

Отзыв члена диссертационного совета
на диссертацию МИХАИЛА РОМАНОВИЧА СТАРЧАКА
«Алгоритмы квазиэлиминации кванторов и вопросы выразимости в
арифметиках с делимостью»,
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.5, «Математическая логика, алгебра, теория чисел и
дискретная математика»

Формализация арифметики средствами математической логики — это одно из оснований современной математики. Основная модель — это арифметика первого порядка, то есть логическая теория, в которой переменные принимают значения натуральных чисел, над числами определены операции сложения и умножения, допускаются кванторы существования и всеобщности, а также пропозициональные связи — конъюнкция, дизъюнкция и отрицание. Арифметика первого порядка неразрешима, то есть не может существовать алгоритма, проверяющего истинность высказывания в этой теории. Это обстоятельство подталкивает к изучению так называемых «слабых арифметик» — логических теорий с теми или иными ограничениями их выразительных возможностей, в которых истинность высказываний можно было бы алгоритмически проверить. Наиболее известная теория такого рода — арифметика Пресбургера (1929), в которой нет операции умножения, благодаря чему существует алгоритм проверки истинности высказываний, что в свою очередь позволяет использовать эту модель в системах автоматического доказательства теорем и в системах верификации программ. Поиск и изучение слабых арифметик с подобными свойствами имеет и теоретическую, и практическую ценность.

Диссертационная работа МИХАИЛА СТАРЧАКА посвящена нескольким различным слабым арифметикам и изучает вопросы разрешимости в этих арифметиках. Во-первых, рассматривается теория целых чисел с операцией сложения и предикатом делимости одного числа на другое, в которой допускаются только кванторы существования — эта теория ранее изучалась Бельтюковым (1976), Мартъяновым (1977) и Липшицем (1978). Во-вторых, изучается теория целых чисел с операциями сложения и предикатом взаимной простоты двух чисел, тоже с кванторами существования, изучавшаяся ранее Ришаром (1989).

Диссертация МИХАИЛА СТАРЧАКА содержит 92 страниц и состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы (85 наименований). По теме работы соискателем опубликована одна работа в сборнике докладов международной конференции высокого уровня (ISSAC 2021), и ещё три работы в местных изданиях, соответствующих требованиям ВАК. Все работы написаны без соавторов.

Во **введении** даётся обзор литературы по предмету: перечисляются известные исследования по изучаемым в работе слабым арифметикам, проводится граница между разрешимостью и неразрешимостью, поясняются распростра-

нённые методы доказательства.

В **первой главе** приводится новое доказательство разрешимости теории целых чисел со сложением и предикатом делимости — теоремы Бельтюкова–Липшица. Предложенное автором доказательство основано на методе удаления кванторов и использует сведение предиката делимости к трёхместному предикату $\gcd(x, y) = z$, с дальнейшим преобразованием по китайской теореме об остатках.

Во **второй главе** доказывается новый результат о теории целых чисел со сложением, предикатом взаимной простоты двух чисел и кванторами существования: как показано автором, в этой теории можно избавиться от кванторов существования, задействовав оператор вычитания и счётное множество дополнительных предикатов — а именно, предикаты равенства $\gcd(x, y)$ всякой константе z , а также предикат неравенства.

Наконец, в **третьей главе** говорится об арифметиках с предикатом делимости данного числа на два последовательных числа, ранее изучавшемся рядом исследователей. Для некоторых теорий с этим предикатом получены результаты об их неразрешимости или об их вычислительной сложности.

Работа МИХАИЛА РОМАНОВИЧА СТАРЧАКА содержит решения нескольких исследовательских задач в области математической логики и арифметики, удачно продолжающие общепризнанные направления современных исследований. Работа выполнена на высоком научном уровне и соответствует всем требованиям, предъявляемых к кандидатским диссертациям согласно Приказу № 11181/1 от 19.11.2021 «О порядке присуждения учёных степеней в Санкт-Петербургском государственном университете». Считаю, что её автор заслуживает присвоения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5, «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Член диссертационного совета

Ph. D.,

профессор факультета математики и компьютерных наук

Санкт-Петербургского государственного университета

14-я линия В. О., д. 29, Санкт-Петербург

alexander.okhotin@spbu.ru, +7 (981) 157-14-35

АЛЕКСАНДР ОХОТИН

Вторник, 1 ноября 2022 г. от Р. Х.

Санкт-Петербург