

ОТЗЫВ

члена диссертационного совета на диссертацию Петрова Виктора Александровича на тему: «Мотивные методы в теории алгебраических групп и однородных многообразий», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5. - Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Диссертационная работа Виктора Петрова посвящена изучению простых линейных алгебраических групп и их проективных однородных пространств над произвольными полями. В работе получен ряд важных структурных результатов о таких группах и пространствах, в частности, даны ответы на вопросы, поставленные Жаком Титсом в 1990 году и Маркусом Ростом в 1992 году.

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения.

Введение содержит описание объекта исследования, предмета исследования и цели работы. Кратко обоснованы актуальность темы и степень разработанности проблемы, изложены используемые методы, рассказано об апробации работы и описано содержание диссертации.

Первая глава содержит предварительные сведения из ориентированных теорий когомологий, теории алгебраических кобордизмов и мотивов. Здесь же автор напоминает основные факты о проективных однородных пространствах, включая торсоры и скрученные формы, разложения Брюа и операторы Демазюра, а также принцип нильпотентности Роста. Изложение достаточно сжато и доступно скорее узким специалистам. Например, я был бы признателен за определение fppf -топологии в разделе 1.2.1 и более подробное изложение метода “раковин” в разделе 1.2.6. Тем не менее, данная глава содержит все необходимые для дальнейшего изложения сведения.

Во второй главе излагается основной метод данной работы. Он состоит в изучении структуры комодуля на реализации мотивов скрученных форм клеточных проективных многообразий с действием полупростой алгебраической группы. Основная цель развития этого метода состоит в получении мотивных разложений проективных однородных пространств, расщепимых над общей точкой, и классификации таких пространств. В частности, на этом пути получаются разложения мотивов Чжоу однородных пространств для строго внутренних групп типов E_7 и E_8 при некоторых небольших ограничениях на модуль, по которому рассматриваются коэффициенты. Следует отметить, что случаи групп типа G_2 , F_4 и E_6 были известны ранее.

Из конкретных результатов данной главы отметим, что комодульная структура полностью определяет неразложимые слагаемые мотива Чжоу по простому модулю p проективного однородного пространства, изоморфные неразложимым слагаемым пространств, расщепимых над общей точкой (теорема 4). Также здесь получены новые важные ограничения на возможные разложения мотива Чжоу на квадратах в терминах J -

инварианта (теорема 5). Этот результат следует рассматривать как заметный вклад в классическое направление исследований по данной теме.

В третьей главе диссертации развитая техника использована для получения конкретных результатов о проективных однородных пространствах исключительных групп типа E_7 и E_8 . Показано, что инвариант Роста позволяет охарактеризовать изотропность строго внутренних групп типа E_7 с точностью до расширений нечетной степени и групп типа E_8 с точностью до расширений степени, не делящейся на 3 (теоремы 6 и 7). Эти результаты отвечают на вопрос, поставленный Маркусом Ростом в 1992 году.

Теорема 8 утверждает, что с помощью конструкции построения групп типа E_7 по центральной простой алгебре при некотором условии на алгебру и используемую константу можно построить анизотропную строго внутреннюю группу типа E_7 . Соответствующий вопрос был поставлен в работе Жака Титса (Journal of Algebra, 1990).

Наконец, теорема 9 утверждает, что при помощи известной конструкции Титса над полями без расширений нечетной степени нельзя получить группы индекса Титса $E_{\{8,1\}}^{133}$. Ограничения такого типа могут оказаться весьма полезными в будущем.

К числу недостатков изложения результатов третьей главы я бы отнес некоторое смешение относительно элементарных конструкций построения алгебр Ли в терминах тройных систем Ли, альтернативных алгебр и йордановых алгебр с продвинутой кохомологической техникой. Резкие переходы от одних сюжетов к другим и обратно несколько затрудняет понимание. С другой стороны, изучение взаимодействия этих подходов является одной из важных компонент настоящей диссертации, и с этой точки зрения указанное смешение оправдано.

В заключении автор формулирует основные результаты работы, которые выносятся на защиту. Это теоремы 1-5 из второй главы и теоремы 6-9 из третьей главы. Также автор описывает три конкретные направления дальнейших исследований, которые могут стать естественным развитием полученных в диссертации результатов и областью применения развитой автором техники.

Работа написана последовательно и аккуратно. Единственная опечатка, которую мне удалось найти в тексте, относится к слову «подпространство», это строка 4 раздела 3.2.2. Следует отметить удачность выбора обозначений и систематичность их использования.

На мой взгляд, не все использованные в диссертации русскоязычные термины являются удачными. Это можно отнести к «пулбэк» и «пушфорвард» из раздела 1.1.1, «gift» из раздела 3.2.2 и особенно «сюрьективности в 2» из раздела 3.2.3. Разумеется, выбор терминологии не влияет на качество полученных в диссертации результатов.

Результаты диссертации опубликованы в 13 статьях и 1 препринте: по 2 статьи в Duke Mathematical Journal, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure и Compositio Mathematica и по 1 статье в Journal of the London Mathematical Society, Advances in Mathematics, Canadian Mathematical Bulletin, Journal of K-Theory, Journal of Algebra, Journal of Geometry and Physics и Записках научных семинаров ПОМИ. Уровень публикаций показывает, что работы Виктора Петрова прошли самое серьезное рецензирование и

получили высокую оценку ведущих международных экспертов в данной области. Две статьи написаны без соавторов. Из остальных работ в диссертацию включены результаты, полученные преимущественно автором, а на результаты, полученные преимущественно соавторами, в тексте даны соответствующие ссылки. Также впечатляет приведенный во введении список профильных конференций и семинаров, на которых с 2009 года регулярно докладывались полученные в диссертации результаты.

Диссертация Петрова Виктора Александровича на тему: «Мотивные методы в теории алгебраических групп и однородных многообразий» соответствует основным требованиям, установленным приказом № 11181/1 от 19.11.2021 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», соискатель Петров Виктор Александрович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5. - Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика. Пункт 11 указанного Порядка диссертантом не нарушен.

Член диссертационного совета

доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета компьютерных наук
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

10 января 2022 года

Аржанцев Иван Владимирович

