Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Воронецкий Егор Юрьевич

Младшая K-теория нечётных унитарных групп

Специальность 1.1.5 —
«Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор
Вавилов Николай Александрович

Санкт-Петербург — 2022

Оглавление

Введение

Объектом исследования являются нечётные унитарные группы, классические изотропные редуктивные группы и соответствующие группы Стейнберга, **предметом исследования** являются их структура и свойства. **Цель исследования** заключается в доказательстве центральности нечётного унитарного K_2-функтора и K_2-функторов классических изотропных редуктивных групп.

Актуальность темы. Унитарные группы — это обобщение классических матричных групп, то есть полных линейных, симплектических и ортогональных групп, на произвольные ассоциативные кольца с единицей. Существуют различные определения унитарных групп, например, [5; 17; 22—24; 31; 32; 51; 58; 59]. Э. Бак в [6] определил унитарные группы как стабилизаторы двух классических форм на модуле, эрмитовой и квадратичной, где квадратичная форма принимает значения в факторгруппе кольца. Этот подход был обобщён В. Петровым в [2], где он определил нечётные унитарные группы с помощью квадратичных форм со значениями в произвольных абелевых группах.

Существует другое обобщение классических групп, основанное на теории редуктивных групповых схем [20; 21]. Если G — это классическая редуктивная групповая схема, то её скрученные формы в fppf топологии часто можно построить как унитарные групповые схемы [32], по крайней мере над полем характеристики, не равной 2.

Степень разработанности проблемы. Многие результаты младшей алгебраической K-теории были обобщены на унитарные группы [12; 13; 25; 28; 39; 50]. Для нечётных групп известно, что при естественных условиях

- элементарные подгруппы нормальны [2; 3; 49],
- выполняется стандартное описание нормальных подгрупп [10; 40; 41; 46],
- K_1-функтор стабилизируется [2; 9; 11; 57; 61],
- нестабильная группа Стейнберга центрально замкнута [34; 47; 53],
- нестабильный K_1-функтор является расширением абелевой группы при помощи нильпотентной [7; 8; 27; 62].

Старшая унитарная K-теория рассматривается в работах М. Шлихтинга, например, в [42].

Также известно, что нестабильный K_2-функтор централен (то есть нестабильная группа Стейнберга является центральным расширением элементарной подгруппы) в случаях

- полных линейных групп над коммутативными кольцами, согласно работе В. ван дер Каллена [52];
- полных линейных групп над почти коммутативными кольцами, это результат М. Туленбаева [4];
- групп Шевалле типов C, D, E, что следует из работ С. Синчука и А. Лавренова [33; 36; 44];
- изотропных ортогональных групп над полями, согласно статье С. Беге [14];
- изотропных редуктивных групп над локальными кольцами, это результат А. Ставровой [45].

Доказательства для нелокальных колец используют вычисления с относительными группами Стейнберга или «другое представление» группы Стейнберга, они также существенно используют матричную структуру группы и не обобщаются на изотропные редуктивные группы. В линейном случае на самом деле известно, что группа Стейнберга является скрещенным модулем над полной линейной группой, откуда следует нормальность элементарной подгруппы и центральность K_2-функтора.

Используемые методы. В работе используются новый локализационный метод, основанный на про-группах («метод про-групп Стейнберга»); вычисления в группах Стейнберга с использованием относительных корней; разложение Гаусса унитарных групп над полулокальными кольцами. Кроме того, мы используем результаты и методы теории унитарных групп, теории категорий (мультикатегории, полуабелевы категории и про-пополнение) и теории редуктивных групповых схем.

Апробация работы. Методы и основные результаты и методы работы докладывались на семинаре «Алгебраические группы», СПбГУ, Санкт-Петербург, 2021.

Результаты работы являются новыми, снабжены подробными доказательствами и опубликованы в реферируемых научных журналах [1; 55—57] (3 опубликованные работы, 1 препринт), что свидетельствует об их **достоверности**.

Работа носит **теоретический характер**, её результаты могут применяться в теории линейных алгебраических групп, при проведении учебных и научных семинаров.

Настоящая работа состоит из трёх глав и заключения. В первой главе мы дадим новую конструкцию унитарных групп, обобщающую определение В. Петрова. Она основана на новых алгебраических объектах, нечётных форменных кольцах, образующих многообразие двухсортных алгебр. Категория нечётных форменных колец оказывается алгебраически когерентной полуабелевой в смысле [15; 18], поэтому в этой общности легко использовать релятивизацию М. Стейна [48] в терминах внутренних скрещенных модулей [19].

Вторая глава содержит конструкцию нечётных форменных алгебр по классическим редуктивным групповым схемам. Для использования строго плоского спуска также вводится дополнительная структура на нечётных форменных алгебрах («аугментация»), описывающая корневые элементы длинного корневого типа.

В третьей главе доказывается основной результат диссертации: при естественных предположениях на нечётное форменное кольцо (R, Δ) нечётная унитарная группа Стейнберга $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ является скрещенным модулем над унитарной группой $\mathrm{U}(R, \Delta)$. Для этого изучаются нечётные форменные про-кольца, полученные «колокализацией» из (R, Δ), и их про-группы Стейнберга. На таких про-группах можно построить действия унитарных групп локализаций (R, Δ) при помощи разложения Гаусса и вычислений с относительными корнями («исключения корней»). Наконец, такие действия можно единственным образом продолжить до действия $\mathrm{U}(R, \Delta)$ на $\mathrm{StU}(R, \Delta)$.

Совмещая это с результатами второй главы, получается, что все классические односвязные достаточно изотропные редуктивные групповые схемы имеют центральные K_2-функторы. Также этот результат легко применить к изотропным унитарным группам В. Петрова, таким как вырожденные ортогональные группы. Наш результат не применим к редуктивным группам изотропного ранга меньше 3, но уже для групп Шевалле ранга 2 есть контрпримеры [60].

В заключении приводятся описания основных результатов, которые **выносятся на защиту**, а также описываются дальнейшие направления исследования.

Глава 1. Нечётные форменные кольца

1.1 Эрмитовы и квадратичные формы

Мы используем обозначения $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ и ${}^{x}y = xyx^{-1}$ для элементов групп. Если Δ_i — это подмножества группы с групповой операцией $\dotplus$ при i из линейно упорядоченного множества, все они содержат $\dot{0}$ и каждый $g \in \dot{\sum}_{i \in I} \Delta_i$ имеет единственное разложение $g = \dot{\sum}_{i \in I} g_i$ с $g_i \in \Delta_i$, то мы также обозначаем сумму Δ_i через $\dot{\bigoplus}_{i \in I} \Delta_i$. Центр группы G обозначается через $\mathrm{C}(G)$, аналогично для колец. Все кольца и алгебры предполагаются ассоциативными, но не обязательно с единицами. Мультипликативная полугруппа кольца R обозначается через $R^\bullet$. Элемент $x \in R$ кольца называется *квазиобратимым*, если у него есть квазиобратный $x^{\circ -1}$, то есть обратный относительно моноидальной операции $x \circ y = xy + x + y$. Квазиобратимые элементы образуют группу R° относительно $\circ$.

Напомним конструкцию нечётных унитарных групп из [2]. Антиавтоморфизм $\overline{(-)}$ кольца R с единицей называется λ-*инволюцией* при $\lambda \in R^*$, если $\bar{\bar{a}} = \lambda a \lambda^{-1}$ и $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$.

Рассмотрим модуль M_R над кольцом R с λ-инволюцией. Биаддитивное отображение $B \colon M \times M \to R$ называется *эрмитовой формой*, если выполнено $B(mr, m'r') = \bar{r}\, B(m, m')r'$ и $B(m', m) = \overline{B(m, m')}\, \lambda$. *Группа Гейзенберга* эрмитовой формы B — это $\mathrm{Heis}(B) = M \times R$ с групповой операцией $(m, r) \dotplus (m', r') = (m + m', r - B(m, m') + r')$, моноид $R^\bullet$ действует на ней через $(m, r) \cdot x = (mx, \bar{x} r x)$. *Нечётный форменный параметр* — это $R^\bullet$-инвариантная подгруппа $\mathcal{L} \leq \mathrm{Heis}(B)$ такая, что

$$\{(0, r - \bar{r}\lambda)\} = \mathcal{L}_{\min} \leq \mathcal{L} \leq \mathcal{L}_{\max} = \{(m, r) \mid r + B(m, m) + \bar{r}\lambda = 0\}.$$

При выборе такого $\mathcal{L}$ отображение $q \colon M \to \mathrm{Heis}(B)/\mathcal{L}, m \mapsto (m, 0) \dotplus \mathcal{L}$ называется *квадратичной формой*, а *унитарная группа* — это

$$\mathrm{U}(M, B, \mathcal{L}) = \{g \in \mathrm{Aut}(M_R) \mid B(gm, gm') = B(m, m'), q(gm) = q(m)\}.$$

Нас интересует частный случай этих определений. Будем говорить, что (R, Δ) — это *специальное нечётное форменное кольцо с единицей*, если R — это кольцо с 1-инволюцией, на R_R выбраны эрмитова форма $B_R(x, y) = \bar{x}\, y$ и нечётный форменный параметр $\Delta \leq \mathrm{Heis}(B_R) = R \times R$. Тогда $\mathrm{U}(R, B_R, \Delta)$ можно отождествить с

$$\{g \in R^* \mid g^{-1} = \bar{g}, (g - 1, \bar{g} - 1) \in \Delta\}.$$

В разделе 1.4 мы определим абстрактные нечётные форменные кольца, образующие многообразие двухсортных алгебр.

По любому кольцу R с единицей можно построить специальное нечётное форменное кольцо (T, Ξ) с единицей, где $T = R^{\mathrm{op}} \times R$ с $\overline{(x^{\mathrm{op}}, y)} = (y^{\mathrm{op}}, x)$ и

$$\Xi = \Xi_{\max} = \{(x^{\mathrm{op}}, y; z^{\mathrm{op}}, w) \mid xy + z + w = 0\}.$$

Тогда

$$R^* \to \mathrm{U}(T, B_T, \Xi_{\max}), g \mapsto ((g^{-1})^{\mathrm{op}}, g)$$

будет изоморфизмом групп. Если R имеет полное семейство ортогональных идемпотентов $f_1, \ldots, f_\ell$, то положим $e_i = (0, f_i) \in T$ при $i > 0$ и $e_i = (f_{-i}^{\mathrm{op}}, 0) \in T$ при $i < 0$. Они образуют полное семейство ортогональных идемпотентов в T, $\overline{e_i} = e_{-i}$ и элементы $q_i = (e_i, 0)$ лежат в Θ. Если же f_i полны, то есть $R = Rf_iR$, то $e_i + e_{-i}$ полны в T.

По модулю M_R с эрмитовой формой B и нечётным форменным параметром $\mathcal{L}$ тоже можно построить специальное нечётное форменное кольцо (S, Θ) с единицей. Построим по $\mathrm{End}(M_R)$ специальное нечётное форменное кольцо (T, Ξ) с единицей. Подкольцо

$$S = \{(x^{\mathrm{op}}, y) \in T \mid B(xm, m') = B(m, ym')\}$$

имеет нечётный форменный параметр

$$\Theta = \{(x^{\mathrm{op}}, y; z^{\mathrm{op}}, w) \in \Theta_{\max} = \Xi_{\max} \cap (S \times S) \mid q(ym) + (0, B(m, wm)) = \mathcal{L}\}$$

и легко видеть, что унитарные группы $\mathrm{U}(M, B, \mathcal{L})$ и $\mathrm{U}(S, B_S, \Theta)$ изоморфны. Теперь пусть в M выбраны v_i при $-\ell \leq i \leq \ell$, $i \neq 0$ такие, что $B(v_i, v_j) = 0$ при $i \neq -j$, $q(v_i) = \mathcal{L}$ при всех i и $B(v_{-i}, v_i) = 1$ при $i > 0$. Тогда

$$e_{ij} = ((v_{-j}\lambda^{-1}B(v_i, -))^{\mathrm{op}}, v_iB(v_{-j}, -)) \in S \text{ при } j > 0,$$
$$e_{ij} = ((v_{-j}\lambda B(v_i, -))^{\mathrm{op}}, v_i\lambda^{-1}B(v_{-j}, -)) \in S \text{ при } j < 0,$$

$e_{ij}\, e_{kl} = 0$ при $j \neq k$, $e_{ij}e_{jk} = e_{ik}$, $\overline{e_{ij}} = e_{-j,-i}$ при $ij > 0$ и $q_i = (e_{ii}, 0) \in \Theta$.

1.2 Категории

Декартова мультикатегория $\mathcal{C}$ состоит из

1. класса объектов $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
2. множеств морфизмов $\mathcal{C}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ при $n \geq 0$ и $X_i, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
3. тождественных морфизмов $\mathrm{id}_X \in \mathcal{C}(X; X)$ при $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
4. отображений композиции

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(Y_1, \ldots, Y_n; Z) \times \mathcal{C}(X_1, \ldots, X_m; Y_i)&\\ \to \mathcal{C}(\ldots, Y_{i-1}, X_1, \ldots, X_m, Y_{i+1}, \ldots; Z)&\end{aligned}$$

для $n \geq 1$, $m \geq 0$, $X_i, Y_j, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;

5. отображений

$$\mathcal{C}(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(m)}; Y) \to \mathcal{C}(X_1, \ldots, X_n; Y), f \mapsto f\sigma^*$$

для $m, n \geq 0$, $X_i, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\sigma\colon \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$;

и эти отображения согласованы [43]. *Симметричная мультикатегория* определяется аналогично, но берутся только биективные σ.

Симметричная мультикатегория $\mathcal{C}$ *замкнута* [37], если для всех $n \geq 0$ и $X_1, \ldots, X_n, Y \in \mathcal{C}$ существуют объект H и $\mathrm{ev} \in \mathcal{C}(H, X_1, \ldots, X_n; Y)$ такие, что для всех $m \geq 0$ и $Z_1, \ldots, Z_m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ будет биекцией

$$\mathrm{ev}_*\colon \mathcal{C}(Z_1, \ldots, Z_m; H) \to \mathcal{C}(Z_1, \ldots, Z_m, X_1, \ldots, X_n; Y).$$

Нам потребуются регулярные и полуабелевы категории [15]. Категория $\mathcal{C}$ имеет *нулевой объект* 0, если он одновременно начальный и конечный. Морфизм f в конечно полной $\mathcal{C}$ называется *регулярным эпиморфизмом*, если это коуравнитель некоторой ядерной пары, то есть расслоенного произведения некоторого морфизма с собой. Конечно полная $\mathcal{C}$ *регулярна*, если все ядерные пары имеют коуравнители и регулярные эпиморфизмы сохраняются при расслоенных произведениях, тогда в ней есть функториальное разложение морфизмов в композицию мономорфизма и регулярного эпиморфизма.

Расщеплённым расширением в регулярной $\mathcal{C}$ с нулевым объектом называется диаграмма $A' \overset{i}{\rightarrowtail} A \underset{s}{\overset{p}{\twoheadrightarrow}} A''$, где $p \circ s = \mathrm{id}_{A''}$ и $i = \ker(p)$. Такая $\mathcal{C}$ называется *гомологической*, если все морфизмы между расщеплёнными расширениями, тождественные на концах, обратимы. Наконец, $\mathcal{C}$ *полуабелева*, если она гомологическая, конечно кополная и все категорные отношения эквивалентности являются ядерными парами.

В произвольной гомологической $\mathcal{C}$ объект G *действует* на объекте X, если выбран класс изоморфизма расщеплённых расширений $X \to Y \leftrightarrows G$. Если $\mathcal{C}$ полуабелева, то свободный объект с действием G, содержащий X, — это $\operatorname{Ker}(G \amalg X \to G)$ [16]. Полуабелева $\mathcal{C}$ называется *алгебраически когерентной* [18], если в любом объекте X с действием G точная верхняя грань любых двух G-инвариантных подобъектов G-инвариантна. Категории **Grp** групп и **Rng** колец без единицы являются алгебраически когерентными полуабелевыми.

Скрещенный модуль [19] в алгебраически когерентной полуабелевой категории $\mathcal{C}$ состоит из морфизма $\delta \colon X \to G$ и действия G на X таких, что δ эквивариантен относительно действия G и действие X на себе пропускается через действие G на нём. В **Grp** это в точности классические скрещенные модули, то есть гомоморфизмы групп $\delta \colon X \to G$ с действием G на X таким, что $\delta({}^g x) = {}^g\delta(x)$ и ${}^x x' = {}^{\delta(x)}x'$ при $g \in G$, $x, x' \in X$.

1.3 Квадратичные отображения

Группу G будем называть *фильтрованной 2-нильпотентной*, если в ней выбрана нильпотентная фильтрация $\dot{0} \leq G_0 \leq G$. В такой G коммутатор можно рассматривать как биаддитивное отображение $G/G_0 \times G/G_0 \to G_0$. Все факторгруппы G/N будут фильтрованными 2-нильпотентными с фильтрациями $0 \leq (G_0 \dotplus N)/N \leq G/N$.

Нам понадобится конструкция фильтрованных 2-нильпотентых G, у которых G/G_0 раскладывается в прямую сумму. Возьмём абелевы группы G_0 и G_i при $i \in I$, где I линейно упорядочено, биаддитивные отображения $[-,=]_{ij} \colon G_i \times G_j \to G_0$ при $i < j$ и нормализованные 2-коциклы $c_i \colon G_i \times G_i \to G_0$ (то есть $c(x, y) + c(x + y, z) = c(x, y + z) + c(y, z)$ и $c(x, 0) = c(0, x) = 0$). Тогда $G = G_0 \dot{\oplus} \dot{\bigoplus}_{i \in I} G_i$ будет фильтрованной 2-нильпотентной группой с фильтрацией G_0 так, что $x \dotplus y = c_i(x, y) \dot{\oplus} (x + y)$ при $x, y \in G_i$ и $[x, y]^{\cdot} = [x, y]_{ij}$ при $x \in G_i$, $y \in G_j$, $i < j$.

Отображение $q \colon G \to H$ фильтрованных 2-нильпотентных групп *квадратично* [26], если $q(G_0) \subseteq H_0$ и $q(x \dotplus y) = q(x) \dotplus q(x \mid y) \dotplus q(y)$, где

$q(- \mid =)\colon G/G_0 \times G/G_0 \to H_0$ биаддитивно (*скрещенный эффект* q). Такое q задаёт гомоморфизмы $G_0 \to H_0$ и $G/G_0 \to H/H_0$ абелевых групп. Также $q(\dot{-}x) = q(x \mid x) \dot{-} q(x)$, $q(\dot{n}x) = \dot{n}q(x) \dot{+} \binom{n}{2} q(x \mid x)$ при $n \in \mathbb{Z}$, $q(\sum_i^{\cdot} x_i) = \sum_i^{\cdot} q(x_i) \dot{+} \sum_{i<j}^{\cdot} q(x_i \mid x_j)$, $q([x, y]^{\cdot}) = [q(x), q(y)]^{\cdot} \dot{+} q(x \mid y) \dot{-} q(y \mid x)$.

Если $q, q'\colon G \to H$ квадратичные, то их поточечная сумма $q \dot{+} q'$ квадратична с

$$(q \dot{+} q')(x \mid y) = q(x \mid y) \dot{+} [q(y), q'(x)]^{\cdot} \dot{+} q'(x \mid y),$$

а $\dot{-}q$ квадратично с $(\dot{-}q)(x \mid y) = [q(y), q(x)]^{\cdot} \dot{-} q(x \mid y)$. Поточечный коммутатор $[q, q']^{\cdot}\colon G \to H_0$ квадратичен с

$$[q, q']^{\cdot}(x \mid y) = [q(x), q'(y)]^{\cdot} \dot{+} [q(y), q'(x)]^{\cdot}.$$

Композиция квадратичных $q\colon G \to H$ и $q'\colon H \to F$ тоже квадратична с

$$(q' \circ q)(x \mid y) = q'(q(x \mid y)) \dot{+} q'(q(x) \mid q(y)).$$

Возьмём фильтрованные 2-нильпотентные группы $G_1, \ldots, G_n, H$. Отображение $q\colon G_1 \times \ldots \times G_n \to H$ *поликвадратично*, если оно квадратично по каждому аргументу. Обозначим индуцированные отображения и скрещенные эффекты через

$$\begin{aligned}
q_i &\colon G_1 \times \ldots \times G_{i-1} \times G_{i0} \times G_{i+1} \times \ldots \times G_n \to H_0,\\
\overline{q} &\colon G_1/G_{10} \times \ldots \times G_n/G_{n0} \to H/H_0,\\
q^i &\colon G_1 \times \ldots \times G_{i-1} \times G_i/G_{i0} \times G_i/G_{i0} \times G_{i+1} \times \ldots \times G_n \to H_0.
\end{aligned}$$

Ясно, что q_i и q^i квадратичны по остальным $n-1$ переменным. Легко проверить, что эти отображения удовлетворяют

$$q_i|_{\ldots \times G_{i0} \times \ldots \times G_{j0} \times \ldots} = q_j|_{\ldots \times G_{i0} \times \ldots \times G_{j0} \times \ldots} \text{ при } i < j; \tag{Q0}$$

$$q_i(\ldots, x, \ldots, y \mid z, \ldots) = q^j(\ldots, x, \ldots, y, z, \ldots) \text{ при } i \neq j; \tag{Q1}$$

$$\begin{aligned} q^i(\ldots, x, y, \ldots, z \mid w, \ldots) &= q^j(\ldots, x \mid y, \ldots, z, w, \ldots)\\ &\dot{+} [\overline{q}(\ldots, y, \ldots, z, \ldots), \overline{q}(\ldots, x, \ldots, w, \ldots)] \text{ при } i < j; \end{aligned} \tag{Q2}$$

$$\begin{aligned} q_i(\ldots, [x, y]^{\cdot}, \ldots) &= [\overline{q}(\ldots, x, \ldots), \overline{q}(\ldots, y, \ldots)]^{\cdot}\\ &\dot{+} q^i(\ldots, x, y, \ldots) \dot{-} q^i(\ldots, y, x, \ldots). \end{aligned} \tag{Q3}$$

Обозначим через $\mathbf{Quad}(G_1, \ldots, G_n; H)$ группу поликвадратичных отображений $G_1 \times \ldots \times G_n \to H$ и выберем в ней нильпотентную фильтрацию

$\mathbf{Quad}(G_1, \ldots, G_n; H_0)$, где H_0 рассматривается с нильпотентной фильтрацией $0 \leq H_0 \leq H_0$. Фильтрованные 2-нильпотентные группы и поликвадратичные отображения образуют замкнутую симметричную мультикатегорию $\mathbf{Quad}$.

Есть два вполне строгих функтора из $\mathbf{Ab}$ в $\mathbf{Quad}$, если рассматривать нильпотентные фильтрации $0 \leq 0 \leq A$ или $0 \leq A \leq A$ на каждой абелевой группе A. Относительно любого из них $\mathbf{Quad}(A_1, \ldots, A_n; B)$ является обычной группой полиаддитивных отображений для абелевых групп A_i и B.

Лемма 1. *Поликвадратичные $q, q' \colon G_1 \times \ldots \times G_n \to H$ совпадают, если их индуцированные отображения и скрещенные эффекты совпадают, а также $q(x_1, \ldots, x_n) = q'(x_1, \ldots, x_n)$, где x_i пробегают подмножества G_i, порождающие G_i/G_{i0}.*

Лемма 2. *Пусть $q \colon G_1 \times \ldots \times G_n \to H$ поликвадратично и $F \trianglelefteq G_1$ — это нормальная подгруппа, порождённая элементами $a_i \dot{-} b_i$. Тогда q задаёт поликвадратичное $G_1/F \times G_2 \times \ldots \times G_n \to H$, если скрещенные эффекты q пропускаются через F и $q(a_i, x_2, \ldots, x_n) = q(b_i, x_2, \ldots, x_n)$.*

Лемма 3. *Рассмотрим фильтрованные 2-нильпотентные группы $G_1, \ldots, G_n$, H и разложения $G_i = G_{i0} \dotplus \dot{\bigoplus}_{j \in J_i} F_{ij}$ такие, что $G_i/G_{i0} = \bigoplus_{j \in i} F_{ij}$ являются прямыми суммами абелевых групп. Пусть у нас есть отображения*

$$\begin{aligned} q_i \colon & G_1 \times \ldots \times G_{i0} \times \ldots \times G_n \to H_0, \\ \overline{q} \colon & G_1/G_{10} \times \ldots \times G_n/G_{n0} \to H/H_0, \\ q^i \colon & G_1 \times \ldots \times G_i/G_{i0} \times G_i/G_{i0} \times \ldots \times G_n \to H_0, \\ q_{j_1 \ldots j_n} \colon & F_{1j_1} \times \ldots \times F_{nj_n} \to H \end{aligned}$$

такие, что q_i, $\overline{q}$ и q^i аддитивны или квадратичны по соответствующим аргументам и удовлетворяют (Q0)—(Q3);

$$\begin{aligned} q_{j_1 \ldots j_n}(g_1, \ldots, g_n) &\equiv \overline{q}(g_1, \ldots, g_n) \pmod{H_0}; \\ q_{j_1 \ldots j_n}(\ldots, g_i \dotplus g'_i, \ldots) &= q_{j_1 \ldots j_n}(\ldots, g_i, \ldots) \dotplus q^i(\ldots, g_i, g'_i, \ldots) \\ &\quad \dot{-} q_i(\ldots, c_{j_i}(g_i, g'_i), \ldots) \dotplus q_{j_1 \ldots j_n}(\ldots, g'_i, \ldots) \end{aligned}$$

для соответствующих нормализованных 2-коциклов c_{j_i}. Тогда существует $q \in \mathbf{Quad}(G_1, \ldots, G_n; F)$ со скрещенными эффектами q^i, индуцирующее q_i и $\overline{q}$, а также продолжающее $q_{j_1 \ldots j_n}$.

Доказательство. При $n = 1$ зададим q формулой

$$q\bigl(f_0 \dot{\oplus} \dot{\bigoplus_{j \in J_1}} f_j\bigr) = q_1(f_0) \dotplus \dot{\sum_{j \in J_1}} q_j(f_j) \dotplus \dot{\sum_{\substack{j, j' \in J_1 \\ j < j'}}} q^1(f_j, f'_j)$$

при помощи (Q3). В общем случае мы построим $F_{1j_1} \to \mathbf{Quad}(G_2, \ldots, G_n; H)$ по индукции. Из (Q1)—(Q2) следует, что эти отображения обладают свойствами из условия при $n = 1$, поэтому требуемое q существует. Оно удовлетворяет всем требованиям в силу (Q0)—(Q2). □

Если $X_1 \leq G_1, \ldots, X_n \leq G_n$ подгруппы и $q \in \mathbf{Quad}(G_1, \ldots, G_n; H)$, то через $q(X_1, \ldots, X_n)$ мы будем обозначать подгруппу H, порождённую элементами $q(x_1, \ldots, x_n)$ при $x_i \in X_i$, вместо образа $X_1 \times \ldots \times X_n$. Это обычное соглашение для полиаддитивных отображений между абелевыми группами.

1.4 Нечётные форменные кольца

Мы дадим немного другое определение нечётных форменных колец по сравнению с [57], чтобы их категория была полуабелевой.

Нечётное форменное кольцо — это пара (R, Δ), где R является кольцом с инволюцией $r \mapsto \bar{r}$, Δ является группой с групповой операцией $\dotplus$ и даны $\phi \colon R \to \Delta$, $\pi \colon \Delta \to R$, $\rho \colon \Delta \to R$, $(-) \cdot (=) \colon \Delta \times R \to \Delta$ со свойствами

(R1) $\phi(a + b) = \phi(a) \dotplus \phi(b)$, $\phi(a + \bar{a}) = \phi(\bar{a}a) = \dot{0}$;

(R2) $\pi(u \dotplus v) = \pi(u) + \pi(v)$, $\pi(\phi(a)) = 0$;

(R3) $v \dotplus u = u \dotplus \phi(\overline{\pi(u)}\pi(v)) \dotplus v$;

(R4) $\pi(u \cdot a) = \pi(u)a$;

(R5) $\rho(u \dotplus v) = \rho(u) - \overline{\pi(u)}\pi(v) + \rho(v)$, $\rho(\phi(a)) = a - \bar{a}$;

(R6) $\rho(u) + \overline{\pi(u)}\pi(u) + \overline{\rho(u)} = 0$;

(R7) $(u \dotplus v) \cdot a = u \cdot a \dotplus v \cdot a$, $\phi(b) \cdot a = \phi(\bar{a}ba)$;

(R8) $u \cdot (a + b) = u \cdot a \dotplus \phi(\bar{b}\,\rho(u)a) \dotplus u \cdot b$;

(R9) $\rho(u \cdot a) = \bar{a}\rho(u)a$;

(R10) $(u \cdot a) \cdot b = u \cdot ab$.

Из аксиом следует, что $0 \leq \phi(R) \leq \Delta$ является нильпотентной фильтрацией. Если рассматривать R с фильтрацией $0 \leq R \leq R$, то ρ квадратично, а если рассматривать его с фильтрацией $0 \leq 0 \leq R$, то $(-) \cdot (=)$ биквадратично. Также есть полезное следствие $\rho(\dot{-}u) = \overline{\rho(u)}$ из (R5) и (R6).

Пусть теперь у нас есть кольцо R с инволюцией и фильтрованная 2-нильпотентная группа Δ с отображениями ϕ и π, удовлетворяющими (R1), (R2), (R3), а также структурой правого неунитального R-модуля на $\Delta/\phi(R)$, удовлетворяющей (R4). Чтобы построить ρ, удовлетворяющее (R5), мы можем использовать лемму 3, так как индуцированные гомоморфизмы и скрещенные эффекты уже имеются и удовлетворяют (Q0)—(Q3). Аксиому (R6) можно проверить на образующих согласно лемме 1. Аналогично, индуцированные отображения и скрещенные эффекты для действия $(-)\cdot(=)$, удовлетворяющего (R7) и (R8), уже имеются и удовлетворяют (Q0)—(Q3). Аксиомы (R9) и (R10) также можно проверять на образующих.

Нечётное форменное кольцо (R, Δ) *специально*, если $(\pi, \rho)\colon \Delta \to R \times R$ инъективно. Множество $R \times R$ имеет групповую операцию

$$(a, b) \dotplus (c, d) = (a + c, b - \bar{a}c + d)$$

и действие полугруппы $R^\bullet$, задаваемое формулой $(a, b) \cdot c = (ac, \bar{c}\, bc)$. С точностью до отождествления Δ с её образом в $R \times R$ специальные нечётные форменные кольца — это пары (R, Δ) из кольца с инволюцией и $R^\bullet$-инвариантной подгруппы $\Delta \leq R \times R$, причём

$$\{(0, a - \bar{a})\} = \Delta_{\min} \leq \Delta \leq \Delta_{\max} = \{(a, b) \mid b + \bar{a}a + \overline{b} = 0\}.$$

Легко проверить, что категория **OFR** нечётных форменных колец и их гомоморфизмов полуабелева. В ней мономорфизмы — это инъекции, регулярные эпиморфизмы — это сюръекции, а изоморфизмы — это биекции.

Будем говорить, что нечётное форменное кольцо (R, Δ) *действует* на нечётном форменном кольце (S, Θ), если даны операции умножения $R \times S \to S$, $S \times R \to S$, $\Theta \times R \to \Theta$, $\Delta \times S \to \Theta$, удовлетворяющие

(A1) $(a + a')b = ab + a'b$, $a(b + b') = ab + ab'$;

(A2) $(aa')b = a(a'b)$, $(ab)b' = a(bb')$, $(ab)a' = a(ba')$, $(ba)b' = b(ab')$;

(A3) $ab = \overline{b}\,\bar{a}$;

(A4) $(u \dotplus u') \cdot b = u \cdot b \dotplus u' \cdot b$, $u \cdot (b + b') = u \cdot b \dotplus \phi(\overline{b'}\rho(u)b) \dotplus u \cdot b'$;

(A5) $(v \dotplus v') \cdot a = v \cdot a \dotplus v' \cdot a$, $v \cdot (a + a') = v \cdot a \dotplus \phi(\overline{a'}\rho(v)a) \dotplus v \cdot a'$;

(A6) $\phi(a) \cdot b = \phi(\overline{b}\,ab)$, $\phi(b) \cdot a = \phi(\bar{a}ba)$;

(A7) $\pi(u \cdot b) = \pi(u)b$, $\pi(v \cdot a) = \pi(v)a$;

(A8) $\rho(u \cdot b) = \bar{b}\,\rho(u)b$, $\rho(v \cdot a) = \bar{a}\rho(v)a$;

(A9) $(u \cdot a) \cdot b = u \cdot ab$, $(u \cdot b) \cdot a = u \cdot ba$, $(u \cdot b) \cdot b' = u \cdot bb'$;

(A10) $(v \cdot a) \cdot b = v \cdot ab$, $(v \cdot b) \cdot a = v \cdot ba$, $(v \cdot a) \cdot a' = v \cdot aa'$

при $a, a' \in R$; $b, b' \in S$; $u, u' \in \Delta$; $v, v' \in \Theta$. Следующая лемма показывает, что так описываются действия в **OFR** в смысле полуабелевых категорий.

Лемма 4. *Для любых нечётных форменных колец (R, Δ) и (S, Θ) существует взаимно однозначное соответствие между классами изоморфизма расщеплённых расширений $(S, \Theta) \to (T, \Xi) \leftrightarrows (R, \Delta)$ и действиями (R, Δ) на (S, Θ), при котором расщеплённое расширение соответствует сужению своих операций на (R, Δ) и (S, Θ).*

Доказательство. Любое расщеплённое расширение (T, Ξ) имеет вид $T = S \rtimes R$, $\Xi = \Theta \rtimes \Delta$, поэтому его класс изоморфизма даёт требуемые операции умножения. Группа Δ действует на Θ по формуле ${}^{u}v = v \dotplus \phi(\overline{\pi(v)}\pi(u))$ и при помощи леммы 1 легко видеть, что эти операции однозначно задают класс изоморфизма.

Наоборот, пусть у нас есть операции умножения. Из (A1) и (A2) следует, что R действует на S в полуабелевой категории колец, поэтому можно построить $T = S \rtimes R$ с инволюцией, используя (A3). Группа Δ действует на Θ по формуле выше, поэтому $\Xi = \Theta \rtimes \Delta$ и гомоморфизмы $\phi\colon T \to \Xi$, $\pi\colon \Xi \to T$ корректно определены и удовлетворяют (R1), (R2), (R3). Поликвадратичные отображения $\rho\colon \Xi \to T$ и $(-) \cdot (=)\colon \Xi \times T \to \Xi$ можно построить по лемме 3, а оставшиеся аксиомы проверить при помощи леммы 1. □

Теорема 1. *Категория* **OFR** *алгебраически когерентна.*

Доказательство. Пусть (T, Ξ) действует на (R, Δ) и (S, Θ), (S', Θ') являются (T, Ξ)-инвариантными подобъектами (R, Δ). Их точная верхняя грань (S'', Θ'') — это

$$S'' = S + S' + SS' + S'S + SS'S + S'SS' + \ldots,$$
$$\Theta'' = \phi(S'') \dotplus \Theta \dotplus \Theta' \dotplus \Theta \cdot S' \dotplus \Theta' \cdot S \dotplus \Theta \cdot S'S \dotplus \Theta' \cdot SS' \dotplus \ldots,$$

она тоже (T, Ξ)-инвариантна. □

Скрещенным модулем в категории **OFR** будем называть гомоморфизм $\delta\colon (S, \Theta) \to (R, \Delta)$ нечётных форменных колец, где (R, Δ) действует на (S, Θ), δ сохраняет это действие, а также выполнены соотношения Пайффера

1. $bb' = \delta(b)b' = b\delta(b')$ при $b, b' \in S$;
2. $v \cdot b = \delta(v) \cdot b = v \cdot \delta(b)$ при $v \in \Theta$, $b \in S$.

Легко видеть, что это в точности скрещенные модули в смысле алгебраически когерентных полуабелевых категорий.

1.5 Нечётные форменные алгебры

Нечётное форменное кольцо (R, Δ) имеет *единицу*, если R имеет единицу и $u \cdot 1 = u$ при $u \in \Delta$. Например, любое коммутативное кольцо K с единицей можно рассматривать как нечётное форменное кольцо $(K, \dot{0})$ с единицей (взяв тривиальную инволюцию на K). Действие нечётного форменного кольца (T, Ξ) на нечётном форменном кольце (R, Δ) с единицей всегда задаётся единственным гомоморфизмом $(T, \Xi) \to (R, \Delta)$. Специальные нечётные форменные кольца с единицей — это в точности объекты из раздела 1.1.

Действие нечётного форменного кольца (R, Δ) с единицей на нечётном форменном кольце (S, Θ) *унитально*, если $1b = b = b1$ при $b \in S$ и $v \cdot 1 = v$ при $v \in \Theta$, то есть если $(S \rtimes R, \Theta \rtimes \Delta)$ имеет единицу $(0, 1) \in S \rtimes R$.

Возьмём коммутативное кольцо K с единицей. Нечётное форменное кольцо (R, Δ) называется *нечётной форменной K-алгеброй*, если на нём унитально действует $(K, \dot{0})$, причём $ak = ka$ при $a \in R$, $k \in K$. Другими словами,

1. R является K-алгеброй с K-линейной инволюцией;
2. моноид $K^\bullet$ действует справа на Δ операцией $(u, k) \mapsto u \cdot k$;
3. $u \cdot (k + k') = u \cdot k \dotplus \phi(\rho(u)kk') \dotplus u \cdot k'$;
4. $(u \cdot a) \cdot k = u \cdot ak = (u \cdot k) \cdot a$;
5. $\phi(a) \cdot k = \phi(ak^2)$, $\pi(u \cdot k) = \pi(u)k$, $\rho(u \cdot k) = \rho(u)k^2$;
6. $\phi(\bar{a}ak) = \dot{0}$.

Любое нечётное форменное кольцо имеет единственную структуру нечётной форменной $\mathbb{Z}$-алгебры, если положить $u \cdot n = \dot{n}u \dotplus \binom{n}{2}^{\cdot} \phi(\rho(u))$, и все гомоморфизмы нечётных форменных колец сохраняют действие $(\mathbb{Z}, \dot{0})$.

Унитарная группа нечётного форменного кольца (R, Δ) — это

$$\mathrm{U}(R, \Delta) = \{g \in \Delta \mid \pi(g) = \overline{\rho(g)}, \pi(g)\overline{\pi(g)} = \overline{\pi(g)}\pi(g)\}$$

с групповой операцией $gh = g \cdot \pi(h) \dotplus h \dotplus g$.

Лемма 5. *Множество* $\mathrm{U}(R, \Delta)$ *действительно является группой с нейтральным элементом* $\dot{0}$ *и обратным* $g^{-1} = \dot{-}g \cdot \overline{\pi(g)} \dot{-} g$. *Из неё есть гомоморфизм* $\alpha\colon \mathrm{U}(R, \Delta) \to (R \rtimes \mathbb{Z})^*, g \mapsto \pi(g) + 1$ *со свойством* $\alpha(g)^{-1} = \overline{\alpha(g)}$. *Она действует автоморфизмами на* (R, Δ) *по формулам* ${}^g a = \alpha(g)\, a\, \overline{\alpha(g)}$ *при* $a \in R$ *и* ${}^g u = (g \cdot \pi(u) \dotplus u) \cdot \overline{\alpha(g)}$ *при* $u \in \Delta$. *Это действие задаёт действие сопряжениями унитарной группы на себе, а если* (R, Δ) *является нечётной форменной* K*-алгеброй, то оно перестановочно с действием* $(K, \dot{0})$.

Так как функтор $\mathrm{U}(-, =)\colon \mathbf{OFR} \to \mathbf{Grp}$ сохраняет конечные пределы, то любое действие (R, Δ) на (S, Θ) задаёт действие $\mathrm{U}(R, \Delta)$ на (S, Θ) и $\mathrm{U}(S, \Theta)$. Также этот функтор сохраняет скрещенные модули, что позволяет применять релятивизацию [48] к элементарным подгруппам унитарных групп и их группам Стейнберга.

Нечётная форменная K-подалгебра $(I, \Gamma) \leq (R, \Delta)$ *нормальна*, если на $(R/I, \Delta/\Gamma)$ порождается структура нечётной форменной K-алгебры. Другими словами, это нечётная форменная K-подалгебра, инвариантная относительно действия (R, Δ) на себе. В этом случае мы будем говорить, что (I, Γ) — это *нечётный форменный идеал* (R, Δ). Таким образом, нечётный форменный идеал состоит из идеала $I = \overline{I} \trianglelefteq R$ и подгруппы $\Gamma \leq \Delta$, причём $\Gamma \cdot R \dotplus \Gamma \cdot K \subseteq \Gamma$ и

$$\Delta \cdot I \dotplus \phi(I) = \Gamma_{\min} \leq \Gamma \leq \Gamma_{\max} = \{u \in \Delta \mid \pi(u), \rho(u) \in I\}.$$

Лемма 6. *Нечётный форменный идеал* $(I, \Gamma) \leq (R, \Delta)$ *нечётной форменной* K*-алгебры, порождённый* $X \subseteq R$ *и* $U \subseteq \Delta$, *имеет вид*

$$I = \sum_{a \in X \cup \overline{X} \cup \pi(U) \cup \overline{\pi(U)} \cup \rho(U)} (R \rtimes K) a (R \rtimes K),$$

$$\Gamma = \phi(I) \dotplus \Delta \cdot I \dotplus \dot{\sum_{u \in U}} u \cdot K \dotplus \dot{\sum_{u \in U}} u \cdot R.$$

Предложение 1. *Пусть* K — *это коммутативное кольцо с единицей,* X *и* U — *множества переменных,* (R, Δ) — *это свободная нечётная форменная* K*-алгебра, порождённая* $X \subseteq R$ *и* $U \subseteq \Delta$. *Также положим*

$$A = \{x, \bar{x}, \pi(u), \overline{\pi(u)}, \rho(u) \mid x \in X, u \in U\},$$

через A^+ *обозначим свободную полугруппу на* A *(то есть множество непустых конечных последовательностей из элементов* A*), через* $A^* = \{\varnothing\} \cup A^+$ —

свободный моноид на A. Тогда $R = \bigoplus_{w \in A^+} Kw$, $\operatorname{Ker}(\phi) = \{r \in R \mid r = \overline{r}\}$, $\Delta/\phi(R)$ является свободным правым K-модулем с базисом $u \cdot w$ при $u \in U$ и $w \in A^*$, а всё нечётное форменное кольцо (R, Δ) специально.

Доказательство. Пусть $R' = \bigoplus_{w \in A^+} Kw$, это K-алгебра с K-линейной инволюцией, где $\overline{\rho(u)} = -\overline{\pi(u)}\,\pi(u) - \rho(u)$. Она также имеет базис из непустых формальных произведений x, $\bar{x}$, $\pi(u)$, $\overline{\pi(u)}$, $\rho(u)$, $\overline{\rho(u)}$, не содержащих подпроизведения $\overline{\pi(u)}\pi(u)$, такой базис сохраняется при инволюции. С его помощью легко проверить, что $\{r \in R' \mid r = \bar{r}\} = \sum_{r \in R'} K(r + \bar{r}) + \sum_{r \in R'} K\bar{r}r$.

Пусть $P = R'/\{r \in R' \mid r = \overline{r}\}$, обозначим каноничное отображение $R' \to P$ через ϕ. Также пусть $\Delta' = P \dotplus \dot{\bigoplus}_{u \in U} u \cdot (R' \rtimes K)$, где P центрально, $[u \cdot x, v \cdot y] = \phi(\bar{y}\,\overline{\pi(v)}\,\pi(u)x)$, $u \cdot x \dotplus u \cdot y = \phi(-\bar{y}\,\rho(u)x) \dotplus u \cdot (x + y)$. При помощи лемм 1 и 3 можно определить операции на Δ' так, что $\pi(u \cdot x) = \pi(u)x$, $\rho(u \cdot x) = \bar{x}\rho(u)x$, $(u \cdot x) \cdot y = u \cdot xy$ при $y \in K \cup R$ и (R', Δ') является нечётной форменной K-алгеброй. Ясно, что она свободна. □

Отсюда следует, что любая нечётная форменная K-алгебра является подфактором специальной нечётной форменной K-алгебры с единицей.

Предложение 2. *Пусть (T, Ξ) — это копроизведение нечётных форменных K-алгебр (R_1, Δ_1) и (R_{-1}, Δ_{-1}). Тогда*

$$\begin{aligned}
T &= R_1 \oplus R_{-1} \oplus (R_1 \otimes_K R_{-1}) \oplus (R_{-1} \otimes_K R_1) \\
&\quad \oplus (R_1 \otimes_K R_{-1} \otimes_K R_1) \oplus (R_{-1} \otimes_K R_1 \otimes_K R_{-1}) \oplus \ldots; \\
\Xi &= \phi(R_1 \otimes_K R_{-1}) \dotplus \phi(R_1 \otimes_K R_{-1} \otimes_K R_1 \otimes_K R_{-1}) \dotplus \ldots \\
&\quad \dotplus \Delta_1 \dotplus \Delta_{-1} \dotplus (\Delta_1 \boxtimes_K R_{-1}) \dotplus (\Delta_{-1} \boxtimes_K R_1) \\
&\quad \dotplus (\Delta_1 \boxtimes_K R_{-1} \otimes_K R_1) \dotplus (\Delta_{-1} \boxtimes_K R_1 \otimes_K R_{-1}) \dotplus \ldots;
\end{aligned}$$

где $\Delta_i \boxtimes_K R_{-i} \otimes_K \ldots \otimes_K R_{\pm i}$ (с n сомножителями вида $R_{\pm 1}$) — это группа с образующими $\phi(x)$ при $x \in R_{\pm i} \otimes_K \ldots \otimes_K R_{\pm i}$ (с $2n+1$ сомножителями) и $u \boxtimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$ при $u \in \Delta_i$, $a_k \in \Delta_{(-1)^k i}$, а также соотношениями

1. *$\phi(x)$ центральны, $\phi(x + y) = \phi(x) \dotplus \phi(y)$, $\phi(x + \bar{x}) = \dot{0}$;*
2. *$\phi(\bar{z}zk) = \dot{0}$ при $z \in R_i \otimes_K \ldots \otimes_K R_{\pm i}$ (с $n+1$ сомножителем);*
3. *$[u \boxtimes \ldots \otimes a_n, v \boxtimes \ldots \otimes b_n] = \phi(\overline{b_n} \otimes \ldots \otimes \overline{\pi(v)}\pi(u) \otimes \ldots \otimes a_n)$;*
4. *$\phi(a_0) \boxtimes \ldots \otimes a_n = \phi(\overline{a_n} \otimes \ldots \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_n)$;*
5. *$u \cdot k \boxtimes \ldots \otimes a_n = u \boxtimes a_1 k \otimes \ldots \otimes a_n = \ldots = u \boxtimes \ldots \otimes a_n k$ при $k \in K$;*
6. *$(u \dotplus v) \boxtimes \ldots \otimes a_n = u \boxtimes \ldots \otimes a_n \dotplus v \boxtimes \ldots \otimes a_n$;*

7. $u \boxtimes \ldots \otimes (a_j + a'_j) \otimes \ldots \otimes a_n = u \boxtimes \ldots \otimes a_j \otimes \ldots \otimes a_n \dotplus \phi(\overline{a_n} \otimes \ldots \otimes \overline{a'_j} \otimes \ldots \otimes \rho(u) \otimes \ldots \otimes a_j \otimes \ldots \otimes a_n) \dotplus u \boxtimes \ldots \otimes a'_j \otimes \ldots \otimes a_n$.

Доказательство. Если (R_i, Δ_i) свободны, то это легко проверить при помощи предложения 1, а в общем случае используем лемму 6. □

1.6 Элементарные унитарные группы

Разложение Пирса ранга ℓ нечётной форменной K-алгебры (R, Δ) — это разложение

$$R = \bigoplus_{-\ell \leq i,j \leq \ell} R_{ij}, \quad \Delta = \dot{\bigoplus_{\substack{-\ell \leq i,j \leq \ell \\ i+j>0}}} \phi(R_{ij}) \dotplus \dot{\bigoplus_{-\ell \leq i,j \leq \ell}} \Delta^i_j$$

на K-подмодули и $K^\bullet$-инвариантные подгруппы такое, что

1. $R_{ij}R_{kl} = 0$ при $j \neq k$, $R_{ij}R_{jl} \leq R_{il}$, $\overline{R_{ij}} \leq R_{-j,-i}$;
2. $\pi\colon \Delta^i_j \to R_{ij}$ изоморфизмы и $\rho(\Delta^i_j) = 0$ при $i \neq 0$;
3. $\phi(R_{-i,i}) \leq \Delta^0_i$, $\pi(\Delta^0_j) \leq R_{0j}$ и $\rho(\Delta^0_j) \leq R_{-j,j}$;
4. $\Delta^i_j \cdot R_{kl} = \dot{0}$ при $j \neq k$, $\Delta^i_j \cdot R_{jl} \leq \Delta^i_l$.

Нам понадобится специальная нечётная форменная K-алгебра

$$\mathrm{H}(\ell, K) = \Big(\bigoplus_{-\ell \leq i \leq \ell} Ke_i, \dot{\bigoplus_{1 \leq i \leq \ell}} \phi(Ke_i) \dotplus \dot{\bigoplus_{\substack{-\ell \leq i \leq \ell \\ i \neq 0}}} q_i \cdot K \Big)$$

с единицей $1 = \sum_{-\ell \leq i \leq \ell} e_i$, где $e_ie_j = 0$ при $i \neq j$, $e_i^2 = e_i$, $\overline{e_i} = e_{-i}$, $\phi(e_0) = \dot{0}$, $\pi(q_i) = e_i$, $\rho(q_i) = 0$, $q_i \cdot e_j = \dot{0}$ при $i \neq j$, $q_i \cdot e_i = q_i$.

Лемма 7. *Нечётное форменное кольцо (R, Δ) является нечётной форменной K-алгеброй с разложением Пирса ранга ℓ тогда и только тогда, когда $\mathrm{H}(\ell, K)$ унитально действует на (R, Δ). Разложение Пирса получается из формул $R_{ij} = e_iRe_j$, $\Delta^i_j = q_i \cdot Re_j$ при $i \neq 0$, $\Delta^0_j = \{u \in \Delta \cdot e_j \mid \pi(u) \in R_{0j}\}$.*

Доказательство. Ясно, что любое нечётное форменное кольцо с унитальным действием $\mathrm{H}(\ell, K)$ имеет каноническое разложение Пирса. Действие же можно построить по разложению Пирса при помощи лемм 1 и 3. □

Выберем нечётное форменное кольцо (R, Δ) с разложением Пирса ранга ℓ (над $\mathbb{Z}$). Определим *элементарные трансвекции* и *растяжения* как

$$\begin{aligned}
T_{ij}(a) &= q_i \cdot a \mathbin{\dot{-}} q_{-j} \cdot \bar{a} \mathbin{\dot{-}} \phi(a) \text{ при } 0 \neq i \neq \pm j \neq 0, a \in R_{ij};\\
T_j(u) &= u \mathbin{\dot{+}} q_{-j} \cdot (\rho(u) - \overline{\pi(u)}) \mathbin{\dot{-}} \phi(\rho(u) + \pi(u)) \text{ при } j \neq 0, u \in \Delta_j^0;\\
D_i(a) &= D_{-i}(\bar{a}^{\circ -1}) = q_{-i} \cdot \bar{a}^{\circ -1} \mathbin{\dot{+}} q_i \cdot a \mathbin{\dot{-}} \phi(a) \text{ при } i \neq 0, a \in R_{ii}^\circ;\\
D_0(g) &= g \text{ при } g \in \mathrm{U}(R_{00}, \Delta_0^0).
\end{aligned}$$

Легко видеть, что они лежат в $\mathrm{U}(R, \Delta)$. *Элементарная подгруппа* $\mathrm{EU}(R, \Delta)$ унитарной группы порождена элементарными трансвекциями, а *диагональная подгруппа* $\mathrm{D}(R, \Delta)$ — это подгруппа, порождённая элементарными растяжениями. Обозначим образы T_{ij}, T_j, D_i через $T_{ij}(R, \Delta)$, $T_j(R, \Delta)$ и $D_i(R, \Delta)$.

Если (T, Ξ) — это специальное нечётное форменное кольцо с единицей, построенное по матричному кольцу $\mathrm{M}(\ell, R)$ со стандартным семейством идемпотентов, то элементарные трансвекции и растяжения в $\mathrm{U}(T, \Xi)$ соответствуют элементарным трансвекциям и растяжениям в $\mathrm{GL}(\ell, R)$. Если же (T, Ξ) было построено по модулю M_R с эрмитовой формой B и нечётным форменным параметром $\mathcal{L}$, а разложение Пирса получено из элементов $v_i \in M$ с соответствующими свойствами, то наши элементарные трансвекции — это элементарные трансвекции из [2] с точностью до выбора параметризации.

Следующая лемма показывает, что $\mathrm{D}(R, \Delta)$ сохраняет разложение Пирса и тем самым нормализует $T_{ij}(R, \Delta)$, $T_j(R, \Delta)$, $\mathrm{EU}(R, \Delta)$.

Лемма 8. *Имеется изоморфизм групп*

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}(R_{00}, \Delta_0^0) \times \prod_{1 \leq i \leq \ell} R_{ii}^\circ &\to \mathrm{D}(R, \Delta), (g_0, a_1, \ldots, a_\ell) \mapsto g_0 D_1(a_1) \ldots D_\ell(a_\ell);\\
D_i(R, \Delta) &= \mathrm{U}(R, \Delta) \cap (\Delta_i^i \dot{\oplus} \phi(R_{ii}) \dot{\oplus} \Delta_{-i}^i) \textit{ при } i \neq 0;\\
D_0(R, \Delta) &= \mathrm{U}(R, \Delta) \cap \Delta_0^0;\\
\mathrm{D}(R, \Delta) &= \mathrm{U}(R, \Delta) \cap \Big(\dot{\bigoplus_i} \Delta_i^i \dot{\oplus} \dot{\bigoplus_{i>0}} \phi(R_{ii})\Big) = \{g \in \mathrm{U}(R, \Delta) \mid {}^g q_i = q_i\};
\end{aligned}$$

где в последней формуле $\mathrm{U}(R, \Delta)$ *канонически действует на* $(R, \Delta) \rtimes \mathrm{H}(\ell, K)$.

Доказательство. Легко видеть, что отображение из условия является гомоморфизмом групп. Так как $g_0 \ldots g_\ell = g_0 \dot{+} \ldots \dot{+} g_\ell$ при $g_i \in D_i(R, \Delta)$, этот гомоморфизм биективен. Также элементарные растяжения сохраняют e_i и q_i.

Явные формулы для $D_i(R,\Delta)$ можно проверить напрямую, из них получается первая формула для $\mathrm{D}(R,\Delta)$.

Пусть $g \in \mathrm{U}(R,\Delta)$ сохраняет e_i и q_i. Из тождеств $\alpha(g)e_i\overline{\alpha(g)} = e_i$ следует, что $\alpha(g) = \sum_i e_i\alpha(g)e_i$, так что домножая g на произведение $D_i(a)$ при $1 \leq i \leq \ell$ можно считать, что $\pi(g) = \overline{\rho(g)} \in R_{00}$. Теперь из равенств ${}^g q_i = q_i$ следует, что $g \cdot e_i = 0$ при $i \neq 0$, то есть $g \in \mathrm{U}(R_{00}, \Delta^0_0) = D_0(R,\Delta)$. □

Лемма 9. *Выполнены соотношения Стейнберга:*

(St0) $T_{ij}(a) = T_{-j,-i}(-\bar{a})$;

(St1) $T_{ij}(a)\,T_{ij}(b) = T_{ij}(a+b)$;

(St2) $T_j(u)\,T_j(v) = T_j(u \dotplus v)$;

(St3) $[T_{ij}(a), T_{kl}(b)] = 1$ *при* $\{i,-j\} \cap \{-k,l\} = \varnothing$;

(St4) $[T_{ij}(a), T_{jk}(b)] = T_{ik}(ab)$ *при* $i \neq \pm k$;

(St5) $[T_{ij}(a), T_{j,-i}(b)] = T_{-i}(\phi(ab))$;

(St6) $[T_i(u), T_j(v)] = T_{-j,i}(\overline{\pi(v)}\pi(u))$ *при* $i \neq \pm j$;

(St7) $[T_i(u), T_{jk}(a)] = 1$ *при* $j \neq i \neq -k$;

(St8) $[T_i(u), T_{ij}(a)] = T_{-i,j}(\rho(u)a)\,T_j(\dot{-}u \cdot (-a))$;

$$T_{ij}(R,\Delta) = \mathrm{U}(R,\Delta) \cap \bigl(\Delta^i_j \dotplus \Delta^{-j}_{-i} \dotplus \phi(R_{ij})\bigr);$$
$$T_j(R,\Delta) = \mathrm{U}(R,\Delta) \cap \bigl(\Delta^0_j \dotplus \Delta^{-j}_0 \dotplus \Delta^{-j}_j \dotplus \phi(R_{0j})\bigr).$$

1.7 Унитарные группы Стейнберга

Возьмём нечётную форменную K-алгебру (R,Δ) с разложением Пирса ранга ℓ. Её *группа Стейнберга* $\mathrm{StU}(R,\Delta)$ — это абстрактная группа с образующими $X_{ij}(a)$ при $0 \neq i \neq \pm j \neq 0$, $a \in R_{ij}$ и $X_j(u)$ при $j \neq 0$, $u \in \Delta^0_j$, удовлетворяющими соотношениям (St0)—(St8). Из леммы 9 следует, что имеется канонический гомоморфизм

$$\mathrm{st}\colon \mathrm{StU}(R,\Delta) \to \mathrm{EU}(R,\Delta), X_{ij}(a) \mapsto T_{ij}(a), X_j(u) \mapsto T_j(u).$$

Положим $\Phi = \{\mathrm{e}_i + \mathrm{e}_j \mid -\ell \leq i,j \leq \ell\} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^\ell$, это система корней типа BC_ℓ, где $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_\ell$ — стандартный базис, $\mathrm{e}_{-i} = -\mathrm{e}_i$ и $\mathrm{e}_0 = 0$. Мы пронумеруем образующие $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ корнями таким образом:

$$
\begin{aligned}
X_{\mathrm{e}_j-\mathrm{e}_i}(a) &= X_{ij}(a) \text{ при } a \in R_{ij}, i+j>0, i,j \neq 0;\\
X_{\mathrm{e}_i}(u) &= X_i(u) \text{ при } u \in \Delta_i^0;\\
X_{2\mathrm{e}_i}(u) &= X_i(u) \text{ при } u \in \phi(R_{-i,i});
\end{aligned}
$$

и аналогично для элементарных трансвекций. Образующие $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ называются *корневыми элементами* (*длинного*, *короткого* или *ультракороткого корневого типа* в зависимости от длины корня), образы $X_\alpha(R, \Delta)$ гомоморфизмов X_α — *корневыми подгруппами* $\mathrm{StU}(R, \Delta)$. Соотношения Стейнберга (St3)—(St8) означают, что гомоморфизмы X_α удовлетворяют *коммутационной формуле Шевалле*

$$
[X_\alpha(\mu), X_\beta(\nu)] = \prod_{\substack{i\alpha+j\beta\in\Phi\\ i,j>0}} X_{i\alpha+j\beta}(f_{\alpha\beta ij}(\mu,\nu)),
$$

если α и β не противоположно направлены, где $f_{\alpha\beta ij}$ — это некоторые универсальные выражения (элементы свободных нечётных форменных колец с разложениями Пирса). Области определения X_α обозначим через $(R \cup \Delta)_\alpha$.

Диагональная группа $\mathrm{D}(R, \Delta)$ действует на $X_\alpha(R, \Delta)$ и $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ и st эквивариантно относительно этого действия. *Полной группой Стейнберга* будем называть

$$
\mathrm{GStU}(R, \Delta) = \mathrm{StU}(R, \Delta) \rtimes \mathrm{D}(R, \Delta).
$$

Группа Вейля $\mathrm{W}(\Phi) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell \rtimes \mathrm{S}_\ell$ действует на множестве $\{-\ell, \ldots, \ell\}$, если отождествить ненулевые индексы с ультракороткими корнями. Тогда она действует автоморфизмами на $\mathrm{H}(\ell, K)$ и задаёт перенумерации компонент разложения Пирса (R, Δ).

Напомним, что подмножество $\Sigma \subseteq \Phi$ *замкнуто*, если $(\Sigma + \Sigma) \cap \Phi \subseteq \Sigma$. Замкнутое подмножество Σ называется *специальным*, если $\Sigma \cap -\Sigma = \varnothing$ (то есть Σ лежит в открытом полупространстве), и *симметричным*, если $\Sigma = -\Sigma$. Будем называть замкнутое подмножество Σ *насыщенным*, если $\frac{1}{2}\Sigma \cap \Phi \subseteq \Sigma$. Подсистема корней $\Psi \subseteq \Phi$ насыщенна тогда и только тогда, когда $\Psi = \mathbb{R}\Psi \cap \Phi$, то есть это пересечение Φ с подпространством. Ясно, что насыщенные подсистемы корней — это в точности насыщенные симметричные замкнутые подмножества. Имеется каноническая биекция между насыщенными подсистемами корней

$\Psi \subseteq \Phi$ и отношениями эквивалентности $\sim$ на $\{-\ell, \ldots, \ell\}$ такими, что $i \sim j$ влечёт $-i \sim -j$ и $i \sim -i$ влечёт $i \sim 0$. А именно, $i \sim j$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{e}_i - \mathrm{e}_j \in \Psi \cup \{0\}$ для всех $-\ell \leq i, j \leq \ell$.

Пусть $\Psi \subseteq \Phi$ — это насыщенная подсистема корней и $\sim_\Psi$ — соответствующее отношение эквивалентности $\{-\ell, \ldots, \ell\}$. Мы можем построить новое разложение Пирса (R, Δ) ранга $\ell - \dim(\mathbb{R}\Psi)$, используя классы эквивалентности $\sim_\Psi$ (однозначно определённое с точностью до действия новой группы Вейля). Все элементарные трансвекции с корнями из Ψ станут элементарными растяжениями, все элементарные трансвекции с корнями из $\Phi \setminus \Psi$ станут элементарными трансвекциями относительно нового разложения Пирса. Новая система корней — это образ $\Phi \setminus \Psi$ в факторпространстве $\mathbb{R}^\ell / \mathbb{R}\Psi$ относительно нового скалярного произведения, мы обозначим её через Φ/Ψ (или $\Phi/\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ в случае $\Psi = \Phi \cap \sum_i \mathbb{R}\alpha_i$) и будем говорить, что она получается из Φ *исключением* множества образующих Ψ.

Для насыщенной подсистемы корней $\Psi \subseteq \Phi$ обозначим отображение $\Phi \to \Phi/\Psi$ через π_Ψ. Группы, связанные с разложением Пирса после исключения Ψ, обозначим через $\mathrm{D}(R, \Delta; \Phi/\Psi)$, $\mathrm{EU}(R, \Delta; \Phi/\Psi)$, $\mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\Psi)$ и $\mathrm{GStU}(R, \Delta; \Phi/\Psi)$. Также имеются канонические гомоморфизмы

$$F_\Psi \colon \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\Psi) \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi)$$

такие, что $\mathrm{st} \circ F_\Psi = \mathrm{st}$ и $F_\Psi(X_\beta(R, \Delta)) = \prod_{\pi_\Psi(\gamma) = \beta} X_\gamma(R, \Delta)$.

Положим

$$\begin{aligned}
\Pi^\pm &= \{\pm(\mathrm{e}_i + \mathrm{e}_j) \mid -j < i \leq j \leq \ell\};\\
U^\pm(R, \Delta) &= \langle X_\alpha(R, \Delta) \mid \alpha \in \Pi^\pm \rangle \leq \mathrm{StU}(R, \Delta);\\
P^\pm(R, \Delta) &= U^\pm(R, \Delta) \rtimes \mathrm{D}(R, \Delta) \leq \mathrm{GStU}(R, \Delta).
\end{aligned}$$

Лемма 10. *Отображение умножения*

$$\prod_{\alpha \in \Pi^+ \setminus 2\Pi^+} (R \cup \Delta)_\alpha \to U^+(R, \Delta), (\mu_\alpha)_\alpha \mapsto \prod_\alpha X_\alpha(\mu_\alpha)$$

является биекцией для любого линейного порядка на Π^+. *Канонический гомоморфизм* $P^+(R, \Delta) \to \mathrm{U}(R, \Delta)$ *является инъекцией. Если отождествить*

$U^+(R,\Delta)$ и $P^+(R,\Delta)$ с их образами в $\mathrm{U}(R,\Delta)$, то

$$U^+(R,\Delta) = \mathrm{U}(R,\Delta) \cap \Big(\dot{\bigoplus_{i<j}} \Delta^i_j \dotplus \dot{\bigoplus_{-j<i<j}} \phi(R_{ij})\Big);$$

$$P^+(R,\Delta) = \mathrm{U}(R,\Delta) \cap \Big(\dot{\bigoplus_{i\le j}} \Delta^i_j \dotplus \dot{\bigoplus_{-j<i\le j}} \phi(R_{ij})\Big).$$

Доказательство. Чтобы доказать биективность, достаточно рассмотреть образ $U^+(R,\Delta)$ в $\mathrm{U}(R,\Delta)$ и элементарные трансвекции вместо $X_\alpha(\mu)$. Индукцией по ℓ и исключением ультракоротких корней мы можем свести всё к случаю $\ell = 1$. Возьмём $g \in \mathrm{U}(R,\Delta) \cap \big(\dot{\bigoplus}_{i\le j} \Delta^i_j \dotplus \dot{\bigoplus}_{-j<i\le j} \phi(R_{ij})\big)$. Тогда компонента g из $\dot{\bigoplus}_i \Delta^i_i \dotplus \phi(R_{11})$ не зависит от порядка прямого суммирования и лежит в $D_0(R,\Delta) \times D_1(R,\Delta) = \mathrm{D}(R,\Delta)$ по лемме 8. Из леммы 9 следует, что g является произведением этой компоненты и элемента $T_1(R,\Delta)$. □

Будем называть $P^\pm(R,\Delta)$ и их образы в $\mathrm{U}(R,\Delta)$ противоположными *параболическими подгруппами*, $U^\pm(R,\Delta)$ — их *унипотентными радикалами*, а $\mathrm{D}(R,\Delta) = P^+(R,\Delta) \cap P^-(R,\Delta)$ — их общей *подгруппой Леви.*

Лемма 11. *Отображение умножения*

$$\Omega(R,\Delta) = U^+(R,\Delta) \times \mathrm{D}(R,\Delta) \times U^-(R,\Delta) \to \mathrm{U}(R,\Delta), (f,g,h) \mapsto fgh$$

инъективно. Его образ состоит из $g \in \mathrm{U}(R,\Delta)$ таких, что все $E_k\pi(g)E_k$ квазиобратимы в E_kRE_k при $1 \le k \le \ell$, где $E_k = e_k + \ldots + e_\ell$.

Доказательство. Инъективность следует из того, что $P^+(R,\Delta)$ и $U^-(R,\Delta)$ имеют тривиальное пересечение в унитарной группе. Легко видеть, что любой элемент из образа удовлетворяет условиям квазиобратимости.

Для доказательства в обратную сторону мы используем исключение ультракоротких корней и индукцию, чтобы свести всё к случаю $\ell = 1$. Возьмём $g \in \mathrm{U}(R,\Delta)$ такой, что $e_1\pi(g)e_1$ квазиобратим. Умножая g на диагональный элемент, можно добиться того, чтобы $e_1\pi(g)e_1 = 0$. Рассмотрим элемент

$$u = q_{-1} \cdot \pi(g)e_1 \dot{-} g \cdot e_1 \dot{-} \phi(e_{-1}\pi(g)e_1) \in \Delta^0_1.$$

Тогда $T_1(u)\, g = \dot{-} g \cdot e_1\pi(g) \dotplus g \cdot (1 - e_1) \dotplus q_{-1} \cdot \pi(g)(e_1\pi(g) + e_1 - 1)$ лежит в

$$P^-(R,\Delta) = \{g \in \mathrm{U}(R,\Delta) \mid e_{-1}\pi(g) = e_{-1}\pi(g)e_{-1}, g \cdot e_1 = q_1 \cdot \pi(g)e_1\},$$

где уравнения на параболическую подгруппу получены из леммы 10. □

Глава 2. Классические редуктивные группы

2.1 Нильпотентные модули класса 2

Возьмём коммутативное кольцо K с единицей. Фильтрованная 2-нильпотентная группа M называется *2-нильпотентным K-модулем*, если моноид $K^\bullet$ действует справа на M, подгруппа M_0 имеет дополнительную структуру левого K-модуля и дано отображение $\tau\colon M \to M_0$, причём

1. $[m \cdot k, m' \cdot k'] = kk'[m, m']$;
2. $m \cdot (k + k') = m \cdot k \dotplus kk'\tau(m) \dotplus m \cdot k'$;
3. $m \cdot k = k^2 m$ при $m \in M_0$.

Здесь $\tau\colon M \to M_0$ и действие $M \times K \to M$ поликвадратичны при выборе фильтраций $0 \leq 0 \leq K$ и $0 \leq 0 \leq M_0$, они удовлетворяют тождествам $\tau(m \mid m') = [m, m']$ и $\tau(m \cdot k) = k^2 \tau(m)$. *Морфизм* 2-нильпотентных K-модулей $f\colon M \to N$ — это гомоморфизм групп такой, что $f(m \cdot k) = f(m) \cdot k$, $f(M_0) \leq N_0$, $f(km) = kf(m)$ при $m \in M_0$ и $f(\tau(m)) = \tau(f(m))$.

Любое билинейное отображение $c\colon M_1 \times M_1 \to M_0$ между K-модулями является 2-коциклом, причём $M = M_0 \dot\oplus M_1$ будет 2-нильпотентным K-модулем с операциями

$$\begin{aligned}
(m_0 \dot\oplus m_1) \dotplus (m_0' \dot\oplus m_1') &= (m_0 + c(m_1, m_1') + m_0') \dot\oplus (m_1 + m_1'),\\
(m_0 \dot\oplus m_1) \cdot k &= (k^2 m_0 \dot\oplus k m_1),\\
\tau(m_0 \dot\oplus m_1) &= 2m_0 - c(m_1, m_1).
\end{aligned}$$

Будем говорить, что 2-нильпотентный K-модуль *расщепляется*, если он имеет такой вид с точностью до изоморфизма. Все 2-нильпотентные K-модули M, у которых M/M_0 свободен над K, расщепляются.

Можно определить расширение скаляров 2-нильпотентного K-модуля M при помощи коммутативной K-алгебры E с единицей. Выберем K-модуль A с коммутативным K-билинейным умножением $A \times A \to E$ (он нам потребуется только в доказательстве леммы 12, в остальных случаях $A = E$). Рассмотрим группу $M \boxtimes_K A$, порождённую центральной $E \otimes_K M_0$ и элементами $m \boxtimes a$ при $m \in M$, $a \in A$ (то есть факторгруппу произведения $E \otimes_K M_0$ на свободную группу с образующими $m \boxtimes a$) с соотношениями

1. $[m \boxtimes a, m' \boxtimes a'] = aa' \otimes [m, m']$;
2. $(m \dotplus m') \boxtimes a = m \boxtimes a \dotplus m' \boxtimes a$;
3. $(m \cdot k) \boxtimes a = m \boxtimes ka$;
4. $m \boxtimes (a + a') = m \boxtimes a \dotplus aa' \otimes \tau(m) \dotplus m \boxtimes a'$;
5. $m \boxtimes a = a^2 \otimes m$ при $m \in M_0$.

Ясно, что $\operatorname{Im}(E \otimes_K M_0) \leq M \boxtimes_E A$ будет нильпотентной фильтрацией. При $A = E$ есть поликвадратичные отображения

$$\begin{aligned} \tau\colon M \boxtimes_K E &\to \operatorname{Im}(E \otimes_K M_0), & e \otimes m &\mapsto 2e \otimes m, \\ & & m \boxtimes e &\mapsto e^2 \otimes \tau(m); \\ (-) \cdot (=)\colon (M \boxtimes_K E) \times E &\to M \boxtimes_K E, & (e \otimes m, e') &\mapsto ee'^2 \otimes m, \\ & & (m \boxtimes e, e') &\mapsto m \boxtimes ee' \end{aligned}$$

согласно леммам 2 и 3. Также E-модуль $(M \boxtimes_K E) / \operatorname{Im}(E \otimes_K M_0)$ изоморфен $(M/M_0) \otimes_K E$.

Будем говорить, что расширение скаляров 2-нильпотентного K-модуля M при помощи E определено, если $E \otimes_K M_0 \to M \boxtimes_K E$ инъективно, тогда $M \boxtimes_K E$ называется *расширением скаляров*. Оно является 2-нильпотентным E-модулем по лемме 1 и $(M \boxtimes_K E) \boxtimes_E F \cong M \boxtimes_K F$ для любой коммутативной E-алгебры F с единицей. Кроме того, $\operatorname{Hom}_K(M, N) \cong \operatorname{Hom}_E(M \boxtimes_K E, N)$ для всех 2-нильпотентных E-модулей N.

Лемма 12. *Расширение скаляров 2-нильпотентного K-модуля M при помощи плоской E всегда определено. Если E строго плоская, то $M \to M \boxtimes_K E$ инъективно.*

Доказательство. По теореме Говорова—Лазара $E = \varinjlim_i P_i$ для свободных K-модулей P_i. Пусть $N_i = M \boxtimes_K P_i$, тогда $M \boxtimes_K E$ является их прямым пределом. Легко проверить, что

$$N_i = E \otimes_K M_0 \dotplus \dot{\bigoplus_j} M \boxtimes e_j,$$

где e_j пробегают базис P_i. Тогда $E \otimes_K M_0$ является подгруппой во всех N_i и в $M \boxtimes_K E$. Последнее утверждение следует из инъективности $M_0 \to E \otimes_K M_0$, $M/M_0 \to M/M_0 \otimes_K E$, и из неабелевой 5-леммы. □

Оказывается, что к 2-нильпотентным K-модулям можно применять строго плоский спуск. Рассмотрим строго плоскую коммутативную K-алгебру E с единицей. *Данными спуска* для 2-нильпотентных модулей относительно $K \to E$ называется 2-нильпотентный E-модуль N с изоморфизмом 2-нильпотентных $(E \otimes_K E)$-модулей $\psi \colon i_1^*(N) \to i_2^*(N)$, удовлетворяющим *условию коцикла* $i_{23}^*(\psi) \circ i_{12}^*(\psi) = i_{13}^*(\psi) \colon j_1^*(N) \to j_3^*(N)$. Здесь i_s^* — это расширения скаляров относительно канонических гомоморизмов $E \to E \otimes_K E$ при $1 \leq s \leq 2$, i_{st}^* — это расширения скаляров относительно $E \otimes_K E \to E \otimes_K E \otimes_K E$ при $1 \leq s < t \leq 3$, j_s^* — это расширения скаляров относительно $E \to E \otimes_K E \otimes_K E$ при $1 \leq s \leq 3$ (они определены по лемме 12). Мы также обозначим морфизмы $N \to i_s^*(N)$, $N \to j_s^*(N)$, $i_{st}^*(L) \to i_{st}^*(L)$ через i_s, j_s и i_{st} для любых 2-нильпотентных или обычных модулей N и L.

Предложение 3. *Для любого строго плоского гомоморфизма $K \to E$ коммутативных колец с единицами категория 2-нильпотентных K-модулей эквивалентна категории данных спуска для 2-нильпотентных модулей относительно $K \to E$, 2-нильпотентный K-модуль M соответствует $M \boxtimes_K E$ с каноническим ψ.*

Доказательство. У нас есть функтор из категории 2-нильпотентных K-модулей в категорию данных спуска, будем строить его правый сопряжённый. По каждым данным спуска (N, ψ) мы построим 2-нильпотентный K-модуль

$$M = \{n \in N \mid \psi(i_1(n)) = i_2(n)\}$$

с $M_0 = N \cap N_0$. Легко видеть, что отображение

$$f \colon M/M_0 \to \{n \in N/N_0 \mid \psi(i_1(n)) = i_2(n) \in i_2^*(N/N_0)\}$$

инъективно, нам надо проверить его сюръективность.

Возьмём $n \in N$ такой, что $x = \psi(i_1(n)) \dot{-} i_2(n) \in i_2^*(N_0)$. Достаточно показать, что существует $\widetilde{n} \in N_0$ такой, что $x = \psi(i_1(\widetilde{n})) - i_2(\widetilde{n})$. В силу точности комплекса Амицура для $K \to E$, тензорно домноженного на N_0, это равносильно $i_{23}^*(\psi)(i_{12}(x)) + i_{23}(x) = i_{13}(x)$. Подставляя определение x, мы получим условие коцикла на ψ, применённое к $j_1(n)$.

Эта конструкция спуска сопряжена справа к функтору из условия. Остаётся показать, что единица и коединица сопряжения обратимы. Но единица обратима для любого 2-нильпотентного K-модуля M в силу неабелевой 5-леммы, так как она обратима на M_0 и M/M_0 (к которым применим обычный строго плоский спуск). Для коединицы доказательство аналогично. $\square$

Будем говорить, что 2-нильпотентный K-модуль M *универсален*, если все его расширения скаляров определены. Универсальные 2-нильпотентные K-модули M задают fppf пучки $M \boxtimes_K (-)$ на категории аффинных K-схем в силу предложения 3 и того, что категория 2-нильпотентных $(K \times K')$-модулей эквивалентна произведению таких категорий над K и K'.

Лемма 13. *В следующих случаях 2-нильпотентный K-модуль M универсален:*

1. *это расширение скаляров универсального 2-нильпотентного модуля;*
2. *это прямой предел универсальных 2-нильпотентных модулей;*
3. *он расщепляется;*
4. *модуль M/M_0 является плоским;*
5. *это строго плоский спуск универсального 2-нильпотентного модуля.*

Доказательство. Первые два случая тривиальны. Если $M = M_0 \dot{\oplus} M_1$ расщепляется с 2-коциклом c, то $M \boxtimes_K E \cong (E \otimes_K M_0) \dot{\oplus} (E \otimes_K M_1)$ расщепляется с 2-коциклом c_E. Если модуль M/M_0 плоский, то по теореме Говорова—Лазара $M/M_0 = \varinjlim_i P_i$ для свободных модулей P_i, но 2-нильпотентные K-модули $M \times_{M/M_0} P_i$ расщепляются и M является их прямым пределом.

Пусть $M \boxtimes_K E$ универсален для строго плоской K-алгебры E. Возьмём коммутативную K-алгебру K' с единицей и положим $E' = K' \otimes_K E$. Композиция $K' \otimes_K M_0 \to M \boxtimes_K K' \to M \boxtimes_K E'$ инъективна, так как $M \boxtimes_K E'$ определён и $K' \otimes_K M_0 \leq E' \otimes_K M_0$. Следовательно, $M \boxtimes_K K'$ определён. □

2.2 Аугментированные нечётные форменные алгебры

Аугментированная нечётная форменная K-алгебра $(R, \Delta, \mathcal{D})$ состоит из нечётной форменной K-алгебры и $K^\bullet$-инвариантной подгруппы $\mathcal{D} \leq \Delta$ со структурой левого K-модуля, где

1. $\phi(R) \leq \mathcal{D}$, $\pi(\mathcal{D}) = 0$, $\phi(ak) = k\phi(a)$ при $a \in R$ и $k \in K$;
2. $v \cdot k = k^2 v$, $\rho(kv) = k\rho(v)$, $kv \cdot a = k(v \cdot a)$ при $v \in \mathcal{D}$, $k \in K$, $a \in R$.

Ясно, что для любой аугментированной нечётной форменной K-алгебры $(R, \Delta, \mathcal{D})$ группа Δ с фильтрацией $\mathcal{D}$ является 2-нильпотентным K-модулем с

$\tau(u) = u \dotplus u \cdot (-1) = \phi(\rho(u))$ (в частности, $\phi(\rho(v)) = 2v$ при $v \in \mathcal{D}$). Отображения $\rho\colon \Delta \to R$ и $(-) \cdot (=)\colon \Delta \times (R \rtimes K) \to \Delta$ поликвадратичны относительно этой фильтрации. Нечётная форменная K-алгебра (R, Δ) имеет аугментацию, если $\mathrm{Ker}(\phi)$ является K-подмодулем (это всегда так при $K = \mathbb{Z}$), наименьшая аугментация — это $\mathcal{D} = \phi(R)$.

Будем называть *разложением Пирса* аугментированной нечётной форменной K-алгебры $(R, \Delta, \mathcal{D})$ такое разложение Пирса (R, Δ), что

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{\substack{-\ell \leq i,j \leq \ell \\ i+j>0}} \phi(R_{ij}) \oplus \bigoplus_{-\ell \leq i \leq \ell} \mathcal{D}_i,$$

где $\mathcal{D}_i = \mathcal{D} \cap \Delta^0_i$. В этом случае мы изменим области определения корневых гомоморфизмов $X_{2\mathrm{e}_i}$ с $\phi(R_{-i,i})$ на $\mathcal{D}_i$.

Расширение скаляров аугментированной нечётной форменной K-алгебры $(R, \Delta, \mathcal{D})$ при помощи коммутативной K-алгебры E с единицей — это тройка

$$(R, \Delta, \mathcal{D}) \boxtimes_K E = (R \otimes_K E, \Delta \boxtimes_K E, E \otimes_K \mathcal{D}),$$

если $\Delta \boxtimes_K E$ определено как расширение скаляров 2-нильпотентного модуля. Она будет аугментированной нечётной форменной E-алгеброй с

1. $\phi(a \otimes e) = e \otimes \phi(a)$, $\pi(e \otimes v) = 0$, $\pi(u \boxtimes e) = \pi(u) \otimes e$;
2. $\rho(e \otimes v) = \rho(v) \otimes e$, $\rho(u \boxtimes e) = \rho(u) \otimes e^2$;
3. $(e \otimes v) \cdot (a \otimes e') = ee'^2 \otimes (v \cdot a)$, $(u \boxtimes e) \cdot (a \otimes e') = (u \cdot a) \boxtimes ee'$

при $a \in R$, $v \in \mathcal{D}$, $u \in \Delta$, $e, e' \in E$ по леммам 1, 2, 3. Также

$$\mathrm{Hom}_K\big((R, \Delta, \mathcal{D}), (T, \Xi, \mathcal{X})\big) \cong \mathrm{Hom}_E\big((R, \Delta, \mathcal{D}) \boxtimes_K E, (T, \Xi, X)\big)$$

для аугментированных нечётных форменных E-алгебр $(T, \Xi, \mathcal{X})$.

По лемме 12 расширение скаляров существует, если E плоская. В силу предложения 3, к аугментированным нечётным форменным алгебрам применим строго плоский спуск. Ясно, что категории нечётных форменных алгебр и аугментированных нечётных форменных алгебр над $K \times K'$ эквивалентны произведениям соответствующих категорий над K и K'. Таким образом, каждая аугментированная нечётная форменная K-алгебра $(R, \Delta, \mathcal{D})$ с универсальным $(\Delta, \mathcal{D})$ задаёт пучок $(R, \Delta, \mathcal{D}) \boxtimes_K (-)$ в fppf топологии.

В качестве примера построим локализации нечётных форменных алгебр. Возьмём коммутативное кольцо K с единицей и мультипликативное подмножество $S \subseteq K$ (то есть $S \leq K^\bullet$ является подмоноидом). *Локализация* 2-нильпотентного K-модуля M в S — это 2-нильпотентный $S^{-1}K$-модуль $S^{-1}M = M \boxtimes_K S^{-1}K$. Его можно отождествить с фактормножеством множества формальных дробей $m \cdot \frac{1}{s}$ при $m \in M$ и $s \in S$, где $m \cdot \frac{1}{s} \sim m' \cdot \frac{1}{s'}$, если существует $s'' \in S$ такой, что $m \cdot s's'' = m' \cdot ss''$. Группа $S^{-1}M_0$ вкладывается в $S^{-1}M$ как $\frac{m}{s} \mapsto sm \cdot \frac{1}{s}$, операции задаются формулами $m \cdot \frac{1}{s} \dotplus m' \cdot \frac{1}{s'} = (m \cdot s' \dotplus m' \cdot s) \cdot \frac{1}{ss'}$, $[m \cdot \frac{1}{s}, m' \cdot \frac{1}{s'}] = \frac{[m,m']}{ss'}$, $\tau(m \cdot \frac{1}{s}) = \frac{\tau(m)}{s^2}$, $(m \cdot \frac{1}{s}) \cdot \frac{k}{s'} = (m \cdot k) \cdot \frac{1}{ss'}$.

Эту же конструкцию можно применить к аугментированным нечётным форменным K-алгебрам. На самом деле локализация корректно определена для произвольной нечётной форменной K-алгебры (R, Δ). Определим $S^{-1}\Delta$ как фактормножество множества формальных дробей $u \cdot \frac{1}{s}$ при $u \in \Delta$ и $s \in S$, где $u \cdot \frac{1}{s} \sim u' \cdot \frac{1}{s'}$, если существует $s'' \in S$ такой, что $u \cdot s's'' = u' \cdot ss''$. Тогда $(S^{-1}R, S^{-1}\Delta)$ является нечётной форменной $S^{-1}K$-алгеброй с операциями

1. $(u \cdot \frac{1}{s}) \dotplus (u' \cdot \frac{1}{s'}) = (u \cdot s' \dotplus u' \cdot s) \cdot \frac{1}{ss'}$;
2. $\phi(\frac{a}{s}) = \phi(as) \cdot \frac{1}{s}$, $\pi(u \cdot \frac{1}{s}) = \frac{\pi(u)}{s}$, $\rho(u \cdot \frac{1}{s}) = \frac{\rho(u)}{s^2}$;
3. $(u \cdot \frac{1}{s}) \cdot \frac{a}{s'} = (u \cdot a) \cdot \frac{1}{ss'}$, $(u \cdot \frac{1}{s}) \cdot \frac{k}{s'} = (u \cdot k) \cdot \frac{1}{ss'}$ при $a \in R$ и $k \in K$;

она называется *локализацией* (R, Δ) в S и обладает универсальным свойством. Для аугментированной нечётной форменной K-алгебры $(R, \Delta, \mathcal{D})$ эта конструкция совпадает с $(R, \Delta, \mathcal{D}) \boxtimes_R S^{-1}R$.

2.3 Классические нечётные форменные алгебры

Зафиксируем коммутативное кольцо K с единицей. Мы явно построим аугментированные нечётные форменные K-алгебры с классическими унитарными группами и группами Стейнберга. Обозначим базис $K^{2\ell+1}$ через $e_{-\ell}, \ldots, e_\ell$, а базис $K^{2\ell}$ — через $e_{-\ell}, \ldots, e_{-1}, e_1, \ldots, e_\ell$. Группа K-точек дискретной групповой схемы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ отождествляется с группой идемпотентов K с групповой операцией $e * f = e + f - 2ef$.

Все построенные ниже аугментированные нечётные форменные алгебры являются специальными (и почти все из них имеют единицу). У них есть канонические разложения Пирса ранга ℓ, полученные из вложения $\mathrm{H}(\ell, K)$, $e_i \mapsto e_{ii}$ при $i \neq 0$, $e_0 \mapsto 1 - \sum_{i \neq 0} e_{ii}$, $q_i \mapsto q_i$.

Линейная нечётная форменная алгебра $(R, \Delta, \mathcal{D}) = \mathrm{AL}(\ell, K)$ строится по кольцу $\mathrm{M}(\ell, K)$ с единицей, мы полагаем $\mathcal{D} = \phi(R)$. В явном виде

1. $R = \bigoplus_{1 \leq i,j \leq \ell} Ke_{ij} \oplus \bigoplus_{-\ell \leq i,j \leq -1} Ke_{ij}$;
2. $e_{ij} e_{kl} = 0$ при $j \neq k$, $e_{ij} e_{jl} = e_{il}$, $\overline{e_{ij}} = e_{-j,-i}$;
3. $\mathcal{D} = \bigoplus_{1 \leq i,j \leq \ell} K\phi(e_{ij})$;
4. $\Delta = \mathcal{D} \dot{\oplus} \dot{\bigoplus}_{1 \leq i,j \leq \ell} q_i \cdot Ke_{ij} \dot{\oplus} \dot{\bigoplus}_{-\ell \leq i,j \leq -1} q_i \cdot Ke_{ij}$.

Имеется изоморфизм $\mathrm{GL}(\ell, K) \to \mathrm{U}(\mathrm{AL}(\ell, K)) \leq R^*$, $g \mapsto g^{-\mathrm{t}} \oplus g$, а специальная линейная группа $\mathrm{SL}(\ell, K)$ является ядром $\det\colon \mathrm{GL}(\ell, K) \to K^*$.

Теперь рассмотрим кольцо K с (-1)-инволюцией $\bar{k} = k$, тогда эрмитовы формы на K-модуле M — это антисимметричные билинейные формы. Такая форма является симплектической, если наибольший нечётный форменный параметр совпадает с группой Гейзенберга (то есть квадратичная форма тривиальна). Выберем $M = K^{2\ell}$ с симплектической формой $B(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq -j$, $B(e_i, e_{-i}) = \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i = 1$ при $i > 0$ и $\varepsilon_i = -1$ при $i < 0$. *Симплектическая нечётная форменная алгебра* $(R, \Delta, \mathcal{D}) = \mathrm{ASp}(2\ell, K)$ — это

1. $R = \bigoplus_{-\ell \leq i,j \leq \ell;\, i,j \neq 0} Re_{ij}$;
2. $\overline{e_{ij}} = \varepsilon_i \varepsilon_j e_{-j,-i}$, $e_{ij} e_{kl} = 0$ при $j \neq k$, $e_{ij} e_{jl} = e_{il}$;
3. $\mathcal{D} = \bigoplus_{-\ell \leq i,j \leq \ell;\, i,j \neq 0;\, i+j > 0} K\phi(e_{ij}) \oplus \bigoplus_{-\ell \leq i \leq \ell;\, i \neq 0} Kv_i$;
4. $\phi(e_{-i,i}) = 2v_i$, $\rho(v_i) = e_{-i,i}$, $v_i \cdot e_{jk} = 0$ при $i \neq j$, $v_i \cdot e_{ik} = \varepsilon_i \varepsilon_k v_k$;
5. $\Delta = \mathcal{D} \dot{\oplus} \dot{\bigoplus}_{-\ell \leq i,j \leq \ell;\, i,j \neq 0} q_i \cdot Ke_{ij}$;

она получается из $(M, B, \mathcal{L}_{\max})$, но с нетривиальной аугментацией. Ясно, что $\mathrm{U}(\mathrm{ASp}(2\ell, K)) \cong \mathrm{Sp}(2\ell, K)$.

Нечётные форменные K-алгебры $\mathrm{AL}(\ell, K)$ и $\mathrm{ASp}(2\ell, K)$ являются специальными с единицами, их нечётные форменные параметры — наибольшие возможные. Если (R, Δ) — это одна из этих нечётных форменных алгебр, то $\mathrm{U}(R, \Delta) = \{g \in R^* \mid g^{-1} = \bar{g}\}$ определяется K-алгеброй R с инволюцией. В линейном случае это алгебра Азумайи над $K \times K$ с инволюцией второго рода, в симплектическом случае это алгебра Азумайи над K с симплектической инволюцией первого рода. В ортогональном случае нечётный форменный параметр не является наибольшим и необходим для описания классической группы. В чётном ортогональном случае кольцевая часть будет алгеброй Азумайи с ортогональной инволюцией первого рода, а в нечётном ортогональном случае она обычно не имеет единицы.

Рассмотрим K с 1-инволюцией $\bar{k} = k$, тогда эрмитовы формы на K-модуле M — это симметричные билинейные формы. Пусть $q\colon M \to K$ — это квадратичная форма в классическом смысле, то есть $q(mk) = q(m)k^2$ и её скрещенный эффект $B(m, m') = q(m \mid m')$ билинеен. Тогда q можно рассматривать как квадратичную форму, полученную из нечётного форменного параметра $\mathcal{L} = \{(m, -q(m)) \mid m \in M\}$ эрмитовой формы B. Возьмём $M = K^{2\ell}$ с $q(e_i) = 0$, $B(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq -j$, $B(e_i, e_{-i}) = 1$. Соответствующая нечётная форменная алгебра с наименьшей аугментацией называется *чётной ортогональной нечётной форменной алгеброй* $(R, \Delta, \mathcal{D}) = \mathrm{AO}(2\ell, K)$. А именно,

1. $R = \bigoplus_{-\ell \leq i,j \leq \ell;\, i,j \neq 0} K e_{ij}$;
2. $\overline{e_{ij}} = e_{-j,-i}$, $e_{ij} e_{kl} = 0$ при $j \neq k$, $e_{ij} e_{jl} = e_{il}$;
3. $\mathcal{D} = \bigoplus_{-\ell \leq i,j \leq \ell;\, i,j \neq 0;\, i+j > 0} K \phi(e_{ij})$;
4. $\Delta = \mathcal{D} \dot{\oplus} \dot{\bigoplus}_{-\ell \leq i,j \leq \ell; i,j \neq 0} q_i \cdot K e_{ij}$.

Мы имеем $\mathrm{U}(\mathrm{AO}(2\ell, K)) \cong \mathrm{O}(2\ell, K)$. Специальная ортогональная группа $\mathrm{SO}(2\ell, K)$ является ядром инварианта Диксона $\mathrm{D} \colon \mathrm{O}(2\ell, K) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})(K)$ (где $\det(g) = 1 - 2\mathrm{D}(g)$), этот инвариант имеет сечение при $\ell > 0$.

В нечётном ортогональном случае рассмотрим $M = K^{2\ell+1}$ с $q(e_i) = 0$ при $i \neq 0$, $q(e_0) = 1$, $B(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq -j$, $B(e_i, e_{-i}) = 1$ при $i \neq 0$, $B(e_0, e_0) = 2$. Его унитарная группа — это нечётная ортогональная группа

$$\mathrm{O}(2\ell + 1, K) \cong \mathrm{SO}(2\ell + 1, K) \times \mu_2(K),$$

где

$$\mu_2(K) = \{k \in K^* \mid k^2 = 1\},$$
$$\mathrm{SO}(2\ell + 1, K) = \{g \in \mathrm{O}(2\ell + 1, K) \mid \det(g) = 1\},$$

но соответствующая нечётная форменная алгебра не обладает достаточно хорошими свойствами. Вместо этого определим *нечётную ортогональную нечётную форменную алгебру* $(R, \Delta, \mathcal{D}) = \mathrm{AO}(2\ell + 1, K)$ как

1. $R = \bigoplus_{-\ell \leq i,j \leq \ell} K e_{ij}$;
2. $\overline{e_{ij}} = e_{-j,-i}$, $e_{ij} e_{kl} = 0$ при $j \neq k$, $e_{ij} e_{jl} = e_{il}$ при $j \neq 0$, $e_{i0} e_{0l} = 2 e_{il}$;
3. $\mathcal{D} = \bigoplus_{-\ell \leq i,j \leq \ell;\, i+j > 0} K \phi(e_{ij})$;
4. $\Delta = \mathcal{D} \dot{\oplus} \dot{\bigoplus}_{-\ell \leq i,j \leq \ell;\, i \neq 0} q_i \cdot K e_{ij} \dot{\oplus} \dot{\bigoplus}_{-\ell \leq i \leq \ell} u_i \cdot K$;
5. $\pi(u_i) = e_{0i}$, $\rho(u_i) = -e_{-i,i}$;
6. $u_i \cdot e_{jk} = \dot{0}$ при $i \neq j$, $u_i \cdot e_{ik} = u_k$ при $i \neq 0$, $u_0 \cdot e_{0k} = u_k \cdot 2$;

она специальная, но без единицы в общем случае. Нам потребуется гомоморфизм K-алгебр $\mathrm{rep} \colon R \to \mathrm{M}(2\ell + 1, K)$, $e_{ij} \mapsto e_{ij}$ при $j \neq 0$, $e_{i0} \mapsto 2e_{i0}$. Положим

$$\Delta_{\mathrm{C}(R)} = \{u \in \Delta \mid \pi(u), \rho(u) \in \mathrm{C}(R)\}.$$

Ясно, что $\mathrm{C}(R) = \{x(k) \mid k \in K\}$ и $\Delta_{\mathrm{C}(R)} = \{u(k) \mid k \in K\}$, где

$$x(k) = ke_{00} + \sum_{i \neq 0} e_{ii}, \qquad u(k) = \sum_{i \neq 0} q_i \cdot 2k \dotplus u_0 \cdot k \dotplus \phi(2k^2 \sum_{i > 0} e_{ii}).$$

Введём обозначение $\widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, K) = \mathrm{U}(\mathrm{AO}(2\ell+1, K))$.

Предложение 4. *Функтор* $\widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, -)$ *— это гладкая схема относительной размерности* $\ell(2\ell+1)$, *причём* $\widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, -) \cong \mathrm{SO}(2\ell+1, -) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Гомоморфизм* $\mathrm{D} \colon \widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, K) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})(K)$ *удовлетворяет* $\det(1 + \mathrm{rep}(\pi(g))) = 1 - 2\mathrm{D}(g)$, *а ядро* $\widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, K) \to \mathrm{SO}(2\ell+1, K)$ *— это* $\{g \in \widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, K) \mid \pi(g) \in \mathrm{C}(R)\}$.

Доказательство. Пусть $(R, \Delta, \mathcal{D}) = \mathrm{AO}(2\ell+1, K)$ и $(T, \Xi, \mathcal{X}) = \mathrm{AO}(2\ell+2, K)$. Рассмотрим инъективный гомоморфизм

$$\begin{aligned} f \colon (R, \Delta, \mathcal{D}) \to (T, \Xi, \mathcal{X}), e_{ij} &\mapsto e_{ij} \text{ при } i, j \neq 0; \\ e_{i0} &\mapsto e_{i,-\ell-1} + e_{i,\ell+1} \text{ при } i \neq 0; \\ e_{0j} &\mapsto e_{-\ell-1,j} + e_{\ell+1,j} \text{ при } j \neq 0; \\ e_{00} &\mapsto e_{-\ell-1,-\ell-1} + e_{-\ell-1,\ell+1} + e_{\ell+1,-\ell-1} + e_{\ell+1,\ell+1}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} f(R) &= \{t \in T \mid t(e_{-\ell-1} + e_{\ell+1}) = \overline{t}\,(e_{-\ell-1} + e_{\ell+1}) = 0\}, \\ f(\mathcal{D}) &= \{v \in \mathcal{X} \mid \rho(v) \in f(R)\}, \\ f(\Delta) &= \{u \in \Xi \mid \pi(u), \rho(u) \in f(R)\}, \end{aligned}$$

где T действует стандартным образом на $K^{2\ell+2}$. Также rep — это действие на ортогональном дополнении к $e_{-\ell-1} - e_{\ell+1}$. Таким образом,

$$\widetilde{O}(2\ell+1, K) \cong \{g \in \mathrm{O}(2\ell+2, K) \mid g(e_{-\ell-1} - e_{\ell+1}) = e_{-\ell-1} - e_{\ell+1}\}.$$

Отображение $\mathrm{D} \colon \widetilde{O}(2\ell+1, K) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})(K)$ — это сужение инварианта Диксона для $\mathrm{O}(2\ell+2, K)$, также $\det(1 + \mathrm{rep}(\pi(g))) = \det(\alpha(f(g))) = 1 - 2\mathrm{D}(g)$.

Функтор $\widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, -)$ задаётся уравнениями

$$\sum_{-\ell \leq k \leq \ell} x_{-k,-i} x_{kj} + x_{0,-i} x_{0j} + x_{ij} + x_{-j,-i} = 0 \text{ при } -\ell \leq i, j \leq \ell, i + j > 0;$$

$$\sum_{0 \leq k \leq \ell} x_{-k,i} x_{ki} + x_{-i,i} = 0 \text{ при } -\ell \leq i \leq \ell$$

на переменные x_{ij}, где $\pi(g) = \sum_{ij} x_{ij} e_{ij}$, так что это аффинная групповая схема. По критерию якобиана она является гладкой в окрестности единичного сечения. Следовательно, $\widetilde{\mathrm{O}}$ является гладкой групповой схемой относительной размерности $\ell(2\ell+1)$ над любым полем. Тогда дифференциалы уравнений независимы в каждой точке, то есть $\widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, -)$ является гладкой аффинной групповой схемой требуемой относительной размерности.

Положим $\mathrm{Z}(K) = \{g \in \widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, K) \mid \pi(g) \in \mathrm{C}(R)\} = \{u(k) \mid k^2 + k = 0\}$. Так как $\mathrm{D}(u(k)) = -k$ при $k^2 + k = 0$, имеется разложение

$$\widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, K) \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{D}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})(K).$$

Отображение rep задаёт гомоморфизм $p\colon \mathrm{Ker}(\mathrm{D}) \to \mathrm{SO}(2\ell+1, -)$ гладких групповых схем, и мы применим к нему критерий послойного изоморфизма. Достаточно проверить, что p является изоморфизмом, когда K — это поле. Дифференциал p в единице является изоморфизмом алгебр Ли, так что p — это изогения с этальным ядром (напомним, что $\mathrm{SO}(2\ell+1, -)$ имеет связные слои). Но если $\mathrm{rep}(\pi(g)) = \mathrm{rep}(\overline{\pi(g)}) = 0$ при $g \in \widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, K)$, то $g = u_{00} \cdot k$ с $2k = 0$ и $k^2 + k = 0$, то есть $g \in \mathrm{Z}(K)$. $\square$

Будем говорить, что $(R, \Delta, \mathcal{D})$ является *классической нечётной форменной K-алгеброй*, если локально в fppf топологии это произведение различных $\mathrm{AL}(\ell, K)$, $\mathrm{ASp}(2\ell, K)$ и $\mathrm{AO}(\ell, K)$. Эти нечётные форменные алгебры попарно неизоморфны из соображений размерности (кроме случаев $\ell = 0$ и $K = 0$), поэтому любая классическая нечётная форменная K-алгебра $(R, \Delta, \mathcal{D})$ задаёт разложение $K = \prod_{i=1}^n K_i$ такое, что $(R, \Delta, \mathcal{D})$, суженное на K_i, является скрученной формой *расщепимой классической нечётной форменной алгебры* (то есть произведения некоторых $\mathrm{AL}(\ell, K)$, $\mathrm{ASp}(2\ell, K)$ и $\mathrm{AO}(\ell, K)$).

Если $(R, \Delta, \mathcal{D})$ — это классическая нечётная форменная K-алгебра, то $\mathcal{D} = \mathrm{Ker}(\pi)$ и $R = \pi(\Delta)$. В частности, гомоморфизмы между классическими нечётными форменными K-алгебрами сохраняют аугментации. Модули R, $\mathcal{D}$ и $\Delta/\mathcal{D}$ являются проективными конечного типа.

2.4 Скрученные формы классических групп

Мы отождествим схемы над коммутативным кольцом K с единицей с соответствующими функторами на категории коммутативных K-алгебр с единицей. Обозначим схемный центр редуктивной групповой схемы G над K через $\mathbf{C}(G)$, а её схему автоморфизмов — через $\mathbf{Aut}(G)$. Имеется точная последовательность

$$1 \to \mathbf{C}(G) \to G \to \mathbf{Aut}(G) \to \mathbf{Out}(G) \to 1$$

fppf пучков, где $\mathbf{Out}(G)$ называется *схемой внешних автоморфизмов*, согласно [20, теорема 7.1.9] или [21, глава XXIV, теорема 1.3]. Если $(R, \Delta, \mathcal{D})$ — это аугментированная нечётная форменная K-алгебра с универсальным $(\Delta, \mathcal{D})$, то $\mathbf{Aut}(R, \Delta, \mathcal{D})$ обозначает fppf пучок $E \mapsto \operatorname{Aut}((R, \Delta, \mathcal{D}) \boxtimes_K E)$.

Классическими проективными групповыми схемами будем называть факторгруппы $\operatorname{PGL}(\ell, -) = \operatorname{GL}(\ell, -)/\operatorname{GL}(1, -)$, $\operatorname{PSp}(2\ell, -) = \operatorname{Sp}(2\ell, -)/\mu_2$ и $\operatorname{PSO}(2\ell, -) = \operatorname{SO}(2\ell, -)/\mu_2$ при $\ell > 0$ в смысле fppf пучков, также положим $\operatorname{PGL}(0, -) = \operatorname{PSp}(0, -) = \operatorname{PSO}(0, -) = 1$ и $\operatorname{PSO}(2\ell + 1, -) = \operatorname{SO}(2\ell + 1, -)$ для всех ℓ. Групповые схемы $\operatorname{GL}(\ell, -)^m$, $\operatorname{SL}(\ell, -)^m$, $\operatorname{Sp}(2\ell, -)^m$, $\operatorname{SO}(\ell, -)^m$, $\operatorname{PGL}(\ell, -)^m$, $\operatorname{PSp}(2\ell, -)^m$ и $\operatorname{PSO}(\ell, -)^m$ редуктивны для всех $\ell, m \geq 0$.

Лемма 14. *Для любых различных ненулевых чисел $k_1, \ldots, k_n$ элементы вида $(a^{k_1} - 1, \ldots, a^{k_n} - 1)$ при $a \in E^*$ порождают fppf пучок K-алгебр $E \mapsto E^n$.*

Доказательство. Обозначим подпучок, порождённый этими элементами, через $\mathcal{F}$. Достаточно показать, что $\mathcal{F}(K)$ содержит стандатные идемпотенты K^n. Если $n = 1$, то можно рассмотреть fppf расширение $E = K[\theta, \theta^{-1}]/(\theta^N - (\theta^{k_1} - 1))$ при достаточно большом N. В нём θ и $\theta^{k_1} - 1$ обратимы, то есть $\theta^{k_1} - 1 \in \mathcal{F}(E)$. Так как $\mathcal{F}$ является пучком алгебр, то $1 \in \mathcal{F}(K)$.

Применяя индукцию, достаточно рассмотреть случай $n = 2$ и $k_1 < k_2$. Рассмотрим fppf расширение $E = K[\theta, \theta^{-1}]/(\theta^N - (\theta^{k_1} - 1)(\theta^{k_2} - \theta^{k_1}))$ для достаточно большого N. В нём $\theta^{k_1} - 1$ и $\theta^{k_2} - \theta^{k_1}$ обратимы, поэтому $(1, 1 + u) \in \mathcal{F}(E)$ для $u = \frac{\theta^{k_2} - \theta^{k_1}}{\theta^{k_1} - 1} \in E^*$. Следовательно, $(a^{k_1}, a^{k_2} + u) \in \mathcal{F}(E')$ для любого расширения $E \subseteq E'$ и $a \in E'^*$. Возьмём $E' = E[\psi, \psi^{-1}]/(\psi^{k_2} - u)$, тогда $(\psi^{k_1}, 0) \in \mathcal{F}(E')$ и $(1, 0) \in \mathcal{F}(K)$. Отсюда и из случая $n = 1$ легко получить $\mathcal{F}(E) = E^2$. $\square$

Лемма 15. *Пусть G — это одна из групповых схем $\operatorname{GL}(\ell, -)^m$, $\operatorname{SL}(\ell, -)^m$, $\operatorname{Sp}(2\ell, -)^m$ или $\operatorname{SO}(\ell, -)^m$ над K, а $(R, \Delta, \mathcal{D})$ — соответствующая расщепимая* *классическая K-алгебра. Тогда G порождает пучок $(R \otimes_K (-), \Delta \boxtimes_K (-))$ нечётных форменных алгебр, если G не является одним из исключений $\mathrm{SO}(1,-)^m$, $\mathrm{SO}(2,-)^m$, $\mathrm{SL}(1,-)^m$ или $\mathrm{SL}(2,-)^m$ при $m \geq 1$.*

Доказательство. Не умаляя общности, $m = 1$. Обозначим подпучок, порождённый G, через $(S(-), \Theta(-))$. Если G не является специальной линейной групповой схемой, то из $D_i(ae_{ii}) \in G(E)$ при $i \neq 0$ и $a \in E^*$ вытекает, что $(a^{-1} - 1)e_{-i,-i} + (a - 1)e_{ii} \in S(E)$, так что $e_i \in S(K)$ при $i \neq 0$ по лемме 14. Если $G = \mathrm{SL}(\ell, -)$ и $\ell \geq 3$, то этот же аргумент можно применить к $D_i(ae_{ii})\, D_j(a^2 e_{jj})\, D_k(a^{-3} e_{kk})$ с различными $i, j, k > 0$.

Если $(R, \Delta, \mathcal{D}) = \mathrm{AL}(\ell, K)$, то положим $e_{ij} = 0$ при $ij < 0$. Так как $T_{ij}(xe_{ij}) \in G(E)$ при $x \in E$ и $0 \neq i \neq \pm j \neq 0$, то $e_{ij} + \varepsilon e_{-j,-i} \in S(K)$ для таких i и j, где $\varepsilon = \pm 1$ в зависимости от G, i, j. Поэтому $e_{ij} \in S(K)$ при $0 \neq i \neq -j \neq 0$. Также $e_{-i,i} = e_{-i,j} e_{ji}$ при $\ell \geq 2$. Опять используя $D_i(ae_{ii}) \in G(E)$ при $i \neq 0$ и $a \in E^*$ (или $D_i(ae_{ii})\, D_j(ae_{jj})$ for $ij < 0$ в специальном линейном случае), легко получить, что $q_i \in \Theta(K)$ при $i \neq 0$.

Если $G = \mathrm{Sp}(2\ell, -)$, то из рассмотрения $T_i(v_i \cdot x)$ вытекает, что $e_{-i,i} \in S(K)$ и $v_i \in \Theta(K)$ для всех $i \neq 0$. Если же $G = \mathrm{SO}(2\ell + 1, -)$, то из рассмотрения $T_i(u_i \cdot x)$ можно получить, что $e_{0i}, e_{-i,i} \in S(K)$ и $u_i \in \Theta(K)$ при $i \neq 0$, поэтому $e_{0i} \in S(K)$ для всех i, если $\ell > 0$. Поэтому $(S, \Theta) = (R, \Delta)$. □

Если G — это расщепимая редуктивная групповая схема, то $\mathbf{Out}(G)$ является групповой схемой, ассоциированной с дискретной группой $\mathrm{Out}(G)$ автоморфизмов корневых данных G, сохраняющих базис системы корней. Можно непосредственно проверить, что

1. $\mathrm{Out}(\mathrm{GL}(\ell, -)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ при $\ell \geq 1$, она порождается автоморфизмом $\sigma \colon e_{ij} \mapsto e_{i \pm (\ell+1), j \pm (\ell+1)}$ нечётной форменной алгебры $\mathrm{AL}(\ell, K)$;
2. $\mathrm{Out}(\mathrm{GL}(\ell, -)^m)$ бесконечна при $\ell \geq 1$ и $m \geq 2$, соответствующая схема автоморфизмов не является аффинной;
3. $\mathrm{Out}(\mathrm{SL}(\ell, -)^m) = \mathrm{Out}(\mathrm{PGL}(\ell, -)^m) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m \rtimes \mathrm{S}_m$ при $\ell \geq 3$, она действует перестановками и как σ на сомножителях;
4. $\mathrm{Out}(\mathrm{Sp}(2\ell, -)^m) = \mathrm{Out}(\mathrm{PSp}(2\ell, -)^m) = \mathrm{Out}(\mathrm{SO}(2\ell + 1, -)^m) = \mathrm{S}_m$ при $\ell \geq 1$, она действует перестановками сомножителей;
5. $\mathrm{Out}(\mathrm{SO}(2\ell, -)^m) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m \rtimes \mathrm{S}_m$ при $\ell \geq 1$, она действует перестановками и элементами $\mathrm{O}(2\ell, -)$ с единичным инвариантом Диксона на сомножителях;

6. $\mathrm{Out}(\mathrm{PSO}(2\ell,-)^m) = \mathrm{Out}(\mathrm{SO}(2\ell,-)^m)$ при $4 \neq \ell \geq 3$, а в исключительных случаях $\mathrm{Out}(\mathrm{PSO}(8,-)^m) = \mathrm{S}_3^m \rtimes \mathrm{S}_m$ и $\mathrm{Out}(\mathrm{PSO}(4,-)^m) = \mathrm{S}_{2m}$.

Теорема 2. *Пусть G — это одна из групповых схем*

1. $\mathrm{GL}(\ell,-)$ *при* $\ell \geq 1$, $\mathrm{SL}(\ell,-)^m$ *при* $\ell \geq 3$, $\mathrm{PGL}(\ell,-)^m$ *при* $\ell \geq 3$,
2. $\mathrm{SO}(2\ell+1,-)^m$ *при* $\ell \geq 1$, $\mathrm{PSO}(2\ell+1,-)^m$ *при* $\ell \geq 1$,
3. $\mathrm{Sp}(2\ell,-)^m$ *при* $\ell \geq 1$, $\mathrm{PSp}(2\ell,-)^m$ *при* $\ell \geq 1$,
4. $\mathrm{SO}(2\ell,-)^m$ *при* $\ell \geq 2$, $\mathrm{PSO}(4,-)$ *или* $\mathrm{PSO}(2\ell,-)^m$ *при* $4 \neq \ell \geq 3$

над коммутативным кольцом K с единицей, а $(R,\Delta,\mathcal{D})$ — это соответствующая расщепимая классическая нечётная форменная K-алгебра. Тогда $\mathbf{Aut}(R,\Delta,\mathcal{D}) \to \mathbf{Aut}(G)$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда G — это подгруппа унитарной групповой схемы. По лемме 15 имеются включения

$$G/\mathbf{C}(G) \leq \mathbf{Aut}(R,\Delta,\mathcal{D}) \leq \mathbf{Aut}(G),$$

а согласно явному описанию все внешние автоморфизмы G можно поднять до автоморфизмов $(R,\Delta,\mathcal{D})$.

Если же G — это классическая проективная групповая схема, то по тому же аргументу она является открытой подгруппой конечного индекса в $\mathbf{Aut}(R,\Delta,\mathcal{D})$ (её послойной компонентой связности). Так как это характеристическая подгруппа, имеются включения

$$G \leq \mathbf{Aut}(R,\Delta,\mathcal{D}) \leq \mathbf{Aut}(G),$$

и опять все внешние автоморфизмы G можно поднять до автоморфизмов $(R,\Delta,\mathcal{D})$.

Случаи $\mathrm{SO}(1,-)^m$ и $\mathrm{PSO}(1,-)^m$ не покрываются леммой 15, но $\mathrm{AO}(1,K)$ имеет тривиальную группу автоморфизмов. $\square$

Следовательно, любая скрученная форма групповой схемы из теоремы 2 может быть построена по классической нечётной форменной алгебре.

2.5 Классические изотропные редуктивные группы

Мы используем определения из [3]. Пусть $\widetilde{G}$ — это групповая схема Шевалле над ненулевым коммутативным кольцом $\widetilde{K}$ с единицей, её систему корней обозначим через Φ, а базис Φ — через Δ. Зафиксируем подмножество $J \subseteq \Delta$ и подгруппу $\Gamma \leq \operatorname{Out}(\widetilde{G})$, сохраняющую J и транзитивно действующую на множестве компонент диаграммы Дынкина. *Относительные корни* — это ненулевые образы корней в факторпространстве $\mathbb{R}\Phi$ по линейной оболочке $\Delta \setminus J$ и элементов $g\alpha - \alpha$ при $g \in \Gamma$ и $\alpha \in J$. Обозначим через π отображение из Φ в факторпространство, через $\widetilde{P}$ — стандартную параболическую подгруппу типа J, а через $\widetilde{L}$ — её стандартную подгруппу Леви, то есть $\widetilde{L}$ как групповая подсхема порождена максимальным тором и корневыми подгруппами U_α при $\alpha \in (\Delta \setminus J) \cup -(\Delta \setminus J)$, $\widetilde{P}$ порождена максимальным тором и корневыми подгруппами U_α при $\alpha \in \Delta \cup -(\Delta \setminus J)$.

Теперь пусть $\widetilde{K}$ является строго плоской K-алгеброй, а редуктивная групповая схема G над K получается спуском из $\widetilde{G}$. Будем рассматривать изоморфизм $\psi\colon i_1^*(\widetilde{G}) \to i_2^*(\widetilde{G})$ из данных спуска как автоморфизм групповой схемы Шевалле над $\widetilde{K} \otimes_K \widetilde{K}$. Если он лежит в $((\widetilde{L}/\mathbf{C}(\widetilde{G})) \rtimes \mathbf{J})(\widetilde{K} \otimes_K \widetilde{K})$, где $\mathbf{J}$ — это дискретная групповая схема, соответствующая J, то мы будем называть G *простой изотропной редуктивной групповой схемой.* Размерность линейной оболочки $\pi(\Phi)$ называется *изотропным рангом* G.

Корневая подгруппа простой изотропной редуктивной групповой схемы G с относительным корнем A — это спуск $\prod_{i \geq 1} \prod_{\alpha \in \pi^{-1}(iA)} U_{i\alpha}$, она нильпотентна. Такие корневые подгруппы удовлетворяют обобщённой коммутационной формуле Шевалле [3, лемма 9]. Наконец, будем называть G классической, если компоненты её диаграммы Дынкина имеют типы ABCD.

Теорема 3. *Пусть $K \neq 0$ — это коммутативное кольцо с единицей, а G — классическая простая изотропная редуктивная групповая схема над K изотропного ранга ℓ. Предположим, что G получается из классической нечётной форменной K-алгебры $(R, \Delta, \mathcal{D})$. Тогда есть гомоморфизм нечётных форменных алгебр с единицами $\mathrm{H}(m, K) \to (R \rtimes K, \Delta)$, задающий разложение Пирса на $(R, \Delta, \mathcal{D})$, такой, что*

1. *$m \in \{\ell, \ell+1\}$ и множество относительных корней G канонически отождествляется с подмножеством системы корней (R, Δ);*
2. *$Re_i R = R$ при $i \neq 0$ в случае $m = \ell$, $Re_i R + Re_{-i} R = R$ при $i \neq 0$ в случае $m = \ell + 1$;*
3. *если α — это относительный корень, то $U_\alpha \leq G$ — это корневая подгруппа в смысле унитарных групповых схем аугментированных нечётных форменных алгебр (или её образ в схеме автоморфизмов $(R, \Delta, \mathcal{D})$);*
4. *ультракороткий корень α из системы корней типа BC_m является относительным корнем, если $U_{2\alpha} < U_\alpha$;*
5. *корень α, не являющийся ультракоротким, будет относительным корнем, если $U_\alpha \neq 1$.*

Кроме того, если G присоединённого типа и $\ell \geq 3$, то $(R, \Delta, \mathcal{D})$ существует.

Доказательство. Обозначим через $(\widetilde{R}, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\mathcal{D}})$ расширение скаляров $(R, \Delta, \mathcal{D})$ при помощи $\widetilde{K}$. Не умаляя общности, $(\widetilde{R}, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\mathcal{D}})$ расщепляется и $\widetilde{G}$ строится по ней стандартным образом.

Применим исключение корней для стандартных разложений Пирса неразложимых компонент $(\widetilde{R}, \widetilde{\Delta})$ (то есть нечётных форменных алгебр $\mathrm{AL}(n, \widetilde{K})$, $\mathrm{AO}(2n+1, \widetilde{K})$, $\mathrm{ASp}(2n, \widetilde{K})$ или $\mathrm{AO}(2n, \widetilde{K})$). Если некоторый элемент Γ задаёт внешний автоморфизм компоненты $\mathrm{AO}(2n, \widetilde{K})$ (то есть нетривиальный автоморфизм D_{2n}, который на самом деле порождается отражением из унитарной группы), то мы исключим корень e_n. Если в Γ есть элемент, задающий внешний автоморфизм компоненты $\mathrm{AL}(n, \widetilde{K})$, то мы исключим корни $\mathrm{e}_i + \mathrm{e}_{n+1-i}$ при $1 \leq i < n+1-i$ и корень $\mathrm{e}_{(n+1)/2}$ при нечётном n. Далее, мы исключим образы корней из $\Delta \setminus J$ в каждой компоненте $(\widetilde{R}, \widetilde{\Delta})$.

Теперь группа Γ отождествляет нумерации в разложенях Пирса компонент $(\widetilde{R}, \widetilde{\Delta})$, поэтому мы получаем разложение Пирса $(\widetilde{R}, \widetilde{\Delta})$ как их произведение. Оно имеет ранг $m \in \{\ell, \ell+1\}$, где $m = \ell + 1$ случается в точности когда компоненты $(\widetilde{R}, \widetilde{\Delta})$ имеют вид $\mathrm{AL}(n, \widetilde{K})$ и Γ не задаёт их внешние автоморфизмы. Кроме того, полученное разложение Пирса получается из гомоморфизма $\mathrm{H}(\ell, \widetilde{K}) \to (\widetilde{R} \rtimes K, \widetilde{\Delta})$ нечётных форменных $\widetilde{K}$-алгебр с единицами и такой гомоморфизм спускается до гомоморфизма $\mathrm{H}(\ell, K) \to (R \rtimes K, \Delta)$ с требуемыми свойствами.

Наконец, нужно проверить, что $(R, \Delta, \mathcal{D})$ существует для G присоединённого типа и $\ell \geq 3$. Это следует из теоремы 2, если G не является скрученной формой $\mathrm{PSO}(8, -)^m$. В оставшемся случае мы отождествим $\widetilde{G}$ с послойной компонентой связности $\mathbf{Aut}(\mathrm{PSO}(8, \widetilde{K})^m)$ так, что если Γ задаёт внешний автоморфизм D_4, то она переставляет базисные корни $\mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3$ и $\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3$. Тогда ψ из данных спуска лежит в $\mathrm{Aut}(\mathrm{PSO}(8, \widetilde{K} \otimes_K \widetilde{K})^m)$. $\square$

Более общо, редуктивная групповая схема G над K *изотропна*, если существует разложение $K = \prod_{i=1}^n K_i$ на ненулевые K_i и сужение G на каждое K_i является произведением конечного набора простых изотропных редуктивных групповых схем [3]. Для наших целей достаточно работать с простыми редуктивными групповыми схемами благодаря предложению 6 ниже.

Глава 3. Центральность K_2-функтора

3.1 Про-объекты

Напомним, что *многосортная алгебраическая теория* $\mathcal{T}$ — это малая декартовая мультикатегория, а *$\mathcal{T}$-алгебры* в декартовой категории $\mathcal{C}$ — это функторы $\mathcal{T} \to \mathcal{C}$. Обозначим категорию $\mathcal{T}$-алгебр в $\mathcal{C}$ и их гомоморфизмов (то есть естественных преобразований) через $\mathcal{T}(\mathcal{C})$.

Пусть морфизмы $\mathcal{T}$ заданы явным набором образующих (*функциональных символов*) и соотношений (*аксиом*). Термы первого порядка t из образующих $\mathcal{T}$ задают морфизмы в $\mathcal{T}$, для каждой $\mathcal{T}$-алгебры A в $\mathcal{C}$ они определяют соответствующие морфизмы в $\mathcal{C}$. Мы будем писать $x \in A_i$ для переменной x из t и объекта A_i из A, если x имеет сорт $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$.

Например, теория групп $\mathcal{G}rp$ имеет единственный объект, она порождена морфизмами умножения, обращения и единицы, удовлетворяющими аксиомам групп. Её алгебры — это в точности групповые объекты в категориях. Формальное тождество $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ между термами $\mathcal{G}rp$ описывает равенство некоторых морфизмов для всех групповых объектов, так как оно следует из аксиом (или, по лемме Йонеды, так как оно выполнено в абстрактных группах). Теория нечётных форменных колец обозначается через $\mathcal{OFR}$.

Нечётный форменный кольцевой объект (R, Δ) *действует* на нечётном форменном кольцевом объекте (S, Θ) в декартовой категории $\mathcal{C}$, если четвёрка $(R, \Delta; S, \Theta)$ является алгеброй для теории действий нечётных форменных колец. Другими словами, есть умножения $R \times S \to S$, $S \times R \to S$, $\Theta \times R \to \Theta$, $\Delta \times S \to \Theta$ в $\mathcal{C}$, удовлетворяющие (A1)—(A10). Такие действия находятся в биекции с *полупрямыми произведениями*, то есть структурами $(S \rtimes R, \Theta \rtimes \Delta)$ нечётного форменного кольцевого объекта на паре $(S \times R, \Theta \times \Delta)$ такими, что морфизмы $(S, \Theta) \to (S \rtimes R, \Theta \rtimes \Delta) \leftrightarrows (R, \Delta)$ являются гомоморфизмами.

Мы используем терминологию из [38, глава I, §1]. *Проективная система* X в категории $\mathcal{C}$ — это контравариантный функтор $\mathcal{I}_X \to \mathcal{C}$ из малой фильтрованной категории $\mathcal{I}_X$. *Морфизм* проективных систем $f\colon X \to Y$ состоит из отображения $f^*\colon \mathrm{Ob}(I_Y) \to \mathrm{Ob}(I_X)$ и морфизмов $f_i\colon X_{f^*(i)} \to Y_i$ для всех $i \in \mathrm{Ob}(I_Y)$ таких, что для всех $\varphi \in \mathcal{I}_Y(i, j)$ существуют $k \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_X)$,

$\psi \in \mathcal{I}_X(k, f^*(i))$ и $\theta \in \mathcal{I}_X(k, f^*(j))$ такие, что $f_i \circ X_\psi = Y_\varphi \circ f_j \circ X_\theta \colon X_k \to Y_i$. Проективные системы и их морфизмы образуют категорию.

Про-пополнение $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ является её факторкатегорией, где $f \sim g \colon X \to Y$, если для всех элементов $i \in \mathrm{Ob}(I_Y)$ существуют $j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_X)$, $\varphi \in \mathcal{I}_X(j, f^*(i))$, $\psi \in \mathcal{I}_X(j, g^*(i))$ такие, что $f_i \circ X_\varphi = g_i \circ X_\psi \colon X_j \to Y_i$. Согласно [38, глава I, §1.1, замечание 4],

$$\mathrm{Pro}(\mathcal{C})(X, Y) = \varprojlim_{j \in \mathcal{I}_Y} \varinjlim_{i \in \mathcal{I}_X} \mathcal{C}(X_i, Y_j).$$

Для любой проективной системы X и кофинального функтора $u \colon \mathcal{J} \to \mathcal{I}_X$ канонический морфизм $X \to u^* X = X \circ u$ будет изоморфизмом в $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$.

Канонический функтор вложения $\mathcal{C} \to \mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ является вполне строгим и любая проективная система X является проективным пределом самой себя в $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$. Иногда мы будем писать $\varprojlim^{\mathrm{Pro}(\mathcal{C})}_{i \in \mathcal{I}_X} X_i$ вместо X.

Морфизм $f \colon X \to Y$ проективных систем в $\mathcal{C}$ называется *уровневым*, если это проективная система из морфизмов в $\mathcal{C}$, то есть $\mathcal{I}_X = \mathcal{I}_Y$, $f^*(i) = i$ для всех i и $f_i \circ X_\varphi = Y_\varphi \circ f_j$ для $\varphi \colon i \to j$. Каждый морфизм в $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ изоморфен уровневому морфизму, если заменить обе проективные системы их композициями с кофинальными функторами и выбрать подходящий представитель морфизма [38, глава I, §1.3, теорема 3].

Если $\mathcal{C}$ регулярная, то $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ тоже регулярная [29, пример 1.11]. Для таких категорий каждый уровневый морфизм $f \colon X \to Y$ проективных систем имеет покомпонентное разложение $X \to \mathrm{Im}(f) \to Y$, где левый морфизм состоит из регулярных эпиморфизмов (и будет регулярным эпиморфизмом про-объектов), а правый — из мономорфизмов (и будет мономорфизмом про-объектов). Про-пополнение алгебраически когерентной полуабелевой категории само является таковой [29, список после примера 1.12]. В частности, $\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})$, $\mathrm{Pro}(\mathbf{Rng})$ и $\mathrm{Pro}(\mathbf{OFR})$ алгебраически когерентны полуабелевы. Категории $\mathcal{G}rp(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ и $\mathcal{OFR}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ являются гомологическими [15, пример 4.6.3], расщеплённые расширения в них — это классические полупрямые произведения с точностью до изоморфизмов.

Пусть $\mathcal{T}$ — это конечно представленная многосортная алгебраическая теория, то есть декартова мультикатегория с конечным числом объектов, в которой морфизмы заданы конечным семейством образующих и соотношений. Легко видеть, что функтор $\mathrm{Pro}(\mathcal{T}(\mathbf{Set})) \to \mathcal{T}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ вполне строгий, так что можно отождествить абстрактные про-$\mathcal{T}$-алгебры с соответствующими $\mathcal{T}$-алгебрами в Pro($\mathbf{Set}$). Это применимо в том числе к теориям $\mathcal{G}rp$ и $\mathcal{OFR}$. Функторы Pro($\mathbf{Grp}$) $\to$ Pro($\mathbf{Set}$) и Pro($\mathbf{OFR}$) $\to$ Pro($\mathbf{Set}$)^2 сохраняют и отражают конечные пределы, мономорфизмы и регулярные эпиморфизмы.

Расщеплённые расширения нечётных форменных про-колец являются их полупрямыми произведениями как нечётных форменных кольцевых объектов в Pro($\mathbf{Set}$). Следующая теорема показывает, что любое полупрямое произведение нечётных форменных про-колец в $\mathcal{OFR}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ изоморфно нечётному форменному про-кольцу, то есть действия нечётных форменных про-колец как нечётных форменных кольцевых объектов в Pro($\mathbf{Set}$) совпадают с действиями в смысле полуабелевых категорий. Аналогичный результат справедлив для про-групп и про-колец [54].

Теорема 4. *Пусть (R, Δ) и (S, Θ) — это нечётные форменные про-кольца и (R, Δ) действует на (S, Θ) как нечётный форменный кольцевой объект в* Pro($\mathbf{Set}$). *Тогда есть нечётные форменные про-кольца $(R', \Delta') \cong (R, \Delta)$ и $(S', \Theta') \cong (S, \Theta)$ с общей категорией индексов такие, что действие (R', Δ') на (S', Θ') задаётся уровневыми морфизмами и (R', Δ') является композицией (R, Δ) с кофинальным функтором между категориями индексов. То же самое верно для унитальных действий.*

Доказательство. Будем опускать отображения $(R, \Delta)_\varphi$ и $(S, \Theta)_\varphi$ в формулах. Можно считать, что категории индексов (R, Δ) и (S, Θ) являются упорядоченными множествами, где у каждого индекса есть только конечное количество меньших индексов [38, глава I, §1.4, теорема 4]. Для каждого $i \in \mathcal{I}_{(S,\Theta)}$ обозначим через $(\widetilde{S}_i, \widetilde{\Theta}_i)$ свободное нечётное форменное кольцо с действием $(R_{f(i)}, \Delta_{f(i)})$, содержащее $(S_{g(i)}, \Theta_{g(i)})$, для достаточно больших $f(i)$ и $g(i)$, оно строится в предложении 2. Заменяя $\mathcal{I}_{(S,\Theta)}$ на $\mathcal{I}_{(S,\Theta)} \times \mathcal{I}_{(R,\Delta)}$ при необходимости, можно считать, что f и g возрастают, f кофинально и $g(i) \geq i$.

Используя действие (R, Δ) на (S, Θ) и увеличивая f и g при необходимости, мы построим гомоморфизмы $h_i \colon (\widetilde{S}_i, \widetilde{\Theta}_i) \to (S_i, \Theta_i)$ такие, что

$$
\begin{aligned}
b &\mapsto b, & v &\mapsto v,\\
a \otimes b &\mapsto ab, & u \boxtimes b &\mapsto u \cdot b,\\
b \otimes a &\mapsto ba, & v \boxtimes a &\mapsto v \cdot a,\\
a \otimes b \otimes a' &\mapsto (ab)a' = a(ba'), & u \boxtimes b \otimes a &\mapsto (u \cdot b) \cdot a = u \cdot ba
\end{aligned}
$$

для всех $a, a' \in R_{f(i)}$, $b \in S_{g(i)}$, $u \in \Delta_{f(i)}$, $v \in \Theta_{g(i)}$, где отображения умножения получены из фиксированного представителя действия. Кроме того, можно считать, что $h\colon (\widetilde{S}, \widetilde{\Theta}) \to (S, \Theta)$ является уровневым морфизмом проективных систем нечётных форменных колец.

Построим по $(\widetilde{S}_i, \widetilde{\Theta}_i)$ нечётные форменные фактор-кольца (S'_i, Θ'_i) с помощью $(R_{f(i)}, \Delta_{f(i)})$-инвариантного нечётного форменного идеала, порождённого элементами $a \otimes b - ab$, $a \otimes b \otimes a' - aba'$, $u \boxtimes b \dotminus u \cdot b$, $v \boxtimes a \dotminus v \cdot a$, $u \boxtimes b \otimes a \dotminus u \cdot ba$ (они все из ядра h_i), где $a, a' \in R_j$, $u \in \Delta_j$, $b \in S_k$, $v \in \Theta_k$ для достаточно больших j и k. Мы получим изоморфизм $(S', \Theta') \to (S, \Theta)$ нечётных форменных про-колец, обратный к нему получается из канонических морфизмов $(S_{g(i)}, \Theta_{g(i)}) \to (S'_i, \Theta'_i)$. Также (R', Δ') действует на (S', Θ') уровневыми морфизмами и это действие изоморфно исходному, где $(R'_i, \Delta'_i) = (R_{f(i)}, \Delta_{f(i)})$. Для унитального действия мы добавим образующие $1 \otimes b - b$ и $v \boxtimes 1 \dotminus v$ в идеал из конструкции (S'_i, Θ'_i). $\square$

Любое нечётное форменное про-кольцо (R, Δ), имеющее единицу $e_i \in R_i$ в $\mathcal{OFR}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$, изоморфно проективной системе нечётных форменных колец $(R_i / I_i, \Delta_i / \Gamma_i)$ с единицей, где (I_i, Γ_i) порождены $ae_i - a$ и $u \cdot e_i \dotminus u$.

Нам потребуется конструкция про-групп с помощью образующих и соотношений. Пусть G — это про-группа, $f\colon X \to G$ — морфизм про-множеств, причём $\prod_{j=1}^{n_i} f(g_{ij}(y))^{\varepsilon_{ij}} = 1$ при $1 \leq i \leq m$, где $g_{ij} \in \mathrm{Pro}(\mathbf{Set})(Y_i, X)$ и $\varepsilon_{ij} \in \{-1, 1\}$. Будем говорить, что G обладает *универсальным свойством*, если для всех про-множеств P, про-групп G' и морфизмов $f' \in \mathrm{Pro}(\mathbf{Set})(P \times X, G')$ таких, что $\prod_{j=1}^{n_i} f'(p, g_{ij}(y))^{\varepsilon_{ij}} = 1$ для всех i существует единственный морфизм $h \in \mathrm{Pro}(\mathbf{Set})(P \times G, G')$ такой, что

$$h(p, xy) = h(p, x)\, h(p, y), \qquad\qquad f'(p, x) = h(p, f(x)).$$

Универсальная про-группа единственна с точностью до единственного изоморфизма, мы будем обозначать её как

$$\Big\langle x, x \in X \mid \prod_{j=1}^{n_i} g_{ij}(y)^{\varepsilon_{ij}} = 1, y \in Y_i \Big\rangle.$$

В приложениях часто $X = \coprod_{k=1}^{m} X_k$ для некоторых X_k, тогда мы будем говорить, что G порождается морфизмами $X_k \to G$ с некоторыми соотношениями.

Лемма 16. *Универсальная про-группа всегда существует. Если* $g_{ij}\colon Y_i \to X$ *уровневые морфизмы проективных систем множеств, то*

$$\Big\langle x, x \in X \mid \prod_{j=1}^{n_i} g_{ij}(y)^{\varepsilon_{ij}} = 1, y \in Y_i \Big\rangle$$
$$= \varprojlim_{k \in \mathcal{I}_X}^{\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})} \Big\langle x, x \in X_k \mid \prod_{j=1}^{n_i} (g_{ij})_k(y)^{\varepsilon_{ij}} = 1, y \in (Y_i)_k \Big\rangle,$$

где справа используются абстрактные группы с явными представлениями.

Доказательство. Любая конечная ациклічная диаграмма про-множеств изоморфна проективной системе из диаграмм множеств [30, теорема 6.4.3], так что достаточно проверить универсальность про-группы G, задаваемой формулой из условия. Возьмём $f'\colon P \times X \to G'$ такой, что $\prod_{j=1}^{n_i} f'(p, g_{ij}(y))^{\varepsilon_{ij}} = 1$. Не умаляя общности, G' — это обычная группа. Тогда f' представляется отображением $P_k \times X_l \to G'$, удовлетворяющим таким же тождествам. Требуемый $h\colon P \times G \to G'$ представляется индуцированным отображением $P_k \times G_l \to G'$. Ясно, что такой h единственнен. □

Абелианизацией про-группы G называется про-группа A, порождённая гомоморфизмом $f\colon G \to A$ с соотношением $[f(x), f(y)] = 1$. Она существует и представима проективной системой абелевых групп по лемме 16.

3.2 Колокализация

По декартовой категории $\mathcal{C}$ мы построим декартову категорию $\overline{\mathcal{C}}$, где

1. $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{C}}) = \mathrm{Ob}(\mathbf{Set}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
2. $\overline{\mathcal{C}}((X, C), (Y, D)) = \mathbf{Set}(X, Y) \times \mathbf{Set}(X, \mathcal{C}(C, D))$;
3. $\mathrm{id}_{(X,C)} = (\mathrm{id}_X, x \mapsto \mathrm{id}_C)$;
4. $(f, u) \circ (g, v) = (f \circ g, x \mapsto u(g(x)) \circ v(x))$.

Конечные произведения в $\overline{\mathcal{C}}$ можно вычислять покомпонентно. Так как функторы $\mathbf{Set} \to \overline{\mathcal{C}}, X \mapsto (X, 1)$ и $\mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}, C \mapsto (\{*\}, C)$ являются вполне строгими и сохраняют конечные произведения, то мы будем отождествлять $\mathbf{Set}$ и $\mathcal{C}$ с подкатегориями $\overline{\mathcal{C}}$.

$\mathcal{T}$-алгебры в $\overline{\mathcal{C}}$ можно использовать, чтобы определить действия абстрактных алгебраических объектов на алгебраические объекты из $\mathcal{C}$. Будем говорить, что группа G действует на групповом объекте H в категории $\mathcal{C}$, если она действует на H как групповой объект в $\overline{\mathcal{C}}$, аналогично для нечётных форменных колец. В случае групп это то же самое, что и гомоморфизм $G \to \mathrm{Aut}(H)$, но для нечётных форменных колец у нас нет аналога группы автоморфизмов.

Группа G может действовать на групповом объекте H из $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ внутри $\overline{\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})}$ или как про-группа. В первом случае действие будем называть *слабым*, а во втором — *сильным*. Слабое действие G на $H = \varprojlim^{\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})}_{i \in \mathcal{I}_H} H_i$ задаётся отображением $a^* \colon G \times \mathcal{I}_H \to \mathcal{I}_H$ и семейством $a_{gi} \colon H_{a^*(g,i)} \to H_i$ при $g \in G$, $i \in \mathcal{I}_H$, удовлетворяющими некоторым условиям. Сильное же действие задаётся отображением $a^* \colon \mathcal{I}_H \to \mathcal{I}_H$ и семейством $a_i \colon H_{a^*(i)} \to H_{a^*(i)}$ при $i \in \mathcal{I}_H$ с некоторыми условиями. Ясно, что любое сильное действие задаёт соответствующее слабое действие. Слабые и сильные действия нечётных форменных колец на объектах $\mathcal{OFR}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ определяются аналогично.

Пусть (R, Δ) — это нечётная форменная K-алгебра, $S \leq K^\bullet$. Локализация $(S^{-1}R, S^{-1}\Delta)$ уже была построена в разделе 2.2. Рассмотрим фильтрованную категорию $\mathcal{S}$ с $\mathrm{Ob}(\mathcal{S}) = S$ и $\mathcal{S}(s, s') = \{s'' \in S \mid s' = ss''\}$. *Колокализацией* (R, Δ) в S будем называть проективную систему

$$(R^{(\infty, S)}, \Delta^{(\infty, S)}) = \varprojlim^{\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})}_{s \in \mathcal{S}} (R^{(s)}, \Delta^{(s)})$$

нечётных форменных колец, где

1. $R^{(s)} = \{a^{(s)} \mid a \in R\}$, $a^{(s)} + b^{(s)} = (a + b)^{(s)}$, $a^{(s)} b^{(s)} = (asb)^{(s)}$, $\overline{a^{(s)}} = \bar{a}^{(s)}$;
2. $\Delta^{(s)}$ является абстрактной группой с образующими $u^{(s)}$ при $u \in \Delta$ и $\phi(a^{(s)})$ при $a \in R$, а соотношения таковы: $\phi \colon R^{(s)} \to \Delta^{(s)}$ гомоморфизм со значениями в центре, $(u \dotplus v)^{(s)} = u^{(s)} \dotplus v^{(s)}$, $\phi(a)^{(s)} = \phi((as)^{(s)})$, $\phi((a + \bar{a})^{(s)}) = \phi((\bar{a}ka)^{(s)}) = \dot{0}$ при $a \in R$, $k \in K$, $u, v \in \Delta$;
3. $\pi(u^{(s)}) = \pi(u)^{(s)}$, $\rho(u^{(s)}) = (\rho(u)s)^{(s)}$, $u^{(s)} \cdot a^{(s)} = (u \cdot sa)^{(s)}$;
4. структурные гомоморфизмы $(R^{(ss')}, \Delta^{(ss')}) \to (R^{(s)}, \Delta^{(s)})$ задаются формулами $a^{(ss')} \mapsto (as')^{(s)}$ и $u^{(ss')} \mapsto (u \cdot s')^{(s)}$.

Если нечётное форменное кольцо (T, Ξ) действует на (R, Δ), то оно сильно действует на $(R^{(\infty, S)}, \Delta^{(\infty, S)})$ (и на всех $(R^{(s)}, \Delta^{(s)})$) по формулам

1. $pa^{(s)} = (pa)^{(s)}$, $a^{(s)}p = (ap)^{(s)}$;
2. $u^{(s)} \cdot p = (u \cdot p)^{(s)}$, $\phi(a^{(s)}) \cdot p = \phi((\bar{p}ap)^{(s)})$, $w \cdot a^{(s)} = (w \cdot a)^{(s)}$;

а $(S^{-1}T, S^{-1}\Xi)$ слабо действует на $(R^{(\infty,S)}, \Delta^{(\infty,S)})$ по формулам

1. $\frac{p}{s}a^{(ss')} = (pa)^{(s')}$, $a^{(ss')}\frac{p}{s} = (ap)^{(s')}$;
2. $u^{(s^2s')} \cdot \frac{p}{s} = (u \cdot sp)^{(s')}$, $\phi(a^{(s^2s')}) \cdot \frac{p}{s} = \phi((\bar{p}ap)^{(s')})$, $(t \cdot \frac{1}{s}) \cdot a^{(ss')} = (t \cdot a)^{(s')}$.

В частности, это так для $(T, \Xi) = (R \rtimes K, \Delta)$. Наконец, канонический морфизм $(R^{(\infty,S)}, \Delta^{(\infty,S)}) \to (R, \Delta)$ является скрещенным модулем в $\mathrm{Pro}(\mathbf{OFR})$. Легко видеть, что с точностью до изоморфизмов $(R^{(\infty,S)}, \Delta^{(\infty,S)})$ — это нечётные форменные про-кольца из [56].

3.3 Прочные разложения Пирса

Имеется каноническая биекция между разложениями Пирса нечётного форменного кольцевого объекта (R, Δ) в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$, слабых действий $\mathrm{H}(\ell, \mathbb{Z})$ на нём и сильных действий $\mathrm{H}(\ell, \mathbb{Z})$ на нём. Согласно теореме 4, любое нечётное форменное про-кольцо с разложением Пирса изоморфно проективной системе нечётных форменных колец с разложениями Пирса. *Про-группа Стейнберга* $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ нечётного форменного про-кольца (R, Δ) с разложением Пирса — это про-группа, порождённая $X_\alpha \colon (R \cup \Delta)_\alpha \to \mathrm{StU}(R, \Delta)$ при $\alpha \in \Phi$ с соотношениями Стейнберга. Из неё есть морфизм $\mathrm{st} \colon \mathrm{StU}(R, \Delta) \to \mathrm{U}(R, \Delta)$, а также справедлив аналог леммы 10.

Разложение Пирса нечётного форменного про-кольца (R, Δ) *прочно*, если для всех ненулевых i, j, k про-группа R_{ik} порождается морфизмами умножения $R_{il} \times R_{lk} \to R_{ik}$ при $l = \pm j$ с соотношениями

1. $ab + cd = cd + ab$ при $a \in R_{il}$, $b \in R_{lk}$, $c \in R_{il'}$, $d \in R_{l'k}$, $l, l' \in \{-j, j\}$;
2. $(a + b)c = ac + bc$, $a(b + c) = ab + ac$;
3. $(ab)c = a(bc)$ при $a \in R_{il}$, $b \in R_{ll'}$, $c \in R_{l'k}$, $l, l' \in \{-j, j\}$;

а про-группа Δ^0_k порождается морфизмами умножения $\Delta^0_l \times R_{lk} \to \Delta^0_k$ при $l = \pm j$ и морфизмом $\phi \colon R_{-k,k} \to \Delta^0_k$, удовлетворяющими

1. $[\phi(a), u \cdot b] = \dot{0}$, $\phi(a + b) = \phi(a) \dotplus \phi(b)$, $\phi(\bar{a}) = \dot{-}\phi(a)$;
2. $[u \cdot a, v \cdot b] = \phi(\,\overline{b}\ \overline{\pi(v)}\,\pi(u)a)$ при $u \in \Delta^0_l$, $a \in R_{lk}$, $v \in \Delta^0_{l'}$, $b \in R_{l'k}$, $l, l' \in \{-j, j\}$;
3. $(u \dotplus v) \cdot a = u \cdot a \dotplus v \cdot a$, $u \cdot (a + b) = u \cdot a \dotplus \phi(\,\overline{b}\,\rho(u)a) \dotplus u \cdot b$;
4. $\phi(a) \cdot b = \phi(\,\overline{b}\,ab)$;
5. $u \cdot ab = (u \cdot a) \cdot b$ при $u \in \Delta^0_l$, $a \in R_{ll'}$, $b \in R_{l'k}$, $l, l' \in \{-j, j\}$.

Разложение Пирса будем называть *сильно прочным*, если всё это выполнено уже при $l, l' = j$. Такое разложение Пирса также будет прочным.

Лемма 17. *Если нечётная форменная K-алгебра (R, Δ) имеет прочное или сильно прочное разложение Пирса, то разложения Пирса $(S^{-1}R, S^{-1}\Delta)$ и $(R^{(\infty,S)}, \Delta^{(\infty,S)})$ прочны или сильно прочны соответственно.*

Доказательство. Мы дадим доказательство для прочных разложений Пирса, сильно прочный случай аналогичен. Для любого нечётного форменного про-кольца (T, Ξ) с разложением Пирса обозначим через $T_{i,|j|} \otimes T_{|j|,k}$ и $\Xi_{|j|} \boxtimes T_{|j|,k}$ универсальные про-группы из определения прочности. Универсальные морфизмы обозначим через

$$\begin{aligned} (-) \otimes (=) \colon T_{i,\pm j} \times T_{\pm j,k} &\to T_{i,|j|} \otimes T_{|j|,k}, \\ (-) \boxtimes (=) \colon \Xi_{\pm j} \times T_{\pm j,k} &\to \Xi_{|j|} \boxtimes T_{|j|,k}, \\ \phi \colon T_{-k,k} &\to \Xi_{|j|} \boxtimes T_{|j|,k}. \end{aligned}$$

Гомоморфизмы

$$S^{-1}R_{i,|j|} \otimes S^{-1}R_{|j|,k} \to S^{-1}R_{ik}, \qquad S^{-1}\Delta_{|j|} \boxtimes S^{-1}R_{|j|,k} \to S^{-1}\Delta_k$$

имеют обратные

$$\tfrac{a \otimes b}{s} \mapsto \tfrac{a}{s} \otimes \tfrac{b}{1}, \qquad (u \boxtimes a) \cdot \tfrac{1}{s} \mapsto (u \cdot \tfrac{1}{1}) \boxtimes (a \cdot \tfrac{1}{s}), \qquad \phi(a) \cdot \tfrac{1}{s} \mapsto \phi(\tfrac{a}{s^2}).$$

Морфизмы $R^{(\infty,S)}_{i,|j|} \otimes R^{(\infty,S)}_{|j|,k} \to R^{(\infty,S)}_{ik}$ и $\Delta^{(\infty,S)}_{|j|} \boxtimes R^{(\infty,S)}_{|j|,k} \to \Delta^{(\infty,S)}_k$ имеют обратные

$$\begin{gathered} (a \otimes b)^{(s^4)} \mapsto (as)^{(s)} \otimes (bs)^{(s)}; \\ (u \boxtimes a)^{(s^4)} \mapsto (u \cdot s)^{(s)} \boxtimes (as)^{(s)}; \\ \phi(a^{(s^4)}) \mapsto \phi((as^3)^{(s)}). \end{gathered}$$

Здесь мы не строим гомоморфизмы из $R^{(s^2)}_{ik}$, так как в s-й компоненте про-группы $R^{(\infty,S)}_{i,|j|} \otimes R^{(\infty,S)}_{|j|,k}$ есть только соотношение $(abs)^{(s)} \otimes c^{(s)} = a^{(s)} \otimes (bcs)^{(s)}$ вместо $(ab)^{(s)} \otimes c^{(s)} = a^{(s)} \otimes (bc)^{(s)}$. □

Ортогональное гиперболическое семейство ранга ℓ в нечётной форменной K-алгебре (R, Δ) — это гомоморфизм $\mathrm{H}(\ell, K) \to (R \rtimes K, \Delta)$ нечётных форменных K-алгебр с единицей, для которого $e_i \in Re_jR + Re_{-j}R$ при $i, j \neq 0$. Если же $e_i \in Re_jR$ при $i, j \neq 0$, то ортогональное гиперболическое семейство называется *сильным.* Например, $\mathrm{AO}(2\ell+1, K)$, $\mathrm{ASp}(2\ell, K)$ и $\mathrm{AO}(2\ell, K)$ имеют сильные ортогональные гиперболические семейства ранга ℓ, а $\mathrm{AL}(\ell, K)$ имеет ортогональное гиперболическое семейство ранга ℓ.

Лемма 18. *Если (R, Δ) имеет ортогональное гиперболическое семейство, то соответствующее разложение Пирса прочно. Если же ортогональное гиперболическое семейство сильное, то разложение Пирса сильно прочно.*

Доказательство. Пусть разложение Пирса прочно, $e_k = \sum_{m=\pm j} \sum_t x_{mt} y_{mt}$ при $x_{mt} \in R_{km}$ и $y_{mt} \in R_{mk}$, где $j, k \neq 0$. Если $\sum_{l=\pm j} \sum_p a_{lp} b_{lp} = 0$ при $a_{lp} \in R_{il}$, $b_{lp} \in R_{lk}$ и $i \neq 0$, то в обозначениях из доказательства леммы 17

$$\sum_{lp} a_{lp} \otimes b_{lp} = \sum_{lmpt} a_{lp} b_{lp} x_{mt} \otimes y_{mt} = 0 \in R_{i,|j|} \otimes R_{|j|,k}.$$

Если же $\dot{\sum}_{l=\pm j} \dot{\sum}_p u_{lp} \cdot a_{lp} \dotplus \phi(b) = \dot{0}$ при $u_{lp} \in \Delta_l$, $a_{lp} \in R_{lk}$, $b \in R_{-k,k}$, то

$$\begin{aligned}\dot{\sum_{lp}} u_{lp} \boxtimes a_{lp} \dotplus \phi(b) = \phi\Big(\sum_{lp} \sum_{(m,t)<(m',t')} \overline{y_{m't'}}\, \overline{x_{m't'}}\, \overline{a_{lp}} \rho(u_{lp}) a_{lp} x_{mt} y_{mt} + b\Big) \\ \dotplus \dot{\sum_{mt}} \Big(\dot{\sum_{lp}} u_{lp} a_{lp}\Big) x_{mt} \boxtimes y_{mt} = \dot{0} \in \Delta_{|j|} \boxtimes R_{|j|,k}.\end{aligned}$$

Сильно прочный случай аналогичен. □

Лемма 19. *Если разложение Пирса нечётного форменного про-кольца (R, Δ) прочно ранга $\ell \geq 3$, то $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ совершенна, то есть имеет тривиальную абелианизацию.*

Доказательство. Это следует из (St4), (St5) и (St8). □

Предложение 5. *Пусть нечётное форменное про-кольцо (R, Δ) имеет прочное разложение Пирса ранга $\ell \geq 3$ и $\alpha \in \Phi$. Тогда*

$$F_\alpha \colon \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha) \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi)$$

является регулярным эпиморфизмом про-групп. Если $\Phi/\{\alpha, \beta\}$ определено и разложение Пирса сильно прочное или β ультракороткий, то

$$F_{\{\alpha,\beta\}} \colon \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\{\alpha, \beta\}) \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi)$$

— тоже регулярный эпиморфизм.

Доказательство. Обозначим образ F_α или $F_{\{\alpha,\beta\}}$ через G. Нам нужно проверить, что все корневые подгруппы $X_\gamma(R,\Delta) \leq \mathrm{StU}(R,\Delta;\Phi)$ лежат в G. Это ясно, если $\gamma \notin \mathbb{R}\alpha$ или $\gamma \notin \mathbb{R}\alpha + \mathbb{R}\beta$, так что можно считать, что γ — это один из исключаемых корней. Если $\gamma = \mathrm{e}_i - \mathrm{e}_k$ короткий, то мы можем найти $j \notin \{0, \pm i, \pm k\}$ такой, что $\mathrm{e}_i - \mathrm{e}_j$ и $\mathrm{e}_j - \mathrm{e}_k$ не исключены, и применить (St4). Если $\gamma = 2\mathrm{e}_k$ длинный, то применим (St5). Наконец, если $\gamma = \mathrm{e}_k$ ультракороткий, то мы применим (St8) и разобранный случай длинного $2\mathrm{e}_k$. $\square$

Если нечётные форменные про-кольца (R,Δ) и (R',Δ') имеют прочные или сильно прочные разложения Пирса ранга ℓ, то произведение разложений Пирса на $(R \times R', \Delta \times \Delta')$ тоже прочно или сильно прочно.

Предложение 6. *Пусть нечётные форменные про-кольца (R,Δ) и (R',Δ') имеют прочные разложения Пирса ранга $\ell \geq 3$. Тогда канонический морфизм*

$$\mathrm{StU}(R \times R', \Delta \times \Delta') \to \mathrm{StU}(R,\Delta) \times \mathrm{StU}(R',\Delta')$$

является изоморфизмом про-групп.

Доказательство. Ясно, что имеются естественные сечения из $\mathrm{StU}(R,\Delta)$ и $\mathrm{StU}(R',\Delta')$ в $G = \mathrm{StU}(R \times R', \Delta \times \Delta')$, причём они порождают G как про-группу. Остаётся проверить, что они коммутируют. Но подгруппы $X_\alpha(R,\Delta)$ и $X_\beta(R',\Delta')$ коммутируют для линейно независимых α и β согласно коммутационной формуле Шевалле, так что $X_\alpha(R,\Delta)$ и $\mathrm{StU}(R',\Delta')$ коммутируют по предложению 5. $\square$

3.4 Исключение корней

Рассмотрим нечётное форменное про-кольцо (R,Δ) с прочным разложением Пирса ранга ℓ и корень $\alpha = \mathrm{e}_m$ или $\alpha = \mathrm{e}_m - \mathrm{e}_l$. Мы будем доказывать, что $F_\alpha \colon \mathrm{StU}(R,\Delta;\Phi/\alpha) \to \mathrm{StU}(R,\Delta;\Phi)$ является изоморфизмом, если $\ell \geq 4$, $\ell = 3$ и разложение Пирса сильно прочное, или $\ell = 3$ и α ультракороткий. Рассмотрим канонические морфизмы $\widetilde{X}_\beta \colon (R \cup \Delta)_\beta \to \mathrm{StU}(R,\Delta;\Phi/\alpha)$ при $\beta \in \Phi \setminus \mathbb{R}\alpha$, то есть они принимают значения в $X_{\pi_\alpha(\beta)}(R,\Delta)$ и $F_\alpha(\widetilde{X}_\beta(\mu)) = X_\beta(\mu)$. Для построения оставшихся корневых подгрупп положим

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}^i_{lm}(a,b) &= [\widetilde{X}_{li}(a), \widetilde{X}_{im}(b)] \text{ при } i \notin \{0, \pm l, \pm m\};\\
\widetilde{X}^\pi_{lm}(u,v) &= [\widetilde{X}_m(v), \widetilde{X}_{-l}(u)];\\
\widetilde{X}^{-l}_{lm}(u,a) &= [X_{-l}(u), X_{-l,m}(a)]\, X_m(u \cdot (-a));\\
\widetilde{X}^{-m}_{lm}(a,u) &= [\widetilde{X}_m(\dot{-}u), \widetilde{X}_{l,-m}(a)]\, \widetilde{X}_{-l}(u \cdot \bar{a})
\end{aligned}$$

в случае $\alpha = \mathrm{e}_m$ и

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}^i_{-m,m}(a,b) &= [\widetilde{X}_{-m,i}(a), \widetilde{X}_{im}(b)] \text{ при } i \notin \{0, \pm m\};\\
\widetilde{X}^i_m(u,a) &= \widetilde{X}_{-i,m}(\overline{\rho(u)}a)\, [\widetilde{X}_i(\dot{-}u), \widetilde{X}_{im}(-a)] \text{ при } i \notin \{0, \pm m\}
\end{aligned}$$

в случае $\alpha = \mathrm{e}_m - \mathrm{e}_l$. Обозначим через $\widetilde{X}_\alpha(R, \Delta)$ подгруппу $\mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha)$, порождённую этими морфизмами. Имеется морфизм $\mathrm{eval}\colon \widetilde{X}_\alpha(R, \Delta) \to (R \cup \Delta)_\alpha$ такой, что $X_\alpha(\mathrm{eval}(g)) = F_\alpha(g)$. А именно,

$$\begin{aligned}
\mathrm{eval}(\widetilde{X}^i_{lm}(a,b)) &= ab, & \mathrm{eval}(\widetilde{X}^\pi_{lm}(u,v)) &= \overline{\pi(u)}\pi(v),\\
\mathrm{eval}(\widetilde{X}^{-l}_{lm}(u,a)) &= \rho(u)a, & \mathrm{eval}(\widetilde{X}^{-m}_{lm}(a,u)) &= a\rho(u),\\
\mathrm{eval}(\widetilde{X}^i_{-m,m}(a,b)) &= \phi(ab), & \mathrm{eval}(\widetilde{X}^i_m(u,a)) &= u \cdot a.
\end{aligned}$$

Лемма 20. *Если $\beta \in \Phi/\alpha$ и g — это образующий морфизм $\widetilde{X}_\alpha(R, \Delta)$, то ${}^g X_\beta(\mu) = X_\beta({}^{\mathrm{st}(g)}\mu)$.*

Доказательство. Пусть $\Psi \subseteq \Phi$ — это насыщенная подсистема корней ранга 2 из определения g. Если $\beta \notin \Psi/\alpha$, то равенство следует из леммы 10. Иначе применим предложение 5 к $F_\beta\colon \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\Psi) \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha)$, чтобы заменить X_β на произведение корневых элементов с корнями не из Ψ. □

В следующих леммах мы будем неявно использовать теоретико-групповые тождества

$$\begin{aligned}
[x,y] &= [y,x]^{-1}; & [xy,z] &= {}^x[y,z]\,[x,z];\\
{}^x[y,z] &= [[x,y]\,y, [x,z]\,z]; & [x,yz] &= [x,y]\,{}^y[x,z].
\end{aligned}$$

Лемма 21. *В случае $\alpha = \mathrm{e}_m$ существует единственный изоморфизм $\widetilde{X}_m\colon \Delta^0_m \to \widetilde{X}_\alpha(R, \Delta)$ про-групп такой, что $F_\alpha(\widetilde{X}_m(u)) = X_m(u)$.*

Доказательство. Мы начнём с того, что построим такой морфизм про-групп $\widetilde{X}_{-m,m}\colon (R \cup \Delta)_{2\alpha} \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha)$, что $\widetilde{X}^i_{-m,m}(a,b) = \widetilde{X}_{-m,m}(ab)$. Согласно лемме 20, каждый образующий морфизм $\widetilde{X}_m(R,\Delta)$ коммутирует с $\widetilde{X}^i_{-m,m}$. Из этой же леммы следует, что

$$\widetilde{X}^i_{-m,m}(a+b,c) = \widetilde{X}^i_{-m,m}(a,c)\,\widetilde{X}^i_{-m,m}(b,c);$$
$$\widetilde{X}^i_{-m,m}(a,b+c) = \widetilde{X}^i_{-m,m}(a,b)\,\widetilde{X}^i_{-m,m}(a,c).$$

А вычисляя ${}^{\widetilde{X}_{-m,j}(a)}[\widetilde{X}_{ji}(b),\widetilde{X}_{im}(c)]$ двумя способами по лемме 20, получается

$$\widetilde{X}^i_{-m,m}(ab,c) = \widetilde{X}^j_{-m,m}(a,bc)$$

при $i \neq \pm j$ и, следовательно, при всех $i,j \notin \{0,\pm m\}$. Значит, требуемый $\widetilde{X}_{-m,m}$ существует, он удовлетворяет $\widetilde{X}_{-m,m}(a) = \widetilde{X}_{-m,m}(-\bar{a})$.

Теперь мы построим $\widetilde{X}_m$. Из леммы 20 следует, что

$$[g,\widetilde{X}^i_m(u,a)] = \widetilde{X}_{-m,m}(\bar{a}\overline{\pi(u)}\pi(\mathrm{eval}(g)))$$

для всех образующих морфизмов g про-группы $\widetilde{X}_m(R,\Delta)$. Также

$$\widetilde{X}_m(u \dotplus v,a) = \widetilde{X}_m(u,a)\,\widetilde{X}_m(v,a);$$
$$\widetilde{X}_m(u,a+b) = \widetilde{X}_m(u,a)\,\widetilde{X}_{-m,m}(\,\overline{b}\,\rho(u)a)\,\widetilde{X}_m(u,b).$$

Вычисляя ${}^{\widetilde{X}_{im}(-c)}[\widetilde{X}_{-i,j}(a),\widetilde{X}_{ji}(b)]$ и ${}^{\widetilde{X}_{jm}(-b)}[\widetilde{X}_i(\dot{-}u),\widetilde{X}_{ij}(-a)]$ двумя способами по лемме 20, получается

$$\widetilde{X}^i_m(\phi(ab),c) = \widetilde{X}_{-m,m}(\bar{c}abc) \text{ при } a \in R_{-i,j}, b \in R_{ji};$$
$$\widetilde{X}^i_m(u,ab) = \widetilde{X}^j_m(u \cdot a,b)$$

при $i \neq \pm j$ и, следовательно, при всех $i,j \notin \{0,\pm m\}$. В последнем тождестве обе части не являются гомоморфизмами по a, поэтому мы не можем напрямую использовать, что $R_{ij} \times R_{j,\pm i} \to R_{i,\pm i}$ является образующим, зато частное $\widetilde{X}^i_m(u,ab)\,\widetilde{X}^j_m(u\cdot a,b)^{-1}$ уже будет гомоморфизмом по a. Из этих тождеств и прочности разложения Пирса вытекает существование $\widetilde{X}_m$. □

Лемма 22. *Пусть в нечётном форменном про-кольце (R,Δ) выбрано разложение Пирса ранга $\ell = 3$, удовлетворяющее $R_{ij}R_{jk} = R_{ik}$ при $i,j,k \neq 0$, A — это абелева про-группа, $\{-,=,\equiv\}_{ij}\colon R_{1i} \times R_{ij} \times R_{j3} \to A$ — это полиаддитивные морфизмы про-множеств при $i,j \in \{-2,2\}$, причём*

(As1) $\{x,yz,w\}_{ik} = \{xy,z,w\}_{jk} + \{x,y,zw\}_{ij}$;

(As2) $\{x,y,\bar{x}z\}_{-i,i} = 0$;

(As3) $\{x, yz, w\}_{ij} = \{\bar{y}, \bar{x}z, w\}_{-i,j}$;

(As4) $\{x, y, zw\}_{ij} = -\{\bar{z}, \bar{y}, \bar{x}w\}_{-j,-i}$.

Тогда $\{x, y, z\}_{ij} = 0$ *для всех* i, j.

Доказательство. Из последних двух соотношений получается, что

$$\{ax, \bar{y}b, c\}_{ij} = \{ay, \bar{x}b, c\}_{-i,j}; \tag{As5}$$

$$\{a, bx, \bar{y}c\}_{ji} = \{a, by, \bar{x}c\}_{j,-i} \tag{As6}$$

для $x \in R_{1i}$ и $y \in R_{1,-i}$. Из (As3) и (As5) следует

$$\{axyb, c, d\}_{ij} = \{ayxb, c, d\}_{ij}; \tag{As7}$$

$$\{zwa, b, c\}_{ij} = \{wza, b, c\}_{ij} \tag{As8}$$

при $x, y \in R_{\pm 1, \pm 1}$ и $z, w \in R_{11}$. Обозначим через $(I, \Gamma) \trianglelefteq (R, \Delta)$ нечётный форменный идеал, порождённый $xy - yx$ при $x, y \in R_{11}$ (это пара про-групп, порождённых формулами из леммы 6). Из тождеств (As4)—(As8) легко следует, что $\{x, y, z\}_{ij}$ пропускаются через R/I, так что с этого момента будем считать, что $I = 0$. Также

$$\{rx, ye_1z, we_1t\}_{ij} = \{x, yrz, we_1t\}_{ij} = \{x, ye_1z, wrt\}_{ij} \tag{As9}$$

при $r \in R_{11}$. Остаётся доказать, что $\{x, y, z\}_{22} = 0$.

Из (As2), (As4) и (As6) вытекает

$$\{ax, bx, c\}_{22} = 0; \tag{As10}$$

$$\{a, yb, yc\}_{22} = 0. \tag{As11}$$

при $x \in R_{12}$ и $y \in R_{21}$. Используя (As1), (As9), (As10), (As11) и линеаризации (As10), (As11), мы получаем

$$\begin{aligned}\{x, y(mn)^4z, wt\}_{22} &= \{xym, n(mn)^3z, wt\}_{22} + \{(mn)^3x, ym, nzwt\}_{22} \\ &= \{xym, nz', w(mn)^2t\}_{22} + \{x', y(mn)^2m, nzwt\}_{22} \\ &= -\{xyz', (nm)^2, w't\}_{22} - \{x', (nm)^2, y'zwt\}_{22} = 0\end{aligned}$$

при $x, m, z \in R_{12}$, $y, n, w \in R_{21}$, $t \in R_{13}$, где $z' = mnz - znm$, $w' = wmn - nmw$, $x' = mnx - xnm$, $y' = ymn - nmy$. Последнее равенство следует из

$$z'n = mw' = x'n = my' = 0.$$

Наконец, если $f\colon X \to R_{11}$ порождает R_{11} как идеал, то морфизм $f(x)^n$ также порождает R_{11} как идеал при всех $n \geq 1$. Умножение $R_{12} \times R_{21} \to R_{11}$ порождает R_{11} как идеал, откуда следует доказываемое утверждение. $\square$

Лемма 23. *В случае* $\alpha = \mathrm{e}_m - \mathrm{e}_l$ *существует единственный изоморфизм* $\widetilde{X}_{lm}\colon R_{lm} \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha)$ *такой, что* $F_\alpha(\widetilde{X}_{lm}(a)) = X_{lm}(a)$.

Доказательство. По лемме 20 порождающие морфизмы $\widetilde{X}_\alpha(R, \Delta)$ коммутируют, то есть $\widetilde{X}_\alpha(R, \Delta)$ является абелевой про-группой. Из этой же леммы мы получаем

$$
\begin{aligned}
\widetilde{X}^i_{lm}(a + b, c) &= \widetilde{X}^i_{lm}(a, c)\, \widetilde{X}^i_{lm}(b, c);\\
\widetilde{X}^i_{lm}(a, b + c) &= \widetilde{X}^i_{lm}(a, b)\, \widetilde{X}^i_{lm}(a, c);\\
\widetilde{X}^\pi_{lm}(u \dotplus v, w) &= \widetilde{X}^\pi_{lm}(u, w)\, \widetilde{X}^\pi_{lm}(v, w);\\
\widetilde{X}^\pi_{lm}(u, v \dotplus w) &= \widetilde{X}^\pi_{lm}(u, v)\, \widetilde{X}^\pi_{lm}(u, w);\\
\widetilde{X}^{-l}_{lm}(u \dotplus v, a) &= \widetilde{X}^{-l}_{lm}(u, a)\, \widetilde{X}^\pi_{lm}(u, v \cdot (-a))\, \widetilde{X}^{-l}_{lm}(v, a);\\
\widetilde{X}^{-l}_{lm}(u, a + b) &= \widetilde{X}^{-l}_{lm}(u, a)\, \widetilde{X}^{-l}_{lm}(u, b).
\end{aligned}
$$

Имеется инволюция $\sigma \in \mathrm{W}(\Phi)$ такая, что $\sigma(\mathrm{e}_i) = \mathrm{e}_i$ при $i \notin \{\pm l, \pm m\}$, $\sigma(\mathrm{e}_l) = -\mathrm{e}_m$, $\sigma(\mathrm{e}_m) = -\mathrm{e}_l$. Она сохраняет α и переставляет образующие морфизмы $\widetilde{X}^{-l}_{lm}$ и $\widetilde{X}^{-m}_{lm}$, так что тождества с $\widetilde{X}^{-m}_{lm}$ можно получить из аналогичных тождеств с $\widetilde{X}^{-l}_{lm}$ применением σ. Кроме того, $[\widetilde{X}_{-m,i}(a), \widetilde{X}_{i,-l}(b)] = \widetilde{X}^{-i}_{lm}(-\bar{a}, \bar{b})$ и $[\widetilde{X}_{-l}(v), \widetilde{X}_m(u)] = \widetilde{X}^\pi_{lm}(\dot{-}v, u)$.

Теперь вычислим выражения ${}^{\widetilde{X}_{li}(a)}[\widetilde{X}_{ij}(b), \widetilde{X}_{jm}(c)]$, ${}^{\widetilde{X}_{-l}(u)}[\widetilde{X}_{-l,i}(a), \widetilde{X}_{im}(b)]$, ${}^{\widetilde{X}_{l,-i}(a)}[\widetilde{X}_i(u), \widetilde{X}_{im}(b)]$, ${}^{\widetilde{X}_{im}(-a)}[\widetilde{X}_i(v), \widetilde{X}_{-l}(u)]$, ${}^{\widetilde{X}_{-l}(\dot{-}u)}[\widetilde{X}_{-m,i}(a), \widetilde{X}_{im}(b)]$, а также ${}^{\widetilde{X}_{-l,m}(-c)}[\widetilde{X}_{li}(a), \widetilde{X}_{i,-l}(b)]$ двумя способами по лемме 20, получим

$$
\begin{aligned}
\widetilde{X}^i_{lm}(a, bc) &= \widetilde{X}^j_{lm}(ab, c);\\
\widetilde{X}^{-l}_{lm}(u, ab) &= \widetilde{X}^i_{lm}(\rho(u)a, b);\\
\widetilde{X}^i_{lm}(a\rho(u), b) &= \widetilde{X}^{-i}_{lm}(a, \rho(u)b);\\
\widetilde{X}^\pi_{lm}(u, v \cdot a) &= \widetilde{X}^i_{lm}(\overline{\pi(u)}\pi(v), a);\\
\widetilde{X}^\pi_{lm}(u, \phi(ab)) &= 1;\\
\widetilde{X}^{-l}_{lm}(\phi(ab), c) &= \widetilde{X}^i_{lm}(a, bc)\, \widetilde{X}^{-i}(\overline{b}, \bar{a}c)^{-1}
\end{aligned}
$$

соответственно при $i \neq \pm j$ и $i, j \notin \{0, \pm l, \pm m\}$. Отсюда легко следует, что

$$\widetilde{X}^\pi_{lm}(u, \phi(a)) = 1;$$

а вычислив ${}^{\widetilde{X}_{-l,m}(b)}[\widetilde{X}_i(u), \widetilde{X}_{i,-l}(-a)]$ двумя способами при помощи этих тождеств, можно получить

$$\widetilde{X}_{lm}^{-l}(v \cdot a, b) = \widetilde{X}_{lm}^{i}(\bar{a}\rho(v), ab).$$

Если $\ell \geq 4$, то $\widetilde{X}_{lm}^{i}(a, bc) = \widetilde{X}_{lm}^{j}(ab, c)$ при $i = \pm j$, так что требуемый $\widetilde{X}_{lm}$ существует. Иначе применим лемму 22 к $\{x, y, z\}_{ij} = \widetilde{X}_j(xy, z)\,\widetilde{X}_i(x, yz)^{-1}$ при $i, j \notin \{0, \pm l, \pm m\}$. Равенства из условия леммы — это в точности соотношения между образующими $\widetilde{X}_{lm}(R, \Delta)$, если сделать подстановку $u = \phi(xy)$ и $v = \phi(z)$ для подходящих x, y, z. □

Теорема 5. *Пусть нечётное форменное про-кольцо (R, Δ) имеет прочное разложение Пирса ранга ℓ и $\alpha \in \Phi$. Предположим, что выполнено одно из*

1. *$\ell \geq 4$,*
2. *$\ell = 3$ и разложение Пирса сильно прочно,*
3. *$\ell = 3$ и α ультракороткий.*

Тогда $F_\alpha\colon \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha) \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi)$ является изоморфизмом.

Доказательство. Из лемм 21 и 23 следует существование корневого морфизма $\widetilde{X}_\alpha$. Так как α можно заменить на $-\alpha$, в $\mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha)$ есть корневые морфизмы для всех корней из Φ. Они удовлетворяют соотношениям Стейнберга по построению и лемме 20. Следовательно, существует морфизм про-групп $G_\alpha\colon \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi) \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha)$ такой, что $G_\alpha(F_\alpha(g)) = g$. Но F_α является регулярным эпиморфизмом по предложению 5, поэтому это изоморфизм с обратным G_α. □

3.5 Условия конечности

Радикал Джекобсона $\mathrm{J}(R)$ кольца состоит из таких $x \in R$, что все элементы из RxR квазиобратимы. Будем говорить, что нечётное форменное кольцо (R, Δ) *полупросто*, если R является полупростым кольцом с единицей (то есть произведением конечного числа матричных алгебр над телами по теореме Веддербарна—Артина). Нечётное форменное кольцо (R, Δ) *полулокально*, если R

полулокально, то есть $R/\operatorname{J}(R)$ полупросто и с единицей. Наконец, (R, Δ) *инд-полулокально*, если это прямой предел полулокальных нечётных форменных колец, и аналогично для обычных колец.

Нечётная форменная K-алгебра (R, Δ) называется *конечной*, если R и $\Delta/\phi(R)$ конечно порождены как K-модули, это выполнено для классических нечётных форменных алгебр. Также (R, Δ) называется *локально конечной*, если R является локально конечной K-алгеброй, то есть все конечные подмножества R порождают конечные K-подалгебры. Следующие утверждения на (R, Δ) эквивалентны:

1. она локально конечна над K;
2. все её конечно порождённые нечётные форменные K-подалгебры являются конечными;
3. это прямой предел конечных K-алгебр;
4. существуют малая фильтрованная категория $\mathcal{I}$, конечно порождённые коммутативные кольца K_i с единицами и конечные нечётные форменные K_i-алгебры (R_i, Δ_i) при $i \in \mathcal{I}$ такие, что $K = \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} K_i$ и $(R, \Delta) = \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} (R_i, \Delta_i)$.

Класс локально конечных нечётных форменных K-алгебр замкнут относительно взятия подалгебр, факторалгебр, локализаций, прямых пределов, полупрямых произведений и скрещенных модулей.

Любая конечная нечётная форменная алгебра (R, Δ) над полулокальным кольцом K сама полулокальна: $R \operatorname{J}(K) \leq \operatorname{J}(R)$ и любая конечная алгебра над полем полулокальна. Если же (R, Δ) локально конечна над полулокальным K, то она инд-полулокальна.

Если (T, Ξ) — это специальное нечётное форменное кольцо с единицей, построенное по ассоциативной K-алгебре R с единицей, причём R конечная или локально конечная, то (T, Ξ) будет конечной или локально конечной нечётной форменной K-алгеброй. Если же (T, Ξ) было построено по модулю M_R конечного представления с эрмитовой формой B и нечётным форменным параметром $\mathcal{L}$, где R — это локально конечная K-алгебра с единицей и λ-инволюцией, причём инволюция тривиальна на K, то (T, Ξ) является локально конечной нечётной форменной K-алгеброй. Действительно, $\operatorname{End}(M_R)$ локально конечна над K как фактор-алгебра $\{x \in \operatorname{M}(n, R) \mid xN \leq N\}$, где N — ядро некоторой сюръекции $R^n \to M$.

Мы собираемся описать представление $\mathrm{U}(R,\Delta)$ элементарными образующими в инд-полулокальном случае.

Лемма 24. *Пусть инд-полулокальное кольцо R имеет разложение Пирса ранга ℓ, то есть $R=\bigoplus_{1\leq i,j\leq \ell} R_{ij}$, $R_{ij}R_{kl}=0$ при $j\neq k$, $R_{ij}R_{jl}\leq R_{il}$. Тогда*

$$R^\circ = U^+(R)\circ \mathrm{D}(R)\circ U^-(R)\circ U^+(R),$$

где $U^+(R)=\prod^\circ_{i<j} R_{ij}$, $U^-(R)=\prod^\circ_{i>j} R_{ij}$ и $\mathrm{D}(R)=\prod^\circ_i R^\circ_{ii}$.

Доказательство. Можно перейти к соответствующему нечётному форменному кольцу, чтобы использовать результаты первой главы. Применим исключение корней и индукцию, чтобы свести всё к случаю $\ell=2$. По лемме 11 достаточно проверить, что для любого $g\in R^\circ$ существует $x\in R_{12}$ такой, что $g\circ x$ имеет квазиобратимую компоненту в R_{22}.

Не умаляя общности, R полулокально. Так как квазиобратимость можно проверять по модулю радикала Джекобсона, можно считать, что R полупросто. Наконец, раскладывая R в произведение матричных колец и применяя исключение корней в обратную сторону (то есть раскладывая идемпотенты), мы можем считать, что $R=\mathrm{M}(\ell,D)$ для тела D и некоторого $\ell\geq 0$. В этом случае утверждение тривиально: если $e_\ell g e_\ell=0$, то выберем $i<\ell$ такой, что $e_\ell g e_i\neq 0$, и положим $x=e_{i\ell}\in R$. Иначе возьмём $x=0$. □

Лемма 25. *Пусть инд-полулокальное нечётное форменное кольцо (R,Δ) имеет прочное разложение Пирса ранга $\ell\geq 1$. Тогда*

$$\mathrm{U}(R,\Delta)=\Omega(R,\Delta;\Phi/\mathrm{e}_1)\,U^+(R,\Delta;\Phi/\mathrm{e}_1),$$

где $\Omega(R,\Delta)$ — это подмножество из леммы 11.

Доказательство. Мы будем доказывать чуть более общее утверждение про каждый $g\in\mathrm{U}(R,\Delta)$, чтобы свести всё к полулокальному случаю. Вместо прочности разложения Пирса предположим, что существует $1\leq k<\ell$ такой, что $e_i\pi(g)e_j\in\sum_{-k\leq t\leq k;\, t\neq 0} R_{it}R_{tj}$ для всех $k<i\leq \ell$ и $j<i$. Докажем, что

$$g\in\Omega(R,\Delta;\Phi/\{\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_k\})\,U^+(R,\Delta;\Phi/\{\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_k\}).$$

Как и в доказательстве леммы 24, при помощи леммы 11 можно свести всё к случаю, когда R полупросто, (R,Δ) специальное с единицей, разложение

Пирса неразложимо (то есть R_{ii} являются телами при $i \neq 0$), $k = \ell - 1$. Требуется найти $g' \in g\, U^+(R, \Delta; \Phi/\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k\})$ такое, что $e_\ell \alpha(g') e_\ell$ обратимо в теле $R_{\ell\ell}$. Рассмотрим все случаи:

1. Если $e_\ell \alpha(g) e_\ell$ обратимо, то возьмём $g' = g$.
2. Если $e_\ell \alpha(g) e_\ell = 0$ и $e_\ell \alpha(g) e_i \neq 0$ для некоторого $-\ell < i < \ell$ с $i \neq 0$, то возьмём $g' = g\, T_{i\ell}(x)$ для некоторого $0 \neq x \in R_{i\ell}$ (он существует, так как R полупросто).
3. Если $e_\ell \alpha(g) = e_\ell \alpha(g)(e_{-\ell} + e_0)$ и $e_\ell \alpha(g) e_{-\ell} \neq 0$, то возьмём $g' = g\, T_{-\ell, t}(x)\, T_{t\ell}(y)$ для некоторых t, $x \neq 0$, $y \neq 0$ (они существуют по предположению на g).
4. Наконец, если $e_\ell \alpha(g) = e_\ell \alpha(g) e_0$, то $e_\ell \alpha(g) e_0 \overline{\alpha(g)} e_\ell = e_\ell$ и можно взять $g' = g\, T_\ell(u)$, где u — это компонента g^{-1} в Δ^0_ℓ (она определена по модулю $\phi(R_{-\ell,\ell})$). □

Предложение 7. *Пусть инд-полулокальное нечётное форменное кольцо (R, Δ) имеет прочное разложение Пирса ранга $\ell \geq 1$. Тогда группа $\mathrm{U}(R, \Delta)$ порождена $X_\alpha(R, \Delta)$ и $\mathrm{D}(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_i)$, все соотношения между ними — это соотношения Стейнберга и элементы из*

$$\mathrm{D}(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_i) * \mathrm{D}(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_j) * \mathop{\Huge *}_{\substack{l = \pm i \\ m = \pm j}} T_{lm}(R, \Delta)$$

при $1 \leq i < j \leq \ell$ с тривиальными образами в $\mathrm{U}(R, \Delta)$.

Доказательство. Обозначим через G группу с представлением из условия, тогда есть гомоморфизмы $\mathrm{GStU}(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_1) \to G$ и $\mathrm{GStU}(R, \Delta) \to G$. Покажем, что $G = \Omega(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_1)\, U^+(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_1)$. Правая часть этого равенства является непустым подмножеством, замкнутым относительно умножения на $U^+(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_1)$ и $\mathrm{D}(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_1)$ справа, так что остаётся проверить, что она сохраняется под действием группы Вейля Φ. По определению, она сохраняется при отражении $\mathrm{e}_1 \mapsto -\mathrm{e}_1$, а по лемме 25, применённой к нечётному форменному подкольцу, она сохраняется при транспозиции $\mathrm{e}_1 \leftrightarrow \mathrm{e}_2$. Наконец, она сохраняется под действием остальных образующих $\mathrm{e}_i \leftrightarrow \mathrm{e}_{i+1}$ при $2 \leq i \leq \ell - 1$ по лемме 24. Имея разложение G, легко проверить, что $G \to \mathrm{U}(R, \Delta)$ сюръективно по лемме 25 и инъективно по лемме 11. □

3.6 Скрещенные модули Стейнберга

Теорема 6. *Пусть инд-полулокальное нечётное форменное кольцо* (R, Δ) *имеет прочное разложение Пирса ранга* $\ell \geq 3$. *Тогда существует единственное действие* $\mathrm{U}(R, \Delta)$ *на* $\mathrm{StU}(R, \Delta)$, *делающее* $\mathrm{st}\colon \mathrm{StU}(R, \Delta) \to \mathrm{U}(R, \Delta)$ *скрещенным модулем.*

Доказательство. По теореме 5 существует каноническое действие группы

$$G = \mathrm{StU}(R, \Delta) * \mathrm{D}(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_1) * \ldots * \mathrm{D}(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_\ell)$$

на $\mathrm{StU}(R, \Delta)$, делающее st эквивариантным. Так как $\mathrm{U}(R, \Delta)$ является факторгруппой G и образующие ядра из предложения 7 тривиально действуют на $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ по предложению 5, то требуемое действие существует. Наконец, $\mathrm{StU}(R, \Delta) \to \mathrm{EU}(R, \Delta)$ является совершенным центральным расширением по уже доказанному и лемме 19, поэтому действие единственно. □

Теперь рассмотрим локально конечную нечётную форменную K-алгебру (R, Δ) с прочным разложением Пирса ранга ℓ. Для всех $S \leq S' \leq K^\bullet$ обозначим через $\mathrm{can}_S^{S'}\colon (R^{(\infty, S')}, \Delta^{(\infty, S')}) \to (R^{(\infty, S)}, \Delta^{(\infty, S)})$ канонические морфизмы про-групп. Внутри индексов мы будем писать $\mathfrak{p}$ вместо $S = K \setminus \mathfrak{p}$ для простых идеалов $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(K)$, x вместо $S = \{1, x, x^2, \ldots\}$ для $x \in K$, и опускать $S = \{1\}$.

Лемма 26. *Если* $\ell \geq 4$ *или* $\ell = 3$ *и разложение Пирса сильно прочное, то для каждого* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(K)$ *существует единственное слабое действие* $\mathrm{U}(R_\mathfrak{p}, \Delta_\mathfrak{p})$ *на* $\mathrm{StU}(R^{(\infty, \mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty, \mathfrak{p})})$, *продолжающее слабые действия образующих из предложения 7. Морфизм* $\mathrm{st}\colon \mathrm{StU}(R^{(\infty, \mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty, \mathfrak{p})}) \to \mathrm{U}(R^{(\infty, \mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty, \mathfrak{p})})$ *эквивариантен относительно этого действия.*

Доказательство. Группы $X_\alpha(R, \Delta)$ и $\mathrm{D}(R_\mathfrak{p}, \Delta_\mathfrak{p}; \Phi/\mathrm{e}_i)$ канонически слабо действуют на про-группах $\mathrm{StU}(R^{(\infty, \mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty, \mathfrak{p})}; \Phi/\alpha)$ и $\mathrm{StU}(R^{(\infty, \mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty, \mathfrak{p})}; \Phi/\mathrm{e}_i)$. По теореме 5, они слабо действуют на $\mathrm{StU}(R^{(\infty, \mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty, \mathfrak{p})})$. Наконец, по предложениям 5 и 7, эти слабые действия дают единственное слабое действие $\mathrm{U}(R_\mathfrak{p}, \Delta_\mathfrak{p})$. Эквивариантность st тривиальна. □

Лемма 27. *Семейства* $\mathrm{can}_S^\mathfrak{p}\colon R_{lm}^{(\infty, \mathfrak{p})} \to R_{lm}^{(\infty, S)}$ *и* $\mathrm{can}_S^\mathfrak{p}\colon \Delta_m^{(\infty, \mathfrak{p}), 0} \to \Delta_m^{(\infty, S), 0}$, *где* $\mathfrak{p}$ *пробегает простые идеалы* K, *не пересекающие* $S \leq K^\bullet$, *совместно эпиморфны в* $\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})$.

Доказательство. Возьмём морфизмы $f_1, f_2 \colon \Delta_m^{(\infty,S),0} \to G$ про-групп, у которых композиции с $\mathrm{can}_S^{\mathfrak{p}}$ совпадают для всех $\mathfrak{p}$, не пересекающих S, и будем доказывать $f_1 = f_2$. Не умаляя общности, G является абстрактной группой и f_i задаются гомоморфизмами из $\Delta_m^{(s),0}$ для $s \in S$. Рассмотрим множества

$$\mathfrak{a} = \{k \in K \mid f_1(\phi(ka^{(s)})) = f_2(\phi(ka^{(s)})) \text{ для всех } a \in R_{-m,m}\};$$
$$\mathfrak{b} = \{k \in K \mid f_1(u^{(s)} \cdot k) = f_2(u^{(s)} \cdot k) \text{ для всех } u \in \Delta_m^0\}.$$

Множество $\mathfrak{a}$ является идеалом, не содержащимся ни в одном простом идеале, не пересекающем S, так что оно пересекает S. Увеличивая s, можно считать, что $\mathfrak{a} = K$. Тогда $\mathfrak{b}$ тоже является идеалом, пересекающим S. Утверждение про R_{lm} можно доказать аналогично, рассматривая идеал

$$\mathfrak{c} = \{k \in K \mid f_1(ka^{(s)}) = f_2(ka^{(s)}) \text{ для всех } a \in R_{lm}\}. \qquad \square$$

Лемма 28. *Пусть $K = \sum_{i=1}^n Kx_i$. Тогда $\mathrm{can}^{x_i} \colon R_{lm}^{(\infty,x_i)} \to R_{lm}$ задают представление про-группы с соотношениями*

1. $[\mathrm{can}^{x_i}(a), \mathrm{can}^{x_j}(b)]^{.} = \dot{0}$ *для всех i, j*
2. $\mathrm{can}^{x_i}(a+b) = \mathrm{can}^{x_i}(a) \dotplus \mathrm{can}^{x_i}(b)$;
3. $\mathrm{can}^{x_i}(\mathrm{can}_{x_i}^{x_i x_j}(a)) = \mathrm{can}^{x_j}(\mathrm{can}_{x_j}^{x_i x_j}(b))$ *при $i < j$.*

Также $\phi \colon R_{-m,m} \to \Delta_m^0$ и $\mathrm{can}^{x_i} \colon \Delta_m^{(\infty,x_i),0} \to \Delta_m^0$ задают представление про-группы с соотношениями

1. $\phi(a+b) = \phi(a) \dotplus \phi(b)$, $\mathrm{can}^{x_i}(u \dotplus v) = \mathrm{can}^{x_i}(u) \dotplus \mathrm{can}^{x_i}(v)$;
2. $[\phi(a), \phi(b)]^{.} = [\phi(a), \mathrm{can}^{x_i}(u)]^{.} = \dot{0}$;
3. $[\mathrm{can}^{x_i}(u), \mathrm{can}^{x_j}(v)] = \phi(\overline{\pi(\mathrm{can}^{x_j}(v))}\pi(\mathrm{can}^{x_i}(u)))$ *для всех i, j;*
4. $\mathrm{can}^{x_i}(\phi(a)) = \phi(\mathrm{can}^{x_i}(a))$;
5. $\mathrm{can}^{x_i}(\mathrm{can}_{x_i}^{x_i x_j}(u)) = \mathrm{can}^{x_j}(\mathrm{can}_{x_j}^{x_i x_j}(u))$ *при $i < j$.*

Доказательство. Можно считать, что

$$R_{lm}^{(\infty,x_i)} = \varprojlim_{k \geq 0}^{\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})} R_{lm}^{(x_i^k)}, \qquad \Delta_m^{(\infty,x_i),0} = \varprojlim_{k \geq 0}^{\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})} \Delta_m^{(x_i^k),0}.$$

Обозначим через $\widetilde{R}_{lm}$ и $\widetilde{\Delta}_m^0$ про-группы с представлениями из условия. Обратные морфизмы к $\widetilde{R}_{lm} \to R_{lm}$ и $\widetilde{\Delta}_m^0 \to \Delta_m^0$ задаются формулами

$$a \mapsto \dot{\sum_i} \mathrm{can}^{x_i}((y_{ik}a)^{(x_i^k)}), \quad u \mapsto \dot{\sum_i} \mathrm{can}^{x_i}((u \cdot y_{ik})^{(x_i^k)}) \dotplus \phi\big(\rho(u) \sum_{i<j} x_i^k x_j^k y_{ik} y_{jk}\big),$$

где $1 = \sum_i y_{ik} x_i^k$ для некоторых $y_{ik} \in K$. $\square$

Теорема 7. *Пусть локально конечная нечётная форменная K-алгебра (R, Δ) имеет разложение Пирса ранга ℓ. Предположим, что выполнено одно из*

1. *$\ell \geq 4$ и разложение Пирса прочное;*
2. *$\ell = 3$ и разложение Пирса сильно прочное.*

Тогда существует единственное действие $\mathrm{U}(R, \Delta)$ на $\mathrm{StU}(R, \Delta)$, делающее $\mathrm{st}\colon \mathrm{StU}(R, \Delta) \to \mathrm{U}(R, \Delta)$ скрещенным модулем. В частности, $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ является совершенным центральным расширением $\mathrm{EU}(R, \Delta)$, которая нормальна в $\mathrm{U}(R, \Delta)$.

Доказательство. Для каждого $g \in \mathrm{U}(R, \Delta)$ мы построим эндоморфизм ${}^{g}(-)$ группы $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ так, что $\mathrm{can}^{\mathfrak{p}}({}^{g}h) = {}^{g}\mathrm{can}^{\mathfrak{p}}(h)$ для всех $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(K)$ и $h \in \mathrm{StU}(R^{(\infty,\mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty,\mathfrak{p})})$, где $\mathrm{U}(R, \Delta)$ слабо действует на $\mathrm{StU}(R^{(\infty,\mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty,\mathfrak{p})})$ по лемме 26. Возьмём $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(K)$, тогда по лемме 25 существует $x \notin \mathfrak{p}$ такой, что образ g в $\mathrm{U}(R_x, \Delta_x)$ является произведением элементарных трансвекций и элемента из $\mathrm{D}(R_x, \Delta_x; \Phi/\mathrm{e}_1)$. По теореме 5 мы получаем автоморфизм ${}^{g}(-)$ про-группы $\mathrm{StU}(R^{(\infty,x)}, \Delta^{(\infty,x)})$ такой, что $\mathrm{can}^{\mathfrak{p}}_{x}({}^{g}h) = {}^{g}\mathrm{can}^{\mathfrak{p}}_{x}(h)$ для всех $x \notin \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(K)$ и $h \in \mathrm{StU}(R^{(\infty,\mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty,\mathfrak{p})})$. По леммам 27 и 28, применённым ко всем корневым подгруппам $\mathrm{StU}(R, \Delta)$, мы получаем гомоморфизмы ${}^{g}X_{\alpha}(-)\colon (R \cup \Delta)_{\alpha} \to \mathrm{StU}(R, \Delta)$ для всех $\alpha \in \Phi$, удовлетворяющие требованиям. Наконец, ${}^{g}(-)$ сохраняет соотношения Стейнберга по лемме 27, так как (St3)–(St8) можно записать как равенства между гомоморфизмами по каждой переменной.

Заметим, что эндоморфизмы ${}^{g}(-)$ группы $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ единственны по лемме 27, так что $\mathrm{U}(R, \Delta)$ действует на $\mathrm{StU}(R, \Delta)$. По леммам 26 и 27, гомоморфизм $\mathrm{st}\colon \mathrm{StU}(R, \Delta) \to \mathrm{U}(R, \Delta)$ является скрещенным модулем. Из этого и леммы 19 вытекает, что $\mathrm{StU}(R, \Delta) \to \mathrm{EU}(R, \Delta)$ — это совершенное центральное расширение, откуда получается единственность. $\square$

На самом деле $\mathrm{EU}(R, \Delta)$ нормальна в $\mathrm{U}(R, \Delta)$ для всех локально конечных нечётных форменных алгебр с прочным разложением Пирса ранга $\ell \geq 3$. Это можно доказать так же, как теорему 7, но используя элементарные унитарные про-группы вместо про-групп Стейнберга, предложение 5 вместо теоремы 5 и соответствующий аналог леммы 26.

Заключение

Приведём список основных результатов настоящей работы, которые выносятся на защиту.

1. Категория нечётных форменных колец из раздела 1.4 является алгебраически когерентной полуабелевой согласно теореме 1, это позволяет работать со скрещенными модулями, релятивизацией Стейна и нечётными форменными кольцевыми объектами в декартовых категориях.
2. Почти все классические редуктивные групповые схемы (с точностью до изогении) можно построить по нечётным форменным кольцам согласно теореме 2.
3. Классические достаточно изотропные редуктивные группы задают достаточно изотропные разожения Пирса на соответствующих аугментированных нечётных форменных алгебрах по теореме 3.
4. Действия нечётных форменных про-колец в смысле полуабелевых категорий можно описать операциями и аксиомами (A1)—(A10) в силу теоремы 4.
5. Теорема об исключении корней (теорема 5) выполняется для достаточно изотропных нечётных унитарных про-групп Стейнберга.
6. Нечётная унитарная группа Стейнберга $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ является скрещенным модулем над унитарной группой $\mathrm{U}(R, \Delta)$ по теоремам 6 и 7, если нечётное форменное кольцо (R, Δ) локально конечно над коммутативным кольцом или полулокально, а также имеет достаточно изотропное разложение Пирса. В частности, элементарная подгруппа $\mathrm{EU}(R, \Delta)$ нормальна в $\mathrm{U}(R, \Delta)$, а группа Стейнберга — это её центральное расширение.

Дальнейшее возможное направление исследований автор видит следующим образом:

1. Показать, что при помощи нечётных форменных колец описываются все группы, имеющие набор корневых подгрупп, параметризуемый системой корней типа BC_ℓ, с точностью до изогении и при дополнительных естественных предположениях.

2. Применить развитую технику для доказательства центральности K_2-функтора, соответствующего исключительным изотропным редуктивным группам.
3. Развить метод про-групп Стейнберга. В частности, представляет интерес построение группы Стейнберга по про-группами Стейнберга для изучения локально изотропных редуктивных групп, а также применение к другим задачам алгебраической K-теории, например, обобщению основных результатов [4; 35; 52].

Список литературы

1. *Воронецкий Е. Ю.* Скрученные формы классических групп // Алгебра и анализ. — 2022. — Т. 34, № 2. — С. 56—94.
2. *Петров В. А.* Нечётные унитарные группы // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2003. — Т. 305. — С. 195—225.
3. *Петров В. А.*, *Ставрова А. К.* Элементарные подгруппы в изотропных редуктивных группах // Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20, № 4. — С. 160—188.
4. *Туленбаев М. С.* Мультипликатор Шура группы элементарных матриц конечного порядка // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 1979. — Т. 86. — С. 162—169.
5. *Artin E.* Geometric algebra. — Inters. Publ., New York, 1957.
6. *Bak A.* K-theory of forms. — Princeton Univ. Press, Princeton, 1982. — (Ann. of Math. Stud. 98).
7. *Bak A.* Nonabelian K-theory: the nilpotent class of K_1 and general stability // K-Theory. — 1991. — Vol. 4. — P. 363—397.
8. *Bak A.*, *Hazrat R.*, *Vavilov N.* Localisation-completion strikes again: relative K_1 is nilpotent by abelian // J. Pure Appl. Algebra. — 2009. — Vol. 213. — P. 1075—1085.
9. *Bak A.*, *Petrov V.*, *Tang G.* Stability for quadratic K_1 // K-Theory. — 2003. — Vol. 30. — P. 1—11.
10. *Bak A.*, *Preusser R.* The E-normal structure of odd dimensional unitary groups // J. Pure Appl. Algebra. — 2018. — Vol. 222, no. 9. — P. 2823—2880.
11. *Bak A.*, *Tang G.* Stability for hermitian K_1 // J. Pure Appl. Algebra. — 2000. — Vol. 150. — P. 107—121.
12. *Bak A.*, *Vavilov N.* Structure of hyperbolic unitary groups I: elementary subgroups // Algebra Colloq. — 2000. — Vol. 7, no. 2. — P. 159—196.
13. *Bass H.* Unitary algebraic K-theory // Lecture Notes Math. — 1973. — Vol. 343. — P. 57—265.

14. *Böge S.* Steinberggruppen von orthogonalen gruppen // J. Reine Angew. Math. — 1998. — Vol. 494. — P. 219—236.

15. *Borceux F.*, *Bourn D.* Mal'cev, protomodular, homological and semi-abelian categories. — Kluwer Academic Publishers, 2004.

16. *Borceux F.*, *Janelidze G.*, *Kelly G. M.* Internal object actions // Comment. Math. Univ. Carolin. — 2005. — Vol. 46, no. 2. — P. 235—255.

17. *Calmès F.*, *Fasel J.* Groupes classiques // Autour des schémas en groupes. Vol. II. — Soc. Math. France, 2015. — P. 1—133.

18. *Cigoli A. S.*, *Gray J. R. A.*, *Van der Linden T.* Algebraically coherent categories // Theory and applications of categories. — 2015. — Vol. 30, no. 54. — P. 1864—1905.

19. *Cigoli A. S.*, *Mantovani S.*, *Metere G.* Peiffer product and Peiffer commutator for internal pre-crossed modules. — 2015. — Preprint, arXiv:1503.05008.

20. *Conrad B.* Reductive group schemes // Autour des schémas en groupes. Vol. I. — Soc. Math. France, 2014. — P. 93—444.

21. *Demazure M.*, *Grothendieck A.* Schémas en groupes I, II, III. — Springer-Verlag, 1970.

22. *Dieudonné J.* La géometrie des groupes classiques. 3éme ed. — Springer-Verlag, Berlin, 1971.

23. *Dieudonné J.* On the automorphism of the classical groups // Mem. Amer. Math. Soc. — 1951. — Vol. 2. — P. 1—122.

24. *Dieudonné J.* Sur les groupes classiques. 3éme ed. — Hermann. Paris, 1973.

25. *Hahn A. J.*, *O'Meara O. T.* The classical groups and K-theory. — Springer-Verlag, 1989.

26. *Hartl M.* Quadratic maps between groups // Georgian Math. J. — 2009. — Vol. 16, no. 1. — P. 55—74.

27. *Hazrat R.* Dimension theory and nonstable K_1 of quadratic modules // K-Theory. — 2002. — Vol. 27. — P. 293—328.

28. *Hazrat R.*, *Vavilov N.* Bak's work on the K-theory of rings // J. K-Theory. — 2009. — Vol. 4, no. 1. — P. 1—65.

29. *Jacqmin P.-A.*, *Janelidze Z.* On stability of exactness properties under the pro-completion. — 2020. — Preprint, arXiv:2002.02204.

30. *Kashiwara M.*, *Schapira P.* Categories and sheaves. — Springer-Verlag, 2006.

31. *Knus M.-A.* Quadratic and hermitian forms over rings. — Springer-Verlag, 1991.

32. *Knus M.-A.*, *Merkurjev A.*, *Rost M., Tingol J.-P.* The book of involutions. — AMS Col. Publ., 1998.

33. *Lavrenov A.* Another presentation for symplectic Steinberg groups // J. Pure Appl. Algebra. — 2015. — Vol. 219, no. 9. — P. 3755—3780.

34. *Lavrenov A.* On odd unitary Steinberg group. — 2013. — Preprint, arXiv:1303.6318.

35. *Lavrenov A.*, *Sinchuk S.* A Horrocks-type theorem for even orthogonal K_2 // Doc. Math. — 2020. — Vol. 25. — P. 767—809.

36. *Lavrenov A.*, *Sinchuk S.* On centrality of even orthogonal K_2 // J. Pure Appl. Algebra. — 2017. — Vol. 221, no. 5. — P. 1134—1145.

37. *Manzyuk O.* Closed categories vs. closed multicategories // Theory and applications of categories. — 2012. — Vol. 26, no. 5. — P. 132—175.

38. *Mardešić S.*, *Segal J.* Shape theory: the inverse system approach. — North-Holland Publishing Company, 1982.

39. *Milnor J.* Introduction to algebraic K-theory. — Princeton University Press, 1971.

40. *Preusser R.* Sandwich classification for $\mathrm{O}_{2n+1}(R)$ and $\mathrm{U}_{2n+1}(R, \Delta)$ revisited // J. Group Theory. — 2018. — Vol. 21, no. 4.

41. *Preusser R.* Structure of hyperbolic unitary groups II: classification of E-normal subgroups // Algebra Colloq. — 2017. — Vol. 24, no. 2. — P. 195—232.

42. *Schlichting M.* Higher K-theory of forms I. From rings to exact categories // J. Inst. Math. Jussieu. — 2021. — Vol. 20, no. 4. — P. 1205—1273.

43. *Shulman M.* Categorical logic from a categorical point of view. — 2016. — Lecture notes.

44. *Sinchuk S.* On centrality of K_2 for Chevalley groups of type E_ℓ // J. Pure Appl. Algebra. — 2016. — Vol. 220, no. 2. — P. 857—875.

45. *Stavrova A.* On the congruence kernel of isotropic groups over rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 2020. — Vol. 373, no. 7. — P. 4585—4626.

46. *Stavrova A.*, *Stepanov A.* Normal structure of isotropic reductive groups over rings. — 2018. — Preprint, arXiv:1801.08748.

47. *Stein M. R.* Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings // Amer. J. Math. — 1971. — Vol. 93, no. 4. — P. 965—1004.

48. *Stein M. R.* Relativizing functors on rings and algebraic K-theory // J. Algebra. — 1971. — Vol. 19. — P. 140—152.

49. *Taddei G.* Normalité des groupes élémentaires dans les groupes de Chevalley sur un anneau // Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part II (Boulder, Colo., 1983). — 1986. — P. 693—710.

50. *Tang G.* Hermitian groups and K-theory // K-theory. — 1998. — Vol. 13, no. 3. — P. 209—267.

51. *Tits J.* Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algébres de Clifford // Invent. Math. — 1968. — Vol. 5. — P. 19—41.

52. *van der Kallen W.* Another presentation for Steinberg groups // Indag. Math. — 1977. — Vol. 80, no. 4. — P. 304—312.

53. *van der Kallen W.*, *Stein M.* On the Schur multipliers of Steinberg and Chevalley groups over commutative rings // Math. Z. — 1977. — Vol. 155, no. 1. — P. 83—94.

54. *Voronetsky E.* Actions of pro-groups and pro-rings. — 2022. — Preprint, arXiv:2205.13336.

55. *Voronetsky E.* Centrality of K_2-functors revisited // J. Pure Appl. Alg. — 2020. — Vol. 225, no. 4. — published electronically.

56. *Voronetsky E.* Centrality of odd unitary K_2-functor. — 2020. — Preprint, arXiv:2005.02926.

57. *Voronetsky E.* Injective stability for odd unitary K_1 // J. Group Theory. — 2020. — Vol. 23, no. 5.

58. *Wall C. T. C.* On the axiomatic foundation of the theory of Hermitian forms // Proc. Cambridge. Phil. Soc. — 1970. — Vol. 67. — P. 243—250.

59. *Weil A.* Algebras with involutions and the classical groups // J. Indian Math. Soc. — 1960. — Vol. 24, no. 3. — P. 589—623.

60. *Wendt M.* On homotopy invariance for homology of rank two groups // J. Pure Appl. Alg. — 2012. — Vol. 216, no. 10. — P. 2291—2301.

61. *Yu W.* Injective stability for odd-dimensional unitary K_1 // J. Group Theory. — 2019. — Vol. 23, no. 2.

62. *Yu W.*, *Tang G.* Nilpotency for odd unitary K_1-functor // Comm. Alg. — 2016. — Vol. 44, no. 8. — P. 3422—3453.

St Petersburg University

Manuscript

Egor Voronetsky

Lower K-theory of odd unitary groups

1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory, and discrete mathematics

Dissertation of the Candidate of Science in Physics and Mathematics
Translation from Russian

Scientific advisor:
Doctor of Sciences in Physics and Mathematics
Professor
Nikolai Vavilov

Saint Petersburg — 2022

Contents

Introduction

The object of research are odd unitary groups, classical isotropic reductive groups, and the corresponding Steinberg groups, **the subject of research** are their structure and properties. **The purpose of research** is to prove the centrality of the odd unitary K_2-functor and the K_2-functors of classical isotropic reductive groups.

Relevance of the topic. Unitary groups are a generalization of classical matrix groups, i.e. general linear groups, symplectic groups, and orthogonal groups, to arbitrary unital associative rings. There are various definitions of such groups, see e.g. [1; 13; 18—20; 27; 28; 49; 58; 59]. In [2] A. Bak defined a unitary group as the stabilizer of two classical forms on a module, a hermitian and a quadratic ones, where the quadratic form takes values in a factor-group of the ring. This approach was further generalized by V. Petrov in [37], where he defined odd unitary groups using quadratic forms with values in arbitrary abelian group.

There is another generalization of classical groups given by the theory of reductive group schemes [16; 17]. If G is any of classical reductive group schemes, then its twisted forms in the fppf topology often may be constructed as unitary group schemes [28], at least over a field of characteristic different from 2.

State of the art. Many results of lower algebraic K-theory were generalized for unitary groups [8; 9; 21; 24; 35; 48]. For odd unitary groups it is known that under the natural assumptions

- the elementary subgroups are normal [36; 37; 47],
- the standard classification of normal subgroups holds [6; 38; 39; 44],
- the stabilization holds for the K_1-functor [5; 7; 37; 56; 61],
- the unstable Steinberg group is centrally closed [30; 45; 52],
- the unstable K_1-functor is an extension of an abelian group by a nilpotent one [3; 4; 23; 62].

Higher unitary K-theory is considered in the works of M. Schlichting, see e.g. [40].

It is also known that the unstable K_2-functor is central (i.e. the unstable Steinberg group is a central extension of the elementary subgroup) for

- general linear groups over commutative rings by W. van der Kallen [51];
- general linear groups over almost commutative rings by M. Tulenbaev [50];
- Chevalley groups of types C, D, E by the works [29; 32; 42] of S. Sinchuk and A. Lavrenov;

– isotropic orthogonal groups over fields by S. Böge [10];

– isotropic reductive groups over local rings by A. Stavrova [43].

The proofs for non-local rings use calculations with relative Steinberg groups or an "another presentation" of the Steinberg group, they also rely on the matrix structure of the group and cannot be generalized to isotropic reductive groups. Actually, in the linear case it is known that the Steinberg group is a crossed module over the general linear group, this implies both the normality of the elementary subgroup and the centrality of the K_2-functor.

Methods. In the work we use a new localization technique based on pro-groups ("method of Steinberg pro-groups"); calculations in Steinberg groups using relative roots; the Gauss decomposition of unitary groups over semilocal rings. Moreover, we use methods and results from the theory of unitary groups, category theory (multicategories, semi-abelian categories, and pro-completion), and the theory of reductive group schemes.

Approbation of the work. Methods and main results of this work were presented on the seminar "Algebraic groups", SPbU, Saint Petersburg, 2021.

The results of the work are new, equipped with detailed proofs, and are published in refereeing scientific journals [54—57] (3 published papers, 1 preprint), that certifies their **reliability**.

The work is of **theoretical nature**, its results may be applied in the theory of linear algebraic groups, when holding educational and scientific seminars.

The dissertation consints of three chapters and the conclusion. In the first chapter we give a new construction of unitary groups generalizing V. Petrov's definition. It is based on new algebraic objects, odd form rings, forming a variety of two-sort algebras. The category of odd form rings turns out to be algebraically coherent semi-abelian in the sense of [11; 14], so in this generality it is easy to use M. Stein's relativization [46] in terms of internal crossed modules [15].

The second chapter contains a construction of odd form algebras by classical reductive group schemes. To use the faithfully flat descent we also introduce an additional structure of odd form algebras ("augmentation") describing root elements of the long root type.

In the third chapter we prove the main result: under natural assumptions on an odd form ring (R, Δ) the odd unitary Steinberg group $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ is a crossed module over the unitary group $\mathrm{U}(R, \Delta)$. In order to prove this we study odd form pro-rings obtained by the "colocalization" from (R, Δ) and their Steinberg pro-groups. It is possible to construct actions of unitary groups of the localizations of (R, Δ) on such pro-groups using the Gauss decomposition and a calculation using relative roots ("root elimintation"). Finally, these actions may be continued in a unique way to the action of $\mathrm{U}(R, \Delta)$ on $\mathrm{StU}(R, \Delta)$.

Combining this with the results of the second chapter, we see that all classical simply connected sufficiently isotropic reductive group schemes have central K_2-functors. Also, it is easy to apply the main result to isotropic unitary groups of V. Petrov such as degenerate orthogonal groups. Our result does not cover the reductive groups of isotropic rank less than 3 and there are counterexamples for Chevalley groups of rank 2 [60].

In the conclusion an overview of main results that are **presented to defense** is given, and some possible directions of further possible research are described.

Chapter 1. Odd form rings

1.1 Hermitian and quadratic forms

We use the notation $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ and ${}^{x}y = xyx^{-1}$ for the group operations. If Δ_i are subsets of a group with the group operation $\dotplus$ for i from a linearly ordered set, all of them contain $\dot{0}$, and every $g \in \dot{\sum}_{i \in I} \Delta_i$ has a unique decomposition $g = \dot{\sum}_{i \in I} g_i$ with $g_i \in \Delta_i$, then we also denote the sum of Δ_i as $\dot{\bigoplus}_{i \in I} \Delta_i$. The center of a group G is denoted by $\mathrm{C}(G)$ and similarly for rings. Все кольца и алгебры предполагаются ассоциативными, но не обязательно с единицами. All rings and algebras are assumed to be associative, but not necessarily unital. The multiplicative semigroup of a ring R is denoted by $R^\bullet$. An element $x \in R$ of a non-unital ring is called *quasi-invertible* if it has a quasi-inverse $x^{\circ -1}$, i.e. the inverse with respect to the monoidal operation $x \circ y = xy + x + y$. Quasi-invertible elements form the group R° with respect to $\circ$.

Recall the construction of odd unitary groups from [37]. An anti-automorphism $\overline{(-)}$ of a unital ring R is called λ-*involution* for $\lambda \in R^*$ if $\bar{\bar{a}} = \lambda a \lambda^{-1}$ and $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$.

Now let M be a right R-module, where R is a ring with a λ-involution. A map $B \colon M \times M \to R$ is called a *hermitian form* if

Now let M_R be a module over a ring R with a λ-involution. A biadditive map $B \colon M \times M \to R$ is called a *hermitian form* if $B(mr, m'r') = \bar{r}\, B(m, m')r'$ and $B(m', m) = \overline{B(m, m')}\, \lambda$. The *Heisenberg group* of B is $\mathrm{Heis}(B) = M \times R$ with the group operation $(m, r) \dotplus (m', r') = (m + m', r - B(m, m') + r')$, the monoid $R^\bullet$ acts on this group by $(m, r) \cdot x = (mx, \bar{x}\, rx)$. An *odd form parameter* is an $R^\bullet$-invariant subgroup $\mathcal{L} \leq \mathrm{Heis}(B)$ such that

$$\{(0, r - \bar{r}\lambda)\} = \mathcal{L}_{\min} \leq \mathcal{L} \leq \mathcal{L}_{\max} = \{(m, r) \mid r + B(m, m) + \bar{r}\lambda = 0\}.$$

For a fixed $\mathcal{L}$ the map $q \colon M \to \mathrm{Heis}(B)/\mathcal{L}, m \mapsto (m, 0) \dotplus \mathcal{L}$ is called the *quadratic form*. The *unitary group* is

$$\mathrm{U}(M, B, \mathcal{L}) = \{g \in \mathrm{Aut}(M_R) \mid B(gm, gm') = B(m, m'), q(gm) = q(m)\}.$$

We are interested in a special case of the above definitions. Let us say that (R, Δ) is a *special unital odd form ring* if R is a unital ring with a 1-involution and we choose the hermitian form $B_R(x, y) = \bar{x}\, y$ and an odd form parameter $\Delta \leq \mathrm{Heis}(B_R) = R \times R$ on R_R. Then $\mathrm{U}(R, B_R, \Delta)$ may be identified with

$$\{g \in R^* \mid g^{-1} = \bar{g}, (g - 1, \bar{g} - 1) \in \Delta\}.$$

In section 1.4 we define abstract odd form rings as algebras from a two-sort variety.

For any unital ring R we may construct a special unital odd form ring (T, Ξ), where $T = R^{\mathrm{op}} \times R$, $\overline{(x^{\mathrm{op}}, y)} = (y^{\mathrm{op}}, x)$, and

$$\Xi = \Xi_{\max} = \{(x^{\mathrm{op}}, y; z^{\mathrm{op}}, w) \mid xy + z + w = 0\}.$$

Then

$$R^* \to \mathrm{U}(T, B_T, \Xi_{\max}), g \mapsto ((g^{-1})^{\mathrm{op}}, g)$$

is a group isomorphism. If R has a complete family of orthogonal idempotents $f_1, \ldots, f_\ell$, then let $e_i = (0, f_i) \in T$ for $i > 0$ and $e_i = (f_{-i}^{\mathrm{op}}, 0) \in T$ for $i < 0$. They form a complete family of orthogonal idempotents in T, $\overline{e_i} = e_{-i}$, and the elements $q_i = (e_i, 0)$ lie in Θ. If f_i are full, that is $R = Rf_iR$, then $e_i + e_{-i}$ are full in T.

By a module M_R with a hermitian form B and an odd form parameter $\mathcal{L}$ we may also construct a special unital odd form ring (S, Θ). Let us construct the special unital odd form ring (T, Ξ) by $\mathrm{End}(M_R)$. The subring

$$S = \{(x^{\mathrm{op}}, y) \in T \mid B(xm, m') = B(m, ym')\}$$

has an odd form parameter

$$\Theta = \{(x^{\mathrm{op}}, y; z^{\mathrm{op}}, w) \in \Theta_{\max} = \Xi_{\max} \cap (S \times S) \mid q(ym) + (0, B(m, wm)) = \mathcal{L}\}$$

and it is easy to see that the unitary groups $\mathrm{U}(M, B, \mathcal{L})$ and $\mathrm{U}(S, B_S, \Theta)$ are isomorphic. Now suppose that there are elements $v_i \in M$ for $-\ell \leq i \leq \ell$, $i \neq 0$ such that $B(v_i, v_j) = 0$ for $i \neq -j$, $q(v_i) = \mathcal{L}$ for all i, and $B(v_{-i}, v_i) = 1$ for $i > 0$. Then

$$e_{ij} = ((v_{-j}\lambda^{-1}B(v_i, -))^{\mathrm{op}}, v_iB(v_{-j}, -)) \in S \text{ for } j > 0,$$
$$e_{ij} = ((v_{-j}\lambda B(v_i, -))^{\mathrm{op}}, v_i\lambda^{-1}B(v_{-j}, -)) \in S \text{ for } j < 0,$$

$e_{ij}\, e_{kl} = 0$ for $j \neq k$, $e_{ij}e_{jk} = e_{ik}$, $\overline{e_{ij}} = e_{-j,-i}$ for $ij > 0$, and $q_i = (e_{ii}, 0) \in \Theta$.

1.2 Categories

A *cartesian multicategory* $\mathcal{C}$ consists of

1. the class of objects $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
2. the sets of morphisms $\mathcal{C}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ for $n \geq 0$ and $X_i, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
3. the identity morphisms $\mathrm{id}_X \in \mathcal{C}(X; X)$ for $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
4. the composition maps

$$\mathcal{C}(Y_1, \ldots, Y_n; Z) \times \mathcal{C}(X_1, \ldots, X_m; Y_i) \\ \to \mathcal{C}(\ldots, Y_{i-1}, X_1, \ldots, X_m, Y_{i+1}, \ldots; Z)$$

   for $n \geq 1$, $m \geq 0$, $X_i, Y_j, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
5. the maps

$$\mathcal{C}(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(m)}; Y) \to \mathcal{C}(X_1, \ldots, X_n; Y), f \mapsto f\sigma^*$$

   for $m, n \geq 0$, $X_i, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\sigma\colon \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$;

and these maps satisfy natural conditions [41]. *Symmetric multicategories* are defined in a similar way if we take only bijective σ.

A symmetric multicategory $\mathcal{C}$ is *closed* [33] if for any $n \geq 0$ and objects $X_1, \ldots, X_n, Y \in \mathcal{C}$ there is an object H and $\mathrm{ev} \in \mathcal{C}(H, X_1, \ldots, X_n; Y)$ such that for all $m \geq 0$ and $Z_1, \ldots, Z_m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ the following map is a bijection:

$$\mathrm{ev}_*\colon \mathcal{C}(Z_1, \ldots, Z_m; H) \to \mathcal{C}(Z_1, \ldots, Z_m, X_1, \ldots, X_n; Y).$$

We need the notions of regular and semi-abelian categories [11]. A category $\mathcal{C}$ is called *pointed* if there is a zero object 0, i.e. it is simultaneously initial and terminal. A morphism f in a finitely complete category $\mathcal{C}$ is called a *regular epimorphism* if it is a coequalizer of some kernel pair, i.e. of a fiber product of some morphism with itself. A finitely complete category $\mathcal{C}$ is called *regular* if all kernel pairs of morphisms have coequalizers and regular epimorphisms are preserved under pullbacks. In a regular category every $f\colon X \to Y$ admits an *image decomposition* $X \to \mathrm{Im}(f) \to Y$, where $X \to \mathrm{Im}(f)$ is a regular epimorphism and $\mathrm{Im}(f) \to Y$ is a monomorphism, such a decomposition is functorial.

A *split extension* in a pointed regular category $\mathcal{C}$ is a diagram $A' \overset{i}{\rightarrowtail} A \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} A''$, where $p \circ s = \mathrm{id}_{A''}$ and $i = \ker(p)$. Such a category $\mathcal{C}$ is called *homological* if every morphism between split extensions identical on the end terms is an isomorphism. Finally, $\mathcal{C}$ is called *semi-abelian* if it is homological, finitely cocomplete, and all categorical equivalence relations are kernel pairs.

In arbitrary homological category $\mathcal{C}$ an object G *acts* on an object X if there is a chosen isomorphism class of split extensions $X \to Y \leftrightarrows G$. The free object with an action of G containing X coincides with $\mathrm{Ker}(G \amalg X \to G)$ if $\mathcal{C}$ is semi-abelian [12]. A semi-abelian category $\mathcal{C}$ is called *algebraically coherent* [14] if for every object X with an action of G the least upper bound of any two G-invariant subobjects is also G-invariant. The categories **Grp** of groups and **Rng** of non-unital rings are algebraically coherent semi-abelian.

A *crossed module* [15] in an algebraically coherent semi-abelian category $\mathcal{C}$ consists of a morphism $\delta\colon X \to G$ and an action of G on X such that δ is G-equivariant and the standard action of X on itself factors through the action of G. Abstract crossed modules in **Grp** coincide with classical crossed modules, i.e. the group homomorphisms $\delta\colon X \to G$ with an action of G on X such that $\delta({}^{g}x) = {}^{g}\delta(x)$ and ${}^{x}x' = {}^{\delta(x)}x'$ for $g \in G,\ x, x' \in X$.

1.3 Quadratic maps

We say that a group G is *filtered* 2*-nilpotent* if it has a fixed nilpotent filtration $\dot{0} \leq G_0 \leq G$. In such G the commutator may be considered as a biadditive map $G/G_0 \times G/G_0 \to G_0$. All factor groups G/N are filtered 2-nilpotent with the filtrations $0 \leq (G_0 \dotplus N)/N \leq G/N$.

We need a construction of filtered 2-nilpotent groups G such that G/G_0 decomposes into a direct sum. Take abelian groups G_0 and G_i for $i \in I$, where I is linearly ordered, biadditive maps $[-,=]_{ij}\colon G_i \times G_j \to G_0$ for $i < j$, and normalized 2-cocycles $c_i\colon G_i \times G_i \to G_0$ (that is $c(x, y) + c(x + y, z) = c(x, y + z) + c(y, z)$ and $c(x, 0) = c(0, x) = 0$). Then $G = G_0 \dot{\oplus} \dot{\bigoplus}_{i\in I} G_i$ is a filtered 2-nilpotent group with the filtration G_0 such that $x \dotplus y = c_i(x, y) \dot{\oplus} (x + y)$ for $x, y \in G_i$ and $[x, y]^{\cdot} = [x, y]_{ij}$ for $x \in G_i,\ y \in G_j,\ i < j$.

A map $q\colon G \to H$ between filtered 2-nilpotent groups is called *quadratic* [22] if $q(G_0) \subseteq H_0$ and $q(x \dotplus y) = q(x) \dotplus q(x \mid y) \dotplus q(y)$, where the *cross-effect* $q(- \mid =)\colon G/G_0 \times G/G_0 \to H_0$ is biadditive. Such q induces homomorphisms $G_0 \to H_0$ and $G/G_0 \to H/H_0$ of abelian groups. Also, $q(\dot{-}x) = q(x \mid x) \dot{-} q(x)$, $q(\dot{n}x) = \dot{n}q(x) \dotplus \binom{n}{2} q(x \mid x)$ for $n \in \mathbb{Z}$, $q(\dot{\sum}_i x_i) = \dot{\sum}_i q(x_i) \dotplus \dot{\sum}_{i<j} q(x_i \mid x_j)$, $q([x, y]^{\cdot}) = [q(x), q(y)]^{\cdot} \dotplus q(x \mid y) \dot{-} q(y \mid x)$.

If $q, q' \colon G \to H$ are quadratic, then their pointwise sum $q \dot{+} q'$ is quadratic with

$$(q \dot{+} q')(x \mid y) = q(x \mid y) \dot{+} [q(y), q'(x)]^{\cdot} \dot{+} q'(x \mid y),$$

and $\dot{-} q$ is quadratic with $(\dot{-} q)(x \mid y) = [q(y), q(x)]^{\cdot} \dot{-} q(x \mid y)$. The pointwise commutator $[q, q']^{\cdot} \colon G \to H_0$ is quadratic with

$$[q, q']^{\cdot}(x \mid y) = [q(x), q'(y)]^{\cdot} \dot{+} [q(y), q'(x)]^{\cdot}.$$

The composition of quadratic maps $q \colon G \to H$ and $q' \colon H \to F$ is quadratic with

$$(q' \circ q)(x \mid y) = q'(q(x \mid y)) \dot{+} q'(q(x) \mid q(y)).$$

Take filtered 2-nilpotent groups $G_1, \ldots, G_n, H$. A map $q \colon G_1 \times \ldots \times G_n \to H$ is called *polyquadratic* if it is quadratic on each argument. Let us denote the induced maps and the cross-effects by

$$\begin{aligned} q_i &\colon G_1 \times \ldots \times G_{i-1} \times G_{i0} \times G_{i+1} \times \ldots \times G_n \to H_0, \\ \overline{q} &\colon G_1/G_{10} \times \ldots \times G_n/G_{n0} \to H/H_0, \\ q^i &\colon G_1 \times \ldots \times G_{i-1} \times G_i/G_{i0} \times G_i/G_{i0} \times G_{i+1} \times \ldots \times G_n \to H_0. \end{aligned}$$

Clearly, q_i and q^i are quadratic on the remaining $n-1$ arguments. It is easy to check that these maps satisfy

$$q_i|_{\ldots \times G_{i0} \times \ldots \times G_{j0} \times \ldots} = q_j|_{\ldots \times G_{i0} \times \ldots \times G_{j0} \times \ldots} \text{ for } i < j; \tag{Q0}$$

$$q_i(\ldots, x, \ldots, y \mid z, \ldots) = q^j(\ldots, x, \ldots, y, z, \ldots) \text{ при } i \neq j; \tag{Q1}$$

$$\begin{aligned} q^i(\ldots, x, y, \ldots, z \mid w, \ldots) &= q^j(\ldots, x \mid y, \ldots, z, w, \ldots) \\ &\dot{+} [\overline{q}(\ldots, y, \ldots, z, \ldots), \overline{q}(\ldots, x, \ldots, w, \ldots)] \text{ for } i < j; \end{aligned} \tag{Q2}$$

$$\begin{aligned} q_i(\ldots, [x, y]^{\cdot}, \ldots) &= [\overline{q}(\ldots, x, \ldots), \overline{q}(\ldots, y, \ldots)]^{\cdot} \\ &\dot{+} q^i(\ldots, x, y, \ldots) \dot{-} q^i(\ldots, y, x, \ldots). \end{aligned} \tag{Q3}$$

We denote the group of polyquadratic maps $G_1 \times \ldots \times G_n \to H$ by $\mathbf{Quad}(G_1, \ldots, G_n; H)$. Is has the canonical nilpotent filtration by $\mathbf{Quad}(G_1, \ldots, G_n; H_0)$, where H_0 is considered with the nilpotent filtrarion $0 \leq H_0 \leq H_0$. Filtered 2-nilpotent groups and polyquadratic maps form a closed symmetric multicategory **Quad**.

There are two fully faithful functors from **Ab** to **Quad** if we consider any abelian group with the nilpotent filtration $0 \leq 0 \leq A$ or $0 \leq A \leq A$. With respect to any functor $\mathbf{Quad}(A_1, \ldots, A_n; B)$ is the ordinary group of polyadditive maps for abelian groups A_i and B.

Lemma 1. *Two polyquadratic maps $q, q' \colon G_1 \times \ldots \times G_n \to H$ are equal if and only if all their induced maps and cross-effects coincide and*

$$q(x_1, \ldots, x_n) = q'(x_1, \ldots, x_n),$$

where x_i run over subsets of G_i generating G_i/G_{i0}.

Lemma 2. *Let $q \colon G_1 \times \ldots \times G_n \to H$ be a polyquadratic map and $F \trianglelefteq G_1$ be the normal subgroup generated by elements $a_i \dot{-} b_i$. Then q induces a polyquadratic map $G_1/F \times G_2 \times \ldots \times G_n \to H$ if the cross-effects of q factor through F and $q(a_i, x_2, \ldots, x_n) = q(b_i, x_2, \ldots, x_n)$.*

Lemma 3. *Consider filtered 2-nilpotent groups $G_1, \ldots, G_n$, H and decompositions $G_i = G_{i0} \dot{\oplus} \dot{\bigoplus}_{j \in J_i} F_{ij}$ such that $G_i/G_{i0} = \bigoplus_{j \in i} F_{ij}$ are direct sums of abelian groups. Suppose that we have the maps*

$$\begin{aligned}
q_i &\colon G_1 \times \ldots \times G_{i0} \times \ldots \times G_n \to H_0,\\
\overline{q} &\colon G_1/G_{10} \times \ldots \times G_n/G_{n0} \to H/H_0,\\
q^i &\colon G_1 \times \ldots \times G_i/G_{i0} \times G_i/G_{i0} \times \ldots \times G_n \to H_0,\\
q_{j_1 \ldots j_n} &\colon F_{1 j_1} \times \ldots \times F_{n j_n} \to H
\end{aligned}$$

such that q_i, $\overline{q}$, q^i are additive or quadratic on the corresponding arguments; they satisfy (Q0)–(Q3);

$$\begin{aligned}
q_{j_1 \ldots j_n}(g_1, \ldots, g_n) &\equiv \overline{q}(g_1, \ldots, g_n) \pmod{H_0};\\
q_{j_1 \ldots j_n}(\ldots, g_i \dot{+} g_i', \ldots) &= q_{j_1 \ldots j_n}(\ldots, g_i, \ldots) \dot{+} q^i(\ldots, g_i, g_i', \ldots)\\
&\quad \dot{-} q_i(\ldots, c_{j_i}(g_i, g_i'), \ldots) \dot{+} q_{j_1 \ldots j_n}(\ldots, g_i', \ldots)
\end{aligned}$$

for the corresponding normalized 2-cocycles c_{j_i}. Then there is a polyquadratic map $q \in \mathbf{Quad}(G_1, \ldots, G_n; F)$ with the cross-effects q^i, the induced maps q_i and $\overline{q}$, and the restrictions $q_{j_1 \ldots j_n}$.

Proof. In the case $n = 1$ we define q by the formula

$$q\big(f_0 \dot{\oplus} \dot{\bigoplus_{j \in J_1}} f_j\big) = q_1(f_0) \dot{+} \dot{\sum_{j \in J_1}} q_j(f_j) \dot{+} \dot{\sum_{\substack{j, j' \in J_1\\ j < j'}}} q^1(f_j, f_j')$$

using (Q3). In the general case we construct $F_{1 j_1} \to \mathbf{Quad}(G_2, \ldots, G_n; H)$ by induction. These maps satisfy the conditions from the statement for $n = 1$ by (Q1)–(Q2), so the required q exists. It satisfies the requirements by (Q0)–(Q2). $\square$

If $X_1 \leq G_1$, $\ldots$, $X_n \leq G_n$ are subgroups and $q \in \mathbf{Quad}(G_1, \ldots, G_n; H)$, then we denote by $q(X_1, \ldots, X_n)$ the subgroup of H generated by the elements $q(x_1, \ldots, x_n)$ for $x_i \in X_i$, not the image of $X_1 \times \ldots \times X_n$. This is the standard convention for polyadditive maps between abelian groups.

1.4 Odd form rings

We give a slightly different definition of odd form rings in comparison with [56] in order for the category of these objects to be semi-abelian.

An *odd form ring* is a pair (R, Δ), where R is a ring with an involution $r \mapsto \bar{r}$, Δ is a group with the group operation $\dotplus$, and there are fixed maps $\phi\colon R \to \Delta$, $\pi\colon \Delta \to R$, $\rho\colon \Delta \to R$, $(-) \cdot (=)\colon \Delta \times R \to \Delta$ such that

(R1) $\phi(a + b) = \phi(a) \dotplus \phi(b)$, $\phi(a + \bar{a}) = \phi(\bar{a}a) = \dot{0}$;

(R2) $\pi(u \dotplus v) = \pi(u) + \pi(v)$, $\pi(\phi(a)) = 0$;

(R3) $v \dotplus u = u \dotplus \phi(\overline{\pi(u)}\pi(v)) \dotplus v$;

(R4) $\pi(u \cdot a) = \pi(u)a$;

(R5) $\rho(u \dotplus v) = \rho(u) - \overline{\pi(u)}\pi(v) + \rho(v)$, $\rho(\phi(a)) = a - \bar{a}$;

(R6) $\rho(u) + \overline{\pi(u)}\pi(u) + \overline{\rho(u)} = 0$;

(R7) $(u \dotplus v) \cdot a = u \cdot a \dotplus v \cdot a$, $\phi(b) \cdot a = \phi(\bar{a}ba)$;

(R8) $u \cdot (a + b) = u \cdot a \dotplus \phi(\,\overline{b}\,\rho(u)a) \dotplus u \cdot b$;

(R9) $\rho(u \cdot a) = \bar{a}\rho(u)a$;

(R10) $(u \cdot a) \cdot b = u \cdot ab$.

The axioms imply that $0 \leq \phi(R) \leq \Delta$ is a nilpotent filtration. The map ρ is quadratic if we consider R with the filtration $0 \leq R \leq R$, and the map $(-) \cdot (=)$ is biquadratic if we consider R with the filtration $0 \leq 0 \leq R$. There is also a useful corollary $\rho(\dot{-}u) = \overline{\rho(u)}$ of (R5) and (R6).

Now suppose that we have an involution ring R and a filtered 2-nilpotent group Δ with the maps ϕ and π satisfying (R1), (R2), (R3) and with a structure of a right non-unital R-module on $\Delta/\phi(R)$ satisfying (R4). In order to construct a map ρ satisfying (R5) we usually may apply lemma 3, since the induced homomorphisms and the cross-effect are already well-defined and satisfy (Q0)–(Q3). The axiom (R6) may be checked on the generators by lemma 1. Similarly, the induced maps and the cross-effects for the action $(-) \cdot (=)$ satisfying (R7) and (R8) are already well-defined and satisfy (Q0)–(Q3). The axioms (R9) and (R10) also may be checked on the generators.

An odd form ring (R, Δ) is called *special* if $(\pi, \rho) \colon \Delta \to R \times R$ is injective. The set $R \times R$ admits the group operation

$$(a, b) \dotplus (c, d) = (a + c, b - \bar{a}c + d)$$

and the action of $R^\bullet$ given by $(a, b) \cdot c = (ac, \bar{c}bc)$. Up to the identification of Δ with its image in $R \times R$ special odd form rings coincide with the pairs (R, Δ), where R is an involution ring and $\Delta \leq R \times R$ is an $R^\bullet$-invariant subgroup such that

$$\{(0, a - \bar{a})\} = \Delta_{\min} \leq \Delta \leq \Delta_{\max} = \{(a, b) \mid b + \bar{a}a + \overline{b} = 0\}.$$

It is easy to check that the category **OFR** of odd form rings and their homomorphisms is semi-abelian. Monomorphisms in this category coincide with injective maps, regular epimorphisms coincide with surjective maps, and isomorphisms coincide with bijections.

We say that an odd form ring (R, Δ) *acts* on an odd form ring (S, Θ) if there are multiplication maps $R \times S \to S$, $S \times R \to S$, $\Theta \times R \to \Theta$, $\Delta \times S \to \Theta$ satisfying the axioms

(A1) $(a + a')b = ab + a'b$, $a(b + b') = ab + ab'$;

(A2) $(aa')b = a(a'b)$, $(ab)b' = a(bb')$, $(ab)a' = a(ba')$, $(ba)b' = b(ab')$;

(A3) $\overline{ab} = \overline{b}\,\bar{a}$;

(A4) $(u \dotplus u') \cdot b = u \cdot b \dotplus u' \cdot b$, $u \cdot (b + b') = u \cdot b \dotplus \phi(\overline{b'}\rho(u)b) \dotplus u \cdot b'$;

(A5) $(v \dotplus v') \cdot a = v \cdot a \dotplus v' \cdot a$, $v \cdot (a + a') = v \cdot a \dotplus \phi(\overline{a'}\rho(v)a) \dotplus v \cdot a'$;

(A6) $\phi(a) \cdot b = \phi(\overline{b}\,ab)$, $\phi(b) \cdot a = \phi(\bar{a}ba)$;

(A7) $\pi(u \cdot b) = \pi(u)b$, $\pi(v \cdot a) = \pi(v)a$;

(A8) $\rho(u \cdot b) = \overline{b}\,\rho(u)b$, $\rho(v \cdot a) = \bar{a}\rho(v)a$;

(A9) $(u \cdot a) \cdot b = u \cdot ab$, $(u \cdot b) \cdot a = u \cdot ba$, $(u \cdot b) \cdot b' = u \cdot bb'$;

(A10) $(v \cdot a) \cdot b = v \cdot ab$, $(v \cdot b) \cdot a = v \cdot ba$, $(v \cdot a) \cdot a' = v \cdot aa'$

for $a, a' \in R$; $b, b' \in S$; $u, u' \in \Delta$; $v, v' \in \Theta$. The next lemma shows that this definition describes abstract actions in **OFR** in the sense of semi-abelian categories.

Lemma 4. *For any odd form rings (R, Δ) and (S, Θ) there is a bijection between isomorphism classes of split extensions $(S, \Theta) \to (T, \Xi) \leftrightarrows (R, \Delta)$ and actions of (R, Δ) on (S, Θ), a split extension corresponds to the restrictions of its operations on (R, Δ) and (S, Θ).*

Proof. Any split extension (T, Ξ) is of type $T = S \rtimes R$, $\Xi = \Theta \rtimes \Delta$, so its isomorphism class gives the multiplication maps satisfying the axioms. The group Δ acts on Θ by ${}^{u}v = v \dotplus \phi(\overline{\pi(v)}\pi(u))$ and it is easy to see using lemma 1 that these operations uniquely determine the isomorphism class.

Conversely, suppose that we have multiplication maps. The axioms (A1) and (A2) imply that R acts on S in the semi-abelian category of rings, so we may construct $T = S \rtimes R$ with the obvious involution using (A3). The group Δ acts on Θ by the above formula, hence $\Xi = \Theta \rtimes \Delta$ and the maps $\phi\colon T \to \Xi$, $\pi\colon \Xi \to T$ are well-defined and satisfy the axioms (R1), (R2), (R3). The polyquadratic maps $\rho\colon \Xi \to T$ and $(-) \cdot (=)\colon \Xi \times T \to \Xi$ may be constructed using lemma 3, the remaining axioms follow from lemma 1. □

Theorem 1. *The category* **OFR** *is algebraically coherent.*

Proof. Suppose that (T, Ξ) acts on (R, Δ) and (S, Θ), (S', Θ') are (T, Ξ)-invariant odd form subalgebras of (R, Δ). Their least upper bound (S'', Θ'') is

$$S'' = S + S' + SS' + S'S + SS'S + S'SS' + \ldots,$$
$$\Theta'' = \phi(S'') \dotplus \Theta \dotplus \Theta' \dotplus \Theta \cdot S' \dotplus \Theta' \cdot S \dotplus \Theta \cdot S'S \dotplus \Theta' \cdot SS' \dotplus \ldots,$$

it is also (T, Ξ)-invariant. □

A *crossed module* in **OFR** is a homomorphism $\delta\colon (S, \Theta) \to (R, \Delta)$ of odd form rings, where (R, Δ) acts on (S, Θ), δ preserves the action, and the Peiffer identities hold

1. $bb' = \delta(b)b' = b\delta(b')$ for $b, b' \in S$;
2. $v \cdot b = \delta(v) \cdot b = v \cdot \delta(b)$ for $v \in \Theta$, $b \in S$.

It is easy to see that this definition describes the crossed modules in the sense of algebraically coherent semi-abelian categories.

1.5 Odd form algebras

An odd form ring (R, Δ) is called *unital* if R is unital and $u \cdot 1 = u$ for $u \in \Delta$. For example, if K is a unital commutative ring with trivial involution, then $(K, \dot{0})$ is a unital odd form ring. Any action of an odd form ring (T, Ξ) on a unital odd form ring (R, Δ) is obtained from a unique homomorphism $(T, \Xi) \to (R, \Delta)$. Special unital odd form rings coincide with the objects considered in section 1.1.

An action of a unital odd form ring (R, Δ) on an odd form ring (S, Θ) is called *unital* if $1b = b = b1$ for $b \in S$ and $v \cdot 1 = v$ for $v \in \Theta$, that is $(S \rtimes R, \Theta \rtimes \Delta)$ is unital with the identity $(0, 1) \in S \rtimes R$.

Let K be a unital commutative ring. An odd form K-algebra is an odd form ring (R, Δ) with a unital action of $(K, \dot{0})$ such that $ak = ka$ for $a \in R$, $k \in K$. In other words,

1. R is a K-algebra with K-linear involution;
2. the monoid $K^\bullet$ acts on Δ from the right by $(u, k) \mapsto u \cdot k$;
3. $u \cdot (k + k') = u \cdot k \dotplus \phi(\rho(u)kk') \dotplus u \cdot k'$;
4. $(u \cdot a) \cdot k = u \cdot ak = (u \cdot k) \cdot a$;
5. $\phi(a) \cdot k = \phi(ak^2)$, $\pi(u \cdot k) = \pi(u)k$, $\rho(u \cdot k) = \rho(u)k^2$;
6. $\phi(\bar{a}ak) = \dot{0}$.

Every odd form ring has a unique structure of an odd form $\mathbb{Z}$-algebra given by $u \cdot n = \dot{n}u \dotplus \binom{n}{2}^{\cdot} \phi(\rho(u))$, all homomorphisms of odd form rings preserve the action of $(\mathbb{Z}, \dot{0})$.

The *unitary group* of an odd form ring (R, Δ) is

$$\mathrm{U}(R, \Delta) = \{g \in \Delta \mid \pi(g) = \overline{\rho(g)}, \pi(g)\overline{\pi(g)} = \overline{\pi(g)}\pi(g)\}$$

with the group operation $gh = g \cdot \pi(h) \dotplus h \dotplus g$.

Lemma 5. *The set* $\mathrm{U}(R, \Delta)$ *is indeed a group with the identity* $\dot{0}$ *and the inverse* $g^{-1} = \dot{-}g \cdot \overline{\pi(g)} \dot{-} g$. *The map* $\alpha \colon \mathrm{U}(R, \Delta) \to (R \rtimes \mathbb{Z})^*, g \mapsto \pi(g) + 1$ *is a group homomorphism with the property* $\alpha(g)^{-1} = \overline{\alpha(g)}$. *The unitary group acts on* (R, Δ) *by automorphisms by the formulas* ${}^g a = \alpha(g)\, a\, \overline{\alpha(g)}$ *for* $a \in R$ *and* ${}^g u = (g \cdot \pi(u) \dotplus u) \cdot \overline{\alpha(g)}$ *for* $u \in \Delta$. *This action induces the conjugacy action of the unitary group on itself. If* (R, Δ) *is an odd form* K*-algebra, then this action commutes with the action of* $(K, \dot{0})$.

Since the functor $\mathrm{U}(-, =) \colon \mathbf{OFR} \to \mathbf{Grp}$ preserves finite limits, any action of (R, Δ) on (S, Θ) gives an action of $\mathrm{U}(R, \Delta)$ on (S, Θ) and $\mathrm{U}(S, \Theta)$. Also this functor preserves crossed modules, so we may apply the relativization [46] to the elementary subgroups of unitary groups and their Steinberg groups.

An odd form K-subalgebra $(I, \Gamma) \leq (R, \Delta)$ is *normal* if $(R/I, \Delta/\Gamma)$ has an induced structure of an odd form K-algebra. In other words, this is an odd form

K-subalgebra invariant under the canonical action of (R, Δ) on itself. In this case we say that (I, Γ) is an *odd form ideal* of (R, Δ). Thus an odd form ideal consists of an ideal $I = \overline{I} \trianglelefteq R$ and a subgroup $\Gamma \leq \Delta$ such that $\Gamma \cdot R \dotplus \Gamma \cdot K \subseteq \Gamma$ and

$$\Delta \cdot I \dotplus \phi(I) = \Gamma_{\min} \leq \Gamma \leq \Gamma_{\max} = \{u \in \Delta \mid \pi(u), \rho(u) \in I\}.$$

Lemma 6. *Let (R, Δ) be an odd form K-algebra, $X \subseteq R$ and $U \subseteq \Delta$ be subsets, and $(I, \Gamma) \trianglelefteq (R, \Delta)$ be the odd form K-invariant ideal generated by X and U. Then*

$$I = \sum_{a \in X \cup \overline{X} \cup \pi(U) \cup \overline{\pi(U)} \cup \rho(U)} (R \rtimes K) a (R \rtimes K),$$

$$\Gamma = \phi(I) \dotplus \Delta \cdot I \dotplus \dot{\sum_{u \in U}} u \cdot K \dotplus \dot{\sum_{u \in U}} u \cdot R.$$

Proposition 1. *Let K be a unital commutative ring, X and U be two sets of variables, and (R, Δ) be the free odd form K-algebra generated by $X \subseteq R$ and $U \subseteq \Delta$. Let also*

$$A = \{x, \overline{x}, \pi(u), \overline{\pi(u)}, \rho(u) \mid x \in X, u \in U\},$$

A^+ be the free semigroup on A (i.e. the set of non-empty finite sequences of elements of A), and $A^* = \{\varnothing\} \cup A^+$ be the free monoid on A. Then $R = \bigoplus_{w \in A^+} Kw$, $\mathrm{Ker}(\phi) = \{r \in R \mid r = \overline{r}\}$, $\Delta / \phi(R)$ is a free right K-module with the basis $u \cdot w$ for $u \in U$ and $w \in A^*$, and the odd form ring (R, Δ) is special.

Proof. Let $R' = \bigoplus_{w \in A^+} Kw$, it is a K-algebra with the K-linear involution such that $\overline{\rho(u)} = -\overline{\pi(u)}\pi(u) - \rho(u)$. It also has the basis consisting of all non-empty formal products of x, $\overline{x}$, $\pi(u)$, $\overline{\pi(u)}$, $\rho(u)$, $\overline{\rho(u)}$ not containing the subproducts $\overline{\pi(u)}\pi(u)$, such a basis is invariant under the involution. Using this basis it is easy to check that $\{r \in R' \mid r = \overline{r}\} = \sum_{r \in R'} K(r + \overline{r}) + \sum_{r \in R'} K\overline{r}r$.

Let $P = R' / \{r \in R' \mid r = \overline{r}\}$ and $\phi \colon R' \to P$ be the canonical map. Let also $\Delta' = P \dot{\oplus} \dot{\bigoplus}_{u \in U} u \cdot (R' \rtimes K)$, where P is central, $[u \cdot x, v \cdot y] = \phi(\overline{y}\, \overline{\pi(v)} \pi(u) x)$, $u \cdot x \dotplus u \cdot y = \phi(-\overline{y} \rho(u) x) \dot{\oplus} u \cdot (x + y)$. Using lemmas 1 and 3 it is possible to construct the operations on Δ' in such a way that $\pi(u \cdot x) = \pi(u) x$, $\rho(u \cdot x) = \overline{x} \rho(u) x$, $(u \cdot x) \cdot y = u \cdot xy$ for $y \in K \cup R$, and (R', Δ') is an odd form K-algebra. Clearly, it is free. ∎

It follows that every odd form K-algebra is a subfactor of a special unital odd form K-algebra.

Proposition 2. *Let (T, Ξ) be the coproduct of odd form K-algebras (R_1, Δ_1) and (R_{-1}, Δ_{-1}). Then*

$$\begin{aligned} T &= R_1 \oplus R_{-1} \oplus (R_1 \otimes_K R_{-1}) \oplus (R_{-1} \otimes_K R_1) \\ &\quad \oplus (R_1 \otimes_K R_{-1} \otimes_K R_1) \oplus (R_{-1} \otimes_K R_1 \otimes_K R_{-1}) \oplus \ldots; \\ \Xi &= \phi(R_1 \otimes_K R_{-1}) \dot{\oplus} \phi(R_1 \otimes_K R_{-1} \otimes_K R_1 \otimes_K R_{-1}) \dot{\oplus} \ldots \\ &\quad \dot{\oplus} \Delta_1 \dot{\oplus} \Delta_{-1} \dot{\oplus} (\Delta_1 \boxtimes_K R_{-1}) \dot{\oplus} (\Delta_{-1} \boxtimes_K R_1) \\ &\quad \dot{\oplus} (\Delta_1 \boxtimes_K R_{-1} \otimes_K R_1) \dot{\oplus} (\Delta_{-1} \boxtimes_K R_1 \otimes_K R_{-1}) \dot{\oplus} \ldots; \end{aligned}$$

where $\Delta_i \boxtimes_K R_{-i} \otimes_K \ldots \otimes_K R_{\pm i}$ (with n factors of the type $R_{\pm 1}$) is the group with the generators $\phi(x)$ for $x \in R_{\pm i} \otimes_K \ldots \otimes_K R_{\pm i}$ (with $2n+1$ factors) and $u \boxtimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$ for $u \in \Delta_i$, $a_k \in \Delta_{(-1)^k i}$. The relations are the following:

1. *$\phi(x)$ are central, $\phi(x + y) = \phi(x) \dotplus \phi(y)$, $\phi(x + \bar{x}) = \dot{0}$;*
2. *$\phi(\bar{z} z k) = \dot{0}$ for $z \in R_i \otimes_K \ldots \otimes_K R_{\pm i}$ (with $n+1$ factors);*
3. *$[u \boxtimes \ldots \otimes a_n, v \boxtimes \ldots \otimes b_n] = \phi(\overline{b_n} \otimes \ldots \otimes \overline{\pi(v)} \pi(u) \otimes \ldots \otimes a_n)$;*
4. *$\phi(a_0) \boxtimes \ldots \otimes a_n = \phi(\overline{a_n} \otimes \ldots \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_n)$;*
5. *$u \cdot k \boxtimes \ldots \otimes a_n = u \boxtimes a_1 k \otimes \ldots \otimes a_n = \ldots = u \boxtimes \ldots \otimes a_n k$ for $k \in K$;*
6. *$(u \dotplus v) \boxtimes \ldots \otimes a_n = u \boxtimes \ldots \otimes a_n \dotplus v \boxtimes \ldots \otimes a_n$;*
7. *$u \boxtimes \ldots \otimes (a_j + a_j') \otimes \ldots \otimes a_n = u \boxtimes \ldots \otimes a_j \otimes \ldots \otimes a_n \dotplus \phi(\overline{a_n} \otimes \ldots \otimes \overline{a_j'} \otimes \ldots \otimes \rho(u) \otimes \ldots \otimes a_j \otimes \ldots \otimes a_n) \dotplus u \boxtimes \ldots \otimes a_j' \otimes \ldots \otimes a_n$.*

Proof. If (R_i, Δ_i) are free, then the claim may be checked using proposition 1. In the general case we use lemma 6. $\square$

1.6 Elementary unitary groups

A *Peirce decomposition* of rank ℓ of an odd form K-algebra (R, Δ) is a decomposition

$$R = \bigoplus_{-\ell \le i,j \le \ell} R_{ij}, \quad \Delta = \dot{\bigoplus_{\substack{-\ell \le i,j \le \ell \\ i+j>0}}} \phi(R_{ij}) \dot{\oplus} \dot{\bigoplus_{-\ell \le i,j \le \ell}} \Delta^i_j$$

into K-submodules and $K^\bullet$-invariant subgroups such that

1. $R_{ij} R_{kl} = 0$ for $j \ne k$, $R_{ij} R_{jl} \le R_{il}$, $\overline{R_{ij}} \le R_{-j,-i}$;

2. $\pi\colon \Delta^i_j \to R_{ij}$ are isomorphisms and $\rho(\Delta^i_j) = 0$ for $i \neq 0$;
3. $\phi(R_{-i,i}) \leq \Delta^0_i$, $\pi(\Delta^0_j) \leq R_{0j}$, and $\rho(\Delta^0_j) \leq R_{-j,j}$;
4. $\Delta^i_j \cdot R_{kl} = \dot{0}$ for $j \neq k$, $\Delta^i_j \cdot R_{jl} \leq \Delta^i_l$.

We need the special odd form K-algebra

$$\mathrm{H}(\ell, K) = \Big(\bigoplus_{-\ell \leq i \leq \ell} K e_i, \dot{\bigoplus_{1 \leq i \leq \ell}} \phi(K e_i) \dotplus \dot{\bigoplus_{\substack{-\ell \leq i \leq \ell \\ i \neq 0}}} q_i \cdot K \Big)$$

with the identity $1 = \sum_{-\ell \leq i \leq \ell} e_i$, where $e_i e_j = 0$ for $i \neq j$, $e_i^2 = e_i$, $\overline{e_i} = e_{-i}$, $\phi(e_0) = \dot{0}$, $\pi(q_i) = e_i$, $\rho(q_i) = 0$, $q_i \cdot e_j = \dot{0}$ for $i \neq j$, $q_i \cdot e_i = q_i$.

Lemma 7. *An odd form ring (R, Δ) is an odd form K-algebra with a Peirce decomposition of rank ℓ if and only if $\mathrm{H}(\ell, K)$ unitally acts on (R, Δ). The Peirce decomposition is obtained by the formulas $R_{ij} = e_i R e_j$, $\Delta^i_j = q_i \cdot R e_j$ for $i \neq 0$, $\Delta^0_j = \{u \in \Delta \cdot e_j \mid \pi(u) \in R_{0j}\}$.*

Proof. Clearly, every odd form ring with a unital action of $\mathrm{H}(\ell, K)$ has a canonical Peirce decomposition. The action may be constructed from a Peirce decomposition using lemmas 1 and 3. □

Let (R, Δ) be an odd form ring with a Peirce decomposition of rank ℓ (over $\mathbb{Z}$). We define the *elementary transvections* and *dilations* as

$$\begin{aligned}
&T_{ij}(a) = q_i \cdot a \dotminus q_{-j} \cdot \bar{a} \dotminus \phi(a) \text{ for } 0 \neq i \neq \pm j \neq 0, a \in R_{ij};\\
&T_j(u) = u \dotplus q_{-j} \cdot (\rho(u) - \overline{\pi(u)}) \dotminus \phi(\rho(u) + \pi(u)) \text{ for } j \neq 0, u \in \Delta^0_j;\\
&D_i(a) = D_{-i}(\bar{a}^{\circ -1}) = q_{-i} \cdot \bar{a}^{\circ -1} \dotplus q_i \cdot a \dotminus \phi(a) \text{ for } i \neq 0, a \in R^\circ_{ii};\\
&D_0(g) = g \text{ for } g \in \mathrm{U}(R_{00}, \Delta^0_0).
\end{aligned}$$

It is easy to see that these elements lie in $\mathrm{U}(R, \Delta)$. The *elementary subgroup* $\mathrm{EU}(R, \Delta)$ of the unitary group is the subgroup generated by the elementary transvections, and the *diagonal subgroup* $\mathrm{D}(R, \Delta)$ is the subgroup generated by the elementary dilations. We denote the images of T_{ij}, T_j, D_i by $T_{ij}(R, \Delta)$, $T_j(R, \Delta)$, and $D_i(R, \Delta)$.

If (T, Ξ) is the special unital odd form ring constructed by the matrix ring $\mathrm{M}(\ell, R)$ with the standard family of the idempotents, then elementary transvections and dilations in $\mathrm{U}(T, \Xi)$ correspond to the classical elementary transvections and dilations in $\mathrm{GL}(\ell, R)$. If (T, Ξ) is constructed by a module M_R with a hermitian form B and an odd form parameter $\mathcal{L}$, and the Peirce decomposition is obtained from elements $v_i \in M$ satisfying the appropriate identities, then our elementary transvections are the elementary transvections from [37] up to a choice of the parametrization.

The next lemma shows that $\mathrm{D}(R, \Delta)$ preserves the Peirce decomposition, so it and normalizes $T_{ij}(R, \Delta)$, $T_j(R, \Delta)$, $\mathrm{EU}(R, \Delta)$.

Lemma 8. *There is a group isomorphism*

$$\mathrm{U}(R_{00}, \Delta^0_0) \times \prod_{1 \leq i \leq \ell} R^\circ_{ii} \to \mathrm{D}(R, \Delta), (g_0, a_1, \ldots, a_\ell) \mapsto g_0 D_1(a_1) \ldots D_\ell(a_\ell);$$
$$D_i(R, \Delta) = \mathrm{U}(R, \Delta) \cap (\Delta^i_i \dotplus \phi(R_{ii}) \dotplus \Delta^i_{-i}) \text{ npu } i \neq 0;$$
$$D_0(R, \Delta) = \mathrm{U}(R, \Delta) \cap \Delta^0_0;$$
$$\mathrm{D}(R, \Delta) = \mathrm{U}(R, \Delta) \cap \Big(\dot{\bigoplus_i} \Delta^i_i \dotplus \dot{\bigoplus_{i>0}} \phi(R_{ii})\Big) = \{g \in \mathrm{U}(R, \Delta) \mid {}^g q_i = q_i\};$$

where in the last formula $\mathrm{U}(R, \Delta)$ *canonically acts on* $(R, \Delta) \rtimes \mathrm{H}(\ell, K)$.

Proof. It is easy to see that the product map from the statement is a group homomorphism. Since $g_0 \ldots g_\ell = g_0 \dotplus \ldots \dotplus g_\ell$ for $g_i \in D_i(R, \Delta)$, this homomorphism is bijective. Also, elementary dilations stabilize e_i and q_i. The explicit formulas for $D_i(R, \Delta)$ are easy to check directly, they imply the first formula for $\mathrm{D}(R, \Delta)$.

Let $g \in \mathrm{U}(R, \Delta)$ be an element preserving e_i and q_i. The identities $\alpha(g) e_i \overline{\alpha(g)} = e_i$ imply that $\alpha(g) = \sum_i e_i \alpha(g) e_i$, so multiplying g by a suitable product of $D_i(a)$ for $1 \leq i \leq \ell$ we may assume that $\pi(g) = \overline{\rho(g)} \in R_{00}$. Now the identities ${}^g q_i = q_i$ imply that $g \cdot e_i = 0$ for $i \neq 0$, i.e. $g \in \mathrm{U}(R_{00}, \Delta^0_0) = D_0(R, \Delta)$. $\square$

Lemma 9. *The Steinberg relations hold:*

- *(St0)* $T_{ij}(a) = T_{-j,-i}(-\bar{a})$;
- *(St1)* $T_{ij}(a)\, T_{ij}(b) = T_{ij}(a + b)$;
- *(St2)* $T_j(u)\, T_j(v) = T_j(u \dotplus v)$;
- *(St3)* $[T_{ij}(a), T_{kl}(b)] = 1$ *for* $\{i, -j\} \cap \{-k, l\} = \varnothing$;
- *(St4)* $[T_{ij}(a), T_{jk}(b)] = T_{ik}(ab)$ *for* $i \neq \pm k$;
- *(St5)* $[T_{ij}(a), T_{j,-i}(b)] = T_{-i}(\phi(ab))$;
- *(St6)* $[T_i(u), T_j(v)] = T_{-j,i}(\overline{\pi(v)}\pi(u))$ *for* $i \neq \pm j$;
- *(St7)* $[T_i(u), T_{jk}(a)] = 1$ *for* $j \neq i \neq -k$;
- *(St8)* $[T_i(u), T_{ij}(a)] = T_{-i,j}(\rho(u) a)\, T_j(\dot{-} u \cdot (-a))$;

$$T_{ij}(R,\Delta) = \mathrm{U}(R,\Delta) \cap \big(\Delta^i_j \dotplus \Delta^{-j}_{-i} \dotplus \phi(R_{ij})\big);$$
$$T_j(R,\Delta) = \mathrm{U}(R,\Delta) \cap \big(\Delta^0_j \dotplus \Delta^{-j}_0 \dotplus \Delta^{-j}_j \dotplus \phi(R_{0j})\big).$$

1.7 Unitary Steinberg groups

Let (R,Δ) be an odd form K-algebra with a Peirce decomposition of rank ℓ. Its *Steinberg group* $\mathrm{StU}(R,\Delta)$ is the abstract group generated by the elements $X_{ij}(a)$ for $0 \neq i \neq \pm j \neq 0$, $a \in R_{ij}$ and $X_j(u)$ for $j \neq 0$, $u \in \Delta^0_j$ with the relations (St0)–(St8). By lemma 9 there is a canonical homomorphism

$$\mathrm{st}\colon \mathrm{StU}(R,\Delta) \to \mathrm{EU}(R,\Delta), X_{ij}(a) \mapsto T_{ij}(a), X_j(u) \mapsto T_j(u).$$

Let $\Phi = \{\mathrm{e}_i + \mathrm{e}_j \mid -\ell \leq i, j \leq \ell\} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^\ell$ be a root system of type BC_ℓ, where $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_\ell$ is the standard basis, $\mathrm{e}_{-i} = -\mathrm{e}_i$, and $\mathrm{e}_0 = 0$. We enumerate the generators of $\mathrm{StU}(R,\Delta)$ by roots in the following way:

$$X_{\mathrm{e}_j - \mathrm{e}_i}(a) = X_{ij}(a) \text{ for } a \in R_{ij}, i + j > 0, i, j \neq 0;$$
$$X_{\mathrm{e}_i}(u) = X_i(u) \text{ for } u \in \Delta^0_i;$$
$$X_{2\mathrm{e}_i}(u) = X_i(u) \text{ for } u \in \phi(R_{-i,i});$$

and similarly for elementary transvections. The generators of $\mathrm{StU}(R,\Delta)$ are called *root elements* (of *long*, *short*, or *ultrashort root type* depending on the length of the root), and the images $X_\alpha(R,\Delta)$ of X_α are called the *root subgroups* of $\mathrm{StU}(R,\Delta)$. The Steinberg relations (St3)–(St8) mean that the homomorphisms X_α satisfy the *Chevalley commutator formula*

$$[X_\alpha(\mu), X_\beta(\nu)] = \prod_{\substack{i\alpha + j\beta \in \Phi \\ i,j>0}} X_{i\alpha + j\beta}(f_{\alpha\beta ij}(\mu,\nu))$$

for non-antiparallel roots α and β, where $f_{\alpha\beta ij}$ are some universal expressions (elements of free odd form rings with Peirce decompositions). Let us denote the source group of X_α by $(R \cup \Delta)_\alpha$.

The diagonal group $\mathrm{D}(R,\Delta)$ acts on $X_\alpha(R,\Delta)$ and $\mathrm{StU}(R,\Delta)$, st is equivariant with respect to this action. The *general Steinberg group* is

$$\mathrm{GStU}(R,\Delta) = \mathrm{StU}(R,\Delta) \rtimes \mathrm{D}(R,\Delta).$$

The Weyl group $\mathrm{W}(\Phi) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell \rtimes \mathrm{S}_\ell$ acts on the set $\{-\ell, \ldots, \ell\}$ if we identify non-zero indices with ultrashort roots. Then this group acts by automorphisms on $\mathrm{H}(\ell, K)$ and induces permutations of components of the Peirce decomposition of (R, Δ).

Recall that a subset $\Sigma \subseteq \Phi$ is called *closed* if $(\Sigma + \Sigma) \cap \Phi \subseteq \Sigma$. A closed subset Σ is called *special* if $\Sigma \cap -\Sigma = \varnothing$ (or, equivalently, Σ lies in an open half-space) and *symmetric* if $\Sigma = -\Sigma$. We say that a closed subset Σ is *saturated* if $\frac{1}{2}\Sigma \cap \Phi \subseteq \Sigma$. A root subsystem $\Psi \subseteq \Phi$ is saturated if and only if $\Psi = \mathbb{R}\Psi \cap \Phi$, i.e. it is an intersection of Φ with a subspace. It is easy to see that saturated root subsystems coincide with symmetric saturated closed subsets. There is a canonical bijection between saturated root subsystems $\Psi \subseteq \Phi$ and equivalence relations $\sim$ on $\{-\ell, \ldots, \ell\}$ such that $i \sim j$ implies $-i \sim -j$ and $i \sim -i$ implies $i \sim 0$. Namely, $i \sim j$ if and only if $\mathrm{e}_i - \mathrm{e}_j \in \Psi \cup \{0\}$ for all $-\ell \leq i, j \leq \ell$.

Let $\Psi \subseteq \Phi$ be a saturated root subsystem and $\sim_\Psi$ be the corresponding equivalence relation on $\{-\ell, \ldots, \ell\}$. We may construct a new Peirce decomposition of (R, Δ) of rank $\ell - \dim(\mathbb{R}\Psi)$ using equivalence classes of $\sim_\Psi$ (well-defined up to the action of the new Weyl group). Then all elementary transvections with roots in Ψ become elementary dilations, all elementary transvections with roots in $\Phi \setminus \Psi$ become elementary transvections with respect to the new Peirce decomposition. The new root system is the image of $\Phi \setminus \Psi$ in the factor-space $\mathbb{R}^\ell / \mathbb{R}\Psi$ with respect to a new dot product. We denote this new root system by Φ/Ψ (or by $\Phi/\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ in the case $\Psi = \Phi \cap \sum_i \mathbb{R}\alpha_i$) and say that it is obtained from Φ by *eliminating* a generating set of Ψ.

For any saturated root subsystem $\Psi \subseteq \Phi$ we denote the map $\Phi \to \Phi/\Psi$ by π_Ψ. The groups constructed by the Peirce decomposition after eliminating Ψ are denoted by $\mathrm{D}(R, \Delta; \Phi/\Psi)$, $\mathrm{EU}(R, \Delta; \Phi/\Psi)$, $\mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\Psi)$, and $\mathrm{GStU}(R, \Delta; \Phi/\Psi)$. Also, there are canonical homomorphisms

$$F_\Psi \colon \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\Psi) \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi)$$

such that $\mathrm{st} \circ F_\Psi = \mathrm{st}$ and $F_\Psi(X_\beta(R, \Delta)) = \prod_{\pi_\Psi(\gamma) = \beta} X_\gamma(R, \Delta)$.

Let

$$\begin{aligned} \Pi^\pm &= \{\pm(\mathrm{e}_i + \mathrm{e}_j) \mid -j < i \leq j \leq \ell\}; \\ U^\pm(R, \Delta) &= \langle X_\alpha(R, \Delta) \mid \alpha \in \Pi^\pm \rangle \leq \mathrm{StU}(R, \Delta); \\ P^\pm(R, \Delta) &= U^\pm(R, \Delta) \rtimes \mathrm{D}(R, \Delta) \leq \mathrm{GStU}(R, \Delta). \end{aligned}$$

Lemma 10. *The product map*

$$\prod_{\alpha \in \Pi^+ \setminus 2\Pi^+} (R \cup \Delta)_\alpha \to U^+(R, \Delta), (\mu_\alpha)_\alpha \mapsto \prod_\alpha X_\alpha(\mu_\alpha)$$

is a bijection for any linear order on Π^+. *The canonical homomorphism* $P^+(R, \Delta) \to \mathrm{U}(R, \Delta)$ *is injective. If we identify* $U^+(R, \Delta)$ *and* $P^+(R, \Delta)$ *with their images in* $\mathrm{U}(R, \Delta)$, *then*

$$U^+(R, \Delta) = \mathrm{U}(R, \Delta) \cap \big(\dot{\bigoplus_{i<j}} \Delta^i_j \dotplus \dot{\bigoplus_{-j<i<j}} \phi(R_{ij})\big);$$

$$P^+(R, \Delta) = \mathrm{U}(R, \Delta) \cap \big(\dot{\bigoplus_{i\leq j}} \Delta^i_j \dotplus \dot{\bigoplus_{-j<i\leq j}} \phi(R_{ij})\big).$$

Proof. In order to prove the bijectivity it suffices to consider the image of $U^+(R, \Delta)$ in $\mathrm{U}(R, \Delta)$ and elementary transvections instead of $X_\alpha(\mu)$. Using induction on ℓ and elimination of ultrashort roots we may assume that $\ell = 1$. Consider an element $g \in \mathrm{U}(R, \Delta) \cap \big(\dot{\bigoplus}_{i\leq j} \Delta^i_j \dotplus \dot{\bigoplus}_{-j<i\leq j} \phi(R_{ij})\big)$. Then the component of g from $\dot{\bigoplus}_i \Delta^i_i \dotplus \phi(R_{11})$ is independent of the order of direct summation and lies in $D_0(R, \Delta) \times D_1(R, \Delta) = \mathrm{D}(R, \Delta)$ by lemma 8. From lemma 9 it follows that g is the product of this component and an element from $T_1(R, \Delta)$. □

We say that $P^\pm(R, \Delta)$ and their images in $\mathrm{U}(R, \Delta)$ are opposite *parabolic subgroups*, $U^\pm(R, \Delta)$ are their *unipotent radicals*, and $\mathrm{D}(R, \Delta) = P^+(R, \Delta) \cap P^-(R, \Delta)$ is their common *Levi subgroup*.

Lemma 11. *The product map*

$$\Omega(R, \Delta) = U^+(R, \Delta) \times \mathrm{D}(R, \Delta) \times U^-(R, \Delta) \to \mathrm{U}(R, \Delta), (f, g, h) \mapsto fgh$$

is injective. Its image consists of $g \in \mathrm{U}(R, \Delta)$ *such that all* $E_k \pi(g) E_k$ *are quasi-invertible in* $E_k R E_k$ *for* $1 \leq k \leq \ell$, *where* $E_k = e_k + \ldots + e_\ell$.

Proof. The map is injective since the images of $P^+(R, \Delta)$ and $U^-(R, \Delta)$ have trivial intersection in the unitary group. It is easy to see that every element in the image satisfies the quasi-invertibility conditions.

To prove the converse, by elimination of ultrashort roots and induction we may assume that $\ell = 1$. Let $g \in \mathrm{U}(R, \Delta)$ be such that $e_1 \pi(g) e_1$ is quasi-invertible.

Multiplying g by a diagonal element we may assume that $e_1\pi(g)e_1 = 0$. Consider the element
$$u = q_{-1} \cdot \pi(g)e_1 \dot{-} g \cdot e_1 \dot{-} \phi(e_{-1}\pi(g)e_1) \in \Delta_1^0.$$
Then $T_1(u)\, g = \dot{-}g \cdot e_1\pi(g) \dot{+} g \cdot (1 - e_1) \dot{+} q_{-1} \cdot \pi(g)(e_1\pi(g) + e_1 - 1)$ lies in

$$P^-(R, \Delta) = \{g \in \mathrm{U}(R, \Delta) \mid e_{-1}\pi(g) = e_{-1}\pi(g)e_{-1}, g \cdot e_1 = q_1 \cdot \pi(g)e_1\},$$

the equations of the parabolic subgroup are obtained from lemma 10. $\square$

Chapter 2. Classical reductive groups

2.1 Nilpotent modules of class 2

Let K be a unital commutative ring. A filtered 2-nilpotent group M is called a 2-*nilpotent* K-*module* if the monoid $K^\bullet$ acts on M from the right, the subgroup M_0 has an additional structure of a left K-module, and there is a map $\tau\colon M \to M_0$ such that

1. $[m \cdot k, m' \cdot k'] = kk'[m, m']$;
2. $m \cdot (k + k') = m \cdot k \dotplus kk'\tau(m) \dotplus m \cdot k'$;
3. $m \cdot k = k^2 m$ for $m \in M_0$.

Here $\tau\colon M \to M_0$ and the action $M \times K \to M$ are polyquadratic with respect to the filtrations $0 \leq 0 \leq K$ and $0 \leq 0 \leq M_0$. They satisfy $\tau(m \mid m') = [m, m']$ and $\tau(m \cdot k) = k^2\tau(m)$. A *morphism* of 2-nilpotent K-modules $f\colon M \to N$ is a group homomorphism such that $f(m \cdot k) = f(m) \cdot k$, $f(M_0) \leq N_0$, $f(km) = kf(m)$ for $m \in M_0$, and $f(\tau(m)) = \tau(f(m))$.

Recall that any bilinear map $c\colon M_1 \times M_1 \to M_0$ of K-modules is a 2-cocycle, so $M = M_0 \dot\oplus M_1$ turns out to be a 2-nilpotent K-module with the operations

$$(m_0 \dot\oplus m_1) \dotplus (m_0' \dot\oplus m_1') = (m_0 + c(m_1, m_1') + m_0') \dot\oplus (m_1 + m_1'),$$
$$(m_0 \dot\oplus m_1) \cdot k = (k^2 m_0 \dot\oplus k m_1),$$
$$\tau(m_0 \dot\oplus m_1) = 2m_0 - c(m_1, m_1).$$

We say that a 2-nilpotent K-module *splits* if it is of this type up to an isomorphism. Every 2-nilpotent K-module M such that M/M_0 is free over K necessarily splits.

Let us define a scalar extension of 2-nilpotent K-module M by a unital commutative K-algebra E. Take a K-module A with a commutative K-bilinear multiplication $A \times A \to E$ (it required only in the proof of lemma 12, otherwise $A = E$). Consider the group $M \boxtimes_K A$ generated by the central subgroup $E \otimes_K M_0$ and the elements $m \boxtimes a$ for $m \in M$, $a \in A$ (i.e. a factor-group of the product of $E \otimes_K M_0$ and the free group generated by $m \boxtimes a$). The relations are

1. $[m \boxtimes a, m' \boxtimes a'] = aa' \otimes [m, m']$;
2. $(m \dotplus m') \boxtimes a = m \boxtimes a \dotplus m' \boxtimes a$;
3. $(m \cdot k) \boxtimes a = m \boxtimes ka$;

4. $m \boxtimes (a + a') = m \boxtimes a \dotplus aa' \otimes \tau(m) \dotplus m \boxtimes a'$;
5. $m \boxtimes a = a^2 \otimes m$ for $m \in M_0$.

Clearly, $\operatorname{Im}(E \otimes_K M_0) \leq M \boxtimes_E A$ is a nilpotent filtration. In the case $A = E$ there are well-defined polyquadratic maps

$$\begin{aligned} \tau\colon M \boxtimes_K E &\to \operatorname{Im}(E \otimes_K M_0), & e \otimes m &\mapsto 2e \otimes m, \\ & & m \boxtimes e &\mapsto e^2 \otimes \tau(m); \\ (-) \cdot (=)\colon (M \boxtimes_K E) \times E &\to M \boxtimes_K E, & (e \otimes m, e') &\mapsto ee'^2 \otimes m, \\ & & (m \boxtimes e, e') &\mapsto m \boxtimes ee' \end{aligned}$$

by lemmas 2 and 3. Also, the E-module $(M \boxtimes_K E)/\operatorname{Im}(E \otimes_K M_0)$ is isomorphic to $(M/M_0) \otimes_K E$.

We say that the scalar extension of a 2-nilpotent K-module M by E is well-defined if $E \otimes_K M_0 \to M \boxtimes_K E$ is injective, then $M \boxtimes_K E$ is called the *scalar extension*. It is a 2-nilpotent E-module by lemma 1 and $(M \boxtimes_K E) \boxtimes_E F \cong M \boxtimes_K F$ for any unital commutative E-algebra F. Moreover, $\operatorname{Hom}_K(M, N) \cong \operatorname{Hom}_E(M \boxtimes_K E, N)$ for all 2-nilpotent E-modules N.

Lemma 12. *The scalar extension of a 2-nilpotent K-module M by flat E is always well-defined. If E is faithfully flat over K, then $M \to M \boxtimes_K E$ is injective.*

Proof. By the Govorov–Lazard theorem $E = \varinjlim_i P_i$ for free K-modules P_i. Let $N_i = M \boxtimes_K P_i$, then $M \boxtimes_K E$ is their direct limit. It is easy to check that

$$N_i = E \otimes_K M_0 \dotplus \dot{\bigoplus_j} M \boxtimes e_j,$$

where e_j run over a basis of P_i. Hence $E \otimes_K M_0$ is a subgroup of all N_i and of $M \boxtimes_K E$. The last claim follows from the injectivity of $M_0 \to E \otimes_K M_0$, $M/M_0 \to M/M_0 \otimes_K E$, and the non-abelian 5-lemma. $\square$

It turns out that 2-nilpotent K-modules admit faithfully flat descent. Let E be a unital commutative faithfully flat K-algebra. A *descent datum* for 2-nilpotent modules with respect to $K \to E$ is a 2-nilpotent E-module N with an isomorphism of 2-nilpotent $(E \otimes_K E)$-modules $\psi\colon i_1^*(N) \to i_2^*(N)$ satisfying the *cocycle condition* $i_{23}^*(\psi) \circ i_{12}^*(\psi) = i_{13}^*(\psi)\colon j_1^*(N) \to j_3^*(N)$. Here i_s^* are the scalar extensions with respect to the canonical homomorphisms $E \to E \otimes_K E$ for $1 \leq s \leq 2$, i_{st}^* are the scalar extensions with respect to $E \otimes_K E \to E \otimes_K E \otimes_K E$ for $1 \leq s < t \leq 3$,

j_s^* are the scalar extensions with respect to $E \to E \otimes_K \otimes_K E$ for $1 \leq s \leq 3$ (they are well-defined by lemma 12). We also denote the morphisms $N \to i_s^*(N)$, $N \to j_s^*(N)$, $i_{st}^*(L) \to i_{st}^*(L)$ by i_s, j_s, and i_{st} for any 2-nilpotent modules or ordinary modules N and L.

Proposition 3. *Let $K \to E$ be a faithfully flat homomorphism of unital commutative rings. Then the category of 2-nilpotent K-modules is equivalent to the category of descent data for 2-nilpotent modules with respect to $K \to E$. A 2-nilpotent module M corresponds to $M \boxtimes_K E$ with canonical ψ.*

Proof. We have a functor from the category of 2-nilpotent K-modules to the category of descent data. Let us construct its right adjoint. Take a descent datum (N, ψ) and consider the 2-nilpotent K-module

$$M = \{n \in N \mid \psi(i_1(n)) = i_2(n)\}$$

with $M_0 = N \cap N_0$. Clearly, the map

$$f\colon M/M_0 \to \{n \in N/N_0 \mid \psi(i_1(n)) = i_2(n) \in i_2^*(N/N_0)\}$$

is injective, we have to check that it is surjective.

Let $n \in N$ be such that $x = \psi(i_1(n)) \dot{-} i_2(n) \in i_2^*(N_0)$. It suffices to show that there is $\widetilde{n} \in N_0$ such that $x = \psi(i_1(\widetilde{n})) - i_2(\widetilde{n})$. This condition is equivalent to $i_{23}^*(\psi)(i_{12}(x)) + i_{23}(x) = i_{13}(x)$ by the exactness of the Amitsur complex of $K \to E$ tensored by N_0. Substituting the definition of x, we obtain precisely the cocycle condition on ψ applied to $j_1(n)$.

This descent construction is right adjoint to the functor from the statement. It remains to show that the unit and the counit of the adjunction are invertible. But the unit is invertible on any 2-nilpotent K-module M by the non-abelian 5-lemma since it is invertible on M_0 and M/M_0 by the faithfully flat descent for modules. The proof for the counit is the same. □

Let us say that a 2-nilpotent K-module M is *universal* if all its scalar extensions are well-defined. If M is a universal 2-nilpotent K-module, then $M \boxtimes_K (-)$ is a sheaf in the fppf topology on the category of affine K-schemes. This easily follows from proposition 3 and the following fact: the category of 2-nilpotent $(K \times K')$-modules is equivalent to the product of such categories over K and K'.

Lemma 13. *A 2-nilpotent K-module M is universal in the following cases:*

1. it is a scalar extension of a universal 2*-nilpotent module;*

2. it is a direct limit of universal 2*-nilpotent modules;*

3. it splits;

4. the module M/M_0 *is flat;*

5. it is a faithfully flat descent of a universal 2*-nilpotent module.*

Proof. The first two cases are trivial. If $M = M_0 \dot{\oplus} M_1$ splits with the 2-cocycle c, then $M \boxtimes_K E \cong (E \otimes_K M_0) \dot{\oplus} (E \otimes_K M_1)$ splitss with the 2-cocycle c_E. If M/M_0 is flat, then by the Govorov–Lazard theorem $M/M_0 = \varinjlim_i P_i$ for free K-modules P_i. The 2-nilpotent K-modules $M \times_{M/M_0} P_i$ split and M is their direct limit.

Suppose that $M \boxtimes_K E$ is universal for a faithfully flat K-algebra E. Take a unital commutative K-algebra K' and let $E' = K' \otimes_K E$. The composition $K' \otimes_K M_0 \to M \boxtimes_K K' \to (M \boxtimes_K E) \boxtimes_E E' \cong M \boxtimes_K E'$ is injective since $M \boxtimes_K E'$ is well-defined and $K' \otimes_K M_0 \leq E' \otimes_K M_0$. It follows that $M \boxtimes_K K'$ is also well-defined. $\square$

2.2 Augmented odd form algebras

An *augmented odd form K-algebra* $(R, \Delta, \mathcal{D})$ consists of an odd form K-algebra and a $K^\bullet$-invariant subgroup $\mathcal{D} \leq \Delta$ with a structure of a left K-module such that

1. $\phi(R) \leq \mathcal{D}$, $\pi(\mathcal{D}) = 0$, $\phi(ak) = k\phi(a)$ for $a \in R$ and $k \in K$;
2. $v \cdot k = k^2 v$, $\rho(kv) = k\rho(v)$, $kv \cdot a = k(v \cdot a)$ for $v \in \mathcal{D}$, $k \in K$, $a \in R$.

For any augmented odd form K-algebra $(R, \Delta, \mathcal{D})$ the group Δ with the filtration $\mathcal{D}$ is a 2-nilpotent K-module with $\tau(u) = u \dotplus u \cdot (-1) = \phi(\rho(u))$ (in particular, $\phi(\rho(v)) = 2v$ for $v \in \mathcal{D}$). The maps $\rho\colon \Delta \to R$ and $(-) \cdot (=)\colon \Delta \times (R \rtimes K) \to \Delta$ are polyquadratic with respect to this filtration. An odd form K-algebra (R, Δ) admits an augmentation if and only if $\operatorname{Ker}(\phi)$ is a K-submodule (this is always the case for $K = \mathbb{Z}$), the smallest augmentation is $\mathcal{D} = \phi(R)$.

A *Peirce decomposition* of an augmented odd form K-algebra $(R, \Delta, \mathcal{D})$ is a Peirce decomposition of (R, Δ) such that

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{\substack{-\ell \leq i, j \leq \ell \\ i + j > 0}} \phi(R_{ij}) \oplus \bigoplus_{-\ell \leq i \leq \ell} \mathcal{D}_i,$$

where $\mathcal{D}_i = \mathcal{D} \cap \Delta_i^0$. In this case we change the domains of the root homomorphisms $X_{2\mathrm{e}_i}$ from $\phi(R_{-i,i})$ to $\mathcal{D}_i$.

Let $(R, \Delta, \mathcal{D})$ be an odd form K-algebra and E be a unital commutative K-algebra. The *scalar extension* of $(R, \Delta, \mathcal{D})$ by E is the triple

$$(R, \Delta, \mathcal{D}) \boxtimes_K E = (R \otimes_K E, \Delta \boxtimes_K E, E \otimes_K \mathcal{D})$$

if $\Delta \boxtimes_K E$ is well-defined as the scalar extension of a 2-nilpotent module. In this case $(R, \Delta, \mathcal{D}) \boxtimes_K E$ is an augmented odd form E-algebra,

1. $\phi(a \otimes e) = e \otimes \phi(a)$, $\pi(e \otimes v) = 0$, $\pi(u \boxtimes e) = \pi(u) \otimes e$;
2. $\rho(e \otimes v) = \rho(v) \otimes e$, $\rho(u \boxtimes e) = \rho(u) \otimes e^2$;
3. $(e \otimes v) \cdot (a \otimes e') = ee'^2 \otimes (v \cdot a)$, $(u \boxtimes e) \cdot (a \otimes e') = (u \cdot a) \boxtimes ee'$

for $a \in R$, $v \in \mathcal{D}$, $u \in \Delta$, $e, e' \in E$ by lemmas 1, 2, 3. Also,

$$\mathrm{Hom}_K\big((R, \Delta, \mathcal{D}), (T, \Xi, \mathcal{X})\big) \cong \mathrm{Hom}_E\big((R, \Delta, \mathcal{D}) \boxtimes_K E, (T, \Xi, X)\big)$$

for an augmented odd form E-algebra $(T, \Xi, \mathcal{X})$.

By lemma 12 such a scalar extension is well-defined if E is flat. Faithfully flat descent holds for augmented odd form algebras by proposition 3. Clearly, the categories of odd form algebras and augmented odd form algebras over a $K \times K'$ are equivalent to the products of the corresponding categories over K and K'. It follows that if $(R, \Delta, \mathcal{D})$ is an augmented odd form K-algebra with universal $(\Delta, \mathcal{D})$, then $(R, \Delta, \mathcal{D}) \boxtimes_K (-)$ is a sheaf in the fppf topology.

As an example, let us construct localizations of odd form algebras. Let K be a unital commutative ring and $S \subseteq K$ be a multiplicative subset (i.e. $S \leq K^\bullet$ is a submonoid). The *localization* of a 2-nilpotent K-module M by S is the 2-nilpotent $S^{-1}K$-module $S^{-1}M = M \boxtimes_K S^{-1}K$. It may be identified with the factor-set of the set of formal fractions $m \cdot \frac{1}{s}$ for $m \in M$ and $s \in S$ by the following equivalence relation: $m \cdot \frac{1}{s} \sim m' \cdot \frac{1}{s'}$ if and only if there is $s'' \in S$ such that $m \cdot s's'' = m' \cdot ss''$. The group $S^{-1}M_0$ embeds to $S^{-1}M$ by $\frac{m}{s} \mapsto sm \cdot \frac{1}{s}$. The operations are given by $m \cdot \frac{1}{s} \dotplus m' \cdot \frac{1}{s'} = (m \cdot s' \dotplus m' \cdot s) \cdot \frac{1}{ss'}$, $[m \cdot \frac{1}{s}, m' \cdot \frac{1}{s'}] = \frac{[m, m']}{ss'}$, $\tau(m \cdot \frac{1}{s}) = \frac{\tau(m)}{s^2}$, $(m \cdot \frac{1}{s}) \cdot \frac{k}{s'} = (m \cdot k) \cdot \frac{1}{ss'}$.

This construction may be applied to augmented odd form K-algebras. Actually, the localization is well-defined for any odd form K-algebra (R, Δ). Let $S^{-1}\Delta$ be the factor-set of the set of formal fractions $u \cdot \frac{1}{s}$ for $u \in \Delta$ and $s \in S$ by the following equivalence relation: $u \cdot \frac{1}{s} \sim u' \cdot \frac{1}{s'}$ if and only if there is $s'' \in S$ such that $u \cdot s's'' = u' \cdot ss''$. Then $(S^{-1}R, S^{-1}\Delta)$ is an odd form $S^{-1}K$-algebra with the operations

1. $(u \cdot \frac{1}{s}) \dotplus (u' \cdot \frac{1}{s'}) = (u \cdot s' \dotplus u' \cdot s) \cdot \frac{1}{ss'}$;
2. $\phi(\frac{a}{s}) = \phi(as) \cdot \frac{1}{s}$, $\pi(u \cdot \frac{1}{s}) = \frac{\pi(u)}{s}$, $\rho(u \cdot \frac{1}{s}) = \frac{\rho(u)}{s^2}$;
3. $(u \cdot \frac{1}{s}) \cdot \frac{a}{s'} = (u \cdot a) \cdot \frac{1}{ss'}$, $(u \cdot \frac{1}{s}) \cdot \frac{k}{s'} = (u \cdot k) \cdot \frac{1}{ss'}$ при $a \in R$ и $k \in K$;

it is called the *localization* of (R, Δ) by S and satisfies the universal property. If $(R, \Delta, \mathcal{D})$ is an augmented odd form K-algebra, then this construction coincides with $(R, \Delta, \mathcal{D}) \boxtimes_R S^{-1}R$.

2.3 Classical odd form algebras

Fix a unital commutative ring K. We give explicit constructions of augmented odd form K-algebras with classical unitary groups and Steinberg groups. Let us denote the basis of $K^{2\ell+1}$ by $e_{-\ell}, \ldots, e_\ell$ and the basis of $K^{2\ell}$ by $e_{-\ell}, \ldots, e_{-1}, e_1, \ldots, e_\ell$. The group of K-points of the discrete group scheme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ may be identified with the group of idempotents of K with the group operation $e * f = e + f - 2ef$.

All augmented odd form algebras constructed below are special (and almost all of them are unital). They have canonical Peirce decompositions of rank ℓ given by the embedding of $\mathrm{H}(\ell, K)$, $e_i \mapsto e_{ii}$ for $i \neq 0$, $e_0 \mapsto 1 - \sum_{i \neq 0} e_{ii}$, $q_i \mapsto q_i$.

The *linear odd form algebra* $(R, \Delta, \mathcal{D}) = \mathrm{AL}(\ell, K)$ is constructed by the unital ring $\mathrm{M}(\ell, K)$, where $\mathcal{D} = \phi(R)$. More explicitly,

1. $R = \bigoplus_{1 \leq i,j \leq \ell} K e_{ij} \oplus \bigoplus_{-\ell \leq i,j \leq -1} K e_{ij}$;
2. $e_{ij} e_{kl} = 0$ for $j \neq k$, $e_{ij} e_{jl} = e_{il}$, $\overline{e_{ij}} = e_{-j,-i}$;
3. $\mathcal{D} = \bigoplus_{1 \leq i,j \leq \ell} K \phi(e_{ij})$;
4. $\Delta = \mathcal{D} \dotplus \dot{\bigoplus}_{1 \leq i,j \leq \ell} q_i \cdot K e_{ij} \dotplus \dot{\bigoplus}_{-\ell \leq i,j \leq -1} q_i \cdot K e_{ij}$.

There is an isomorphism $\mathrm{GL}(\ell, K) \to \mathrm{U}(\mathrm{AL}(\ell, K)) \leq R^*, g \mapsto g^{-\mathrm{t}} \oplus g$, the special linear group $\mathrm{SL}(\ell, K)$ is the kernel of $\det\colon \mathrm{GL}(\ell, K) \to K^*$.

Now consider the ring K with the (-1)-involution $\bar{k} = k$. Hermitian forms on a K-module M coincide with antisymmetric bilinear forms. Such a form is symplectic if and only if the maximal odd form parameter coincides with the Heisenberg group (i.e. the corresponding quadratic form vanishes). Take $M = K^{2\ell}$with the symplectic form $B(e_i, e_j) = 0$ for $i \neq -j$, $B(e_i, e_{-i}) = \varepsilon_i$, where $\varepsilon_i = 1$ for $i > 0$ and $\varepsilon_i = -1$ for $i < 0$. The *symplectic odd form algebra* $(R, \Delta, \mathcal{D}) = \mathrm{ASp}(2\ell, K)$ is

1. $R = \bigoplus_{-\ell \leq i,j \leq \ell;\, i,j \neq 0} R e_{ij}$;
2. $\overline{e_{ij}} = \varepsilon_i \varepsilon_j e_{-j,-i}$, $e_{ij} e_{kl} = 0$ for $j \neq k$, $e_{ij} e_{jl} = e_{il}$;

3. $\mathcal{D} = \bigoplus_{-\ell \leq i,j \leq \ell;\, i,j \neq 0;\, i+j>0} K\phi(e_{ij}) \oplus \bigoplus_{-\ell \leq i \leq \ell;\, i \neq 0} Kv_i$;
4. $\phi(e_{-i,i}) = 2v_i$, $\rho(v_i) = e_{-i,i}$, $v_i \cdot e_{jk} = 0$ for $i \neq j$, $v_i \cdot e_{ik} = \varepsilon_i \varepsilon_k v_k$;
5. $\Delta = \mathcal{D} \dot{\oplus} \dot{\bigoplus}_{-\ell \leq i,j \leq \ell;\, i,j \neq 0} q_i \cdot Ke_{ij}$;

it is obtained from $(M, B, \mathcal{L}_{\max})$ with a non-trivial augmentation. Clearly, $\mathrm{U}(\mathrm{ASp}(2\ell, K)) \cong \mathrm{Sp}(2\ell, K)$.

The odd form K-algebras $\mathrm{AL}(\ell, K)$ and $\mathrm{ASp}(2\ell, K)$ are special unital and their odd form parameters are the maximal possible. If (R, Δ) is one of these odd form algebras, then $\mathrm{U}(R, \Delta) = \{g \in R^* \mid g^{-1} = \bar{g}\}$ is determined by the involution K-algebra R. In the linear case it is an Azumaya algebra over $K \times K$ with an involution of the second kind, in the symplectic case it is an Azumaya algebra over K with a symplectic involution of the first kind. In the orthogonal case the odd form parameter is not the maximal possible, so we need it in the definition of a classical group. In the even orthogonal case the ring part is an Azumaya algebra with an orthogonal involution of the first kind, and in the odd orthogonal case the ring part is non-unital in general.

Consider K with the 1-involution $\bar{k} = k$. Hermitian forms on a K-module M are precisely the symmetric bilinear forms. Let $q \colon M \to K$ be a quadratic form in the classical sense, i.e. $q(mk) = q(m)k^2$ and the cross-effect $B(m, m') = q(m \mid m')$ is bilinear. Then q may be considered as a quadratic form obtained from the odd form parameter $\mathcal{L} = \{(m, -q(m)) \mid m \in M\}$ and the hermitian form B. Let $M = K^{2\ell}$, $q(e_i) = 0$, $B(e_i, e_j) = 0$ for $i \neq -j$, $B(e_i, e_{-i}) = 1$. The resulting odd form algebra with the smallest augmentation is called the *even orthogonal odd form algebra* $(R, \Delta, \mathcal{D}) = \mathrm{AO}(2\ell, K)$. Namely,

1. $R = \bigoplus_{-\ell \leq i,j \leq \ell;\, i,j \neq 0} Ke_{ij}$;
2. $\overline{e_{ij}} = e_{-j,-i}$, $e_{ij} e_{kl} = 0$ for $j \neq k$, $e_{ij} e_{jl} = e_{il}$;
3. $\mathcal{D} = \bigoplus_{-\ell \leq i,j \leq \ell;\, i,j \neq 0;\, i+j>0} K\phi(e_{ij})$;
4. $\Delta = \mathcal{D} \dot{\oplus} \dot{\bigoplus}_{-\ell \leq i,j \leq \ell; i,j \neq 0} q_i \cdot Ke_{ij}$.

We have $\mathrm{U}(\mathrm{AO}(2\ell, K)) \cong \mathrm{O}(2\ell, K)$. The special orthogonal group $\mathrm{SO}(2\ell, K)$ is the kernel of the Dickson invariant $\mathrm{D} \colon \mathrm{O}(2\ell, K) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})(K)$, this invariant admits a section for $\ell > 0$ and satisfies $\det(g) = 1 - 2\mathrm{D}(g)$.

In the odd orthogonal case we consider the module $M = K^{2\ell+1}$ with $q(e_i) = 0$ for $i \neq 0$, $q(e_0) = 1$, $B(e_i, e_j) = 0$ for $i \neq -j$, $B(e_i, e_{-i}) = 1$ for $i \neq 0$, $B(e_0, e_0) = 2$. Its unitary group is the odd orthogonal group

$$\mathrm{O}(2\ell + 1, K) \cong \mathrm{SO}(2\ell + 1, K) \times \mu_2(K),$$

where

$$\mu_2(K) = \{k \in K^* \mid k^2 = 1\},$$
$$\mathrm{SO}(2\ell+1, K) = \{g \in \mathrm{O}(2\ell+1, K) \mid \det(g) = 1\}.$$

But the corresponding odd form algebra does not have sufficiently good properties. Instead we define the *odd orthogonal odd form algebra* $(R, \Delta, \mathcal{D}) = \mathrm{AO}(2\ell+1, K)$ as

1. $R = \bigoplus_{-\ell \leq i,j \leq \ell} K e_{ij}$;
2. $\overline{e_{ij}} = e_{-j,-i}$, $e_{ij} e_{kl} = 0$ for $j \neq k$, $e_{ij} e_{jl} = e_{il}$ for $j \neq 0$, $e_{i0} e_{0l} = 2 e_{il}$;
3. $\mathcal{D} = \bigoplus_{-\ell \leq i,j \leq \ell;\, i+j>0} K \phi(e_{ij})$;
4. $\Delta = \mathcal{D} \dot{\oplus} \dot{\bigoplus}_{-\ell \leq i,j \leq \ell;\, i \neq 0} q_i \cdot K e_{ij} \dot{\oplus} \dot{\bigoplus}_{-\ell \leq i \leq \ell} u_i \cdot K$;
5. $\pi(u_i) = e_{0i}$, $\rho(u_i) = -e_{-i,i}$;
6. $u_i \cdot e_{jk} = \dot{0}$ for $i \neq j$, $u_i \cdot e_{ik} = u_k$ for $i \neq 0$, $u_0 \cdot e_{0k} = u_k \cdot 2$;

is is special, but non-unital in general. We need the K-algebra homomorphism $\mathrm{rep}\colon R \to \mathrm{M}(2\ell+1, K), e_{ij} \mapsto e_{ij}$ при $j \neq 0, e_{i0} \mapsto 2e_{i0}$. Let

$$\Delta_{\mathrm{C}(R)} = \{u \in \Delta \mid \pi(u), \rho(u) \in \mathrm{C}(R)\}.$$

Clearly, $\mathrm{C}(R) = \{x(k) \mid k \in K\}$ and $\Delta_{\mathrm{C}(R)} = \{u(k) \mid k \in K\}$, where

$$x(k) = k e_{00} + \sum_{i \neq 0} e_{ii}, \qquad u(k) = \dot{\sum_{i \neq 0}} q_i \cdot 2k \dotplus u_0 \cdot k \dotplus \phi(2k^2 \sum_{i>0} e_{ii}).$$

Let $\widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, K) = \mathrm{U}(\mathrm{AO}(2\ell+1, K))$.

Proposition 4. *The functor* $\widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, -)$ *is a smooth group scheme of relative dimension* $\ell(2\ell+1)$ *and* $\widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, -) \cong \mathrm{SO}(2\ell+1, -) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *The homomorphism* $\mathrm{D}\colon \widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, K) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})(K)$ *satisfies* $\det(1 + \mathrm{rep}(\pi(g))) = 1 - 2\mathrm{D}(g)$, *the kernel of* $\widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, K) \to \mathrm{SO}(2\ell+1, K)$ *coincides with* $\{g \in \widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, K) \mid \pi(g) \in \mathrm{C}(R)\}$.

Proof. Let $(R, \Delta, \mathcal{D}) = \mathrm{AO}(2\ell+1, K)$ and $(T, \Xi, \mathcal{X}) = \mathrm{AO}(2\ell+2, K)$. Consider the injective homomorphism

$$\begin{aligned} f\colon (R, \Delta, \mathcal{D}) \to (T, \Xi, \mathcal{X}), e_{ij} &\mapsto e_{ij} \text{ for } i, j \neq 0; \\ e_{i0} &\mapsto e_{i,-\ell-1} + e_{i,\ell+1} \text{ for } i \neq 0; \\ e_{0j} &\mapsto e_{-\ell-1,j} + e_{\ell+1,j} \text{ for } j \neq 0; \\ e_{00} &\mapsto e_{-\ell-1,-\ell-1} + e_{-\ell-1,\ell+1} + e_{\ell+1,-\ell-1} + e_{\ell+1,\ell+1}. \end{aligned}$$

It is easy to see that

$$
\begin{aligned}
f(R) &= \{t \in T \mid t(e_{-\ell-1}+e_{\ell+1}) = \overline{t}\,(e_{-\ell-1}+e_{\ell+1}) = 0\},\\
f(\mathcal{D}) &= \{v \in \mathcal{X} \mid \rho(v) \in f(R)\},\\
f(\Delta) &= \{u \in \Xi \mid \pi(u), \rho(u) \in f(R)\},
\end{aligned}
$$

where T acts on $K^{2\ell+2}$ in the standard way. Also, rep is the action on the orthogonal complement of $e_{-\ell-1} - e_{\ell+1}$. Hence

$$\widetilde{O}(2\ell+1, K) \cong \{g \in \mathrm{O}(2\ell+2, K) \mid g(e_{-\ell-1} - e_{\ell+1}) = e_{-\ell-1} - e_{\ell+1}\}.$$

The map $\mathrm{D}\colon \widetilde{O}(2\ell+1, K) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})(K)$ is the restriction of the Dickson invariant for $\mathrm{O}(2\ell+2, K)$, it satisfies $\det(1 + \mathrm{rep}(\pi(g))) = \det(\alpha(f(g))) = 1 - 2\mathrm{D}(g)$.

The functor $\widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, -)$ is given by the equations

$$\sum_{-\ell \leq k \leq \ell} x_{-k,-i}x_{kj} + x_{0,-i}x_{0j} + x_{ij} + x_{-j,-i} = 0 \text{ for } -\ell \leq i, j \leq \ell, i+j > 0;$$

$$\sum_{0 \leq k \leq \ell} x_{-k,i}x_{ki} + x_{-i,i} = 0 \text{ for } -\ell \leq i \leq \ell$$

on the variables x_{ij}, where $\pi(g) = \sum_{ij} x_{ij}e_{ij}$, so it is an affine group scheme. By the Jacobian criterion it is smooth near the identity section. It follows that $\widetilde{\mathrm{O}}$ is a smooth group scheme of relative dimension $\ell(2\ell+1)$ over any field. Then the differentials of the equations are linearly independent at every point, that is $\widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, -)$ is a smooth affine group scheme of the required relative dimension.

Let $\mathrm{Z}(K) = \{g \in \widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, K) \mid \pi(g) \in \mathrm{C}(R)\} = \{u(k) \mid k^2 + k = 0\}$. Since $\mathrm{D}(u(k)) = -k$ for $k^2 + k = 0$, we have a decomposition

$$\widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, K) \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{D}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})(K).$$

The map rep induces a homomorphism $p\colon\ \mathrm{Ker}(\mathrm{D}) \to \mathrm{SO}(2\ell+1, -)$ of smooth group schemes. It remains to check that p is an isomorphism. By the fibral isomorphism criterion we may assume that K is a field. The differential of p at the identity is an isomorphism of the Lie algebras, hence p is an isogeny with étale kernel (recall that $\mathrm{SO}(2\ell+1, -)$ has connected fibres). But if $\mathrm{rep}(\pi(g)) = \mathrm{rep}(\,\overline{\pi(g)}\,) = 0$ for $g \in \widetilde{\mathrm{O}}(2\ell+1, K)$, then $g = u_{00} \cdot k$ with $2k = 0$ and $k^2 + k = 0$, that is $g \in \mathrm{Z}(K)$. $\square$

We say that $(R, \Delta, \mathcal{D})$ is a *classical odd form K-algebra* if it is isomorphic to a product of various $\mathrm{AL}(\ell, K)$, $\mathrm{ASp}(2\ell, K)$, and $\mathrm{AO}(\ell, K)$ locally in the fppf topology. These odd form algebras are pairwise non-isomorphic by the dimension reasons (unless $\ell = 0$ or $K = 0$), so any classical odd form K-algebra $(R, \Delta, \mathcal{D})$ induces a decomposition $K = \prod_{i=1}^{n} K_i$ such that $(R, \Delta, \mathcal{D})$ restricted on K_i is a twisted form of a *split classical odd form algebra* (i.e. a product of some $\mathrm{AL}(\ell, K)$, $\mathrm{ASp}(2\ell, K)$, and $\mathrm{AO}(\ell, K)$).

If $(R, \Delta, \mathcal{D})$ is a classical odd form K-algebra, then clearly $\mathcal{D} = \mathrm{Ker}(\pi)$ and $R = \pi(\Delta)$. In particular, the homomorphisms between classical odd form K-algebras preserve augmentations. The modules R, $\mathcal{D}$, and $\Delta/\mathcal{D}$ are finite projective.

2.4 Twisted forms of classical groups

We identify schemes over a unital commutative ring K with the corresponding functors on the category of unital commutative K-algebras. If G is a reductive group scheme, then we denote its scheme-theoretic center by $\mathbf{C}(G)$ and its automorphism group scheme by $\mathbf{Aut}(G)$. There is an exact sequence

$$1 \to \mathbf{C}(G) \to G \to \mathbf{Aut}(G) \to \mathbf{Out}(G) \to 1$$

of fppf sheaves, where $\mathbf{Out}(G)$ is called the *outer automorphism group scheme*, see [16, theorem 7.1.9] or [17, exp. XXIV, theorem 1.3]. If $(R, \Delta, \mathcal{D})$ is an augmented odd form K-algebra with universal $(\Delta, \mathcal{D})$, then $\mathbf{Aut}(R, \Delta, \mathcal{D})$ denotes the fppf sheaf $E \mapsto \mathrm{Aut}((R, \Delta, \mathcal{D}) \boxtimes_K E)$.

Below we need the factor-groups $\mathrm{PGL}(\ell, -) = \mathrm{GL}(\ell, -)/\mathrm{GL}(1, -)$, $\mathrm{PSp}(2\ell, -) = \mathrm{Sp}(2\ell, -)/\mu_2$, $\mathrm{PSO}(2\ell, -) = \mathrm{SO}(2\ell, -)/\mu_2$ for $\ell > 0$ in the sense of fppf sheaves, also let $\mathrm{PGL}(0, -) = \mathrm{PSp}(0, -) = \mathrm{PSO}(0, -) = 1$ and $\mathrm{PSO}(2\ell + 1, -) = \mathrm{SO}(2\ell + 1, -)$ for all ℓ. Let us call them the *classical projective group schemes*. The group schemes $\mathrm{GL}(\ell, -)^m$, $\mathrm{SL}(\ell, -)^m$, $\mathrm{Sp}(2\ell, -)^m$, $\mathrm{SO}(\ell, -)^m$, $\mathrm{PGL}(\ell, -)^m$, $\mathrm{PSp}(2\ell, -)^m$, and $\mathrm{PSO}(\ell, -)^m$ are reductive for all $\ell, m \geq 0$.

Lemma 14. *If $k_1, \ldots, k_n$ are distinct non-zero integers, then the elements of the type $(a^{k_1} - 1, \ldots, a^{k_n} - 1)$ for $a \in E^*$ generate the fppf sheaf $E \mapsto E^n$ of K-algebras.*

Proof. Let $\mathcal{F}$ be the subsheaf generated by these elements. It suffices to show that $\mathcal{F}(K)$ contains the standard idempotents of K^n. If $n = 1$, then we may consider the fppf extension $E = K[\theta, \theta^{-1}]/(\theta^N - (\theta^{k_1} - 1))$ for sufficiently large N. In this extension θ and $\theta^{k_1} - 1$ is invertible, i.e. $\theta^{k_1} - 1 \in \mathcal{F}(E)$. Since $\mathcal{F}$ is a sheaf of algebras, we obtain $1 \in \mathcal{F}(K)$.

By induction it suffices to consider the case $n = 2$ and $k_1 < k_2$. Consider the fppf extension $E = K[\theta, \theta^{-1}]/(\theta^N - (\theta^{k_1} - 1)(\theta^{k_2} - \theta^{k_1}))$ for sufficiently large N. In this extension $\theta^{k_1} - 1$ and $\theta^{k_2} - \theta^{k_1}$ are invertible, so $(1, 1 + u) \in \mathcal{F}(E)$ for $u = \frac{\theta^{k_2} - \theta^{k_1}}{\theta^{k_1} - 1} \in E^*$. It follows that $(a^{k_1}, a^{k_2} + u) \in \mathcal{F}(E')$ for any extension $E \subseteq E'$ and $a \in E'^*$. Take $E' = E[\psi, \psi^{-1}]/(\psi^{k_2} - u)$, then $(\psi^{k_1}, 0) \in \mathcal{F}(E')$ and $(1, 0) \in \mathcal{F}(K)$. From this and the case $n = 1$ we easily obtain $\mathcal{F}(E) = E^2$. $\square$

Lemma 15. *Let G be one of the group schemes $\mathrm{GL}(\ell, -)^m$, $\mathrm{SL}(\ell, -)^m$, $\mathrm{Sp}(2\ell, -)^m$, or $\mathrm{SO}(\ell, -)^m$ over K and $(R, \Delta, \mathcal{D})$ be the corresponding split classical odd form K-algebra. Then G generates the sheaf $(R \otimes_K (-), \Delta \boxtimes_K (-))$ of odd form algebras unless G is one of the exceptions $\mathrm{SO}(1, -)^m$, $\mathrm{SO}(2, -)^m$, $\mathrm{SL}(1, -)^m$, or $\mathrm{SL}(2, -)^m$ for $m \geq 1$.*

Proof. Without loss of generality, $m = 1$. Let $(S(-), \Theta(-))$ be the subsheaf generated by G. If G is not the special linear group scheme, then $D_i(ae_{ii}) \in G(E)$ for $i \neq 0$ and $a \in E^*$ implies $(a^{-1} - 1)e_{-i,-i} + (a - 1)e_{ii} \in S(E)$, hence $e_i \in S(K)$ for $i \neq 0$ by lemma 14. If G is the special linear group scheme and $\ell \geq 3$, then we apply the same argument to $D_i(ae_{ii})\, D_j(a^2 e_{jj})\, D_k(a^{-3} e_{kk})$ for distinct $i, j, k > 0$.

Let $e_{ij} = 0$ for $ij < 0$ if $(R, \Delta, \mathcal{D}) = \mathrm{AL}(\ell, K)$. Since $T_{ij}(xe_{ij}) \in G(E)$ for $x \in E$ and $0 \neq i \neq \pm j \neq 0$, we have $e_{ij} + \varepsilon e_{-j,-i} \in S(K)$ for such i, j, where $\varepsilon = \pm 1$ depending on G, i, j. Hence $e_{ij} \in S(K)$ for $0 \neq i \neq -j \neq 0$. Also, $e_{-i,i} = e_{-i,j} e_{ji}$ for $\ell \geq 2$. Again using $D_i(ae_{ii}) \in G(E)$ for $i \neq 0$ and $a \in E^*$ (or $D_i(ae_{ii})\, D_j(ae_{jj})$ for $ij < 0$ in the special linear case), we easily get $q_i \in \Theta(K)$ for $i \neq 0$.

If $G = \mathrm{Sp}(2\ell, -)$, then considering $T_i(v_i \cdot x)$ we obtain $e_{-i,i} \in S(K)$ and $v_i \in \Theta(K)$ for all $i \neq 0$. If $G = \mathrm{SO}(2\ell + 1, -)$, then considering $T_i(u_i \cdot x)$ we get $e_{0i}, e_{-i,i} \in S(K)$ and $u_i \in \Theta(K)$ for $i \neq 0$, so $e_{0i} \in S(K)$ for all i unless $\ell = 0$. It follows that $(S, \Theta) = (R, \Delta)$. $\square$

If G is a split reductive group scheme, then $\mathbf{Out}(G)$ is the group scheme associated to the discrete group $\mathrm{Out}(G)$ of automorphisms of the root datum of G preserving the basis of the root system. It may be directly checked that

1. $\mathrm{Out}(\mathrm{GL}(\ell, -)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ for $\ell \geq 1$, it is generated by the automorphism $\sigma \colon e_{ij} \mapsto e_{i \pm (\ell+1), j \pm (\ell+1)}$ of $\mathrm{AL}(\ell, K)$;

2. $\mathbf{Out}(\mathrm{GL}(\ell, -)^m)$ is infinite for $\ell \geq 1$ and $m \geq 2$ and the corresponding automorphism group scheme is not affine;
3. $\mathrm{Out}(\mathrm{SL}(\ell, -)^m) = \mathrm{Out}(\mathrm{PGL}(\ell, -)^m) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m \rtimes \mathrm{S}_m$ for $\ell \geq 3$, it acts by permutations and σ on the factors;
4. $\mathrm{Out}(\mathrm{Sp}(2\ell, -)^m) = \mathrm{Out}(\mathrm{PSp}(2\ell, -)^m) = \mathrm{Out}(\mathrm{SO}(2\ell + 1, -)^m) = \mathrm{S}_m$ for $\ell \geq 1$, it acts by permutations on the factors;
5. $\mathrm{Out}(\mathrm{SO}(2\ell, -)^m) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m \rtimes \mathrm{S}_m$ for $\ell \geq 1$, it acts by permutations and elements of $\mathrm{O}(2\ell, -)$ with the Dickson invariant 1 on the factors;
6. $\mathrm{Out}(\mathrm{PSO}(2\ell, -)^m) = \mathrm{Out}(\mathrm{SO}(2\ell, -)^m)$ for $4 \neq \ell \geq 3$, in the exceptional cases $\mathrm{Out}(\mathrm{PSO}(8, -)^m) = \mathrm{S}_3^m \rtimes \mathrm{S}_m$ and $\mathrm{Out}(\mathrm{PSO}(4, -)^m) = \mathrm{S}_{2m}$.

Theorem 2. *Let G be one of the group schemes*

1. $\mathrm{GL}(\ell, -)$ *for* $\ell \geq 1$, $\mathrm{SL}(\ell, -)^m$ *for* $\ell \geq 3$, $\mathrm{PGL}(\ell, -)^m$ *for* $\ell \geq 3$,
2. $\mathrm{SO}(2\ell + 1, -)^m$ *for* $\ell \geq 1$, $\mathrm{PSO}(2\ell + 1, -)^m$ *for* $\ell \geq 1$,
3. $\mathrm{Sp}(2\ell, -)^m$ *for* $\ell \geq 1$, $\mathrm{PSp}(2\ell, -)^m$ *for* $\ell \geq 1$,
4. $\mathrm{SO}(2\ell, -)^m$ *for* $\ell \geq 2$, $\mathrm{PSO}(4, -)$ *for* $\mathrm{PSO}(2\ell, -)^m$ *for* $4 \neq \ell \geq 3$

over a unital commutative ring K and $(R, \Delta, \mathcal{D})$ be the corresponding split classical odd form K-algebra. Then $\mathbf{Aut}(R, \Delta, \mathcal{D}) \to \mathbf{Aut}(G)$ is an isomorphism.

Proof. Consider the case when G is a subgroup of a unitary group scheme. By lemma 15 we have the inclusions

$$G/\mathbf{C}(G) \leq \mathbf{Aut}(R, \Delta, \mathcal{D}) \leq \mathbf{Aut}(G),$$

and all outer automorphisms of G may be lifted to automorphisms of $(R, \Delta, \mathcal{D})$ by their explicit description.

If G is a projective classical group scheme, then by the same argument G is an open subgroup of finite index of $\mathbf{Aut}(R, \Delta, \mathcal{D})$ (its fiberwise connected component). Since it is a characteristic subgroup, we again have the inclusions

$$G \leq \mathbf{Aut}(R, \Delta, \mathcal{D}) \leq \mathbf{Aut}(G),$$

and all outer automorphisms of G may be lifted to automorphisms of $(R, \Delta, \mathcal{D})$.

The cases $\mathrm{SO}(1, -)^m$ and $\mathrm{PSO}(1, -)^m$ are not covered by lemma 15, but $\mathrm{AO}(1, K)$ has trivial automorphism group. □

It follows that any twisted form of a group scheme from theorem 2 may be constructed by a classical odd form algebra.

2.5 Classical isotropic reductive groups

We use the definition from [36]. Let $\widetilde{G}$ be a Chevalley group scheme over a non-zero unital commutative ring $\widetilde{K}$ with the root system Φ and a basis Δ of Φ. We fix a subset $J \subseteq \Delta$ and a subgroup $\Gamma \leq \mathrm{Out}(\widetilde{G})$ preserving J and transitively acting on the set of the Dynkin diagram components. *Relative roots* are the non-zero images of the roots in the factor-space of $\mathbb{R}\Phi$ by the span of $\Delta \setminus J$ and the elements $g\alpha - \alpha$ for $g \in \Gamma$ and $\alpha \in J$. We denote by π the map from Φ to the factor-space, by $\widetilde{P}$ the standard parabolic subgroup of the type J and by $\widetilde{L}$ its standard Levi subgroup, i.e. $\widetilde{L}$ is the group subscheme generated by the maximal torus and the root subgroups U_α for $\alpha \in (\Delta \setminus J) \cup -(\Delta \setminus J)$, $\widetilde{P}$ is generated by the maximal torus and the root subgroups U_α for $\alpha \in \Delta \cup -(\Delta \setminus J)$.

Now suppose that $\widetilde{K}$ is a faithfully flat K-algebra and G is a reductive group scheme over K obtained from $\widetilde{G}$ by descent. We consider the isomorphism $\psi \colon i_1^*(\widetilde{G}) \to i_2^*(\widetilde{G})$ from the descent datum as an automorphism of the Chevalley group scheme over $\widetilde{K} \otimes_K \widetilde{K}$. G is called a *simple isotropic reductive group scheme* if this isomorphism lies in $((\widetilde{L}/\mathbf{C}(\widetilde{G})) \rtimes \mathbf{J})(\widetilde{K} \otimes_K \widetilde{K})$, where $\mathbf{J}$ is the discrete group scheme associated with J. The dimension of the span of $\pi(\Phi)$ is called the *isotropic rank* of G.

If G is a simple isotropic reductive group scheme and A is a relative root, then the associated *root subgroup* of G is the descent of $\prod_{i \geq 1} \prod_{\alpha \in \pi^{-1}(iA)} U_{i\alpha}$, it is nilpotent. Such root subgroups satisfy a generalized Chevalley commutator formula [36, lemma 9]. Finally, we say that G is classical if the components of its Dynkin diagram are of types ABCD.

Theorem 3. *Let $K \neq 0$ be a unital commutative ring and G be a classical simple isotropic reductive group scheme of isotropic rank ℓ over K. Suppose that G is obtained from a classical odd form K-algebra $(R, \Delta, \mathcal{D})$. Then there is a homomorphism $\mathrm{H}(m, K) \to (R \rtimes K, \Delta)$ of unital odd form K-algebras inducing a Peirce decomposition of (R, Δ) such that*

1. *$m \in \{\ell, \ell+1\}$ and the set of the relative roots of G is canonically identified with a subset of the root system of (R, Δ);*
2. *$Re_iR = R$ for $i \neq 0$ if $m = \ell$, $Re_iR + Re_{-i}R = R$ for $i \neq 0$ if $m = \ell + 1$;*

3. *if α is a relative root, then $U_\alpha \leq G$ is a root subgroup in the sense of unitary group schemes of augmented odd form algebras (or the image of a root subgroup in $\mathbf{Aut}(R, \Delta, \mathcal{D})$);*
4. *an ultrashort root α from the root system of type BC_m is a relative root if $U_{2\alpha} < U_\alpha$;*
5. *a non-ultrashort root α is a relative root if $U_\alpha \neq 1$.*

Moreover, if G is of adjoint type and $\ell \geq 3$, then such $(R, \Delta, \mathcal{D})$ always exists.

Proof. Let $(\widetilde{R}, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\mathcal{D}})$ be the scalar extension of $(R, \Delta, \mathcal{D})$ by $\widetilde{K}$. Without loss of generality, $(\widetilde{R}, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\mathcal{D}})$ splits and $\widetilde{G}$ is constructed by this odd form algebra in the standard way.

We apply root elimination to the standard Peirce decompositions of the indecomposable components of $(\widetilde{R}, \widetilde{\Delta})$ (i.e. the odd form algebras $\mathrm{AL}(n, \widetilde{K})$, $\mathrm{AO}(2n+1, \widetilde{K})$, $\mathrm{ASp}(2n, \widetilde{K})$, or $\mathrm{AO}(2n, \widetilde{K})$). If some element of Γ induces the outer automorphism on a component $\mathrm{AO}(2n, \widetilde{K})$ (i.e. the non-trivial automorphism of D_{2n}, it is actually induced by a reflection from the unitary group), then we eliminate the root e_n. If some element of Γ induces the outer automorphism on a component $\mathrm{AL}(n, \widetilde{K})$, then we eliminate the roots $\mathrm{e}_i + \mathrm{e}_{n+1-i}$ for $1 \leq i < n+1-i$ and the root $\mathrm{e}_{(n+1)/2}$ if n is odd. Next, we eliminate the images of the roots from $\Delta \setminus J$ in each component of $(\widetilde{R}, \widetilde{\Delta})$.

Now the group Γ identifies the numberings of the Peirce decompositions of the components of $(\widetilde{R}, \widetilde{\Delta})$, so we obtain a Peirce decomposition of $(\widetilde{R}, \widetilde{\Delta})$ as the direct product of these Peirce decompositions. It has the rank $m \in \{\ell, \ell+1\}$, the case $m = \ell+1$ happens precisely if the components of $(\widetilde{R}, \widetilde{\Delta})$ are $\mathrm{AL}(n, \widetilde{K})$ and Γ does not incudes their outer automorphisms. Moreover, the resulting Peirce decomposition is induced by a homomorphism $\mathrm{H}(\ell, \widetilde{K}) \to (\widetilde{R} \rtimes K, \widetilde{\Delta})$ of unital odd form $\widetilde{K}$-algebras and this homomorphism descents to the homomorphism $\mathrm{H}(\ell, K) \to (R \rtimes K, \Delta)$ with the required properties.

Finally, we have to check that (R, Δ) exists if G is of adjoint type and $\ell \geq 3$. This follows from theorem 2 unless G is a twisted form of $\mathrm{PSO}(8, -)^m$. In this case we identify $\widetilde{G}$ with the fiberwise connected component of $\mathbf{Aut}(\mathrm{PSO}(8, \widetilde{K})^m)$ in such a way that if Γ induces an outer automorphism of D_4, then it swaps $\mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3$ with $\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3$. Then ψ from the descent datum lies in $\mathrm{Aut}(\mathrm{PSO}(8, \widetilde{K} \otimes_K \widetilde{K})^m)$. $\square$

More generally, a reductive group scheme G over K is called *isotropic* if there is a decomposition $K = \prod_{i=1}^n K_i$ for non-zero K_i and G restricted to each K_i is a product of finitely many simple isotropic reductive group schemes [36]. For our purposes it suffices to work with simple reductive group schemes by proposition 6 below.

Chapter 3. Centrality of K_2-functor

3.1 Pro-objects

Recall that a *multisorted algebraic theory* $\mathcal{T}$ is a small cartesian multicategory. A $\mathcal{T}$*-algebra* in a cartesian category $\mathcal{C}$ is a functor $\mathcal{T} \to \mathcal{C}$. Let us denote the category of $\mathcal{T}$-algebras in $\mathcal{C}$ and their homomorphisms (i.e. the natural transformations) by $\mathcal{T}(\mathcal{C})$.

Suppose that the morphisms of $\mathcal{T}$ are given by explicit generators (*functional symbols*) and relations (*axioms*) of morphisms. The first-order terms t of the generators of $\mathcal{T}$ determine morphisms in $\mathcal{T}$ and the corresponding morphisms in $\mathcal{C}$ for each $\mathcal{T}$-algebra A in $\mathcal{C}$. We write $x \in A_i$ for a variable x of t and an object A_i of A if x has the sort $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$.

For example, the theory of groups $\mathcal{G}rp$ has only one object $*$, it is generated by the morphisms of multiplication, inversion, and identity satisfying the group axioms. Its algebras are precisely group objects in categories. The formal identity $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ between terms of $\mathcal{G}rp$ describes an identity in all group objects since it follows from the axioms (or by Yoneda lemma since it holds in abstract groups). The theory of odd form rings is denoted by $\mathcal{OFR}$.

An odd form ring object (R, Δ) *acts* on an odd form ring object (S, Θ) in a cartesian category $\mathcal{C}$ if the tuple $(R, \Delta; S, \Theta)$ is an algebra for the theory of actions of odd form rings. In other words, there are multiplications $R \times S \to S$, $S \times R \to S$, $\Theta \times R \to \Theta$, $\Delta \times S \to \Theta$ in $\mathcal{C}$ satisfying (A1)–(A10). Such actions are in bijection with *semidirect products*, i.e. the structures $(S \rtimes R, \Theta \rtimes \Delta)$ of an odd form ring object on $(S \times R, \Theta \times \Delta)$ such that the morphisms $(S, \Theta) \to (S \rtimes R, \Theta \rtimes \Delta) \leftrightarrows (R, \Delta)$ are homomorphisms.

We use the terminology from [34, chapter I, §1]. An *inverse system* X in a category $\mathcal{C}$ is a contravariant functor $\mathcal{I}_X \to \mathcal{C}$, where $\mathcal{I}_X$ is a small filtered category. A *morphism* of inverse systems $f \colon X \to Y$ consists of a map $f^* \colon \mathrm{Ob}(I_Y) \to \mathrm{Ob}(I_X)$ and morphisms $f_i \colon X_{f^*(i)} \to Y_i$ for all objects $i \in \mathrm{Ob}(I_Y)$ such that for all $\varphi \in \mathcal{I}_Y(i, j)$ there are $k \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_X)$, $\psi \in \mathcal{I}_X(k, f^*(i))$, and $\theta \in \mathcal{I}_X(k, f^*(j))$ satisfying $f_i \circ X_\psi = Y_\varphi \circ f_j \circ X_\theta \colon X_k \to Y_i$. The inverse systems and their morphisms form a category.

The *pro-completion* $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ is its factor-category by the following equivalence relation: $f \sim g\colon X \to Y$ if for all $i \in \mathrm{Ob}(I_Y)$ there are $j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}_X)$, $\varphi \in \mathcal{I}_X(j, f^*(i))$, $\psi \in \mathcal{I}_X(j, g^*(i))$ such that $f_i \circ X_\varphi = g_i \circ X_\psi\colon X_j \to Y_i$. By [34, chapter I, §1.1, remark 4],

$$\mathrm{Pro}(\mathcal{C})(X, Y) = \varprojlim_{j \in \mathcal{I}_Y} \varinjlim_{i \in \mathcal{I}_X} \mathcal{C}(X_i, Y_j).$$

If X is an inverse system and $u\colon \mathcal{J} \to \mathcal{I}_X$ is a cofinal functor, then the canonical morphism $X \to u^*X = X \circ u$ is an isomorphism in $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$.

The canonical embedding functor $\mathcal{C} \to \mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ is fully faithful and every inverse system X is a projective limit of itself in $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$. Sometimes we write $\varprojlim^{\mathrm{Pro}(\mathcal{C})}_{i \in \mathcal{I}_X} X_i$ instead of X.

A morphism $f\colon X \to Y$ of inverse systems in $\mathcal{C}$ is called *level* if it is an inverse system in the category of morphisms of $\mathcal{C}$, i.e. $\mathcal{I}_X = \mathcal{I}_Y$, $f^*(i) = i$ for all i, and $f_i \circ X_\varpi = Y_\varphi \circ f_j$ for all $\varphi\colon i \to j$. Each morphism in $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ is isomorphic to a level morphism if we replace both inverse systems by their compositions with cofinal functors and choose an appropriate representation of the morphism [34, chapter I, §1.3, theorem 3].

If $\mathcal{C}$ is a regular category, then $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ is also regular by [25, example 1.11]. For such categories every level morphism $f\colon X \to Y$ of inverse systems admits the componentwise decomposition $X \to \mathrm{Im}(f) \to Y$, where the left morphism consists of regular epimorphisms (so it is a regular epimorphism of pro-objects) and the right one consists of monomorphisms (so it is a monomorphism of pro-objects). For any algebraically coherent semi-abelian category $\mathcal{C}$ the pro-completion $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ is also algebraically coherent semi-abelian by [25, the list after example 1.12]. In particular, $\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})$, $\mathrm{Pro}(\mathbf{Rng})$, and $\mathrm{Pro}(\mathbf{OFR})$ are algebraically coherent semi-abelian. The categories $\mathcal{G}rp(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ and $\mathcal{OFR}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ are homological by [11, example 4.6.3], split extensions in these categories coincide with classical semi-direct products up to isomorphisms.

Let $\mathcal{T}$ be a finitely presented multisorted algebraic theory, i.e. a cartesian multicategory with a finite set of objects such that its morphisms are given by finitely many generators and relations. Then it is easy to see that the functor $\mathrm{Pro}(\mathcal{T}(\mathbf{Set})) \to \mathcal{T}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ is fully faithful, so we may identify abstract pro-$\mathcal{T}$-algebras with the corresponding $\mathcal{T}$-algebras in $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$. This applies in particular to the theories $\mathcal{G}rp$ and $\mathcal{OFR}$. The functors $\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp}) \to \mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ и

$\mathrm{Pro}(\mathbf{OFR}) \to \mathrm{Pro}(\mathbf{Set})^2$ preserve and reflect finite limits, monomorphisms, and regular epimorphisms.

Split extension of odd form pro-rings are their semi-direct product as odd form ring objects in $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$. The next theorem shows that any semi-direct product of odd form pro-rings in $\mathcal{OFR}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ is isomorphic to an odd form pro-ring, i.e. actions of odd form pro-rings as odd form ring objects in $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ coincide with actions in the sense of semi-abelian categories. A similar result holds for pro-groups and pro-rings [53].

Theorem 4. *Let (R, Δ) and (S, Θ) be odd form pro-rings such that (R, Δ) acts on (S, Θ) as an odd form ring object in* $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$*. Then there are odd form rings $(R', \Delta') \cong (R, \Delta)$ and $(S', \Theta') \cong (S, \Theta)$ with the same index category such that the action of (R', Δ') on (S', Θ') is given by level morphisms and (R', Δ') is a composition of (R, Δ) with a cofinal functor between the index categories. The same holds for unital actions.*

Proof. We omit the maps $(R, \Delta)_\varphi$ and $(S, \Theta)_\varphi$ in the formulas. We may assume that the index categories of (R, Δ) and (S, Θ) are posets such that for each index there are only finitely many smaller indices [34, chapter I, §1.4, theorem 4]. For any $i \in \mathcal{I}_{(S,\Theta)}$ let $(\widetilde{S}_i, \widetilde{\Theta}_i)$ be the free odd form ring with an action of $(R_{f(i)}, \Delta_{f(i)})$ containing $(S_{g(i)}, \Theta_{g(i)})$ for sufficiently large $f(i)$ and $g(i)$, it is constructed in proposition 2. Replacing $\mathcal{I}_{(S,\Theta)}$ by $\mathcal{I}_{(S,\Theta)} \times \mathcal{I}_{(R,\Delta)}$ if necessary we may assume that f and g are monotone, f is cofinal, and $g(i) \geq i$.

Using the action of (R, Δ) on (S, Θ) and increasing f and g if necessary we may construct the homomorphisms $h_i \colon (\widetilde{S}_i, \widetilde{\Theta}_i) \to (S_i, \Theta_i)$ such that

$$\begin{aligned}
b &\mapsto b, & v &\mapsto v,\\
a \otimes b &\mapsto ab, & u \boxtimes b &\mapsto u \cdot b,\\
b \otimes a &\mapsto ba, & v \boxtimes a &\mapsto v \cdot a,\\
a \otimes b \otimes a' &\mapsto (ab)a' = a(ba'), & u \boxtimes b \otimes a &\mapsto (u \cdot b) \cdot a = u \cdot ba
\end{aligned}$$

for all $a, a' \in R_{f(i)}$, $b \in S_{g(i)}$, $u \in \Delta_{f(i)}$, $v \in \Theta_{g(i)}$, where the multiplication maps are obtained from a fixed representative of the action. Moreover, we may assume that $h \colon (\widetilde{S}, \widetilde{\Theta}) \to (S, \Theta)$ is a level morphism of inverse systems of odd form rings.

Let (S'_i, Θ'_i) be the odd form factor-rings of $(\widetilde{S}_i, \widetilde{\Theta}_i)$ by the $(R_{f(i)}, \Delta_{f(i)})$-invariant odd form ideals spanned by $a \otimes b - ab$, $a \otimes b \otimes a' - aba'$, $u \boxtimes b \dotminus u \cdot b$,

$v \boxtimes a \dot{-} v \cdot a$, $u \boxtimes b \otimes a \dot{-} u \cdot ba$ (they lie in the kernels of h_i), where $a, a' \in R_j$, $u \in \Delta_j$, $b \in S_k$, $v \in \Theta_k$ for sufficiently large j and k. We obtain an isomorphism $(S', \Theta') \to (S, \Theta)$ of odd form pro-rings with the inverse given by the canonical morphisms $(S_{g(i)}, \Theta_{g(i)}) \to (S'_i, \Theta'_i)$. Also, (R', Δ') acts on (S', Θ') by level morphisms and this action is isomorphic to the action from the statement, where $(R'_i, \Delta'_i) = (R_{f(i)}, \Delta_{f(i)})$. In the unital case we add the generators $1 \otimes b - b$ and $v \boxtimes 1 \dot{-} v$ to the defining ideal of (S'_i, Θ'_i). $\square$

If an odd form pro-ring (R, Δ) has an identity $e_i \in R_i$ in $\mathcal{OFR}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$, then it is isomorphic to the inverse system of the unital odd form rings $(R_i/I_i, \Delta_i/\Gamma_i)$, where (I_i, Γ_i) are generated by $ae_i - a$ and $u \cdot e_i \dot{-} u$.

We need a construction of pro-groups using generators and relations. Let G be a pro-group and $f \colon X \to G$ be a morphism of pro-sets such that the identities $\prod_{j=1}^{n_i} f(g_{ij}(y))^{\varepsilon_{ij}} = 1$ hold for $1 \leq i \leq m$, where $g_{ij} \in \mathrm{Pro}(\mathbf{Set})(Y_i, X)$ and $\varepsilon_{ij} \in \{-1, 1\}$. We say that G satisfies the *universal property* if for any pro-set P, pro-group G', and morphism $f' \in \mathrm{Pro}(\mathbf{Set})(P \times X, G')$ such that $\prod_{j=1}^{n_i} f'(p, g_{ij}(y))^{\varepsilon_{ij}} = 1$ for all i there is a unique $h \in \mathrm{Pro}(\mathbf{Set})(P \times G, G')$ such that

$$h(p, xy) = h(p, x)\, h(p, y), \qquad f'(p, x) = h(p, f(x)).$$

The universal pro-group is unique up to a unique isomorphism, we denote it by

$$\big\langle x, x \in X \mid \prod_{j=1}^{n_i} g_{ij}(y)^{\varepsilon_{ij}} = 1, y \in Y_i \big\rangle.$$

In applications often $X = \coprod_{k=1}^{m} X_k$ for some X_k, in this case we say that G is generated by the morphisms $X_k \to G$ satisfying some relations.

Lemma 16. *The universal pro-group always exists. If $g_{ij} \colon Y_i \to X$ are level morphisms of inverse systems of sets, then*

$$\begin{aligned} &\big\langle x, x \in X \mid \prod_{j=1}^{n_i} g_{ij}(y)^{\varepsilon_{ij}} = 1, y \in Y_i \big\rangle \\ &\qquad = \varprojlim_{k \in \mathcal{I}_X}^{\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})} \big\langle x, x \in X_k \mid \prod_{j=1}^{n_i} (g_{ij})_k(y)^{\varepsilon_{ij}} = 1, y \in (Y_i)_k \big\rangle, \end{aligned}$$

where in the right hand side we use abstract groups with explicit presentations.

Proof. Any finite acyclic diagram of pro-sets is isomorphic to an inverse system of diagrams of sets [26, theorem 6.4.3], so it suffices to check that the pro-group G from the statement is universal. Let $f' \colon P \times X \to G'$ be such that $\prod_{j=1}^{n_i} f'(p, g_{ij}(y))^{\varepsilon_{ij}} = 1$. Without loss of generality, G' is an abstract group. Then f' is represented by a map $P_k \times X_l \to G'$ satisfying the same identities. The required $h \colon P \times G \to G'$ is represented by the induced map $P_k \times G_l \to G'$. Clearly, such h is unique. □

The *abelianization* of a pro-group G is the pro-group A generated by a homomorphism $f \colon G \to A$ with the relation $[f(x), f(y)] = 1$. It exists and may be represented by an inverse system of abelian groups by lemma 16.

3.2 Colocalization

If $\mathcal{C}$ is a cartesian category, then we construct the cartesian category $\overline{\mathcal{C}}$ as follows. Let

1. $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{C}}) = \mathrm{Ob}(\mathbf{Set}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
2. $\overline{\mathcal{C}}((X, C), (Y, D)) = \mathbf{Set}(X, Y) \times \mathbf{Set}(X, \mathcal{C}(C, D))$;
3. $\mathrm{id}_{(X,C)} = (\mathrm{id}_X, x \mapsto \mathrm{id}_C)$;
4. $(f, u) \circ (g, v) = (f \circ g, x \mapsto u(g(x)) \circ v(x))$.

Finite products in $\overline{\mathcal{C}}$ may be computed componentwise. It is easy to see that the functors $\mathbf{Set} \to \overline{\mathcal{C}}, X \mapsto (X, 1)$ and $\mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}, C \mapsto (\{*\}, C)$ are fully faithful and preserve finite products, so we identify $\mathbf{Set}$ and $\mathcal{C}$ with the subcategories of $\overline{\mathcal{C}}$.

$\mathcal{T}$-algebras in $\overline{\mathcal{C}}$ may be used to define actions of abstract algebraic objects on algebras in $\mathcal{C}$. We say that a group G acts on a group object H in a category $\mathcal{C}$ if it acts on H as a group object in $\overline{\mathcal{C}}$, and similarly for odd form rings. In the case of groups this is essentially a homomorphism $G \to \mathcal{C}(H, H)$, but for odd form rings we do not have an analogue of the automorphism group.

A group G may act on a group object H in $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ inside $\overline{\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})}$ or as a pro-group. We say that the action is *weak* in the first case and *strong* in the second case. A weak action of G on $H = \varprojlim^{\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})}_{i \in \mathcal{I}_H} H_i$ is given by a map $a^* \colon G \times \mathcal{I}_H \to \mathcal{I}_H$ and a family $a_{gi} \colon H_{a^*(g,i)} \to H_i$ for $g \in G$, $i \in \mathcal{I}_H$ satisfying some conditions. A strong action is given by a map $a^* \colon \mathcal{I}_H \to \mathcal{I}_H$ and a family $a_i \colon H_{a^*(i)} \to H_{a^*(i)}$ for $i \in \mathcal{I}_H$ satisfying some conditions. Clearly, every strong action induces a weak action. Weak and strong actions of odd form rings on objects of $\mathcal{OFR}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ are be defined similarly.

Let (R, Δ) be an odd form K-algebra and $S \leq K^\bullet$. The localization $(S^{-1}R, S^{-1}\Delta)$ was already constructed in section 2.2. Consider the filtered category $\mathcal{S}$ with $\mathrm{Ob}(\mathcal{S}) = S$ and $\mathcal{S}(s, s') = \{s'' \in S \mid s' = ss''\}$. The *colocalization* of (R, Δ) by S is the inverse system

$$(R^{(\infty,S)}, \Delta^{(\infty,S)}) = \varprojlim_{s \in \mathcal{S}}^{\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})} (R^{(s)}, \Delta^{(s)})$$

of odd form rings, where

1. $R^{(s)} = \{a^{(s)} \mid a \in R\}$, $a^{(s)} + b^{(s)} = (a+b)^{(s)}$, $a^{(s)} b^{(s)} = (asb)^{(s)}$, $\overline{a^{(s)}} = \bar{a}^{(s)}$;
2. $\Delta^{(s)}$ is the group generated by $u^{(s)}$ for $u \in \Delta$ and $\phi(a^{(s)})$ for $a \in R$ with the following relations: $\phi\colon R^{(s)} \to \Delta^{(s)}$ is a homomorphism with central image, $(u \dotplus v)^{(s)} = u^{(s)} \dotplus v^{(s)}$, $\phi(a)^{(s)} = \phi((as)^{(s)})$, $\phi((a + \bar{a})^{(s)}) = \phi((\bar{a}ka)^{(s)}) = \dot{0}$ for $a \in R$, $k \in K$, $u, v \in \Delta$;
3. $\pi(u^{(s)}) = \pi(u)^{(s)}$, $\rho(u^{(s)}) = (\rho(u)s)^{(s)}$, $u^{(s)} \cdot a^{(s)} = (u \cdot sa)^{(s)}$;
4. the structure homomorphisms $(R^{(ss')}, \Delta^{(ss')}) \to (R^{(s)}, \Delta^{(s)})$ are given by the formulas $a^{(ss')} \mapsto (as')^{(s)}$ and $u^{(ss')} \mapsto (u \cdot s')^{(s)}$.

If an odd form ring (T, Ξ) acts on (R, Δ), then it strongly acts on $(R^{(\infty,S)}, \Delta^{(\infty,S)})$ (and on all $(R^{(s)}, \Delta^{(s)})$) by

1. $pa^{(s)} = (pa)^{(s)}$, $a^{(s)}p = (ap)^{(s)}$;
2. $u^{(s)} \cdot p = (u \cdot p)^{(s)}$, $\phi(a^{(s)}) \cdot p = \phi((\bar{p}ap)^{(s)})$, $w \cdot a^{(s)} = (w \cdot a)^{(s)}$;

and $(S^{-1}T, S^{-1}\Xi)$ weakly acts on $(R^{(\infty,S)}, \Delta^{(\infty,S)})$ by the formulas

1. $\frac{p}{s} a^{(ss')} = (pa)^{(s')}$, $a^{(ss')} \frac{p}{s} = (ap)^{(s')}$;
2. $u^{(s^2 s')} \cdot \frac{p}{s} = (u \cdot sp)^{(s')}$, $\phi(a^{(s^2 s')}) \cdot \frac{p}{s} = \phi((\bar{p}ap)^{(s')})$, $(t \cdot \frac{1}{s}) \cdot a^{(ss')} = (t \cdot a)^{(s')}$.

In particular, this holds for $(T, \Xi) = (R \rtimes K, \Delta)$. Finally, the canonical morphism $(R^{(\infty,S)}, \Delta^{(\infty,S)}) \to (R, \Delta)$ is a crossed module in $\mathrm{Pro}(\mathbf{OFR})$. It is easy to see that up to isomorphisms $(R^{(\infty,S)}, \Delta^{(\infty,S)})$ are the odd form pro-rings from [55].

3.3 Firm Peirce decompositions

There is a canonical bijection between Peirce decompositions of an odd form ring object (R, Δ) in $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$, weak actions of $\mathrm{H}(\ell, \mathbb{Z})$ on it, and strong actions of $\mathrm{H}(\ell, \mathbb{Z})$ on it. By theorem 4, any odd form pro-ring with a Peirce decomposition is isomorphic to an inverse system of odd form rings with Peirce decompositions. The *Steinberg pro-group* $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ of an odd form pro-ring (R, Δ) with a Peirce decomposition is the pro-group generated by $X_\alpha\colon (R \cup \Delta)_\alpha \to \mathrm{StU}(R, \Delta)$ for $\alpha \in \Phi$ with the Steinberg relations. There is a morphism $\mathrm{st}\colon \mathrm{StU}(R, \Delta) \to \mathrm{U}(R, \Delta)$ and the analogue of lemma 10 holds.

A Peirce decomposition of an odd form pro-ring (R, Δ) is called *firm* if for all non-zero i, j, k the pro-group R_{ik} is generated by the multiplication morphisms $R_{il} \times R_{lk} \to R_{ik}$ for $l = \pm j$ with the relations

1. $ab + cd = cd + ab$ for $a \in R_{il}$, $b \in R_{lk}$, $c \in R_{il'}$, $d \in R_{l'k}$, $l, l' \in \{-j, j\}$;
2. $(a + b)c = ac + bc$, $a(b + c) = ab + ac$;
3. $(ab)c = a(bc)$ for $a \in R_{il}$, $b \in R_{ll'}$, $c \in R_{l'k}$, $l, l' \in \{-j, j\}$;

and the pro-group Δ^0_k is generated by the multiplication morphisms $\Delta^0_l \times R_{lk} \to \Delta^0_k$ for $l = \pm j$ and the morphism $\phi\colon R_{-k,k} \to \Delta^0_k$ satisfying

1. $[\phi(a), u \cdot b] = \dot{0}$, $\phi(a + b) = \phi(a) \dotplus \phi(b)$, $\phi(\bar{a}) = \dot{-}\phi(a)$;
2. $[u \cdot a, v \cdot b] = \phi(\,\overline{b}\ \overline{\pi(v)}\, \pi(u) a)$ for $u \in \Delta^0_l$, $a \in R_{lk}$, $v \in \Delta^0_{l'}$, $b \in R_{l'k}$, $l, l' \in \{-j, j\}$;
3. $(u \dotplus v) \cdot a = u \cdot a \dotplus v \cdot a$, $u \cdot (a + b) = u \cdot a \dotplus \phi(\,\overline{b}\, \rho(u) a) \dotplus u \cdot b$;
4. $\phi(a) \cdot b = \phi(\,\overline{b}\, ab)$;
5. $u \cdot ab = (u \cdot a) \cdot b$ for $u \in \Delta^0_l$, $a \in R_{ll'}$, $b \in R_{l'k}$, $l, l' \in \{-j, j\}$.

A Peirce decomposition is called *strongly firm* if the above holds already for $l, l' = j$. Such a Peirce decomposition is necessarily firm.

Lemma 17. *Let (R, Δ) be an odd form K-algebra with a firm or strongly firm Peirce decomposition. Then the induced Peirce decompositions on $(S^{-1}R, S^{-1}\Delta)$ and $(R^{(\infty, S)}, \Delta^{(\infty, S)})$ are firm or strongly firm respectively.*

Proof. We give the proof for firm Peirce decompositions, the strongly firm case is similar. For any odd form pro-ring (T, Ξ) with a Peirce decomposition let $T_{i,|j|} \otimes T_{|j|,k}$ and $\Xi_{|j|} \boxtimes T_{|j|,k}$. be the universal pro-groups from the definition of firmness. We denote the universal morphisms by

$$\begin{aligned} (-) \otimes (=)\colon T_{i,\pm j} \times T_{\pm j,k} &\to T_{i,|j|} \otimes T_{|j|,k}, \\ (-) \boxtimes (=)\colon \Xi_{\pm j} \times T_{\pm j,k} &\to \Xi_{|j|} \boxtimes T_{|j|,k}, \\ \phi\colon T_{-k,k} &\to \Xi_{|j|} \boxtimes T_{|j|,k}. \end{aligned}$$

The homomorphisms

$$S^{-1}R_{i,|j|} \otimes S^{-1}R_{|j|,k} \to S^{-1}R_{ik}, \qquad S^{-1}\Delta_{|j|} \boxtimes S^{-1}R_{|j|,k} \to S^{-1}\Delta_k$$

have the inverses

$$\tfrac{a \otimes b}{s} \mapsto \tfrac{a}{s} \otimes \tfrac{b}{1}, \qquad (u \boxtimes a) \cdot \tfrac{1}{s} \mapsto (u \cdot \tfrac{1}{1}) \boxtimes (a \cdot \tfrac{1}{s}), \qquad \phi(a) \cdot \tfrac{1}{s} \mapsto \phi(\tfrac{a}{s^2}).$$

The morphisms $R^{(\infty,S)}_{i,|j|} \otimes R^{(\infty,S)}_{|j|,k} \to R^{(\infty,S)}_{ik}$ and $\Delta^{(\infty,S)}_{|j|} \boxtimes R^{(\infty,S)}_{|j|,k} \to \Delta^{(\infty,S)}_{k}$ have the inverses

$$\begin{aligned}(a \otimes b)^{(s^4)} &\mapsto (as)^{(s)} \otimes (bs)^{(s)};\\ (u \boxtimes a)^{(s^4)} &\mapsto (u \cdot s)^{(s)} \boxtimes (as)^{(s)};\\ \phi(a^{(s^4)}) &\mapsto \phi((as^3)^{(s)}).\end{aligned}$$

Here we do not construct the homomorphisms from $R^{(s^2)}_{ik}$ since the s-th component of $R^{(\infty,S)}_{i,|j|} \otimes R^{(\infty,S)}_{|j|,k}$ has only the relation $(abs)^{(s)} \otimes c^{(s)} = a^{(s)} \otimes (bcs)^{(s)}$ instead of $(ab)^{(s)} \otimes c^{(s)} = a^{(s)} \otimes (bc)^{(s)}$. □

An *orthogonal hyperbolic family* of rank ℓ in an odd form K-algebra (R, Δ) is a homomorphism $\mathrm{H}(\ell, K) \to (R \rtimes K, \Delta)$ of unital odd form K-algebras such that $e_i \in Re_jR + Re_{-j}R$ for $i, j \neq 0$. If, moreover, $e_i \in Re_jR$ for all $i, j \neq 0$, then the orthogonal hyperbolic family is called *strong*. For example, $\mathrm{AO}(2\ell+1, K)$, $\mathrm{ASp}(2\ell, K)$, and $\mathrm{AO}(2\ell, K)$ have strong orthogonal hyperbolic families of rank ℓ, and $\mathrm{AL}(\ell, K)$ has a canonical orthogonal hyperbolic family of rank ℓ.

Lemma 18. *If (R, Δ) has an orthogonal hyperbolic family, then the induced Peirce decomposition is firm. If the orthogonal hyperbolic family is strong, then the Peirce decomposition is strongly firm.*

Proof. Assume that the Peirce decomposition is firm. Let $e_k = \sum_{m=\pm j} \sum_t x_{mt} y_{mt}$ for $x_{mt} \in R_{km}$ and $y_{mt} \in R_{mk}$, where $j, k \neq 0$. If $\sum_{l=\pm j} \sum_p a_{lp} b_{lp} = 0$ for $a_{lp} \in R_{il}$, $b_{lp} \in R_{lk}$, and $i \neq 0$, then using the notation from the proof of lemma 17 we have

$$\sum_{lp} a_{lp} \otimes b_{lp} = \sum_{lmpt} a_{lp} b_{lp} x_{mt} \otimes y_{mt} = 0 \in R_{i,|j|} \otimes R_{|j|,k}.$$

If $\dot{\sum}_{l=\pm j} \dot{\sum}_p u_{lp} \cdot a_{lp} \dotplus \phi(b) = \dot{0}$ for $u_{lp} \in \Delta_l$, $a_{lp} \in R_{lk}$, $b \in R_{-k,k}$, then

$$\dot{\sum_{lp}} u_{lp} \boxtimes a_{lp} \dotplus \phi(b) = \phi\Big(\sum_{lp} \sum_{(m,t)<(m',t')} \overline{y_{m't'}}\,\overline{x_{m't'}}\,\overline{a_{lp}} \rho(u_{lp}) a_{lp} x_{mt} y_{mt} + b\Big)$$

$$\dotplus \dot{\sum_{mt}} \Big(\dot{\sum_{lp}} u_{lp} a_{lp}\Big) x_{mt} \boxtimes y_{mt} = \dot{0} \in \Delta_{|j|} \boxtimes R_{|j|,k}.$$

The strongly firm case is similar. □

Lemma 19. *Let (R, Δ) be an odd form pro-ring with a firm Peirce decomposition of rank $\ell \geq 3$. Then $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ is perfect, i.e. its abelianization is trivial.*

Proof. This follows from (St4), (St5), and (St8). □

Proposition 5. *Let (R, Δ) be an odd form pro-ring with a firm Peirce decomposition of rank $\ell \geq 3$ and $\alpha \in \Phi$. Then*

$$F_\alpha \colon \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha) \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi)$$

is a regular epimorphism of pro-groups. If $\Phi/\{\alpha, \beta\}$ is defined and the Peirce decomposition is strongly firm or β is ultrashort, then

$$F_{\{\alpha,\beta\}} \colon \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\{\alpha, \beta\}) \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi)$$

is also a regular epimorphism.

Proof. Let G be the image of F_α or $F_{\{\alpha,\beta\}}$. We have to check that all root subgroups $X_\gamma(R, \Delta) \leq \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi)$ lie in G. This is clear if $\gamma \notin \mathbb{R}\alpha$ or $\gamma \notin \mathbb{R}\alpha + \mathbb{R}\beta$. From now on assume that γ is one of the eliminated roots. If $\gamma = \mathrm{e}_i - \mathrm{e}_k$ is short, then we may take $j \notin \{0, \pm i, \pm k\}$ such that $\mathrm{e}_i - \mathrm{e}_j$ and $\mathrm{e}_j - \mathrm{e}_k$ are not eliminated and apply (St4). If $\gamma = 2\mathrm{e}_k$ is long, then we apply (St5). Finally, if $\gamma = \mathrm{e}_k$ is ultrashort, then we apply (St8) and the known case of the long root $2\mathrm{e}_k$. □

If (R, Δ) and (R', Δ') are odd form pro-rings with firm or strongly firm Peirce decompositions of rank ℓ, then the product Peirce decomposition of $(R \times R', \Delta \times \Delta')$ is also firm or strongly firm.

Proposition 6. *Let (R, Δ) and (R', Δ') be odd form pro-rings with firm Peirce decompositions of rank $\ell \geq 3$. Then the canonical morphism*

$$\mathrm{StU}(R \times R', \Delta \times \Delta') \to \mathrm{StU}(R, \Delta) \times \mathrm{StU}(R', \Delta')$$

is an isomorphism of pro-groups.

Proof. It is easy to see that there are natural sections from $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ and $\mathrm{StU}(R', \Delta')$ to $G = \mathrm{StU}(R \times R', \Delta \times \Delta')$ and these sections generate G as a pro-group. It remains to check that they commute. But the subgroups $X_\alpha(R, \Delta)$ and $X_\beta(R', \Delta')$ commute for linearly independent α and β by the Chevalley commutator formula, so $X_\alpha(R, \Delta)$ and $\mathrm{StU}(R', \Delta')$ commute by proposition 5. □

3.4 Root elimination

Let (R, Δ) be an odd form pro-ring with a firm Peirce decomposition of rank ℓ and $\alpha = \mathrm{e}_m$ or $\alpha = \mathrm{e}_m - \mathrm{e}_l$ be a root. We are going to prove that $F_\alpha\colon \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha) \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi)$ is an isomorphism if $\ell \geq 4$, $\ell = 3$ and the Peirce decomposition is strongly firm, or $\ell = 3$ and α is ultrashort. Let $\widetilde{X}_\beta\colon (R \cup \Delta)_\beta \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha)$ be the canonical morphisms for $\beta \in \Phi \setminus \mathbb{R}\alpha$, i.e. they take values in $X_{\pi_\alpha(\beta)}(R, \Delta)$ and $F_\alpha(\widetilde{X}_\beta(\mu)) = X_\beta(\mu)$. In order to construct the remaining root subgroups let

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}^i_{lm}(a, b) &= [\widetilde{X}_{li}(a), \widetilde{X}_{im}(b)] \text{ при } i \notin \{0, \pm l, \pm m\};\\
\widetilde{X}^\pi_{lm}(u, v) &= [\widetilde{X}_m(v), \widetilde{X}_{-l}(u)];\\
\widetilde{X}^{-l}_{lm}(u, a) &= [X_{-l}(u), X_{-l,m}(a)]\, X_m(u \cdot (-a));\\
\widetilde{X}^{-m}_{lm}(a, u) &= [\widetilde{X}_m(\dot{-} u), \widetilde{X}_{l,-m}(a)]\, \widetilde{X}_{-l}(u \cdot \bar{a})
\end{aligned}$$

in the case $\alpha = \mathrm{e}_m$ and

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}^i_{-m,m}(a, b) &= [\widetilde{X}_{-m,i}(a), \widetilde{X}_{im}(b)] \text{ при } i \notin \{0, \pm m\};\\
\widetilde{X}^i_m(u, a) &= \widetilde{X}_{-i,m}(\overline{\rho(u)} a)\, [\widetilde{X}_i(\dot{-} u), \widetilde{X}_{im}(-a)] \text{ при } i \notin \{0, \pm m\}
\end{aligned}$$

in the case $\alpha = \mathrm{e}_m - \mathrm{e}_l$. We denote the subgroup of $\mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha)$ generated by these morphisms by $\widetilde{X}_\alpha(R, \Delta)$. There is a morphism $\mathrm{eval}\colon \widetilde{X}_\alpha(R, \Delta) \to (R \cup \Delta)_\alpha$ such that $X_\alpha(\mathrm{eval}(g)) = F_\alpha(g)$. Namely,

$$\begin{aligned}
\mathrm{eval}(\widetilde{X}^i_{lm}(a, b)) &= ab, & \mathrm{eval}(\widetilde{X}^\pi_{lm}(u, v)) &= \overline{\pi(u)}\pi(v),\\
\mathrm{eval}(\widetilde{X}^{-l}_{lm}(u, a)) &= \rho(u)a, & \mathrm{eval}(\widetilde{X}^{-m}_{lm}(a, u)) &= a\rho(u),\\
\mathrm{eval}(\widetilde{X}^i_{-m,m}(a, b)) &= \phi(ab), & \mathrm{eval}(\widetilde{X}^i_m(u, a)) &= u \cdot a.
\end{aligned}$$

Lemma 20. *If $\beta \in \Phi/\alpha$ and g is a generating morphism of $\widetilde{X}_\alpha(R, \Delta)$, then ${}^g X_\beta(\mu) = X_\beta({}^{\mathrm{st}(g)}\mu)$.*

Proof. Let $\Psi \subseteq \Phi$ be the saturated root subsystem of rank 2 from the definition of g. If $\beta \notin \Psi/\alpha$, then the identity follows from lemma 10. Otherwise we apply proposition 5 to $F_\beta \colon \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\Psi) \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha)$ in order to replace X_β by a product of root elements with the roots not in Ψ. $\square$

In the next lemmas we implicitly use the group-theoretic identities

$$[x, y] = [y, x]^{-1}; \qquad [xy, z] = {}^{x}[y, z]\,[x, z];$$
$${}^{x}[y, z] = [[x, y]\,y, [x, z]\,z]; \qquad [x, yz] = [x, y]\,{}^{y}[x, z].$$

Lemma 21. *If $\alpha = \mathrm{e}_m$, then there is a unique isomorphism $\widetilde{X}_m \colon \Delta^0_m \to \widetilde{X}_\alpha(R, \Delta)$ of pro-groups such that $F_\alpha(\widetilde{X}_m(u)) = X_m(u)$.*

Proof. First of all we construct a morphism $\widetilde{X}_{-m,m} \colon (R \cup \Delta)_{2\alpha} \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha)$ of pro-groups such that $\widetilde{X}^i_{-m,m}(a, b) = \widetilde{X}_{-m,m}(ab)$. By lemma 20 every generating morphism of $\widetilde{X}_m(R, \Delta)$ commutes with $\widetilde{X}^i_{-m,m}$. It easily follows from the same lemma that

$$\widetilde{X}^i_{-m,m}(a + b, c) = \widetilde{X}^i_{-m,m}(a, c)\,\widetilde{X}^i_{-m,m}(b, c);$$
$$\widetilde{X}^i_{-m,m}(a, b + c) = \widetilde{X}^i_{-m,m}(a, b)\,\widetilde{X}^i_{-m,m}(a, c).$$

Evaluating ${}^{\widetilde{X}_{-m,j}(a)}[\widetilde{X}_{ji}(b), \widetilde{X}_{im}(c)]$ in two ways using lemma 20 we obtain

$$\widetilde{X}^i_{-m,m}(ab, c) = \widetilde{X}^j_{-m,m}(a, bc)$$

for $i \neq \pm j$ and hence for all $i, j \notin \{0, \pm m\}$. It follows that the required morphism $\widetilde{X}_{-m,m}$ exists, it satisfies $\widetilde{X}_{-m,m}(a) = \widetilde{X}_{-m,m}(-\bar{a})$.

Now we construct $\widetilde{X}_m$. By lemma 20 we have

$$[g, \widetilde{X}^i_m(u, a)] = \widetilde{X}_{-m,m}(\bar{a}\overline{\pi(u)}\pi(\mathrm{eval}(g)))$$

for every generating morphism g of the pro-group $\widetilde{X}_m(R, \Delta)$. Also,

$$\widetilde{X}_m(u \dotplus v, a) = \widetilde{X}_m(u, a)\,\widetilde{X}_m(v, a);$$
$$\widetilde{X}_m(u, a + b) = \widetilde{X}_m(u, a)\,\widetilde{X}_{-m,m}(\overline{b}\,\rho(u)a)\,\widetilde{X}_m(u, b).$$

Evaluating ${}^{\widetilde{X}_{im}(-c)}[\widetilde{X}_{-i,j}(a), \widetilde{X}_{ji}(b)]$ and ${}^{\widetilde{X}_{jm}(-b)}[\widetilde{X}_i(\dot{-}u), \widetilde{X}_{ij}(-a)]$ in two ways using lemma 20 we obtain

$$\widetilde{X}^i_m(\phi(ab), c) = \widetilde{X}_{-m,m}(\bar{c}abc) \text{ при } a \in R_{-i,j}, b \in R_{ji};$$
$$\widetilde{X}^i_m(u, ab) = \widetilde{X}^j_m(u \cdot a, b)$$

for $i \neq \pm j$ and hence for all $i, j \notin \{0, \pm m\}$. In the last identity both sides are not homomorphisms on a, so we cannot directly use that $R_{ij} \times R_{j,\pm i} \to R_{i,\pm i}$ is generating, but the fraction $\widetilde{X}^i_m(u, ab)\, \widetilde{X}^j_m(u \cdot a, b)^{-1}$ is a homomorphism on a. These identities and the firmness of the Peirce decomposition imply that $\widetilde{X}_m$ exists. $\square$

Lemma 22. *Suppose that (R, Δ) is an odd form pro-ring with a Peirce decomposition of rank $\ell = 3$ satisfying $R_{ij} R_{jk} = R_{ik}$ for $i, j, k \neq 0$, A is an abelian pro-group, and $\{-, =, \equiv\}_{ij} \colon R_{1i} \times R_{ij} \times R_{j3} \to A$ are polyadditive morphisms of pro-sets for $i, j \in \{-2, 2\}$ satisfying*

(As1) $\{x, yz, w\}_{ik} = \{xy, z, w\}_{jk} + \{x, y, zw\}_{ij}$;

(As2) $\{x, y, \bar{x} z\}_{-i,i} = 0$;

(As3) $\{x, yz, w\}_{ij} = \{\bar{y}, \bar{x} z, w\}_{-i,j}$;

(As4) $\{x, y, zw\}_{ij} = -\{\bar{z}, \bar{y}, \bar{x} w\}_{-j,-i}$.

Then $\{x, y, z\}_{ij} = 0$ for all i, j.

Proof. The last two relations imply that

$$\{ax, \bar{y} b, c\}_{ij} = \{ay, \bar{x} b, c\}_{-i,j}; \tag{As5}$$

$$\{a, bx, \bar{y} c\}_{ji} = \{a, by, \bar{x} c\}_{j,-i} \tag{As6}$$

for $x \in R_{1i}$ and $y \in R_{1,-i}$. From (As3) and (As5) we obtain

$$\{axyb, c, d\}_{ij} = \{ayxb, c, d\}_{ij}; \tag{As7}$$

$$\{zwa, b, c\}_{ij} = \{wza, b, c\}_{ij} \tag{As8}$$

for $x, y \in R_{\pm 1, \pm 1}$ and $z, w \in R_{11}$. Let $(I, \Gamma) \trianglelefteq (R, \Delta)$ be the odd form ideal generated by $xy - yx$ for $x, y \in R_{11}$ (it is the pair of pro-groups generated by the formulas from lemma 6). Then $\{x, y, z\}_{ij}$ factor through $R \to R/I$ by the identities (As4)–(As8), so from now on we may assume that $I = 0$. Moreover,

$$\{rx, y e_1 z, w e_1 t\}_{ij} = \{x, y r z, w e_1 t\}_{ij} = \{x, y e_1 z, w r t\}_{ij} \tag{As9}$$

for $r \in R_{11}$. It remains to show that $\{x, y, z\}_{22} = 0$.

From (As2), (As4), and (As6) it follows that

$$\{ax, bx, c\}_{22} = 0; \tag{As10}$$

$$\{a, yb, yc\}_{22} = 0. \tag{As11}$$

for $x \in R_{12}$ and $y \in R_{21}$. Using (As1), (As9), (As10), (As11), and the linearizations of (As10), (As11) we obtain

$$\begin{aligned}\{x, y(mn)^4 z, wt\}_{22} &= \{xym, n(mn)^3 z, wt\}_{22} + \{(mn)^3 x, ym, nzwt\}_{22} \\ &= \{xym, nz', w(mn)^2 t\}_{22} + \{x', y(mn)^2 m, nzwt\}_{22} \\ &= -\{xyz', (nm)^2, w't\}_{22} - \{x', (nm)^2, y'zwt\}_{22} = 0\end{aligned}$$

for $x, m, z \in R_{12}$, $y, n, w \in R_{21}$, $t \in R_{13}$, where $z' = mnz - znm$, $w' = wmn - nmw$, $x' = mnx - xnm$, $y' = ymn - nmy$. The last equality follows from

$$z'n = mw' = x'n = my' = 0.$$

Finally, if $f \colon X \to R_{11}$ generates R_{11} as an ideal, then the morphism $f(x)^n$ also generates R_{11} as an ideal for any $n \geq 1$. Since the multiplication $R_{12} \times R_{21} \to R_{11}$ generates R_{11} as an ideal, the claim follows. $\square$

Lemma 23. *If $\alpha = \mathrm{e}_m - \mathrm{e}_l$, then there is a morphism $\widetilde{X}_{lm} \colon R_{lm} \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha)$ such that $F_\alpha(\widetilde{X}_{lm}(a)) = X_{lm}(a)$, it is unique and invertible.*

Proof. By lemma 20 the generating morphisms of $\widetilde{X}_\alpha(R, \Delta)$ commute, i.e. $\widetilde{X}_\alpha(R, \Delta)$ is an abelian pro-group. From the same lemma we obtain

$$\begin{aligned}\widetilde{X}^i_{lm}(a + b, c) &= \widetilde{X}^i_{lm}(a, c)\, \widetilde{X}^i_{lm}(b, c); \\ \widetilde{X}^i_{lm}(a, b + c) &= \widetilde{X}^i_{lm}(a, b)\, \widetilde{X}^i_{lm}(a, c); \\ \widetilde{X}^\pi_{lm}(u \dotplus v, w) &= \widetilde{X}^\pi_{lm}(u, w)\, \widetilde{X}^\pi_{lm}(v, w); \\ \widetilde{X}^\pi_{lm}(u, v \dotplus w) &= \widetilde{X}^\pi_{lm}(u, v)\, \widetilde{X}^\pi_{lm}(u, w); \\ \widetilde{X}^{-l}_{lm}(u \dotplus v, a) &= \widetilde{X}^{-l}_{lm}(u, a)\, \widetilde{X}^\pi_{lm}(u, v \cdot (-a))\, \widetilde{X}^{-l}_{lm}(v, a); \\ \widetilde{X}^{-l}_{lm}(u, a + b) &= \widetilde{X}^{-l}_{lm}(u, a)\, \widetilde{X}^{-l}_{lm}(u, b).\end{aligned}$$

There is an involution $\sigma \in \mathrm{W}(\Phi)$ such that $\sigma(\mathrm{e}_i) = \mathrm{e}_i$ for $i \notin \{\pm l, \pm m\}$, $\sigma(\mathrm{e}_l) = -\mathrm{e}_m$, $\sigma(\mathrm{e}_m) = -\mathrm{e}_l$. It preserves α and swaps the generating morphisms $\widetilde{X}^{-l}_{lm}$ and $\widetilde{X}^{-m}_{lm}$, so the identities involving $\widetilde{X}^{-m}_{lm}$ may be obtained from the corresponding identities with $\widetilde{X}^{-l}_{lm}$ applying σ. Also, $[\widetilde{X}_{-m,i}(a), \widetilde{X}_{i,-l}(b)] = \widetilde{X}^{-i}_{lm}(-\,\bar{a}\,,\,\bar{b}\,)$ and $[\widetilde{X}_{-l}(v), \widetilde{X}_m(u)] = \widetilde{X}^\pi_{lm}(\dot{-}v, u)$.

Let us evaluate the expressions ${}^{\widetilde{X}_{li}(a)}[\widetilde{X}_{ij}(b), \widetilde{X}_{jm}(c)]$, ${}^{\widetilde{X}_{-l}(u)}[\widetilde{X}_{-l,i}(a), \widetilde{X}_{im}(b)]$, ${}^{\widetilde{X}_{l,-i}(a)}[\widetilde{X}_i(u), \widetilde{X}_{im}(b)]$, ${}^{\widetilde{X}_{im}(-a)}[\widetilde{X}_i(v), \widetilde{X}_{-l}(u)]$, ${}^{\widetilde{X}_{-l}(\dot{-}u)}[\widetilde{X}_{-m,i}(a), \widetilde{X}_{im}(b)]$, and

${}^{\widetilde{X}_{-l,m}(-c)}[\widetilde{X}_{li}(a), \widetilde{X}_{i,-l}(b)]$ in two ways using lemma 20. We obtain

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}^i_{lm}(a, bc) &= \widetilde{X}^j_{lm}(ab, c);\\
\widetilde{X}^{-l}_{lm}(u, ab) &= \widetilde{X}^i_{lm}(\rho(u)a, b);\\
\widetilde{X}^i_{lm}(a\rho(u), b) &= \widetilde{X}^{-i}_{lm}(a, \rho(u)b);\\
\widetilde{X}^\pi_{lm}(u, v \cdot a) &= \widetilde{X}^i_{lm}(\overline{\pi(u)}\pi(v), a);\\
\widetilde{X}^\pi_{lm}(u, \phi(ab)) &= 1;\\
\widetilde{X}^{-l}_{lm}(\phi(ab), c) &= \widetilde{X}^i_{lm}(a, bc)\, \widetilde{X}^{-i}(\overline{b}, \bar{a}c)^{-1}
\end{aligned}$$

respectively for $i \neq \pm j$ and $i, j \notin \{0, \pm l, \pm m\}$. From this it easily follows that

$$\widetilde{X}^\pi_{lm}(u, \phi(a)) = 1;$$

and evaluating ${}^{\widetilde{X}_{-l,m}(b)}[\widetilde{X}_i(u), \widetilde{X}_{i,-l}(-a)]$ in two ways using these identities we get

$$\widetilde{X}^{-l}_{lm}(v \cdot a, b) = \widetilde{X}^i_{lm}(\bar{a}\rho(v), ab).$$

If $\ell \geq 4$, then $\widetilde{X}^i_{lm}(a, bc) = \widetilde{X}^j_{lm}(ab, c)$ for $i = \pm j$, so the required $\widetilde{X}_{lm}$ exists. Otherwise we apply lemma 22 to $\{x, y, z\}_{ij} = \widetilde{X}_j(xy, z)\, \widetilde{X}_i(x, yz)^{-1}$ for $i, j \notin \{0, \pm l, \pm m\}$. The identities from the statement of the lemma 22 are precisely the relations between the generators of $\widetilde{X}_{lm}(R, \Delta)$ if we substitute $u = \phi(xy)$ and $v = \phi(z)$ for appropriate x, y, z. □

Theorem 5. *Let (R, Δ) be an odd form pro-ring with a firm Peirce decomposition of rank ℓ and $\alpha \in \Phi$. Suppose that one of the following holds:*

1. *$\ell \geq 4$,*
2. *$\ell = 3$ and the Peirce decomposition is strongly firm,*
3. *$\ell = 3$ and α is ultrashort.*

Then $F_\alpha\colon \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha) \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi)$ is an isomorphism.

Proof. By lemmas 21 and 23 there is a root morphism $\widetilde{X}_\alpha$. Since we may replace α by $-\alpha$, there are root morphisms in $\mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha)$ for all roots of Φ. They satisfy the Steinberg relations by construction and lemma 20. It follows that there is a well-defined morphism $G_\alpha\colon \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi) \to \mathrm{StU}(R, \Delta; \Phi/\alpha)$ of pro-groups such that $G_\alpha(F_\alpha(g)) = g$. But F_α is a regular epimorphism by proposition 5, so it is an isomorphism with the inverse G_α. □

3.5 Finiteness conditions

The *Jacobson radical* $\mathrm{J}(R)$ of a ring is the set of all $x \in R$ such that RxR consists of quasi-invertible elements. We say that an odd form ring (R, Δ) is *semisimple* if R is a semisimple unital ring (i.e. a product of finitely many matrix algebras over division rings by the Wedderburn–Artin theorem). An odd form ring (R, Δ) is called *semilocal* if R is semilocal, i.e. $R / \mathrm{J}(R)$ is a semisimple unital ring. Finally, we say that (R, Δ) is *ind-semilocal* if it is a direct limit of semilocal odd form rings, and similarly for ordinary rings.

An odd form K-algebra (R, Δ) is called *finite* if R and $\Delta / \phi(R)$ are finite K-modules, as in the case of classical odd form algebras. Also, (R, Δ) is called *locally finite* if R is a locally finite K-algebra, i.e. every finite subset of R generates a finite K-subalgebra. The following conditions on (R, Δ) are equivalent:

1. it is locally finite over K;
2. all its finitely generated odd form K-subalgebras are finite;
3. it is a direct limit of finite K-algebras;
4. there are a small filtered category $\mathcal{I}$, finitely generated unital commutative rings K_i, and finite odd form K_i-algebras (R_i, Δ_i) for $i \in \mathcal{I}$ such that $K = \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} K_i$ and $(R, \Delta) = \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} (R_i, \Delta_i)$.

The class of locally finite odd form K-algebras is closed under taking subalgebras, factor-algebras, localizations, direct limits, semidirect products, and crossed modules.

Every finite odd form algebra (R, Δ) over a semilocal K is also semilocal: $R\, \mathrm{J}(K) \leq \mathrm{J}(R)$ and any finite algebra over a field is semilocal. If (R, Δ) is locally finite over a semilocal K, then it is ind-semilocal.

If (T, Ξ) is a special unital odd form ring constructed by a unital associative K-algebra R such that R is finite or locally finite, then (T, Ξ) is finite or locally finite odd form K-algebra. If (T, Ξ) is constructed by a finitely presented module M_R with a hermitian form B and an odd form parameter $\mathcal{L}$, where R is a locally finite unital K-algebra with a λ-involution trivial on K, then (T, Ξ) is a locally finite odd form K-algebra. Indeed, $\mathrm{End}(M_R)$ is locally finite over K as the factor-algebra of $\{x \in \mathrm{M}(n, R) \mid xN \leq N\}$, where N is the kernel of a surjection $R^n \to M$.

We are going to give a presentation of $\mathrm{U}(R, \Delta)$ by elementary generators in the ind-semilocal case.

Lemma 24. *Let R be an ind-semilocal ring with a Peirce decomposition of rank ℓ, i.e. $R = \bigoplus_{1 \leq i,j \leq \ell} R_{ij}$, $R_{ij}R_{kl} = 0$ for $j \neq k$, $R_{ij}R_{jl} \leq R_{il}$. Then*

$$R^\circ = U^+(R) \circ \mathrm{D}(R) \circ U^-(R) \circ U^+(R),$$

where $U^+(R) = \prod^\circ_{i<j} R_{ij}$, $U^-(R) = \prod^\circ_{i>j} R_{ij}$, and $\mathrm{D}(R) = \prod^\circ_i R^\circ_{ii}$.

Proof. We may use the corresponding odd form ring in order to apply the results of the first chapter. Applying root elimination and induction we may reduce the claim to the case $\ell = 2$. By lemma 11 it suffices to check that for every $g \in R^\circ$ there is $x \in R_{12}$ such that the component of $g \circ x$ in R_{22} is quasi-invertible.

Without loss of generality, R is semilocal. Since the quasi-invertibility may be checked modulo the Jacobson ideal, we may assume that R is semisimple. Finally, decomposing R into a product of matrix rings and applying root elimination in another direction (i.e. decomposing the idempotents) we may assume that $R = \mathrm{M}(\ell, D)$ for a division ring D and some $\ell \geq 0$. In this case the claim is trivial: if $e_\ell g e_\ell = 0$, then choose $i < \ell$ such that $e_\ell g e_i \neq 0$ and take $x = e_{i\ell} \in R$. Otherwise let $x = 0$. □

Lemma 25. *Let (R, Δ) be an ind-semilocal odd form ring with a firm Peirce decomposition of rank $\ell \geq 1$. Then*

$$\mathrm{U}(R, \Delta) = \Omega(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_1)\, U^+(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_1),$$

where $\Omega(R, \Delta)$ is the subset from lemma 11.

Proof. We prove a bit more general statement about every $g \in \mathrm{U}(R, \Delta)$ in order to use reduction to the semilocal case. Instead of the firmness of the Peirce decomposition suppose that there is $1 \leq k < \ell$ such that $e_i \pi(g) e_j \in \sum_{-k \leq t \leq k;\, t \neq 0} R_{it} R_{tj}$ for all $k < i \leq \ell$ and $j < i$. Let us prove that

$$g \in \Omega(R, \Delta; \Phi/\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k\})\, U^+(R, \Delta; \Phi/\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k\}).$$

As in the proof of lemma 24, using lemma 11 we may reduce the claim to the following case: R is semisimple, (R, Δ) is special unital, the Peirce decomposition is indecomposable (i.e. R_{ii} are division rings for $i \neq 0$), and $k = \ell - 1$. We have to find $g' \in g\, U^+(R, \Delta; \Phi/\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k\})$ such that $e_\ell \alpha(g') e_\ell$ is invertible in the division ring $R_{\ell\ell}$. Consider the possible cases:

1. If $e_\ell \alpha(g) e_\ell$ is invertible, then we take $g' = g$.

2. If $e_\ell \alpha(g) e_\ell = 0$ and $e_\ell \alpha(g) e_i \neq 0$ for some $-\ell < i < \ell$ with $i \neq 0$, then take $g' = g\, T_{i\ell}(x)$ for some $0 \neq x \in R_{i\ell}$ (it exists since R is semisimple).
3. If $e_\ell \alpha(g) = e_\ell \alpha(g)(e_{-\ell} + e_0)$ and $e_\ell \alpha(g) e_{-\ell} \neq 0$, then we take the element $g' = g\, T_{-\ell,t}(x)\, T_{t\ell}(y)$ for some t, $x \neq 0$, $y \neq 0$ (they exist by our assumption on g).
4. Finally, if $e_\ell \alpha(g) = e_\ell \alpha(g) e_0$, then $e_\ell \alpha(g) e_0 \overline{\alpha(g)} e_\ell = e_\ell$ and we may take $g' = g\, T_\ell(u)$, where u is the component of g^{-1} in Δ^0_ℓ (it is well-defined modulo $\phi(R_{-\ell,\ell})$). □

Proposition 7. *Let (R, Δ) be an ind-semilocal odd form ring with a firm Peirce decomposition of rank $\ell \geq 1$. Then the group $\mathrm{U}(R, \Delta)$ is generated by $X_\alpha(R, \Delta)$ and $\mathrm{D}(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_i)$, the only relations between the subgroups are the Steinberg relations and the elements from*

$$\mathrm{D}(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_i) * \mathrm{D}(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_j) * \mathop{\Huge *}_{\substack{l=\pm i \\ m=\pm j}} T_{lm}(R, \Delta)$$

for $1 \leq i < j \leq \ell$ with the trivial images in $\mathrm{U}(R, \Delta)$.

Proof. Let G be the group with the presentation from the statement, so there are homomorphisms $\mathrm{GStU}(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_1) \to G$ and $\mathrm{GStU}(R, \Delta) \to G$. Let us show that $G = \Omega(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_1)\, U^+(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_1)$. The right hand side is a non-empty subset closed under multiplication on $U^+(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_1)$ and $\mathrm{D}(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_1)$ from the right, so it remains to check that it is preserved under the action of the Weyl group of Φ. By definition, it is stable under the reflection $\mathrm{e}_1 \mapsto -\mathrm{e}_1$, and by lemma 25 applied to an odd form subring it is stable under the transposition $\mathrm{e}_1 \leftrightarrow \mathrm{e}_2$. Finally, it is stable under the remaining generators $\mathrm{e}_i \leftrightarrow \mathrm{e}_{i+1}$ for $2 \leq i \leq \ell - 1$ by lemma 24. Using the decomposition of G, it is easy to check that $G \to \mathrm{U}(R, \Delta)$ is surjective by lemma 25 and injective by lemma 11. □

3.6 Steinberg crossed modules

Theorem 6. *Let (R, Δ) be an ind-semilocal odd form ring with a firm Peirce decomposition of rank $\ell \geq 3$. Then there is a unique action of $\mathrm{U}(R, \Delta)$ on $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ such that $\mathrm{st} \colon \mathrm{StU}(R, \Delta) \to \mathrm{U}(R, \Delta)$ is a crossed module.*

Proof. There is a canonical action of

$$G = \mathrm{StU}(R, \Delta) * \mathrm{D}(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_1) * \ldots * \mathrm{D}(R, \Delta; \Phi/\mathrm{e}_\ell)$$

on $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ making st equivariant by theorem 5. Since $\mathrm{U}(R, \Delta)$ is a factor-group of G and the generators of the kernel from proposition 7 act trivially on $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ by proposition 5, the required action exists. Finally, $\mathrm{StU}(R, \Delta) \to \mathrm{EU}(R, \Delta)$ is a central perfect extension by the crossed module structure and lemma 19, so the action is unique. □

Now let (R, Δ) be a locally finite odd form K-algebra with a firm Peirce decomposition of rank ℓ. Let $\mathrm{can}_S^{S'} \colon (R^{(\infty, S')}, \Delta^{(\infty, S')}) \to (R^{(\infty, S)}, \Delta^{(\infty, S)})$ be the canonical morphisms of pro-groups for all $S \leq S' \leq K^\bullet$. Inside the indices we write $\mathfrak{p}$ instead of $S = K \setminus \mathfrak{p}$ for prime ideals $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(K)$, x instead of $S = \{1, x, x^2, \ldots\}$ for $x \in K$, and omit $S = \{1\}$.

Lemma 26. *If $\ell \geq 4$ or $\ell = 3$ and the Peirce decomposition is strongly firm, then for every $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(K)$ there is a unique weak action of $\mathrm{U}(R_\mathfrak{p}, \Delta_\mathfrak{p})$ on $\mathrm{StU}(R^{(\infty, \mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty, \mathfrak{p})})$ continuing the weak actions of the generators from proposition 7. The morphism $\mathrm{st} \colon \mathrm{StU}(R^{(\infty, \mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty, \mathfrak{p})}) \to \mathrm{U}(R^{(\infty, \mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty, \mathfrak{p})})$ is equivariant with respect to this action.*

Proof. The groups $X_\alpha(R, \Delta)$ and $\mathrm{D}(R_\mathfrak{p}, \Delta_\mathfrak{p}; \Phi/\mathrm{e}_i)$ weakly act on the pro-groups $\mathrm{StU}(R^{(\infty, \mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty, \mathfrak{p})}; \Phi/\alpha)$ and $\mathrm{StU}(R^{(\infty, \mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty, \mathfrak{p})}; \Phi/\mathrm{e}_i)$ in the canonical way. By theorem 5, they weakly act on $(R^{(\infty, \mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty, \mathfrak{p})})$. Finally, by propositions 5 and 7 these weak actions give a unique weak action of $\mathrm{U}(R_\mathfrak{p}, \Delta_\mathfrak{p})$. The equivariance of st is trivial. □

Lemma 27. *The families $\mathrm{can}_S^\mathfrak{p} \colon R_{lm}^{(\infty, \mathfrak{p})} \to R_{lm}^{(\infty, S)}$ and $\mathrm{can}_S^\mathfrak{p} \colon \Delta_m^{(\infty, \mathfrak{p}), 0} \to \Delta_m^{(\infty, S), 0}$, where $\mathfrak{p}$ runs over the prime ideal of K disjoint with $S \leq K^\bullet$, are jointly epimorphic in $\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})$.*

Proof. Take morphisms $f_1, f_2 \colon \Delta_m^{(\infty, S), 0} \to G$ of pro-groups such that their compositions with $\mathrm{can}_S^\mathfrak{p}$ coincide for all $\mathfrak{p}$ disjoint with S, so we have to prove that $f_1 = f_2$. Without loss of generality, G is an abstract group and f_i are given by homomorphisms from $\Delta_m^{(s), 0}$ for $s \in S$. Consider the sets

$$\mathfrak{a} = \{k \in K \mid f_1(\phi(k a^{(s)})) = f_2(\phi(k a^{(s)})) \text{ for all } a \in R_{-m,m}\};$$
$$\mathfrak{b} = \{k \in K \mid f_1(u^{(s)} \cdot k) = f_2(u^{(s)} \cdot k) \text{ for all } u \in \Delta_m^0\}.$$

The set $\mathfrak{a}$ is an ideal not contained in any prime ideal disjoint with S, so it intersects S. Increasing s, we may assume that $\mathfrak{a} = K$. Then $\mathfrak{b}$ is also an ideal intersecting S. The claim about R_{lm} may be proved similarly by considering the ideal

$$\mathfrak{c} = \{k \in K \mid f_1(ka^{(s)}) = f_2(ka^{(s)}) \text{ for all } a \in R_{lm}\}. \qquad \square$$

Lemma 28. *Let $K = \sum_{i=1}^n Kx_i$. Then $\operatorname{can}^{x_i} \colon R_{lm}^{(\infty, x_i)} \to R_{lm}$ give a pro-group presentation with the relations*

1. $[\operatorname{can}^{x_i}(a), \operatorname{can}^{x_j}(b)]. = \dot{0}$ *for all i, j*
2. $\operatorname{can}^{x_i}(a + b) = \operatorname{can}^{x_i}(a) \dotplus \operatorname{can}^{x_i}(b)$;
3. $\operatorname{can}^{x_i}(\operatorname{can}^{x_i x_j}_{x_i}(a)) = \operatorname{can}^{x_j}(\operatorname{can}^{x_i x_j}_{x_j}(b))$ *for $i < j$.*

Also, $\phi \colon R_{-m,m} \to \Delta^0_m$ and $\operatorname{can}^{x_i} \colon \Delta^{(\infty, x_i), 0}_m \to \Delta^0_m$ give a pro-group presentation with the relations

1. $\phi(a + b) = \phi(a) \dotplus \phi(b)$, $\operatorname{can}^{x_i}(u \dotplus v) = \operatorname{can}^{x_i}(u) \dotplus \operatorname{can}^{x_i}(v)$;
2. $[\phi(a), \phi(b)]. = [\phi(a), \operatorname{can}^{x_i}(u)]. = \dot{0}$;
3. $[\operatorname{can}^{x_i}(u), \operatorname{can}^{x_j}(v)] = \phi(\overline{\pi(\operatorname{can}^{x_j}(v))}\pi(\operatorname{can}^{x_i}(u)))$ *for all i, j;*
4. $\operatorname{can}^{x_i}(\phi(a)) = \phi(\operatorname{can}^{x_i}(a))$;
5. $\operatorname{can}^{x_i}(\operatorname{can}^{x_i x_j}_{x_i}(u)) = \operatorname{can}^{x_j}(\operatorname{can}^{x_i x_j}_{x_j}(u))$ *for $i < j$.*

Proof. We may assume that

$$R^{(\infty, x_i)}_{lm} = \varprojlim_{k \geq 0}^{\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})} R^{(x_i^k)}_{lm}, \qquad \Delta^{(\infty, x_i), 0}_m = \varprojlim_{k \geq 0}^{\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})} \Delta^{(x_i^k), 0}_m.$$

Let $\widetilde{R}_{lm}$ and $\widetilde{\Delta}^0_m$ be the pro-groups with the presentations from the statement. The inverse morphisms to $\widetilde{R}_{lm} \to R_{lm}$ and $\widetilde{\Delta}^0_m \to \Delta^0_m$ are given by the formulas

$$a \mapsto \dot{\sum_i} \operatorname{can}^{x_i}((y_{ik} a)^{(x_i^k)}), \quad u \mapsto \dot{\sum_i} \operatorname{can}^{x_i}((u \cdot y_{ik})^{(x_i^k)}) \dotplus \phi\big(\rho(u) \sum_{i<j} x_i^k x_j^k y_{ik} y_{jk}\big),$$

where $1 = \sum_i y_{ik} x_i^k$ for some $y_{ik} \in K$. $\square$

Theorem 7. *Let (R, Δ) be a locally finite odd form K-algebra with a Peirce decomposition of rank ℓ. Suppose that one of the following holds:*

1. *$\ell \geq 4$ and the Peirce decomposition is firm;*
2. *$\ell = 3$ and the Peirce decomposition is strongly firm.*

Then there is a unique action of $\mathrm{U}(R, \Delta)$ on $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ making the homomorphism $\mathrm{st} \colon \mathrm{StU}(R, \Delta) \to \mathrm{U}(R, \Delta)$ a crossed module. In particular, $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ is a perfect central extension of $\mathrm{EU}(R, \Delta)$ and $\mathrm{EU}(R, \Delta)$ is a normal subgroup of $\mathrm{U}(R, \Delta)$.

Proof. For every $g \in \mathrm{U}(R, \Delta)$ we construct an endomorphism ${}^g(-)$ of $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ such that $\mathrm{can}^{\mathfrak{p}}({}^g h) = {}^g\mathrm{can}^{\mathfrak{p}}(h)$ for all $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(K)$ and $h \in \mathrm{StU}(R^{(\infty,\mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty,\mathfrak{p})})$, where $\mathrm{U}(R, \Delta)$ weakly acts on $\mathrm{StU}(R^{(\infty,\mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty,\mathfrak{p})})$ by lemma 26. Take a prime ideal $\mathfrak{p}$, then by lemma 25 there is $x \notin \mathfrak{p}$ such that the image of g in $\mathrm{U}(R_x, \Delta_x)$ is a product of elementary transvections and an element from $\mathrm{D}(R_x, \Delta_x; \Phi/\mathrm{e}_1)$. By theorem 5 we obtain an automorphism ${}^g(-)$ of $\mathrm{StU}(R_x, \Delta_x)$ such that $\mathrm{can}^{\mathfrak{p}}_x({}^g h) = {}^g\mathrm{can}^{\mathfrak{p}}_x(h)$ for all $x \notin \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(K)$ and $h \in \mathrm{StU}(R^{(\infty,\mathfrak{p})}, \Delta^{(\infty,\mathfrak{p})})$. By lemmas 27 and 28 applied to all root subgroups of the group $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ we get the homomorphisms ${}^g X_\alpha(-)\colon (R \cup \Delta)_\alpha \to \mathrm{StU}(R, \Delta)$ for all $\alpha \in \Phi$ satisfying the requirement. Finally, ${}^g(-)$ preserves the Steinberg relations by lemma 27, since (St3)–(St8) may be written as equalities between homomorphisms on any of the variables.

Notice that the endomorphisms ${}^g(-)$ of the group $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ are unique by lemma 27, so $\mathrm{U}(R, \Delta)$ acts on $\mathrm{StU}(R, \Delta)$. By lemmas 26 and 27 the homomorphism $\mathrm{st}\colon \mathrm{StU}(R, \Delta) \to \mathrm{U}(R, \Delta)$ is a crossed module. Using this and lemma 19, we obtain that $\mathrm{StU}(R, \Delta) \to \mathrm{EU}(R, \Delta)$ is a perfect central extension, so the uniqueness follows. $\square$

Actually, $\mathrm{EU}(R, \Delta)$ is normal in $\mathrm{U}(R, \Delta)$ for any locally finite odd form K-algebra with a firm Peirce decomposition of rank $\ell \geq 3$. This may be proved as theorem 7 using elementary unitary pro-groups instead of Steinberg pro-groups, proposition 5 instead of theorem 5, and a corresponding analogue of lemma 26.

Conclusion

Let us list the main results of the dissertation that are presented to defense.

1. The category of odd form rings from section 1.4 is algebraically coherent semi-abelian by theorem 1. This allows to work with crossed modules, Stein's relativization, and odd form ring objects in cartesian categories.
2. Almost all classical reductive group schemes may be constructed by odd form rings up to isogeny using theorem 2.
3. Classical sufficiently isotropic reductive groups determine sufficiently isotropic Peirce decompositions on the corresponding augmented odd form algebras by theorem 3.
4. Actions of odd form pro-rings in the sense of semi-abelian categories may be described by operations and axioms (A1)–(A10) by theorem 4.
5. The root elimination theorem (theorem 5) holds for sufficiently isotropic odd unitary Steinberg pro-groups.
6. The odd unitary Steinberg group $\mathrm{StU}(R, \Delta)$ is a crossed module over the unitary group $\mathrm{U}(R, \Delta)$ by theorems 6 and 7 if the odd form ring (R, Δ) is locally finite over a commutative ring or semi-local and, moreover, has a sufficiently isotropic Peirce decomposition. In particular, the elementary subgroup $\mathrm{EU}(R, \Delta)$ is normal in $\mathrm{U}(R, \Delta)$ and the Steinberg group is its central extension.

The author sees further possible directions of research as follows:

1. To show using odd form rings that it is possible to describe the groups with root subgroups parametrized by a root system of type BC_ℓ up to isogeny and under natural conditions.
2. To apply the developed technique to prove the centrality of K_2-functors of exceptional isotropic reductive groups.
3. To develop the method of Steinberg pro-groups. It is of particular interest to construct Steinberg groups by Steinberg pro-groups in order to study locally isotropic reductive groups. Also, the method may be applied to other problems of algebraic K-theory such as a generalization of the main results of [31; 50; 51].

Bibliography

1. *Artin E.* Geometric algebra. — Inters. Publ., New York, 1957.
2. *Bak A.* K-theory of forms. — Princeton Univ. Press, Princeton, 1982. — (Ann. of Math. Stud. 98).
3. *Bak A.* Nonabelian K-theory: the nilpotent class of K_1 and general stability // K-Theory. — 1991. — Vol. 4. — P. 363—397.
4. *Bak A.*, *Hazrat R.*, *Vavilov N.* Localisation-completion strikes again: relative K_1 is nilpotent by abelian // J. Pure Appl. Algebra. — 2009. — Vol. 213. — P. 1075—1085.
5. *Bak A.*, *Petrov V.*, *Tang G.* Stability for quadratic K_1 // K-Theory. — 2003. — Vol. 30. — P. 1—11.
6. *Bak A.*, *Preusser R.* The E-normal structure of odd dimensional unitary groups // J. Pure Appl. Algebra. — 2018. — Vol. 222, no. 9. — P. 2823—2880.
7. *Bak A.*, *Tang G.* Stability for hermitian K_1 // J. Pure Appl. Algebra. — 2000. — Vol. 150. — P. 107—121.
8. *Bak A.*, *Vavilov N.* Structure of hyperbolic unitary groups I: elementary subgroups // Algebra Colloq. — 2000. — Vol. 7, no. 2. — P. 159—196.
9. *Bass H.* Unitary algebraic K-theory // Lecture Notes Math. — 1973. — Vol. 343. — P. 57—265.
10. *Böge S.* Steinberggruppen von orthogonalen gruppen // J. Reine Angew. Math. — 1998. — Vol. 494. — P. 219—236.
11. *Borceux F.*, *Bourn D.* Mal'cev, protomodular, homological and semi-abelian categories. — Kluwer Academic Publishers, 2004.
12. *Borceux F.*, *Janelidze G.*, *Kelly G. M.* Internal object actions // Comment. Math. Univ. Carolin. — 2005. — Vol. 46, no. 2. — P. 235—255.
13. *Calmès F.*, *Fasel J.* Groupes classiques // Autour des schémas en groupes. Vol. II. — Soc. Math. France, 2015. — P. 1—133.
14. *Cigoli A. S.*, *Gray J. R. A.*, *Van der Linden T.* Algebraically coherent categories // Theory and applications of categories. — 2015. — Vol. 30, no. 54. — P. 1864—1905.

15. *Cigoli A. S.*, *Mantovani S.*, *Metere G.* Peiffer product and Peiffer commutator for internal pre-crossed modules. — 2015. — Preprint, arXiv:1503.05008.

16. *Conrad B.* Reductive group schemes // Autour des schémas en groupes. Vol. I. — Soc. Math. France, 2014. — P. 93—444.

17. *Demazure M.*, *Grothendieck A.* Schémas en groupes I, II, III. — Springer-Verlag, 1970.

18. *Dieudonné J.* La géometrie des groupes classiques. 3éme ed. — Springer-Verlag, Berlin, 1971.

19. *Dieudonné J.* On the automorphism of the classical groups // Mem. Amer. Math. Soc. — 1951. — Vol. 2. — P. 1—122.

20. *Dieudonné J.* Sur les groupes classiques. 3éme ed. — Hermann. Paris, 1973.

21. *Hahn A. J.*, *O'Meara O. T.* The classical groups and K-theory. — Springer-Verlag, 1989.

22. *Hartl M.* Quadratic maps between groups // Georgian Math. J. — 2009. — Vol. 16, no. 1. — P. 55—74.

23. *Hazrat R.* Dimension theory and nonstable K_1 of quadratic modules // K-Theory. — 2002. — Vol. 27. — P. 293—328.

24. *Hazrat R.*, *Vavilov N.* Bak's work on the K-theory of rings // J. K-Theory. — 2009. — Vol. 4, no. 1. — P. 1—65.

25. *Jacqmin P.-A.*, *Janelidze Z.* On stability of exactness properties under the pro-completion. — 2020. — Preprint, arXiv:2002.02204.

26. *Kashiwara M.*, *Schapira P.* Categories and sheaves. — Springer-Verlag, 2006.

27. *Knus M.-A.* Quadratic and hermitian forms over rings. — Springer-Verlag, 1991.

28. *Knus M.-A.*, *Merkurjev A.*, *Rost M., Tingol J.-P.* The book of involutions. — AMS Col. Publ., 1998.

29. *Lavrenov A.* Another presentation for symplectic Steinberg groups // J. Pure Appl. Algebra. — 2015. — Vol. 219, no. 9. — P. 3755—3780.

30. *Lavrenov A.* On odd unitary Steinberg group. — 2013. — Preprint, arXiv:1303.6318.

31. *Lavrenov A.*, *Sinchuk S.* A Horrocks-type theorem for even orthogonal K_2 // Doc. Math. — 2020. — Vol. 25. — P. 767—809.

32. *Lavrenov A.*, *Sinchuk S.* On centrality of even orthogonal K_2 // J. Pure Appl. Algebra. — 2017. — Vol. 221, no. 5. — P. 1134—1145.

33. *Manzyuk O.* Closed categories vs. closed multicategories // Theory and applications of categories. — 2012. — Vol. 26, no. 5. — P. 132—175.

34. *Mardešić S.*, *Segal J.* Shape theory: the inverse system approach. — North-Holland Publishing Company, 1982.

35. *Milnor J.* Introduction to algebraic K-theory. — Princeton University Press, 1971.

36. *Petrov V.*, *Stavrova A.* Elementary subgroups in isotropic reductive groups // St. Petersburg Math. J. — 2009. — Vol. 20, no. 4. — P. 625—644.

37. *Petrov V. A.* Odd unitary groups // J. Math. Sci. — 2005. — Vol. 130, no. 3. — P. 4752—4766.

38. *Preusser R.* Sandwich classification for $\mathrm{O}_{2n+1}(R)$ and $\mathrm{U}_{2n+1}(R, \Delta)$ revisited // J. Group Theory. — 2018. — Vol. 21, no. 4.

39. *Preusser R.* Structure of hyperbolic unitary groups II: classification of E-normal subgroups // Algebra Colloq. — 2017. — Vol. 24, no. 2. — P. 195—232.

40. *Schlichting M.* Higher K-theory of forms I. From rings to exact categories // J. Inst. Math. Jussieu. — 2021. — Vol. 20, no. 4. — P. 1205—1273.

41. *Shulman M.* Categorical logic from a categorical point of view. — 2016. — Lecture notes.

42. *Sinchuk S.* On centrality of K_2 for Chevalley groups of type E_ℓ // J. Pure Appl. Algebra. — 2016. — Vol. 220, no. 2. — P. 857—875.

43. *Stavrova A.* On the congruence kernel of isotropic groups over rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 2020. — Vol. 373, no. 7. — P. 4585—4626.

44. *Stavrova A.*, *Stepanov A.* Normal structure of isotropic reductive groups over rings. — 2018. — Preprint, arXiv:1801.08748.

45. *Stein M. R.* Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings // Amer. J. Math. — 1971. — Vol. 93, no. 4. — P. 965—1004.

46. *Stein M. R.* Relativizing functors on rings and algebraic K-theory // J. Algebra. — 1971. — Vol. 19. — P. 140—152.

47. *Taddei G.* Normalité des groupes élémentaires dans les groupes de Chevalley sur un anneau // Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part II (Boulder, Colo., 1983). — 1986. — P. 693—710.

48. *Tang G.* Hermitian groups and K-theory // K-theory. — 1998. — Vol. 13, no. 3. — P. 209—267.

49. *Tits J.* Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algébres de Clifford // Invent. Math. — 1968. — Vol. 5. — P. 19—41.

50. *Tulenbaev M. S.* Schur multiplier of the group of elementary matrices of finite order // J. Sov. Math. — 1981. — Vol. 17, no. 4. — P. 2062—2067.

51. *van der Kallen W.* Another presentation for Steinberg groups // Indag. Math. — 1977. — Vol. 80, no. 4. — P. 304—312.

52. *van der Kallen W.*, *Stein M.* On the Schur multipliers of Steinberg and Chevalley groups over commutative rings // Math. Z. — 1977. — Vol. 155, no. 1. — P. 83—94.

53. *Voronetsky E.* Actions of pro-groups and pro-rings. — 2022. — Preprint, arXiv:2205.13336.

54. *Voronetsky E.* Centrality of K_2-functors revisited // J. Pure Appl. Alg. — 2020. — Vol. 225, no. 4. — published electronically.

55. *Voronetsky E.* Centrality of odd unitary K_2-functor. — 2020. — Preprint, arXiv:2005.02926.

56. *Voronetsky E.* Injective stability for odd unitary K_1 // J. Group Theory. — 2020. — Vol. 23, no. 5.

57. *Voronetsky E.* Twisted forms of classical groups // Algebra i Analiz. — 2022. — Vol. 34, no. 2. — P. 56—94.

58. *Wall C. T. C.* On the axiomatic foundation of the theory of Hermitian forms // Proc. Cambridge. Phil. Soc. — 1970. — Vol. 67. — P. 243—250.

59. *Weil A.* Algebras with involutions and the classical groups // J. Indian Math. Soc. — 1960. — Vol. 24, no. 3. — P. 589—623.

60. *Wendt M.* On homotopy invariance for homology of rank two groups // J. Pure Appl. Alg. — 2012. — Vol. 216, no. 10. — P. 2291—2301.

61. *Yu W.* Injective stability for odd-dimensional unitary K_1 // J. Group Theory. — 2019. — Vol. 23, no. 2.

62. *Yu W.*, *Tang G.* Nilpotency for odd unitary K_1-functor // Comm. Alg. — 2016. — Vol. 44, no. 8. — P. 3422—3453.