

ОТЗЫВ

члена диссертационного совета на диссертацию Петрова Виктора Александровича на тему:

«Мотивные методы в теории алгебраических групп
и однородных многообразий»,

представленную на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук по специальности

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная
математика

Изучение различных категорий мотивов (исходно определенных А. Гротендиком) имеет большое значение для современной алгебраической геометрии. Теория мотивов позволяет вычислять различные (ко)гомологии алгебраических и схем, а это позволяет решить некоторые "чисто геометрические" проблемы. Отметим, что фундаментальные работы В.А. Воеводского (включая доказательство гипотезы Милнора, которое принесло ему медаль Филдса), А.А. Суслина и других замечательных алгебраистов "сместили акцент" с изучения мотивов с рациональными коэффициентами на мотивы с коэффициентами в целых числах и в конечных полях. В отличие от мотивов с рациональными коэффициентами, мотивы с коэффициентами в конечных полях представляют интерес для однородных многообразий - в частности, для квадратиков. Далее, мотивы однородных многообразий дают много важных примеров для общей теории мотивов. Эти мотивы "значительно проще вычислять", чем "общие" мотивы (последние очень сложны, так как группы морфизмов между ними очень часто бесконечно порождены), и из их свойств было выведен ряд важных геометрических следствий. Соответственно, мотивы однородных многообразий - важная и популярная часть современной теории мотивов.

Диссертация В.А. Петрова посвящена т.н. "чистым" мотивам, соответствующим различным ориентированным (в смысле И.А. Панина, М. Левина и Ф. Мореля) теориям когомологий - в частности, мотивам Чжоу с конечными коэффициентами. Это значит, что рассматриваются прямые слагаемые мотивов, соответствующих гладким проективным многообразиям. В частности, большую роль в представленной диссертации играют мотивы Роста; это — весьма важный класс мотивов (в частности, для доказательства вышеупомянутой гипотезы Милнора). Большое значение для теории чистых мотивов имеет вопрос, как именно разлагаются на слагаемые мотивы рассматриваемых многообразий (в том числе - существование и единственность разложения в сумму неприводимых). Диссертант получил ряд важных результатов о мотивах проективных однородных многообразий; он также разработал ряд новых методов в этой области (а также, развил методы, разработанные ранее). Отмечу также, что основные результаты диссертации были опубликованы в ведущих международных математических журналах.

Попробую кратко описать наиболее впечатляющие определения и результаты диссертации. Основной метод настоящей диссертации заключается в рассмотрении структуры комодуля на соответствующих "мотивных гомологиях" (автор называет их реализацией) мотивов скрученных форм клеточных проективных многообразий с действием полупростой алгебраической группы. Это определение непосредственно связано с важным понятием J -инварианта, определенным в одной из статей диссертанта и кардинально обобщающее определение Вишика (данное для специальной ортогональной группы). Теорема 1 утверждает, что рациональные соответствия "уважают" эту структуру. Далее, при некоторых условиях

(выполненных для основных случаев, рассматриваемых в работе) мотивное разложение любого проективного однородного многообразия, расщепимого над общей точкой, определяется разложением соответствующей бинальгебры как комодуля над собой. Теорема 3 дает ответ на вопрос, мотивы Чжоу (по простому модулю p) каких проективных однородных многообразий расщепимы над общей точкой (т.е., являются мотивами Тэйта), в терминах данной бинальгебры. Теорема 4 показывает, что комодульная структура полностью определяет те неразложимые слагаемые мотива Чжоу проективного однородного многообразия, которые изоморфны неразложимым слагаемым многообразий, мотивы которых расщепимы над общей точкой.

Диссертант обоснованно считает, что его методы позволят вскоре получить полный список разложений мотивов Чжоу проективных однородных многообразий исключительного типа.

Теоремы 6-8 подробно отвечают на некоторые вопросы крупнейших математиков - М. Роста и Ж. Титса (см. ниже).

Опишу также содержание диссертации по главам. Она состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Во введении диссертант напоминает историю предмета и формулирует содержательные части четырех основных результатов диссертации. В первой главе автор определяет основные понятия и перечисляется ряд известных ранее методов и основных результатов теории мотивов проективных однородных многообразий. Во второй главе даются основные определения и доказываются утверждения, связанные с упомянутыми выше коалгебрами. В третьей главе полученные результаты применяются для ответа на два вопроса из теории линейных алгебраических групп, заданных Маркусом Ростом и Жаком Титсом в 90х годах. В заключении приводятся описания основных результатов, а также описываются возможные дальнейшие направления исследований.

Таким образом в диссертации решены трудные и важные задачи теории мотивов проективных однородных многообразий. Автор проявил высокую математическую культуру и способность к построению новых оригинальных конструкций. Текст написан аккуратно и четко; он хорошо структурирован. Отдельные опечатки (в частности, несколько прописных букв вместо строчных) и неточности не влияют на общее положительное впечатление от диссертации и не мешают пониманию основных результатов.

Все основные результаты работы являются новыми, получены автором самостоятельно и строго доказаны. Основные результаты диссертации были доложены на ведущих алгебраических семинарах и хорошо известны ведущим специалистам по данной тематике. Основные результаты настоящей работы рекомендуется положить в основу спецкурсов на математических факультетах МГУ, СПбГУ, НГУ и других университетов страны.

Исходя из вышесказанного, диссертация Петрова Виктора Александровича на тему: «Мотивные методы в теории алгебраических групп и однородных многообразий» соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 19.11.2021 №11181/1 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», соискатель Петров Виктор Александрович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика. Пункты 9 и 11 указанного Порядка диссертантом не нарушены.

Член диссертационного совета, доктор физико-математических наук, профессор РАН, доцент Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный университет"

Михаил Владимирович Бондарко

11.01.2022

