ОТЗЫВ

члена диссертационного совета Стрекаловского Александра Сергеевича на диссертацию Долгополика Максима Владимировича на тему: «Конструктивный негладкий анализ и его приложения к задачам оптимизации, вариационного исчисления и теории управления», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

В настоящий момент в России в целом, а также в ведущих научных центрах РФ сложилась достаточно тяжелая ситуация с воспитанием молодых кадров мирового уровня в классических направлениях современной математики, таких как математический и функциональный анализ, теория уравнений математической физики, теория обратных и некорректных задач, теория экстремальных задач, негладкая оптимизация и т. д.

К тому же и появились новые вызовы XXI века: исследование и поиск равновесий (скажем по Нэшу), задачи иерархического управления и, конечно, динамические задачи вышеуказанной структуры.

Многие сингулярности как классических задач, так и «новых задач XXI века» обусловлены, чаще всего, явными или скрытыми формами «невыпуклости» этих задач. Это означает, что (на языке оптимизации) в задаче может существовать достаточно много (иногда огромное число) локальных решений, которые далеки от множества глобальных решений (последнее может быть даже несвязным). К тому же эти задачи обычно бывают частично негладкими.

Необходимо отметить также, что определенные сложности в развитии фундаментальной математики в России создали непрофессиональные и вредоносные реформы в 90-х и начале 2000-х годов в образовании и в Высшей школе. Поэтому естественно возникла колоссальная «волна» так называемых специалистов по “computational simulation” (CS) следующих в фарватере высшей школы США, обещающих «все решить» посредством, скажем, имитационного моделирования (ИМ). При этом примеров решения важных прикладных цивилизационных задач с помощью CS и ИМ просто не существует, в то время как с именами, скажем, М. В. Келдыша, И. В. Курчатова, А. Н. Тихонова связано решение задач «флаттера» и атомной энергетики вообще без всяких компьютеров. Отметим, что мы не против CS и ИМ, мы – за. Но нужна мера.

Поэтому исследование разных подходов к решению подобных задач, разработка нового математического аппарата, основанного на достижениях, скажем, функционального анализа в XX веке, представляется насущной необходимостью для развития методов исследования внутренних проблем современной математики, нацеленных на вызовы XXI века.

С другой стороны, эти исследования должны быть ориентированы на обеспечение насущных проблем России. Именно таковой мне представляется работа М. В. Долгополика.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 431 источника и списка обозначений.

Во введении даны исторический обзор развития негладкой оптимизации и картина современного состояния этой дисциплины. Кроме того, обоснована актуальность исследований, обозначены цели исследования, их теоретическая и практическая значимость и методы исследования. Наконец, достаточно подробно освещены основные результаты работы, а также апробация диссертации и публикационная активность соискателя.

Глава I диссертационной работы посвящена разработке нового математического аппарата Конструктивного Негладкого анализа, начатой В. Ф. Демьяновым и продолженной (совместно) А. М. Рубиновым. Глава I – это основополагающий фундамент для всей диссертации, который затем развивается в четырех последующих главах для других негладких задач оптимизации, вариационного исчисления и теории управления.

Вначале ситуация изучается в гильбертовом пространстве, и даже в конечномерном, затем производится обобщение результатов на банаховы пространства, и более того, строится абстрактное кодифференциальное исчисление негладких функций.

На наш взгляд, центральной теоремой главы I является Теорема 1.2.1 и ее следствия об эквивалентности кодифференцируемости и квазидифференцируемости негладкой функции, что позволяет, в зависимости от ситуации применять, скажем в доказательстве, либо один, либо другой аппарат.

В частности, это позволяет посмотреть с разных точек зрения на популярный аппарат условий оптимальности, а затем построить на этой основе численные методы негладкой оптимизации (см. главу III).

В главе III на основе результатов главы I разрабатывается и обосновывается метод кодифференциального спуска (МКДС). В § 3.1 приводится изначальная схема этого теоретического метода (Алгоритм 1), предложенная В. Ф. Демьяновым, обсуждаются его свойства и исследуется сходимость МКДС. Затем с помощью квадратичной регуляризации предлагается модификация МДКС, которая уже выглядит более алгоритмичной и реализуемой. В конце главы разрабатывается метод глобального кодифференциального спуска для очень интересного класса кусочно-аффинных функций (Алгоритм 4). На основе конкретизации условий оптимальности из главы I для кусочно-аффинных функций доказана Теорема 3.4.2 о глобальной и конечной сходимости Алгоритма 4, что представляется очень важным результатом для решения задач с кусочно-аффинными функциями.

В главе IV освещен взгляд соискателя на весьма популярное поле исследований, связанное с темами модифицированной функции Лагранжа (МФL) и точного штрафа.

Здесь выбран путь объединения этих идеологий посредством отделяющих функций, а также принципа локализации. Рассматриваются также модифицированная функция Лагранжа Рокафеллара-Ветса (MΦLRV). На основе этой идеологии затем исследуется расширенная точность отделяющих функций и соответствующий принцип локализации. После этого для задачи (P) (с. 201) на метрическом пространстве вводятся вполне точные штрафные функции и вспомогательные задачи (4.13). Далее. Теорема 4.3.1 – условия точности штрафа. В конце главы исследуется интересная задача оптимального управления (ОУ) с закрепленными концами, которая простым штрафом сводится к задаче ОУ со свободным правым концом. Для последней задачи Теорема 4.3.2 устанавливает (с помощью Теоремы 4.3.1) достаточные условия точности штрафа. Эта простейшая задача ОУ дает старт исследованию основных целей и вопросов диссертации для сложных задач вариационного исчисления и задач управления (главы II и V).

Так в главе II рассматриваются свойства функционала Лагранжа с кодифференцируемым интегрантом, определенном на пространствах Соболева $W^{1,p}(\Omega)$ и т.д. Прежде всего, вводятся условия кодифференцируемости порядка p, а затем доказывается кодифференцируемость интегрального функционала (Теорема 2.1.1). Это тяжелейшая и труднейшая работа (Леммы 2.1.1 – 2.1.4 и т.д.) могла быть выполнена только исследователем, обладающим фундаментальной математической подготовкой и твердой заряженностью на результат.

Эти достижения позволяют далее в секции 2.2 получить условия оптимальности в негладких задачах Вариационного Исчисления (ВИ) – включения Эйлера-Лагранжа (Теоремы 2.2.1 – 2.2.3). Примеры демонстрируют сравнительную эффективность полученных результатов.

В главе V уважаемый соискатель рассматривает прикладные задачи (стабилизация интегратора Брокетта и синхронизация двух осцилляторов Дуффинга). Представляется, что этот «поворот» расширит поле научных интересов М. В. Долгополика, что позволит ему направленно усовершенствовать разработанный аппарат негладких анализа, оптимизации и условий оптимальности с целью построения на этой основе численных методов, способных отыскивать не только inf-стационарные точки (управления, процессы). При этом возможно расширение и модификация подходов, основанных на классических (специальных) законах управления (типа (5.58)). При дополнительных предположениях это означает расширение постановки задачи с целью применения вариационного (оптимизационного) подхода, с возможной комбинацией с методами функции Ляпунова и т. д., поскольку исследуются очень трудные задачи, для которых соискатель сделал серьезный шаг в применение результатов негладкого анализа.

В заключении достаточно ясно и подробно изложено основное содержание диссертации.

Теоретическая значимость работы состоит прежде всего, в разработке и обосновании нового математичекого аппарата кодифференциалов, введенного в конце 80-х годов В. Ф. Демьяновым. В диссертации М. В. Долгополика представлен значительно продвинутый аппарат кодифференциального исчисления, и даже абстрактного кодифференциального исчисления (КДИ). В частности, установлены взаимосвязи с весьма популярным понятием квазидифференциала, о чем говорит одна из центральных теорем работы – Теорема 1.2.1 – и ее следствия. С помощью разработанного аппарата удалось значительно продвинуть теорию условий оптимальности, например, для задач безусловной d.c. минимизации и кусочно-аффинных функций, а также общей задачи математической оптимизации с ограничениями типа равенства и неравенства. Более того, для случая кусочно-аффинных функций разработана эффективная и более реализуемая, легче имплементируемая модификация метода кодифференциального спуска, для которого доказана конечная сходимость.

Далее, теория кодифференцируемости и условий оптимальности удачно применена для весьма сложных задач вариационного исчисления на пространствах Соболева. Кроме того, в работе предпринята весьма обещающая попытка построения единой теории точного штрафа и модифицированных функций Лагранжа.

Наконец, для нелинейных задач управления, обобщающих задачи автоматического регулирования, разработаны методы применения аппарата кодифференциального исчисления. Для конкретных задач управления: стабилизация интегратора Брокетта и синхронизация двух осцилляторов Дуффинга, задача граничного управления энергией в нелинейных моделях Клейна-Гордона и синус-Гордона эта аппликация дала очень хорошие и неожиданные законы управления.

Практическая значимость работы заключена, во-первых, в построении новой модификации метода кодифференциального спуска (МКДС), которая значительно проще в реализации и поэтому эффективнее, например, для случая кусочно-аффинных функций. Если для общего случая негладкой функции МКДС продуцирует inf-стационарную точку, то для случая кусочно-аффинной функции он решает эту задачу за конечное число итераций. Эти результаты открывают возможность применения МКДС для других задач негладкой оптимизации.

Результаты исследования негладких задач вариационного исчисления (ВИ) на пространствах Соболева, прежде всего, условия оптимальности, позволяют применить МКДС и его обобщений для прикладных задач оптимального управления подобного класса, возникающих в различных областях техники, экономики, экологии, космоса и военных приложениях. Это же можно сказать и о задачах управления из главы V, и о построении «законов управления» в подобных динамических системах.

Научная новизна. Все (двенадцать) основные результаты диссертации, заявленные по введении (с. 15-16) являются действительно новыми. Особо, на наш взгляд, необходимо отметить следующие.

(А) Построена теория (исчисление) непрерывно кодифференцируемых функций в банаховых пространствах, для этих функций доказаны теорема о среднем и свойство локальной липшицевости, а также ряд других новых свойств.

(Б) Введены новые условия регулярности для систем равенств и неравенств с квазидифференцируемыми функциями, доказаны достаточные условия локальной метрической регулярности таких систем.

(В) Доказаны новые условия оптимальности для негладких задач математической оптимизации в условиях квазидифференцируемости.

(Г) Построена теория (исчисление) абстрактно кодифференцируемых отображений, позволившая выработать единый взгляд на различные понятия негладкого анализа (квазидифференциалы, кодифференциалы, экзостеры, коэкзостеры и т. д.)

(Д) Разработаны достаточные условия для непрерывной кодифференцируемости интегрального функционала на пространстве Соболева, для которого вычислено непрерывное кодифференциальное отображение. С помощью этого результата доказаны новые условия оптимальности в терминах кодифференциалов для негладких задач вариационного исчисления (в частности, задачи Больца и изопериметрической задачи).

(Е) Разработано три новых модификации метода кодифференциального спуска (МКДС), сходимость которых доказана. При этом впервые доказана оценка скорости сходимости МКДС. Кроме того, для случая глобального кодифференциала доказана сходимость МГКДС к глобальному минимуму за конечное число шагов на классе аффинных функций.

(Ж) Обосновано обобщение метода скоростного градиента (МСГ) не негладкий случай. Эффективность негладкого варианта МСГ верифицирована на прикладных задачах (стабилизация интегратора Брокетта и синхронизация двух осцилляторов Дуффинга). Кроме того, негладкий МСГ был применен для решения прикладных задач управления энергией (граничное управление с нелинейным уравнением Клейна-Гордона, а также системы синус-Гордона при только граничных измерениях).

По диссертации М. В. Долгополика возникли следующие замечания и комментарии.

1. *Обозначения.* Принято, что в диссертации обозначения должны быть едиными и способствовать пониманию материала, т. е. по возможности обозначать один объект. Например, Т. Рокафеллар для обозначения чисел чаще использует греческие буквы.

(а) Соискатель же «обожает» лишь одну первую букву A, которая может обозначать число (глава II), множество-ограничение (главы I, IV), и даже оператор-генератор в линейной системе управления (глава IV).

(в) Из греческого алфавита он предпочитает φ, которая обозначает штрафную функцию (главы I, IV), а в главе II это пробная функция и т. д.

2. *Терминология.* Известно, что отход от классической терминологии не приветствуется. Согласно терминологии автора метода штрафных функций Куранта (1943 г.), функция $\varphi(\cdot)$ из глав I, IV – это функция штрафа, а

$$F_c(\cdot) = f(x) + c\varphi(\cdot)$$

– это оценочная функция (merit function). Последняя становится точной, когда оптимальное значение $f_* = V(P)$ исходной задачи с ограничениями совпадает с оптимальным значением оштрафованной задачи $f_* = V(P_c)$ для $c \geq c_*$, где c_* - пороговое значение штрафного параметра. Или, когда $Sol(P) = Sol(P_c)$. Соискатель лучше меня все это знает, но использует неточную терминологию (см. И. И. Еремин, У. Зангвилл, [117] и т. п.)

3. Соискатель не всегда внимательно относится к нулю. Например, в § 1.1.1 и далее неясно, где лежит ноль: $0 \in \mathbb{R}$ или $0 \in H$, или $0 \in \mathbb{R} \times H$. Нужно искать пути, чтоб упростить восприятие содержания математических формул.

4. Включения типа (1.29) (или (3.2) и т. д.)

$$0 \in (0, x^*) + \bar{d}f(x_*) \ \ \forall (0, x^*) \in df(x_*) \tag{1.29}$$

часто можно записывать в более удобной форме Рокафеллара-Хириарт-Уррути

$$-\underline{d}f(x_*) \subseteq \bar{d}f(x_*),$$

которая может подсказать дополнительные связи с существующими результатами. Внимание, в формуле (1.29) нули-то разные!

5. Теорема 1.2.1 о взаимосвязи ко- и квазидифференциала подсказывает, что некоторые доказательства могут быть исполнены с помощью квазидифференциалов, что может облегчить их восприятие.

6. Нельзя не сказать о сильном стремлении молодого соискателя получать самые общие результаты в самых общих пространствах (Бурбаки, да и только!). Хотя проиллюстрировать идею иногда можно и в конечномерном пространстве. Это приводит к необходимости большого числа определений (см. главу IV, с. 195). На одной странице сразу три определения. Вообще, в главе IV их слишком много. Иногда эти определения слишком длинны (см. определение 2.1.1). Краткость и ясность взаимосвязаны.

7. В списке литературы нет монографий Ф. П. Васильева, J. Nocedal and St. Wright, Ф. Л. Черноусько и Ж.-Л. Лионса по оптимальному управлению, которые могли подсказать некоторую новую информацию для «атаки» на прикладные задачи.

8. Часто в примерах показана неоптимальность $u_*(\cdot)$ (Пример 2.2.3). Как построить здесь функцию, лучшую, чем $u_*(\cdot)$?

Тем не менее, ясно, что все эти недостатки носят технический характер и не снижают высокого научного уровня диссертационного исследования, представляющего законченную научно-исследовательскую работу, выполненную в актуальном направлении.

Полученные результаты являются новыми, четко сформулированы и полностью строго обоснованы утверждениями, доказанными в виде лемм и теорем.

Основные результаты диссертации М.В. Долгополика опубликованы в ведущих мировых изданиях, весьма жестко рецензируемых, к тому же неоднократно докладывались на крупнейших международных конференциях.

Работа выполнена на высоком международном и профессиональном уровне и представляет собой законченное исследование.

Диссертация Долгополика Максима Владимировича на тему: «Конструктивный негладкий анализ и его приложения к задачам оптимизации, вариационного исчисления и теории управления» соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 19.11.2021 № 11181/1 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», соискатель Долгополик Максим Владимирович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Пункты 9 и 11 указанного Порядка диссертантом не нарушены.

Член диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор,
заслуженный деятель науки РФ А. С. Стрекаловский

Заведующий отделением, главный научный сотрудник,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук,
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134,
Тел: +7(3952)453031, e-mail: strekal@icc.ru

5 марта 2022

Подпись заверяю
Нач. отдела делопроизводства
и организационного обеспечения
ИДСТУ СО РАН
Г.Б. Кононенко
05.03.2022