

ОТЗЫВ

члена диссертационного совета Ерохина Владимира Ивановича
на диссертацию Долгополика Максима Владимировича на тему:
«Конструктивный негладкий анализ и его приложения к задачам оптимизации,
вариационного исчисления и теории управления»,
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Актуальность научных исследований и темы диссертации

Диссертационная работа М.В. Долгополика посвящена развитию теоретического аппарата конструктивного негладкого анализа, берущего свое начало в работах профессоров В.Ф. Демьянова и В.Н. Малоземова, и применению указанного аппарата к исследованию негладких задач оптимизации, вариационного исчисления и управления. Главное содержание конструктивного негладкого анализа – теория, методы и вычислительные алгоритмы нахождения экстремумов недифференцируемых функций, важны для многих приложений математики, таких как обработка сигналов, решение систем интервальных уравнений, компьютерная графика, негладкая механика, оптимальное управление распределенными системами (в частности, *optimal shape design*) и т.д. Таким образом, тема диссертации М.В. Долгополика и выбранные в диссертации направления исследований являются актуальными, в чем можно, в частности, убедиться, анализируя научную повестку большого количества российских и международных семинаров и конференций, посвященных негладкому анализу и его приложениям, и значительное количество научных публикаций по данной тематике в ведущих научных изданиях.

К настоящему моменту известно множество различных подходов к исследованию негладких задач, возникающих в оптимизации и теории управления. Поэтому возникает важная научная проблема объединения и систематизации существующих результатов, а также сравнения различных теоретических подходов. Решение этой фундаментальной проблемы в рамках конструктивного негладкого анализа является одной из центральных тем диссертационной работы, что подтверждает ее актуальность и значимость для развития негладкого анализа в целом.

Научная новизна полученных результатов

Все результаты полученные в диссертации являются новыми и представляют значительный интерес для специалистов по негладкому анализу и смежным областям. А именно, в работе представлены следующие новые научные результаты:

1. предложены новые условия регулярности ограничений в терминах квазидифференциалов и рассмотрены их приложения к задачам изучения метрической регулярности негладких отображений, описания касательных конусов к множествам, задаваемым негладкими ограничениями и вывода условий оптимальности для негладких задач математического программирования,
2. получены достаточные условия для кодифференцируемости негладкого интегрального функционала и выведены условия экстремума для негладких задач вариационного исчисления с различными ограничениями в терминах кодифференциалов,
3. уточнена и теоретически обоснована алгоритмически реализуемая вычислительная схема метода кодифференциального спуска, в которой, в частности, вспомогательная задача одномерной минимизации негладкой функции на луче заменена на задачу одномерной минимизации негладкой функции на отрезке,
4. показана более высокая скорость сходимости метода гиподифференциального спуска

- для минимизации произвольных негладких выпуклых функций, чем скорость сходимости оптимальных субградиентных методов,
5. доказана конечная сходимость метода кодифференциального спуска к точке глобального минимума невыпуклой кусочно-аффинной функции,
 6. разработан общий подход к изучению глобальной точности штрафных функций и модифицированных функций Лагранжа, основанный на принципе локализации,
 7. получены новые условия полной точности штрафной функции для задач оптимизации в бесконечномерных пространствах и рассмотрено приложение этих условий к одной задаче оптимального управления.

Теоретическая и практическая значимость работы

В диссертационной работе М.В. Долгополика решена проблема систематизации множества разрозненных результатов конструктивного негладкого анализа и распространения этих результатов на бесконечномерных случаях, что является существенным вкладом в развитие теории конструктивного негладкого анализа. Кроме того, в диссертации разработаны принципиально новые и оригинальные теоретические инструменты исследования негладких задач, представляющие значительный интерес для специалистов. Особо хочется отметить оригинальный подход к описанию выпуклых подконусов касательного конуса к множеству, задаваемому негладкими ограничениями равенствами и неравенствами, изложенный в разделе 1.2.5. Также обращает на себя внимание новый тип условий глобальной оптимальности для задач оптимизации разности выпуклых функций из раздела 1.1.2. Эти условия глобальной оптимальности позволили автору доказать сходимость метода кодифференциального спуска к точке глобального минимума невыпуклой кусочно-аффинной функции за конечное число шагов. Все вышеперечисленное свидетельствует о несомненной теоретической значимости результатов диссертации М.В. Долгополика.

Помимо теоретических проблем в работе рассматриваются и прикладные задачи, подтверждающие практическую значимость основных результатов диссертации. В частности, соискателем подробно обсуждаются вопросы алгоритмической реализуемости метода кодифференциального спуска, скорости его сходимости и различные вычислительные особенности данного метода, такие как сходимость меры нестационарности к нулю (нетипичная для методов негладкой оптимизации) и устойчивость к ошибкам вычислений. Ярко выраженную прикладную направленность имеет глава 5 диссертации, посвященная применению математического аппарата, разработанного в предыдущих главах, к решению негладких задач оптимального управления. В частности, в данной главе с помощью численного моделирования произведено интересное сравнение гладких и негладких алгоритмов скоростного градиента для решения нетривиальной задачи адаптивной синхронизации двух осцилляторов Дуффинга.

Достоверность и степень обоснованности полученных результатов

Все основные теоретические результаты диссертации снабжены подробными и строгими доказательствами, а также поясняющими примерами и необходимыми ссылками на источники, содержащие близкие результаты.

Основные результаты диссертации опубликованы в профильных математических изданиях, таких как *Optimization Letters*, *SIAM Journal on Optimization*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, *Journal of Global Optimization*, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* и др. Они докладывались на престижных всероссийских и международных конференциях (*European Control Conference*, *IFAC International Workshop on Periodic Control Systems* и т.д.) и обсуждались на различных семинарах, включая семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации Санкт-

Петербургского государственного университета. Все это подтверждает достоверность результатов, представленных в диссертации.

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. В **первой главе** получены условия глобальной оптимальности для разности выпуклых функций и разработаны основные элементы кодифференциального исчисления негладких функций, определенных на бесконечномерных пространствах. В этой главе также рассматриваются приложения кодифференциального и квазидифференциального исчисления к таким вопросам теории экстремальных задач, как условия регулярности негладких ограничений и условия экстремума для задач негладкой оптимизации.

Вторая глава посвящена приложению аппарата кодифференциального исчисления к исследованию негладких задач вариационного исчисления. В частности, в этой главе в явном виде вычислен кодифференциал негладкого интегрального функционала и получены условия экстремума для негладких задач вариационного исчисления с дополнительными ограничениями на границе и изопериметрическими ограничениями.

Третья глава содержит подробный анализ сходимости метода кодифференциального спуска. В ней уточнена и обоснована алгоритмически реализуемая вычислительная схема данного метода и изучена ее сходимость. Также приведена оценка скорости сходимости некоторой модификации данного метода в выпуклом случае и предложена еще одна модификация метода кодифференциального спуска для глобальной минимизации невыпуклых кусочно-аффинных функций, позволяющая снизить трудоёмкость вычислений.

В **главе 4** разработана единая теория точных штрафных функций и точных модифицированных функций Лагранжа, основанная на принципе локализации, предложенном соискателем. В этой главе также рассматриваются точные штрафные функции для задач оптимизации в метрических пространствах и одно приложение данных функций к задачам управления линейными эволюционными уравнениями.

Наконец, **глава 5** посвящена приложениям негладкого анализа к некоторым задачам управления. В этой главе изучены негладкие алгоритмы скоростного градиента в конечной, дифференциальной и конечно-дифференциальной формах и рассмотрены примеры применения этих алгоритмов к некоторым конкретным задачам. Помимо этого, в данной главе исследуется задача управления энергией для одного класса нелинейных распределенных систем.

В целом, работа выполнена на очень высоком теоретическом уровне и представляет из себя целостное, логически завершённое исследование. Текст диссертации написан четким, понятным языком и содержит большое количество содержательных примеров и поясняющих комментариев, облегчающих понимание основных результатов. Широкий спектр различных задач, рассматриваемых в диссертации, а также значительное разнообразие используемых теоретических инструментов и методов указывают на высокий уровень научного кругозора и математической культуры автора.

Замечания

Диссертационная работа не свободна от некоторых недостатков:

1. В главе 3 диссертации приведен подробный теоретический анализ метода кодифференциального спуска и его различных модификаций, но отсутствуют какие-либо результаты численных экспериментов, которые позволили бы оценить работоспособность данных методов в случае реальных прикладных задач оптимизации. Кроме того, интересно было бы сравнить численные методы, рассматриваемые автором, с богатым арсеналом существующих методов негладкой оптимизации. В частности, в замечании 3.3.2 соискателем указано, что несмотря на более высокую скорость сходимости метод гиподифференциального спуска может

оказаться менее эффективен, чем субградиентные методы выпуклой оптимизации, из-за высокой трудоемкости каждой итерации. Однако, окончательные выводы по данному вопросу могут быть сделаны только по итогам численных экспериментов, которые в диссертационной работе отсутствуют.

2. За исключением одной модификации метода кодифференциального спуска для решения негладких задач с выпуклыми ограничениями из раздела 3.2, в диссертации не рассматриваются численные методы решения задач недифференцируемой оптимизации с ограничениями. Разработка подобных методов представляет существенный интерес для приложений, а анализ их сходимости может послужить интересным приложением некоторых теоретических результатов автора (в частности, предложенных в работе условий регулярности негладких ограничений).
3. В главе 4 диссертационной работы получены условия, гарантирующие, что для любого достаточно большого значения штрафного параметра точки глобального минимума штрафной функции или модифицированной функции Лагранжа совпадают с точками глобального минимума исходной задачи оптимизации с ограничениями. Однако, в работе совсем не затрагиваются такие важные вопросы, как оценка соответствующего оптимального (наименьшего) значения точного штрафного параметра и автоматическая настройка штрафного параметра в численных методах оптимизации, представляющие наибольший интерес для приложений. В диссертации следовало, по меньшей мере, привести краткий обзор существующих результатов по данной тематике.

Указанные выше замечания не являются принципиальными, носят рекомендательный характер и не умаляют ценность проведенного исследования и полученных теоретических и прикладных результатов.

Заключение

Считаю, что диссертация Долгополика Максима Владимировича на тему: «Конструктивный негладкий анализ и его приложения к задачам оптимизации, вариационного исчисления и теории управления» соответствует основным требованиям, установленным Приказом №11181/1 от 19.11.2021 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», соискатель Долгополик Максим Владимирович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Пункты 9 и 11 указанного Порядка диссертантом не нарушены.

Член диссертационного совета

доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник 512 лаборатории военного института (научно-исследовательского) федерального государственного бюджетного военного образовательного учреждения высшего образования «Военно-космическая академия имени А.Ф.Можайского» Министерства обороны Российской Федерации, 197198, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, д. 13, тел. (812) 347-96-63, e-mail: vka@mil.ru

03 марта 2022 г.



Ерохин Владимир Иванович

Личную подпись члена диссертационного совета ЕРОХИНА Владимира Ивановича заверяю

Начальник отдела кадров федерального государственного бюджетного военного образовательного учреждения высшего образования «Военно-космическая академия имени А.Ф.Можайского» Министерства обороны Российской Федерации



Плотников Григорий Вячеславович