

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Шмигирилов Родион Васильевич

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЛОПИРОВАНИЯ ПЛОХО ОБТЕКАЕМЫХ
ТЕЛ С КОНЦЕВЫМИ ШАЙБАМИ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук,
специальность 1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
с.н.с. А. Н. Рябинин

Санкт-Петербург

2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. Глава 1 Обзор литературных источников	12
Выводы главы 1	18
2. Глава 2 Влияние концевых шайб на стационарные аэродинамические характеристики плохо обтекаемых тел	19
2.1. Методика эксперимента	20
2.2. Результаты эксперимента	23
Выводы главы 2	26
3. Глава 3 Влияние удлинения и концевых шайб на вращательные колебания толстой пластины в воздушном потоке	27
3.1. Методика эксперимента по изучению вращательных колебаний	28
3.2. Обработка результатов эксперимента с вращательными колебаниями пластин	32
3.3. Результаты экспериментов	35
3.4. Простейшая математическая модель вращательных колебаний пластины	38
Выводы главы 3	41
4. Глава 4 Колебания сегмента удлиненного плохо обтекаемого тела с двумя степенями свободы в присутствии концевых шайб	42
4.1. Математическая модель поступательных и вращательных колебаний плохо обтекаемого тела	44
4.2. Экспериментальная проверка математической модели	52
4.3. Обработка результатов эксперимента с вращательными и поступательными колебаниями	55
4.4. Результаты эксперимента с вращательными и	

поступательными колебаниями	57
4.5. Поперечные колебания тяг пружинной подвески	65
Выводы главы 4	69
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	70
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	72

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Потоки жидкости и газов вблизи плохообтекаемых тел, возникающие в широком диапазоне природных явлений и технических приложений, создают проблемы при эксплуатации техники и сооружений, что определяет интерес изучения аэродинамики плохообтекаемых тел. Исследования данного вопроса становятся все более востребованными по причине расширения спектра технических и технологических задач, которые в той или иной мере связаны с аэродинамикой плохо обтекаемых тел. Действительно, развитие самолетостроения, строительных технологий, расширение вариативности архитектурных сооружений дает новые и новые вводные для подобных исследований. Примерами объектов, эксплуатируемых человеком и подвергающихся ветровой нагрузке или нагрузке течения потока жидкости, могут служить сегменты мостов, трубопроводы, тросы, высотные здания, дымовые трубы. Образование широких отрывных зон вследствие срыва пограничного слоя при ветровом воздействии на объект, либо при воздействии водного потока, как правило, приводит к нежелательным последствиям, выражающимся в деформации и постепенном разрушении строительных сооружений.

Одним из основных вопросов, связанных с улучшением эксплуатационных аэродинамических характеристик плохо обтекаемых тел является вопрос о влиянии на них концевых шайб, то есть пластин, устанавливаемых вдоль потока на концах исследуемого объекта. Концевая пластина влияет на нагрузки на тело таким образом, что это может быть значительным с точки зрения повышения эффективности конструкции. Возможность определять аэродинамические характеристики объектов и управлять ими через использование концевых шайб позволит избежать конструкторских ошибок уже на этапе проектирования объектов и улучшить их эксплуатационные свойства.

Для решения задач современной аэродинамики используются различные методы. Одним из таких методов является построение математической модели исследуемого явления или процесса. Однако, поскольку построение математической модели сопряжено с введением некоторых допущений, то обеспечение ее корректности, требует сопоставления результатов применения построенной модели с данными физического эксперимента, что и было реализовано в данной работе.

Таким образом, разработка математических и экспериментальных моделей галопирования тела в тех или иных условиях поможет уберечься от неверных конструктивных решений при проектировании инженерных сооружений. При этом ввиду значительного многообразия объектов, подвергающихся аэродинамическому воздействию, существующие на сегодняшний день научных работ, относящихся к рассматриваемому направлению, не перекрывают их значительную часть. При этом, все вышеизложенное определяет актуальность дальнейшего исследования вопроса влияния концевых шайб на аэродинамические характеристики плохо обтекаемых тел.

Степень разработанности проблемы. Анализ научных работ, связанных с применением концевых шайб для исследования аэродинамических характеристик различных объектов, позволяет выделить несколько основных направлений. Большой объем работ связан с рассмотрением круглых или прямоугольных цилиндров. Эти исследования направлены на создание математических моделей и получение данных аэродинамических характеристик объектов. Отличие работ зачастую состоит в параметрах входных данных, какими являются углы атаки, удлинения цилиндров, скорость потока, геометрическая форма и размер концевых шайб. Частота и амплитуда колебаний, донное давление, изменение аэродинамической силы являются предметом этих исследований. В некоторых работах исследуется зависимость аэродинамических характеристик от чисел Рейнольдса.

В отдельный блок можно выделить труды, в которых исследуются объекты, представляющие собой сегменты мостов. Получение их аэродинамических характеристик происходило при помощи концевых шайб.

Не меньшее внимание уделяется исследованиям крыльев самолетов. В этих работах в основном исследуются различные типы законцовок крыла и их влияние на аэродинамику крыла. Важными параметрами законцовок в таких экспериментах являются размер, форма и угол наклона относительно плоскости крыла.

Цели и задачи диссертационного исследования. Основной целью исследования является разработка методики эксперимента и математической модели, описывающей процесс галопирования протяженных плохо обтекаемых тел с концевыми шайбами.

Для достижения цели необходимо было решить следующие задачи:

– оценить влияние концевых шайб разных размеров на лобовое сопротивление, донное давление и длину рециркуляционной зоны неподвижного плохо обтекаемого тела, ориентированного перпендикулярно воздушному потоку;

– разработать методику эксперимента по установлению влияния концевых шайб на поступательные и вращательные колебания плохо обтекаемых тел и осуществить ее практическую реализацию;

– систематизировать данные эксперимента и оценить влияние концевых шайб на поступательные и вращательные колебания плохо обтекаемых тел;

– предложить математическую модель, описывающую поступательные и вращательные колебания плохо обтекаемого тела в потоке газа;

– сопоставить данные физического эксперимента и результаты применения математической модели и оценить корректность модели;

– на основе совместного анализа данных эксперимента и математической модели описать смену поступательных и вращательных колебаний.

Научная новизна исследования.

Проведены согласованные расчетно-экспериментальные исследования аэродинамических характеристик плохообтекаемого тела. Получены новые данные о зависимости этих характеристик от относительных размеров концевых шайб для неподвижных тел.

Впервые установлено, что зависимость квадрата амплитуды колебаний толстых пластин с концевыми шайбами от числа Струхала близка к линейной.

Разработана новая математическая модель, описывающая поступательные и вращательные колебания плохообтекаемого тела в потоке газа.

Рассмотрено влияние струны, являющейся частью подвески, на критическую скорость смены режима колебаний. Сделан вывод о том, что собственная частота струны, являющейся частью аэродинамической подвески, при приближении к половине собственной частоты вращательных колебаний конструкции приводит к уменьшению критической скорости, при которой происходит переход от поступательных колебаний тела к вращательным.

Впервые установлено, что уравнения движения тела при аппроксимации зависимости коэффициента нормальной силы полиномом третьего порядка сводятся к дифференциальным уравнениям, совпадающим с уравнениями Лотки–Вольтерры, первоначально полученными для описания конкуренции двух видов животных, питающихся одинаковой пищей.

Теоретическая и практическая значимость исследования обусловлена тем, что полученные данные позволяют расширить фундаментальные представления о влиянии концевых шайб и их относительного размера на такие аэродинамические характеристики плохообтекаемых тел как лобовое сопротивление, донное давление и длина рециркуляционной зоны. Полученные в исследовании данные об аэродинамических характеристиках плохообтекаемых тел могут быть использованы при проектировании формы объекта, который в процессе эксплуатации будет подвергаться ветровой нагрузке. Полученные результаты можно экстраполировать на поведение схожих конструкций, например, сегментов мостов.

Разработанная математическая модель позволяет качественно описать смену режимов колебаний для различных конструкций, в зависимости от удлинений и углов атаки.

Методология проведенных экспериментов может быть взята, как схема исследования похожих конструкций.

Положения, выносимые на защиту:

1. Экспериментально полученные данные влияния концевых шайб различного размера на длину рециркуляционной зоны и донное давление за пластинами, ориентированными перпендикулярно набегающему потоку.

2. Экспериментальные результаты влияния концевых шайб на колебания толстых пластин.

3. Математическая модель вращательных колебаний толстых пластины различных пропорций с концевыми шайбами и её экспериментальная проверка.

4. Математическая модель галопирования плохо обтекаемого тела с концевыми шайбами с двумя степенями свободы, описывающая конкуренцию двух типов колебаний: поступательных колебаний в направлении, перпендикулярном вектору скорости набегающего потока, и вращательных колебаний.

5. Экспериментально полученные данные о конкуренции двух режимов колебаний плохо обтекаемого тела на примере сегмента моста с концевыми шайбами.

6. Результат влияния поперечных колебаний тяги подвески на критическую скорость, при которой происходит переход от поступательных колебаний модели к вращательным.

Степень достоверности. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается: корректностью постановки экспериментов, строгостью используемого математического аппарата, сопоставлением данных, полученных в ходе моделирования с результатами физического эксперимента.

Апробация результатов. Результаты, представленные в диссертации, докладывались на следующих Всероссийских и международных конференциях:

- XXV Всероссийский семинар с международным участием по струйным, отрывным и нестационарным течениям. (Санкт-Петербург, 2018);
- Международная научная конференция по механике «VIII Поляховские чтения» (Санкт-Петербург, 2018)
- Topical Problems of Fluid Mechanics 2020 (Prague, Czech Republic, 2020);
- XIII Международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли, АММАИ'2020 (Алушта, 2020)
- XX Международная конференция по методам аэрофизических исследований, ICMAR 2020 (Новосибирск, 2020)
- Международная конференция по естественным и гуманитарным наукам «Science SPbU – 2020», (Санкт-Петербург, 2020),
- Международная научная конференция по механике «IX Поляховские чтения» (Санкт-Петербург, 2021)
- Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам ВМСППС'2021, (Алушта, 2021).

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 81 странице, состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы из 100 наименований.

В первой главе приводится обзор литературных данных, посвященных применению концевых шайб в аэродинамическом эксперименте. Перечислены исследования, в которых концевые шайбы используются при испытаниях как хорошо обтекаемых тел, так и плохо обтекаемых тел.

Во второй главе рассматривается влияние концевых шайб на обтекание плоских прямоугольных пластин различных пропорций, ориентированных

перпендикулярно вектору средней скорости набегающего потока. Методом исследования является эксперимент. Изучается влияние концевых шайб на длину рециркуляционной зоны и донное давление.

Третья глава посвящена изучению вращательных колебаний толстых пластин различных пропорций с концевыми шайбами и без шайб. Пластины закреплены на проволочной подвеске, содержащей пружины. Подвеска позволяла совершать вращательные колебания вокруг оси, перпендикулярной вектору скорости набегающего потока. С помощью тензометрического метода измерялись амплитуды и частоты автоколебаний пластин в потоке. Вращательные колебания толстых пластин удлинения больше пяти с концевыми шайбами удовлетворительно описывает математическая модель, предложенная ранее для описания вращательных колебаний цилиндра малого удлинения.

Четвертая глава посвящена исследованию колебаний плохо обтекаемого тела с концевыми шайбами с несколькими степенями свободы. Проволочная подвеска с пружинами могла совершать колебания с шестью степенями свободы, однако во время экспериментов в воздушном потоке наблюдались только колебания с двумя степенями свободы: вертикальные поступательные колебания и вращательные колебания вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной вектору средней скорости набегающего воздушного потока. Эксперименты выполнялись с двумя макетами сегмента моста, ограниченными концевыми шайбами. Предложена математическая модель, описывающая возникновение колебаний и конкуренцию между двумя типами колебаний.

Содержание данной работы опубликовано в работах [32, 33, 34, 36, 39, 40, 41, 86, 87, 88, 89, 90]. Статьи [36, 86, 87, 88, 89] индексированы в международных базах данных Scopus и(или) Web of Science Core Collection.

В работах соавтору Рябинину А. Н. принадлежат: постановка задачи, участие в планировании эксперимента и в выборе математической модели галопирования.

Финансовая поддержка данной работы осуществлялась Российским фондом фундаментальных исследований в рамках гранта № 19-38-90045.

Глава 1

Обзор литературных источников

При обтекании хорошо обтекаемых тел потоком жидкости или газа, не происходит отрывов пограничного слоя, сопровождаемых обширными отрывными зонами. Их кормовая часть ограничена поверхностями малой кривизны, что определяет незначительное изменение на них градиента давления и не допускает отрыв пограничного слоя. И самый простой пример этому – крылья самолетов при малых углах атаки. Однако, и такие объекты как крылья могут стать плохо обтекаемыми при больших углах атаки. Появлению областей отрыва пограничного слоя в разные времена было посвящено множество работ, касающихся влияния начальной турбулентности потока [99, 30], рельефа поверхности крыла [10, 60] и других условий обтекания (удлинения крыла, угла атаки) [11, 22, 91]. Отрывы происходят не только на острых кромках, но и на ровных участках с большим радиусом кривизны, это зависит от других параметров, таких как число Рейнольдса [12, 77, 81, 48] или шероховатости тела.

Актуальность исследования аэродинамики плохо обтекаемых тел вызвана большой распространенностью плохо обтекаемых конструкций в нынешней повседневности [1, 62, 78]. Сегменты мостов, небоскребы, трубопроводы, дымовые трубы — все это примеры объектов, которые могут быть подвержены ветровой нагрузке или нагрузке течения водного потока. В подавляющем большинстве воздействие ветра на различные сооружения, если и вызывает какой-то эффект, то этот эффект скорее приносит вред, чем пользу. Такие эффекты могут приводить к нежелательным последствиям, и как следствие, к разрушениям строительных сооружений. Одной из самых известных катастроф является обрушение моста Такома Нерроуз [38, 84, 85]. Здесь причиной обрушения стали вибрация и кручения, которые были следствием сильного ветра.

В целом, любая конструкция, имеющая некоторую жесткость и массу, способна совершать колебания с деформацией формы. Одним из механизмов, приводящих к колебаниям, является ветровой резонанс. Эти колебания происходят при собственных частотах, зависящих от геометрии конструкции и распределению жесткости и массы по конструкции. Если частота сходящихся вихрей будет близка к частоте колебаний тела, то это может быть одной из причин разрушения сооружений. Именно поэтому при проектировании таких конструкций используют физическое моделирование с помощью экспериментов с макетами конструкций в аэродинамических трубах. Одним из случаев резонансного колебания за последнее время является происшествие с Волгоградским мостом в 2010 году [24, 23, 28]. Заместитель начальника НИО-19 ЦАГИ Константин Стрелков высказался¹ о поведении Волгоградского моста: «Эти колебания можно было предсказать, но существующие СНиПы не требовали испытывать балочные мосты в аэродинамической трубе». Соответственно и в наше время развитие архитектуры мостов заставляет актуализировать старые и придумывать все новые модели обтекания.

Еще одной из причин колебаний плохо обтекаемых тел в потоке может являться зависимость аэродинамических коэффициентов от углов атаки [38, 82, 7]. Колебания, вызванные этой причиной, называются галопированием. Двигаясь поперек потока воздуха, плохо обтекаемые тела подвергаются воздействию аэродинамической силы, действующей в том же направлении, что и проекция скорости тела, перпендикулярная потоку. Когда рассматривается упруго закрепленное тело в потоке газа, то следует заметить, что аэродинамические силы не являются консервативными, что может приводить к изменению полной энергии системы. С учетом того, что направление скорости и аэродинамической силы совпадают, то это будет приводить к набору энергии системой и увеличению амплитуды колебаний. Определение критерия возникновения галопирования было дано Ден-

¹ <https://vz.ru/society/2011/3/24/478050.html>

Гартогом [7]. Этот критерий был применен к проводам, которые имеют несимметричное сечение вследствие наледи на них. Еще задолго до Ден-Гартога Глауэрт получил схожие результаты для вращающихся профилей [59].

Исследованием влияния форм различного сечения прямоугольных призм на аэродинамические свойства и явлением галопирования на них занимался Новак [70, 71, 72]. В свою очередь он изучал влияние на галопирование степени турбулентности потока [73]. В своих работах он пользуется математической моделью разработанной Паркинсоном и Бруксом [75]. Эта модель основана на квазистационарном приближении, когда вместо аэродинамической силы в уравнении движения колеблющегося тела используется функция, полученная путем приближения полиномом аэродинамических сил, измеренных на стационарно закрепленной модели при разных углах атаки [38]. Позже была предложена [76] более полная модель с использованием полиномиального приближения седьмого порядка. Квазистационарная модель использовалась и в более поздних работах [16, 18, 30, 69].

Развивая тему эффектов галопирования и ветрового резонанса, Паркинсоном и его коллегами были написаны работы [52, 74]. В работах приводится моделирование сочетания различных эффектов.

Большое количество работ проводилось экспериментальным методом. Исследовались призмы разных сечений. Наиболее популярные статьи из них посвящены треугольным [42, 43, 44, 46], пятиугольным [26], восьмигранным [54, 55], эллиптическим [45] призмам. Можно выделить значительные результаты, полученные в связи с исследованиями, посвященными влиянию углов атаки на колебания цилиндров разного сечения [49, 50, 63, 64, 65].

Исследование галопирования тел, имеющих два режима обтекания, проводилось в [15, 29].

Одним из первых упоминаний об эффекте блокировки потока воздуха через торцы объектов писали Максвелл и Джеррард [67, 58]. Максвелл пытался найти коэффициенты корректировки данных при изучении

аэродинамических характеристик прямоугольных пластин в аэродинамической трубе и последующей их масштабируемости. После этого Стэнсби [94], опираясь на результаты Максвелла, предположил использовать концевые шайбы для минимизирования эффекта, создаваемым пограничным слоем на стенках цилиндра. С помощью этого он хотел получить течение, близкое к двумерному. Многие исследования круглых цилиндров были выполнены с использованием размеров концевых шайб, предложенных Стэнсби.

Впоследствии были проведены дополнительные исследования влияния размера концевых шайб для секционных моделей на испытаниях в аэродинамической трубе [61, 93]. Эти исследования показали, что двумерные характеристики поля течения вокруг секционной модели могут быть значительно улучшены за счет выбора соответствующего размера концевых шайб. В основном результаты были направлены на нахождение уменьшения отношения радиуса концевых шайб к диаметру цилиндров при различных числах Рейнольдса.

Существует также широкое направление исследований связанных с влиянием концевых шайб на обтекание крыльев с различными профилями по размаху, формами и изгибами. Теоретическое развитие этот вопрос получил в работах Курицкеса [13, 14] на основе гипотезы П-образных вихрей. Также это направление тесно связано с именем Ричарда Уиткомба [97], который на основании предыдущих исследований концевых шайб создал первые рабочие прототипы современных винглетов (законцовок крыла). Необходимость законцовок связана с эффектом перетекания потока воздуха с нижней поверхности крыла на верхнюю. Это приводит к созданию концевого вихря и сопутствующему перераспределению давления по крылу, что в свою очередь снижает подъемную силу. Не изменяя размах крыла, концевые шайбы увеличивают эффективное удлинение крыла.

Влияние концевых шайб на распределение нагрузки по хорде крыла малых относительных удлинений рассматривалось в [27]. Для таких крыльев

характерны нелинейность по углу атаки подъемной силы и момента тангажа. Схема, предлагаемая в работе, позволяет рассчитывать аэродинамические характеристики крыльев с учетом влияния формы, размеров и положений по хорде крыла концевых шайб. Также другие исследования по влиянию концевых шайб на распределение поверхностного давления проводилось в [79, 92]

Особенное внимание форме концевых шайб на торцах крыльев было отведено в недавних работах [4, 21, 25]. В них рассматриваются самые популярные формы винглетов: классический, с шайбой Уиткомба, со спиралевидной законцовкой, с концевой шайбой. Авторы выдвигают предположение о важности угла наклона законцовок крыла относительно плоскости, перпендикулярной крылу. В работе [4] для моделирования влияния концевых шайб на крыло применялась теория непрерывной вихревой поверхности. Это привело к получению алгоритма расчета интенсивности вихрей.

Для экспериментов чаще берутся точные копии крыльев, используемых в гражданской авиации. В одной из таких работ [6] рассматривалось влияние формы и размеров законцовок на крыло дозвукового пассажирского самолета.

Эксперименты влияния концевых шайб проводились не только с самолетными крыльями, но и с крыльями соосных российских вертолетов. В работе [3] был разработан метод, когда небольшие концевые крылышки прямоугольной формы устанавливались у вертолетных несущих винтов. Эксперимент показал возможность улучшения относительного коэффициента полезного действия несущих вертолетных винтов при режиме висения.

В воздушном пространстве стран встречаются летательные аппараты, которые выполняют функции различного назначения и тактико-технического применения. В работе [20] проводится исследование влияния законцовок крыла на аэродинамические характеристики перспективного БПЛА (беспилотного летательного аппарата). Было рассмотрено несколько

законцовок крыла, которые дают преимущества в коэффициенте подъемной силы для различных углов атаки.

В последнее время большое количество исследований на тему влияния концевых шайб на аэродинамические характеристики плохо обтекаемых тел проводится в Китае. В статье [100] рассматривается влияние концевых шайб на аэродинамическую силу нескольких прямоугольных призм, которые соответствуют поперечному сечению моста с разными соотношениями. Авторы показывают существенное влияние концевых шайб на число Струхала в экспериментах всех своих моделей. Исследование наклонного кругового цилиндра с использованием концевых шайб проводилось в [66]. Где авторы разбили цилиндр на три участка, характеризующиеся различным донным давлением.

Изменение частоты колебаний круглых и прямоугольных цилиндров в зависимости от нахождения концевых шайб на торцах модели рассматривалось в работе [91]. В ней проводилась серия испытаний в аэродинамической трубе направленных на изучение пульсирующих подъемных сил на различных секциях объектов, имитирующих пролеты мостов. В работе были получены два вида колебаний, но совсем не изучены процессы смены поступательных и вращательных колебаний. Изменение частоты схода вихрей с цилиндров в зависимости от нахождения концевых шайб на торцах модели рассматривалось в статье [57].

Выводы главы 1

Анализ литературных данных позволяет утверждать, что основным методом исследования колебаний плохо обтекаемых тел в воздушном потоке является эксперимент. Экспериментально изучались как колебания, вызванные периодическим сходом вихрей с поверхности тела (вихревой резонанс), так и колебания, вызванные специфической зависимостью аэродинамической силы от углов атаки и скольжения и их производных (галопирование). Признанным приемом, позволяющим исследовать вместо протяженных тел, ориентированных поперек потока, относительно короткие сегменты, является использование концевых шайб. Шайбы ограничивают перетекание воздуха через торцы и тем самым приближают обтекание коротких сегментов тел к обтеканию длинных тел.

Математическое моделирование получило развитие для описания поступательного галопирования протяженных тел, причем большинство математических моделей опирается на квазистационарное приближение. Делались попытки распространить квазистационарное приближение на вращательные колебания, и на колебания с двумя степенями свободы, однако эти попытки не были удачными, они сталкивались с необходимостью определения угла атаки тела, который для вращающегося тела различен для разных точек тела. В определении точки, относительно которой определялся угол атаки, присутствует произвол.

Таким образом, мало разработанными проблемами является физическое моделирование галопирования плохо обтекаемых тел с несколькими степенями свободы и разработка математических моделей для описания колебаний.

Г л а в а 2

Влияние концевых шайб на стационарные аэродинамические характеристики плохо обтекаемых тел

Во второй главе рассматривается экспериментальное исследование влияния концевых шайб на аэродинамические характеристики очень простого плохообтекаемого тела, такого как прямоугольная пластина, ориентированная перпендикулярно вектору скорости набегающего потока. Концевые шайбы размещаются вдоль воздушного потока на концах исследуемых объектов. Цель установки концевых шайб – исключить прохождение воздуха через торцы объектов. Шайбы обычно имеют эллиптическую или круглую форму. Размер их больше размера исследуемой модели. Рассмотрено изменение донного давления, коэффициента лобового сопротивления и длины рециркуляционной зоны. Основное содержание главы 2 опубликовано в работах [32, 39, 89].

2.1. Методика эксперимента

Все эксперименты проводились в дозвуковой аэродинамической трубе АТ-12 Санкт-Петербургского Государственного Университета [11] (рис. 2.1).

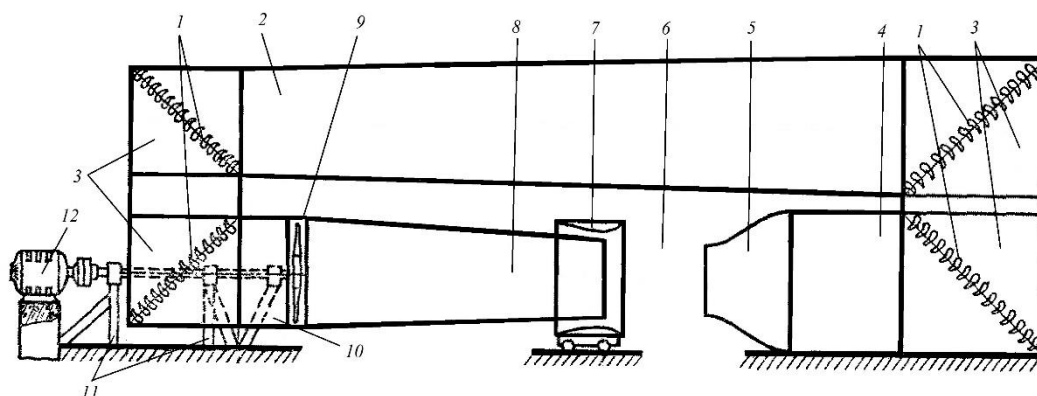


Рис. 2.1. Схема аэродинамической трубы с замкнутым контуром и открытой рабочей частью.

1 - поворотные лопатки, 2 - обратный канал, 3 - поворотные колена, 4 – форкамера с хонейкомбом, 5 - сопло, 6 - рабочая часть, 7 - кольцевой раструб, 8 - диффузор, 9 - вентилятор, 10 - переходный участок, 11 - опоры вентиляторной группы, 12 - электродвигатель.

В открытом рабочем участке скорость воздушного потока может изменяться от 0 до 40 м/с. Длина рабочего участка 2,25 м, диаметр выходного сечения сопла 1,5 м.

Исследовалось обтекание четырех прямоугольных пластин с разным удлинением λ (отношение длины пластины l к ширине w). Эксперименты проводились в двух вариантах: с концевыми шайбами и без них. Концевые шайбы представляли собой тонкие (менее 2 мм) стальные диски диаметром $d=200$ мм или $d=400$ мм. Скорость потока при этом менялась от 5 до 33 м/с.

Измерения донного давления в ближнем следе за пластиной проводились с помощью датчика Креля [78]. Измерялась также разница давлений на двух отверстиях забора давления на датчиках Креля. Датчик Креля

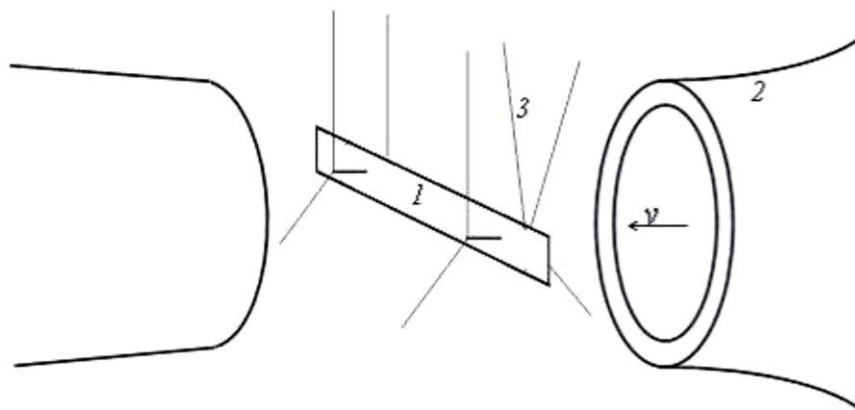


Рис. 2.2. Схема экспериментальной установки: 1 – прямоугольная пластина; 2 – сопло аэродинамической трубы; 3 – проволочная подвеска.

представляет собой цилиндр диаметром 8 мм и высотой 5 мм. В центре оснований цилиндра имеются отверстия забора давления. Отверстия соединены с дифференциальным спиртовым микроманометром с наклонной шкалой двумя трубками диаметром 1 мм.

Таблица 2.1. Геометрические параметры пластин

Вариант	Длина l , мм	Ширина w , мм	Удлинение $\lambda = w/l$
1	400	80	5
2	503	39	12.9
3	970	50	19.4
4	806	33	24.5

Донное давление определяется измерением давления на входных отверстиях на датчике Креля, когда он находится напротив центра пластины на расстоянии 1-3 мм за пластиной по ходу движения воздушного потока. При этом плоские поверхности датчика параллельны пластине.

По мере того, как датчик Креля перемещается вниз потоку от пластины, разница давлений за датчиком и перед датчиком увеличивается до тех пор,

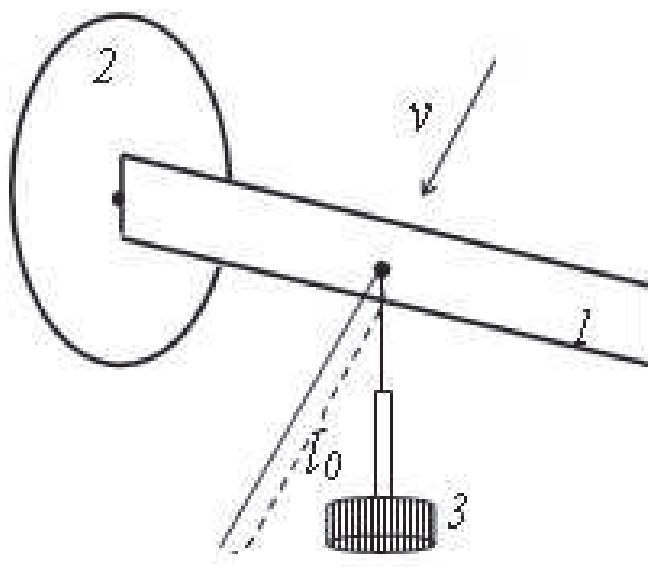


Рис. 2.3. Определение длины рециркуляционной области: 1 – прямоугольная пластина; 2 – концевая шайба; 3 – Датчик Креля; l_0 – длина рециркуляционной области.

пока не достигнет максимума на некотором расстоянии. Дальнейшее измерение разницы давлений с увеличением расстояния от пластины показывает уменьшение этой разницы. На расстоянии l_0 этот перепад давления равен нулю. Примем l_0 за длину рециркуляционной области (см. рис. 2.3).

Для измерения силы сопротивления прямоугольных пластин использовались трехкомпонентные аэродинамические весы с проволочной подвеской.

2.2. Результаты эксперимента

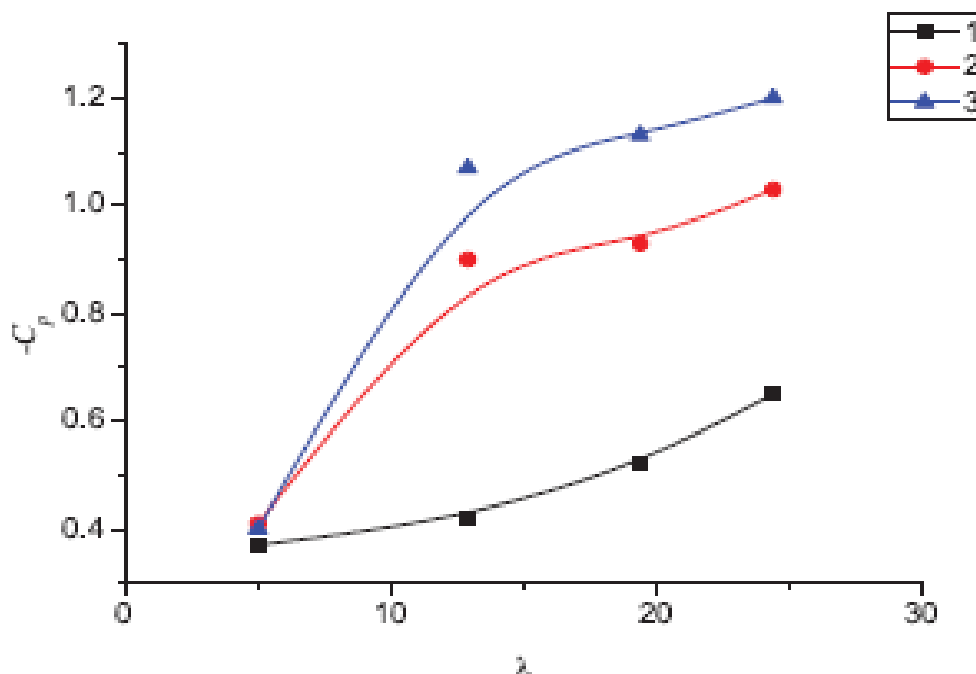


Рис. 2.4. Зависимость донного давления от удлинения пластины: 1 – без концевых шайб; 2 – диаметр концевых шайб $d = 200$ мм; 3 – диаметр концевых шайб $d = 400$ мм.

На рис. 2.4. показана зависимость донного давления от удлинения пластины. Без концевых шайб увеличение удлинения приводит к увеличению донного давления. Этот факт согласуется с ранее опубликованными результатами [31]. При малом удлинении $\lambda = 5$ применение концевых шайб никак не влияет на изменение донного давления. Однако, при соотношении сторон $\lambda > 10$ использование концевых шайб значительно увеличивает донное давление. Чем больше диаметр концевой шайбы, тем более изменяется в большую сторону донное давление.

Зависимость коэффициента силы сопротивления от удлинения прямоугольной пластины представлена на рис. 2.5.

Немонотонное увеличение сопротивления пластин с увеличением удлинения при отсутствии концевых шайб можно объяснить экспериментальной ошибкой. Использование концевых шайб увеличивает

коэффициент лобового сопротивления. Чем больше диаметр концевой шайбы, тем больше сила сопротивления. Было установлено, что максимальное увеличение лобового сопротивления наблюдается при удлинении $\lambda = 12.9$.

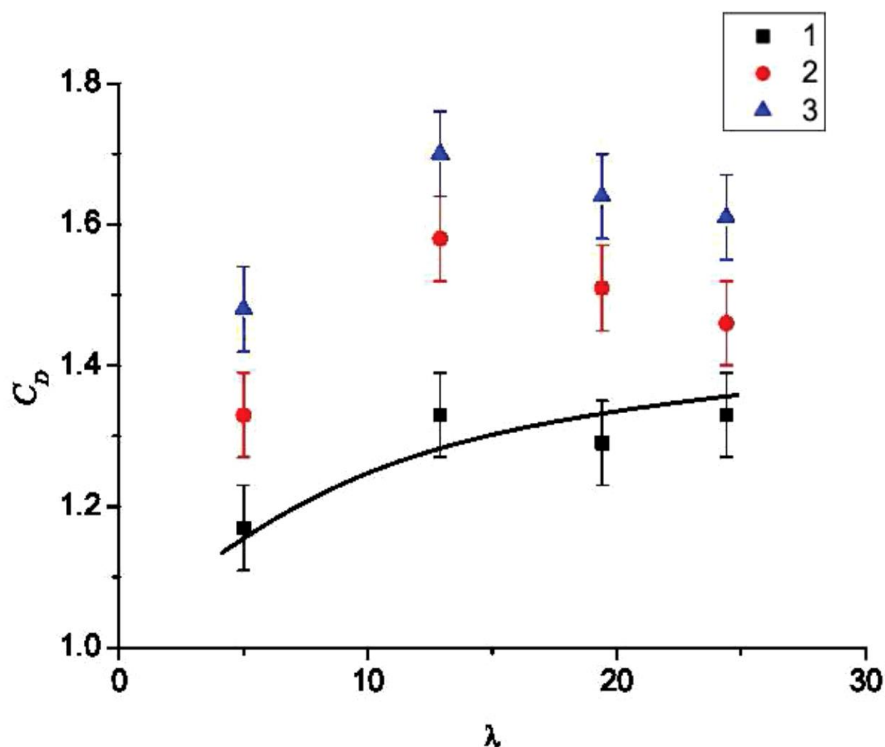


Рис. 2.5. Зависимость коэффициента силы сопротивления от удлинения пластины: 1 – без концевых шайб; 2 – диаметр концевых шайб $d = 200$ мм; 3 – диаметр концевых шайб $d = 400$ мм.

Отношение диаметра торцевой пластины d к размеру прямоугольной пластины $l_1 = \sqrt{lw}$ представлено в таблице 2.2. Максимальное значение d/l_1 соответствует удлинению $\lambda = 12.9$. Для $\lambda > 12.9$ чем больше соотношение сторон, тем меньше увеличивается коэффициент лобового сопротивления.

Зависимость отношения ширины пластины к длине рециркуляционной области w/l_0 от удлинения прямоугольной пластины λ показано на рис. 2.6.

Таблица 2.2. Отношение диаметра концевых шайб к размеру прямоугольной пластины

Удлинение λ	Характерный размер l_1 , мм	$d = 200$ мм d/l_1 ,	$d = 400$ мм d/l_1 ,
5	179	1.12	2.23
12.9	140	1.43	2.86
19.4	220	0.91	1.82
24.5	160	1.25	2.50

Без концевых шайб зависимость w/l_0 от λ имеет минимум при $\lambda = 12.9$. При $\lambda = 5$ наблюдается небольшое увеличение параметра w/l_0 за счет использования концевых шайб. Чем больше λ , тем больше w/l_0 в экспериментах с концевыми шайбами.

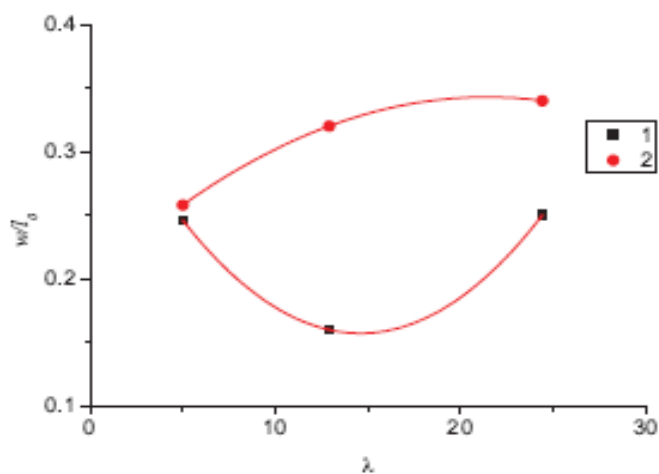


Рис. 2.6. Отношение ширины пластины к длине рециркуляционной области в зависимости от удлинения пластин: 1 – без концевых шайб; 2 – диаметр концевых шайб $d = 200$ мм

Выводы главы 2

В данной главе было рассмотрено влияние концевых шайб на такие аэродинамические характеристики как: лобовое сопротивление, донное давление и длина рециркуляционной зоны.

Показано, что концевые шайбы, установленные на плоской прямоугольной пластине, ориентированной перпендикулярно воздушного потока, приводят к увеличению абсолютных значений коэффициента донного давления и сопротивления. Они уменьшают длину рециркуляционной области за центральной частью пластины.

Влияние концевых шайб зависит от относительного размера самих шайб и от удлинения плоской прямоугольной пластины. Если удлинение пластины равно 5, то влияние очень мало.

Глава 3

Влияние удлинения и концевых шайб на вращательные колебания толстой пластины в воздушном потоке

Изучение вращательных колебаний важно для прогнозирования колебаний пролета моста от ветровой нагрузки [91]. Обтекание коротких тел с концевыми шайбами похоже на обтекание тел большой длины. В воздушном потоке концевые шайбы исключают прохождение потока газа через торцы модели. Прямое испытание длинного тела невозможно из-за ограниченного размера рабочих частей аэродинамических труб. Концевые шайбы используются в испытаниях с крыльями [77] и в других экспериментах с различными плохообтекаемыми телами. С помощью такого метода тестировались сегменты моста [100, 96]. Примеры исследования тел различной формы с концевыми шайбами можно найти в [47, 17, 18].

В третьей главе идет рассмотрение вращательных колебаний плохообтекаемых тел в потоке воздуха. Получена оценка влияния частоты считывания показаний приборов на результат определения амплитуды колебания. Приведены особые аэродинамические характеристики при определенных удлинениях пластин и скоростях воздушного потока. Показано как амплитуда колебаний коррелирует с числом Струхалья. Исследовано влияние концевых шайб на диапазон чисел Струхалья, в котором наблюдается колебания с постоянной амплитудой. Представлена зависимость амплитуды колебаний толстых пластин с концевыми шайбами от числа Струхалья, и показано влияние самих концевых шайб на эту зависимость.

Основное содержание главы 3 опубликовано в работах [33, 41, 86, 90].

Методика эксперимента и рассматриваемая физическая модель обсуждаются в разделе 3.1. В разделе 3.2. описан алгоритм обработки данных, Полученные результаты приведены в разделе 3.3. Показано влияние концевых

шайб на вращательные колебания толстой пластины в зависимости от удлинения. В разделе 3.4 излагается математическая модель вращательных колебаний толстой пластины, оснащенной концевыми шайбами.

3.1. Методика эксперимента по изучению вращательных колебаний

В данном эксперименте исследовались вращательные колебания толстых пластин. Толщина у всех пластин была одинакова $d=20$ мм.

Таблица 3.1. Геометрические параметры пластин

Вариант	Длина l , мм	Ширина w , мм	Удлинение $\lambda = l/w$
1	200	100	2
2	350	100	3,5
3	500	100	5
4	700	100	7

Геометрические параметры пластин можно увидеть в таблице 3.1. Эксперименты проводились как с концевыми шайбами, так и без них. Концевые пластины представляли собой тонкий диск толщиной 3мм и диаметром $d = 2w = 200$ мм.

Все эксперименты также проводились в аэродинамической трубе АТ-12 Санкт-Петербургского государственного университета. В открытой рабочей части аэродинамической трубы располагалась модель на проволочной подвеске (рис 3.1). Диаметр стальной проволочной подвески равен от 0.3 до

0.6 мм. Модель могла вращаться только вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной вектору скорости движения воздуха. К задней части модели прикреплена стальная хвостовая державка. К державке прикреплены две стальные пружины.

Амплитуда вращательных колебаний определялась на основе тензометрических измерений. Полупроводниковый тензопреобразователь С-50 измеряет натяжение нижней пружины.

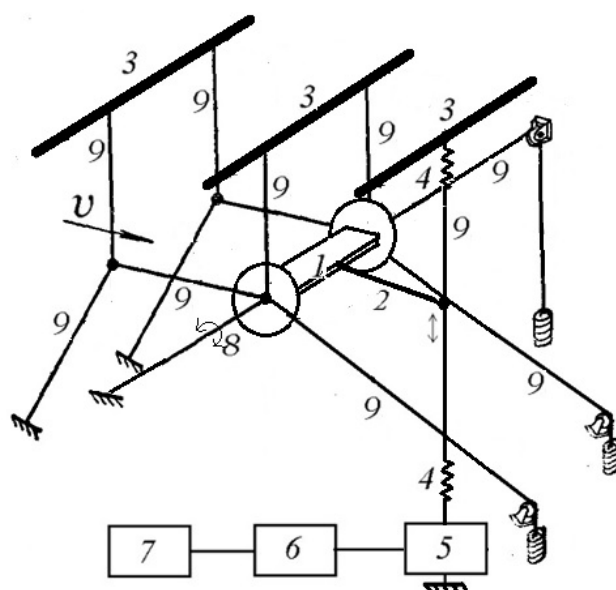


Рис. 3.1. Схема экспериментальной установки. 1 – модель с концевыми пластинами, 2 – хвостовая державка, 3 – неподвижные стержни, 4 – пружины, 5 – тензопреобразователь С-50, 6 – ПК-осциллограф, 7 – компьютер, 8 – ось, 9 – проволочные тяги

На рис. 3.2 представлен общий вид и схема с размерами тензопреобразователя С-50².

² <http://microtensor.ru/catalog/mikroelektronnye-tenzopreobrazovateli-sily/serii-c/c%2050>

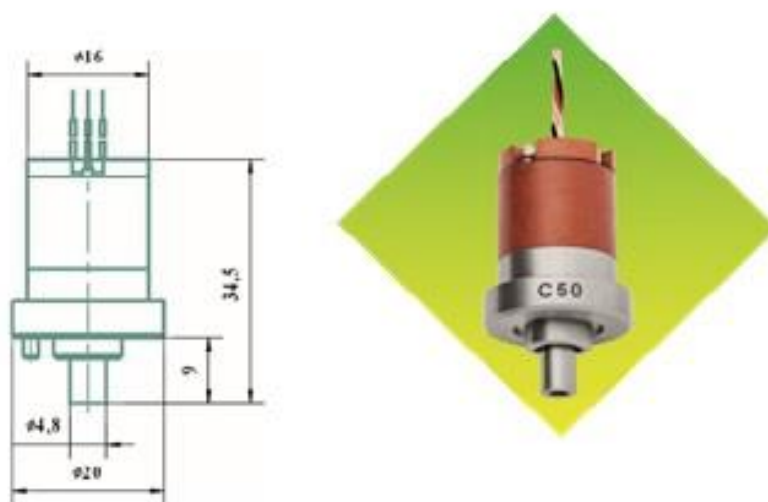


Рис. 3.2. Общий вид тензопреобразователя С-50 и размеры прибора.

В тензопреобразователе используется технология «сапфир на кристалле». Чувствительным элементом тензопреобразователя является двухслойная сапфир-титановая мембрана с монокристаллическими кремниевыми тензорезисторами (рис. 3.3).

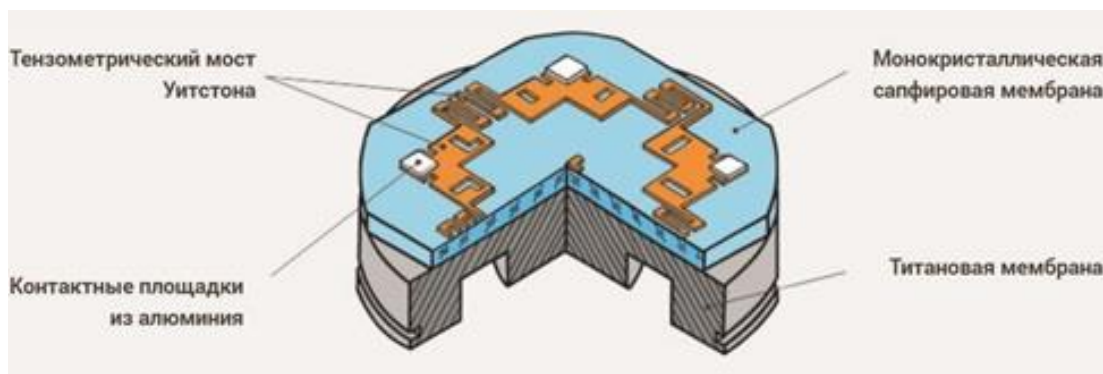


Рис. 3.3. Двухслойная сапфиро-титановая мембрана – упругий элемент тензопреобразователя.

Кремниевые тензорезисторы соединены в мостик Уинстона по схеме «замкнутый мост» (рис. 3.4).



1 Схема "Замкнутый мост"

Рис. 3.4. Схема соединения тензорезисторов.

Номинальное значение диапазона преобразуемой силы 50 Н. Предельные рабочие значения преобразуемой силы от -25 Н до 50 Н. Недостатком используемого типа преобразователей является зависимость их показания от температуры. Поэтому мы обязательно градуировали прибор при каждом эксперименте. Иногда два раза: до измерений и после, чтобы убедиться в отсутствии дрейфа. В качестве источника питания для моста Уинстона использовались четыре батарейки формата АА, соединенные последовательно. Такой автономный источник питания позволил снизить наводки с частотой энергоснабжения 50 Гц.

РС осциллограф Velleman-PCS500 преобразует аналоговый сигнал тензопреобразователя в цифровой сигнал и передает его на компьютер. Частота измерения 100 Гц и 1250 Гц. Продолжительность записи составляет 17 секунд при 100 Гц или 3.3 секунды при 1250 Гц.

Было замечено, что частота колебаний не зависит от скорости потока. При отсутствии потока в рабочей части колебания пластин на упругой подвеске затухают, а частота колебаний остается такой же, как и при колебаниях, вызванных потоком воздуха. Это означает, что аэродинамические силы малы по сравнению с силами упругости.

Считаем, что натяжение пружины в экстремумах зависимости сигнала от времени равно натяжению пружины под действием постоянной силы, вызывающей отклонение, равное амплитуде колебаний. Это предположение позволяет связать амплитуду колебаний с максимальным или минимальным

натяжением нижней пружины. Было проведено два калибровочных эксперимента. В первом эксперименте во время записи показаний тензопреобразователя известный груз подвешивается в месте крепления хвостового держателя к проволочной тяге (рис 3.1.). По результатам измерений определяется изменение показаний прибора, вызванное известной силой. В другом калибровочном эксперименте на конце хвостовой державки навешивается известный груз. Измеряется перемещение груза в вертикальном направлении. Определено отношение амплитуды колебаний натяжения нижней пружины к амплитуде вращательных колебаний модели.

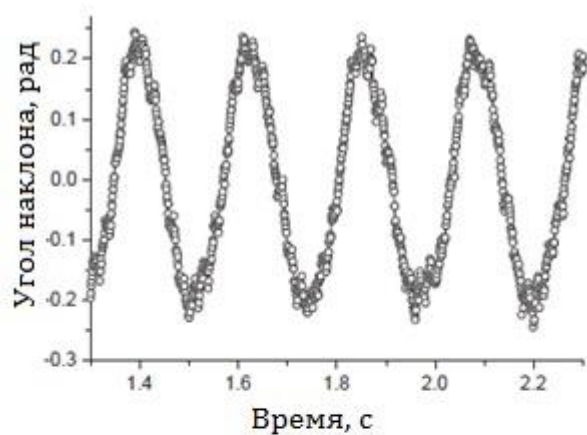
Скорость потока в рабочей части определялась по перепаду давления на сопле аэродинамической трубы. Перепад давления измерялся спиртовым микроманометром с наклонной трубкой типа ММН. Основой для определения скорости было выражение:

$$\frac{\rho v^2}{2} = \frac{\mu K \gamma}{\gamma_0} h,$$

где ρ – плотность воздуха, которая зависит от температуры и атмосферного давления, K – коэффициент микроманометра, который зависит от наклона трубки микроманометра, γ и γ_0 – плотность спирта в микроманометре, зависящая от температуры и эталонная плотность спирта (0.8 г/см^3), h – показания микроманометра.

3.2. Обработка результатов эксперимента с вращательными колебаниями пластин

Методика обработки сигналов приведена в [81, 83]. Зависимости наклона пластины от времени, полученные в эксперименте, представлены на рис 3.5.



а)

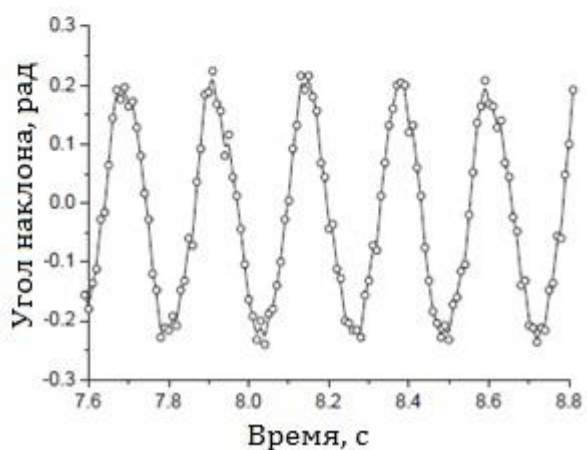


Рис. 3.5. Зависимость наклона пластины от времени: а) частота считывания 1250 Гц, б) частота считывания 100 Гц.

Примерную амплитуду вращательных колебаний можно определить по данным графикам. Для этого достаточно измерить максимальное и минимальное значения угла наклона пластины. Затем нужно рассчитать среднее значение амплитуды. Однако, точнее и проще можно определить амплитуду применяя алгоритм, описанный ниже.

Алгоритм представляет собой вариант метода наименьших квадратов. Он позволяет нам аппроксимировать данные гармонической функцией заданной частоты.

Пусть угол наклона β_i , измеренный в момент времени t_i , будет суммой гармонической функции с амплитудой A , постоянной E и экспериментальной ошибкой ξ_i :

$$\begin{aligned}\beta_i &= A \cos(\omega t_i - \varphi) + E + \xi_i = \\ &= A \cos\varphi \cos \omega t_i + A \sin\varphi \sin \omega t_i + E + \xi_i.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Ошибка эксперимента – это случайная величина с нулевым математическим ожиданием. Рассмотрим выборку, состоящую из n считываний ($i=1, 2, 3, \dots, n$). Мы предполагаем, что

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \cos \omega t_i = \sum_{i=1}^n \xi_i \sin \omega t_i = \sum_{i=1}^n \xi_i = 0. \quad (3.2)$$

Умножая последовательно формулу (3.1) на $\cos \omega t_i$, $\sin \omega t_i$ и 1, суммируя полученные выражения от $i=1$ до n с учетом выражения (3.2), получаем систему уравнений (3.3).

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \cos^2 \omega t_i & \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i \sin \omega t_i & \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i \\ \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i \sin \omega t_i & \sum_{i=1}^n \sin^2 \omega t_i & \sum_{i=1}^n \sin \omega t_i \\ \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i & \sum_{i=1}^n \sin \omega t_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \cos \varphi \\ A \sin \varphi \\ E \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \beta_i \cos \omega t_i \\ \sum_{i=1}^n \beta_i \sin \omega t_i \\ \sum_{i=1}^n \beta_i \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Если n – количество считываний за один период колебаний $T = 2\pi/\omega$ и это число велико, то систему уравнений (3.3) можно упростить учитывая, что

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \omega t_i \approx \sum_{i=1}^n \sin^2 \omega t_i \approx n\omega/2\pi \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt = n/2.$$

$$\sum_{i=1}^n \cos \omega t_i \sin \omega t_i \approx \sum_{i=1}^n \sin \omega t_i \approx \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i \approx 0.$$

Таким образом, вместо системы уравнений (3.3) можно решать простую систему (3.4).

$$\begin{pmatrix} n/2 & 0 & 0 \\ 0 & n/2 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \cos \varphi \\ A \sin \varphi \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \beta_i \cos \omega t_i \\ \sum_{i=1}^n \beta_i \sin \omega t_i \\ \sum_{i=1}^n \beta_i \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Знание $A \cos \varphi$ и $A \sin \varphi$ позволяет рассчитать амплитуду вращательных колебаний A .

Покажем, что описанный выше алгоритм является методом наименьших квадратов. Минимизируется сумма квадратов

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \sum_{i=1}^n (\beta_i - A \cos(\omega t_i - \varphi) - E)^2.$$

Находим минимум этой суммы, дифференцируя сумму квадратов по параметрам $A \cos \varphi$, $A \sin \varphi$ и E . Приравниваем производные нулю. В результате получается система уравнений (3.3).

3.3. Результаты экспериментов

Получено, что частота считывания не влияет на результат определения амплитуды колебаний.

На рис. 3.6 представлен график, иллюстрирующий независимость результата определения амплитуды установившихся колебаний от частоты считывания.

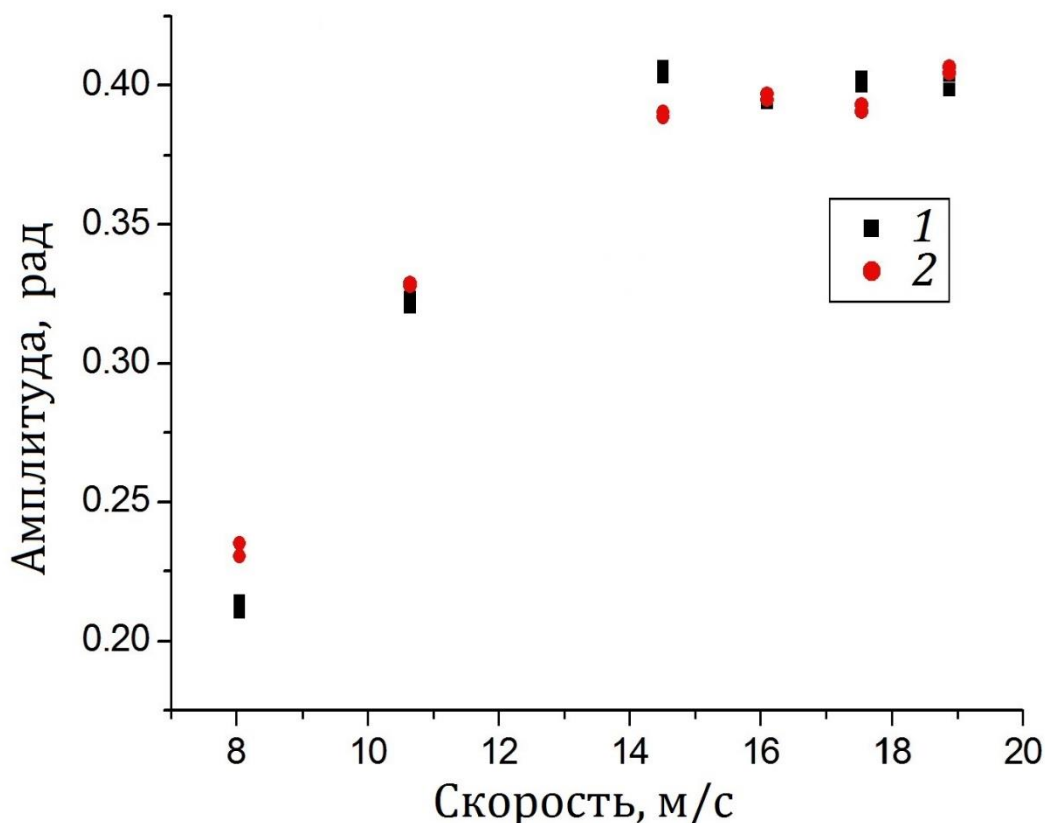


Рис. 3.6. Зависимость амплитуды установившихся колебаний от скорости.

1 – частота считывания 100 Гц, 2 – частота считывания 1250 Гц.

Практически во всех случаях наблюдаются колебания с постоянной амплитудой. Исключение составляют колебания короткой толстой пластины с удлинением $\lambda = 2$ при малых скоростях воздушного потока v . На рисунках 3.7 и 3.8 представлены зависимости амплитуды установившихся колебаний от числа Струхалия $Sh = w/vT$, где T - период колебаний.

Амплитуда колебаний растет с уменьшением числа Струхалия. На рис. 3.7. показано, что для толстой пластины без концевых шайб, чем больше соотношение сторон, тем больше амплитуда колебаний. Колебание пластины

$\lambda = 2$ с постоянной амплитудой происходит только при большой скорости воздушного потока.

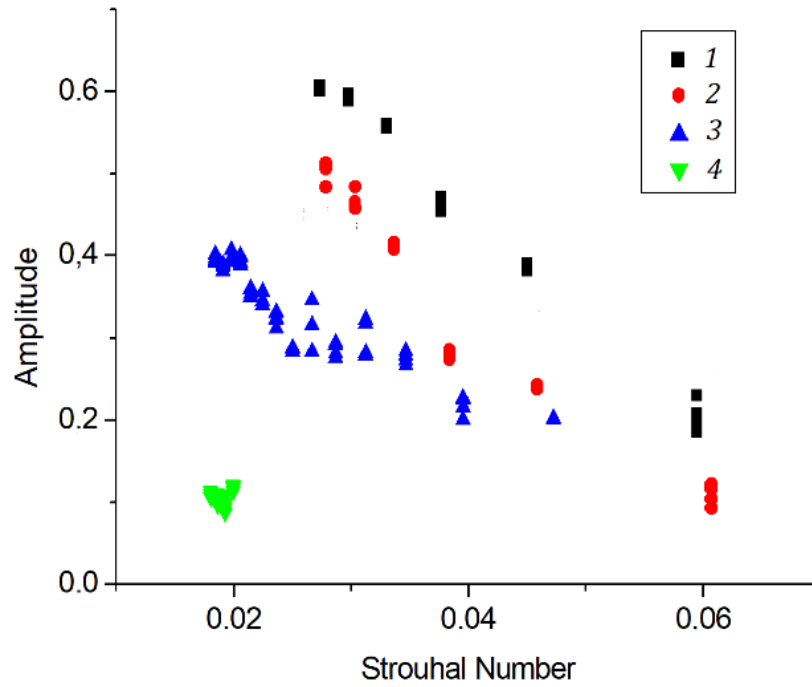


Рис. 3.7. Зависимость амплитуды колебаний (рад) от числа Струхала без концевых шайб. $1 - \lambda = 7$, $2 - \lambda = 5$, $3 - \lambda = 3.5$, $4 - \lambda = 2$.

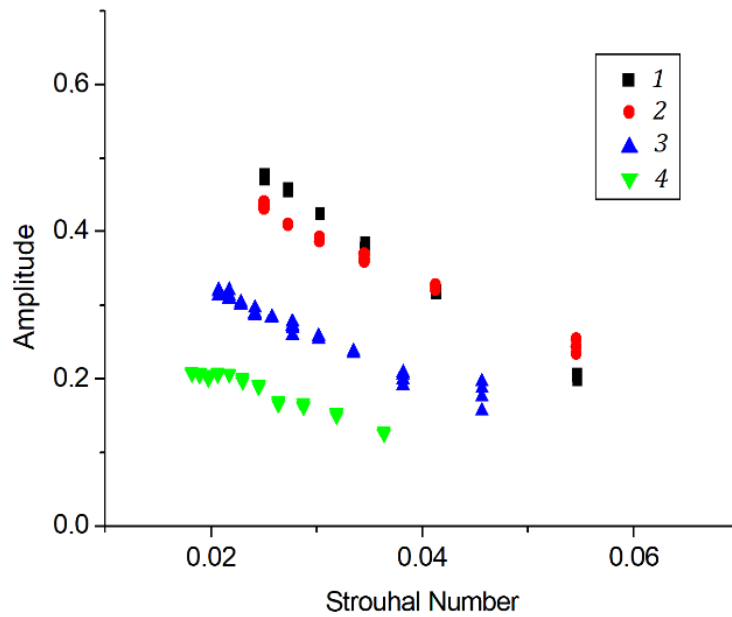


Рис. 3.8. Зависимость амплитуды колебаний (рад) от числа Струхала с концевыми шайбами. $1 - \lambda = 7$, $2 - \lambda = 5$, $3 - \lambda = 3.5$, $4 - \lambda = 2$.

На рис. 3.8. видно, что при наличии концевых шайб диапазон чисел Струхалия, в котором наблюдаются колебания с постоянной амплитудой для цилиндра $\lambda = 2$, значительно увеличивается.

3.4. Простейшая математическая модель вращательных колебаний пластины

В этом параграфе излагается математическая модель колебания в потоке цилиндра малого удлинения (отношение длины цилиндра к его диаметру равно 2), предложенная в статье [35]. Уравнение движения цилиндра, упруго закрепленного в воздушном потоке, имеет вид

$$I_z \ddot{\theta} = L_a + L_s, \quad (3.6)$$

где L_a и L_s - моменты сил, действующие со стороны воздушного потока и со стороны подвески, I_z - момент инерции цилиндра, θ - угол наклона цилиндра. Будем принимать, что в состоянии равновесия угол наклона равен нулю. Принимается, что со стороны подвески действует момент упругих сил, возвращающий цилиндр в равновесное положение, и сопротивление трения, пропорциональное угловой скорости $\dot{\theta}$. Момент сил, действующий со стороны набегающего потока, представляется в виде разложения по степеням угла наклона и производной угла. Ограничимся только первыми членами разложения. Оставим в правой части только момент аэродинамических сил:

$$I_z \ddot{\theta} + r \dot{\theta} + k \theta = s L^2 \frac{\rho_0 v}{2} m_{\dot{\theta}} (1 - \delta \theta^2) \dot{\theta}, \quad (3.7)$$

где s - характерная площадь цилиндра, k - жесткость упругой подвески, $m_{\dot{\theta}}$ - вращательная производная, v - скорость набегающего потока, L - характерный размер, ρ_0 - плотность воздуха, r - коэффициент трения в упругой подвеске.

Если ввести следующие обозначения:

$$\omega^2 = I_z, \quad \mu = \rho_0 L^3 \frac{S}{2I_z} m_{\dot{\theta}}, \quad k_2 = \frac{r}{\mu I_z},$$

то уравнение движения приобретет вид:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = \mu \frac{v}{L} (1 - \delta \theta^2) \dot{\theta} - k_2 \dot{\theta}. \quad (3.8)$$

Полагая μ малым параметром, уравнение (3.8) можно решать методом Крылова-Боголюбова в первом приближении [2]. В результате получаются уравнения для медленно меняющихся амплитуды A и фазы φ вращательных колебаний: $\theta = A \cos(\omega t + \varphi)$. Приведем эти уравнения.

$$\dot{A} = A \frac{\mu v}{2L} \left(1 - \frac{k_2 L}{v} - \frac{\delta}{4} A^2 \right), \quad \dot{\varphi} = 0. \quad (3.9)$$

Приравнивая нулю правую часть первого уравнения (3.9), получаем выражение для нахождения амплитуды установившихся колебаний:

$$A^2 = \frac{4}{\delta} \left(1 - \frac{k_2 L}{v} \right). \quad (3.10)$$

Таким образом, модель предсказывает что зависимость квадрата амплитуды от обратной скорости набегающего потока описывается линейной функцией. Для проверки, годится ли эта математическая модель для описания вращательных колебаний толстой пластины, которая участвует в экспериментах, снабженной концевыми шайбами, ниже приводятся два графика. Математическая модель предполагает, что сопротивление пропорционально угловой скорости. В этом случае в отсутствие аэродинамических сил колебания затухают, и амплитуда колебаний в логарифмическом масштабе является линейной функцией времени. На рис. 3.8 в логарифмическом масштабе приведен график зависимости амплитуды затухающих колебаний от времени. Точки на графике ложатся с некоторой погрешностью вблизи прямой линии. Это доказывает, что проверяемое предположение выполняется.

На следующем графике 3.9 показана зависимость квадрата амплитуды установившихся колебаний от числа Струхала $Sh = wT/v$, где w – ширина

толстой пластины, T – период колебаний. Точки на графике ложатся на одну линию, если скорость достаточно велика.

Таким образом, рассматриваемую математическую модель можно применять для толстых пластин с концевыми шайбами.

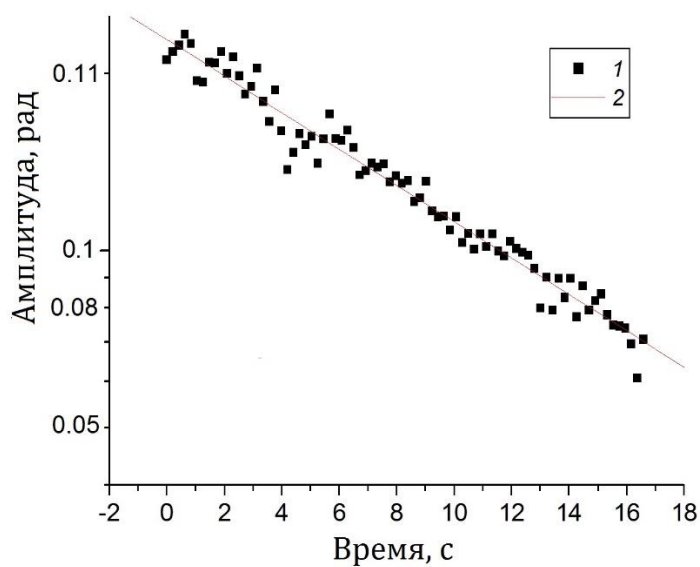


Рис. 3.8. Зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени.

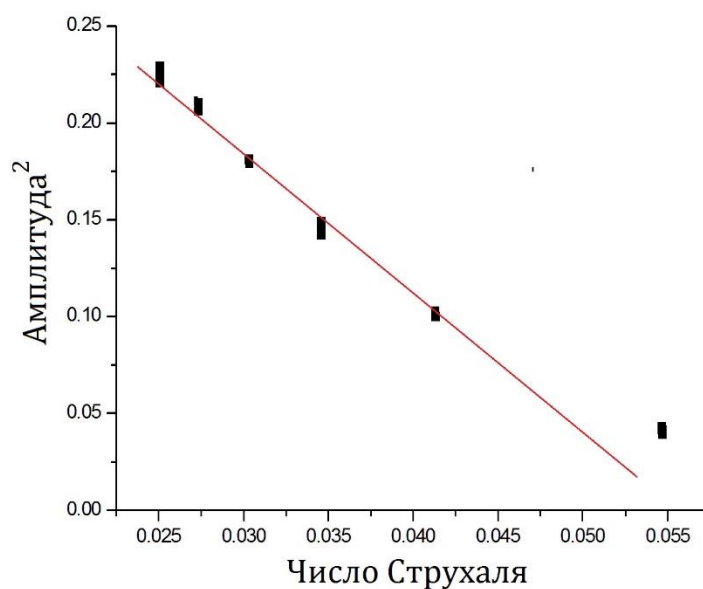


Рис. 3.9. Зависимость квадрата амплитуды от числа Струхаля. Пластина с концевыми шайбами. Удлинение $\lambda = 7$.

Выводы главы 3

Эксперименты проводились с толстыми прямоугольными пластинами, прикрепленными к упругой подвеске с одной степенью свободы. Возможно было только вращение вокруг оси, перпендикулярной вектору средней скорости воздушного потока. Установлено, что амплитуда установившихся колебаний увеличивается с увеличением удлинения пластин. Постоянная амплитуда колебаний пластины с удлинением $\lambda = 2$ реализуется только при достаточно большой скорости воздуха. Наличие концевых шайб изменяет зависимость амплитуды колебаний от числа Струхала. Для пластины с удлинением $\lambda = 2$ диапазон скоростей потока, при котором наблюдаются колебания с постоянной амплитудой, расширен. В этом случае амплитуда намного больше, чем амплитуда колебаний толстой пластины без концевых шайб. Зависимости амплитуды колебаний толстых пластин с концевыми шайбами от числа Струхала близки к линейным. Увеличение удлинения толстой пластины с 5 до 7 не приводит к значительному изменению амплитуды колебаний.

Наличие концевых шайб делает зависимость более плавной. Когда концевых шайб нет, то ничего не препятствует потоку воздуха проходить через торцы пластины. В этом случае вихревая система за телом имеет сложный характер и перестраивается с изменением скорости потока.

Вращательные колебания толстых пластин удлинения больше пяти с концевыми шайбами удовлетворительно описывает математическая модель, предложенная ранее [35] для описания вращательных колебаний цилиндра малого удлинения.

Глава 4

Колебания сегмента удлиненного плохо обтекаемого тела с двумя степенями свободы в присутствии концевых шайб

Плохообтекаемые упругие или упруго закрепленные тела под действием ветра могут совершать поступательные или вращательные колебания. Источником колебаний протяженных тел могут быть периодически сходящиеся вихри, образующие цепочку Кармана, если частота вихрей близка к собственной частоте колебаний конструкции. Такие колебания называются галопированием [37]. При этом принимается, что частота периодического схода вихрей намного превышает собственную частоту колебаний. Поэтому аэродинамические силы, возникающие вследствие схода вихрей, осредняются и не оказывают влияния на существенно медленный процесс колебания при галопировании. В большинстве работ, посвященных колебаниям мостов, неустойчивости, приводящие к галопированию, рассматривались для определения критической скорости ветра в соответствии с линейной динамической теорией [53].

Предполагалось, что при превышении критической скорости воздушного потока колебания интенсивно нарастают и неизбежно приводят к катастрофе. Однако в закритической области мосты могут совершать колебания с ограниченной амплитудой из-за аэродинамических нелинейностей, и амплитуды посткритических колебаний в определенном диапазоне скоростей ветра могут быть допустимыми [98]. Данная глава посвящена построению математической модели поступательных и вращательных колебаний плохо обтекаемого тела и проверке этой модели на примере колебаний макета сегмента моста, закрепленного на упругой подвеске в рабочей части аэродинамической трубы. Основное содержание главы 4 излагается в работах [34, 36, 40, 87, 88].

Для описания поступательного галопирования плохо обтекаемого тела в работе [31] предложена квазистационарная модель. В основе этой модели лежит предположение, что аэродинамические силы, действующие на тело, зависят только от относительной скорости потока и от углов, описывающих ориентацию тела относительно вектора скорости воздушного потока. Для поперечного обтекания воздушным потоком протяженного тела, совершающего колебания в направлении, перпендикулярном потоку, нормальная аэродинамическая сила, действующая в направлении движения, зависит только от мгновенного угла атаки α . Коэффициент нормальной аэродинамической силы c_y в зависимости от угла атаки α можно определить в аэродинамической трубе в опытах с неподвижно закрепленным телом. В работе [75] зависимость $c_y(\alpha)$ квадратной призмы аппроксимировали полиномом пятого порядка. Позже [76] было установлено, что модель работает лучше, если аппроксимировать зависимость $c_y(\alpha)$ полиномом седьмого порядка. Квазистационарная модель широко использовалась в дальнейшем для описания поступательного галопирования прямоугольных цилиндров различных пропорций [70], цилиндров с треугольным поперечным сечением [46], ромбовидным поперечным сечением [47], призм конечного удлинения [19].

Модель колебаний упруго закрепленного тела с двумя степенями свободы разрабатывалась в работах [51, 56]. Авторами этих работ были сделаны попытки распространить квазистационарную модель галопирования на вращательные колебания двух плохо обтекаемых тел: квадратной призмы и углового профиля. Трудность применения этих моделей заключается в том, что разные точки вращающегося тела имеют разную скорость и, следовательно, мгновенный угол атаки этих точек различен. Приходится выбирать характерную точку для определения мгновенного угла атаки, в этом заключается некоторый произвол. Предполагается, что модель будет

качественно описывать чередование режимов колебаний, связанную с изменением скорости потока газа.

4.1. Математическая модель поступательных и вращательных колебаний плохо обтекаемого тела

Пусть тело закреплено на упругой подвеске с одной степенью свободы. В неподвижной системе координат оно может перемещаться вдоль оси OY , перпендикулярной скорости набегающего потока v (рис. 4.1). Тело наклонено под углом θ к горизонту.

Скорость тела относительно среды складывается из двух перпендикулярных векторов. Первый вектор направлен вдоль оси OX , его абсолютная величина равна v . Вторым вектором представляет собой скорость движения тела вдоль оси OY . Его величина равна \dot{y} , где y - координата центра масс тела, точка над символом здесь и далее обозначает дифференцирование по времени. Угол атаки α (угол между осью OX и осью скоростной системы координат OX_α) и относительная скорость тела v_r будут определяться формулами

$$\alpha = \theta - \arctg \frac{\dot{y}}{v},$$

$$v_r = \sqrt{v \left(1 + \left(\frac{\dot{y}}{v} \right)^2 \right)} \approx v \left(1 + 0,5 \left(\frac{\dot{y}}{v} \right)^2 \right).$$

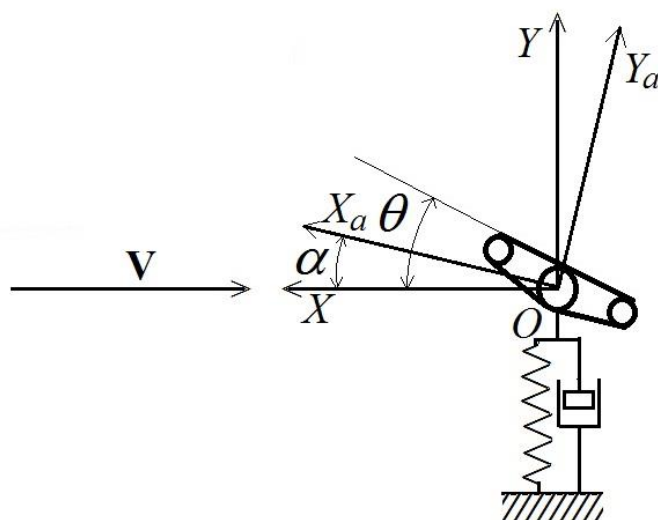


Рис. 4.1. Моделирование поступательного галопирования.

Далее будем считать углы атаки малыми и пользоваться приближенными выражениями: $\alpha = \theta - \left(\frac{\dot{y}}{v}\right)$, $v_r = v$.

Коэффициент c_y силы, действующей вдоль оси OY , аппроксимируют полиномом степени n по углу атаки α . Не нарушая общности задачи, примем, что коэффициент A_0 при α^0 равен нулю, поскольку от величины этого члена зависит только среднее значение координаты $y = y_0$. Уравнение движения запишется в виде

$$m\ddot{y} + r_1\dot{y} + k_1y = \left(\frac{1}{2}\right)s\rho_0v^2\sum_{i=1}^n A_i\alpha^i,$$

где m - масса тела, r_1 - коэффициент трения в упругой подвеске, k_1 — приведенная жесткость подвески, s — характерная площадь тела, ρ_0 — плотность воздуха.

Введем обозначения:

$$\mu_1 = -\frac{s\rho_0wA_1}{2m}, \quad \eta_1 = \frac{r_1}{m}$$

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m}, \quad v_1 = \eta_1 \frac{w}{\mu_1},$$

где w - характерный размер тела. Поступательное галопирование может происходить только при условии $A_1 < 0$ [26], поэтому $\mu_1 > 0$. Пусть $n = 3$, тогда

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \omega_1^2 y = \mu_1 \frac{v}{w} \left[1 - \frac{v_1}{v} + \frac{A_2 \dot{y}}{A_1 v} - 2 \frac{A_2}{A_1} \theta + \frac{A_3}{A_1} \left(\frac{\dot{y}}{v} \right)^2 - 3 \frac{A_3}{A_1} \left(\frac{\dot{y}}{v} \right) \theta + 3 \frac{A_3}{A_1} \theta^2 \right] \\ - \mu_1 \frac{v^2}{w} \left(\theta - \frac{A_2}{A_1} \theta^2 + \frac{A_3}{A_1} \theta^3 \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Эксперименты показывают, что колебания при галопировании близки к гармоническим и происходят с частотой, близкой к собственной частоте конструкции. Параметр μ_1 в правой части уравнения мал.

Для моделирования вращательных колебаний за основу была взята модель колебаний цилиндра малого удлинения, предложенная в работе [35]. Уравнение вращательных колебаний тела с моментом инерции I_z вокруг оси OZ, проходящей через центр масс, имеет вид

$$I_z \ddot{\theta} + r_2 \dot{\theta} + k_2 \theta = s w^2 \frac{\rho_0 v}{2} m_{\dot{\alpha}} (1 - \delta \alpha^2) \dot{\alpha},$$

где r_2 — коэффициент трения в подвеске, k_2 - жесткость упругой подвески, $m_{\dot{\alpha}}$ - вращательная производная момента тангажа, δ — параметр, который определяется в эксперименте с вращательными колебаниями по амплитуде вращательных колебаний, к которой асимптотически приближается колебательная система при возрастании скорости потока. При преобразовании уравнения вращательного колебательного движения нужно продифференцировать выражение для угла атаки $\alpha = \theta - \left(\frac{\dot{y}}{v} \right)$. Из уравнения (4.1) следует, что $\dot{y} \approx -\omega_1^2 y$. С использованием обозначений

$$\begin{aligned} \mu_2 = s \rho_0 w^3 \frac{m_{\dot{\alpha}}}{(2I_z)}, \quad \eta_2 = \frac{r_2}{I_z}, \\ \omega_2^2 = \frac{k_2}{I_z}, \quad v_2 = \eta_2 \frac{w}{\mu_2} \end{aligned}$$

уравнение вращательных колебаний примет вид

$$\ddot{\theta} + \omega_2^2 \theta = \mu_2 \frac{v}{w} \left[1 - \delta \theta^2 - \delta \left(\frac{\dot{y}}{v} \right)^2 + 2\delta \theta \frac{\dot{y}}{v} \right] \times \left(\dot{\theta} + \frac{\omega_1^2 y}{v} \right) - \mu_2 v_2 \frac{\dot{\theta}}{w}. \quad (4.2)$$

Система уравнений (4.1) и (4.2) описывает два связанных осциллятора. Нелинейные члены, находящиеся в правых частях уравнений, умножены на малые параметры μ_1 и μ_2 . Поэтому для решения системы можно применять метод Крылова–Боголюбова [2]. Предположим, что отношение частот ω_1/ω_2 не равно единице и не отличается от единицы на малую величину.

Введем новые переменные амплитуды ρ_y, ρ_θ и фазы ψ_1, ψ_2 колебаний

$$y = \rho_y \cos \psi_1, \quad \psi_1 = \omega_1 t + \varphi_1,$$

$$\theta = \rho_\theta \cos \psi_2, \quad \psi_2 = \omega_2 t + \varphi_2.$$

Амплитуды ρ_y, ρ_θ и сдвиги фаз ω_1, ω_2 являются медленными функциями времени. Обозначим правые части уравнений (4.1) и (4.2) $\mu_1 f_1$ и $\mu_2 f_2$ соответственно. В первом приближении метода Крылова–Боголюбова для получения выражений для производных амплитуды и фазы выполняется осреднение по времени с использованием формул:

$$\dot{\rho}_y = -\frac{\mu_1}{2\pi t \omega_1} \int_0^{2\pi t} f_1(\rho_y \cos \psi_1, -\rho_y \omega_1 \sin \psi_1, \rho_\theta \cos \psi_2, -\rho_\theta \omega_2 \cos \psi_2) \sin \psi_1 d\psi_1, \quad (4.3)$$

$$\dot{\rho}_\theta = -\frac{\mu_2}{2\pi t \omega_2} \int_0^{2\pi t} f_2(\rho_y \cos \psi_1, -\rho_y \omega_1 \sin \psi_1, \rho_\theta \cos \psi_2, -\rho_\theta \omega_2 \cos \psi_2) \sin \psi_2 d\psi_2, \quad (4.4)$$

$$\rho_y \dot{\psi}_1 = \rho_y \omega_1 - \frac{\mu_1}{2\pi t \omega_1} \int_0^{2\pi t} f_1(\rho_y \cos \psi_1, -\rho_y \omega_1 \sin \psi_1, \rho_\theta \cos \psi_2, -\rho_\theta \omega_2 \cos \psi_2) \cos \psi_1 d\psi_1, \quad (4.5)$$

$$\rho_{\theta} \dot{\psi}_2 = \rho_{\theta} \omega_2 - \frac{\mu_2}{2\pi m \omega_2} \int_0^{2\pi m} f_2(\rho_y \cos \psi_1, -\rho_y \omega_1 \sin \psi_1, \rho_{\theta} \cos \psi_2, -\rho_{\theta} \omega_2 \cos \psi_2) \cos \psi_2 d\psi_2. \quad (4.6)$$

Каждая из функции f_1 и f_2 представляет собой сумму слагаемых, которые содержат произведения синусов и косинусов ψ_1 и ψ_2 в некоторой степени.

После вычисления интегралов в выражениях (4.3) и (4.4) получаем приближенные уравнения для амплитуд поступательных и вращательных колебаний:

$$\dot{\rho}_y = \frac{\mu_1 v}{2 w} \rho_y \left\{ 1 - \frac{v_1}{v} + \frac{3A_3}{4A_1} \left[\left(\frac{\rho_y \omega_1}{v} \right)^2 + 2\rho_{\theta}^2 \right] \right\},$$

$$\dot{\rho}_{\theta} = \frac{\mu_2 v}{2 w} \rho_{\theta} \left\{ 1 - \frac{v_2}{v} + \frac{\delta}{4} \left[\rho_{\theta}^2 + 2 \left(\frac{\rho_y \omega_1}{v} \right)^2 \right] \right\}.$$

Таким же образом, вычислив интегралы в формулах (4.5) и (4.6), можно получить уравнения для фаз колебаний. Однако в дальнейшем уравнения для фаз не понадобятся, поэтому они не приводятся. Приведем к безразмерному виду амплитуды поступательных колебаний $\rho_Y = \rho_y \omega_1 / v$ и используя обозначения $b_1 = -3A_3 / (4A_1)$ и $b_2 = \delta / 4$, получим

$$\dot{\rho}_Y = \frac{\mu_1 v}{2 w} \rho_Y \left\{ 1 - \frac{v_1}{v} - b_1 [\rho_Y^2 + 2\rho_{\theta}^2] \right\},$$

$$\dot{\rho}_{\theta} = \frac{\mu_2 v}{2 w} \rho_{\theta} \left\{ 1 - \frac{v_2}{v} - b_2 [\rho_{\theta}^2 + 2\rho_Y^2] \right\}.$$

Мы получили два уравнения, в которые безразмерные амплитуды поступательных и вращательных колебаний входят симметрично. При другом способе обезразмеривания амплитуды поступательных колебаний (например, при делении амплитуды на какой-либо характерный размер тела) симметричных уравнений не получилось бы. Укажем, что при чисто

поступательных колебаниях безразмерная амплитуда поступательных колебаний ρ_Y представляет собой амплитуду колебаний мгновенного угла атаки.

Удобно перейти от уравнений для амплитуд к уравнениям для квадратов амплитуд

$$Y = \rho_Y^2, \quad \Theta = \rho_\theta^2.$$

Полученные уравнения совпадают с известными уравнениями Лотки–Вольтерры [68, 38], полученными для описания конкуренции между двумя видами животных, питающихся одинаковой пищей

$$\dot{Y} = \mu_1 \frac{v}{w} Y \left\{ 1 - \frac{v_1}{v} - b_1 [Y + 2\Theta] \right\}, \quad (4.7)$$

$$\dot{\Theta} = \mu_2 \frac{v}{w} \Theta \left\{ 1 - \frac{v_2}{v} - b_2 [\Theta + 2Y] \right\}. \quad (4.8)$$

В отличие от оригинальных уравнений Лотки–Вольтерры коэффициенты в полученных уравнениях (4.7) и (4.8) зависят от скорости набегающего потока. Квадрат амплитуды колебаний соответствуют численности животных.

Система уравнений (4.7) и (4.8) симметрична относительно входящих в систему переменных. Положим для определенности, что $v_1 < v_2$. Для нахождения решений уравнений, описывающих колебания с установившейся постоянной амплитудой, нужно приравнять производные по времени в левой части уравнений нулю. Система превратится в алгебраическую. Существует 4 стационарных решения уравнений

1. $Y = 0, \Theta = 0.$
2. $Y = \frac{(v-v_1)}{b_1 v}, \Theta = 0.$
3. $Y = 0, \Theta = \frac{(v-v_2)}{b_2 v}.$
4. $Y = \left[\frac{2b_1(v-v_2) - b_2(v-v_1)}{3b_1 b_2 v} \right], \Theta = \left[\frac{2b_2(v-v_1) - b_1(v-v_2)}{3b_1 b_2 v} \right].$

Для определения устойчивости решений используем линеаризованные уравнения в окрестности решений:

$$\begin{pmatrix} \dot{Y} \\ \dot{\Theta} \end{pmatrix} = \frac{v}{w} \times \begin{pmatrix} \mu_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} - 2b_1 Y - 2b_1 \Theta\right) & -\mu_1 2b_1 Y \\ -\mu_2 2b_2 \Theta & \mu_2 \left(1 - \frac{v_2}{v} - 2b_2 Y - 2b_2 \Theta\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta Y \\ \Delta \Theta \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение для определения собственных чисел матрицы Якоби:

$$\begin{vmatrix} \mu_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} - 2b_1 Y - 2b_1 \Theta\right) - \lambda & -\mu_1 2b_1 Y \\ -\mu_2 2b_2 \Theta & \mu_2 \left(1 - \frac{v_2}{v} - 2b_2 Y - 2b_2 \Theta\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отрицательные значения собственных чисел указывают на устойчивость решения. Решение неустойчиво, если хотя бы одно собственное число положительно.

Собственные числа матрицы для решения 1:

$$\lambda_1 = \mu_1 \frac{(v - v_1)}{v}, \quad \lambda_2 = \mu_2 \frac{(v - v_2)}{v}.$$

Решение устойчиво в диапазоне $v < v_1$.

Собственные числа матрицы для решения 2:

$$\lambda_1 = -\mu_1 \frac{(v - v_1)}{v}, \quad \lambda_2 = \frac{\mu_2}{v} \left[v - v_2 - 2 \left(\frac{b_2}{b_1} \right) (v - v_1) \right].$$

Если $b_2/b_1 > 1/2$, решение устойчиво в диапазоне $v > v_1$. Если $b_2/b_1 < 1/2$, решение устойчиво в диапазоне $v_1 < v < v_3$, где $v_3 = v_2 + 2b_2(v_2 - v_1)/(b_1 - 2b_2)$.

Собственные числа матрицы для решения 3:

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1}{v} \left[v - v_1 - 2 \left(\frac{b_1}{b_2} \right) (v - v_2) \right], \quad \lambda_2 = -\mu_2 \frac{(v - v_2)}{v}.$$

Если $b_2/b_1 < 2$ решение устойчиво в диапазоне $v > v_4$, где $v_4 = (v_1 b_2 - 2v_2 b_1)/(b_2 - 2b_1)$, иначе решение неустойчиво.

Решение 4 существует в диапазоне $v_4 < v < v_3$. Применение критерия Рауса–Гурвица позволяет установить, что оно неустойчиво.

Рассмотрим последовательность смены режимов с постоянной амплитудой колебаний, которую дает построенная модель, при изменении скорости воздушного потока, если коэффициенты удовлетворяют условию $b_2/b_1 < 1/2$. Пока скорость набегающего потока не превышает критической скорости возникновения поступательных колебаний $v < v_1$, колебания отсутствуют. При увеличении скорости потока от v_1 до v_3 существуют поступательные колебания, которые при превышении верхней границы v_3 сменяются вращательными. При последующем уменьшении скорости обратный переход к поступательным колебаниям осуществляется при скорости потока $v_4 < v_3$. При дальнейшем уменьшении скорости колебания прекращаются при скорости, которая равна скорости возникновения колебаний v_1 . Таким образом, модель предсказывает гистерезис при увеличении и уменьшении скорости воздушного потока.

Для некоторых тел лучшие предсказания для амплитуд галопирования дает аппроксимация коэффициента нормальной силы c_y полиномом более высокого порядка. Например, для призмы с квадратным поперечным сечением установлено, что лучший результат дает аппроксимация c_y полиномом седьмого порядка [59] по степеням угла атаки. При этом установлено, что может существовать еще один гистерезис в области критической скорости возникновения поступательных колебаний.

Пусть $n = 7$. Тогда метод Крылова–Боголюбова в первом приближении дает вместо системы уравнений (4.7) и (4.8) следующую систему

$$\dot{\Upsilon} = \mu_1 \frac{v}{\omega} \Upsilon \left[1 - \frac{v_1}{v} + \frac{3A_3}{4A_1} (\Upsilon + 2\Theta) + \frac{5A_5}{8A_1} (\Upsilon^2 + 6\Upsilon\Theta + 3\Theta^2) + \frac{35A_7}{64A_1} (\Upsilon^3 + 12\Upsilon^2\Theta + 18\Upsilon\Theta^2 + 4\Theta^3) \right], \quad (4.9)$$

$$\dot{\Theta} = \mu_2 \frac{v}{w} \Theta \left[1 - \frac{v_2}{v} - b_2(\Theta + 2\Upsilon) \right]. \quad (4.10)$$

Удобно отыскивать установившиеся колебательные режимы тела на упругой подвеске, решая систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4.9) и (4.10) численно. Мы использовали для решения системы метод Рунге–Кутты четвертого порядка.

4.2. Экспериментальная проверка математической модели

Изложенная выше математическая модель проверялась в аэродинамической трубе АТ-12 Санкт-Петербургского университета на примере испытаний модели сегмента моста. Одна модель была сделана из дерева. Она имела ширину $w = 100$ мм и длину $L = 700$ мм. Другая модель была сделана из металла с шириной $w = 110$ мм и длиной $L = 780$ мм. Каждая модель представляет собой три балки круглого сечения, соединенные перемычками и покрытые настилом. Схема конструкции моста представлена на рис. 4.2.

Все эксперименты проводились в присутствии концевых шайб круглой формы, имеющих диаметр 200 мм или 220 мм. Предназначение концевых шайб — также исключение перетекания воздушного потока через торцы модели. Было показано, что в случае моделирования вращательных колебаний толстой пластины соотношение сторон пластины L/w должно быть больше

пяти [90], это было показано ранее (см. раздел 3.2). Пропорции наших моделей удовлетворяют этому требованию.

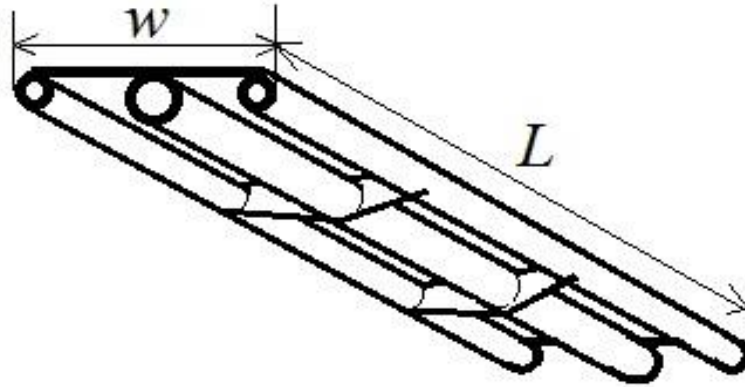


Рис. 4.2. Схема испытываемого сегмента моста.

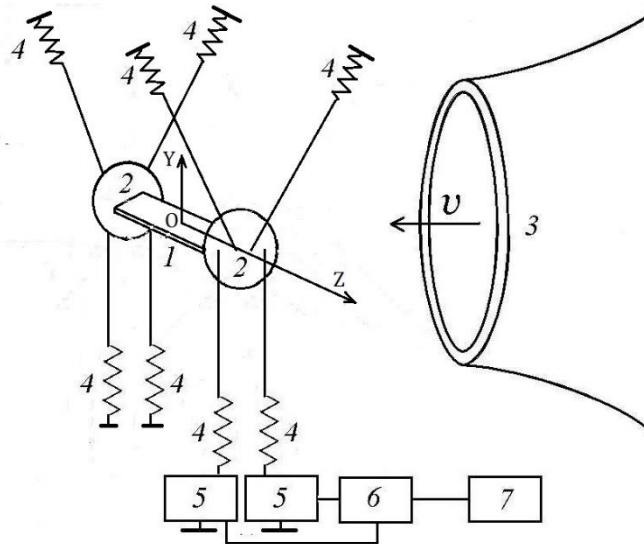


Рис. 4.3. Схема эксперимента. 1 — модель, 2 — концевые шайбы, 3 — сопло аэродинамической трубы, 4 — пружины, 5 — полупроводниковые тензопреобразователи, 6 — РС-осциллограф, 7 — компьютер.

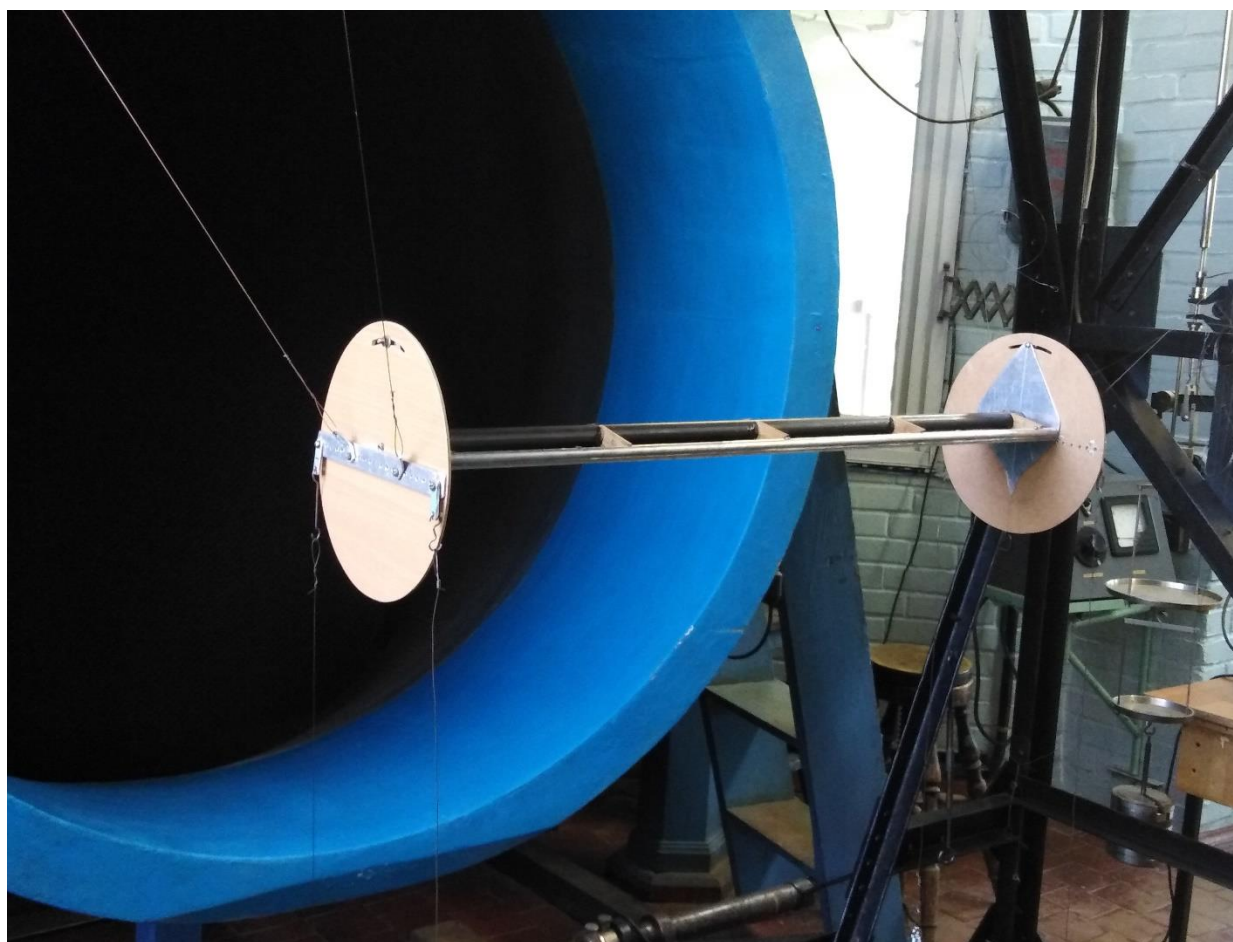


Рис. 4.4. Модель с концевыми шайбами в рабочей части аэродинамической трубы.

Схема эксперимента по колебанию сегмента моста приведена на рис. 4.3. Фотография модели в рабочей части аэродинамической трубы представлена на рис. 4.4. Модель закреплена в рабочей части аэродинамической трубы с помощью восьми стальных пружин и проволочных тяг, соединяющих пружины с моделью. Установленная таким образом модель могла перемещаться с шестью степенями свободы, однако в эксперименте наблюдались только поступательные колебания вдоль вертикальной оси OY и вращательные колебания вокруг оси OZ .

Два полупроводниковых тензопреобразователя С-50 регистрируют натяжение двух нижних пружин. РС-осциллограф Velleman-PCS500 преобразует аналоговые выходные сигналы тензопреобразователей в цифровые и передает их на управляющий компьютер. Частота считывания показаний составляет 1250 Гц. Длительность записи показаний равна 3.3 с.

Процедура калибровки и последующая обработка результатов позволяют связать амплитуды колебаний выходного напряжения тензопреобразователей с амплитудами вращательных и поступательных колебаний сегмента моста.

4.3. Обработка результатов эксперимента с вращательными и поступательными колебаниями.

Было применено преобразование Фурье сигнала. Установлено, что колебания происходят на двух частотах. Одна из частот (низкая) соответствует чисто поступательным колебаниям в вертикальном направлении. Угловые колебания происходят с высокой частотой. Присутствуют также небольшие поступательные колебания с высокой частотой.

Мы предполагаем, что смещение конца пружины описывается выражением

$$y_{ij} = B_j \cos \omega_1 t_i + C_j \sin \omega_1 t_i + D_j \cos \omega_2 t_i + E_j \sin \omega_2 t_i + F_j + \xi_{ij}, \quad (4.11)$$

$$B_j = a_{j1} \cos \varphi_{j1}, \quad C_j = a_{j1} \sin \varphi_{j1}, \quad D_j = a_{j2} \cos \varphi_{j2}, \quad E_j = a_{j2} \sin \varphi_{j2},$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2,$$

где y_{ij} – смещение конца пружины в момент времени t_i , j – номер пружины, n – число отсчетов в выборке, a_{j1} , a_{j2} – амплитуды колебаний концов пружин с круговыми частотами ω_1 и ω_2 , F_j – постоянные, ξ_{ij} – случайная величина, соответствующая погрешности эксперимента. Коэффициенты в формуле (4.11) можно определить методом наименьших квадратов как для всей выборки, содержащей 4095 отсчетов, так и для некоторой ее части. Коэффициенты в выражении (4.11) можно найти методом наименьших квадратов, минимизируя суммы квадратов $S_j = \sum_{i=1}^n \xi_{ij}^2$. Отыскание коэффициентов сводится в этом случае к решению систем линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
& B_j \sum_{i=1}^n \cos^2 \omega_1 t_i + C_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_1 t_i \cos \omega_1 t_i + D_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_2 t_i \cos \omega_1 t_i + \\
& + E_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_2 t_i \cos \omega_1 t_i + F_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_1 t_i = \sum_{i=1}^n y_{ij} \cos \omega_1 t_i, \\
& B_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_1 t_i \sin \omega_1 t_i + C_j \sum_{i=1}^n \sin^2 \omega_1 t_i + D_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_2 t_i \sin \omega_1 t_i + \\
& + E_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_2 t_i \sin \omega_1 t_i + F_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_1 t_i = \sum_{i=1}^n y_{ij} \sin \omega_1 t_i, \\
& B_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_1 t_i \cos \omega_2 t_i + C_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_1 t_i \cos \omega_2 t_i + D_j \sum_{i=1}^n \cos^2 \omega_2 t_i + \\
& + E_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_2 t_i \cos \omega_2 t_i + F_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_2 t_i = \sum_{i=1}^n y_{ij} \cos \omega_2 t_i, \quad (4.12) \\
& B_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_1 t_i \sin \omega_2 t_i + C_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_1 t_i \sin \omega_2 t_i + D_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_2 t_i \sin \omega_2 t_i + \\
& + E_j \sum_{i=1}^n \sin^2 \omega_2 t_i + F_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_2 t_i = \sum_{i=1}^n y_{ij} \sin \omega_2 t_i, \\
& B_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_1 t_i + C_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_1 t_i + D_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_2 t_i + E_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_2 t_i + F_j = \\
& = \sum_{i=1}^n y_{ij}.
\end{aligned}$$

В случае, когда оба тензопреобразователя регистрируют колебания модели, движущейся строго поступательно в вертикальном направлении, сдвиг фазы колебаний с частотой ω_1 выражается формулой $\varphi_1 = \varphi_{21} - \varphi_{11} = 0$. Безразмерная амплитуда колебаний центра масс модели определяется выражением $\rho_y = (a_{11} + a_{21})\omega_1/(2v)$. Рассмотрим случай произвольной разности фаз. Выражения для безразмерной амплитуды поступательных колебаний ρ_{y1} и амплитуды вращательных колебаний $\rho_{\theta 1}$ с частотой ω_1 имеют вид:

$$\rho_{y1} = \frac{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2 + 2a_{11}a_{21} \cos \varphi_1} \omega_1}{2v},$$

$$\rho_{\theta 1} = \frac{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2 - 2a_{11}a_{21} \cos \varphi_1}}{l}.$$

Безразмерная амплитуда поступательных колебаний ρ_{y2} и амплитуды вращательных колебаний $\rho_{\theta 2}$ с частотой ω_2 выражается формулами:

$$\rho_{y2} = \frac{\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2 + 2a_{12}a_{22} \cos \varphi_2} \omega_2}{2v},$$

$$\rho_{\theta 2} = \frac{\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2 - 2a_{12}a_{22} \cos \varphi_2}}{l}.$$

4.4. Результаты эксперимента с вращательными и поступательными колебаниями

Один из первых экспериментов был проведен с деревянной моделью сегмента моста. Поступательные колебания и вращательные установившиеся колебания наблюдались при небольших положительных равновесных углах атаки 0.1 и 0.05 рад. На рис. 4.5 представлена зависимость смещения концов передней и задней пружин в зависимости от времени. Частота колебаний равна 4.1 Гц.

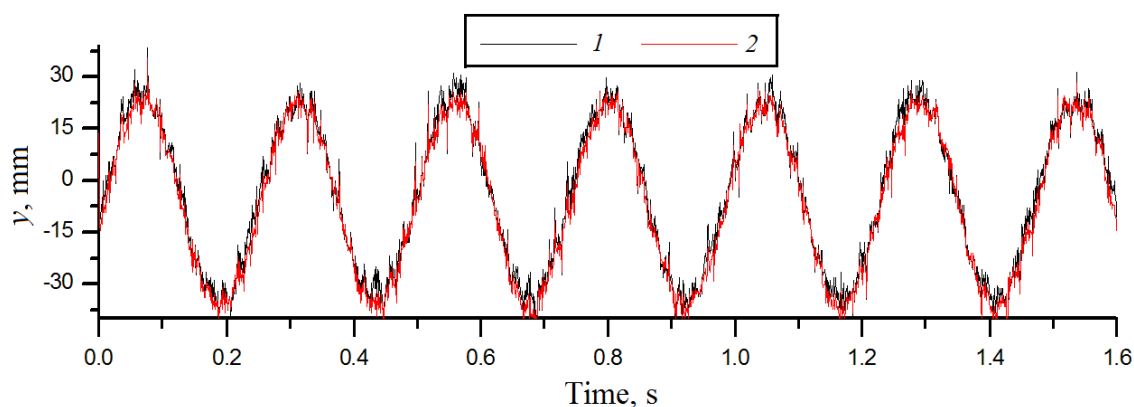


Рис. 4.5. Типичная зависимость смещения концов пружин от времени при поступательных колебаниях, 1 и 2 – относятся к задней и передней пружинам соответственно.

Эти две зависимости близки друг к другу. Колебания являются поступательными. Совершенно разные зависимости перемещений показаны на рис. 4.6. Фазовый сдвиг близок к π , но не равен π . Колебания представляют собой вращательные колебания с небольшой добавкой поступательных.

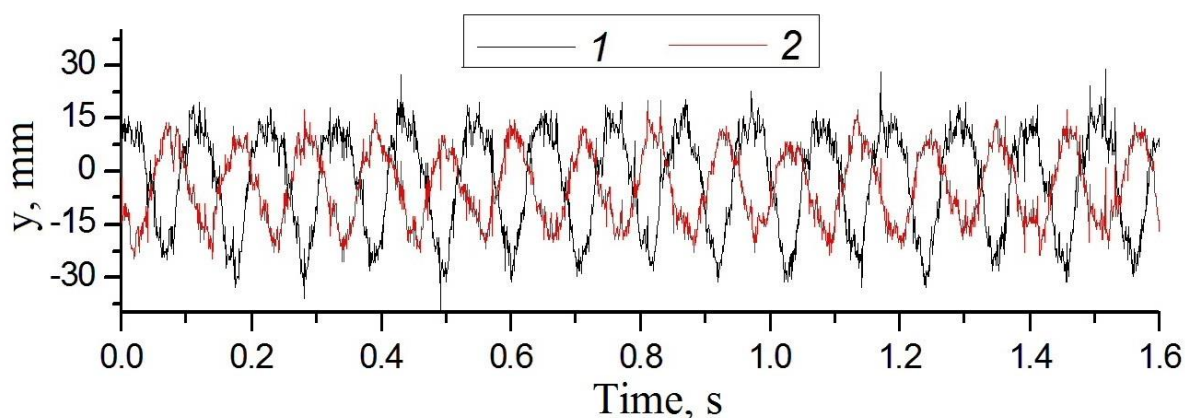


Рис. 4.6. Типичный экземпляр записи вращательных колебаний.

Установившиеся колебания сегмента моста имели место при небольших положительных значениях угла атаки α .

На следующих графиках (рис. 4.7 и 4.8) представлены результаты испытаний деревянной модели сегмента моста при двух равновесных углах атаки 0.1 и 0.05 рад. Точки на графике получены осреднением по пяти измерениям.

По мере увеличения скорости потока модель проходит через два различных режима колебаний. При малых скоростях возникают поступательные колебания в вертикальном направлении с частотой 4,1 Гц. Затем эти колебания заменяются поступательными в вертикальном направлении с частотой 9,1 Гц и вращательными колебаниями вокруг оси, проходящей через плоскость симметрии модели с частотой 9,1 Гц. При угле атаки 0,1 рад диапазоны двух режимов разделены. При равновесном угле атаки 0,05 рад диапазоны различных режимов перекрываются.

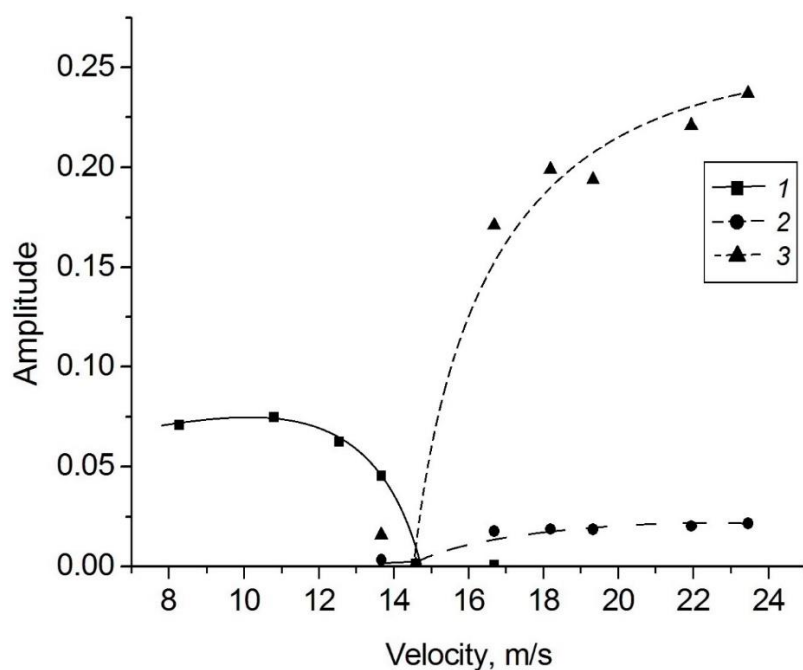


Рис. 4.7. Зависимость безразмерных амплитуд колебаний при $\theta_0 = 0.1$ рад.
 1 – поступательные колебания, 4.1 Гц, 2 – поступательные колебания, 9.1 Гц, 3 –
 вращательные колебания, 9.1 Гц

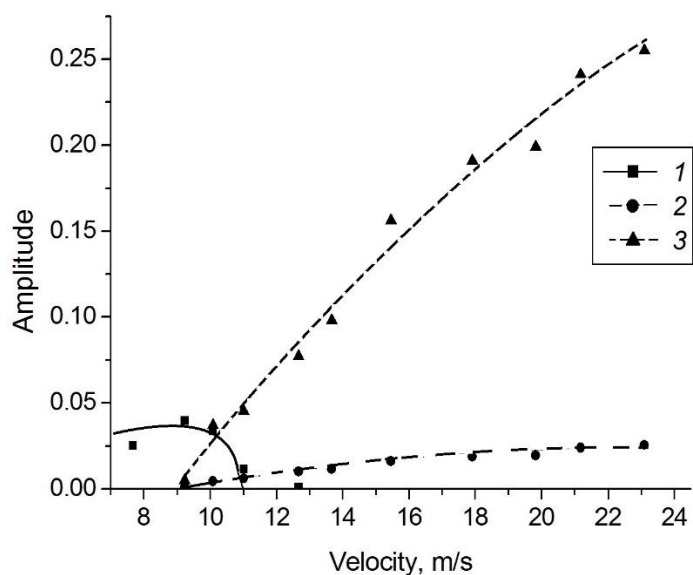


Рис. 4.8. Зависимость безразмерных амплитуд колебаний при $\theta_0 = 0.05$ рад.
 1 – поступательные колебания, 4.1 Гц, 2 – поступательные колебания, 9.1 Гц, 3 –
 вращательные колебания, 9.1 Гц

Таким образом, в экспериментах с деревянным макетом сегмента моста качественно подтверждаются предсказания математической модели о смене режимов обтекания при изменении скорости набегающего потока. В то же время наличие диапазона скоростей при равновесном угле атаки 0.05 рад, в котором существуют колебания с двумя частотами, мы подвергли сомнению, поскольку эксперимент, возможно, зафиксировал режимы колебаний, в которых колебания с постоянной амплитудой еще не установились. Эксперимент зафиксировал также наличие поступательных колебаний с малой амплитудой, сопровождающих вращательные колебания, причем частота этих поступательных колебаний совпадает с частотой вращательных. Существование этих поступательных колебаний объясняется тем, что во время вращательных колебаний изменение угла наклона тела приводит к появлению подъемной силы, которая вызывает поступательные колебания с частотой вращательных. В математической модели для анализа колебаний используется приближенный метод, который этот эффект не учитывает.

Следующие эксперименты проводились с металлической моделью, масса которой больше, чем у деревянной, размеры при изготовлении выдержаны более точно.

С помощью трехкомпонентных весов с проволочной подвеской определены аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления c_{xa} и подъемной силы c_{ya} в зависимости от угла атаки α . Модель была неподвижно закреплена в рабочей части аэродинамической трубы. Коэффициент нормальной силы c_y вычислен по формуле

$$c_y = c_{ya} \cos(\alpha - \theta_0) + c_x \sin(\alpha - \theta_0).$$

График зависимости $c_y(\alpha)$ приведен на рис. 4.9. По оси абсцисс отложено отклонение от угла атаки $\theta_0 = 0.1$ рад. Ось OY перпендикулярна вектору скорости набегающего потока, если угол атаки $\alpha - \theta_0 = 0$.

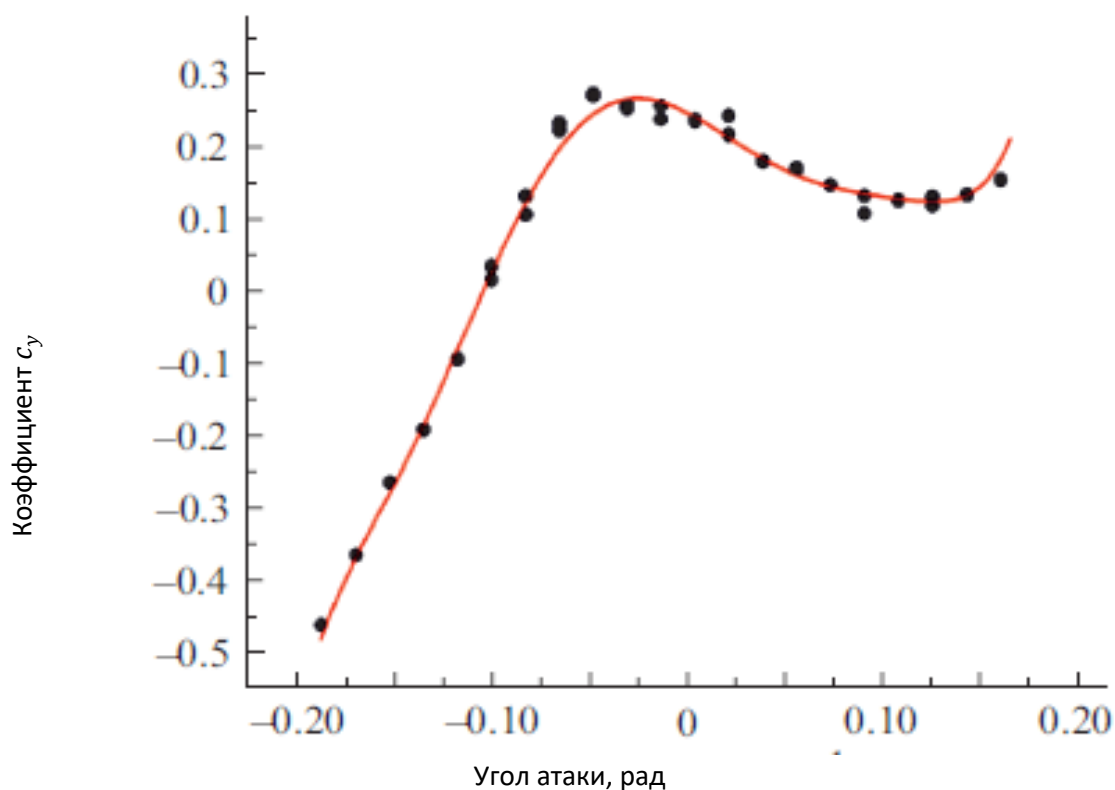


Рис. 4.9. Экспериментальная зависимость c_y от угла атаки $\alpha - \theta_0$ и ее аппроксимация полиномом 7-го порядка.

Коэффициенты A_i ($i = 0, 1, \dots, 7$) в разложении c_y по степеням угла атаки приводятся ниже:

$$\begin{aligned} (A_0, A_1, \dots, A_7) = \\ = (0.253, -1.501, -16.96, 303, -120, -12066, 10726, 185574). \end{aligned}$$

Профиль сегмента моста не является симметричным, поэтому коэффициенты при четных степенях угла атаки не равны нулю.

Также были определены коэффициенты A_i ($i = 0, 1, 2, 3$) для случая, когда в разложении зависимости коэффициента нормальной силы от угла атаки ограничиваются членами не выше третьей степени. Коэффициенты приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1. Коэффициенты A_i

θ_0	A_0	A_1	A_2	A_3
0.08	0.278	-0.45	-34.5	264
0.09	0.268	-1.06	-26.0	296
0.10	0.253	-1.50	-17.0	303
0.11	0.234	-1.76	-8.06	286
0.12	0.213	-1.84	0.01	248
0.13	0.193	-1.78	6.64	192
0.14	0.173	-1.60	11.4	122
0.15	0.155	-1.35	13.9	46

Параметр δ определяется в эксперименте с вращательными колебаниями модели сегмента моста, изготовленного из металла. Модель могла вращаться только вокруг оси, перпендикулярной скорости набегающего потока. Ось проходит через плоскость симметрии моста. Хвостовой держатель крепится к пружинам. Закрепленная таким образом, модель совершала вращательные колебания с постоянной амплитудой в воздушном потоке. Методика проведения эксперимента описана в разделе 3.1. Алгоритм обработки результатов эксперимента изложен в разделе 3.2.

Параметр δ определяется по зависимости квадрата амплитуды установившихся колебаний от числа Струхала $Sh = fw/v$, где f – частота колебаний. Эта зависимость аппроксимируется линейной функцией

$$\rho_\theta^2 = a + bSh, \quad \delta = 4a.$$

На рис. 4.10 представлена экспериментальная зависимость квадрата амплитуды от числа Струхала для нескольких равновесных углов θ_0 .

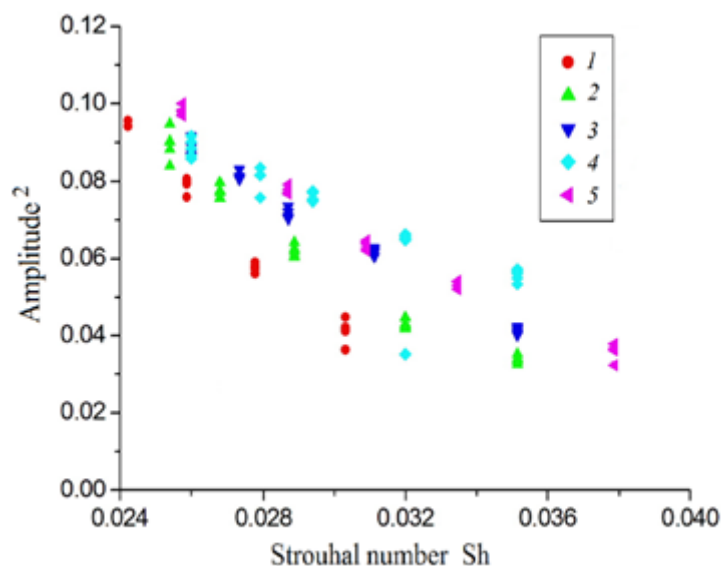


Рис. 4.10. Зависимость квадрата амплитуды вращательных колебаний от числа Струхалия: $1 - \theta_0 = 0.017$, $2 - \theta_0 = 0.035$, $3 - \theta_0 = 0.052$,
 $4 - \theta_0 = 0.079$, $5 - \theta_0 = 0.105$

Далее мы приводим результаты по измерению амплитуд колебаний при угле атаки, который в отсутствие колебаний был равен $\alpha_0 = 0.1$ рад. По мере увеличения скорости потока модель проходит через два различных режима колебаний. При малых скоростях возникают поступательные колебания с частотой 2 Гц в вертикальном направлении. Затем эти колебания сменяются вращательными колебаниями вокруг оси, проходящей через плоскость симметрии модели. Частота поступательных колебаний намного меньше частоты вращательных колебаний 7.5 Гц. Диапазоны существования двух режимов колебаний перекрываются.

На рис. 4.11 показана зависимость квадрата амплитуд от $1/v$. Зависимость близка к линейной, как и предсказывала математическая модель. Можно найти параметры $b_1 = 65,1$ и $b_2 = 3,1$

На рис. 4.12 приведены зависимости безразмерных амплитуд колебаний, полученные в эксперименте и в результате численного расчета, проведенного методом Рунге–Кутты. В качестве исходных данных в расчете задавались следующие величины: $v_1 = 4.2$ м/с $v_2 = 13.5$ м/с $b_2 = 3.5$.

Коэффициенты разложения c_y по степеням угла атаки α , используемые в расчете, приведены выше.

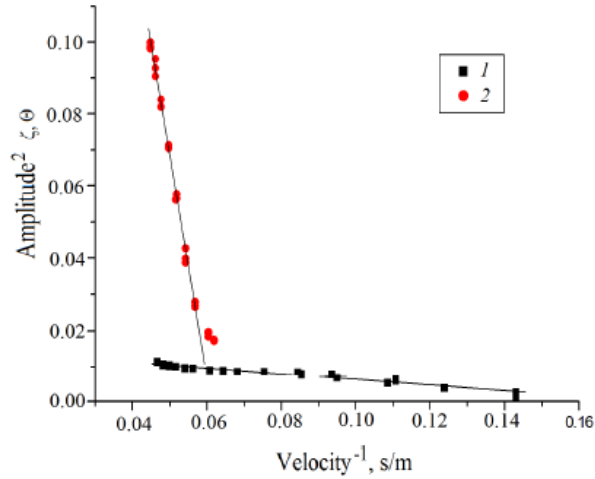


Рис. 4.11. Зависимости квадратов безразмерных амплитуд поступательных и вращательных колебаний от величины, обратной скорости набегающего потока: 1 – поступательные колебания; 2 – вращательные колебания.

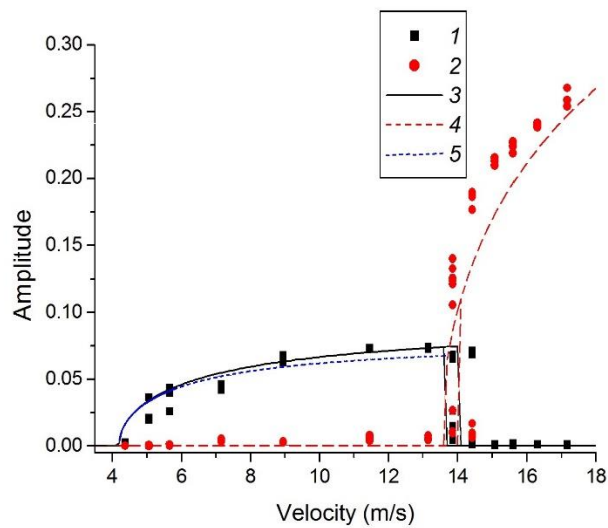


Рис. 4.12. Зависимости безразмерных амплитуд поступательных ρ_y и вращательных ρ_θ колебаний от скорости набегающего потока: 1 — ρ_y , эксперимент; 2 — ρ_θ , эксперимент; 3 — ρ_y , расчет; 4 — ρ_θ , расчет; 5 — ρ_y , расчет по простой модели.

Параметр b_1 простой модели, учитывающей в разложении c_y по степеням угла атаки α только члены не выше третьего порядка малости, составил 110.5. Правая граница области гистерезиса v_3 , рассчитанная по простой модели, равна 14.13 м/с. Левая граница $v_4 = 13.65$ м/с. В более сложной модели значения границ области гистерезиса отличаются от границ простой модели не более, чем на 0.1 м/с.

Таким образом, картина смены режимов колебаний качественно описывается предложенной математической моделью. Некоторое количественное расхождение результатов, предсказываемых моделью, и экспериментальных данных можно объяснить погрешностями эксперимента и несовершенством модели, описывающей вращательные колебания.

4.5. Поперечные колебания тяг пружинной подвески

В процесс колебаний в ряде экспериментов включались поперечные колебания одной из пружин с проволочной тягой. В натуральных условиях при колебаниях моста этому явлению может соответствовать колебания одной из вант вантового моста. Причиной таких колебаний является параметрический резонанс, который вызывают колебания натяжения пружины с тягой с частотой, приблизительно в два раза превышающей собственную частоту поперечных колебаний. Примем, что эти поперечные колебания можно описать, представив их приближенно колебаниями натянутой струны в режиме, когда в длине струны укладывается половина длины волны поперечных колебаний. Как известно, такие колебания описываются уравнениями Матье [80]. Мы добавили в уравнение Матье дополнительное слагаемое, чтобы ограничить амплитуду колебаний струны.

Таким образом система уравнений, описывающих поступательные колебания тела в воздушном потоке (4.13), вращательные колебания (4.14),

дополнилась еще одним уравнением поперечных колебаний пружинной подвески (4.15):

$$\ddot{y} + \omega_1^2 y = \mu_1 \frac{v}{w} \left[1 - \frac{v_1}{v} + \frac{A_2 \dot{y}}{A_1 v} - 2 \frac{A_2}{A_1} \theta + \frac{A_3}{A_1} \left(\frac{\dot{y}}{v} \right)^2 - 3 \frac{A_3}{A_1} \left(\frac{\dot{y}}{v} \right) \theta + 3 \frac{A_3}{A_1} \theta^2 \right] - \mu_1 \frac{v^2}{w} \left(\theta - \frac{A_2}{A_1} \theta^2 + \frac{A_3}{A_1} \theta^3 \right) + T_{yz}, \quad (4.13)$$

$$\ddot{\theta} + \omega_2^2 \theta = \mu_2 \frac{v}{w} \left[1 - \delta \theta^2 - \delta \left(\frac{\dot{y}}{v} \right)^2 + 2 \delta \theta \frac{\dot{y}}{v} \right] \times \left(\dot{\theta} + \frac{\omega_1^2 y}{v} \right) - \mu_2 v_2 \frac{\dot{\theta}}{w} + T_{\theta z}. \quad (4.14)$$

$$\ddot{z} + \omega_3^2 z = -\mu_3 \theta z - \mu_4 \dot{z} z^2, \quad (4.15)$$

где z – поперечное смещение центра струны, отнесенное к ее длине.

Поперечные колебания струны вызывают дополнительное периодическое изменение натяжения, связанное с тем, что колебаниям сопутствуют изменения длины струны. Поэтому в уравнения поступательных (4.13) и вращательных (4.14) колебаний добавлены слагаемые T_{yz} и $T_{\theta z}$, описывающие периодическое изменение вертикальной силы и момента сил, связанных с поперечными колебаниями струны.

Решать систему уравнений (4.13, 4.14, 4.15) будем методом Крылова-Боголюбова. Введем новые переменные.

$$\theta = \rho_\theta \cos \psi_2, \quad \psi_2 = \omega_2 t + \varphi_2, \quad z = \rho_z \cos \psi_3, \quad \psi_3 = \omega_3 t + \varphi_3, \\ \omega_2 = 2\omega_3 + \Delta\omega, \quad \omega_4 = 2\omega_3.$$

Слагаемое T_{yz} представляет собой периодическую функцию с медленно меняющейся амплитудой и частотой близкой к ω_2 . Поэтому слагаемое не скажется на результате применения метода Крылова-Боголюбова к уравнению (4.13).

Слагаемое $T_{\theta z}$ имеет вид

$$T_{\theta z} = a \rho_z^2 \cos 2\psi_3 = a \rho_z^2 \cos(\psi_4 + \Delta\varphi) = a \rho_z^2 (\cos \psi_4 \cos \Delta\varphi - \sin \psi_4 \sin \Delta\varphi).$$

Полагая сдвиг частоты $\Delta\omega$ малым по сравнению с частотой ω_4 преобразуем уравнение (4.14):

$$\ddot{\theta} + \omega_4^2 \theta = -2\Delta\omega\omega_4\theta + \mu_2 \frac{v}{w} \left[1 - \delta\theta^2 - \delta \left(\frac{\dot{y}}{v} \right)^2 + 2\delta\theta \frac{\dot{y}}{v} \right] \times \left(\dot{\theta} + \frac{\omega_1^2 y}{v} \right) - \mu_2 v_2 \frac{\dot{\theta}}{w} + a\rho_z^2 (\cos\psi_4 \cos\Delta\varphi - \sin\psi_4 \sin\Delta\varphi). \quad (4.16)$$

При решении методом Крылова-Боголюбова уравнения (4.15) угол наклона θ представляется в виде

$$\theta = \rho_\theta \cos\psi_4 = \rho_\theta \cos(2\psi_3 - \Delta\varphi) = \rho_\theta (\cos^2\psi_3 - \sin^2\psi_3) \cos\Delta\varphi + 2\rho_\theta \sin\psi_3 \cos\psi_3 \sin\Delta\varphi.$$

Метод Крылова-Боголюбова приводит к уравнениям для медленно меняющихся амплитуд и сдвигов фаз колебаний:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_\theta &= \frac{\mu_2 v}{2w} \rho_\theta \left[1 - \frac{v_2}{v} - \frac{\delta}{4} (\rho_\theta^2 + 2\rho_Y^2) \right] + \frac{a}{2\omega_4} \rho_z^2 \sin\Delta\varphi, \\ \dot{\rho}_z &= \frac{\mu_3}{4\omega_3} \rho_\theta \rho_z \sin\Delta\varphi - \frac{\mu_4}{8} \rho_z^3, \\ \rho_\theta \dot{\varphi}_4 &= \Delta\omega \rho_\theta - \frac{a}{2\omega_4} \rho_z^2 \cos\Delta\varphi, \\ \rho_z \dot{\varphi}_3 &= \frac{\mu_3}{4\omega_3} \rho_\theta \rho_z \cos\Delta\varphi. \end{aligned}$$

Из двух последних формул получаем выражение для производной $\Delta\varphi$. Присоединим к системе уравнений уравнение поступательных колебаний, полученное уравнение из (4.13) методом Крылова-Боголюбова.

$$\dot{\rho}_Y = \frac{\mu_1 v}{2w} \rho_Y \left[1 - \frac{v_1}{v} - b_1 (\rho_Y^2 + 2\rho_\theta^2) \right], \quad (4.17)$$

$$\dot{\rho}_\theta = \frac{\mu_2 v}{2w} \rho_\theta \left[1 - \frac{v_2}{v} - \frac{\delta}{4} (\rho_\theta^2 + 2\rho_Y^2) \right] + \frac{a}{2\omega_4} \rho_z^2 \sin\Delta\varphi, \quad (4.18)$$

$$\dot{\rho}_z = \frac{\mu_3}{4\omega_3} \rho_\theta \rho_z \sin\Delta\varphi - \frac{\mu_4}{8} \rho_z^3, \quad (4.19)$$

$$\rho_\theta \Delta\varphi = \cos\Delta\varphi \left(\frac{\mu_3}{2\omega_3} \rho_\theta^2 + \frac{a}{2\omega_4} \rho_z^2 \right) - \Delta\varphi \rho_\theta. \quad (4.20)$$

Примем, что процессы, описываемые уравнениями (4.19, 4.20), происходят быстрее, чем процессы, описываемые уравнениями (4.17, 4.18), то есть μ_1 и μ_2 много меньше, чем μ_3/ω_3^2 , μ_4/ω_3 и a/ω_4^2 .

Тогда можно считать, что во время установления колебаний с амплитудой ρ_z и сдвигом фаз $\Delta\varphi$, описываемых уравнениями (4.19, 4.20), амплитуды поступательных ρ_Y и вращательных ρ_θ колебаний тела остаются постоянными. Ограничимся случаем очень малого сдвига частот, которому соответствует малое значение $\cos \Delta\varphi$, а отличием $\sin^2 \Delta\varphi$ от единицы можно пренебречь. Получаем, что

$$\rho_z^2 = \rho_\theta \frac{2\mu_3}{\mu_4\omega_3} \sin \Delta\varphi. \quad (4.21)$$

Подставляем это выражение в уравнение (4.18), считая при этом $\sin^2 \Delta\varphi \approx 1$.

Производя небольшие преобразования и вводя обозначение $v'_2 = 4w\mu_3/(\mu_2\mu_4\omega_3)$, получаем, что система уравнений (4.17, 4.18) совпадает с системой уравнений для поступательных и вращательных колебаний тела без учета поперечных колебаний пружинной подвески, в которой скорость v_2 заменена на меньшую скорость v'_2 :

$$\dot{\rho}_Y = \frac{\mu_1 v}{2 w} \rho_Y \left[1 - \frac{v_1}{v} - b_1 (\rho_Y^2 + 2\rho_\theta^2) \right], \quad (4.22)$$

$$\dot{\rho}_\theta = \frac{\mu_2 v}{2 w} \rho_\theta \left[1 - \frac{v'_2}{v} - \frac{\delta}{4} (\rho_\theta^2 + 2\rho_Y^2) \right], \quad (4.23)$$

Таким образом, близость собственной частоты струны, являющейся частью подвески, к половине собственной частоте вращательных колебаний конструкции ведет к уменьшению критической скорости, при которой происходит переход от поступательных колебаний тела к вращательным.

Выводы главы 4

Предложена математическая модель, описывающая поступательные и вращательные колебания плохо обтекаемого тела в потоке газа. За основу модели поступательного галопирования была взята известная квазистационарная модель, за основу моделирования вращательных колебаний принята модель колебаний цилиндра малого удлинения, которая, как оказалось, пригодна для описания вращательных колебаний толстых пластин и сегментов мостов, снабженных концевыми шайбами. При моделировании учитывается, что мгновенный угол атаки складывается из наклона тела и угла, тангенс которого равен отношению вертикальной скорости тела к горизонтальной скорости тела относительно среды. При аппроксимации зависимости коэффициента нормальной силы полиномом третьего порядка уравнения движения тела сводятся к дифференциальным уравнениям, совпадающим с уравнениями Лотки–Вольтерры, первоначально полученными для описания конкуренции двух видов животных, питающихся одинаковой пищей. Предсказания модели подтверждены в эксперименте в аэродинамической трубе. Модель правильно описывает смену режимов колебаний, включая гистерезис, связанный с увеличением и последующим уменьшением скорости воздушного потока. Параметры модели определены в отдельных экспериментах.

Получено, что собственная частота струны, являющаяся часть аэродинамической подвески, при приближении к половине собственной частоты вращательных колебаний конструкции приведет к уменьшению критической скорости, при которой происходит переход от поступательных колебаний тела к вращательным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенных исследований были получены следующие результаты:

Получены результаты влияния концевых шайб на донное давление и длину рециркуляционной зоны прямоугольных пластин, ориентированных перпендикулярно вектору скорости набегающего потока в зависимости от удлинения.

Получены результаты влияния концевых шайб на зависимость амплитуды вращательных колебаний толстых пластин от числа Струхалья. Оказалось, что для описания вращательных колебаний пластин, удлинение которых больше либо равно пяти, удовлетворительно работает математическая модель, предложенная ранее для описания вращательных колебаний цилиндра малого удлинения.

Предложена математическая модель, описывающая возникновение и конкуренцию между двумя режимами колебаний, поступательных и вращательных. Модель проверена в экспериментах на примере сегмента моста, ограниченного концевыми шайбами. Рассмотрено влияние струны, являющейся частью подвески, на критическую скорость смены поступательных колебаний на вращательные.

При аппроксимации зависимости коэффициента нормальной силы полиномом третьего порядка уравнения движения тела сводятся к дифференциальным уравнениям, совпадающим с уравнениями Лотки–Вольтерры, первоначально полученными для описания конкуренции двух видов животных, питающихся одинаковой пищей.

Достоверность результатов обеспечивается сравнением результатов теоретических данных математической модели и полученных экспериментальных данных. В связи с широкой распространенностью объектов большого удлинения в реальных условиях, то полученные

результаты можно использовать при анализе поведения удлиненных плохо обтекаемых конструкций, например, сегментов мостов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бирбраер А. Н. Экстремальные воздействия на сооружения / А. Н. Бирбраер, А. Ю. Роледер. // СПб. Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 594с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний // 4-е изд. Наука, М. 1974.
3. Бурцев Б.Н., Вожаев Е.С., Головкин М.А., Головкина Е.В., Горбань В.П. Влияние на аэродинамику крыла и несущего винта установки небольших концевых крылышек // Учёные записки ЦАГИ. 2005. Т.36. № 3-4. С. 51-58.
4. Галемин Е. К., Агеева Е. В. Метод учёта влияния концевых шайб на обтекание крыла с изменяющимися по размаху профилями // Известия Юго-Западного государственного университета. - 2020. - Т. 24, № 2. - С. 49-59
5. Гостев Ю. А, Обуховский А. Д., Саенко С. Д. Влияние формы на аэродинамические характеристики балочных мостов // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5. С. 63-72
6. Гуереш Д., Попов С.А. Улучшение аэродинамики крыла пассажирского самолёта с помощью законцовки треугольной формы в плане // Научный вестник МГТУ ГА. 2018. Т. 21. № 1. С. 124-136.
7. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания. // Москва. Государственное издательство физико-математической литературы. 1960.
8. Занин Б. Ю., Козлов В. В., Проскрянов В. Г. Структура турбулентного отрыва на прямом крыле при различных условиях обтекания // Ученые записки ЦАГИ. Т. 30 (1-2). 1999 С. 77-83

9. Зверков И. Д., Занин Б. Ю. Влияние концевых шайб на топологию срывного течения на прямом крыле // *Аэромеханика и газовая динамика*. 2000. №3. С. 68-72.
10. Зверков И. Д., Занин Б. Ю. Влияние формы поверхности крыла на отрыв потока // *Теплофизика и аэромеханика* 10 (2). 2003. С. 205-213
11. Ковалев М.А. О расчете и исследовании аэродинамических труб // *Уч. зап. Ленингр. ун-та*. 1939. Вып. 7. С. 61-86.
12. Крюков А.В., Зверков И.Д. Метод уменьшения аэродинамических характеристик крыла при малых числах Рейнольдса // *Тр. Межд. конф. ISMAR 2010*. Новосибирск, 2010, с. 263 -264.
13. Курицкес Я.М. Вихревая теория крыла с концевыми симметричными по высоте шайбами // *М.: Изд-во ВВА им. Н.Е. Жуковского*, 1948.
14. Курицкес Я.М. Теория крыльев с концевыми шайбами при гипотезе П-образных вихрей // *М.: Изд-во ВВА им. Н.Е. Жуковского*, 1947.
15. Люсин В. Д. Моделирование галопирования тел имеющих два режима обтекания в состоянии покоя // *Международная конференция «Восьмые Окуневские чтения»*. Санкт-Петербург. Балт. гос. техн. ун-т. 2013. С. 213-214.
16. Люсин В. Д. Применение квазистатического приближения для исследования галопирования плохообтекаемых тел // *Шестые Поляховские чтения*. Санкт-Петербург. 2012. Издатель И. В. Балабанов, 2012. С. 155.
17. Люсин В. Д. Рябинин А. Н. О галопировании призм в потоке газа или жидкости // *Труды ЦНИИ имени академика А. Н. Крылова СПб* 2010. Вып. 53(337) С. 79-84.
18. Люсин В. Д. Рябинин А. Н. Применение квазистатического приближения для решения задач об аэроупругом галопировании призм различного удлинения // *Международная конференция «Седьмые Окуневские чтения»*. Санкт-Петербург. 2011. С. 100-101.

19. Люсин В.Д., Рябинин А.Н. Исследование влияния удлинения призмы на ее аэродинамические характеристики и амплитуду колебаний при галопировании // Вестник С-Петербур. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 139-145.
20. Москаленко В.О., Косырев А.А. Исследование влияния стреловидности несущих поверхностей и законцовок на аэродинамические характеристики перспективного беспилотного летательного аппарата // Инженерный журнал: наука и инновации 2019 . № 7. С. 1-12.
21. Москаленко В.О., Цой А.И., Недогарок А.А. Исследование аэродинамических характеристик крыла с законцовками различной формы // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. № 10. С. 1
22. Нейланд В. Я., Столяров Г. И., Табачников В. Г. Влияние относительной толщины прямоугольного крыла малого удлинения и числа Рейнольдса на режимы перестройки структуры обтекания // Учен. зап. ЦАГИ. 1985. Т. 16, № 3. С. 1–10.
23. Овчинников И. И., Овчинников И. Г., Филиппова В. О. Танцующий мост в Волгограде: причины, аналогии, мероприятия. // Интернет-журнал Науковедение. 2015. Т. 7, № 6 (31) с. 1-23.
24. Овчинников И.Г. Применение инновационных решений в практике проектирования строительства и эксплуатации мостовых сооружений Поволжского региона // Наука: 21 век. Саратов. 2011. №1 (13). С. 36-43.
25. Павленко О.В., Раздобарин А.М., Федоренко Г.А. Влияние формы законцовки на обтекание крыла // Учёные записки ЦАГИ. 2018. Т.49. № 3. С. 26-35.
26. Панарыина Е. С. Рябинин А. Н. Галопирование пятиугольной призмы // Аэродинамика. Сборник статей. СПб.: Изд-во ВВМ. 2013. С. 11-17.
27. Пастухов А.И., Галемин Е.К. К расчету аэрогидродинамических характеристик крыльев с концевыми шайбами в несжимаемом

- потоке // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. 2004. № 1. С. 20-31.
28. Пшеничников С.К. О причинах колебаний пролетного строения руслового моста через р. Волгу // вестник мостостроения. 2011, №1, спецвыпуск. С. 37-38.
 29. Рябинин А. Н. Множественность режимов дозвукового обтекания нескольких параллелепипедов // Вестник Ленингр. ун-та. Серия 1. 1988. Вып. 3. С. 110-111.
 30. Рябинин А. Н. Некоторые задачи аэродинамики плохообтекаемых тел. СПб. 1997. 144 с.
 31. Рябинин А. Н. Некоторые экспериментальные исследования дозвуковых течений // Гидроаэромеханика / ред. В. Г. Дулов. 1999. С. 216-225
 32. Рябинин А. Н., Шмигирилов Р. В. Влияние концевых шайб на аэродинамические характеристики плохо обтекаемых тел // Тезисы докладов Международной научной конференции по механике VIII Поляховские чтения, 2018. Санкт-Петербург, С. 150.
 33. Рябинин А. Н., Шмигирилов Р. В. Влияние концевых шайб на колебания пластины в воздушном потоке // XXV Всероссийский семинар с международным участием по струйным, отрывным и нестационарным течениям. Санкт-Петербург. Балтийский государственный технический университет "ВОЕНМЕХ", С. 200-201.
 34. Рябинин А. Н., Шмигирилов Р. В. Влияние поперечных колебаний подвески на колебания плохо обтекаемого тела под действием ветра // Материалы XXII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021), 4–13 сентября 2021 г., Алушта. М.: Московский авиационный институт, с. 447-449. 2021.

35. Рябинин А.Н., Киселев Н.А. Влияние положения оси вращения цилиндра на его вращательные колебания в воздушном потоке // Вестн. С.-П. ун-та. Сер. 1, 3 (2), 315 (2016). DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.216
36. Рябинин А. Н., Шмигирилов, Р. В. Конкуренция режимов колебаний плохо обтекаемого тела в воздушном потоке // Журнал технической физики. Т.91, №5. С. 758-763. [Перевод на англ.: Ryabinin A.N., Shmigirilov R.V. Competition between Bluff Body Vibration Modes in an Air Flow // Technical Physics 2021. Vol. 66(6), pp. 787–792.]
37. Симиу Э., Сканлан Р. Воздействие ветра на здания и сооружения (Стройиздат, М., 1984) [Пер. с англ.: E. Simiu, R. Scanlan. Wind effect on structures: An introduction to wind engineering (John Wiley & Sons, NY. 1978)]
38. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивость и катастрофы в науке и технике. // Москва. Мир. 1985.
39. Шмигирилов Р. В., Рябинин А. Н. Влияние концевых шайб на поперечное обтекание прямоугольной пластины малого удлинения // Естественные и математические науки в современном мире. 2015. Том 5 (29), с. 158-162.
40. Шмигирилов Р. В., Рябинин А. Н. Физическое и математическое моделирование колебаний сегмента моста // IX Поляховские чтения: Материалы международной научной конференции по механике, 9–12 марта 2021 г., Санкт–Петербург. СПб.: Издательство «ВВМ», стр. 397-399. 2021.
41. Шмигирилов, Р. В., Рябинин, А. Н. Влияние концевых шайб на вращательные колебания толстых пластин в воздушном потоке // Материалы XIII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (AMMAI'2020) Алушта. 2020. Москва. Московский авиационный институт. С. 50-52.

42. Alonso G., Meseguer J. A parametric study of the galloping stability of two-dimensional triangular cross-section bodies // *J. Wind Engineering Industrial Aerodynamics*. 2006. Vol. 94. P. 241–253.
43. Alonso G., Meseguer J., Perez-Grande I. Galloping instabilities of twodimensional triangular cross-section bodies // *Experiments in Fluids*. 2005 Vol. 38. P. 789–795.
44. Alonso G., Meseguer J., Perez-Grande I. Galloping stability of triangular cross-sectional bodies: A systematic approach // *J. Wind Engineering Industrial Aerodynamics*. 2007. Vol. 95. P. 928–940.
45. Alonso G., Meseguer J., Sanz-Andres A., Valero E. On the galloping instability of two-dimensional bodies having elliptical cross sections // *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2010. Vol. 98. P. 438-448.
46. Alonso G., Sanz-Lobera A., Meseguer. J. Hysteresis phenomena in transverse galloping of triangular cross-section bodies // *J. Fluids Struct.* 2012. Vol. 33. P. 243-251.
47. Alonso G., Valero E., Meseguer J., An analysis on the dependence on cross section geometry of galloping stability of two-dimensional bodies having either biconvex or rhomboidal cross sections // *European J. Mech. B/ Fluids*. 2009. Vol. 28. P. 328 - 334.
48. Barrero-Gil A., Sanz-Andres A., Roura M. Transverse galloping at low ReInolds numbers // *J. Fluid and Structures*. 2009. Vol. 25. P. 1236-1242.
49. Bearman P. W., Gratshore I. S., Maull D. J., Parkinson G. V. Experiments on flow induced vibration of a square-section cylinder // *J. of Fluids and Structures*. 1987. Vol. 1. P. 19-34.
50. Bearman P. W., Luo S. C. Investigation of the aerodynamic instability by forced oscillation // *J. of Fluids and Structures*. 1988. Vol. 2. P. 161-176.
51. Blevins R.D., Iwan W.D. The Galloping Response of a Two-Degree-of-Freedom System // *J. Appl. Mech.* 1974. Vol. 41. P. 1113-1118.

52. Corless R. M., Parkinson G. V. A model of the combined effects of vortex induced oscillation and galloping // *J. of Fluids and Structures*. 1988. Vol. 2. P. 203-220.
53. Den Hartog J.P. Transmission Line Vibration Due to Sleet // *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*. 1932. vol. 51, 1074.
54. Deniz S., Staubli T. Oscillating rectangular and octagonal profiles: interaction of leading and trailing edge vortex formation // *J. of Fluid and Structures*. Vol. 11. P. 3-31.
55. Deniz S., Staubli T. Oscillating rectangular and octagonal profiles: modeling of fluid forces // *J. of Fluid and Structures*. Vol. 12. P. 859-882.
56. Desai Y. M., Shah A.H., Popplewell N. Galloping analysis for two-degree-of-freedom oscillator // *J. Eng. Mech*. 1990. Vol. 116. No. 12. P. 2583-260.
57. Gerich D., Eckelmann H. Influence of end plates and free ends on the shedding frequency of circular cylinders // *Journal of Fluid Mechanics*, 1982. Vol. 122. P. 109-121.
58. Gerrard J. H. A disturbance-sensitive Reynolds number range of the flow past a circular cylinder // *J. Fluid Mech*. Vol. 22. Issue 1. 1965. P. 187 – 196
59. Glauert H. The rotation of an aerofoil about a fixed axis // *Advisory Committee on Aeronautics. Reports and Memoranda*. No. 595. 1919. P. 443-447.
60. Hansen K. L., Kelso R. M., Dally B. B. Performance Variations of Leading-Edge Tubercles for Distinct Airfoil Profiles // *AIAA J*. 2011. Vol.46. No. 1. P. 185–194
61. Kubo Yo., Kato K. The role of end plates in two dimensional wind tunnel tests // *Structural Eng./Earthquake Eng. Japan Society of Civil Engineers*. 1986. vol. 3, №1 pp. 167–174.
62. Li Sh., Wan R., Wang D., Guo, P. Effect of end plates on transiting test for measuring the aerodynamic coefficient of structures using wind

- generated by a moving vehicle // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2019. Vol. 190 pp. 273–286.
63. Luo S. C., Bearman, P. W. Predictions of fluctuating lift on a transversely oscillating square section cylinder // *J. of Fluids and Structures*. 1990. Vol. 4. P. 219-228.
 64. Luo S. C., Chew Y. T., Lee T. S., Yazdani M. G. Stability to translation galloping vibration of cylinders at different mean angle of attack // *J. of Sound and Vibration*. 1998. Vol. 215. P. 1183-1194.
 65. Luo S. C., Chew Y. T., Ng Y. T. Hysteresis phenomenon in the galloping oscillation of a square cylinder // *J. of Fluid and Structures*. 2003. Vol. 18. P. 103-118.
 66. Ma W., Wang G., Zheng Xi. Effects of end condition on aerodynamic force distribution on a skewed circular cylinder // *Journal of Experiments in Fluid Mechanics*, 2019, 33(2), P. 43-50
 67. Maskell, E. C. A theory of the blockage effects on bluff bodies and stalled wings in a closed wind tunnel // H.M. Stationery Office, 1965
 68. Murray J.D. *Mathematical Biology I. An Introduction* // Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg. 2002.
 69. Nakamura Y., Tomonari Y. Galloping of rectangular prisms in a smooth and a turbulent flow // *J of Sound and Vibration*. 1977. Vol. 52. P. 233-241.
 70. Novak M. Aeroelastic galloping of prismatic bodies // *J. Engineering Mech. Division ASCE*. 1969. Vol. 95. P. 115-142.
 71. Novak M. Galloping and vortex induced oscillation of structures // *Proc. 3rd Int. Conf. on Wind Effects on Buildings and Structures*. Tokyo. Science Council of Japan, 1971.
 72. Novak M. Galloping oscillations of prismatic structures // *J. of the Engineering Mechanics Divisions ASCE*. 1972. Vol. 98. P. 27-46.
 73. Novak M., Tanaka H. Effect of turbulence on galloping instability // *J. Engineering Mech. Division ASCE*. 1974. Vol. 100. P. 27-47.

74. Parkinson G. V., Wawzonak M. A. Some consideration of combined effects of galloping and vortex resonance // *J. of Wind and Industrial Aerodynamics*. 1981. Vol. 8 P. 135-143.
75. Parkinson G.V., Brooks N.P.H. On the Aeroelastic Instability of Bluff Cylinders // *J. Appl. Mech.* 1961. 28, pp. 252-258.
76. Parkinson G.V., Smith J.D. The square prism as an aeroelastic non-linear oscillator // *Quart. J. Mech Appl. Math.*, 17, pp. 225-239 (1964).
77. Pelletier A., Mueller T. J. Effect of endplates on two-dimensional airfoil testing at low Reynolds Number // *Journal of Aircraft*. 2001. vol. 38, №6 pp. 1056–1059
78. Peters H., “Druckmessung,” *Handbuch der Experimentalphysik* (W. Wien and F. Harms, Leipzig, 1931). Vol. 4. Part 1. P. 489–510.
79. Reddy K.S.V., Sharma D.M., Poddar K. Effect of End Plates on the Surface Pressure Distribution of a Given Cambered Airfoil: Experimental Study // *New Trends in Fluid Mechanics Research* (2009) P. 286-286.
80. Rowland D.R. Parametric resonance and nonlinear string vibrations // *American J. Phys.* 2004. V. 72. P. 758. doi:10.1119/1.1645281
81. Ryabinin A., Bogomolov R. Rotational oscillation study of the cylinders with end plates in airflow // *AIP Conference Proceedings*. 2018. vol. 1959, 050027.
82. Ryabinin A.N., Lyusin V.D. Galloping of small aspect ratio square cylinder // *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2015. Vol. 10, №1. P. 134-138.
83. Ryabinin, A., Kiselev, N. Rotational oscillation of a cylinder in air flow // *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2018. vol. 12, no. 23 pp. 6803–6808.
84. Scanlan R. H. The action of flexible bridges under wind, I: Flutter theory // *J. Sound Vibr.* 1978. Vol. 60. P. 187-199.
85. Scanlan R. H. The action of flexible bridges under wind, II: Buffeting theory // *J. Sound Vibr.* 1978. Vol. 60. P. 201-211.

86. Shmigirilov R. V., Ryabinin A. N. Effect of aspect ratio and end plates on rotational oscillations of thick plates in air flow // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 927, 5 p. No. 012049
87. Shmigirilov R. V., Ryabinin A. N. Physical and mathematical simulation of bridge segment oscillations // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1959, 1, No. 012044. 2021. Doi: 10.1088/1742-6596/1959/1/012044
88. Shmigirilov R. V., Ryabinin, A. N. Physical simulation of rotational and translational oscillations of a bridge // International Conference on the Methods of Aerophysical Research, ICMAR 2020. Fomin V. M., Shplyuk A. (ed.). American Institute of Physics, No. 030068. (AIP Conference Proceedings; vol. 2351). 2021. Doi: 10.1063/5.0051710
89. Shmigirilov R., Ryabinin A. Influence of end plates on aerodynamic characteristics of bluff bodies // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959, No. 050030.
90. Shmigirilov R., Ryabinin A. Influence of End Plates on Rotational Oscillations of a Rectangular Cylinder // Conference Topical Problems of Fluid Mechanics. Proceedings, ed. by D. Šimurda and T. Bodnár (Institute of Thermomechanics, Prague, 2020). P. 200-205. DOI: 10.14311/TPFM.2020.026
91. Simiu E., Scanlan R. Wind effects on structures: Fundamentals and applications to design // John Wiley, 1996. 704 p.
92. Soltani M.R., Masdari M., Tirandaz M.R. Effect of an end plate on surface pressure distributions of two swept wings // Chinese Journal of Aeronautics, 30, 2017, P. 1631-1643.
93. Stäger R., Eckelmann H. The effect of endplates on the shedding frequency of circular cylinders in the irregular range // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics 1991. Vol. 3. P. 2116-2121. <https://doi.org/10.1063/1.857894>

94. Stansby P. K. The effects of end plates on the base pressure coefficient of a circular cylinder // *The Aeronautical Journal*, Volume 78, Issue 757, January 1974, P. 36 – 37.
95. Wang C., Wen Q., Zhou S., Hua X., Huang Z., Chen Z. Effects of end condition and aspect ratio on vortex-induced vibration of a 5:1 rectangular cylinder // *Journal of Fluids and Structures*, 2022. Vol. 109. No. 103480
96. Wang Zh., Dragomirescu E. Flutter Derivatives Identification and Aerodynamic Performance of an Optimized Multibox Bridge Deck // *Advances in Civil Engineering*. 2016. vol. 2016, 8530154 P. 1–13.
97. Whitcomb R.T. A design approach and selected wind-tunnel results at high subsonic speeds for wing-tip mounted winglets // Hampton, Va, NASA Langley Research Center, 1976, 32 p.
98. Zhang M., Xu F., Han Y. J. Assessment of wind-induced nonlinear post-critical performance of bridge decks // *Wind Eng. Ind. Aerod.* 2020. Vol. 203, No. 104251. P. 1-10.
99. Zharkova G. M., Zanin B. Y., Kovrizhina V. N., Brylyakov A. P. Free stream turbulence effect on the flow structure over the finite span straight wing // *Journal of visualization*. 2002. Vol. 5. №2. P. 169-176
100. Zheng Y., Liu Q., Ma W. Effects of end plates on aerodynamic force of rectangular prisms in wind tunnel test // *Journal of Experiments in Fluid Mechanics*. 2017. Vol. 31(3). P. 38-45.

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Manuscript Copy

Shmigirilov Rodion Vasilevich

SIMULATION OF HALLOPING OF BLUFF BODIES WITH END
PLATES

A dissertation submitted in conformity with the requirements
for the degree of candidate in physical and mathematical sciences,
1.1.9 – Fluid mechanics, gas and plasma

Translation from Russian

Scientific supervisor:
Doctor of physical and mathematical sciences,
Senior Researcher A.N. Ryabinin

Saint-Petersburg

2022

TABLE OF CONTENTS

INTRODUCTION	86
1. Chapter 1 Literature review	93
Chapter 1 conclusions	98
2. Chapter 2 Influence of end plates on stationary aerodynamic characteristics of bluff bodies	99
2.1. Experimental methodology.	100
2.2. Experiment results.	103
Chapter 2 conclusions.	106
3. Chapter 3 Influence of aspect ratio and end plates on rotational oscillations of a thick plate in an air flow	107
3.1. Experimental technique for studying rotational oscillations.	108
3.2. Processing the results of an experiment with rotational oscillations of plates.	112
3.3. Experimental results	115
3.4. The simplest mathematical model of rotational oscillations of a plate.	117
Chapter 3 conclusions.	121
4. Chapter 4 Oscillations of a segment of an elongated bluff body with two degrees of freedom in the presence of end plates	122
4.1. Mathematical model of translational and rotational oscillations of a bluff body.	123
4.2. Experimental verification of the mathematical model.	131
4.3. Processing the results of an experiment with rotational and translational oscillations.	134
4.4. Results of the experiment with rotational and translational oscillations.	136

4.5. Transverse oscillations of the spring suspension rods.	143
Chapter 4 conclusions.	148
CONCLUSION	149
REFERENCES	150

INTRODUCTION

Research rationale. Fluid and gas flows near bluff bodies, arising in a wide range of natural phenomena and technical applications, create problems in the operation of machinery and structures, which determines the interest in studying the aerodynamics of bluff bodies. Studies of this issue are becoming more and more in demand due to the expansion of the range of technical and technological problems that are to some extent related to the aerodynamics of bluff bodies. Indeed, the development of aircraft construction, construction technologies, and the expansion of the variability of architectural structures provide new and new inputs for such studies. Examples of human-operated objects subjected to wind or fluid flow loading are bridge segments, pipelines, cables, tall buildings, chimneys. The formation of wide separation zones due to the separation of the boundary layer under the influence of wind on the object, or under the influence of a water flow, as a rule, leads to undesirable consequences, expressed in deformation and gradual destruction of building structures.

One of the main issues related to improving the operational aerodynamic characteristics of bluff bodies is the question of the effect of end plates on them, that is, plates installed along the flow at the ends of the object under study. The end plate influences body loads in a way that can be significant in terms of improving design efficiency. The ability to determine the aerodynamic characteristics of objects and control them through the use of end plates will help to avoid design errors already at the design stage of objects and improve their operational properties.

Various methods are used to solve the problems of modern aerodynamics. One of these methods is the construction of a mathematical model of the phenomenon or process under study. However, since the construction of a mathematical model is associated with the introduction of some assumptions, then ensuring its correctness requires comparing the results of applying the constructed model with the data of a physical experiment, which was implemented in this work.

Thus, the development of mathematical and experimental models of body galloping under certain conditions will help to protect oneself from incorrect design decisions when designing engineering structures. At the same time, in view of the significant variety of objects subjected to aerodynamic effects, the current scientific works related to the direction under consideration do not cover a significant part of them. At the same time, all of the above determines the relevance of further research into the issue of the effect of end plates on the aerodynamic characteristics of bluff bodies.

Research background. An analysis of scientific papers related to the use of end plates to study the aerodynamic characteristics of various objects allows us to identify several main areas. A large amount of work is associated with the consideration of round or rectangular cylinders. These studies are aimed at creating mathematical models and obtaining data on the aerodynamic characteristics of objects. The difference between the works often lies in the parameters of the input data, which are the angles of attack, cylinder extensions, flow velocity, geometric shape and size of the end plates. Frequency and amplitude of oscillations, bottom pressure, change in aerodynamic force are the results of these studies. In some papers, the range of Reynolds numbers is studied, in which the flow around the cylinder is perturbed.

In a separate block, one can single out works in which objects that are segments of bridges are studied. Obtaining their aerodynamic characteristics occurred with the help of end plates.

The part that received no less attention is the study of aircraft wings. These works mainly investigate different types of wingtips and their influence on the aerodynamics of the wing. Important parameters of the wingtips in such experiments are the size, shape, and angle of inclination relative to the wing plane.

Goals and main objectives of the research. The main goal of the study is to develop a metamathematical model that describes the effect of end plates on the aerodynamic characteristics of bluff bodies.

To achieve the goal, it was necessary to solve the following objectives:

- to reveal the influence of end plates of different sizes on the drag, bottom pressure and the length of the recirculation zone of a bluff body oriented perpendicular to the air flow;
- to develop an experimental procedure for establishing the effect of end plates on translational and rotational oscillations of bluff bodies and implement it in practice;
- to systematize experimental data and evaluate the effect of end plates on translational and rotational oscillations of bluff bodies;
- to propose a qualitative mathematical model describing the translational and rotational oscillations of a bluff body in a gas flow;
- to compare the data of a physical experiment and the results of applying a mathematical model and evaluate the correctness of the model;
- based on a joint analysis of experimental data and a mathematical model, describe the change in oscillation modes.

Research novelty.

Coordinated computational and experimental studies of the aerodynamic characteristics of a bluff body have been carried out. New data on the dependence of these characteristics on the relative dimensions of the end plates have been obtained..

It has been established for the first time that the dependence of the oscillation amplitude of thick plates with end plates on the Strouhal number is close to linear.

A new mathematical model has been developed that describes the translational and rotational oscillations of a bluff body in a gas flow.

The influence of the string, which is a part of the suspension, on the critical speed of changing the mode of oscillations is considered. It is concluded that the natural frequency of the string, which is part of the aerodynamic suspension, when approaching half the natural frequency of the rotational oscillations of the structure, leads to a decrease in the critical speed at which the transition from translational oscillations of the body to rotational oscillations takes place.

It has been established for the first time that the equations of motion of a body, when approximating the dependence of the normal force coefficient by a third-order polynomial, are reduced to differential equations coinciding with the Lotka–Volterra equations, originally obtained to describe the competition of two animal species eating the same food.

Theoretical and practical value of the work is due to the fact that the data obtained allow us to expand the fundamental understanding of the effect of end plates and their relative size on such aerodynamic characteristics of bluff bodies as drag, bottom pressure, and the length of the recirculation zone. The data obtained in the study on the aerodynamic characteristics of bluff bodies can be used in designing the shape of an object that will be subjected to wind load during operation. The results obtained can be extrapolated to the behavior of similar structures, for example, bridge segments.

The developed mathematical model makes it possible to qualitatively describe the change in vibration modes for various structures, depending on aspect ratios and angles of attack..

The methodology of the conducted experiments can be taken as a scheme for studying similar structures.

Research outcomes:

1. Experimentally obtained data on the influence of end plates of various sizes on the length of the recirculation zone and the bottom pressure behind the plates oriented perpendicular to the oncoming flow.
2. Experimental results of the influence of end plates on oscillations of thick plates.
3. Mathematical model of rotational oscillations of thick plates of various proportions with end plates and its experimental verification.
4. Mathematical model of galloping of a bluff body with end plates with two degrees of freedom, which describes the competition of two types of oscillations: translational oscillations in the direction perpendicular to the velocity vector of the oncoming flow, and rotational oscillations.

5. Experimentally obtained data on the competition of two vibration modes of a bluff body on the example of a bridge segment with end plates.

6. The result of the influence of transverse oscillations of suspension thrust on the critical speed at which the transition from translational oscillations of the model to rotational oscillations occurs.

Degree of confidence. The reliability of the results of the dissertation work is ensured by: the correctness of the setting of experiments, the rigor of the mathematical apparatus used, the comparison of the data obtained during the simulation with the results of a physical experiment.

Approbation of results. The results presented in the dissertation were reported at the following All-Russian and international conferences:

- XXV All-Russian Seminar with international partnership on jet, separation, and non-stationary flows. (Saint-Petersburg, 2018);
- International scientific conference on mechanics «The Eight Polyakhov's Reading» (Saint-Petersburg, 2018)
- Topical Problems of Fluid Mechanics 2020 (Prague, Czech Republic, 2020);
- The Thirteen International Conference on Applied Mathematics and Mechanics in the Aerospace Industry, AMMAI'2020 (Alushta, 2020)
- 20th International Conference on the Methods of Aerophysical Research, ICMAR 2020 (Novosibirsk, 2020)
- International Conference in natural sciences and humanities «Science SPbU – 2020», (Saint-Petersburg, 2020),
- International scientific conference on mechanics «The Nine Polyakhov's Reading» (Saint-Petersburg, 2021)
- 21nd International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems CMMASS'2021, (Alushta, 2021).

Dissertation structure. The dissertation consists of the introduction, 4 chapters, the conclusion and the list of references. The summary volume is 81 pages. The reference list contains 100 entries.

The first chapter provides a review of the literature data on the use of end plates in an aerodynamic experiment. Studies are listed in which end plates are used in testing both well-streamlined bodies and bluff bodies.

In the second chapter, the effect of end plates on the flow around flat rectangular plates of various proportions, oriented perpendicular to the vector of the average velocity of the oncoming flow, is considered. The research method is an experiment. The influence of end plates on the length of the recirculation zone and bottom pressure is studied.

The third chapter is devoted to the study of rotational oscillations of thick plates of various proportions with and without end plates. The plates are fixed on a wire suspension containing springs. The suspension made it possible to perform rotational oscillations around an axis perpendicular to the velocity vector of the oncoming flow. Using the tensometric method, the amplitudes and frequencies of self-oscillations of the plates in the flow were measured. The rotational oscillations of thick plates with an elongation greater than five with end plates are satisfactorily described by the mathematical model proposed earlier to describe the rotational oscillations of a small elongation cylinder.

The fourth chapter is devoted to the study of oscillations of a bluff body with end plates with several degrees of freedom. A wire suspension with springs could oscillate with six degrees of freedom, but during the experiments in the air flow only oscillations with two degrees of freedom were observed: vertical translational oscillations and rotational oscillations around a horizontal axis perpendicular to the average velocity vector of the incoming air flow. The experiments were carried out with two models of the bridge segment, limited by end plates. A mathematical model is proposed that describes the occurrence of oscillations and the competition between two types of oscillations.

The content of this work was published in [32, 33, 34, 36, 39, 40, 41, 86, 87, 88, 89, 90]. Articles [36, 86, 87, 88, 89] are indexed in the international databases Scopus and/or Web of Science Core Collection.

In the works of co-author Ryabinin A. N. belongs to: setting the problem, participation in the planning of the experiment and in the choice of the mathematical model of galloping.

Financial support for this work was provided by the Russian Foundation for Basic Research under grant No. 19-38-90045.

Chapter 1

Literature review

When flowing around well-streamlined bodies with a liquid or gas flow, there is no separation of the boundary layer, accompanied by extensive separation zones. Their aft part is limited by surfaces of lesser curvature, which determines an insignificant change in the pressure gradient on them and does not allow separation of the boundary layer. And the simplest example of this is the wings of aircraft at low angles of attack. However, objects such as wings can become badly streamlined at high angles of attack. The emergence of boundary layer separation regions at different times has been the subject of many works dealing with the influence of the initial flow turbulence [99, 30], wing surface topography [10, 60], and other flow conditions (wing aspect ratio, angle of attack) [11, 22, 91]. Separations occur not only on sharp edges, but also on flat areas with a large radius of curvature, this depends on other parameters, such as the Reynolds number [12, 77, 81, 48] or the roughness of the body.

The relevance of the study of the aerodynamics of bluff bodies is caused by the high prevalence of bluff structures in today's everyday life [1, 62, 78]. Bridge segments, skyscrapers, pipelines, chimneys are all examples of objects that can be subject to wind load or water flow load. In the vast majority of cases, the impact of wind on various structures, if it causes any effect, then this effect is more harmful than beneficial. Such effects can lead to undesirable consequences, and as a result, to the destruction of building structures. One of the most famous disasters is the collapse of the Tacoma Narrows Bridge [38, 84, 85]. Here, the collapse was caused by vibration and torsion, which were the result of strong winds.

In general, any structure that has some rigidity and mass is capable of vibrating with shape deformation. One of the mechanisms leading to oscillations is wind resonance. These oscillations occur at natural frequencies that depend on the geometry of the structure and the distribution of stiffness and mass over the structure.

If the frequency of the descending vortices is close to the frequency of body oscillations, then this may be one of the reasons for the destruction of structures. That is why, when designing such structures, physical modeling is used with the help of experiments with models of structures in wind tunnels. One of the recent cases of resonant vibration is the incident with the Volgograd bridge in 2010 [24, 23, 28]. Deputy Head of NIO-19 TsAGI Konstantin Strelkov spoke³ about the behavior of the Volgograd bridge: "These fluctuations could be predicted, but the existing SNiPs did not require testing beam bridges in a wind tunnel." Accordingly, in our time, the development of bridge architecture forces us to update the old and come up with new flow models.

Another reason for the oscillations of bluff bodies in the flow may be the dependence of the aerodynamic coefficients on the angles of attack [38, 82, 7]. The oscillations caused by this cause are called galloping. Moving across the air flow, bluff bodies are subjected to an aerodynamic force acting in the same direction as the projection of the body's velocity perpendicular to the flow. When an elastically fixed body in a gas flow is considered, it should be noted that the aerodynamic forces are not conservative, which can lead to a change in the total energy of the system. Taking into account that the direction of velocity and aerodynamic force coincide, this will lead to a gain of energy by the system and an increase in the amplitude of oscillations. The definition of the criterion for the occurrence of galloping was given by Den Hartog [7]. This criterion has been applied to wires that have an unsymmetrical cross-section due to frost on them. Long before Den Hartogh, Glauert obtained similar results for rotating airfoils [59].

Novak [70, 71, 72] studied the influence of shapes of different sections of rectangular prisms on the aerodynamic properties and the phenomenon of galloping on them. In turn, he studied the effect of the degree of flow turbulence on galloping [73]. In his work, he uses the mathematical model developed by Parkinson and Brooks [75]. This model is based on a quasi-stationary approximation, when instead

³ <https://vz.ru/society/2011/3/24/478050.html>

of an aerodynamic force in the equation of motion of an oscillating body, a function is used that is obtained by polynomial approximation of aerodynamic forces measured on a stationary model at different angles of attack [38]. Later, a more complete model was proposed [76] using a seventh-order polynomial approximation. The quasi-stationary model was also used in later works [16, 18, 30, 69].

Developing the topic of galloping effects and wind resonance, Parkinson and his colleagues wrote papers [52, 74]. The works provide modeling of a combination of various effects.

A large number of works were carried out experimentally. Prisms of different sections were studied. The most popular articles among them are devoted to triangular [42, 43, 44, 46], pentagonal [26], octahedral [54, 55], and elliptical [45] prisms. It is possible to single out significant results obtained in connection with studies devoted to the influence of angles of attack on oscillations of cylinders of different sections [49, 50, 63, 64, 65].

The galloping of bodies with two flow regimes was studied in [15, 29].

One of the first mentions of the effect of blocking the flow of air through the ends of objects was written by Maxwell and Gerrard [67, 58]. Maxwell tried to find data correction factors when studying the aerodynamic characteristics of rectangular plates in a wind tunnel and their subsequent scalability. After that, Stansby [94], relying on Maxwell's results, suggested using end plates to minimize the effect created by the boundary layer on the cylinder walls. With this, he wanted to obtain a flow close to two-dimensional. Many studies on round cylinders have been carried out using Stansby's end plate sizes.

Subsequently, additional studies were carried out on the effect of the size of the end plates for sectional models on tests in a wind tunnel [61, 93]. These studies have shown that the 2D flow field characteristics around the sectional model can be significantly improved by selecting the appropriate size of the end plates. Basically, the results were aimed at finding a decrease in the ratio of the radius of the end plates to the diameter of the cylinders at various Reynolds numbers.

There is also a wide area of research related to the effect of end plates on the flow around wings with different span profiles, shapes and bends. This question was theoretically developed in the works of Kuritzkes [13, 14] based on the hypothesis of U-shaped vortices. Also, this direction is closely associated with the name of Richard Whitcomb [97], who, based on previous endplate research, created the first working prototypes of modern winglets (wingtips). The need for winglets is associated with the effect of air flow from the lower surface of the wing to the upper one. This leads to the creation of a tip vortex and a concomitant redistribution of pressure over the wing, which in turn reduces lift. Without changing the span of the wing, the end plates increase the effective aspect ratio of the wing.

The effect of end plates on the load distribution along the wing chord of small aspect ratios was considered in [27]. Such wings are characterized by nonlinearity in the angle of attack of lift and pitching moment. The scheme proposed in the work allows calculating the aerodynamic characteristics of the wings, taking into account the influence of the shape, dimensions and positions along the chord of the wing end plates. Also, other studies on the effect of end plates on the distribution of surface pressure were carried out in [79, 92].

Particular attention was paid to the shape of the end plates at the ends of the wings in recent works [4, 21, 25]. They consider the most popular forms of winglets: classic, with a Whitcomb plate, with a spiral tip, with an end plate. The authors put forward an assumption about the importance of the angle of inclination of the wingtips relative to the plane perpendicular to the wing. In [4], the theory of a continuous vortex surface was used to simulate the effect of end plates on a wing. This led to an algorithm for calculating the intensity of vortices.

For experiments, exact copies of the wings used in civil aviation are more often taken. In one of these works [6], the influence of the shape and size of the wingtips on the wing of a subsonic passenger aircraft was considered.

Experiments on the influence of end plates were carried out not only with aircraft wings, but also with the wings of coaxial Russian helicopters. In [3], a method was developed when small rectangular end wings were installed at

helicopter rotors. The experiment showed the possibility of improving the relative efficiency of helicopter rotors in the hover mode.

In the airspace of countries there are aircraft that perform the functions of various purposes and tactical and technical applications. In [20], a study is made of the influence of wingtips on the aerodynamic characteristics of a promising UAV (unmanned aerial vehicle). Several wingtips have been considered that offer lift coefficient advantages for different angles of attack.

Recently, a large number of studies on the effect of end plates on the aerodynamic characteristics of bluff bodies have been carried out in China. The article [100] considers the influence of end plates on the aerodynamic force of several rectangular prisms, which correspond to the cross section of the bridge with different ratios. The authors show a significant effect of end plates on the Strouhal number in the experiments of all their models. An investigation of an inclined circular cylinder using end plates was carried out in [66]. Where the authors divided the cylinder into three sections, characterized by different bottom pressure.

The change in the oscillation frequency of round and rectangular cylinders, depending on the location of the end plates at the ends of the model, was considered in [91]. It conducted a series of tests in a wind tunnel aimed at studying the pulsating lift forces on various sections of objects simulating spans of bridges. Two types of oscillations were obtained in the work, but the processes of changing translational and rotational oscillations were not studied at all. The change in the frequency of vortex shedding from the cylinders depending on the location of the end plates at the ends of the model was considered in [57].

Chapter 1 conclusions

An analysis of the literature data allows us to state that the main method for studying the oscillations of bluff bodies in an air flow is experiment. Both oscillations caused by the periodic descent of vortices from the body surface (vortex resonance) and oscillations caused by the specific dependence of the aerodynamic force on the angles of attack and slip and their derivatives (galloping) were studied experimentally. A recognized technique that makes it possible to investigate relatively short segments instead of extended bodies oriented across the flow is the use of end plates. The plates limit the flow of air through the ends and thereby bring the flow around short segments of bodies closer to the flow around long bodies.

Mathematical modeling has been developed to describe the translational galloping of extended bodies, and most of the mathematical models are based on the quasi-stationary approximation. Attempts were made to extend the quasi-stationary approximation to rotational oscillations, and to oscillations with two degrees of freedom, however, these attempts were not successful, they faced the need to determine the angle of attack of the body, which for a rotating body is different for different points of the body. There is arbitrariness in determining the point relative to which the angle of attack was determined.

Thus, the physical modeling of galloping of ill-streamlined bodies with several degrees of freedom and the development of mathematical models for describing oscillations are little developed problems.

Chapter 2

Influence of end plates on stationary aerodynamic characteristics of bluff bodies

The second chapter deals with an experimental study of the influence of end plates on the aerodynamic characteristics of a very simple bluff body, such as a rectangular plate, oriented perpendicular to the freestream velocity vector. End plates are placed along the air flow at the ends of the objects under study. The purpose of installing end plates is to prevent air from passing through the ends of objects. End plates are usually elliptical or round in shape. Their size is larger than the size of the studied model. Changes in the bottom pressure, drag coefficient, and length of the recirculation zone are considered. The main content of Chapter 2 was published in [32, 39, 89].

2.1. Experimental methodology

All experiments were carried out in the AT-12 subsonic wind tunnel of St. Petersburg State University [11] (Fig. 2.1).

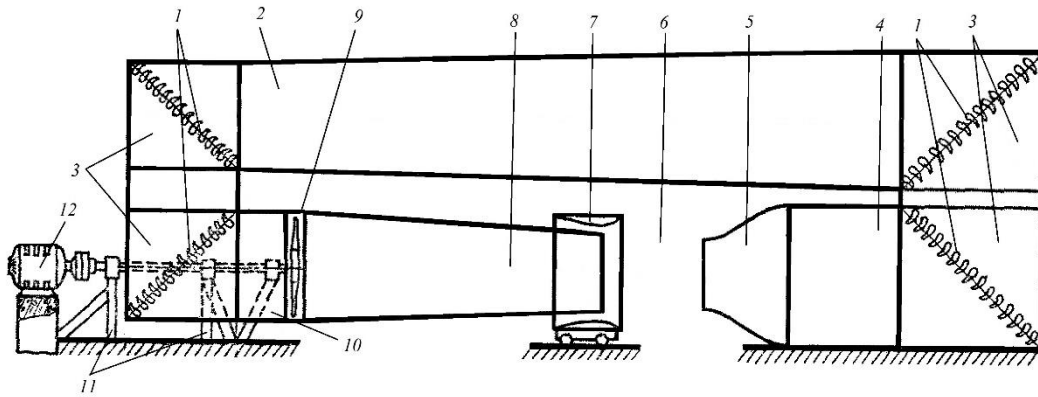


Fig. 2.1. Scheme of a wind tunnel with a closed loop and an open test section.
 1 - rotary vanes, 2 - reverse channel, 3 - swivel knee, 4 - honeycomb prechamber, 5 - nozzle,
 6 - working part, 7 - ring socket, 8 - diffuser, 9 - fan blower, 10 - transition section, 11 - fan
 group supports, 12 - electric motor.

In an open test section, the air flow velocity can vary from 0 to 40 m/s. The length of the test section is 2.25 m, the diameter of the outlet section of the nozzle is 1.5 m.

The flow around four rectangular plates with different aspect ratios λ (ratio of the plate length l to the width w) was studied. Experiments were carried out in two versions: with and without end plates. The end plates were thin (less than 2 mm) steel disks with a diameter of $d=200$ mm or $d=400$ mm. The flow velocity varied from 5 to 33 m/s.

Measurements of the bottom pressure in the near wake behind the plate were carried out using the Krell sensor [78]. The pressure difference was also measured at two pressure sampling holes on the Krell sensors. The Krehl sensor is a cylinder with a diameter of 8 mm and a height of 5 mm. There are pressure sampling holes

in the center of the cylinder bases. The holes are connected to a differential alcohol micromanometer with an inclined scale by two tubes with a diameter of 1 mm.

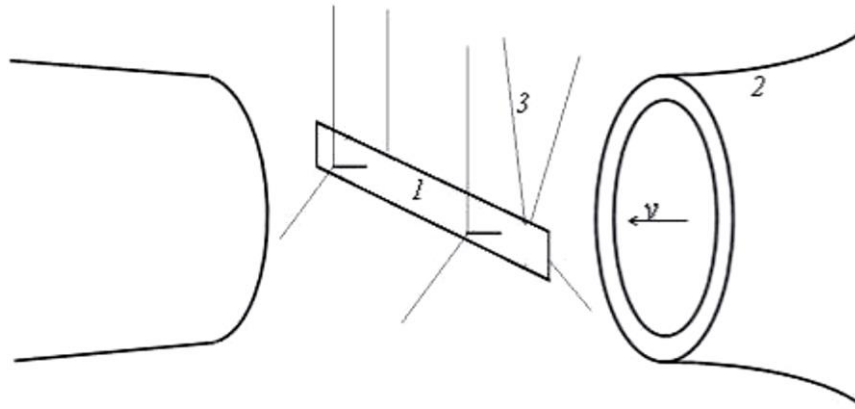


Fig. 2.2. Scheme of the experimental setup: 1 – rectangular plate; 2 – wind tunnel nozzle; 3 – wire suspension.

The bottom pressure is determined by measuring the pressure at the inlets on the Krehl sensor when it is opposite the center of the plate at a distance of 1-3 mm behind the plate in the direction of the air flow. In this case, the flat surfaces of the sensor are parallel to the plate.

Table 2.1. Geometric parameters of plates

Version	Length l , mm	Width w , mm	Aspect ratio $\lambda = w/l$
1	400	80	5
2	503	39	12.9
3	970	50	19.4
4	806	33	24.5

The bottom pressure is determined by measuring the pressure at the inlets on the Krehl sensor when it is opposite the center of the plate at a distance of 1-3 mm

behind the plate in the direction of the air flow. In this case, the flat surfaces of the sensor are parallel to the plate.

As the Krehl sensor moves downstream of the plate, the pressure difference downstream of the sensor and upstream of the sensor increases until it reaches a maximum at some distance. Further measurement of the pressure difference with increasing distance from the plate shows a decrease in this difference. At a distance l_0 , this pressure drop is zero. We take l_0 as the length of the recirculation area (see Fig. 2.3).

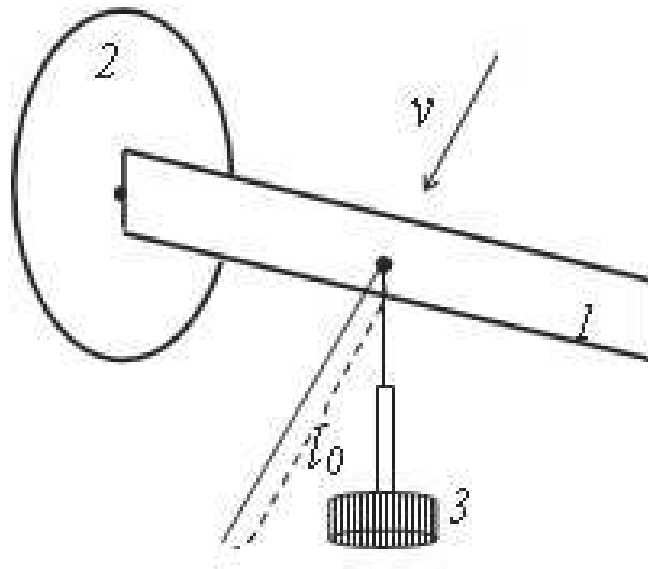


Fig. 2.3. Determination of the length of the recirculation area: 1 – rectangular plate; 2 – end plate; 3 – Krehl sensor; l_0 – recirculation area length.

To measure the resistance force of rectangular plates, a three-component aerodynamic balance with a wire suspension was used.

2.2. Experiment results

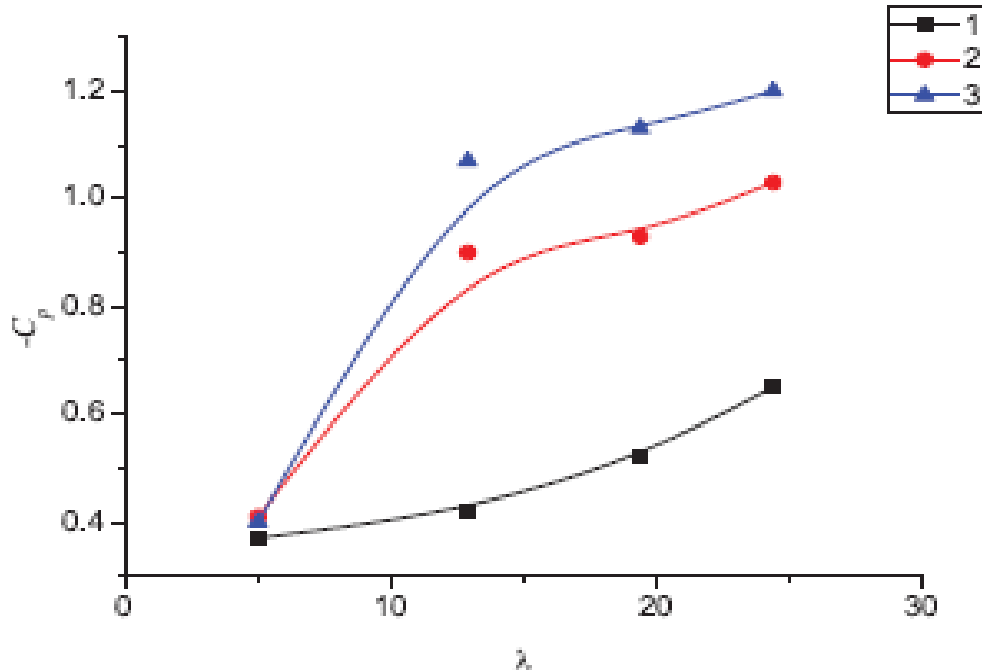


Fig. 2.4. Dependence of the bottom pressure on the aspect ratio of the plate: 1 – without end plates; 2 – end plates diameter $d = 200$ mm; 3 – end plates diameter $d = 400$ mm.

On fig. 2.4. the dependence of the bottom pressure on the elongation of the plate is shown. Without end plates, an increase in elongation results in an increase in bottom pressure. This fact agrees with previously published results [31]. With a small elongation $\lambda = 5$, the use of end plates does not affect the change in bottom pressure in any way. However, when the aspect ratio $\lambda > 10$, the use of end plates significantly increases the bottom pressure. The larger the diameter of the end plate, the more the bottom pressure changes upwards.

The dependence of the drag force coefficient on the elongation of a rectangular plate is shown in fig. 2.5.

The nonmonotonic increase in plate resistance with increasing elongation in the absence of end plates can be explained by an experimental error. The use of end plates increases the drag coefficient. The larger the diameter of the end plate, the

greater the drag force. It was found that the maximum increase in drag is observed at aspect ratio $\lambda = 12.9$.

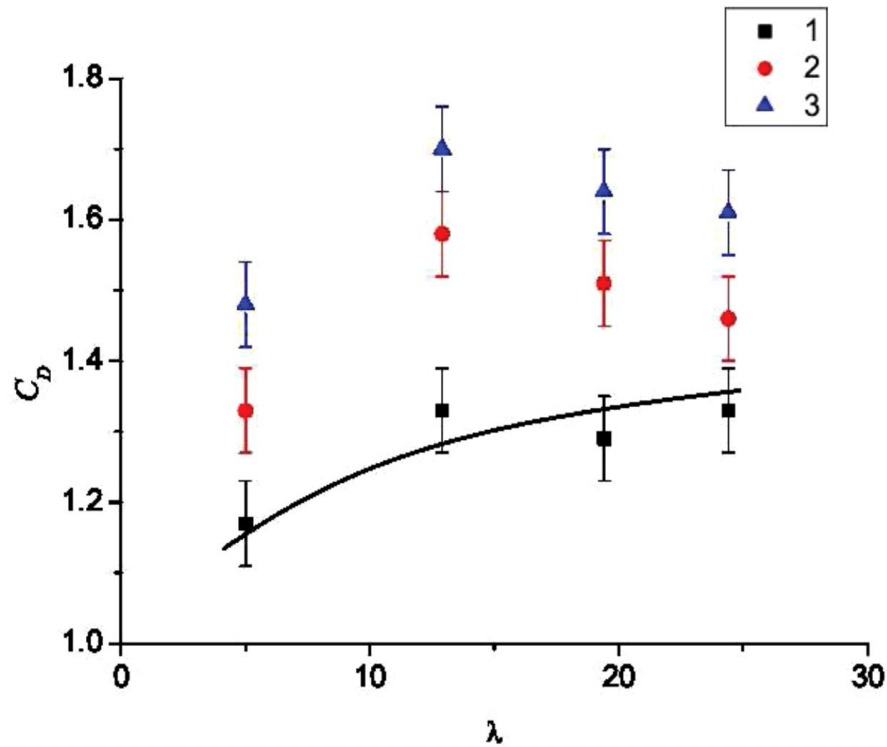


Fig. 2.5. Dependence of drag force coefficient on plate elongation: 1– without end plates; 2 – end plate diameter $d = 200$ mm; 3 – end plate diameter $d = 400$ mm.

The ratio of the diameter of the end plate d to the size of the rectangular plate $l_1 = \sqrt{lw}$ is presented in table 2.2. The maximum value of d/l_1 corresponds to the elongation $\lambda = 12.9$. For $\lambda > 12.9$, the greater the aspect ratio, the less the drag coefficient increases.

The dependence of the ratio of the plate width to the length of the recirculation region w/l_0 on the elongation of a rectangular plate λ is shown in fig. 2.6.

Table 2.2. The ratio of the diameter of the end plates to the size of the rectangular plate

Aspect ratio	Characteristic size	$d = 200$ mm	$d = 400$ mm
λ	l_1 , mm	d/l_1 ,	d/l_1 ,
5	179	1.12	2.23
12.9	140	1.43	2.86
19.4	220	0.91	1.82
24.5	160	1.25	2.50

Without end plates, the dependence of w/l_0 on λ has a minimum at $\lambda = 12.9$. At $\lambda = 5$, there is a slight increase in the parameter w/l_0 due to the use of end plates. The more λ , the more w/l_0 in experiments with end plates.

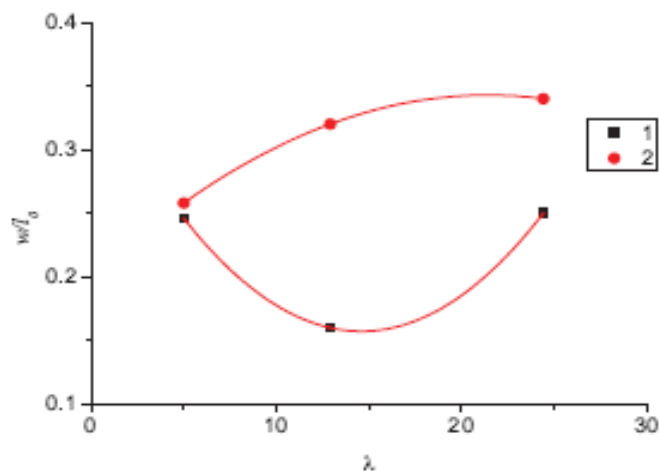


Fig. 2.6. The ratio of the width of the plate to the length of the recirculation area depending on the elongation of the plates: 1 – without end plates; 2 – end plates diameter $d = 200$ mm

Chapter 2 conclusions

In this chapter, the influence of end plates on such aerodynamic characteristics as: drag, bottom pressure and the length of the recirculation zone was considered.

It is shown that the end plates mounted on a flat rectangular plate oriented perpendicular to the air flow lead to an increase in the absolute values of the bottom pressure coefficient and resistance. They reduce the length of the recirculation area behind the central part of the plate.

The influence of the end plates depends on the relative size of the plates themselves and on the elongation of the flat rectangular plate. If the plate elongation is 5, then the effect is very small.

Chapter 3

Influence of aspect ratio and end plates on rotational oscillations of a thick plate in an air flow

The study of rotational oscillations is important for predicting the oscillations of the bridge span due to wind load [91]. Flow around short bodies with end plates is similar to flow around long bodies. In the air flow, the end plates prevent the passage of the gas flow through the ends of the model. Direct testing of a long body is not possible due to the limited size of the working parts of wind tunnels. End plates are used in tests with wings [77] and in other experiments with various bluff bodies. Bridge segments were tested using this method [100, 96]. Examples of studying bodies of various shapes with end plates can be found in [47, 17, 18].

The third chapter deals with the consideration of rotational oscillations of bluff bodies in the air stream. An estimate of the influence of the frequency of reading instrument readings on the result of determining the oscillation amplitude is obtained. Special aerodynamic characteristics are given for certain plate extensions and airflow velocities. It is shown how the oscillation amplitude correlates with the Strouhal number. The effect of end plates on the range of Strouhal numbers, in which oscillations with a constant amplitude are observed, is studied. The dependence of the vibration amplitude of thick plates with end plates on the Strouhal number is presented, and the influence of the end plates themselves on this dependence is shown.

The main content of Chapter 3 was published in [33, 41, 86, 90].

The experimental technique and the considered physical model are discussed in section 3.1. section 3.2. the data processing algorithm is described. The results obtained are given in section 3.3. The effect of end plates on the rotational oscillations of a thick plate is shown depending on the elongation. Section 3.4

presents a mathematical model of rotational oscillations of a thick plate equipped with end plates.

3.1. Experimental technique for studying rotational oscillations

In this experiment, the rotational oscillations of thick plates were studied. The thickness of all plates was the same $d=20$ mm.

Table 3.1. Geometric parameters of the plates

Version	Length l , mm	Width w , mm	Aspect ratio $\lambda = l/w$
1	200	100	2
2	350	100	3,5
3	500	100	5
4	700	100	7

The geometric parameters of the plates can be seen in table 3.1. The experiments were carried out both with and without end plates. The end plates were a thin disk 3 mm thick and $d = 2w = 200$ mm in diameter.

All experiments were also carried out in the AT-12 wind tunnel of St. Petersburg State University. In the open working part of the wind tunnel there was a model on a wire suspension (Fig. 3.1). The diameter of the steel wire suspension is 0.3 to 0.6 mm. The model could only rotate around a horizontal axis perpendicular to the air velocity vector. A steel tail holder is attached to the back of the model. Two steel springs are attached to the holder.

The amplitude of rotational oscillations was determined on the basis of strain gauge measurements. The C-50 semiconductor strain gauge measures the tension of the lower spring.

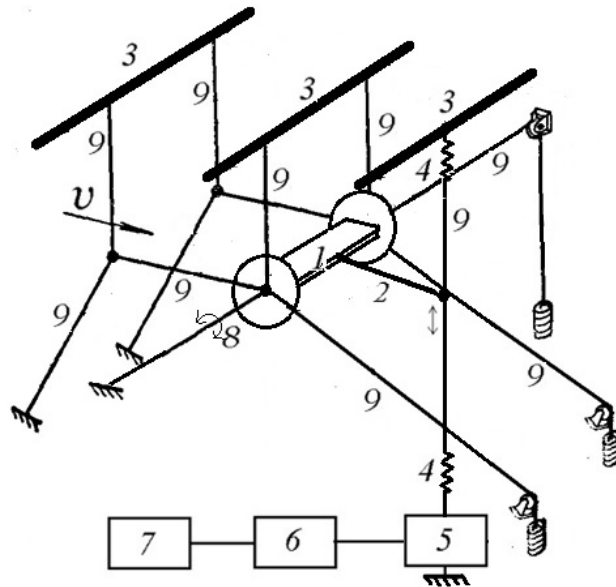
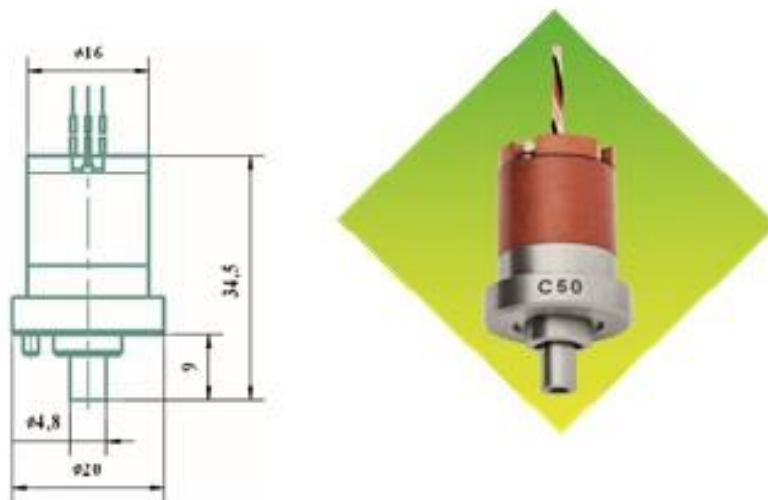


Fig. 3.1. Scheme of the experimental setup. 1 – model with end plates, 2 – tail holder, 3 – fixed rods, 4 – springs, 5 – strain gauge C-50, 6 – PC oscilloscope, 7 – computer, 8 – axis, 9 – wire rods

On fig. 3.2 shows a general view and a diagram with dimensions of the C-50 strain gauge ⁴.



⁴ <http://microtensor.ru/catalog/mikroelektronnye-tenzopreobrazovateli-sily/serii-c/c%2050>

Fig. 3.2. General view of strain gauge C-50 and dimensions of the device.

The strain gauge uses "sapphire-on-a-chip" technology. The sensitive element of the strain gauge is a two-layer sapphire-titanium membrane with single-crystal silicon strain gauges (Fig. 3.3).

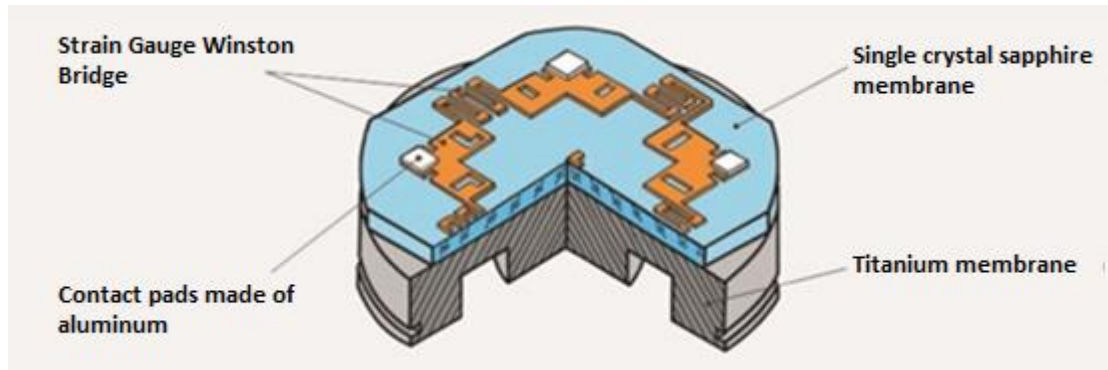


Fig. 3.3. A two-layer sapphire-titanium membrane is an elastic element of the strain gauge.

Silicon strain gauges are connected to the Winston bridge according to the "closed bridge" scheme (Fig. 3.4).

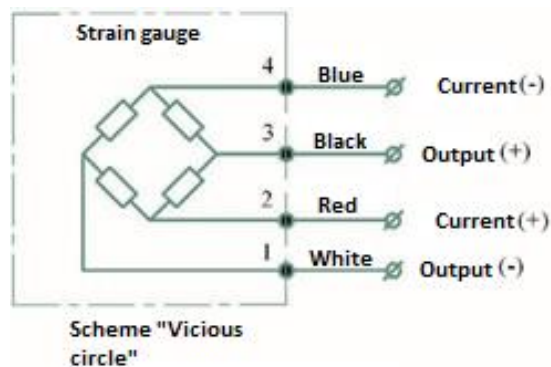


Fig. 3.4. Scheme of connection of strain gauges.

The nominal value of the range of the converted force is 50 N. The limiting operating values of the converted force are from -25 N to 50 N. The disadvantage of the type of transducers used is the dependence of their readings on temperature. Therefore, we necessarily calibrated the device in each experiment. Sometimes twice: before measurements and after, to make sure there is no drift. The Winston bridge was powered by four AA batteries connected in series. Such an autonomous

power supply made it possible to reduce pickups with a power supply frequency of 50 Hz.

The Velleman-PCS500 PC oscilloscope converts the analog signal of the strain gauge into a digital signal and transmits it to the computer. Measurement frequency 100 Hz and 1250 Hz. Recording time is 17 seconds at 100 Hz or 3.3 seconds at 1250 Hz.

It has been observed that the oscillation frequency does not depend on the flow velocity. In the absence of flow in the working part, the oscillations of the plates on the elastic suspension damp out, and the oscillation frequency remains the same as in the case of oscillations caused by the air flow. This means that the aerodynamic forces are small compared to the elastic forces.

We assume that the tension of the spring at the extremes of the time dependence of the signal is equal to the tension of the spring under the action of a constant force that causes a deflection equal to the amplitude of the oscillations. This assumption makes it possible to relate the oscillation amplitude to the maximum or minimum tension of the lower spring. Two calibration experiments were carried out. In the first experiment, while recording the readings of the strain gauge, a known weight is suspended at the place where the tail holder is attached to the wire rod (Fig. 3.1.). Based on the measurement results, the change in the instrument readings caused by a known force is determined. In another calibration experiment, a known weight is hung at the end of the tail holder. Measures the movement of a load in the vertical direction. The ratio of the amplitude of oscillations of the tension of the lower spring to the amplitude of rotational oscillations of the model is determined.

The flow velocity in the test section was determined from the pressure drop across the wind tunnel nozzle. The pressure drop was measured with an alcohol micromanometer with an inclined tube of the MMN type. The basis for determining the speed was the expression:

$$\frac{\rho v^2}{2} = \frac{\mu K \gamma}{\gamma_o} h,$$

where ρ is the density of air, which depends on temperature and atmospheric pressure, K is the coefficient of the micromanometer, which depends on the inclination of the micromanometer tube, γ and γ_0 are the density of alcohol in the micromanometer, depending on temperature and the reference density of alcohol (0.8 г/см^3), h is the micromanometer readings.

3.2. Processing the results of an experiment with rotational oscillations of plates

The signal processing technique is given in [81, 83]. Dependences of the slope of the plate on time obtained in the experiment are shown in fig. 3.5.

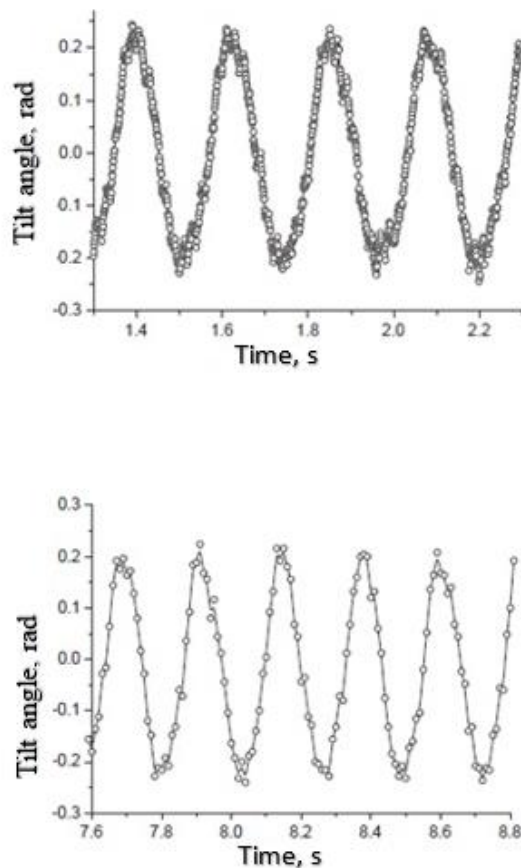


Fig. 3.5. The dependence of the inclination of the plate on time: a) reading frequency 1250 Hz, b) reading frequency 100 Hz.

The approximate amplitude of rotational oscillations can be determined from these graphs. To do this, it is enough to measure the maximum and minimum values of the angle of inclination of the plate. Then you need to calculate the average value of the amplitude. However, it is more accurate and easier to determine the amplitude using the algorithm described below.

The algorithm is a variant of the least squares method. It allows us to approximate the data with a harmonic function of a given frequency.

Let the slope angle β_i measured at time t_i be the sum of a harmonic function with amplitude A , constant E and experimental error ξ_i :

$$\begin{aligned}\beta_i &= A \cos(\omega t_i - \varphi) + E + \xi_i = \\ &= A \cos\varphi \cos \omega t_i + A \sin \varphi \sin \omega t_i + E + \xi_i.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Experimental error is a random variable with zero mathematical expectation. Consider a sample of n reads ($i=1, 2, 3, \dots, n$). We assume that

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \cos \omega t_i = \sum_{i=1}^n \xi_i \sin \omega t_i = \sum_{i=1}^n \xi_i = 0. \quad (3.2)$$

Multiplying formula (3.1) successively by $\cos \omega t_i$, $\sin \omega t_i$ and 1, summing the obtained expressions from $i=1$ до n , taking into account expression (3.2), we obtain the system of equations (3.3).

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \cos^2 \omega t_i & \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i \sin \omega t_i & \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i \\ \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i \sin \omega t_i & \sum_{i=1}^n \sin^2 \omega t_i & \sum_{i=1}^n \sin \omega t_i \\ \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i & \sum_{i=1}^n \sin \omega t_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \cos \varphi \\ A \sin \varphi \\ E \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \beta_i \cos \omega t_i \\ \sum_{i=1}^n \beta_i \sin \omega t_i \\ \sum_{i=1}^n \beta_i \end{pmatrix}. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

If n is the number of readings per oscillation period $T = 2\pi/\omega$ and this number is large, then the system of equations (3.3) can be simplified considering that

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \cos^2 \omega t_i &\approx \sum_{i=1}^n \sin^2 \omega t_i \approx n\omega/2\pi \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t \, dt = n/2. \\
\sum_{i=1}^n \cos \omega t_i \sin \omega t_i &\approx \sum_{i=1}^n \sin \omega t_i \approx \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i \approx 0.
\end{aligned}$$

Thus, instead of the system of equations (3.3), one can solve the simple system (3.4).

$$\begin{pmatrix} n/2 & 0 & 0 \\ 0 & n/2 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \cos \varphi \\ A \sin \varphi \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \beta_i \cos \omega t_i \\ \sum_{i=1}^n \beta_i \sin \omega t_i \\ \sum_{i=1}^n \beta_i \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Knowing $A \cos \varphi$ and $A \sin \varphi$ allows you to calculate the amplitude of rotational oscillations A .

Let us show that the algorithm described above is the least squares method.

Minimizing the sum of squares

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \sum_{i=1}^n (\beta_i - A \cos(\omega t_i - \varphi) - E)^2.$$

We find the minimum of this sum by differentiating the sum of squares with respect to the parameters $A \cos \varphi$, $A \sin \varphi$ and E . We equate the derivatives to zero. As a result, the system of equations (3.3) is obtained.

3.3. Experimental results

It was found that the reading frequency does not affect the result of determining the oscillation amplitude.

On fig. 3.6 is a graph illustrating the independence of the result of determining the amplitude of steady-state oscillations from the reading frequency.

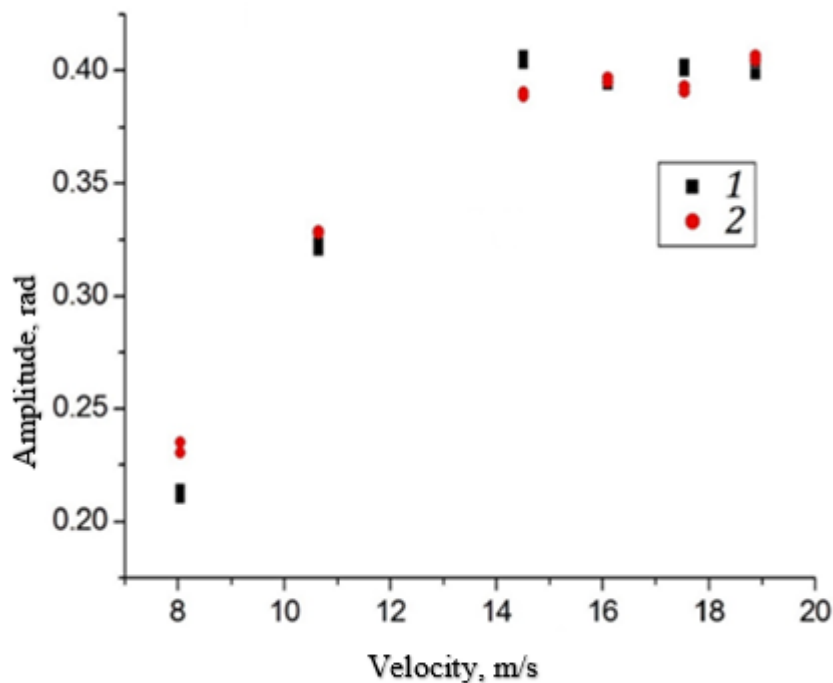


Fig. 3.6. The dependence of the amplitude of steady-state oscillations on the speed.

1 – reading frequency 100 Hz, 2 – reading frequency 1250 Hz.

In almost all cases, oscillations with a constant amplitude are observed. An exception is the oscillations of a short thick plate with an elongation $\lambda = 2$ at low air flow velocities v . Figures 3.7 and 3.8 show the dependences of the amplitude of steady-state oscillations on the Strouhal number $Sh = w/vT$, where T is the oscillation period.

The oscillation amplitude increases with decreasing Strouhal number. On fig. 3.7. it is shown that for a thick plate without end plates, the greater the aspect ratio, the greater the oscillation amplitude. The oscillation of the plate $\lambda = 2$ with a constant amplitude occurs only at a high speed of the air flow.

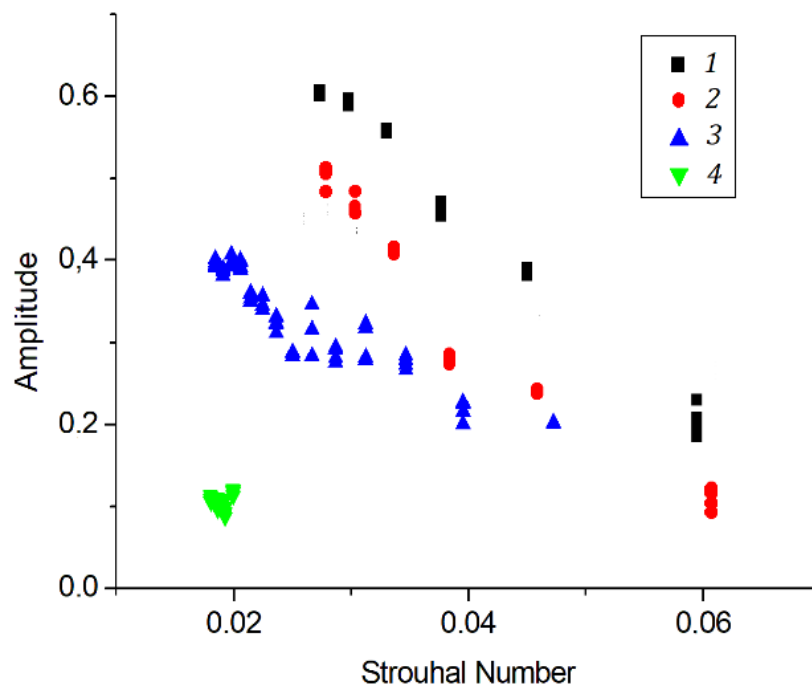


Fig. 3.7. Dependence of the oscillation amplitude (rad) on the Strouhal number without end plates. $1 - \lambda = 7$, $2 - \lambda = 5$, $3 - \lambda = 3.5$, $4 - \lambda = 2$.

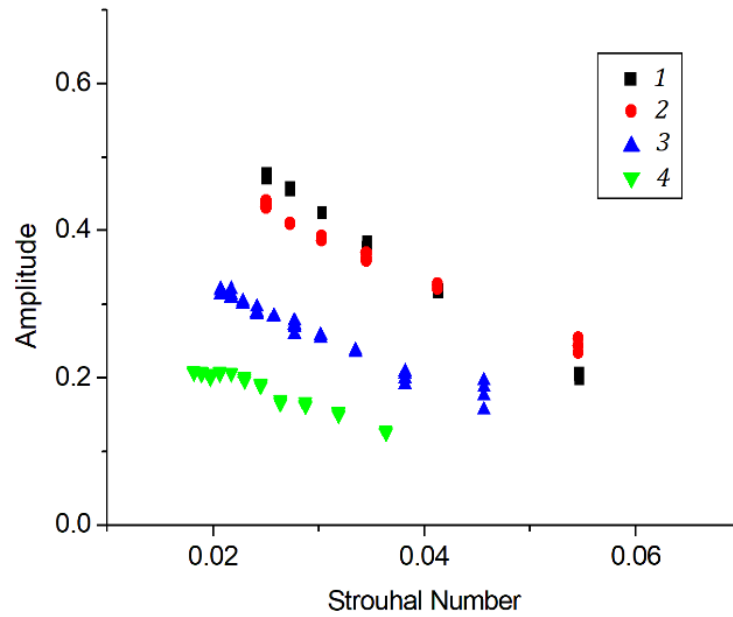


Fig. 3.8. Dependence of the oscillation amplitude (rad) on the Strouhal number with end plates. $1 - \lambda = 7$, $2 - \lambda = 5$, $3 - \lambda = 3.5$, $4 - \lambda = 2$.

On fig. 3.8. it can be seen that in the presence of end plates, the range of Strouhal numbers, in which oscillations with a constant amplitude are observed for the cylinder $\lambda = 2$, increases significantly.

3.4. The simplest mathematical model of rotational oscillations of a plate

This section describes the mathematical model of fluctuations in the flow of a small elongation cylinder (the ratio of the length of the cylinder to its diameter is equal to 2), proposed in [35]. The equation of motion of a cylinder elastically fixed in an air flow has the form

$$I_z \ddot{\theta} = L_a + L_s, \quad (3.6)$$

where L_a and L_s are the moments of forces acting from the side of the air flow and from the side of the suspension, I_z is the moment of inertia of the cylinder, θ is the angle of inclination of the cylinder.

We will assume that in the state of equilibrium the angle of inclination is equal to zero. It is assumed that the moment of elastic forces acts from the side of the suspension, returning the cylinder to the equilibrium position, and the friction resistance is proportional to the angular velocity $\dot{\theta}$. The moment of forces acting from the oncoming flow is represented as an expansion in powers of the angle of inclination and the derivative of the angle. We confine ourselves to the first terms of the expansion. Let us leave only the moment of aerodynamic forces on the right side:

$$I_z \ddot{\theta} + r \dot{\theta} + k \theta = s L^2 \frac{\rho_0 v}{2} m_{\dot{\theta}} (1 - \delta \theta^2) \dot{\theta}, \quad (3.7)$$

where s is the characteristic area of the cylinder, k is the rigidity of the elastic suspension, $m_{\dot{\theta}}$ is the rotational derivative, v is the free flow velocity, L is the characteristic size, ρ_0 is the air density, r is the coefficient of friction in the elastic suspension.

If we introduce the following notation:

$$\omega^2 = I_z, \quad \mu = \rho_0 L^3 \frac{s}{2 I_z} m_{\dot{\theta}}, \quad k_2 = \frac{r}{\mu I_z},$$

then the equation of motion will take the form:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = \mu \frac{v}{L} (1 - \delta \theta^2) \dot{\theta} - k_2 \dot{\theta}. \quad (3.8)$$

Assuming μ to be a small parameter, equation (3.8) can be solved by the Krylov-Bogolyubov method in the first approximation [2]. As a result, equations are obtained for slowly changing amplitude A and phase φ of rotational oscillations: $\theta = A \cos(\omega t + \varphi)$. Let's give these equations.

$$\dot{A} = A \frac{\mu v}{2 L} \left(1 - \frac{k_2 L}{v} - \frac{\delta}{4} A^2 \right), \quad \dot{\varphi} = 0. \quad (3.9)$$

Equating to zero the right side of the first equation (3.9), we obtain an expression for finding the amplitude of steady oscillations:

$$A^2 = \frac{4}{\delta} \left(1 - \frac{k_2 L}{v} \right). \quad (3.10)$$

Thus, the model predicts that the dependence of the square of the amplitude on the inverse velocity of the oncoming flow is described by a linear function. To check whether this mathematical model is suitable for describing the rotational oscillations of a thick plate, which is used in experiments, equipped with end plates, two graphs are given below. The mathematical model assumes that the resistance is proportional to the angular velocity. In this case, in the absence of aerodynamic forces, the oscillations decay, and the oscillation amplitude on a logarithmic scale is a linear function of time. On fig. 3.8 on a logarithmic scale shows a graph of the dependence of the amplitude of damped oscillations on time. The points on the graph fall with some error near a straight line. This proves that the hypothesis under test holds.

The following graph 3.9 shows the dependence of the squared amplitude of steady-state oscillations on the Strouhal number $Sh = wT/v$, where w is the width of the thick plate, T is the oscillation period. The points on the graph fall on one line if the speed is high enough.

Thus, the considered mathematical model can be applied to thick plates with end plates.

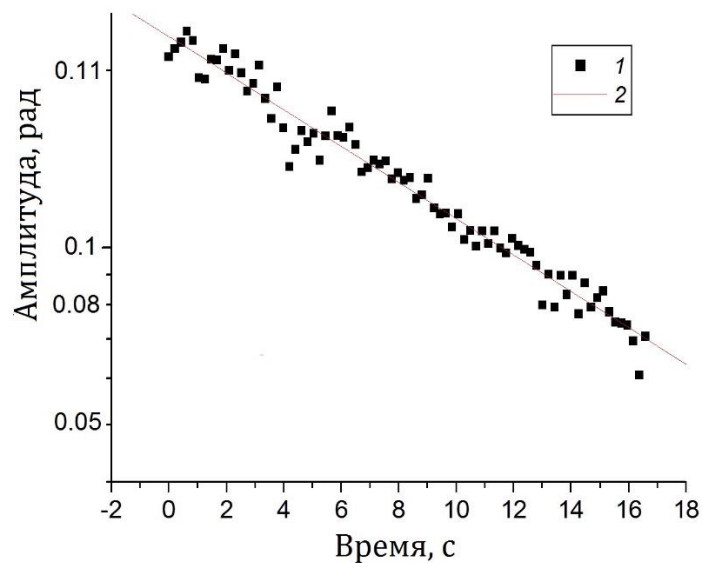


Fig. 3.8. The dependence of the amplitude of damped oscillations on time.

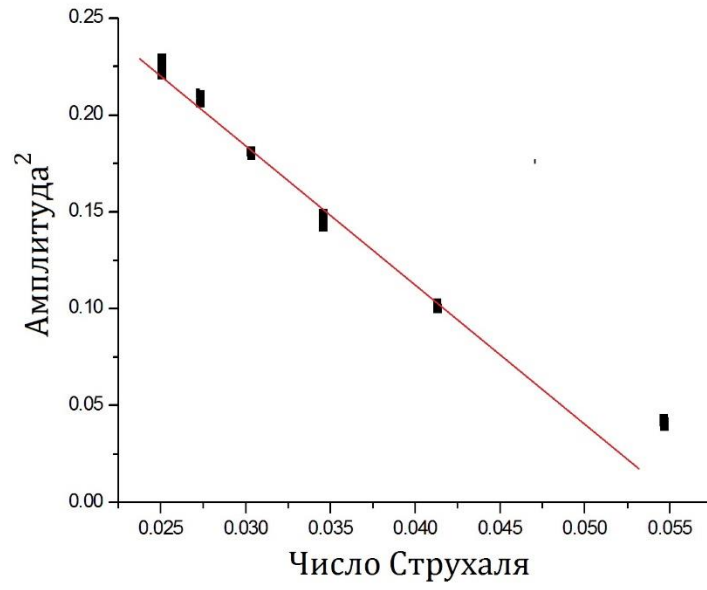


Fig. 3.9. Dependence of the squared amplitude on the Strouhal number. Plate with end plates.
Aspect ratio $\lambda = 7$.

Chapter 3 conclusions

The experiments were carried out with thick rectangular plates attached to an elastic suspension with one degree of freedom. It was only possible to rotate around an axis perpendicular to the vector of the average velocity of the air flow. It has been found that the amplitude of steady oscillations increases with increasing elongation of the plates. A constant oscillation amplitude of a plate with an aspect ratio $\lambda = 2$ is realized only at a sufficiently high air velocity. The presence of end plates changes the dependence of the oscillation amplitude on the Strouhal number. For a plate with an aspect ratio $\lambda = 2$ the range of flow velocities at which oscillations with a constant amplitude are observed is extended. In this case, the amplitude is much greater than the oscillation amplitude of a thick plate without end plates. The dependences of the oscillation amplitude of thick plates with end plates on the Strouhal number are close to linear. An increase in the elongation of the thick plate from 5 to 7 does not lead to a significant change in the oscillation amplitude.

The presence of end plates makes the dependence smoother. When there are no end plates, then nothing prevents the air flow from passing through the ends of the plate. In this case, the vortex system behind the body has a complex character and is rebuilt with a change in the flow velocity.

The rotational oscillations of thick plates with an aspect ratio greater than five with end plates are satisfactorily described by the mathematical model proposed earlier [35] for describing the rotational oscillations of a small elongation cylinder.

Chapter 4

Oscillations of a segment of an elongated bluff body with two degrees of freedom in the presence of end plates

Poorly streamlined elastic or elastically fixed bodies under the action of wind can perform translational or rotational oscillations. The source of oscillations of extended bodies can be periodically descending vortices, forming a Karman chain, if the frequency of vortices is close to the natural frequency of oscillations of the structure. Such oscillations are called galloping [37]. In this case, it is assumed that the frequency of the periodic descent of the vortices is much higher than the natural frequency of oscillations. Therefore, the aerodynamic forces arising from the convergence of the vortices are averaged and do not affect the significantly slow oscillation process during galloping. In most works devoted to bridge oscillations, instabilities leading to galloping were considered to determine the critical wind speed in accordance with the linear dynamic theory [53].

It was assumed that when the critical speed of the air flow is exceeded, the oscillations increase intensively and inevitably lead to a catastrophe. However, in the supercritical region, bridges can oscillate with a limited amplitude due to aerodynamic nonlinearities, and the amplitudes of postcritical oscillations in a certain range of wind speeds can be acceptable [98]. This chapter is devoted to the construction of a mathematical model of translational and rotational oscillations of a bluff body and the verification of this model using the example of oscillations of a mock-up of a bridge segment fixed on an elastic suspension in the working part of a wind tunnel.

The main content of Chapter 4 is presented in [34, 36, 40, 87, 88].

To describe the translational galloping of a bluff body, a quasi-stationary model was proposed in [31]. This model is based on the assumption that the aerodynamic

forces acting on a body depend only on the relative flow velocity and on the angles describing the orientation of the body relative to the air flow velocity vector. For a transverse air flow around an extended body oscillating in a direction perpendicular to the flow, the normal aerodynamic force acting in the direction of motion depends only on the instantaneous angle of attack α . The coefficient of normal aerodynamic force c_y can be determined in a wind tunnel in experiments with a fixed body. In [75], the dependence $c_y(\alpha)$ of a square prism was approximated by a fifth-order polynomial. Later [76], it was found that the model works better if the dependence $c_y(\alpha)$ is approximated by a seventh order polynomial. The quasi-stationary model was widely used later to describe the translational galloping of rectangular cylinders of various proportions [70], cylinders with a triangular cross section [46], diamond-shaped cross section [47], and prisms of finite elongation [19].

The model of oscillations of an elastically fixed body with two degrees of freedom was developed in [51, 56]. The authors of these papers made attempts to extend the quasi-stationary galloping model to the rotational oscillations of two bluff bodies: a square prism and an angular profile. The difficulty of applying these models lies in the fact that different points of a rotating body have different speeds and, consequently, the instantaneous angle of attack of these points is different. We have to choose a characteristic point to determine the instantaneous angle of attack, this is some arbitrariness. It is assumed that the model will qualitatively describe the alternation of oscillation modes associated with a change in the gas flow rate.

4.1. Mathematical model of translational and rotational oscillations of a bluff body

Let the body be fixed on an elastic suspension with one degree of freedom. In a fixed coordinate system, it can move along the OY axis, perpendicular to the oncoming flow velocity v (fig. 4.1). The body is inclined at an angle θ to the horizon.

The speed of the body relative to the medium is the sum of two perpendicular vectors. The first vector is directed along the OX axis, its absolute value is equal to v . The second vector represents the speed of the body along the OY axis. Its value is equal to \dot{y} , where y is the coordinate of the center of mass of the body, the dot above the symbol here and below denotes differentiation with respect to time. The angle of attack α (the angle between the axis OX and the axis of the velocity coordinate system OX_α) and the relative velocity of the body v_r will be determined by the formulas

$$\alpha = \theta - \operatorname{arctg} \frac{\dot{y}}{v},$$

$$v_r = \sqrt{v \left(1 + \left(\frac{\dot{y}}{v} \right)^2 \right)} \approx v \left(1 + 0,5 \left(\frac{\dot{y}}{v} \right)^2 \right).$$

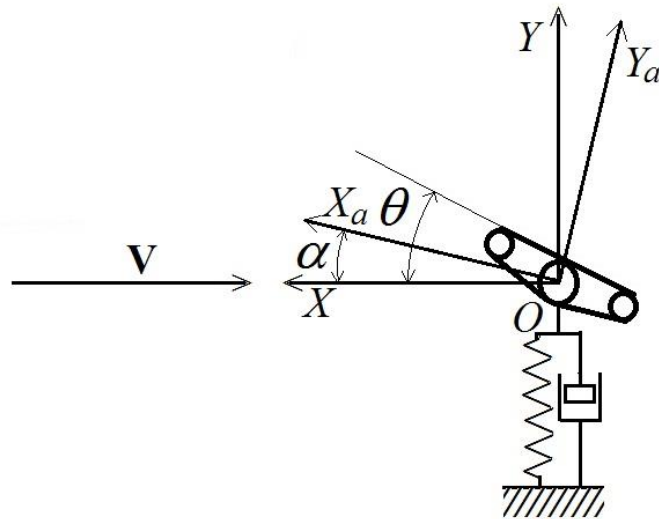


Fig. 4.1. Simulation of translation galloping.

In what follows, we assume that the angles of attack are small and use the approximate expressions: $\alpha = \theta - \left(\frac{\dot{y}}{v} \right)$, $v_r = v$.

The coefficient c_y of the force acting along the OY axis is approximated by a polynomial of degree n in the angle of attack α . Without violating the generality of the problem, we assume that the coefficient A_0 at α^0 is equal to zero, since only the

average value of the coordinate $y = y_0$ depends on the value of this member. The equation of motion will be written in the form

$$m\ddot{y} + r_1\dot{y} + k_1y = \left(\frac{1}{2}\right) s\rho_0v^2 \sum_{i=1}^n A_i a^i,$$

where m is the mass of the body, r_1 is the coefficient of friction in the elastic suspension, k_1 is the reduced stiffness of the suspension, s is the characteristic area of the body, ρ_0 is the air density.

Let us introduce the notation:

$$\mu_1 = -\frac{s\rho_0wA_1}{2m}, \quad \eta_1 = \frac{r_1}{m}$$

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m}, \quad v_1 = \eta_1 \frac{w}{\mu_1},$$

where w is the characteristic size of the body. Translational galloping can occur only under the condition $A_1 < 0$ [26], therefore $\mu_1 > 0$. Let $n = 3$, then

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \omega_1^2 y = \mu_1 \frac{v}{w} \left[1 - \frac{v_1}{v} + \frac{A_2 \dot{y}}{A_1 v} - 2 \frac{A_2}{A_1} \theta + \frac{A_3}{A_1} \left(\frac{\dot{y}}{v}\right)^2 - 3 \frac{A_3}{A_1} \left(\frac{\dot{y}}{v}\right) \theta + 3 \frac{A_3}{A_1} \theta^2 \right] \\ - \mu_1 \frac{v^2}{w} \left(\theta - \frac{A_2}{A_1} \theta^2 + \frac{A_3}{A_1} \theta^3 \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Experiments show that oscillations during galloping are close to harmonic and occur at a frequency close to the natural frequency of the structure. The parameter μ_1 on the right side of the equation is small.

To simulate rotational oscillations, the model of oscillations of a small elongation cylinder proposed in [35] was taken as a basis. The equation of rotational oscillations of a body with a moment of inertia I_z around the axis OZ passing through the center of mass has the form

$$I_z \ddot{\theta} + r_2 \dot{\theta} + k_2 \theta = sw^2 \frac{\rho_0 v}{2} m_{\dot{\alpha}} (1 - \delta \alpha^2) \dot{\alpha},$$

where r_2 is the coefficient of friction in the suspension, k_2 is the rigidity of the elastic suspension, $m_{\dot{\alpha}}$ is the rotational derivative of the pitching moment, δ is a parameter that is determined in an experiment with rotational oscillations from the amplitude

of rotational oscillations, to which the oscillating system asymptotically approaches with increasing flow velocity. When transforming the equation of rotational oscillatory motion, it is necessary to differentiate the expression for the angle of attack $\alpha = \theta - \left(\frac{y}{v}\right)$. Equation (4.1) implies that $\ddot{y} \approx -\omega_1^2 y$. Using the notation

$$\mu_2 = s\rho_0 w^3 \frac{m\dot{\alpha}}{(2I_z)}, \quad \eta_2 = \frac{r_2}{I_z},$$

$$\omega_2^2 = \frac{k_2}{I_z}, \quad v_2 = \eta_2 \frac{w}{\mu_2},$$

the equation of rotational oscillations will take the form

$$\ddot{\theta} + \omega_2^2 \theta = \mu_2 \frac{v}{w} \left[1 - \delta\theta^2 - \delta \left(\frac{\dot{y}}{v}\right)^2 + 2\delta\theta \frac{\dot{y}}{v} \right] \times \left(\dot{\theta} + \frac{\omega_1^2 y}{v} \right) - \mu_2 v_2 \frac{\dot{\theta}}{w}. \quad (4.2)$$

The system of equations (4.1) and (4.2) describes two coupled oscillators. The non-linear terms on the right-hand side of the equations are multiplied by the small parameters μ_1 and μ_2 . Therefore, the Krylov–Bogolyubov method [2] can be used to solve the system. Let us assume that the frequency ratio ω_1/ω_2 is not equal to unity and does not differ from unity by a small amount.

We introduce new variable amplitudes ρ_y, ρ_θ and phases ψ_1, ψ_2 of oscillations

$$y = \rho_y \cos \psi_1, \quad \psi_1 = \omega_1 t + \varphi_1,$$

$$\theta = \rho_\theta \cos \psi_2, \quad \psi_2 = \omega_2 t + \varphi_2.$$

Amplitudes ρ_y, ρ_θ and phase shifts ω_1, ω_2 are slow functions of time. Denote the right parts of equations (4.1) and (4.2) $\mu_1 f_1$ и $\mu_2 f_2$, respectively. In the first approximation of the Krylov–Bogolyubov method, to obtain expressions for the derivatives of the amplitude and phase, time averaging is performed using the formulas:

$$\dot{\rho}_y = -\frac{\mu_1}{2\pi m \omega_1} \int_0^{2\pi m} f_1(\rho_y \cos \psi_1, -\rho_y \omega_1 \sin \psi_1, \rho_\theta \cos \psi_2, -\rho_\theta \omega_2 \cos \psi_2) \sin \psi_1 d\psi_1, \quad (4.3)$$

$$\dot{\rho}_\theta = -\frac{\mu_2}{2\pi m \omega_2} \int_0^{2\pi m} f_2(\rho_y \cos \psi_1, -\rho_y \omega_1 \sin \psi_1, \rho_\theta \cos \psi_2, -\rho_\theta \omega_2 \cos \psi_2) \sin \psi_2 d\psi_2, \quad (4.4)$$

$$\rho_y \dot{\psi}_1 = \rho_y \omega_1 - \frac{\mu_1}{2\pi m \omega_1} \int_0^{2\pi m} f_1(\rho_y \cos \psi_1, -\rho_y \omega_1 \sin \psi_1, \rho_\theta \cos \psi_2, -\rho_\theta \omega_2 \cos \psi_2) \cos \psi_1 d\psi_1, \quad (4.5)$$

$$\rho_\theta \dot{\psi}_2 = \rho_\theta \omega_2 - \frac{\mu_2}{2\pi m \omega_2} \int_0^{2\pi m} f_2(\rho_y \cos \psi_1, -\rho_y \omega_1 \sin \psi_1, \rho_\theta \cos \psi_2, -\rho_\theta \omega_2 \cos \psi_2) \cos \psi_2 d\psi_2. \quad (4.6)$$

Each of the functions f_1 and f_2 is the sum of the terms that contain the products of the sines and cosines of ψ_1 and ψ_2 to some extent.

After calculating the integrals in expressions (4.3) and (4.4), we obtain approximate equations for the amplitudes of translational and rotational oscillations:

$$\dot{\rho}_y = \frac{\mu_1 v}{2 w} \rho_y \left\{ 1 - \frac{v_1}{v} + \frac{3A_3}{4A_1} \left[\left(\frac{\rho_y \omega_1}{v} \right)^2 + 2\rho_\theta^2 \right] \right\},$$

$$\dot{\rho}_\theta = \frac{\mu_2 v}{2 w} \rho_\theta \left\{ 1 - \frac{v_2}{v} + \frac{\delta}{4} \left[\rho_\theta^2 + 2 \left(\frac{\rho_y \omega_1}{v} \right)^2 \right] \right\}.$$

In the same way, by calculating the integrals in formulas (4.5) and (4.6), one can obtain equations for the oscillation phases. However, in what follows, the equations for the phases will not be needed, so they are not given. Reducing the amplitude of translational oscillations $\rho_Y = \rho_y \omega_1 / v$ to a dimensionless form and using the notation $b_1 = -3A_3 / (4A_1)$ и $b_2 = \delta / 4$, we obtain

$$\dot{\rho}_Y = \frac{\mu_1 v}{2 w} \rho_Y \left\{ 1 - \frac{v_1}{v} - b_1 [\rho_Y^2 + 2\rho_\theta^2] \right\},$$

$$\dot{\rho}_\theta = \frac{\mu_2 v}{2w} \rho_\theta \left\{ 1 - \frac{v_2}{v} - b_2 [\rho_\theta^2 + 2\rho_Y^2] \right\}.$$

We have obtained two equations in which the dimensionless amplitudes of translational and rotational oscillations enter symmetrically. With another method of non-dimensionalizing the amplitude of translational oscillations (for example, by dividing the amplitude by some characteristic size of the body), symmetric equations would not have been obtained. We point out that for purely translational oscillations, the dimensionless amplitude of translational oscillations ρ_Y is the amplitude of oscillations of the instantaneous angle of attack.

It is convenient to pass from the equations for the amplitudes to the equations for the squared amplitudes

$$Y = \rho_Y^2, \quad \Theta = \rho_\theta^2.$$

The resulting equations coincide with the well-known Lotka–Volterra equations [68, 38] obtained to describe the competition between two animal species eating the same food

$$\dot{Y} = \mu_1 \frac{v}{w} Y \left\{ 1 - \frac{v_1}{v} - b_1 [Y + 2\Theta] \right\}, \quad (4.7)$$

$$\dot{\Theta} = \mu_2 \frac{v}{w} \Theta \left\{ 1 - \frac{v_2}{v} - b_2 [\Theta + 2Y] \right\}. \quad (4.8)$$

In contrast to the original Lotka–Volterra equations, the coefficients in the obtained equations (4.7) and (4.8) depend on the free flow velocity. The square of the amplitude of fluctuations correspond to the number of animals.

The system of equations (4.7) and (4.8) is symmetric with respect to the variables included in the system. Assume for definiteness that $v_1 < v_2$. To find solutions to equations describing oscillations with a steady-state constant amplitude, it is necessary to equate the time derivatives on the left side of the equations to zero. The system will turn into an algebraic one. There are 4 stationary solutions to the equations

$$5. \quad Y = 0, \theta = 0.$$

6. $\Upsilon = \frac{(v-v_1)}{b_1 v}, \Theta = 0.$
7. $\Upsilon = 0, \Theta = \frac{(v-v_2)}{b_2 v}.$
8. $\Upsilon = \left[\frac{2b_1(v-v_2)-b_2(v-v_1)}{3b_1 b_2 v} \right], \Theta = \left[\frac{2b_2(v-v_1)-b_1(v-v_2)}{3b_1 b_2 v} \right].$

To determine the stability of solutions, we use linearized equations in the neighborhood of solutions:

$$\begin{pmatrix} \dot{\Upsilon} \\ \dot{\Theta} \end{pmatrix} = \frac{v}{w} \times \begin{pmatrix} \mu_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} - 2b_1 \Upsilon - 2b_1 \Theta \right) & -\mu_1 2b_1 \Upsilon \\ -\mu_2 2b_2 \Theta & \mu_2 \left(1 - \frac{v_2}{v} - 2b_2 \Upsilon - 2b_2 \Theta \right) \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} \Delta \Upsilon \\ \Delta \Theta \end{pmatrix}.$$

Let us compose a characteristic equation for determining the eigenvalues of the Jacobi matrix:

$$\begin{vmatrix} \mu_1 \left(1 - \frac{v_1}{v} - 2b_1 \Upsilon - 2b_1 \Theta \right) - \lambda & -\mu_1 2b_1 \Upsilon \\ -\mu_2 2b_2 \Theta & \mu_2 \left(1 - \frac{v_2}{v} - 2b_2 \Upsilon - 2b_2 \Theta \right) - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Negative eigenvalues indicate the stability of the solution. The solution is unstable if at least one eigenvalue is positive.

Matrix eigenvalues for solution 1:

$$\lambda_1 = \mu_1 \frac{(v - v_1)}{v}, \quad \lambda_2 = \mu_2 \frac{(v - v_2)}{v}.$$

The solution is stable in the range $v < v_1$.

Matrix eigenvalues for solution 2:

$$\lambda_1 = -\mu_1 \frac{(v - v_1)}{v}, \quad \lambda_2 = \frac{\mu_2}{v} \left[v - v_2 - 2 \left(\frac{b_2}{b_1} \right) (v - v_1) \right].$$

If $b_2/b_1 > 1/2$, the solution is stable in the range $v > v_1$. If $b_2/b_1 < 1/2$, then the solution is stable in the range $v_1 < v < v_3$, where $v_3 = v_2 + 2b_2(v_2 - v_1)/(b_1 - 2b_2)$.

Matrix eigenvalues for solution 3:

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1}{v} \left[v - v_1 - 2 \left(\frac{b_1}{b_2} \right) (v - v_2) \right], \quad \lambda_2 = -\mu_2 \frac{(v - v_2)}{v}.$$

If $b_2/b_1 < 2$ the solution is stable in the range $v > v_4$, where $v_4 = (v_1 b_2 - 2v_2 b_1)/(b_2 - 2b_1)$, otherwise the solution is unstable.

Solution 4 exists in the range $v_4 < v < v_3$. Application of the Routh–Hurwitz criterion makes it possible to establish that it is unstable.

Consider the sequence of changing modes with a constant amplitude of oscillations, which is given by the constructed model, when the air flow velocity changes, if the coefficients satisfy the condition $b_2/b_1 < 1/2$. As long as the speed of the oncoming flow does not exceed the critical speed of translational oscillations $v < v_1$, there are no oscillations. With an increase in the flow rate from v_1 to v_3 there are translational oscillations, which, when the upper limit of v_3 is exceeded, are replaced by rotational ones. With a subsequent decrease in speed, the reverse transition to translational oscillations is carried out at a flow rate $v_4 < v_3$. With a further decrease in the speed, the oscillations stop at a speed that is equal to the speed of the oscillations v_1 . Thus, the model predicts hysteresis as the airflow speed increases and decreases.

For some bodies, better predictions for pitching amplitudes are obtained by approximating the normal force coefficient c_y π with a higher order polynomial. For example, for a prism with a square cross section, it was found that the best result is obtained by approximating c_y with a seventh order polynomial [59] in powers of the angle of attack. At the same time, it was found that there may be one more hysteresis in the region of the critical velocity of translational oscillations.

Let $n = 7$. Then the Krylov–Bogolyubov method in the first approximation gives instead of the system of equations (4.7) and (4.8) the following system

$$\begin{aligned} \dot{Y} = \mu_1 \frac{v}{\omega} Y \left[1 - \frac{v_1}{v} + \frac{3A_3}{4A_1} (Y + 2\Theta) + \frac{5A_5}{8A_1} (Y^2 + 6Y\Theta + 3\Theta^2) \right. \\ \left. + \frac{35A_7}{64A_1} (Y^3 + 12Y^2\Theta + 18Y\Theta^2 + 4\Theta^3) \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\dot{\Theta} = \mu_2 \frac{v}{w} \Theta \left[1 - \frac{v_2}{v} - b_2(\Theta + 2Y) \right]. \quad (4.10)$$

It is convenient to search for the steady oscillatory regimes of a body on an elastic suspension by solving the system of ordinary differential equations (4.9) and (4.10) numerically. We used the fourth-order Runge–Kutta method to solve the system.

4.2. Experimental verification of the mathematical model

The above mathematical model was tested in the wind tunnel AT-12 of St. Petersburg University on the example of testing a bridge segment model. One model was made of wood. It had a width $w = 100$ mm and a length $L = 700$ mm. Another model was made of metal with a width $w = 110$ mm and a length $L = 780$ mm. Каждая модель представляет собой три балки круглого сечения, соединенные перемычками и покрытые настилом. Схема конструкции моста представлена на рис. 4.2.

Each model consists of three round beams connected by bridges and covered with decking. The scheme of the bridge design is shown in fig. 4.2.

All experiments were carried out in the presence of round end plates having a diameter of 200 mm or 220 mm. The purpose of the end plates is also to exclude the overflow of air flow through the ends of the model. It was shown that in the case of simulation of rotational oscillations of a thick plate, the aspect ratio of the plate L/w should be greater than five [90]; this was shown earlier (see Section 3.2). The proportions of our models satisfy this requirement.

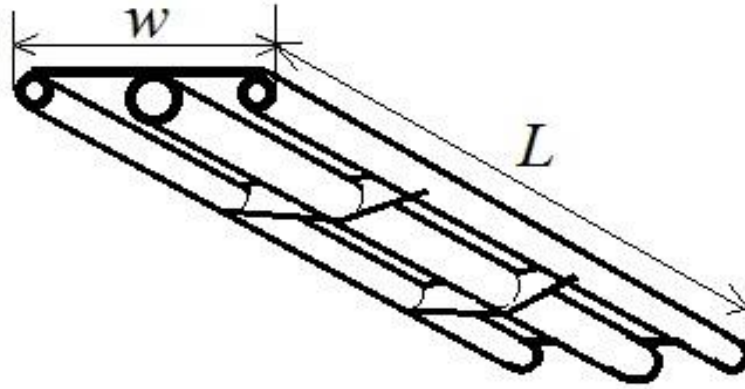


Fig. 4.2. Scheme of the bridge segment being tested.

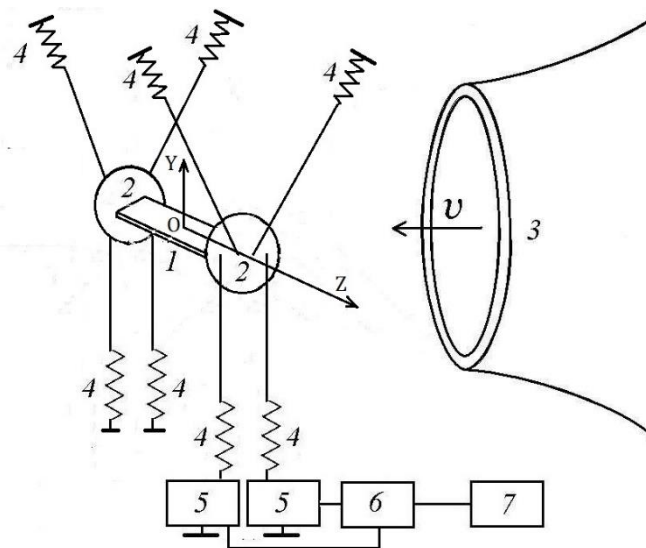


Fig. 4.3. Experiment scheme. 1 — model, 2 — end plates, 3 — wind tunnel nozzle, 4 — springs, 5 — semiconductor strain gauges, 6 — PC oscilloscope, 7 — computer.

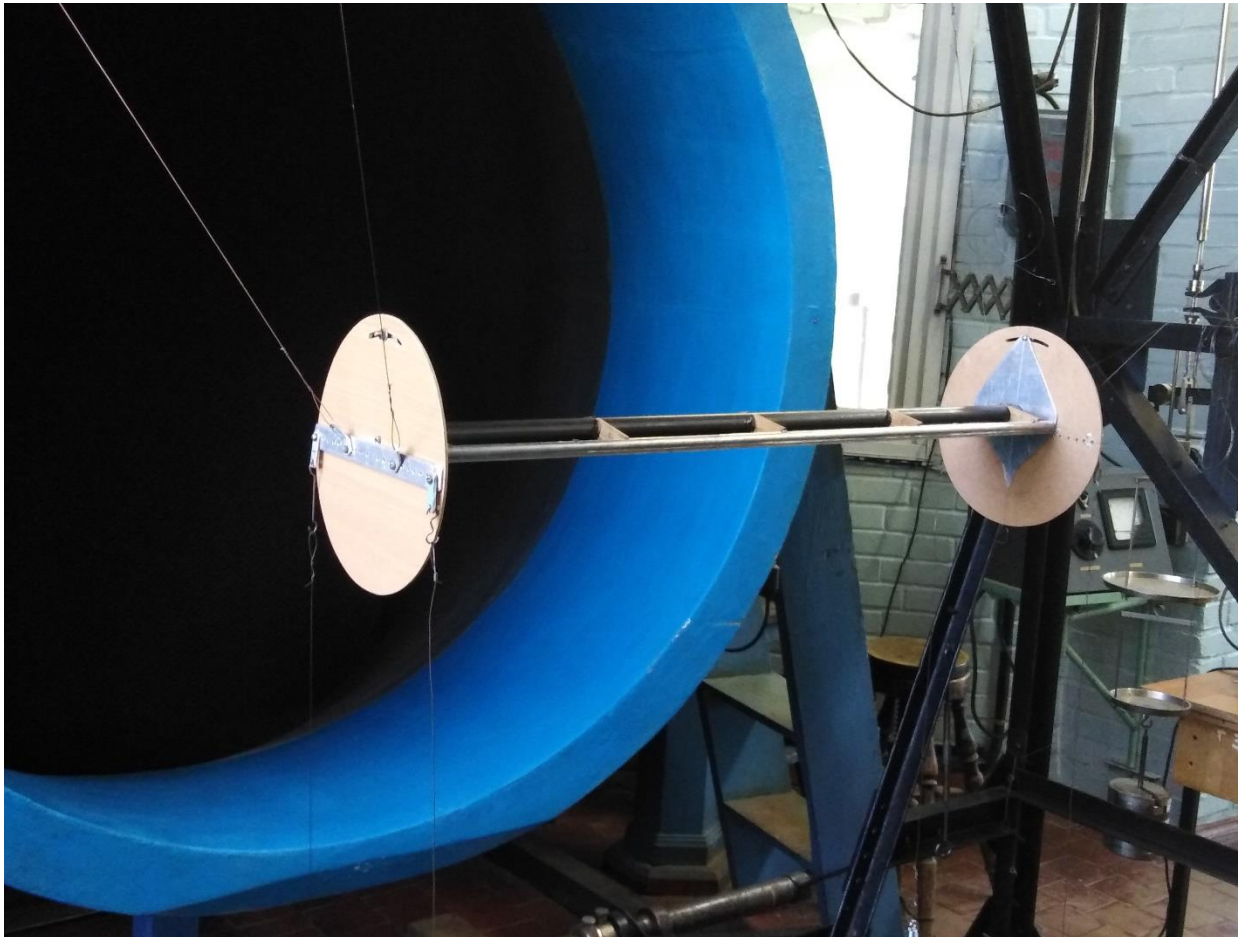


Fig. 4.4. Model with end plates in the working part of the wind tunnel.

The scheme of the experiment on oscillation of the bridge segment is shown in fig. 4.3.

A photograph of the model in the working part of the wind tunnel is shown in fig. 4.4. The model is fixed in the working part of the wind tunnel with the help of eight steel springs and wire rods connecting the springs with the model. The model thus installed could move with six degrees of freedom, but only translational oscillations along the vertical axis OY and rotational oscillations around the axis OZ were observed in the experiment.

Two C-50 semiconductor strain gauges register the tension of the two lower springs. The Velleman-PCS500 PC oscilloscope converts the analog output signals of strain gauges into digital ones and transmits them to the control computer. The reading frequency is 1250 Hz. The duration of readings recording is 3.3 s.

The calibration procedure and subsequent processing of the results make it possible to relate the amplitudes of the output voltage oscillations of strain gauges to the amplitudes of rotational and translational oscillations of the bridge segment.

4.3. Processing the results of an experiment with rotational and translational oscillations.

The Fourier transform of the signal has been applied. It is established that oscillations occur at two frequencies. One of the frequencies (low) corresponds to purely translational oscillations in the vertical direction. Angular oscillations occur at high frequency. There are also small translational oscillations with a high frequency.

We assume that the displacement of the end of the spring is described by the expression

$$y_{ij} = B_j \cos \omega_1 t_i + C_j \sin \omega_1 t_i + D_j \cos \omega_2 t_i + E_j \sin \omega_2 t_i + F_j + \xi_{ij}, \quad (4.11)$$

$$B_j = a_{j1} \cos \varphi_{j1}, \quad C_j = a_{j1} \sin \varphi_{j1}, \quad D_j = a_{j2} \cos \varphi_{j2}, \quad E_j = a_{j2} \sin \varphi_{j2},$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2,$$

where y_{ij} is the displacement of the end of the spring at time t_i , j is the number of the spring, n is the number of readings in the sample, a_{j1} , a_{j2} are the amplitudes of oscillations of the ends of the springs with circular frequencies ω_1 are constants, ξ_{ij} is a random variable corresponding to the experimental error. The coefficients in formula (4.11) can be determined by the least squares method both for the entire sample containing 4095 samples, and for some part of it. The coefficients in expression (4.11) can be found by the least squares method, minimizing the sums of squares $S_j = \sum_{i=1}^n \xi_{ij}^2$. Finding the coefficients in this case reduces to solving systems of linear equations:

$$B_j \sum_{i=1}^n \cos^2 \omega_1 t_i + C_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_1 t_i \cos \omega_1 t_i + D_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_2 t_i \cos \omega_1 t_i + E_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_2 t_i \cos \omega_1 t_i + F_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_1 t_i = \sum_{i=1}^n y_{ij} \cos \omega_1 t_i,$$

$$\begin{aligned}
& B_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_1 t_i \sin \omega_1 t_i + C_j \sum_{i=1}^n \sin^2 \omega_1 t_i + D_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_2 t_i \sin \omega_1 t_i + \\
& + E_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_2 t_i \sin \omega_1 t_i + F_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_1 t_i = \sum_{i=1}^n y_{ij} \sin \omega_1 t_i, \\
& B_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_1 t_i \cos \omega_2 t_i + C_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_1 t_i \cos \omega_2 t_i + D_j \sum_{i=1}^n \cos^2 \omega_2 t_i + \\
& + E_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_2 t_i \cos \omega_2 t_i + F_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_2 t_i = \sum_{i=1}^n y_{ij} \cos \omega_2 t_i, \quad (4.12) \\
& B_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_1 t_i \sin \omega_2 t_i + C_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_1 t_i \sin \omega_2 t_i + D_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_2 t_i \sin \omega_2 t_i + \\
& + E_j \sum_{i=1}^n \sin^2 \omega_2 t_i + F_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_2 t_i = \sum_{i=1}^n y_{ij} \sin \omega_2 t_i, \\
& B_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_1 t_i + C_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_1 t_i + D_j \sum_{i=1}^n \cos \omega_2 t_i + E_j \sum_{i=1}^n \sin \omega_2 t_i + F_j = \\
& = \sum_{i=1}^n y_{ij}.
\end{aligned}$$

In the case when both strain gauges register oscillations of a model moving strictly translationally in the vertical direction, the phase shift of oscillations with frequency ω_1 is expressed by the formula $\varphi_1 = \varphi_{21} - \varphi_{11} = 0$. The dimensionless amplitude of oscillations of the center of mass of the model is determined by the expression $\rho_y = (a_{11} + a_{21})\omega_1/(2v)$. Consider the case of an arbitrary phase difference. The expressions for the dimensionless amplitude of translational oscillations ρ_{y1} and the amplitude of rotational oscillations $\rho_{\theta1}$ with frequency ω_1 have the form:

$$\rho_{y1} = \frac{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2 + 2a_{11}a_{21} \cos \varphi_1} \omega_1}{2v},$$

$$\rho_{\theta1} = \frac{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2 - 2a_{11}a_{21} \cos \varphi_1}}{l}.$$

The dimensionless amplitude of translational oscillations ρ_{y2} and the amplitude of rotational oscillations $\rho_{\theta2}$ with frequency ω_2 are expressed by the formulas:

$$\rho_{y2} = \frac{\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2 + 2a_{12}a_{22} \cos \varphi_2} \omega_2}{2v},$$

$$\rho_{\theta2} = \frac{\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2 - 2a_{12}a_{22} \cos \varphi_2}}{l}.$$

4.4. Results of the experiment with rotational and translational oscillations

One of the first experiments was carried out with a wooden model of a bridge segment. Translational oscillations and rotational steady oscillations were observed at small positive equilibrium angles of attack of 0.1 and 0.05 rad. On fig. 4.5 shows the dependence of the displacement of the ends of the front and rear springs depending on time. The oscillation frequency is 4.1 Hz.

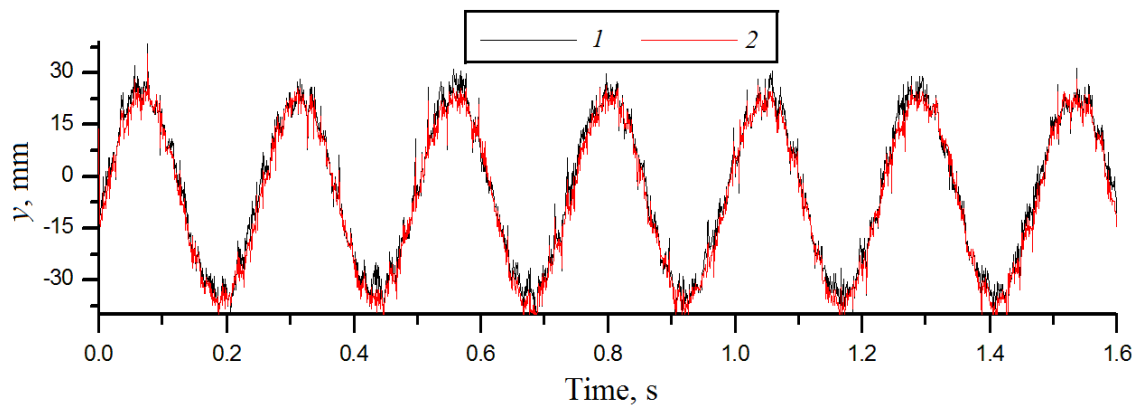


Fig 4.5. A typical dependence of the displacement of the ends of the springs on time during translational oscillations, 1 and 2 – refer to the rear and front springs, respectively.

These two dependencies are close to each other. The oscillations are progressive. Completely different dependences of displacements are shown in Figs. 4.6. The phase shift is close to π , but not equal to π . Oscillations are rotational oscillations with a small addition of translational ones.

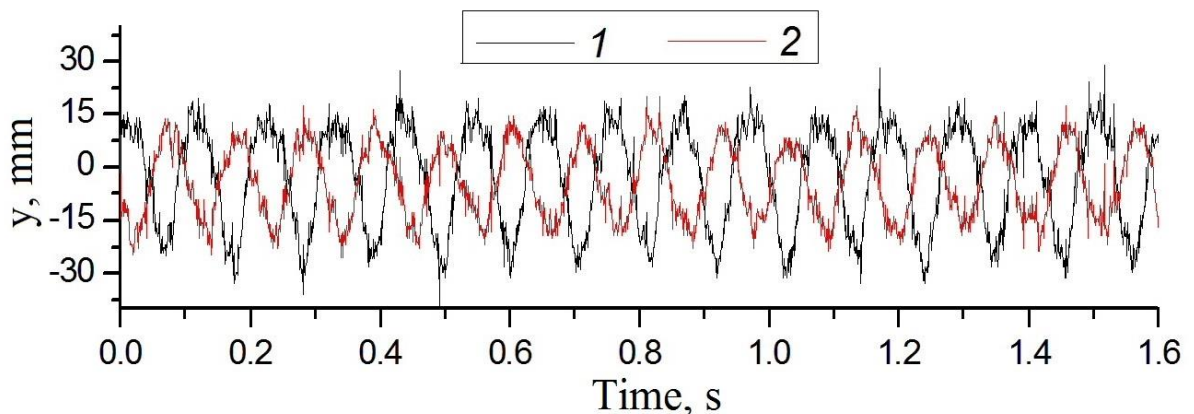


Fig. 4.6. A typical copy of the recording of rotational oscillations.

The steady oscillations of the bridge segment took place at small positive values of the angle of attack α .

The following graphs (Figures 4.7 and 4.8) show the results of testing a wooden model of a bridge segment at two equilibrium angles of attack of 0.1 and 0.05 rad. The points on the graph were obtained by averaging over five measurements.

As the flow rate increases, the model goes through two different modes of oscillation. At low speeds translational oscillations occur in the vertical direction with a frequency of 4.1 Hz. Then these oscillations are replaced by translational oscillations in the vertical direction with a frequency of 9.1 Hz and rotational oscillations around an axis passing through the plane of symmetry of the model with a frequency of 9.1 Hz. At an angle of attack of 0.1 rad, the ranges of the two modes are separated. At an equilibrium angle of attack of 0.05 rad, the ranges of different regimes overlap.

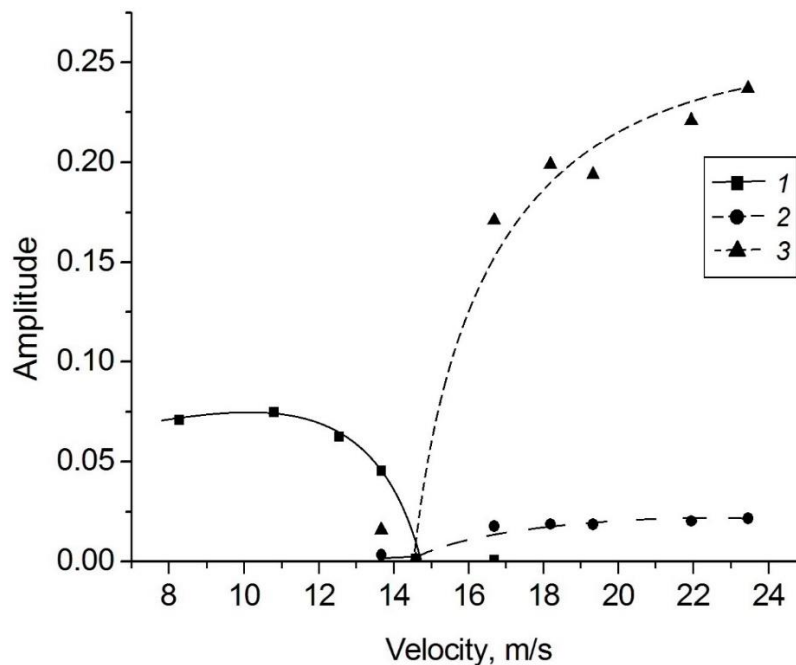


Fig. 4.7. Dependence of the dimensionless oscillation amplitudes at $\theta_0 = 0.1$ rad.

1 – translational oscillations, 4.1 Hz, 2 – translational oscillations, 9.1 Hz, 3 – rotational oscillations, 9.1 Гц

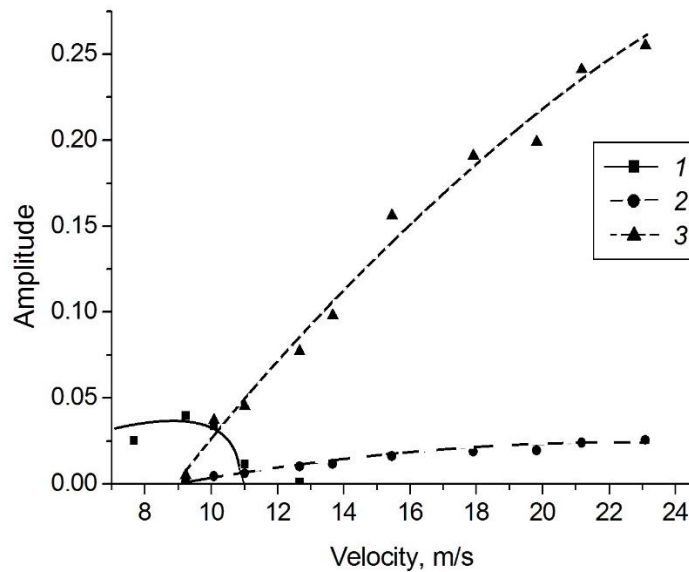


Fig. 4.8. Dependence of the dimensionless oscillation amplitudes at $\theta_0 = 0.05$ rad.
 1 – translational oscillations, 4.1 Hz, 2 – translational oscillations, 9.1 Hz, 3 – rotational oscillations, 9.1 Hz

Thus, in experiments with a wooden model of the bridge segment, the predictions of the mathematical model about the change in flow regimes with a change in the speed of the oncoming flow are qualitatively confirmed. At the same time, the presence of a velocity range at an equilibrium angle of attack of 0.05 rad, in which oscillations with two frequencies exist, we questioned, since the experiment may have fixed oscillation modes in which oscillations with a constant amplitude have not yet been established. The experiment also recorded the presence of translational oscillations with a small amplitude accompanying rotational oscillations, and the frequency of these translational oscillations coincides with the rotational frequency. The existence of these translational oscillations is explained by the fact that during rotational oscillations, a change in the angle of inclination of the body leads to the appearance of a lifting force, which causes translational oscillations with the rotational frequency. In the mathematical model for the analysis of

oscillations, an approximate method is used, which does not take this effect into account.

The following experiments were carried out with a metal model, the mass of which is greater than that of a wooden model, the dimensions during manufacture are maintained more accurately.

With the help of a three-component balance with a wire suspension, the aerodynamic coefficients of drag c_{xa} and lift c_{ya} are determined depending on the angle of attack α . The model was motionlessly fixed in the working part of the wind tunnel. The normal force coefficient c_y is calculated by the formula

$$c_y = c_{ya} \cos(\alpha - \theta_0) + c_x \sin(\alpha - \theta_0).$$

The dependence graph $c_y(\alpha)$ is shown in fig. 4.9. The abscissa shows the deviation from the angle of attack $\theta_0 = 0.1$ rad. The OY axis is perpendicular to the free stream velocity vector if the angle of attack is $\alpha - \theta_0 = 0$.

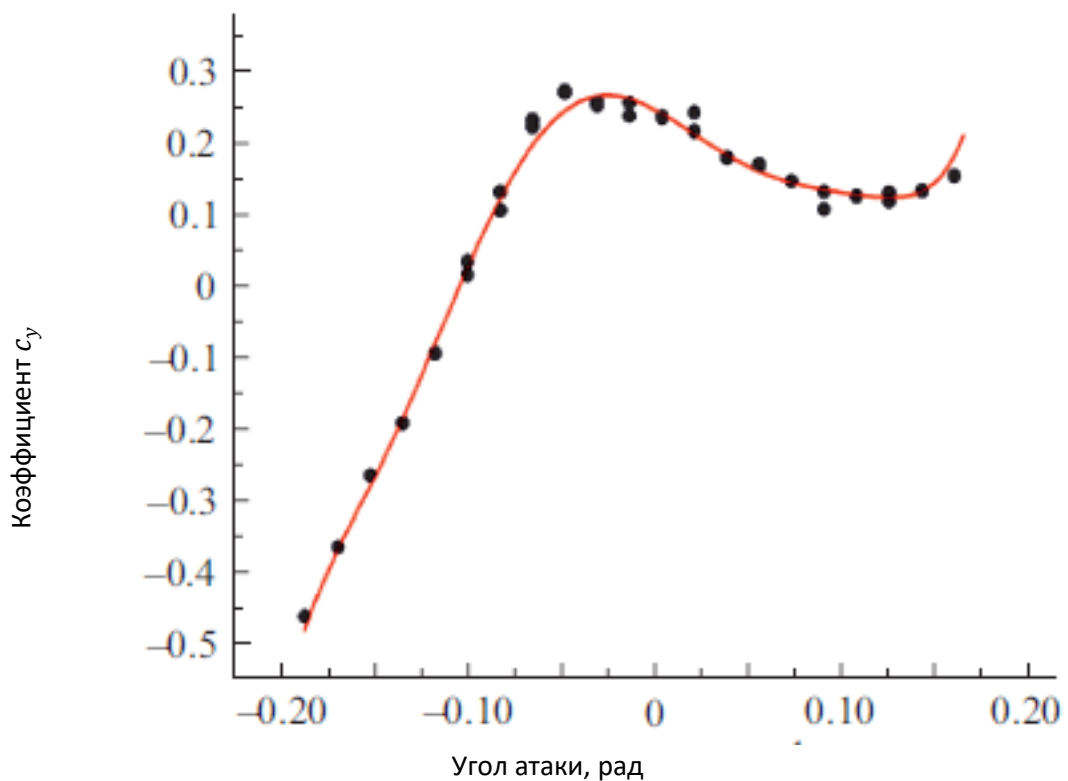


Fig. 4.9. Experimental dependence of c_y on the angle of attack $\alpha - \theta_0$ and its approximation by a 7th order polynomial.

The coefficients A_i ($i = 0, 1, \dots, 7$) in the expansion of c_y in powers of the angle of attack are given below:

$$(A_0, A_1, \dots, A_7) = (0.253, -1.501, -16.96, 303, -120, -12066, 10726, 185574).$$

The profile of the bridge segment is not symmetrical, so the coefficients at even degrees of angle of attack are not equal to zero.

The coefficients A_i ($i = 0, 1, 2, 3$) were also determined for the case when the expansion of the dependence of the normal force coefficient on the angle of attack is limited to terms no higher than the third degree. The coefficients are given in table. 4.1.

Table 4.1. The coefficients A_i

θ_0	A_0	A_1	A_2	A_3
0.08	0.278	-0.45	-34.5	264
0.09	0.268	-1.06	-26.0	296
0.10	0.253	-1.50	-17.0	303
0.11	0.234	-1.76	-8.06	286
0.12	0.213	-1.84	0.01	248
0.13	0.193	-1.78	6.64	192
0.14	0.173	-1.60	11.4	122
0.15	0.155	-1.35	13.9	46

The parameter δ is determined in an experiment with rotational oscillations of a model of a bridge segment made of metal. The model could only rotate around an axis perpendicular to the velocity of the oncoming flow. The axis passes through the plane of symmetry of the bridge. The tail holder is attached to the springs. Fixed in this way, the model performed rotational oscillations with a constant amplitude in the air flow. The experimental procedure is described in section 3.1. The algorithm for processing the results of the experiment is described in section 3.2.

The parameter δ is determined from the dependence of the squared amplitude of steady-state oscillations on the Strouhal number $Sh = fw/v$, where f is the oscillation frequency. This dependence is approximated by a linear function

$$\rho_{\theta}^2 = a + bSh, \quad \delta = 4a.$$

On fig. 4.10 shows the experimental dependence of the squared amplitude on the Strouhal number for several equilibrium angles θ_0 .

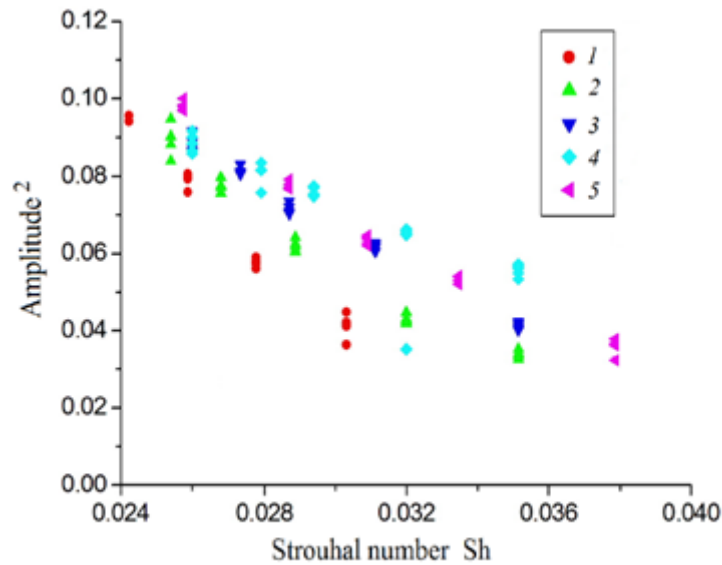


Fig. 4.10. Dependence of the squared amplitude of rotational oscillations on the Strouhal number: 1 – $\theta_0 = 0.017$, 2 – $\theta_0 = 0.035$, 3 – $\theta_0 = 0.052$,
4 – $\theta_0 = 0.079$, 5 – $\theta_0 = 0.105$

Next, we present the results of measuring the oscillation amplitudes at the angle of attack, which in the absence of oscillations was equal to $\alpha_0 = 0.1$ rad. As the flow rate increases, the model goes through two different modes of oscillation. At low speeds, translational oscillations occur with a frequency of 2 Hz in the vertical direction. Then these oscillations are replaced by rotational oscillations around the axis passing through the plane of symmetry of the model. The frequency of translational oscillations is much less than the frequency of rotational oscillations of 7.5 Hz. The ranges of existence of the two oscillation modes overlap.

On fig. 4.11 shows the dependence of the squared amplitudes on $1/v$. The dependence is close to linear, as predicted by the mathematical model. You can find the parameters $b_1 = 65,1$ и $b_2 = 3,1$

On fig. 4.12 shows the dependences of the dimensionless oscillation amplitudes obtained in the experiment and as a result of a numerical calculation carried out by the Runge–Kutta method. The following values were set as initial data in the calculation: $v_1 = 4.2 \text{ m/s}$ $v_2 = 13.5 \text{ m/s}$ $b_2 = 3.5$.

The expansion coefficients c_y in powers of the angle of attack α , used in the calculation are given above.

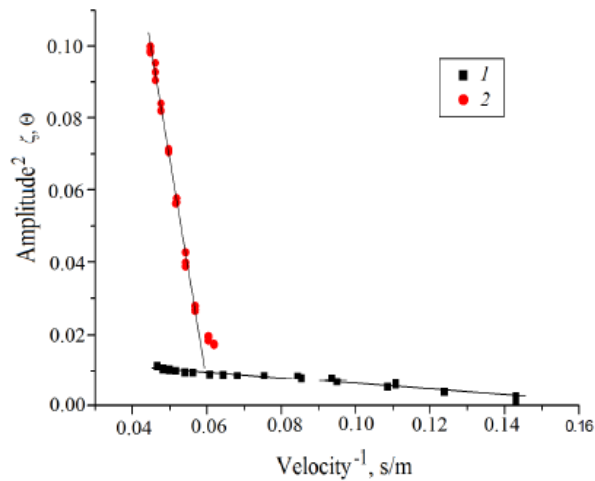


Fig. 4.11. Dependences of the squared dimensionless amplitudes of translational and rotational oscillations on the reciprocal velocity of the oncoming flow: 1 - translational oscillations; 2 - rotational oscillations.

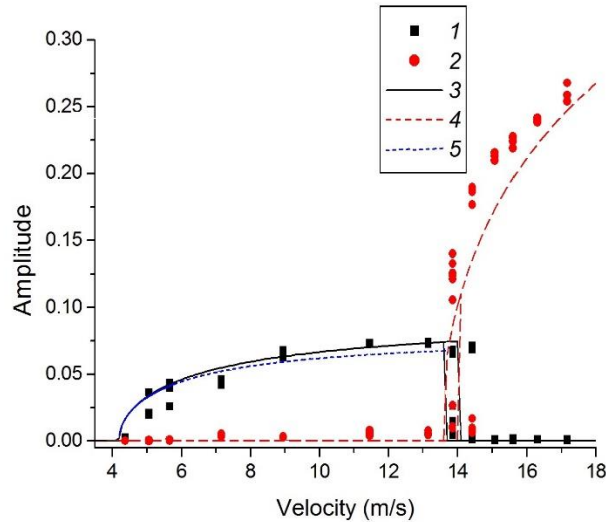


Fig. 4.12. Dependences of dimensionless translational amplitudes ρ_Y and rotational ρ_θ oscillations from the speed of the oncoming flow: 1 — ρ_Y , experiment; 2 — ρ_θ , experiment; 3 — ρ_Y , calculation; 4 — ρ_θ , calculation; 5 — ρ_Y , simple model calculation.

The parameter b_1 of a simple model, which takes into account in the expansion of c_y in powers of the angle of attack α , only terms not higher than the third order of smallness, was 110.5. Right border of the hysteresis region v_3 , calculated by a simple model is equal to 14.13 m/s. Left boundary $v_4 = 13.65$ m/s. In a more complex model, the values of the boundaries of the hysteresis region differ from the boundaries of a simple model by no more than 0.1 m/s.

Thus, the pattern of changing modes of oscillations is qualitatively described by the proposed mathematical model. Some quantitative discrepancy between the results predicted by the model and the experimental data can be explained by experimental errors and the imperfection of the model describing rotational oscillations.

4.5. Transverse oscillations of the spring suspension rods

In a number of experiments, the process of oscillations included transverse oscillations of one of the springs with a wire rod. Under natural conditions, when

the bridge vibrates, this phenomenon may correspond to oscillations of one of the cables of the cable-stayed bridge. The reason for such oscillations is parametric resonance, which is caused by oscillations in the tension of the spring with thrust with a frequency approximately twice the natural frequency of the transverse oscillations. Let us assume that these transverse oscillations can be described by representing them approximately as oscillations of a stretched string in the mode when half the wavelength of transverse oscillations fits in the length of the string. As is known, such oscillations are described by the Mathieu equations [80]. We added an additional term to the Mathieu equation to limit the amplitude of the string's oscillations.

Thus, the system of equations describing the translational oscillations of a body in an air flow (4.13), rotational oscillations (4.14), was supplemented by one more equation of transverse oscillations of a spring suspension (4.15):

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \omega_1^2 y = \mu_1 \frac{v}{w} \left[1 - \frac{v_1}{v} + \frac{A_2 \dot{y}}{A_1 v} - 2 \frac{A_2}{A_1} \theta + \frac{A_3}{A_1} \left(\frac{\dot{y}}{v} \right)^2 - 3 \frac{A_3}{A_1} \left(\frac{\dot{y}}{v} \right) \theta + 3 \frac{A_3}{A_1} \theta^2 \right] \\ - \mu_1 \frac{v^2}{w} \left(\theta - \frac{A_2}{A_1} \theta^2 + \frac{A_3}{A_1} \theta^3 \right) + T_{yz}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \omega_2^2 \theta = \mu_2 \frac{v}{w} \left[1 - \delta \theta^2 - \delta \left(\frac{\dot{y}}{v} \right)^2 + 2 \delta \theta \frac{\dot{y}}{v} \right] \times \left(\dot{\theta} + \frac{\omega_1^2 y}{v} \right) - \mu_2 v_2 \frac{\dot{\theta}}{w} \\ + T_{\theta z}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\ddot{z} + \omega_3^2 z = -\mu_3 \theta z - \mu_4 \dot{z} z^2, \quad (4.15)$$

where z is the transverse displacement of the string center divided by its length.

Transverse oscillations of the string cause an additional periodic change in tension due to the fact that oscillations are accompanied by changes in the length of the string. Therefore, the terms T_{yz} and $T_{\theta z}$ are added to the equations of translational (4.13) and rotational (4.14) oscillations, which describe the periodic change in the vertical force and moment of forces associated with transverse oscillations of the string.

We will solve the system of equations (4.13, 4.14, 4.15) by the Krylov-Bogolyubov method. Let's introduce new variables.

$$\begin{aligned}\theta &= \rho_\theta \cos \psi_2, \quad \psi_2 = \omega_2 t + \varphi_2, \quad z = \rho_z \cos \psi_3, \quad \psi_3 = \omega_3 t + \varphi_3, \\ \omega_2 &= 2\omega_3 + \Delta\omega, \quad \omega_4 = 2\omega_3.\end{aligned}$$

The term T_{yz} is a periodic function with a slowly changing amplitude and a frequency close to ω_2 . Therefore, the term will not affect the result of applying the Krylov-Bogolyubov method to equation (4.13).

The term $T_{\theta z}$ has the form

$$T_{\theta z} = a\rho_z^2 \cos 2\psi_3 = a\rho_z^2 \cos(\psi_4 + \Delta\varphi) = a\rho_z^2 (\cos \psi_4 \cos \Delta\varphi - \sin \psi_4 \sin \Delta\varphi).$$

Assuming the frequency shift $\Delta\omega$ is small compared to the frequency ω_4 we transform equation (4.14):

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + \omega_4^2 \theta &= -2\Delta\omega\omega_4 \theta + \mu_2 \frac{v}{w} \left[1 - \delta\theta^2 - \delta \left(\frac{\dot{y}}{v} \right)^2 + 2\delta\theta \frac{\dot{y}}{v} \right] \times \left(\dot{\theta} + \frac{\omega_1^2 y}{v} \right) \\ &\quad - \mu_2 v_2 \frac{\dot{\theta}}{w} + a\rho_z^2 (\cos \psi_4 \cos \Delta\varphi - \sin \psi_4 \sin \Delta\varphi).\end{aligned}\quad (4.16)$$

When solving equation (4.15) by the Krylov-Bogolyubov method, the slope angle θ is represented as

$$\theta = \rho_\theta \cos \psi_4 = \rho_\theta \cos(2\psi_3 - \Delta\varphi) = \rho_\theta (\cos^2 \psi_3 - \sin^2 \psi_3) \cos \Delta\varphi + 2\rho_\theta \sin \psi_3 \cos \psi_3 \sin \Delta\varphi.$$

The Krylov-Bogolyubov method leads to equations for slowly changing amplitudes and phase shifts of oscillations:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_\theta &= \frac{\mu_2 v}{2w} \rho_\theta \left[1 - \frac{v_2}{v} - \frac{\delta}{4} (\rho_\theta^2 + 2\rho_z^2) \right] + \frac{a}{2\omega_4} \rho_z^2 \sin \Delta\varphi, \\ \dot{\rho}_z &= \frac{\mu_3}{4\omega_3} \rho_\theta \rho_z \sin \Delta\varphi - \frac{\mu_4}{8} \rho_z^3, \\ \rho_\theta \dot{\varphi}_4 &= \Delta\omega \rho_\theta - \frac{a}{2\omega_4} \rho_z^2 \cos \Delta\varphi, \\ \rho_z \dot{\varphi}_3 &= \frac{\mu_3}{4\omega_3} \rho_\theta \rho_z \cos \Delta\varphi.\end{aligned}$$

From the last two formulas we obtain an expression for the derivative $\Delta\varphi$. Let us add to the system of equations the equation of translational oscillations, the equation obtained from (4.13) by the Krylov-Bogolyubov method.

$$\dot{\rho}_Y = \frac{\mu_1 v}{2w} \rho_Y \left[1 - \frac{v_1}{v} - b_1(\rho_Y^2 + 2\rho_\theta^2) \right], \quad (4.17)$$

$$\dot{\rho}_\theta = \frac{\mu_2 v}{2w} \rho_\theta \left[1 - \frac{v_2}{v} - \frac{\delta}{4}(\rho_\theta^2 + 2\rho_Y^2) \right] + \frac{a}{2\omega_4} \rho_z^2 \sin \Delta\varphi, \quad (4.18)$$

$$\dot{\rho}_z = \frac{\mu_3}{4\omega_3} \rho_\theta \rho_z \sin \Delta\varphi - \frac{\mu_4}{8} \rho_z^3, \quad (4.19)$$

$$\rho_\theta \Delta\varphi = \cos \Delta\varphi \left(\frac{\mu_3}{2\omega_3} \rho_\theta^2 + \frac{a}{2\omega_4} \rho_z^2 \right) - \Delta\varphi \rho_\theta. \quad (4.20)$$

We accept that the processes described by equations (4.19, 4.20) occur faster than the processes described by equations (4.17, 4.18), that is, μ_1 and μ_2 are much less than μ_3/ω_3^2 , μ_4/ω_3 and a/ω_4^2 .

Then we can assume that during the establishment of oscillations with amplitude ρ_z and phase shift $\Delta\varphi$, described by equations (4.19, 4.20), the amplitudes of translational ρ_Y and rotational ρ_θ oscillations of the body remain constant. We restrict ourselves to the case of a very small frequency shift, which corresponds to a small value of $\cos \Delta\varphi$, and the difference between $\sin^2 \Delta\varphi$ and unity can be neglected. We get that

$$\rho_z^2 = \rho_\theta \frac{2\mu_3}{\mu_4\omega_3} \sin \Delta\varphi. \quad (4.21)$$

We substitute this expression into equation (4.18), while considering $\sin^2 \Delta\varphi \approx 1$.

Making small transformations and introducing the notation $v'_2 = 4w\mu_3/(\mu_2\mu_4\omega_3)$, we obtain that the system of equations (4.17, 4.18) coincides with the system of equations for translational and rotational oscillations of the body without taking into account the transverse oscillations of the spring suspension, in which the speed v_2 is replaced by to a lower speed v'_2 :

$$\dot{\rho}_Y = \frac{\mu_1 v}{2 w} \rho_Y \left[1 - \frac{v_1}{v} - b_1 (\rho_Y^2 + 2\rho_\theta^2) \right], \quad (4.22)$$

$$\dot{\rho}_\theta = \frac{\mu_2 v}{2 w} \rho_\theta \left[1 - \frac{v_2'}{v} - \frac{\delta}{4} (\rho_\theta^2 + 2\rho_Y^2) \right], \quad (4.23)$$

Thus, the proximity of the natural frequency of the string, which is part of the suspension, to half the natural frequency of the rotational oscillations of the structure leads to a decrease in the critical speed at which the transition from translational oscillations of the body to rotational occurs.

Chapter 4 conclusions

A mathematical model is proposed that describes the translational and rotational oscillations of a bluff body in a gas flow. The well-known quasi-stationary model was taken as the basis for the model of translational galloping, and the model of oscillations of a small elongation cylinder was taken as the basis for modeling rotational oscillations, which, as it turned out, is suitable for describing rotational oscillations of thick plates and segments of bridges equipped with end plates. When modeling, it is taken into account that the instantaneous angle of attack is the sum of the inclination of the body and the angle, the tangent of which is equal to the ratio of the vertical velocity of the body to the horizontal velocity of the body relative to the medium. When the dependence of the normal force coefficient is approximated by a third-order polynomial, the body motion equations are reduced to differential equations coinciding with the Lotka–Volterra equations originally obtained to describe the competition of two animal species eating the same food. The predictions of the model were confirmed in a wind tunnel experiment. The model correctly describes the change in oscillation modes, including the hysteresis associated with an increase and subsequent decrease in the air flow velocity. The model parameters were determined in separate experiments.

It is found that the natural frequency of the string, which is part of the aerodynamic suspension, when approaching half the natural frequency of the rotational oscillations of the structure, will lead to a decrease in the critical speed at which the transition from translational oscillations of the body to rotational occurs.

CONCLUSION

Based on the research, the following results were obtained:

The results of a study of end plates on bottom pressure and an increase in the recirculation zone of rectangular plates oriented perpendicular to the oncoming flow velocity vector depending on the adjustment are obtained.

The results of the study of end plates on the sensitivity of plates sensitive to thick plates on the Strouhal number are obtained. It turned out that to describe the pathological oscillations of the plate, including or equal to the fivefold mathematical model proposed earlier to describe the pathological oscillations of a large-caliber cylinder.

A mathematical model is proposed that describes the sampling and competition between two oscillation modes, translational and rotational. The model has been tested in experiments on segments of a bridge limited by end plates. The influence of the string, which is part of the suspension, on the critical rate of change of translational oscillations to rotational oscillations is excluded.

When approximating the dependence of the normal force coefficient by a polynomial of the average order of the equation of motion of the body with a dependence to differentiated equations coinciding with the Lotka-Volterra equations estimated to describe two animal species eating a common food.

Reliability of the obtained results of comparison of the results of the mathematical model and data on profits and losses. Due to the wide prevalence of objects of high morbidity in low-income conditions, the results obtained can be used in the analysis of the behavior of poorly streamlined structures, for example, segments of bridges.

REFERENCES

1. Birbraer A. N. Extreme impacts on structures / A. N. Birbraer, A. Y. Roleder. // SPb. Polytechnic University Press, 2009. 594p. (In Russian)
2. Bogoliubov N. N., Mitropolsky Y. A. Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations // 4th edition Nauka, M. 1974. (In Russian)
3. Burtsev B. N., Vozhdaev E. S., Golovkin M. A., Golovkina E. V., Gorban V. P. Influence on the aerodynamics of the wing and the main rotor of the installation of small end wings // uch. zap. TsAGI. 2005. Vol.36. № 3-4. pp.51-58. (In Russian)
4. Galemin E.K., Ageeva E.V. Method for accounting the effect of end plates on the flow around the wing with spanwise profiles. // Proceedings of the Southwest State University. 2020. 24, №2. pp. 49-59 (In Russian)
5. Gostev Y. A, Obukhovskiy A. D., Saenko S. D. Influence of shape on the aerodynamic characteristics of girder bridges // The Engineering and construction magazine. 2014. №5. pp. 63-72 (In Russian)
6. Gueresh D., Popov S. A. Improving the aerodynamics of a passenger aircraft wing with a triangular wingtip // Nauchnyi Vestnik MGTU GA. 2018. Vol. 21. № 1. pp. 124-136. (In Russian)
7. Den Hartog J. P. Mechanical Vibrations. // Moscow. State publishing house of physical and mathematical literature. 1960. (In Russian)
8. Zanin B. Yu., Kozlov V. V., Proskryanov V. G. Structure of Turbulent Separation on a Straight Wing under Different Flow Conditions // uch. zap. TsAGI. Vol. 30 (1-2). 1999 pp. 77-83
9. Zverkov I. D., Zanin B. Yu. Influence of end plates on the topology of the stall flow on a straight wing // Aeromekh. and gaz. dinamika. 2000. №3. pp. 68-72.
10. Zverkov I. D., Zanin B. Yu. Wing Surface Form Effect on Flow Separation // Teplofiz. Aeromekh 10 (2). 2003. pp. 205-213

11. Kovalev M. A. On calculation and investigation of wind tunnel // Uchenye zapiski Leningradskogo universiteta 7, pp. 61-86 (1939)
12. Kryukov A. V., Zverkov I. D. The method of wing performance hysteresis reduction at low Reynolds number // 15th International conference on the methods of aerophysical research (ICMAR'2010). Novosibirsk, 2010, pp. 263 -264.
13. Kuritzkes Ya. M. Vortex theory of a wing with end washers symmetrical in height // M.: Pub. VVA n.a. N.E. Zhukovsky, 1948.
14. Kuritzkes Ya. M. The theory of wings with end plates under the hypothesis of U-shaped vortices // M.: Pub. VVA n.a. N.E. Zhukovsky, 1947.
15. Lusin V. D. Modeling galloping of bodies having two modes of flow around at rest // International Conference «8th Okunevskiye chteniya». Saint-Peterburg. Balt. state. un. 2013. pp. 213-214.
16. Lusin V. D. Application of the Quasistatic Approximation to Investigate the Galloping of Poorly Streamlined Bodies // 6th Polyahovskie chteniya. Saint-Peterburg. 2012. pub. I. V. Balabanov, 2012. pp. 155.
17. Lusin V. D., Ryabinin A. N. On the galloping of prisms in a gas or liquid flow // Proceedings of the Central Research Institute named after academician A. N. Krylov SPb 2010. №53(337) pp. 79-84.
18. Lusin V. D., Ryabinin A. N. Application of the Quasistatic Approximation for Solving Problems of Aeroelastic Galloping of Prisms of Different Elongation // International Conference «8th Okunevskiye chteniya». Saint-Peterburg. 2011. pp. 100-101.
19. Lusin V. D., Ryabinin A. N. Investigation of the effect of prism elongation on its aerodynamic characteristics and oscillation amplitude during galloping // Vestnik SPbSU. ser.1. 2011. №2. pp. 139-145.
20. Moskalenko V.O., Kosyrev A. A. Investigation of the influence of the sweep of bearing surfaces and wingtips on the aerodynamic characteristics of a promising unmanned aerial vehicle // Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii. 2019. № 7. pp. 1-12.

21. Moskalenko V. O., Tsoi A. I., Nedogarok A. A. Study of the aerodynamic characteristics of a wing with tips of various shapes // *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii*. 2019. № 10. pp. 1
22. Neiland V. Ya., Stolyarov G. I., Tabachnikov V. G. Effect of the Relative Thickness of a Rectangular Low-Aspect-Ratio Wing and the Reynolds Number on Flow Restructuring Regimes // *Uch. Zap. TsAGI*. 1985. Vol. 16, № 3. pp. 1-10.
23. Ovchinnikov I. I., Ovchinnikov I. G., Filippova V. O. Dancing bridge in Volgograd: reasons, analogies, measures // *Naukovedenie*. 2015. Vol. 7, № 6 (31) pp. 1-23.
24. Ovchinnikov I. G. Application of innovative solutions in the practice of designing the construction and operation of bridge structures in the Volga region // *Nauka: 21 vek. Saratov*. 2011. №1 (13). pp. 36-43.
25. Pavlenko O. V., Razdobarin A. M., Fedorenko G. A. Effect of wingtip shape on flow over wing // in *Ucheny'e zapiski TsAGI*. 2018. Vol.49. № 3. pp. 26-35.
26. Panaryina E. S., Ryabinin A. N. Galloping Pentagonal Prism // *Aerodinamika. Digest of articles*. Spb.: pub. VVM. 2013. pp. 11-17.
27. Pastukhov A. I., Galemin E. K. On the calculation of the aerohydrodynamic characteristics of wings with end plates in an incompressible flow // *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya: Mashinostroenie*. 2004. № 1. pp. 20-31.
28. Pshenichnikov S. K. On the causes of fluctuations in the span structure of the channel bridge across the Volga River // *vestnik mostostroeniya*. 2011, №1, special issue. pp. 37-38.
29. Ryabinin A. N. Multiplicity of subsonic flow regimes around several parallelepipeds // *Vestnik Leningradskogo un. ser 1*. 1988. Vol. 3. pp. 110-111.

30. Ryabinin A. N. Some problems of aerodynamics of bluff bodies. SPb. 1997. 144 p.
31. Ryabinin A. N. Some experimental studies of subsonic flows // *Gidraeromekhanika* / ed. V. G. Dulov. 1999. pp. 216-225
32. Ryabinin A. N, Shmigirilov R. V Influence of end plates on aerodynamic characteristics of bluff bodies // *Abstracts of the International Scientific Conference on Mechanics «VIII Polyahovskie chteniya»*, 2018. Saint-Petersburg, p. 150.
33. Ryabinin A. N, Shmigirilov R. V Influence of end plates on plate oscillations in air flow // *XXV All-Russian Seminar with International Participation on Jet, Separated and Unsteady Flows*. Saint-Petersburg. Baltic State Technical University "VOENMEKH", pp. 200-201.
34. Ryabinin A. N, Shmigirilov R. V Influence of transverse oscillations of the suspension on oscillations of a bluff body under the action of wind // *Twenty-second International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems (CMMASS'2021)*, 4–13 September 2021, Alushta. M.: Moscow Aviation Institute, pp. 447-449. 2021.
35. Ryabinin A. N., Kiselev N. A. The influence of the position of the axis of rotation of the cylinder on its rotational oscillations in the air flow // *Vestnik Sankt-P. un. ser. 1, 3 (2)*, 315 (2016). DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.216
36. Ryabinin A.N., Shmigirilov R.V. Competition between Bluff Body Vibration Modes in an Air Flow // *Technical Physics 2021*. Vol. 66(6), pp. 787–792.
37. E. Simiu, R. Scanlan. *Wind effect on structures: An introduction to wind engineering* // John Wiley & Sons, NY. 1978
38. Thompson J. M. T. *Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering* // Moscow. Mir. 1985.

39. Shmigirilov R. V., Ryabinin A. N. Influence of end plates on the cross flow around a rectangular plate of small elongation // *Natural and mathematical sciences in the modern world*. 2015. Vol. 5 (29), pp. 158-162.
40. Shmigirilov R. V., Ryabinin A. N. Physical and mathematical simulation of bridge segment oscillations // *IX Polyahovskie chteniya: Proceedings of the international scientific conference on mechanics*, 9–12 March 2021 г., Saint-Petersburg.: pub. «VVM», pp. 397-399. 2021.
41. Shmigirilov R. V., Ryabinin A. N. Influence of end plates on rotational oscillations of thick plates in an air flow // *XIII International Conference on Applied Mathematics and Mechanics in the Aerospace Industry (AMMAI'2020) Alushta*. 2020. Moscow. Moscow Aviation Institute. pp. 50-52.
42. Alonso G., Meseguer J. A parametric study of the galloping stability of two-dimensional triangular cross-section bodies // *J. Wind Engineering Industrial Aerodynamics*. 2006. Vol. 94. P. 241–253.
43. Alonso G., Meseguer J., Perez-Grande I. Galloping instabilities of twodimensional triangular cross-section bodies // *Experiments in Fluids*. 2005 Vol. 38. P. 789–795.
44. Alonso G., Meseguer J., Perez-Grande I. Galloping stability of triangular cross-sectional bodies: A systematic approach // *J. Wind Engineering Industrial Aerodynamics*. 2007. Vol. 95. P. 928–940.
45. Alonso G., Meseguer J., Sanz-Andres A., Valero E. On the galloping instability of two-dimensional bodies having elliptical cross sections // *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2010. Vol. 98. P. 438-448.
46. Alonso G., Sanz-Lobera A., Meseguer. J. Hysteresis phenomena in transverse galloping of triangular cross-section bodies // *J. Fluids Struct.* 2012. Vol. 33. P. 243-251.

47. Alonso G., Valero E., Meseguer J., An analysis on the dependence on cross section geometry of galloping stability of two-dimensional bodies having either biconvex or rhomboidal cross sections // *European J. Mech. B/ Fluids*. 2009. Vol. 28. P. 328 - 334.
48. Barrero-Gil A., Sanz-Andres A., Roura M. Transverse galloping at low Reynolds numbers // *J. Fluid and Structures*. 2009. Vol. 25. P. 1236-1242.
49. Bearman P. W., Gratshore I. S., Maull D. J., Parkinson G. V. Experiments on flow induced vibration of a square-section cylinder // *J. of Fluids and Structures*. 1987. Vol. 1. P. 19-34.
50. Bearman P. W., Luo S. C. Investigation of the aerodynamic instability by forced oscillation // *J. of Fluids and Structures*. 1988. Vol. 2. P. 161-176.
51. Blevins R.D., Iwan W.D. The Galloping Response of a Two-Degree-of-Freedom System // *J. Appl. Mech*. 1974. Vol. 41. P. 1113-1118.
52. Corless R. M., Parkinson G. V. A model of the combined effects of vortex induced oscillation and galloping // *J. of Fluids and Structures*. 1988. Vol. 2. P. 203-220.
53. Den Hartog J.P. Transmission Line Vibration Due to Sleet // *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*. 1932. vol. 51, 1074.
54. Deniz S., Staubli T. Oscillating rectangular and octagonal profiles: interaction of leading and trailing edge vortex formation // *J. of Fluid and Structures*. Vol. 11. P. 3-31.
55. Deniz S., Staubli T. Oscillating rectangular and octagonal profiles: modeling of fluid forces // *J. of Fluid and Structures*. Vol. 12. P. 859-882.
56. Desai Y. M., Shah A.H., Popplewell N. Galloping analysis for two-degree-of-freedom oscillator // *J. Eng. Mech*. 1990. Vol. 116. No. 12. P. 2583-260.
57. Gerich D., Eckelmann H. Influence of end plates and free ends on the shedding frequency of circular cylinders // *Journal of Fluid Mechanics*, 1982. Vol. 122. P. 109-121.

58. Gerrard J. H. A disturbance-sensitive Reynolds number range of the flow past a circular cylinder // *J. Fluid Mech.* Vol. 22. Issue 1. 1965. P. 187 – 196
59. Glauert H. The rotation of an aerofoil about a fixed axis // *Advisory Committee on Aeronautics. Reports and Memoranda.* No. 595. 1919. P. 443-447.
60. Hansen K. L., Kelso R. M., Dally B. B. Performance Variations of Leading-Edge Tubercles for Distinct Airfoil Profiles // *AIAA J.* 2011. Vol.46. No. 1. P. 185–194
61. Kubo Yo., Kato K. The role of end plates in two dimensional wind tunnel tests // *Structural Eng./Earthquake Eng.* Japan Society of Civil Engineers. 1986. vol. 3, №1 pp. 167–174.
62. Li Sh., Wan R., Wang D., Guo, P. Effect of end plates on transiting test for measuring the aerodynamic coefficient of structures using wind generated by a moving vehicle // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics.* 2019. Vol. 190 pp. 273–286.
63. Luo S. C., Bearman, P. W. Predictions of fluctuating lift on a transversely oscillating square section cylinder // *J. of Fluids and Structures.* 1990. Vol. 4. P. 219-228.
64. Luo S. C., Chew Y. T., Lee T. S., Yazdani M. G. Stability to translation galloping vibration of cylinders at different mean angle of attack // *J. of Sound and Vibration.* 1998. Vol. 215. P. 1183-1194.
65. Luo S. C., Chew Y. T., Ng Y. T. Hysteresis phenomenon in the galloping oscillation of a square cylinder // *J. of Fluid and Structures.* 2003. Vol. 18. P. 103-118.
66. Ma W., Wang G., Zheng Xi. Effects of end condition on aerodynamic force distribution on a skewed circular cylinder // *Journal of Experiments in Fluid Mechanics,* 2019, 33(2), P. 43-50
67. Maskell, E. C. A theory of the blockage effects on bluff bodies and stalled wings in a closed wind tunnel // *H.M. Stationery Office,* 1965

68. Murray J.D. *Mathematical Biology I. An Introduction* // Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg. 2002.
69. Nakamura Y., Tomonari Y. Galloping of rectangular prisms in a smooth and a turbulent flow // *J of Sound and Vibration*. 1977. Vol. 52. P. 233-241.
70. Novak M. Aeroelastic galloping of prismatic bodies // *J. Engineering Mech. Division ASCE*. 1969. Vol. 95. P. 115-142.
71. Novak M. Galloping and vortex induced oscillation of structures // *Proc. 3rd Int. Conf. on Wind Effects on Buildings and Structures*. Tokyo. Science Council of Japan, 1971.
72. Novak M. Galloping oscillations of prismatic structures // *J. of the Engineering Mechanics Divisions ASCE*. 1972. Vol. 98. P. 27-46.
73. Novak M., Tanaka H. Effect of turbulence on galloping instability // *J. Engineering Mech. Division ASCE*. 1974. Vol. 100. P. 27-47.
74. Parkinson G. V., Wawzonak M. A. Some consideration of combined effects of galloping and vortex resonance // *J. of Wind and Industrial Aerodynamics*. 1981. Vol. 8 P. 135-143.
75. Parkinson G.V., Brooks N.P.H. On the Aeroelastic Instability of Bluff Cylinders // *J. Appl. Mech.* 1961. 28, pp. 252-258.
76. Parkinson G.V., Smith J.D. The square prism as an aeroelastic non-linear oscillator // *Quart. J. Mech Appl. Math.*, 17, pp. 225-239 (1964).
77. Pelletier A., Mueller T. J. Effect of endplates on two-dimensional airfoil testing at low Reynolds Number // *Journal of Aircraft*. 2001. vol. 38, №6 pp. 1056–1059
78. Peters H., “Druckmessung,” *Handbuch der Experimentalphysik* (W. Wien and F. Harms, Leipzig, 1931). Vol. 4. Part 1. P. 489–510.
79. Reddy K.S.V., Sharma D.M., Poddar K. Effect of End Plates on the Surface Pressure Distribution of a Given Cambered Airfoil: Experimental Study // *New Trends in Fluid Mechanics Research* (2009) P. 286-286.

80. Rowland D.R. Parametric resonance and nonlinear string oscillations // American J. Phys. 2004. V. 72. P. 758. doi:10.1119/1.1645281
81. Ryabinin A., Bogomolov R. Rotational oscillation study of the cylinders with end plates in airflow // AIP Conference Proceedings. 2018. vol. 1959, 050027.
82. Ryabinin A.N., Lyusin V.D. Galloping of small aspect ratio square cylinder // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, 2015. Vol. 10, №1. P. 134-138.
83. Ryabinin, A., Kiselev, N. Rotational oscillation of a cylinder in air flow // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2018. vol. 12, no. 23 pp. 6803–6808.
84. Scanlan R. H. The action of flexible bridges under wind, I: Flutter theory // J. Sound Vibr. 1978. Vol. 60. P. 187-199.
85. Scanlan R. H. The action of flexible bridges under wind, II: Buffeting theory // J. Sound Vibr. 1978. Vol. 60. P. 201-211.
86. Shmigirilov R. V., Ryabinin A. N. Effect of aspect ratio and end plates on rotational oscillations of thick plates in air flow // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 927, 5 p. No. 012049
87. Shmigirilov R. V., Ryabinin A. N. Physical and mathematical simulation of bridge segment oscillations // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1959, 1, No. 012044. 2021. Doi: 10.1088/1742-6596/1959/1/012044
88. Shmigirilov R. V., Ryabinin, A. N. Physical simulation of rotational and translational oscillations of a bridge // International Conference on the Methods of Aerophysical Research, ICMAR 2020. Fomin V. M., Shplyuk A. (ed.). American Institute of Physics, No. 030068. (AIP Conference Proceedings; vol. 2351). 2021. Doi: 10.1063/5.0051710
89. Shmigirilov R., Ryabinin A. Influence of end plates on aerodynamic characteristics of bluff bodies // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959, No. 050030.

90. Shmigirilov R., Ryabinin A. Influence of End Plates on Rotational Oscillations of a Rectangular Cylinder // Conference Topical Problems of Fluid Mechanics. Proceedings, ed. by D. Šimurda and T. Bodnár (Institute of Thermomechanics, Prague, 2020). P. 200. DOI: 10.14311/TPFM.2020.026
91. Simiu E., Scanlan R. Wind effects on structures: Fundamentals and applications to design // John Wiley, 1996. 704 p.
92. Soltani M.R., Masdari M., Tirandaz M.R. Effect of an end plate on surface pressure distributions of two swept wings // Chinese Journal of Aeronautics, 30, 2017, P. 1631-1643.
93. Stäger R., Eckelmann H. The effect of endplates on the shedding frequency of circular cylinders in the irregular range // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics 1991. Vol. 3. P. 2116-2121. <https://doi.org/10.1063/1.857894>
94. Stansby P. K. The effects of end plates on the base pressure coefficient of a circular cylinder // The Aeronautical Journal, Volume 78 , Issue 757, January 1974, P. 36 – 37.
95. Wang C., Wen Q., Zhou S., Hua X., Huang Z., Chen Z. Effects of end condition and aspect ratio on vortex-induced vibration of a 5:1 rectangular cylinder // Journal of Fluids and Structures, 2022. Vol. 109. No. 103480
96. Wang Zh., Dragomirescu E. Flutter Derivatives Identification and Aerodynamic Performance of an Optimized Multibox Bridge Deck // Advances in Civil Engineering. 2016. vol. 2016, 8530154 P. 1–13.
97. Whitcomb R.T. A design approach and selected wind-tunnel results at high subsonic speeds for wing-tip mounted winglets // Hampton, Va, NASA Langley Research Center, 1976, 32 p.
98. Zhang M., Xu F., Han Y. J. Assessment of wind-induced nonlinear post-critical performance of bridge decks // Wind Eng. Ind. Aerod. 2020. Vol. 203, No. 104251. P. 1-10.

99. Zharkova G. M., Zanin B. Y., Kovrizhina V. N., Brylyakov A. P. Free stream turbulence effect on the flow structure over the finite span straight wing // *Journal of visualization*. 2002. Vol. 5. №2. P. 169-176
100. Zheng Y., Liu Q., Ma W. Effects of end plates on aerodynamic force of rectangular prisms in wind tunnel test // *Journal of Experiments in Fluid Mechanics*. 2017. Vol. 31(3). P. 38-45.