ОТЗЫВ

члена диссертационного совета
на диссертацию Долгополика Максима Владимировича на тему:
«Конструктивный негладкий анализ и его приложения к задачам оптимизации, вариационного исчисления и теории управления»,
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена исследованию актуальных проблем негладкой оптимизации и негладкого анализа. Взяв активный старт примерно в 1970х, эта область не теряет динамики и активно развивается по настоящее время, черпая мотивацию как в своей внутренней логике и смежных областях математики, так и в практических потребностях значимых современных приложений, например, к алгоритмам машинного обучения, искусственного интеллекта и управления сложными системами. О неизменной актуальности области свидетельствует Scopus, где с 2018 года проиндексировано 1387 научных публикаций с ключевыми словами nonsmooth optimization. К достойным упоминания чертам данной области можно отнести гармоничное сочетание конечной практической нацеленности с применением математического аппарата высокого уровня абстракции, а также полифонию, где общие сквозные идеи сосуществуют с существенным разнообразием конкретных подходов к построению теории. Это разнообразие можно объяснить сложностью исследуемых объектов и связанной проблемностью исчерпывающего и окончательного решения.

Диссертационная работа развивает направление, связанное с идеями конструктивного негладкого анализа В.Ф. Демьянова. Отталкиваясь от этого фундамента и оставаясь в целом в его идейном поле, автор разработал и представил в диссертации оригинальный общий и унифицированный подход к исследованию негладких задач оптимизации, в фокусе которого ранее недостаточно изученные случаи: задачи в (бесконечномерных) банаховых пространствах, вариационные задачи и задачи оптимального управления В рамках этого подхода развиты новые теоретические инструменты исследования негладких экстремальных задач и построена связанная с ними теория, эффективность которой проиллюстрирована как ее способностью к унификации многих известных результатов, так и продуктивными приложениями новых результатов к различным классам негладких задач, возникающих в оптимизации и теории управления.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка обозначений и списка литературы. Глава 1 диссертации носит базовый характер. Здесь введены основные предлагаемые автором инструменты анализа негладких функций, определенных на бесконечномерных банаховых пространствах, названные кодифференциалами, и построена их общая теория. В частности, построено исчисление кодифференциалов, получены оценки остаточного члена в кодифференциальном разложении, в терминах введенных кодифференциалов установлены новые условия регулярности для систем негладких равенств и неравенств, а также новые условия локального экстремума для негладких задач нелинейного программирования, в терминах глобальных кодифференциалов получены условия глобальной оптимальности для задач условной оптимизации в ситуации, когда минимизируемый функционал и функционалы, задающие ограничения, представимы в виде разности выпуклых функций. Также в первой главе представлено доказательное обсуждение возможного обобщения развитой теории кодифференциалов в русле идей абстрактного выпуклого анализа на случай нелинейных операторов.

В главе 2 развитая в главе 1 теория применяется к исследованию негладких задач вариационного исчисления (многомерных и одномерных) с различными ограничениями. В данной главе при определенных естественных условиях установлена кодифференцируемость интегрального функционала, определенного на пространстве Соболева, а также получена явная формула для вычисления соответствующего кодифференциала. На этой основе для негладких вариационных задач установлены новые условия экстремума в виде включения, представляющего собой естественный аналог уравнения Эйлера-Лагранжа. Приведены примеры, подчеркивающие эффективность полученных условий экстремума по сравнению с рядом известных результатов. Помимо самостоятельного интереса, представленное в главе доказательное вычисление кодифференциала интегрального функционала имеет значение как демонстрация разработанной автором технологии обоснования результатов такого рода, что имеет значение для распространения полученных в главе результатов на новые классы вариационных задач и задач оптимального управления.

Глава 3 сфокусирована на практических применениях развитого аппарата для синтеза и анализа методов последовательных приближений к решению негладких задач оптимизации. Здесь представлена схема метода кодифференциального спуска, получена теорема о его глобальной сходимости к точкам, удовлетворяющим соответствующим необходимым условиями минимума, и установлен результат, аналогичный факту сходимости нормы градиента к нулю для градиентных методов в гладком случае. Применительно к задачам с выпуклыми ограничениями представлена модификация указанного метода и получена оценка скорости его сходимости в выпуклом случае, аргументирующая его эффективность. Также доказана сходимость модифицированного метода кодифференциального спуска к точке глобального минимума невыпуклой кусочно-аффинной функции за конечное число шагов, не имеющая аналогов среди общих методов оптимизации недифференцируемых функций.

В главе 4 развитый в главе 1 аппарат применен для развития важного общего подхода к решению задач условной оптимизации, связанного с использованием штрафных функций и модифицированных функций Лагранжа. Здесь рассматриваются задачи в конечномерных пространствах и разработана общая теория, позволяющая единообразно получать конструктивные достаточные условия справедливости ключевого для указанного подхода обстоятельства: совпадения (для всех достаточно больших значений штрафного параметра) множества точек локального/глобального минимума "оштрафованной" функции или модифицированной функции Лагранжа с множеством точек локального/глобального минимума основной задачи условной оптимизации. Эффективность полученных общих результатов проиллюстрирована приложениями к по-видимому, наиболее популярным «линейным» штрафным функциям, а также к некоторым специальным модифицированным функциям Лагранжа. Получена общая теорема о точности штрафных функций для задач оптимизации в метрических пространствах. На этой основе установлено, что при определенных условиях актуальная для многих приложений задача оптимального управления линейным эволюционным уравнением в бесконечномерном фазовом пространстве в сложном случае заданного конечного состояния системы может быть в определенным смысле сведена к более простому случаю аналогичной задачи со свободным конечным состоянием за счет модификации минимизируемого функционала добавлением надлежащего штрафа.

В главе 5 развитый аппарат негладкого анализа применен для развития метода скоростного градиента, который зарекомендовал себя эффективным средством решения разнообразных задач управления нелинейными системами. Его базовая схема подразумевает наличие некоторой целевой функции и опирается на гладкость как этой функции, так и динамики системы. В главе 5 эта схема обобщена на случай негладкой целевой функцией и негладкой динамики, а для полученных в рамках этой схемы алгоритмов управления доказаны теоремы о достижении цели управления. Рассмотрены приложения "негладких" алгоритмов скоростного градиента к задаче стабилизации интегратора Брокетта и к задаче адаптивной синхронизации двух осцилляторов Дуффинга, что позволило провести сравнение между гладкими и негладкими алгоритмами скоростного градиента. Особо выделю первый пример, так как неголономный интегратор Брокетта с одной стороны, описывает поведение многих механических объектов и с другой стороны, является прототипическим примером системы, которая не может быть стабилизирована гладкой стационарной обратной связью. Построение в главе 5 стабилизирующего разрывного регулятора на основе развитой негладкой версии метода скоростного градиента дает убедительную мотивацию разработки такой версии. Наконец, в главе 5 решена интересная задача управления энергией в нелинейной модели Клейна-Гордона с помощью граничного управления и аналогичная задача для уравнения синус-Гордона в предположении, что измерениям доступна лишь производная по пространственной переменной в граничной точке.

Среди наиболее значимых теоретических результатов диссертации - разработанный в ней единый подход к исследованию негладких экстремальных задач, опирающийся на кодифференциальное исчисление. В его рамках построено исчисление соответствующих аппроксимаций негладких функций, получены новые условия регулярности негладких ограничений, исследованы вопросы метрической регулярности негладких отображений и вычисления конусов, касательных к множествам, описываемым недифференцируемыми функциями, а также получены условия локальной и глобальной оптимальности для различных классов негладких экстремальных задач. На примерах показано, что предложенный подход позволяет получать условия (в частности, необходимые условия экстремума), усиливающие ранее известные результаты. В целом диссертация вносит значительный вклад в теорию экстремальных задач, что определяет теоретическую значимость ее результатов.

Хотя основные результаты диссертации носят теоретический характер и касаются весьма абстрактных моделей, в ней значительное внимание уделено и более прикладным темам, связанным с исследованием сходимости численных методов минимизации недифференцируемых функций, развитием метода скоростного градиента и решением ряда представляющих самостоятельный интерес конкретных задач управления. Подобные результаты обладают значительной ценностью для различных приложений и подтверждают практическую значимость исследований, представленных в диссертационной работе.

В целом, диссертация М.В. Долгополика является законченным, целостным исследованием, выполненным на высоком научном уровне. Основные результаты диссертации являются новыми и опубликованы в ведущих международных журналах по оптимизации и управлению. Они докладывались на различных российских и международных семинарах и конференциях.

По тексту диссертации имеются следующие замечания:

1. В главе 5 автор убедительно мотивировал целесообразность и значимость предлагаемых обобщений и продвижений “прикладными” аргументами, лежащими вне сферы внутренней логики теории негладкого анализа. Работа выиграла бы от обсуждения, даже в плане потенциальных возможностей, аналогичной мотивации применительно к главе 1 и другим главам диссертации.

2. Неудачной представляет манера без пояснений ссылаться в доказательствах на результаты, которые будут обоснованы лишь в последующих главах (пример: с. 38 из главы 1 со ссылками на теоремы 4.1.4 и 4.1.5 из главы 4). Здесь читателю как минимум полезен сигнал о том, что автор проконтролировал потенциальную возможность логического замкнутого круга и гарантирует его отсутствие.

3. Последнее предложение на с. 50 “если основное пространство рефлексивно, то кодифференциал это пара выпуклых замкнутых ограниченных подмножеств нормированного пространства”. Это верно, но представляется, что рефлексивность здесь не по существу, так как из компактности в слабой* топологии вытекает замкнутость и ограниченность по норме сопряженного пространства.

4. В определении 1.2.2 было бы полезно подчеркнуть, что речь идет о непрерывности по Хаусдорфу в норме пространства. Это заключение выводимо из контекста, но лучше

избавить читателя от подобной работы.

5. С. 76, строка 12 “Квазидифференциальная сумма является ... по определению квазидифференциала”. Фигура речи “по определению” часто воспринимается как указание на то, что в самом определении оговорено обсуждаемое свойство. В данном случае это не так. Поэтому иместнее иная, менее прямолинейная фразеология.

6. Применительно к п. 3 теоремы 1.2.5 полезно краткое пояснение замечания в скобках.

7. В параграфе 1.3 символ H обозначает множество “базовых функций”, используемых для определения абстрактной выпуклости. В других параграфах тот же символ (иногда в ином шрифте) ссылается на гильбертово пространство, а в главе 5 на гамильтониан рассматриваемой системы. Такое перенасыщение одного символа разными смыслами (хотя и в разных местах работы) нельзя признать удачным решением.

8. Условие сегмента со с. 118 фигурирует в основных результатах, но по моим наблюдениям не использовано в приведенных доказательствах. Это обстоятельство объясняется тем, что обсуждаемое условие требуется только для “L_1-варианта” рассматриваемой задачи, детальный разбор которого в диссертации опущен ввиду технической громоздкости (что само по себе воспринимается с пониманием). Однако было бы полезно краткое пояснение необходимости и роли этого условия в указанном случае.

9. С. 118. Утверждение “условие сегмента гарантирует, что множество не лежит одновременно с обеих сторон некоторой части своей границы” представляется сомнительным. Впрочем оно сугубо побочно и не связано с основным материалом работы.

10. Не могу признать удачным употребление термина “разбиение” на с. 170: обычно он подразумевает представление множества в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств, хотя в контексте с. 170 свойство попарного непересечения отсутствует.

11. Были бы полезны содержательные примеры, иллюстрирующие задачу (4.10).

12. В главе 5 для систем, описываемых дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью, решения понимаются в простейшем, “наивном” смысле, который, например, не учитывает возможное (в общем случае) скольжение по поверхностям разрыва и родственные эффекты. Диссертация сильно выиграла бы от обсуждения причин и возможности такого подхода, который впрочем не вызывает принципиальных возражений в контексте конкретных задач, рассмотренных в главе 5.

13. В тексте присутствуют опечатки; несколько примеров:

с. 35, 5 строка снизу,

с. 39, 6 строка снизу;

с. 65, Лемма 1.2.8 и ее доказательство - потеря индекса i у \alpha в сумме;

с. 79, выделенная формула: неясна роль x;

с. 191 “скалярное произведение в \mathbb{R}^s” - использование s в этой формуле неудачно, так как чуть ранее s - это индекс функции g_s;

п. 3 теоремы 4.3.1 - лишний символ в конце предложения; с.209 строка 3

Указанные замечания не носят принципиального характера, во многом относятся к побочным комментариям и не касаются основного материала, большинство из них легко устраняется при чтении и не препятствует пониманию основного содержания работы; в целом они не влияют на общую положительную оценку диссертации.

Заключение

Считаю, что диссертация Долгополика Максима Владимировича на тему: «Конструктивный негладкий анализ и его приложения к задачам оптимизации, вариационного исчисления и теории управления» соответствует основным требования, установленным Приказом №11181/1 от 19.11.2021 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», соискатель Долгополик Максим Владимирович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Пункты 9 и 11 указанного Порядка диссертантом не нарушены.

Член диссертационного совета
Доктор физ.-мат. наук,
Профессор, зав. каф. теор. киберн.,
Санкт-Петербургского государственного университета,
Матвеев Алексей Серафимович

дата 08 марта 2022 г.