of intervals	$\|U - U_k\|_C$
2	0.25	8	0.8209
4	0.0625	32	0.1615
8	0.0039	512	0.0094

Table 1: Dependence of the approximation error on k

These results indicate that the error of the approximation is decreasing linearly with the number of subintervals.

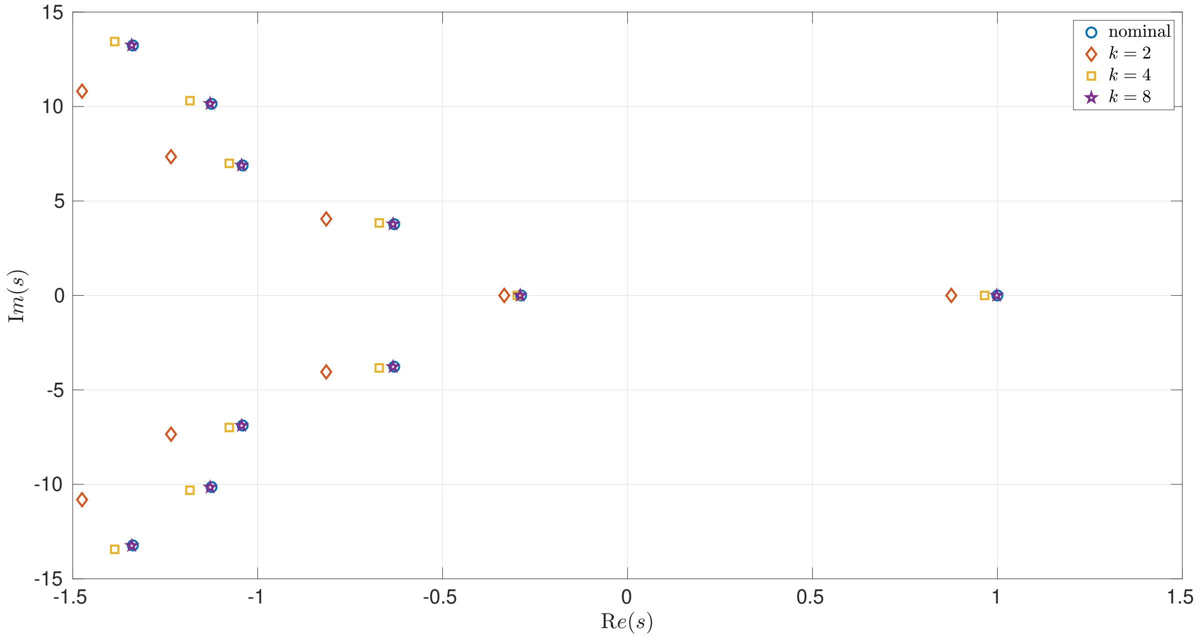

Figure 6: Eigenvalues of the nominal system and its perturbations for $k = 2, 4, 8$.

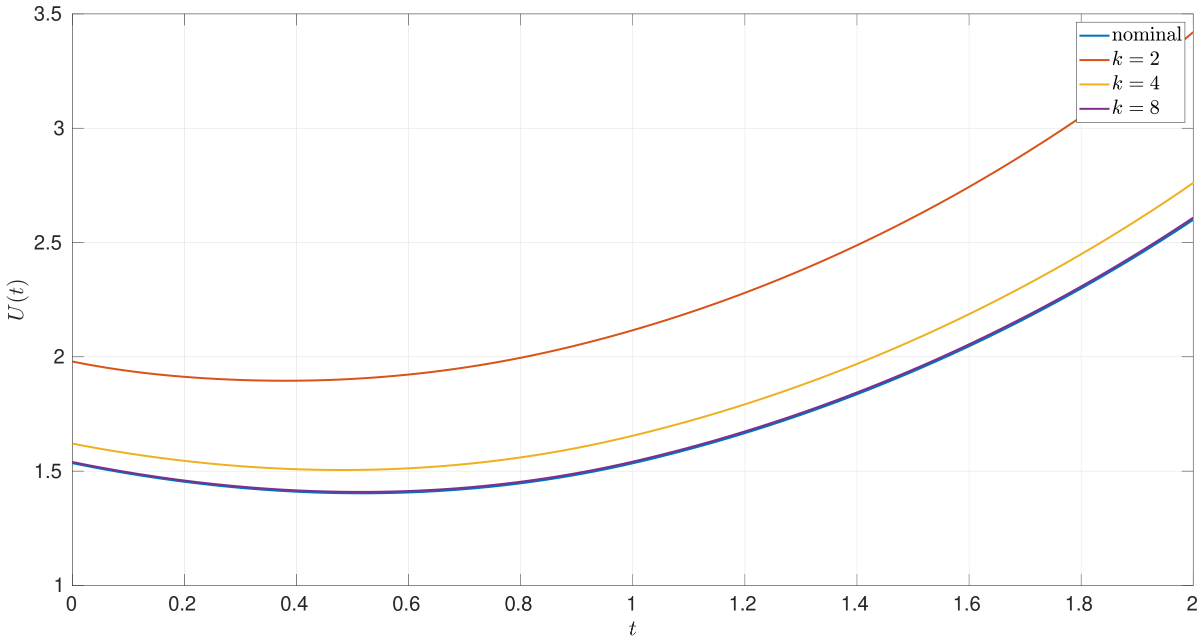

Figure 7: Lyapunov matrices of the nominal system and its perturbations for $k = 2, 4, 8$.

Conclusion

In this contribution the problem of finding Lyapunov matrices was studied. In the second chapter, for systems with distributed delay and exponential kernel, a new auxiliary boundary value problem was proposed. This auxiliary system allows to uniquely construct the Lyapunov matrices for systems satisfying the Lyapunov condition. The fact that the Lyapunov condition is satisfied can be verified during the process of solving the boundary value problem and it was shown that the Lyapunov condition is equivalent to the non-singularity of a system of linear algebraic equations.

In the third chapter, an approach to the stability analysis and the construction of Lyapunov matrices for systems with distributed delay and exponential kernel was considered. The main idea of this approach is to transform such systems to systems with one delay. Both for systems with distributed delay and exponential kernel, and for systems with one delay, it is possible to construct Lyapunov matrices, but the boundary value problem for the extended system with one delay turns out to be of greater dimension than the boundary value problem for the nominal system. Moreover, it was shown that in some cases the extended system may not have a Lyapunov matrix, even if the Lyapunov condition was satisfied for the nominal system. It should also be noted that the transformation to the extended system in some cases leads to the loss of the exponential stability property. All thing considered, the computation of Lyapunov matrices by the conversion from the nominal system to the extended system is not advisable due to higher computational costs and reduced scope of application.

In the fourth chapter, linear systems with input delay were considered. Using the transformation of the stabilizing control to a dynamic control law and the method of Lyapunov–Krasovskii functionals, a functional of complete type was constructed. It was shown that this functional can be applied to the stability analysis of the closed-loop system. Using the constructed functional, exponential estimates of solutions were obtained.

In the fifth chapter, a new class of systems was presented for which it is possible to find Lyapunov matrices constructively, namely, systems with distributed delay and piecewise-constant kernel. It was shown that for such systems it is possible to construct a theory that completely mirrors the well-known results for systems with one delay. It is shown that the uniqueness of the Lyapunov matrices is equivalent to the uniqueness of solutions to the new auxiliary boundary value problem.

In the sixth chapter, the issue of finding Lyapunov matrices for a general class of time-invariant systems with bounded delay was considered. The right-hand sides of such systems can be represented by the Stieltjes integral. It was shown that under some rather weak assumptions the convergence of the kernels of the right-hand sides implies the convergence of the corresponding Lyapunov matrices. Thus, the previous results in this direction were extended to a much larger class of systems, and it was shown that it is not necessary to assume exponential stability of systems under consideration. The result that was obtained can serve as the basis for various numerical methods for finding Lyapunov matrices.

Thus, the class of time-delay systems for which it is possible to constructively use the method of Lyapunov– Krasovskii functionals has been significantly expanded.

References

[1] Aliseyko A. N. Lyapunov matrices for a class of systems with exponential kernel // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes, 2017. Vol. 13, No. 3. P. 228–240. (In Russian)

[2] Glivenko V. I. Stieltjes integral (2nd ed.). Moscow: URSS, 2007. 216 p. (In Russian)

[3] Dunford N, Schwarz J. T. Linear Operators, Part 1. New York: Wiley-Interscience, 1988. 872 p.

[4] Zubov V. I. On the theory of linear stationary system with a delayed argument // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1958. No. 6. P. 86–95. (In Russian)

[5] Krasovskii N. N. Stability of Motion: Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay. Stanford: Stanford University Press, 1963. 188 p.

[6] Lyapunov A. M. Stability of Motion. London: Academic Press, 1966. 216 p.

[7] Myshkis A. D. General theory of differential equations with delay // Uspehi Mat. Nauk, 1949. Vol. 4, No. 5. P. 99–141. (In Russian)

[8] Razumikhin B. S. On the stability of systems with a delay // Prikladnaya Matematika i Mekhanika, 1956. Vol. 20. No. 4. P. 500–512. (In Russian)

[9] Elsgolt's L. E., Norkin S. B. Introduction to the Theory and Applications of Differential Equations with Deviating Arguments. New York: Academic Press, 1973. 356 p.

[10] Sumacheva V. A. On minimization of the $\mathcal{H}_2$ norm of a transfer matrix of delay systems // Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 10. Applied mathematics, computer science, control processes, 2014. No. 1. P. 128–137. (In Russian)

[11] Engelking R. General topology. Warsaw: PWN, 1977. 626 p.

[12] Adams C. R., Lewy H. On convergence in length // Duke Mathematical Journal, 1935. Vol. 1, No 1. P. 19–26.

[13] Adams C. R. The Space of Functions of Bounded Variation and Certain General Spaces. // Transactions of the American Mathematical Society, 1936. Vol. 40, No 3. P. 421–438.

[14] Abu-Khalaf M., Gumussoy S. Comments on: “Lyapunov matrices for a class of time delay systems” by V. L. Kharitonov // arXiv:1802.06831v1 [cs.SY], 2018.

[15] Aliseyko A. N. Lyapunov matrices for a class of time-delay systems with piecewise-constant kernel // International Journal of Control, 2019. Vol. 92, No. 6. P. 1298-1305.

[16] Aliseyko A. N., Kharitonov V. L. Lyapunov–Krasovskii functionals for linear systems with input delay // IFAC-PapersOnLine, 2019. Vol. 52, No 18. P. 19–24.

[17] Aliseyko A. N. Extension of State Space and Lyapunov Matrices // IEEE Transactions on Automatic Control, 2021. Vol. 66, No. 4, P. 1771–1777.

[18] Aliseyko A. N. Continuous dependence of Lyapunov matrices with respect to perturbations for linear delay systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022. Vol. 32, No 6. P. 3126–3140.

[19] Bartlett M. S. On Theoretical Models for Competitive and Predatory Biological Systems // Biometrika, 1957. Vol. 44, No 1/2. P. 27–42.

[20] Bellman R., Cooke K. L. Differential-Difference Equations. N. Y.: Academic Press, 1963. 482 p.

[21] Cooke K. L. Stability analysis for a vector disease model // The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1979. Vol. 9, No 1. P. 31–42.

[22] Datko R. An algorithm for computing Lyapunov functionals for some differential difference equations // Ordinary Differential Equations / ed. L. Weiss. New York: Academic Press, 1972, P. 387–398.

[23] Diekman O., van Gils S. A., Verduyn Lunel S. M., Walther H. O. Delay Equations: Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis. N. Y.: Springer-Verlag, 1995. 536 p.

[24] Egorov A. V., Mondié S. A stability criterion for the single delay equation in terms of the Lyapunov matrix // Vestnik St. Petersburg University Series 10, 2013. No 1, P. 106–115.

[25] Egorov A. V., Mondié S. Necessary conditions for the exponential stability of time-delay systems via the Lyapunov delay matrix // Journal of Robust and Nonlinear Control, 2014. Vol. 24, No 12. P. 1760–1771.

[26] Egorov A. V., Mondié S. Necessary stability conditions for linear delay systems // Automatica, 2014. Vol. 50, No 12. P. 3204–3208.

[27] Egorov A. V. A finite necessary and sufficient stability condition for linear retarded type systems // Proceedings of the 55th IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, USA, 2016. P. 3155–3160.

[28] Egorov A. V., Cuvas C., Mondié S. Necessary and sufficient stability conditions for linear systems with pointwise and distributed delays // Automatica, 2017. Vol. 80. P. 218–224.

[29] Egorov A. V., Kharitonov V.L. Approximation of delay Lyapunov matrices // International Journal of Control, 2018. Vol. 91. P. 2588–2596.

[30] Engelborghs K., Dambrine M., Roose D. Limitations of a class of stabilization methods for delay systems // IEEE Transactions on Automatic Control, 2001. Vol. 46, No 2. P. 336–339.

[31] Ficak B. Point delay methods applied to the investigation of stability for a class of distributed delay systems // Systems & Control Letters, 2007. Vol. 56, No 3. P. 223–229.

[32] Franklin S. Spaces in which sequences suffice // Fundamenta Mathematicae, 1965. Vol. 57, No 1. P. 107–115.

[33] Friedland S. Variation of tensor powers and spectra // Linear and Multilinear Algebra, 1982. Vol. 12, No 2. P. 81–98.

[34] Garcia-Lozano H., Kharitonov V. L. Lyapunov matrices for time delay systems with commensurate delays // 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control / ed. S. Mondié. Oxford: Elsevier, 2004. Vol. 1. P. 91–95.

[35] Garcia-Lozano H., Kharitonov V. L. Numerical computation of time-delay Lyapunov matrices // IFAC Proceedings Volumes, 2006. Vol. 39, No 10. P. 60–65.

[36] Gu K. An improved stability criterion for systems with distributed delays // International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2003. Vol. 13, No 9. P. 819–831.

[37] Gu K., Kharitonov V. L., Chen J. Stability of time delay systems. Boston: Birkhäuser, 2003. 353 p.

[38] Gumussoy S., Abu-Khalaf M. Analytic solution of a delay differential equation arising in cost functionals for systems with distributed delays // IEEE Transactions on Automatic Control, 2019. Vol. 64, No 11. P. 4833–4840.

[39] Hale J. K, Verduyn Lunel S. M. Introduction to Functional Differential Equations. N. Y.: Springer-Verlag, 1993. 447 p.

[40] Högnäs G. Characterization of weak convergence of signed measures on $[0, 1]$ // Mathematica Scandinavica, 1978. Vol. 41, No 1. P. 175–184.

[41] Huang W. Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1989. Vol. 142, No 1. P. 83–94.

[42] Huesca E., Mondié S., Santos O. Polynomial approximations of the Lyapunov matrix of a class of time delay systems // IFAC Proceedings Volumes, 2009. Vol. 42, No 14. P. 261–266.

[43] Hurwitz A. Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function // Mathematische Annalen, 1889. Vol. 33. P. 246–266.

[44] Infante E. F., Castelan W. B. A Liapunov functional for a matrix difference-differential equation // Journal of Differential Equations, 1978. Vol. 29, No 3. P. 439–451.

[45] Jarlebring E., Vanbiervliet J., Michiels W. Characterizing and computing the H_2 norm of time-delay systems by solving the delay Lyapunov equation // IEEE Transactions on Automatic Control, 2011. Vol. 56, No 4. P. 814–825.

[46] Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica, 2003. Vol. 39, No 1. P. 15–20.

[47] Kharitonov V. L., Hinrichsen D. Exponential estimates for time delay systems // Systems & Control Letters, 2004. Vol 53, No 5. P. 395–405.

[48] Kharitonov V. L. Lyapunov matrices for a class of time delay systems // Systems & Control Letters, 2006. Vol. 55, No 7. P. 610–617.

[49] Kharitonov V. L., Plischke E. Lyapunov matrices for time-delay systems // Systems & Control Letters, 2006. Vol. 55, No 9. P. 697–706.

[50] Kharitonov V. L. On the uniqueness of Lyapunov matrices for a time-delay system // Systems & Control Letters, 2012. Vol. 61, No 3. P. 397–402.

[51] Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.

[52] Kharitonov V. L. Predictor-based controls: The implementation problem. // Differential Equations, 2015. Vol. 51, No 13. P. 1675–1682.

[53] Kharitonov V. L. Approximate Lyapunov matrices for time-delay systems // IFAC-PapersOnLine, 2018, Vol. 51, No. 14. P. 142–146.

[54] Kolmanovskii V. B., Nosov V. R. Stability of Functional Differential Equations. N.Ỹ.: Academic Press, 1986. 217 p.

[55] Krstic M., Smyshlyaev A. Backstepping boundary control for first-order hyperbolic PDEs and application to systems with actuator and sensor delays // Systems & Control Letters, 2008. Vol. 57, No 9. P 750–758.

[56] MacDonald N. Time delay in simple chemostat models // Biotechnology and Bioengineering, 1976. Vol. 18, No 6. P. 805–812.

[57] Manitius A. Z., Olbrot A. W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Transactions on Automatic Control, 1979. Vol. 24, No 4. P. 541–552.

[58] Minorsky N. Self-Excited Oscillations in Dynamical Systems Possessing Retarded Actions // Journal of Applied Mechanics, 1942. Vol. 9, No 2. P. 65–71.

[59] Mondié S., Michiels W. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation // IEEE Transactions on Automatic Control, 2003. Vol. 48, No 12. P. 2207–2212.

[60] Niculescu S.-I. Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach. Heidelberg: Springer, 2001. 388 p.

[61] Nohel J. A. A Class of Nonlinear Delay Differential Equations // Journal of Mathematics and Physics, 1959. Vol. 38. P. 295–311.

[62] Ochoa G., Kharitonov V. L., Mondié S. Critical frequencies and parameters for linear delay systems: A Lyapunov matrix approach. // Systems & Control Letters, 2013. Vol. 62, No 9. P. 781–790.

[63] Ochoa G., Melchor-Aguilar D., and Mondié S. Critical parameters of integral delay systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2013. Vol. 25, No 7. P. 1094–1105.

[64] Repin Iu. M. Quadratic Liapunov functionals for systems with delay // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1965. Vol. 29, No 3. P. 669–672.

[65] Rubel L. A., Ryff J. V. The Bounded Weak-Star Topology and the Bounded Analytic Functions // Journal of Functional Analysis, 1970. Vol. 5, No 2. P. 167–183.

[66] Santos O., Mondié S., Kharitonov V. L. Linear quadratic suboptimal control for time delays systems. // International Journal of Control, 2009. Vol. 82, No 1, P. 147–154.

[67] Verriest E. I. Linear systems with rational distributed delay: Reduction and stability // Proceedings of the 1999 European Control Conference, Karlsruhe, Germany, 1999. P. 3637–3642.

[68] Volterra V. Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditair // Journal de mathématiques pures et appliquées, 1928. Vol. 7. P. 249–298.

[69] Vyhlídal T., Zítek P. Mapping Based Algorithm for Large-Scale Computation of Quasi-Polynomial Zeros // IEEE Transactions on Automatic Control, 2009. Vol. 54, No 1. P. 171–177.

Appendix A. Software implementation of computation of Lyapunov matrices for systems with exponential kernel in MATLAB

```
function [T, Uv] = Lmatrix_exp(A0, A1, B, A, e0, h, W)
n = size(A0, 1);
m = size(A, 1);
ni = 1 : n;
n2i = 1 : n^2;
d = (2 * m + 2) * n ^ 2;

eh = expm(-A * h) * e0;

xA0 = kron(A0', eye(n));
A0x = kron(eye(n), A0');
xA1 = kron(A1', eye(n));
A1x = kron(eye(n), A1');
xB = zeros(n * fliplr(size(B)));
Bx = zeros(size(xB));
for i = 0 : m - 1
  s = i * n;
  t = s * n;
  xB(:, t + n2i) = kron(B(s + ni, :)', eye(n));
  Bx(:, t + n2i) = kron(eye(n), B(s + ni, :)');
end

L = [xA0,         xA1,          xB,              zeros(n^2, m * n^2);
    -A1x,        -A0x,         zeros(n^2, m * n^2),    -Bx;
    kron(e0, eye(n^2)),  -kron(eh, eye(n^2)),  -kron(A, eye(n^2)),     zeros(m * n^2, m * n^2);
    kron(eh, eye(n^2)),  -kron(e0, eye(n^2)),  zeros(m * n^2, m * n^2),  kron(A, eye(n^2))];

E = [zeros(n^2), eye(n^2), zeros(n^2, m * n^2), zeros(n^2, m * n^2)];
I1 = [eye(m*n^2), zeros(m*n^2, m*d)] * expm(-[zeros(m*n^2), -kron(eye(m), E); zeros(m*d, m*n^2),
    kron(A, eye(d)) - kron(eye(m), L)]) * [zeros(m*n^2, d); kron(e0, eye(d))];
I2 = [eye(m*n^2), zeros(m*n^2, m*d)] * expm([zeros(m*n^2), kron(eye(m), E); zeros(m*d, m*n^2),
    kron(A, eye(d)) + kron(eye(m), L)]) * [zeros(m*n^2, d); kron(eh, eye(d))];

M = [eye(n^2),          zeros(n^2),          zeros(n^2, m * n^2),    zeros(n^2, m * n^2);
   [zeros(m * n^2, n^2), zeros(m * n^2, n^2), zeros(m * n^2),         eye(m * n^2)] - I1;
   [zeros(m * n^2, n^2), zeros(m * n^2, n^2), eye(m * n^2),          zeros(m * n^2)] - I2;
    xA0,          xA1,          xB,              zeros(n^2, m * n^2)];
N = [zeros(n^2),       -eye(n^2),          zeros(n^2, m * n^2),    zeros(n^2, m * n^2);
    zeros(m * n^2, d);
    zeros(m * n^2, d);
    A1x,          A0x,          zeros(n^2, m * n^2),    Bx];
X = M + N * expm(L * h);
w = -[zeros((2 * m + 1) * n^2, 1); W(:)];
U0 = linsolve(X, w);
T = 0 : 0.01 : h;
Uv = zeros(n ^ 2, size(T, 2));
for i = 1 : size(T, 2)
  Uv(:, i) = [eye(n^2), zeros(n^2, (2 * m + 1) * n^2)] * expm(L * T(i)) * U0;
end
```

Appendix B. Software implementation of computation of Lyapunov matrices for systems with piecewise-constant kernel in MATLAB

```
function [T, Uv] = Lmatrix_pc(A, C, m, r, W)
n = size(A, 2);
ni = 1 : n;
n2i = 1 : n^2;

d = (4 * m - 1) * n ^ 2;

Ac = zeros(n * fliplr(size(A)));
Af = zeros(size(Ac));
da = size(Ac, 2);
dai = 1 : da;
Cc = zeros(n * fliplr(size(C)));
Cf = zeros(size(Cc));
dc = size(Cc, 2);
dci = 1 : dc;
for i = 0 : m - 1
  s = i * n;
  t = s * n;
  Ac(:, t + n2i) = kron(A(s + ni, :)', eye(n));
  Cc(:, t + n2i) = kron(C(s + ni, :)', eye(n));
  Af(:, end - (t + n^2) + n2i) = kron(eye(n), A(s + ni, :)');
  Cf(:, end - (t + n^2) + n2i) = kron(eye(n), C(s + ni, :)');
end
s = s + n; t = t + n ^ 2;
Ac(:, t + n2i) = kron(A(s + ni, :)', eye(n));
Af(:, n2i) = kron(eye(n), A(s + ni, :)');

AA = zeros(2 * dc);
CC = zeros(2 * dc, 2 * dc - n ^ 2);
for i = 0 : m - 1
  t = i * n ^ 2;
  AA(t + n2i , t + dai) = Ac;
  CC(t + n2i, t + dci) = Cc;
  AA(t + dc + n2i, t + dai) = -Af;
  CC(t + dc + n2i, t + dci) = -Cf;
end
II = eye(fliplr(size(CC)));
II(:, n^2 + 1 : end) = II(:, n^2 + 1 : end) - eye(size(II, 1));
L = [AA, CC; II, zeros(size(CC, 2))];

M = zeros(d);
t = (2 * m - 1) * n ^ 2 ;
M(1 : t, 1 : t) = eye(t);
M(t + 1 : 2 * t - n ^ 2, t + n ^ 2 + 1 : 2 * t) = eye(t - n ^ 2);
M(end - 2 * n ^ 2 + n2i, (3 * m - 1) * n ^ 2 + n2i) = eye(n ^ 2);
M(end - n ^ 2 + n2i, (m - 1) * n ^ 2 + dai) = Ac;
M(end - n ^ 2 + n2i, (3 * m - 1) * n ^ 2 + dci) = Cc;
Nt = zeros(d, n^2);
Nt(end - 2 * n ^ 2 + n2i, :) = -eye(n ^ 2);
eNt = zeros(n ^ 2, d);
```

```
eNt(:, m * n ^ 2 + n2i) = eye(n ^ 2);
N = zeros(d);
N(1 : end - 2 * n ^ 2, n ^ 2 + 1 : end) = -M(1 : end - 2 * n ^ 2, 1 : end - n ^ 2);
N(end - n ^ 2 + n2i, dai) = Af;
N(end - n ^ 2 + n2i, 2 * m * n ^ 2 + dci) = Cf;

X = M + [Nt, N] * expm(r * [zeros(n ^ 2), eNt; zeros(d, n ^ 2), L]) * [zeros(n ^ 2, d); eye(d)];

w = [zeros(d - n ^ 2, 1); reshape(W, n ^ 2, 1)];
yz0 = linsolve(X, -w);

T = 0 : 0.01 : m * r;
Uv = zeros(n ^ 2, size(T, 2));
for i = 1 : size(T, 2)
  Uv(:, i) = reshape(U(T(i)), n ^ 2, 1);
end
```