

ОТЗЫВ члена диссертационного совета  
Кузнецова Николая Владимировича на диссертацию  
Кривовичева Герасима Владимировича «Гиперболические модели процессов переноса и  
гемодинамики», представленную на соискание ученой степени доктора физико-  
математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ

Диссертация Г.В. Кривовичева посвящена разработке математических моделей диффузионных процессов переноса вещества и течения крови на основе гиперболических систем уравнений в частных производных. Важная часть результатов работы относится и к вопросам практического применения таких моделей, связанных с разработкой и анализом новых численных методов. В работе предложены новые математические модели для описания линейной диффузии и течения крови с учетом ее внутренней структуры. Проведен сравнительный анализ известных из литературы моделей учета действия объемных сил в системе дискретных кинетических уравнений. Разработаны новые численные методы решения систем кинетических уравнений и линейного уравнения переноса. Отдельно рассматривается подход к оптимизации методов Рунге – Кутты для их применения к решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с осциллирующими решениями и к решению начально-краевых задач для волновых уравнений. Тематика диссертации отвечает указанной специальности.

**Новизна** полученных результатов связана с разработкой новых моделей процессов переноса вещества, основанных на гиперболических системах уравнений в частных производных и развитием численных методов решения задач для таких систем. Предложены новые одномерные математические модели, описывающие течение крови в сосудистых системах и получены новые аналитические решения задач в упрощенной постановке.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается корректным применением используемых в исследовании методов математического моделирования, математической физики, вычислительной математики, обыкновенных дифференциальных уравнений и теоретической физики. Эффективность предложенных численных методов показана на конкретных примерах.

**Теоретическая значимость** диссертации отражена в следующих результатах:

- Разработаны гиперболические математические модели линейного диффузионного процесса и исследованы качественные свойства их решений.
- Проведен анализ устойчивости разностных схем для систем кинетических уравнений, учитывающих влияние объемных сил. Изучены геометрические характеристики областей устойчивости в пространстве параметров.
- Проведен анализ устойчивости нелинейных схем для численного моделирования конвективного переноса вещества.
- Разработаны новые эффективные параметрические разностные схемы для моделирования процессов конвекции-диффузии и конвективного массопереноса.
- Предложены новые одномерные модели для описания гемодинамики в больших сосудистых системах, учитывающие клеточную структуру крови.

РКН/33-06-1198 от 08.11.2022

- Получены интегралы стационарных уравнений гемодинамики и аналитические решения начально-краевых задач.

**Практическая значимость** связана с тем, что на основе гиперболических моделей диффузии можно разрабатывать новые эффективные численные методы для проведения многомасштабного моделирования на современных вычислительных комплексах. Предложенные новые разностные схемы могут быть использованы при решении самых разных задач для кинетических уравнений и уравнения конвективного переноса. Математические модели гемодинамики можно применять при решении прикладных задач медицины. Полученные аналитические решения могут быть использованы для сравнения друг с другом разных моделей течения крови.

Работа состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Во введении изложена актуальность темы исследования, сформулированы цель и задачи исследования, приведены основные положения, выносимые на защиту, указаны научная новизна, теоретическая и практическая значимость. Глава 1 посвящена разработке новых математических моделей линейной диффузии, основанных на гиперболических системах уравнений в частных производных. Проведено исследование качественных свойств решений аналитическими и численными методами. В Главе 2 проведено сравнение различных моделей учета действия объемных сил в системах дискретных кинетических уравнений. Отличительной особенностью подхода, применяемого автором, является использование в качестве средства сравнения моделей геометрических характеристик областей устойчивости в пространстве параметров. Глава 3 и Глава 4 посвящены разработке и анализу новых конечно-разностных схем для решения задач конвекции-диффузии и конвективного переноса. Полученные теоретические результаты подкрепляются решением численных примеров. Глава 5 посвящена параметрической оптимизации методов Рунге – Кутты, использующих производную правой части решения. В Главе 6 разрабатываются и исследуются новые математические модели гемодинамики, в рамках которых учитываются неニュтоновские свойства крови, обусловленные наличием у нее внутренней структуры. В рамках главы получены как аналитические решения упрощенных начально-краевых задач, так и проводится численное моделирование течения крови в модельных сосудистых системах. В заключении приведены положения, выносимые на защиты и определены перспективы развития результатов работы.

В качестве **замечаний** по рецензируемой диссертационной работе можно отметить:

1. В Главе 5 описывается подход к оптимизации специального класса методов Рунге – Кутты, основанный на построении области устойчивости метода, имеющей наибольшую длину интервала устойчивости по мнимой оси. Такой подход ориентирован на случай уравнений с осциллирующими решениями. Отметим, что многие колебательные системы являются консервативными. В связи с этим возникает следующий вопрос: можно ли распространить указанный подход на численные методы, учитывающие сохранение интегралов движения?

2. Результаты анализа устойчивости, проведенного в Главе 2, было бы интересно проиллюстрировать при решении конкретных задач гидродинамики – насколько полученные ограничения на значения параметров соответствовали бы потери устойчивости (или наоборот. стабилизации) течений жидкости под действием объемных сил.

3. В работе только на стр. 229-230 приведено достаточно скучное описание разработанного автором комплекса программ. В приложении следовало бы привести примеры листингов программ. При этом в работе не указано, прошел ли государственную регистрацию разработанный комплекс программ.

4. Из представленных на рис. 3.7–3.11 графиков границ областей устойчивости в пространстве параметров достаточно тяжело понять, какие части соответствуют устойчивости, а какие – нет.

5. На приведенных в русской версии диссертации рисунках (например, на рис. 3.1, 4.12, 4.29 и других) следовало бы использовать русские надписи.

Работа имеет хорошую **апробацию** – в частности, десять работ опубликовано в журналах, входящих в Q1-Q2 по соответствующим диссертации областям знаний. Содержание диссертации отражено в публикациях автора.

**Заключение.** Указанные замечания не снижают научной ценности диссертационной работы Г.В. Кривовичева, результаты которой являются решением актуальных научных проблем, имеющих важное практическое значение.

Диссертация Кривовичева Герасима Владимировича на тему: «Гиперболические модели процессов переноса и гемодинамики» соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 19.11.2021 №11181/1 «О порядке присуждения учёных степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», а соискатель Кривовичев Герасим Владимирович заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Нарушения пунктов 9 и 11 указанного Порядка в диссертации не обнаружены.

Член диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
член-корреспондент РАН,  
заведующий кафедрой прикладной кибернетики СПбГУ



Н.В. Кузнецов

30.09.2022