ОТЗЫВ

члена диссертационного совета
на диссертацию СТАРЧАКА Михаила Романовича на тему
«Алгоритмы квазиэлиминации кванторов и вопросы
выразимости в арифметиках с делимостью»,
представленную на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук по научной специальности 1.1.5 —
математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Тема диссертации относится к важной области, известной как «слабые арифметики» и лежащей на стыке математической логики и теории чисел. Неформально говоря, общие вопросы такого рода можно охарактеризовать так: «Где в арифметике проходит граница между разрешимостью и неразрешимостью?» На одном полюсе находятся результаты о неразрешимости арифметики (теории натуральных чисел с умножением и сложением), восходящие к работам Гёделя, а также результаты Девиса—Патнама—Робинсон—Матиясевича о неразрешимости экзистенциальной теории $\exists\mathrm{Th}\langle\mathbb{N}; 0, 1, +, *, =\rangle$, давшие отрицательное решение 10-й проблемы Гильберта. На другом — доказательства разрешимости арифметики Пресбургера (теории натуральных чисел со сложением) и арифметики Сколема (теории натуральных чисел с умножением). Представляет интерес как доказательство неразрешимости тех или иных теорий, так и поиск разрешимых фрагментов. Отдельный вопрос связан с оценками сложности разрешающих алгоритмов. Ещё одно направление связано с так называемой выразимостью, когда мы интересуемся, какие предикаты могут быть выражены в той или иной (весьма ограниченной) сигнатуре.

Одним из пионеров этой деятельности стала Джулия Робинсон, чья работа «Definability and decision problems in arithmetic» во многом определила дальнейшие направления развития. Интерес к слабым арифметикам и, в частности, к вопросам выразимости и разрешимости/неразрешимости, не утратил актуальности до сих пор. Среди исследователей, внесших значительный вклад в эту область следует отметить А. П. Бельтюкова, А. Беса, А. Вудса, И. Кореца, Л. Липшица, Б. Пуонена, Д. Ришара, А. Л. Семёнова, Т. Фейдаса. Этот список никоим образом не претендует на полноту и может быть продолжен.

В частности, среди задач, интересовавших Джулию Робинсон, были теории, в которых арифметические предикаты для сложения и умножения заменялись на более слабые (например, функцию прибавления 1, делимость, взаимную простоту и т.п.). Несмотря на то, что исходная мотивировка приходит из логики, весьма часто эти вопросы приводят к интересным и нетривиальным задачам в теории чисел (так, один из до сих пор открытых вопросв Дж. Робинсон оказался эквивалентен теоретико-числовой гипотезе Эрдёша—Вудса). В середине 1970-х годов А. П. Бельтюков и Л. Липшиц независимо установили разрешимость позитивной экзистенциальной теории натуральных чисел с 1, сложением и делимостью. Однако описание разрешающей процедуры было довольно сложным, и было не вполне понятно, можно ли её существенно упростить для более слабых теорий.

Основные результаты диссертации и сосредоточены вокруг теоремы Бельтюкова—Липшица и связанного круга вопросов.

№ 33-06-1183 от 02.11.2022

В первой главе автор диссертации разрабатывает существенно новый подход к доказательству теоремы Бельтюкова—Липшица, основанный на так называемой процедуре квазиэлиминации кванторов. В отличие от более традиционной процедуры элиминации кванторов, когда формула преобразуется (возможно, за счёт введения новых переменных) к равновыполнимой бескванторной формуле, в результате квазиэлиминации получается формула специального более простого вида, в которой кванторами связаны лишь новые переменные. Затем строится разрешающая процедура уже для таких формул специального вида. Таким образом автор сводит проблему разрешимости для экзистенциальной теории $\exists \mathrm{Th}\langle \mathbb{Z}; 0, 1, +, \leq, \text{НОД}\rangle$ к проблеме разрешимости для позитивной экзистенциальной теории положительных целых чисел с 1, умножением на положительные константы и наибольшими общими делителями. Далее устанавливается разрешимость уже этой теории. Главным техническим средством, лежащим в основе одного из шагов квазиэлиминации, является так называемая НОД-лемма, имеющая теоретико-числовую природу и доказанная автором. Этот результат представляет интерес и сам по себе. Заслугой автора является выбор удачных формулировок условий в НОД-лемме, наиболее приспособленных для практических применений.

Во второй главе диссертации рассматриваются вопросы применения НОД-леммы и алгоритмов квазиэлиминации кванторов к вопросам выразимости. В частности, выясняется структура отношений, позитивно экзистенциально выразимых в структуре $\langle \mathbb{Z}; 1, +, \perp\rangle$, где $\perp$ означает отношение взаимной простоты. В качестве следствий автор доказывает, что отрицание взаимной простоты и отношение порядка не являются позитивно экзистенциально выразимыми в данной структуре. В качестве других приложений разработанных методов автор доказывает разрешимость положительных экзистенциальных теорий некоторых структур рациональных или вещественных чисел с целочисленной делимостью.

В третьей главе автор более подробно останавливается на вопросах выразимости, в частности доказывает полноту по выразимости некоторых структур с предикатом делимости на два последовательных целых числа ($^{S}|$). Как следствие, устанавливается неразрешимость экзистенциальных теорий натуральных чисел с умножением и предикатом $^{S}|$; со сложением и предикатом $^{S}|$. Эти результаты можно рассматривать как весьма интересные дополнения к известным спискам полных по выразимости структур из работ И. Кореца.

С учётом сказанного выше, следует отметить, что в диссертации автором решена научная задача имеющая значение для развития математической логики. Все результаты диссертации получены автором самостоятельно и опубликованы в 4 работах. Текст диссертации написан, в целом, аккуратно. Все основные утверждения снабжены подробными доказательствами, позволяющими читателю проверить их корректность и полноту.

К сожалению, в тексте диссертации встречаются отдельные недочёты. Отмечу некоторые из них.

- В строке 21 на странице 4 элементы списка $\bar{x}$ следует разделить запятыми. В противном случае эта запись выглядит как моном.

- В формуле (1.2) на странице 16 лучше использовать неравенство $z + 1 \leq x$

вместо $z \leq x - 1$, так как речь идет о структуре со сложением. Здесь же для строгости изложения стоит добавить определение константы 0, так как 0 не включается в исходную сигнатуру.

- На странице 17 при доказательстве сводимости проблемы разрешимости для P$\exists$-теории структуры $\langle \mathbb{Z}; 1, +, -, \leq, | \rangle$ к проблеме разрешимости $\exists$-теории структуры $\langle \mathbb{N}; 1, +, | \rangle$ автор показывает, как избавиться от операции вычитания в делителе (см. формулу (1.3)), но игнорирует аналогичный вопрос для делимого. По-видимому, это упущение явилось отголоском того факта, что в последующих разделах диссертации автор, в основном, рассматривает те делимости, в которых делимое задаётся полиномом с неотрицательными коэффициентами.

- На странице 18 в фразе «...из алгоритма Евклида доказываем...» автор, по-видимому, имеет в виду не сам алгоритм Евклида, а формулу, известную как линейное представление наибольшего общего делителя.

- С точки зрения логики изложения доказательство НОД-леммы (параграф 1.3) гораздо более уместно сразу после формулировки результата (лемма 1.2.3). Вместо этого автор почему-то помещает доказательство между двумя блоками, в которых обсуждаются алгоритмы квазиэлиминации кванторов (после параграфов 1.2.3, 1.2.4, не использующихся в доказательстве НОД-леммы, и перед параграфом 1.4).

- По-видимому, в строке 14 на странице 24 подразумевается, что x не входит в набор переменных $\bar{z}$, хотя это и не оговорено явно.

- В строке 23 на странице 25 должно быть НОД вместо GCD.

- В доказательстве примера 3.1.3 случай $y = 0$ следует рассмотреть отдельно, предваряя рассуждения на странице 71. В текущей версии этот случай разбирается в строке 4 на стр. 71, при этом получается $z = 0$, что противоречит сделанному выше в строке 2 допущению о взаимной простоте z и 2.

- На странице 71 понятие предиката степенного роста появляется прежде, чем дано формальное определение. Было бы лучше, если бы определение предваряло цитируемый результат.

Кроме этого имеется ряд замечаний стилистического характера.

- Используемые сокращённые наименования именных теорем, такие как «БД-теорема», «ДПРМ-теорема» соответствуют англоязычной традиции. В русскоязычной версии более привычными являлись бы названия «теорема Бельтюкова—Липшица», «теорема Дэвиса—Патнама—Робинсон—Матиясевича» и т.п.

- На странице 16 автор довольно подробно напоминает читателю стандартные определения и обозначения. При этом понятие замкнутой формулы остаётся не определённым. Учитывая избранную здесь автором степень детализации, стоило бы напомнить и его.

- Фраза на строке 28 страницы 18 («Заметим, что ...для ...») выглядит не вполне понятной. По-видимому, нужен союз «где» вместо «для».

Следует отметить, что все замеченные недочёты могут быть устранены и не влияют на общую положительную оценку всей работы в целом.

Диссертация Старчака Михаила Романовича на тему: «Алгоритмы квазиэлиминации кванторов и вопросы выразимости в арифметиках с делимостью» соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 19.11.2021 № 11181/1 «О порядке присуждения учёных степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», соискатель Старчак Михаил Романович заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.5. — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика. Нарушения пунктов 9 и 11 указанного Порядка в диссертации не обнаружены.

Член диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
директор Федерального государственного
бюджетного учреждения науки
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Всемирнов Максим Александрович

31 октября 2022 г.

Подпись руки Всемирнова
Максима Александровича
удостоверяю.
Помощник директора
по кадрам
А. А. Зотова 31. 10. 2022