



MATHEMATICS DEPARTMENT  
LOS ANGELES, CALIFORNIA 90095-1555

Phone: (310) 825-5012  
Email:  
merkurev@math.ucla.edu  
29 декабря 2021 г.

## ОТЗЫВ

члена диссертационного совета на диссертацию Петрова Виктора Александровича на тему: “Мотивные методы в теории алгебраических групп и однородных многообразий”, представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Диссертация посвящена применению методов алгебраической геометрии и теории алгебраических групп к изучению однородных многообразий, а также связанных с ними классических объектов с большими группами автоморфизмов.

Целью работы является изучение мотивных разложений проективных однородных многообразий и их применение для решения проблем теории алгебраических групп.

Понятие мотива впервые было сформулировано Александром Гротендиком как объект, принадлежащий некоторой аддитивной (иногда триангулированной или абелевой) категории и вбирающий в себя все свойства теорий когомологий (реализации мотива).

По поводу употребления термина “мотив” Герберт Рид привел аналогию с методом Сезанна в живописи, который заключался, прежде всего, в выборе мотива — им мог служить пейзаж, натюрморт, модель для портрета — и в последующей реализации зрительного восприятия этого мотива, с сохранением его жизненной интенсивности. (Как отметил Юрий Иванович Манин, чтобы сохранить жизненную интенсивность мотива, его реализа-

ция (то есть теория когомологий), очевидно, должна быть функтором.)

Первые применения теории мотивов, позволившие решить несколько важных старых проблем в теории квадратичных форм восходят к работам Маркуса Роста, Александра Вишика и Никиты Карпенко. Они использовали мотивы, ассоциированные с группами Чжоу, то есть Чжоу-мотивы.

Здесь можно упомянуть доказательство Владимиром Воеводским знаменитой гипотезы Милнора, в котором существенно использовались мотивы Роста квадратик Пффистера. За это достижение Воеводский удостоился Премии Филдса.

Со временем пришло понимание того, что наряду с мотивами Чжоу нужно рассматривать мотивы, связанными с другими ориентированными теориями когомологий, такими как  $K$ -теория, связная  $K$ -теория,  $K$ -теории Моравы и теория кобордизмов. (Выбор правильной теории когомологий для решения конкретной задачи является элементом математического искусства.)

Таким образом, тематика диссертации связана с быстро развивающимися методами в теории когомологий, которые приносят существенные результаты.

Диссертация Виктора Петрова состоит из двух частей. В первой части разрабатывается новая техника работы с мотивами, которая затем применяется во второй части работы для решения ряда открытых проблем.

В начале первой части диссертации приводится основная конструкция, которая состоит в том, что для любой ориентированной теории когомологий  $A^*$  и любой расщепимой полупростой группы  $G$  вводится структура биалгебры на кольце  $A^*(G)$ . Пусть  $E$  является  $G$ -торсором над основным полем. Определим биалгебру  $H^* = A^*(G)/J$ , где  $J$  - некоторый конкретный идеал в  $A^*(G)$ , зависящий от  $E$ . (Эта алгебра называется  $J$ -инвариантом  $E$  по отношению к теории  $A^*$ .) Для любого гладкого проективного клеточного многообразия с действием группы  $G$  на  $A(\bar{X})$  вводится структура комодуля относительно  $H^*$ . Доказывается, что соответствие  $X \mapsto A(\bar{X})$  продолжается до функтора из категории мотивов  $E$ -скрученных форм клеточных  $G$ -многообразий в категорию градуированных  $H^*$ -комодулей.

В частности, разложение мотива в прямую сумму задает разложению комодуля в прямую сумму, а изоморфные мотивные слагаемые соответствуют изоморфным подкомодулям.

В предположении что каждый конечно порожденный градуированный  $A^*(pt)$ -модуль проективен (которое выполняется для основных теорий когомологий по модулю простого числа) показано, что мотивное разложение любого проективного однородного многообразия, расщепимого над общей точкой, определяется разложением  $H^*$  как комодуля над собой. Тем самым проблема задача разложения мотива в прямую сумму мотивов сводится к задаче в теории комодулей.

Доказывается, что комодульная структура полностью определяет неразложимые слагаемые мотива Чжоу по простому модулю проективного однородного многообразия, изоморфные неразложимым слагаемым многообразий, расщепимых над общей точкой.

Во второй половине первой части диссертации рассматриваются конкретные применения приведенной техники к случаю квадратик и однородных многообразий исключительных простых групп. В частности, Теорема 5 описывает новые ограничения на возможные разложения мотива Чжоу на квадратиках в терминах  $J$ -инварианта. Также получен ответ на вопрос Жака Титса о существовании  $E_7$ -торсоров с инвариантом Роста, делящимся на класс центральной простой алгебры степени 4.

Таким образом, в диссертации Виктора Петрова построен мощный аппарат работы с широким классом мотивов. Многочисленные приложения показали его эффективность. Несомненно, дальнейшее развитие методов, предложенных в диссертации, приведет к решению новых задач.

В дальнейших исследованиях я бы рекомендовал обратить внимание на триангулированную категорию Воеводского, в которой наряду с разложением мотивов в прямую сумму можно рассматривать точные треугольники, образующие “башни Постникова”, подобно тому как Воеводский изучал мотивы общих расщепляющих многообразий символов в  $K$ -теории.

У меня имеется несколько замечаний по тексту диссертации. В аксиоме об общих точках следует определить  $A^*(K)$  для любого сепарабельного конечно порожденного расширения  $K/F$ . Перед Леммой 2 на странице 14 нужно объяснить существование скрученной формы  $EY$  для многообразия  $Y$  с действием группы  $G$  и  $G$ -торсора  $E$ . В 1.2.2 клетки Шуберта должны иметь вид  $BwB/B$  в  $G/B$ . Указанные неточности не меняют общей положительной оценки работы.

Результаты диссертации полностью опубликованы в престижных журналах. Методы и основные результаты данной работы являются новыми и

были представлены на многочисленных международных конференциях. Виктор Петров является одним из общепризнанных лидеров в области исследования мотивов алгебраических многообразий.

Диссертация Петрова Виктора Александровича на тему: “Мотивные методы теории алгебраических групп и однородных многообразий” соответствует основным требованиям, установленным Приказом N 11181/1 от 19.11.2021 “О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете”, соискатель Петров Виктор Александрович полностью заслуживает присуждения ученой степени доктора наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика. Пункт 11 указанного Порядка диссертантом не нарушен.

Член диссертационного совета,  
доктор физико-математических  
наук, профессор  
Калифорнийского Университета в  
Лос Анджелесе



Меркурьев Александр Сергеевич  
29 декабря 2021 г.