

## ОТЗЫВ

члена диссертационного совета на диссертацию

**Кривовичева Герасима Владимировича**

«Гиперболические модели процессов переноса и гемодинамики»,

представленную на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

по специальности «1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы  
программ»

**I. Актуальность научных исследований и темы диссертации.** Модели процессов на основе уравнений гиперболического типа и гиперболических систем уравнений возникают в разных разделах прикладной математики и описывают широкий круг процессов, в основном связанных с распространением волн. Такие модели встречаются в задачах акустики, электродинамики, радиофизики, теории упругости, газовой динамики и биомеханики. Численные методы решения задач для гиперболических уравнений активно разрабатываются, начиная со второй половины XX века. Диссертация Г.В. Кривовичева направлена на разработку новых гиперболических моделей линейной диффузии (которая обычно описывается уравнениями параболического типа), численных методов реализации разных гиперболических моделей (конвекции, конвекции-диффузии, течений жидкостей и газов) и новых одномерных моделей течения крови, в которых учитываются ее внутренние свойства. Отдельно рассматриваются задачи оптимизации методов Рунге Кутты, и их применение к решению задач математической физики. Эти результаты представляют интерес и для решения задач Коши в обыкновенных дифференциальных уравнениях с осциллирующими решениями.

Таким образом, **актуальность** проводимых Г.В. Кривовичевым научных исследований не вызывает сомнений и определяется разработкой новых математических моделей, численных методов и реализующих их комплексов программ.

**II. Основные научные результаты и их новизна.** В диссертационном исследовании Г.В. Кривовичева получены следующие новые научные результаты:

1. Предложены новые модели диффузионных процессов в виде системы дискретных по скоростям кинетических уравнений. Установлено, что известные разностные схемы могут быть получены как дискретные аналоги этой системы. Проведен сравнительный анализ разностных схем, и найдены оптимальные значения параметров разностных схем.
2. Проведен анализ устойчивости разностных схем для кинетических уравнений с различными представлениями члена, учитывающего влияние объемных сил. Показано, что среди явных схем наилучшими свойствами обладает модель метода точной разности.
3. Предложены новые разностные схемы для систем кинетических уравнений при моделировании конвекции-диффузии. В диссертации показано, что области устойчивости таких схем имеют большие площади областей устойчивости в пространстве параметров, по сравнению с известными схемами.
4. Впервые проведено сравнение известных нелинейных схем метода пассивного скаляра, предложены их модификации и получены условия устойчивости.
5. Предложены новые параметрические конечно-разностные схемы для линейного уравнения переноса. Проведена оптимизация схем, и найдены оптимальные значения параметров, обеспечивающие минимальные значения дисперсионных и диссипативных характеристик.
6. Проведена параметрическая оптимизация обобщенных методов Рунге Кутты и показано, что, используя разные значения параметров, можно снизить влияние дисперсии и диссипации на численное решение.
7. Предложены новые одномерные математические модели течения крови с учетом ее неньютонаических свойств, позволяющие производить вычислительные эксперименты по моделированию кровотока в больших сосудистых системах. Для модели Куимады и

*РК № 33-06-1200 от 08.11.2022*

обобщенной модели Кросса впервые получены первые интегралы для уравнения стационарного течения. Получены новые аналитические решения нелинейных модельных задач для уравнений вязкой и невязкой гемодинамики.

**III. Степень обоснованности и достоверности научных положений и выводов, сформулированных соискателем.** Достоверность полученных в работе результатов обеспечивается корректным применением методов математического моделирования, вычислительной математики, математической физики и дифференциальных уравнений. Программы, реализующие алгоритмы разработанных численных методов, прошли тестирование на задачах, имеющих аналитические решения. Результаты расчетов представлены в тексте диссертации и подробно обсуждаются.

По теме исследований опубликовано 27 научных работ, из них 21 работа опубликована в изданиях, индексируемых в международных научометрических базах Scopus и Web of Science. Десять работ опубликовано в изданиях, входящих в Q1 и Q2 по областям знаний, относящихся к специальности 1.2.2.

**IV. Обобщенные сведения о структуре диссертации.** Диссертация общим объемом 280 страниц состоит из введения, шести глав с основными научными результатами, заключения и списка литературы.

**Первая глава** посвящена разработке моделей для описания диффузионных процессов на основе систем кинетических уравнений. Автором показано, что в макроскопическом пределе модели эквивалентны линейному уравнению диффузии. В рамках одномерной модели получены аналитические решения начальной задачи. Исследуются различные качественные свойства решений. Проведено исследование устойчивости и сравнение параметрических разностных схем, которые могут быть построены на основе предложенных моделей.

**Вторая глава** посвящена анализу устойчивости известных разностных схем, в которых произведен учет действия объемных сил. Учитывается случай, когда вектор силы направлен под любым углом к вектору направления течения. Построены характеристики областей устойчивости в пространстве параметров, и проведено их сравнение для разных моделей. Приведены рекомендации для практических расчетов.

**Третья глава** посвящена построению и анализу характеристических разностных схем для систем кинетических уравнений при моделировании конвекции-диффузии. Произведен анализ устойчивости, исследованы области устойчивости в пространстве параметров и проведено сравнение с известными разностными схемами.

**Четвертая глава** посвящена разностным схемам для решения уравнения переноса, которые могут быть использованы в рамках решения задач для кинетических уравнений и при моделировании процессов переноса. Получены условия устойчивости схем, исследованы их дисперсионные и диссипативные свойства. Проведен сравнительный анализ известных нелинейных схем при моделировании конвективного переноса. Построены и исследованы схемы разных порядков точности с несимметричными разностями и проведена их оптимизация. На численных примерах показаны возможности применения схем к решению разных прикладных задач.

**Пятая глава** посвящена оптимизации явных методов Рунге — Кутты и их применению к построению разностных схем для решения задач математической физики. Получены оптимальные значения параметров, гарантирующие высокий порядок сходимости и большой интервал устойчивости по мнимой оси. Приведено большое число примеров применения методов к решению задач для линейных и нелинейных (синус-Гордона, Кортевега — де Фриза) уравнений.

**Шестая глава** посвящена одномерным моделям течения крови, учитывающим ее неニュтоновские свойства. Получены интегралы стационарных уравнений гемодинамики, а также стационарные решения. С помощью метода малого параметра построены аналитические решения нелинейных задач для уравнений гемодинамики. Полученные

решения используются при сравнении различных моделей друг с другом. Описывается комплекс программ для проведения численного моделирования течения крови в больших сосудистых системах. По результатам вычислительных экспериментов проведено сравнение моделей между собой.

В каждой главе диссертации приводятся результаты численного моделирования, подтверждающие работоспособность предложенных подходов.

**V. Основные замечания к диссертационной работе состоят в следующем:**

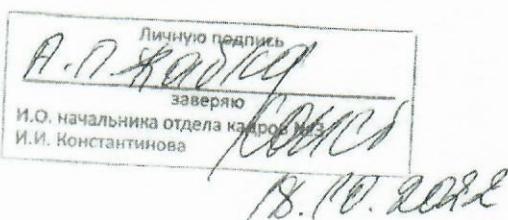
1. В главе 1 следовало бы привести примеры применения разностных схем к решению практических задач и сравнению их с известными схемами для уравнения диффузии. Не очевидно, что расчеты по схемам на основе системы уравнений (например, из пяти уравнений в двумерном случае) будут проводиться быстрее, чем в случае схемы для одного уравнения параболического типа.
2. Разностные схемы из главы 3 названы «характеристическими». Является ли такой термин общепринятым?
3. Доказательства утверждений (например, в главе 6) следовало бы провести более строго и оформить так, как это принято в математической литературе.
4. Имеются погрешности оформления диссертации: например, на стр. 16 в п. 2 два раза подряд встречается слово «свойствами»; на стр. 30 и 31 автор ссылается на формулу, у которой отсутствует номер; на стр. 75, 84, 144 (русскоязычная версия работы) ссылка на рисунок оформлена как fig. ... Кроме того, в тексте встречаются опечатки.

**VI. Заключение.** Диссертация Кривовичева Герасима Владимировича на тему «Гиперболические модели процессов переноса и гемодинамики» соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 19.11.2021 № 11181/1 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», а соискатель Кривовичев Герасим Владимирович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности «1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Нарушения пунктов 9 и 11 указанного Порядка в диссертации не обнаружены.

Член диссертационного совета,  
заслуженный работник  
Высшей школы Российской Федерации,  
профессор, заведующий кафедрой теории управления  
Санкт-Петербургского государственного университета,  
доктор физико-математических наук, профессор

Жабко А.П.

18 октября 2022 года



18.10.2022