

Отзыв  
научного руководителя  
на диссертацию Старчака Михаила Романовича  
на тему  
«Алгоритмы квазиэлиминации кванторов и вопросы выразимости в  
арифметиках с делимостью»,  
представленную на соискание учёной степени кандидата физико-  
математических наук по специальности  
1.1.5. «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Доказательство алгоритмической разрешимости/неразрешимости различных алгебраических систем является одним из важных направлений исследований на стыке математической логики и теоретической информатики. Для разрешимых алгебраических систем важно не только доказать их разрешимость, но и предъявить соответствующий алгоритм. Известным способом построения такого алгоритма является процедура элиминации (устранения) кванторов.

Рассмотрены различные арифметические структуры над множествами целых чисел и натуральных чисел, содержащих такие предикаты, как  $|$  – делимость и  $\perp$  – взаимная простота.

Для решения поставленных задач в Главе 1 соискателем было введено понятие квазиэлиминации кванторов, отличающееся от классического понятия элиминации тем, что на этапах отделения и элиминации какой-нибудь переменной могут вводиться новые переменные, связанные кванторами существования, однако, эти переменные теперь входят в выражения гораздо более простого вида.

На использовании процедуры квазиэлиминации кванторов построены алгоритмы, доказывающие алгоритмическую разрешимость различных алгебраических структур.

В Главе 1 в терминах квазиэлиминации построено новое доказательство разрешимости экзистенциальной теории натуральных чисел с единицей, сложением и делимостью. Это доказательство отличается от предложенного Бельтюковым А.П., Липшицем Л. и Мартьяновым В.И., тем, что оно позволяет выделить разрешающий алгоритм для экзистенциальных теорий более слабых структур, в частности, для  $\langle \mathbb{N}; 1, +, \perp \rangle$ .

С помощью алгоритма квазиэлиминации в Главе 2 доказано совпадение класса предикатов, выразимых формулами без отрицаний с использованием только кванторов существования (РЭ-выразимых) в структуре  $\langle \mathbb{Z}; 1, +, \perp \rangle$ , и класса предикатов, выразимых бескванторными позитивными формулами в расширенной бесконечной сигнатуре  $\langle \mathbb{Z}; 1, +, -, \neq, \perp, \text{НОД}_2, \text{НОД}_3, \dots \rangle$ .

Получены два разрешимых фрагмента  $\forall\exists$ -теории структуры  $\langle \mathbb{Z}; 1, +, -, \leq, | \rangle$ , причём известно, что в общем случае  $\forall\exists$ -теория этой структуры неразрешима.

Глава 3 посвящена выразимости в арифметических структурах с предикатом делимости на два последовательных натуральных числа  $^s|$  графиков функций сложения и умножения. Структуры, в которых можно выразить одновременно и сложение, и умножение, называются Def-полными ( $\exists\text{Def}$ -полными, если этого можно добиться с помощью экзистенциальных формул). Приведён ряд примеров структур, для которых соискателем доказана их  $\exists\text{Def}$ -полнота.

Доказана Def-полнота для структуры  $\langle \mathbb{N}; |, ^s| \rangle$  и невыразимость  $^s|$  в  $\langle \mathbb{N}; \cdot, = \rangle$ . Доказана NP-трудность некоторого семейства в сигнатуре  $\langle +, ^s| \rangle$ , а также выразимость некоторых арифметических отношений в структуре  $\langle \mathbb{N}; \leq, ^s| \rangle$ .

Следует отметить, что первоначально задачи, поставленные научным руководителем Косовским Н.К., были в значительной степени связаны с вычислительной сложностью задач, формулируемых на языке арифметики, что ближе к теоретическим основам информатики. Однако достаточно самостоятельные исследования соискателя привели его к результатам, изложенным в диссертации.

Считаю, что диссертация удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к таким работам, а ее автор, Старчак Михаил Романович, заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Доктор физико-математических наук, доцент,  
профессор кафедры информатики  
Санкт-Петербургского государственного университета

*Кос*

Т.М. Косовская

07 апреля 2022 г.

Личную подпись  
заверяю  
Заместитель начальника  
Управления кадров О.С. Суворова

*Косовской Т.М.*

