NDSU NORTH DAKOTA STATE UNIVERSITY

ОТЗЫВ
члена диссертационного совета
Барабанова Никиты Евгеньевича
на диссертацию Проскурникова Антона Викторовича на тему:
«Усредняющие алгоритмы и неравенства в
задачах многоагентного управления и моделирования»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по научной специальности
1.2.3. Теоретическая информатика, кибернетика.

Темой диссертационной работы является поиск условий сходимости решений нестационарных дискретных систем или дифференциальных уравнений, в частности, к векторам, параллельным вектору из единиц (т.е. к консенсусу). Несмотря на кажущуюся простоту объекта исследования, в этой области есть много сложных математических задач, часть которых решена лишь частично. Сотни статей и монографий по этой теме, опубликованных в престижных журналах по управлению, физике, прикладной математике, социологии за последние десятилетия, показывают, что данная тема привлекает интерес как с научной, так и с прикладной точек зрения.

Диссертационная работа написана в значительной степени, как учебная монография. Во введении (с.5-21) содержится обзор смежных направлений, задач на консенсус и итерационное усреднение. Отдельно указана цель всей работы: создание единой теории усредняющих алгоритмов на нестационарных графах, включающих динамические системы, описываемые неравенствами.

В первой главе (с.22-37) приведены используемые далее известные определения и результаты из теории графов, матриченой алгебры, дифференциальных и разностных уравнений. В частности, становится ясно, что данная область исследования находится на стыке указанных областей.

В главе 2 (с.38-93) представлены основные результаты всей работы. Вводная часть включает основные линейные нестационарные дискретные системы (2.2) и дифференциальные уравнения (2.3), а также дискретные (2.5) и дифференциальные (2.6) неравенства, перечень основных задач, некоторые простые результаты о сходимости и границах диссипативности линейных систем. Здесь же вводится важное определение (t_{p}) ограниченности нестационарных матриц-функций. Завершает вводную часть леммы 2.5, 2.6 и 2.7, описывающие известную асимптотику решений систем с постоянной стохастической матрицей. В разделе 2.2.3 изложены существенные, принадлежащие автору результаты, а именно, необходимые и достаточные условия сходимости всех решений дискретных (2.2) и дифференциальных (2.4) линейных неравенств с постоянной матрицей коэффициентов к пределам, и условия, при которых пределы всех координат одинаковы (т.е. сходимости к консенсусу). Следующий параграф 2.3 посвящен нестационарным системам. Сначала речь идет о необходимых условий сходимости дискретных и дифференциальных систем к консенсусу (вторая часть теоремы 2.3); затем указаны необходимые условия сходимости к консенсусу систем линейных

33-06-481 от 23.05.2022

дискретных и дифференциальных неравенств (теорема 2.4). В следующем Параграфе 2.4 даны достаточные условия сходимости решений дискретных (теорема 2.5) и дифференциальных (теорема 2.6) уравнений, а также неравенств, к консенсусу. Они используют условия равномерной сбалансированности разрезов (2.44). Для случая равенств эти теоремы систематизируют и улучшают ряд известных похожих результатов в этой области. Далее условия (2.44) ослаблено до условия (2.55), а также до условия слабой взаимности (определение 2.5)) для дискретных уравнений и неравенств, и до интегрального условия (2.57) для дифференциальных уравнений и неравенств. В следующем параграфе 2.5 введено определение повторяющейся (квази) сильной связности. Это условие сравнительно просто формулировать и проверять, но оно оказывается достаточным для сходимости к консенсусу решений дискретных и дифференциальных неравенств (теорема 2.9)), а также уравнений (теорема 2.8), с дополнительным предположением (2.2) в дискретном случае, причем сходимость оказывается экспоненциальной. Простые и достаточно общие условия справедливости указанных ограничений приведены в конце параграфа 2.5. Условие повторяющейся (квази) сильной связности состоит из двух частей: условия (квази) сильной ε-связности для некоторой последовательности $\{t_{p}\}$, и (t_{p}) - ограниченности матрицы коэффициентов $A(.)$. В лемме 2.12 показано, что первое условие необходимо для (квази) сильной связности персистентного графа G_∞, а значит и для сходимости решений к консенсусу. Обобщение результатов на случай нелинейных систем (2.67), удовлетворяюших неравенствам (2.68) дано в леммах 2.14 и 2.15. Задача оценки области диссипативности системы в случае (t_{p}) ограниченных возмущений в правой части решена в следствии 2.13.

В третьей главе (с.95-115) анализируются линейные нестационарные дифференциальные системы (3.1) и неравенства (3.2) с ограниченными запаздываниями и стохастическими матрицами-функциями коэффициентов. Указываются нижние оценки элементов эволюционной матрицы (лемма 3.3, следствие 3.4). При дополнительном предположении 3.2 доказано (теорема 3.1), что все решения систем или неравенств экспоненциально стремятся к консенсусу, если выполнено условие повторной (квази) сильной связности. В параграфе 3.3 введено условие распределенной симметрии (3.22). В теореме 3.3 доказано, что при этом условии, (t_{p}) ограниченности матрицы $A(.)$, и естественных предположениях 3.1, 3.2 все решения дифференциальных неравенств имеют пределы на бесконечности. Таким образом, при этих предположениях все решения стремятся к консенсусу, если персистентный граф связен. В разделе 3.4 описана простая процедура, позволяющая свести анализ дискретных уравнений/неравенств к дифференциальным. Соответственно, полученные в разделе 3.3 результаты применены к дискретным системам и неравенствам с запаздывающими аргументами.

В главе 4 (с.117-135) рассматриваются линейные нестационарные дискретные (4.1) и дифференциальные (4.2) системы с демпфирующими коэффициентами d_{i} и со стохастической матрицей коэффициентов. Введение "лидера" x_ω сводит анализ устойчивости этих систем к проблеме консенсуса систем из предыдущих разделов (следствия 4.2, 4.3, 4.4). Далее показано, что анализ систем с несколькими "лидерами" сводится к анализу систем с одним "лидером" (лемма 4.2). В параграфе 4.1.4 данная проблема обобщается на системы с целевым множеством. Задача поиска пересечений выпуклых множеств рассмотрена в разделе 4.2. Теорема 2.9 из главы 2 пременена для доказательства сходимости решений каждой из дискретных систем (4.19)-(4.21) к точке пересечения множеств (теорема

4.1). В теореме 4.2 аналогичный результат получен для систем с непрерывным временем (дифференциальных уравнений). Завершает главу 4 интересный результат о "собирании" объектов в одной точке с нулевой скоростью, решение которого сводится к применению теоремы 2.8 и следствия 2.9 из главы 2.

В главе 5 (с.136-166) собраны примеры применения теорем предыдущих глав к различным прикладным задачам. В разделе 5.1 рассматриваются модели Френча-ДеГроота и Абелсона. Они сводятся к уравнениям (5.1), совпадающими с (2.71), и допускающими применение леммы 2.15. Социологическая модель Фридкина-Джонсена (5.2) использует "вектор предрассудков" u. Анализ модели сводится к применению следствия 4.5 из главы 4. Модель Фридкина-Джонсена, использующая "многомерные мнения" представлена системой (5.3). Критерий сходимости решений этой модели дан в лемме 5.1. Социологическая модель Хегсельманна-Краузе учитывает "доверительные интервалы" всех участников. Она представлена системой (5.5), сходимость к консенсусу решений которой устанавливается с помощью теоремы 2.6 главы 2. Эта же теорема применима к анализу сходитости к консенсусу в нелинейной модели (5.9). Модель (5.10) тех же авторов с "правдоискателями" может быть проанализирована снова с помощью теоремы 2.6 (теорема 5.1). Социологическая модель Алтафини с "поляризацией" мнений (5.13) имеет форму (2.4). Лемма 5.3 описывает свойства ее решений. Анализ системы с двудольным консенсусом (5.14) дан в лемме 5.4. Критерий сходимости модулей координат решений приведен в теореме 5.2.

Совокупность постановок задач, предлагаемых понятий и свойств, методов решения, теоретических результатов, многочисленных приложений позволяет говорить о развитии нового направления в теории моделирования и анализа многоагентных систем, находящейся на стыке теории динамических систем, теории графов, и имеющей приложения в социологии. В частности, важные задачи поиска консенсуса в нестационарных системах, описываемых равенствами и/или неравенствами получили красивое математическое решение.

Все математические утверждения полностью доказаны.

По тексту диссертации есть несколько редакционных замечаний.

1. В замечании 2.3: вряд ли работы по устойчивости включений (т.е. определению знака совместного спектрального радиуса набора матриц) можно назвать простыми критериями устойчивости по Ляпунову.

2. В примере перед разделом 2.3: коэффициент при x_1 в $x_1(k)+x_2(k)$ надо заменить на другой, например, на 3, иначе правое неравенство не выполняется при нечентом k.

3. В (2.38): слева - вектор, справа - число.

4. Перед доказательством теоремы 2.5: убрать повтор слов в частности, и заменить t_i на t.

5. В следствии 2.9: убрать «существует $K\geq 1$».

6. Ниже (2.58): заменить $||f\||^{tk}_{t0}$ на $||f||^{tk}_{t0}1_C$.

NDSU NORTH DAKOTA STATE UNIVERSITY

7. Перед теоремой 2.7: одно условие не может быть частным случаем другого условия. Одно условие может следовать из другого условия.

8. В лемме 2.11 и ниже: τ должно быть заменено на τ_1.

9. В конце доказательства леммы 2.12: верхний предел интеграла должет быть t а не t_{p+1}.

10. После (2.65): $t' \geq$ должно быть заменено на $t' \geq t$.

Диссертация Проскурникова Антона Викторовича на тему: «Усредняющие алгоритмы и неравенства в задачах многоагентного управления и моделирования» соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 19.11.2021 № 11181/1 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», соискатель Проскурников Антон Викторович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по научной специальности 1.2.3. Теоретическая информатика, кибернетика. Пункты 9 и 11 указанного Порядка диссертантом не нарушены.

Член диссертационного совета
Доктор физико-математических наук, профессор,
Профессор кафедры Математики университета Северной Дакоты (США)
Барабанов Никита Евгеньевич

Nikita Barabanov

19 мая 2022 года