

## О Т З Ы В

члена диссертационного совета

на диссертацию **Бурьяна Сергея Николаевича** на тему:

**“Механика голономных систем с геометрическими особыми точками”**,  
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук  
по научной специальности 1.1.3. Геометрия и топология, 1.1.7. Теоретическая  
механика, динамика машин.

Диссертационная работа соискателя посвящена развитию методов аналитической механики и дифференциальной геометрии и их приложениям к задачам исследования механических систем с особыми точками. Диссертация состоит из введения, шести глав (которые иногда почему-то называются в ней частями) и заключения.

В классической механике рассматриваются конфигурационные пространства механических систем, которые являются гладкими многообразиями. При этом уравнения движения являются гладкими векторными полями на (ко)касательном расслоении многообразия. Для случая, когда конфигурационное или фазовое пространство механической системы содержит особые точки, предлагаются, как правило, только частные приёмы. В диссертационной работе исследуются свойства механических систем вблизи особых точек конфигурационного пространства с помощью методов дифференциальной геометрии для построения векторных полей. Основные геометрические объекты, вычисляемые в рамках предлагаемых теорий, сравниваются со свойствами действительных движений механизмов. Доказано, что для сингулярного маятника форма связи может задавать особенность касания произвольного порядка. Полученные аналитические выражения для реакции связей численно находились с помощью математических пакетов. Построено шесть примеров реализуемых механических систем, описана геометрическая структура особенностей конфигурационного пространства этих систем. Исследованы кинематика и динамика механизма Дарбу (как сам механизм, так и изложение очень красивы), построена гладкая параметризация движения через особую точку. Уравнения Лагранжа численно решены для прямолинейного движения центральной вершины механизма, найдены реакции при движении к особой точке. Показано, что при действии внешней силы, которая не совершает работу, реакции становятся неограниченными вблизи особой точки. В рамках теории дифференциального включения, диффеотопии, дифференциальных пространств и пространств Фрелихера вычислены касательные и кокасательные расслоения для различных порядков касания в особой точке, включая бесконечный порядок касания, и для различных алгебр. Описаны касательные и кокасательные расслоения, векторные поля и их скобки Пуассона. Показано, что движение для трансверсальной особой точки описывается в рамках теории дифференциального включения, дифференциальных пространств и пространств Фрелихера. Для сингулярного маятника в потенциальном поле наблюдались различные режимы движения в зависимости от порядка касания. По результатам наблюдений сформулирована гипотеза о движении в потенциальном поле силы тяжести. Отдельно следует

отметить несомненный “плюс” диссертации, связанный с большим количеством иллюстраций. Особого уважения заслуживает арсенал из дифференциальной топологии и теоретической механики, используемый автором.

### К недостаткам можно отнести следующее

1. Нет такого “факультета математики и механики МГУ” – есть механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова”.

2. В диссертации аналитические выражения для реакции связей численно находились с помощью математических пакетов. Однако, не следует забывать, что никакой математический пакет не застрахован от ошибок, например, связанных с несоответствием используемой модели решаемой задаче или, просто, из-за ошибок округления. Например, для самого современного пакета можно легко подобрать неотрицательную скалярную функцию, интеграл от которой будет отрицательным! Тем не менее, для ряда задач использование математических пакетов действительно приводит к достоверным результатам. Соответственно, было бы очень нелишним в работе оценить достоверность результатов, полученных с помощью программно-математических пакетов. Также не указан метод, при помощи которого выполнялось “численное интегрирование уравнений”. Ссылка на использование Maple здесь не никоим образом является оправданием!

3. Неясно, что такое “звездчатая окрестность” – в работе она, впрочем, встречается только в лемме Адамара. Наверное, имеется в виду “звездная окрестность”, часто встречающаяся в теории (ко)гомологий и комбинаторной топологии. Хорошо бы также сразу дать понять, что понимается под гладкостью функции. Вообще, большое количество терминов не определено. Разумно было бы указать монографии или статьи, которым следует автор.

4. Не указано, что такое  $g_{n+1}(y)$  на стр. 15.

5. В тексте встречаются стилистические ошибки и опечатки. Например, “.. функция ... будет гладкой при одинаковом знаке до и после особой точки..”, “Доказательство следующей леммы неявно содержится в выводах уравнений Лагранжа второго рода со связями, но обычно эта формула не акцентируется”, и т.д.

6. В русскоязычной литературе тангенс записывается как tg. В работе почему-то часто используются зарубежные обозначения tan, arctan и т.п. Но особенно некрасиво, когда на одной странице встречается и tg и tan! (Например, на стр. 38).

7. Стр. 39. Фраза “Вычисления велись в системе компьютерной алгебры Maple” не соотносится по смыслу с предыдущим предложением “значения производных ... вычислялись аналитически”.

8. Стр. 49. По поводу механизмов Чебышёва очень хорошо было бы сослаться на современный интернет-ресурс [tcheb.ru](http://tcheb.ru).

9. Стр. 63. Непонятно, зачем хорошо работающий (в случае нежестких систем ОДУ) метод Рунге–Кутты сравнивается с редко использующимся на практике методом Тейлора.

10. Стр. 73. Цитата: “Автор считает, что определения ниже являются естественными

для подмножеств декартова пространства” – утверждения такого типа всё же лучше обосновывать (или не писать).

11. Стр. 91. Термин “дифференциальное пространство” употреблялся ранее в совершенно других смыслах (например, Н. Винер).

12. Было бы полезно более подробно рассказать о перспективах дальнейших исследований (помимо, конечно, поставленной автором гипотезы). В качестве одного из возможных направлений можно было бы упомянуть актуальность поиска дифференциально-геометрической структуры на  $X$  ( $X$  – подмногообразие в  $\mathbb{R}^n$ , не обязательно гладкое), которая может стать основой для лагранжева формализма,

13. В английской части работы хорошо было бы дать ссылки именно на переводы ряда монографий, а не на их русскоязычные издания. Это относится, например, к монографиям Arnol'd (не Arnold); Yu. Borisovich, N. Bliznyakov, Ya. Izrailevich, T. Fomenko; A.A. Agrachev, Yu.L. Sachkov; Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T.

14. Также было бы уместно в диссертации сослаться на новую двухтомную монографию “Rational and Applied Mechanics” (авторы: Н.Н. Поляхов, П.Е. Товстик, М.П. Юшков, С.А. Зегжда), опубликованную в издательстве Springer в 2021 г. и тесно примыкающую к исследованиям диссертации.

Указанные недостатки не влияют на общую высокую оценку результатов, полученных С.Н.Бурьяном в диссертации.

**Подводя итоги**, можно сказать следующее. Актуальность диссертации Бурьяна Сергея Николаевича не вызывает сомнений. Достоверность результатов подтверждается их строгими математическими доказательствами. Автор проявил себя зрелым исследователем, хорошо разбирающимся в дифференциальной геометрии и теоретической механике и ряде смежных дисциплин. Результаты являются новыми и представляют важный вклад в соответствующие разделы дифференциальной геометрии и топологии, теоретической механики и динамики машин.

Апробация работы состоялась на ряде представительных международных конференций и семинаров.

Характеризуя диссертацию в целом, можно сказать, что в ней проведены актуальные исследования в механике голономных систем, представляющие интерес для развития теории и практических приложений. В своей работе соискатель продемонстрировал хорошее владение аппаратом аналитической механики и дифференциальной геометрии и их приложениям к задачам исследования механических систем с особыми точками. В 2021 отмечалось 200-летие великого русского ученого П.Л. Чебышёва, знаменитого своими трудами как в математике, так и в механике. В этой связи особенно приятно отметить, что в диссертации, активная работа над которой происходила в 2021 г., также получены как результаты из теоретической механики, так и чисто математические результаты, и при этом большое внимание уделено удивительным механизмам Чебышёва.

Считаю, что диссертация Бурьяна Сергея Николаевича на тему: “Механика голономных систем с геометрическими особыми точками” соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 01.09.2016 номер 6821/1 “О порядке присужде-

ния ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете". Соискатель Бурьян Сергей Николаевич заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология, 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин. Пункт 11 указанного Порядка диссертантом не нарушен.

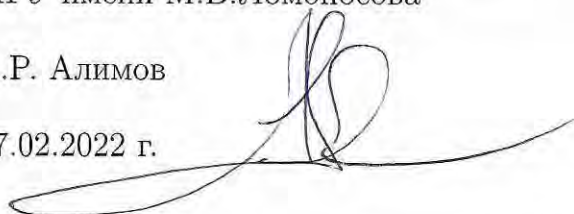
Член диссертационного совета

доктор физико-математических наук

в.н.с. лаборатории вычислительных методов механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

А.Р. Алимов

07.02.2022 г.



Организация – место работы: механико-математический факультет, ФГБОУ ВПО Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Структурное подразделение: лаборатория вычислительных методов

Должность: ведущий научный сотрудник

Почтовый адрес: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, д.1, Главное здание, механико-математический факультет

Телефон: +7 (495) 939 56 32

Адрес электронной почты: alexey.alimov-msu@yandex.ru

Web-сайт организации в сети Интернет: www.msu.ru

Подпись А. Р. Алимова и сведения заверяю

*как. ст.на. зав.р.в. Сер.*

