

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Manuscript Copy

Sherih Ahmed Abdelhameed Mohamed Ahmed

**ANALYTICAL AND NUMERICAL STUDY OF CHAOTIC  
DYNAMICS IN INTEGER-ORDER AND FRACTIONAL-ORDER  
SYSTEMS**

Scientific specialization 1.2.2.

Mathematical modeling, numerical methods and software complexes

Dissertation is submitted for the degree of candidate of  
physical and mathematical sciences

Scientific supervisors:

Dr. of Phys. and Math. Sci., Professor  
N.V. Kuznetsov

Dr. of Phys. and Math. Sci., Professor  
T.N. Mokaev

Saint-Petersburg  
2022

## Contents

<b>Acknowledgment</b> . . . . .	5
<b>Introduction</b> . . . . .	6
<b>Chapter 1. Dynamical systems: basic concepts and numerical methods</b> . . . . .	12
1.1 Definition of dynamical systems . . . . .	12
1.2 Integer-order systems . . . . .	14
1.2.1 Dynamical systems in the integer-order case . . . . .	14
1.2.2 Stability criteria of integer-order systems . . . . .	15
1.2.3 Numerical methods for solving integer-order differential equations . . . . .	15
1.3 Fractional-order systems . . . . .	16
1.3.1 Dynamical systems in the fractional-order case . . . . .	20
1.3.2 Stability criteria of fractional-order systems . . . . .	20
1.3.3 Numerical methods for solving fractional-order differential equations . . . . .	21
<b>Chapter 2. Localization of chaotic and hyperchaotic attractors in integer-order and fractional-order systems</b> . . . . .	23
2.1 Analytical and numerical study of chaotic dynamics in complex Lorenz system . . . . .	23
2.1.1 Preliminary results . . . . .	23
2.1.2 The complex Lorenz system . . . . .	27
2.1.3 Inner estimation for the stability boundary: the global stability and trivial attractors . . . . .	29
2.1.4 Outer estimation for the stability boundary: the absence of trivial attractors . . . . .	38
2.1.5 The boundary of practical stability and absence of nontrivial attractors . . . . .	38
2.1.6 Hidden attractor or hidden transient set? . . . . .	39
2.1.7 Discussion . . . . .	41
2.2 Analytical and numerical study of chaotic dynamics in fractional-order complex Sprott system . . . . .	41
2.2.1 Preliminary results . . . . .	42
2.2.2 The fractional-order complex hyperchaotic Sprott system . . . . .	43
2.2.3 Dynamics of system . . . . .	44
2.2.4 Discussion . . . . .	49
2.3 Analytical and numerical study of chaotic dynamics in complex Rabinovich system . . . . .	49
2.3.1 Preliminary results . . . . .	49
2.3.2 The complex Rabinovich system . . . . .	49
2.3.3 Dynamics of system . . . . .	50
2.3.4 Discussion . . . . .	51

<b>Chapter 3. Synchronization of complex hyperchaotic systems with integer and fractional orders and applications</b> . . . . .	<b>53</b>
3.1 Complete synchronization for fractional-order complex hyperchaotic systems using active control technique . . . . .	53
3.1.1 Preliminary results . . . . .	53
3.1.2 Complete synchronization method of fractional-order hyperchaotic complex Sprott systems . . . . .	54
3.1.3 Application to secure communications . . . . .	56
3.1.4 Discussion . . . . .	61
3.2 Lag synchronization for complex hyperchaotic systems . . . . .	61
3.2.1 Preliminary results . . . . .	61
3.2.2 New lag synchronization method of hyperchaotic complex systems . . . . .	62
3.2.3 Lag synchronization of two identical hyperchaotic complex Lorenz systems . . . . .	63
3.2.4 Application to secure communications . . . . .	65
3.2.5 Discussion . . . . .	69
3.3 Adaptive synchronization for a general class of complex hyperchaotic systems with unknown parameters . . . . .	69
3.3.1 Preliminary results . . . . .	69
3.3.2 New adaptive synchronization method for a general class of hyperchaotic complex models with unknown parameters . . . . .	71
3.3.3 Adaptive synchronization for a pair of identical hyperchaotic complex Rabinovich systems with unknown parameters . . . . .	73
3.3.4 Application to secure communications . . . . .	75
3.3.5 Discussion . . . . .	84
3.4 Comparison of performance of synchronization schemes on the example of Chua circuit . . . . .	86
3.4.1 Complete and lag synchronizations for a pair of identical Chua circuits . . . . .	87
3.4.2 Adaptive synchronization for a pair of identical Chua circuits with unknown parameters . . . . .	88
3.4.3 Comparison of synchronization schemes in application to secure communication . . . . .	91
3.4.4 Discussion . . . . .	91
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>97</b>
<b>Bibliography</b> . . . . .	<b>98</b>
<b>List of Figures</b> . . . . .	<b>114</b>
<b>List of tables</b> . . . . .	<b>119</b>

<b>Appendix A</b>	<b>Numerical studies to localize hidden attractors and transient chaotic sets in the complex Lorenz system</b>	<b>120</b>
A.1	Localization via numerical continuation method	120
A.2	Localization using perpetual points	123
A.3	Numerical verification of basins of attraction near the zero equilibrium point	125
A.4	Numerical verification of basins of attraction around the set of equilibria $S_\theta$	127
A.5	The attractiveness of the transient sets	129
<b>Appendix B</b>	<b>MATLAB procedure implementation for visualization of hidden transient chaotic sets in complex Lorenz system and its projective system</b>	<b>131</b>
<b>Appendix C</b>	<b>MATLAB procedure implementation for computing Lyapunov exponents of fractional-order Sprott system, synchronization of the hidden hyperchaotic attractors in fractional-order complex Sprott systems</b>	<b>137</b>
<b>Appendix D</b>	<b>MATLAB procedure implementation for adaptive synchronization of the hyperchaotic complex Rabinovich systems with unknown parameters</b>	<b>149</b>

## Acknowledgment

I would like to express my deep thanks to my supervisors, Prof. Nikolay V. Kuznetsov and Prof. Timur N. Mokaev, for their valuable and constructive suggestions during the planning and development of this research work. Their willingness to give their time so generously has been very much appreciated, sharing me with their knowledge and critical reviewing of my work.

I also would like to express sincere gratitude to my former supervisors, Prof. Mamdouh M. Hassan, at the Department of Mathematics Minia University, Prof. Gamal M. Mahmoud, and Prof. Ahmed A. Farghaly, at the Department of Mathematics, Assiut University, for introducing me to the problems of analysis and synchronization of complex-valued and fractional-order systems. Understanding deep connections of these problems with the theory of hidden oscillations and modern methods of studying chaotic dynamics, I received the approval of my colleagues to continue my research in this direction at Saint Petersburg State University at the Department of Applied Cybernetics. This research would not have been possible without the support and a grant [EGY-6353/17] from both the General Administration of Missions Ministry of Higher Education of Egypt and the Russian government. I very much appreciate the opportunity to work at Applied Cybernetics Department at Saint Petersburg State University and am thankful to all its staff members for their kind hospitality and dealing.

I would like to express my sincere gratitude to all staff members at the Department of Mathematics, Al-Azhar University, Assiut, for their kind support.

Last but not least, all thanks, appreciation, and gratitude to my parents, brothers, wife, and daughters for their love and continuous support.

## Introduction

### Relevance of the topic

The necessity of analytical and numerical studying chaotic dynamical regimes (attractors) has emerged within the classical theoretical and applied problems. One of the first such problems were related to the investigation of turbulence phenomena and consideration of different models, including the Navier-Stokes equations and their finite-element approximations as well as the discovery of strange attractors and further invention of the chaos theory [1–4]. Let us recall the significant results by D. Ruelle, F. Takens [3], and S. Smale [4], who proposed a chaotic attractor as a mathematical prototype describing the onset of turbulence, and by O. Ladyzhenskaya, who studied the case when the two-dimensional Navier-Stokes equation generates a dynamical system and proved the finite dimensionality of its attractor [5]. A change in the study of the onset of turbulence was the finding of strange attractor, i.e., a chaotic attractive set in the phase space of a dynamical system, which consists of unstable trajectories with complex behavior [3; 4]. From this perspective, a strange attractor is a mathematical prototype of stochastic oscillations and turbulence in the system. Subsequently, interest in studying the qualitative behavior of solutions shifted from hydrodynamic models to nonlinear oscillatory systems and perturbed systems. Such systems often arise as mathematical models of processes occurring in real physical, chemical, biological, etc., phenomena [6–8]. An essential class of such observable systems is formed by dissipative systems. Their main characteristic is the presence of energy reallocation and dissipation mechanisms. It turned out that the presence of these two mechanisms can lead to the emergence of complex limiting regimes and structures in the system [9]. The "golden age" of chaos theory is associated with the discovery of a strange attractor by the American scientist Edward Lorenz [10]. Lorenz derived a crude three-dimensional mathematical model for Rayleigh-Bénard convective flow using the Galerkin method. The Lorenz model [10] was the first vivid example of a chaotic attractor in a hydrodynamic system, which contains bounded unstable solutions within a closed region (absorbing set). The discovery of Lorenz sparked a significant interest in this area that was followed by a number of works studying other dynamical systems with similar complex behavior (e.g., by Rössler [11], Chen [12], Chua [13] and Lü [14]).

The Lorenz convection model has a chaotic attractor, and for certain values of the parameters, this attractor can be numerically localized by a trajectory that starts from an unstable eigenspace in the vicinity of an unstable equilibrium [10; 15]. After the transient process, such a trajectory reaches the attractor and identifies it. In the general case, for the numerical localization of an attractor, it is necessary to investigate its basin of attraction (a set of all points attracted to a given attractor) and choose a starting point from this set. Obviously, if for a particular attractor its basin of attraction intersects with an unstable manifold of an unstable equilibrium, then the process of localization is rather simple; otherwise, the procedure can be quite non-trivial. In accordance with the described difficulties in the localization procedure, the following classification of attractors was proposed [16–20]: an attractor is called a hidden one if its basin of attraction

is not connected with a small open neighborhood of an equilibrium state; otherwise, an attractor is called self-excited. For example, hidden attractors are periodic or chaotic attractors in systems without equilibria, or with a single stable equilibrium, or in the case of coexistence of attractors in multistable systems. In general, these types of attractors are difficult to detect due to the uncertainty in the choice of initial data from its basin of attraction. Thus, the localization of hidden attractors can be a complex task that requires the development of special analytical and numerical methods [18].

One of the first fundamental problems in which the problem of studying hidden attractors appears is the second part of Hilbert's 16th problem (1900) on the existence of limit cycles in two-dimensional polynomial systems [21] (see, e.g., [22–24]), where inner nested limit cycles were considered as examples of hidden attractors). Within the framework of solving this problem, Bautin (see, for example, [25]) obtained the first qualitative results related to the theoretical construction of three nested limit cycles around one equilibrium state. However, it turned out that only nested limit cycles of small amplitude can be constructed using Bautin's approach. Later, an analytical method was developed for efficient visualization of nested limit cycles of normal amplitude [18; 24; 26]. The problem of hidden attractors also arises in engineering applications, for example, when studying the well-known conjectures of Markus-Yamabe [27], Aizerman [28], and Kalman [29] about the absolute stability of automatic control systems, where the only stable equilibrium can coexist with a stable periodic trajectory (see [30–35]). In [36], related discrete examples were considered in the problem of modeling phase-locked loop systems [37; 38]. In recent decades, the real problem of numerical analysis of hidden oscillations has arisen in models of aircraft control systems [39–41], as well as in the simulation of drilling rigs [42; 43]. The presence of such oscillations in systems subject to external perturbation determines, in addition to the expected stable solution corresponding to the desired behavior of the system, other stable and unstable solutions corresponding to undesirable and unsafe behavior, which can often lead to the damage of systems [44]. To be noted, the discovery in 2010 of a hidden chaotic attractor in the Chua electronic circuit aroused great interest and prompted many researchers to study this problem in other systems and laid the foundations for the theory of hidden oscillations [45; 46]. Also, hidden attractors are visualized in other physical problems and applied models, for example, in the Rabinovich system [47–49], which describes the interaction of waves in plasma, the Glukhovskiy-Dolgansky system [44; 48], which describes the convective motion of a heated rotating fluid, and also in a simplified dynamo system, which can be considered as the simplest model of self-excitation of a magnetic field by moving conductors [19; 50]. Due to non-trivial localizability in the phase space, hidden oscillations and attractors have recently been used as effective tools in secure communication and encryption technologies; it turned out that the presence of a hidden attractor in a scheme can lead to an increase in the security of a cryptosystem and complicate decryption tasks for intruders [51–53].

Along with phenomena modeled by real-valued systems, there are others modeled by systems with complex-valued variables, such as, for example, optical problems of detuned lasers, or problems of baroclinic instability [54; 55]. The localization of hidden attractors in systems with

complex variables, as in the real case, is a difficult task that requires the development of special analytic-numerical methods that should take into account the specifics of dynamics in a complex space. For example, the difficulty may be related to the fact that if a real-valued system has a one-dimensional unstable manifold of a saddle equilibrium, the corresponding complex analogue of this system may have an unstable manifold of higher dimension [56]. Since hidden attractors in complex-valued systems have not yet been sufficiently studied in the literature, in this dissertation, an essential part is devoted to the study of the existence of hidden attractors in such systems and its comparison with the real-valued case.

Also, along with real-valued and complex-valued systems based on the classical definition of the derivative operator, in the past few decades, dynamic models have been actively studied that take into account the so-called "memory effect" in the evolution of variables, which utilize differential operators of fractional order. Fractional calculus, as a special branch of mathematical analysis, dates back to the 17th century and to the works of G.F. l'Hôpital and G.W. Leibniz [57; 58]. In physics, fractional operators are widely used in the mathematical modeling of viscoelastic materials; some electromagnetic problems are described using fractional integration-differentiation operators; fractional derivatives based on diffusion equations can explain anomalous diffusion phenomena in inhomogeneous media (see, e.g., [59–64]). In biology, cell membranes of biological organisms exhibit fractional-order electrical conductivity [65]. It is well known in economics that some financial systems can exhibit fractional dynamics [66]. Other examples of fractional order systems can be found in [67–72].

A qualitative study of the dynamics of systems of fractional order is of great interest to this day. For instance, in [73], the existence of a limit cycle in the fractional-order Wien bridge oscillator was revealed, and the existence of a limit cycle in the fractional Brusselator model was demonstrated in [74]. Furthermore, some fractional-order differential systems have been discovered to exhibit chaotic behavior, such as Duffing's oscillators, Lorenz system, Chua circuit, Lü system, jerk models, Rössler system and Chen system [75–81]. Also, hyperchaotic behaviour can be found in fractional-order systems (see, e.g., [82–84]). Moreover, the existence of hidden attractors in fractional-order systems was obtained as well (see, e.g., [85–88]). However, let us note that at present in the literature hidden attractors are mainly introduced and studied in nonlinear dynamical systems with real variables. The study of hidden attractors in systems of fractional order and systems with complex variables is a relatively new direction, which is under active development.

Synchronization and control of chaotic dynamical systems are important topics in applied science owing to their vast application fields in physical problems, image processing, networks, secure communications, stock markets etc. (see, e.g., [89–92]). Since Pecora and Carroll suggested an efficient method for synchronizing two identical chaotic systems [93], various types of synchronization strategies have been developed to synchronize chaotic systems, including complete synchronization [53; 84; 90; 94–96], lag synchronization [52; 97], cluster synchronization [98], adaptive synchronization [99–102] and many more. Up to date, chaos synchronization has been investigated in depth for systems modeled by real-valued variables. Using complex-valued models



in synchronization regimes rather than real-valued ones, as well as the consequent doubling of the number of variables, may lead to more complicated behavior of the corresponding system, which, in turn, is critical for a variety of applications, including secure communication and cryptosystem design [103]. In this dissertation, as part of the further development of applications of systems with hidden oscillations, we investigate and develop synchronization methods for complex-valued and fractional-order systems and apply these methods to improve secure communication schemes and cryptosystems.

### **Aims of the dissertation**

This dissertation aims to the following:

1. Introduce analytical-numerical methods to estimate the boundaries of global stability for complex-valued systems.
2. Develop an algorithm to localize the existence of hidden attractors and transient chaotic sets in some important complex-valued systems.
3. Visualize the existence of hidden attractors in a fractional-order complex-valued system.
4. Develop new synchronization strategies relying on the Lyapunov stability theory and stability criteria of fractional-order systems to achieve synchronization for hyperchaotic complex-valued systems.
5. Based on these synchronization strategies, suggest new schemes to secure communication and cryptosystems.

### **The scientific novelty of the findings is as follows:**

1. The boundaries of global stability for the complex-valued Lorenz system are estimated and the difficulties of numerically studying the birth of self-excited and hidden attractors caused by the loss of global stability are investigated.
2. Numerical studies of the problem of the existence of sustained hidden chaotic attractors and transient chaotic sets in the complex-valued Lorenz system are presented.
3. An algorithm for visualizing the existence of hidden attractors and transient chaotic sets of a system based on a special transformation that takes into account the symmetry of the phase space is proposed.
4. Hidden hyperchaotic attractors in fractional-order complex-valued Sprott system are revealed.
5. Using the active control technique, a scheme to achieve synchronization for fractional-order complex-valued Sprott systems is designed. A secure communication scheme based on this type of synchronization is developed.
6. A scheme to realize lag synchronization for hyperchaotic complex systems is designed and a secure communication strategy based on this type of synchronization is applied.
7. A new algorithm to achieve adaptive synchronization of a general class for hyperchaotic complex-valued models with unknown parameters is proposed.
8. Improved synchronization procedure for Chua circuits with multistability and hidden attractors is realized.
9. A new scheme for secure communication based on adaptive synchronization is proposed.

**The main provisions for the defense are the following:**

1. Analytical and numerical methods to estimate the boundaries of global stability for complex-valued Lorenz system.
2. Numerical methods to localize hidden attractor and transient chaotic set in complex-valued Lorenz system.
3. Localization of hidden hyperchaotic attractors in fractional-order complex-valued Sprott system.
4. Method to achieve complete synchronization for fractional-order complex-valued Sprott systems.
5. Analytical and numerical methods to realize lag synchronization for complex-valued Lorenz systems.
6. New method to achieve adaptive synchronization for a general class of complex-valued systems with unknown parameters.
7. New mathematical model and its software implementation for secure communication based on the developed adaptive synchronization strategy.

**Personal contribution of the author**

All the major scientific results of this dissertation were achieved by the author personally and are represented in the joint works with the Russian group (Nikolay V. Kuznetsov and Timur N. Mokaev) [52; 53; 56; 84] and the Egyptian group (Gamal M. Mahmoud and Ahmed A.M. Farghaly) [72; 102].

**Approbation**

The results of this dissertation were presented in the following International and Russian conferences:

1. 2020 16th International Computer Engineering Conference (ICENCO) Faculty of Engineering, Cairo University Giza, Egypt December 29-30, 2020, <http://icenco2020.eng.cu.edu.eg/default.aspx?Page=Home>; "Lag synchronization for complex-valued Rabinovich system with application to encryption techniques".
2. Международная конференция по естественным и гуманитарным наукам – «Science SPbU – 2020», 25 December 2020, <https://events.spbu.ru/events/science-spbu>; "On synchronization phenomena in hyperchaotic complex-valued dynamical systems".
3. Национальная (Всероссийская) конференция по естественным и гуманитарным наукам с международным участием «Наука СПбГУ – 2020», <https://events.spbu.ru/events/science-2020>; "О проблеме синхронизации гиперхаотических комплексно значных динамических систем".
4. 2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (2021 ElConRus), Moscow and St. Petersburg, Russia, January 26 - 29, 2021 <https://www.miet.ru/page/129504>; "Synchronization of hidden hyperchaotic attractors in fractional-order complex-valued systems with application to secure communications".

5. International Student Conference Science and Progress 2021, SPbU, November 09-11, 2021, <https://events.spbu.ru/events/sp-2021>; "Hidden attractors and transient chaotic sets in the complex Lorenz system".
6. Всероссийская конференция по естественным и гуманитарным наукам с международным участием «Наука СПбГУ – 2021», 28 December 2021, <https://events.spbu.ru/events/nauka-2021>; "New adaptive synchronization algorithm for a general class of hyperchaos complex-valued systems with unknown parameters and its application to secure communication".

### **Author's publications on the dissertation topic**

The results of this dissertation are presented in 6 articles [52; 53; 56; 72; 84; 102] in peer-reviewed journals, 4 of them [52; 53; 72; 102] indexed by the Scopus and Web of Science, and 1 article [56] is submitted:

1. N.V. Kuznetsov, T.N. Mokaev, A.A.-H. Shoreh, A. Prasad, and M.D. Shrimali, Analytical and numerical study of the hidden boundary of practical stability: complex versus real Lorenz systems, submitted to Nonlinear Dynamics, arXiv preprint arXiv:2106.10725, <https://arxiv.org/abs/2106.10725>
2. A.A.-H. Shoreh, N.V. Kuznetsov and T.N. Mokaev, New adaptive synchronization algorithm for a general class of hyperchaos complex-valued systems with unknown parameters and its application to secure communication, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 586 2022. DOI: 10.1016/j.physa.2021.126466
3. A.A.-H. Shoreh, N.V. Kuznetsov, T.N. Mokaev and M.S. Tavazoei, Synchronization of hidden hyperchaotic attractors in fractional-order complex-valued systems with application to secure communications, 2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus), St. Petersburg, Moscow, Russia, 2021, 62-67. DOI: 10.1109/ElConRus51938.2021.9396284
4. A.A.-H. Shoreh, N.V. Kuznetsov and T.N. Mokaev, Lag synchronization for complex-valued Rabinovich system with application to encryption techniques, 2020 16th International Computer Engineering Conference (ICENCO), Cairo, Egypt, 2020, 11-16. DOI: 10.1109/ICENCO49778.2020.9357389
5. Ahmed A. M. Farghaly and A.A.-H. Shoreh, Some complex dynamical behaviors of the new 6D fractional-order hyperchaotic lorenz-like system, Journal of the Egyptian Mathematical Society, 26 2018. DOI: 10.21608/JOMES.2018.9469
6. Gamal M. Mahmoud, Ahmed A.M. Farghaly and A.A.-H. Shoreh, A technique for studying a class of fractional-order nonlinear dynamical systems, International Journal of Bifurcation and Chaos, 27 2017. DOI: 10.1142/S0218127417501449

### **The structure of the dissertation is as follows:**

The dissertation includes an introduction, three chapters, a conclusion, references, a list of figures, a list of tables, and four appendices. The full volume of the thesis is 157 pages with 72 figures and 7 tables. The list of references contains 240 items.

## Chapter 1. Dynamical systems: basic concepts and numerical methods

This chapter introduces some basic mathematical backgrounds of dynamical systems and numerical methods for solving integer-order and fractional-order differential equations. The contents of the current chapter are constructed, following [45; 47; 57; 58; 104–129].

### 1.1 Definition of dynamical systems

Dynamical systems are widely used to describe a wide range of problems, including fluid flow, planetary interactions, chemical processes, biological pattern development, electrical circuits process and financial markets. The primary goal of dynamical systems theory is to make qualitative predictions about the behavior of systems that evolve over time when the system's control parameters and the system's initial state change [104; 105]. An overall visualization of a dynamical system may be obtained by identifying all possible limit sets (steady-state solutions, periodic solutions, quasi-periodic solutions, or chaotic), determining how these limit sets evolve for control parameters in the system [104]. In general, for a physical problem or a mathematical model, dynamical system represents a rule describing time evolution of a state given by a system of differential or difference equations. If the system's state is measured only by integer time values, it defines discrete dynamical systems. If time is measured continuously i.e.,  $t \in \mathbb{R}$ , it defines continuous dynamical systems. Here we only focus on the continuous dynamical systems given by differential equations.

**Definition 1.1.** [105] A smooth dynamical system on  $\mathbb{R}^n$  is a continuously differentiable function  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  where  $\phi(t, x) = \phi_t(x)$  satisfies

1.  $\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  is the identity function:  $\phi_0(x_0) = x_0 \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ .
2. The composition  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \forall t, s \in \mathbb{R}$ .

An important task in both qualitative and quantitative investigation of dynamical systems is the study of limiting behavior of a system after a transient process, i.e., the problem of revealing and analysis of all possible limiting oscillations (attractors) [45]. Next, the definitions of the attractor, chaos in deterministic dynamical systems, and Lyapunov exponents are presented. Further, classification of the behavior of the dynamical system, based on Lyapunov exponents are discussed.

**Definition 1.2.** Attractor [106; 107]:

An attractor could be defined as a closed set  $A$  in the phase space with the following properties:

1.  $A$  is an invariant set, i.e. any trajectory starting in  $A$  stays in  $A$  for all the time.

2.  $A$  attracts an open set of initial conditions, i.e. there is an open set  $U$ ,  $A \subseteq U$  such that if  $x(0) \in U$ , then the distance from  $x(t)$  to  $A$  tends to zero as  $t \rightarrow \infty$ . The largest such  $U$  is called the basin of attraction of  $A$ .
3.  $A$  is minimal, i.e. there is no proper subset of  $A$  that satisfies the above conditions.

In other words, an attractor is a minimal closed invariant set that attracts nearby trajectories lying in the basin of attraction onto it. For example, there are three simple attractors: stable fixed point, stable limit cycle, and stable torus.

**Definition 1.3.** Chaos [106; 107]:

Chaos can be defined as aperiodic long-term behavior in a deterministic system with sensitive dependence on initial conditions. In other words, chaos in dynamical systems is a bounded steady state behavior that is not a fixed point, not periodic, and not quasi-periodic. This means that two trajectories starting from the infinitesimal neighborhood can reach completely different positions after a certain amount of time. For continuous dynamical systems, chaos can only exist in 3 and higher-dimensional spaces. The computation of the Lyapunov exponents can indicate the chaotic behavior of a system. The positiveness of the largest Lyapunov exponent is often used as an indication of chaotic behavior in a considered system.

**Definition 1.4.** Lyapunov exponents [107; 108]:

Lyapunov exponents are quantities that characterize the rate of separation of infinitesimally close trajectories. In other words, Lyapunov exponents measure the sensitivity of a dynamical system to small changes in initial conditions. Thus, they provide a good quantitative test for chaotic behavior in the dynamical system.

Consider the following system of ordinary differential equations (ODEs):

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.1)$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$ . Linearization of system (1.1) along the solution  $\varphi^t(x)$  reads

$$\dot{y} = J(\varphi^t(x))y, \quad J(x) = Df(x), \quad (1.2)$$

where  $J$  is the Jacobian matrix, the elements of which are continuous functions of  $x$ , and  $\det J(x) \neq 0$ .

In [47], Kuznetsov et al. introduced the concept of finite-time Lyapunov exponents, at the point  $x$ , which could be estimated as follows:

$$LE_i = \frac{1}{t} \ln \sigma_i(t, x), \quad t > 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

where  $\sigma_i(t, x) = \sigma_i(D\varphi^t(x))$  is the singular values of  $D\varphi^t(x)$  (i.e.,  $\sigma_i(t, x) > 0$  and  $\sigma_i(t, x)^2$  are the eigenvalues of the symmetric matrix  $D\varphi^t(x)^* D\varphi^t(x)$  with respect to their algebraic multiplicity).<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Symbol \* denotes the transposition of matrix

From a practical point of view, Lyapunov exponents provide a good tool for classifying the behavior of a dynamical system. Table 1 shows this classification according to the signs of Lyapunov exponents [72; 109].

Table 1: The signs of Lyapunov exponents and the corresponding type of solutions.

$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$	$LE_4$	...	Dynamics
-	-	-	-	...	Solutions approach fixed point
0	-	-	-	...	Periodic solution (limit cycles)
0	0	-	-	...	Quasi-periodic solution (2-torus)
+	0	-	-	...	Chaotic
+	+	0	-	...	Hyperchaotic

## 1.2 Integer-order systems

In this section, the definition of a dynamical system of integer-order systems with real or complex variables, stability criteria, and numerical methods for solving integer-order differential equations are presented.

### 1.2.1 Dynamical systems in the integer-order case

Now we present the definition of a dynamical system generated by the solution of the following integer-order system:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (1.3)$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$  (or  $\mathbb{C}^n$ )<sup>2</sup>,  $f$  is a continuous vector-function that satisfies a local Lipschitz condition in  $\mathbb{R}^n$ . The Picard theorem (see, e.g., [112]) implies that for a local Lipschitz condition on the function  $f$  and for any  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , there exists a unique solution  $x(t, x_0)$  to system (1.3) with the initial data  $x(0, x_0) = x_0$ , which is given on a certain finite time interval:  $t \in I \subset \mathbb{R}$ . The theorem regarding the continuous dependence on initial data [112] implies that for a local Lipschitz condition on the function  $f$ , the solution  $x(t, x_0)$  continuously depends on  $x_0$ .

**Proposition 1.1.** For system (1.3), if Picard theorem and continuous dependence on initial data theorem are satisfied, and solution exists on  $[0, +\infty)$  (or,  $(-\infty, +\infty)$ ), then the solution  $x(t, x_0)$  of (1.3) generates a dynamical system.

<sup>2</sup>Note that for convenience of numerical simulation of a complex-valued system, one can use the equivalent real-valued system after deriving the corresponding equation for real and imaginary parts (see, e.g., [55; 110; 111]).

## 1.2.2 Stability criteria of integer-order systems

In general, the stability of a solution is defined by the sensitivity to a perturbation of the initial data. If a small change in the initial data leads to a small change in the solution, the solution is said to be stable. Moreover, if the deviation of the solution caused by a perturbation of initial data dies out as  $t \rightarrow \infty$ , the solution is called asymptotically stable.

**Definition 1.5.** [113] The equilibrium point  $x^*$  of system (1.3) is said to be:

- locally stable iff  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , s.t.  $\|x_0 - x^*\| < \delta \implies \|x(t) - x^*\| < \varepsilon \forall t \geq 0$ .
- locally asymptotically stable iff it is stable and  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0$ .
- unstable if it is not stable.

The stability of the equilibrium points of system (1.3) could be determined by the sign of real parts of the eigenvalues of the Jacobian matrix, which is the effective tool for stability analysis of equilibrium points.

**Theorem 1.1.** [113] Suppose the system (1.3) is a linear system and  $\lambda_i$  be the eigenvalues of the Jacobian matrix evaluated at the equilibrium point  $x^*$ , then the following criteria are hold:

1. if  $\Re(\lambda_i) \leq 0$  for all  $\lambda_i$ , then the equilibrium  $x^*$  is stable (in this case,  $x^*$  is a trivial attractor).
2. if  $\Re(\lambda_i) < 0$  for all  $\lambda_i$ , then the equilibrium  $x^*$  is asymptotically stable.
3. if  $\Re(\lambda_i) > 0$  for at least one  $\lambda_i$ , then the equilibrium  $x^*$  is unstable.

For nonlinear systems, stability is often investigated in the neighborhood of its equilibrium points. According to Hartman-Grobman Theorem [113] there exists a neighborhood of the equilibrium point, in which the nonlinear system  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  is topologically equivalent to the system  $\dot{x}(t) = Jx(t)$ , where  $J$  is the Jacobian matrix at  $x^*$ , i.e.,  $J = Df(x^*)$ .

## 1.2.3 Numerical methods for solving integer-order differential equations

Consider the following initial value problem (IVP) of an autonomous system of ODEs:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & 0 \leq t \leq T \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

where  $f$  is a continuous function,  $x \in \mathbb{R}^n$ . For the numerical integration of system (1.4), we use the fourth order Runge–Kutta method, which is one of the most important numerical methods for solving differential equations. This method can be deduced by using the Taylor expansion, and this method varies according to the orders of the Taylor expansion used to obtain this method.

Fourth-order Runge-Kutta formula with steps size  $h = \frac{T}{N}$  reads [114]

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] + O(h^5), \\
 k_1 &= f(t_n, x_n), \\
 k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1), \\
 k_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_2), \\
 k_4 &= f(t_n + h, x_n + hk_3).
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

**Remark 1.1.** Note that the time series produced by the integration of mathematical dynamical system (1.4) can be reliable on a limited time interval only due to computational errors (caused by finite precision arithmetic and numerical integration of ODE). In [115], for chaotic solution of the Lorenz system the time interval of reliable computation with 16 significant digits and error  $10^{-4}$  is estimated as  $[0, 36]$ , with error  $10^{-8}$  is estimated as  $[0, 26]$ , and reliable computation for a longer time interval, e.g.,  $[0, 10000]$  in [116], is a challenging task.

Recently, many applications described by fractional calculus have been rapidly growing. These mathematical representations allow describing real phenomena more accurately than the classical integer models [67; 117]. The prime reason for using the integer-order models was the lack of effective methods for solving fractional differential equations. From a practical point of view, we need to use fractional-order models to identify and characterize some real phenomena. The first feature is that the fractional-order model has more degrees of freedom. The second feature is that the model has "memory." Integer-order systems have limited memory, while fractional-order systems have unlimited memory [67; 117].

Below the importance of fractional calculus in applied science, basic concepts and numerical methods for solving fractional-order differential equations are presented.

### 1.3 Fractional-order systems

The subject of fractional calculus (calculus of integrals and derivatives of any arbitrary real or complex order) has gained in popularity and relevance over the last three decades, owing to its demonstrated applications in a wide range of seemingly disparate areas of science and engineering. It provides many potentially valuable tools for solving differential and integral equations and a variety of other problems involving mathematical physics special functions and their extensions and generalizations in one or more variables [57]. Compared with the classical integer-order models, fractional-order derivatives provide a powerful tool for describing the properties of some processes [67]. Researchers point out that many phenomena in interdisciplinary fields could be described



by fractional differential equations, such as viscoelastic systems, biological models, quantum mechanics, finance, material science, and fluid mechanics [118–122].

Next, we give a small survey of fractional calculus and conclude with the standard definitions of fractional derivatives.

### Historical survey

The fractional calculus has been proposed more than 300 years. The original question that led to the name fractional calculus was: Can the meaning of a derivative of integer-order  $d^n y/dx^n$  be extended to have meaning when  $n$  is a fraction? Later the question became: Can  $n$  be any number: fractional, irrational, or complex?. Leibniz invented the notation  $d^n y/dx^n$ . Perhaps it was a naive play with symbols that prompted Lôpital in 1695 to ask Leibniz: " what if  $n$  be  $\frac{1}{2}$ ?". In his reply, Leibniz wrote to Lôpital as follows: "... This is an apparent paradox from which, one day, useful consequences will be drawn. ...". Subsequent mention of fractional derivatives was made, in some context by many scientists, for example, Euler in 1730, Lagrange in 1772, Laplace in 1812, Lacroix in 1819, Fourier in 1822, Liouville in 1832, Riemann in 1847, Greer in 1859, Holmgren in 1865, Grünwald in 1867, Letnikov in 1868, Sonin in 1869, Laurent in 1884, Nekrassov in 1888, Krug in 1890, and Weyl in 1917 [57; 58].

Briefly, we state some of the contributions of these scientists.

1. S.F. Lacroix in 1819 developed the  $n$ th derivative of arbitrary order. Starting with the function  $y = x^m$ ,  $m$  is a positive integer as follows:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}, \quad (1.6)$$

using the following property of Gamma function,

$$\Gamma(m+1) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)\Gamma(m-n+1),$$

to obtain

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, \quad m \geq n \quad (1.7)$$

where Gamma function is defined as follows:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0.$$

Lacroix gave an example for  $y = x$  and  $n = \frac{1}{2}$  and obtained

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

It is interesting to note that the result obtained by Lacroix is the same as that yielded by the present-day Riemann-Liouville definition of a fractional derivative.

2. The next definition of derivatives with arbitrary order made by J.B.J. Fourier in 1822. Fourier's definition of fractional derivatives was obtained from his integral representation of a continuous

function as follows:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos p(x-t) dp, \quad (1.8)$$

since

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos p(x-t) = p^n \cos[p(x-t) + \frac{1}{2}n\pi],$$

where  $n$  is an integer. By replacing  $n$  with  $\alpha$  ( $\alpha$  arbitrary), Fourier obtained the generalization

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} p^\alpha \cos[p(x-t) + \frac{1}{2}\alpha\pi]. \quad (1.9)$$

3. In 1832 J. Liouville established the first major study of fractional calculus. Liouville introduced two definitions of fractional derivative. For the first formula Liouville started with derivatives of integral-order of the function  $y = e^{ax}$  as the following:

$$D^n y = a^n e^{ax},$$

for arbitrary order  $\alpha$  leads to

$$D^\alpha y = a^\alpha e^{ax}. \quad (1.10)$$

Liouville assumed that the arbitrary derivative of a function  $f(x)$  which may be expanded in a series of the form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \quad \text{Re } a_n > 0 \quad (1.11)$$

is

$$D^\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\alpha e^{a_n x}. \quad (1.12)$$

Formula (1.12) is known as Liouville's first formula for a fractional derivative.

To obtain his second definition, Liouville started with a definite integral related to the Gamma function:

$$I = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du, \quad a > 0, \quad x > 0. \quad (1.13)$$

The change of variable  $t = xu$  yields

$$I = x^{-a} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = x^{-a} \Gamma(a),$$

or

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} I. \quad (1.14)$$

Operates with  $D^\alpha$  on both sides of the equation (1.14) leads to

$$D^\alpha x^{-a} = \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a+\alpha-1} e^{-xu} du. \quad (1.15)$$

The Liouville's second definition of a fractional derivative could be expressed as follows:

$$D^\alpha x^{-a} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(a + \alpha)}{\Gamma(a)} x^{-a-\alpha}. \quad (1.16)$$

Below we present the common definitions of fractional derivative operators.

### Definitions of fractional derivative

Fractional calculus is a generalization of integration and differentiation to a non integer-order. The integro-differential operator  $D_t^\alpha$  is defined as:

$$D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0; \\ 1, & \alpha = 0; \\ \int_0^t (d\xi)^{-\alpha}, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

There are many definitions of fractional derivative among the most important definitions are Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, and Caputo.

1. Riemann-Liouville definition:

According to the Riemann-Liouville approach to fractional calculus the notion of fractional integral of order  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$  reads

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t > 0. \quad (1.18)$$

Note that  $J^0 = I$  is the Identity operator i.e.,  $J^0 f(t) = f(t)$ ,  $J^\alpha J^\mu = J^{\alpha+\mu}$  and  $J^\alpha t^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} t^{\alpha+\mu}$ .

Thus, the Riemann-Liouville fractional derivative of order  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$  could be given by

$${}^{RL}D_t^\alpha = {}^{RL}D_t^n J^{n-\alpha},$$

namely

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{d^n}{dt^n} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \right], & n-1 < \alpha < n; \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n, \end{cases} \quad (1.19)$$

where  $n$  is the first integer which is not less than  $\alpha$ .

2. Grünwald-Letnikov definition:

The Grünwald-Letnikov of fractional derivative is given by

$${}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh), \quad (1.20)$$

where  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha-k+1)}$  is the usual notation for the binomial coefficients and  $h = \frac{t}{n}$ .

3. Caputo fractional derivative definition:

The Caputo fractional derivative can be written as follows:

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 < \alpha < n; \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n. \end{cases} \quad (1.21)$$

Remark that The Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov and Caputo definitions are equivalent under some conditions for a wide class of functions (e.g., under the Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov and Caputo operators, it is possible to prove  ${}^R L D_t^\alpha t^\nu = {}^G L D_t^\alpha t^\nu = {}^C D_t^\alpha t^\nu = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-\alpha)} t^{\nu-\alpha}$ ) [67].

Note that the Caputo definition in literature is sometimes referred to as a smooth fractional derivative because it retains some key properties of the ordinary (integer-order) derivative operator and considers initial value problems, similar to the integer-order case [67; 123].

Henceforward in this thesis, the Caputo fractional operator  ${}^C D_t^\alpha$  (or simply  $D_t^\alpha$ ) is considered.

### 1.3.1 Dynamical systems in the fractional-order case

Consider the following IVP of fractional-order system:

$$D_t^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (1.22)$$

where  $0 < \alpha < 1$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  (or  $\mathbb{C}^n$ )<sup>3</sup>,  $f$  is a continuous function. Under Lipschitz condition of the function  $f$ , the IVP (1.22) admits a unique solution [126].

Remark that the fractional-order system (1.22) does not define dynamical systems in the usual sense because if  $x(t, x_0)$  represents the solution of (1.22), the flow property  $x_t \circ x_s = x_{t+s}$  cannot be hold [127]. However, motivated by the numerical calculation of the solutions, the definition of integer-order dynamical systems can be adopted, which states that if the underlying IVP admits solutions, the problem defines a dynamical system [86; 128].

### 1.3.2 Stability criteria of fractional-order systems

For fractional-order systems, it is possible to formulate similar definitions on the stability of solutions and equilibrium points of system (1.22) as for integer-order cases [129].

---

<sup>3</sup>For numerical integration of a fractional-order complex-valued system, since the fractional differential operator is a linear operator, one can use the equivalent fractional-order real-valued system after deriving the corresponding equation for real and imaginary parts [124; 125].

From a practical point of view, to analyze the local stability of the equilibria in fractional-order systems, we use the following theorem (see, e.g. [123; 129]).

**Theorem 1.2.** The following linear autonomous system:

$$D_t^\alpha \mathbf{x} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

with  $0 < \alpha < 1$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  and  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , is asymptotically stable if and only if  $\varrho = |\arg(\lambda_i(A))| > \alpha\pi/2$  is satisfied for all eigenvalues  $\lambda_i$  of matrix  $A$ . The system is stable if and only if  $\varrho \geq \alpha\pi/2$  with the critical eigenvalues satisfying  $\varrho = 0$  have the geometric multiplicity one<sup>4</sup>. And otherwise, the system is unstable.

### 1.3.3 Numerical methods for solving fractional-order differential equations

Numerical computation of the fractional-order differential equations (FDEs) solutions is more complicated than the integer-order case because one needs to approximate the Riemann-Liouville integral (1.18), which is included in the fractional derivative.

In 2002, Diethelm et al., proposed one of the known algorithms, i.e., the Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector algorithm [126], which can be used for both linear and nonlinear FDEs. In this thesis, we apply this algorithm for numerical integration.

Consider the following IVP of a system of FDEs:

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), & 0 \leq t \leq T \\ D_t^k x(0) = x_0^k, & k = 0, 1, 2, \dots, [\alpha] - 1 \end{cases} \quad (1.23)$$

where  $f$  is a continuous nonlinear function and  $[\alpha]$  is just the value of  $\alpha$  rounded up to the nearest integer.

System (1.23) is equivalent to the Volterra integral equation

$$x(t) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} x_0^k \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (1.24)$$

---

<sup>4</sup>The algebraic multiplicity of an eigenvalue  $\lambda$  of a matrix  $A$  is the number of times  $\lambda$  appears as a root of  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

The geometric multiplicity of an eigenvalue  $\lambda$  of a matrix  $A$  is the dimension of the eigenspace which consists of all the eigenvectors of  $A$  corresponding to  $\lambda$ .

Let  $h = \frac{T}{N}$ ,  $N \in \mathbb{Z}^+$  is the number of steps,  $t_n = nh$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ , then Eq. (1.24) could be written as follows [126]:

$$x_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} x_0^k \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} f(t_{n+1}, x_h^p(t_{n+1})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, x_h(t_j)), \quad (1.25)$$

wherein

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n - \alpha)(n + 1)^\alpha, & j = 0; \\ (n - j + 2)^{\alpha+1} + (n - j)^{\alpha+1} - 2(n - j + 1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n; \\ 1, & j = n + 1, \end{cases} \quad (1.26)$$

$$x_h^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} x_0^k \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, x_h(t_j)), \quad (1.27)$$

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n - j + 1)^\alpha - (n - j)^\alpha). \quad (1.28)$$

The error estimate is  $\max_{j=0,1,\dots,N} |x(t_j) - x_h(t_j)| = O(h^p)$ ,  $p = \min(2, 1 + \alpha)$ .

## Chapter 2. Localization of chaotic and hyperchaotic attractors in integer-order and fractional-order systems

This chapter investigates the dynamics of some important complex-valued models with integer-order and fractional-order, including; the complex Lorenz model, the fractional-order complex Sprott model, and the complex Rabinovich model. Owing to the following motivations:

- (1) Many real-life phenomena are described by complex-valued models (see, e.g., [55; 110; 111; 130]).
- (2) Complete knowledge of complex-valued models, including; hidden attractors, synchronization, etc., is still lacking.
- (3) In contrast to real-valued models, the dynamics of complex-valued ones are very rich. If the real-valued model is chaotic, the corresponding complex-valued one may be chaotic or hyperchaotic. This feature may be helpful in designing secure communication schemes (see Chapter 3).

### 2.1 Analytical and numerical study of chaotic dynamics in complex Lorenz system

In this section, in comparison with the results for classical real-valued Lorenz system (henceforward – Lorenz system) [20], the problem of analytical and numerical identification of the boundary of global stability for the complex-valued Lorenz system (henceforward – complex Lorenz system) is studied. As in the case of the Lorenz system, to estimate the inner boundary of global stability the possibility of using the mathematical apparatus of Lyapunov functions (namely, the Barbashin-Krasovskii and LaSalle theorems) is demonstrated. For additional analysis of homoclinic bifurcations in complex Lorenz system a special analytical approach by Vladimirov is utilized. To outline the outer boundary of global stability and identify the so-called hidden boundary of global stability, possible birth of hidden attractors and transient chaotic sets is analyzed.

#### 2.1.1 Preliminary results

In the study of the dynamics of applied systems, an important role is played by the property of *global stability*<sup>1</sup>, when there are no oscillations in the system, and all trajectories are attracted to a stationary set. In some cases, the global stability property can be established analytically (e.g.

---

<sup>1</sup>The term “global stability” is used for simplicity of further presentation, while in the literature there are used different notions, e.g. “globally asymptotically stable” [131, p. 137], [132, p. 144], “gradient-like” [133, p. 2], [134, p. 56], “quasi-gradient-like” [133, p. 2], [134, p. 56] and others, reflecting the features of the stationary set and the convergence of trajectories to it.

by Lyapunov-type, either frequency-domain methods, see [45; 135–137]), and the global stability boundary can be constructed in the parameter space. Crossing this analytical boundary can lead to the following scenarios. After crossing the analytical border of global stability, the system can still exhibit *practical*<sup>2</sup> global stability [20], i.e. almost all trajectories are attracted to a stationary set, however, in this case a countable number of orbits may appear, which nevertheless are not realized in practice and in standard numerical experiments (e.g., unstable periodic or homoclinic orbits [19; 140–145]). On the other hand, crossing the analytical boundary of global stability can lead to the loss of stability of the stationary set. Then, if the system is dissipative in the sense Levinson ([146], see also [19]), but all stationary points are unstable, then inside the absorbing set a self-excited nontrivial attractor can be observed and easily localized. Finally, after crossing the boundary of global stability, the stationary set can remain locally stable (or partially locally stable), but at the same time *hidden oscillations* (periodic or chaotic) [16; 18; 19; 46; 147] may appear in the phase space, which basins of attraction do not intersect with arbitrarily small open vicinities of equilibria. This part of border of global stability, accordingly, can be also called "hidden" [20; 46].

At first, let's recall here the recent results [20] on the analytical and numerical analysis of the boundary of global stability for the classical Lorenz system [10]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x - y), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \quad (2.1)$$

where parameters  $r, \sigma > 0, b \in (0, 4]$ . Here in the preliminary, we briefly outline these results to compare them further with the results for the complex Lorenz system.

**1) Dissipativity.** The Lorenz system (2.1) is dissipative in the sense of Levinson, since it has the absorbing set [148]

$$\mathfrak{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2 \leq \frac{b(\sigma+r)^2}{2 \min(1, \sigma, \frac{b}{2})}\}. \quad (2.2)$$

This implies that all solutions of (2.1) exist for  $t \in [0, +\infty)$  and, thus, system (2.1) generates a dynamical system. For  $0 < r \leq 1$ , the stationary set of system (2.1) consists of a unique stable equilibrium  $S_0 = (0, 0, 0)$ ; for  $r > 1$  a pair of symmetric equilibria  $S_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$  is added to the stationary set, and  $S_0$  turns into a saddle.

**2) Inner estimation of global stability.** For the Lorenz system (2.1), combining several approaches based on the construction of Lyapunov functions [135; 136; 149] it is possible to prove the following criterion for the absence of self-excited and hidden oscillations (see Figs. 2.1a, 2.1b).

---

<sup>2</sup>Let us remark here a different notion of *practical* stability, suggested and developed in [138; 139]. According to this notion, a unique equilibrium of a perturbed system is practically stable, if for all bounded perturbations and all initial points from a vicinity  $Q_0$  of equilibrium, corresponding trajectories stay inside a larger vicinity  $Q \supset Q_0$  for all moments of time; at the same time, the equilibrium can be Lyapunov unstable.



**Theorem 2.1.** If for parameters of system (2.1) one of the following cases holds:

$$2\sigma \leq b, \quad \text{or} \quad \begin{cases} 2\sigma > b, \\ r < r_{\text{gs}} = \frac{(\sigma+b)(b+1)}{\sigma}, \end{cases} \quad (2.3)$$

then there are no nontrivial self-excited and hidden oscillations in the phase space of system (2.1), and any its solution  $(x(t), y(t), z(t))$  tends to the stationary set as  $t \rightarrow +\infty$ .

Beyond the estimate (2.3) in Theorem 2.1, the analysis of global stability and the birth of nontrivial attractors can be performed numerically. It is further known that the separatrix of saddle  $S_0$  can form a homoclinic loop from which unstable cycles can arise and violate the global stability. Using the Fishing principle [19; 144; 145] for the Lorenz system (2.1) it is possible to prove the following:

**Theorem 2.2.** For  $\sigma$  and  $b$  fixed, there exists  $r = r_h \in (1, +\infty)$  corresponding to the homoclinic orbit of the saddle equilibrium  $S_0$  if and only if  $3\sigma > 2b + 1$ .

For instance, for the classical values of parameters  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  of system (2.1) it is possible to find numerically the approximate value of such homoclinic bifurcation  $r_h \approx 13.926$ , when two symmetric homoclinic orbits forming a homoclinic butterfly appear (see Fig. 2.1c). Further increase of the parameter  $r$  leads to the birth of two saddle periodic orbits from each homoclinic orbit [143].

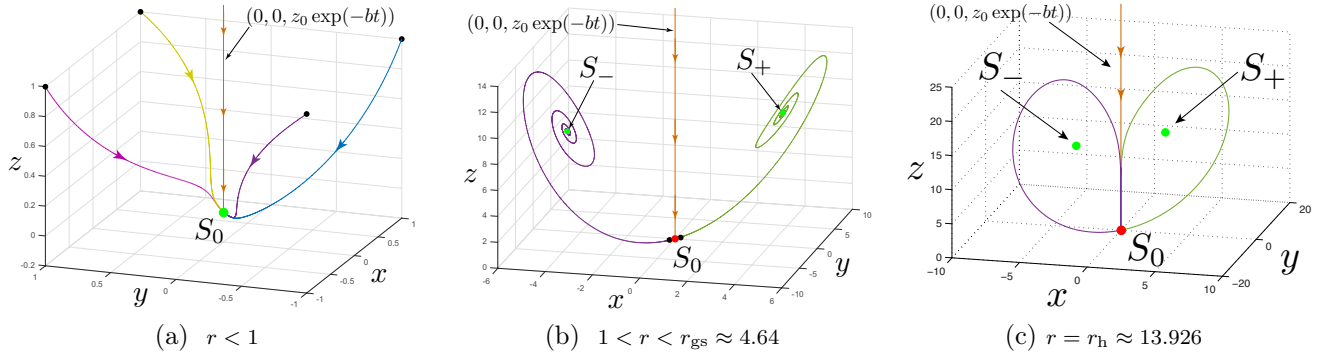


Figure 2.1 — Dynamics of the Lorenz system (2.1) with fixed parameters  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ , when parameter  $r$  varying according to the inner estimation of global stability (see [20]).

**3) Outer estimation of global stability.** For systems with a global absorbing set and an unstable stationary set, the existence of self-excited attractors is obvious. From a computational perspective, this allows one to use a *standard computational procedure*, in which after a transient process, a trajectory, starting from a point of unstable manifold in a neighborhood of equilibrium, reaches a state of oscillation, thus one can easily identify it.

System (2.1) possesses the absorbing set  $\mathcal{B}$  (see Eq. (2.2)) and for  $\sigma > b + 1$ ,  $r > r_{\text{cr}} = \sigma \frac{(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$  all equilibria are unstable. Thus, in this case, system (2.1) has a nontrivial self-excited attractor: if we consider classical values of parameters  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ , then for  $r > r_{\text{cr}}$ , e.g. for  $r = 28$ , it is possible to observe the self-excited chaotic attractor with respect to all three equilibria  $S_0, S_{\pm}$  (see Fig. 2.2c).

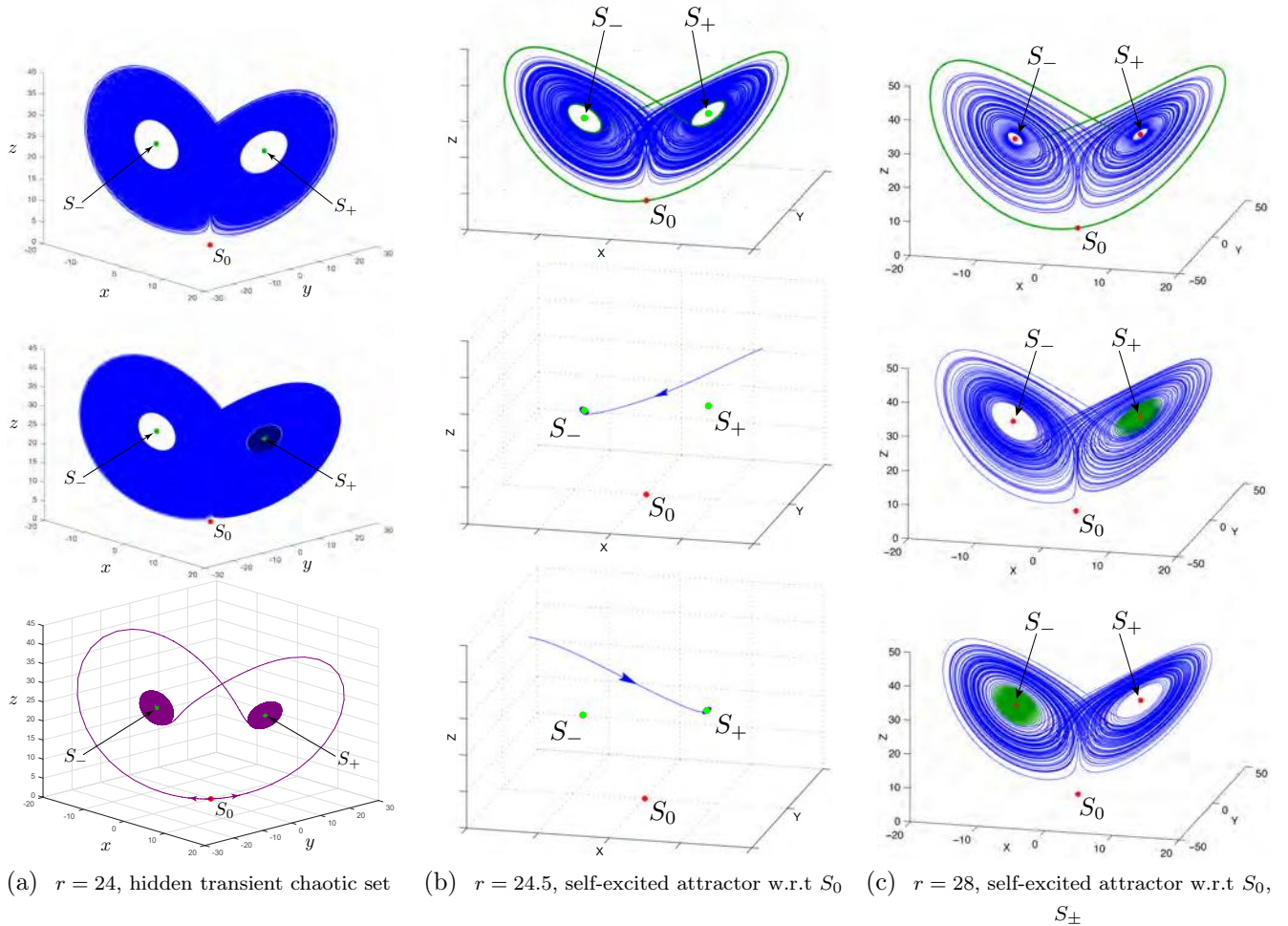


Figure 2.2 — Dynamics of the Lorenz system (2.1) with fixed parameters  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ , when parameter  $r$  varying according to the outer estimation of global stability (see [20]).

**4) Boundary of practical global stability.** The presence of an absorbing set implies the existence of a globally attractor  $\mathcal{A}_{\text{glob}}$ , which contains all local self-excited and hidden attractors, and stationary set. Thus, inside the set  $\mathcal{B}$  it is possible to study numerically the presence of nontrivial self-excited and hidden attractors for parameters  $r$ ,  $\sigma$ ,  $b$  not satisfying conditions (2.3) of global stability, i.e. by fixing  $\sigma$  and  $b$ , and by decreasing  $r$  from  $r_{\text{cr}}$ . For  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ , this gives us the following region  $r \in (r_{\text{gs}}, r_{\text{cr}})$ , where  $r_{\text{gs}} \approx 4.64$ ,  $r_{\text{cr}} \approx 24.74$ .

A nontrivial self-excited attractor can be observed numerically for  $24.06 \lesssim r < r_{\text{cr}} \approx 24.74$  (see, e.g. [150]). In this case of nontrivial multistability, system (2.1) possesses a local chaotic attractor  $\mathcal{A}$  which is self-excited with respect to equilibrium  $S_0$  and co-exists with the trivial attractors  $S_{\pm}$  (see Fig. 2.2b).

**5) Hidden attractor or transient set?** For the Lorenz system (2.1) it is still an open question [147, p. 14], whether for some parameters there exists a hidden chaotic attractor, i.e. whether it is possible by changing parameters to disconnect the basin of attraction from equilibria  $S_0$ ,  $S_{\pm}$  (e.g. for the parameters  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ : if  $r = 28$ , then attractor is connected with  $S_0$ ,  $S_{\pm}$ ; if  $r = 24.5$ , then attractor is connected with only  $S_0$ ). The current results on the existence of the

hidden attractors in the Lorenz system are the following: recently reported hidden attractors in the Lorenz system with  $r < r_{\text{cr}}$  and locally stable equilibria  $S_{\pm}$  turn out to be a *transient chaotic set* (a set in the phase space, which can persist for a long time, but after all collapses), but not a *sustained* hidden chaotic attractor [151; 152].

In a numerical computation of a trajectory over a finite-time interval it is difficult to distinguish a *sustained chaos* from a *transient chaos* [153; 154], thus it is reasonable to give a similar classification for transient chaotic sets [48; 155]: *transient chaotic set* is a *hidden* one if it does not involve and attract trajectories from a small neighborhood of equilibria; otherwise, it is *self-excited*.

For the Lorenz system (2.1) with parameters  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  fixed, near the point  $r \approx 24.06$  it is possible to observe a long living transient chaotic set, which is hidden since it's basin of attraction does not intersect with the small vicinities of equilibrium  $S_0$  (see Fig. 2.2a).

In numerical experiments, consider system (2.1) with parameters  $r = 24$ ,  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ . Using MATLAB's standard procedure `ode45` with default parameters (relative tolerance  $10^{-3}$ , absolute tolerance  $10^{-6}$ ) for trajectory of system (2.1) with initial point  $u_0 = (20, 20, 20)$  a transient chaotic behavior is observed on the time interval  $[0, 1.8 \cdot 10^4]$ , for initial point  $u_0 = (-7, 8, 22)$  — on the time interval  $[0, 7.2 \cdot 10^4]$ , for initial point  $u_0 = (2, 2, 2)$  — on the time interval  $[0, 2.26 \cdot 10^5]$ , and for initial point  $u_0 = (0, -0.5, 0.5)$  a transient chaotic behavior continues over a time interval of more than  $[0, 10^7]$ . Remark that, if we consider the same initial points, but use MATLAB's procedure `ode45` with relative tolerance  $10^{-6}$ , for all these initial points the chaotic transient behavior will last over a time interval of more than  $[0, 10^6]$ , and corresponding transient chaotic sets won't collapse.

### 2.1.2 The complex Lorenz system

The classical Lorenz system (2.1) has gained and still attracts much attention of scientists<sup>3</sup>, however, it is a rather simple mathematical model of the fluid dynamics problem, which E. Lorenz has initially investigated. A more complicated model of many real-world physical problems, such as two-layer baroclinic instability with weak viscosity and beta-effect [54; 110; 156] and detuned laser optics [55; 157], is described by the following complex Lorenz system:

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} = rX - aY - XZ, \\ \dot{Z} = -bZ + \frac{1}{2}(X^*Y + XY^*), \end{cases} \quad (2.4)$$

where  $X = x_1 + x_2i$ ,  $Y = x_3 + x_4i$  are complex variables,  $Z = x_5$  is real, and "  $*$  " denotes complex conjugation operator. Parameters  $\sigma$ ,  $b > 0$  are real,  $r = r_1 + r_2i$  and  $a = 1 - ei$  are complex with  $r_1, e \in \mathbb{R}$ .

Note that since the transformation  $X \rightarrow X^*$ ,  $Y \rightarrow Y^*$  changes only the sign of  $r_2$  in (2.4), this parameter may be chosen positive [111].

---

<sup>3</sup>The original celebrated work by Lorenz [10] has gained more than 24000 cites according to Google Scholar.

System (2.4) is also dissipative in the sense of Levinson, and the bounded convex absorbing set could be constructed according to the following theorem [158].

**Theorem 2.3.** Let for  $\lambda_0 = \min(1, b, \sigma)$  there exist  $\lambda \in (0, \lambda_0)$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\vartheta$  such that

$$\gamma(\sigma - \lambda)(1 - \lambda) - \frac{1}{4} |\sigma + \gamma r - \vartheta|^2 \geq 0. \quad (2.5)$$

Define  $\Gamma = \frac{\vartheta^2(b-2\lambda)^2}{8\lambda\gamma(b-\lambda)}$ ,  $\beta = \frac{\vartheta^2}{\gamma(1+\gamma)} \left( \frac{(b-2\lambda)^2}{4\lambda(b-\lambda)} + 1 \right)$  and the following function  $W : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$W(X, Y, Z) = \frac{1}{2} [|X|^2 + \gamma(|Y|^2 + Z^2)] - \vartheta Z.$$

Then for any solution  $(X(t), Y(t), Z(t))$  of (2.4) and any  $\delta > 0$  with  $T = T(\delta, X(0), Y(0), Z(0))$ , the following inequalities hold for all  $t \geq T$ :

$$W(X(t), Y(t), Z(t)) \leq \Gamma + \delta, \quad (2.6)$$

and

$$|X(t)|^2 < \beta + \frac{4\delta}{1+\gamma}. \quad (2.7)$$

Thus, if condition (2.5) holds, then the solutions of system (2.4) exist for  $t \in [0, +\infty)$  and, thus, system (2.4) generates a dynamical system and possesses a global attractor [9] containing a set of all equilibria.

It is also useful to consider the following equivalent form of system (2.4) in terms of real variables  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  and real parameters  $r_1, r_2, \sigma, b, e$  (see, e.g. [111]):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_3 - x_1), \\ \dot{x}_2 = \sigma(x_4 - x_2), \\ \dot{x}_3 = r_1 x_1 - r_2 x_2 - x_3 - e x_4 - x_1 x_5, \\ \dot{x}_4 = r_2 x_1 + r_1 x_2 + e x_3 - x_4 - x_2 x_5, \\ \dot{x}_5 = -b x_5 + x_1 x_3 + x_2 x_4. \end{cases} \quad (2.8)$$

For

$$\text{Im}(r - a) \neq 0, \quad \text{or} \quad \begin{cases} \text{Im}(r - a) = 0, \\ \text{Re}(r - a) \leq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

system (2.8) has a unique equilibrium  $S_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ .

For

$$\begin{cases} \text{Im}(r - a) = 0, \\ \text{Re}(r - a) > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

system (2.8) has a stationary set containing  $S_0$  and a whole circle of equilibria given by the expression:

$$x_1^2 + x_2^2 = b(r_1 - 1), \quad x_1 = x_3, \quad x_2 = x_4, \quad x_5 = r_1 - 1.$$

These equilibria could be parameterized as follows:

$$S_\theta = (\pm\rho \cos(\theta), \pm\rho \sin(\theta), \pm\rho \cos(\theta), \pm\rho \sin(\theta), r_1 - 1),$$

where  $\rho = \sqrt{b(r_1 - 1)}$  and  $\theta \in [0, 2\pi]$ . In literature, relation  $\text{Im}(r - a) = 0$  is often called the "laser case", since in this case system (2.4) describe the dynamics of some lasers, e.g. a detuned laser [55; 111].

Let us outline the following statements about local stability of the stationary set of system (2.8) (see, e.g. [110]).

**Lemma 2.1.** The equilibrium  $S_0$  of system (2.8) is stable if and only if the following condition holds:

$$r_1 < r_{1c}, \quad \text{where} \quad r_{1c} = 1 + \frac{(e+r_2)(e-\sigma r_2)}{(\sigma+1)^2}.$$

**Lemma 2.2.** The equilibria  $S_\theta$  of system (2.8) are stable<sup>4</sup> if and only if one of the following conditions hold:

$$\sigma < b + 1, \quad \text{or} \quad \begin{cases} \sigma > b + 1, \\ 1 < r_1 < r'_{1c} = 1 + \frac{\sqrt{Q_2^2 + 4Q_1Q_3} - Q_2}{2bQ_1}, \end{cases}$$

where

$$\begin{aligned} Q_1 &= (3\sigma + 1)(\sigma - b - 1), \\ Q_2 &= \gamma_2(b + 2\gamma_2)(-2b\gamma_2 - b\gamma_3 + 2\gamma_2\gamma_3) \\ &\quad - \gamma_1(b^2 + b\gamma_2 - b\gamma_3 + 2\gamma_2^2 + 2\gamma_2\gamma_3), \\ Q_3 &= 2\gamma_1\gamma_2 b(b^2 + 2b\gamma_2 + \gamma_1), \end{aligned}$$

and  $\gamma_1 = (\sigma + 1)^2 + \left(\frac{2\sigma(e+r_2)}{\sigma+1} - e\right)^2$ ,  $\gamma_2 = \sigma + 1$ ,  $\gamma_3 = 2\sigma$ .

### 2.1.3 Inner estimation for the stability boundary: the global stability and trivial attractors

Constructing complex-valued Lyapunov functions, by analogy with Theorem 2.1, it is possible to derive the following criterion for the absence of self-excited and hidden oscillations in the complex Lorenz system (2.4).

**Theorem 2.4.** If for parameters of the system (2.4) one of the following conditions holds:

- 1)  $|r + 1| < 2$ ,
- 2)  $4r_1 < -r_2^2$ ,

---

<sup>4</sup>One could easily check that the eigenvalues of the Jacobi matrix at all equilibria  $S_\theta$  are the same for any  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

**3)**  $2\sigma - b \neq 0$  and conditions (2.10) hold. If  $2\sigma - b > 0$ , then for  $\lambda_0 = \min(1, b, \sigma)$ , there exist  $\lambda \in (0, \lambda_0)$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\vartheta$ , such that condition on dissipativity (2.5) and the following inequality hold:

$$\frac{\vartheta^2}{\gamma(1+\gamma)} \left( \frac{(b-2\lambda)^2}{4\lambda(b-\lambda)} + 1 \right) < \frac{b^2(\sigma+1)}{2\sigma-b}. \quad (2.11)$$

Then in the phase space of system (2.4), there are no nontrivial self-excited and hidden oscillations, and any of its solution  $(X(t), Y(t), Z(t))$  tends to the stationary set as  $t \rightarrow \infty$ .

*Proof.* We consider the following cases:

**Case 1.** For  $|r+1| < 2$ , one can check that conditions (2.9) are satisfied and in this case  $S_0$  is the only equilibrium point of system (2.4). So, the absence of self-excited oscillations follows from the Routh-Hurwitz criterion on local stability for the equilibrium  $S_0$ . The absence of hidden oscillations can be obtained by Barbashin-Krasovskii theorem (see, e.g. [45; 135]) and the Lyapunov function, if  $|r+1| < 2$ , from Theorem 2.3 for  $\vartheta := 0$  and  $\gamma := \sigma$  we get the following Lyapunov function:

$$V(X, Y, Z) = \frac{1}{2}[|X|^2 + \sigma(|Y|^2 + Z^2)]$$

with  $\lambda_0 = \min(1, b, \sigma)$ ,  $\lambda \in (0, \lambda_0)$ ,  $\delta > 0$  and the inequalities  $\sigma(\sigma - \lambda)(1 - \lambda) - \frac{1}{4}\sigma^2 |r+1|^2 \geq 0$  and  $|X(t)|^2 < \frac{4\delta}{1+\sigma}$  hold. The derivative of  $V$  with respect to system (2.4) is as follows [158]:

$$\dot{V}(X, Y, Z) \leq -\lambda[|X|^2 + \sigma|Y|^2] < 0, \quad \forall X, Y, Z \neq 0.$$

Also,  $V(X, Y, Z) \geq 0$ ,  $V(0, 0, 0) = 0$  and  $V(X, Y, Z) \rightarrow \infty$  as  $|X, Y, Z| \rightarrow \infty$ ; thus, all conditions of Barbashin-Krasovskii theorem are satisfied implying global stability of the unique equilibrium  $S_0$ .

**Case 2.** For  $4r_1 < -r_2^2$ , conditions (2.9) are also fulfilled and for this case we introduce the following Lyapunov function (see, [111]):

$$V(X, Y, Z) = \frac{1}{2}[D^2|X|^2 + |Y|^2 + Z^2], \quad (2.12)$$

where  $D = \sqrt{\frac{-r_1}{\sigma}}$ . It is clear that Lyapunov function (2.12) is positive definite. Rewrite Lyapunov function (2.12) in terms of real variables:

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{2}[D^2(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2]. \quad (2.13)$$

The derivative of  $V$  with respect to system (2.8) reads:

$$\dot{V} = -\sigma D^2(x_1^2 + x_2^2) - (x_3^2 + x_4^2) - r_2(x_2x_3 - x_1x_4) - bx_5^2. \quad (2.14)$$

By using the following scaled variables  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$  as:  $x_1 = \frac{u_1}{D\sqrt{\sigma}}$ ,  $x_2 = \frac{u_2}{D\sqrt{\sigma}}$ ,  $x_3 = u_3$ ,  $x_4 = u_4$ ,  $x_5 = \frac{u_5}{\sqrt{b}}$ , we have

$$\dot{V} = -(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2) - 2\Delta(u_2u_3 - u_1u_4), \quad (2.15)$$

where  $\Delta = \frac{r_2}{2D\sqrt{\sigma}}$ .

The transformation  $u \rightarrow v$ ,  $u = Av$  with

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

leads to the following expression:

$$\dot{V} = -v_1^2 - (1 + \Delta)(v_2^2 + v_3^2) - (1 - \Delta)(v_4^2 + v_5^2).$$

One can see that initial assumption  $4r_1 < -r_2^2$  implies  $\Delta^2 < 1$  and, therefore,  $\dot{V} < 0$ , and all conditions of Barbashin-Krasovskii theorem are satisfied. Thus, the equilibrium  $S_0$  is globally stable.

As we discussed earlier, if conditions (2.9) are not satisfied, system (2.4) has a stationary set containing a continuum of equilibria, i.e the zero equilibrium  $S_0$  and the equilibria  $S_\theta$ . In this case, the Barbashin-Krasovskii theorem is not applicable.

**Case 3.** Suppose conditions (2.10) are satisfied, then the absence of nontrivial oscillations (and, thus, the global stability of the stationary set  $\{S_0, S_\theta\}$  can be demonstrated (see, [158]) by the LaSalle principal [136]. For this purpose, consider the following time and coordinate transformations:

$$\begin{cases} t \rightarrow \tau, & \psi : (X, Y, Z) \rightarrow (\chi, \eta, \xi), \\ \tau = \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} t, & \chi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\sigma}} X, \quad \eta = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}} (Y - X), \\ \xi = \varepsilon^2 (Z - \frac{|X|^2}{b}), & \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{r-a}} > 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

System (2.4) transform into the following system:

$$\begin{cases} \dot{\chi} = \frac{d\chi}{d\tau} = \eta, \\ \dot{\eta} = \frac{d\eta}{d\tau} = -\varrho\eta - \xi\chi - \varphi(\chi), \\ \dot{\xi} = \frac{d\xi}{d\tau} = -\kappa\xi - \frac{\Lambda}{2}(\chi^*\eta + \chi\eta^*), \end{cases} \quad (2.17)$$

where  $\varrho = \frac{\varepsilon(a+\sigma)}{\sqrt{\sigma}}$ ,  $\varphi(\chi) = -\chi + \Theta\chi|\chi|^2$ ,  $\Theta = \frac{2\sigma}{b}$ ,  $\kappa = \frac{\varepsilon b}{\sqrt{\sigma}}$ ,  $\Lambda = \frac{2}{b}(2\sigma - b)$ . Here, the variables  $\chi$  and  $\eta$  are complex while  $\xi$  is real. The new parameters  $\Theta$ ,  $\kappa$ , and  $\Lambda$  are real with  $\Theta > 0$ ,  $\kappa > 0$ , and  $\varrho$  is complex. Consider the following Lyapunov function:

$$V(\chi, \eta, \xi) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{|\Lambda|} \xi^2 + |\eta|^2 - |\chi|^2 + \frac{\Theta}{2} |\chi|^4 \right]. \quad (2.18)$$

Note that, the LaSalle principle requires the compactness of the set, where the Lyapunov function  $V$  is defined to show its boundedness from below. In our case, one can show that the inequality  $V(\chi, \eta, \xi) > -\frac{1}{4\Theta}$  is valid for any  $(\chi, \eta, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ .

From the relation  $\dot{V}(\chi, \eta, \xi) = 0$ , it follows that the largest invariant set

$$M \subset \{(\chi, \eta, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid \dot{V}(\chi, \eta, \xi) = 0\}$$

consists of the equilibrium points of system (2.17).

The derivative of function  $V$  with respect to system (2.17) is as follows:

$$\dot{V}(\chi, \eta, \xi) = -\frac{\kappa}{|\Lambda|} \xi^2 - \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(\Lambda) + 1)\chi\xi\eta^* - \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(\Lambda) + 1)\chi^*\xi\eta - \operatorname{Re}\varrho|\eta|^2. \quad (2.19)$$

The last thing to check is that  $\dot{V}(\chi, \eta, \xi) \leq 0$ ,  $\forall \chi, \eta \in \mathbb{C}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ . Consider two cases.

**3.1.** If  $\Lambda = 2\sigma - b > 0$ , then following [158] and using Theorem 2.3, there exist  $\epsilon > 0$  such that for any solution  $(\chi(\tau), \eta(\tau), \xi(\tau))$  of (2.17) with  $t_0 = t_0(\chi(0), \eta(0), \xi(0))$  the following inequality:

$$|\chi(t)|^2 \leq \frac{\kappa}{\Lambda} \operatorname{Re}\varrho - \epsilon, \quad (2.20)$$

holds for all  $t \geq t_0$ .

From relations (2.16) we have  $X(t) = \frac{\sqrt{2\sigma}}{\epsilon} \chi(t)$ , and taking into account (2.7) we get:

$$|\chi(t)|^2 < \frac{\epsilon^2 \beta}{2\sigma} + \frac{2\delta\epsilon^2}{\sigma(1+\gamma)} \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.21)$$

It is easy to check that condition (2.11) with (2.21) and using the following constant in Theorem 2.3:

$$\vartheta = \frac{\pm 2\sqrt{2\gamma\lambda(2\sigma-b)(b-\lambda)[b^2\sigma(\gamma+1)(\sigma+1)+\epsilon(b-2\sigma)(\sigma(\gamma+1)+2\epsilon\delta]}}{\epsilon b(2\sigma-b)},$$

implies (2.20).

If  $\Lambda > 0$ , then expression (2.19) reads as follows:

$$\dot{V}(\chi, \eta, \xi) = -\frac{\kappa}{|\Lambda|} \xi^2 - \chi\xi\eta^* - \chi^*\xi\eta - \operatorname{Re}\varrho|\eta|^2. \quad (2.22)$$

Since  $\kappa > 0$  and  $\operatorname{Re}\varrho = \frac{\epsilon(1+\sigma)}{\sqrt{\sigma}} > 0$  (see relation (2.20)), Eq. (2.22) can be written as follows:

$$\dot{V}(\chi, \eta, \xi) \leq -\delta_1(\xi^2 + |\eta|^2) \leq 0, \quad \delta_1 > 0. \quad (2.23)$$

**3.2.** If  $\Lambda < 0$ , then the mixed products in (2.19) do not appear. Hence, expression (2.19) can be written immediately in the form (2.23).

Then, according to LaSalle principle any solution of system (2.17) (and thus system (2.4)) tends to an equilibrium state as  $\tau \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Remark 2.1.** For some values of parameters of the complex Lorenz system (2.4), one can find similar conditions on the global stability as for the Lorenz system (2.1). For instance, if  $|r+1| < 2$ ,  $S_0$  of the system (2.4) is globally stable, and choosing  $r_2 = 0$  we obtain  $r_1 < 1$  that corresponds to the condition of global stability of zero equilibrium point of system (2.1) (see Theorem 2.1).



**Remark 2.2.** In the special case, when  $r_2 = e = 0$ , the remaining parameters in the complex Lorenz system (2.4) are the same as the parameters of the real one (2.1). However, we can not strictly deduce the condition of global stability of the stationary set  $\{S_0, S_{\pm}\}$  of the Lorenz system (2.1) from the conditions of Theorem 2.4. This due to the different behavior of these two systems in this case. The complex Lorenz system (2.4) still has a continuum of equilibria  $S_{\theta}$  in its phase space, while the real one has only two symmetric equilibria  $S_{\pm}$ . Remark that, for the complex Lorenz system (2.4) when  $2\sigma \neq b$ , we can only apply the LaSalle principle, and yet it is not possible to apply the Leonov approach [159–161]. While for the real Lorenz system (2.1), if  $2\sigma < b$ , we can use the LaSalle principle, and if  $2\sigma > b$ , we can apply the Leonov approach [20]. It is also possible to prove global stability, when in system (2.1) we have  $2\sigma = b$  [20; 149].

Note also that, if in the third condition of Theorem 2.4 we take the parameters  $\lambda, \gamma, \vartheta$  as follows:  $\gamma = \sigma$ ,  $\vartheta = \sigma + \sigma r_1 - 2\sigma\sqrt{r_1}$ ,  $\lambda \in (0, b)$  with  $b \in (0, 1]$ , then we get the following relations between the conditions of global stability for systems (2.1) and (2.4):

$$\begin{aligned} r < r_{gs} &= \frac{(\sigma+b)(1+b)}{\sigma} && \text{for system (2.1),} \\ r_1 < r_{1gs} &= \frac{(\sigma-\lambda)(1-\lambda)}{\sigma} && \text{for system (2.4).} \end{aligned}$$

The case, corresponding to condition 3) of Theorem 2.4, when all trajectories tend to the stationary set, however, not all equilibria of the stationary set are locally stable, is illustrated in Fig. 2.3.

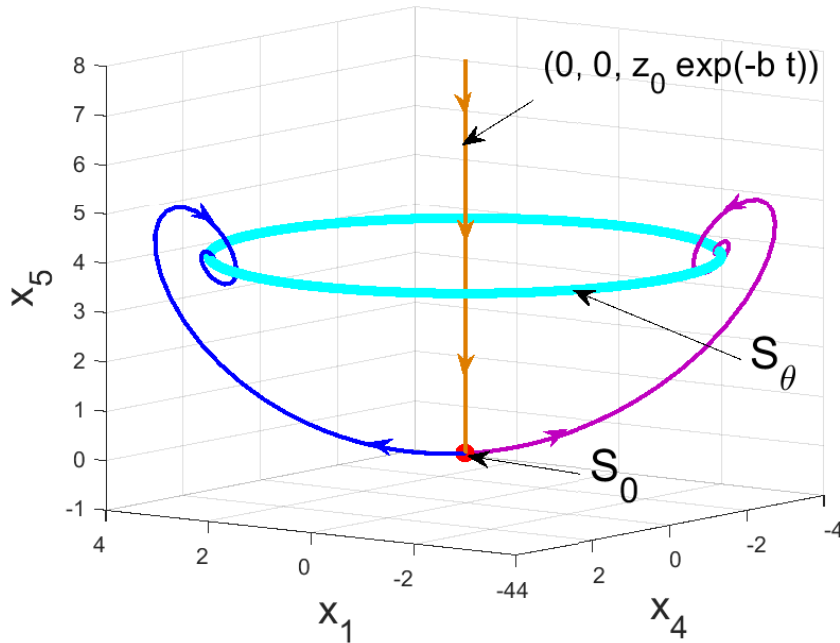


Figure 2.3 — The absence of self-excited and hidden attractors and the global stability of the stationary set  $\{S_0, S_{\theta}\}$  in the system (2.8) with parameters  $\sigma = 4$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = -e = 0.001$ ,  $b = 4$ . Trajectories (blue, purple) in a small vicinity of the unstable equilibrium  $S_0$  tend to the stable set of equilibria  $S_{\theta}$  (trivial attractors).

**Remark 2.3.** One of the significant differences between the complex Lorenz (2.4) and the real one is the following: in the case when  $S_0$  is the only equilibrium point of system (2.4), there could exist a nontrivial attractor, that is a stable limit cycle or even a torus (see Fig. 2.4).

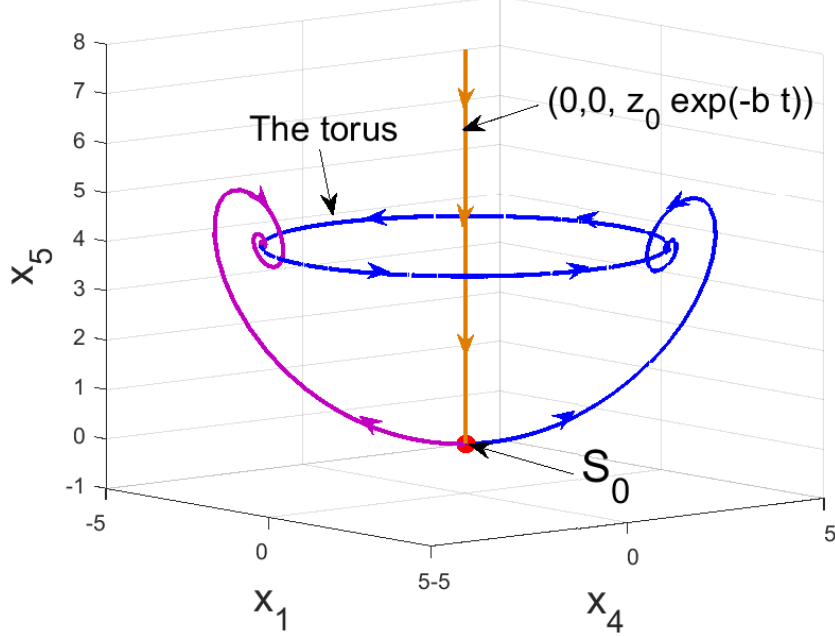


Figure 2.4 — Co-existence of a nontrivial attractive torus and the unstable equilibrium  $S_0$  in the system (2.8) with parameters  $\sigma = 4, r_1 = 5, r_2 = 0.002, e = -0.001, b = 4$ . Trajectories (blue, purple) in small neighborhoods of the unstable equilibrium  $S_0$  attractors to the torus (nontrivial attractors).

Beyond the conditions of Theorem 2.4, the analysis of global stability and the birth of nontrivial attractors in system (2.4) can be carried out numerically. For the convenience of this analysis, additional transformations taking into account the structure of a complex system may be useful [162; 163]. For instance, in [164; 165], Vladimirov et al. introduced the following transformation for system (2.4). If the conditions:

$$2\sigma > b, \quad \sigma(r_1 - 1) - \frac{e^2}{4} \equiv \eta > 0 \quad (2.24)$$

are satisfied, then using the time and coordinate transformations:

$$\begin{cases} t \rightarrow t', & \psi : (X, Y, Z) \rightarrow (X', Y', Z'), \\ t' = \sqrt{\eta}t, & X' = \eta^{-\frac{3}{4}} \delta X, \quad Y' = \eta^{-\frac{5}{4}} \sigma \delta [Y - (1 + i\delta/2\sigma)X], \\ Z' = \eta^{-1} \sigma (Z - XX^*/2), & \delta = \exp(iet/2) [(2\sigma - b)/2]^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (2.25)$$

one can re-write system (2.4) in the form:

$$\begin{cases} \frac{dX'}{dt'} = Y', \\ \frac{dY'}{dt'} = (1 + i\kappa)X' - \mu Y' - X'Z' - \varrho X'|X'|^2, \\ \frac{dZ'}{dt'} = -\beta Z' + |X'|^2, \end{cases} \quad (2.26)$$

where  $\kappa = \frac{(2\sigma r_2 + e(\sigma - 1))}{2\eta}$ ,  $\mu = \frac{1 + \sigma}{\sqrt{\eta}}$ ,  $\varrho = \frac{\sqrt{\eta}}{2\sigma - b}$ ,  $\beta = \frac{b}{\sqrt{\eta}}$ . Since the transformation (2.25) is continuous and invertible then it's a diffeomorphism, and the dynamical behavior of systems (2.4) and (2.26) are topologically equivalent [164; 165]. Next, introduce the following real variables  $\xi', v', w', Z'$ :

$$\xi' = (|X'|^2 - |Y'|^2)/2, \quad v' + iw' = X'^*Y'. \quad (2.27)$$

Expression (2.27) defines the projection map:  $\Pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}$ . This map projects all states  $(X', Y', Z')$  in the phase space  $\mathcal{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  of system (2.26) (and system (2.4)), which are invariant with respect to a common phase factor  $\psi$  in  $X'$  and  $Y'$ , i.e.

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X' \exp(i\psi) \\ Y' \exp(i\psi) \\ Z' \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

into the same point  $(\xi', v', w', Z')$  in  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^4$ . Indeed, if  $X'' = X' \exp(i\psi)$  and  $Y'' = Y' \exp(i\psi)$ , then

$$\begin{aligned} \xi'' &= (|X''|^2 - |Y''|^2)/2 = (|\exp(i\psi)|^2[|X'|^2 - |Y'|^2])/2 \\ &= ((\cos^2(\psi) + \sin^2(\psi))[|X'|^2 - |Y'|^2])/2 \\ &= (|X'|^2 - |Y'|^2)/2 = \xi', \\ v'' + iw'' &= X''^*Y'' = X'^* \exp(-i\psi) Y' \exp(i\psi) \\ &= X'^*Y' = v' + iw'. \end{aligned}$$

As mentioned in [164; 165], the set of points in  $\mathcal{H}$  corresponding to the same point in  $\mathcal{P}$  in geometry is called a "ray", and the space  $\mathcal{P}$  is called a "ray space".

The derivative of expressions (2.27) with respect to the dynamics of system (2.26) leads to the following equations of motion in the projective space  $(\xi', v', w', Z') \in \mathcal{P}$ :

$$\begin{cases} \dot{\xi}' = v' + \mu(R - \xi') - \kappa w' - v'(1 - Z' - \varrho(R + \xi')), \\ \dot{v}' = -\mu v' + R - \xi' + (R + \xi')(1 - Z' - \varrho(R + \xi')), \\ \dot{w}' = -\mu w' + \kappa(R + \xi'), \\ \dot{Z}' = -\beta Z' + R + \xi', \end{cases} \quad (2.29)$$

where  $R$  satisfies the following relations:

$$\begin{aligned} R &= (\xi'^2 + v'^2 + w'^2)^{\frac{1}{2}} = (|X'|^2 + |Y'|^2)/2, \\ R + \xi &= |X'|^2, \quad R - \xi = |Y'|^2. \end{aligned}$$

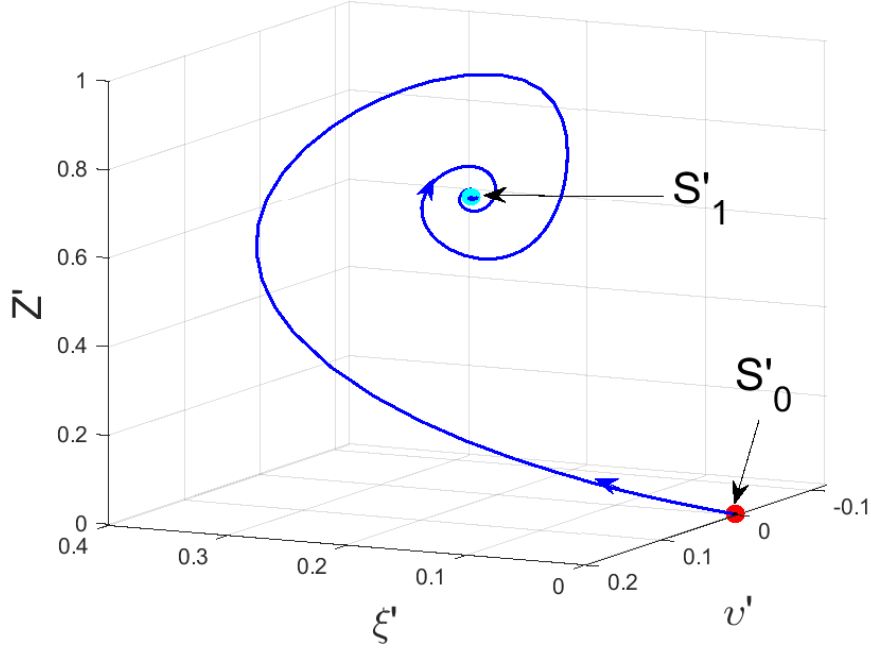


Figure 2.5 — Global stability of the stationary set  $\{S'_0, S'_1\}$  in the projective system (2.29) with parameters  $\sigma = 4$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = -e = 0.001$ ,  $b = 4$ .

Using projective system (2.29) it is convenient to study and visualize the dynamics of the initial system (2.4). For instance, it is possible to demonstrate the presence of global stability, when conditions of Theorem 2.4 and condition (2.24) hold. Taking the same values of parameters  $\sigma = 4$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 0.001$ ,  $e = -0.001$ ,  $b = 5$ , considered for system (2.4) (see Fig. 2.3), one gets the same qualitative behavior in the phase space of system (2.29) (see Fig. 2.5).

As in the classical Lorenz system (2.1), for the complex Lorenz system (2.4) it is also known that the separatrix of saddle  $S_0$  can form a homoclinic loop, from which unstable cycles can arise and violate global stability (however, a set of measure zero does not affect the global attraction on a stationary set from a practical point of view). The following theorem provides the necessary condition for the existence of homoclinic orbits in the complex Lorenz system (2.4) (see [164–166]):

**Theorem 2.5.** If conditions (2.24) are satisfied, then the necessary condition for the presence of a homoclinic orbit of the saddle equilibrium  $S_0$  is as follows:

$$r_2 = \frac{e(1-\sigma)}{2\sigma}. \quad (2.30)$$

**Corollary 2.1.** For the "laser case", i.e., when  $e = -r_2$ , the homoclinic orbit can only be obtained if  $e = r_2 = 0$ .

To prove condition (2.30), Vladimirov et al. considered the projective system (2.29), because unlike system (2.4), it has a 1-dimensional unstable manifold. The projections of unstable manifold  $W^u$  and stable manifold  $W^s$  in the space  $\mathcal{P}$ , i.e.  $\Pi(W^u)$  and  $\Pi(W^s)$ , can intersect only along the  $Z'$ -axis and a possible homoclinic orbit exists only if  $\kappa = 0$ , which coincides with condition (2.30).

For the parameters  $\sigma = 10$ ,  $r_2 = 4.5 \times 10^{-4}$ ,  $e = -0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$  of system (2.4), condition (2.30) is satisfied. In this case, system (2.4) has a unique equilibrium  $S_0$  (since  $e \neq -r_2$ ), and it is possible to find numerically the approximate value of such homoclinic bifurcation  $r_{1h} \approx 13.9$ , when two symmetric homoclinic orbits appear, forming a homoclinic butterfly (see Fig. 2.6). A further increase in the parameter  $r_1$  leads to the birth of two periodic saddle orbits from each homoclinic orbit. For the parameters  $\sigma = 10$ ,  $r_2 = 0$ ,  $e = 0$ ,  $b = \frac{8}{3}$ , condition (2.30) holds and system (2.4) has the following equilibrium points:  $S_0, S_\theta$  (since  $e = -r_2$ ), with  $r_{1h} \approx 13.9$ , system (2.4) has homoclinic orbits (see Fig. 2.7.)

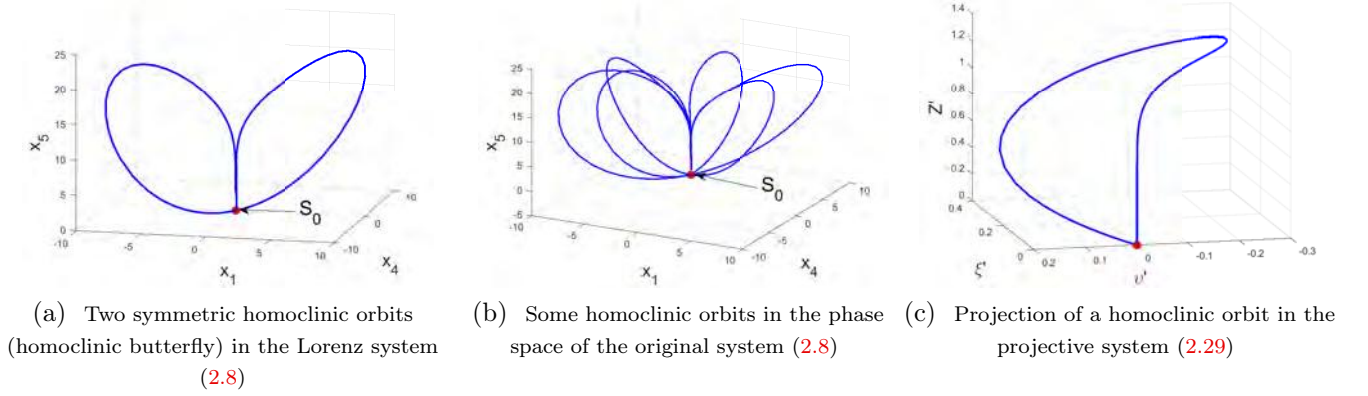


Figure 2.6 — Visualization of homoclinic orbits with  $\sigma = 10$ ,  $r_2 = 4.5 \times 10^{-4}$ ,  $e = -0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$  and  $r_{1h} \approx 13.9$ .

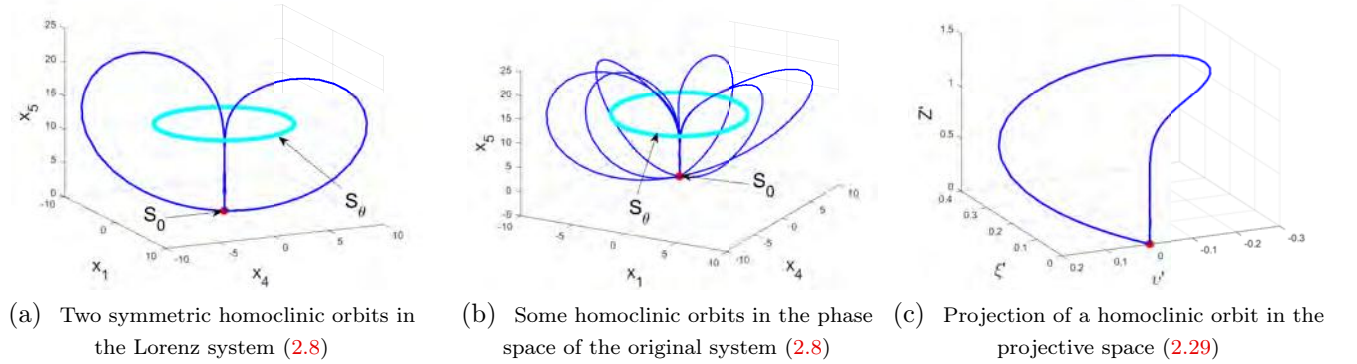


Figure 2.7 — Visualization of homoclinic orbits with  $\sigma = 10$ ,  $r_2 = 0$ ,  $e = 0$ ,  $b = \frac{8}{3}$  and  $r_{1h} \approx 13.9$ .

Finally, let us mention the action of the projection map  $\Pi$  on various attractors in the space  $\mathcal{H}$ . In other words, preimages of different kinds of attractors in the original space  $\mathcal{H}$  and the corresponding images in the projection space  $\mathcal{P}$ . Basing on some geometrical properties of the map  $\Pi$ , in [164; 165] it is discussed that every limit set in  $\mathcal{H}/Z$  can be represented locally (in a neighborhood of the given ray) by the direct product of a set in  $\mathcal{P}/Z$  and the ray, i.e., the set  $\mathbb{R}^1$ . Here we exclude the sets of points  $Z$  on the  $Z'$ -axes in phase spaces  $\mathcal{H}$  and  $\mathcal{P}$ , which are invariant with respect to systems (2.26) and (2.29), respectively. Moreover, the triplet  $(\mathcal{H}/Z, \mathcal{P}/Z, \Pi)$  forms a fiber bundle (see e.g. [167]),  $\Pi$  is continuous map and, thus, it maps connected/compact sets into connected/compact sets.

To illustrate this statement, let us list the following different types of attractors:

- (1) For the zero equilibrium  $S_0$  of system (2.26):  $\Pi(S_0) = S'_0$ , where  $S'_0 = (0,0,0,0)$  is the zero equilibrium point of projective system (2.29);
- (2) For the circle of equilibria  $S_\theta$  of system (2.26):  $\Pi(S_\theta) = S'_1$ , where  $S'_1$  is an equilibrium point of system (2.29);
- (3) For limit cycle of system (2.26) the image is an equilibrium  $S'_1$  of system (2.29) in  $\mathcal{P}$ ;
- (4) For a torus of system (2.26) the image is a limit cycle of system (2.29) in  $\mathcal{P}$ ;
- (5) For a single homoclinic orbit of projective system (2.29) one has (as a preimage of map  $\Pi$ ) a continuum of homoclinic orbits in the original space  $\mathcal{H}$ , differing only by the common phase according to Eq. (2.28);
- (6) For a chaotic attractor of projective system (2.29) in  $\mathcal{P}$  one has (as a preimage) a chaotic attractor in  $\mathcal{H}$ ;
- (7) For a transient chaotic set of projective system (2.29) in  $\mathcal{P}$ , which collapses by colliding with stable equilibria or stable limit cycle, there exists (as a preimage) a transient chaotic set which after a certain time approaches eventually circle of equilibria  $S_\theta$  or a torus, respectively.

Summarizing the written above, further in our experiments we will examine the appearance of attractors in projective system (2.29), which has 1-dimensional unstable manifold of zero saddle equilibrium  $S'_0$  and use map (2.27) to get the corresponding preimages of the discovered attractors in the original system (2.4).

#### 2.1.4 Outer estimation for the stability boundary: the absence of trivial attractors

System (2.4) possesses the absorbing set (defined by Eq. (2.6)) and for  $\sigma > b + 1$ ,  $r_1 > \max\{r_{1c}, r'_{1c}\}$  (see Lemma 2.1 and 2.2) all equilibria are unstable. Further, in this work for the system (2.1) (and (2.8)) we will fix the classical values of parameters  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  of real Lorenz model (2.1) and, following the "laser case", will specify two additional parameters:  $r_2 = -e = 0.001$ . For instance, when  $r_1 = 28 > r'_{1c}$ , it is possible to observe a self-excited chaotic attractor with respect to all equilibria of a stationary set (see Fig. 2.8). This gives an outer estimation of practical global stability.

#### 2.1.5 The boundary of practical stability and absence of nontrivial attractors

Inside the absorbing set, it is possible to study numerically the presence of nontrivial self-excited and hidden attractors for parameters  $r_1, \sigma, r_2, b$  not satisfying conditions (2.11) of global

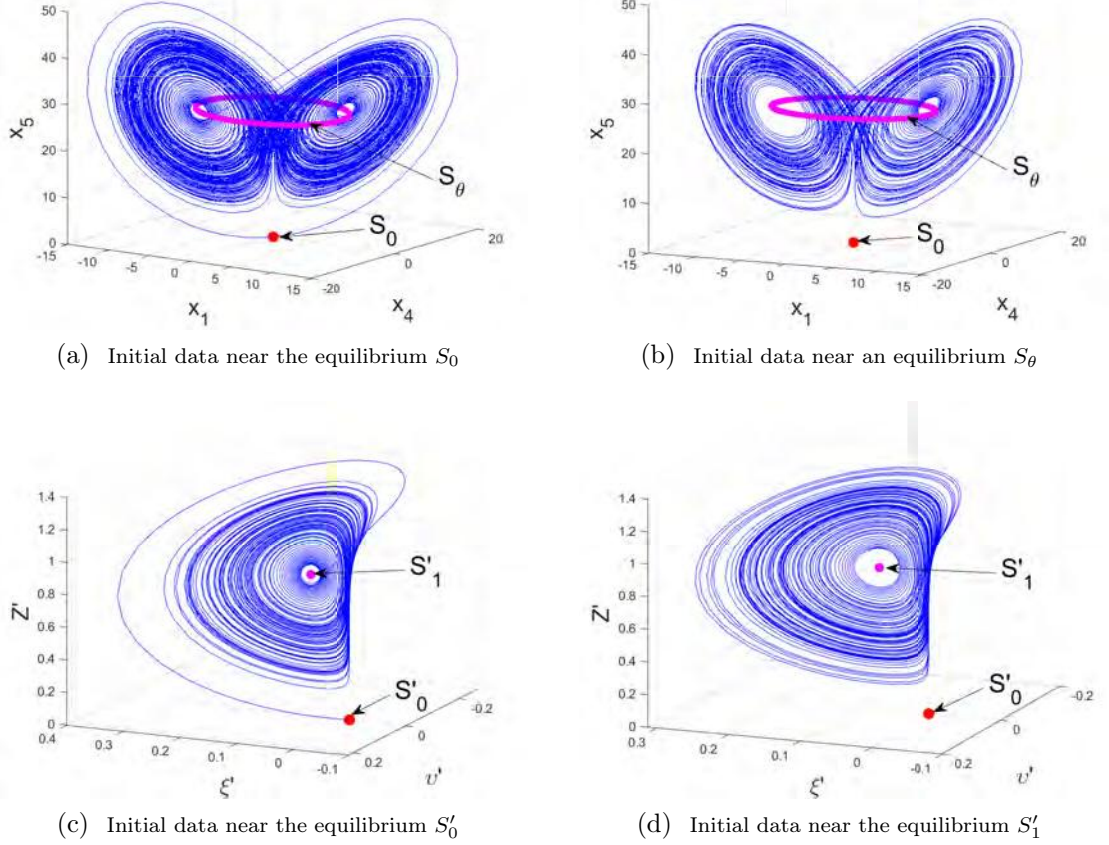


Figure 2.8 — (a), (b) Numerical visualization of the self-excited chaotic attractor in system (2.8) with  $r_1 = 28$ ,  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ ,  $r_2 = -e = 0.001$  by integrating the trajectories with initial data from small vicinities of the unstable equilibria  $S_0, S_\theta$ ; (c), (d) The corresponding images in the projective space  $\mathcal{P}$ .

stability, i.e., by fixing  $\sigma, r_2, b$  and by decreasing  $r_1$  from  $r'_{1c}$ . For  $\sigma = 10$ ,  $r_2 = 0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$  this gives us the following region  $r_1 \in (r_{1gs}, r'_{1c})$ , where  $r_{1gs} \approx 1.96$  and  $r'_{1c} \approx 24.73$ .

A nontrivial self-excited attractor can be observed numerically for  $24.09 \lesssim r_1 < r'_{1c} \approx 24.73$ . In this case of nontrivial multistability, system (2.8) possesses a local chaotic attractor  $\mathcal{A}$  which is self-excited with respect to equilibrium  $S_0$  and coexists with the set of trivial attractors  $S_\theta$  (see Fig. 2.9).

### 2.1.6 Hidden attractor or hidden transient set?

As we discussed above on the example of the classical Lorenz model (2.1), for a system possessing a transient chaotic set, the time of the transient process depends strongly on the choice of initial data in the phase space and also on the parameters of numerical solvers to integrate a trajectory (e.g., the order of the method, the step of integration, relative and absolute tolerances)

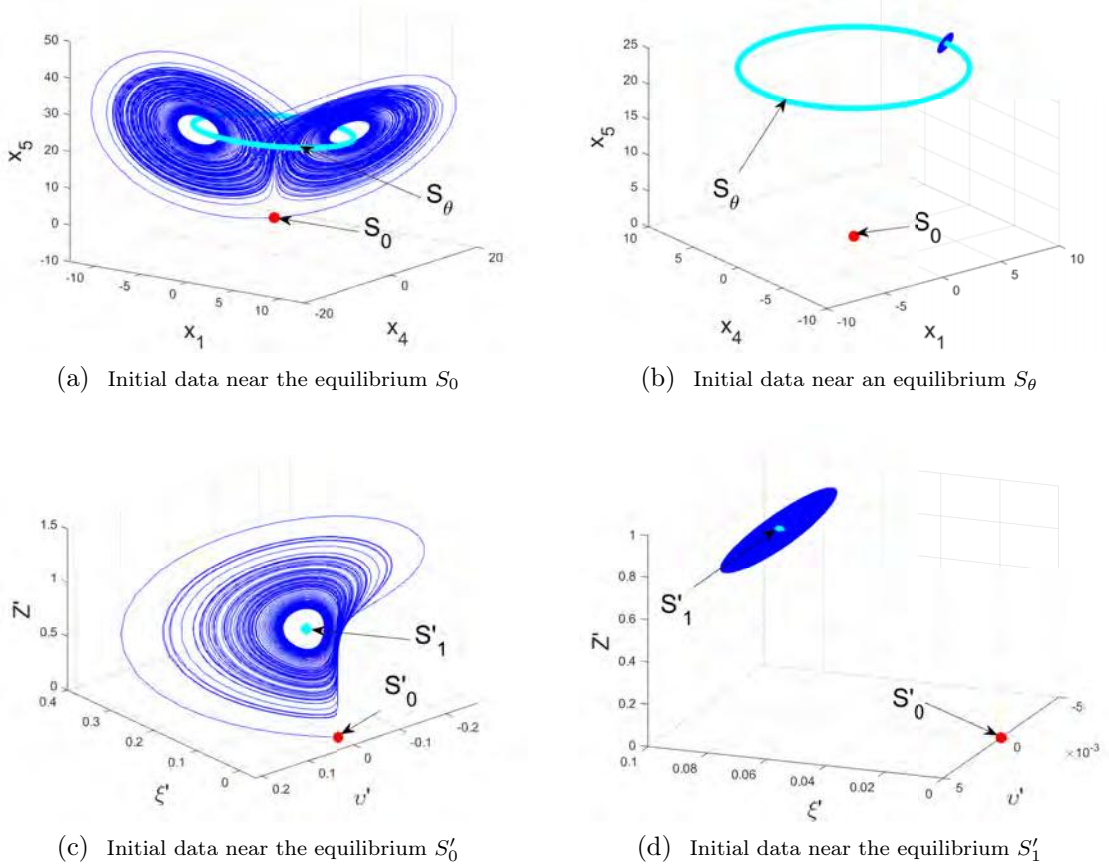


Figure 2.9 — (a), (b) Numerical visualization of the self-excited local chaotic attractor in system (2.8) with  $r_1 = 24.6$ ,  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ ,  $r_2 = -e = 0.001$  by a trajectory starting in the vicinity of the unstable equilibrium  $S_0$ . This attractor coexists with the stable set of equilibria  $S_\theta$ ; (c), (d) The corresponding images in the projective space  $\mathcal{P}$ .

[20]. This complicates the task of distinguishing a transient chaotic set from a sustained chaotic set (attractor) in numerical experiments.

Consider system (2.29), which represents the complex Lorenz system (2.4) in the projective space  $\mathcal{P}$ , with  $r_1 = 23.5$ ,  $r_1 = 23.6$  and  $r_1 = 23.7$ . For a trajectory with a certain initial point, which is computed by a certain solver with specific parameters, we estimate the moment of the end of transient behavior as the moment when the trajectory falls into a small vicinity of the stable equilibrium  $S'_1$ . Using MATLAB's standard procedure `ode45` with default parameters (relative tolerance  $10^{-3}$ , absolute tolerance  $10^{-6}$ ) for system (2.29) with parameters  $r_1 = 23.5$ ,  $\sigma = 10$ ,  $r_2 = -e = 0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$  and for initial point  $u_0 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$ , a transient chaotic behavior is observed on the time interval  $[0, 1.78 \times 10^4]$ , for initial point  $u_0 = (0.4, 0.4, -0.3, 0.5)$  — on the time interval  $[0, 2.7 \times 10^4]$  and for initial point  $u_0 = (0.4, 0.4, 0.4, 0.4)$  — on the time interval  $[0, 4.6 \times 10^4]$ . If we slightly change the bifurcation parameter  $r_1$ , taking  $r_1 = 23.6$  and leaving all other parameters the same, and choosing initial point  $u_0 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$  a transient chaotic behavior is observed on the time interval  $[0, 3.49 \times 10^7]$ . For  $r_1 = 23.7$  with the same parameters and initial point a transient chaotic behavior continues over a time interval of more than  $[0, 10^8]$ . Thus, one can observe that a small increment of the bifurcation parameter  $r_1$  leads to a large



increment of the time of transient process. For  $r_1 \in (23.7, 24.09)$ , it is a tough problem to estimate the time of transient process since the time for numerical integration is very large. Therefore, inside this interval of parameters for the particular trajectories it is hard to say whether the chaotic behavior is a long-hidden transient process, or a hidden sustained attractor. Note also that, if we consider parameters  $r_1 = 23.5, \sigma = 10, r_2 = -e = 0.001, b = \frac{8}{3}$  with the same initial points and use `ode45` procedure with relative tolerance  $10^{-6}$ , for all these initial points the chaotic transient behavior will last over a time interval of more than  $[0, 10^7]$ , and corresponding transient chaotic sets won't collapse. To conclude this numerical study of transient chaotic behavior, we may suggest to specify precisely numerical solver, its parameters, initial data and time interval, along which the transient behavior continues.

Further in Appendix A, we study in detail the visualization of hidden transient chaotic sets in the complex Lorenz system in the form (2.8). We consider the "laser case", i.e.,  $e = -r_2$ , when system (2.8) has the equilibrium  $S_0$  and a circle of equilibria  $S_\theta$ . Two special techniques, i.e. numerical continuation method (NCM) and perpetual points method, are utilized to visualize hidden sets.

### 2.1.7 Discussion

In this section, the complex Lorenz system, describing baroclinic instability in the atmosphere or the physics of detuned lasers, was considered. Analytical and numerical results demonstrate that the complex Lorenz system's dynamics is very rich, and, in comparison with the real Lorenz system, the loss of global stability may be connected with appearance of significantly different dynamical regimes. As for the Lorenz system, for the complex Lorenz system, on the one hand, it is demonstrated the possibility of using the apparatus of Lyapunov functions to estimate the boundary of global stability. On the other hand, it is shown that this problem is connected with the localization of sustained hidden chaotic attractors and their distinguishing from the hidden long-term transient chaotic sets. An attempt to study the problem of existence of sustained hidden chaotic attractor in the complex Lorenz system is made in the framework of a special analytical transformation, taking into account the symmetry of the model.

## 2.2 Analytical and numerical study of chaotic dynamics in fractional-order complex Sprott system

In the present section, a novel fractional-order complex generalization of the Sprott system is proposed. The new fractional-order system has no equilibrium points; thus, the attractor which may exist in its phase space is a hidden one. The values of the fractional-order and the system

parameters at which chaotic and hyperchaotic attractors exist are calculated based on the sign of their Lyapunov exponents.

### 2.2.1 Preliminary results

Starting from the pioneering work of Lorenz [10], chaos theory has gained a great deal as an important branch of modern physics and mathematics with a broad range of applications in chemistry, physics, engineering, biology, and economics [168; 169]. Further, since Rossler reported the first hyperchaotic system [11], many hyperchaotic systems with real variables are introduced and investigated with increasing interest in several fields of nonlinear circuits, control, synchronization, communications, lasers and complex networks [170; 171]. Hyperchaotic system is usually defined as a system with at least two positive Lyapunov exponents. Due to the higher unpredictability of hyperchaotic systems, they have better performance in some fields such as chaos communication and encryption, than the traditional chaotic systems [172]. Two effective techniques are introduced to generate a hyperchaotic system from an ordinary chaotic system; the first is by adding a simple state feedback control to the system, for example, many four-dimensional hyperchaotic systems are presented by this way (see, e.g., [170; 172–175]); the second, by considering the complex version of the system, for example, several hyperchaotic complex systems are found (see, e.g., [51; 176–180]). Since the hyperchaotic systems are more complex and chaos generation in 4D autonomous systems is more difficult than in 3D chaotic systems; thus, generating a hyperchaotic attractor, particularly designing a hyperchaotic system from an originally chaotic system, is a theoretically very attractive and yet technically quite challenging task [181–183].

Attractors in hyperchaotic/chaotic systems can be regarded as self-excited and hidden attractors [16; 35; 147]. The self-excited attractors can be found in Lorenz [184], Rossler [11], Chen [185], Lü [170; 186] systems. Hidden attractors could be found in hyperchaotic/chaotic systems with; no equilibrium point [51; 187; 188], one or more stable equilibrium points [189; 190], and an infinite number of equilibria (line/plane/circle) [56; 191; 192]. In contrast to self-excited attractors, the localization of hidden attractors is a tricky task because of the unavailability of unstable equilibrium in their vicinity. The study of the existence of hidden attractors in physical systems is important because it can lead to unexpected behaviors [18; 193; 194].

Most hyperchaotic/chaotic systems have been reported with real variables and integer-order; accordingly, they belong to the integer-order real-valued dynamical system. Whereas many real-life phenomena are described by complex-valued models, for example, physics of detuned laser [55; 110; 111], parametric excitation of waves in a magneto-active plasma [130], and the problem of transition to turbulence in Couette flow between cylinders [130]. In recent years, the fractional calculus is increasingly used as an effective tool to model many systems in physics and engineering. Many systems in the interdisciplinary fields could be described by fractional differential equations, such as viscoelastic systems, dielectric polarization, electrode-electrolyte polarization, heat con-

duction, resistance-capacitance-inductance (RLC) interconnect and electromagnetic waves (see, e.g., [61; 67; 195; 196]). Remark also that currently in literature hidden attractors are mostly introduced and investigated in nonlinear dynamical systems with real variables. Investigation of hidden attractors in systems of fractional order and systems with complex variables is a relatively new direction of research, which is actively developing at the moment.

Motivated from the above discussion, this work aims to report a new fractional-order complex-valued model, which may exhibit hidden hyperchaotic attractors.

## 2.2.2 The fractional-order complex hyperchaotic Sprott system

In [197], Sprott proposed a collection of autonomous chaotic systems with polynomial nonlinearities. Recently, Zhang et al., by applying a simple state feedback control technique, reported the following 4D Sprott system with integer-order and real variables [198]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -yz - dw, \\ \dot{y} = z^2 - 1, \\ \dot{z} = ax - byz - z, \\ \dot{w} = cz, \end{cases} \quad (2.31)$$

where  $a, b, c, d$  are real parameters. Remark that system (2.31) can exhibit only chaotic attractor and hyperchaotic behavior not visualized in the system [198].

Here in this work, we introduce and examine the following fractional-order complex generalization of the Sprott system:

$$\begin{cases} D_t^\alpha X = -YZ - dW, \\ D_t^\alpha Y = Z^*Z - 1, \\ D_t^\alpha Z = aX - bYZ - Z, \\ D_t^\alpha W = cZ, \end{cases} \quad (2.32)$$

where  $X = x_1 + ix_2$ ,  $Y = x_3$ ,  $Z = x_4 + ix_5$ ,  $W = x_6 + ix_7$ ,  $i = \sqrt{-1}$ , a "\*" denotes complex conjugate variables and  $a, b, c, d$  are real parameters. The Caputo differential operator is a linear operator that is:  $D_t^\alpha(ax(t) + by(t)) = aD_t^\alpha x(t) + bD_t^\alpha y(t)$ , where  $a$  and  $b$  are constants, using this property and equating real and imaginary parts of (2.32), we obtain the equivalent real-valued autonomous system:

$$\begin{cases} D_t^\alpha x_1 = -x_3x_4 - dx_6, \\ D_t^\alpha x_2 = -x_3x_5 - dx_7, \\ D_t^\alpha x_3 = x_4^2 + x_5^2 - 1, \\ D_t^\alpha x_4 = ax_1 - bx_3x_4 - x_4, \\ D_t^\alpha x_5 = ax_2 - bx_3x_5 - x_5, \\ D_t^\alpha x_6 = cx_4, \\ D_t^\alpha x_7 = cx_5. \end{cases} \quad (2.33)$$

The equilibrium points of system (2.33) can be found by solving the equations  $D_t^\alpha x_1 = D_t^\alpha x_2 = D_t^\alpha x_3 = D_t^\alpha x_4 = D_t^\alpha x_5 = D_t^\alpha x_6 = D_t^\alpha x_7 = 0$  namely

$$\begin{cases} -x_3x_4 - dx_6 = 0, \\ -x_3x_5 - dx_7 = 0, \\ x_4^2 + x_5^2 - 1 = 0, \\ ax_1 - bx_3x_4 - x_4 = 0, \\ ax_2 - bx_3x_5 - x_5 = 0, \\ cx_4 = 0, \\ cx_5 = 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

From the last two equations in (2.34), we have  $x_4 = x_5 = 0$ , which is not agreement with the third equation in (2.34). Thus, there are no equilibrium points in this system. Consequently, if system (2.33) has an attractor, then this attractor is a hidden one.

### 2.2.3 Dynamics of system

In this subsection, by projections of hidden hyperchaotic attractors and Lyapunov exponents the dynamical properties of system (2.33) are investigated. When varying the system parameters and the fractional-order the dynamical behaviors of system (2.33) will show diverse motions. For the numerical integration of system (2.33), we use the Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector algorithm [126], which can be used to both linear and nonlinear fractional-order differential equations.

**Fixing**  $(a, b, c, d) = (15, 1, 25.5, 0.01)$  **and varying the fractional-order**  $\alpha$ :

Fix the system parameters  $(a, b, c, d)$  and vary the fractional-order such that  $\alpha \in [0.8, 1[$  with step size 0.01. For  $\alpha \in [0.8, 1[\setminus\{0.95, 0.99\}$  system (2.33) has hidden hyperchaotic attractors, while at  $\alpha = 0.95, 0.99$  it has hidden chaotic attractor. The corresponding local finite-time Lyapunov exponents on the time interval  $[0, 100]$  and initial point  $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$  versus  $\alpha \in [0.8, 1[$  is shown in Fig. 2.10. In Table 2, we calculated the Local finite-time Lyapunov exponents of system (2.33) at some values of the fractional-order  $\alpha$ . In Figs. 2.11 and 2.12 the hidden chaotic and hyperchaotic attractors of system (2.33) are plotted in different projections with  $\alpha = 0.99$  and  $\alpha = 0.89$ , respectively.

Table 2: Local finite-time Lyapunov exponents with  $(a, b, c, d) = (15, 1, 25.5, 0.01)$ .

$\alpha$	$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$	$LE_4$	$LE_5$	$LE_6$	$LE_7$	Dynamics
0.99	0.3262	0	-0.0106	-0.1211	-0.4005	-1.3469	-1.9472	Chaotic
0.93	0.3500	0.0107	0	-0.0915	-0.5194	-1.8110	-2.5981	Hyperchaotic
0.89	0.4655	0.0283	0	-0.1474	-0.6928	-2.1515	-3.1542	Hyperchaotic
0.81	0.6802	0.0249	0	-0.2960	-0.9280	-3.2143	-4.5505	Hyperchaotic

**Fixing**  $(b, c, d) = (1, 25.5, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.89$  **and varying**  $a$ :

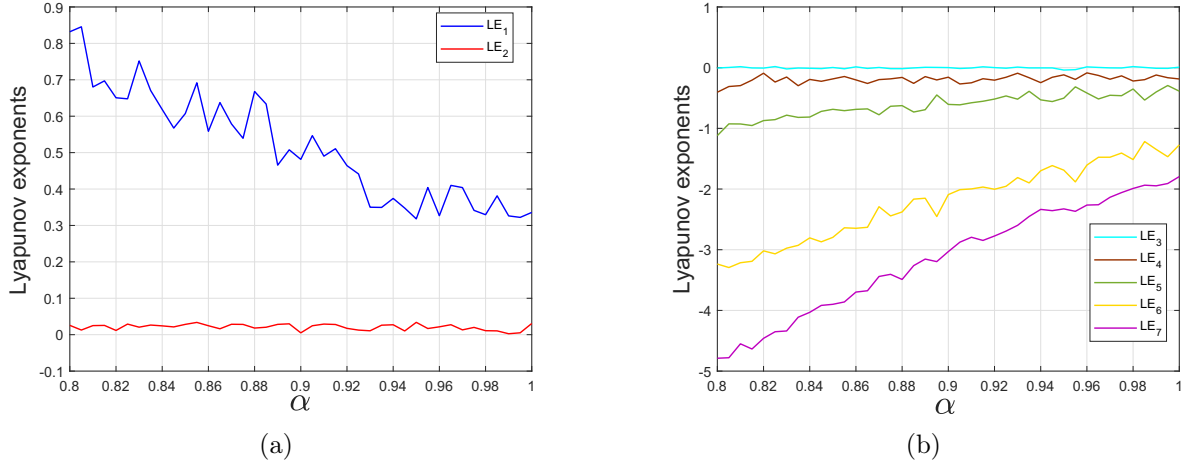


Figure 2.10 — Local finite-time Lyapunov exponents on the time interval  $[0, 100]$  of system (2.33) with varying the fractional-order s.t.  $\alpha \in [0.8, 1[$ .

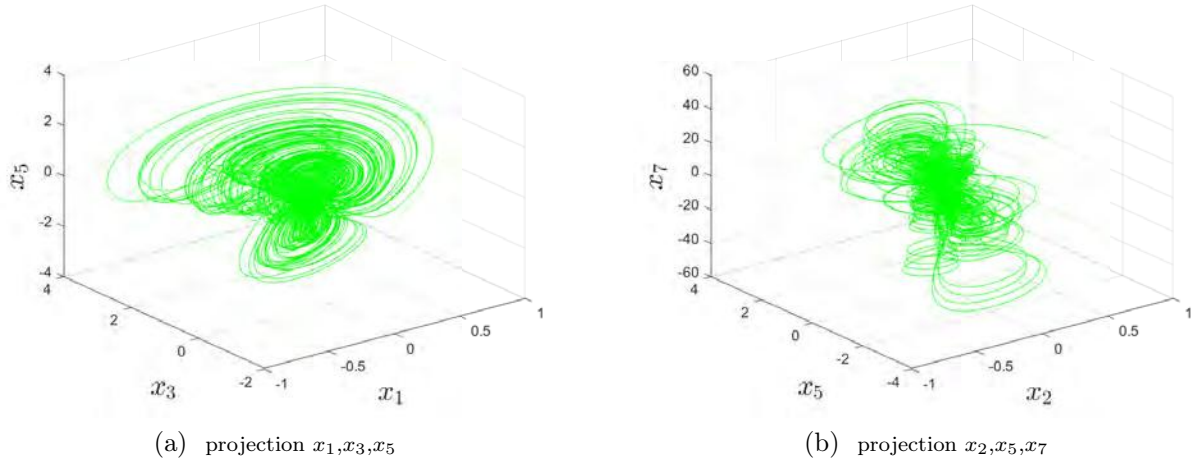


Figure 2.11 — Visualization of hidden chaotic attractor of system (2.33) with  $(a, b, c, d) = (15, 1, 25.5, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.99$  and initial point  $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ .

Fix the system parameters  $(b, c, d)$  and the fractional-order  $\alpha$  and vary  $a$  such as  $a \in [5, 20]$  with step size 0.1. The corresponding local finite-time Lyapunov exponents on the time interval  $[0, 100]$  and initial point  $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$  versus  $a \in [5, 20]$  are depicted in Fig 2.13. When  $a \in [5.7, 6.1]$ ,  $a = \{12.3, 12.4\}$  system (2.33) has hidden chaotic attractors, whereas it has hidden hyperchaotic attractors for  $a \in [5, 5.7[$ ,  $]6.1, 12.3[$ ,  $]12.4, 20]$ . For different values of the parameter  $a$ , the local finite-time Lyapunov exponents are shown in Table 3.

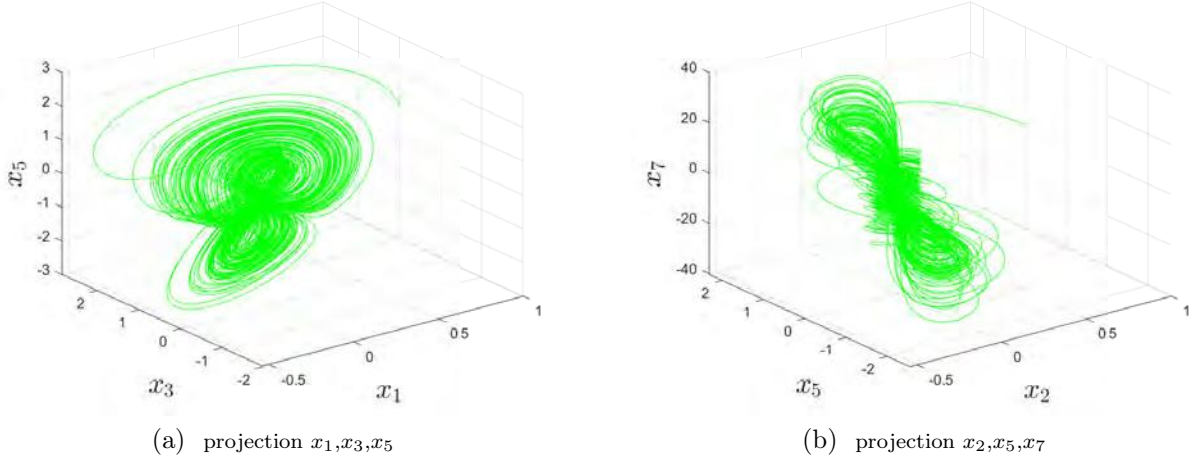


Figure 2.12 – Visualization of hidden hyperchaotic attractor of system (2.33) with  $(a, b, c, d) = (15, 1, 25.5, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.89$  and initial point  $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ .

Table 3: Local finite-time Lyapunov exponents with  $(b, c, d) = (1, 25.5, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.89$ .

$a$	$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$	$LE_4$	$LE_5$	$LE_6$	$LE_7$	Dynamics
5.7	0.3553	0	-0.0444	-0.1882	-0.5092	-2.1559	-2.8011	Chaotic
10	0.4740	0.0278	0	-0.1652	-0.4988	-2.2706	-3.0580	Hyperchaotic
15	0.4655	0.0283	0	-0.1474	-0.6928	-2.1515	-3.1542	Hyperchaotic
19.9	0.5144	0.0254	0	-0.2251	-0.8290	-2.0414	-3.1531	Hyperchaotic

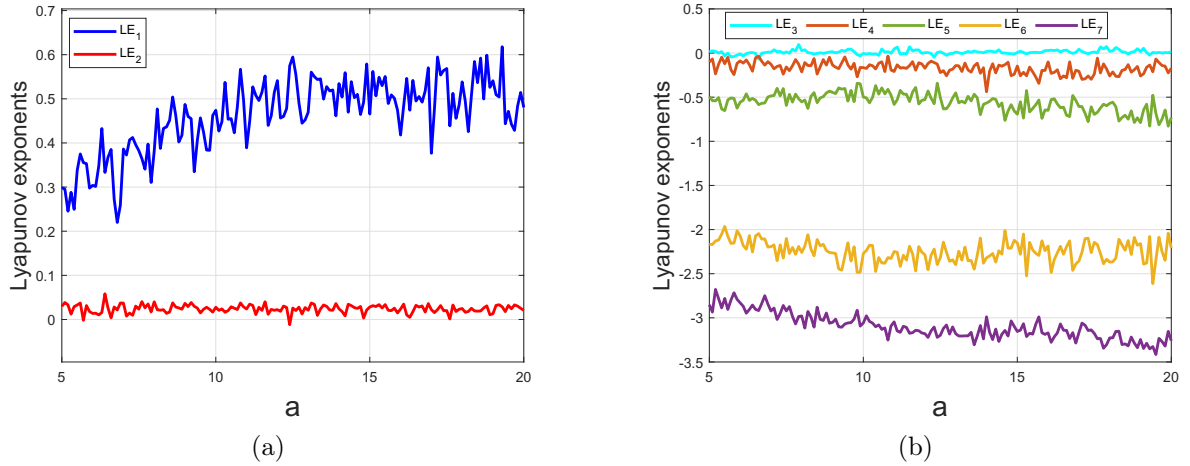


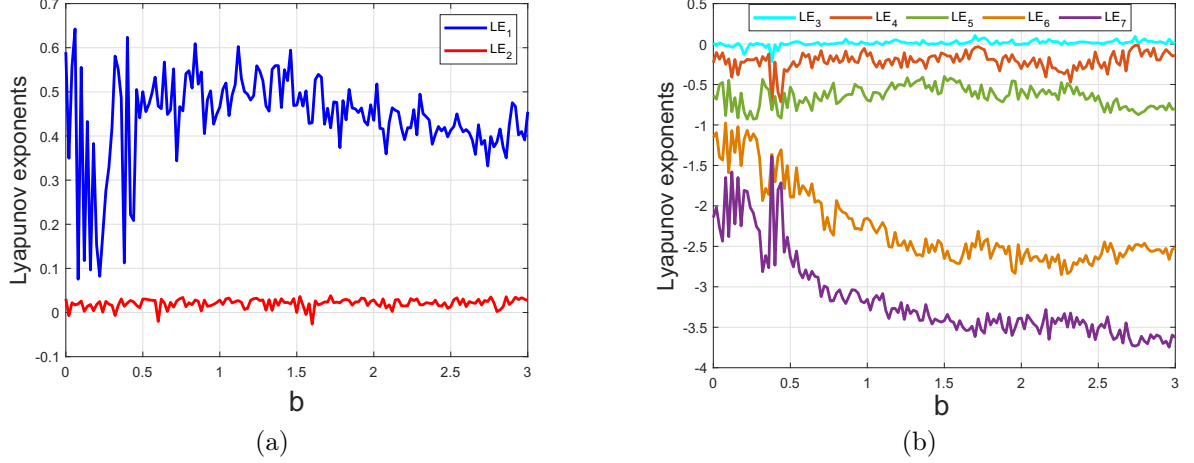
Figure 2.13 – Local finite-time Lyapunov exponents on the time interval  $[0, 100]$  of system (2.33) versus  $a \in [5, 20]$ .

**Fixing  $(a, c, d) = (15, 25.5, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.89$  and varying  $b$ :**

Fix the system parameters  $(a, c, d)$  and the fractional-order  $\alpha$  and vary  $b$  such as  $b \in [0, 3]$  with step size 0.02. For  $b \in ]0.1, 0.24[$ ,  $]0.3, 0.42[$ ,  $b = \{0.62, 1.6\}$  system (2.33) has hidden chaotic attractors, whereas it has hidden hyperchaotic attractors for  $b \in [0, 0.1]$ ,  $[0.24, 0.3]$ ,  $[0.42, 0.62[$ ,  $]0.62, 1.6[$ ,  $]1.6, 3]$ . In Fig 2.14, the local finite-time Lyapunov exponents on the time interval  $[0, 100]$  and initial point  $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$  versus  $b \in [0, 3]$  are estimated. Table 4 shows the local finite-time Lyapunov exponents with different values of the parameter  $b$ .

Table 4: Local finite-time Lyapunov exponents with  $(a, c, d) = (15, 25.5, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.89$ .

$b$	$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$	$LE_4$	$LE_5$	$LE_6$	$LE_7$	Dynamics
0.1	0.5555	0.0260	0	-0.1826	-0.4490	-1.5907	-2.3795	Hyperchaotic
0.2	0.1528	0	-0.1299	-0.2261	-0.8391	-1.1789	-1.8081	Chaotic
1.6	0.4302	0	-0.0261	-0.2144	-0.4513	-2.7102	-3.4178	Chaotic
3	0.4548	0.0271	0	-0.1433	-0.8033	-2.5146	-3.6267	Hyperchaotic

Figure 2.14 — Local finite-time Lyapunov exponents on the time interval  $[0, 100]$  of system (2.33) versus  $b \in [0, 3]$ .

**Fixing  $(a, b, d) = (15, 1, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.89$  and varying  $c$ :**

Varying the parameter  $c$  in the interval  $[5, 30]$  with step size 0.1 and fix  $(a, b, d)$ ,  $\alpha$ . When  $c \in [5.5, 6.3]$ ,  $c = \{5, 5.1, 10.1, 10.6, 17.6, 20.7, 21, 22.3, 23.8, 27.1\}$  system (2.33) has hidden chaotic attractors, while it has hidden hyperchaotic attractors when  $c \in [5.2, 5.4]$ ,  $[6.4, 30] \setminus \{10.1, 10.6, 17.6, 20.7, 21, 22.3, 23.8, 27.1\}$ . In Fig 2.15, the local finite-time Lyapunov exponents on the time interval  $[0, 100]$  and initial point  $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$  versus  $c \in [5, 30]$  are estimated. Table 5 shows the local finite-time Lyapunov exponents with different values of the parameter  $c$ .

Table 5: Local finite-time Lyapunov exponents with  $(a, b, d) = (15, 1, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.89$ .

$c$	$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$	$LE_4$	$LE_5$	$LE_6$	$LE_7$	Dynamics
5	0.5815	0	-0.0117	-0.1200	-0.1819	-2.6505	-3.3178	Chaotic
6.3	0.6397	0	-0.0445	-0.0708	-0.2942	-2.5457	-3.3876	Chaotic
7	0.5670	0.0509	0	-0.0457	-0.3651	-2.4374	-3.3722	Hyperchaotic
11	0.6380	0.0182	0	-0.0743	-0.3843	-2.3103	-3.2429	Hyperchaotic

**Fixing  $(a, b, c) = (15, 1, 25.5)$ ,  $\alpha = 0.89$  and varying  $d$ :**

Fix  $(a, b, c)$ ,  $\alpha$  and vary the parameter  $d$  in the interval  $[0, 0.1]$  with step size 0.001. When  $d \in [0, 0.43] \setminus \{0.007, 0.033\}$ ,  $[0.067, 0.069]$ ,  $d = \{0.052, 0.053, 0.061, 0.074, 0.087, 0.099\}$  system (2.33) has hidden hyperchaotic attractors, while it has hidden chaotic attractors when  $d \in [0.044, 0.067] \setminus \{0.052, 0.053, 0.061\}$ ,  $[0.07, 0.1] \setminus \{0.074, 0.087, 0.099\}$ ,  $d = \{0.007, 0.033\}$ . In Fig 2.16, the local finite-time Lyapunov exponents on the time interval  $[0, 100]$  and initial point

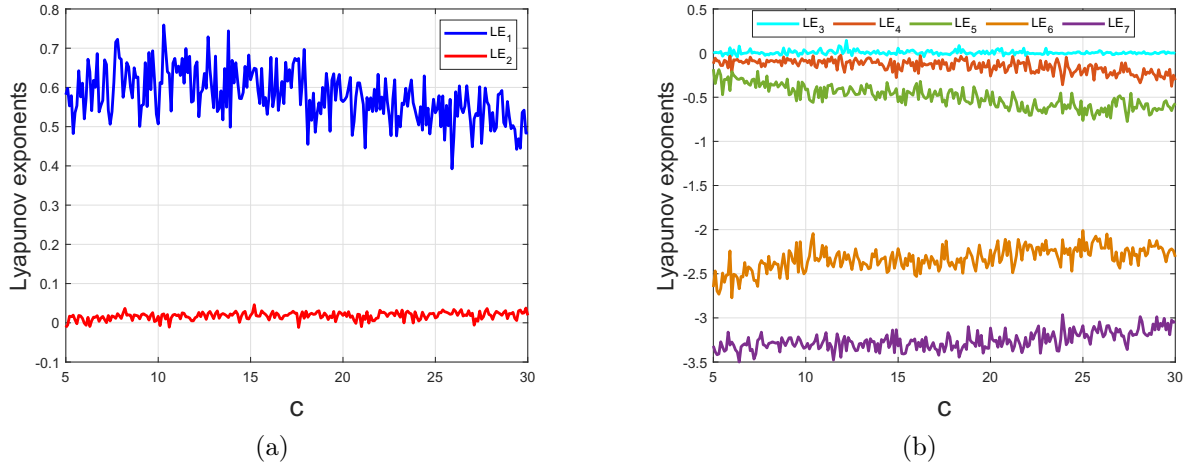


Figure 2.15 — Local finite-time Lyapunov exponents on the time interval  $[0, 100]$  of system (2.33) versus  $c \in [5, 30]$ .

$x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$  versus  $d \in [0, 0.1]$  are estimated. Table 6 shows the local finite-time Lyapunov exponents with different values of the parameter  $d$ .

Table 6: Local finite-time Lyapunov exponents with  $(a, b, c) = (15, 1, 25.5)$ ,  $\alpha = 0.89$ .

$d$	$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$	$LE_4$	$LE_5$	$LE_6$	$LE_7$	Dynamics
0.011	0.5908	0.0281	0	-0.2264	-0.7102	-2.1576	-3.21018	Hyperchaotic
0.023	0.3604	0.0207	0	-0.1787	-0.4653	-2.8303	-3.4664	Hyperchaotic
0.033	0.4233	0	-0.0068	-0.3299	-0.3737	-3.2948	-3.7718	Chaotic
0.044	0.2713	0	-0.0172	-0.3753	-0.5312	-3.2501	-3.6635	Chaotic

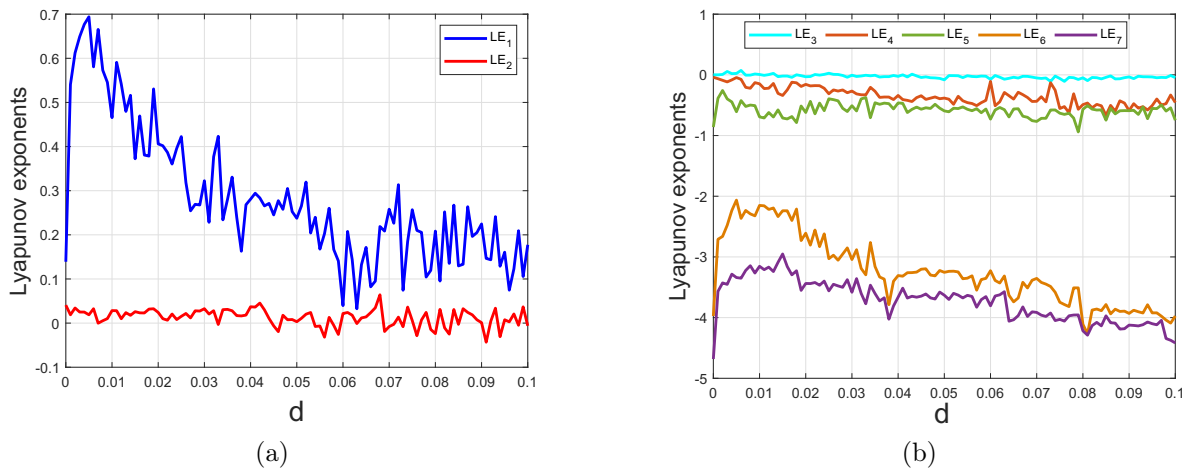


Figure 2.16 — Local finite-time Lyapunov exponents on the time interval  $[0, 100]$  of system (2.33) versus  $d \in [0, 0.1]$ .



## 2.2.4 Discussion

In this section, the fractional-order complex generalization of the Sprott system was proposed. The model dynamics were investigated; for a wide range of values of system parameters and fractional-order, the new system can exhibit hyperchaotic/chaotic behavior. This kind of hyperchaotic attractors doesn't exist for system (2.31) with integer-order and real variables. Since the new system has no equilibrium points thus, it belongs to the category of hidden chaotic systems.

## 2.3 Analytical and numerical study of chaotic dynamics in complex Rabinovich system

In this section, the complex Rabinovich system is considered, and the system's stability analysis and dynamics are investigated.

### 2.3.1 Preliminary results

In recent years, hyperchaotic systems with real variables are introduced and investigated with increasing interest in several fields of nonlinear circuits, control, synchronization, communications and lasers [170; 171]. Hyperchaotic system is usually defined as a system with at least two positive Lyapunov exponents, indicating that the chaotic dynamics of the system are expanded in more than one direction, giving rise to more complex attractors [199]. Due to the higher unpredictability of hyperchaotic systems, they have better performance in some fields such as secure communication compared with the traditional chaotic systems [172]. Hyperchaotic attractors have been extensively studied on a large number of real dynamical systems of physical concern, involving real variables.

In this work, the complex hyperchaotic Rabinovich system as an attractive physical model is considered. The dynamics of the system are investigated.

### 2.3.2 The complex Rabinovich system

The hyperchaotic complex Rabinovich system, which describes the problem of transition to turbulence in Couette flow between cylinders, can be written as the following [130]:

$$\begin{cases} \dot{X} = -vX + YX^* + ZY^*, \\ \dot{Y} = \alpha Y - X^2 + 2X^*Z - \beta|Y|^2Y, \\ \dot{Z} = \gamma Z - 3XY - \beta|Z|^2Z, \end{cases} \quad (2.35)$$

where  $X = x_1 + ix_2$ ,  $Y = x_3 + ix_4$ ,  $Z = x_5 + ix_6$ ,  $i = \sqrt{-1}$ , a "\*" superscript denotes the complex conjugate of a variable and  $v, \alpha, \beta, \gamma$  are real parameters.

To investigate the stability criteria of the system (2.35), we consider the following equivalent real form, which can be derived by equating real and imaginary parts of (2.35):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -vx_1 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + x_4x_6, \\ \dot{x}_2 = -vx_2 + x_1x_4 - x_2x_3 + x_3x_6 - x_4x_5, \\ \dot{x}_3 = \alpha x_3 + (x_2^2 - x_1^2) - 2(x_1x_5 + x_2x_6) - \beta x_3(x_3^2 + x_4^2), \\ \dot{x}_4 = \alpha x_4 - 2x_1x_2 + 2(x_1x_6 - x_2x_5) - \beta x_4(x_3^2 + x_4^2), \\ \dot{x}_5 = \gamma x_5 - 3(x_1x_3 - x_2x_4) - \beta x_5(x_5^2 + x_6^2), \\ \dot{x}_6 = \gamma x_6 - 3(x_1x_4 + x_2x_3) - \beta x_6(x_5^2 + x_6^2). \end{cases} \quad (2.36)$$

Equating all equations in (2.36) with zero, we get  $F_0 = (0,0,0,0,0,0)$  is the only equilibrium point. The characteristic polynomial of the Jacobian matrix at  $F_0$  is:

$$(v + \lambda)^2(\alpha - \lambda)^2(\gamma - \lambda)^2 = 0. \quad (2.37)$$

For  $v > 0$ ,  $\alpha < 0$ ,  $\gamma < 0$ , all eigenvalues of the characteristic polynomial (2.37) are negative; thus,  $F_0$  is stable and otherwise is unstable.

### 2.3.3 Dynamics of system

In the present subsection, we briefly investigate the dynamical behavior of the system (2.36). When  $v = -0.03$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $\gamma = 0.11$ ,  $F_0$  is unstable and system (2.36) has a hyperchaotic self-excited attractor (see Fig. 2.17). Utilizing the adaptive numerical method [47], for trajectory with initial point  $x_1 = x_2 = \dots = x_5 = x_6 = 0.1$  the relevant local finite-time Lyapunov exponents on the interval  $[0, 100]$  can be estimated:  $LE_1 = 2.2911$ ,  $LE_2 = 0.1471$ ,  $LE_3 = 0.0651$ ,  $LE_4 = 0$ ,  $LE_5 = -0.4913$ ,  $LE_6 = -2.3975$ .

To demonstrate the blue set in Fig. 2.17 is attractor around the equilibrium point  $F_0$  we construct a small spherical vicinity of radius 0.2 and consider 100 random initial points on it (see Fig. 2.18). We observed that in this numerical experiment all chosen starting trajectories from this vicinity approach the desired limiting regime (blue set). Thus, from this point of view we could call this set an attractor. We repeated this experiment several times and got the same conclusion.

In literature, there are known examples of systems with hidden attractors co-existing with unique locally stable equilibrium. For example, such systems appear in the counter-examples to

the famous Aizerman and Kalman conjectures [200]. Since the Rabinovich system (2.36) also has a unique zero equilibrium point, it is natural to search for hidden oscillations by analyzing the equilibrium point's stability boundaries. Unfortunately, all the experiments in this direction gave no successful result - all the revealed sets turned out to be transient chaotic sets.

For  $v = -0.001$ ,  $\alpha = 0.00077$ ,  $\beta = -0.000191$ ,  $\gamma = 0.001$ ,  $F_0$  is stable and a hidden transient chaotic is visualized in system (2.36), which persist in a small time interval  $[0, 3000]$  with initial point  $x_1 = x_2 = \dots = x_5 = x_6 = 5$  (see Fig. 2.19).

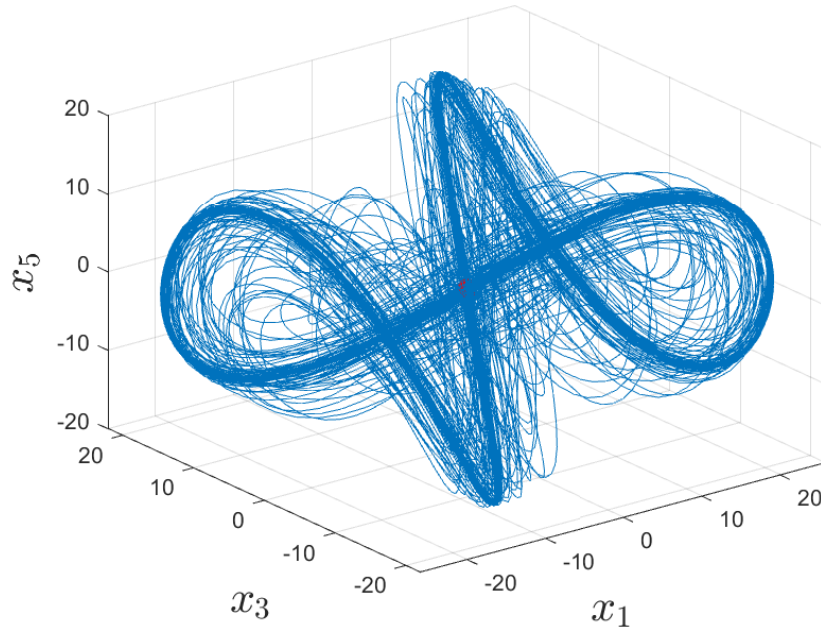


Figure 2.17 — Localization of a hyperchaotic attractor of system (2.36) with  $v = -0.03$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $\gamma = 0.11$ .

Since, currently, there are no results about dissipativity in the sense of Levinson<sup>5</sup> and any criteria of global stability (see e.g. [19]) for system (2.35), the question of the existence of hidden attractors in system (2.35) is still open.

### 2.3.4 Discussion

In this section, the hyperchaotic complex Rabinovich system describing the transition to turbulence in Couette flow between cylinders was considered. The stability criteria of the system were analyzed. From the numerical results, it was shown that the system's dynamics are very rich and complicated, which, in turn, may be crucial in different applications, e.g., secure communication. The existence of hidden attractors in the system is still an open problem.

<sup>5</sup>The existence of an absorbing set in the phase space facilitates the problem of detecting hidden oscillations since all the limiting regimes will be located inside this compact set. Without this property, in general, to reveal all limiting regimes, one needs to scan all the phase space.

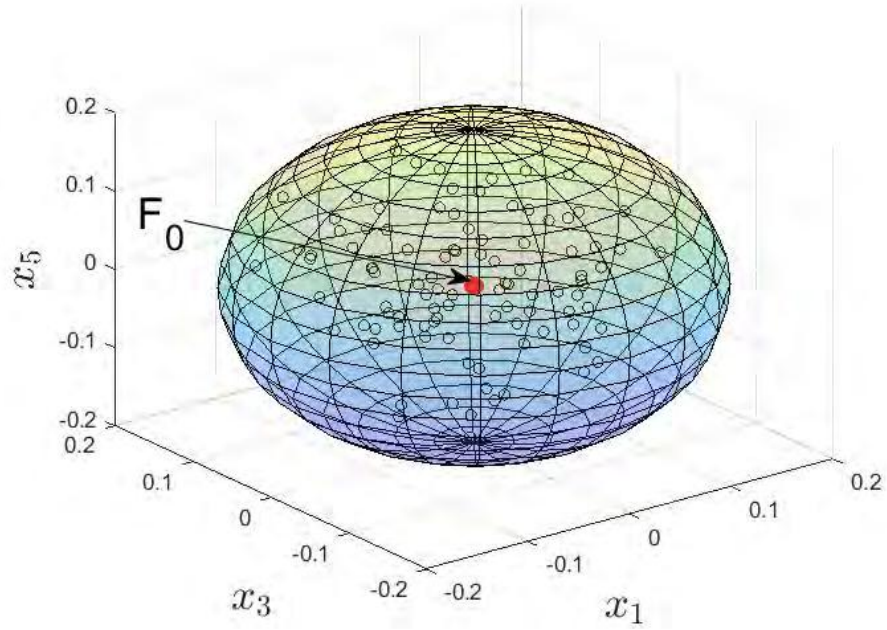


Figure 2.18 — A spherical around the equilibrium point  $F_0$  with 100 initial points on it.

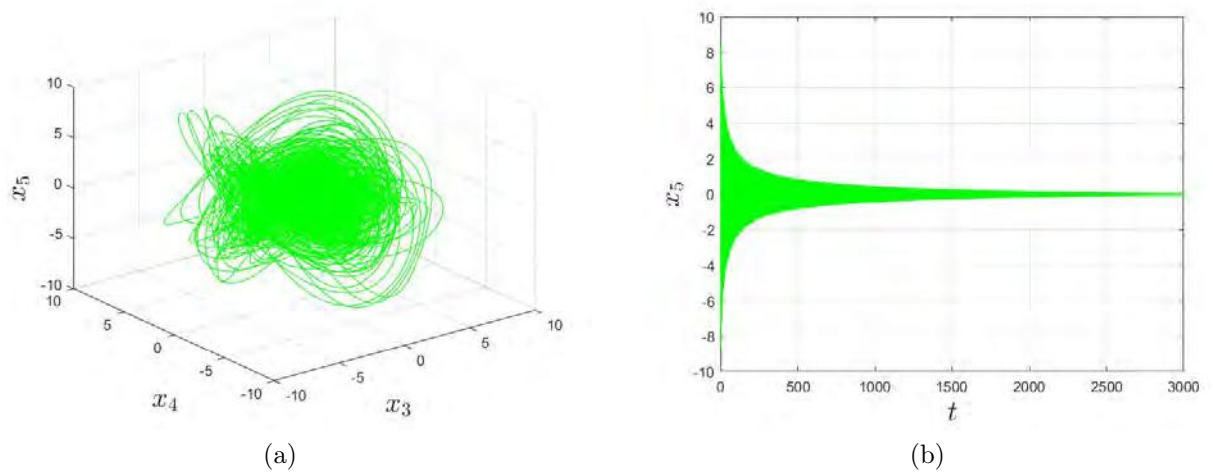


Figure 2.19 — Visualization of a hidden transient chaotic set in system (2.36)

## Chapter 3. Synchronization of complex hyperchaotic systems with integer and fractional orders and applications

In this chapter, new synchronization strategies relying on the Lyapunov stability theory and stability criteria of fractional-order systems to achieve synchronization for hyperchaotic complex-valued systems are developed. Based on these synchronization strategies, new schemes to improve secure communication and cryptosystems are suggested.

### 3.1 Complete synchronization for fractional-order complex hyperchaotic systems using active control technique

Synchronization of fractional-order hyperchaotic complex systems is an interesting phenomenon since it has several applications in applied sciences. Based on the complexity of hyperchaotic dynamical systems and unpredictability of hidden attractors, which may exist in their phase spaces and could be beneficial in secure communications, a scheme to derive the analytical formula of the control functions is stated to study complete synchronization. Further comparison of this analytical formula with numerical experiments yields an interesting agreement. The fractional-order complex Sprott system is proposed to study this kind of synchronization. A secure communication scheme based on the complete synchronization of hyperchaotic fractional-order complex Sprott system is presented. Two types of masked messages (plain text and audio signal) are considered as test examples.

#### 3.1.1 Preliminary results

Synchronization is an important phenomenon in nonlinear science, which was, at first, studied for integer-order dynamical systems (see e.g. [93; 201; 202]). Further, synchronization of chaotic fractional-order systems started to attract increasing attention due to its variety of applications in a number of applied fields including secure communication, image processing, information science, control, etc (see, e.g. [89–91]).

In both of these cases, the associated variables of dynamical systems were real-valued. Meanwhile, in the applied fields there are problems, such as detuned laser optics and two-layer baroclinic instability with weak viscosity beta-effect (see, e.g. [54; 55]), which are described by complex systems. Consideration of such systems in synchronization problems instead of real-valued ones and the corresponding doubling of the number of variables leads to more complicated behavior of the

corresponding system, which is crucial in many applications, such as e.g. secure communication and encryption [103].

In this section, the active control method is used to study the synchronization of hidden hyperchaotic attractors in the fractional-order complex Sprott systems. Based on this kind of synchronization, a scheme for secure communication is developed and applied.

### 3.1.2 Complete synchronization method of fractional-order hyperchaotic complex Sprott systems

In this subsection, we study the complete synchronization of two identical fractional-order hyperchaotic of the systems (2.33) using active control technique [84; 124] with master, slave, and error systems, defined as:

$$D_t^\alpha \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + G(\mathbf{x}(t)), \quad (3.1)$$

$$D_t^\alpha \mathbf{y}(t) = A\mathbf{y}(t) + G(\mathbf{y}(t)) + \vartheta, \quad (3.2)$$

$$e(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t), \quad (3.3)$$

where  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_7)^T$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_7)^T$  are the pseudo-state vectors of systems (3.1), (3.2),  $A \in \mathbf{R}^{7 \times 7}$  is constant matrix of system parameters,  $G : \mathbf{R}^7 \rightarrow \mathbf{R}^7$  is continuous vector function,  $\vartheta : \mathbf{R}^7 \times \mathbf{R}^7 \rightarrow \mathbf{R}^7$ ,  $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_7)^T$  is control vector function of the slave system (3.2). Following the ideas from [84] and using Theorem 1.2, we will design an appropriate control to achieve synchronization in our fractional-order setup as follows.

**Theorem 3.1.** Synchronization between two identical hyperchaotic fractional-order systems (3.1), (3.2) and the error in the form (3.3) will be achieved if the control vector function is designed as follows:

$$\vartheta = G(\mathbf{x}) - G(\mathbf{y}) - K e, \quad (3.4)$$

where  $K$  is a control gain matrix, which satisfies  $|\arg(\lambda_i(A - K))| > \alpha\pi/2$  for all eigenvalues  $\lambda_i$  of  $(A - K)$ .

*Proof.* The  $\alpha$ -derivative of the synchronization error (3.3) is

$$D_t^\alpha e(t) = D_t^\alpha \mathbf{y}(t) - D_t^\alpha \mathbf{x}(t). \quad (3.5)$$

Substituting Eqs. (3.1), (3.2), and (3.4) in Eq. (3.5) then

$$D_t^\alpha e(t) = (A - K) e. \quad (3.6)$$

According to the criterion from Theorem 1.2 i.e.  $|\arg(\lambda_i(A - K))| > \alpha\pi/2$ , the error vector  $e(t)$  is asymptotically stable, which means that  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ .  $\square$

The master and the slave systems of hyperchaotic fractional-order system (2.33) can be written as:

$$\begin{pmatrix} D_t^\alpha x_1 \\ D_t^\alpha x_2 \\ D_t^\alpha x_3 \\ D_t^\alpha x_4 \\ D_t^\alpha x_5 \\ D_t^\alpha x_6 \\ D_t^\alpha x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3x_4 \\ -x_3x_5 \\ x_4^2 + x_5^2 - 1 \\ -bx_3x_4 \\ -bx_3x_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\begin{pmatrix} D_t^\alpha y_1 \\ D_t^\alpha y_2 \\ D_t^\alpha y_3 \\ D_t^\alpha y_4 \\ D_t^\alpha y_5 \\ D_t^\alpha y_6 \\ D_t^\alpha y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_3y_4 \\ -y_3y_5 \\ y_4^2 + y_5^2 - 1 \\ -by_3y_4 \\ -by_3y_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \\ \vartheta_5 \\ \vartheta_6 \\ \vartheta_7 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Consider the following values of system parameters:  $a = 15$ ,  $b = 1$ ,  $c = 25.5$ ,  $d = 0.01$  with  $\alpha = 0.89$ . For these parameters, the system (3.7) has a hidden hyperchaotic attractor. If we choose the control gain matrix  $K$  as follows:

$$K = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Then, we have  $|\arg(\lambda_i(A - K))| > \alpha\pi/2$ . From (3.4) the control functions can be obtained as:

$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \\ \vartheta_5 \\ \vartheta_6 \\ \vartheta_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3y_4 - x_3x_4 - 5(y_1 - x_1) \\ y_3y_5 - x_3x_5 - 5(y_2 - x_2) \\ (x_4^2 - y_4^2) + (x_5^2 - y_5^2) - 7(y_3 - x_3) \\ y_3y_4 - x_3x_4 - 15(y_1 - x_1) \\ y_3y_5 - x_3x_5 - 15(y_2 - x_2) - 3(y_5 - x_5) \\ -3(y_6 - x_6) \\ -3(y_7 - x_7) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Systems (3.7) and (3.8) with (3.10) are solved numerically. In Fig. 3.1, the solutions of (3.7) and (3.8) are plotted with the initial conditions  $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$  and  $y(0) = (3.3, 4, 10.01, -0.7, -12, 7, -4)^T$ . It is clearly shown that synchronization is achieved after a short time  $t = T_s$  ( $T_s \approx 10s$ ). In Fig. 3.2, one sees that synchronization errors converge to zero.

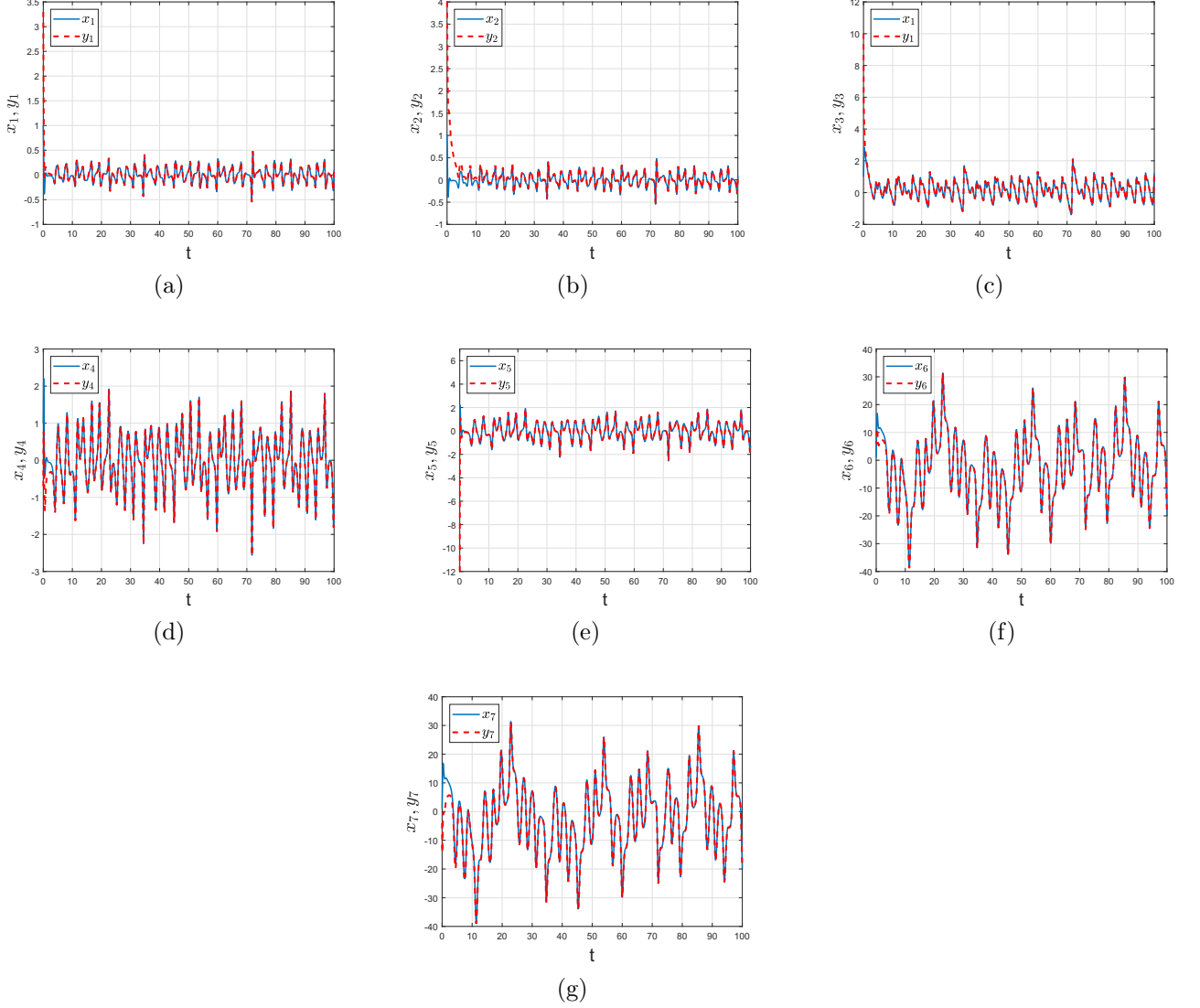


Figure 3.1 — Synchronization of hidden hyperchaotic attractors of systems (3.7) and (3.8), for  $a = 15$ ,  $b = 1$ ,  $c = 25.5$ ,  $d = 0.01$  with  $\alpha = 0.89$ .

### 3.1.3 Application to secure communications

In this subsection, we follow the ideas in [203], and apply the scheme for a secure communication system based on the fractional-order hyperchaotic Sprott system (3.7). The diagram of the scheme is shown in Fig. 3.3. The scheme consists of the following elements:



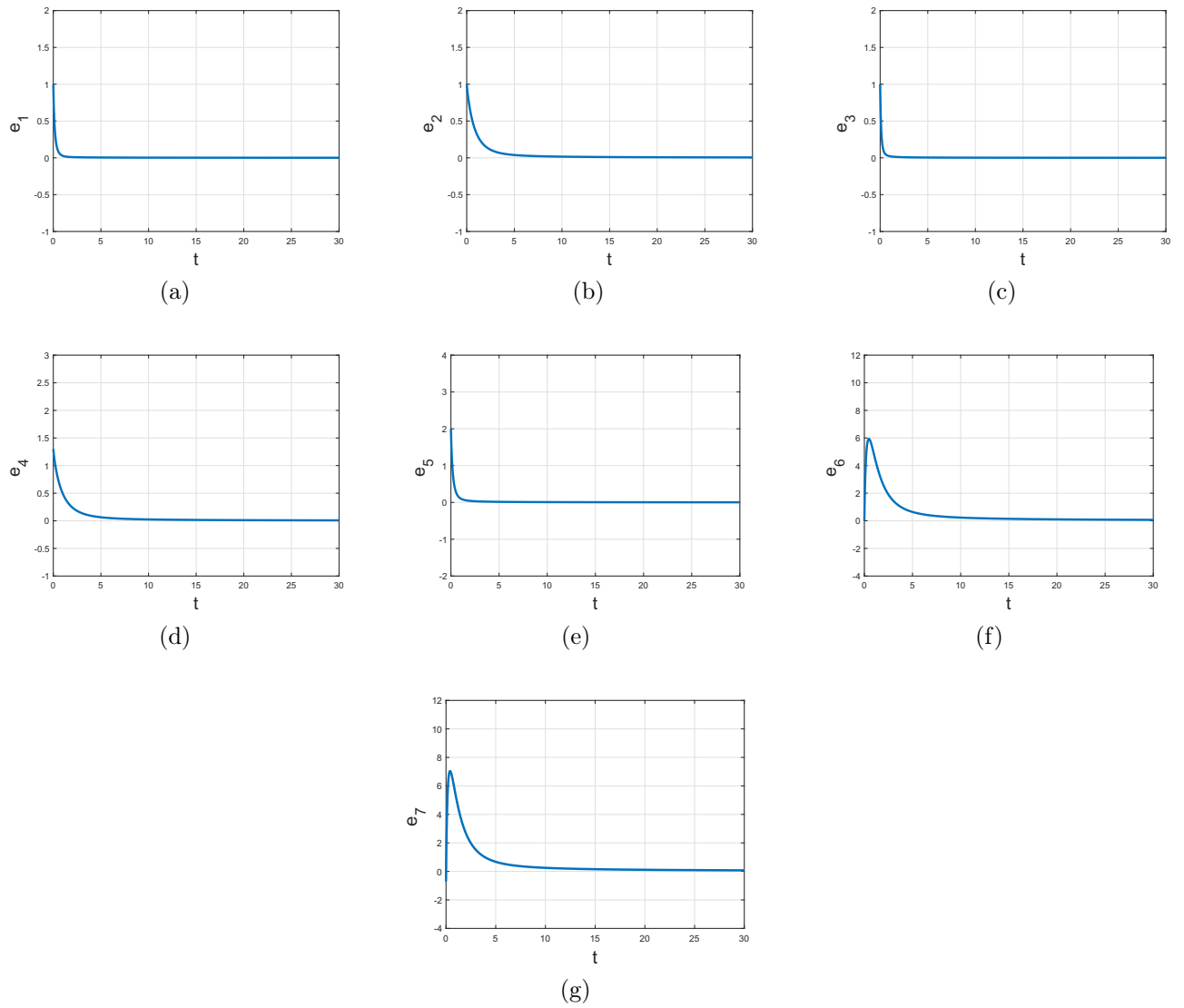


Figure 3.2 — The dynamics of error evolution described by the solutions of system (3.6).

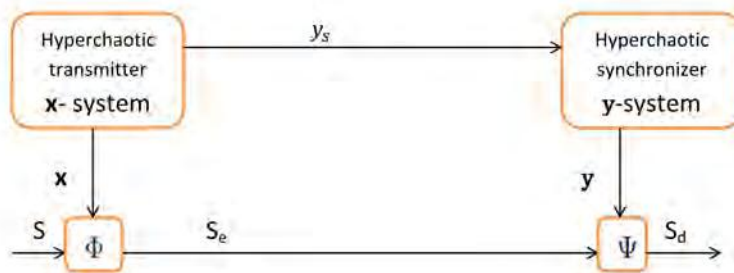


Figure 3.3 — Hyperchaotic secure-communication system.

- Hyperchaotic transmitter system: it is the fractional-order Sprott system (3.7) which generates the pseudo-state variables  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ .

- Encryption block: the message signal  $S(t)$  to be encrypted is injected into a non-linear function  $\Phi : \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  that is continuous in its first argument  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^7$  and satisfies the following property: for every fixed pair of  $(\mathbf{x}, S) \in \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}$ , there exists a unique function  $\Psi : \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  that is continuous in its first argument  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^7$ , such that  $\Psi(\mathbf{x}, \Phi(\mathbf{x}, S)) = S$ . The encryption function  $\Phi$  is built in terms of the hidden hyperchaotic pseudo-states. The result is a signal  $S_e(t)$  containing the message that is sent through one of the channels.
- Channels: two channels transmit the hidden hyperchaotic-state signals and the encrypted information-bearing signal.
- Synchronization block: for the receiver side of the communication system, a synchronization block is implemented to restore the hidden hyperchaotic pseudo-state signals and get the necessary information for the decryption.
- Decryption block: the masked message is decrypted by using a nonlinear function  $S_d(t) = \Psi(\mathbf{y}(t), S_e(t))$ ,  $\mathbf{y}(t) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)$ . In this case,  $\mathbf{y}(t)$  after a specific time  $t = T_s$  is the estimation of the hyperchaotic state  $\mathbf{x}(t)$  generated by the synchronization block.

### Numerical results

To illustrate secure communication scheme the fractional-order complex Sprott system is considered and the numerical simulations are performed in MATLAB. The transmitter is the implementation of Eq. (3.7) and the receiver is the implementation of Eq. (3.8). As shown in subsection 3.1.2 for  $\alpha = 0.89$  and  $(a, b, c, d) = (15, 1, 25.5, 0.01)$ , the system (3.7) has a hidden hyperchaotic attractor. The synchronization is achieved after  $t = T_s$  ( $T_s \approx 10s$ ) if the control gain matrix  $K$  is chosen as in (3.9).

We use the following ciphering and deciphering functions respectively:

$$S_e = \Phi(\mathbf{x}, S) = (5 + x_5)^2 + (3 + x_5^2)S, \quad (3.11)$$

$$S_d = \Psi(\mathbf{y}, S_e) = -\frac{(5 + y_5)^2}{3 + y_5^2} + \frac{S_e}{3 + y_5^2}. \quad (3.12)$$

The information signal is chosen in two forms

**I.** A plain text which may contain alphabets, symbols, numbers, and spaces. To convert this text message into a vector of numbers, we use the package "double" in MATLAB software. This vector of numbers will be injected into one of the transmitter system's hidden hyperchaotic pseudo-states, as in (3.25). The receiver can decode the message by using the decryption function (3.26). Using the package "char" in MATLAB software, the receiver can convert these numbers again to plain text. For example, suppose we want to send a small text as shown in Fig. 3.4. The encrypted message is depicted in Fig. 3.5, and it is evident that the transmitted message is very coded. Fig. 3.6 shows the decrypted message, which matches the original text.

**II.** The second message is an audio signal where  $S(t)$  in the interval  $[0, 9]$ . The transmitted and recovered speech waveforms are shown in Figs. 3.7a and 3.7c. The encrypted signal is depicted in Fig. 3.7b. The error between the transmitted voice signal and the recovered one



(c)

Synchronization of fractional-order hyperchaotic complex systems is an interesting phenomenon since it has several applications in applied sciences. Based on the complexity of hyperchaotic dynamical systems and unpredictability of hidden attractors, which may exist in their phase spaces and could be beneficial in secure communications, a scheme to derive the analytical formula of the control function is stated to study active control synchronization. Further comparison of this analytical formula with numerical experiments, yields an interesting agreement. A novel fractional-order complex Sprott system is proposed to study this kind of synchronization and its dynamics. A secure communication scheme based on the active control synchronization of hyperchaotic fractional-order complex Sprott system is presented. Two types of masked messages (plain text and audio signal) are considered as test examples.

Figure 3.6 — Decrypted text.

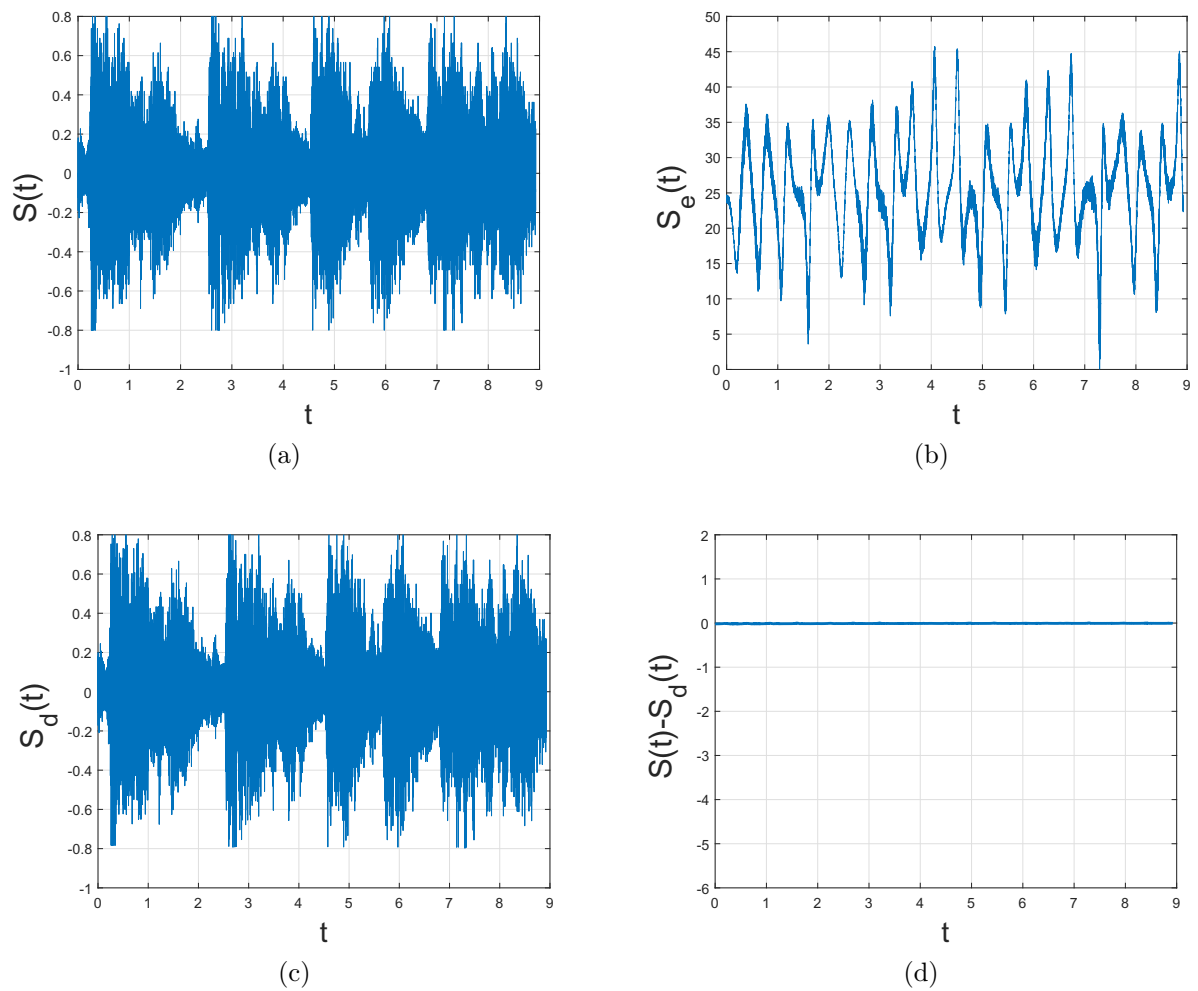


Figure 3.7 — Simulation results of secure communication for voice signal using the fractional-order hyperchaotic Sprott system (a) The original signal  $S(t)$  (b) Encrypted signal  $S_e(t)$  (c) Recovered signal  $S_d(t)$  (d) Decryption error  $S(t) - S_d(t)$ .

### 3.1.4 Discussion

In this section, the method of active control synchronization of hidden hyperchaotic attractors in the fractional-order complex-valued systems was investigated. The fractional-order complex generalization of the Sprott system was proposed to achieve this type of synchronization. Based on the complexity of hyperchaotic dynamical systems and unpredictability of hidden attractors, which may exist in their phase spaces, a secure communication scheme is presented. Two types of masked messages (plain text and audio signal) were considered as test examples.

## 3.2 Lag synchronization for complex hyperchaotic systems

This work is aimed at study a lag synchronization of hyperchaotic complex systems, which is motivated by a wide range of applications of this approach in nonlinear sciences (e.g., secure communications, encryption techniques, etc.). A scheme to study lag synchronization of hyperchaotic complex systems is presented. The control functions are analytically derived and the related numerical simulations are carried out to verify the consistency of the scheme. The complex Lorenz system is considered as an interesting example to study this kind of synchronization. In the case of multistability and hidden attractors, it is shown that the choice of the control parameters is not straightforward. Based on the complexity of hyperchaotic dynamical systems, which may be useful in secure communications, a corresponding scheme is presented, and two types of encrypted messages (plain text and audio signal) are considered as test examples.

### 3.2.1 Preliminary results

Chaos synchronization is an appealing phenomenon in nonlinear sciences owing to its extensive application areas in physical systems, networks, image processing, secure communications, etc. (see, e.g. [91; 204–206]). This work will concentrate on the so-called lag synchronization of hyperchaotic systems since it is most sensible in engineering problems. In communications, time delays exist unavoidably for finite signal transmission speeds or memory influences [207; 208].

In this section, a scheme to realize lag synchronization of hyperchaotic complex systems is presented. Lag synchronization of two identical hyperchaotic complex Lorenz systems is examined. Based on this kind of synchronization, a scheme for secure communication is developed and applied.

### 3.2.2 New lag synchronization method of hyperchaotic complex systems

In this subsection, we sketch a scheme to derive the control functions to achieve lag synchronization of two identical complex-valued systems. Suppose the master and slave systems in the matrices form read:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})A + G(\mathbf{x}), \quad (3.13)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = F(\mathbf{y})A + G(\mathbf{y}) + \theta, \quad (3.14)$$

where  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$  are the state complex vectors,  $F \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $A \in \mathbb{C}^m$  is a constant vector of system parameters,  $G \in \mathbb{C}^n$  is continuous vector function,  $\theta : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^n$  is control vector function of the slave system (3.14). The error of lag synchronization can be written as follows:

$$e(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t - \tau), \quad (3.15)$$

where  $\tau > 0$  is the synchronization time lag.

**Definition 3.1.** The master system (3.13) and slave system (3.14) achieve lag synchronization if

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t - \tau)\| = 0.$$

Following the ideas from [97; 207], we will derive an appropriate control to achieve lag synchronization between systems (3.13) and (3.14).

**Theorem 3.2.** Lag synchronization between the master system (3.13) and slave system (3.14) will achieve if the control vector function is designed as follows:

$$\theta = (F(\mathbf{x}(t - \tau)) - F(\mathbf{y}(t))A + (G(\mathbf{x}(t - \tau)) - G(\mathbf{y}(t)) - Ke), \quad (3.16)$$

where  $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$  is a positive definite diagonal gain matrix.

*Proof.* The time derivative of the synchronization error (3.15) is

$$\dot{e}(t) = \dot{\mathbf{y}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t - \tau). \quad (3.17)$$

From (3.13) and (3.14), one gets

$$\dot{e}(t) = (F(\mathbf{y}(t)) - F(\mathbf{x}(t - \tau)))A + (G(\mathbf{y}(t)) - G(\mathbf{x}(t - \tau))) + \theta. \quad (3.18)$$

Define the following Lyapunov function:

$$V(e) = \frac{1}{2}(e^*e). \quad (3.19)$$

Operator  $(^*)$  denotes conjugate transposition.

The time derivative of  $V$  is

$$\dot{V}(e) = \frac{1}{2}(e^* \dot{e} + \dot{e}^* e). \quad (3.20)$$

Substituting (3.15) and (3.18) with (3.16) in (3.19), we obtain

$$\dot{V}(e) = -e^* K e. \quad (3.21)$$

Since  $K$  is a positive definite matrix then,  $e^* K e > 0$ . Thus,  $\dot{V}(e) < 0$ . It is clear that  $V$  is positive definite,  $\dot{V}(e)$  is negative definite and  $V(e) \rightarrow \infty$  as  $e \rightarrow \infty$ . Therefore, the error  $e(t)$  is globally asymptotically stable i.e.,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ . This completes the proof.  $\square$

**Remark 3.1.** If  $\tau = 0$  in (3.15), then we get complete synchronization between the systems (3.13) and (3.14).

**Remark 3.2.** If the states  $x, y \in \mathbb{R}^n$  in (3.13) and (3.14) are real, one gets lag synchronization between the systems (3.13) and (3.14) with real states.

**Remark 3.3.** If  $\tau = 0$  in (3.15) and the states  $x, y \in \mathbb{R}^n$  in (3.13) and (3.14) are real, one gets complete synchronization between the systems (3.13) and (3.14) with real states.

### 3.2.3 Lag synchronization of two identical hyperchaotic complex Lorenz systems

Now we study the lag synchronization between two identical hyperchaotic complex Lorenz systems. The master and the slave systems are defined as follows:

$$\begin{cases} \dot{X}_m = \sigma(Y_m - X_m), \\ \dot{Y}_m = rX_m - aY_m - X_m Z_m, \\ \dot{Z}_m = -bZ_m + \frac{1}{2}(X_m^* Y_m + X_m Y_m^*), \end{cases} \quad (3.22)$$

and

$$\begin{cases} \dot{X}_s = \sigma(Y_s - X_s) + \theta_1, \\ \dot{Y}_s = rX_s - aY_s - X_s Z_s + \theta_2, \\ \dot{Z}_s = -bZ_s + \frac{1}{2}(X_s^* Y_s + X_s Y_s^*) + \theta_3, \end{cases} \quad (3.23)$$

where  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  are complex control functions. Here we use the subscript  $m$  and  $s$  for the master and the slave systems, respectively. The master system (3.22) can be written in the form (3.13) such that:  $x = (X_m, Y_m, Z_m)^T = (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4, x_5)^T$ ,  $A = (\sigma, r, a, b)^T$ ,

$$F(x(t)) = \begin{pmatrix} Y_m - X_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_m & -Y_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_m \end{pmatrix}, \quad G(x(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -X_m Z_m \\ \frac{1}{2}(X_m^* Y_m + X_m Y_m^*) \end{pmatrix}.$$

In the same way, we can write the slave system (3.23) in the form (3.14) such that:  $\mathbf{y} = (X_s, Y_s, Z_s)^T = (y_1 + iy_2, y_3 + iy_4, y_5)^T$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ ,

$$F(\mathbf{y}(t)) = \begin{pmatrix} Y_s - X_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_s & -Y_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_s \end{pmatrix}, \quad G(\mathbf{y}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -X_s Z_s \\ \frac{1}{2}(X_s^* Y_s + X_s Y_s^*) \end{pmatrix}.$$

Using Theorem 3.2, the control functions (3.16) can be written as the following:

$$\theta = \begin{pmatrix} \sigma(Y_{m\tau} - Y_s + X_s - X_{m\tau}) - k_1 e_1 \\ r(X_{m\tau} - X_s) + a(Y_s - Y_{m\tau}) + X_s Z_s - X_{m\tau} Z_{m\tau} - k_2 e_2 \\ b(Z_s - Z_{m\tau}) + \frac{1}{2}(X_{m\tau}^* Y_{m\tau} - X_s^* Y_s + X_{m\tau} Y_{m\tau}^* - X_s Y_s^*) - k_3 e_3 \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

where  $X_{m\tau} = X_m(t - \tau)$ ,  $Y_{m\tau} = Y_m(t - \tau)$ ,  $Z_{m\tau} = Z_m(t - \tau)$ .

As we discussed in Chapter 2, when  $r_2 = -e$  the complex Lorenz system (2.4) has the following equilibria:  $S_0, S_\theta$ . For the parameters  $\sigma = 10, r_1 = 24, r_2 = e = -0.001, b = 8/3$ , it is possible to visualize a hidden chaotic set. Using the following adaptive algorithm [47], for trajectory with initial point  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 5$ , it is possible to estimate the corresponding local finite-time Lyapunov exponents on the time interval  $[0, 100]$ :  $LE_1 = 0.7601, LE_2 = 0, LE_3 = -0.0174, LE_4 = -11.0006, LE_5 = -14.4094$ . For the parameters  $\sigma = 10, r_1 = 28, r_2 = e = -0.001, b = 8/3$ , it is possible to visualize a hyperchaotic self-excited attractor, with initial point  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$ , the corresponding local finite-time Lyapunov exponents on the time interval  $[0, 100]$ :  $LE_1 = 0.8439, LE_2 = 0.0198, LE_3 = 0, LE_4 = -11.0198, LE_5 = -14.5100$ .

Remark that systems with multistability and existence of hidden attractors may lead to improper operation of such systems in synchronization regimes. Below it is shown that the choice of control gain matrix to realize synchronization is different for different choices of initial data because of the multistability and hidden sets.

**Case 1:** Consider initial data of the complex Lorenz systems on one of the symmetrical hidden sets: master system (3.22) –  $\mathbf{x}(0) = (5 + 5i, 5 + i5, 5)^T$ ; slave system (3.22) –  $\mathbf{y}(0) = (5.4 + 5i, 5 + 5i, 5)^T$ . With parameters  $\sigma = 10, r_1 = 24, r_2 = e = -0.001, b = 8/3$ , control gain matrix as:  $K = \text{diag}(15.99, 15.99, 15.99)$  and  $\tau = 0.5$  (see Fig. 3.8).

**Case 2:** Consider initial data of the complex Lorenz systems on two symmetrical hidden sets: master system (3.22) –  $\mathbf{x}(0) = (5 + 5i, 5 + i5, 5)^T$ ; slave system (3.22) –  $\mathbf{y}(0) = (-5 - 5i, -5 - 5i, 5)^T$ . With parameters  $\sigma = 10, r_1 = 24, r_2 = e = -0.001, b = 8/3$ , control gain matrix as:  $K = \text{diag}(7.99, 7.99, 7.99)$  and  $\tau = 0.5$  (see Fig. 3.9).

**Case 3:** Consider initial data of the complex Lorenz systems on one of the symmetrical hidden sets and stable equilibria  $S_\theta$ : master system (3.22) –  $\mathbf{x}(0) = (5 + 5i, 5 + i5, 5)^T$ ; slave system (3.22) –  $\mathbf{y}(0) = (7.8309 - 0.1033i, 7.8309 - 0.1033i, 23)^T$ . With parameters  $\sigma = 10, r_1 = 24, r_2 = e = -0.001, b = 8/3$ , control gain matrix as:  $K = \text{diag}(111, 111, 111)$  and  $\tau = 0.5$  (see Fig. 3.10).

**Case 4:** Consider initial data of the complex Lorenz systems on one of the symmetrical self-excited attractors and unstable zero equilibrium: master system (3.22) –  $\mathbf{x}(0) = (1 + i, 1 + i, 1)^T$ ; slave



system (3.22) –  $y(0) = (0.1 + 0.1i, 0.1 + 0.1i, 0.1)^T$ . With parameters  $\sigma = 10, r_1 = 28, r_2 = e = -0.001, b = 8/3$ , control gain matrix as:  $K = \text{diag}(11, 11, 11)$  and  $\tau = 0.5$  (see Fig. 3.11).

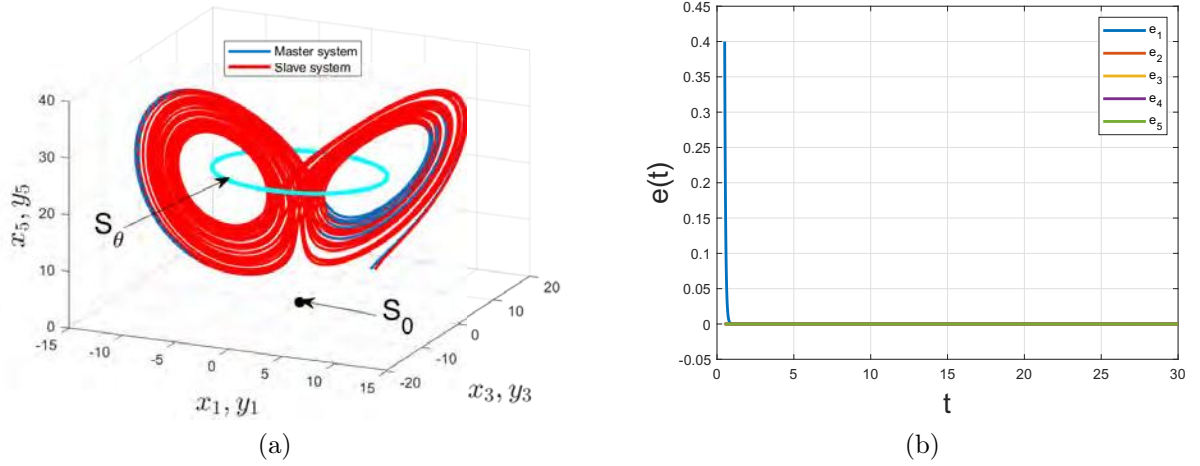


Figure 3.8 — **Case 1:** Synchronization with initial data of the complex Lorenz systems on the same hidden set.

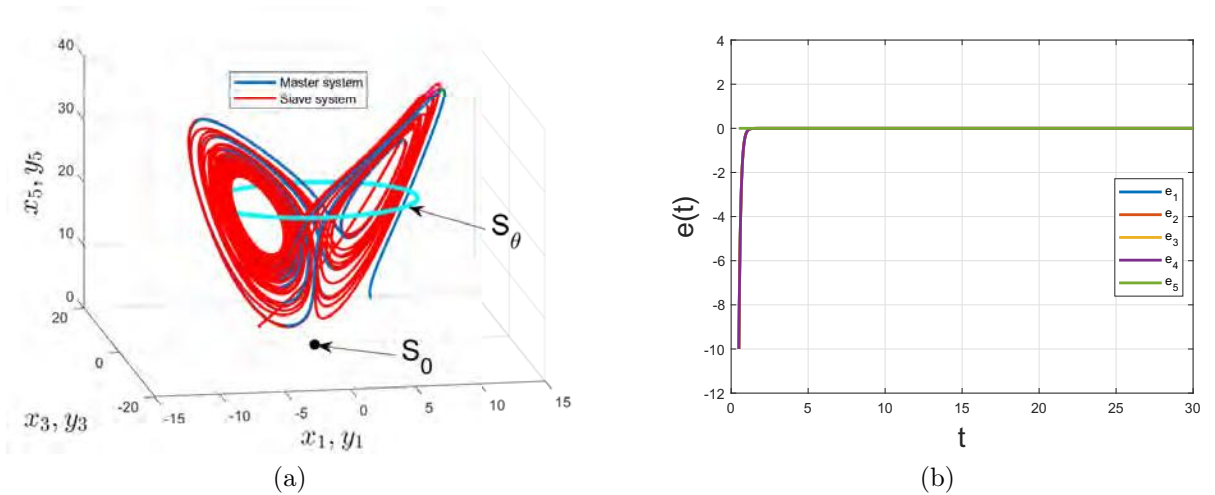


Figure 3.9 — **Case 2:** Synchronization with initial data of the complex Lorenz systems on two symmetrical hidden sets.

### 3.2.4 Application to secure communications

Here we apply the same secure communication scheme described in the previous section. We consider the maser (3.22) and slave (3.23), which generate the states variables  $x(t) = (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4, x_5)^T$  and  $y(t) = (y_1 + iy_2, y_3 + iy_4, y_5)^T$  as the transmitter and receiver systems, respectively.

**Numerical results**

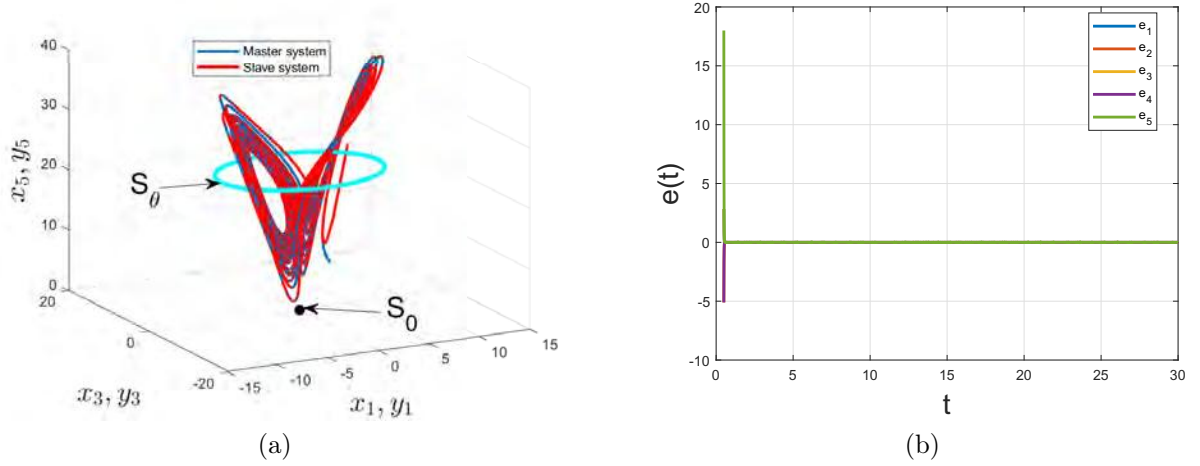


Figure 3.10 — **Case 3:** Synchronization with initial data of the complex Lorenz systems on a hidden set and stable equilibria  $S_\theta$ .

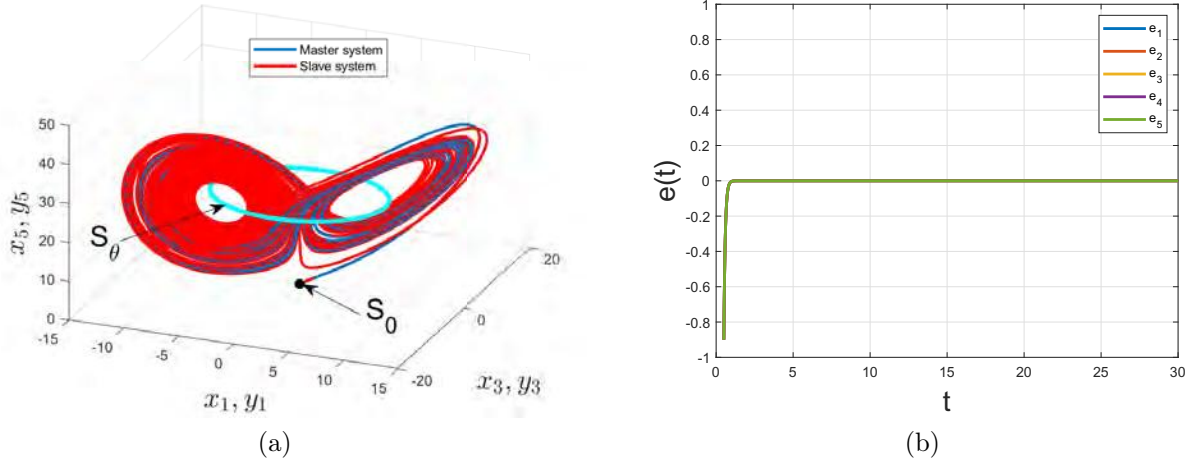


Figure 3.11 — **Case 4:** Synchronization with initial data of the complex Lorenz systems on a self-excited attractor and unstable zero equilibrium.

For  $\sigma = 10, r_1 = 28, r_2 = e = -0.001, b = 8/3$  system (3.13) has hyperchaotic self-excited attractor (see Fig. 3.11). The synchronization between the transmitter (3.22) and receiver (3.23) systems is achieved after  $t = T_s (T_s \approx 3s)$ .

We use the following ciphering and deciphering functions respectively:

$$S_e = \Phi(x, S) = (1 + x_3^2) + (2 + x_3^2)S, \quad (3.25)$$

$$S_d = \Psi(y, S_e) = -\frac{1 + y_3^2}{2 + y_3^2} + \frac{S_e}{2 + y_3^2}. \quad (3.26)$$

The information signal is chosen in two forms

**I.** A small plain text as depicted in Fig. 3.12. The encrypted message is shown in Fig. 3.13, and one can check that the transmitted message is strongly coded. Fig. 3.14 shows the decrypted message, which matches the original text.



(C)

This work is aimed at study a lag synchronization of hyperchaotic complex systems, which is motivated by a wide range of applications of this approach in nonlinear sciences (e.g., secure communications, encryption techniques, etc.). A scheme to study lag synchronization of hyperchaotic complex systems is presented. The control functions are analytically derived and the related numerical simulations are carried out to verify the consistency of the scheme. The complex Lorenz system is considered as an interesting example to study this kind of synchronization. In the case of multistability and hidden attractors, it is shown that the choice of the control parameters is not straightforward. Based on the complexity of hyperchaotic dynamical systems, which may be useful in secure communications, a corresponding scheme is presented, and two types of encrypted messages (plain text and audio signal) are considered as test examples.

Figure 3.14 — Decrypted text.

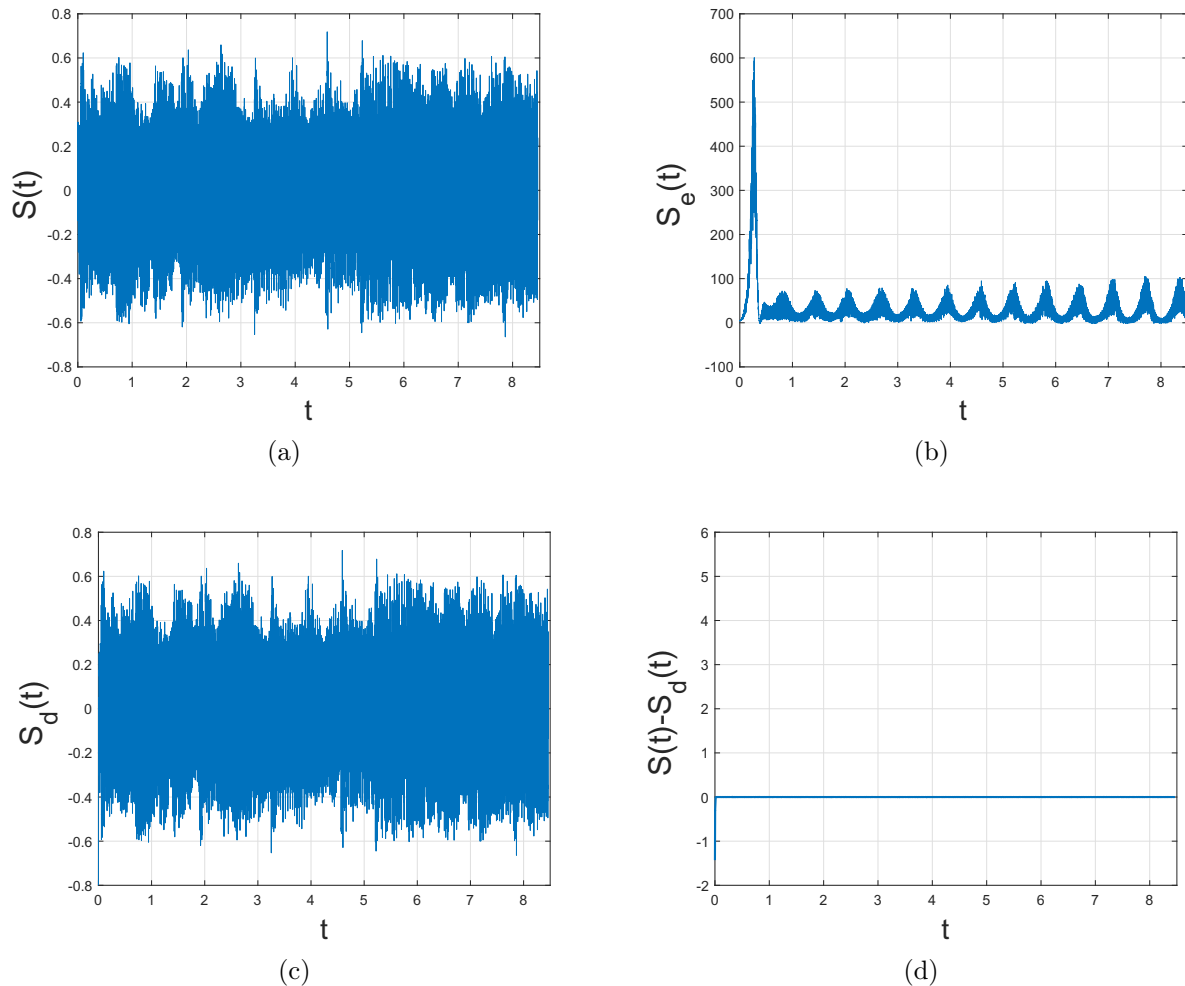


Figure 3.15 — Simulation results of secure communication for voice signal using the complex Lorenz system (a) The original signal  $S(t)$  (b) Encrypted signal  $S_e(t)$  (c) Recovered signal  $S_d(t)$  (d) Decryption error  $S(t) - S_d(t)$ .

### 3.2.5 Discussion

A scheme for achieving lag synchronization of two identical complex-valued systems was designed. Numerical simulations were applied to verify the efficiency of the scheme. The complex Lorenz system was considered to achieve this type of synchronization. Based on the complexity of hyperchaotic dynamical systems, a secure communication scheme was presented. Two types of masked messages (plain text and audio signal) were considered as test examples.

## 3.3 Adaptive synchronization for a general class of complex hyperchaotic systems with unknown parameters

The aim of this work is to investigate an adaptive synchronization for the general class of complex hyperchaotic models with unknown parameters and a new algorithm to achieve this type of synchronization is proposed. Owing to the intricacy behaviour of hyperchaotic models that could be effective in secure communications, the special control based on adaptive laws of parameters is constructed analytically, and the corresponding simulated results are performed to validate the algorithm's accuracy. The complex Rabinovich model and Chua model are utilized as enticing examples to examine the proposed synchronization technique. A strategy for secure communication improving the overall cryptosystem is proposed; the scheme is designed to split the message and insert some bit of information signal into the modulation parameters and the other bit into the transmitter system's states, making decryption by intruders more difficult. Meanwhile, adaptive techniques and a decryption function on the receiver side can accurately retrieve the message. Different types of encoded messages are examined for testing the robustness of the proposed scheme (e.g., text and gray images with diverse scales of white Gaussian noise).

### 3.3.1 Preliminary results

Synchronization and control of chaotic dynamical systems are important topics in applied science due to their vast application fields [90; 92; 209]. Since the first efficient synchronization strategy was suggested for synchronizing two chaotic identical systems [93], different varieties of synchronization strategies have been investigated and developed, including complete synchronization [53; 70; 94; 95], lag synchronization [52; 210], cluster synchronization [98; 211], adaptive synchronization [99; 100], projective synchronization [212; 213], and many more (see, e.g., [214–217]). Other synchronization strategies in time-delay and stochastic chaotic systems are investigated (see, e.g., [218–220]). Up to this moment, chaos synchronization was investigated in-depth

for systems modeled using real states. Meantime, many problems in the applied science, for instance, the physics of detuned laser [55; 110; 111], is modeled using complex model. Utilizing complex models in synchronization regimes rather than real ones, as well as the consequent multiplying of the amount of variables, may lead to more complicated behavior of the corresponding system, which, in turn, is critical for a variety of applications, including secure communication and cryptosystem design [221; 222].

Many chaos synchronization methods are constructed using known parameters of systems, and the corresponding controllers can be easily derived. However, sometimes the parameters of systems in engineering applications may be uncertain in advance and change over time [222; 223]. So, it is more sensible to investigate synchronization and develop corresponding methods for such dynamical systems with unknown parameters. In [222], Mahmoud proposed a scheme to achieve adaptive synchronization for a class of complex hyperchaotic models with uncertain parameters, which can be written in a general form as follows:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})A + G(\mathbf{x}), \quad (3.27)$$

where  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  is a complex state vector,  $F \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $A \in \mathbb{C}^m$  is a vector of model parameters,  $G \in \mathbb{C}^n$  is a vector of nonlinear function. Another scheme to realize adaptive dual synchronization of the same class (3.27) with uncertain parameters was proposed in [224]. Many complex models can be written in the form (3.27), for instance, the complex Lorenz system [111], the complex Lü system [177], etc. Remark that for all the systems in the form (3.27), the system's parameters associate with linear terms, and only in this case, the schemes in [222; 224] are applicable. As one can see, form (3.27) does not cover the case when parameters are associated with linear as well as nonlinear terms. In order to overcome this difficulty in this work we propose a general formula for the complex models as follows:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})A + G(\mathbf{x}) + H(\mathbf{x})B, \quad (3.28)$$

where  $\mathbf{x}, F, G$  are defined similarly to (3.27),  $A, B \in \mathbb{C}^m$  are constant vectors of model parameters that associate with linear and nonlinear terms, respectively,  $H \in \mathbb{C}^{n \times m}$ . Note that if  $B = 0$ , we get the formula (3.27). Thus, our aim in this work is to design a general scheme to achieve adaptive synchronization with entirely unknown parameters applicable for systems in the form (3.28). The quality of synchronization of the scheme will be examined on the example of the complex hyperchaotic Rabinovich model [130] and Chua model [13].

Chaotic systems play a significant role in secure communication systems due to their complicated behaviors and sensitive dependence on initial conditions. Numerous schemes of chaotic (hyperchaotic)-based secure communication systems are proposed in the literature. The main ideas of these techniques are as follows. Some schemes are designed to send the message between the transmitter and the receiver through one public channel, and the message by suitable encryption function is injected into the states of the transmitter (see, e.g., [221; 225–227]). Other approaches use the same algorithm, but instead of one public channel there are two channels:

one to send the states of the transmitter system, and the second one to transmit the encrypted message, trying to get more rapid synchronization and security (see, e.g., [52; 53; 203]). Further, rather than inserting the message into the states of the transmitter, another type of scheme is designed, where the message is injected into the parameters of the transmitter, and by the adaptive laws of parameters the message can be recovered (see e.g., [224; 228]).

In this work, we propose a novel hyperchaotic-based secure communication scheme. The scheme is designed to split the message and distribute it between two channels, which increases the security of the communication system and complicates the decryption task by intruders. Some bit of information signal is injected into parameters modulation and transmitted through one of the two channels; meanwhile, the other bit is injected into the transmitter states and sent over the second channel. At the receiver side, the message can be accurately retrieved by adaptive techniques and a decryption function. The proposed scheme is robust for diverse scales of white Gaussian noise, which will be demonstrated below.

From the above analysis, this work aims to design a new strategy to achieve adaptive synchronization for a general class of hyperchaos complex models with unknown parameters. Relying on this type of synchronization strategy, a novel scheme for secure communication with an improved new cryptosystem is organized and tested based on the complex Rabinovich model.

### 3.3.2 New adaptive synchronization method for a general class of hyperchaotic complex models with unknown parameters

In the present subsection, we propose a scheme to obtain the control vector function to realize adaptive synchronization between a pair of identical systems with complex variables that have entirely unknown parameters. Let master and slave systems have the following form:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})A + G(\mathbf{x}) + H(\mathbf{x})B, \quad (3.29)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = F(\mathbf{y})\hat{A} + G(\mathbf{y}) + H(\mathbf{y})\hat{B} + \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.30)$$

Here  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$  are the complex state vectors,  $A, B \in \mathbb{C}^m$  are constant vectors parameters of the master system,  $\hat{A}, \hat{B}$  are unknown constant vectors parameters of the slave system,  $\theta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  is a vector of control function of the slave system (3.30). The error of parameters modulation  $\hat{A}, \hat{B}$  are defined as follows:  $e_A = \hat{A} - A, e_B = \hat{B} - B$ . The error states could be expressed as follows:

$$e(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t). \quad (3.31)$$

**Definition 3.2.** The master system (3.29) and slave system (3.30) are said to realize adaptive synchronization, if

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| = 0.$$

We will design an proper control to realize adaptive synchronization among systems (3.29) and (3.30).

**Theorem 3.3.** Adaptive synchronization among the master system (3.29) and the slave system (3.30) will be attained if the function of control vector is constructed in the following form:

$$\theta(x,y) = [F(x) - F(y)]A + G(x) - G(y) + [H(x) - H(y)]B - K_1e - K_2e_A - K_3e_B. \quad (3.32)$$

Here  $K_1 = \text{diag}(k_{11}, \dots, k_{1n})$  is a positive definite matrix,  $K_2, k_3 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , and the updating of the parameters modulation are chosen according to the following equations:

$$\dot{e}_A = \dot{A} = -(F(y))^*e + K_2^*e, \quad (3.33)$$

$$\dot{e}_B = \dot{B} = -(H(y))^*e + K_3^*e. \quad (3.34)$$

Operator (\*) denotes conjugate transposition.

*Proof.* The derivative of the error (3.31) to the time reads:

$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) - \dot{x}(t). \quad (3.35)$$

Using (3.29) and (3.30), we obtain

$$\dot{e}(t) = [F(y) - F(x)]A + F(y)e_A + G(y) - G(x) + [H(y) - H(x)]B + H(y)e_B + \theta. \quad (3.36)$$

Construct the Lyapunov function as follows:

$$V(e, e_A, e_B) = \frac{1}{2} \left( e^*e + e_A^*e_A + e_B^*e_B \right). \quad (3.37)$$

The derivative of  $V$  with respect to time reads:

$$\dot{V}(e, e_A, e_B) = \frac{1}{2} \left( e^*\dot{e} + \dot{e}^*e + e_A^*\dot{e}_A + \dot{e}_A^*e_A + e_B^*\dot{e}_B + \dot{e}_B^*e_B \right). \quad (3.38)$$

Replacing (3.32), (3.33), (3.34) and (3.36) in (3.38), we get

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, e_A, e_B) = & \frac{1}{2} \left( e^*(F(y) - F(x))A + e^*F(y)e_A + e^*(G(y) - G(x)) + e^*(H(y) - H(x))B \right. \\ & + e^*H(y)e_B + e^*(F(x) - F(y))A + e^*(G(x) - G(y)) + e^*(H(x) - H(y))B - e^*K_1e \\ & - e^*K_2e_A - e^*K_3e_B + A^*(F(y) - F(x))^*e + e_A^*(F(y))^*e + (G(y) - G(x))^*e \\ & + B^*(H(y) - H(x))^*e + e_B^*(H(y))^*e + A^*(F(x) - F(y))^*e + (G(x) - G(y))^*e \\ & + B^*(H(x) - H(y))^*e - e^*K_1e - e_A^*K_2^*e - e_B^*K_3^*e - e_A^*(F(y))^*e + e_A^*K_2^*e \\ & \left. - e^*F(y)e_A + e^*K_2e_A - e_B^*(H(y))^*e + e_B^*K_3^*e - e^*H(y)e_B + e^*K_3e_B \right), \quad (3.39) \end{aligned}$$

then we have



$$\dot{V}(e, e_A, e_B) = -e^* K_1 e. \quad (3.40)$$

Because  $K_1$  is a positive definite matrix,  $\dot{V} < 0$ . One can see that  $V(e, e_A, e_B) > 0$  and  $V(e, e_A, e_B) \rightarrow \infty$  as  $(e, e_A, e_B) \rightarrow \infty$ . Thus, the error vector  $(e, e_A, e_B)$  is globally asymptotically stable, i.e.  $(e, e_A, e_B) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Remark 3.4.** If  $B = \hat{B} = 0$  in (3.29) and (3.30), then our scheme is applicable to attain adaptive synchronization for the class (3.27).

**Remark 3.5.** If the states  $x, y \in \mathbb{R}^n$  in (3.29) and (3.30) are real, the proposed scheme can be utilized to realize adaptive synchronization for the class (3.28) with real states.

**Remark 3.6.** If  $B = \hat{B} = 0$  and the states  $x, y \in \mathbb{R}^n$  in (3.29) and (3.30) are real, the proposed scheme can be utilized to realize adaptive synchronization for the class (3.27) with real states.

**Remark 3.7.** The scheme is designed in a general case of complex states and complex parameters. In the case of complex states and real parameters, the errors of parameters modulation could be estimated as follows:  $\Re(e_A) = \hat{A} - A$  (or  $\Im(e_A) = \hat{A} - A$ ),  $\Re(e_B) = \hat{B} - B$  (or  $\Im(e_B) = \hat{B} - B$ ). For real states and real parameters, it is a trivial one.

From the above discussion, one sees that the new synchronization strategy is applicable to realize adaptive synchronization for complex and real systems, with any system structure (namely, the system's parameters associate with linear terms only or the parameters are associate with linear as well as nonlinear terms).

Next, we will use Rabinovich system (2.35) for implementation of the new adaptive synchronization scheme with unknown parameters described above (see Eqs. (3.29)-(3.30) and (3.32)). Remark that system (2.35) is not an artificial (man-made) one, it has a strong physical meaning and possesses a rich dynamics with possible chaotic or hyperchaotic attractors, which may be beneficial in the problems of synchronization and secure communication. Moreover, the structure of system (2.35) fits the design of the proposed synchronization scheme (see Eqs. (3.29)-(3.30)) and is applicable to verify its efficiency. Furthermore, the Chua circuit with multistability is also considered to demonstrate the robustness of the proposed adaptive synchronization scheme. However, the complex Rabinovich system and Chua circuit are considered here only as examples, and other systems can be similarly studied.

### 3.3.3 Adaptive synchronization for a pair of identical hyperchaotic complex Rabinovich systems with unknown parameters

In the present subsection, we apply our scheme to achieve adaptive synchronization among two identical hyperchaotic complex Rabinovich systems with unknown parameters. The master

and the slave systems could be expressed as follows:

$$\begin{cases} \dot{X}_m = -\nu X_m + Y_m X_m^* + Z_m Y_m^*, \\ \dot{Y}_m = \alpha Y_m - X_m^2 + 2X_m^* Z_m - \beta |Y_m|^2 Y_m, \\ \dot{Z}_m = \gamma Z_m - 3X_m Y_m - \beta |Z_m|^2 Z_m, \end{cases} \quad (3.41)$$

and

$$\begin{cases} \dot{X}_s = -\hat{\nu} X_s + Y_s X_s^* + Z_s Y_s^* + \theta_1, \\ \dot{Y}_s = \hat{\alpha} Y_s - X_s^2 + 2X_s^* Z_s - \hat{\beta} |Y_s|^2 Y_s + \theta_2, \\ \dot{Z}_s = \hat{\gamma} Z_s - 3X_s Y_s - \hat{\beta} |Z_s|^2 Z_s + \theta_3, \end{cases} \quad (3.42)$$

wherein the control functions  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  are complex. We utilize the subscript  $m$  and  $s$  for the master and the slave systems, respectively.

Remark that the complex Rabinovich models (3.41) and (3.42) can't be written in the form (3.27) to attain adaptive synchronization with entirely unknown parameters. However, it is possible to write the master system (3.41) in the form (3.29) as follows:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = (X_m, Y_m, Z_m)^T &= (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4, x_5 + ix_6)^T, \quad A = (\nu, \alpha, \gamma)^T, \quad B = (0, \beta, \beta)^T \\ F(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} -X_m & 0 & 0 \\ 0 & Y_m & 0 \\ 0 & 0 & Z_m \end{pmatrix}, \quad G(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} Y_m X_m^* + Z_m Y_m^* \\ -X_m^2 + 2X_m^* Z_m \\ -3X_m Y_m \end{pmatrix}, \\ H(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -|Y_m|^2 Y_m & 0 \\ 0 & 0 & -|Z_m|^2 Z_m \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Similarly, we can write the slave system (3.42) in the form (3.30) as follows:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = (X_s, Y_s, Z_s)^T &= (y_1 + iy_2, y_3 + iy_4, y_5 + iy_6)^T, \quad \hat{A} = (\hat{\nu}, \hat{\alpha}, \hat{\gamma})^T, \quad \hat{B} = (0, \hat{\beta}, \hat{\beta})^T, \\ \theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T &= (\vartheta_1 + i\vartheta_2, \vartheta_3 + i\vartheta_4, \vartheta_5 + i\vartheta_6)^T, \quad F(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -X_s & 0 & 0 \\ 0 & Y_s & 0 \\ 0 & 0 & Z_s \end{pmatrix}, \\ G(\mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} Y_s X_s^* + Z_s Y_s^* \\ -X_s^2 + 2X_s^* Z_s \\ -3X_s Y_s \end{pmatrix}, \quad H(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -|Y_s|^2 Y_s & 0 \\ 0 & 0 & -|Z_s|^2 Z_s \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

The error vectors corresponding to the states and parameters modulation are expressed as follows:

$$e = (e_1 + ie_2, e_3 + ie_4, e_5 + ie_6)^T, \quad (3.45)$$

$$e_A = (e_{A_1} + ie_{A_2}, e_{A_3} + ie_{A_4}, e_{A_5} + ie_{A_6})^T, \quad (3.46)$$

$$e_B = (e_{B_1} + ie_{B_2}, e_{B_3} + ie_{B_4}, e_{B_5} + ie_{B_6})^T. \quad (3.47)$$

By Theorem 3.3, we get the following control functions (3.32):

$$\theta = \begin{pmatrix} v(X_s - X_m) + (Y_m X_m^* + Z_m Y_m^* - Y_s X_s^* - Z_s Y_s^*) + \varphi_1 \\ \alpha(Y_m - Y_s) - (X_m^2 - 2X_m^* Z_m + \beta|Y_m|^2 Y_m - X_s^2 + 2X_s^* Z_s - \beta|Y_s|^2 Y_s) + \varphi_2 \\ \gamma(Z_m - Z_s) - (3X_m Y_m + \beta|Z_m|^2 Z_m - 3X_s Y_s - \beta|Z_s|^2 Z_s) + \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

wherein  $\varphi_1 = -k_{11}(e_1 + ie_2) - k_{21}(e_{A_1} + ie_{A_2}) - k_{31}(e_{B_1} + ie_{B_2})$ ,  $\varphi_2 = -k_{12}(e_3 + ie_4) - k_{22}(e_{A_3} + ie_{A_4}) - k_{32}(e_{B_3} + ie_{B_4})$  and  $\varphi_3 = -k_{13}(e_5 + ie_6) - k_{23}(e_{A_5} + ie_{A_6}) - k_{33}(e_{B_5} + ie_{B_6})$ .

Remark that the input in a complex-valued form is rather a mathematical tool to express it in a simpler fashion. In the real-life system, one can design and apply the real part and imaginary part of a complex control signal separately as corresponding real-valued signals.

Consider the following values of system parameters:  $v = -0.03$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $\gamma = 0.11$ . For these parameters, system (3.41) exhibits hyperchaotic attractor (see Fig. 2.17). In order to establish the controller's validity (3.48), the arbitrary control positive definite matrices are chosen as follows:  $K_1 = \text{diag}(66, 55, 77)$ ,  $K_2 = \text{diag}(13, 12, 15)$ ,  $K_3 = \text{diag}(15, 15, 59)$ . Master system (3.41) and slave system (3.42) with (3.48) are numerically solved. The numerical solutions of (3.41) and (3.42) with starting points  $x(0) = (1 + i, 1 + i, 1 + i)^T$  and  $y(0) = (3 + 3i, 3 + 3i, 3 + 3i)^T$  are shown in Fig. 3.16. In Fig. 3.17, it is apparent that adaptive synchronization error  $e(t)$  approaches zero, and synchronization is achieved after a small time  $t \approx T_s$  ( $T_s = 10s$ ). From Figs 3.18 and 3.19, it is evident that the parameters modulation errors  $e_A(t)$  and  $e_B(t)$  approach zero. Thus, the estimation of unknown constant parameters  $(\hat{v}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$  converge to  $(v, \alpha, \beta, \gamma) = (-0.03, 0.5, 0.001, 0.11)$  (see Fig. 3.20).

### 3.3.4 Application to secure communications

In the present subsection, we propose a novel secure communications strategy relying on the adaptive synchronization of hyperchaos systems with uncertain parameters. In general, existing communication schemes are designed by injection of the message into chaotic states (chaotic masking) [221; 225–227], or parameters of the transmitter system (parameters modulation) [224; 228] of the transmitter. The new scheme is built to split the message and inject some bit of information signal into parameter modulation and the other bit into the transmitter states, which improve the security of communication system and complicates decryption task by meddlers. Fig. 3.21 depicts a diagram of the proposed scheme.

The scheme includes the following components:

- Transmitter and receiver systems, which produce the states variables  $x(t) \in \mathbb{C}^n$  and  $y(t) \in \mathbb{C}^n$ , respectively.
- Splitting block: the information message  $S(t)$  is divided into two vectors of bits  $S_1$  and  $S_2$  to distribute it over two channels.

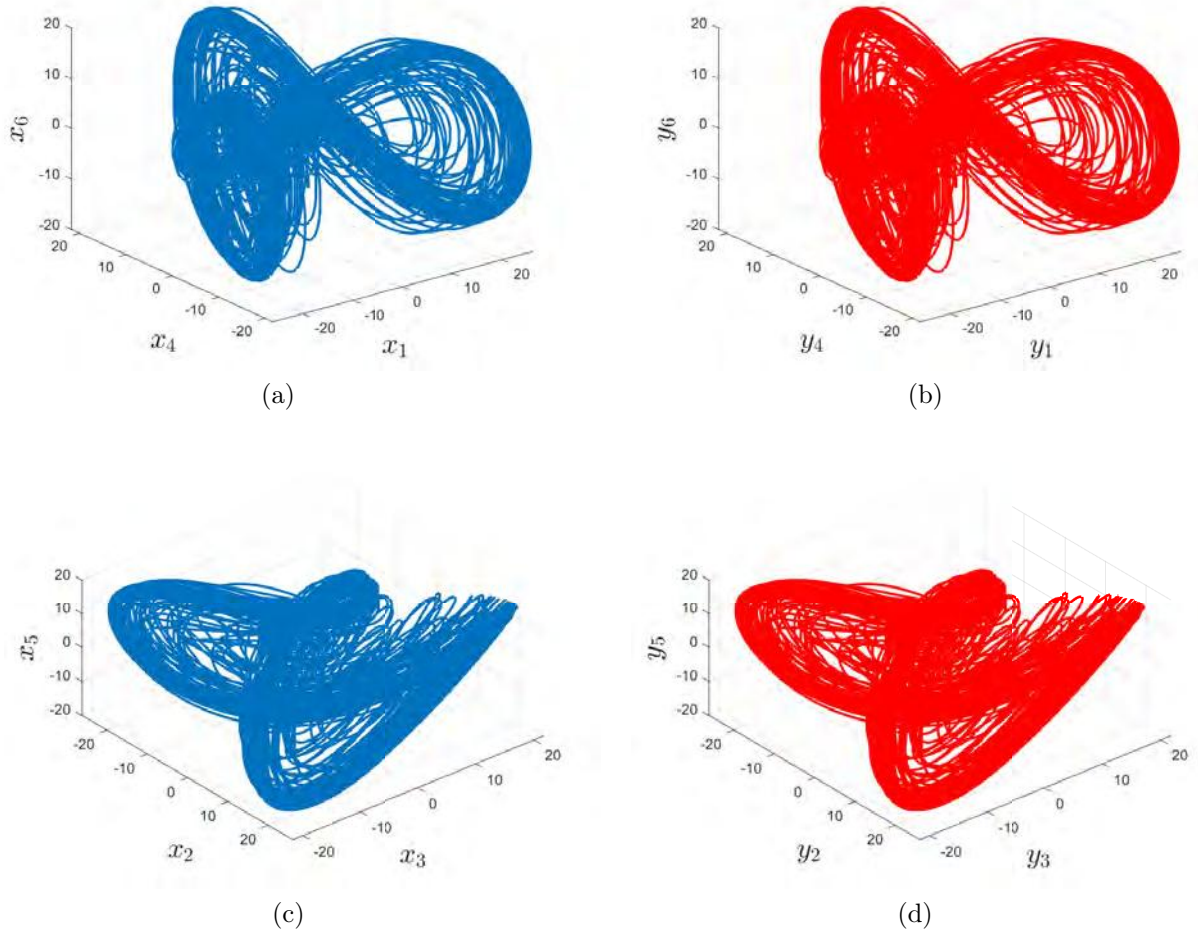


Figure 3.16 — Adaptive synchronization of hyperchaotic attractors of systems (3.41) and (3.42) (in the form (3.43) and (3.44)), with  $\nu = -0.03$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $\gamma = 0.11$ .

- Parameters modulation block: the first part of the message  $S_1(t)$  by a continuous invertible function  $\phi_1$  is modulated into the parameters of the transmitter.
- Hyperchaotic masking block: the second part of the message  $S_2(t)$  is encoded by injecting it into a function  $\phi_2 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , which for  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  is continuous and has an associated continuous function  $\psi_2 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  that is continuous for  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ , such that  $\psi_2(\mathbf{x}, \phi_2(\mathbf{x}, S_2)) = S_2$ . The ciphering function  $\phi_2$  is built on basis of the hyperchaotic states. As a result, a signal  $S_{2e}(t)$  is generated, which carries the message part.
- Channels: the hyperchaotic-states, which contain the parameters modulation and the encoded information part  $S_{2e}$ , are transmitted over two channels.
- Synchronization block: for the receiver side, a synchronization block is implemented to retrieve the hyperchaos state signals and provide the required information for the decryption.
- Adaptive controllers block: in the receiver side the adaptive controllers are built to trace the parameters of the transmitter system. After synchronization is realized the decryption function  $\psi_1$  can be utilized to recover the first part of the transmitted message  $S_{1d}$ .

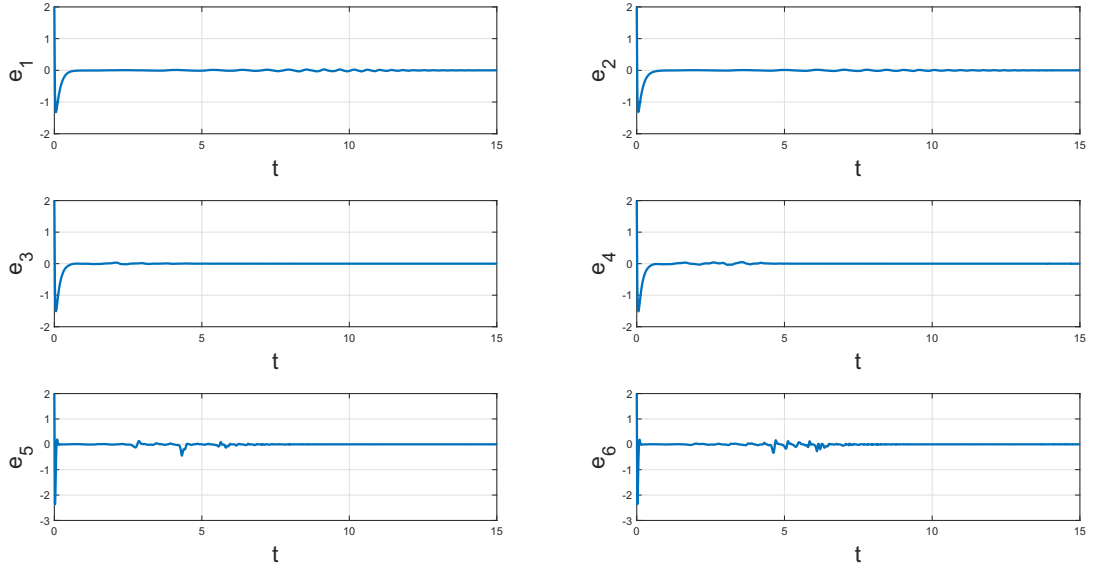


Figure 3.17 — The dynamics of real and imaginary parts of error states (see (3.45)) between the master (3.41) and the slave (3.42) systems are represented by solving system (3.36).

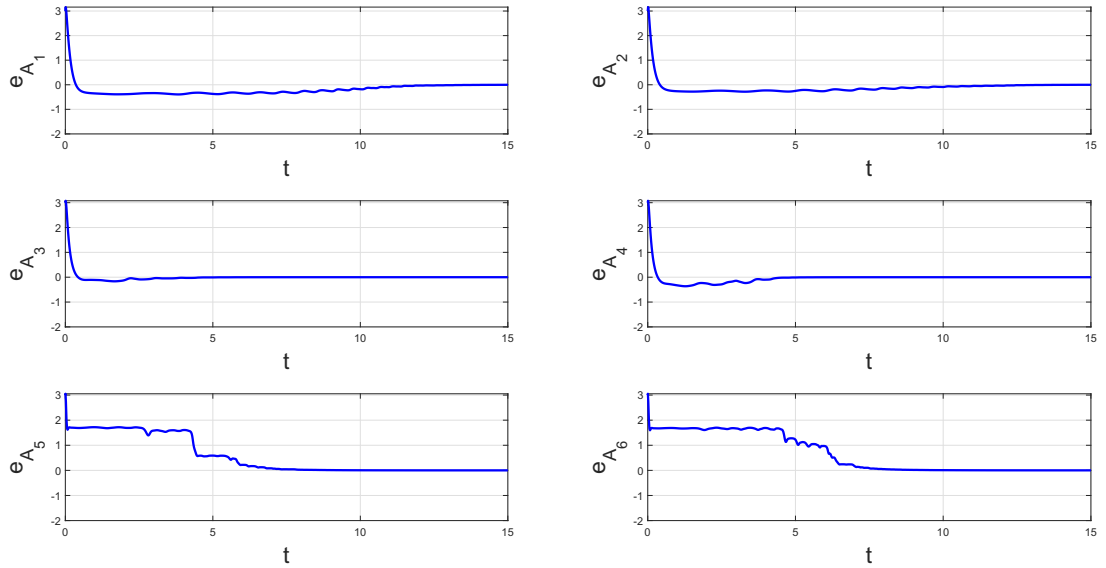


Figure 3.18 — The dynamics of real and imaginary parts of errors of the estimation of the parameter  $\hat{A}$  (see (3.46)) are represented by solving the system (3.33).

- Hyperchaotic decoding block: the masked information  $S_{2e}(t)$  is decoded by a function  $S_{2d}(t) = \psi_2(y(t), S_{1e}(t))$ .
- Gathering block: by combining the two information signals  $S_{1d}$  and  $S_{2d}$ , we get the whole decrypted message  $S_d$ .

Unlike other schemes which could be inaccurate due to lack of robustness and security (see, e.g., [229; 230]), the proposed secure communication strategy is robust against the infiltration attempt by intruders because it must precisely identify the following information to decrypt the

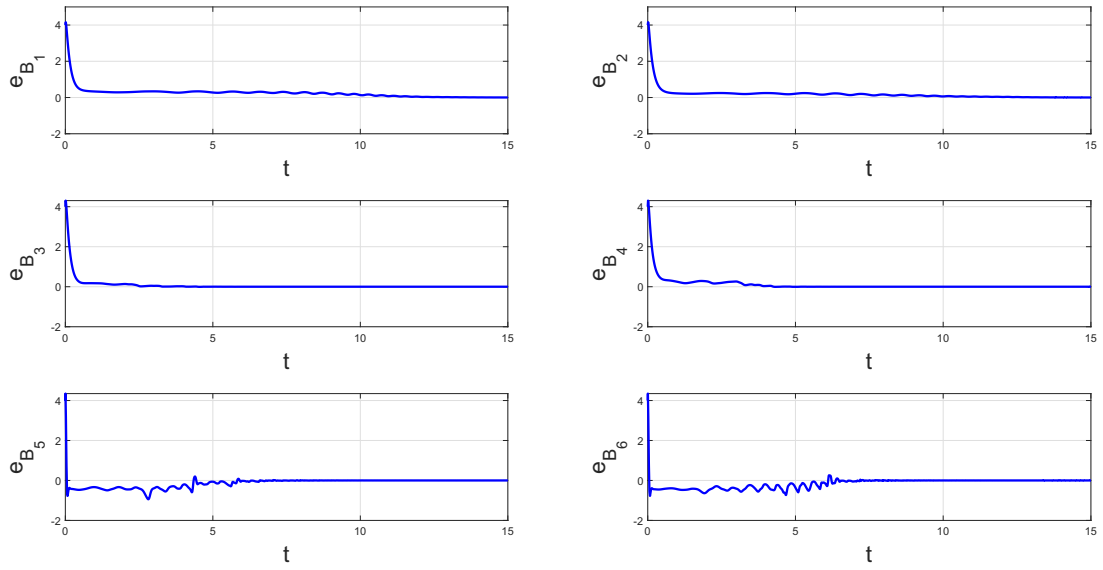


Figure 3.19 — The dynamics of real and imaginary parts of errors of the estimation of the parameter  $\hat{B}$  (see (3.47)) are represented by solving the system (3.34).

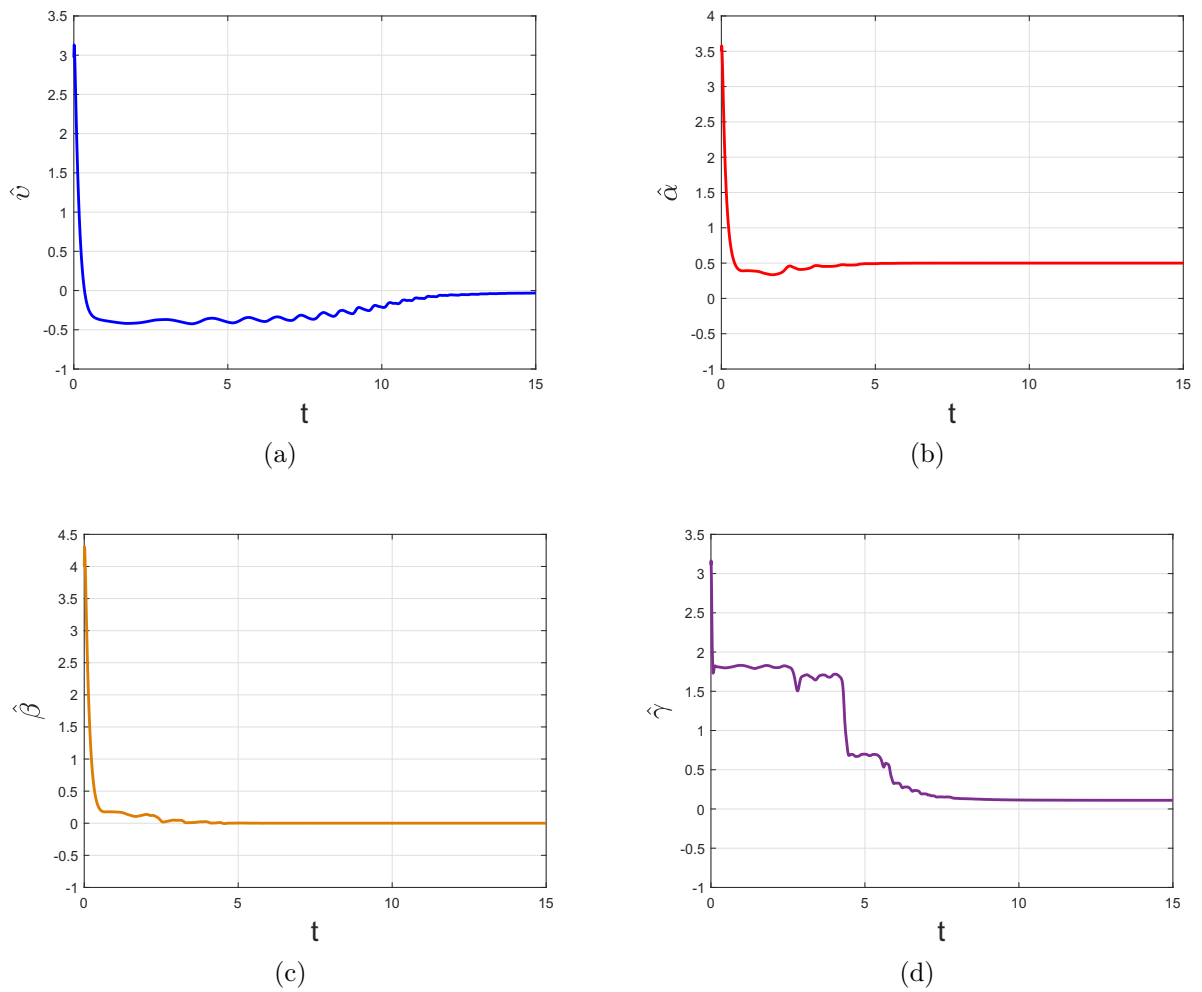


Figure 3.20 — Estimation of unknown parameters  $(\hat{v}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ .

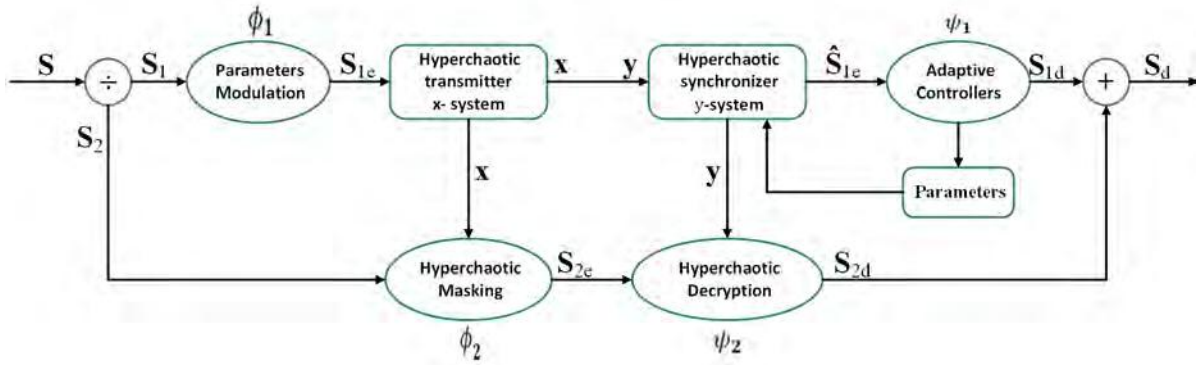


Figure 3.21 — Hyperchaotic secure communication strategy.

message successfully:

1. which part of the information bit is injected into the transmitter's parameters, and which part is inserted into hyperchaotic states of the transmitter;
2. which channel is used to transmit the transmitter's hyperchaotic signals with parameters modulation, and which one to send the hyperchaotic masked message part;
3. which parameters are utilized for parameters modulation of the transmitter;
4. what particular limiting regime (attractor) was used as a basis for organizing hyperchaotic encryption. For this task, the presence of multistability in the system and hidden attractors will significantly complicate decrypting;
5. what particular functions for parameters modulation and hyperchaotic masking were constructed;
6. what adaptive laws for parameters (one of the most critical information to know) were used.

**Remark 3.8.** The idea of the new cryptosystem is to organize a combination of two techniques - parameters modulation masking and hyperchaotic masking. These techniques separately may have some weaknesses (see, e.g., [229; 230]), but our approach allows us to overcome them and, in turn, complicate the decryption task for possible intruders. The next experiment with encrypted figures clarify this new feature (see Figs. 3.25c and 3.26d-3.26f to check the dark and white parts corresponding to parameters modulation masking and hyperchaotic masking, respectively).

**Remark 3.9.** The proposed secure communication strategy is built based on the technique of adaptive synchronization with unknown parameters, which is a tricky task for implementation and, in turn, leads to more security [222; 223].

**Remark 3.10.** Using synchronization in communication systems is fundamental since it makes systems produce the same output simultaneously and, in turn, leads to recovering the information signals accurately (see, e.g., [231; 232]).

The complex Rabinovich model is used to explain a secure communication strategy, and the numerical results are executed in MATLAB. The transmitter is the execution of (3.29) which generates the states  $(x_1 + ix_2, x_3 + ix_4, x_5 + ix_6)^T$  and the receiver is the execution of (3.30) which generates the states  $(y_1 + iy_2, y_3 + iy_4, y_5 + iy_6)^T$ . As indicated in Fig. 3.16, master system (3.29) and slave system (3.30) for  $v = -0.03$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.001$   $\gamma = 0.11$  exhibit hyperchaotic attractors.

The adaptive synchronization will be attained after  $t = T_s$  ( $T_s \approx 10s$ ) if the control vector function is designed in the form (3.48) (see Fig. 3.17). To demonstrate the robustness of our scheme, the message  $S(t)$  is selected in two forms of plain text and gray image with diverse scales of white Gaussian noise.

### Single parameter modulation and hyperchaotic masking for a plain text encryption

The first type of the message  $S(t)$  is a plain text. The MATLAB tool "double" is utilized to transform this text into a vector of digits. Suppose  $S = [s_1, s_2, \dots, s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n]$ , according to the proposed scheme, this vector of digits is split into two vectors  $S_1 = [s_1, s_2, \dots, s_m]$  and  $S_2 = [s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n]$ . The first vector  $S_1$  by the following parameters modulation function is inserted into the parameters of the transmitter:

$$S_{1e} = \phi_1(\{A, B\}, S_1) = \frac{S_1}{10d} + \gamma, \quad (3.49)$$

where  $d = \max(S(j)) - \min(S(j))$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $\gamma = 0.11$ . For the second part of the message,  $S_2$  is inserted into the hyperchaotic states of the transmitter using the following function:

$$S_{2e} = \phi_2(x, S_2) = x_6^2 + (1 + x_6^2)S_2. \quad (3.50)$$

The receiver could decipher the message by the following functions:

$$S_{1d} = \psi_1(\{\hat{A}, \hat{B}\}, \hat{S}_{1e}) = 10(\hat{S}_{1e} - \hat{\gamma})d, \quad (3.51)$$

where  $\hat{\gamma} = 0.11$ ,

$$S_{2d} = \psi_2(y, S_{2e}) = -\frac{y_6^2}{1 + y_6^2} + \frac{S_{2e}}{1 + y_6^2}. \quad (3.52)$$

By gathering  $S_{1d}$  and  $S_{2d}$ , we get the whole decrypted information signal  $S_d$ . Utilizing the MATLAB tool "char", the receiver could transform this vector of digits back to a text. For instance, assume we would like to transmit a small part of text, as illustrated in Fig. 3.22. The ciphered message is shown in Fig. 3.23, and it can be seen that it is tightly encoded. The deciphered message is shown in Fig. 3.24, and it is identical to the original content.

### Single parameter modulation and hyperchaotic masking for a grayscale image

Now we consider the second message in the form of grayscale image (cameraman.tif) with size  $256 \times 256$ . This image can be transformed into  $m \times n$  matrix of pixels as follows:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

where  $s(k, l)$  stands for the image value in pixel at the position  $(k, l)$  where  $k = 1, 2, \dots, m$ ,  $l = 1, 2, \dots, n$ . The matrix of pixels is converted into a 1-dimensional vector of integers between 0 and



(a)

The aim of this report is to investigate an adaptive synchronization for the general class of complex hyperchaotic models with unknown parameters and a new algorithm to achieve this type of synchronization is proposed. Owing to the intricacy behaviour of hyperchaotic models that could be effective in secure communications, the special control based on adaptive laws of parameters is constructed analytically, and the corresponding simulated results are performed to validate the algorithm's accuracy. The complex Rabinovich model is utilized as an enticing example to examine the proposed synchronization technique. A strategy for secure communication improving the overall cryptosystem is proposed; the scheme is designed to split the message and insert some bit of information signal into the modulation parameters and the other bit into the transmitter system's states, making decryption by intruders more difficult. Meanwhile, adaptive techniques and a decryption function on the receiver side can accurately retrieve the message. Different types of encoded messages are examined for testing the robustness of the proposed scheme (e.g., text and gray images with diverse scales of white Gaussian noise).

Figure 3.22 – The origin text.

255. Let  $S = [s_{11}, s_{21}, \dots, s_{m1}, s_{12}, \dots, s_{m2}, \dots, s_{1n}, \dots, s_{mn}] = [s_1, s_2, \dots, s_{mn}]$ . The last vector is divided into two vectors  $S_1 = [s_1, s_2, \dots, s_k]$  and  $S_2 = [s_{k+1}, s_{k+2}, \dots, s_{mn}]$ . The first vector is injected into the transmitter system's parameters, while the second is inserted into its hyperchaos states. We use the same functions for parameter modulation, hyperchaotic masking, and decryption as in the first message. The transmitted and recovered grayscale images are shown in Figs. 3.25a and 3.25e. The image histogram, which shows the distribution of intensities for original and decrypted images, are depicted in Figs. 3.25b, and 3.25f, respectively. Figs. 3.25c and 3.25d show the encrypted image and its histogram. Through Figs. 3.25e and 3.25f, one can observe that the original image (cameraman.tif) is accurately retrieved.

To demonstrate the robustness of the secure communication strategy for image encryption, the white Gaussian noise with various scales is added to the grayscale image (cameraman.tif), and different tests are used to measure the quality of the retrieved image, e.g., peak signal-to-noise ratio (PSNR) and structural similarity image index (SSIM).

### Peak signal-to-noise ratio analysis

To analyze the pixel distribution for the recovered image with respect to the original image, the peak signal-to-noise ratio (PSNR) is applied. The PSNR can be defined as the following [224;



(c)

The aim of this report is to investigate an adaptive synchronization for the general class of complex hyperchaotic models with unknown parameters and a new algorithm to achieve this type of synchronization is proposed. Owing to the intricacy behaviour of hyperchaotic models that could be effective in secure communications, the special control based on adaptive laws of parameters is constructed analytically, and the corresponding simulated results are performed to validate the algorithm's accuracy. The complex Rabinovich model is utilized as an enticing example to examine the proposed synchronization technique. A strategy for secure communication improving the overall cryptosystem is proposed; the scheme is designed to split the message and insert some bit of information signal into the modulation parameters and the other bit into the transmitter system's states, making decryption by intruders more difficult. Meanwhile, adaptive techniques and a decryption function on the receiver side can accurately retrieve the message. Different types of encoded messages are examined for testing the robustness of the proposed scheme (e.g., text and gray images with diverse scales of white Gaussian noise).

Figure 3.24 — Deciphered text.

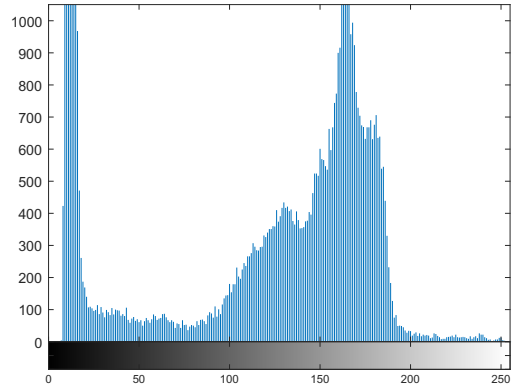
The second test considered to measure and analyze the similarity between the original and retrieved image is the structural similarity image index (SSIM) defined in the following form [234]:

$$SSIM(S, S_d) = \frac{(2\mu_S\mu_{S_d} + C_1)(2\sigma_{SS_d} + C_2)}{(\mu_S^2 + \mu_{S_d}^2 + C_1)(\sigma_S^2 + \sigma_{S_d}^2 + C_2)}, \quad (3.56)$$

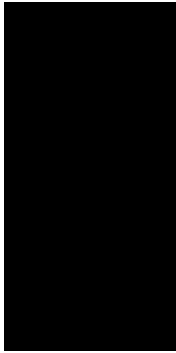
where  $\mu_S$  and  $\mu_{S_d}$  are the average luminance value of original image  $S$  and the decrypted image  $S_d$ , respectively;  $\sigma_S$  and  $\sigma_{S_d}$  are the standard variances of  $S$  and  $S_d$ , respectively;  $\sigma_{SS_d}$  is the covariance between  $S$  and  $S_d$ ;  $C_1$  and  $C_2$  are small fixed positive constants in order to have the denominator not equal to zero. The estimate of the SSIM is always in the interval  $[-1, 1]$ , and the strongest estimate 1 is realized if  $S = S_d$ . In order to demonstrate the robustness of the proposed scheme to noise, the grayscale image (cameraman.tif) is transmitted from the transmitter to the receiver with various levels of white Gaussian noise. Fig. 3.26 shows the original noise images and the retrieved noise ones. The estimate of the PSNR and SSIM for the retrieved grayscale images with the original ones are listed in Table 7



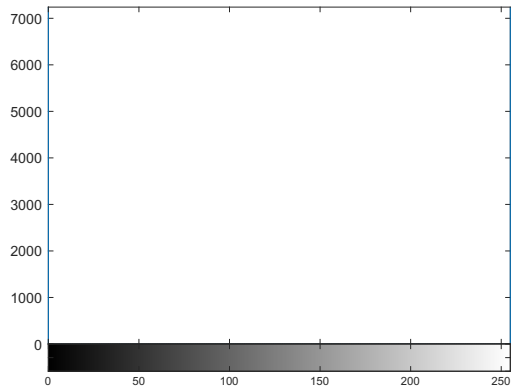
(a) Original image.



(b) Histogram of the original image.



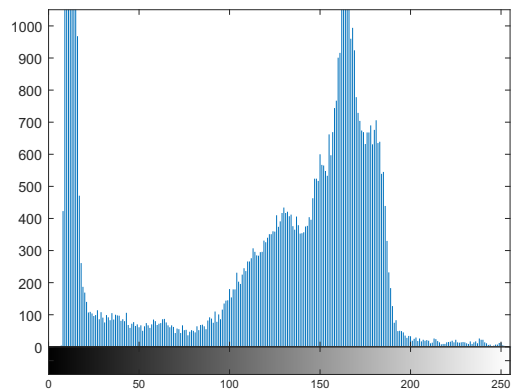
(c) Encrypted image.



(d) Histogram of the encrypted image.



(e) Decrypted image.



(f) Histogram of the decrypted image.

Figure 3.25 — Numerical results of grayscale image encryption using the Rabinovich model.

### 3.3.5 Discussion

A new formula for representing the complex models in matrix form was suggested, and the corresponding scheme to realize adaptive synchronization for a general class of complex models

Table 7: Estimation of PSNR and SSIM for grayscale cameraman.tif image.

Gray image	PSNR	SSIM
Cameraman (Gaussian noise 0.03)	77.9705	0.9999
Cameraman (Gaussian noise 0.07)	77.3193	0.9999
Cameraman (Gaussian noise 0.1)	77.4875	0.9999

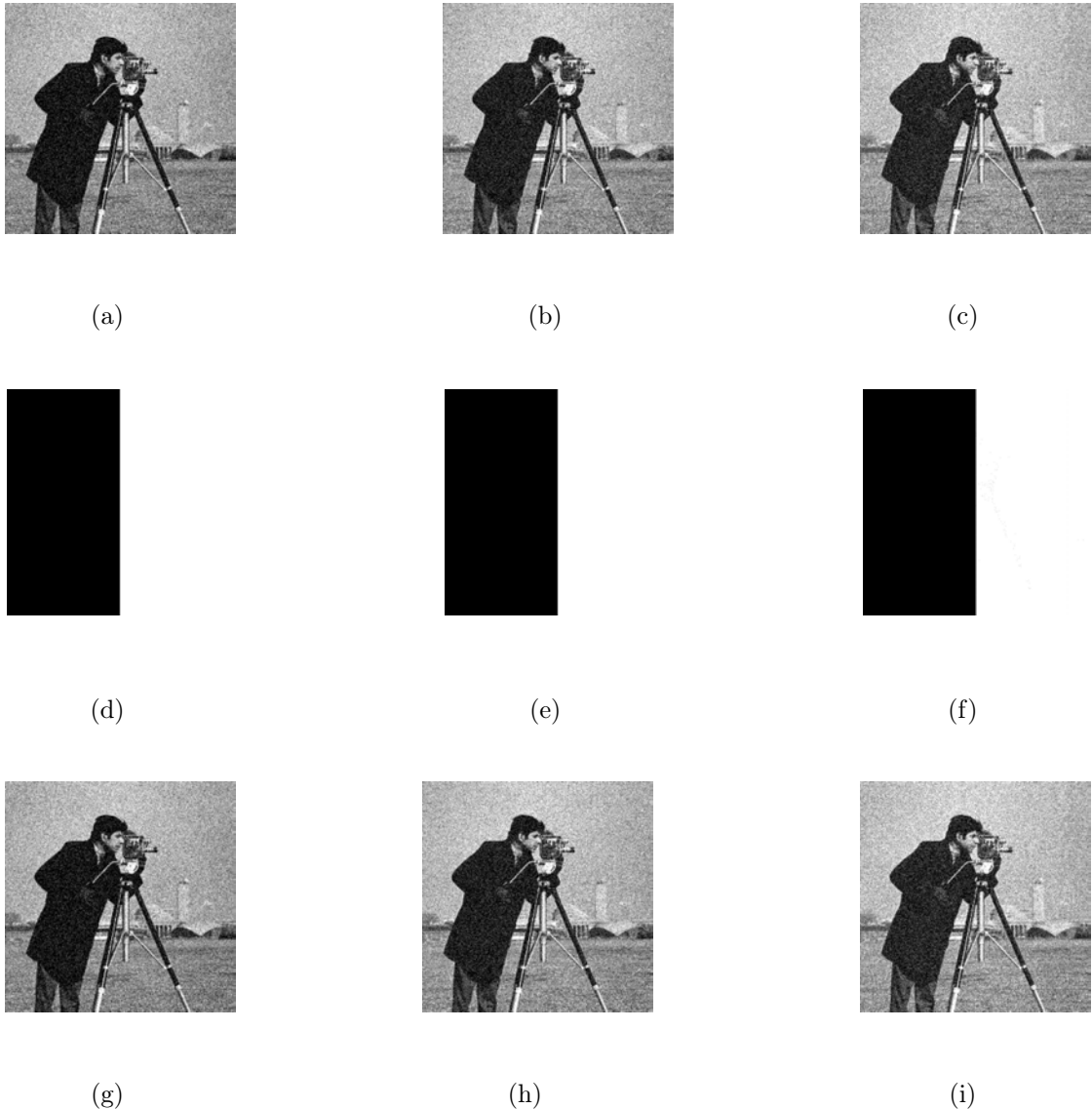


Figure 3.26 — Numerical results of image encryption with noise. (a)-(c) The original images with 0.03, 0.07 and 0.1 white Gaussian noise, respectively; (d)-(f) the encrypted ones; (g)-(i) the retrieved noise images.

with fully unknown parameters was designed. The scheme was tested on the example of the complex Rabinovich model. A novel scheme for secure communication with improved cryptosystem based on the adaptive synchronization was proposed. Different forms of encrypted messages were examined for testing the robustness of the proposed scheme (e.g., plain text and gray images with diverse scales of white Gaussian noise).

### 3.4 Comparison of performance of synchronization schemes on the example of Chua circuit

This section aims to compare all three synchronization schemes on the example of the famous Chua system. Since it has clear electronic nature and could be realized as an RLC circuit, it is commonly used as a benchmark system for testing synchronization. Another interesting feature of the Chua system is multistability and the possible presence of hidden attractors in the phase space for some values of parameters [16; 193; 235].

The Chua circuit designed by Leon Chua in 1983, is the simplest electrical circuit that exhibits chaos, which could be described by the following equations [13]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x) - \alpha\Psi(x), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta y - \gamma z, \end{cases} \quad (3.57)$$

where  $\Psi(x) = m_1x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1$  are real parameters.

In the following, let's test the three above described synchronization schemes for the following four cases of parameters and initial data:

**Case 1:** Consider initial data of the systems (3.60) and (3.61) on one of the symmetrical hidden attractors: master system (3.60) –  $\mathbf{x}(0) = (-3.7727, -1.3511, 4.7)^T$ ; slave system (3.22) –  $\mathbf{y}(0) = (-3.6, -1.3511, 4.7)^T$ . With parameters  $\alpha = 8.4562, \beta = 12.0732, \gamma = 0.0052, m_0 = -0.1768, m_1 = -1.1468$ .

**Case 2:** Consider initial data of the systems (3.60) and (3.61) on two symmetrical hidden attractors: master system (3.60) –  $\mathbf{x}(0) = (-3.7727, -1.3511, 4.7)^T$ ; slave system (3.22) –  $\mathbf{y}(0) = (3.7727, 1.3511, -4.7)^T$ . With parameters  $\alpha = 8.4562, \beta = 12.0732, \gamma = 0.0052, m_0 = -0.1768, m_1 = -1.1468$ .

**Case 3:** Consider initial data of the systems (3.60) and (3.61) on one of the symmetrical hidden attractors and stable zero equilibrium: master system (3.60) –  $\mathbf{x}(0) = (-3.7727, -1.3511, 4.7)^T$ ; slave system (3.22) –  $\mathbf{y}(0) = (0, 0, 0)^T$ . With parameters  $\alpha = 8.4562, \beta = 12.0732, \gamma = 0.0052, m_0 = -0.1768, m_1 = -1.1468$ .

**Case 4:** Consider initial data of the systems (3.60) and (3.61) on one of the symmetrical self-excited attractors and unstable zero equilibrium: master system (3.60) –  $\mathbf{x}(0) = (2.0848, 0.0868, -2.819)^T$ ; slave system (3.22) –  $\mathbf{y}(0) = (0.1, 0, 0)^T$ . With parameters  $\alpha = 9.3516, \beta = 14.7903, \gamma = 0.0161, m_0 = -1.1384, m_1 = -0.7225$ .

Note that the existence of hidden oscillations and the improper choice of the form of the control signal may lead to the inoperability of synchronization regimes. In [49; 194], it is shown that synchronization of two Chua circuits (3.57) linearly coupled through the second equation by  $K(y - \tilde{y})$ , which was considered in [236; 237] by T. Kapitaniak et al., is acquired for the self-excited attractor and may not be acquired for the hidden attractor. This fault emphasizes

that multistability and hidden attractors in a system could complicate the problem of developing of an effective synchronization scheme.

Below it is demonstrated that our synchronization strategies effectively achieve synchronization for such systems with multistability and hidden attractors.

### 3.4.1 Complete and lag synchronizations for a pair of identical Chua circuits

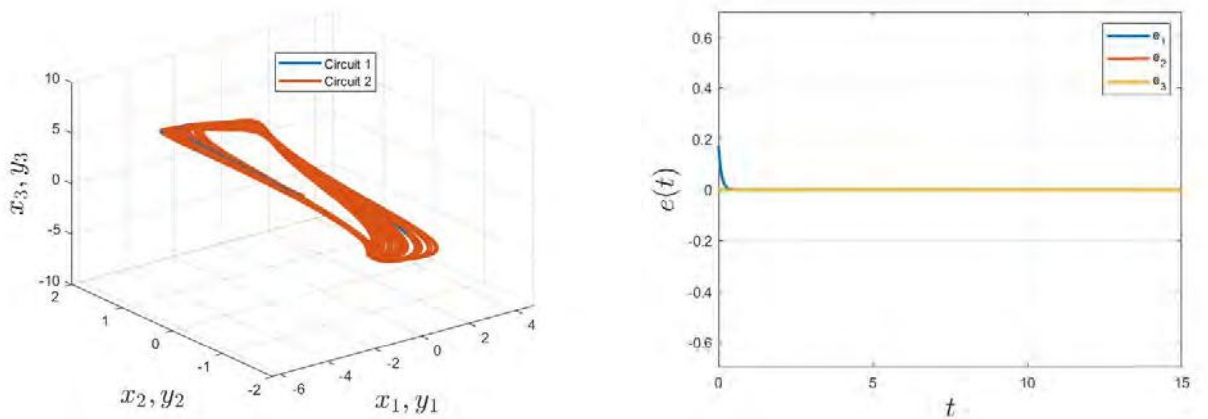
Here we study complete and lag synchronizations described in Section 3.2 for Chua circuits. To apply the proposed scheme, we express the master and the slave of Chua's circuits as the following:

$$\begin{cases} \dot{x}_m = \alpha(y_m - x_m) - \alpha\Psi(x_m), \\ \dot{y}_m = x_m - y_m + z_m, \\ \dot{z}_m = -\beta y_m - \gamma z_m, \end{cases} \quad (3.58)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_s = \alpha(y_s - x_s) - \alpha\Psi(x_s) + \theta_1, \\ \dot{y}_s = x_s - y_s + z_s + \theta_2, \\ \dot{z}_s = -\beta y_s - \gamma z_s + \theta_3, \end{cases} \quad (3.59)$$

wherein  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  are the control functions.

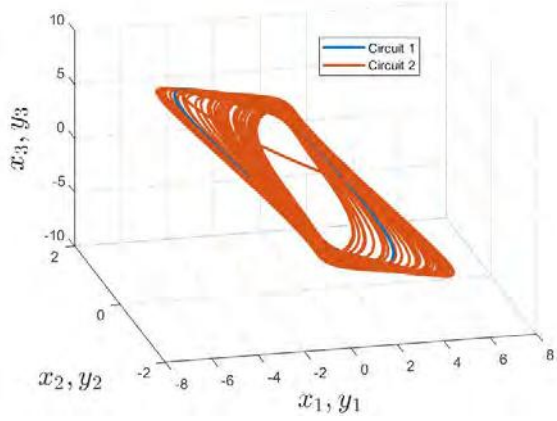
Consider the above four cases; complete synchronization for Chua circuits (3.58) and (3.59) is shown in Figs. 3.27–3.30. Lag synchronization for Chua circuits (3.60) and (3.61) with time lag  $\tau = 0.5$  is shown in Figs. 3.31–3.34.



(a) Complete synchronization of systems (3.58) and (3.59).

(b) Evolution of the error states  $e(t)$ .

Figure 3.27 — **Case 1:** Initial data of the Chua systems on the same hidden attractor with control gain matrix  $k = \text{diag}(11,11,11)$ .



(a) Complete synchronization of systems (3.58) and (3.59).

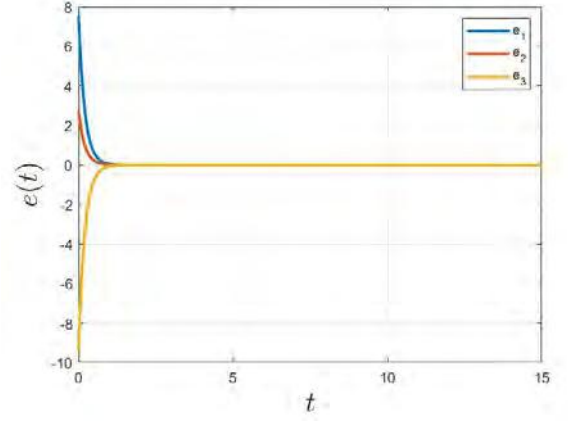
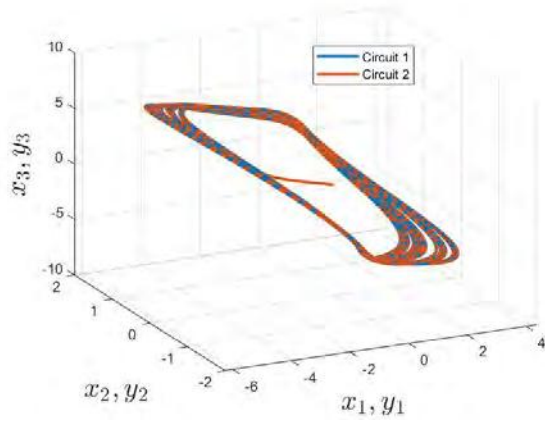
(b) Evolution of the error states  $e(t)$ .

Figure 3.28 — **Case 2:** Initial data of the Chua systems on two symmetrical hidden attractors with control gain matrix  $k = \text{diag}(5,5,5)$ .



(a) Complete synchronization of systems (3.58) and (3.59).

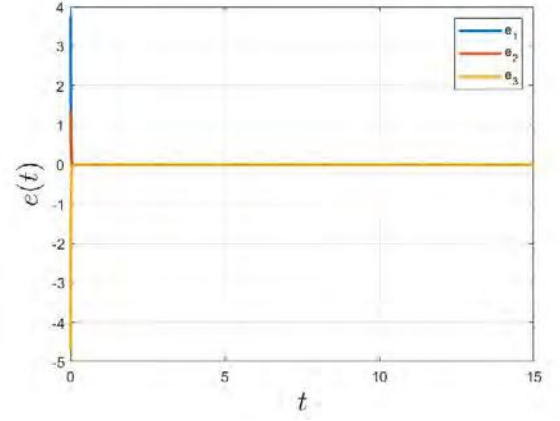
(b) Evolution of the error states  $e(t)$ .

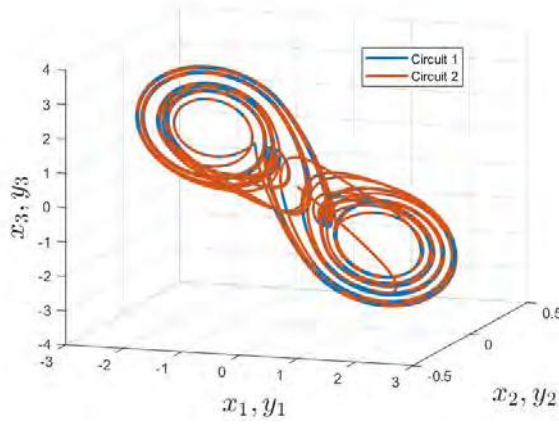
Figure 3.29 — **Case 3:** Initial data of the Chua systems on a hidden attractor and stable zero equilibrium with control gain matrix  $k = \text{diag}(90,90,90)$ .

### 3.4.2 Adaptive synchronization for a pair of identical Chua circuits with unknown parameters

Now we apply the adaptive synchronization scheme (see Section 3.3) for the Chua circuit (3.57). For this purpose, the master and the slave of Chua's circuits are written in the following form:

$$\begin{cases} \dot{x}_m = \alpha(y_m - x_m) - \rho x_m - \eta \Phi(x_m), \\ \dot{y}_m = x_m - y_m + z_m, \\ \dot{z}_m = -\beta y_m - \gamma z_m, \end{cases} \quad (3.60)$$





(a) Complete synchronization of systems (3.58) and (3.59).

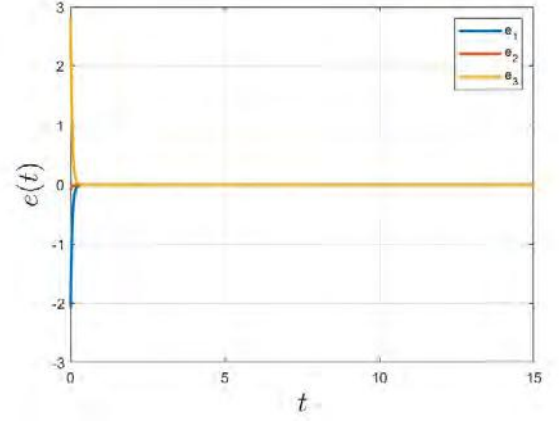
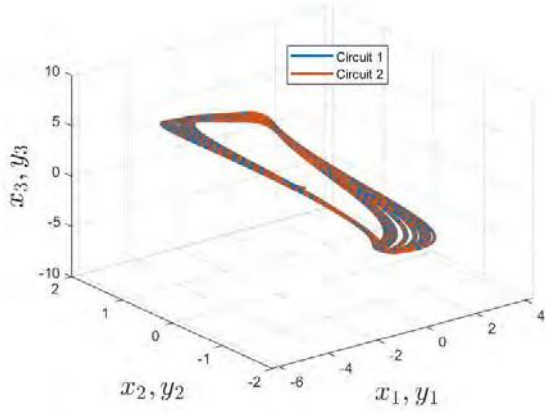
(b) Evolution of the error states  $e(t)$ .

Figure 3.30 — **Case 4:** Initial data of the Chua systems on a self-excited attractor and unstable zero equilibrium with control gain matrix  $k = \text{diag}(20,20,20)$ .



(a) Lag synchronization of systems (3.58) and (3.59).

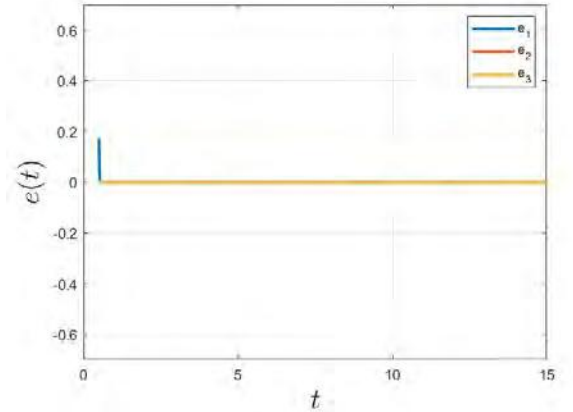
(b) Evolution of the error states  $e(t)$ .

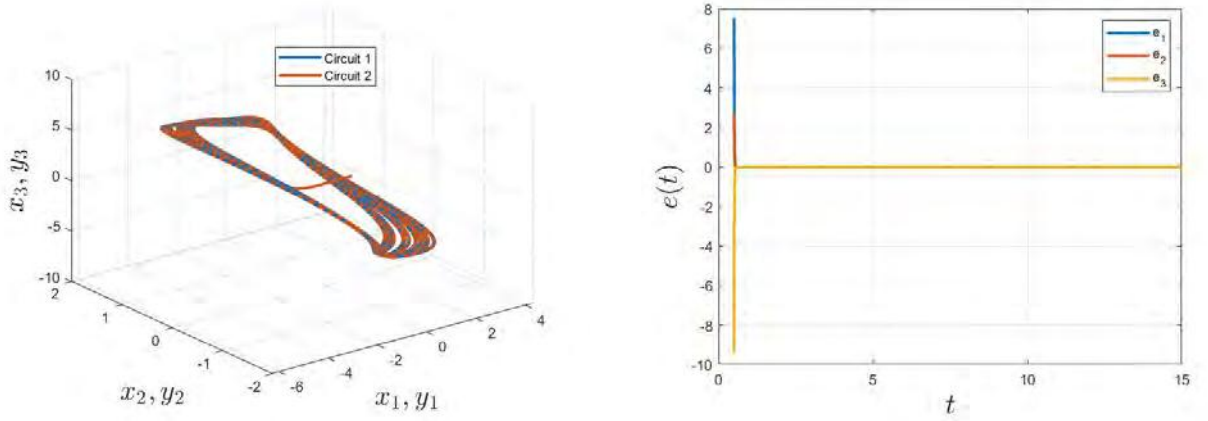
Figure 3.31 — **Case 1:** Initial data of the Chua systems on the same hidden attractor with control gain matrix  $k = \text{diag}(103,103,103)$ .

$$\begin{cases} \dot{x}_s = \hat{\alpha}(y_s - x_s) - \hat{\rho}x_s - \hat{\eta}\Phi(x_s) + \theta_1, \\ \dot{y}_s = x_s - y_s + z_s + \theta_2, \\ \dot{z}_s = -\hat{\beta}y_s - \hat{\gamma}z_s + \theta_3, \end{cases} \quad (3.61)$$

where  $\rho = \alpha m_1$ ,  $\eta = \alpha(m_0 - m_1)$  and  $\Phi(\bullet) = |\bullet + 1| - |\bullet - 1|$ ,  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  are the control functions.

Realizing adaptive synchronization with unknown parameters between systems with multistability and hidden attractors is much more challenging. Below we examine the above four different cases to achieve adaptive synchronization between systems (3.60) and (3.61) (see Figs. 3.35–3.38). The control gain matrices in each case are the following:

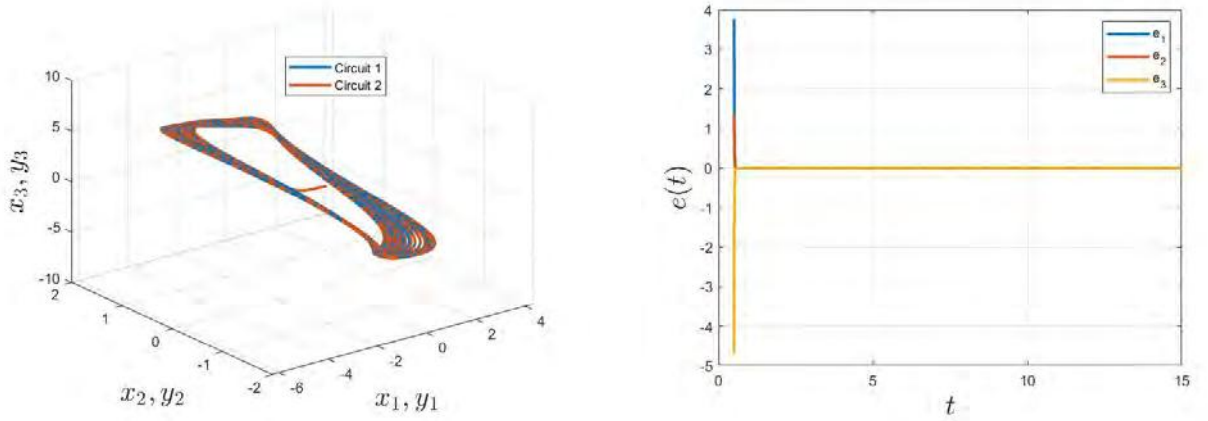
$$\text{Case 1: } K_1 = \text{diag}(10,10,10), K_2 = K_3 = \begin{pmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 500 \end{pmatrix}.$$



(a) Lag synchronization of systems (3.58) and (3.59).

(b) Evolution of the error states  $e(t)$ .

Figure 3.32 — **Case 2:** Initial data of the Chua systems on two symmetrical hidden attractors with control gain matrix  $k = \text{diag}(111,111,111)$ .



(a) Lag synchronization of systems (3.58) and (3.59).

(b) Evolution of the error states  $e(t)$ .

Figure 3.33 — **Case 3:** Initial data of the Chua systems on a hidden attractor and stable zero equilibrium with control gain matrix  $k = \text{diag}(111,111,111)$ .

$$\text{Case 2: } K_1 = \text{diag}(1000,1000,1000), K_2 = K_3 = \begin{pmatrix} 900 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 900 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 900 & 900 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Case 3: } K_1 = \text{diag}(700,700,700), K_2 = K_3 = \begin{pmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 1000 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Case 4: } K_1 = \text{diag}(300,300,300), K_2 = K_3 = \begin{pmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 500 \end{pmatrix}.$$

**Remark 3.11.** Note that realizing synchronization for fractional-order Chua circuits with multistability is more challenging. Currently, it is possible to apply the active control technique described in Section 3.1. Achieving adaptive synchronization with unknown parameters for fractional-order systems will be our future work.

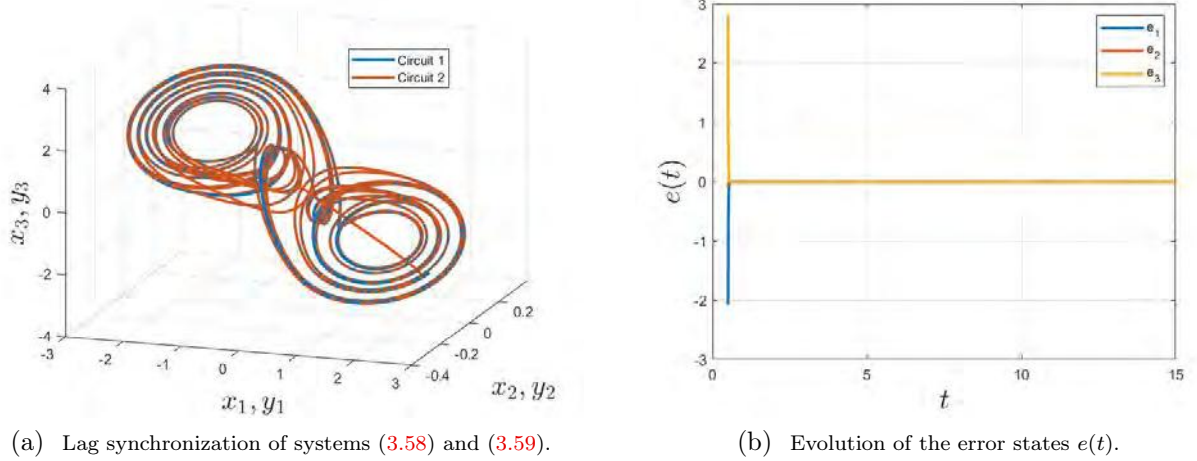


Figure 3.34 — **Case 4:** Initial data of the Chua systems on a self-excited attractor and unstable zero equilibrium with control gain matrix  $k = \text{diag}(117,117,117)$ .

### 3.4.3 Comparison of synchronization schemes in application to secure communication

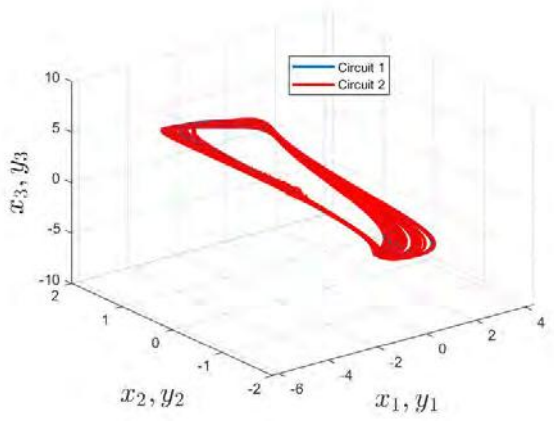
In this subsection, on the example of Chua circuits, the rate at which the error between states tends to zero (i.e., time of synchronization) for complete synchronization, lag synchronization, and adaptive synchronization are estimated. We consider Case 3 to estimate synchronization time (see Fig. 3.39). From Fig. 3.39, one sees that time of complete synchronization is  $\approx 0.05s$ , time of lag synchronization is  $\approx 0.55s$ , and time of adaptive synchronization is  $\approx 0.02s$ . Thus, the synchronization time for the complete synchronization and adaptive synchronization is very close and 11 and 27.5 times faster than the lag synchronization, respectively.

From this experiment, we can conclude that adaptive synchronization provides an effective technique in terms of secure communication. Due to the following:

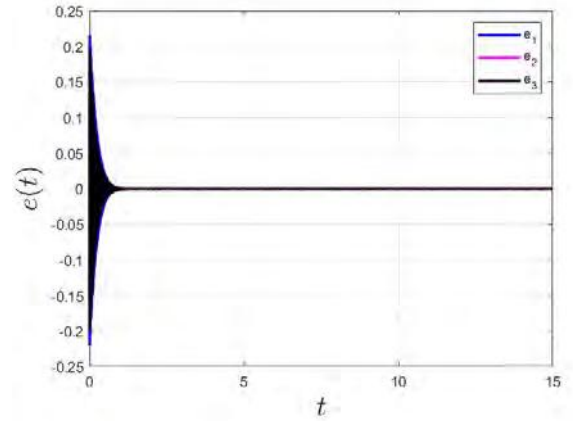
- (1) As we discussed in the previous section, adaptive synchronization enhances decryption techniques since it is possible to inject some part of the message signal into the system's parameters and another part in its states.
- (2) The synchronization time of adaptive synchronization may be fast, improving secure communication regimes.

### 3.4.4 Discussion

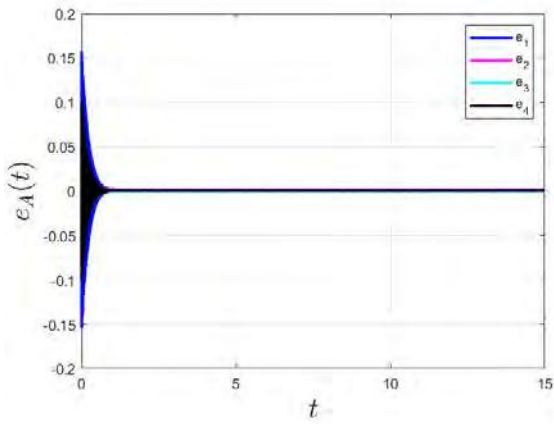
In this section, the Chua circuit that represents a simple electronic circuit that exhibits chaos was considered. Synchronization of Chua circuits with multistability and hidden attractors was realized. Three types of synchronization strategies (complete synchronization, lag synchronization,



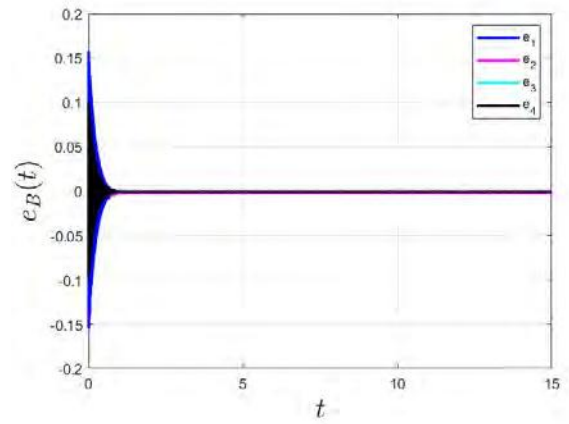
(a) Adaptive synchronization of systems (3.60) and (3.61).



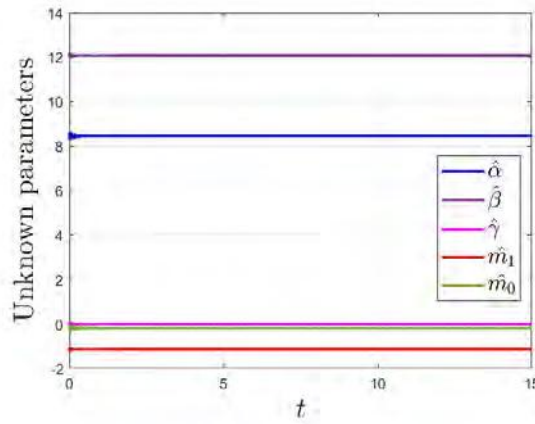
(b) Evolution of the error states  $e(t)$ .



(c) Evolution of the error of parameters modulation  $e_A(t)$ .



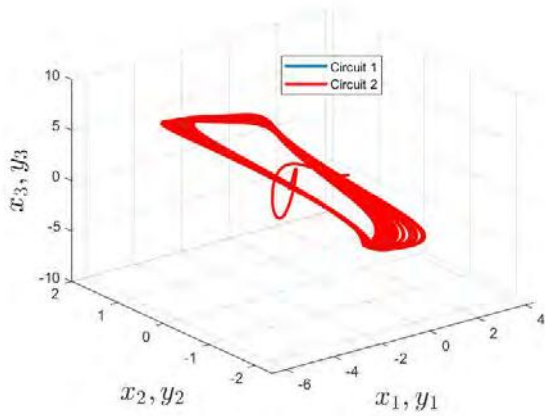
(d) Evolution of the error of parameters modulation  $e_B(t)$ .



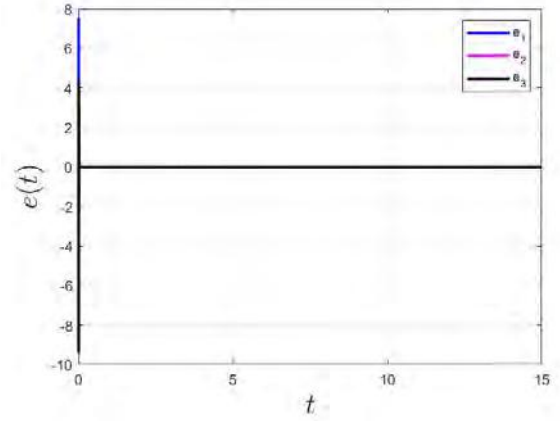
(e) Estimation of unknown parameters  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{m}_1, \hat{m}_0)$ .

Figure 3.35 — **Case 1:** Initial data of the Chua systems on the same hidden attractor.

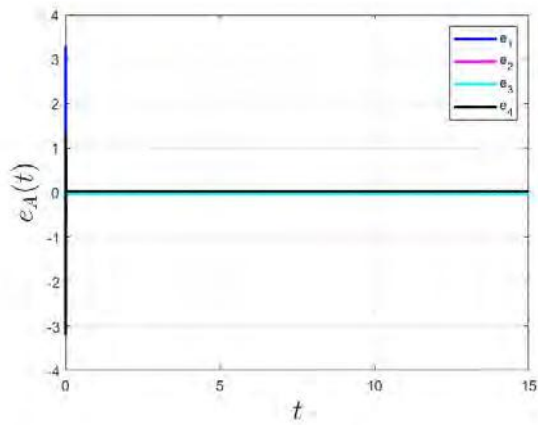
and adaptive synchronization with unknown parameters ) were utilized for this purpose. Further, a comparison of synchronization time for these synchronization strategies on the example of the Chua circuit was estimated.



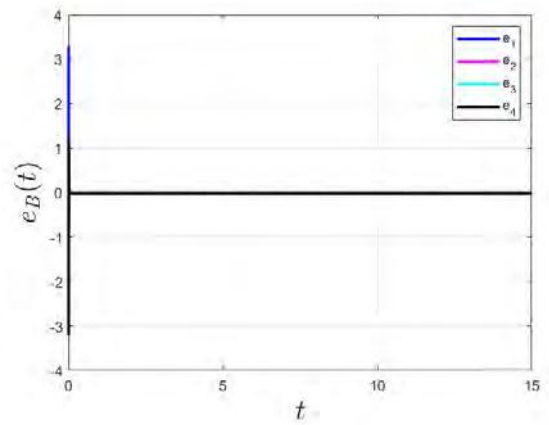
(a) Adaptive synchronization of systems (3.60) and (3.61).



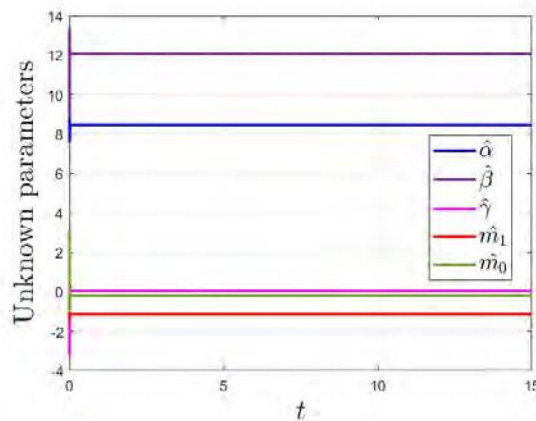
(b) Evolution of the error states  $e(t)$ .



(c) Evolution of the error of parameters modulation  $e_A(t)$ .

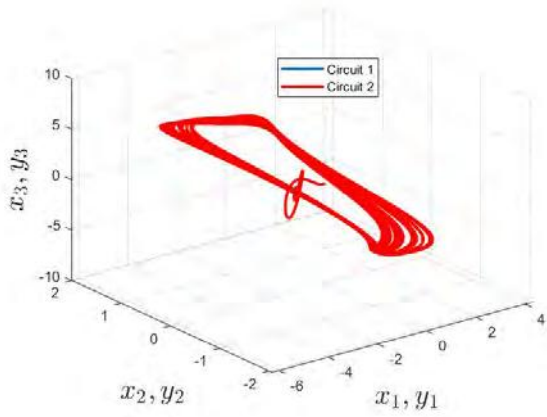


(d) Evolution of the error of parameters modulation  $e_B(t)$ .

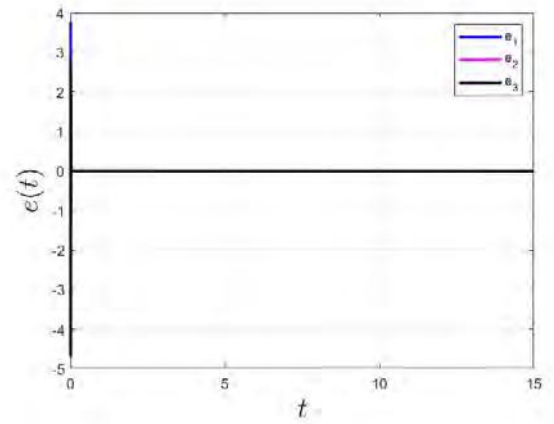


(e) Estimation of unknown parameters  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{m}_1, \hat{m}_0)$ .

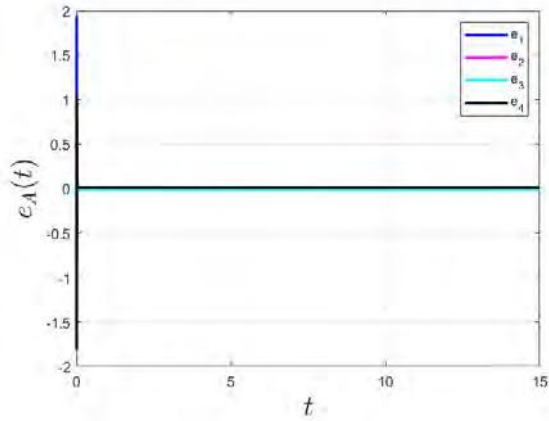
Figure 3.36 — Case 2: Initial data of the Chua systems on two symmetrical hidden attractors.



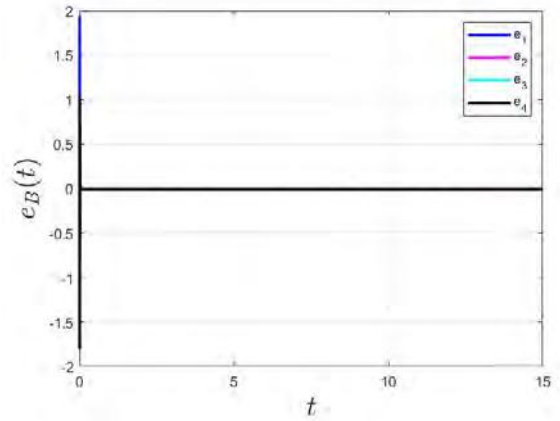
(a) Adaptive synchronization of systems (3.60) and (3.61).



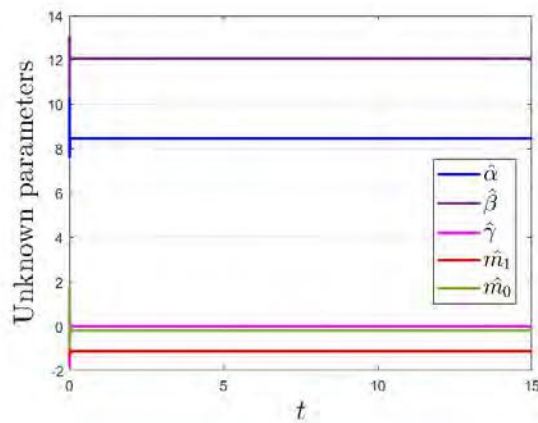
(b) Evolution of the error states  $e(t)$ .



(c) Evolution of the error of parameters modulation  $e_A(t)$ .

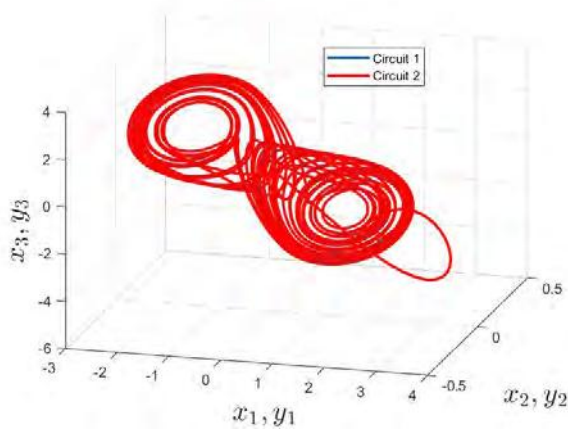


(d) Evolution of the error of parameters modulation  $e_B(t)$ .

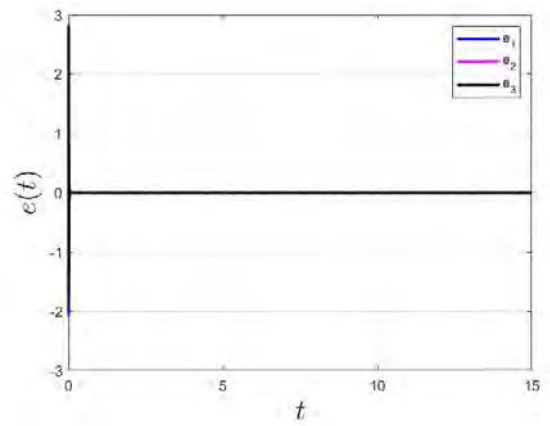


(e) Estimation of unknown parameters  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{m}_1, \hat{m}_0)$ .

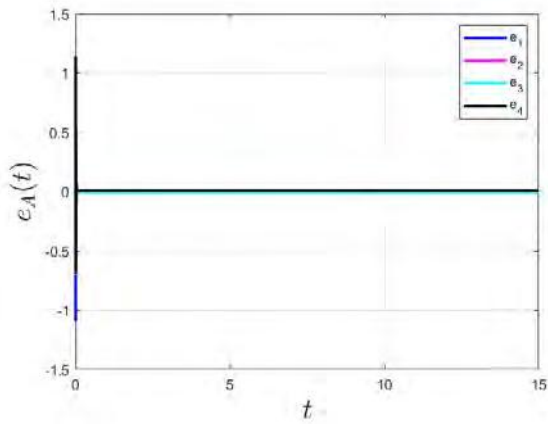
Figure 3.37 — **Case 3:** Initial data of the Chua systems on a hidden attractor and stable zero equilibrium.



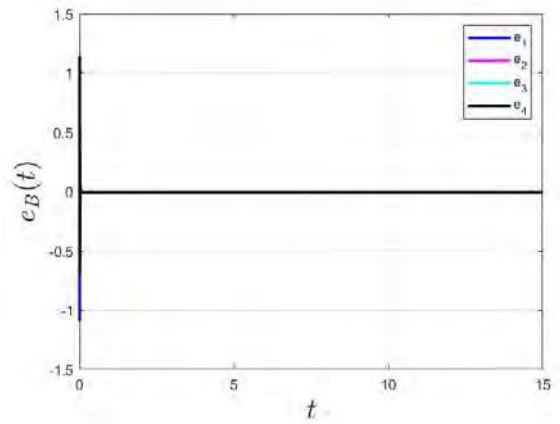
(a) Adaptive synchronization of systems (3.60) and (3.61).



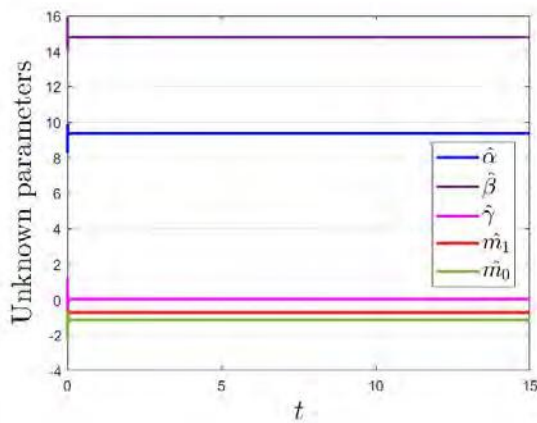
(b) Evolution of the error states  $e(t)$ .



(c) Evolution of the error of parameters modulation  $e_A(t)$ .

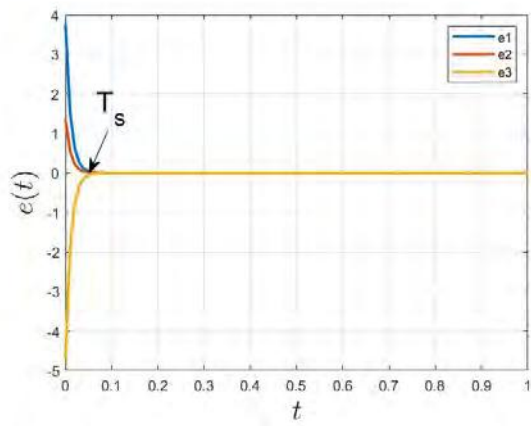


(d) Evolution of the error of parameters modulation  $e_B(t)$ .

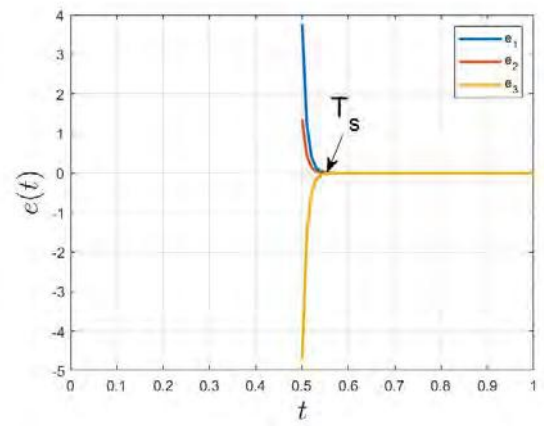


(e) Estimation of unknown parameters  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{m}_1, \hat{m}_0)$ .

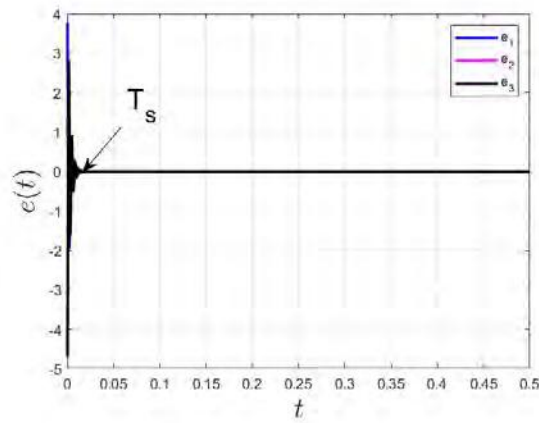
Figure 3.38 — **Case 4:** Initial data of the Chua systems on a self-excited attractor and unstable zero equilibrium.



(a) Complete synchronization.



(b) Lag synchronization.



(c) Adaptive synchronization.

Figure 3.39 — Comparison of the time of synchronization on the example of Chua circuits.



## Conclusion

The main results obtained in this thesis can be outlined as follows:

- (1) The boundaries of global stability for the complex Lorenz system were estimated and the difficulties of numerically studying the birth of self-excited and hidden attractors caused by the loss of global stability were investigated.
- (2) Numerical studies of the problem of existence of sustained hidden chaotic attractors and transient chaotic sets in the complex Lorenz system were presented in the framework of a special analytical transformation.
- (3) A novel fractional-order complex Sprott system without equilibria was considered, in which the existence of a hidden hyperchaotic attractor is found for various values of the fractional-order parameter.
- (4) The method of active control synchronization of hidden hyperchaotic attractors in the fractional-order complex systems was investigated.
- (5) A new scheme to realize lag synchronization for hyperchaotic complex systems was designed.
- (6) A new algorithm to achieve adaptive synchronization of a general class of hyperchaotic complex systems with unknown parameters was proposed. Relying on this type of synchronization strategy, a novel scheme for secure communication with an improved cryptosystem was organized.
- (7) Using three described above schemes, synchronization for the classical Chua circuit with multistability and hidden attractors was achieved. Synchronization results for the three schemes were compared with each other. The enhancements in comparison with the synchronization scheme considered in the paper by T. Kapitaniak et al., were demonstrated.
- (8) Applications of the described three synchronization schemes for designing secure communication systems and cryptosystems were presented.

## Bibliography

1. *Landau L. D.* On the problem of turbulence // Dokl. Akad. Nauk USSR. Vol. 44. — 1944. — P. 311.
2. *Hopf E.* A mathematical example displaying features of turbulence // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1948. — Vol. 1, no. 4. — P. 303–322.
3. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25. — 1971. — Vol. 12. — P. 1–44.
4. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bulletin of the American mathematical Society. — 1967. — Vol. 73, no. 6. — P. 747–817.
5. *Ladyzhenskaya O. A.* Finite-dimensionality of bounded invariant sets for Navier–Stokes systems and other dissipative systems // Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI. — 1982. — Vol. 115. — P. 137–155.
6. *Chen G., Hill D. J., Yu X.* Bifurcation control: theory and applications. Vol. 293. — Springer Science & Business Media, 2003.
7. *Kovacic I., Brennan M. J.* The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour. — John Wiley & Sons, 2011.
8. *Cveticanin L.* Strong nonlinear oscillators // Analytical Solutions, 2nd edition, Springer, Cham. — 2018.
9. *Chueshov I.* Introduction to the theory of infinite-dimensional dissipative systems. — "Acta" publishers, 2002.
10. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow // Journal of atmospheric sciences. — 1963. — Vol. 20, no. 2. — P. 130–141.
11. *Rossler O.* An equation for hyperchaos // Physics Letters A. — 1979. — Vol. 71, no. 2/3. — P. 155–157.
12. *Chen G., Ueta T.* Yet another chaotic attractor // International Journal of Bifurcation and chaos. — 1999. — Vol. 9, no. 07. — P. 1465–1466.
13. *Chua L., Komuro M., Matsumoto T.* The double scroll family // IEEE transactions on circuits and systems. — 1986. — Vol. 33, no. 11. — P. 1072–1118.
14. *Lü J., Chen G.* A new chaotic attractor coined // International Journal of Bifurcation and chaos. — 2002. — Vol. 12, no. 03. — P. 659–661.
15. *Stewart I.* The Lorenz attractor exists // Nature. — 2000. — Vol. 406, no. 6799. — P. 948–949.
16. *Leonov G., Kuznetsov N., Vagaitsev V.* Localization of hidden Chua's attractors // Physics Letters A. — 2011. — Vol. 375, no. 23. — P. 2230–2233.

17. *Leonov G., Kuznetsov N., Vagaitsev V.* Hidden attractor in smooth Chua systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2012. — Vol. 241, no. 18. — P. 1482–1486.
18. *Leonov G. A., Kuznetsov N. V.* Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert–Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2013. — Vol. 23, no. 01. — P. 1330002.
19. *Leonov G., Kuznetsov N., Mokaev T.* Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2015. — Vol. 224, no. 8. — P. 1421–1458.
20. *Kuznetsov N. et al.* The Lorenz system: hidden boundary of practical stability and the Lyapunov dimension // *Nonlinear Dynamics*. — 2020. — Vol. 102, no. 2. — P. 713–732.
21. *Hilbert D.* Mathematical problems // *Bulletin of the American Mathematical Society*. — 1902. — Vol. 8, no. 10. — P. 437–479.
22. *Kuznetsov N., Leonov G.* Lyapunov quantities, limit cycles and strange behavior of trajectories in two-dimensional quadratic systems // *Journal of Vibroengineering*. — 2008. — Vol. 10, no. 4. — P. 460–467.
23. *Leonov G., Kuznetsov N., Kudryashova E.* Cycles of two-dimensional systems: Computer calculations, proofs, and experiments // *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*. — 2008. — Vol. 41, no. 3. — P. 216–250.
24. *Kuznetsov N., Kuznetsova O., Leonov G.* Visualization of four normal size limit cycles in two-dimensional polynomial quadratic system // *Differential equations and dynamical systems*. — 2013. — Vol. 21, no. 1/2. — P. 29–34.
25. *Bautin N. N.* On the number of limit cycles appearing with variation of the coefficients from an equilibrium state of the type of a focus or a center // *Matematicheskii Sbornik*. — 1952. — Vol. 72, no. 1. — P. 181–196.
26. *Li C., Sprott J.* Chaotic flows with a single nonquadratic term // *Physics Letters A*. — 2014. — Vol. 378, no. 3. — P. 178–183.
27. *Markus L., Yamabe H.* Global stability criteria for differential systems // *Osaka Mathematical Journal*. — 1960. — Vol. 12, no. 2. — P. 305–317.
28. *Aizerman M. A.* On a problem concerning the stability “in the large” of dynamical systems // *Uspekhi matematicheskikh nauk*. — 1949. — Vol. 4, no. 4. — P. 187–188.
29. *Kalman R. E.* Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // *Trans. ASME*. — 1957. — Vol. 79, no. 3. — P. 553–566.
30. *Fitts R.* Two counterexamples to Aizerman’s conjecture // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1966. — Vol. 11, no. 3. — P. 553–556.
31. *Barabanov N.* On the Kalman problem // *Siberian Mathematical Journal*. — 1988. — Vol. 29, no. 3. — P. 333–341.

32. *Llibre J., Bernat J.* Counterexample to Kalman and Markus-Yamabe conjectures in dimension larger than 3 // Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems. — 1996. — Vol. 2, no. 3. — P. 377–379.
33. *Bragin V. et al.* Algorithms for finding hidden oscillations in nonlinear systems. The Aizerman and Kalman conjectures and Chua’s circuits // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2011. — Vol. 50, no. 4. — P. 511–543.
34. *Leonov G., Kuznetsov N.* Algorithms for searching for hidden oscillations in the Aizerman and Kalman problems // Doklady Mathematics. Vol. 84. — Citeseer. 2011. — P. 475–481.
35. *Leonov G., Kuznetsov N.* Analytical-numerical methods for investigation of hidden oscillations in nonlinear control systems // IFAC Proceedings Volumes. — 2011. — Vol. 44, no. 1. — P. 2494–2505.
36. *Alli-Oke R. et al.* A robust Kalman conjecture for first-order plants // IFAC Proceedings Volumes. — 2012. — Vol. 45, no. 13. — P. 27–32.
37. *Kuznetsov N. et al.* Nonlinear analysis of classical phase-locked loops in signal’s phase space // IFAC Proceedings Volumes. — 2014. — Vol. 47, no. 3. — P. 8253–8258.
38. *Kuznetsov N. et al.* Limitations of the classical phase-locked loop analysis // 2015 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS). — IEEE. 2015. — P. 533–536.
39. *Leonov G. et al.* Aircraft control with anti-windup compensation // Differential equations. — 2012. — Vol. 48, no. 13. — P. 1700–1720.
40. *Andrievsky B. R. et al.* Hidden oscillations in aircraft flight control system with input saturation // IFAC Proceedings Volumes. — 2013. — Vol. 46, no. 12. — P. 75–79.
41. *Andrievsky B., Kuznetsov N., Leonov G.* Convergence-based analysis of robustness to delay in anti-windup loop of aircraft autopilot // IFAC-PapersOnLine. — 2015. — Vol. 48, no. 9. — P. 144–149.
42. *Kiseleva M. et al.* Drilling systems failures and hidden oscillations // 2012 IEEE 4th International Conference on Nonlinear Science and Complexity (NSC). — IEEE. 2012. — P. 109–112.
43. *Leonov G. et al.* Hidden oscillations in mathematical model of drilling system actuated by induction motor with a wound rotor // Nonlinear Dynamics. — 2014. — Vol. 77, no. 1/2. — P. 277–288.
44. *Mokaev T.* Localization and dimension estimation of attractors in the Glukhovskiy-Dolzhan-skiy system // Jyväskylä studies in computing. — 2016. — No. 240.
45. *Kuznetsov N. V. et al.* The birth of the global stability theory and the theory of hidden oscillations // 2020 European Control Conference (ECC). — IEEE. 2020. — P. 769–774.
46. *Kuznetsov N.* Theory of hidden oscillations and stability of control systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2020. — Vol. 59, no. 5. — P. 647–668.

47. *Kuznetsov N. et al.* Finite-time Lyapunov dimension and hidden attractor of the Rabinovich system // *Nonlinear dynamics*. — 2018. — Vol. 92, no. 2. — P. 267–285.
48. *Chen G. et al.* Hidden attractors on one path: Glukhovsky–Dolzhansky, Lorenz, and Rabinovich systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2017. — Vol. 27, no. 08. — P. 1750115.
49. *Kuznetsov N. et al.* Hidden attractor in the Rabinovich system, Chua circuits and PLL // *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1738. — AIP Publishing LLC. 2016. — P. 210008.
50. *Glukhovskii A., Dolzhanskii F.* Three-component geostrophic models of convection in a rotating fluid // *Academy of Sciences, USSR, Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. — 1980. — Vol. 16. — P. 451–462.
51. *Singh J. P., Roy B.* Hidden attractors in a new complex generalised Lorenz hyperchaotic system, its synchronisation using adaptive contraction theory, circuit validation and application // *Nonlinear Dynamics*. — 2018. — Vol. 92, no. 2. — P. 373–394.
52. *Shoreh A. A.-H., Kuznetsov N. V., Mokaev T. N.* Lag synchronization for complex-valued Rabinovich system with application to encryption techniques // *2020 16th International Computer Engineering Conference (ICENCO)*. — IEEE. 2020. — P. 11–16.
53. *Shoreh A. A.-H. et al.* Synchronization of hidden hyperchaotic attractors in fractional-Order complex-valued systems with application to secure communications // *2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus)*. — IEEE. 2021. — P. 62–67.
54. *Gibbon J., McGuinness M.* The real and complex Lorenz equations in rotating fluids and lasers // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1982. — Vol. 5, no. 1. — P. 108–122.
55. *Ning C.-z., Haken H.* Detuned lasers and the complex Lorenz equations: subcritical and supercritical Hopf bifurcations // *Physical Review A*. — 1990. — Vol. 41, no. 7. — P. 3826.
56. *Kuznetsov N. et al.* Analytical and numerical study of the hidden boundary of practical stability: complex versus real Lorenz systems // *arXiv preprint arXiv:2106.10725*. — 2021.
57. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. Vol. 204. — elsevier, 2006.
58. *Miller K. S., Ross B.* An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. — Wiley, 1993.
59. *Xu Y. et al.* Chaos in diffusionless Lorenz system with a fractional order and its control. — 2012.
60. *Xu Y., Li Y., Liu D.* Response of fractional oscillators with viscoelastic term under random excitation // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. — 2014. — Vol. 9, no. 3.
61. *Hilfer R.* Applications of fractional calculus in physics. — World scientific, 2000.
62. *Tarasov V. E.* Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. — Springer Science & Business Media, 2011.

63. *Arkhincheev V.* Anomalous diffusion in inhomogeneous media: some exact results // Modelling Measurement and Control a General Physics Electronics and Electrical Engineering. — 1993. — Vol. 49. — P. 11–11.
64. *El-Sayed A. M.* Fractional-order diffusion-wave equation // International Journal of Theoretical Physics. — 1996. — Vol. 35, no. 2. — P. 311–322.
65. *Cole K. S.* Electric conductance of biological systems // Cold Spring Harbor symposia on quantitative biology. Vol. 1. — Cold Spring Harbor Laboratory Press. 1933. — P. 107–116.
66. *Laskin N.* Fractional market dynamics // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2000. — Vol. 287, no. 3/4. — P. 482–492.
67. *Podlubny I.* Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. — Elsevier, 1998.
68. *Xu Y. et al.* Responses of Duffing oscillator with fractional damping and random phase // Nonlinear Dynamics. — 2013. — Vol. 74, no. 3. — P. 745–753.
69. *Xu Y. et al.* Sliding mode control of a class of fractional chaotic systems in the presence of parameter perturbations // Journal of Vibration and Control. — 2015. — Vol. 21, no. 3. — P. 435–448.
70. *Mahmoud G. M., Ahmed M. E., Abed-Elhameed T. M.* Active control technique of fractional-order chaotic complex systems // The European Physical Journal Plus. — 2016. — Vol. 131, no. 6. — P. 1–11.
71. *Liu T. et al.* Long-Term dynamics of autonomous fractional differential equations // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2016. — Vol. 26, no. 04. — P. 1650055.
72. *Mahmoud G. M., Farghaly A. A., Shoreh A. A.-H.* A technique for studying a class of fractional-order nonlinear dynamical systems // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2017. — Vol. 27, no. 09. — P. 1750144.
73. *Ahmad W., El-Khazali R., Elwakil A.* Fractional-order Wien-bridge oscillator // Electronics Letters. — 2001. — Vol. 37, no. 18. — P. 1110–1112.
74. *Wang Y., Li C.* Does the fractional Brusselator with efficient dimension less than 1 have a limit cycle? // Physics Letters A. — 2007. — Vol. 363, no. 5/6. — P. 414–419.
75. *Gao X., Yu J.* Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing's oscillators // Chaos, Solitons & Fractals. — 2005. — Vol. 24, no. 4. — P. 1097–1104.
76. *Grigorenko I., Grigorenko E.* Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system // Physical review letters. — 2003. — Vol. 91, no. 3. — P. 034101.
77. *Hartley T. T., Lorenzo C. F., Qammer H. K.* Chaos in a fractional order Chua's system // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. — 1995. — Vol. 42, no. 8. — P. 485–490.

78. *Lu J. G.* Chaotic dynamics of the fractional-order Lü system and its synchronization // *Physics Letters A*. — 2006. — Vol. 354, no. 4. — P. 305–311.
79. *Ahmad W. M., Sprott J. C.* Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2003. — Vol. 16, no. 2. — P. 339–351.
80. *Li C., Chen G.* Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2004. — Vol. 341. — P. 55–61.
81. *Li C., Chen G.* Chaos in the fractional order Chen system and its control // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2004. — Vol. 22, no. 3. — P. 549–554.
82. *Yu Y., Li H.-X.* The synchronization of fractional-order Rössler hyperchaotic systems // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2008. — Vol. 387, no. 5/6. — P. 1393–1403.
83. *Wu X., Lu Y.* Generalized projective synchronization of the fractional-order Chen hyperchaotic system // *Nonlinear Dynamics*. — 2009. — Vol. 57, no. 1. — P. 25–35.
84. *Farghaly A. A., Shoreh A. A.-H.* Some complex dynamical behaviors of the new 6d fractional-order hyperchaotic Lorenz-like system // *Journal of the Egyptian Mathematical Society*. — 2018. — Vol. 26, no. 1. — P. 138–155.
85. *Danca M.-F.* Hidden chaotic attractors in fractional-order systems // *Nonlinear Dynamics*. — 2017. — Vol. 89, no. 1. — P. 577–586.
86. *Danca M.-F.* et al. Complex dynamics, hidden attractors and continuous approximation of a fractional-order hyperchaotic PWC system // *Nonlinear Dynamics*. — 2018. — Vol. 91, no. 4. — P. 2523–2540.
87. *Munoz-Pacheco J. M.* et al. A new fractional-order chaotic system with different families of hidden and self-excited attractors // *Entropy*. — 2018. — Vol. 20, no. 8. — P. 564.
88. *Wang S., Wang C., Xu C.* An image encryption algorithm based on a hidden attractor chaos system and the Knuth–Durstenfeld algorithm // *Optics and Lasers in Engineering*. — 2020. — Vol. 128. — P. 105995.
89. *Xu Y.* et al. Image encryption based on synchronization of fractional chaotic systems // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2014. — Vol. 19, no. 10. — P. 3735–3744.
90. *Tavazoei M. S., Haeri M.* Synchronization of chaotic fractional-order systems via active sliding mode controller // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2008. — Vol. 387, no. 1. — P. 57–70.
91. *Asheghan M. M.* et al. Robust outer synchronization between two complex networks with fractional order dynamics // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2011. — Vol. 21, no. 3. — P. 033121.

92. *Martens M., Poon S.-H.* Returns synchronization and daily correlation dynamics between international stock markets // *Journal of Banking & Finance*. — 2001. — Vol. 25, no. 10. — P. 1805–1827.
93. *Pecora L. M., Carroll T. L.* Synchronization in chaotic systems // *Physical review letters*. — 1990. — Vol. 64, no. 8. — P. 821.
94. *Lin W., He Y.* Complete synchronization of the noise-perturbed Chua's circuits // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2005. — Vol. 15, no. 2. — P. 023705.
95. *Mahmoud G. M., Mahmoud E. E.* Complete synchronization of chaotic complex nonlinear systems with uncertain parameters // *Nonlinear Dynamics*. — 2010. — Vol. 62, no. 4. — P. 875–882.
96. *Zhang H., Ma X.-k.* Synchronization of uncertain chaotic systems with parameters perturbation via active control // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2004. — Vol. 21, no. 1. — P. 39–47.
97. *Du H., Zeng Q., Lü N.* A general method for modified function projective lag synchronization in chaotic systems // *Physics Letters A*. — 2010. — Vol. 374, no. 13/14. — P. 1493–1496.
98. *Tang Z., Park J. H., Feng J.* Novel approaches to pin cluster synchronization on complex dynamical networks in Lur'e forms // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2018. — Vol. 57. — P. 422–438.
99. *He H., Tu J., Xiong P.* Lr-synchronization and adaptive synchronization of a class of chaotic Lurie systems under perturbations // *Journal of the Franklin Institute*. — 2011. — Vol. 348, no. 9. — P. 2257–2269.
100. *Xu Y., Zhou W., Sun W.* Adaptive synchronization of uncertain chaotic systems with adaptive scaling function // *Journal of the Franklin Institute*. — 2011. — Vol. 348, no. 9. — P. 2406–2416.
101. *Li X., Cao J.* Adaptive synchronization for delayed neural networks with stochastic perturbation // *Journal of the Franklin Institute*. — 2008. — Vol. 345, no. 7. — P. 779–791.
102. *Shoreh A.-H., Kuznetsov N., Mokaev T.* New adaptive synchronization algorithm for a general class of complex hyperchaotic systems with unknown parameters and its application to secure communication // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2021. — P. 126466.
103. *Mahmoud G. M., Bountis T., Mahmoud E. E.* Active control and global synchronization of the complex Chen and Lü systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2007. — Vol. 17, no. 12. — P. 4295–4308.
104. *Stuart A., Humphries A. R.* *Dynamical systems and numerical analysis. Vol. 2.* — Cambridge University Press, 1998.



105. *Hirsch M. W., Smale S., Devaney R. L.* Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. — Academic press, 2012.
106. *Strogatz S. H.* Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering. — CRC press, 2018.
107. *Hilborn R. C.* Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers. — Oxford University Press on Demand, 2000.
108. *Wolf A.* et al. Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D: nonlinear phenomena*. — 1985. — Vol. 16, no. 3. — P. 285–317.
109. *Singh J. P., Roy B.* The nature of Lyapunov exponents is  $(+,+,-,-)$ . Is it a hyperchaotic system? // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2016. — Vol. 92. — P. 73–85.
110. *Fowler A., Gibbon J., McGuinness M.* The complex Lorenz equations // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1982. — Vol. 4, no. 2. — P. 139–163.
111. *Rauh A., Hannibal L., Abraham N.* Global stability properties of the complex Lorenz model // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1996. — Vol. 99, no. 1. — P. 45–58.
112. *Coddington E. A., Levinson N.* Theory of ordinary differential equations. — Tata McGraw-Hill Education, 1955.
113. *Lawrence P.* Differential equations and dynamical systems. — 1991.
114. *Lapidus L., Seinfeld J. H.* Numerical solution of ordinary differential equations. — Academic press, 1971.
115. *Kehlet B., Logg A.* A posteriori error analysis of round-off errors in the numerical solution of ordinary differential equations // *Numerical Algorithms*. — 2017. — Vol. 76, no. 1. — P. 191–210.
116. *Liao S., Wang P.* On the mathematically reliable long-term simulation of chaotic solutions of Lorenz equation in the interval  $[0, 10000]$  // *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*. — 2014. — Vol. 57, no. 2. — P. 330–335.
117. *Petráš I.* Method for simulation of the fractional order chaotic systems // *Acta Montanistica Slovaca*. — 2006. — Vol. 11, no. 4. — P. 273–277.
118. *Tripathi D., Pandey S., Das S.* Peristaltic flow of viscoelastic fluid with fractional Maxwell model through a channel // *Applied Mathematics and Computation*. — 2010. — Vol. 215, no. 10. — P. 3645–3654.
119. *Magin R. L.* Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues // *Computers & Mathematics with Applications*. — 2010. — Vol. 59, no. 5. — P. 1586–1593.
120. *Picozzi S., West B. J.* Fractional Langevin model of memory in financial markets // *Physical Review E*. — 2002. — Vol. 66, no. 4. — P. 046118.
121. *Lundstrom B. N.* et al. Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons // *Nature neuroscience*. — 2008. — Vol. 11, no. 11. — P. 1335–1342.

122. *Magin R., Ovadia M.* Modeling the cardiac tissue electrode interface using fractional calculus // *Journal of Vibration and Control*. — 2008. — Vol. 14, no. 9/10. — P. 1431–1442.
123. *Tavazoei M. S., Haeri M.* A note on the stability of fractional order systems // *Mathematics and Computers in simulation*. — 2009. — Vol. 79, no. 5. — P. 1566–1576.
124. *Luo C., Wang X.* Chaos in the fractional-order complex Lorenz system and its synchronization // *Nonlinear Dynamics*. — 2013. — Vol. 71, no. 1. — P. 241–257.
125. *Mahmoud G. M., Abed-Elhameed T. M., Ahmed M. E.* Generalization of combination–combination synchronization of chaotic n-dimensional fractional-order dynamical systems // *Nonlinear Dynamics*. — 2016. — Vol. 83, no. 4. — P. 1885–1893.
126. *Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D.* A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations // *Nonlinear Dynamics*. — 2002. — Vol. 29, no. 1. — P. 3–22.
127. *Zhou Y.* Fractional evolution equations and inclusions: Analysis and control. — Academic Press, 2016.
128. *Danca M.-F. et al.* Fractional-order PWC systems without zero Lyapunov exponents // *Nonlinear Dynamics*. — 2018. — Vol. 92, no. 3. — P. 1061–1078.
129. *Matignon D.* Stability results for fractional differential equations with applications to control processing // *Computational engineering in systems applications*. Vol. 2. — Citeseer. 1996. — P. 963–968.
130. *Rabinovich M. I.* Stochastic self-oscillations and turbulence // *Soviet Physics Uspekhi*. — 1978. — Vol. 21, no. 5. — P. 443.
131. *Vidyasagar M.* Nonlinear systems analysis. — SIAM, 2002.
132. *Chellaboina V., Haddad W. M.* Nonlinear dynamical systems and control: A Lyapunov-based approach. — Princeton University Press, 2008.
133. *Reitmann V., Smirnova V. B., Leonov G. A.* Non-local methods for pendulum-like feedback systems. — Springer, 2013.
134. *Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A. K.* Stability of stationary sets in control systems with discontinuous nonlinearities. Vol. 14. — World Scientific Singapore, 2004.
135. *Barbashin E., Krasovskii N. N.* On stability of motion in the large : tech. rep. / Trw space technology labs Los Angeles calif. — 1961.
136. *LaSalle J.* Some extensions of Liapunov’s second method // *IRE Transactions on circuit theory*. — 1960. — Vol. 7, no. 4. — P. 520–527.
137. *Leonov G. A., Ponomarenko D. V., Smirnova V. B.* Frequency-domain methods for nonlinear analysis: theory and applications. Vol. 9. — World Scientific, 1996.
138. *La Salle J., Lefschetz S.* Stability by Liapunov’s Direct Method with Applications. — Elsevier, 2012.

139. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynuk A. A.* Practical stability of nonlinear systems. — World Scientific, 1990.
140. *Afraimovich V. S., Bykov V., Shilnikov L. P.* On the origin and structure of the Lorenz attractor // *Akademiia Nauk SSSR Doklady*. Vol. 234. — 1977. — P. 336–339.
141. *Auerbach D.* et al. Exploring chaotic motion through periodic orbits // *Physical Review Letters*. — 1987. — Vol. 58, no. 23. — P. 2387.
142. *Cvitanović P.* Periodic orbits as the skeleton of classical and quantum chaos // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1991. — Vol. 51, no. 1–3. — P. 138–151.
143. *Chua L. O.* et al. *Methods Of Qualitative Theory In Nonlinear Dynamics (Part II)*. Vol. 5. — World Scientific, 2001.
144. *Leonov G. A.* Shilnikov chaos in Lorenz-like systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2013. — Vol. 23, no. 03. — P. 1350058.
145. *Leonov G. A.* et al. Homoclinic bifurcations and chaos in the Fishing principle for the Lorenz-like systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2020. — Vol. 30, no. 08. — P. 2050124.
146. *Levinson N.* Transformation theory of non-linear differential equations of the second order // *Annals of Mathematics*. — 1944. — P. 723–737.
147. *Kuznetsov N. V.* Hidden attractors in fundamental problems and engineering models: A short survey // *AETA 2015: Recent Advances in Electrical Engineering and Related Sciences*. — Springer, 2016. — P. 13–25.
148. *Leonov G., Boichenko V.* Lyapunov’s direct method in the estimation of the Hausdorff dimension of attractors // *Acta Applicandae Mathematica*. — 1992. — Vol. 26, no. 1. — P. 1–60.
149. *Leonov G.* Lyapunov functions in the global analysis of chaotic systems // *Ukrainian Mathematical Journal*. — 2018. — Vol. 70, no. 1. — P. 42–66.
150. *Sparrow C.* *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*. Vol. 41. — Springer Science & Business Media, 2012.
151. *Yuan Q., Yang F.-Y., Wang L.* A note on hidden transient chaos in the Lorenz system // *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. — 2017. — Vol. 18, no. 5. — P. 427–434.
152. *Munmuangsaen B., Srisuchinwong B.* A hidden chaotic attractor in the classical Lorenz system // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2018. — Vol. 107. — P. 61–66.
153. *Greboği C., Ott E., Yorke J. A.* Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation // *Physical Review Letters*. — 1983. — Vol. 50, no. 13. — P. 935.
154. *Lai Y.-C., Tél T.* *Transient chaos: complex dynamics on finite time scales*. Vol. 173. — Springer Science & Business Media, 2011.

155. *Danca M.-F., Kuznetsov N.* Hidden chaotic sets in a Hopfield neural system // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2017. — Vol. 103. — P. 144–150.
156. *Fowler A., Gibbon J., McGuinness M.* The real and complex Lorenz equations and their relevance to physical systems. — 1983.
157. *Neimark Y., Landa P.* Stochastic and chaotic oscillations. Vol. 77. — Springer Science & Business Media, 1992.
158. *Leonov G. A., Reitmann V.* Attraktoreingrenzung für nichtlineare Systeme. — 1987.
159. *Leonov G. A.* On estimations of Hausdorff dimension of attractors // *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*. — 1991. — Vol. 23, no. 3. — P. 38–41.
160. *Kuznetsov N., Alexeeva T., Leonov G.* Invariance of Lyapunov exponents and Lyapunov dimension for regular and irregular linearizations // *Nonlinear Dynamics*. — 2016. — Vol. 85, no. 1. — P. 195–201.
161. *Kuznetsov N.* The Lyapunov dimension and its estimation via the Leonov method // *Physics Letters A*. — 2016. — Vol. 380, no. 25/26. — P. 2142–2149.
162. *Siminos E., Cvitanović P.* Continuous symmetry reduction and return maps for high-dimensional flows // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2011. — Vol. 240, no. 2. — P. 187–198.
163. *Froehlich S., Cvitanović P.* Reduction of continuous symmetries of chaotic flows by the method of slices // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2012. — Vol. 17, no. 5. — P. 2074–2084.
164. *Vladimirov A. G., Toronov V. Y., Derbov V. L.* Complex Lorenz equations // *CIS Selected Papers Nonlinear Dynamics of Laser and Optical Systems*. Vol. 3177. — International Society for Optics, Photonics. 1997. — P. 97–106.
165. *Vladimirov A., Toronov V. Y., Derbov V. L.* The complex Lorenz model: Geometric structure, homoclinic bifurcation and one-dimensional map // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 1998. — Vol. 8, no. 04. — P. 723–729.
166. *Vladimirov A., Toronov V. Y., Derbov V.* Properties of the phase space and bifurcations in the complex Lorenz model // *Technical Physics*. — 1998. — Vol. 43, no. 8. — P. 877–884.
167. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. Vol. 1. — New York, London, 1963.
168. *Lü J., Chen G., Zhang S.* The compound structure of a new chaotic attractor // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2002. — Vol. 14, no. 5. — P. 669–672.
169. *May R. M.* Simple mathematical models with very complicated dynamics // *The Theory of Chaotic Attractors*. — 2004. — P. 85–93.
170. *Chen A. et al.* Generating hyperchaotic Lü attractor via state feedback control // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2006. — Vol. 364. — P. 103–110.

171. *Jia Q.* Projective synchronization of a new hyperchaotic Lorenz system // *Physics Letters A*. — 2007. — Vol. 370, no. 1. — P. 40–45.
172. *Gao Y.* et al. A new fractional-order hyperchaotic system and its modified projective synchronization // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2015. — Vol. 76. — P. 190–204.
173. *Wang G.* et al. A new modified hyperchaotic Lü system // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2006. — Vol. 371, no. 2. — P. 260–272.
174. *Li Y., Chen G., Tang W. K.-S.* Controlling a unified chaotic system to hyperchaotic // *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*. — 2005. — Vol. 52, no. 4. — P. 204–207.
175. *Li Y., Tang W. K., Chen G.* Hyperchaos evolved from the generalized Lorenz equation // *International Journal of Circuit Theory and Applications*. — 2005. — Vol. 33, no. 4. — P. 235–251.
176. *Mahmoud G. M., Ahmed M. E., Mahmoud E. E.* Analysis of hyperchaotic complex Lorenz systems // *International Journal of Modern Physics C*. — 2008. — Vol. 19, no. 10. — P. 1477–1494.
177. *Mahmoud G. M., Mahmoud E. E., Ahmed M. E.* On the hyperchaotic complex Lü system // *Nonlinear Dynamics*. — 2009. — Vol. 58, no. 4. — P. 725–738.
178. *Mahmoud E. E.* Dynamics and synchronization of new hyperchaotic complex Lorenz system // *Mathematical and Computer Modelling*. — 2012. — Vol. 55, no. 7/8. — P. 1951–1962.
179. *Mahmoud G. M., Ahmed M. E.* A hyperchaotic complex system generating two-, three-, and four-scroll attractors // *Journal of Vibration and Control*. — 2012. — Vol. 18, no. 6. — P. 841–849.
180. *Mahmoud G. M.* et al. Dynamics of distributed-order hyperchaotic complex van der Pol oscillators and their synchronization and control // *The European Physical Journal Plus*. — 2020. — Vol. 135, no. 1. — P. 1–16.
181. *Chen D.-Y.* et al. Analysis and control of a hyperchaotic system with only one nonlinear term // *Nonlinear Dynamics*. — 2012. — Vol. 67, no. 3. — P. 1745–1752.
182. *Dadras S., Momeni H. R.* Four-scroll hyperchaos and four-scroll chaos evolved from a novel 4D nonlinear smooth autonomous system // *Physics Letters A*. — 2010. — Vol. 374, no. 11/12. — P. 1368–1373.
183. *Wei Z., Wang R., Liu A.* A new finding of the existence of hidden hyperchaotic attractors with no equilibria // *Mathematics and Computers in Simulation*. — 2014. — Vol. 100. — P. 13–23.
184. *Jia Q.* Hyperchaos generated from the Lorenz chaotic system and its control // *Physics Letters A*. — 2007. — Vol. 366, no. 3. — P. 217–222.

185. *Xu G., Chen S.* Hybrid synchronization of a Chen hyper-chaotic system with two simple linear feedback controllers // *Applied Mathematics*. — 2013. — Vol. 4, 11B. — P. 13.
186. *Singh P. P., Singh J. P., Roy B.* Synchronization and anti-synchronization of Lu and Bhalekar–Gejji chaotic systems using nonlinear active control // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2014. — Vol. 69. — P. 31–39.
187. *Jafari S., Sprott J., Golpayegani S. M. R. H.* Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria // *Physics Letters A*. — 2013. — Vol. 377, no. 9. — P. 699–702.
188. *Jafari S., Pham V.-T., Kapitaniak T.* Multiscroll chaotic sea obtained from a simple 3D system without equilibrium // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2016. — Vol. 26, no. 02. — P. 1650031.
189. *Wei Z., Zhang W.* Hidden hyperchaotic attractors in a modified Lorenz–Stenflo system with only one stable equilibrium // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2014. — Vol. 24, no. 10. — P. 1450127.
190. *Wei Z. et al.* Study of hidden attractors, multiple limit cycles from Hopf bifurcation and boundedness of motion in the generalized hyperchaotic Rabinovich system // *Nonlinear Dynamics*. — 2015. — Vol. 82, no. 1. — P. 131–141.
191. *Li Q., Zeng H., Li J.* Hyperchaos in a 4D memristive circuit with infinitely many stable equilibria // *Nonlinear Dynamics*. — 2015. — Vol. 79, no. 4. — P. 2295–2308.
192. *Chen Y., Yang Q.* A new Lorenz-type hyperchaotic system with a curve of equilibria // *Mathematics and Computers in Simulation*. — 2015. — Vol. 112. — P. 40–55.
193. *Dudkowski D. et al.* Hidden attractors in dynamical systems // *Physics Reports*. — 2016. — Vol. 637. — P. 1–50.
194. *Kuznetsov N., Leonov G.* Hidden attractors in dynamical systems: systems with no equilibria, multistability and coexisting attractors // *IFAC Proceedings Volumes*. — 2014. — Vol. 47, no. 3. — P. 5445–5454.
195. *Koeller R.* Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. — 1984.
196. *Stratton J. A.* Electromagnetic theory. Vol. 33. — John Wiley & Sons, 2007.
197. *Sprott J. C.* Some simple chaotic flows // *Physical review E*. — 1994. — Vol. 50, no. 2. — R647.
198. *Zhang S., Zeng Y. C., Jun Li Z.* A novel four-dimensional no-equilibrium hyper-chaotic system with grid multiwing hyper-chaotic hidden attractors // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. — 2018. — Vol. 13, no. 9.
199. *Mahmoud G. M., Ahmed M. E., Sabor N.* On autonomous and nonautonomous modified hyperchaotic complex Lü systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2011. — Vol. 21, no. 07. — P. 1913–1926.
200. *Boiko I. et al.* On counter-examples to Aizerman and Kalman conjectures // *International Journal of Control*. — 2020. — P. 1–8.

201. *Boccaletti S.* et al. The synchronization of chaotic systems // *Physics reports.* — 2002. — Vol. 366, no. 1/2. — P. 1–101.
202. *Banerjee S.* Chaos synchronization and cryptography for secure communications: applications for encryption. — IGI global, 2010.
203. *Jiang Z.-P.* A note on chaotic secure communication systems // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications.* — 2002. — Vol. 49, no. 1. — P. 92–96.
204. *Chai X.* An image encryption algorithm based on bit level Brownian motion and new chaotic systems // *Multimedia Tools and Applications.* — 2017. — Vol. 76, no. 1. — P. 1159–1175.
205. *Muthukumar P., Balasubramaniam P., Ratnavelu K.* Sliding mode control design for synchronization of fractional order chaotic systems and its application to a new cryptosystem // *International Journal of Dynamics and Control.* — 2017. — Vol. 5, no. 1. — P. 115–123.
206. *Chen L.* et al. Cluster synchronization in fractional-order complex dynamical networks // *Physics Letters A.* — 2012. — Vol. 376, no. 35. — P. 2381–2388.
207. *Mahmoud G. M., Mahmoud E. E.* Lag synchronization of hyperchaotic complex nonlinear systems // *Nonlinear Dynamics.* — 2012. — Vol. 67, no. 2. — P. 1613–1622.
208. *Lee T. H., Park J. H.* Adaptive functional projective lag synchronization of a hyperchaotic Rössler system // *Chinese Physics Letters.* — 2009. — Vol. 26, no. 9. — P. 090507.
209. *Jahanshahi H.* et al. Entropy analysis and neural network-based adaptive control of a non-equilibrium four-dimensional chaotic system with hidden attractors // *Entropy.* — 2019. — Vol. 21, no. 2. — P. 156.
210. *Li C., Liao X., Wong K.-w.* Lag synchronization of hyperchaos with application to secure communications // *Chaos, Solitons & Fractals.* — 2005. — Vol. 23, no. 1. — P. 183–193.
211. *Liu L.* et al. Pinning impulsive cluster synchronization of complex dynamical network // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2020. — Vol. 545. — P. 123580.
212. *Zambrano-Serrano E.* et al. On chaos and projective synchronization of a fractional difference map with no equilibria using a fuzzy-based state feedback control // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2021. — P. 126100.
213. *Liu J.* et al. New results of projective synchronization for memristor-based coupled neural networks // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2020. — Vol. 545. — P. 123739.
214. *Chen X.* et al. Synchronizing hyperchaotic subsystems with a single variable: A reservoir computing approach // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2019. — Vol. 534. — P. 122273.
215. *Leonov G. A.* et al. Nonlinear dynamical model of Costas loop and an approach to the analysis of its stability in the large // *Signal processing.* — 2015. — Vol. 108. — P. 124–135.

216. *Liu B.* et al. Uniform synchronization for chaotic dynamical systems via event-triggered impulsive control // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2019. — Vol. 531. — P. 121725.
217. *Wang F., Zheng Z.* Quasi-projective synchronization of fractional order chaotic systems under input saturation // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2019. — Vol. 534. — P. 122132.
218. *Luo F., Xiang Y., Wu E.* Finite-time synchronization of coupled complex-valued chaotic systems with time-delays and bounded perturbations // *Modern Physics Letters B*. — 2021. — Vol. 35, no. 07. — P. 2150130.
219. *Dang T. S.* et al. Complexity and synchronization in stochastic chaotic systems // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2016. — Vol. 225, no. 1. — P. 159–170.
220. *Huang Y., Bao H.* Master-slave synchronization of complex-valued delayed chaotic Lur'e systems with sampled-data control // *Applied Mathematics and Computation*. — 2020. — Vol. 379. — P. 125261.
221. *Mahmoud G. M., Mahmoud E. E., Arafa A. A.* Projective synchronization for coupled partially linear complex-variable systems with known parameters // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. — 2017. — Vol. 40, no. 4. — P. 1214–1222.
222. *Mahmoud E. E.* Adaptive anti-lag synchronization of two identical or non-identical hyperchaotic complex nonlinear systems with uncertain parameters // *Journal of the Franklin Institute*. — 2012. — Vol. 349, no. 3. — P. 1247–1266.
223. *Xu Y.* et al. Topology identification and adaptive synchronization of uncertain complex networks with non-derivative and derivative coupling // *Journal of the Franklin Institute*. — 2010. — Vol. 347, no. 8. — P. 1566–1576.
224. *Mahmoud G. M.* et al. Adaptive dual synchronization of chaotic (hyperchaotic) complex systems with uncertain parameters and its application in image encryption // *Acta Phys. Pol. B*. — 2018. — Vol. 49. — P. 1923.
225. *Liao T.-L., Tsai S.-H.* Adaptive synchronization of chaotic systems and its application to secure communications // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2000. — Vol. 11, no. 9. — P. 1387–1396.
226. *Li Z., Xu D.* A secure communication scheme using projective chaos synchronization // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2004. — Vol. 22, no. 2. — P. 477–481.
227. *Wu X.-J., Wang H., Lu H.-T.* Hyperchaotic secure communication via generalized function projective synchronization // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. — 2011. — Vol. 12, no. 2. — P. 1288–1299.
228. *He J., Cai J., Lin J.* Synchronization of hyperchaotic systems with multiple unknown parameters and its application in secure communication // *Optik*. — 2016. — Vol. 127, no. 5. — P. 2502–2508.



229. *Alvarez G.* et al. Breaking a secure communication scheme based on the phase synchronization of chaotic systems // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2004. — Vol. 14, no. 2. — P. 274–278.
230. *JinFeng H., JingBo G.* Breaking a chaotic secure communication scheme // *Chaos: An interdisciplinary journal of nonlinear science*. — 2008. — Vol. 18, no. 1. — P. 013121.
231. *Kolumbán G., Kennedy M. P., Chua L. O.* The role of synchronization in digital communications using chaos. I. Fundamentals of digital communications // *IEEE Transactions on circuits and systems I: Fundamental theory and applications*. — 1997. — Vol. 44, no. 10. — P. 927–936.
232. *Kolumbán G., Kennedy M. P., Chua L. O.* The role of synchronization in digital communications using chaos. II. Chaotic modulation and chaotic synchronization // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*. — 1998. — Vol. 45, no. 11. — P. 1129–1140.
233. *Wang Z.* et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity // *IEEE transactions on image processing*. — 2004. — Vol. 13, no. 4. — P. 600–612.
234. *Wang Z., Bovik A. C.* A universal image quality index // *IEEE signal processing letters*. — 2002. — Vol. 9, no. 3. — P. 81–84.
235. *Kiseleva M.* et al. Hidden and self-excited attractors in Chua circuit: synchronization and SPICE simulation // *International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems*. — 2018. — Vol. 33, no. 5. — P. 513–523.
236. *Kapitaniak T.* Generating strange nonchaotic trajectories // *Physical review E*. — 1993. — Vol. 47, no. 2. — P. 1408.
237. *Kapitaniak T.* Uncertainty in coupled chaotic systems: Locally intermingled basins of attraction // *Physical Review E*. — 1996. — Vol. 53, no. 6. — P. 6555.
238. *Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Mokaev T. N.* Hidden attractor and homoclinic orbit in Lorenz-like system describing convective fluid motion in rotating cavity // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2015. — Vol. 28, no. 1–3. — P. 166–174.
239. *Prasad A.* Existence of perpetual points in nonlinear dynamical systems and its applications // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2015. — Vol. 25, no. 02. — P. 1530005.
240. *Prasad A.* A note on topological conjugacy for perpetual points // *arXiv preprint arXiv:1511.05836*. — 2015.

## List of Figures

2.1	Dynamics of the Lorenz system (2.1) with fixed parameters $\sigma = 10$ , $b = \frac{8}{3}$ , when parameter $r$ varying according to the inner estimation of global stability (see [20]).	25
2.2	Dynamics of the Lorenz system (2.1) with fixed parameters $\sigma = 10$ , $b = \frac{8}{3}$ , when parameter $r$ varying according to the outer estimation of global stability (see [20]).	26
2.3	The absence of self-excited and hidden attractors and the global stability of the stationary set $\{S_0, S_\theta\}$ in the system (2.8) with parameters $\sigma = 4$ , $r_1 = 5$ , $r_2 = -e = 0.001$ , $b = 4$ . Trajectories (blue, purple) in a small vicinity of the unstable equilibrium $S_0$ tend to the stable set of equilibria $S_\theta$ (trivial attractors).	33
2.4	Co-existence of a nontrivial attractive torus and the unstable equilibrium $S_0$ in the system (2.8) with parameters $\sigma = 4$ , $r_1 = 5$ , $r_2 = 0.002$ , $e = -0.001$ , $b = 4$ . Trajectories (blue, purple) in small neighborhoods of the unstable equilibrium $S_0$ attractors to the torus (nontrivial attractors).	34
2.5	Global stability of the stationary set $\{S'_0, S'_1\}$ in the projective system (2.29) with parameters $\sigma = 4$ , $r_1 = 5$ , $r_2 = -e = 0.001$ , $b = 4$ .	36
2.6	Visualization of homoclinic orbits with $\sigma = 10$ , $r_2 = 4.5 \times 10^{-4}$ , $e = -0.001$ , $b = \frac{8}{3}$ and $r_{1h} \approx 13.9$ .	37
2.7	Visualization of homoclinic orbits with $\sigma = 10$ , $r_2 = 0$ , $e = 0$ , $b = \frac{8}{3}$ and $r_{1h} \approx 13.9$ .	37
2.8	(a), (b) Numerical visualization of the self-excited chaotic attractor in system (2.8) with $r_1 = 28$ , $\sigma = 10$ , $b = \frac{8}{3}$ , $r_2 = -e = 0.001$ by integrating the trajectories with initial data from small vicinities of the unstable equilibria $S_0, S_\theta$ ; (c), (d) The corresponding images in the projective space $\mathcal{P}$ .	39
2.9	(a), (b) Numerical visualization of the self-excited local chaotic attractor in system (2.8) with $r_1 = 24.6$ , $\sigma = 10$ , $b = \frac{8}{3}$ , $r_2 = -e = 0.001$ by a trajectory starting in the vicinity of the unstable equilibrium $S_0$ . This attractor coexists with the stable set of equilibria $S_\theta$ ; (c), (d) The corresponding images in the projective space $\mathcal{P}$ .	40
2.10	Local finite-time Lyapunov exponents on the time interval $[0, 100]$ of system (2.33) with varying the fractional-order s.t. $\alpha \in [0.8, 1[$ .	45
2.11	Visualization of hidden chaotic attractor of system (2.33) with $(a, b, c, d) = (15, 1, 25.5, 0.01)$ , $\alpha = 0.99$ and initial point $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ .	45
2.12	Visualization of hidden hyperchaotic attractor of system (2.33) with $(a, b, c, d) = (15, 1, 25.5, 0.01)$ , $\alpha = 0.89$ and initial point $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ .	46
2.13	Local finite-time Lyapunov exponents on the time interval $[0, 100]$ of system (2.33) versus $a \in [5, 20]$ .	46
2.14	Local finite-time Lyapunov exponents on the time interval $[0, 100]$ of system (2.33) versus $b \in [0, 3]$ .	47

2.15	Local finite-time Lyapunov exponents on the time interval $[0, 100]$ of system (2.33) versus $c \in [5, 30]$ . . . . .	48
2.16	Local finite-time Lyapunov exponents on the time interval $[0, 100]$ of system (2.33) versus $d \in [0, 0.1]$ . . . . .	48
2.17	Localization of a hyperchaotic attractor of system (2.36) with $v = -0.03$ , $\alpha = 0.5$ , $\beta = 0.001$ , $\gamma = 0.11$ . . . . .	51
2.18	A spherical around the equilibrium point $F_0$ with 100 initial points on it. . . . .	52
2.19	Visualization of a hidden transient chaotic set in system (2.36) . . . . .	52
3.1	Synchronization of hidden hyperchaotic attractors of systems (3.7) and (3.8), for $a = 15$ , $b = 1$ , $c = 25.5$ , $d = 0.01$ with $\alpha = 0.89$ . . . . .	56
3.2	The dynamics of error evolution described by the solutions of system (3.6). . . . .	57
3.3	Hyperchaotic secure-communication system. . . . .	57
3.4	Original text. . . . .	59
3.5	Encrypted text. . . . .	59
3.6	Decrypted text. . . . .	60
3.7	Simulation results of secure communication for voice signal using the fractional-order hyperchaotic Sprott system (a) The original signal $S(t)$ (b) Encrypted signal $S_e(t)$ (c) Recovered signal $S_d(t)$ (d) Decryption error $S(t) - S_d(t)$ . . . . .	60
3.8	<b>Case 1:</b> Synchronization with initial data of the complex Lorenz systems on the same hidden set. . . . .	65
3.9	<b>Case 2:</b> Synchronization with initial data of the complex Lorenz systems on two symmetrical hidden sets. . . . .	65
3.10	<b>Case 3:</b> Synchronization with initial data of the complex Lorenz systems on a hidden set and stable equilibria $S_\theta$ . . . . .	66
3.11	<b>Case 4:</b> Synchronization with initial data of the complex Lorenz systems on a self-excited attractor and unstable zero equilibrium. . . . .	66
3.12	Original text. . . . .	67
3.13	Encrypted text. . . . .	67
3.14	Decrypted text. . . . .	68
3.15	Simulation results of secure communication for voice signal using the complex Lorenz system (a) The original signal $S(t)$ (b) Encrypted signal $S_e(t)$ (c) Recovered signal $S_d(t)$ (d) Decryption error $S(t) - S_d(t)$ . . . . .	68
3.16	Adaptive synchronization of hyperchaotic attractors of systems (3.41) and (3.42) (in the form (3.43) and (3.44)), with $v = -0.03$ , $\alpha = 0.4$ , $\beta = 0.001$ , $\gamma = 0.11$ . . . . .	76
3.17	The dynamics of real and imaginary parts of error states (see (3.45)) between the master (3.41) and the slave (3.42) systems are represented by solving system (3.36). . . . .	77
3.18	The dynamics of real and imaginary parts of errors of the estimation of the parameter $\hat{A}$ (see (3.46)) are represented by solving the system (3.33). . . . .	77
3.19	The dynamics of real and imaginary parts of errors of the estimation of the parameter $\hat{B}$ (see (3.47)) are represented by solving the system (3.34). . . . .	78

3.20	Estimation of unknown parameters $(\hat{v}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ . . . . .	78
3.21	Hyperchaotic secure communication strategy. . . . .	79
3.22	The origin text. . . . .	81
3.23	Ciphered text. . . . .	82
3.24	Deciphered text. . . . .	83
3.25	Numerical results of grayscale image encryption using the Rabinovich model. . . . .	84
3.26	Numerical results of image encryption with noise. (a)-(c) The original images with 0.03, 0.07 and 0.1 white Gaussian noise, respectively; (d)-(f) the encrypted ones; (g)-(i) the retrieved noise images. . . . .	85
3.27	<b>Case 1:</b> Initial data of the Chua systems on the same hidden attractor with control gain matrix $k = \text{diag}(11,11,11)$ . . . . .	87
3.28	<b>Case 2:</b> Initial data of the Chua systems on two symmetrical hidden attractors with control gain matrix $k = \text{diag}(5,5,5)$ . . . . .	88
3.29	<b>Case 3:</b> Initial data of the Chua systems on a hidden attractor and stable zero equilibrium with control gain matrix $k = \text{diag}(90,90,90)$ . . . . .	88
3.30	<b>Case 4:</b> Initial data of the Chua systems on a self-excited attractor and unstable zero equilibrium with control gain matrix $k = \text{diag}(20,20,20)$ . . . . .	89
3.31	<b>Case 1:</b> Initial data of the Chua systems on the same hidden attractor with control gain matrix $k = \text{diag}(103,103,103)$ . . . . .	89
3.32	<b>Case 2:</b> Initial data of the Chua systems on two symmetrical hidden attractors with control gain matrix $k = \text{diag}(111,111,111)$ . . . . .	90
3.33	<b>Case 3:</b> Initial data of the Chua systems on a hidden attractor and stable zero equilibrium with control gain matrix $k = \text{diag}(111,111,111)$ . . . . .	90
3.34	<b>Case 4:</b> Initial data of the Chua systems on a self-excited attractor and unstable zero equilibrium with control gain matrix $k = \text{diag}(117,117,117)$ . . . . .	91
3.35	<b>Case 1:</b> Initial data of the Chua systems on the same hidden attractor. . . . .	92
3.36	<b>Case 2:</b> Initial data of the Chua systems on two symmetrical hidden attractors. . . . .	93
3.37	<b>Case 3:</b> Initial data of the Chua systems on a hidden attractor and stable zero equilibrium. . . . .	94
3.38	<b>Case 4:</b> Initial data of the Chua systems on a self-excited attractor and unstable zero equilibrium. . . . .	95
3.39	Comparison of the time of synchronization on the example of Chua circuits. . . . .	96
A.1	Path $P_0(r_1^0, \sigma^*) \rightarrow P_1(r_1^1, \sigma^*) \rightarrow P_2(r_1^2, \sigma^*)$ , in parameters plane $(r_1, \sigma)$ for the localization of hidden chaotic set in system (2.29) with $r_2 = 0.001$ , $e = -0.001$ , $b = \frac{8}{3}$ . Here $r_1^0 = 25.4$ , $r_1^1 = 24.7$ , $r_1^2 = 24$ , $\sigma = \sigma^* = 10$ ; $(\bullet) P_0(r_1^0, \sigma^*)$ : self-excited attractor w.r.t. $S'_{0,1}$ ; $(\bullet) P_1(r_1^1, \sigma^*)$ : self-excited attractor w.r.t. $S'_0$ ; $(\bullet) P_2(r_1^2, \sigma^*)$ : hidden chaotic set. . . . .	121

A.2	Localization, by NCM, of hidden chaotic set in system (2.29) with $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.001, -0.001, \frac{8}{3})$ . Trajectories $u^i(t) = (\xi', v', w', Z')$ (blue and green) are defined on the time interval $[0, T = 10^3]$ , and initial point (gray) on $(i + 1)$ -th iteration is defined as $u_0^{i+1} := u_T^i$ (violet arrows), where $u_T^i = u^i(T)$ is a final point (orange). . . . .	122
A.3	Localization of hidden chaotic set in system (2.8) and the corresponding image in system (2.29) for $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.001, -0.001, 8/3)$ . . . . .	123
A.4	(a) A trajectory that attracts to a torus (blue) in the time interval $[0, 7000]$ , which closer to the equilibria $S_\theta$ (magenta) (b) Visualization of a hidden chaotic set in system (2.8) with time interval $[0, 100]$ , $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.002, -0.001, \frac{8}{3})$ and the initial point is $(5, 5, 5, 5, 5)$ . . . . .	123
A.5	(a) Visualization of trajectories that tend to the torus in the time interval $[0, 7000]$ , with starting points from a spherical of random points in a vicinity of $S_0$ ; (b) Magnification of the area around $S_0$ to show the spherical of random points and the considered 100 trajectories that tend to the torus. . . . .	124
A.6	Visualization of local stable, unstable manifolds of $S_0$ and random initial points on local 2-D unstable manifolds of $S_0$ . (Red) local 2-D unstable manifold corresponding to $\lambda_{1,2} = 10.6323 \pm 0.0003i$ , (Green) local 2-D stable submanifold corresponding to $\lambda_{3,4} = -21.6323 \pm 0.0007i$ . . . . .	126
A.7	Visualization of unstable manifolds in system (2.8) with $\sigma = 10, r_1 = 24, r_2 = -e = 0.001, b = \frac{8}{3}$ and 100 random initial points in a vicinity of $S_0$ , that tend to the circle of equilibria $S_\theta$ . . . . .	126
A.8	Visualization of trajectories in the time interval $[0, 7000]$ with in system (2.8) with $\sigma = 10, r_1 = 24, r_2 = 0.002, e = -0.001, b = \frac{8}{3}$ and 100 random initial points in a vicinity of $S_0$ tending to the torus. . . . .	127
A.9	Visualization of the white region around the set of equilibria $S_\theta$ in Figs. A.4 and A.3a and the considered line segments. . . . .	128
A.10	Visualization of two trajectories with initial points from blue and red parts of vertical diagonal in the white gape of Fig. A.4. . . . .	128
A.11	Visualization of two trajectories with initial points from blue and red parts of vertical diagonal in the white gape of Fig.A.3a. . . . .	128
A.12	(a) Visualization of line segments around the unstable manifold in Fig. A.4, starting trajectories from all points on these line segments approach attractor. (b) Localization of a trajectory with an initial point on the upper outer line segment. . . . .	129
A.13	(a) Localization of the chaotic set (green) in the projective space and 100 unstable manifolds with starting points from a spherical of random points in the vicinity of $S'_0$ , with $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.001, -0.001, \frac{8}{3})$ . (b) Magnification of the area around $S'_0$ to show the sphere of random initial points and the corresponding 100 trajectories tending to $S'_1$ . . . . .	130

A.14 (a) Localization of the chaotic set (green) in the projective space and 100 unstable manifolds with starting points from a spherical of random points in the vicinity of  $S'_0$ , with  $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.002, -0.001, \frac{8}{3})$ . (b) Magnification of the area around  $S'_0$  to show the spherical of random points and the considered 100 trajectories tending to the limit cycle  $\Gamma$ . . . . . 130

## List of tables

1	The signs of Lyapunov exponents and the corresponding type of solutions. . . . .	14
2	Local finite-time Lyapunov exponents with $(a, b, c, d) = (15, 1, 25.5, 0.01)$ . . . . .	44
3	Local finite-time Lyapunov exponents with $(b, c, d) = (1, 25.5, 0.01)$ , $\alpha = 0.89$ . . . . .	46
4	Local finite-time Lyapunov exponents with $(a, c, d) = (15, 25.5, 0.01)$ , $\alpha = 0.89$ . . . . .	47
5	Local finite-time Lyapunov exponents with $(a, b, d) = (15, 1, 0.01)$ , $\alpha = 0.89$ . . . . .	47
6	Local finite-time Lyapunov exponents with $(a, b, c) = (15, 1, 25.5)$ , $\alpha = 0.89$ . . . . .	48
7	Estimation of PSNR and SSIM for grayscale cameraman.tif image. . . . .	85

## Appendix A

### Numerical studies to localize hidden attractors and transient chaotic sets in the complex Lorenz system

#### A.1 Localization via numerical continuation method

One of the effective methods for numerical localization of hidden attractors in multidimensional dynamical systems is based on the homotopy and numerical continuation method (NCM). It is based on the assumption that the position of the attractor changes continuously with the parameters changing. The idea is to construct a sequence of similar systems such that for the first (starting) system, the initial point for numerical computation of oscillating solution (starting attractor) can be obtained analytically. For example, it is often possible to consider the starting system with a self-excited starting attractor; then, the transformation of this starting attractor in the phase space is tracked numerically while passing from one system to another; the last system corresponds to the system in which a hidden attractor is searched [20; 47; 238].

In our experiment, we fix parameters  $\sigma, r_2, e, b$ , define parameters  $r_1 = 26.1 - \varepsilon$  and  $\sigma = \sigma^* = 10$ . For  $r_2 = 0.001$ ,  $e = -0.001$ ,  $b = 8/3$ ,  $\varepsilon = 0.7$ , we obtain  $r_1 = r_1^0 = 25.4$  and take  $P_0(r_1^0, \sigma^*)$  as the initial point of line segment on the plane  $(r_1, \sigma)$ . The eigenvalues of the Jacobian matrix at the equilibria  $S'_0, S'_1$  of system (2.29) for these parameters are the following:

$$\begin{aligned} S'_0 &: 2.00002, -0.1707, -0.7042, -0.7042, \\ S'_1 &: 0.0013 \pm 0.6238i, -0.8775, -0.7042. \end{aligned}$$

Consider on the plane  $(r_1, \sigma)$  a line segment, intersecting a boundary of stability domain of the equilibria  $S_\theta$  with the final point  $P_2(r_1^2, \sigma^*)$ , where  $r_1^2 = r_1^0 - 2\varepsilon = 24$ , i.e. the equilibria  $S_\theta$  changes from saddle point to stable focus-node

$$\begin{aligned} S'_0 &: 2.00003, -0.1758, -0.7253, -0.7253 \\ S'_1 &: -0.0015 \pm 0.6257i, -0.8982, -0.7253. \end{aligned}$$

The initial point  $P_0(r_1^0, \sigma^*)$  corresponds to the parameters for which in the system (2.29), there exists a self-excited attractor. Then for the considered line segment, a sufficiently small partition step is chosen. At each iteration step of the procedure, an attractor in the phase space of the system (2.29) is computed. The last computed point at each step is used as the initial point for the computation at the next step. In this experiment, we use NCM with 3 steps on the path  $P_0(r_1^0, \sigma^*) \rightarrow P_1(r_1^1, \sigma^*) \rightarrow P_2(r_1^2, \sigma^*)$ , with  $r_1^1 = \frac{1}{2}(r_1^0 + r_1^2)$  (see Fig. A.1). At the first step, we have a self-excited attractor with respect to unstable equilibria  $S_0$  and  $S_\theta$ ; at the second step, the equilibria  $S_\theta$  become stable, but the attractor remains self-excited with respect to equilibrium  $S_0$ ;



at the third step, it is possible to visualize a hidden chaotic set of system (2.29) (see Fig. A.2). In Fig. A.3 visualizations of the hidden chaotic set in both initial space  $\mathcal{H}$  and projective space  $\mathcal{P}$  are depicted.

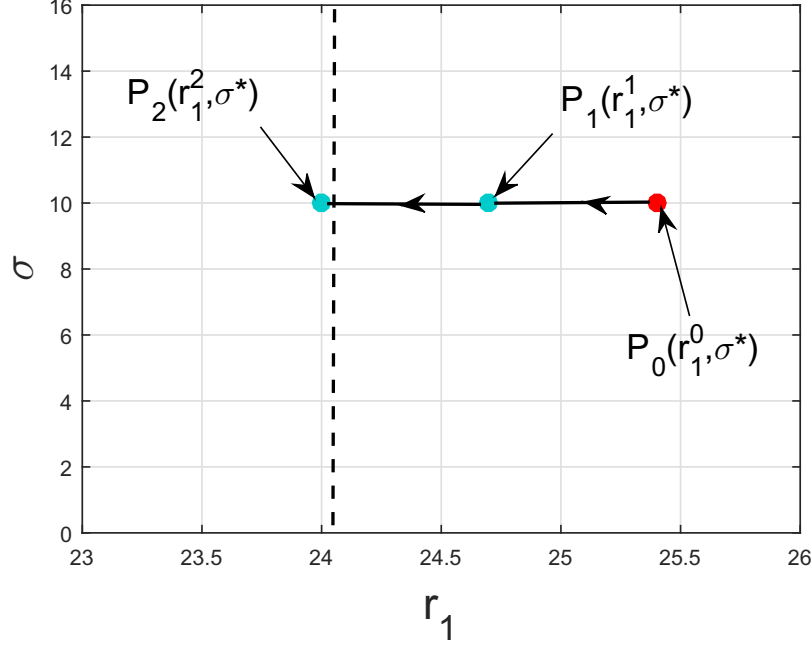


Figure A.1 — Path  $P_0(r_1^0, \sigma^*) \rightarrow P_1(r_1^1, \sigma^*) \rightarrow P_2(r_1^2, \sigma^*)$ , in parameters plane  $(r_1, \sigma)$  for the localization of hidden chaotic set in system (2.29) with  $r_2 = 0.001$ ,  $e = -0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$ . Here

- $r_1^0 = 25.4, r_1^1 = 24.7, r_1^2 = 24, \sigma = \sigma^* = 10;$
- $(\bullet) P_0(r_1^0, \sigma^*)$  : self-excited attractor w.r.t.  $S'_{0,1};$
- $(\bullet) P_1(r_1^1, \sigma^*)$  : self-excited attractor w.r.t.  $S'_0;$
- $(\bullet) P_2(r_1^2, \sigma^*)$  : hidden chaotic set.

For  $\sigma = 10, r_1 = 24, r_2 = 0.002, e = -0.001, b = \frac{8}{3}$ , here the parameter  $r_2$  is slightly different from that in the above case and  $e \neq -r_2$ . Therefore  $S_0$  is the only equilibrium of the system (2.8). In this case, we can also visualize a hidden chaotic set in the system (2.8). To verify that the set in Fig. A.4b is hidden, around equilibrium  $S_0$ , we choose a small spherical vicinity of radius  $\delta = 0.2$  and take  $N$  random initial points on it (in our experiment,  $N = 100$  as in Fig. A.5b). Using MATLAB, we integrate system (2.8) with these initial points to explore the obtained trajectories. We repeat this procedure several times in order to get different initial points for trajectories on the sphere. We get the following results: all the obtained trajectories tend to the torus and do not tend to the chaotic set (see Fig. A.5a), this torus is closer<sup>1</sup> to the set of equilibria  $S_\theta$  (see

<sup>1</sup>The distance between the torus and the equilibria  $S_\theta$  can be estimated by considering the last point on torus and plane, which contains the set of equilibria  $S_\theta$ . If we consider in  $\mathbb{R}^5$  the point  $P(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*)$  and the plane  $A(x_1 - x_{01}) + B(x_2 - x_{02}) + C(x_3 - x_{03}) + D(x_4 - x_{04}) + E(x_5 - x_{05}) = 0$ , then the distance from the point  $P$  to the plane is:

$$d = \frac{|Ax_1^* + Bx_2^* + Cx_3^* + Dx_4^* + Ex_5^* + F|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2}}.$$

To determine the equation of a plane in  $\mathbb{R}^5$  one can consider five points, which do not lie on the same straight line. The normal vector to a plane can be obtained by taking the cross product of four vectors on this plane. In our case equation of the plane which contains the set of equilibria  $S_\theta$  is:  $x_5 - 23 = 0$ . From Fig. A.4a the last point on the

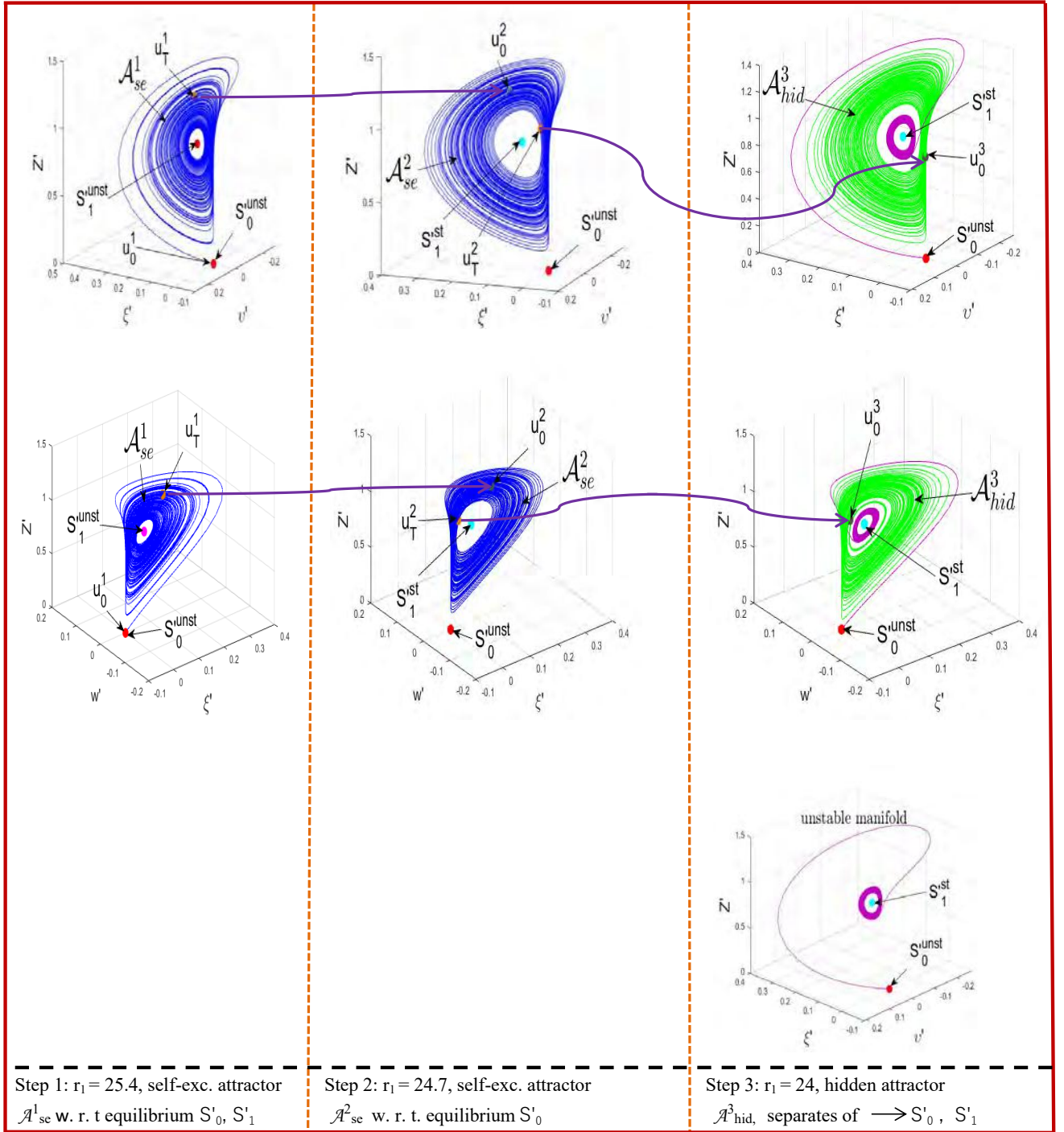


Figure A.2 — Localization, by NCM, of hidden chaotic set in system (2.29) with  $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.001, -0.001, \frac{8}{3})$ . Trajectories  $u^i(t) = (\xi', v', w', Z')$  (blue and green) are defined on the time interval  $[0, T = 10^3]$ , and initial point (gray) on  $(i + 1)$ -th iteration is defined as  $u_0^{i+1} := u_T^i$  (violet arrows), where  $u_T^i = u^i(T)$  is a final point (orange).

torus is  $P(-2.5011, 7.6357, -2.5958, 7.9228, 22.8110)$ , then the distance from this point to the plane  $x_5 - 23 = 0$  is:  $d = 0.1890$ .

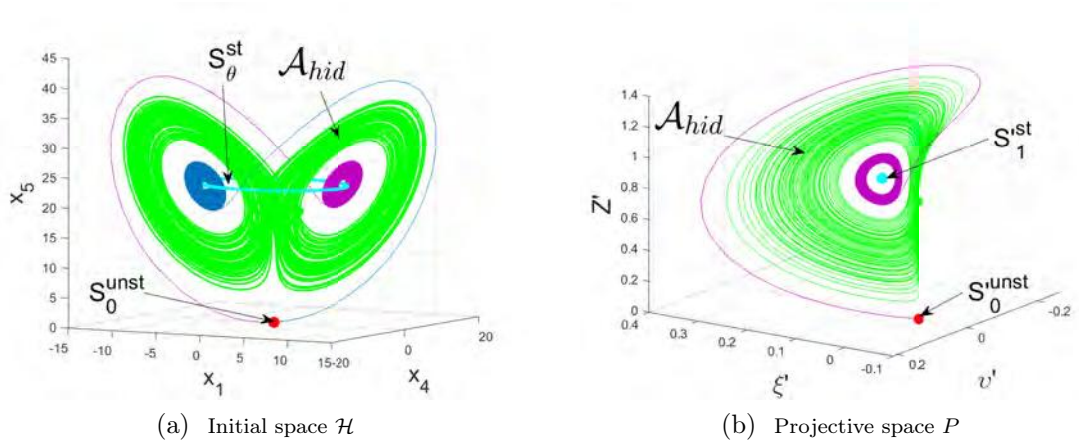


Figure A.3 — Localization of hidden chaotic set in system (2.8) and the corresponding image in system (2.29) for  $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.001, -0.001, 8/3)$ .

Fig. A.4a). This gives us a reason to classify the chaotic set, obtained in the system (2.8), as the hidden one (see Fig. A.4b).

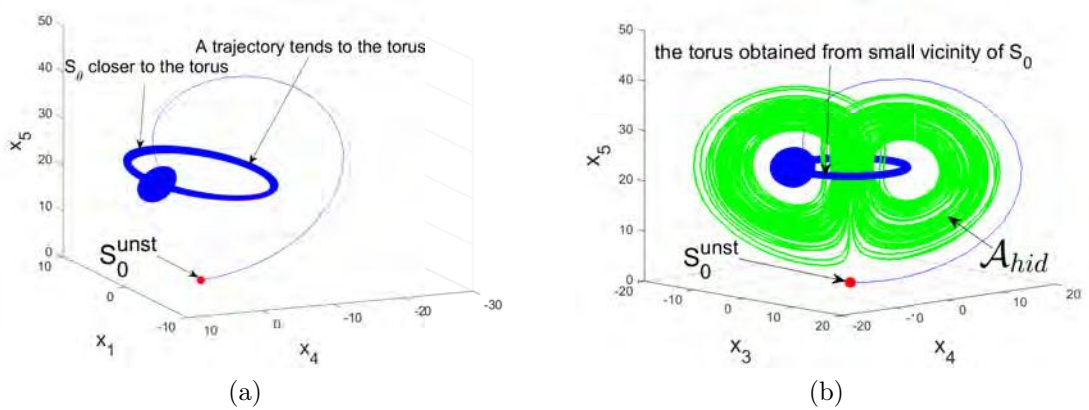


Figure A.4 — (a) A trajectory that attracts to a torus (blue) in the time interval  $[0, 7000]$ , which is closer to the equilibria  $S_\theta$  (magenta) (b) Visualization of a hidden chaotic set in system (2.8) with time interval  $[0, 100]$ ,  $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.002, -0.001, \frac{8}{3})$  and the initial point is  $(5, 5, 5, 5, 5)$ .

## A.2 Localization using perpetual points

Consider system (2.8) as an autonomous differential equation of general form:

$$\dot{u} = f(u), \quad (\text{A.1})$$

where  $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$  represents the right-hand side of system (2.8).

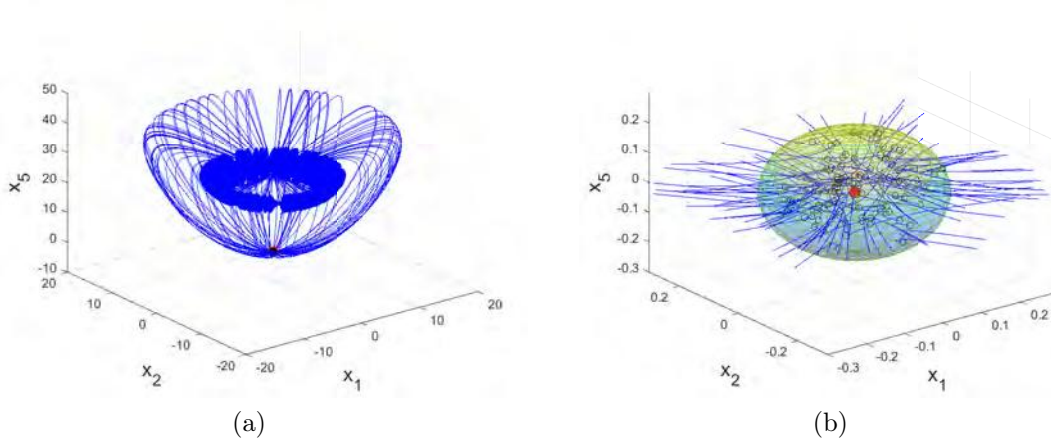


Figure A.5 — (a) Visualization of trajectories that tend to the torus in the time interval  $[0, 7000]$ , with starting points from a spherical of random points in a vicinity of  $S_0$ ; (b) Magnification of the area around  $S_0$  to show the spherical of random points and the considered 100 trajectories that tend to the torus.

The equilibrium points of a dynamical system are the ones at which the velocity and acceleration of the system simultaneously become zero. In this section, we state that there are points, termed as perpetual points [239], which may help to visualize hidden attractors.

For system (A.1), the equilibrium points  $u_{ep}$  are defined by the equation  $\dot{u} = f(u_{ep}) = 0$ . Consider a derivative of system (A.1) with respect to time:

$$\ddot{u} = J(u)f(u) = g(u), \quad (\text{A.2})$$

where  $J(u) = \left[ \frac{\partial f_i(u)}{\partial u_j} \right]_{i,j=1}^5$  is the Jacobian matrix. Here,  $g(u)$  may be termed as an acceleration vector. System (A.2) shows the variation of acceleration in the phase space. Similar to the equilibrium points estimation, where we set the velocity vector to zero, we can also get a set of points, where  $\ddot{u} = g(u_{pp}) = 0$  in (A.2), i.e. the points corresponding to the zero acceleration. At these points, the velocity  $\dot{u}$  may be either zero or nonzero. This set includes the equilibrium points  $u_{ep}$  with zero velocity as well as a subset of points with nonzero velocity. These nonzero velocity points  $u_{pp}$  are termed as perpetual points [193; 239; 240].

**Remark A.1.** The analytical formula of the perpetual points of system (2.8) can not be derived, meanwhile the numerical solution of the algebraic system  $\ddot{u} = g(u_{pp}) = 0$  is  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ , which coincide with the equilibrium  $S_0$ , so system (2.8) has no perpetual points. For system (2.29), which structure seems simpler than the original system (2.8),  $\xi' = v' = w' = Z' = 0$  is the only solution of the system  $\ddot{u} = g(u_{pp}) = 0$ , thus, there are also no nonzero velocity points  $u_{pp}$ .

### A.3 Numerical verification of basins of attraction near the zero equilibrium point

For the system (2.8), the eigenvalues at  $S_0$  are:  $10.6323 \pm 0.0003i, -21.6323 \pm 0.0007i, -2.6667$ . So, the equilibrium  $S_0$  has a 2-dimensional unstable manifold. For the first two eigenvalues  $\lambda_{1,2} = 10.6323 \pm 0.0003i$  with positive real part, the corresponding eigenvectors are:  $v_1 = (-0.3084, -0.3084i, -0.6363, -0.6363i, 0)$  and  $v_2 = (-0.3084, 0.3084i, -0.6363, 0.6363i, 0)$ , respectively. In the case of complex eigenvalues we can use the following formula to plot trajectories in a vicinity of  $S_0$

$$u(t) = \Omega e^{\alpha t} [\eta \sin(\beta t + \delta) + \mu \cos(\beta t + \delta)], \quad (\text{A.3})$$

where  $\Omega$  is a constant that represents the size of the vicinity and should be small,  $\alpha, \beta$  are real and imaginary parts of the eigenvalues, respectively,  $\delta$  is an auxiliary angle,  $\eta = \text{Re } v_1$  and  $\mu = \text{Im } v_1$ . Initial points of unstable manifolds of  $S_0$  can be obtained by putting  $t = 0$  in Eq. (A.3) as follows:

$$u(0) = \Omega [\eta \sin(\delta) + \mu \cos(\delta)]. \quad (\text{A.4})$$

In Fig. A.6, we plotted local stable, unstable manifolds of  $S_0$  and random initial points on local 2-D unstable manifolds of  $S_0$ . Fig. A.7 shows unstable manifolds with random initial points from local 2-D unstable manifolds of  $S_0$  (in our experiment, we choose 100 random points for the angle  $\delta$  inside interval  $[0, 2\pi]$  and fix the size of vicinity as  $\Omega = 0.5$ ). We repeat this procedure several times in order to get different initial points). From Fig. A.7, one can see that, these unstable manifolds form by their scrolling a tube around the circle of equilibria  $S_\theta$ . This experiment confirms that all trajectories which start from a vicinity of the unstable equilibrium  $S_0$  go to the circle of equilibria  $S_\theta$ , and this means that the green set in Fig. A.3a is not self-excited. We can do the same experiment in the case of the torus as in Fig A.4b. In Fig. A.8, we plotted trajectories with random initial points on local 2-D unstable manifolds of  $S_0$ , which tend to the torus. So the green set in Fig A.4b is not self-excited. In order to demonstrate separation between basins of attraction of  $S_\theta$  and the green set (as in Fig. A.3a), which is located between the blue tube that is formed by scrolling of these trajectories and the domain which is defined by separatrices. We need not only to separate basin of attraction of this green set from these blue manifolds, but also the trajectory coming from infinity to  $S_0$  which can be derived analytically by formula  $u(t) = (0, 0, 0, 0, z_0 \exp(-bt))$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}$ . Because of the system (2.8) is 5-dimensional it is difficult to show such separation, so we can say that the green set it is possible to be an attractor.

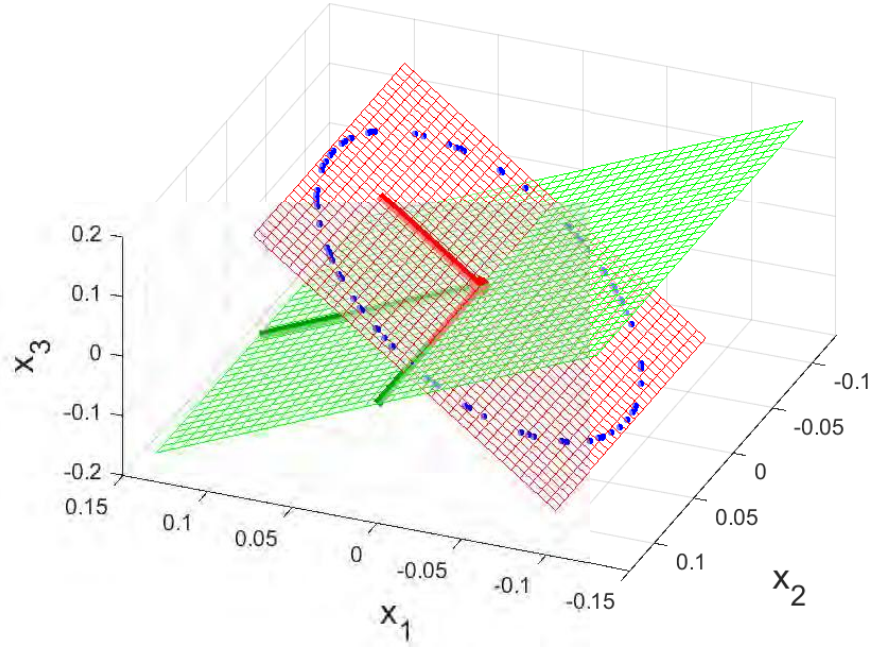


Figure A.6 — Visualization of local stable, unstable manifolds of  $S_0$  and random initial points on local 2-D unstable manifolds of  $S_0$ . (Red) local 2-D unstable manifold corresponding to  $\lambda_{1,2} = 10.6323 \pm 0.0003i$ , (Green) local 2-D stable submanifold corresponding to  $\lambda_{3,4} = -21.6323 \pm 0.0007i$ .

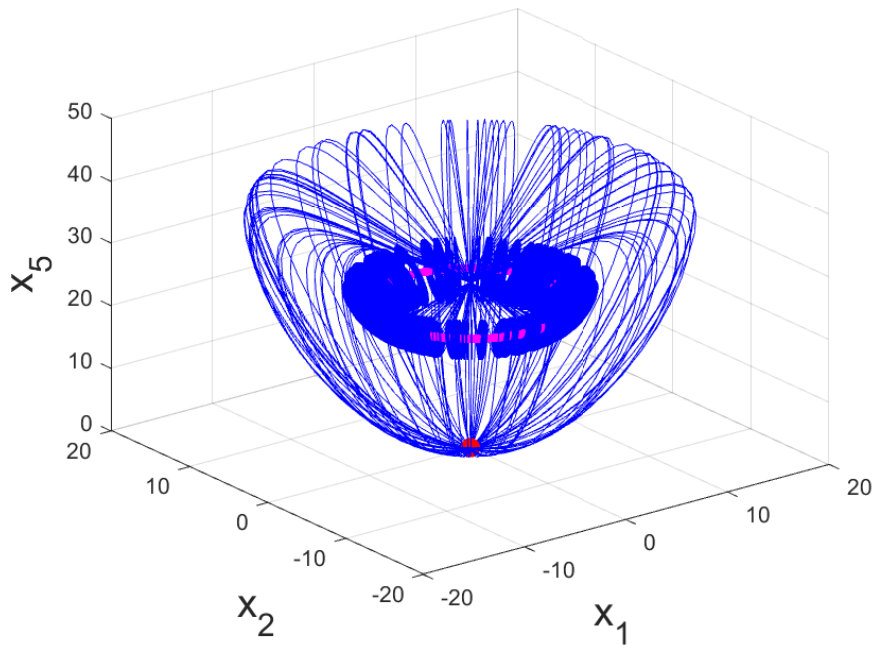


Figure A.7 — Visualization of unstable manifolds in system (2.8) with  $\sigma = 10$ ,  $r_1 = 24$ ,  $r_2 = -e = 0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$  and 100 random initial points in a vicinity of  $S_0$ , that tend to the circle of equilibria  $S_\theta$ .

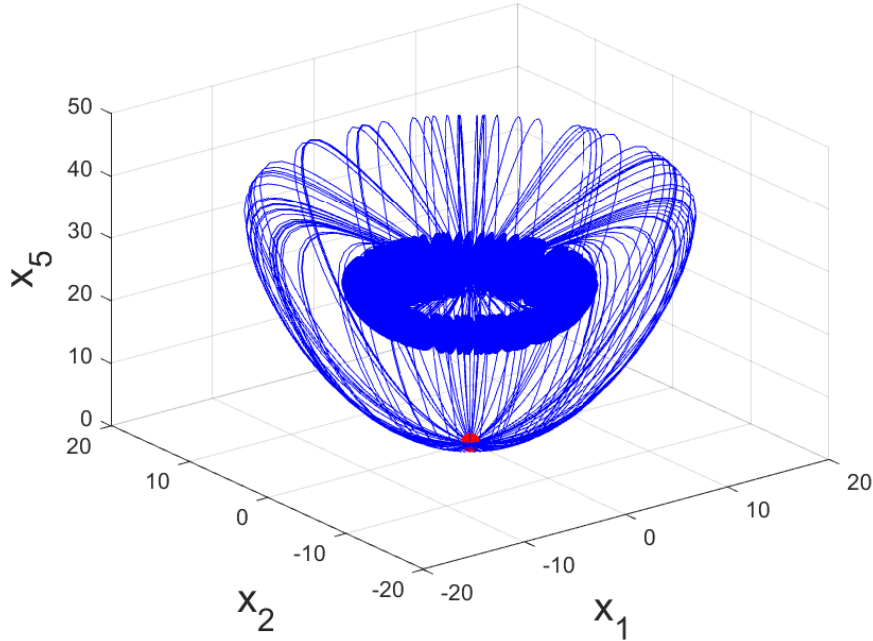
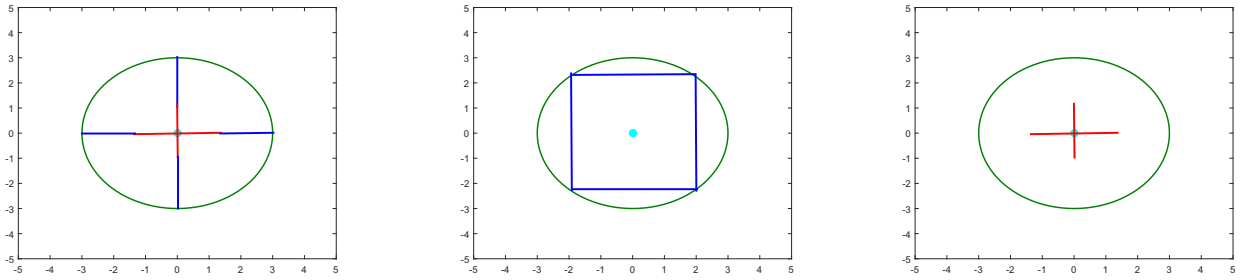


Figure A.8 — Visualization of trajectories in the time interval  $[0, 7000]$  with in system (2.8) with  $\sigma = 10$ ,  $r_1 = 24$ ,  $r_2 = 0.002$ ,  $e = -0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$  and 100 random initial points in a vicinity of  $S_0$  tending to the torus.

#### A.4 Numerical verification of basins of attraction around the set of equilibria $S_\theta$

In order to numerically verify the attractiveness of the chaotic set, the following numerical experiment can be used. In this experiment, we consider initial points on the various line segments in the vicinity around the set of equilibria  $S_\theta$  in Figs. A.3a and A.4b (see Fig. A.9). From Fig. A.9, we can conclude the following: around the equilibria  $S_\theta$  there is a vicinity such that trajectories starting from this vicinity approach equilibria  $S_\theta$  and outside they approach attractor. For Fig. A.4b, the vertical and horizontal diagonals are considered with radius 2.5 and 2, respectively, and partition step 0.01. And for the others line segments as in Figs. A.9b and A.9c we used the same partition step. In Fig. A.10, we plotted two trajectories with initial points from blue and red parts of vertical diagonal. The same procedure can be used for Fig. A.3a with vertical and horizontal diagonals have radius 3 and 2.5, respectively, and partition step 0.01 on all considered line segments. Fig. A.11 shows two trajectories with starting points from blue and red parts of vertical diagonal. In addition, another procedure can be used to verify that the green set in Fig. A.3a does not fall on the circle of equilibria  $S_\theta$ .

Around one scroll of the trajectory of an unstable manifold from its outer sides we consider line segments with length 5 and partition step 0.01 as in Fig. A.12a. In Fig. A.12b, we plotted a trajectory with a starting point from the upper outer line segment.



(a) The starting trajectories from all points lie on blue parts and red parts of these diagonals approach attractor and equilibria, respectively.

(b) The starting trajectories from all points lie on these blue line segments approach attractor.

(c) The starting trajectories from all points lie on these red line segments approach equilibria.

Figure A.9 — Visualization of the white region around the set of equilibria  $S_\theta$  in Figs. A.4 and A.3a and the considered line segments.

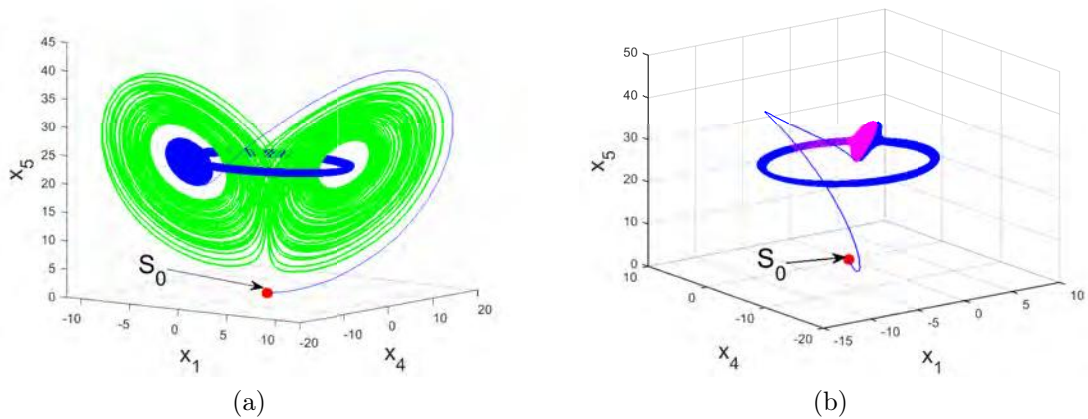


Figure A.10 — Visualization of two trajectories with initial points from blue and red parts of vertical diagonal in the white gap of Fig. A.4.

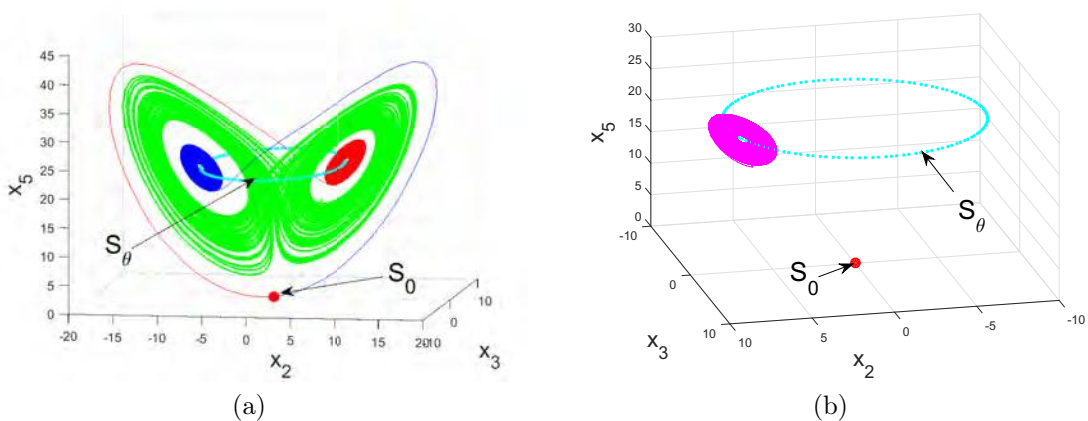


Figure A.11 — Visualization of two trajectories with initial points from blue and red parts of vertical diagonal in the white gap of Fig. A.3a.



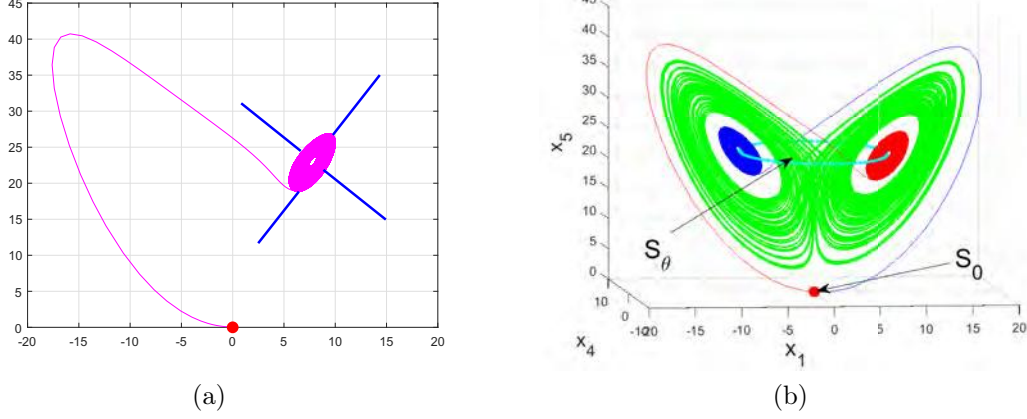


Figure A.12 — (a) Visualization of line segments around the unstable manifold in Fig. A.4, starting trajectories from all points on these line segments approach attractor. (b) Localization of a trajectory with an initial point on the upper outer line segment.

## A.5 The attractiveness of the transient sets

To demonstrate the attractiveness of the green sets as in Figs. A.3a and A.4b strictly, another technique can be utilized. The idea of this technique is based on the fact that the complex Lorenz system (2.4) has a projective space, in which the states differ only by a common phase of variables  $X$  and  $Y$  are considered to be equivalent (see Section 2.1.3).

Now, it is important to mention the following properties of the projective system (2.29) [164; 165]:

- (i) All physical information and dynamics in the phase space of the system (2.4) can be derived from the equations of motion (2.29) in the projective space.
- (ii) The projective system (2.29) has a 1-dimensional unstable manifold and 3-dimensional stable manifold.

Note that the projective system (2.29) has the following two equilibria:  $S'_0 = (0, 0, 0, 0)$  and  $S'_1 = (\xi'_1, v'_1, w'_1, Z'_1)$ , where

$$\xi'_1 = \frac{\beta(\mu^2 + \kappa^2)(\mu^2 - \kappa^2)}{2\mu^4(\beta\varrho + 1)}, \quad v'_1 = 0, \quad w'_1 = \frac{\beta v(\mu^2 + \kappa^2)}{\mu^3(\beta\varrho + 1)}, \quad Z'_1 = \frac{\mu^2 + \kappa^2}{\mu^2(\beta\varrho + 1)}.$$

The equilibria  $S'_0$  and  $S'_1$  in the projective space represent the projections of the equilibria  $S_0$  and  $S_\theta$  of the system (2.8), respectively. For the torus as in Fig. A.4a its projection in the projective space  $\mathcal{P}$  is a limit cycle  $\Gamma$ .

Because of the projection system (2.29) has a 1-dimensional unstable manifold and the projective mapping (2.27) preserves the "chaoticity" of attractors. So, it is reasonable to use the projection system (2.29) to identify whether the chaotic sets in Figs. A.3a and A.4b are attractors or transient chaotic sets. For the parameters  $\sigma = 10, r_1 = 24, r_2 = 0.001, e = -0.001, b = \frac{8}{3}$  (see Fig. A.3a), around the equilibrium  $S'_0$  we choose a small spherical vicinity of radius 0.002 and consider 100 random initial points on it. From Fig. A.13, one can observe the following: all

the considered unstable manifolds of  $S'_0$  go in one direction and approach  $S'_1$ . We did the same experiment for the case of the torus and got the same conclusion (see Fig. A.14).

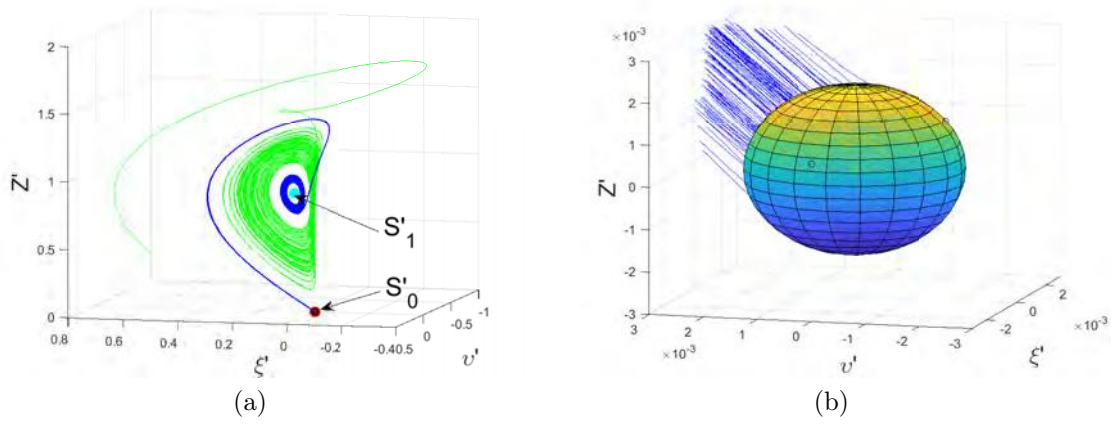


Figure A.13 — (a) Localization of the chaotic set (green) in the projective space and 100 unstable manifolds with starting points from a spherical of random points in the vicinity of  $S'_0$ , with  $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.001, -0.001, \frac{8}{3})$ .  
 (b) Magnification of the area around  $S'_0$  to show the sphere of random initial points and the corresponding 100 trajectories tending to  $S'_1$ .

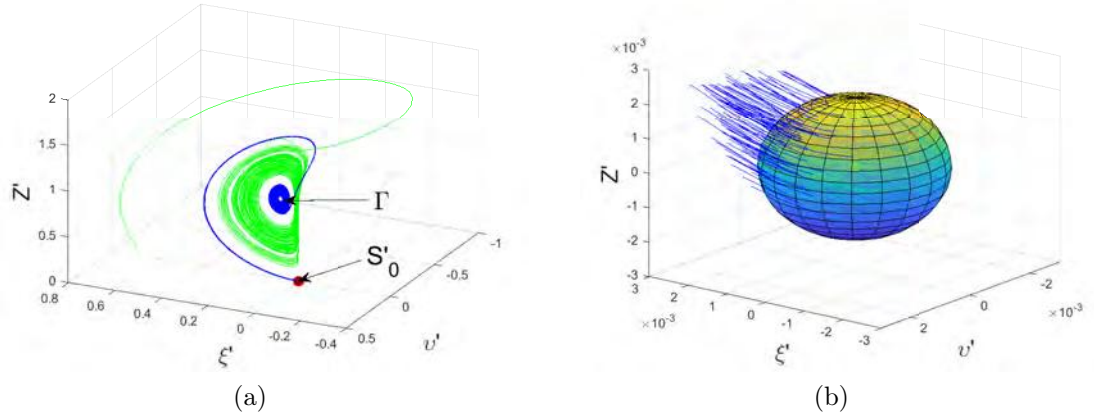


Figure A.14 — (a) Localization of the chaotic set (green) in the projective space and 100 unstable manifolds with starting points from a spherical of random points in the vicinity of  $S'_0$ , with  $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.002, -0.001, \frac{8}{3})$ .  
 (b) Magnification of the area around  $S'_0$  to show the spherical of random points and the considered 100 trajectories tending to the limit cycle  $\Gamma$ .

## Appendix B

### MATLAB procedure implementation for visualization of hidden transient chaotic sets in complex Lorenz system and its projective system

Listing B.1: Function “Sys\_Projective\_Complex\_Lorenz.m” defines the projective system (2.29)

```

function dx = Sys_Projective_Complex_Lorenz(t,x,mu,kappa,varrho,
    beta)

% Projective system with parameters: mu kappa varrho beta
5
dx = zeros(4,1);

R=sqrt(x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2);

10 % Projective system equations:

dx(1)= x(2)+mu*(R-x(1))-x(2)*(1-x(4)-varrho*(R+x(1)))-kappa*x(3)
    ;
dx(2)= -mu*x(2)+(R-x(1))+(R+x(1))*(1-x(4)-varrho*(R+x(1)));
dx(3)= -mu *x(3)+kappa*(R+x(1));
15 dx(4)=(R+x(1))-beta*x(4);

```

Listing B.2: Projrctive\_NC\_Method.m-numerical continuation method for localization of the hidden transient chaotic set in the projective system (2.29)

```

function Projrctive_NC_Method

close all
5
% Initial point from vicinity of S'_0
x_start=[0.001 .001 0.001 0.001 ];

global r1

10
% Parameters of complex Lorenz system
sigma=10; e=-0.001; b=8/3; r2=0.001 ;

```

```

% Variation of bifurcation parameter r1
15 for r1=25.4:-0.7: 24

% Parameters of projective system
eta=segma*(r1-1)-e^2/4; kappa=(2*r2*segma+e*(segma-1))/(2*eta);
mu=(1+segma)/sqrt(eta);varrho=sqrt(eta)/(2*segma-b);
20 beta=b/sqrt(eta);

% Equilibrium points of projective system
S0=[0 0 0 0];

25 S1u=beta*(mu^2+kappa^2)*(mu^2-kappa^2)/(2*(beta*varrho+1)*mu^4);
S1v=0;
S1w=beta*kappa*(mu^2+kappa^2)/ ((beta*varrho+1)*mu^3);
S1z=(mu^2+kappa^2)/ ((beta*varrho+1)*mu^2);

30 S1=[S1u ,S1v, S1w, S1z];

RelTol = 1e-6; AbsTol = 1e-6;
odeSolverOptions = odeset('RelTol', RelTol, 'AbsTol', AbsTol);

35 % Plot self-excited and hidden chaotic set
[~,z1] = ode45(@(t,x)Sys_Projective_Complex_Lorenz(t,x,mu,kappa,
varrho,beta),[0 1000], x_start,odeSolverOptions);

% Plot unstable manifold
x_start_uns_manif=[0.0001 0.0001 0.0001 0.0001];
40 [~,z2] = ode45(@(t,x)Sys_Projective_Complex_Lorenz(t,x,mu,kappa,
varrho,beta),[0 1000],x_start_uns_manif,odeSolverOptions );

figure
% Specify a plot
plot3 ( S1(1) , S1(3),S1(4),'c.','MarkerSize', 30);
45 hold on;
plot3 ( S0(1),S0(3),S0(4) , 'r.', 'MarkerSize', 30);

% Visualization of self-excited and hidden chaotic set
if r1==25.4 || r1==24.7
50 plot3 ( z1 ( :,1 ) , z1 ( :,3 ),z1 ( :,4 ),'Color','blue');
else

```

```

plot3 ( z1 ( :,1 ) , z1 ( :,3 ),z1 ( :,4 ),'Color','green');
end

55 % Visualization of unstable manifold
if r1==24
plot3 ( z2 ( :,1 ) , z2 ( :,3 ),z2 ( :,4 ),'Color','0.75,0,0.75')
;
end

60 % Start and end points on the trajectory
plot3 ( x_start(1) , x_start(3), x_start(4) , '.', 'Color', '
0.87,0.49,0', 'MarkerSize', 30);

if r1==25.4
text(0.5,0.5,0.5, '$\mathcal{A}_{se}^{\{1}\}$', 'Interpreter', 'Latex',
'FontSize',20)
65 elseif r1==24.7
text(0.5,0.5,0.5, '$\mathcal{A}_{se}^{\{2}\}$', 'Interpreter', 'Latex'
, 'FontSize',20)
else
text(0.5,0.5,0.5, '$\mathcal{A}_{hid}^{\{3}\}$', 'Interpreter', 'Latex'
, 'FontSize',20)
end

70 xlabel('\xi''', 'FontSize',18); ylabel('w''', 'FontSize',18);
zlabel('Z''', 'FontSize',18)
axis([-0.1 0.4 -0.2 0.2 0 1.5 ])
grid on;

% Update Initial point
75 x_start=z1(end,:);
end

```

Listing B.3: Function “Sys\_Complex\_Lorenz.m” defines the system (2.8)

```

function dx = Sys_Complex_Lorenz(t, x, sigma, r1, r2, e, b)

% Complex Lorenz System with parameters: sigma r1 r2 e b
5
dx = zeros(5,1);

% Complex Lorenz equations:

```

```

10 dx(1)= sigma*(x(3)-x(1));
    dx(2)= sigma*(x(4)-x(2));
    dx(3)= r1*x(1)-r2*x(2)-x(3)-e*x(4)-x(1)*x(5);
    dx(4)= r2*x(1)+r1*x(2)+e*x(3)-x(4)-x(2)*x(5);
    dx(5)=x(1)*x(3)+x(2)*x(4)-b*x(5);

```

Listing B.4: Function “randsphere.m” generate random points

```

function X = randsphere(m,n,r)

% This function returns an m by n array, X, in which
5 % each of the m rows has the n Cartesian coordinates
% of a random point uniformly-distributed over the
% interior of an n-dimensional hypersphere with
% radius r and center at the origin. The function
% 'randn' is initially used to generate m sets of n
10 % random variables with independent multivariate
% normal distribution, with mean 0 and variance 1.
% Then the incomplete gamma function, 'gammainc',
% is used to map these points radially to fit in the
% hypersphere of finite radius r with a uniform % spatial
    distribution.
15 % Roger Stafford - 12/23/05

X = randn(m,n);
s2 = sum(X.^2,2);
X = X.*repmat(r*(gammainc(s2/2,n/2).^(1/n))./sqrt(s2),1,n);

```

Listing B.5: runCL.m-visualization of trajectories that tend to the torus, with starting points from a spherical of random points in a vicinity of  $S_0$  (see Fig. A.5)

```

function runCL

close all
5
% Parameters of complex Lorenz system
sigma = 10; r1 = 24;r2 = 0.002;e = -0.001; b = 8/3;

% Equilibrium point
10 S0 = [0,0,0,0,0];

```

```

tEnd = 7000; rEps0 = 0.2;

% Generate random points
15
    numPoints = 100;
    spherePoints = randsphere(numPoints, 5, rEps0);

% Visualization of 100 trajectories that tend to the torus
20 for iPoint = 1 : numPoints

        x_start= spherePoints(iPoint, :);

[~, z1] = ode45(@(t,x) Sys_Complex_Lorenz(t, x, sigma, r1, r2, e
    , b),[0 tEnd], x_start);
25
% Specify a plot
figure(1); hold on;
plot3( z1 ( :,1 ) , z1 ( :,2 ) , z1 ( :,5 ) , 'b');
plot3( S0(1), S0(2), S0(5), 'r.', 'MarkerSize', 30);
30 plot3(x_start(1),x_start(2),x_start(4),'ko', 'MarkerSize', 5)

% Plot sphere
[xx, yy, zz]=sphere;
mysphere=surf(rEps0*xx, rEps0*yy, rEps0*zz);
35 mysphere.FaceAlpha=0.25;

xlabel('x_{1}','FontSize',18); ylabel('x_{2}','FontSize',18);
    zlabel('x_{5}','FontSize',18)
grid on; axis on;
view(3);
40 hold off;

% Showing the spherical of random points
figure(2); hold on;
plot3( z1 ( :,1 ) , z1 ( :,2 ) , z1 ( :,5 ) , 'b');
45 plot3( S0(1), S0(2), S0(5), 'r.', 'MarkerSize', 30);
    plot3(x_start(1),x_start(2),x_start(4),'ko', 'MarkerSize', 5)

[xx, yy, zz]=sphere;
mysphere=surf(rEps0*xx, rEps0*yy, rEps0*zz);

```

```
50 mysphere.FaceAlpha=0.25;

xlabel('x_{1}','FontSize',18); ylabel('x_{2}','FontSize',18);
    ylabel('x_{5}','FontSize',18)
grid on;
axis([-0.3 0.3 -0.3 0.3 -0.3 0.3]);
55 view(3);
hold off;
end
```



## Appendix C

### MATLAB procedure implementation for computing Lyapunov exponents of fractional-order Sprott system, synchronization of the hidden hyperchaotic attractors in fractional-order complex Sprott systems

Listing C.1: Function “fdefun\_Sprott.m” defines the system (2.33) and its variation equations

```

function dx=fdefun_Sprott(t,x,param)

% Parameters
5 a=param(1); b=param(2); c=param(3);d=param(4);

% Output must be a column vector
dx = zeros(56,1);

10 % Right-hand side of the fractinal-oredr Sprott system :
    dx(1)= -x(3)*x(4)-d*x(6);
    dx(2)= -x(3)*x(5)-d*x(7);
    dx(3)= (x(4))^2+(x(5))^2-1;
    dx(4)= a*x(1)-b*x(3)*x(4)-x(4);
15 dx(5)=a*x(2)-b*x(3)*x(5)-x(5);
    dx(6)=c*x(4);
    dx(7)=c*x(5);

% Variational matrix :
20 Y= [x(8), x(15), x(22),x(29),x(36), x(43),x(50);
    x(9), x(16), x(23),x(30),x(37), x(44),x(51);
    x(10), x(17), x(24),x(31),x(38), x(45),x(52);
    x(11), x(18), x(25),x(32),x(39), x(46),x(53);
    x(12), x(19), x(26),x(33),x(40), x(47),x(54);
25 x(13), x(20), x(27),x(34),x(41), x(48),x(55);
    x(14), x(21), x(28),x(35),x(42), x(49),x(56)];

Jac=[0, 0, -x(4), -x(3), 0, -d, 0;
    0, 0, -x(5), 0, -x(3), 0, -d;
30 0, 0, 0, 2*x(4), 2*x(5), 0, 0;
    a, 0, -b*x(4), -b*x(3)-1, 0, 0, 0;

```

```

    0, a, -b*x(5), 0, -b*x(3)-1, 0, 0;
    0, 0, 0, c, 0, 0, 0;
    0, 0, 0, 0, c, 0, 0;
35         ];

dx(8:56)=Jac*Y;

```

Listing C.2: ComputeLE\_Frac\_Sprott.m- compute Lyapunov exponents of the fractional-order Sprott system (2.33)

```

function [Texp,Lexp]=ComputeLE_Frac_Sprott(q,extOde, ystart,
    tstart,stept,nit,param)

close all
5
% Dimension of the FDEs :
n=length(ystart);

% Dimension of the extended FDEs (FDEs + Var. Eq.):
10 n1=n; n2=n1*(n1+1);

% Memory allocation

15 y=zeros(n2,1); cum=zeros(n1,1); y0=y; z=zeros(1,n2);
gsc=cum; znorm=cum; x=cum; w=zeros(1,n1);

% Initial values

20 y(1:n)=ystart(:);

for i=1:n1 y((n1+1)*i)=1.0; end

t=tstart;

25
% Main loop

for ITERLYAP=1:nit
    [~,Y]=fde12(q, extOde, t,t+stept,y,stept,param,Inf,1.E-8);
30 y=Y(:,end);

```

```

t=t+stept;
for i=1:n1
    for j=1:n1 y0(n1*i+j)=y(n1*j+i);
35     end
end

%
%     construct new orthonormal basis by gram-schmidt
40 %

znorm(1)=0.0;
for j=1:n1 znorm(1)=znorm(1)+y0(n1*j+1)^2; end

45 znorm(1)=sqrt(znorm(1));

for j=1:n1 y0(n1*j+1)=y0(n1*j+1)/znorm(1);
end

50 for j=2:n1
    for k=1:(j-1)
        gsc(k)=0.0;
        for l=1:n1 gsc(k)=gsc(k)+y0(n1*l+j)*y0(n1*l+k); end
    end

55 for k=1:n1
    for l=1:(j-1)
        y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)-gsc(l)*y0(n1*k+l);
    end

60 end

znorm(j)=0.0;
for k=1:n1 znorm(j)=znorm(j)+y0(n1*k+j)^2; end
znorm(j)=sqrt(znorm(j));

65 for k=1:n1 y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)/znorm(j); end
end

%
70 %     Update running vector magnitudes
%
```

```

    for k=1:n1 cum(k)=cum(k)+log(znorm(k)); end
75 %
    %       Normalize exponent
    %
    for k=1:n1
80       lp(k)=cum(k)/(t-tstart);
    end

    % Output modification

85     if ITERLYAP==1
        Lexp=lp;
        Texp=t;
    else
        Lexp=[Lexp; lp];
90     Texp=[Texp; t];
    end
    for i=1:n1
        for j=1:n1
95             y(n1*j+i)=y0(n1*i+j);
        end
    end
end
end

```

Listing C.3: runLEs.m- run the code and plot Lyapunov exponents of the fractional-order Sprott system (2.33)

```

close all

5 tstart=0; stept=0.01; tend=100; ystart=[1 1 1 1 1 1 1];

    % Number of steps
    nit = round((tend-tstart)/stept);

10 % System parameters
    a = 15;b = 1;c = 25.5;d=.01;

```

```

% Freactional-order
q=0.89;
15
    [Texp, Lexp] = ComputeLE_Frac_Sprott(q,@fdefun_Sprott,ystart,
        tstart,stept,nit, [a b c d]);

% Plot Lyapunov exponents
disp(Lexp(end,:));
20 plot(Texp,Lexp,'LineWidth', 2);
    xlim([tstart tend])
    grid on;

```

Listing C.4: Function “Sys\_Master\_Slave\_Error\_Sprott.m” defines the master (3.7), slave (3.8) and error (3.6) systems

```

function dx = Sys_Master_Slave_Error_Sprott(t,x,param)

%Define system parameters
5 a=param(1);b=param(2);c=param(3);d=param(4);

dx = zeros(21,1);

% Master system
10 dx(1)= -x(3)*x(4)-d*x(6);
    dx(2)= -x(3)*x(5)-d*x(7);
    dx(3)= (x(4))^2+(x(5))^2-1;
    dx(4)= a*x(1)-b*x(3)*x(4)-x(4);
    dx(5)=a*x(2)-b*x(3)*x(5)-x(5);
15    dx(6)=c*x(4);
    dx(7)=c*x(5);

% Slave system
    dx(8)= -d*x(13)-x(3)*x(4)-5*(x(8)-x(1));
20    dx(9)=-d*x(14)-x(3)*x(5)-(x(9)-x(2));
    dx(10)= (x(4))^2+(x(5))^2-1-7*(x(10)-x(3));
    dx(11)= a*x(8)-b*x(3)*x(4)-x(11)-15*(x(8)-x(1));
    dx(12)=a*x(9)-b*x(3)*x(5)-x(12)-15*(x(9)-x(2))-15*(x(12)-x(5));
    dx(13)=c*x(11)-3*(x(13)-x(6));
25    dx(14)=c*x(12)-(x(14)-x(7));

% Error system

```

```

30  A=[0 0 0 0 0 -d 0;
      0 0 0 0 0 0 -d;
      0 0 0 0 0 0 0;
      a 0 0 -1 0 0 0;
      0 a 0 0 -1 0 0;
      0 0 0 c 0 0 0 ;
      0 0 0 0 c 0 0];

35  K=[5 0 0 0 0 0 0;
      0 1 0 0 0 0 0;
      0 0 7 0 0 0 0;
      15 0 0 0 0 0 0;
40  0 15 0 0 3 0 0;
      0 0 0 0 0 3 0;
      0 0 0 0 0 0 1];

e=[x(15); x(16); x(17); x(18); x(19); x(20); x(21)];
dx(15:21)=(A-K)*e;

```

Listing C.5: Synch\_FSs.m- plot synchronization of hidden attractors in the fractional-order systems (3.7) and (3.8), and errors evolution (3.6)

```

function Synch_FSs

close all
5 % System parameters
a = 15;b = 1;c = 25.5;d=.01;

% Initial point corresponding to master, slave and error systems
x_start=[1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3.3; 4; 10.01; -0.7; -12; 7; -4;
10 1; 1; 1; 1.3; 2; 0.01; -0.7 ];

% Fractional-order
q=0.89;

[t,z] = fde12(q,@Sys_Master_Slave_Sprott,0,100, x_start,0.0008,[
15 a b c d]);

% Specify a plot

% Plot synchronization
plot (t, z ( 1,: ),'LineWidth', 1.5)

```

```

20 hold on
   plot ( t ,z ( 8,: ), '--r' , 'LineWidth', 2 )
   xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('$x_{1},y_{1}$', 'Interpreter'
      , 'latex', 'FontSize',20);
   legend('$x_{1}$', '$y_{1}$', 'Interpreter', 'latex', 'Location', '
      NW', 'FontSize',16)
   grid on;
25 figure

   plot (t, z ( 2,: ), 'LineWidth', 1.5)
   hold on
   plot ( t ,z ( 9,: ), '--r' , 'LineWidth', 2 )
30 xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('$x_{2},y_{2}$', 'Interpreter'
      , 'latex', 'FontSize',20);
   legend('$x_{2}$', '$y_{2}$', 'Interpreter', 'latex', 'Location', '
      NW', 'FontSize',16)
   grid on;
   figure

35 plot (t, z ( 3,: ), 'LineWidth', 1.5)
   hold on
   plot ( t ,z ( 10,: ), '--r' , 'LineWidth', 2 )
   xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('$x_{3},y_{3}$', 'Interpreter'
      , 'latex', 'FontSize',20);
   legend('$x_{1}$', '$y_{1}$', 'Interpreter', 'latex', 'Location', '
      NW', 'FontSize',16)
40 grid on;
   figure
   plot (t, z ( 4,: ), 'LineWidth', 1.5)
   hold on
   plot ( t ,z ( 11,: ), '--r' , 'LineWidth', 2 )
45 xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('$x_{4},y_{4}$', 'Interpreter'
      , 'latex', 'FontSize',20);
   legend('$x_{4}$', '$y_{4}$', 'Interpreter', 'latex', 'Location', '
      NW', 'FontSize',16)
   grid on;
   figure

50 plot (t, z ( 5,: ), 'LineWidth', 1.5)
   hold on

```

```

plot ( t ,z ( 12,: ), '--r' , 'LineWidth', 2 )
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('$x_{5},y_{5}$', 'Interpreter'
    , 'latex', 'FontSize',20);
legend('$x_{5}$', '$y_{5}$', 'Interpreter', 'latex', 'Location', '
    NW', 'FontSize',16)
55 grid on;
figure
plot (t, z ( 6,: ), 'LineWidth', 1.5)
hold on
plot ( t ,z ( 13,: ), '--r' , 'LineWidth', 2 )
60 xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('$x_{6},y_{6}$', 'Interpreter'
    , 'latex', 'FontSize',20);
legend('$x_{6}$', '$y_{6}$', 'Interpreter', 'latex', 'Location', '
    NW', 'FontSize',16)
grid on;
figure
65 plot (t, z ( 7,: ), 'LineWidth', 1.5)
hold on
plot ( t ,z ( 14,: ), '--r' , 'LineWidth', 2 )
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('$x_{7},y_{7}$', 'Interpreter'
    , 'latex', 'FontSize',20);...
legend('$x_{7}$', '$y_{7}$', 'Interpreter', 'latex', 'Location', '
    NW', 'FontSize',16)
70 grid on;

% Plot errors
figure
plot (t, z (15, : ), 'LineWidth', 2.5)
75 xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('e_{1} ', 'FontSize',20);
axis([0 100 -1 1 ])
grid on;

figure
80 plot (t, z (16, : ), 'LineWidth', 2.5)
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('e_{2} ', 'FontSize',20);
axis([0 100 -1 1 ]);
grid on;

85 figure

```



```

plot (t, z (17, : ),'LineWidth', 2.5)
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('e_{3} ', 'FontSize',20);
axis([0 100 -1 1 ]);
grid on;
90
figure
plot (t, z (18, : ),'LineWidth', 2.5)
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('e_{4} ', 'FontSize',20);
axis([0 100 -1 1 ]);
95
grid on;

figure
plot (t, z (19, : ),'LineWidth', 2.5)
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('e_{5} ', 'FontSize',20);
100
axis([0 100 -1 1 ]);
grid on;

figure
plot (t, z (20, : ),'LineWidth', 2.5)
105
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('e_{6} ', 'FontSize',20);
axis([0 100 -1 1 ]);
grid on;

figure
110
plot (t, z (21, : ),'LineWidth', 2.5)
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('e_{7} ', 'FontSize',20);
grid on;

```

Listing C.6: Text\_Encryption\_Sprott.m- text message encryption using fractional-order complex Sprott system

```

function Text_Encryption_Sprott

close all
5 % System parameters
a = 15;b = 1;c = 25.5;d=.01;

% Initial point corresponding to master, slave and error systems
x_start=[1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3.3; 4; 10.01; -0.7; -12; 7; -4;
10     1; 1; 1; 1.3; 2; 0.01; -0.7    ];

```

```

% Fractional-order
q=0.89;

[t,z] = fde12(q,@Sys_Master_Slave_Sprott,0,100, x_start,0.0008,[
    a b c d]);
15
% Name of the text file
filename = 'Abstract.txt';

% Import the text
20 X1 = importdata(filename);
X2=X1';

% Convert cell array to ordinary array of the underlying data
    type
X3= cell2mat(X2);
25
% Convert the text into a vector of digits
X4 = double(X3);

% Time after realize synchronization
30 Ts=find(t==40);

% Encryption function
Encryp=(5+z( 5,(Ts: Ts+length(X4)-1))).^2+(3+(z( 5,(Ts: Ts+
    length(X4)-1))).^2).*X4;

35 % Convert the vector of digits back to a text
Y1=(char(Encryp));
disp(Y1);

% Decryption function
40 Decryp=(-((5+z( 12,(Ts: Ts+length(X4)-1))).^2)+Encryp)./(3+(z(
    12,(Ts: Ts+length(X4)-1))).^2);

% Convert the vector of digits back to a text
Y2=(char(Decryp));
disp(Y2);

```

Listing C.7: Audio\_Encryption\_Sprott.m- audio message encryption using fractional-order complex Sprott system

```

function Audio_Encryption_Sprott

close all
5 % System parameters
a = 15;b = 1;c = 25.5;d=.01;

% Initial point corresponding to master, slave and error systems
x_start=[1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3.3; 4; 10.01; -0.7; -12; 7; -4;
10     1; 1; 1; 1.3; 2; 0.01; -0.7    ];

% Fractional-order
q=0.89;

[t1,z] = fde12(q,@Sys_Master_Slave_Sprott,0,100, x_start
15     ,0.0008,[a b c d]);

% Load voice signal
load handel.mat

% Name of the audio file
20 filename = 'handel.wav';

% Writes a matrix of audio data, y, with sample rate Fs to a
file called filename
audiowrite(filename,y,Fs);

25 clear y Fs
% Reads data from the file named filename, and returns sampled
data, y, and a sample rate for that data, Fs.
[y,Fs] = audioread(filename);

% Amplitude
30 y = y(:,1);

% Define the time
dt = 1/Fs;
t2 = 0:dt:(length(y)*dt)-dt;
35

```

```

% plot the original signal
plot(t2,y);xlabel( 't', 'FontSize',20); ylabel('S(t) ', '
    FontSize',22)
grid on;

40 % Time after realize synchronization
Ts=find(t1==40);

figure

45 % Encryption function
Encryp=((5+z (5, (Ts: Ts+length(y)-1) )).^2)+(3+(z (5, (Ts: Ts+
    length(y)-1) )).^2).*y';

% Plot encrypted signal
plot ( t2, Encryp);
50 xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('S_{e}(t) ', 'FontSize',22);
grid on;

figure
% Decryption function
55 Decryp=(-((5+z (12, (Ts: Ts+length(y)-1))).^2)+Encryp)./(3+(z
    (12, (Ts: Ts+length(y)-1) )).^2);

% Plot decrypted signal
plot ( t2, Decryp);
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('S_{d}(t) ', 'FontSize',22);
60 axis([0 9 -1 .8])
grid on;

figure
% Plot the error between original and decrypted signal
65 plot ( t2, y'-Decryp, 'LineWidth', 1.5);
axis([0 9 -6 2])
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('S(t)-S_{d}(t) ', 'FontSize'
    ,22);
grid on;

```

## Appendix D

### MATLAB procedure implementation for adaptive synchronization of the hyperchaotic complex Rabinovich systems with unknown parameters

Listing D.1: Function “Sys\_Master\_Slave\_Errors\_Rabinovch.m” defines the master (3.41), slave (3.42), error states (3.36), error parameter modulation  $A$  (3.33) and error parameter modulation  $B$  (3.34) systems

```

function dx = Sys_Master_Slave_Errors_Rabinovch(t,x,upsilon,
    alpha,gamma,beta)

dx = zeros(30,1);
5
% Master system
dx(1) = -upsilon*x(1)+x(1)*x(3)+x(2)*x(4)+x(3)*x(5)+x(4)*x(6);
dx(2) = -upsilon*x(2)+x(1)*x(4)-x(2)*x(3)+x(3)*x(6)-x(4)*x(5);
dx(3) = alpha*x(3)+(x(2))^2-(x(1))^2+2*(x(1)*x(5)+x(2)*x(6))-
    beta*x(3)*((x(3))^2+(x(4))^2);
10 dx(4) = alpha*x(4)-2*x(1)*x(2)+2*(x(1)*x(6)-x(2)*x(5))-beta*x
    (4)*((x(3))^2+(x(4))^2);
dx(5) = gamma*x(5)-3*(x(1)*x(3)-x(2)*x(4))-beta*x(5)*((x(5))
    ^2+(x(6))^2);
dx(6) = gamma*x(6)-3*(x(1)*x(4)+x(2)*x(3))-beta*x(6)*((x(5))
    ^2+(x(6))^2);

% Slave system
15 k1=66;k2=66;k3=55;k4=55;k5=77;k6=77;
k11=13;k21=13;k31=12;k41=12;k51=15;k61=15;
k12=15;k22=15;k32=15;k42=15;k52=59;k62=59;
dx(7) = -x(7)*x(19)-upsilon*x(1)+x(1)*x(3)+x(2)*x(4)+x(3)*x(5)+
    x(4)*x(6)-k1*x(13)-k11*x(19)-k12*x(25);
dx(8) = -x(8)*x(20)-upsilon*x(2)+x(1)*x(4)-x(2)*x(3)+x(3)*x(6)-
    x(4)*x(5)-k2*x(14)-k21*x(20)-k22*x(26);
20 dx(9) = x(9)*x(21)+alpha*x(3)+(x(2))^2-(x(1))^2+2*(x(1)*x(5)+x
    (2)*x(6))-x(9)*((x(9))^2+(x(10))^2)*x(27)-beta*x(3)*((x(3))
    ^2+(x(4))^2)-k3*x(15)-k31*x(21)-k32*x(27);

```

```

dx(10)= x(10)*x(22)+alpha*x(4) -2*x(1)*x(2)+2*(x(1)*x(6) -x(2)*x
(5)) -x(10)*((x(9))^2+(x(10))^2)*x(28) - beta*x(4)*((x(3))^2+(
x(4))^2) -k4*x(16) -k41*x(22) -k42*x(28);
dx(11)=x(11)*x(23)+gamma*x(5) -3*(x(1)*x(3) -x(2)*x(4)) -x(11)*((
x(11))^2+(x(12))^2)*x(29) - beta*x(5)*((x(5))^2+(x(6))^2) -k5*
x(17) -k51*x(23) -k52*x(29);
dx(12)=x(12)*x(24)+gamma*x(6) -3*(x(1)*x(4)+x(2)*x(3)) -x(12)*((
x(11))^2+(x(12))^2)*x(30) - beta*x(6)*((x(5))^2+(x(6))^2) -k6*
x(18) -k61*x(24) -k62*x(30);
25
% Error ststes system
dx(13)= -x(7)*x(19) -k1*x(13) -k11*x(19) -k12*x(25);
dx(14)= -x(8)*x(20) -k2*x(14) -k21*x(20) -k22*x(26);
dx(15)= x(9)*x(21) -x(9)*((x(9))^2+(x(10))^2)*x(27) -k3*x(15) -
k31*x(21) -k32*x(27);
30
dx(16)= x(10)*x(22) -x(10)*((x(9))^2+(x(10))^2)*x(28) -k4*x(16) -
k41*x(22) -k42*x(28);
dx(17)=x(11)*x(23) -x(11)*((x(11))^2+(x(12))^2)*x(29) -k5*x(17) -
k51*x(23) -k52*x(29);
dx(18)=x(12)*x(24) -x(12)*((x(11))^2+(x(12))^2)*x(30) -k6*x(18) -
k61*x(24) -k62*x(30);

% Error parametre estimation A system
35
dx(19)= x(7)*x(13)+k11*x(13);
dx(20)= x(8)*x(14)+k21*x(14);
dx(21)= -x(9)*x(15)+k31*x(15);
dx(22)= -x(10)*x(16)+k41*x(16);
dx(23)= -x(11)*x(17)+k51*x(17);
40
dx(24)= -x(12)*x(18)+k61*x(18);

% Error parametre estimation B system
dx(25)= k12*x(13);
dx(26)= k22*x(14);
45
dx(27)= x(9)*((x(9))^2+(x(10))^2)*x(15)+k32*x(15);
dx(28)= x(10)*((x(9))^2+(x(10))^2)*x(16)+k42*x(16);
dx(29)=x(11)*((x(11))^2+(x(12))^2)*x(17)+k52*x(17);
dx(30)=x(12)*((x(11))^2+(x(12))^2)*x(18)+k62*x(18);

```

Listing D.2: Adpative\_Synchr\_Rabinovch.m- plot adaptive synchronization of hyperchaotic attractors in the Rabinovich systems (3.41) and (3.42), estimation of unknown parameters  $A, B$ , error states (3.36), error parameter modulation  $A$  (3.33), and error parameter modulation  $B$  (3.34)

```

function Adpative_Synchr_Rabinovch

close all

5
% System parameters
epsilon=-0.03;
alpha =0.5;
gamma=0.11;
10 beta=.001;

[t1,z1] = ode45(@(t,x)Sys_Master_Slave_Errors_Rabinovch(t,x,
    epsilon,alpha,gamma,beta),[0 50],[1 1 1 1 1 1 3 3 3 3 3 3 2 2
    2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4]);

% Specify a plot
15 % Plot synchronization trajectory in different projections

plot3( z1 ( :,1 ),z1 ( :,4 ),z1 ( :,6 ),'LineWidth', 2)
xlabel('$x_{1}$','Interpreter','latex','FontSize',20); ylabel('$
    x_{4}$','Interpreter','latex','FontSize',20);
zlabel('$x_{6}$','Interpreter','latex','FontSize',20);
20 grid on;

figure
plot3( z1 ( :,7 ),z1 ( :,10 ),z1 ( :,12 ),'r','LineWidth', 2)
xlabel('$y_{1}$','Interpreter','latex','FontSize',20); ylabel('$
    y_{4}$','Interpreter','latex','FontSize',20);
25 zlabel('$y_{6}$','Interpreter','latex','FontSize',20);
grid on;

figure
plot3( z1 ( :,2 ),z1 ( :,3 ),z1 ( :,5 ),'LineWidth', 2)
30 view(50,50);
xlabel('$x_{2}$','Interpreter','latex','FontSize',20); ylabel('$
    x_{3}$','Interpreter','latex','FontSize',20);
zlabel('$x_{5}$','Interpreter','latex','FontSize',20);

```

```

grid on;

35 figure
plot3( z1 ( :,8 ),z1 ( :,9 ),z1 ( :,11 ),'r','LineWidth', 2)
view(50,50);
xlabel('$y_{2}$','Interpreter','latex','FontSize',20); ylabel('$
    y_{3}$','Interpreter','latex','FontSize',20);
zlabel('$y_{5}$','Interpreter','latex','FontSize',20);
40 grid on;

% Estimation of unknown parameters
figure
plot( t1,upsilon+z1 ( :,19 ),'LineWidth', 2, 'Color', 'blue')
45 str = {'$$\hat{\upsilon}$$'};
xlabel('t','FontSize',20);ylabel(str,'Interpreter','latex','
    FontSize',20)
grid on;

figure
50 plot( t1,alpha+z1 ( :,21 ),'LineWidth', 2, 'Color', 'red')
str = {'$$\hat{\alpha}$$'};
xlabel('t','FontSize',20);ylabel(str,'Interpreter','latex','
    FontSize',20)
grid on;

55 figure
plot( t1,beta+z1 ( :,27 ),'LineWidth', 2, 'Color', '0.87,
    0.49, 0')
str = {'$$\hat{\beta}$$'};
xlabel('t','FontSize',20);ylabel(str,'Interpreter','latex','
    FontSize',20)
grid on;

60 figure
plot( t1,gamma+z1 ( :,23 ),'LineWidth', 2, 'Color', '0.49,
    0.18, 0.56')
str = {'$$\hat{\gamma}$$'};
xlabel('t','FontSize',20);ylabel(str,'Interpreter','latex','
    FontSize',20)
65 grid on;

```



```
% Plot error ststes
figure
subplot(3,2,1)
70 plot( t1,z1 ( :,13 ),'LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{1}','FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,2)
75 plot( t1,z1 ( :,14 ),'LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{2}','FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,3)
80 plot( t1,z1 ( :,15 ),'LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{3}','FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,4)
85 plot( t1,z1 ( :,16 ),'LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{4}','FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,5)
90 plot( t1,z1 ( :,17 ),'LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{5}','FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,6)
95 plot( t1,z1 ( :,18 ),'LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{6}','FontSize',20)
grid on;

% Plot error parametre estimation A
100 figure
subplot(3,2,1)
plot( t1,z1 ( :,19 ),'b','LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{A_{1}}','FontSize',20)
grid on;
105
```

```
subplot(3,2,2)
plot( t1,z1 ( :,20 ), 'b', 'LineWidth', 2)
xlabel('t', 'FontSize',20);ylabel('e_{A_{2}}', 'FontSize',20)
grid on;
110
subplot(3,2,3)
plot( t1,z1 ( :,21 ), 'b', 'LineWidth', 2)
xlabel('t', 'FontSize',20);ylabel('e_{A_{3}}', 'FontSize',20)
grid on;
115
subplot(3,2,4)
plot( t1,z1 ( :,22 ), 'b', 'LineWidth', 2)
xlabel('t', 'FontSize',20);ylabel('e_{A_{4}}', 'FontSize',20)
grid on;
120
subplot(3,2,5)
plot( t1,z1 ( :,23 ), 'b', 'LineWidth', 2)
xlabel('t', 'FontSize',20);ylabel('e_{A_{5}}', 'FontSize',20)
grid on;
125
subplot(3,2,6)
plot( t1,z1 ( :,24 ), 'b', 'LineWidth', 2)
xlabel('t', 'FontSize',20);ylabel('e_{A_{6}}', 'FontSize',20)
grid on;
130
% Plot error parametre estimation B
figure
subplot(3,2,1)
plot( t1,z1 ( :,25 ), 'b', 'LineWidth', 2)
135 xlabel('t', 'FontSize',20);ylabel('e_{B_{1}}', 'FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,2)
plot( t1,z1 ( :,26 ), 'b', 'LineWidth', 2)
140 xlabel('t', 'FontSize',20);ylabel('e_{B_{2}}', 'FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,3)
plot( t1,z1 ( :,27 ), 'b', 'LineWidth', 2)
145 xlabel('t', 'FontSize',20);ylabel('e_{B_{3}}', 'FontSize',20)
```

```

grid on;

subplot(3,2,4)
plot( t1,z1 ( :,28 ),'b','LineWidth', 2)
150 xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{B_{4}}','FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,5)
plot( t1,z1 ( :,29 ),'b','LineWidth', 2)
155 xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{B_{5}}','FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,6)
plot( t1,z1 ( :,30 ),'b','LineWidth', 2)
160 xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{B_{6}}','FontSize',20)
grid on;

```

Listing D.3: Adpative\_Synchr\_Image\_Noise\_Encryption\_Rabinovch.m- single parameter modulation and hyperchaotic masking for a grayscale image using complex Rabinovch system

```

function Adpative_Synchr_Image_Noise_Encryption_Rabinovch
close all

5 % Variation of parameter modulation

global gamma
epsilon=-0.03;
alpha =0.5;
10 %gamma=0.11;
beta=.001;

% Name of the image file
filename = 'cameraman.tif';
15

% Read image
Img1 = imread(filename);
% Adding white Gaussian noise
Original_Image=imnoise(Img1,'gaussian',0.1);
20 % Image size
[r, c] = size(Original_Image);
% Show the original image

```

```

imshow(Original_Image);

25 figure
   % Show histogram of the original image
   imhist(Original_Image)

   ImgVector = Original_Image(:);
30 % Convert the image into a vector of digits
   Y = double(ImgVector);

   % Split the message
   RR=Y(1:1000);
35   TT=Y(1001:end)';

   % Inject the message part into parameter modulation
   Encryp1=RR'/(10*(max(Y)-min(Y))) +0.11;

40 W=[];
   % Main loop fpr parameter modulation
   for gamma=Encryp1

       [~,z1] = ode45(@(t,x)Sys_Master_Slave_Errors_Rabinovch(t,x,
           upsilon,alpha,gamma,beta),[0 50],[1 1 1 1 1 1 3 3 3 3 3 3 2 2
           2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4]);
45

       % Recovery the message part from parameter modulation
       Decryp1=((gamma+z1 ( end,23 ))-0.11)*(10*(max(Y)-min(Y)));

       W=[W, Decryp1];
50   end

   % Encryption function
   Encryp2=(z1 ( end,6)).^2+(1+(z1 (end,6 ))).^2).*TT;
55 X1=[Encryp1 Encryp2];
   X2 = uint8(X1);

   figure
       Encrypted_Image=reshape(X2, r, c);
60 % Show the encrypted image

```

```

imshow(Encrypted_Image)

figure
% Show histogram of the encrypted image
65  imhist(Encrypted_Image)

% Decryption function
Decryp2=(-((z1 (end,12 )).^2)+Encryp2)./(1+(z1 ( end,12 )).^2)
;
D=[W Decryp2];
70  DD = uint8(D);
Decrypted_Image=reshape(DD , r, c);

figure
% Show the decrypted image
75  imshow(Decrypted_Image)

figure
% Show histogram of the decrypted image
imhist(Decrypted_Image)
80

% Estimate peak signal-to-noise ratio (PSNR)
peaksnr = psnr(Decrypted_Image,Original_Image);
fprintf('\n The Peak-SNR value is %0.4f', peaksnr);

85  % Estimate structural similarity image index (SSIM)
ssimval = ssim(Decrypted_Image,Original_Image);
fprintf('\n The structural similarity index is %0.4f',ssimval)
;

```

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Шерих Ахмед Абделхамид Мохамед Ахмед

**АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В СИСТЕМАХ ЦЕЛОГО И  
ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

Научная специальность 1.2.2.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Перевод с английского

Научные руководители:

д-р физ.-мат. наук, профессор  
Н.В. Кузнецов

д-р физ.-мат. наук, профессор  
Т.Н. Мокаев

Санкт-Петербург

2022

## Оглавление

Благодарности . . . . .	162
Введение . . . . .	163
<b>Глава 1. Динамические системы: основные понятия и численные методы . .</b>	<b>170</b>
1.1 Определение динамической системы . . . . .	170
1.2 Системы целого порядка . . . . .	172
1.2.1 Динамические системы в случае целого порядка . . . . .	172
1.2.2 Критерии устойчивости систем целого порядка . . . . .	173
1.2.3 Численные методы решения дифференциальных уравнений целого порядка . . . . .	174
1.3 Системы дробного порядка . . . . .	175
1.3.1 Динамические системы в случае дробного порядка . . . . .	179
1.3.2 Критерии устойчивости систем дробного порядка . . . . .	180
1.3.3 Численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка . . . . .	180
<b>Глава 2. Локализация хаотических и гиперхаотических аттракторов в         системах целого и дробного порядка . . . . .</b>	<b>182</b>
2.1 Аналитическое и численное исследование хаотической динамики в комплексной системе Лоренца . . . . .	182
2.1.1 Предварительные сведения . . . . .	183
2.1.2 Комплексная система Лоренца . . . . .	187
2.1.3 Внутренняя оценка устойчивости: глобальная устойчивость и тривиальные аттракторы . . . . .	189
2.1.4 Внешняя оценка устойчивости: отсутствие тривиальных аттракторов .	199
2.1.5 Граница практической устойчивости и отсутствие нетривиальных аттракторов . . . . .	199
2.1.6 Скрытый аттрактор или скрытое переходное множество? . . . . .	200
2.1.7 Обсуждение . . . . .	202
2.2 Аналитическое и численное исследование хаотической динамики в комплексной системе Спротта дробного порядка . . . . .	203
2.2.1 Предварительные сведения . . . . .	203
2.2.2 Комплексная гиперхаотическая система Спротта дробного порядка . .	204
2.2.3 Динамика системы . . . . .	206
2.2.4 Обсуждение . . . . .	210
2.3 Аналитическое и численное исследование хаотической динамики в комплексной системе Рабиновича . . . . .	211

2.3.1	Предварительные сведения . . . . .	211
2.3.2	Комплексная система Рабиновича . . . . .	211
2.3.3	Динамика системы . . . . .	212
2.3.4	Обсуждение . . . . .	214
<b>Глава 3. Синхронизация комплексных гиперхаотических систем целого и дробного порядков и приложения . . . . .</b>		<b>215</b>
3.1	Полная синхронизация для комплексных гиперхаотических систем дробного порядка с использованием метода активного управления . . . . .	215
3.1.1	Предварительные сведения . . . . .	215
3.1.2	Метод полной синхронизации гиперхаотической комплексной системы Спротта дробного порядка . . . . .	216
3.1.3	Приложение для систем защищенной коммуникации . . . . .	218
3.1.4	Обсуждение . . . . .	221
3.2	Синхронизация с запаздыванием для комплексных гиперхаотических систем . . . . .	222
3.2.1	Предварительные сведения . . . . .	223
3.2.2	Новый метод синхронизации с запаздыванием гиперхаотических комплексных систем . . . . .	224
3.2.3	Синхронизация с запаздыванием двух идентичных гиперхаотических комплексных систем Лоренца . . . . .	225
3.2.4	Приложение для систем защищенной коммуникации . . . . .	228
3.2.5	Обсуждение . . . . .	229
3.3	Адаптивная синхронизация для общего класса комплексных гиперхаотических систем с неопределенными параметрами . . . . .	231
3.3.1	Предварительные сведения . . . . .	232
3.3.2	Новый метод адаптивной синхронизации для общего класса гиперхаотических комплексных моделей с неопределенными параметрами . . . . .	234
3.3.3	Адаптивная синхронизация для пары идентичных гиперхаотических комплексных систем Рабиновича с неопределенными параметрами . . . . .	237
3.3.4	Приложение для систем защищенной коммуникации . . . . .	239
3.3.5	Обсуждение . . . . .	248
3.4	Сравнение производительности схем синхронизации на примере цепи Чуа . . . . .	249
3.4.1	Полная синхронизация и синхронизация с запаздыванием для пары идентичных систем Чуа . . . . .	251
3.4.2	Адаптивная синхронизация для пары идентичных систем Чуа с неопределенными параметрами . . . . .	252
3.4.3	Сравнение схем синхронизации в применении к системам защищенной коммуникации . . . . .	255
3.4.4	Обсуждение . . . . .	256



Заключение . . . . .	261
Список литературы . . . . .	262
Список рисунков . . . . .	278
Список таблиц . . . . .	283
<b>Приложение А Численные исследования локализации скрытых аттракторов и переходных хаотических множеств в комплексной системе Лоренца . . . . .</b>	<b>284</b>
A.1 Локализация с помощью метода численного продолжения по параметру . . . . .	284
A.2 Локализация с использованием точек нулевого ускорения . . . . .	288
A.3 Численная проверка бассейнов притяжения вблизи нулевого состояния равновесия . . . . .	289
A.4 Численная проверка бассейнов притяжения вокруг множества состояний равновесия $S_\theta$ . . . . .	290
A.5 Проверка притягиваемости для переходных множеств . . . . .	293
<b>Приложение Б Реализация на MATLAB процедуры визуализации скрытых переходных хаотических множеств в комплексной системе Лоренца и соответствующей проективной системе . . . . .</b>	<b>296</b>
<b>Приложение В Реализация на MATLAB процедуры вычисления показателей Ляпунова для системы Спротта дробного порядка, процедуры синхронизации скрытых гиперхаотических аттракторов в комплексных системах Спротта дробного порядка . . . . .</b>	<b>302</b>
<b>Приложение Г Реализация на MATLAB процедуры адаптивной синхронизации гиперхаотических комплексных систем Рабиновича с неопределенными параметрами . . . . .</b>	<b>314</b>

## Благодарности

Я хотел бы выразить глубокую благодарность моим научным руководителям, профессору Николаю Викторовичу Кузнецову и профессору Тимуру Назировичу Мокаеву за их ценные и конструктивные предложения и советы во время работы над данной диссертацией, а также за их готовность щедро уделять мне свое время, делиться со мной своими знаниями и критически оценивать мои результаты.

Я также хотел бы выразить искреннюю благодарность моим бывшим научным руководителям - профессору Мамдуху М. Хассану (кафедра математики Университета Миниа, Египет) и профессорам Гамалю М. Махмуду и Ахмеду А.М. Фаргали (кафедра математики Университета Асьют, Египет) - за то, что они познакомили меня с проблемами анализа и синхронизации комплекснозначных систем и систем дробного порядка. Понимая глубокие связи этих проблем с теорией скрытых колебаний и современными методами изучения хаотической динамики, я получил согласие своих коллег на продолжение моих исследований в этом направлении в Санкт-Петербургском государственном университете на кафедре прикладной кибернетики. Данное исследование было бы невозможно без поддержки и стипендии [EGY-6353/17], в рамках совместной программы Главного управления миссий Министерства высшего образования Египта и Правительства Российской Федерации. Я очень ценю возможность работать на кафедре прикладной кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета и благодарен всем ее сотрудникам за их гостеприимство и помощь.

Я хотел бы выразить свою искреннюю благодарность всем сотрудникам кафедры математики, Университет Аль-Азхар, Асьют, за их любезную поддержку.

В заключении, я хотел бы также выразить свою благодарность и признательность моим родителям, братьям, жене и дочерям за их любовь и постоянную поддержку.

## Введение

### Актуальность темы

Необходимость аналитического и численного изучения хаотических динамических режимов (аттракторов) возникла в рамках классических теоретических и прикладных задач. Одни из первых таких задач были связаны с исследованием явлений турбулентности и рассмотрением различных моделей, включая уравнения Навье-Стокса и их конечно-элементные аппроксимации, а также с открытием странных аттракторов и дальнейшим развитием теории хаоса [1–4]. Здесь стоит упомянуть известные результаты Д. Рюэля, Ф. Такенса [3] и С. Смейла [4], предложивших рассматривать хаотический аттрактор в качестве математического прототипа, описывающего возникновение турбулентности, а также О. Ладыженской, изучившей случай, когда двумерное уравнение Навье-Стокса порождает динамическую систему, и доказавшей конечномерность ее аттрактора [5]. Существенным результатом в изучении возникновения турбулентности стало обнаружение странного аттрактора, т.е. хаотического притягивающего множества в фазовом пространстве динамической системы, которое состоит из неустойчивых траекторий со сложным поведением [3; 4]. С этой точки зрения странный аттрактор и рассматривался как математический прообраз стохастических колебаний и турбулентности в системе. Впоследствии, интерес к изучению качественного поведения решений перенесся с гидродинамических моделей на нелинейные осцилляционные системы и системы с возмущением. Такие системы часто возникают как математические модели процессов, происходящих в реальных физических, химических, биологических и других явлениях [6–8]. Существенный класс таких наблюдаемых систем образуют диссипативные системы. Их основной характеристикой является наличие механизмов перераспределения и диссипации энергии. Оказалось, что наличие этих двух механизмов может привести к возникновению сложных предельных режимов и структур в системе [9]. Расцвет теории хаоса связан с открытием американским ученым Эдвардом Лоренцем странного аттрактора. Он вывел приближенную трехмерную математическую модель конвективного потока Рэлея-Бенара, используя приближения Галеркина. Модель Лоренца [10] была первым ярким примером хаотического аттрактора в гидродинамической системе, который содержит ограниченные неустойчивые решение в пределах замкнутой области (поглощающего множества). Открытие Лоренца вызвало значительный интерес к этой области, за которым последовало несколько работ, рассматривающих другие динамические системы с подобным сложным поведением (например, работы Рёсслера [11], Чена [12], Чуа [13] и Лю [14]).

Модель конвекции Лоренца имеет хаотический аттрактор, и при определенных значениях параметров данный аттрактор может быть численно локализован траекторией, которая начинается с неустойчивого собственного подпространства в окрестности неустойчивого состояния равновесия [10; 15]. После переходного процесса такая траектория достигает аттрактора и идентифицирует его. В общем случае для численной локализации аттрактора необходимо исследовать его бассейн притяжения (множество всех точек, притягивающихся

к данному аттрактору) и выбрать начальную точку из данного множества. Очевидно, что если для конкретного аттрактора его бассейн притяжения связан с неустойчивым многообразием неустойчивого состояния равновесия, то процесс локализации сравнительно прост; в противном случае, процедура может быть весьма нетривиальной. В соответствии с описанными сложностями в процедуре локализации была предложена следующая классификация аттракторов [16–20]: аттрактор называется скрытым аттрактором, если его бассейн притяжения не связан с малой открытой окрестностью состояния равновесия; в противном случае аттрактор называется самовозбуждающимся. Например, скрытыми аттракторами являются периодические или хаотические аттракторы в системах без состояний равновесия, либо с единственным устойчивым состоянием равновесия, либо в случае сосуществования аттракторов в мультиустойчивых системах. В общем случае, данные типы аттракторов трудно обнаружить из-за неопределенности в выборе начальных данных из его бассейна притяжения. Таким образом, локализация скрытых аттракторов может быть сложной задачей, требующей разработки специальных аналитико-численных методов [18].

Одной из первых фундаментальных задач, в рамках которой появляется проблема исследования скрытых аттракторов, является вторая часть 16-ой проблемы Гильберта (1900 г.) о существовании предельных циклов в двумерных полиномиальных системах [21] (см., например, [22–24]), где внутренние вложенные предельные циклы рассматривались в качестве примеров скрытых аттракторов). В рамках решения данной проблемы, Баутин (см., например, [25]) получил первые качественные результаты связанные с теоретическим построением трех вложенных предельных циклов вокруг одного состояния равновесия. Однако оказалось, что с помощью подхода Баутина можно построить только вложенные предельные циклы малой амплитуды. Позднее был разработан аналитический метод для эффективной визуализации вложенных предельных циклов нормальной амплитуды [18; 24; 26]. Проблема скрытых аттракторов также возникает в инженерных приложениях, например, при исследовании хорошо известных гипотез Маркуса-Ямабе [27], Айзермана [28] и Калмана [29] об абсолютной устойчивости систем автоматического управления, где единственное устойчивое состояние равновесия может сосуществовать с устойчивой периодической траекторией (см. [30–35]). В [36], связанные дискретные примеры были рассмотрены в задаче моделирования систем фазовой автоподстройки частоты [37; 38]. В последние десятилетия реальная проблема численного анализа скрытых колебаний возникла в моделях систем управления самолетов [39–41], а также при моделировании буровых установок [42; 43]. Наличие таких колебаний в системах, подверженных внешнему возмущению, определяет, помимо ожидаемого устойчивого решения, соответствующего желаемому поведению системы, другие устойчивые и неустойчивые решения, соответствующие нежелательному и небезопасному поведению, что часто может приводить к разрушению систем [44]. Следует также упомянуть, что открытие в 2010 году скрытого хаотического аттрактора в цепи Чуа вызвало большой интерес и побудило многих исследователей к изучению данной проблемы в других системах и заложило основы теории скрытых колебаний [45; 46]. Также скрытые аттракторы визуализируются в других физических задачах и прикладных моделях, например, в системе Рабиновича [47–

49], описывающей взаимодействие волн в плазме, системе Глуховского–Долганского [44; 48], описывающей конвективное движение жидкости, а также в упрощенной системе динамо, которую можно рассматривать как простейшую модель самовозбуждения магнитного поля движущимися проводниками [19; 50]. Благодаря нетривиальной локализуемости в фазовом пространстве в последнее время скрытые колебания и аттракторы стали использоваться как эффективные инструменты в технологиях безопасной коммуникации и шифрования; оказалось что наличие в схеме скрытого аттрактора может приводить к повышению безопасности криптосистем и усложнению задач дешифрования для взломщиков [51–53].

Помимо явлений, моделируемых вещественнозначными системами существуют и другие, моделируемые системами с комплекснозначными переменными, такие как, например, оптические проблемы расстройки лазеров или проблемы бароклинной неустойчивости [54; 55]. Локализация скрытых аттракторов в системах с комплексными переменными, как и в вещественном случае, является непростой задачей, требующей разработки специальных аналитико-числовых методологий, учитывающих специфику динамики в комплексном пространстве. Например, сложность может быть связана с тем, что если вещественнозначная система имеет одномерное неустойчивое многообразие седлового состояния равновесия, то комплексный аналог данной системы может иметь неустойчивое многообразие более высокой размерности [56]. Поскольку скрытые аттракторы в системах с комплексными значениями до сих пор не были достаточно изучены в литературе, в данной диссертации изучению существования скрытых аттракторов в таких системах и сравнению с вещественным случаем посвящена существенная часть.

Также на ряду с вещественнозначными и комплекснозначными системами, опирающимися на классическое определение оператора производной, в последние несколько десятилетий активно изучаются динамические модели, учитывающие в эволюции переменных так называемый "эффект памяти" которые включают в себя дифференциальные операторы дробного порядка. Дробное исчисления, как специальный раздел математического анализа, восходит еще к XVII веку и к работам Г.Ф. Лопиталья и Г.В. Лейбница [57; 58]. В физике дробные операторы широко используются в математическом моделировании вязкоупругих материалов; некоторые электромагнитные задачи описываются с помощью дробных операторов интегрирования-дифференцирования, а дробные производные, основанные на уравнениях диффузии, могут объяснить аномальные явления диффузии в неоднородных средах (см., например, [59–64]). В биологии, мембраны клеток биологических организмов демонстрируют электропроводность дробного порядка [65]. В экономике хорошо известно, что некоторые финансовые системы могут демонстрировать динамику с дробным порядком [66]. Другие примеры систем дробного порядка можно найти в [67–72].

Качественное исследование динамики систем дробного порядка по сей день вызывает большой интерес. Например, в [73] было обнаружено существование предельного цикла в осцилляторе дробного порядка с мостом Вина, в [74] было продемонстрировано существование предельного цикла в дробной модели Брюсселятора. Кроме того, было обнаружено, что некоторые дифференциальные системы дробного порядка демонстрируют хаотическое поведение:

например, осциллятор Дуффинга, система Лоренца, цепь Чуа, система Лю, так называемые jerk-системы, система Росслера, система Чена [75–81]. Также в системах с дробным порядком можно обнаружить гиперхаотическое поведение (см., например, [82–84]). Более того, в системах с дробным порядком было получено существование и скрытых аттракторов (см., например, [85–88]). Тем не менее, отметим, что в настоящее время в литературе скрытые аттракторы в основном вводятся и исследуются в нелинейных динамических системах с вещественными переменными. Исследование скрытых аттракторов в системах дробного порядка и системах с комплексными переменными является относительно новым направлением, которое находится в стадии активного развития.

Синхронизация и управление хаотическими динамическими системами являются важными направлениями в прикладной науке благодаря их широкому применению в различных сферах, включая исследование физических феноменов, обработку изображений, моделирование сетей, систем безопасной коммуникации, фондовых рынков и т.д. (см, например, [89–92]). С тех пор как Пекора и Кэрролл предложили эффективный метод синхронизации двух одинаковых хаотических систем [93], для синхронизации хаотических систем были разработаны различные типы и стратегии синхронизации, включая полную синхронизацию [53; 84; 90; 94–96], синхронизацию с запаздыванием [52; 97], кластерную синхронизацию [98], адаптивную синхронизацию [99–102] и др. До настоящего времени синхронизация на основе хаоса была глубоко исследована для систем, моделируемых вещественными переменными. При этом использование комплекснозначных моделей в схемах синхронизации (а не вещественнозначных) и соответствующее удвоение числа переменных может привести к более сложному поведению используемой системы, что, в свою очередь, может быть существенно для различных приложений, включая безопасную связь и разработку криптосистем [103]. В данной диссертации, в рамках дальнейшего развития приложений систем со скрытыми колебаниями, мы исследуем и разрабатываем методы синхронизации для комплекснозначных систем и систем дробного порядка и применяем эти методы для улучшения схем безопасной коммуникации и криптосистем.

### **Цели диссертации**

Целью данной диссертации является решение следующих, поставленных передо мною задач:

1. Введение в рассмотрение и исследование аналитико-численных методов для оценки границ глобальной устойчивости систем с комплекснозначными переменными.
2. Разработка алгоритма локализации существования скрытых аттракторов и переходных хаотических множеств в некоторых распространенных комплекснозначных системах.
3. Визуализация существования скрытых аттракторов в комплекснозначных моделях дробного порядка.
4. Разработка новых стратегий синхронизации на основе теории устойчивости Ляпунова и критериев устойчивости систем дробного порядка для достижения синхронизации гиперхаотических комплекснозначных систем.

5. Предложить на основе данных стратегий синхронизации новые схемы защищенной коммуникации связи и криптосистем.

**Научная новизна полученных результатов заключается в следующем:**

1. Оцениваются границы глобальной устойчивости для комплекснозначной системы Лоренца и исследуются трудности численного исследования рождения самовозбуждающихся и скрытых аттракторов, вызванного потерей глобальной устойчивости.
2. Представлены численные исследования проблемы существования устоявшихся скрытых хаотических аттракторов и переходных хаотических множеств в комплекснозначной системе Лоренца.
3. Предложен алгоритм для визуализации существования скрытых аттракторов и переходных хаотических множеств систем на основе специального преобразования, учитывающего симметрию фазового пространства.
4. Выявлены скрытые гиперхаотические аттракторы в комплекснозначной системе Спротта дробного порядка.
5. Используя метод активного управления, разработана схема достижения синхронизации для комплекснозначных моделей Спротта дробного порядка. Разработана схема защищенной связи, основанная на этом типе синхронизации.
6. Разработана схема для реализации синхронизации с запаздыванием гиперхаотических комплексных систем и имплементирована схема защищенной связи, основанная на этом типе синхронизации.
7. Предложен новый алгоритм достижения адаптивной синхронизации для общего класса гиперхаотических комплекснозначных моделей с неопределенными параметрами.
8. Реализована улучшенная процедура синхронизации для цепей Чуа с мультиустойчивостью и скрытыми аттракторами.
9. Предложена новая схема безопасной связи, основанная на адаптивной синхронизации.

**Основные положения, выносимые на защиту**

1. Аналитические и численные методы оценки границ глобальной устойчивости для комплекснозначной системы Лоренца.
2. Численные методы локализации скрытого аттрактора и переходного хаотического множества в комплекснозначной системе Лоренца.
3. Локализация скрытых гиперхаотических аттракторов в комплекснозначной системе Спротта дробного порядка.
4. Метод достижения полной синхронизации для комплекснозначных систем Спротта дробного порядка.
5. Аналитические и численные методы реализации синхронизации с запаздыванием для комплекснозначных систем Лоренца.
6. Новый метод достижения адаптивной синхронизации для общего класса комплекснозначных систем с неопределенными параметрами.

7. Новая математическая модель и его программная реализация для защищенной связи на основе разработанной стратегии адаптивной синхронизации.

### **Персональный вклад автора**

Все научные результаты в данной диссертации получены автором лично и представлены в совместных авторских работах с российской группой (Н.В. Кузнецов и Т.Н. Мокаев) [52; 53; 56; 84] и египетской группой (Г.М. Махмуд и А.А.М. Фаргали) [72; 102].

### **Апробация**

Результаты данной диссертации были представлены на следующих международных и российских конференциях:

1. 2020 16th International Computer Engineering Conference (ICENCO) Faculty of Engineering, Cairo University Giza, Egypt December 29-30, 2020, <http://icenco2020.eng.cu.edu.eg/default.aspx?Page=Home>; "Lag synchronization for complex-valued Rabinovich system with application to encryption techniques".
2. Международная конференция по естественным и гуманитарным наукам – «Science SPbU – 2020», 25 December 2020, <https://events.spbu.ru/events/science-spbu>; "On synchronization phenomena in hyperchaotic complex-valued dynamical systems".
3. Национальная (Всероссийская) конференция по естественным и гуманитарным наукам с международным участием «Наука СПбГУ – 2020», <https://events.spbu.ru/events/science-2020>; "О проблеме синхронизации гиперхаотических комплексно значных динамических систем".
4. 2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (2021 ElConRus), Moscow and St. Petersburg, Russia, January 26 - 29, 2021 <https://www.miet.ru/page/129504>; "Synchronization of hidden hyperchaotic attractors in fractional-order complex-valued systems with application to secure communications".
5. International Student Conference Science and Progress 2021, SPbU, November 09-11, 2021, <https://events.spbu.ru/events/sp-2021>; "Hidden attractors and transient chaotic sets in the complex Lorenz system".
6. Всероссийская конференция по естественным и гуманитарным наукам с международным участием «Наука СПбГУ – 2021», 28 December 2021, <https://events.spbu.ru/events/nauka-2021>; "New adaptive synchronization algorithm for a general class of hyperchaos complex-valued systems with unknown parameters and its application to secure communication".

### **Публикации автора по теме диссертации**

Результаты данной диссертации представлены в 6 статьях [52; 53; 56; 72; 84; 102] в рецензируемых журналах, 4 из них [52; 53; 72; 102] индексируемых в Scopus и Web of Science, и 1 статья [56] подана на рассмотрение:

1. N.V. Kuznetsov, T.N. Mokaev, A.A.-H. Shoreh, A. Prasad, and M.D. Shrimali, Analytical and numerical study of the hidden boundary of practical stability: complex versus real Lorenz systems, представлен в журнале Nonlinear Dynamics, arXiv preprint arXiv:2106.10725, <https://arxiv.org/abs/2106.10725>



2. A.A.-H. Shoreh, N.V. Kuznetsov and T.N. Mokaev, New adaptive synchronization algorithm for a general class of hyperchaos complex-valued systems with unknown parameters and its application to secure communication, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 586 2022. DOI: 10.1016/j.physa.2021.126466
3. A.A.-H. Shoreh, N.V. Kuznetsov, T.N. Mokaev and M.S. Tavazoei, Synchronization of hidden hyperchaotic attractors in fractional-order complex-valued systems with application to secure communications, 2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus), St. Petersburg, Moscow, Russia, 2021, 62-67. DOI: 10.1109/ElConRus51938.2021.9396284
4. A.A.-H. Shoreh, N.V. Kuznetsov and T.N. Mokaev, Lag synchronization for complex-valued Rabinovich system with application to encryption techniques, 2020 16th International Computer Engineering Conference (ICENCO), Cairo, Egypt, 2020, 11-16. DOI: 10.1109/ICENCO49778.2020.9357389
5. Ahmed A. M. Farghaly and A.A.-H. Shoreh, Some complex dynamical behaviors of the new 6D fractional-order hyperchaotic lorenz-like system, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 26 2018. DOI: 10.21608/JOMES.2018.9469
6. Gamal M. Mahmoud, Ahmed A.M. Farghaly and A.A.-H. Shoreh, A technique for studying a class of fractional-order nonlinear dynamical systems, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 27 2017. DOI: 10.1142/S0218127417501449

**Структура диссертации выглядит следующим образом:**

Диссертация включает введение, три главы, заключение, список литературы, список рисунков, список таблиц и четыре приложения. Полный объем диссертации составляет 165 страниц с 72 рисунками и 7 таблицами. Список литературы содержит 240 наименований.

## Глава 1. Динамические системы: основные понятия и численные методы

В этой главе кратко представлены математические основы динамических систем и численные методы решения дифференциальных уравнений целого и дробного порядка. Содержание данной главы основывается на следующих работах [45; 47; 57; 58; 104–129].

### 1.1 Определение динамической системы

Динамические системы широко используются для описания широкого круга проблем, включая потоки жидкости, планетарные взаимодействия, химические процессы, развитие биологических моделей, процессы электрических цепей и финансовые рынки. Основная цель теории динамических систем состоит в том, чтобы делать качественные прогнозы поведения систем, которые развиваются с течением времени, когда параметры управления системой и ее начальное состояние изменяются [104; 105]. Общая визуализация динамической системы может быть получена путем определения всех возможных предельных множеств (устойчивые решения, периодические решения, квазипериодические решения, или хаотические), определяя, как эти предельные множества эволюционируют для управляющих параметров в системе [104]. В общем случае, для физической задачи или математической модели, динамическая система представляет собой правило, описывающее временную эволюцию состояния, заданного системой дифференциальных или разностных уравнений. Если состояние системы измеряется только целыми значениями времени, то это определяет дискретные динамические системы. Если время измеряется непрерывно, т.е.  $t \in \mathbb{R}$ , то это определяет непрерывные динамические системы. Здесь мы сосредоточимся только на непрерывных динамических системах, задаваемых дифференциальными уравнениями.

**Определение 1.1.** [105] гладкой динамической системой на  $\mathbb{R}^n$  является непрерывно дифференцируемая функция  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  где  $\phi(t, x) = \phi_t(x)$  удовлетворяет

1.  $\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  является функцией идентичности:  $\phi_0(x_0) = x_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ .
2. Композиция  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \forall t, s \in \mathbb{R}$ .

Важной задачей как качественного, так и количественного исследования динамических систем является изучение предельного поведения системы после переходного процесса, т.е. задача выявления и анализа всех возможных предельных колебаний (аттракторов) [45]. Далее представлены определения аттракторов, хаоса в детерминированных динамических системах и показателей Ляпунова. Более того, классификация поведения динамической системы на основе показателей Ляпунова обсуждаются.

**Определение 1.2.** Аттрактор [106; 107]:

Аттрактор можно определить как замкнутое множество  $A$  в фазовом пространстве со следующими свойствами:

1.  $A$  является инвариантным множеством, т.е. любая траектория, начинающаяся в  $A$ , остается в  $A$  в течение всего времени.
2.  $A$  притягивает открытое множество начальных условий, т.е. существует открытое множество  $U$ ,  $A \subseteq U$  такое, что если  $x(0) \in U$ , то расстояние от  $x(t)$  до  $A$  стремится к нулю как  $t \rightarrow \infty$ . Наибольшее такое множество  $U$  называется бассейном притяжения  $A$ .
3.  $A$  минимально, т.е. не существует правильного подмножества  $A$ , удовлетворяющего вышеуказанным условиям.

Другими словами, аттрактор - это минимальное замкнутое инвариантное множество, которое притягивает близлежащие траектории, лежащие в бассейне притяжения, на него. Например, существует три простых аттрактора: устойчивый неподвижной точки, устойчивый предельный цикл и устойчивый тор.

**Определение 1.3.** Хаос [106; 107]:

Хаос можно определить как аперриодическое долговременное поведение в детерминированной системе с чувствительной зависимостью от начальных условий. Другими словами, хаос в динамических системах - это ограниченное устойчивое поведение, которое не является неподвижной точкой, не периодично и не квазипериодично. Это означает, что две траектории, начинающиеся из бесконечно малой окрестности, могут достичь совершенно разных положений через определенный промежуток времени. Для непрерывных динамических систем хаос может существовать только в 3 и более высокоразмерных пространствах. Вычисление показателей Ляпунова может указать на хаотическое поведение системы. Положительность наибольшего показателя Ляпунова часто используется как признак хаотического поведения в рассматриваемой системе.

**Определение 1.4.** Показатели Ляпунова (Lyapunov exponents, далее - LEs) [107; 108]:

Показатели Ляпунова - это величины, характеризующие скорость расхождения бесконечно близких траекторий. Другими словами, показатели Ляпунова измеряют чувствительность динамической системы к небольшим изменениям начальных условий. Таким образом, они обеспечивают хороший количественный тест на хаотическое поведение в динамической системе. [107].

Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ . Линеаризация системы (1.1) вдоль решения  $\varphi^t(x)$  имеет вид

$$\dot{y} = J(\varphi^t(x))y, \quad J(x) = Df(x), \quad (1.2)$$

где  $J$  - матрица Якобиана, элементы которой являются непрерывными функциями от  $x$ , и  $\det J(x) \neq 0$ .

В [47] Кузнецов и др. ввели понятие конечно-временных показателей Ляпунова в точке  $x$ , которые можно оценить следующим образом:

$$LE_i = \frac{1}{t} \ln \sigma_i(t, x), \quad t > 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\sigma_i(t, x) = \sigma_i(D\varphi^t(x))$  - сингулярные значения  $D\varphi^t(x)$  (т.е.  $\sigma_i(t, x) > 0$  и  $\sigma_i(t, x)^2$  являются собственными значениями симметричной матрицы  $D\varphi^t(x)^* D\varphi^t(x)$  с учетом их алгебраической кратности).<sup>1</sup>

С практической точки зрения, показатели Ляпунова дают хороший инструмент для классификации поведения динамической системы. Таблица 1 показывает эту классификацию в соответствии со знаками показателей Ляпунова [72; 109].

Таблица 1: Знаки показателей Ляпунова и соответствующий тип решений.

$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$	$LE_4$	...	Динамика
-	-	-	-	...	Решения приближаются к неподвижной точке
0	-	-	-	...	Периодическое решение (предельные циклы)
0	0	-	-	...	Квазипериодическое решение (2-тор)
+	0	-	-	...	Хаос
+	+	0	-	...	Гиперхаос

## 1.2 Системы целого порядка

В этом разделе представлено определение динамической системы целого порядка с вещественными или комплексными переменными, критерии устойчивости и численные методы решения дифференциальных уравнений целого порядка

### 1.2.1 Динамические системы в случае целого порядка

Теперь мы представим определение динамической системы, порожденной решением следующей системы целого порядка:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (1.3)$$

<sup>1</sup>Символ \* обозначает транспонирование матрицы

где  $x \in \mathbb{R}^n$  (или  $\mathbb{C}^n$ )<sup>2</sup>,  $f$  - непрерывная вектор-функция, которая удовлетворяет локальному условию Липшица в  $\mathbb{R}^n$ . Теорема Пикара (см., например, [112]) подразумевает, что для локального условия Липшица на функции  $f$  и для любого  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , существует единственное решение  $x(t, x_0)$  системы (1.3) с начальными данными  $x(0, x_0) = x_0$ , которое дано на некотором конечном интервале времени:  $t \in I \subset \mathbb{R}$ . Теорема о непрерывной зависимости от начальных данных [112] подразумевает, что для локального условия Липшица на функции  $f$ , решение  $x(t, x_0)$  непрерывно зависит от  $x_0$ .

**Предложение 1.1.** Если для системы (1.3) выполнены теорема Пикара и теорема о непрерывной зависимости от начальных данных, а решение существует на  $[0, +\infty)$  (или,  $(-\infty, +\infty)$ ), то решение  $x(t, x_0)$  системы (1.3) порождает динамическую систему.

## 1.2.2 Критерии устойчивости систем целого порядка

В общем случае устойчивость решения определяется чувствительностью к возмущению начальных данных. Если небольшое изменение начальных данных приводит к небольшому изменению решения, то говорят, что решение устойчиво. Более того, если отклонение решения, вызванное возмущением начальных данных, исчезает с ростом  $t \rightarrow \infty$ , то решение называется асимптотически устойчивым.

**Определение 1.5.** [113] Будем говорить что точка состояние равновесия  $x^*$  системы (1.3) является:

- локально устойчива тогда и только тогда  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , такая, что.  $\|x_0 - x^*\| < \delta \implies \|x(t) - x^*\| < \varepsilon \forall t \geq 0$ .
- локально асимптотически устойчива тогда и только тогда устойчива и  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = x^*$ .
- неустойчивым, если он не устойчив..

Устойчивость состояний равновесия системы (1.3) может быть определена по знаку вещественных частей собственных значений матрицы Якобиана, которая является эффективным инструментом для анализа устойчивости состояний равновесия.

**Теорема 1.1.** [113] Предположим, что система (1.3) является линейной системой и  $\lambda_i$  - собственные значения матрицы Якобиана, оцененные в состоянии равновесия  $x^*$ , тогда выполняются следующие критерии:

1. если  $\Re(\lambda_i) \leq 0$  для всех  $\lambda_i$ , то состояние равновесия  $x^*$  устойчиво (в этом случае  $x^*$  является тривиальным аттрактором).
2. если  $\Re(\lambda_i) < 0$  для всех  $\lambda_i$ , то состояние равновесия  $x^*$  асимптотически устойчиво.

<sup>2</sup>Заметим, что для удобства численного моделирования системы с комплексными переменными можно использовать эквивалентную систему с вещественными переменными после вывода соответствующих уравнений для вещественной и мнимой частей (см., например, [55; 110; 111]).

3. если  $\Re(\lambda_i) > 0$  хотя бы для одного  $\lambda_i$ , то состояние равновесия  $x^*$  неустойчиво.

Для нелинейных систем устойчивость часто исследуется в окрестности ее состояний равновесия. Согласно теореме Хартмана-Гробмана [113] существует окрестность состояния равновесия, в которой нелинейная система  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  топологически эквивалентна системе  $\dot{x}(t) = Jx(t)$ , где  $J$  - матрица Якобиана при  $x^*$ , т.е.  $J = Df(x^*)$ .

### 1.2.3 Численные методы решения дифференциальных уравнений целого порядка

Рассмотрим следующую задачу Коши для автономной системы ОДУ:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), & 0 \leq t \leq T \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

где  $f$  - непрерывная функция,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Для численного интегрирования системы (1.4) мы используем метод Рунге-Кутты четвертого порядка, который является одним из наиболее важных численных методов решения дифференциальных уравнений. Этот метод может быть выведен с помощью разложения Тейлора, и этот метод варьируется в зависимости от порядков разложения Тейлора, используемого для получения этого метода.

Формула Рунге-Кутты четвертого порядка с размером шага  $h = \frac{T}{N}$  читается так [114]

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] + O(h^5), \\ k_1 &= f(t_n, x_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t_n + h, x_n + hk_3). \end{aligned} \quad (1.5)$$

**Замечание 1.1.** Отметим, что временной ряд, полученный интегрированием математической динамической системы (1.4) может быть достоверным на ограниченном временном интервале только из-за вычислительных ошибок (вызванных арифметикой конечной точности и численным интегрированием ОДУ). В [115], для хаотического решения системы Лоренца временной интервал надежного вычислений с 16 значащими цифрами и ошибкой  $10^{-4}$  оценивается как  $[0, 36]$ , с ошибкой  $10^{-8}$  оценивается как  $[0, 26]$ , а надежное вычисление для более длинного интервала времени, например,  $[0, 10000]$  в [116], является сложной задачей.

В последнее время быстро развивается множество приложений, описываемых дробным исчислением. Эти математические представления позволяют описывать реальные явления более точно, чем классические целые модели [67; 117]. Основной причиной использования

моделей целого порядка было отсутствие эффективных методов решения дробно дифференциальных уравнений. С практической точки зрения, нам необходимо использовать модели дробного порядка для идентификации и описания некоторых реальных явлений. Первая особенность заключается в том, что модель дробного порядка имеет больше степеней свободы. Вторая особенность заключается в том, что у модели есть "память". Системы целого порядка имеют ограниченную память, а системы дробного порядка имеют неограниченную память [67; 117].

Ниже показана важность дробного исчисления в прикладной науке, представлены основные концепции и численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка.

### 1.3 Системы дробного порядка

Предмет дробного исчисления (исчисление интегралов и производных любого произвольного вещественного или комплексного порядка) приобрел популярность и актуальность за последние три десятилетия благодаря своим приложениям в широком спектре, казалось бы, несопоставимых областей науки и техники. Она предоставляет множество потенциально ценных инструментов для решения дифференциальных и интегральных уравнений и множества других задач, связанных со специальными функциями математической физики и их расширениями и обобщениями в одной или нескольких переменных [57]. По сравнению с классическими моделями целого порядка, производные дробного порядка дают мощный инструмент для описания свойств некоторых процессов [67]. Исследователи отмечают, что многие явления в междисциплинарных областях могут быть описаны дробными дифференциальными уравнениями, например, вязкоупругие системы, биологические модели, квантовая механика, финансы, материаловедение и механика жидкости [118–122].

Далее мы даем небольшой обзор дробного исчисления и завершаем его стандартными определениями дробных производных.

#### Исторический обзор

Дробное исчисление было предложено более 300 лет. Первоначальный вопрос, который привел к названию дробного исчисления, был следующим: Может ли смысл производной целого порядка  $d^n y/dx^n$  быть расширить до значения, когда  $n$  является дробью? Позже вопрос стал: Может ли  $n$  быть любым числом: дробным, иррациональным или комплексным? Лейбниц придумал обозначение  $d^n y/dx^n$ . Возможно, именно наивная игра с символами побудила Лопиталья в 1695 году спросить Лейбница: "что если  $n$  будет  $\frac{1}{2}$ ?". В своем ответе Лейбниц написал Лопиталю следующее: "... Это очевидный парадокс, из которого, однажды будут выведены полезные следствия. ...". Последующие упоминания о дробных производных в том или ином контексте делали многие ученые, например, Эйлер в 1730 году, Лагранж в 1772 году, Лаплас в 1812 году, Лакруа в 1819 году, Фурье в 1822 году, Лиувиль в 1832 году, Риман

в 1847 году, Грир в 1859 году, Хольмгрен в 1865 году, Гринвольд в 1867 году, Летников в 1868 году, Сонин в 1869 году, Лоран в 1884, Некрасов в 1888, Круг в 1890 и Вейль в 1917 [57; 58].

Вкратце, мы изложим некоторые из вкладов этих ученых.

1. С.Ф. Лакруа в 1819 году предложил  $n$ -производную произвольного порядка. Начиная с функции  $y = x^m$ ,  $m$  - целое положительное число, следующим образом:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}, \quad (1.6)$$

используя следующее свойство Гамма-функции,

$$\Gamma(m+1) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)\Gamma(m-n+1),$$

для получения

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, \quad m \geq n \quad (1.7)$$

где Гамма-функция определяется следующим образом:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Лакруа привел пример для  $y = x$  и  $n = \frac{1}{2}$  и получил

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

Интересно отметить, что результат, полученный Лакруа, совпадает с результатом, который дает современное определение дробной производной Римана-Лиувилля.

2. Следующее определение производных с произвольным порядком сделал Ж.Б.Ж. Фурье в 1822 году. Определение дробных производных Фурье было получено из его интегрального представления непрерывной функции следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos p(x-t) dp, \quad (1.8)$$

так как

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos p(x-t) = p^n \cos[p(x-t) + \frac{1}{2}n\pi],$$

где  $n$  - целое число. Заменяя  $n$  на  $\alpha$  ( $\alpha$  произвольное), Фурье получил обобщение

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} p^\alpha \cos[p(x-t) + \frac{1}{2}\alpha\pi]. \quad (1.9)$$

3. В 1832 году Ж. Лиувилль создал первое крупное исследование дробного исчисления. Лиувилль ввел два определения дробной производной. Для первой формулы Лиувилль начал с



производных интегрального порядка от функции  $y = e^{ax}$  следующим образом:

$$D^n y = a^n e^{ax},$$

для произвольного порядка  $\alpha$  приводит к

$$D^\alpha y = a^\alpha e^{ax}. \quad (1.10)$$

Лиувилль предположил, что произвольная производная функции  $f(x)$ , которую можно разложить в ряд вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \quad \operatorname{Re} a_n > 0 \quad (1.11)$$

является

$$D^\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\alpha e^{a_n x}. \quad (1.12)$$

Формула (1.12) известна как первая формула Лиувилля для дробной производной.

Чтобы получить второе определение, Лиувилль начал с определенного интеграла связанного с Гамма-функцией:

$$I = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du, \quad a > 0, \quad x > 0. \quad (1.13)$$

Замена переменной  $t = xu$  дает

$$I = x^{-a} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = x^{-a} \Gamma(a),$$

или

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} I. \quad (1.14)$$

Оперирование с  $D^\alpha$  по обе стороны уравнения (1.14) приводит к

$$D^\alpha x^{-a} = \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a+\alpha-1} e^{-xu} du. \quad (1.15)$$

Второе определение дробной производной Лиувилля можно выразить следующим образом:

$$D^\alpha x^{-a} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(a + \alpha)}{\Gamma(a)} x^{-a-\alpha}. \quad (1.16)$$

Ниже мы приводим общие определения операторов дробной производной.

### Определения дробной производной

Дробное исчисление - это обобщение интегрирования и дифференцирования на нецелый порядок. Интегро-дифференциальный оператор  $D_t^\alpha$  определяется как:

$$D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0; \\ 1, & \alpha = 0; \\ \int_0^t (d\xi)^{-\alpha}, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Существует множество определений дробной производной, среди наиболее важных определений Римана-Лиувилля, Грюнвальда-Летникова и Капуто.

1. Определение Римана-Лиувилля:

Согласно подходу Римана-Лиувилля к дробному исчислению понятие дробного интеграла порядка  $\alpha$ . интеграла порядка  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$  читается как

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t > 0. \quad (1.18)$$

Заметим, что  $J^0 = I$  - оператор идентичности, т.е.  $J^0 f(t) = f(t)$ ,  $J^\alpha J^\mu = J^{\alpha+\mu}$  и  $J^\alpha t^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} t^{\alpha+\mu}$ .

Таким образом, дробная производная Римана-Лиувилля порядка  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$  может быть представлена следующим образом:

$${}^{RL}D^\alpha = {}^{RL}D^n J^{n-\alpha},$$

именно

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{d^n}{dt^n} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \right], & n-1 < \alpha < n; \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n, \end{cases} \quad (1.19)$$

где  $n$  - первое целое число, которое не меньше  $\alpha$ .

2. Определение Грюнвальда-Летникова:

Грюнвальд-Летников дробной производной определяется следующим образом:

$${}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh), \quad (1.20)$$

где  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha-k+1)}$  - обычное обозначение для биномиальных коэффициентов и  $h = \frac{t}{n}$ .

3. Определение дробной производной Капуто:

Дробная производная Капуто может быть записана следующим образом:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 < \alpha < n; \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n. \end{cases} \quad (1.21)$$

Заметим, что определения Римана-Лиувилля, Грюнвальд-Летникова и Капуто эквивалентны при некоторых условиях для широкого класса функций (например, под операторами Римана-Лиувилля, Грюнвальда-Летникова и Капуто можно доказать, что  ${}^{RL}D_t^\alpha t^\nu = {}^{GL}D_t^\alpha t^\nu = {}^C D_t^\alpha t^\nu = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-\alpha)} t^{\nu-\alpha}$ ) [67].

Определение Капуто в литературе иногда называют гладкой дробной производной, поскольку оно сохраняет некоторые ключевые свойства обычного (целого порядка) производного оператора и рассматривает проблемы начального значения, аналогичные случаю целочисленного порядка [67; 123].

Далее в этой диссертации оператор  ${}^C D_t^\alpha$  (или просто  $D_t^\alpha$ ) обозначает дробную производную Капуто.

### 1.3.1 Динамические системы в случае дробного порядка

Рассмотрим следующую задачу Коши для системы дробного порядка;

$$D_t^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (1.22)$$

где  $0 < \alpha < 1$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  (or  $\mathbb{C}^n$ )<sup>3</sup>,  $f$  - непрерывная функция. При условии Липшица функции  $f$  задача (1.22) допускает единственное решение [126].

Отметим, что система дробного порядка (1.22) не определяет динамические системы в обычном смысле, поскольку если  $x(t, x_0)$  представляет собой решение (1.22), то свойство потока  $x_t \circ x_s = x_{t+s}$  не может быть выполнено [127]. Однако, мотивируясь численным расчетом решений, можно принять определение динамических систем целого порядка, которое гласит, что если исходная задача Коши допускает решение, то задача определяет динамическую систему [86; 128].

<sup>3</sup>Для численного интегрирования системы комплекснозначных величин дробного порядка, поскольку оператор дробного дифференциала является линейным оператором, можно использовать эквивалентную систему вещественных величин дробного порядка после выведения соответствующего уравнения для вещественной и мнимой частей [124; 125].

### 1.3.2 Критерии устойчивости систем дробного порядка

Для систем дробного порядка можно сформулировать аналогичные определения устойчивости решений и состояний равновесия системы (1.22), как и для случаев целого порядка [129].

С практической точки зрения, для анализа локальной устойчивости состояний равновесия в системах с дробным порядком мы используем следующую теорему (см., например, [123; 129]).

**Теорема 1.2.** Следующая линейная автономная система:

$$D_t^\alpha x = Ax, \quad x(0) = x_0,$$

с  $0 < \alpha < 1$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$  и  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , является асимптотически устойчивой тогда и только тогда когда  $\varrho = |\arg(\lambda_i(A))| > \alpha\pi/2$  удовлетворяется для всех собственных значений  $\lambda_i$  матрицы  $A$ . Система устойчива тогда и только тогда когда  $\varrho \geq \alpha\pi/2$  с критическими собственными значениями, удовлетворяющими  $\varrho = 0$ , имеющими геометрическую кратность один<sup>4</sup>. В противном случае система неустойчива.

### 1.3.3 Численные методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка

Численное вычисление решений дифференциальных уравнений дробного порядка (fractional-order differential equation, далее - FDE) сложнее, чем в случае целого порядка, поскольку необходимо аппроксимировать интеграл Римана-Лиувилля (1.18), который входит в дробную производную.

В 2002 году Дитхельм и др. предложили один из известных алгоритмов - алгоритм предиктор-корректор Адамса-Башфорта-Моултона [126], который может быть использован как для линейных, так и для нелинейных FDE. В данной диссертации мы применяем этот алгоритм для численного интегрирования.

Рассмотрим следующую задачу Коши для FDE:

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), & 0 \leq t \leq T \\ D_t^k x(0) = x_0^k, & k = 0, 1, 2, \dots, [\alpha] - 1 \end{cases} \quad (1.23)$$

<sup>4</sup>Алгебраическая кратность собственного значения  $\lambda$  матрицы  $A$  - это количество раз, когда  $\lambda$  появляется как корень из  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

Геометрическая кратность собственного значения  $\lambda$  матрицы  $A$  - это размерность собственного пространства, состоящего из всех собственных векторов  $A$ , соответствующих  $\lambda$ .

где  $f$  - непрерывная нелинейная функция, а  $[\alpha]$  - просто значение  $\alpha$ , округленное до ближайшего целого числа.

Система (1.23) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерры

$$x(t) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} x_0^k \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (1.24)$$

Пусть  $h = \frac{T}{N}$ ,  $N \in Z^+$  - число шагов,  $t_n = nh$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ , тогда (1.24) можно записать следующим образом [126]:

$$x_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} x_0^k \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_{n+1}, x_h^p(t_{n+1})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, x_h(t_j)), \quad (1.25)$$

где

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha, & j=0; \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n; \\ 1, & j=n+1, \end{cases} \quad (1.26)$$

$$x_h^p(t_n+1) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} x_0^k \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, x_h(t_j)), \quad (1.27)$$

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha). \quad (1.28)$$

Оценка ошибки составляет  $\max_{j=0,1,\dots,N} |x(t_j) - x_h(t_j)| = O(h^p)$ ,  $p = \min(2, 1 + \alpha)$ .

## Глава 2. Локализация хаотических и гиперхаотических аттракторов в системах целого и дробного порядка

В этой главе исследуется динамика некоторых важных комплекснозначных моделей с целым и дробным порядком, включая комплексную модель Лоренца, комплексную модель Спротта дробного порядка и комплексную модель Рабиновича. Это обусловлено следующими мотивами:

- (1) Многие явления реальной жизни описываются моделями с комплекснозначными (см., например, [55; 110; 111; 130]).
- (2) Полного знания о моделях с комплекснозначными, включая; скрытые аттракторы, синхронизацию и т.д., все еще не хватает.
- (3) В отличие от вещественных моделей, динамика комплекснозначных моделей очень богата. Если вещественнозначная модель хаотична, то соответствующая комплекснозначная модель может быть хаотичной или гиперхаотичной.. Эта особенность может быть полезна при разработке схем безопасной связи (см. Главу 3).

### 2.1 Аналитическое и численное исследование хаотической динамики в комплексной системе Лоренца

В этом разделе, в сравнении с результатами для классической вещественнозначной системы Лоренца (далее – система Лоренца) [20], рассматривается задача аналитической и численной идентификации границы глобальной устойчивости для комплекснозначной системы Лоренца (далее – комплексная система Лоренца). Как и в случае системы Лоренца, для оценки внутренней границы глобальной устойчивости возможность использования математического аппарата функций Ляпунова (а именно, теоремы Барбашина-Красовского и ЛаСалля). Для дополнительного анализа гомоклинических бифуркаций в комплексной системе Лоренца используется специальный аналитический подход Владимирова. Чтобы очертить внешнюю границу глобальной устойчивости и определить так называемую скрытую границу глобальной устойчивости, анализируется возможное рождение скрытых аттракторов и переходных хаотических множеств.

### 2.1.1 Предварительные сведения

В исследовании динамики прикладных систем важную роль играет свойство глобальной устойчивости<sup>1</sup>, когда в системе отсутствуют колебания, а все траектории притягиваются к стационарному множеству. В некоторых случаях свойство глобальной устойчивости может быть установлено аналитически (например, методами типа Ляпунова или частотно-доменными методами, см. [45; 135—137]), и граница глобальной устойчивости может быть построена в пространстве параметров. Пересечение этой аналитической границы может привести к следующим сценариям. После пересечения аналитической границы глобальной устойчивости, система все еще может демонстрировать практически<sup>2</sup> глобальную устойчивость [20], т.е. почти все траектории притягиваются к стационарному множеству, однако в этом случае может возникнуть счетное число орбит, которые, тем не менее, не реализуются на практике и в стандартных численных экспериментах (например, неустойчивые периодические или гомоклинические орбиты [19; 140—145]). С другой стороны, пересечение аналитической границы глобальной устойчивости может привести к потере устойчивости стационарного множества. Тогда, если система диссипативна в смысле Левинсона ([146], см. также [19]), но все стационарные точки неустойчивы, то внутри поглощающего множества можно наблюдать и легко локализовать самовозбуждающийся нетривиальный аттрактор. Наконец, после пересечения границы глобальной устойчивости, стационарное множество может оставаться локально устойчивым (или частично локально устойчивым), но в то же время скрытые колебания (периодические или хаотические) [16; 18; 19; 46; 147] может появиться в фазовом пространстве, бассейны притяжения которого не пересекаются с произвольно малыми открытыми окрестностями состояний равновесия. Эту часть границы глобальной устойчивости, соответственно, можно также назвать "скрытой" [20; 46].

Сначала напомним недавние результаты [20] по аналитическому и численному анализу границы глобальной устойчивости для классической системы Лоренца [10]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x - y), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \quad (2.1)$$

<sup>1</sup>Термин "глобальная стабильность" используется для простоты дальнейшего изложения, в то время как в литературе используются другие понятия, например, "глобально асимптотически устойчивая" [131, стр. 137], [132, стр. 144], [133, стр. 2], [134, стр. 56], "квазиградиентные" [133, стр. 2], [134, стр. 56] и другие, отражающие особенности стационарного множества и сходимости траекторий к нему.

<sup>2</sup>Отметим здесь другое понятие практической устойчивости, предложенное и развитое в [138; 139]. Согласно этому понятию, единственное состояние равновесия возмущенной системы является практически устойчивым, если для всех ограниченных возмущений и всех начальных точек из окрестности  $Q_0$  состояния равновесия, соответствующие траектории остаются внутри большей окрестности  $Q \supset Q_0$  для всех моментов времени; в то же время, состояние равновесия может быть неустойчивым по Ляпунову.

где параметры  $r, \sigma > 0, b \in (0, 4]$ . Здесь, в предварительной части, мы кратко излагаем эти результаты чтобы в дальнейшем сравнить их с результатами для комплексной системы Лоренца.

**1) Диссипативность.** Система Лоренца (2.1) является диссипативной в смысле Левинсона, поскольку имеет поглощающее множество [148]

$$\mathfrak{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2 \leq \frac{b(\sigma+r)^2}{2 \min(1, \sigma, \frac{b}{2})}\}. \quad (2.2)$$

Из этого следует, что все решения (2.1) существуют для  $t \in [0, +\infty)$  и, таким образом, система (2.1) порождает динамическую систему. Для  $0 < r \leq 1$ , стационарное множество системы (2.1) состоит из единственного устойчивого состояния равновесия  $S_0 = (0, 0, 0)$ ; для  $r > 1$  пары симметричных состояний равновесия  $S_{\pm} = (\pm \sqrt{b(r-1)}, \pm \sqrt{b(r-1)}, r-1)$  добавляется к стационарному множеству, и  $S_0$  превращается в седло.

**2) Внутренняя оценка глобальной устойчивости.** Для системы Лоренца (2.1), комбинируя несколько подходов, основанных на построении функций Ляпунова основанных на построении функций Ляпунова [135; 136; 149] можно доказать следующий критерий отсутствия самовозбуждающихся и скрытых колебаний (см. Рис. 2.1a, 2.1b).

**Теорема 2.1.** Если для параметров системы (2.1) один из следующих случаев:

$$2\sigma \leq b, \quad \text{or} \quad \begin{cases} 2\sigma > b, \\ r < r_{gs} = \frac{(\sigma+b)(b+1)}{\sigma}, \end{cases} \quad (2.3)$$

то нет нетривиальных самовозбуждающихся и скрытых колебаний в фазовом пространстве системы (2.1), и любое ее решение  $(x(t), y(t), z(t))$  стремится к стационарному множеству как  $t \rightarrow +\infty$ .

Помимо оценки (2.3) в Теореме 2.1, анализ глобальной устойчивости и рождения нетривиальных аттракторов может быть выполнен численно. Далее известно, что сепаратриса седла  $S_0$  может образовывать гомоклиническую петлю из которого могут возникать неустойчивые циклы, нарушающие глобальную устойчивость Используя принцип Рыбалки [19; 144; 145] для системы Лоренца (2.1) можно доказать следующее:

**Теорема 2.2.** Для  $\sigma$  и  $b$  фиксированных, существует  $r = r_h \in (1, +\infty)$  соответствующая гомоклинической орбите седлового состояния равновесия  $S_0$  тогда и только тогда  $3\sigma > 2b + 1$ .

Например, для классических значений параметров  $\sigma = 10, b = 8/3$  системы (2.1) можно численно найти приближенное значение такой гомоклинической бифуркации  $r_h \approx 13.926$ , когда появляются две симметричные гомоклинические орбиты, образующие гомоклиническую бабочку (см. Рис. 2.1c). Дальнейшее увеличение параметра  $r$  приводит к рождению двух седловых периодических орбит из каждой гомоклинической орбиты [143].



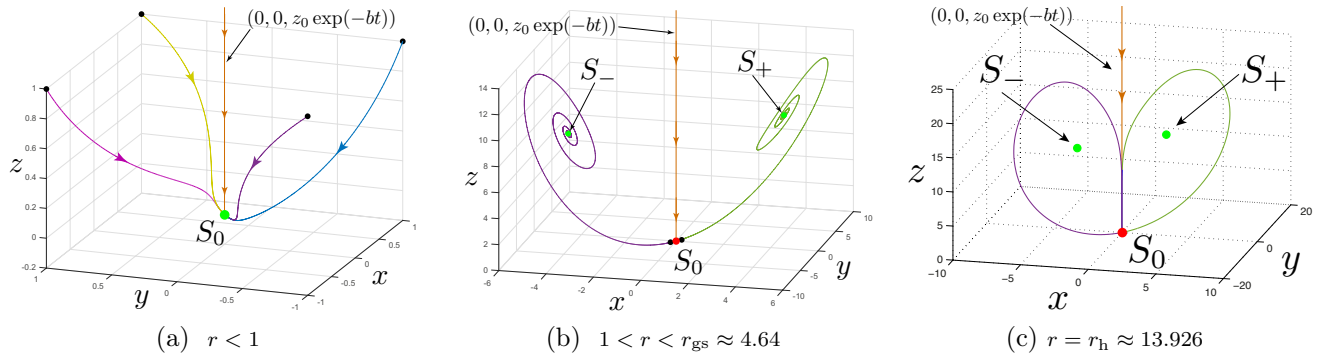


Рисунок 2.1 — Динамика системы Лоренца (2.1) с фиксированными параметрами  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ , когда параметр  $r$  изменяется в соответствии с внутренней оценкой глобальной устойчивости (см. [20]).

**3) Внешняя оценка глобальной устойчивости.** Для систем с глобальным поглощающим множеством и неустойчивым стационарным множеством, существование самовозбуждающихся аттракторов очевидно. С вычислительной точки зрения это позволяет использовать стандартную вычислительную процедуру, в которой после переходного процесса, траектория, начинающаяся из точки неустойчивого многообразия в окрестности состояния равновесия, достигает состояния осцилляции, таким образом, можно легко идентифицировать его.

Система (2.1) обладает поглощающим множеством  $\mathcal{B}$  (см. Ур. (2.2)) и для  $\sigma > b + 1$ ,  $r > r_{cr} = \sigma \left( \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \right)$  все состояния равновесия неустойчивы. Таким образом, в этом случае система (2.1) имеет нетривиальный самовозбуждающийся аттрактор: если рассматривать классические значения параметров  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ , то при  $r > r_{cr}$ , например, при  $r = 28$ , можно наблюдать самовозбуждающийся хаотический аттрактор относительно всех трех состояний равновесия  $S_0, S_{\pm}$ .

(см. Рис. 2.2c).

**4) Граница практической глобальной устойчивости.** Наличие поглощающего множества подразумевает существование глобально аттрактора  $\mathcal{A}_{glob}$ , который содержит все локальные самовозбуждающийся и скрытые аттракторы, а также стационарное множество. Таким образом, внутри множества  $\mathcal{B}$  можно численно исследовать наличие нетривиальных самовозбуждающихся и скрытых аттракторов для параметров  $r, \sigma, b$ , не удовлетворяющих условиям (2.3) глобальной устойчивости, т.е. фиксируя  $\sigma$  и  $b$ , и уменьшая  $r$  от  $r_{cr}$ . Для  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ , это дает нам следующую область  $r \in (r_{gs}, r_{cr})$ , где  $r_{gs} \approx 4.64$ ,  $r_{cr} \approx 24.74$ .

Нетривиальный саморазрушающийся аттрактор можно наблюдать численно для  $24.06 \lesssim r < r_{cr} \approx 24.74$  (см., например, [150]). В этом случае нетривиальная мультиустойчивости, система (2.1) обладает локальным хаотическим аттрактором  $\mathcal{A}$ , который является самовозбуждается относительно состояния равновесия  $S_0$  и сосуществует с тривиальными аттракторами  $S_{\pm}$  (см. Рис. 2.2b).

**5) Скрытый аттрактор или переходное множество?** Для системы Лоренца (2.1) вопрос остается открытым [147, стр. 14], существует ли для некоторых параметров скрытый хао-

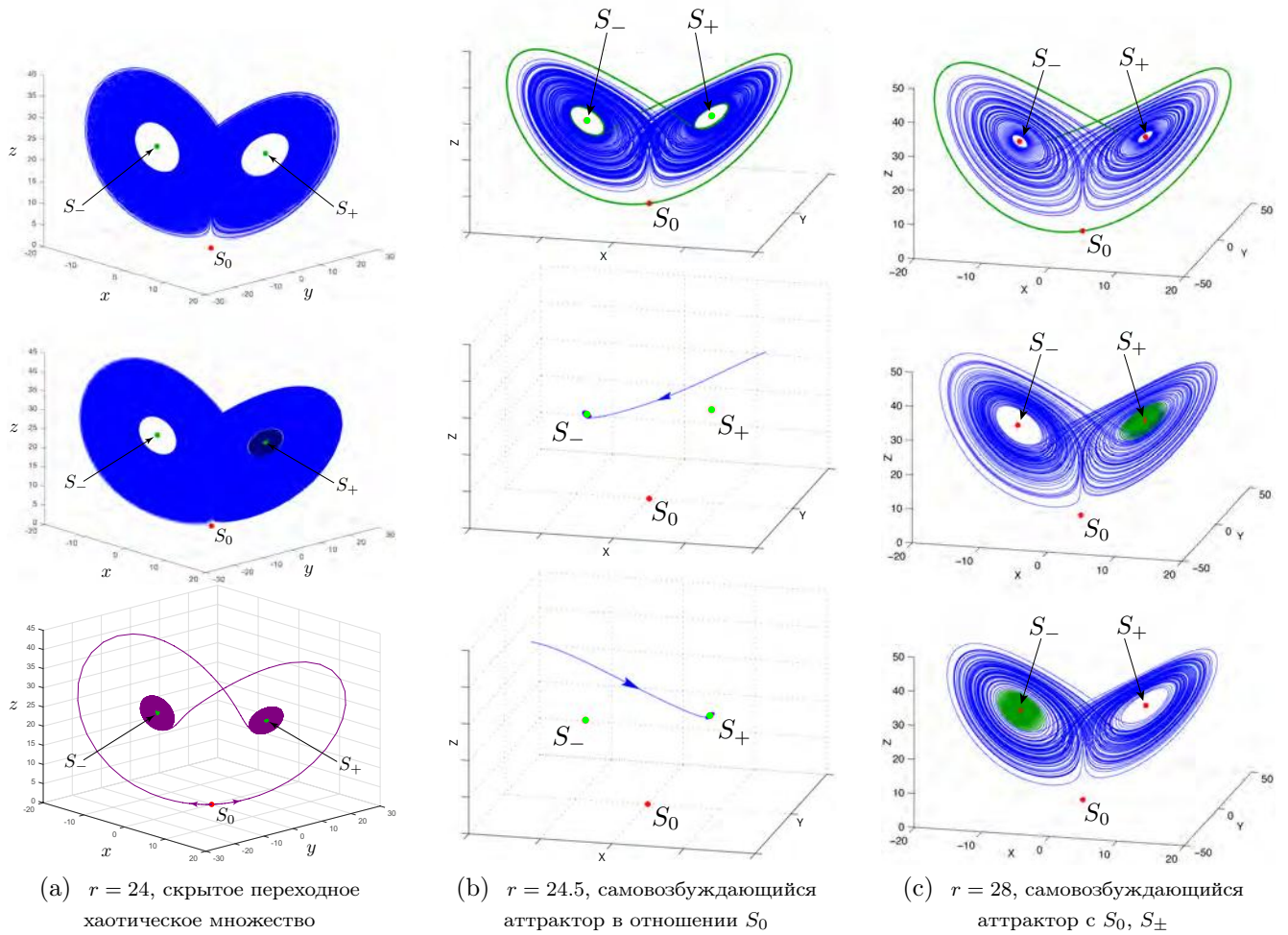


Рисунок 2.2 — Динамика системы Лоренца (2.1) с фиксированными параметрами  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ , когда параметр  $r$  изменяется в соответствии с внешней оценкой глобальной устойчивости (см. [20]).

тический аттрактор, т.е. можно ли изменением параметров отключить бассейн притяжения от состояний равновесия  $S_0, S_{\pm}$  (например, для параметров  $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ : если  $r = 28$ , то аттрактор связан с  $S_0, S_{\pm}$ ; если  $r = 24.5$ , то аттрактор связан только с  $S_0$ ). Современные результаты о существовании скрытых аттракторов в системе Лоренца следующие: Недавно сообщалось о скрытых аттракторах в системе Лоренца с  $r < r_{cr}$  и локально устойчивые состояния равновесия  $S_{\pm}$  оказываются переходным хаотическим множеством (множество в фазовом пространстве, которое может сохраняться долгое время, но в конце концов разрушается), но не устойчивым скрытым хаотическим аттрактором [151; 152].

При численном расчете траектории на конечном интервале времени трудно отличить устойчивый хаос от переходного хаоса [153; 154], поэтому разумно дать аналогичную классификацию для переходных хаотических множеств [48; 155]: переходное хаотическое множество является скрытым, если оно не вовлекает и не притягивает траектории из небольшой окрестности состояний равновесия; в противном случае оно самовозбуждающееся.

Для системы Лоренца (2.1) с параметрами  $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$  фиксировано, вблизи точки  $r \approx 24.06$  можно наблюдать долгоживущий переходный хаотический множество, который скрыт. по-

сколькx его бассейн притяжения не пересекается с малыми окрестностями состояния равновесия  $S_0$  (см. Рис. 2.2а).

В численных экспериментах рассматривается система (2.1) с параметрами  $r = 24$ ,  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ . Используя стандартную процедуру MATLAB ode45 с параметрами по умолчанию (относительный допуск  $10^{-3}$ , абсолютный допуск  $10^{-6}$ ) для траектории системы (2.1) с начальной точкой  $u_0 = (20, 20, 20)$  наблюдается переходное хаотическое поведение на временном интервале  $[0, 1.8 \cdot 10^4]$ , для начальной точки  $u_0 = (-7, 8, 22)$  — на временном интервале  $[0, 7.2 \cdot 10^4]$ , для начальной точки  $u_0 = (2, 2, 2)$  — на временном интервале  $[0, 2.26 \cdot 10^5]$ , и для начальной точки  $u_0 = (0, -0.5, 0.5)$  переходное хаотическое поведение продолжается на временном интервале более  $[0, 10^7]$ . Отметим, что если мы рассмотрим те же начальные точки, но использовать процедуру MATLAB ode45 с относительным допуском  $10^{-6}$ , то для всех этих начальных точек хаотическое переходное поведение будет длиться на временном интервале более  $[0, 10^6]$ , и соответствующие переходные хаотические множества не разрушатся.

## 2.1.2 Комплексная система Лоренца

Классическая система Лоренца (2.1) привлекала и продолжает привлекать большое внимание ученых<sup>3</sup>, однако, это довольно простая математическая модель проблемы гидродинамики, которую первоначально исследовал Э. Лоренц. Более сложная модель многих реальных физических проблем, таких как двухслойная бароклинная неустойчивость со слабой вязкостью и бета-эффектом [54; 110; 156] и лазерная оптика с отстройкой [55; 157], описывается следующей комплексной системой Лоренца:

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} = rX - aY - XZ, \\ \dot{Z} = -bZ + \frac{1}{2}(X^*Y + XY^*), \end{cases} \quad (2.4)$$

где  $X = x_1 + x_2i$ ,  $Y = x_3 + x_4i$  - комплексные переменные,  $Z = x_5$  - вещественные, а " \* " обозначает оператор комплексного сопряжения. Параметры  $\sigma$ ,  $b > 0$  - вещественные,  $r = r_1 + r_2i$  и  $a = 1 - ei$  - комплексные с  $r_1, e \in \mathbb{R}$ .

Отметим, что поскольку преобразование  $X \rightarrow X^*$ ,  $Y \rightarrow Y^*$  меняет только знак  $r_2$  в (2.4), этот параметр может быть выбран положительным [111].

Система (2.4) также является диссипативной в смысле Левинсона, и ограниченное выпуклое поглощающее множество может быть построено согласно следующей теореме [158].

**Теорема 2.3.** Пусть для  $\lambda_0 = \min(1, b, \sigma)$  существует  $\lambda(0, \lambda_0)$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\vartheta$  такие, что

$$\gamma(\sigma - \lambda)(1 - \lambda) - \frac{1}{4} |\sigma + \gamma r - \vartheta|^2 \geq 0. \quad (2.5)$$

<sup>3</sup>Оригинальная знаменитая работа Лоренца [10] набрала более 24000 цитирований по данным Google Scholar.

Определим  $\Gamma = \frac{\vartheta^2(b-2\lambda)^2}{8\lambda\gamma(b-\lambda)}$ ,  $\beta = \frac{\vartheta^2}{\gamma(1+\gamma)} \left( \frac{(b-2\lambda)^2}{4\lambda(b-\lambda)} + 1 \right)$  и следующая функция  $W : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$W(X, Y, Z) = \frac{1}{2} [|X|^2 + \gamma(|Y|^2 + Z^2)] - \vartheta Z.$$

Тогда для любого решения  $(X(t), Y(t), Z(t))$  из (2.4) и любой  $\delta > 0$  с  $T = T(\delta, X(0), Y(0), Z(0))$ , следующие неравенства имеют место для всех  $t \geq T$ :

$$W(X(t), Y(t), Z(t)) \leq \Gamma + \delta, \quad (2.6)$$

и

$$|X(t)|^2 < \beta + \frac{4\delta}{1+\gamma}. \quad (2.7)$$

Таким образом, если условие (2.5) выполняется, то решения системы (2.4) существуют для  $t \in [0, +\infty)$  и, таким образом, система (2.4) порождает динамическую систему и обладает глобальным аттрактором [9] содержащим множество всех состояний равновесия.

Также полезно рассмотреть следующую эквивалентную форму системы (2.4) в терминах вещественных переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  и вещественных параметров  $r_1, r_2, \sigma, b, e$  (см., например, [111]):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_3 - x_1), \\ \dot{x}_2 = \sigma(x_4 - x_2), \\ \dot{x}_3 = r_1 x_1 - r_2 x_2 - x_3 - e x_4 - x_1 x_5, \\ \dot{x}_4 = r_2 x_1 + r_1 x_2 + e x_3 - x_4 - x_2 x_5, \\ \dot{x}_5 = -b x_5 + x_1 x_3 + x_2 x_4. \end{cases} \quad (2.8)$$

Для

$$\text{Im}(r - a) \neq 0, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \text{Im}(r - a) = 0, \\ \text{Re}(r - a) \leq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

система (2.8) имеет единственное состояние равновесия  $S_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ .

Для

$$\begin{cases} \text{Im}(r - a) = 0, \\ \text{Re}(r - a) > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

система (2.8) имеет стационарное множество, содержащее  $S_0$  и целую окружность состояний равновесия, задаваемую выражением:

$$x_1^2 + x_2^2 = b(r_1 - 1), \quad x_1 = x_3, \quad x_2 = x_4, \quad x_5 = r_1 - 1.$$

Эти состояния равновесия могут быть параметризованы следующим образом:

$$S_\theta = (\pm \rho \cos(\theta), \pm \rho \sin(\theta), \pm \rho \cos(\theta), \pm \rho \sin(\theta), r_1 - 1),$$

где  $\rho = \sqrt{b(r_1 - 1)}$  и  $\theta \in [0, 2\pi]$ . В литературе соотношение  $\text{Im}(r - a) = 0$  часто называют "лазерным случаем", поскольку в этом случае система (2.4) описывает динамику некоторых лазеров, например, детандерного лазера [55; 111].

Изложим следующие утверждения о локальной устойчивости стационарного множества системы (2.8) (см., например, [110]).

**Лемма 2.1.** Состояние равновесия  $S_0$  системы (2.8) является устойчивым тогда и только тогда выполняется следующее условие:

$$r_1 < r_{1c}, \quad \text{где} \quad r_{1c} = 1 + \frac{(e+r_2)(e-\sigma r_2)}{(\sigma+1)^2}.$$

**Лемма 2.2.** Состояния равновесия  $S_\theta$  системы (2.8) устойчивы<sup>4</sup> тогда и только тогда выполняется одно из следующих условий:

$$\sigma < b + 1, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sigma > b + 1, \\ 1 < r_1 < r'_{1c} = 1 + \frac{\sqrt{Q_2^2 + 4Q_1Q_3} - Q_2}{2bQ_1}, \end{cases}$$

где

$$Q_1 = (3\sigma + 1)(\sigma - b - 1),$$

$$Q_2 = \gamma_2(b + 2\gamma_2)(-2b\gamma_2 - b\gamma_3 + 2\gamma_2\gamma_3)$$

$$- \gamma_1(b^2 + b\gamma_2 - b\gamma_3 + 2\gamma_2^2 + 2\gamma_2\gamma_3),$$

$$Q_3 = 2\gamma_1\gamma_2 b(b^2 + 2b\gamma_2 + \gamma_1),$$

и  $\gamma_1 = (\sigma + 1)^2 + \left(\frac{2\sigma(e+r_2)}{\sigma+1} - e\right)^2$ ,  $\gamma_2 = \sigma + 1$ ,  $\gamma_3 = 2\sigma$ .

### 2.1.3 Внутренняя оценка устойчивости: глобальная устойчивость и тривиальные аттракторы

Построение комплекснозначных функций Ляпунова, По аналогии с Теоремой 2.1, можно вывести следующий критерий отсутствия самовозбуждающихся и скрытых колебаний в комплексной системе Лоренца (2.4).

**Теорема 2.4.** Если для параметров системы (2.4) выполняется одно из следующих условий:

1)  $|r + 1| < 2$ ,

2)  $4r_1 < -r_2^2$ ,

3)  $2\sigma - b \neq 0$  и условия (2.10) выполняются. Если  $2\sigma - b > 0$ , то для  $\lambda_0 = \min(1, b, \sigma)$ , существуют  $\lambda \in (0, \lambda_0)$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\vartheta$ , такие, что выполняются условие диссипативности (2.5) и следующее неравенство:

$$\frac{\vartheta^2}{\gamma(1+\gamma)} \left( \frac{(b-2\lambda)^2}{4\lambda(b-\lambda)} + 1 \right) < \frac{b^2(\sigma+1)}{2\sigma-b}. \quad (2.11)$$

<sup>4</sup>Можно легко проверить, что собственные значения матрицы Якоби во всех состояниях равновесия  $S_\theta$  являются одинаковы для любого  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Тогда в фазовом пространстве системы (2.4), нет нетривиальных самовозбуждающихся и скрытых колебаний, и любое ее решение  $(X(t), Y(t), Z(t))$  стремится к стационарному множеству как  $t \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Мы рассматриваем следующие случаи:

**Случай 1.** Для  $|r + 1| < 2$  можно проверить, что условия (2.9) выполнены и в этом случае  $S_0$  является единственным состоянием равновесия системы (2.4). Таким образом, отсутствие самовозбуждающихся осцилляций следует из критерия Рута-Гурвица о локальной устойчивости для состояния равновесия  $S_0$ . Отсутствие скрытых осцилляций может быть получено по теореме Барбашина-Красовского (см., например, [45; 135]). и функции Ляпунова, если  $|r + 1| < 2$ , из Теоремы 2.3 для  $\vartheta := 0$  и  $\gamma := \sigma$  мы получаем следующую функцию Ляпунова:

$$V(X, Y, Z) = \frac{1}{2}[|X|^2 + \sigma(|Y|^2 + Z^2)]$$

с  $\lambda_0 = \min(1, b, \sigma)$ ,  $\lambda \in (0, \lambda_0)$ ,  $\delta > 0$  и неравенства  $\sigma(\sigma - \lambda)(1 - \lambda) - \frac{1}{4}\sigma^2 |r + 1|^2 \geq 0$  и  $|X(t)|^2 < \frac{4\delta}{1+\sigma}$  выполняются. Производная  $V$  по системе (2.4) имеет вид [158]:

$$\dot{V}(X, Y, Z) \leq -\lambda[|X|^2 + \sigma|Y|^2] < 0, \quad \forall X, Y, Z \neq 0.$$

Также,  $V(X, Y, Z) \geq 0$ ,  $V(0, 0, 0) = 0$  и  $V(X, Y, Z) \rightarrow \infty$  как  $|X, Y, Z| \rightarrow \infty$ ; таким образом, выполняются все условия теоремы Барбашина-Красовского что означает глобальную устойчивость единственного состояния равновесия  $S_0$ .

**Случай 2.** Для  $4r_1 < -r_2^2$ , условия (2.9) также выполняются и для этого случая мы вводим следующую функцию Ляпунова (см. [111]):

$$V(X, Y, Z) = \frac{1}{2}[D^2|X|^2 + |Y|^2 + Z^2], \quad (2.12)$$

где  $D = \sqrt{\frac{-r_1}{\sigma}}$ . Ясно, что функция Ляпунова (2.12) положительно определена. Перепишем функцию Ляпунова (2.12) в терминах вещественных переменных:

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{2}[D^2(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2]. \quad (2.13)$$

Производная  $V$  по отношению к системе (2.8) читается как:

$$\dot{V} = -\sigma D^2(x_1^2 + x_2^2) - (x_3^2 + x_4^2) - r_2(x_2x_3 - x_1x_4) - bx_5^2. \quad (2.14)$$

Используя следующие масштабные переменные  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$  как:  $x_1 = \frac{u_1}{D\sqrt{\sigma}}$ ,  $x_2 = \frac{u_2}{D\sqrt{\sigma}}$ ,  $x_3 = u_3$ ,  $x_4 = u_4$ ,  $x_5 = \frac{u_5}{\sqrt{b}}$ , мы имеем

$$\dot{V} = -(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2) - 2\Delta(u_2u_3 - u_1u_4), \quad (2.15)$$

где  $\Delta = \frac{r_2}{2D\sqrt{\sigma}}$ .

Преобразование  $u \rightarrow v$ ,  $u = Av$  с

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

приводит к следующему выражению:

$$\dot{V} = -v_1^2 - (1 + \Delta)(v_2^2 + v_3^2) - (1 - \Delta)(v_4^2 + v_5^2).$$

Видно, что из исходного предположения  $4r_1 < -r_2^2$  следует  $\Delta^2 < 1$  и следовательно,  $\dot{V} < 0$ , и все условия теоремы Барбашина-Красовского выполняются. Таким образом, состояние равновесия  $S_0$  является глобально устойчивым.

Как мы обсуждали ранее, если условия (2.9) не выполняются, система (2.4) имеет стационарное множество, содержащее континуум состояний равновесия, т.е. нулевое состояние равновесия  $S_0$  и состояния равновесия  $S_\theta$ . В этом случае теорема Барбашина-Красовского неприменима.

**Случай 3.** Предположим, что условия (2.10) выполнены, тогда отсутствие нетривиальных колебаний (и, таким образом, глобальная устойчивость стационарного множества  $\{S_0, S_\theta\}$ ) может быть продемонстрирована (см., [158]) с помощью принципа ЛаСалля [136]. Для этого рассмотрим следующие преобразования времени и координат:

$$\begin{cases} t \rightarrow \tau, & \psi : (X, Y, Z) \rightarrow (\chi, \eta, \xi), \\ \tau = \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} t, & \chi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\sigma}} X, \quad \eta = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}} (Y - X), \\ \xi = \varepsilon^2 (Z - \frac{|X|^2}{b}), & \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{r-a}} > 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Система (2.4) преобразуется в следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{\chi} = \frac{d\chi}{d\tau} = \eta, \\ \dot{\eta} = \frac{d\eta}{d\tau} = -\varrho\eta - \xi\chi - \varphi(\chi), \\ \dot{\xi} = \frac{d\xi}{d\tau} = -\kappa\xi - \frac{\Lambda}{2}(\chi^*\eta + \chi\eta^*), \end{cases} \quad (2.17)$$

где  $\varrho = \frac{\varepsilon(a+\sigma)}{\sqrt{\sigma}}$ ,  $\varphi(\chi) = -\chi + \Theta\chi|\chi|^2$ ,  $\Theta = \frac{2\sigma}{b}$ ,  $\kappa = \frac{\varepsilon b}{\sqrt{\sigma}}$ ,  $\Lambda = \frac{2}{b}(2\sigma - b)$ . Здесь переменные  $\chi$  и  $\eta$  являются комплексными, а  $\xi$  - вещественными. Новые параметры  $\Theta$ ,  $\kappa$  и  $\Lambda$  вещественные с  $\Theta > 0$ ,  $\kappa > 0$ , а  $\varrho$  комплексный. Рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$V(\chi, \eta, \xi) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{|\Lambda|} \xi^2 + |\eta|^2 - |\chi|^2 + \frac{\Theta}{2} |\chi|^4 \right]. \quad (2.18)$$

Заметим, что принцип ЛаСалля требует компактности множества, где функция Ляпунова  $V$  определена, чтобы показать ее ограниченность снизу. В нашем случае можно показать, что неравенство  $V(\chi, \eta, \xi) > -\frac{1}{4\Theta}$  справедливо для любого  $(\chi, \eta, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ .

Из соотношения  $\dot{V}(\chi, \eta, \xi) = 0$ , следует, что наибольшее инвариантное множество

$$M \subset \{(\chi, \eta, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid \dot{V}(\chi, \eta, \xi) = 0\}$$

состоит из состояний равновесия системы (2.17).

Производная функции  $V$  относительно системы (2.17) имеет вид:

$$\dot{V}(\chi, \eta, \xi) = -\frac{\kappa}{|\Lambda|} \xi^2 - \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(\Lambda) + 1)\chi\xi\eta^* - \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(\Lambda) + 1)\chi^*\xi\eta - \operatorname{Re} \varrho |\eta|^2. \quad (2.19)$$

Последнее, что необходимо проверить, это то, что  $\dot{V}(\chi, \eta, \xi) \leq 0$ ,  $\forall \chi, \eta \in \mathbb{C}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим два случая.

**3.1.** Если  $\Lambda = 2\sigma - b > 0$ , то следуя [158] и используя Теорему 2.3, существует  $\epsilon > 0$  такое, что для любого решения  $(\chi(\tau), \eta(\tau), \xi(\tau))$  из (2.17) при  $t_0 = t_0(\chi(0), \eta(0), \xi(0))$  выполняется следующее неравенство:

$$|\chi(t)|^2 \leq \frac{\kappa}{\Lambda} \operatorname{Re} \varrho - \epsilon, \quad (2.20)$$

существует для всех  $t \geq t_0$ .

Из соотношений (2.16) имеем  $X(t) = \frac{\sqrt{2\sigma}}{\epsilon} \chi(t)$ , и принимая во внимание (2.7), получаем:

$$|X(t)|^2 < \frac{\epsilon^2 \beta}{2\sigma} + \frac{2\delta \epsilon^2}{\sigma(1+\gamma)} \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.21)$$

Легко проверить, что условие (2.11) с (2.21) и используя следующую константу из Теоремы 2.3:

$$\vartheta = \frac{\pm 2\sqrt{2\gamma\lambda(2\sigma-b)(b-\lambda)[b^2\sigma(\gamma+1)(\sigma+1)+\epsilon(b-2\sigma)(\sigma(\gamma+1)+2\epsilon\delta]}}{\epsilon b(2\sigma-b)},$$

подразумевает (2.20).

Если  $\Lambda > 0$ , то выражение (2.19) читается следующим образом:

$$\dot{V}(\chi, \eta, \xi) = -\frac{\kappa}{|\Lambda|} \xi^2 - \chi\xi\eta^* - \chi^*\xi\eta - \operatorname{Re} \varrho |\eta|^2. \quad (2.22)$$

Поскольку  $\kappa > 0$  и  $\operatorname{Re} \varrho = \frac{\epsilon(1+\sigma)}{\sqrt{\sigma}} > 0$  (см. соотношение (2.20)), Ур. (2.22) может быть записано следующим образом:

$$\dot{V}(\chi, \eta, \xi) \leq -\delta_1(\xi^2 + |\eta|^2) \leq 0, \quad \delta_1 > 0. \quad (2.23)$$

**3.2.** Если  $\Lambda < 0$ , то смешанные произведения в (2.19) не появляются. Следовательно, выражение (2.19) можно сразу записать в виде (2.23).

Тогда, согласно принципу ЛаСалля, любое решение системы (2.17) (и, следовательно, система (2.4)) стремится к состоянию равновесия, при  $\tau \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Замечание 2.1.** Для некоторых значений параметров комплексной системы Лоренца (2.4), можно найти аналогичные условия на глобальную устойчивость, как и для системы Лорен-



ца (2.1). Например, если  $|r + 1| < 2$ , то  $S_0$  система (2.4) глобально устойчива, и выбирая  $r_2 = 0$ , получаем  $r_1 < 1$ , что соответствует условию глобальной устойчивости нулевого состояния равновесия системы (2.1) (см. Теорему 2.1).

**Замечание 2.2.** В частном случае, когда  $r_2 = e = 0$ , остальные параметры в комплексной системе Лоренца (2.4) совпадают с параметрами вещественной системы (2.1). Однако мы не можем строго вывести условие глобальной устойчивости стационарного множества  $\{S_0, S_{\pm}\}$  системы Лоренца (2.1) из условий Теоремы 2.4. Это объясняется различным поведением этих двух систем в данном случае. Комплексная система Лоренца (2.4) по-прежнему имеет континуум состояний равновесия  $S_{\theta}$  в своем фазовом пространстве, в то время как вещественная имеет только два симметричных состояния равновесия  $S_{\pm}$ . Отметим, что для комплексной системы Лоренца (2.4) когда  $2\sigma \neq b$ , мы можем применить только принцип ЛаСалля, и при этом невозможно применить подход Леонова [159–161]. В то время как для вещественной системы Лоренца (2.1), если  $2\sigma < b$ , мы можем использовать принцип ЛаСалля, а если  $2\sigma > b$ , то можно применить подход Леонова [20]. Также можно доказать глобальную устойчивость, когда в системе (2.1) у нас есть  $2\sigma = b$  [20; 149].

Заметим также, что если в третьем условии Теоремы 2.4 мы берем параметры  $\lambda, \gamma, \vartheta$  следующим образом:  $\gamma = \sigma$ ,  $\vartheta = \sigma + \sigma r_1 - 2\sigma\sqrt{r_1}$ ,  $\lambda \in (0, b)$  при  $b \in (0, 1]$ , тогда получаем следующие соотношения между условиями глобальной устойчивости для систем (2.1) и (2.4):

$$\begin{aligned} r < r_{gs} &= \frac{(\sigma+b)(1+b)}{\sigma} \quad \text{для системы (2.1),} \\ r_1 < r_{1gs} &= \frac{(\sigma-\lambda)(1-\lambda)}{\sigma} \quad \text{для системы (2.4).} \end{aligned}$$

Случай, соответствующий условию 3) теоремы 2.4, когда все траектории стремятся к стационарному множеству, однако, не все состояния равновесия стационарного множества локально устойчивы, показано на Рис. 2.3.

**Замечание 2.3.** Одно из существенных различий между комплексным Лоренцем (2.4) и вещественной является следующее: в случае, когда  $S_0$  является единственным состоянием равновесия системы (2.4), может существовать нетривиальный аттрактор, который является устойчивым предельным циклом или даже тором (см. Рис. 2.4).

Вне условий Теоремы 2.4, анализ глобальной устойчивости и рождения нетривиальных аттракторов в системе (2.4) может быть проведен численно. Для удобства этого анализа используются дополнительные преобразования учитывающие структуру комплексной системы, могут оказаться полезными [162; 163]. Например, в [164; 165], Владимиров и др. ввели следующее преобразование для системы (2.4). Если условия:

$$2\sigma > b, \quad \sigma(r_1 - 1) - \frac{e^2}{4} \equiv \eta > 0 \quad (2.24)$$

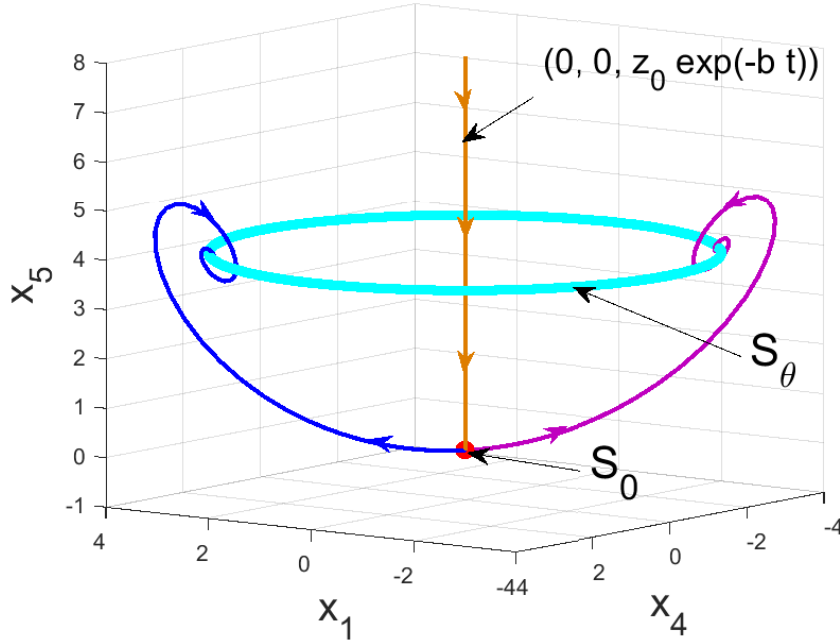


Рисунок 2.3 — Отсутствие самовозбуждающихся и скрытых аттракторов и глобальная устойчивость стационарного множества  $\{S_0, S_\theta\}$  в системе (2.8) с параметрами  $\sigma = 4$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = -e = 0.001$ ,  $b = 4$ . Траектории (синий, фиолетовый) в малой окрестности неустойчивого состояния равновесия  $S_0$  стремятся к устойчивому множеству состояний равновесия  $S_\theta$  (тривиальные аттракторы).

удовлетворяются, то с помощью преобразований времени и координат:

$$\begin{cases} t \rightarrow t', & \psi : (X, Y, Z) \rightarrow (X', Y', Z'), \\ t' = \sqrt{\eta}t, & X' = \eta^{-3/4} \delta X, \quad Y' = \eta^{-5/4} \sigma \delta [Y - (1 + i\delta/2\sigma)X], \\ Z' = \eta^{-1} \sigma (Z - XX^*/2), & \delta = \exp(iet/2) [(2\sigma - b)/2]^{1/2}, \end{cases} \quad (2.25)$$

можно переписать систему (2.4) в виде:

$$\begin{cases} \frac{dX'}{dt'} = Y', \\ \frac{dY'}{dt'} = (1 + i\kappa)X' - \mu Y' - X'Z' - \varrho X'|X'|^2, \\ \frac{dZ'}{dt'} = -\beta Z' + |X'|^2, \end{cases} \quad (2.26)$$

где  $\kappa = \frac{(2\sigma r_2 + e(\sigma - 1))}{2\eta}$ ,  $\mu = \frac{1 + \sigma}{\sqrt{\eta}}$ ,  $\varrho = \frac{\sqrt{\eta}}{2\sigma - b}$ ,  $\beta = \frac{b}{\sqrt{\eta}}$ . Поскольку преобразование (2.25) непрерывно и инвертируемо, то оно является диффеоморфизмом, и динамическое поведение систем (2.4) и (2.26) топологически эквивалентны [164; 165]. Далее, введем следующие вещественные переменные  $\xi', v', w', Z'$ :

$$\xi' = (|X'|^2 - |Y'|^2)/2, \quad v' + iw' = X'^* Y'. \quad (2.27)$$

Выражение (2.27) определяет проекционное отображение:  $\Pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}$ . Это отображение проецирует все состояния  $(X', Y', Z')$  в фазовое пространство  $\mathcal{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  системы (2.26) (и системы (2.4)), которые инвариантны относительно общего фазового фактора  $\psi$  в  $X'$  и

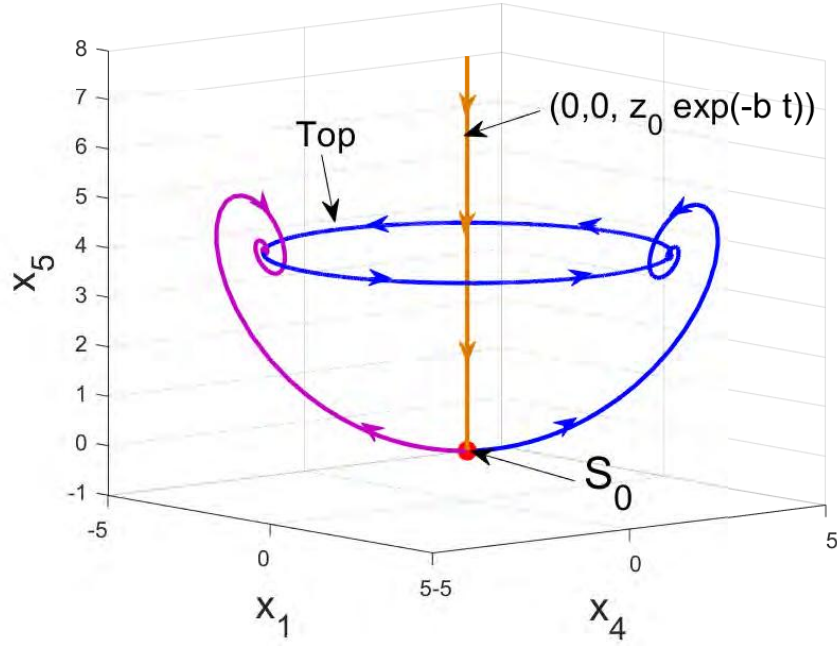


Рисунок 2.4 — Сосуществование нетривиального притягивающего тора и неустойчивого состояния равновесия  $S_0$  в системе (2.8) с параметрами  $\sigma = 4, r_1 = 5, r_2 = 0.002, e = -0.001, b = 4$ . Траектории (синий, фиолетовый) в малых окрестностях неустойчивого состояния равновесия  $S_0$  притягиваются к тору (нетривиальные аттракторы).

$Y'$ , т.е.

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X' \exp(i\psi) \\ Y' \exp(i\psi) \\ Z' \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

в одну и ту же точку  $(\xi', v', w', Z')$  в  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^4$ . Действительно, если  $X'' = X' \exp(i\psi)$  и  $Y'' = Y' \exp(i\psi)$ , то

$$\begin{aligned} \xi'' &= (|X''|^2 - |Y''|^2)/2 = (|\exp(i\psi)|^2[|X'|^2 - |Y'|^2])/2 \\ &= ((\cos^2(\psi) + \sin^2(\psi))[|X'|^2 - |Y'|^2])/2 \\ &= (|X'|^2 - |Y'|^2)/2 = \xi', \\ v'' + iw'' &= X''^* Y'' = X'^* \exp(-i\psi) Y' \exp(i\psi) \\ &= X'^* Y' = v' + iw'. \end{aligned}$$

Как упоминалось в [164; 165], множество точек в  $\mathcal{H}$ , соответствующих одной и той же точке в  $\mathcal{P}$  в геометрии называется "лучом", и пространство  $\mathcal{P}$  называется "пространством лучей".

Производная выражений (2.27) относительно динамики системы (2.26) приводит к следующим уравнениям движения в проективном пространстве  $(\xi', v', w', Z') \in \mathcal{P}$ :

$$\begin{cases} \dot{\xi}' = v' + \mu(R - \xi') - \kappa w' - v'(1 - Z' - \varrho(R + \xi')), \\ \dot{v}' = -\mu v' + R - \xi' + (R + \xi')(1 - Z' - \varrho(R + \xi')), \\ \dot{w}' = -\mu w' + \kappa(R + \xi'), \\ \dot{Z}' = -\beta Z' + R + \xi', \end{cases} \quad (2.29)$$

где  $R$  удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} R &= (\xi'^2 + v'^2 + w'^2)^{\frac{1}{2}} = (|X'|^2 + |Y'|^2)/2, \\ R + \xi &= |X'|^2, \quad R - \xi = |Y'|^2. \end{aligned}$$

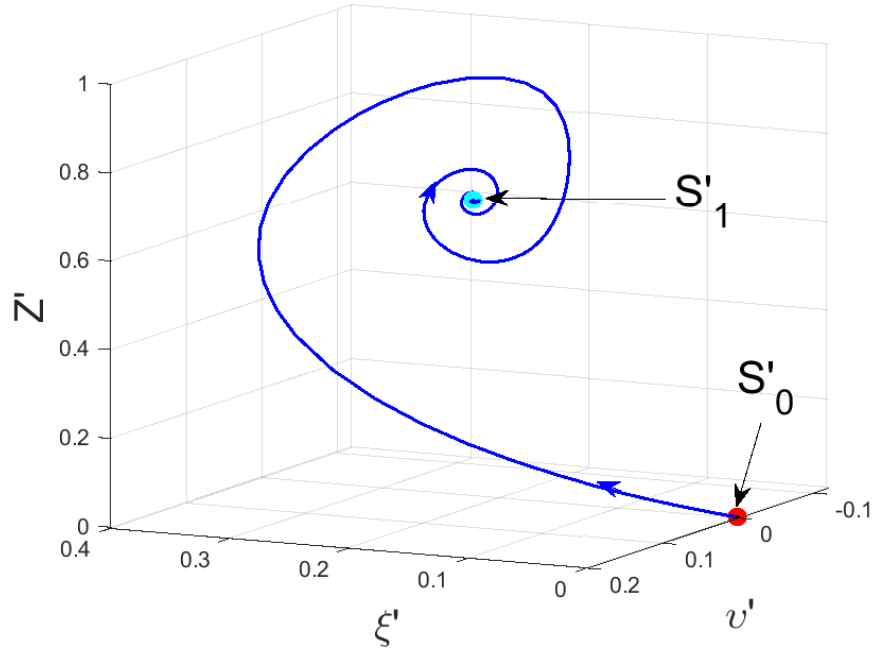


Рисунок 2.5 — Глобальная устойчивость стационарного множества  $\{S'_0, S'_1\}$  в проективной системе (2.29) с параметрами  $\sigma = 4$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = -e = 0.001$ ,  $b = 4$ .

Используя проективную систему (2.29) удобно изучать и визуализировать динамику исходной системы (2.4). Например, можно продемонстрировать наличие глобальной устойчивости, когда выполняются условия теоремы (2.4) и условие (2.24) выполняются. Принимая те же значения параметров  $\sigma = 4$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 0.001$ ,  $e = -0.001$ ,  $b = 5$ , рассмотренные для системы (2.4) (см. Рис. 2.3), получается такое же качественное поведение в фазовом пространстве системы (2.29) (см. Рис. 2.5).

Как и в классической системе Лоренца (2.1), для комплексной системы Лоренца (2.4) также известно, что сепаратриса седла  $S_0$  может образовать гомоклинический цикл, из которого могут возникнуть неустойчивые циклы и нарушить глобальную устойчивость (однако,

множество меры ноль не влияет на глобальное притяжение на стационарном множестве с практической точки зрения). Следующая теорема обеспечивает необходимое условие для существования гомоклинических орбит в комплексной системе Лоренца (2.4) (см. [164–166]):

**Теорема 2.5.** Если удовлетворяются условия (2.24) то необходимое условие для наличия гомоклинической орбиты седлового состояния равновесия  $S_0$  следующее:

$$r_2 = \frac{e(1-\sigma)}{2\sigma}. \quad (2.30)$$

**Следствие 2.1.** Для ”лазерного случая”, т.е. когда  $e = -r_2$ , гомоклиническая орбита может быть получена только в том случае, если  $e = r_2 = 0$ .

Доказать условие (2.30), Владимиров и др. рассмотрели проективную систему (2.29), поскольку в отличие от системы (2.4), она имеет одномерное неустойчивое многообразие. Проекция неустойчивого многообразия  $W^u$  и устойчивого многообразия  $W^s$  в пространстве  $\mathcal{P}$ , т.е.  $\Pi(W^u)$  и  $\Pi(W^s)$ , могут пересекаться только вдоль оси  $Z'$  и возможная гомоклиническая орбита существует только в том случае, если  $\kappa = 0$ , что совпадает с условием (2.30).

Для параметров  $\sigma = 10$ ,  $r_2 = 4.5 \times 10^{-4}$ ,  $e = -0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$  системы (2.4), условие (2.30) выполняется. В этом случае система (2.4) имеет единственное состояние равновесия  $S_0$  (так как  $e \neq -r_2$ ), и можно найти численно приближенное значение такой гомоклинической бифуркации  $r_{1h} \approx 13.9$ , когда появляются две симметричные гомоклинические орбиты, образуя гомоклиническую бабочку (см. Рис. 2.6). Дальнейшее увеличение параметра  $r_1$  приводит к рождению двух периодических седловых орбит из каждой гомоклинической орбиты. Для параметров  $\sigma = 10$ ,  $r_2 = 0$ ,  $e = 0$ ,  $b = \frac{8}{3}$ , условие (2.30) выполняется и система (2.4) имеет следующие состояния равновесия:  $S_0, S_\theta$  (так как  $e = -r_2$ ), с  $r_{1h} \approx 13.9$ , система (2.4) имеет гомоклинические орбиты (см. Рис. 2.7).

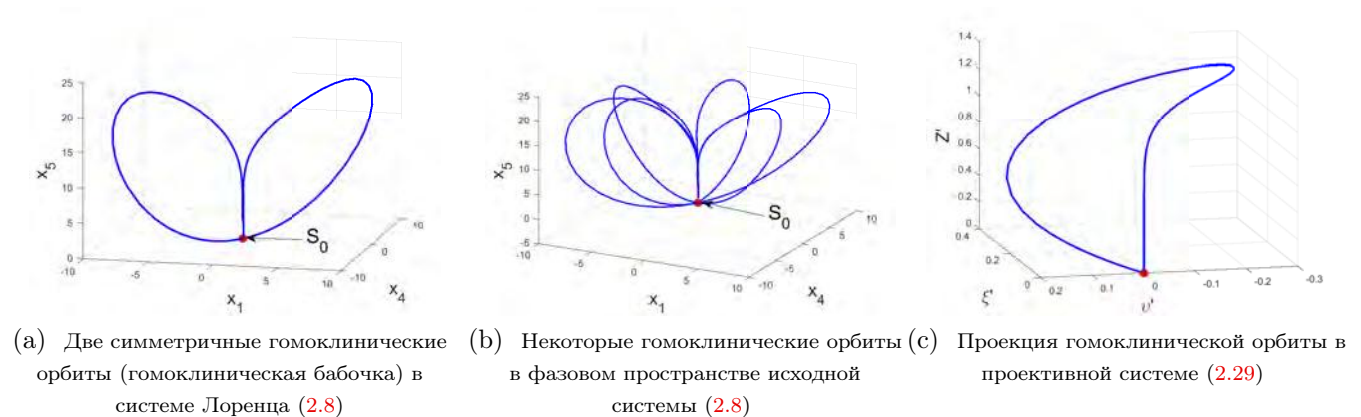


Рисунок 2.6 — Визуализация гомоклинических орбит с  $\sigma = 10$ ,  $r_2 = 4.5 \times 10^{-4}$ ,  $e = -0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$  и  $r_{1h} \approx 13.9$ .

Наконец, упомянем о действии проекционного отображения  $\Pi$  на различные аттракторы в пространстве  $\mathcal{H}$ . Другими словами, предварительные образы различных аттракторов в оригинальном пространстве  $\mathcal{H}$  и соответствующие образы в проекционном пространстве

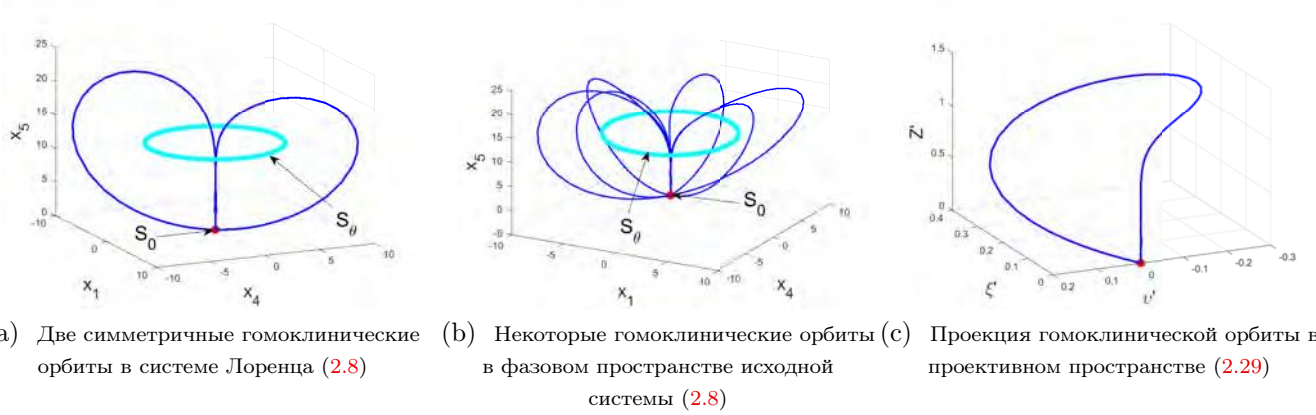


Рисунок 2.7 — Визуализация гомоклинических орбит с  $\sigma = 10, r_2 = 0, e = 0, b = \frac{8}{3}$  и  $r_{1h} \approx 13.9$ .

$\mathcal{P}$ . Основываясь на некоторых геометрических свойствах отображения  $\Pi$ , в [164; 165] обсуждается, что каждое предельное множество в  $\mathcal{H}/Z$  может быть представлено локально (в окрестности данного луча) прямым произведением множества в  $\mathcal{P}/Z$  и луча, т.е. множеством  $\mathbb{R}^1$ . Здесь мы исключаем множества точек  $Z$  на осях  $Z'$  в фазовых пространствах  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{P}$ , которые инвариантны относительно систем (2.26) и (2.29), соответственно. Более того, тройка  $(\mathcal{H}/Z, \mathcal{P}/Z, \Pi)$  образует пучок волокон (см., например, [167]),  $\Pi$  является непрерывным отображением и, таким образом, отображает соединенные/компактные множества в соединенные/компактные множества.

Чтобы проиллюстрировать это утверждение, давайте перечислим следующие различные типы аттракторов:

- (1) Для нулевого состояния равновесия  $S_0$  системы (2.26):  $\Pi(S_0) = S'_0$ , где  $S'_0 = (0,0,0,0,0)$  это нулевого состояния равновесия проективной системы (2.29);
- (2) Для окружности состояний равновесия  $S_\theta$  системы (2.26):  $\Pi(S_\theta) = S'_1$ , где  $S'_1$  это состояние равновесия системы (2.29);
- (3) Для предельного цикла системы (2.26) образ является состоянием равновесия  $S'_1$  системы (2.29) в  $\mathcal{P}$ ;
- (4) Для тора системы (2.26) образ является предельным циклом системы (2.29) в  $\mathcal{P}$ ;
- (5) Для одной гомоклинической орбиты проективной системы (2.29) существует (в качестве предызображения отображения  $\Pi$ ) континуум гомоклинических орбит в оригинальном пространстве  $\mathcal{H}$ , отличающихся только общей фазой согласно по (2.28);
- (6) Для хаотического аттрактора проективной системы (2.29) в  $\mathcal{P}$  имеется (в качестве предызображения) хаотический аттрактор в  $\mathcal{H}$ ;
- (7) Для переходного хаотического множества проективной системы (2.29) в  $\mathcal{P}$ , которое коллапсирует, сталкиваясь с устойчивыми состояниями равновесия или устойчивым предельным циклом, существует (в качестве предызображения) переходное хаотическое множество которое через некоторое время приближается в конечном счете к окружности состояний равновесия  $S_\theta$  или тору, соответственно.

Подводя итог написанному выше, далее в наших экспериментах мы будем исследовать появление аттракторов в проективной системе (2.29), которая имеет 1-мерное неустойчивое многообразие нулевого седлового состояния равновесия  $S'_0$  и использовать отображение (2.27) для получения соответствующих предызображений обнаруженных аттракторов в оригинале системе (2.4).

### 2.1.4 Внешняя оценка устойчивости: отсутствие тривиальных аттракторов

Система (2.4) обладает поглощающим множеством (определяется по уравнению (2.6)) и для  $\sigma > b + 1$ ,  $r_1 > \max\{r_{1c}, r'_{1c}\}$  (см. леммы 2.1 и 2.2) все состояния равновесия неустойчивы. Далее, в этой работе для системы (2.1) (и (2.8)) мы будем фиксировать классические значения параметров  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  вещественной модели Лоренца (2.1) и, следуя "лазерному случаю", зададим два дополнительных параметра:  $r_2 = -e = 0.001$ . Например, когда  $r_1 = 28 > r'_{1c}$ , можно наблюдать самовозбуждающийся хаотический аттрактор относительно всех состояний равновесия стационарного множества (см. Рис. 2.8). Это дает внешнюю оценку границы практической глобальной устойчивости.

### 2.1.5 Граница практической устойчивости и отсутствие нетривиальных аттракторов

Внутри поглощающего множества можно численно исследовать наличие нетривиальных самовозбуждающихся и скрытых аттракторов для параметров  $r_1, \sigma, r_2, b$ , не удовлетворяющих условиям (2.11) глобальной устойчивости, т.е. фиксируя  $\sigma, r_2, b$  и уменьшая  $r_1$  от  $r'_{1c}$ . Для  $\sigma = 10$ ,  $r_2 = 0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$  это дает нам следующую область  $r_1 \in (r_{1gs}, r'_{1c})$ , где  $r_{1gs} \approx 1.96$  и  $r'_{1c} \approx 24.73$ .

Нетривиальный самовозбуждающийся аттрактор можно наблюдать численно для  $24.09 \lesssim r_1 < r'_{1c} \approx 24.73$ . В этом случае нетривиальной мультиустойчивости, система (2.8) обладает локальным хаотическим аттрактором  $\mathcal{A}$ , который является самовозбуждающимся относительно состояния равновесия  $S_0$  и сосуществует с множеством тривиальных аттракторов  $S_\theta$  (см. Рис. 2.9).

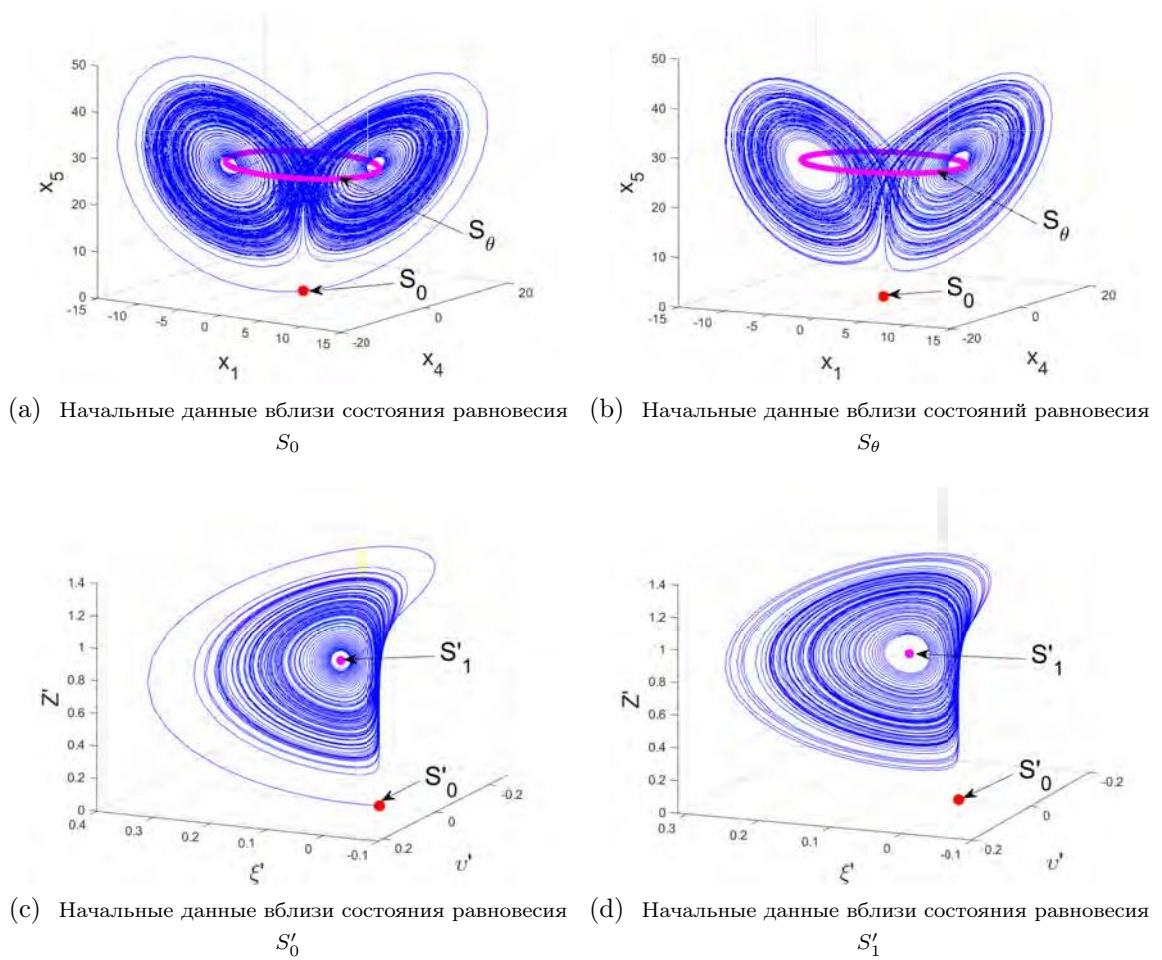


Рисунок 2.8 — (a), (b) Численная визуализация самовозбуждающегося хаотического аттрактора в системе (2.8) с  $r_1 = 28$ ,  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ ,  $r_2 = -e = 0.001$  интегрируя траектории с начальными данными из небольших окрестностей неустойчивых состояний равновесия  $S_0$ ,  $S_\theta$ ; (c), (d) Соответствующие изображения в проективном пространстве  $\mathcal{P}$ .

### 2.1.6 Скрытый аттрактор или скрытое переходное множество?

Как мы обсуждали выше на примере классической модели Лоренца (2.1), для системы, обладающей переходным хаотическим множеством, время переходного процесса сильно зависит от выбора начальных данных в фазовом пространстве, а также от параметров численных решателей для интегрирования траектории (например, порядок метода, шаг интегрирования, относительные и абсолютные допуски)[20]. Это усложняет задачу отличия переходного хаотического множества от постоянного хаотического множества (аттрактора) в численных экспериментах.

Рассмотрим систему (2.29), которая представляет собой комплексную систему Лоренца (2.4) в проективном пространстве  $\mathcal{P}$ , с  $r_1 = 23.5$ ,  $r_1 = 23.6$  и  $r_1 = 23.7$ . Для траектории с определенной начальной точкой, которая вычисляется определенным решателем с определенными параметрами, мы оцениваем момент окончания переходного поведения как момент,



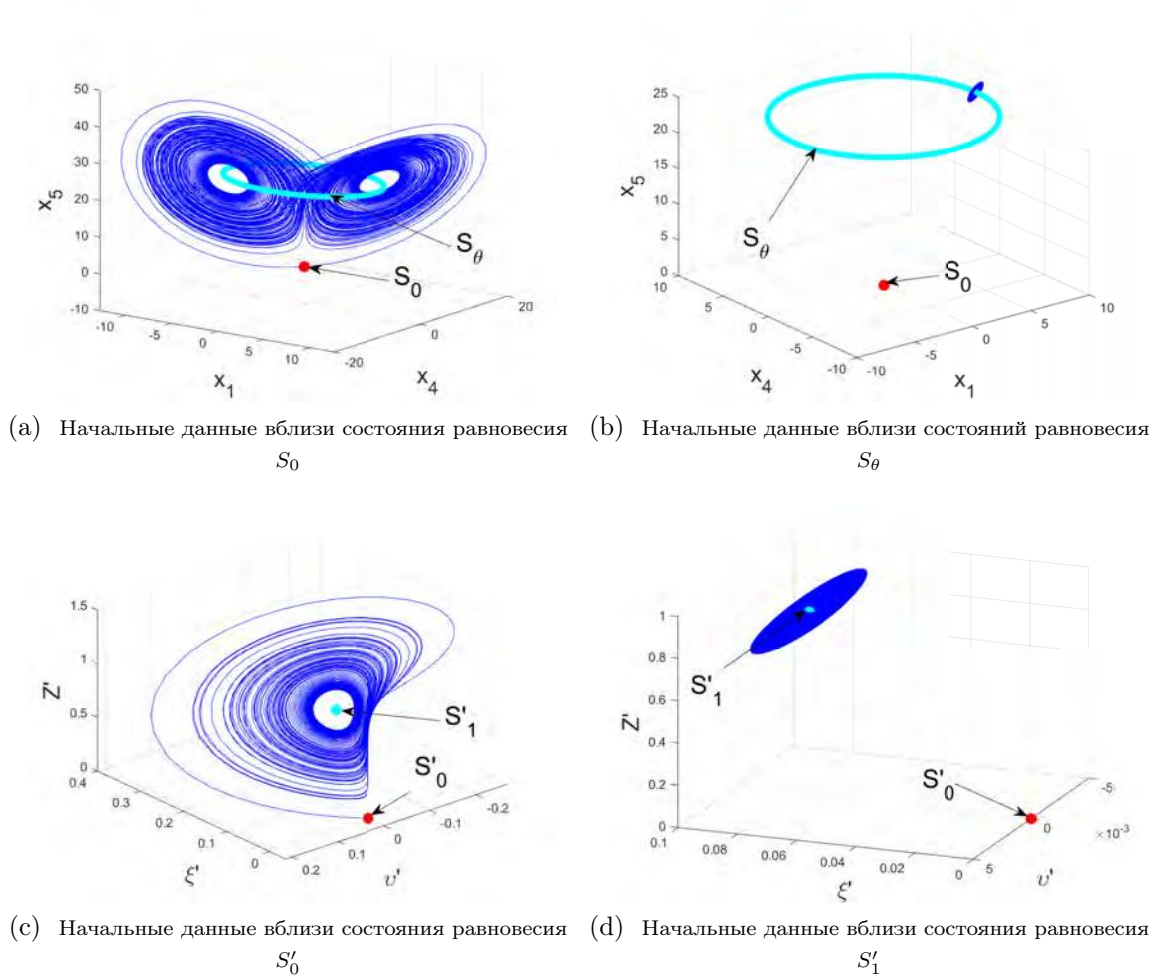


Рисунок 2.9 — (а), (б) Численная визуализация самовозбуждающегося локального хаотического аттрактора системе (2.8) с  $r_1 = 24.6$ ,  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ ,  $r_2 = -e = 0.001$  по траектории, начинающейся в окрестности неустойчивого состояния равновесия  $S_0$ . Этот аттрактор сосуществует со устойчивым множеством состояний равновесия  $S_\theta$ ; (с), (д) Соответствующие изображения в проективном пространстве  $\mathcal{P}$ .

когда траектория попадает в малой окрестности устойчивого состояния равновесия  $S'_1$ . Используя стандартную процедуру MATLAB `ode45` с параметрами по умолчанию параметрами (относительный допуск  $10^{-3}$ , абсолютный допуск  $10^{-6}$ ) для системы (2.29) с параметрами  $r_1 = 23.5$ ,  $\sigma = 10$ ,  $r_2 = -e = 0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$  и для начальной точки  $u_0 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$ , переходное хаотическое поведение наблюдается на временном интервале  $[0, 1.78 \times 10^4]$ , для начальной точки  $u_0 = (0.4, 0.4, -0.3, 0.5)$  — на временном интервале  $[0, 2.7 \times 10^4]$  и для начальной точки  $u_0 = (0.4, 0.4, 0.4, 0.4, 0.4)$  — на временном интервале  $[0, 4.6 \times 10^4]$ . Если мы немного изменим параметр бифуркации  $r_1$ , приняв  $r_1 = 23.6$  и оставив все остальные параметры прежними, и выбрать начальную точку  $u_0 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$  наблюдается переходное хаотическое поведение на временном интервале  $[0, 3.49 \times 10^7]$ . Для  $r_1 = 23.7$  с теми же параметрами и начальной точкой переходное хаотическое поведение продолжается на временном интервале более  $[0, 10^8]$ . Таким образом, можно заметить, что небольшое увеличение параметра бифуркации  $r_1$  приводит к большому увеличению времени переходного процесса. Для

$r_1 \in (23.7, 24.09)$ , оценить время переходного процесса является сложной задачей, так как время численного интегрирования очень велико. Поэтому внутри этого интервала параметров для конкретных траекторий трудно сказать, является ли хаотическое поведение долго скрываемым переходным процессом или скрытым устойчивым аттрактором. Отметим также, что если рассматривать параметры  $r_1 = 23.5, \sigma = 10, r_2 = -e = 0.001, b = \frac{8}{3}$  с теми же начальными и использовать процедуру `ode45` с относительным допуском  $10^{-6}$ , для всех этих начальных точек хаотическое переходное поведение будет длиться в течение временного интервала более  $[0, 10^7]$ , и соответствующие переходные хаотические множества не разрушатся. В заключение данного численного исследования переходного хаотического поведения, мы можем предложить точно определить численный решатель, его параметры, начальные данные и временной интервал, в течение которого переходное поведение продолжается.

Далее в Приложении **A**, мы подробно изучаем визуализацию скрытых переходных хаотических множеств в комплексной системе Лоренца в форме (2.8). Мы рассматриваем "лазерный случай", т.е.  $e = -r_2$ , когда система (2.8) имеет состояние равновесия  $S_0$  и окружность состояний равновесия  $S_\theta$ . Два специальных метода, т.е. метод численного продолжения (МЧП) и метод вечных точек, используются для визуализации скрытых множеств.

### 2.1.7 Обсуждение

В этом разделе была рассмотрена комплексная система Лоренца, описывающая бароклинную неустойчивость в атмосфере или физику разогнанных лазеров. Аналитические и численные результаты показывают что динамика комплексной системы Лоренца очень богата, и, по сравнению с вещественной системой Лоренца, потеря глобальной устойчивости может быть связана с появлением существенно различных динамических режимов. Как для системы Лоренца, для комплексной системы Лоренца, с одной стороны, продемонстрирована возможность использования аппарата функций Ляпунова для оценки границы глобальной устойчивости. С другой стороны, показано, что эта проблема связана с локализацией постоянных скрытых хаотических аттракторов и их отличием от скрытых долговременных переходных хаотических множеств. Попытка исследовать проблему существования устойчивого скрытого хаотического аттрактора в комплексной системе Лоренца предпринята в рамках специального аналитического преобразования, учитывающего симметрию модели.

## 2.2 Аналитическое и численное исследование хаотической динамики в комплексной системе Спротта дробного порядка

В данном разделе предлагается новое комплексное обобщение системы Спротта дробного порядка. Новая система дробного порядка не имеет состояний равновесия; таким образом, аттрактор, который может существовать в ее фазовом пространстве, является скрытым. Значения дробного порядка и параметров системы, при которых существуют хаотические и гиперхаотические аттракторы, рассчитываются на основе знака их показателей Ляпунова.

### 2.2.1 Предварительные сведения

Начиная с пионерской работы Лоренца [10], теория хаоса приобрела большое значение как важная отрасль современной физики и математики с широким спектром приложений в химии, физике, технике, биологии и экономике [168; 169]. Далее, с тех пор как Росслер сообщил о первой гиперхаотической системе [11], многие гиперхаотические системы с вещественными переменными были введены и исследованы с растущим интересом в нескольких областях нелинейных цепей, управления, синхронизации, связи, лазеров и комплексных сетей [170; 171]. Гиперхаотическая система обычно определяется как система с по крайней мере, с двумя положительными показателями Ляпунова. Вследствие большей непредсказуемости гиперхаотических систем, они имеют лучшие показатели в некоторых областях, таких как хаотическая связь и шифрование, чем традиционные хаотические системы [172]. Представлены два эффективных метода для создания гиперхаотической системы из обычной хаотической системы; первая заключается в том, чтобы добавление к системе простого управления с обратной связью по состоянию, например, многие четырехмерные гиперхаотические системы представлены таким образом (см., например, [170; 172–175]); второй, путем рассмотрения комплексной версии системы, например, найдено несколько гиперхаотических комплексных систем (см., например, [51; 176–180]). Поскольку гиперхаотические системы являются более комплексными, а генерация хаоса в четырехмерных автономных системах сложнее, чем в трехмерных хаотических системах, поэтому генерация гиперхаотического аттрактора, в частности, конструирование гиперхаотической системы из изначально хаотической системы, является теоретически очень привлекательной, но технически довольно сложной задачей [181–183].

Аттракторы в гиперхаотических/хаотических системах могут рассматриваться как самовозбуждающиеся и скрытые аттракторы [16; 35; 147]. Самовозбуждающиеся аттракторы можно найти в системах Лоренца [184], Росслера [11], Чена [185], Лю [170; 186]. Скрытые аттракторы могут быть найдены в гиперхаотических/хаотических системах без состояний равновесия [51; 187; 188], одним или более состояний равновесия [189; 190], и бесконечным

числом состояний равновесия (линия/плоскость/окружность) [56; 191; 192]. В отличие от самовозбуждающихся аттракторов, локализация скрытых аттракторов является сложной задачей из-за их узкого бассейна притяжения отдаленного от окрестностей состояний равновесия. Изучение существования скрытых аттракторов в физических системах важно, поскольку это может привести к неожиданному поведению [18; 193; 194].

Большинство гиперхаотических/хаотических систем были представлены с вещественными переменными и целым порядком; соответственно, они принадлежат к целым порядку вещественно значных динамических систем. Принимая во внимание, что многие явления реальной жизни описываются комплекснозначными моделями, например, физика детаннированного лазера [55; 110; 111], параметрическое возбуждение волн в магнитоактивной плазме [130], и проблема перехода к турбулентности в потоке Кутта между цилиндрами [130]. В последние годы дробное исчисление все чаще используется как эффективный инструмент для моделирования многих систем в физике и технике. Многие системы в междисциплинарных областях могут быть описаны дробными дифференциальными уравнениями, например, вязкоупругие системы, поляризация диэлектриков, поляризация электродов и электролитов, теплопроводность, сопротивление-емкость-индуктивность (СЕИ) связь и электромагнитные волны (см., например, [61; 67; 195; 196]). Отметим также, что в настоящее время в литературе скрытые аттракторы в основном вводятся и исследуются в нелинейных динамических системах с вещественными переменными. Исследование скрытых аттракторов в системах дробного порядка и системах с комплекснозначными является относительно новым направлением исследований, которое активно развивается в настоящее время.

Мотивируясь вышеизложенными рассуждениями, данная работа ставит своей целью представить новую комплекснозначную модель дробного порядка, которая может демонстрировать скрытые гиперхаотические аттракторы.

## 2.2.2 Комплексная гиперхаотическая система Спротта дробного порядка

В [197], Спротт предложил коллекцию автономных хаотических систем с полиномиальной нелинейностью. Недавно Чжан и др., применив простой метод управления с обратной связью по состоянию, сообщили о следующей четырехмерной системе Спротта с целым порядком и вещественными переменными [198]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -yz - dw, \\ \dot{y} = z^2 - 1, \\ \dot{z} = ax - byz - z, \\ \dot{w} = cz, \end{cases} \quad (2.31)$$

где  $a, b, c, d$  - вещественные параметры. Отметим, что система (2.31) может демонстрировать только хаотический аттрактор и гиперхаотическое поведение, не визуализируемое в системе [198].

В данной работе мы представляем и исследуем следующее комплексное обобщение системы Спротта с дробным порядком:

$$\begin{cases} D_t^\alpha X = -YZ - dW, \\ D_t^\alpha Y = Z^*Z - 1, \\ D_t^\alpha Z = aX - bYZ - Z, \\ D_t^\alpha W = cZ, \end{cases} \quad (2.32)$$

где  $X = x_1 + ix_2$ ,  $Y = x_3$ ,  $Z = x_4 + ix_5$ ,  $W = x_6 + ix_7$ ,  $i = \sqrt{-1}$ , "\*" обозначает комплексные сопряженные переменные, а  $a, b, c, d$  - вещественные параметры. Дифференциальный оператор Капуто - это линейный оператор, который является:  $D_t^\alpha(ax(t) + by(t)) = aD_t^\alpha x(t) + bD_t^\alpha y(t)$ , где  $a$  и  $b$  - константы. Используя это свойство и приравнявая вещественную и мнимую части (2.32), мы получаем эквивалентную вещественно значную автономную систему:

$$\begin{cases} D_t^\alpha x_1 = -x_3x_4 - dx_6, \\ D_t^\alpha x_2 = -x_3x_5 - dx_7, \\ D_t^\alpha x_3 = x_4^2 + x_5^2 - 1, \\ D_t^\alpha x_4 = ax_1 - bx_3x_4 - x_4, \\ D_t^\alpha x_5 = ax_2 - bx_3x_5 - x_5, \\ D_t^\alpha x_6 = cx_4, \\ D_t^\alpha x_7 = cx_5. \end{cases} \quad (2.33)$$

Состояния равновесия системы (2.33) могут быть найдены решением уравнений  $D_t^\alpha x_1 = D_t^\alpha x_2 = D_t^\alpha x_3 = D_t^\alpha x_4 = D_t^\alpha x_5 = D_t^\alpha x_6 = D_t^\alpha x_7 = 0$ , именно

$$\begin{cases} -x_3x_4 - dx_6 = 0, \\ -x_3x_5 - dx_7 = 0, \\ x_4^2 + x_5^2 - 1 = 0, \\ ax_1 - bx_3x_4 - x_4 = 0, \\ ax_2 - bx_3x_5 - x_5 = 0, \\ cx_4 = 0, \\ cx_5 = 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Из последних двух уравнений в (2.34), имеем  $x_4 = x_5 = 0$ , что не согласуется с третьим уравнением в (2.34). Таким образом, в этой системе нет состояний равновесия. Следовательно, если система (2.33) имеет аттрактор, то этот аттрактор является скрытым.

### 2.2.3 Динамика системы

В этом подразделе с помощью проекций скрытых гиперхаотических аттракторов и показателей Ляпунова исследуются динамические свойства системы (2.33). При варьировании параметров системы и дробного порядка динамическое поведение системы (2.33) будет демонстрировать различные движения. Для численного интегрирования системы (2.33) мы используем алгоритм предиктор-корректор Адамса-Башфорта-Мултона [126], который может быть использован как для линейных, так и для нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка.

**Фиксируя**  $(a, b, c, d) = (15, 1, 25.5, 0.01)$  **и изменяя дробный порядок**  $\alpha$ :

Фиксируем параметры системы  $(a, b, c, d)$  и варьлируем дробный порядок так, чтобы  $\alpha \in [0.8, 1]$  с шагом 0.01. Для  $\alpha \in [0.8, 1[ \setminus \{0.95, 0.99\}$  система (2.33) имеет скрытые гиперхаотические аттракторы, а при  $\alpha = 0.95, 0.99$  она имеет скрытый хаотический аттрактор. Соответствующие локальные конечно-временные показатели Ляпунова на временном интервале  $[0, 100]$  и начальной точке  $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$  против  $\alpha [0.8, 1[$  показаны на Рис. 2.10. В таблице 2, мы вычислили локальные конечно-временные показатели Ляпунова системы (2.33) при некоторых значениях дробного порядка  $\alpha$ . На Рис. 2.11 и 2.12 скрытые хаотические и гиперхаотические аттракторы системы (2.33) построены в различных проекциях с  $\alpha = 0.99$  и  $\alpha = 0.89$ , соответственно.

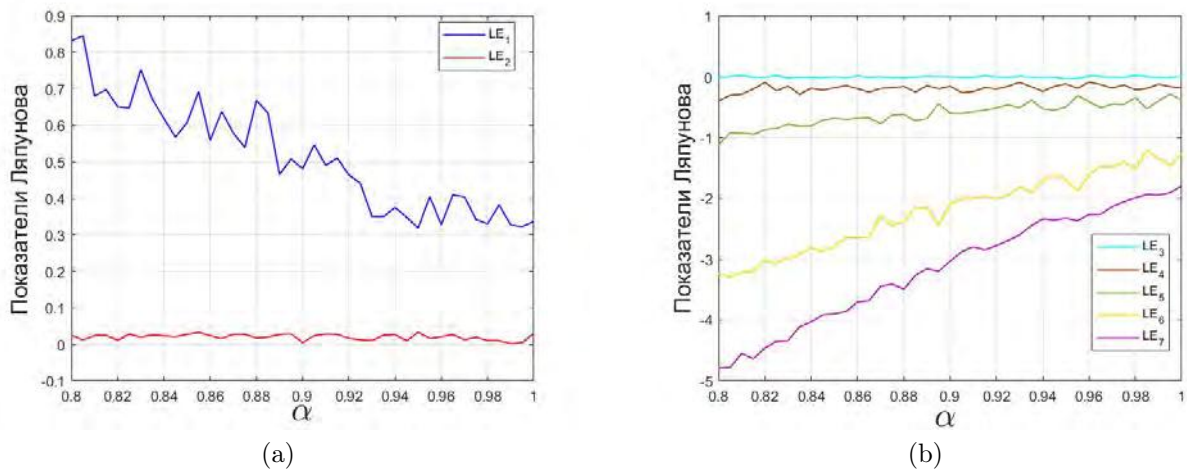


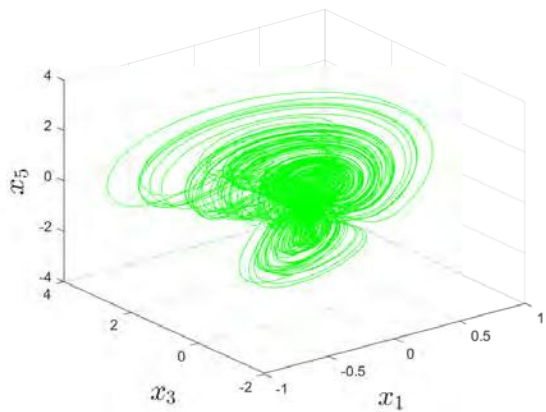
Рисунок 2.10 — Локальные конечно-временные показатели Ляпунова на временном интервале  $[0, 100]$  системы (2.33) с варьированием дробного порядка так, что  $\alpha \in [0.8, 1[$ .

**Фиксируя**  $(b, c, d) = (1, 25.5, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.89$  **и варьируя**  $a$ :

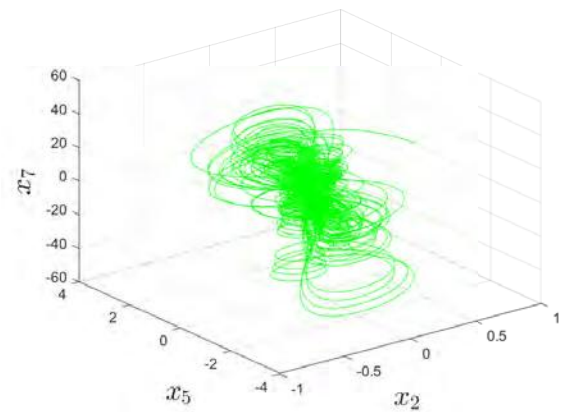
Фиксируем параметры системы  $(b, c, d)$  и дробный порядок  $\alpha$  и варьируем  $a$ , например,  $a \in [5, 20]$  с шагом 0.1. Соответствующие локальные конечно-временные показатели Ляпунова на временном интервале  $[0, 100]$  и начальная точка  $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$  против  $a \in [5, 20]$  изображены на Рис. 2.13. Когда  $a \in [5.7, 6.1]$ ,  $a = \{12.3, 12.4\}$  система (2.33) имеет скрытые хаотические аттракторы, тогда как она имеет скрытые гиперхаотические аттракторы для

Таблица 2: Локальные конечно-временные показатели Ляпунова с  
 $(a, b, c, d) = (15, 1, 25.5, 0.01)$ .

$\alpha$	$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$	$LE_4$	$LE_5$	$LE_6$	$LE_7$	Динамика
0.99	0.3262	0	-0.0106	-0.1211	-0.4005	-1.3469	-1.9472	Хаотичный
0.93	0.3500	0.0107	0	-0.0915	-0.5194	-1.8110	-2.5981	Гиперхаотичный
0.89	0.4655	0.0283	0	-0.1474	-0.6928	-2.1515	-3.1542	Гиперхаотичный
0.81	0.6802	0.0249	0	-0.2960	-0.9280	-3.2143	-4.5505	Гиперхаотичный

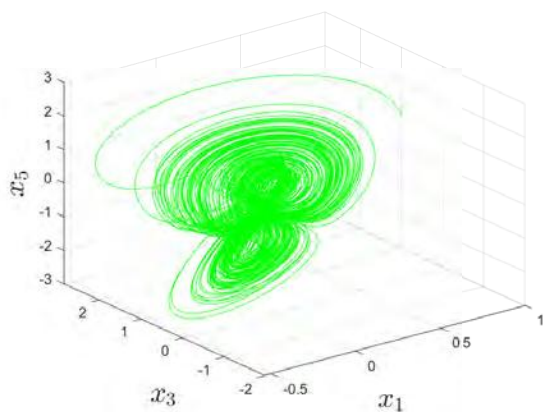


(a) проекция  $x_1, x_3, x_5$

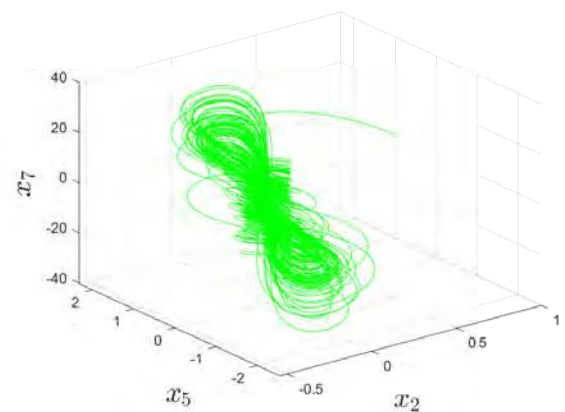


(b) проекция  $x_2, x_5, x_7$

Рисунок 2.11 — Визуализация скрытого хаотического аттрактора системы (2.33) с  $(a, b, c, d) = (15, 1, 25.5, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.99$  и начальной точкой  $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ .



(a) проекция  $x_1, x_3, x_5$



(b) проекция  $x_2, x_5, x_7$

Рисунок 2.12 — Визуализация скрытого гиперхаотического аттрактора системы (2.33) с  $(a, b, c, d) = (15, 1, 25.5, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.89$  и начальной точкой  $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ .

$a \in [5, 5.7[, ]6.1, 12.3[, ]12.4, 20]$ . Для различных значений параметра  $a$  локальные конечно-временные показатели Ляпунова приведены в таблице 3.

**Фиксируя**  $(a, c, d) = (15, 25.5, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.89$  **и варьируя**  $b$ :

Фиксируем параметры системы  $(a, c, d)$  и дробный порядок  $\alpha$  и варьируем  $b$  так, чтобы  $b \in [0, 3]$  с шагом 0.02. Для  $b \in ]0.1, 0.24[, ]0.3, 0.42[, b = \{0.62, 1.6\}$  система (2.33) имеет скрытые хаотические аттракторы, тогда как она имеет скрытые гиперхаотические аттрак-

Таблица 3: Локальные конечно-временные показатели Ляпунова с  $(b, c, d) = (1, 25.5, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.89$ .

$a$	$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$	$LE_4$	$LE_5$	$LE_6$	$LE_7$	Динамика
5.7	0.3553	0	-0.0444	-0.1882	-0.5092	-2.1559	-2.8011	Хаотичный
10	0.4740	0.0278	0	-0.1652	-0.4988	-2.2706	-3.0580	Гиперхаотичный
15	0.4655	0.0283	0	-0.1474	-0.6928	-2.1515	-3.1542	Гиперхаотичный
19.9	0.5144	0.0254	0	-0.2251	-0.8290	-2.0414	-3.1531	Гиперхаотичный

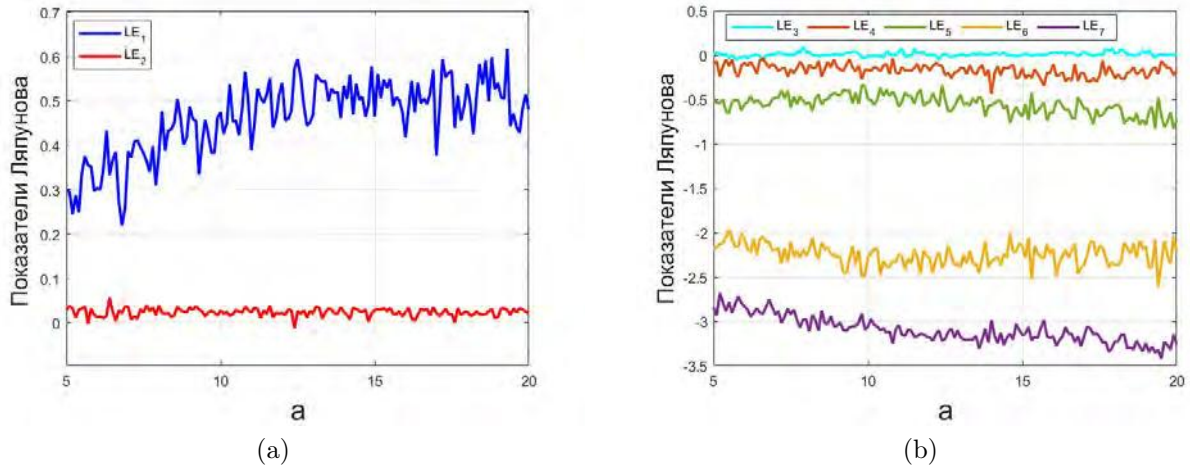


Рисунок 2.13 — Локальные конечно-временные показатели Ляпунова на временном интервале  $[0, 100]$  системы (2.33) против  $a \in [5, 20]$ .

торы для  $b \in [0, 0.1]$ ,  $[0.24, 0.3]$ ,  $[0.42, 0.62[$ ,  $]0.62, 1.6[$ ,  $]1.6, 3]$ . На Рис 2.14 оценены локальные конечно-временные показатели Ляпунова на временном интервале  $[0, 100]$  и начальной точке  $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$  против  $b [0, 3]$ . В таблице 4 приведены локальные конечно-временные показатели Ляпунова при различных значениях параметра  $b$ .

Таблица 4: Локальные конечно-временные показатели Ляпунова с  $(a, c, d) = (15, 25.5, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.89$ .

$b$	$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$	$LE_4$	$LE_5$	$LE_6$	$LE_7$	Динамика
0.1	0.5555	0.0260	0	-0.1826	-0.4490	-1.5907	-2.3795	Гиперхаотичный
0.2	0.1528	0	-0.1299	-0.2261	-0.8391	-1.1789	-1.8081	Хаотичный
1.6	0.4302	0	-0.0261	-0.2144	-0.4513	-2.7102	-3.4178	Хаотичный
3	0.4548	0.0271	0	-0.1433	-0.8033	-2.5146	-3.6267	Гиперхаотичный

**Фиксируя  $(a, b, d) = (15, 1, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.89$  и варьируя  $c$ :**

Варьируя параметр  $c$  в интервале  $[5, 30]$  с шагом 0.1 и фиксируя  $(a, b, d)$ ,  $\alpha$ . Когда  $c \in [5.5, 6.3]$ ,  $c = \{5, 5.1, 10.1, 10.6, 17.6, 20.7, 21, 22.3, 23.8, 27.1\}$  система (2.33) имеет скрытые хаотические аттракторы, в то время как она имеет скрытые гиперхаотические аттракторы, когда  $c \in [5.2, 5.4]$ ,  $[6.4, 30] \setminus \{10.1, 10.6, 17.6, 20.7, 21, 22.3, 23.8, 27.1\}$ . На Рис 2.15 оценены локальные конечно-временные показатели Ляпунова на интервале времени  $[0, 100]$  и начальной точке  $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$  против  $c [5, 30]$ . В таблице 5 приведены локальные конечно-временные показатели Ляпунова при различных значениях параметра  $c$ .

**Фиксируя  $(a, b, c) = (15, 1, 25.5)$ ,  $\alpha = 0.89$  и варьируя  $d$ :**



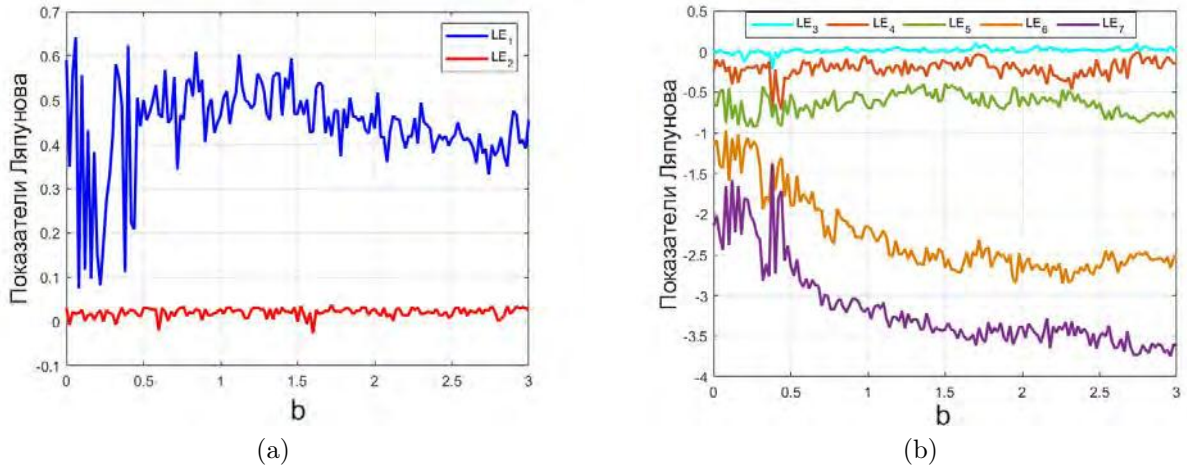


Рисунок 2.14 — Локальные конечно-временные показатели Ляпунова на временном интервале  $[0, 100]$  системы (2.33) против  $b \in [0, 3]$ .

Таблица 5: Локальные конечно-временные показатели Ляпунова с  $(a, b, d) = (15, 1, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.89$ .

$c$	$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$	$LE_4$	$LE_5$	$LE_6$	$LE_7$	Динамика
5	0.5815	0	-0.0117	-0.1200	-0.1819	-2.6505	-3.3178	Хаотичный
6.3	0.6397	0	-0.0445	-0.0708	-0.2942	-2.5457	-3.3876	Хаотичный
7	0.5670	0.0509	0	-0.0457	-0.3651	-2.4374	-3.3722	Гиперхаотичный
11	0.6380	0.0182	0	-0.0743	-0.3843	-2.3103	-3.2429	Гиперхаотичный

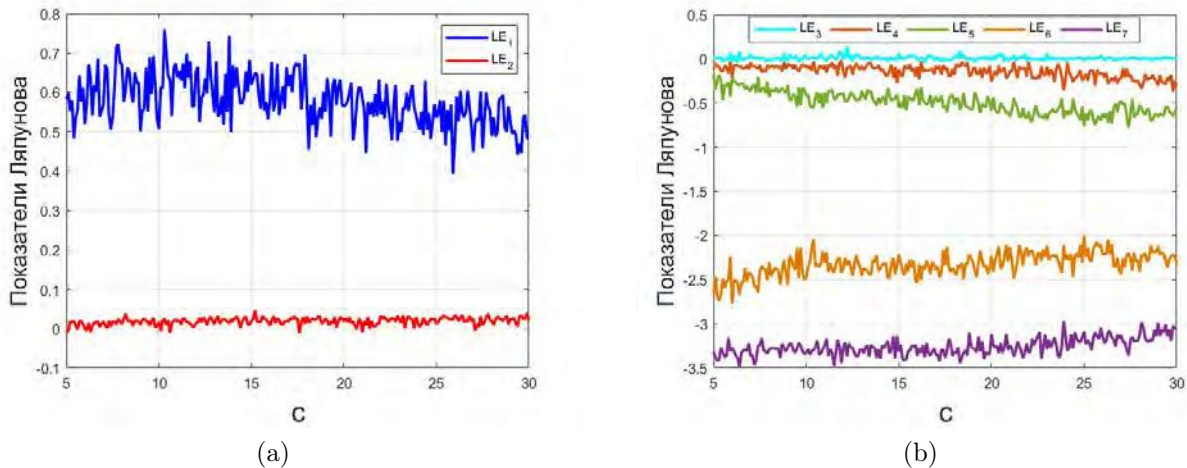


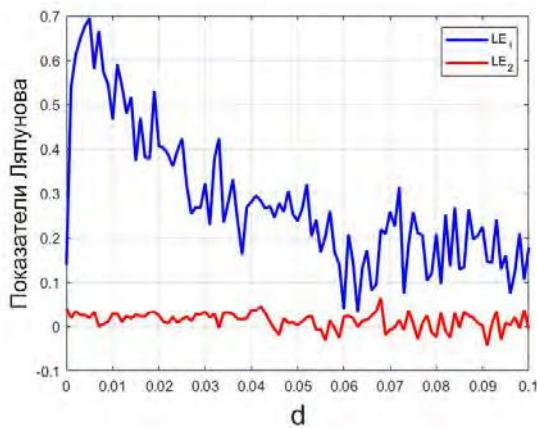
Рисунок 2.15 — Локальные конечно-временные показатели Ляпунова на временном интервале  $[0, 100]$  системы (2.33) против  $c \in [5, 30]$ .

Фиксируем  $(a, b, c)$ ,  $\alpha$  и варьируем параметр  $d$  в интервале  $[0, 0.1]$  с шагом 0.001. При  $d \in [0, 0.43] \setminus \{0.007, 0.033\}$ ,  $[0.067, 0.069]$ ,  $d = \{0.052, 0.053, 0.061, 0.074, 0.087, 0.099\}$  система (2.33) имеет скрытые гиперхаотические аттракторы, в то время как она имеет скрытые хаотические аттракторы при  $d \in [0.044, 0.067] \setminus \{0.052, 0.053, 0.061\}$ ,  $[0.07, 0.1] \setminus \{0.074, 0.087, 0.099\}$ ,  $d = \{0.007, 0.033\}$ . На Рис 2.16 оценены локальные конечно-временные показатели Ляпунова на интервале времени  $[0, 100]$  и начальной точке  $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$  против  $d \in [0, 0.1]$ . В

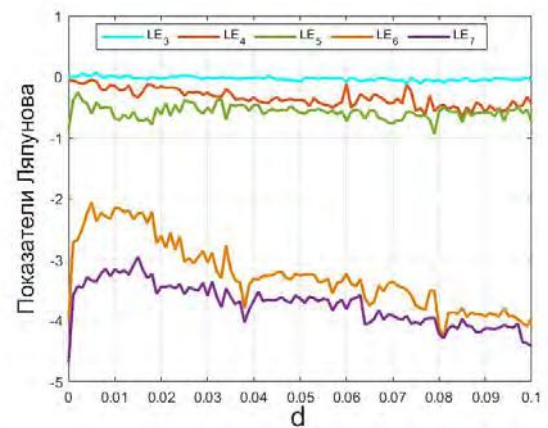
таблице 6 приведены локальные конечно-временные показатели Ляпунова при различных значениях параметра  $d$ .

Таблица 6: Локальные конечно-временные показатели Ляпунова с  $(a, b, c) = (15, 1, 25.5)$ ,  $\alpha = 0.89$ .

$d$	$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$	$LE_4$	$LE_5$	$LE_6$	$LE_7$	Динамика
0.011	0.5908	0.0281	0	-0.2264	-0.7102	-2.1576	-3.21018	Гиперхаотичный
0.023	0.3604	0.0207	0	-0.1787	-0.4653	-2.8303	-3.4664	Гиперхаотичный
0.033	0.4233	0	-0.0068	-0.3299	-0.3737	-3.2948	-3.7718	Хаотичный
0.044	0.2713	0	-0.0172	-0.3753	-0.5312	-3.2501	-3.6635	Хаотичный



(a)



(b)

Рисунок 2.16 — Локальные конечно-временные показатели Ляпунова на временном интервале  $[0, 100]$  системы (2.33) против  $d \in [0, 0.1]$ .

## 2.2.4 Обсуждение

В этом разделе было предложено комплексное обобщение системы Спротта дробного порядка. Динамика модели была исследована; для широкого диапазона значений параметров модели и дробного порядка новая система может демонстрировать гиперхаотическое/хаотическое поведение. Такого рода гиперхаотические аттракторы не существуют для системы (2.31) с целым порядком и вещественными переменными. Так как новая модель не имеет состояний равновесия, то она относится к категории скрытых хаотических систем.

## 2.3 Аналитическое и численное исследование хаотической динамики в комплексной системе Рабиновича

В этом разделе рассматривается комплексная система Рабиновича, исследуется анализ устойчивости и динамика системы.

### 2.3.1 Предварительные сведения

В последние годы гиперхаотические системы с вещественными вводятся и исследуются с растущим интересом в нескольких областях нелинейных цепей, управления, синхронизации, связи и лазеров [170; 171]. Гиперхаотическая система обычно определяется как система с по крайней мере двумя положительными показателями Ляпунова, указывающими на то, что хаотическая динамика системы расширяется более чем в одном направлении, порождая более сложные аттракторы [199]. Вследствие большей непредсказуемости гиперхаотических систем они имеют лучшую производительность в некоторых областях, таких как безопасная связь по сравнению с традиционными хаотическими системами [172]. Гиперхаотические аттракторы были широко изучены на большом количестве вещественных динамических систем, представляющих физический интерес, с вещественными переменными.

В данной работе рассматривается комплексная гиперхаотическая система Рабиновича как привлекательная физическая модель. Исследуется динамика системы.

### 2.3.2 Комплексная система Рабиновича

Гиперхаотическую комплексную систему Рабиновича, которая описывает проблему перехода к турбулентности в потоке Кутта между цилиндрами, можно записать следующим образом [130]:

$$\begin{cases} \dot{X} = -vX + YX^* + ZY^*, \\ \dot{Y} = \alpha Y - X^2 + 2X^*Z - \beta|Y|^2Y, \\ \dot{Z} = \gamma Z - 3XY - \beta|Z|^2Z, \end{cases} \quad (2.35)$$

где  $X = x_1 + ix_2$ ,  $Y = x_3 + ix_4$ ,  $Z = x_5 + ix_6$ ,  $i = \sqrt{-1}$ , надстрочный символ "\*" обозначает комплексное сопряжение переменной, а  $v, \alpha, \beta, \gamma$  - вещественные параметры.

Чтобы исследовать критерии устойчивости системы (2.35), мы рассматриваем следующую эквивалентную вещественную форму, которая может быть получена путем приравни-

вания вещественной и мнимой частей (2.35):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -vx_1 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + x_4x_6, \\ \dot{x}_2 = -vx_2 + x_1x_4 - x_2x_3 + x_3x_6 - x_4x_5, \\ \dot{x}_3 = \alpha x_3 + (x_2^2 - x_1^2) - 2(x_1x_5 + x_2x_6) - \beta x_3(x_3^2 + x_4^2), \\ \dot{x}_4 = \alpha x_4 - 2x_1x_2 + 2(x_1x_6 - x_2x_5) - \beta x_4(x_3^2 + x_4^2), \\ \dot{x}_5 = \gamma x_5 - 3(x_1x_3 - x_2x_4) - \beta x_5(x_5^2 + x_6^2), \\ \dot{x}_6 = \gamma x_6 - 3(x_1x_4 + x_2x_3) - \beta x_6(x_5^2 + x_6^2). \end{cases} \quad (2.36)$$

Приравнивание всех уравнений в (2.36) к нулю, получаем  $F_0 = (0,0,0,0,0,0)$  - единственное состояние равновесия. Характеристический полином матрицы Якобиана в точке  $F_0$  имеет вид:

$$(v + \lambda)^2(\alpha - \lambda)^2(\gamma - \lambda)^2 = 0. \quad (2.37)$$

Для  $v > 0$ ,  $\alpha < 0$ ,  $\gamma < 0$  все собственные значения характеристического полинома (2.37) отрицательны; таким образом,  $F_0$  устойчива, а в противном случае неустойчива.

### 2.3.3 Динамика системы

В данном подразделе мы кратко исследуем динамическое поведение системы (2.36). Когда  $v = -0.03$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $\gamma = 0.11$ ,  $F_0$  неустойчива и система (2.36) имеет гиперхаотический самовозбуждающийся аттрактор (см. Рис. 2.17). Использование адаптивного численного метода [47], для траектории с начальной точкой  $x_1 = x_2 = \dots = x_5 = x_6 = 0.1$  соответствующие локальные конечно-временные показатели Ляпунова на интервале  $[0, 100]$  могут быть оценены:  $LE_1 = 2.2911$ ,  $LE_2 = 0.1471$ ,  $LE_3 = 0.0651$ ,  $LE_4 = 0$ ,  $LE_5 = -0.4913$ ,  $LE_6 = -2.3975$ .

Чтобы продемонстрировать, что синее множество на Рис. 2.17 является аттрактором вокруг состояния равновесия  $F_0$ , мы построили небольшую сферическую окрестность радиусом 0.2 и рассмотрели 100 случайных начальных точек на ней (см. Рис. 2.18). Мы наблюдали, что в этом численном эксперименте все выбранные начальные траектории из этой окрестности приближаются к желаемому предельному режиму (синий множество). Таким образом, с этой точки зрения мы можем назвать это множество аттрактором. Мы повторили этот эксперимент несколько раз и получили тот же вывод.

В литературе известны примеры систем со скрытыми аттракторами, сосуществующими с единственным локально устойчивым состоянием равновесия. Например, такие системы встречаются в контрпримерах к знаменитым гипотезам Айзермана и Калмана [200]. Поскольку система Рабиновича (2.36) также имеет единственное нулевое состояние равновесия, естественно искать скрытые осцилляции, анализируя границы устойчивости состояния равнове-

сия. К сожалению, эксперименты в этом направлении пока не дали успешного результата - все выявленные множества оказались переходными хаотическими множествами.

Для  $v = -0.001$ ,  $\alpha = 0.00077$ ,  $\beta = -0.000191$ ,  $\gamma = 0.001$ ,  $F_0$  устойчива и в системе (2.36) визуализируется скрытый переходный хаос, который сохраняется на малом интервале времени  $[0, 3000]$  с начальной точкой  $x_1 = x_2 = \dots = x_5 = x_6 = 5$  (см. Рис. 2.19).

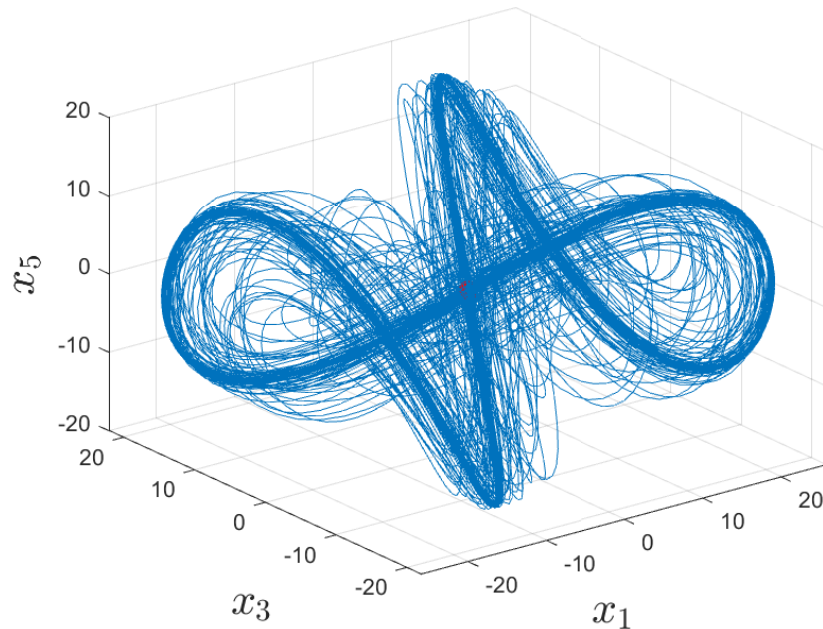


Рисунок 2.17 — Локализация гиперхаотического аттрактора системы (2.36) с  $v = -0.03$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $\gamma = 0.11$ .

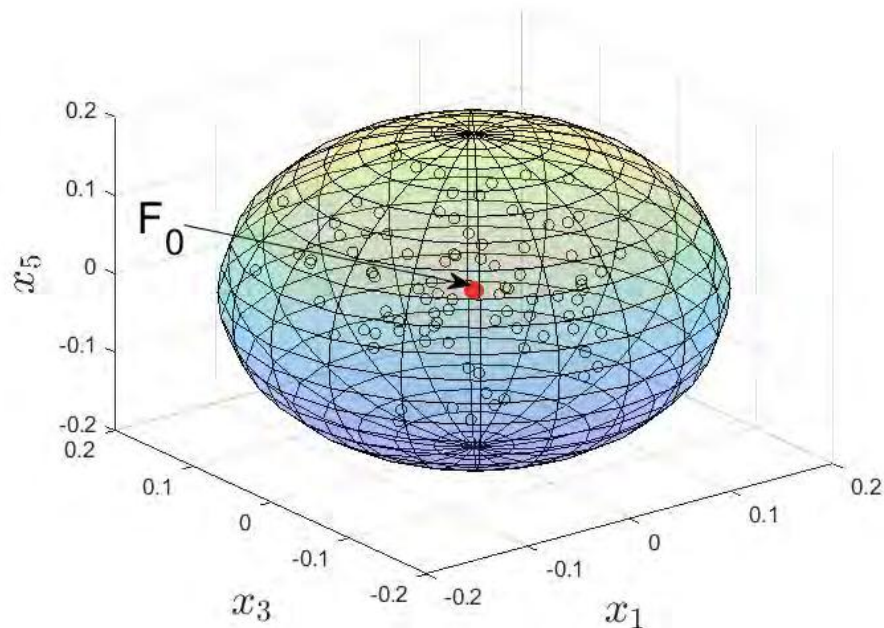


Рисунок 2.18 — Сферическая окрестность вокруг состояния равновесия  $F_0$  со 100 начальными точками на ней.

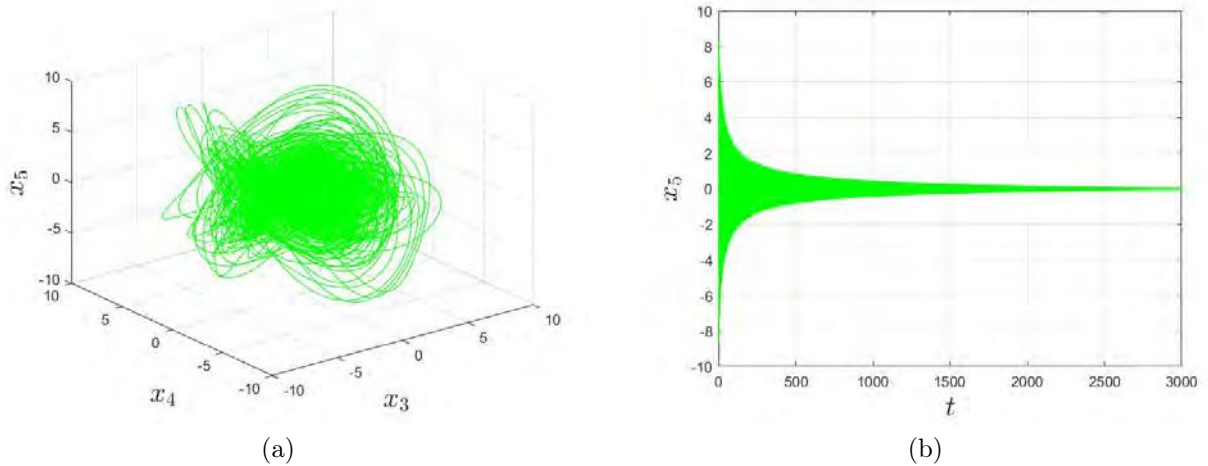


Рисунок 2.19 — Визуализация скрытого переходного хаотического множества в системе (2.36)

Поскольку в настоящее время нет результатов о диссипативности в смысле Левинсона<sup>5</sup> и каких-либо критериев глобальной устойчивости (см., например, [19]) для системы (2.35), вопрос о существовании скрытых аттракторов в системе (2.35) остается открытым.

### 2.3.4 Обсуждение

В этом разделе рассмотрена гиперхаотическая комплексная система Рабиновича, описывающая переход к турбулентности в потоке Кутта между цилиндрами. Анализировались критерии устойчивости системы. Из численных результатов было показано, что динамика системы очень богата и сложна, что, в свою очередь, может иметь решающее значение в различных приложениях, например, в безопасной связи. Существование скрытых аттракторов в системе все еще остается открытой проблемой.

<sup>5</sup>Существование поглощающего множества в фазовом пространстве облегчает задачу обнаружения скрытых колебаний, поскольку все предельные режимы будут находиться внутри этого компактного множества. Без этого свойства, в общем случае, чтобы выявить все предельные режимы, необходимо просканировать все фазовое пространство.

## Глава 3. Синхронизация комплексных гиперхаотических систем целого и дробного порядков и приложения

В этой главе разработаны новые стратегии синхронизации, основанные на теории устойчивости по Ляпунову и критериях устойчивости систем дробного порядка для достижения синхронизации гиперхаотических комплекснозначных систем. На основе этих стратегий синхронизации предлагаются новые схемы для улучшения безопасной связи и криптосистем.

### 3.1 Полная синхронизация для комплексных гиперхаотических систем дробного порядка с использованием метода активного управления

Синхронизация гиперхаотических комплексных систем дробного порядка является интересным явлением, поскольку имеет несколько приложений в прикладных науках. На основании сложности гиперхаотических динамических систем и непредсказуемости скрытых аттракторов, которые могут существовать в их фазовых пространствах и могут быть полезны в безопасных связях, для исследования полной синхронизации предлагается схема вывода аналитической формулы управляющих функций. Дальнейшее сравнение этой аналитической формулы с численными экспериментами дает интересное согласие. Для исследования такого рода синхронизации предлагается комплексная система Спротта с дробным порядком. Представлена схема безопасной связи, основанная на полной синхронизации гиперхаотической комплексной системы Спротта дробного порядка. В качестве тестовых примеров рассматриваются два типа маскированных сообщений (обычный текст и аудиосигнал).

#### 3.1.1 Предварительные сведения

Синхронизация является важным явлением в нелинейной науке, которое сначала изучалось для динамических систем целого порядка (см., например, [93; 201; 202]). В дальнейшем синхронизация хаотических систем дробного порядка стала привлекать все большее внимание из-за разнообразия приложений в ряде прикладных областей, включая безопасную связь, обработку изображений, информатику, управление и т.д. (см., например, [89–91]).

В обоих этих случаях связанные переменные динамических систем были вещественно значными. Между тем, в прикладных областях существуют задачи, такие как лазерная оптика с отстройкой и двухслойная бароклиническая неустойчивость со слабым бета-эффектом вязкости (см., например, [54; 55]), которые описываются комплексными системами. Рассмотрение

таких систем в задачах синхронизации вместо вещественных и соответствующее удвоение числа переменных приводит к более сложному поведению соответствующей системы, что имеет решающее значение во многих приложениях, таких как, например, безопасная связь и шифрование [103].

В этом разделе метод активного управления используется для изучения синхронизации скрытых гиперхаотических аттракторов в комплексных системах Спротта дробного порядка. На основе такой синхронизации разрабатывается и применяется схема безопасной связи.

### 3.1.2 Метод полной синхронизации гиперхаотической комплексной системы Спротта дробного порядка

В этом подразделе мы исследуем синхронизацию двух одинаковых гиперхаотических систем дробного порядка (2.33) с использованием метода активного управления [84; 124] с системами ведущей, ведомой и ошибки, определяемыми как:

$$D_t^\alpha \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + G(\mathbf{x}(t)), \quad (3.1)$$

$$D_t^\alpha \mathbf{y}(t) = A\mathbf{y}(t) + G(\mathbf{y}(t)) + \vartheta, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t), \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_7)^T$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_7)^T$  векторы псевдосостояний систем (3.1), (3.2),  $A \in \mathbf{R}^{7 \times 7}$  постоянная матрица параметров системы,  $G : \mathbf{R}^7 \rightarrow \mathbf{R}^7$  непрерывная векторная функция,  $\vartheta : \mathbf{R}^7 \times \mathbf{R}^7 \rightarrow \mathbf{R}^7$ ,  $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_7)^T$  векторная функция управления ведомой системы (3.2). Следуя идеям [84] и используя Теорему 1.2, мы конструируем подходящее управление для достижения синхронизации в нашей установке с дробным порядком следующим образом.

**Теорема 3.1.** Синхронизация между двумя идентичными гиперхаотическими системами дробного порядка (3.1), (3.2) и ошибкой в форме (3.3) будет достигнута, если векторная функция управления построена следующим образом:

$$\vartheta = G(\mathbf{x}) - G(\mathbf{y}) - K \mathbf{e}, \quad (3.4)$$

где  $K$  - матрица усиления управления, которая удовлетворяет  $|\arg(\lambda_i(A - K))| > \alpha\pi/2$  для всех собственных значений  $\lambda_i$  из  $(A - K)$ .

*Доказательство.*  $\alpha$ -производная от ошибки синхронизации (3.3) - это

$$D_t^\alpha \mathbf{e}(t) = D_t^\alpha \mathbf{y}(t) - D_t^\alpha \mathbf{x}(t). \quad (3.5)$$



Подставляя уравнения (3.1), (3.2) и (3.4) в уравнение (3.5) тогда

$$D_t^\alpha e(t) = (A - K)e. \quad (3.6)$$

Согласно критерию из Теоремы 1.2, т.е.  $|\arg(\lambda_i(A - K))| > \alpha\pi/2$ , ошибка вектор ошибки  $e(t)$  асимптотически устойчив, что означает, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ .  $\square$

Ведущая и ведомая системы гиперхаотической системы дробного порядка (2.33) могут быть записаны как:

$$\begin{pmatrix} D_t^\alpha x_1 \\ D_t^\alpha x_2 \\ D_t^\alpha x_3 \\ D_t^\alpha x_4 \\ D_t^\alpha x_5 \\ D_t^\alpha x_6 \\ D_t^\alpha x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3x_4 \\ -x_3x_5 \\ x_4^2 + x_5^2 - 1 \\ -bx_3x_4 \\ -bx_3x_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\begin{pmatrix} D_t^\alpha y_1 \\ D_t^\alpha y_2 \\ D_t^\alpha y_3 \\ D_t^\alpha y_4 \\ D_t^\alpha y_5 \\ D_t^\alpha y_6 \\ D_t^\alpha y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_3y_4 \\ -y_3y_5 \\ y_4^2 + y_5^2 - 1 \\ -by_3y_4 \\ -by_3y_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \\ \vartheta_5 \\ \vartheta_6 \\ \vartheta_7 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим следующие значения параметров системы:  $a = 15$ ,  $b = 1$ ,  $c = 25.5$ ,  $d = 0.01$  с  $\alpha = 0.89$ . При этих параметрах система (3.7) имеет скрытый гиперхаотический аттрактор. Если мы выберем матрицу усиления управления  $K$  следующим образом:

$$K = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Тогда имеем  $|\arg(\lambda_i(A - K))| > \alpha\pi/2$ . Из (3.4) функции управления могут быть получены как:

$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \\ \vartheta_5 \\ \vartheta_6 \\ \vartheta_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3y_4 - x_3x_4 - 5(y_1 - x_1) \\ y_3y_5 - x_3x_5 - 5(y_2 - x_2) \\ (x_4^2 - y_4^2) + (x_5^2 - y_5^2) - 7(y_3 - x_3) \\ y_3y_4 - x_3x_4 - 15(y_1 - x_1) \\ y_3y_5 - x_3x_5 - 15(y_2 - x_2) - 3(y_5 - x_5) \\ -3(y_6 - x_6) \\ -3(y_7 - x_7) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Системы (3.7) и (3.8) с (3.10) решаются численно. На Рис. 3.1 построены решения (3.7) и (3.8) с начальными условиями  $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$  и  $y(0) = (3.3, 4, 10.01, -0.7, -12, 7, -4)^T$ . Наглядно показано, что синхронизация достигается через короткое время  $t = T_s$  ( $T_s \approx 10s$ ). На Рис. 3.2 видно, что ошибки синхронизации сходятся к нулю.

### 3.1.3 Приложение для систем защищенной коммуникации

В этом подразделе мы следуем идеям, изложенным в [203], и применяем схему для безопасной системы связи, основанной на гиперхаотической системе Спротта дробного порядка (3.7). Схема показана на Рис. 3.3. Схема состоит из следующих элементов:

- Гиперхаотическая система передатчика: это система Спротта дробного порядка (3.7), которая генерирует переменные псевдосостояния  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ .
- Блок шифрования: сигнал сообщения  $S(t)$ , подлежащий шифрованию, вводится в нелинейную функцию  $\Phi : \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  которая непрерывна по первому аргументу  $x \in \mathbb{R}^7$  и удовлетворяет следующему свойству: для каждой фиксированной пары  $(x, S) \in \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}$ , существует единственная функция  $\Psi : \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , которая непрерывна по первому аргументу  $x \in \mathbb{R}^7$ , такая, что  $\Psi(x, \Phi(x, S)) = S$ . Функция шифрования  $\Phi$  строится в терминах скрытых гиперхаотических псевдосостояний. В результате получается сигнал  $S_e(t)$ , содержащий сообщение, которое передается по одному из каналов.
- Каналы: по двум каналам передаются скрытые сигналы гиперхаотического состояния и зашифрованный сигнал, несущий информацию.
- Блок синхронизации: для приемной стороны системы связи реализуется блок синхронизации для восстановления скрытых гиперхаотических псевдосостояний сигналов и получения необходимой информации для расшифровки.
- Блок расшифровки: замаскированное сообщение расшифровывается с помощью нелинейной функции  $S_d(t) = \Psi(y(t), S_e(t))$ ,  $y(t) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)$ . В этом случае  $y(t)$

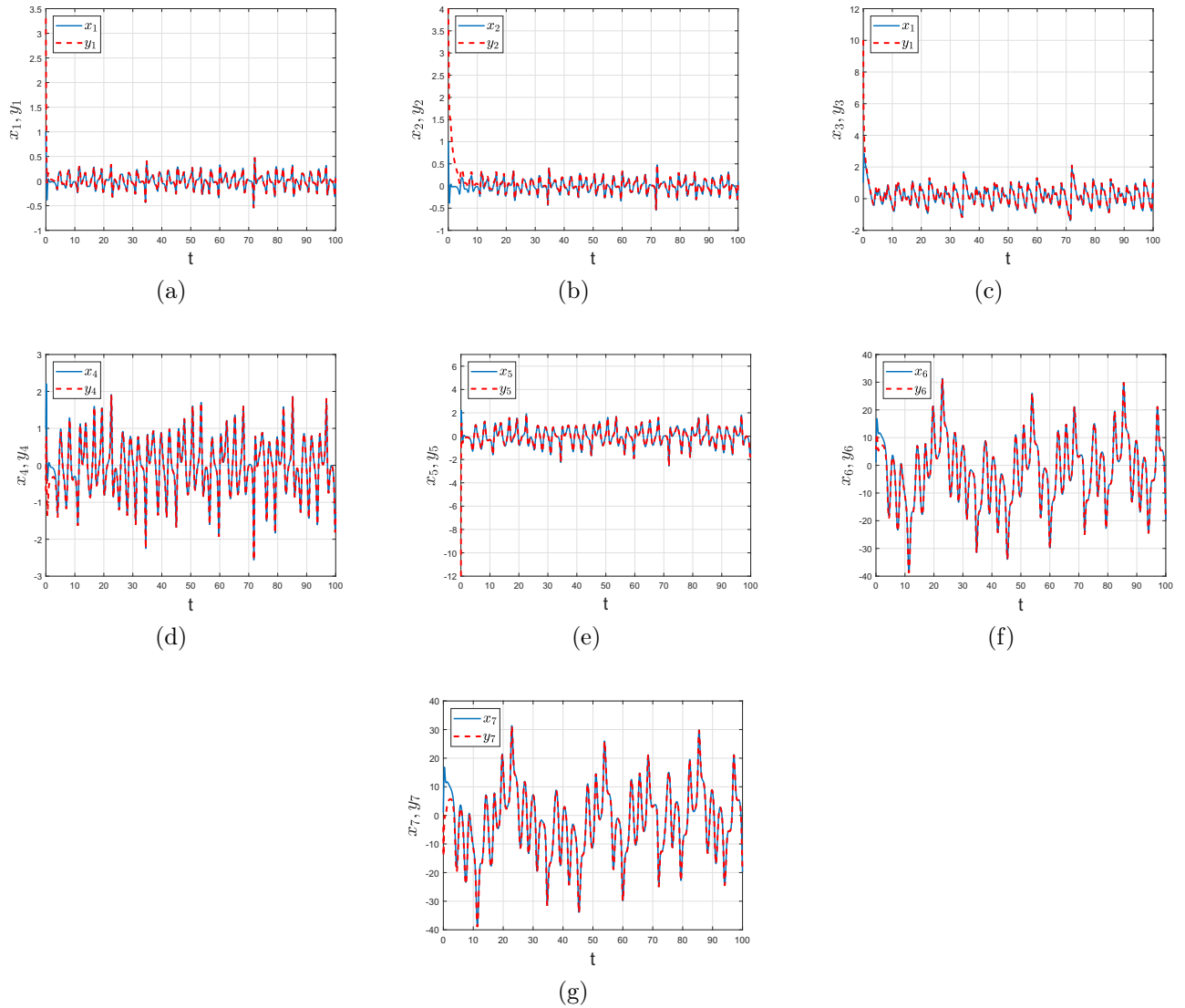


Рисунок 3.1 — Синхронизация скрытых гиперхаотических аттракторов систем (3.7) и (3.8), для  $a = 15$ ,  $b = 1$ ,  $c = 25.5$ ,  $d = 0.01$  с  $\alpha = 0.89$ .

через определенное время  $t = T_s$  является оценкой гиперхаотического состояния  $\mathbf{x}(t)$ , генерируемого блоком синхронизации.

### Численные результаты

Для иллюстрации схемы безопасной связи рассматривается комплексная система Спротта с дробным порядком, а численное моделирование проводится в MATLAB. Передатчик является реализацией (3.7), а приемник является реализацией (3.8). Как показано в подразделе 3.1.2 для  $\alpha = 0.89$  и  $(a, b, c, d) = (15, 1, 25.5, 0.01)$ , система (3.7) имеет скрытый гиперхаотический аттрактор. Синхронизация достигается через  $t = T_s$  ( $T_s \approx 10s$ ), если матрица коэффициентов усиления управления  $K$  выбрана так, как в (3.9).

Мы используем следующие функции шифрования и дешифрования соответственно:

$$S_e = \Phi(\mathbf{x}, S) = (5 + x_5)^2 + (3 + x_5^2)S, \quad (3.11)$$

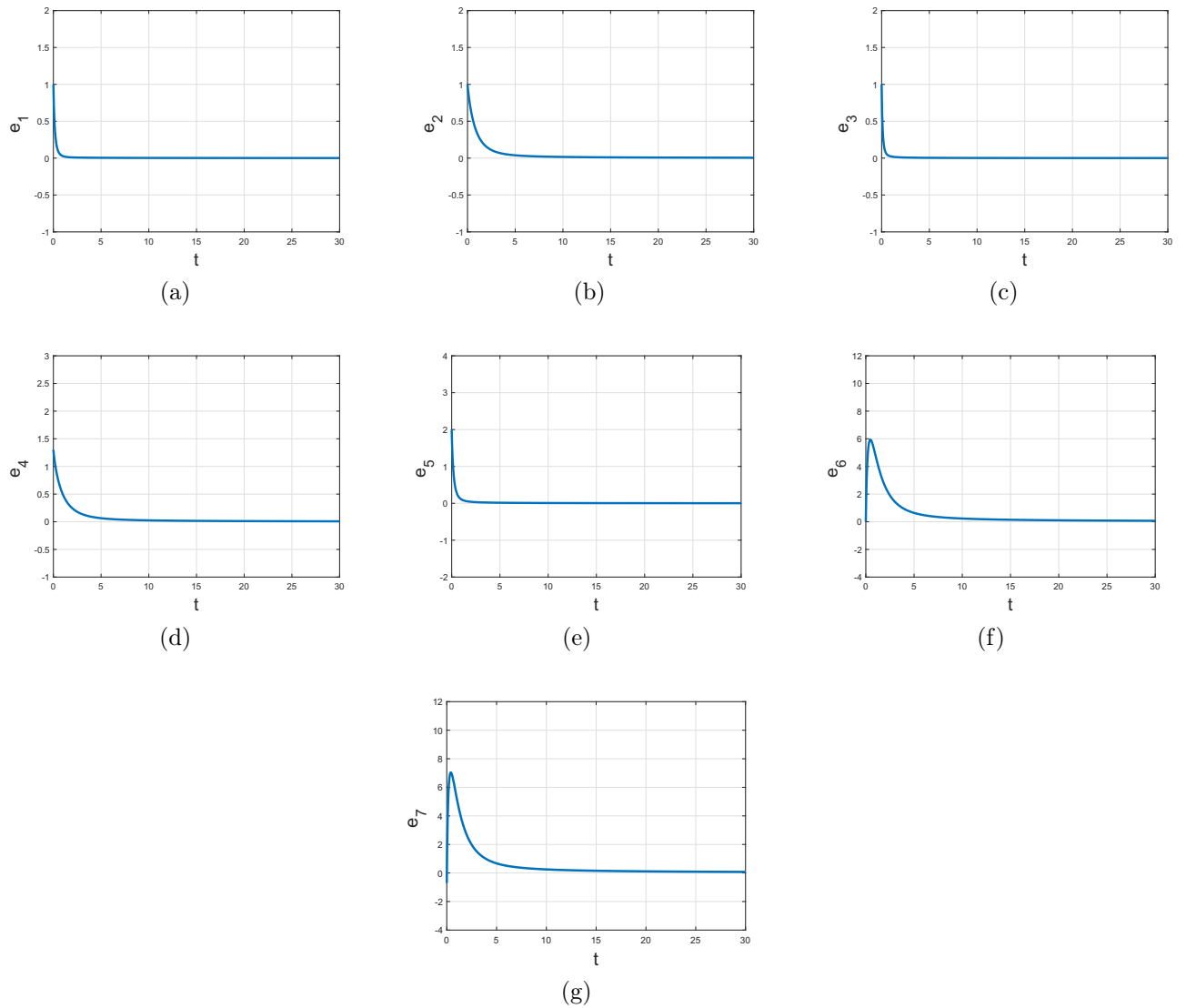


Рисунок 3.2 — Динамика эволюции ошибок описывается решениями системы (3.6).

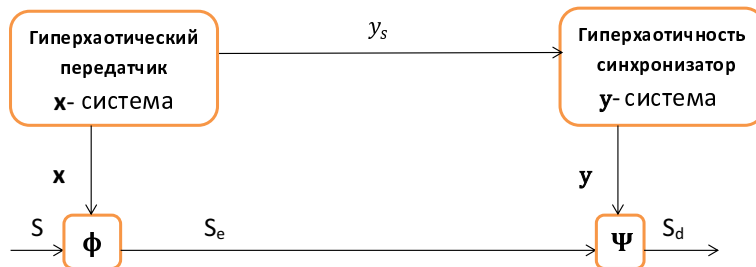


Рисунок 3.3 — Гиперхаотическая система защищенной связи.

$$S_d = \Psi(y, S_e) = -\frac{(5 + y_5)^2}{3 + y_5^2} + \frac{S_e}{3 + y_5^2}. \quad (3.12)$$

Информационный сигнал выбирается в двух формах

I. Обычный текст, который может содержать алфавиты, символы, цифры и пробелы. Для преобразования этого текстового сообщения в вектор чисел мы используем пакет "double" в программе MATLAB. Этот вектор чисел будет введен в одно из скрытых гиперхаотических псевдосостояний системы передатчика, как в (3.25). Приемник может расшифровать сообщение с помощью функции расшифровки (3.26). Используя пакет "char" в программе MATLAB, получатель может снова преобразовать эти числа в обычный текст. Например, предположим, что мы хотим отправить небольшой текст, как показано на Рис. 3.4. Зашифрованное сообщение изображено на Рис. 3.5, и видно, что переданное сообщение очень хорошо закодировано. На Рис. 3.6 показано расшифрованное сообщение, которое соответствует оригинальному тексту.

II. Второе сообщение - это аудиосигнал, где  $S(t)$  в интервале  $[0, 9]$ . Переданный и восстановленный речевые сигналы показаны на Рис. 3.7a и 3.7c. Зашифрованный сигнал изображен на Рис. 3.7b. Ошибка между переданным сигналом и восстановленным изображена на Рис. 3.7d. Из Рис. 3.7c и 3.7d видно, что информация волновой сигнал точно восстановлен.

(a)

**Synchronization of fractional-order hyperchaotic complex systems is an interesting phenomenon since it has several applications in applied sciences. Based on the complexity of hyperchaotic dynamical systems and unpredictability of hidden attractors, which may exist in there phase spaces and could be beneficial in secure communications, a scheme to derive the analytical formula of the control function is stated to study active control synchronization. Further comparison of this analytical formula with numerical experiments, yields an interesting agreement. A novel fractional-order complex Sprott system is proposed to study this kind of synchronization and its dynamics. A secure communication scheme based on the active control synchronization of hyperchaotic fractional-order complex Sprott system is presented. Two types of masked messages (plain text and audio signal) are considered as test examples.**

Рисунок 3.4 — Оригинальный текст.

### 3.1.4 Обсуждение

В данном разделе исследован метод синхронизации активного управления скрытыми гиперхаотическими аттракторами в комплекснозначных системах дробного порядка. Для достижения такого типа синхронизации было предложено комплексное обобщение системы Спротта дробного порядка. Исходя из сложности гиперхаотических динамических систем и непредсказуемости скрытых аттракторов, которые могут существовать в их фазовых пространствах, представлена схема защищенной коммуникации. В качестве тестовых примеров были рассмотрены два типа маскированных сообщений (обычный текст и аудиосигнал).

(b)

ńNJαιζ3U2αιFǎwεF2αι2CΰwζεF2αιwλ%2U6U3NJϱ6Uz3w2εFzζ2θϱλWδdζZNJZE6  
 0ZFZŵαιFαιε6U6ZεFαιDϱ3εαι206αι2αιZFαιz6Fε3wZZ6p6UŵλwϱλWFzŵεF2αιZFαιw  
 ϱλWF6bzzF6αιz6Zǎd56ε2ε36z2θϱλWδdζFεNJ2C3NJϱ6Uz3w2εFz6bNJαιw0FzŵλWZNJ  
 ZE60Zŵαι65αιϱ66FzεwζWFεNJ2C3F6b6αιwεεUwzε2UZ»!3Fz30wNJZ6Z6αι6CF  
 zFŵλWFαιz6z5U6z2005αιFzŵεF2αιz»wz3606ε26b6Ufp6ε36ŵαιwλWJεFzŵλC2U  
 05λw2Cε36z2αιεU2λC5αιzεF2αιFZZεwε6bε2ZE56bNJwzεFp6z2αιεU2λWZNJαιz3U2  
 αιFǎwεF2αιǎηϱ2αιz2θϱλwϱFZ2αι2Cε3FzŵαιwλWJεFzŵλC2U05λw!Fε3αι506Ufz  
 wλWδdζϱ6Uf06αιεZ»wαιFαιε6U6ZεFαιDŵD06606αιεFZC25αι6ǎqαι2p6λCŵwzεF  
 2αιwλ%2U6U3Uz2θϱλWδdζńϱ2εεZNJZE60FZϱ2ϱ2Z6b6C2ε36CFUZεεF06Fαιε3F  
 Z!20Kε2ZE56bNJε3FZKF6zCZNJαιz3U2αιFǎwεF2αιwαι6FεZ6bNJαιw0FzŵλWǎ36ZεwζF  
 λFεNJzUFε6Ufŵ2Cε36CŵwzεF2αιwλ%2U6U3U6bNJαιw0FzŵλWZNJZE60ŵ6ŵαιw  
 λWJǎ6bǎqz6z5U6z2005αιFzŵεF2αιz3606zŵz62αιε36wzεFp6z2αιεU2λWZNJαιz3  
 U2αιFǎwεF2αι2C3NJϱ6Uz3w2εFzCŵwzεF2αιwλ%2U6U3Uz2θϱλWδdζńϱ2εεZNJZE6  
 0FZϱ66z6αιε6bǎń!2εNJϱ6z2C0wzK6b06ZZŵD6z-w56fz2F2αιwλWwαι6ϱλWwFαιε  
 6dζε°ŵ6U6z2αιzF66U66wzε6zε6dζŵθϱλW6Zǎ

Рисунок 3.5 — Зашифрованный текст.

(c)

Synchronization of fractional-order hyperchaotic complex systems is an interesting phenomenon since it has several applications in applied sciences. Based on the complexity of hyperchaotic dynamical systems and unpredictability of hidden attractors, which may exist in there phase spaces and could be beneficial in secure communications, a scheme to derive the analytical formula of the control function is stated to study active control synchronization. Further comparison of this analytical formula with numerical experiments, yields an interesting agreement. A novel fractional-order complex Sprott system is proposed to study this kind of synchronization and its dynamics. A secure communication scheme based on the active control synchronization of hyperchaotic fractional-order complex Sprott system is presented. Two types of masked messages (plain text and audio signal) are considered as test examples.

Рисунок 3.6 — Расшифрованный текст.

## 3.2 Синхронизация с запаздыванием для комплексных гиперхаотических систем

Данная работа направлена на исследование синхронизации запаздывания гиперхаотических комплексных систем, что мотивировано широким спектром приложений этого подхода в нелинейных науках (например, безопасные связи, методы шифрования и т.д.). Представлена схема для исследования синхронизации запаздывания гиперхаотических комплексных систем. Функции управления получены аналитически, и для проверки согласованности схемы проведено соответствующее численное моделирование. Комплексная система Лоренца рассматривается как интересный пример для изучения такого рода синхронизации. В случае мультиустойчивости и скрытых аттракторов, показано, что выбор параметров управления

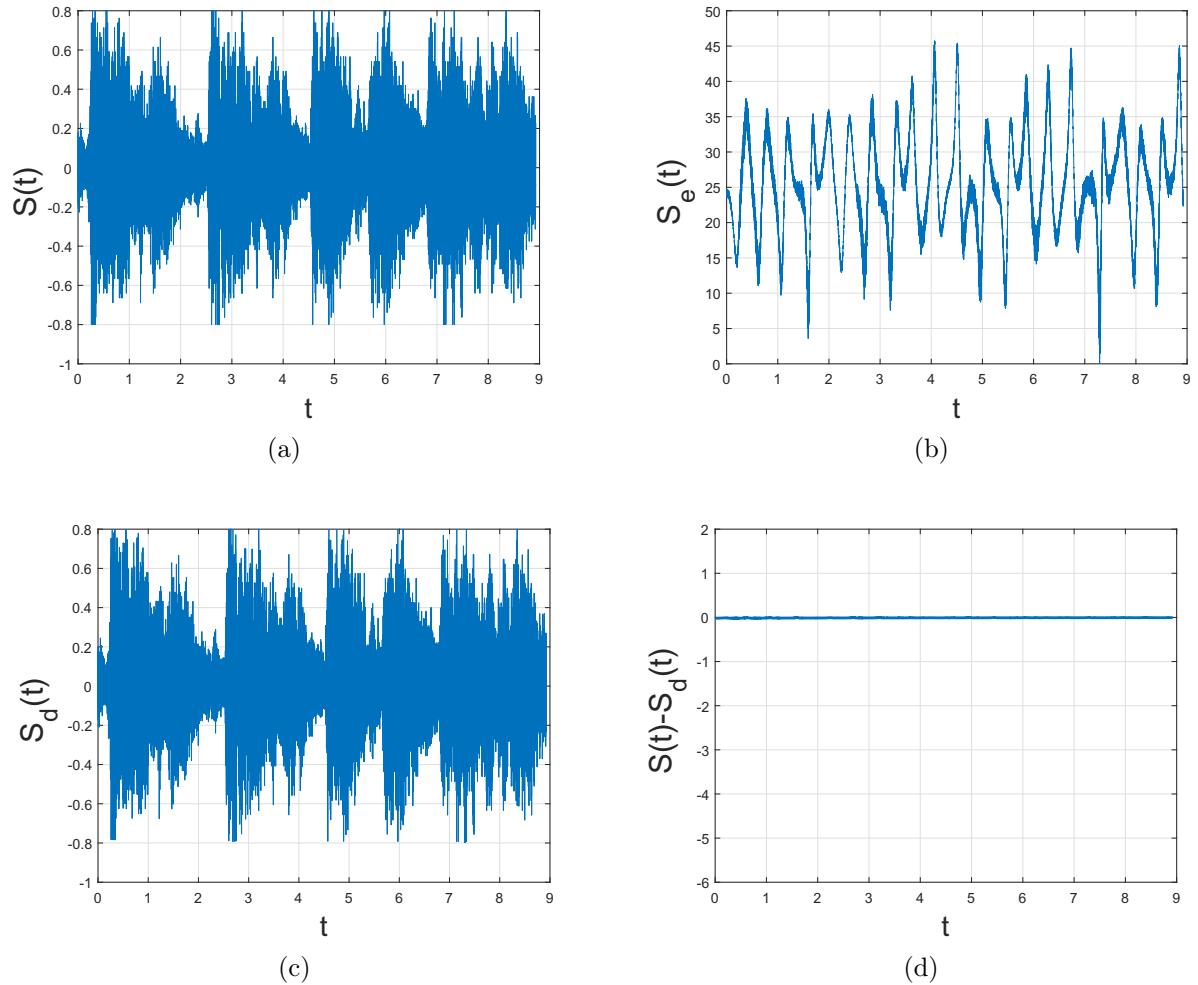


Рисунок 3.7 — Результаты моделирования защищенной связи для голосового сигнала с использованием гиперхаотической системы Спротта дробного порядка (a) Оригинальный сигнал  $S(t)$  (b) Зашифрованный сигнал  $S_e(t)$  (c) Восстановленный сигнал  $S_d(t)$  (d) Ошибка расшифровки  $S(t) - S_d(t)$ .

является не простой. На основе сложности гиперхаотических динамических систем, которые могут быть полезны в защищенных связях, представлена соответствующая схема, а в качестве тестовых примеров рассмотрены два типа зашифрованных сообщений (открытый текст и аудиосигнал).

### 3.2.1 Предварительные сведения

Синхронизация хаоса является привлекательным явлением в нелинейных науках благодаря широким областям применения в физических системах, сетях, обработке изображений, безопасных (см., например, [91; 204–206]). В данной работе мы сосредоточимся на так называемой синхронизации с запаздыванием для гиперхаотических систем, поскольку это наиболее

целесообразно в инженерных проблемах. В связи временные задержки неизбежно существуют из-за конечной скорости передачи сигнала или влияния памяти [207; 208].

В этом разделе представлена схема реализации синхронизации запаздывания гиперхаотических комплексных систем. Рассматривается запаздывающая синхронизация двух идентичных гиперхаотических комплексных систем Лоренца. На основе такой синхронизации разработана и применена схема безопасной связи.

### 3.2.2 Новый метод синхронизации с запаздыванием гиперхаотических комплексных систем

В этом подразделе мы набросаем схему получения функций управления для достижения синхронизации с запаздыванием двух идентичных комплекснозначных систем. Предположим, что ведущая и ведомая системы в матричной форме читаются:

$$\dot{x} = F(x)A + G(x), \quad (3.13)$$

$$\dot{y} = F(y)A + G(y) + \theta, \quad (3.14)$$

где  $x, y \in \mathbb{C}^n$  - комплексные векторы состояния,  $F \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $A \in \mathbb{C}^m$  - постоянная матрица параметров системы,  $G \in \mathbb{C}^n$  - непрерывная векторная функция,  $\theta : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^n$  - векторная функция управления ведомой системы (3.14). Ошибка синхронизации запаздывания может быть записана следующим образом:

$$e(t) = y(t) - x(t - \tau), \quad (3.15)$$

где  $\tau > 0$  - временная задержка синхронизации.

**Определение 3.1.** Ведущая система (3.13) и ведомая система (3.14) достигают синхронизации запаздывания, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t - \tau)\| = 0.$$

Следуя идеям из [97; 207], мы выведем соответствующее управление для достижения синхронизации запаздывания между системами (3.13) и (3.14).

**Теорема 3.2.** Синхронизация запаздывания между ведущей системой (3.13) и ведомой системой (3.14) будет достигнута, если векторная функция управления построена следующим образом:

$$\theta = (F(x(t - \tau)) - F(y(t))A + (G(x(t - \tau)) - G(y(t)) - Ke, \quad (3.16)$$

где  $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$  - положительно определенная диагональная матрица усиления.



*Доказательство.* Производная по времени от ошибки синхронизации (3.15) имеет вид

$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) - \dot{x}(t - \tau). \quad (3.17)$$

Из (3.13) и (3.14) можно получить

$$\dot{e}(t) = (F(y(t)) - F(x(t - \tau)))A + (G(y(t)) - G(x(t - \tau))) + \theta. \quad (3.18)$$

Определите следующую функцию Ляпунова:

$$V(e) = \frac{1}{2}(e^*e). \quad (3.19)$$

Оператор (\*) обозначает сопряженное транспонирование.

Производная по времени от  $V$  имеет вид

$$\dot{V}(e) = \frac{1}{2}(e^*\dot{e} + \dot{e}^*e). \quad (3.20)$$

Подставляя (3.15) и (3.18) с (3.16) в (3.19), получаем

$$\dot{V}(e) = -e^*Ke. \quad (3.21)$$

Поскольку  $K$  - положительно определенная матрица, то  $e^*Ke > 0$ . Таким образом,  $\dot{V}(e) < 0$ . Ясно, что  $V$  положительно определена,  $\dot{V}(e)$  отрицательно определена и  $V(e) \rightarrow \infty$  как  $e \rightarrow \infty$ . Поэтому ошибка  $e(t)$  глобально асимптотически устойчива, т.е.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ . Это завершает доказательство.  $\square$

**Замечание 3.1.** Если  $\tau = 0$  в (3.15), то мы получаем полную синхронизацию между системами (3.13) и (3.14).

**Замечание 3.2.** Если состояния  $x, y \in \mathbb{R}^n$  в (3.13) и (3.14) вещественны, то получается синхронизация запаздывания между системами (3.13) и (3.14) с вещественными состояниями.

**Замечание 3.3.** Если  $\tau = 0$  в (3.15) и состояния  $x, y \in \mathbb{R}^n$  в (3.13) и (3.14) вещественны, то получается полная синхронизация между системами (3.13) и (3.14) с вещественными состояниями.

### 3.2.3 Синхронизация с запаздыванием двух идентичных гиперхаотических комплексных систем Лоренца

Теперь мы исследуем синхронизацию с запаздыванием между двумя идентичными гиперхаотическими комплексными системами Лоренца. Ведущая и ведомая системы определя-

ются следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{X}_m = \sigma(Y_m - X_m), \\ \dot{Y}_m = rX_m - aY_m - X_mZ_m, \\ \dot{Z}_m = -bZ_m + \frac{1}{2}(X_m^*Y_m + X_mY_m^*), \end{cases} \quad (3.22)$$

и

$$\begin{cases} \dot{X}_s = \sigma(Y_s - X_s) + \theta_1, \\ \dot{Y}_s = rX_s - aY_s - X_sZ_s + \theta_2, \\ \dot{Z}_s = -bZ_s + \frac{1}{2}(X_s^*Y_s + X_sY_s^*) + \theta_3, \end{cases} \quad (3.23)$$

где  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  - комплексные функции управления. Здесь мы используем индексы  $m$  и  $s$  для ведущей и ведомой систем, соответственно. Ведущая система (3.22) может быть записана в форме (3.13) так, что:  $\mathbf{x} = (X_m, Y_m, Z_m)^T = (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4, x_5)^T$ ,  $A = (\sigma, r, a, b)^T$ ,

$$F(\mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} Y_m - X_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_m & -Y_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_m \end{pmatrix}, \quad G(\mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -X_mZ_m \\ \frac{1}{2}(X_m^*Y_m + X_mY_m^*) \end{pmatrix}.$$

Таким же образом мы можем написать ведомую систему (3.23) в форме (3.14) так, что:  $\mathbf{y} = (X_s, Y_s, Z_s)^T = (y_1 + iy_2, y_3 + iy_4, y_5)^T$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ ,

$$F(\mathbf{y}(t)) = \begin{pmatrix} Y_s - X_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_s & -Y_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_s \end{pmatrix}, \quad G(\mathbf{y}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -X_sZ_s \\ \frac{1}{2}(X_s^*Y_s + X_sY_s^*) \end{pmatrix}.$$

Используя теорему 3.2, функции управления (3.16) могут быть записаны следующим образом:

$$\theta = \begin{pmatrix} \sigma(Y_{m\tau} - Y_s + X_s - X_{m\tau}) - k_1e_1 \\ r(X_{m\tau} - X_s) + a(Y_s - Y_{m\tau}) + X_sZ_s - X_{m\tau}Z_{m\tau} - k_2e_2 \\ b(Z_s - Z_{m\tau}) + \frac{1}{2}(X_{m\tau}^*Y_{m\tau} - X_s^*Y_s + X_{m\tau}Y_{m\tau}^* - X_sY_s^*) - k_3e_3 \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

где  $X_{m\tau} = X_m(t - \tau)$ ,  $Y_{m\tau} = Y_m(t - \tau)$ ,  $Z_{m\tau} = Z_m(t - \tau)$ .

Как мы обсуждали в главе 2, при  $r_2 = -e$  комплексная система Лоренца (2.4) имеет следующие состояния равновесия:  $S_0, S_\theta$ . Для параметров  $\sigma = 10, r_1 = 24, r_2 = e = -0.001, b = 8/3$ , можно визуализировать скрытое хаотическое множество. Используя следующий адаптивный алгоритм [47], для траектории с начальной точкой  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 5$ , можно оценить соответствующие локальные конечно-временные показатели Ляпунова на временном интервале  $[0, 100]$ :  $LE_1 = 0.7601, LE_2 = 0, LE_3 = -0.0174, LE_4 = -11.0006, LE_5 = -14.4094$ . Для параметров  $\sigma = 10, r_1 = 28, r_2 = e = -0.001, b = 8/3$ , можно визуализировать гиперхаотический самовозбуждающийся аттрактор, с начальной точкой  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$ , соответствующие локальные конечно-временные показатели Ляпунова на временном интервале  $[0, 100]$ :  $LE_1 = 0.8439, LE_2 = 0.0198, LE_3 = 0, LE_4 = -11.0198, LE_5 = -14.5100$ .

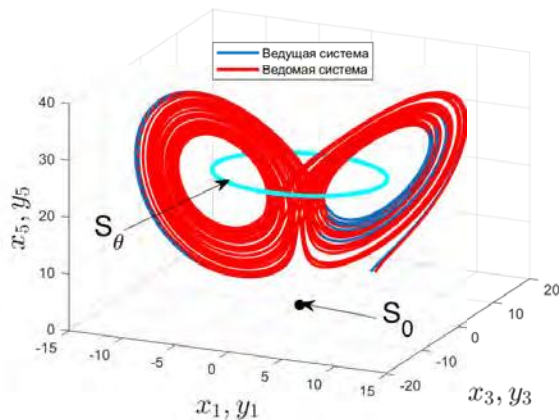
Отметим, что системы с мультиустойчивостью и существованием скрытых аттракторов могут привести к некорректной работе таких систем в режимах синхронизации. Ниже показано, что выбор матрицы коэффициентов усиления управления для реализации синхронизации отличается для различных вариантов начальных данных из-за мультиустойчивости и скрытых множеств.

**Случай 1:** Рассмотрим начальные данные комплексных систем Лоренца на одном из симметричных скрытых множеств: ведущая система (3.22) –  $x(0) = (5 + 5i, 5 + i5, 5)^T$ ; ведомая система (3.22) –  $y(0) = (5.4 + 5i, 5 + 5i, 5)^T$ . С параметрами  $\sigma = 10, r_1 = 24, r_2 = e = -0.001, b = 8/3$ , матрица усиления управления в виде:  $K = \text{diag}(15.99, 15.99, 15.99)$  и  $\tau = 0.5$  (см. Рис. 3.8).

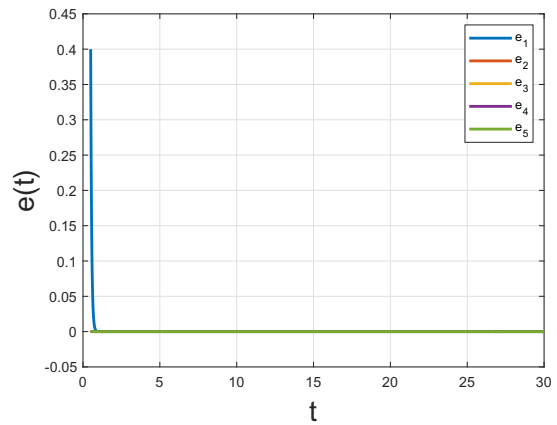
**Случай 2:** Рассмотрим начальные данные комплексных систем Лоренца на двух симметричных скрытых множествах: ведущая система (3.22) –  $x(0) = (5 + 5i, 5 + i5, 5)^T$ ; ведомая система (3.22) –  $y(0) = (-5 - 5i, -5 - 5i, 5)^T$ . С параметрами  $\sigma = 10, r_1 = 24, r_2 = e = -0.001, b = 8/3$ , матрица усиления управления в виде:  $K = \text{diag}(7.99, 7.99, 7.99)$  и  $\tau = 0.5$  (см. Рис. 3.9).

**Случай 3:** Рассмотрим начальные данные комплексных систем Лоренца на одном из симметричных скрытых множеств и устойчивые состояния равновесия  $S_\theta$ : ведущая система (3.22) –  $x(0) = (5 + 5i, 5 + i5, 5)^T$ ; ведомая система (3.22) –  $y(0) = (7.8309 - 0.1033i, 7.8309 - 0.1033i, 23)^T$ . С параметрами  $\sigma = 10, r_1 = 24, r_2 = e = -0.001, b = 8/3$ , матрица усиления управления в виде:  $K = \text{diag}(111, 111, 111)$  и  $\tau = 0.5$  (см. Рис. 3.10).

**Случай 4:** Рассмотрим начальные данные комплексных лоренцевых систем на одном из симметричных самовозбуждающихся аттракторов и неустойчивое нулевое состояние равновесия: ведущая система (3.22) –  $x(0) = (1 + i, 1 + i, 1)^T$ ; ведомая система (3.22) –  $y(0) = (0.1 + 0.1i, 0.1 + 0.1i, 0.1)^T$ . С параметрами  $\sigma = 10, r_1 = 28, r_2 = e = -0.001, b = 8/3$ , матрица усиления управления в виде:  $K = \text{diag}(11, 11, 11)$  и  $\tau = 0.5$  (см. Рис. 3.11).



(a)



(b)

Рисунок 3.8 — **Случай 1:** Синхронизация с начальными данными комплексных систем Лоренца на одном скрытом множестве.

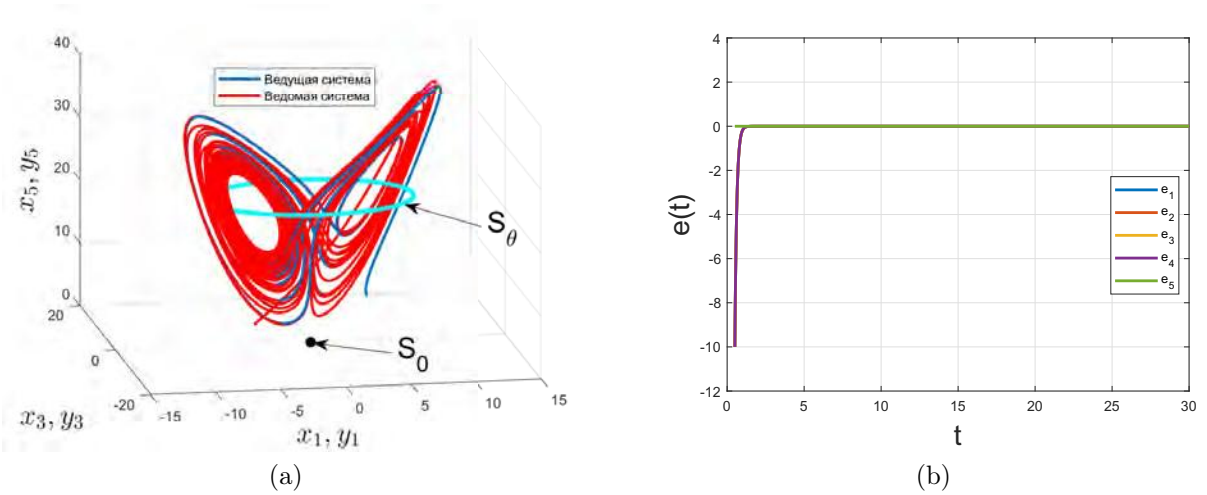


Рисунок 3.9 — **Случай 2:** Синхронизация с начальными данными комплексных систем Лоренца на двух симметричных скрытых множествах.

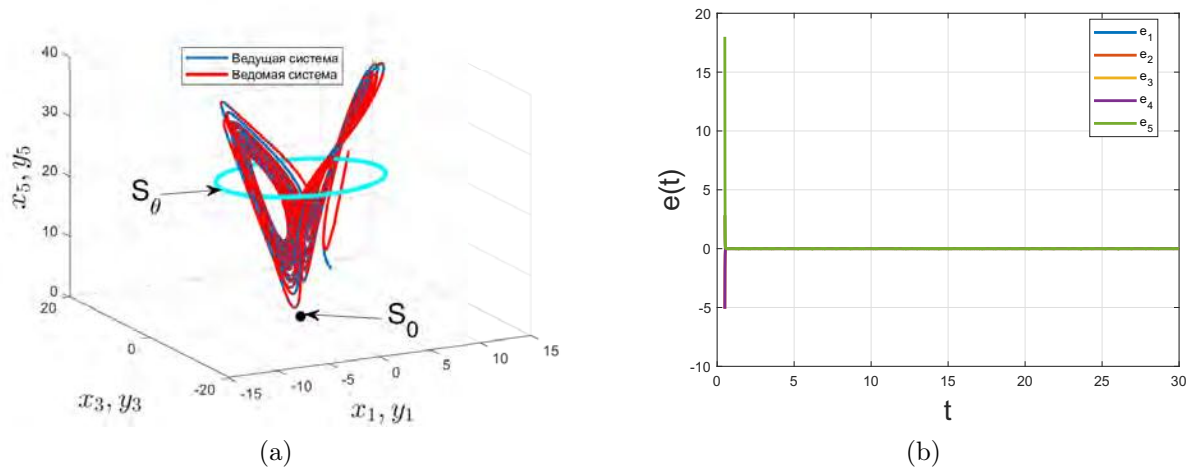


Рисунок 3.10 — **Случай 3:** Синхронизация с начальными данными комплексных систем Лоренца на скрытом множестве и устойчивые состояния равновесия  $S_\theta$ .

### 3.2.4 Приложение для систем защищенной коммуникации

Здесь мы применяем ту же схему безопасной связи, которая описана в предыдущем разделе. Мы рассматриваем ведущего (3.22) и ведомого (3.23), которые генерируют переменные состояния  $x(t) = (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4, x_5)^T$  и  $y(t) = (y_1 + iy_2, y_3 + iy_4, y_5)^T$  как системы передатчика и приемника, соответственно.

#### Численные результаты

Для  $\sigma = 10, r_1 = 28, r_2 = e = -0.001, b = 8/3$  система (3.13) имеет гиперхаотический самовозбуждающийся аттрактор (см. Рис. 3.11). Синхронизация между передающей (3.22) и принимающей (3.23) системами достигается через  $t = T_s (T_s \approx 3s)$ .

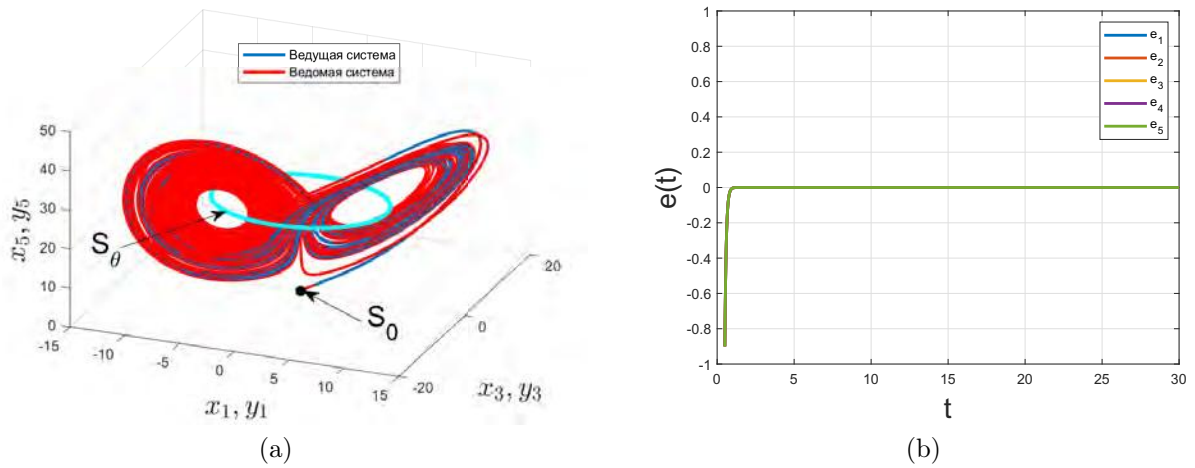


Рисунок 3.11 — **Случай 4:** Синхронизация с начальными данными комплексных систем Лоренца на самовозбуждающемся аттракторе и неустойчивом нулевом состоянии равновесия.

Мы используем следующие функции шифрования и дешифрования соответственно:

$$S_e = \Phi(x, S) = (1 + x_3^2) + (2 + x_3^2)S, \quad (3.25)$$

$$S_d = \Psi(y, S_e) = -\frac{1 + y_3^2}{2 + y_3^2} + \frac{S_e}{2 + y_3^2}. \quad (3.26)$$

Информационный сигнал выбирается в двух формах

**I.** Небольшой открытый текст, изображенный на Рис. 3.12. Зашифрованное сообщение показано на Рис. 3.13, и можно убедиться, что переданное сообщение сильно закодировано. На Рис. 3.14 показано расшифрованное сообщение, которое совпадает с оригинальным текстом.

**II.** Второе сообщение - это звуковой сигнал, где  $S(t)$  находится в интервале  $[0, 8.5]$ . Переданная и восстановленная формы сигналов речи показаны на Рис. 3.15a и 3.15c. Зашифрованный сигнал изображен на Рис. 3.15b. Ошибка между переданным речевым сигналом и восстановленным изображена на Рис. 3.15d. Из Рис. 3.15c и 3.15d видно, что информационный волновой сигнал восстановлен точно.

### 3.2.5 Обсуждение

Была разработана схема для достижения синхронизации с запаздыванием двух идентичных комплекснозначных систем. Для проверки эффективности схемы было проведено численное моделирование. Для достижения такого типа синхронизации была рассмотрена комплексная система Лоренца. Основываясь на сложности гиперхаотических динамических

(a)

This work is aimed at study a lag synchronization of hyperchaotic complex systems, which is motivated by a wide range of applications of this approach in nonlinear sciences (e.g., secure communications, encryption techniques, etc.). A scheme to study lag synchronization of hyperchaotic complex systems is presented. The control functions are analytically derived and the related numerical simulations are carried out to verify the consistency of the scheme. The complex Lorenz system is considered as an interesting example to study this kind of synchronization. In the case of multistability and hidden attractors, it is shown that the choice of the control parameters is not straightforward. Based on the complexity of hyperchaotic dynamical systems, which may be useful in secure communications, a corresponding scheme is presented, and two types of encrypted messages (plain text and audio signal) are considered as test examples.

Рисунок 3.12 — Оригинальный текст.

(b)

... (The text in this block is heavily garbled and appears to be a corrupted or encrypted version of the text in block (a). It contains many nonsensical characters and symbols.)

Рисунок 3.13 — Шифрованный текст.

систем, была представлена схема защищенной коммуникации. В качестве тестовых примеров были рассмотрены два типа маскированных сообщений (обычный текст и аудиосигнал).

(C)

This work is aimed at study a lag synchronization of hyperchaotic complex systems, which is motivated by a wide range of applications of this approach in nonlinear sciences (e.g., secure communications, encryption techniques, etc.). A scheme to study lag synchronization of hyperchaotic complex systems is presented. The control functions are analytically derived and the related numerical simulations are carried out to verify the consistency of the scheme. The complex Lorenz system is considered as an interesting example to study this kind of synchronization. In the case of multistability and hidden attractors, it is shown that the choice of the control parameters is not straightforward. Based on the complexity of hyperchaotic dynamical systems, which may be useful in secure communications, a corresponding scheme is presented, and two types of encrypted messages (plain text and audio signal) are considered as test examples.

Рисунок 3.14 — Расшифрованный текст.

### 3.3 Адаптивная синхронизация для общего класса комплексных гиперхаотические системы с неопределенными параметрами

Целью данной работы является исследование адаптивной синхронизации для общего класса комплексных гиперхаотических моделей с неопределенными параметрами и предлагается новый алгоритм для достижения этого типа синхронизации. Из-за сложного поведения гиперхаотических моделей которые могут быть эффективны в безопасных связях, специальное управление, основанное на адаптивных законах параметров построено аналитически, и соответствующие результаты моделирования для подтверждения точности алгоритма. Комплексная модель Рабиновича и модель Чуа используются в качестве привлекательных примеров для изучения предлагаемой техники синхронизации. Предложена стратегия безопасной связи, улучшающая общую криптосистему; схема разработана таким образом, чтобы разделить сообщение и вставить некоторый бит информационного сигнала в параметры модуляции, а другой бит - в состояния системы передатчика, что затрудняет дешифровку злоумышленниками. Между тем, адаптивные методы и функция дешифрования на стороне приемника могут точно восстановить сообщение. Различные типы закодированных сообщений исследуются для проверки надежности предлагаемой схемы (например, текст и серые изображения с различными масштабами белого гауссовского шума).

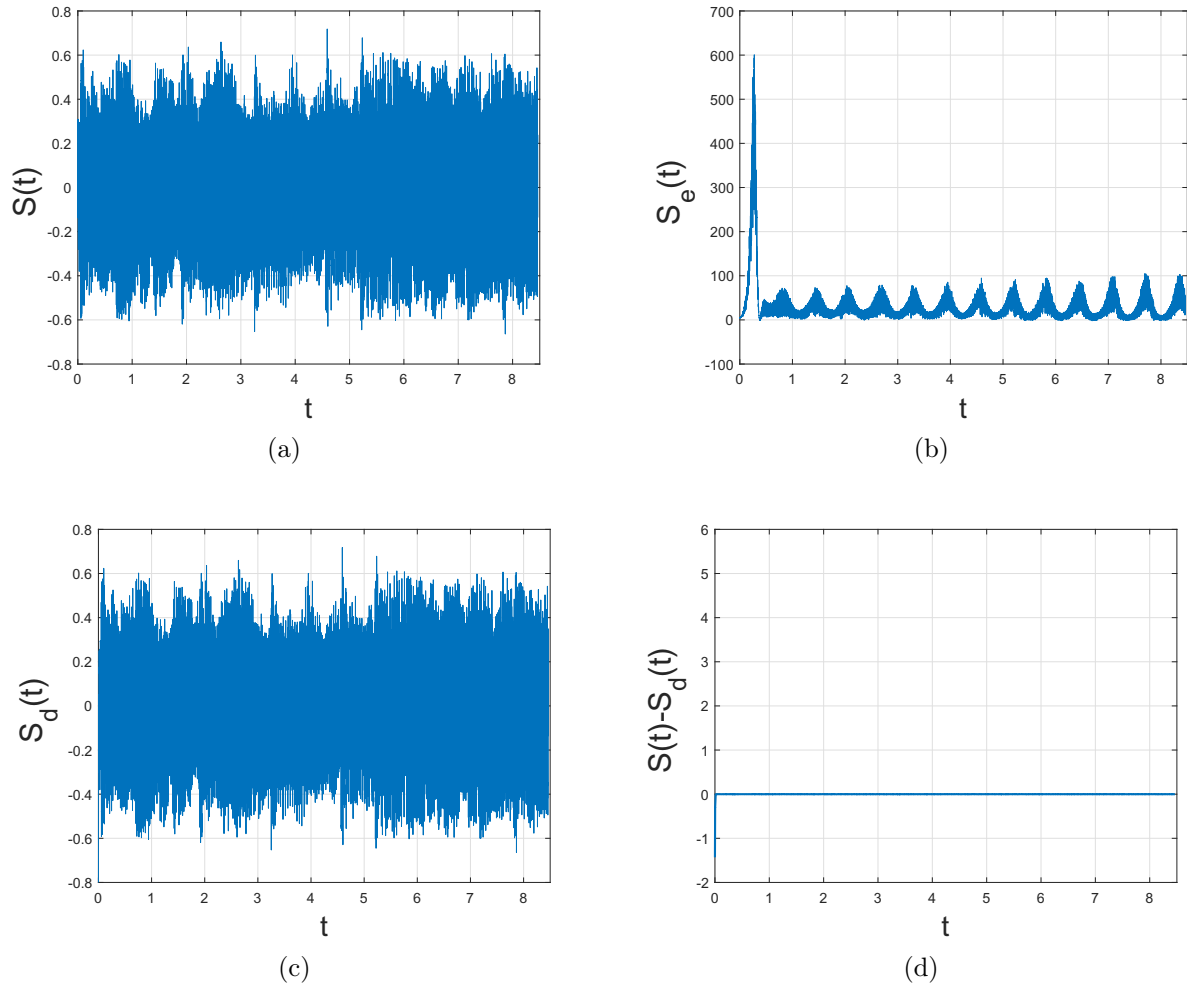


Рисунок 3.15 — Результаты моделирования защищенной связи для голосового сигнала с использованием комплексной системы Лоренца (а) Исходный сигнал  $S(t)$  (б) Зашифрованный сигнал  $S_e(t)$  (с) Восстановленный сигнал  $S_d(t)$  (д) Ошибка дешифрования  $S(t) - S_d(t)$ .

### 3.3.1 Предварительные сведения

Синхронизация и управление хаотическими динамическими системами являются важными темами в прикладной науке из-за обширных областей их применения [90; 92; 209]. С тех пор, как впервые была предложена эффективная стратегия синхронизации для синхронизации двух хаотических идентичных систем [93], были исследованы и разработаны различные виды стратегий синхронизации, включая полную синхронизацию [53; 70; 94; 95], синхронизация с запаздыванием [52; 210], кластерная синхронизация [98; 211], адаптивная синхронизация [99; 100], проективная синхронизация [212; 213], и многие другие (см., например, г., [214–217]). Исследуются другие стратегии синхронизации в системах с временными задержками и стохастических хаотических системах (см., например, [218–220]). До сих пор синхронизация хаоса подробно исследовалась для систем, моделируемых с помощью вещественных



состояний. Между тем, многие проблемы в прикладной науке, например, физика детандерного лазера [55; 110; 111], моделируются с помощью комплексной модели. Использование комплексных моделей в режимах синхронизации, а не вещественных, а также последующее умножение количества переменных может привести к более сложному поведению соответствующей системы, что, в свою очередь, является критичным для различных приложений, включая безопасную связь и проектирование криптосистем [221; 222].

Многие методы синхронизации хаоса строятся с использованием известных параметров систем, и соответствующие регуляторы могут быть легко выведены. Однако иногда параметры систем в инженерных приложениях могут быть неопределенными заранее и меняться со временем [222; 223]. Поэтому более целесообразно исследовать синхронизацию и разработать соответствующие методы для таких динамических систем с неопределенными параметрами. В работе [222] Махмуд предложил схему адаптивной синхронизации для класса комплексных гиперхаотических моделей с неопределенными параметрами, которая в общем виде может быть записана следующим образом:

$$\dot{x} = F(x)A + G(x), \quad (3.27)$$

где  $x \in \mathbb{C}^n$  - комплексный вектор состояния,  $F \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $A \in \mathbb{C}^m$  - вектор параметров модели,  $G \in \mathbb{C}^n$  - вектор нелинейной функции. Другая схема для реализации адаптивной двойной синхронизации того же класса (3.27) с неопределенными параметрами была предложена в [224]. Многие комплексные модели могут быть записаны в форме (3.27), например, комплексная система Лоренца [111], комплексная система Лю [177] и т.д. Отметим, что для всех систем в форме (3.27) параметры системы связываются с линейными членами, и только в этом случае применимы схемы в [222; 224]. Как видно, форма (3.27) не охватывает случай, когда параметры связаны с линейными и нелинейными членами. Для преодоления этой трудности в данной работе мы предлагаем общую формулу для комплексных моделей в следующем виде:

$$\dot{x} = F(x)A + G(x) + H(x)B, \quad (3.28)$$

где  $x, F, G$  определяются аналогично (3.27),  $A, B \in \mathbb{C}^m$  - постоянные векторы параметров модели, которые ассоциируются с линейными и нелинейными членами, соответственно,  $H \in \mathbb{C}^{n \times m}$ . Заметим, что если  $B = 0$ , то мы получаем формулу (3.27). Таким образом, целью нашей работы является разработка общей схемы для достижения адаптивной синхронизации с неопределенными параметрами, применимой для систем в форме (3.28). Качество синхронизации схемы будет рассмотрено на примере комплексной гиперхаотической модели Рабиновича [130] и модели Чуа [13].

Хаотические системы играют важную роль в системах защищенной связи из-за их сложного поведения и чувствительной зависимости от начальных условий. В литературе предложено множество схем хаотических (гиперхаотических) защищенных систем связи. Основные идеи этих методов заключаются в следующем. Некоторые схемы предназначены для передачи сообщения между передатчиком и приемником через один канал общего пользования,

и сообщение с помощью подходящей функции шифрования внедряется в состояния передатчика (см., например, [221; 225–227]). В других подходах используется тот же алгоритм, но вместо одного публичного канала есть два канала: один для передачи состояний системы передатчика, а второй - для передачи зашифрованного сообщения, пытаясь получить более быструю синхронизацию и безопасность (см., например, [52; 53; 203]). Кроме того, вместо вставки сообщения в состояния передатчика разрабатывается схема другого типа, в которой сообщение вводится в параметры передатчика, и с помощью адаптивных законов параметров сообщение может быть восстановлено (см., например, [224; 228]).

В этой работе мы предлагаем новую схему защищенной связи, основанную на гиперхаотике. Схема предназначена для разделения сообщения и распределения его между двумя каналами, что повышает безопасность системы связи и усложняет задачу дешифровки злоумышленниками. Некоторый бит информационного сигнала вводится в параметры модуляции и передается по одному из двух каналов; тем временем другой бит вводится в состояния передатчика и передается по второму каналу. На стороне приемника сообщение может быть точно извлечено с помощью адаптивных методов и функции дешифрования. Предложенная схема надежна к различным масштабам белого гауссовского шума, что будет продемонстрировано ниже.

Исходя из вышеприведенного анализа, целью данной работы является разработка новой стратегии для достижения адаптивной синхронизации для общего класса гиперхаотических комплексных моделей с неопределенными параметрами. Опираясь на этот тип стратегии синхронизации, на основе комплексной модели Рабиновича организуется и тестируется новая схема безопасной связи с улучшенной новой криптосистемой.

### 3.3.2 Новый метод адаптивной синхронизации для общего класса гиперхаотических комплексных моделей с неопределенными параметрами

В данном подразделе мы предлагаем схему получения векторной функции управления для реализации адаптивной синхронизации между парой идентичных систем с комплексными переменными, имеющими полностью неопределенные параметры. Пусть ведущая и ведомая системы имеют следующую форму:

$$\dot{x} = F(x)A + G(x) + H(x)B, \quad (3.29)$$

$$\dot{y} = F(y)\hat{A} + G(y) + H(y)\hat{B} + \theta(x,y). \quad (3.30)$$

Здесь  $x, y \in \mathbb{C}^n$  - комплексные векторы состояния,  $A, B \in \mathbb{C}^m$  - постоянные векторы параметры ведущей системы,  $\hat{A}, \hat{B}$  - неопределенные постоянные векторы параметров ведомой системы,  $\theta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  - вектор функции управления ведомой системы (3.30). Ошибка модуляции

параметров  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  определяются следующим образом:  $e_A = \hat{A} - A$ ,  $e_B = \hat{B} - B$ . Состояния ошибки могут быть выражены следующим образом:

$$e(t) = y(t) - x(t). \quad (3.31)$$

**Определение 3.2.** Ведущая система (3.29) и ведомая система (3.30) считаются реализуют адаптивную синхронизацию, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0.$$

Мы разработаем правильное управление для реализации адаптивной синхронизации между системами (3.29) и (3.30).

**Теорема 3.3.** Адаптивная синхронизация между ведущей системой (3.29) и ведомой системой (3.30) будет достигнута если функция вектора управления построена в следующей форме:

$$\theta(x, y) = [F(x) - F(y)]A + G(x) - G(y) + [H(x) - H(y)]B - K_1 e - K_2 e_A - K_3 e_B. \quad (3.32)$$

Здесь  $K_1 = \text{diag}(k_{11}, \dots, k_{1n})$  - положительно определенная матрица,  $K_2, k_3 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , а обновление параметров модуляции выбираются в соответствии со следующими уравнениями:

$$\dot{e}_A = \dot{\hat{A}} = -(F(y))^* e + K_2^* e, \quad (3.33)$$

$$\dot{e}_B = \dot{\hat{B}} = -(H(y))^* e + K_3^* e. \quad (3.34)$$

Оператор (\*) обозначает сопряженное транспонирование.

*Доказательство.* Производная ошибки (3.31) по времени читается:

$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) - \dot{x}(t). \quad (3.35)$$

Используя (3.29) и (3.30), получаем

$$\dot{e}(t) = [F(y) - F(x)]A + F(y)e_A + G(y) - G(x) + [H(y) - H(x)]B + H(y)e_B + \theta. \quad (3.36)$$

Постройте функцию Ляпунова следующим образом:

$$V(e, e_A, e_B) = \frac{1}{2} \left( e^* e + e_A^* e_A + e_B^* e_B \right). \quad (3.37)$$

Производная  $V$  по времени имеет вид:

$$\dot{V}(e, e_A, e_B) = \frac{1}{2} \left( e^* \dot{e} + \dot{e}^* e + e_A^* \dot{e}_A + \dot{e}_A^* e_A + e_B^* \dot{e}_B + \dot{e}_B^* e_B \right). \quad (3.38)$$

Заменяя (3.32), (3.33), (3.34) и (3.36) на (3.38), получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, e_A, e_B) = & \frac{1}{2} \left( e^*(F(y) - F(x))A + e^*F(y)e_A + e^*(G(y) - G(x)) + e^*(H(y) - H(x))B \right. \\ & + e^*H(y)e_B + e^*(F(x) - F(y))A + e^*(G(x) - G(y)) + e^*(H(x) - H(y))B - e^*K_1e \\ & - e^*K_2e_A - e^*K_3e_B + A^*(F(y) - F(x))^*e + e_A^*(F(y))^*e + (G(y) - G(x))^*e \\ & + B^*(H(y) - H(x))^*e + e_B^*(H(y))^*e + A^*(F(x) - F(y))^*e + (G(x) - G(y))^*e \\ & + B^*(H(x) - H(y))^*e - e^*K_1e - e_A^*K_2^*e - e_B^*K_3^*e - e_A^*(F(y))^*e + e_A^*K_2^*e \\ & \left. - e^*F(y)e_A + e^*K_2e_A - e_B^*(H(y))^*e + e_B^*K_3^*e - e^*H(y)e_B + e^*K_3e_B \right), \quad (3.39) \end{aligned}$$

тогда мы имеем

$$\dot{V}(e, e_A, e_B) = -e^*K_1e. \quad (3.40)$$

Поскольку  $K_1$  - положительно определенная матрица,  $\dot{V} < 0$ . Видно, что  $V(e, e_A, e_B) > 0$  и  $V(e, e_A, e_B) \rightarrow \infty$  как  $(e, e_A, e_B) \rightarrow \infty$ . Таким образом, вектор ошибок  $(e, e_A, e_B)$  является глобально асимптотически устойчивым, т.е.  $(e, e_A, e_B) \rightarrow 0$  как  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Замечание 3.4.** Если  $B = \hat{B} = 0$  в (3.29) и (3.30), то наша схема применима для достижения адаптивной синхронизации для класса (3.27).

**Замечание 3.5.** Если состояния  $x, y \in \mathbb{R}^n$  в (3.29) и (3.30) являются вещественными, предложенная схема может быть использована для реализации адаптивной синхронизации для класса (3.28) с вещественными состояниями.

**Замечание 3.6.** Если  $B = \hat{B} = 0$  и состояния  $x, y \in \mathbb{R}^n$  в (3.29) и (3.30) являются вещественными, предложенная схема может быть использована для реализации адаптивной синхронизации для класса (3.27) с вещественными состояниями.

**Замечание 3.7.** Схема разработана в общем случае комплексных состояний и комплексных параметров. В случае комплексных состояний и вещественных параметров, ошибки модуляции параметров могут быть оценены следующим образом:  $\Re(e_A) = \hat{A} - A$  ( $\Im(e_A) = \hat{A} - A$ ),  $\Re(e_B) = \hat{B} - B$  ( $\Im(e_B) = \hat{B} - B$ ). Для вещественных состояний и вещественных параметров она тривиальна.

Из вышеприведенного обсуждения видно, что новая стратегия синхронизации применима для реализации адаптивной синхронизации комплексных и вещественных систем с любой структурой системы (а именно, параметры системы связаны только с линейными членами или параметры связаны как с линейными, так и с нелинейными членами).

Далее мы будем использовать систему Рабиновича (2.35) для реализации новой адаптивной схемы синхронизации с неопределенными параметрами, описанную выше (см. уравнения (3.29)-(3.30) и (3.32)). Заметим, что система (2.35) не является искусственной (рукотворной), она имеет сильный физический смысл и обладает богатой динамикой с возможными хаотическими или гиперхаотическими аттракторами, что может оказаться полезным в проблемах

синхронизации и безопасной связи. Более того, структура системы (2.35) подходит к дизайну предлагаемой схемы синхронизации (см. уравнения (3.29)-(3.30)) и применима для проверки ее эффективности. Кроме того, для демонстрации надежности предложенной схемы адаптивной синхронизации рассматривается цепь Чуа с мультиустойчивостью. Однако комплексная система Рабиновича и цепь Чуа рассматриваются здесь только в качестве примеров, и другие системы могут быть изучены аналогичным образом.

### 3.3.3 Адаптивная синхронизация для пары идентичных гиперхаотических комплексных систем Рабиновича с неопределенными параметрами

В данном подразделе мы применяем нашу схему для достижения адаптивной синхронизации между двумя идентичными гиперхаотическими комплексными системами Рабиновича с неопределенными параметрами. Ведущая и ведомая системы могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{X}_m = -\nu X_m + Y_m X_m^* + Z_m Y_m^*, \\ \dot{Y}_m = \alpha Y_m - X_m^2 + 2X_m^* Z_m - \beta |Y_m|^2 Y_m, \\ \dot{Z}_m = \gamma Z_m - 3X_m Y_m - \beta |Z_m|^2 Z_m, \end{cases} \quad (3.41)$$

и

$$\begin{cases} \dot{X}_s = -\hat{\nu} X_s + Y_s X_s^* + Z_s Y_s^* + \theta_1, \\ \dot{Y}_s = \hat{\alpha} Y_s - X_s^2 + 2X_s^* Z_s - \hat{\beta} |Y_s|^2 Y_s + \theta_2, \\ \dot{Z}_s = \hat{\gamma} Z_s - 3X_s Y_s - \hat{\beta} |Z_s|^2 Z_s + \theta_3, \end{cases} \quad (3.42)$$

где функции управления  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  являются комплексными. Мы используем подстрочные индексы  $m$  и  $s$  для ведущей и ведомой систем, соответственно.

Отметим, что комплексные модели Рабиновича (3.41) и (3.42) не могут быть записаны в виде (3.27) для достижения адаптивной синхронизации с полностью неопределенными параметрами. Однако можно записать ведущую систему (3.41) в виде (3.29) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = (X_m, Y_m, Z_m)^T &= (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4, x_5 + ix_6)^T, \quad A = (\nu, \alpha, \gamma)^T, \quad B = (0, \beta, \beta)^T \\ F(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} -X_m & 0 & 0 \\ 0 & Y_m & 0 \\ 0 & 0 & Z_m \end{pmatrix}, \quad G(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} Y_m X_m^* + Z_m Y_m^* \\ -X_m^2 + 2X_m^* Z_m \\ -3X_m Y_m \end{pmatrix}, \\ H(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -|Y_m|^2 Y_m & 0 \\ 0 & 0 & -|Z_m|^2 Z_m \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Аналогично, мы можем записать ведомую систему (3.42) в виде (3.30) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 y &= (X_s, Y_s, Z_s)^T = (y_1 + iy_2, y_3 + iy_4, y_5 + iy_6)^T, \hat{A} = (\hat{v}, \hat{\alpha}, \hat{\gamma})^T, \hat{B} = (0, \hat{\beta}, \hat{\beta})^T, \\
 \theta &= (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T = (\vartheta_1 + i\vartheta_2, \vartheta_3 + i\vartheta_4, \vartheta_5 + i\vartheta_6)^T, F(y) = \begin{pmatrix} -X_s & 0 & 0 \\ 0 & Y_s & 0 \\ 0 & 0 & Z_s \end{pmatrix}, \\
 G(y) &= \begin{pmatrix} Y_s X_s^* + Z_s Y_s^* \\ -X_s^2 + 2X_s^* Z_s \\ -3X_s Y_s \end{pmatrix}, H(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -|Y_s|^2 Y_s & 0 \\ 0 & 0 & -|Z_s|^2 Z_s \end{pmatrix}. \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

Векторы ошибок, соответствующие состояниям и модуляции параметров, выражаются следующим образом:

$$e = (e_1 + ie_2, e_3 + ie_4, e_5 + ie_6)^T, \quad (3.45)$$

$$e_A = (e_{A_1} + ie_{A_2}, e_{A_3} + ie_{A_4}, e_{A_5} + ie_{A_6})^T, \quad (3.46)$$

$$e_B = (e_{B_1} + ie_{B_2}, e_{B_3} + ie_{B_4}, e_{B_5} + ie_{B_6})^T. \quad (3.47)$$

По теореме 3.3, мы получаем следующие функции управления (3.32):

$$\theta = \begin{pmatrix} v(X_s - X_m) + (Y_m X_m^* + Z_m Y_m^* - Y_s X_s^* - Z_s Y_s^*) + \varphi_1 \\ \alpha(Y_m - Y_s) - (X_m^2 - 2X_m^* Z_m + \beta|Y_m|^2 Y_m - X_s^2 + 2X_s^* Z_s - \beta|Y_s|^2 Y_s) + \varphi_2 \\ \gamma(Z_m - Z_s) - (3X_m Y_m + \beta|Z_m|^2 Z_m - 3X_s Y_s - \beta|Z_s|^2 Z_s) + \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

где  $\varphi_1 = -k_{11}(e_1 + ie_2) - k_{21}(e_{A_1} + ie_{A_2}) - k_{31}(e_{B_1} + ie_{B_2})$ ,  $\varphi_2 = -k_{12}(e_3 + ie_4) - k_{22}(e_{A_3} + ie_{A_4}) - k_{32}(e_{B_3} + ie_{B_4})$  и  $\varphi_3 = -k_{13}(e_5 + ie_6) - k_{23}(e_{A_5} + ie_{A_6}) - k_{33}(e_{B_5} + ie_{B_6})$ .

Отметим, что ввод в комплекснозначной форме является скорее математическим инструментом, позволяющим выразить его в более простой форме. В реальной системе можно разработать и применить вещественную и мнимую части комплексного сигнала управления отдельно, как соответствующие вещественные сигналы.

Рассмотрим следующие значения параметров системы:  $v = -0.03$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $\gamma = 0.11$ . При этих параметрах система (3.41) демонстрирует гиперхаотический аттрактор (см. Рис. 2.17). Для того чтобы установить состоятельность регулятора (3.48), произвольные управляющие положительно определенные матрицы выбираются следующим образом:  $K_1 = \text{diag}(66, 55, 77)$ ,  $K_2 = \text{diag}(13, 12, 15)$ ,  $K_3 = \text{diag}(15, 15, 59)$ . Ведущая система (3.41) и ведомая система (3.42) с (3.48) решаются численно. Численные решения (3.41) и (3.42) с начальными точками  $x(0) = (1+i, 1+i, 1+i)^T$  и  $y(0) = (3+3i, 3+3i, 3+3i)^T$  показаны на Рис. 3.16. На Рис. 3.17 видно, что ошибка адаптивной синхронизации  $e(t)$  приближается к нулю, и синхронизация достигается через небольшое время  $t = T_s (T_s \approx 10s)$ . Из Рис. 3.18 и 3.19 видно, что ошибки модуляции параметров  $e_A(t)$  и  $e_B(t)$  приближаются к нулю. Таким образом, оценка

неопределенных параметров константы  $(\hat{v}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$  сходится к  $(v, \alpha, \beta, \gamma) = (-0.03, 0.5, 0.001, 0.11)$  (см. Рис. 3.20).

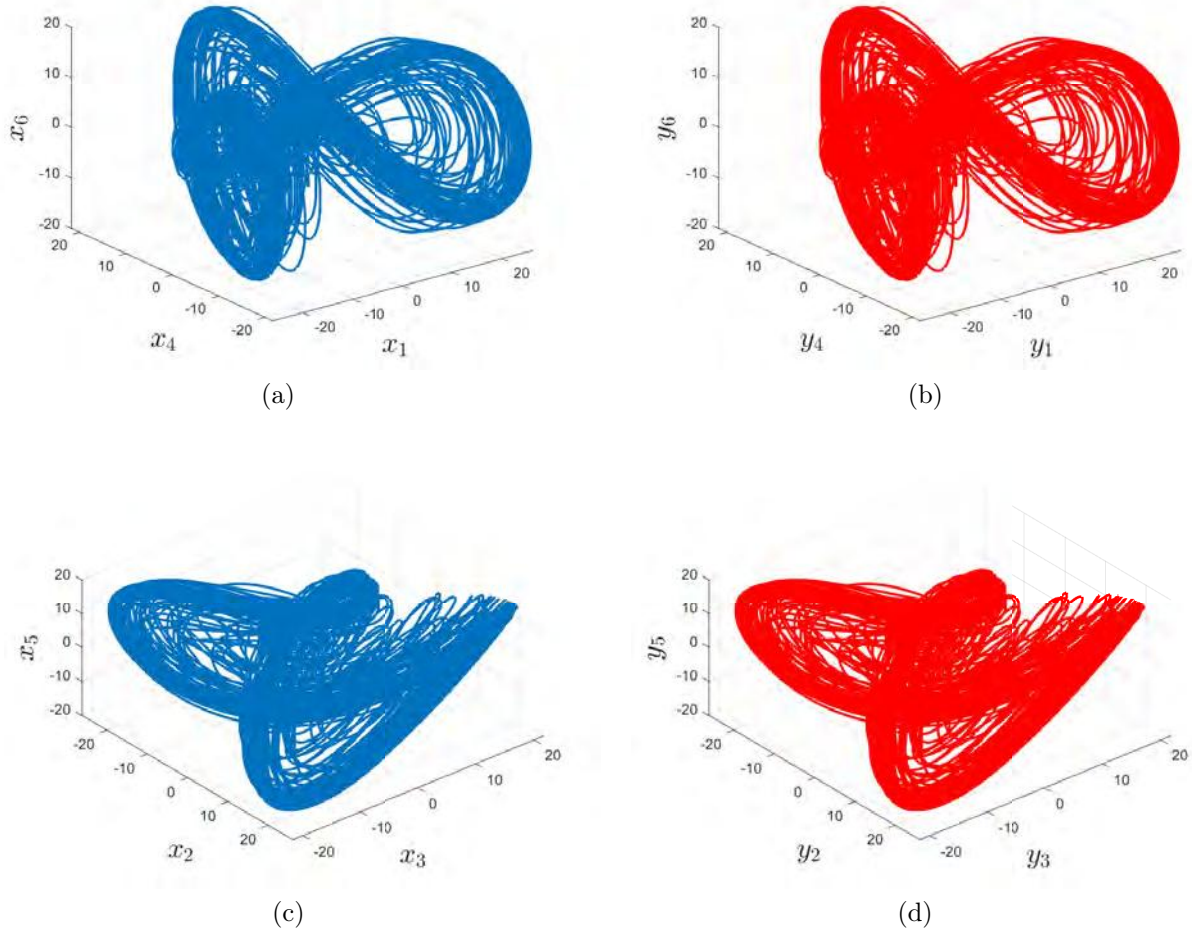


Рисунок 3.16 — Адаптивная синхронизация гиперхаотических аттракторов систем (3.41) и (3.42) (в форме (3.43) и (3.44)), с  $v = -0.03$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $\gamma = 0.11$ .

### 3.3.4 Приложение для систем защищенной коммуникации

В данном подразделе мы предлагаем новую безопасную стратегию связи, основанную на адаптивной синхронизации гиперхаотических систем с неопределенными параметрами. В целом, существующие схемы связи построены на инъекции сообщения в хаотические состояния (хаотическая маскировка)[221; 225–227], или параметры системы передатчика (модуляция параметров)[224; 228]. Новая схема построена таким образом, чтобы разделить сообщение и ввести один бит информационного сигнала в модуляцию параметров, а другой бит - в состояния передатчика, что повышает безопасность системы связи и усложняет задачу дешифровки злоумышленниками. На Рис. 3.21 изображена схема предложенной схемы.

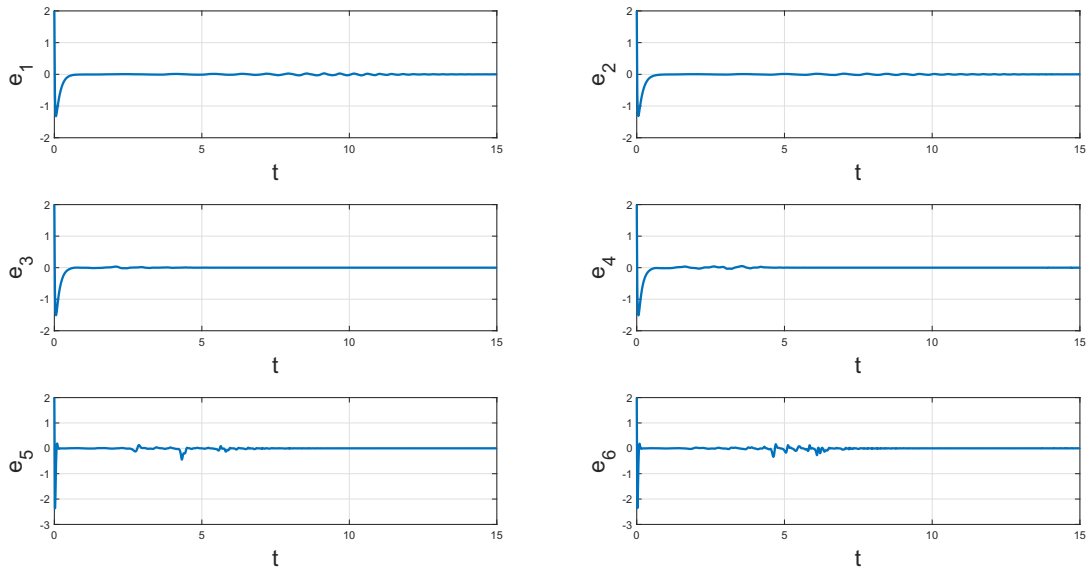


Рисунок 3.17 — Динамика вещественных и мнимых частей состояний ошибок (см. (3.45)) между ведущей (3.41) и ведомой (3.42) системами представлена решением системы (3.36).

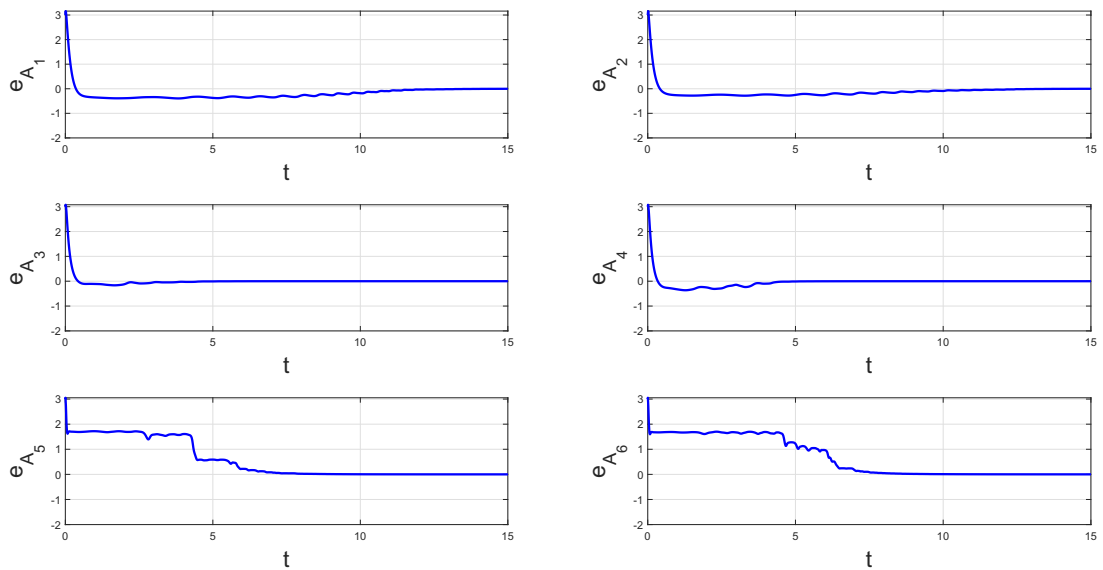


Рисунок 3.18 — Динамика вещественной и мнимой частей ошибок оценки параметра  $\hat{A}$  (см. (3.46)) представлена решением системы (3.33).

Схема включает следующие компоненты:

- Системы передатчика и приемника, которые производят переменные состояния  $x(t) \in \mathbb{C}^n$  и  $y(t) \in \mathbb{C}^n$ , соответственно.
- Блок разделения: информационное сообщение  $S(t)$  делится на два вектора битов  $S_1$  и  $S_2$ , чтобы распределить его по двум каналам.
- Блок модуляции параметров: первая часть сообщения  $S_1(t)$  непрерывной инвертируемой функцией  $\phi_1$  модулируется в параметры передатчика.



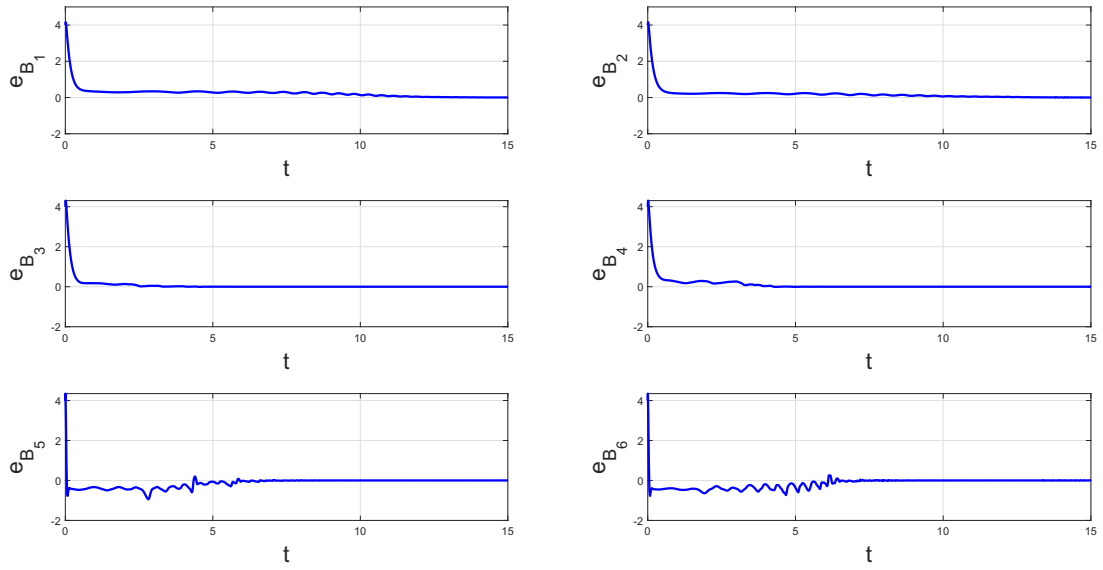


Рисунок 3.19 — Динамика вещественной и мнимой частей ошибок оценки параметра  $\hat{B}$  (см. (3.47)) представлена решением системы (3.34).

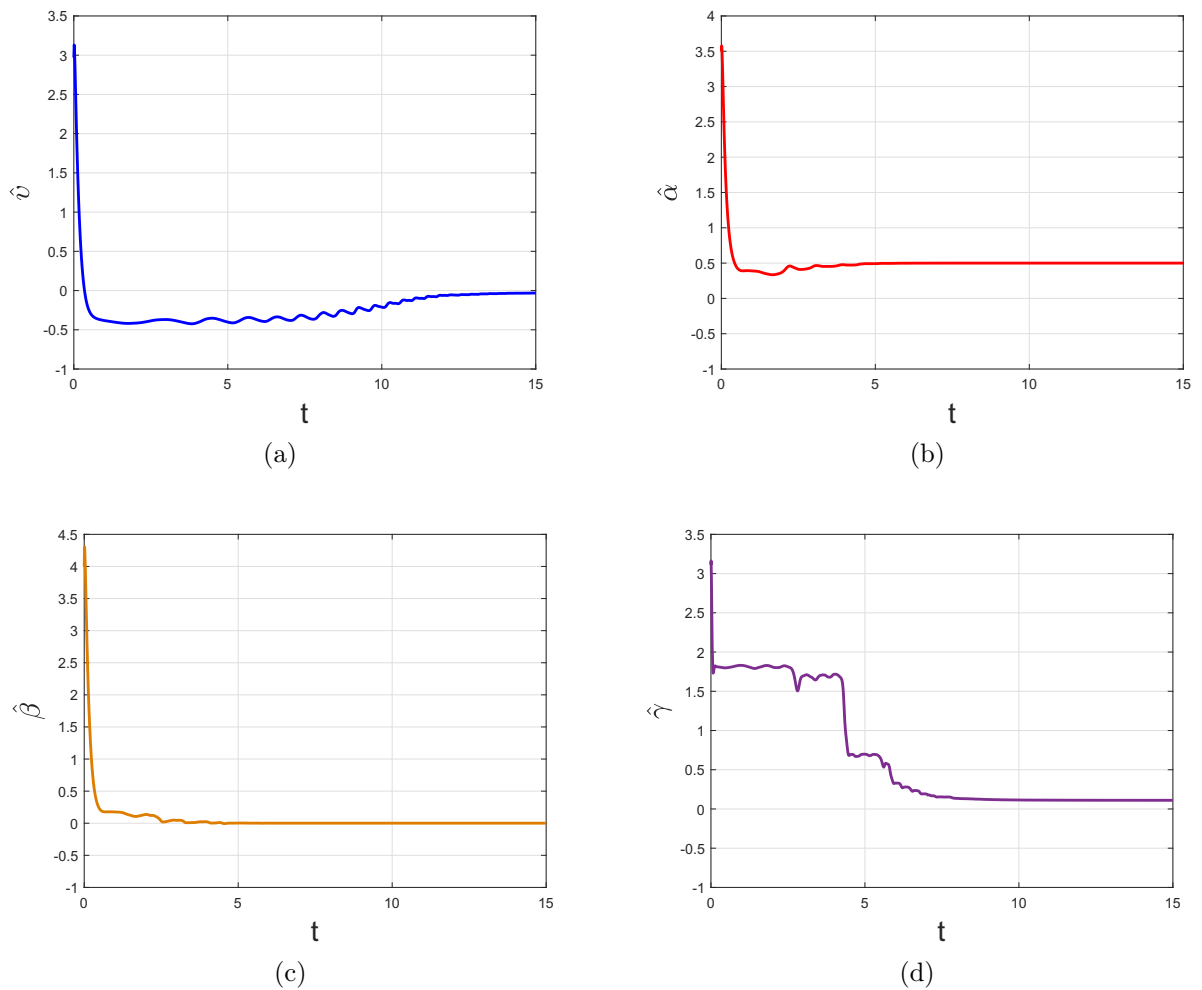


Рисунок 3.20 — Оценка неопределенных параметров  $(\hat{v}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ .

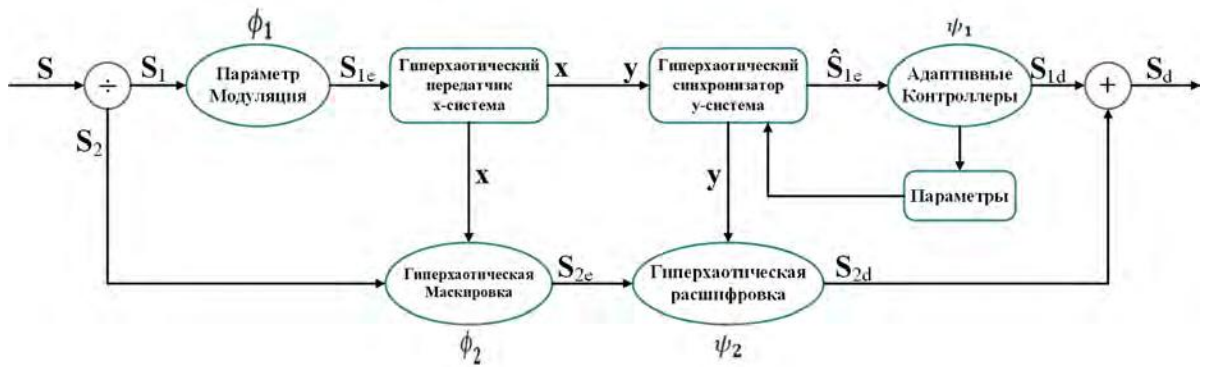


Рисунок 3.21 — Гиперхаотическая стратегия безопасной связи.

- Гиперхаотический маскирующий блок: вторая часть сообщения  $S_2(t)$  кодируется путем введения в функцию  $\phi_2 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , которая для  $x \in \mathbb{C}^n$  непрерывна и имеет ассоциированную непрерывную функцию  $\psi_2 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , которая непрерывна для  $x \in \mathbb{C}^n$ , такая, что  $\psi_2(x, \phi_2(x, S_2)) = S_2$ . Шифрующая функция  $\phi_2$  строится на основе гиперхаотических состояний. В результате генерируется сигнал  $S_{2e}(t)$ , который несет часть сообщения.
- Каналы: гиперхаотические состояния, которые содержат параметры модуляции и закодированную информационную часть  $S_{2e}$ , передаются по двум каналам.
- Блок синхронизации: на стороне приемника реализован блок синхронизации для получения сигналов состояния гиперхаоса и предоставления необходимой информации для расшифровки.
- Блок адаптивных контроллеров: на стороне приемника строятся адаптивные контроллеры для отслеживания параметров системы передатчика. После синхронизации функция расшифровки  $\psi_1$  может быть использована для восстановления первой части переданного сообщения  $S_{1d}$ .
- Блок гиперхаотического декодирования: маскированная информация  $S_{2e}(t)$  декодируется функцией  $S_{2d}(t) = \psi_2(y(t), S_{1e}(t))$ .
- Блок сбора: объединив два информационных сигнала  $S_{1d}$  и  $S_{2d}$ , мы получаем полное расшифрованное сообщение  $S_d$ .

В отличие от других схем, которые могут быть неточными из-за недостаточной надежности и безопасности (см., например, [229; 230]), предлагаемая стратегия безопасной связи надежна к попыткам проникновения злоумышленников, поскольку она должна точно определить следующую информацию для успешной расшифровки сообщения:

1. какая часть информационного бита внедрена в параметры передатчика, а какая часть внедрена в гиперхаотические состояния передатчика;
2. какой канал используется для передачи гиперхаотических сигналов передатчика с модуляцией параметров, а какой для передачи гиперхаотической маскированной части сообщения;
3. какие параметры используются для модуляции параметров передатчика;
4. какой именно предельный режим (аттрактор) использовался в качестве основы для организации гиперхаотического шифрования. Для данной задачи наличие мультиустойчивости

в системе и скрытых аттракторов существенно затруднит расшифровку;

5. какие именно функции для модуляции параметров и гиперхаотической маскировки были построены;

6. какие адаптивные законы для параметров (одна из самых важных сведений, которые необходимо знать) были использованы.

**Замечание 3.8.** Идея новой криптосистемы заключается в организации комбинации двух техник - маскировки модуляции параметров и гиперхаотической маскировки. Эти техники по отдельности могут иметь некоторые недостатки (см., например, [229; 230]), но наш подход позволяет их преодолеть и, в свою очередь, усложнить задачу расшифровки для возможных злоумышленников. Следующий эксперимент с зашифрованными фигурами проясняет эту новую особенность (см. Рис. 3.25с и 3.26d-3.26f для проверки темных и белых частей, соответствующих параметрам модуляционной маскировки и гиперхаотической маскировки, соответственно).

**Замечание 3.9.** Предлагаемая стратегия защищенной коммуникации построена на основе техники адаптивной синхронизации с неопределенными параметрами, что является непростой задачей для реализации и, в свою очередь, приводит к большей безопасности [222; 223].

**Замечание 3.10.** Использование синхронизации в системах связи имеет фундаментальное значение, поскольку она заставляет системы одновременно производить одинаковые выходные данные и, в свою очередь, приводит к точному восстановлению информационных сигналов (см., например, [231; 232]).

Комплексная модель Рабиновича используется для объяснения стратегии безопасной связи, а численные результаты выполнены в MATLAB. Передатчик выполняет (3.29), который генерирует состояния  $(x_1 + ix_2, x_3 + ix_4, x_5 + ix_6)^T$ , а приемник выполняет (3.30), которое генерирует состояния  $(y_1 + iy_2, y_3 + iy_4, y_5 + iy_6)^T$ . Как показано на Рис. 3.16, ведущая система (3.29) и ведомая система (3.30) для  $\nu = -0.03$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $\gamma = 0.11$  демонстрируют гиперхаотические аттракторы. Адаптивная синхронизация будет достигнута после  $t = T_s$  ( $T_s \approx 10$ ), если векторная функция управления будет иметь вид (3.48) (см. Рис. 3.17). Для демонстрации устойчивости нашей схемы, сообщение  $S(t)$  выбирается в двух формах - обычный текст и серое изображение с различными масштабами белого гауссовского шума.

### Однопараметрическая модуляция и гиперхаотическая маскировка для шифрования обычного текста

Первый тип сообщения  $S(t)$  - это обычный текст. Для преобразования этого текста в вектор цифр используется инструмент MATLAB "double". Suppose  $S = [s_1, s_2, \dots, s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n]$ , согласно предложенной схеме, этот вектор цифр разбивается на два вектора  $S_1 = [s_1, s_2, \dots, s_m]$  и  $S_2 = [s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n]$ . В параметры передатчика вставляется первый вектор  $S_1$  по следующим параметрам функции модуляции:

$$S_{1e} = \phi_1(\{A, B\}, S_1) = \frac{S_1}{10d} + \gamma, \quad (3.49)$$

где  $d = \max(S(j)) - \min(S(j))$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $\gamma = 0.11$ . Для второй части сообщения,  $S_2$  вставляется в гиперхаотические состояния передатчика с помощью следующей функции:

$$S_{2e} = \phi_2(x, S_2) = x_6^2 + (1 + x_6^2)S_2. \quad (3.50)$$

Приемник может расшифровать сообщение с помощью следующих функций:

$$S_{1d} = \psi_1(\{\hat{A}, \hat{B}\}, \hat{S}_{1e}) = 10(\hat{S}_{1e} - \hat{\gamma})d, \quad (3.51)$$

где  $\hat{\gamma} = 0.11$ ,

$$S_{2d} = \psi_2(y, S_{2e}) = -\frac{y_6^2}{1 + y_6^2} + \frac{S_{2e}}{1 + y_6^2}. \quad (3.52)$$

Собрав  $S_{1d}$  и  $S_{2d}$ , мы получим весь расшифрованный информационный сигнал  $S_d$ . Используя инструмент MATLAB "char", приемник может преобразовать этот вектор цифр обратно в текст. Например, предположим, что мы хотим передать небольшую часть текста, как показано на Рис. 3.22. Шифрованное сообщение показано на Рис. 3.23, и видно, что оно надежно зашифровано. Расшифрованное сообщение показано на Рис. 3.24, и оно идентично оригинальному содержимому.

(a)

**The aim of this report is to investigate an adaptive synchronization for the general class of complex hyperchaotic models with unknown parameters and a new algorithm to achieve this type of synchronization is proposed. Owing to the intricacy behaviour of hyperchaotic models that could be effective in secure communications, the special control based on adaptive laws of parameters is constructed analytically, and the corresponding simulated results are performed to validate the algorithm's accuracy. The complex Rabinovich model is utilized as an enticing example to examine the proposed synchronization technique. A strategy for secure communication improving the overall cryptosystem is proposed; the scheme is designed to split the message and insert some bit of information signal into the modulation parameters and the other bit into the transmitter system's states, making decryption by intruders more difficult. Meanwhile, adaptive techniques and a decryption function on the receiver side can accurately retrieve the message. Different types of encoded messages are examined for testing the robustness of the proposed scheme (e.g., text and gray images with diverse scales of white Gaussian noise).**

Рисунок 3.22 — Оригинальный текст.



(c)

The aim of this report is to investigate an adaptive synchronization for the general class of complex hyperchaotic models with unknown parameters and a new algorithm to achieve this type of synchronization is proposed. Owing to the intricacy behaviour of hyperchaotic models that could be effective in secure communications, the special control based on adaptive laws of parameters is constructed analytically, and the corresponding simulated results are performed to validate the algorithm's accuracy. The complex Rabinovich model is utilized as an enticing example to examine the proposed synchronization technique. A strategy for secure communication improving the overall cryptosystem is proposed; the scheme is designed to split the message and insert some bit of information signal into the modulation parameters and the other bit into the transmitter system's states, making decryption by intruders more difficult. Meanwhile, adaptive techniques and a decryption function on the receiver side can accurately retrieve the message. Different types of encoded messages are examined for testing the robustness of the proposed scheme (e.g., text and gray images with diverse scales of white Gaussian noise).

Рисунок 3.24 — Расшифрованный текст.

на два вектора  $S_1 = [s_1, s_2, \dots, s_k]$  и  $S_2 = [s_{k+1}, s_{k+2}, \dots, s_{mn}]$ . Первый вектор вводится в параметры передающей системы, а второй - в ее гиперхаотические состояния. Для модуляции параметров, гиперхаотической маскировки и расшифровки мы используем те же функции, что и в первом сообщении. Переданные и восстановленные серые изображения показаны на Рис. 3.25a и 3.25e. Гистограмма изображения, которая показывает распределение интенсивности для оригинального и расшифрованного изображений, изображена на Рис. 3.25b и 3.25f, соответственно. На Рис. 3.25c и 3.25d показаны зашифрованное изображение и его гистограмма. На Рис. 3.25e и 3.25f видно, что оригинальное изображение (cameraman.tif) получено точно.

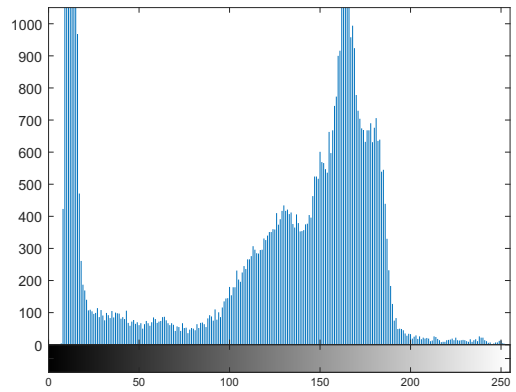
Чтобы продемонстрировать надежность стратегии безопасной связи для шифрования изображений, к грациям серого изображения (cameraman.tif) добавляется белый гауссовский шум с различными масштабами, а для измерения качества восстановленного изображения используются различные тесты, например, пиковое отношение сигнал/шум (PSNR) и индекс структурного сходства изображения (SSIM).

#### **Анализ пикового соотношения сигнал/шум**

Для анализа распределения пикселей восстановленного изображения по отношению к оригинальному изображению применяется пиковое отношение сигнал/шум (PSNR). PSNR можно определить следующим образом [224; 233]:



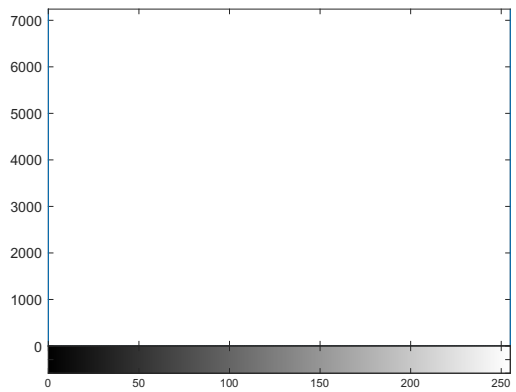
(a) Оригинальное изображение.



(b) Гистограмма оригинального изображения.



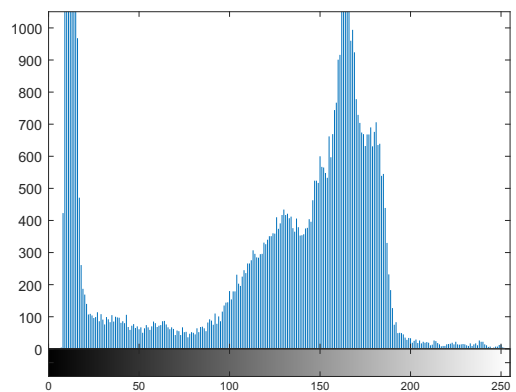
(c) Зашифрованное изображение.



(d) Гистограмма зашифрованного изображения.



(e) Расшифрованное изображение.



(f) Гистограмма расшифрованного изображения.

Рисунок 3.25 — Численные результаты шифрования градаций серого изображения с использованием модели Рабиновича.

$$PSNR(S, S_d) = 10 \log_{10} \left[ \frac{(255)^2}{MSE(S, S_d)} \right], \quad (3.54)$$

где MSE - средняя квадратическая ошибка, которая определяется следующим образом:

$$MSE(S, S_d) = \frac{1}{m \times n} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n (s_d(k, l) - s(k, l))^2, \quad (3.55)$$

где  $S$  и  $S_d$  означают оригинальное и восстановленное изображение, соответственно.

Отметим, что высокое значение PSNR означает близкое сходство между расшифрованным изображением и оригиналом.

### Индекс структурного сходства изображения

Второй тест, используемый для измерения и анализа сходства между оригиналом и найденным изображением, - это индекс структурного сходства изображения (SSIM), определяемый в следующей форме [234]:

$$SSIM(S, S_d) = \frac{(2\mu_S\mu_{S_d} + C_1)(2\sigma_{SS_d} + C_2)}{(\mu_S^2 + \mu_{S_d}^2 + C_1)(\sigma_S^2 + \sigma_{S_d}^2 + C_2)}, \quad (3.56)$$

где  $\mu_S$  и  $\mu_{S_d}$  - среднее значение яркости оригинального изображения  $S$  и расшифрованного изображения  $S_d$ , соответственно;  $\sigma_S$  и  $\sigma_{S_d}$  - стандартные вариации  $S$  и  $S_d$ , соответственно;  $\sigma_{SS_d}$  - ковариация между  $S$  и  $S_d$ ;  $C_1$  и  $C_2$  - небольшие фиксированные положительные константы, чтобы знаменатель не был равен нулю. Оценка SSIM всегда находится в интервале  $[-1, 1]$ , и самая сильная оценка 1 реализуется, если  $S = S_d$ .

Чтобы продемонстрировать надежность предложенной схемы к шуму, градация серого изображения (cameraman.tif) передается от передатчика к приемнику с различными уровнями белого гауссовского шума. На Рис. 3.26 показаны оригинальные изображения с шумом и восстановленные изображения с шумом. Оценки PSNR и SSIM для полученных градаций серого изображения и оригинальных изображений приведены в таблице 7

Таблица 7: Оценка PSNR и SSIM для градации серого изображения cameraman.tif.

Серое изображение	PSNR	SSIM
Сameraman (гауссовский шум 0.03)	77.9705	0.9999
Сameraman (гауссовский шум 0.07)	77.3193	0.9999
Сameraman (гауссовский шум 0.1)	77.4875	0.9999

### 3.3.5 Обсуждение

Предложена новая формула для представления комплексных моделей в матричной форме и разработана соответствующая схема реализации адаптивной синхронизации для общего класса комплексных моделей с полностью неопределенными параметрами. Схема была протестирована на примере комплексной модели Рабиновича. Предложена новая схема безопасной связи с улучшенной криптосистемой на основе адаптивной синхронизации. Для проверки





(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)



(g)



(h)



(i)

Рисунок 3.26 — Численные результаты шифрования изображений с шумом. (a)-(c) оригинальные изображения с 0,03, 0,07 и 0,1 белого гауссовского шума, соответственно; (d)-(f) зашифрованные изображения; (g)-(i) восстановленные изображения с шумом.

надежности предложенной схемы были рассмотрены различные формы зашифрованных сообщений (например, обычный текст и серые изображения с различными масштабами белого гауссовского шума).

### 3.4 Сравнение производительности схем синхронизации на примере цепи Чуа

Цель данного раздела сравнить все три схемы синхронизации на примере известной системы Чуа. Поскольку она имеет явную электронную природу и может быть реализована

в виде RLC цепи, она обычно используется в качестве эталонной системы для тестирования синхронизации. Другой интересной особенностью системы Чуа является мультиустойчивость и возможное наличие скрытых аттракторов в фазовом пространстве при некоторых значениях параметров [16; 193; 235]).

Цепь Чуа, разработанная Леоном Чуа в 1983 году, является простейшей электрической цепью, демонстрирующей хаос, который может быть описан следующими уравнениями [13]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x) - \alpha\Psi(x), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta y - \gamma z, \end{cases} \quad (3.57)$$

где  $\Psi(x) = m_1x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, m_0, m_1$  - вещественные параметры.

Далее проверим три описанные выше схемы синхронизации для следующих четырех случаев параметров и начальных данных:

**Случай 1:** Рассмотрим начальные данные систем (3.60) и (3.61) на одном из симметричных скрытых аттракторов: ведущая система (3.60) –  $x(0) = (-3.7727, -1.3511, 4.7)^T$ ; ведомая система (3.22) –  $y(0) = (-3.6, -1.3511, 4.7)^T$ . С параметрами  $\alpha = 8.4562, \beta = 12.0732, \gamma = 0.0052, m_0 = -0.1768, m_1 = -1.1468$ .

**Случай 2:** Рассмотрим начальные данные систем (3.60) и (3.61) на двух симметричных скрытых аттракторах: ведущая система (3.60) –  $x(0) = (-3.7727, -1.3511, 4.7)^T$ ; ведомая система (3.22) –  $y(0) = (3.7727, 1.3511, -4.7)^T$ . С параметрами  $\alpha = 8.4562, \beta = 12.0732, \gamma = 0.0052, m_0 = -0.1768, m_1 = -1.1468$ .

**Случай 3:** Рассмотрим начальные данные систем (3.60) и (3.61) на одном из симметричных скрытых аттракторов и устойчивое нулевое состояние равновесия: ведущая система (3.60) –  $x(0) = (-3.7727, -1.3511, 4.7)^T$ ; ведомая система (3.22) –  $y(0) = (0, 0, 0)^T$ . С параметрами  $\alpha = 8.4562, \beta = 12.0732, \gamma = 0.0052, m_0 = -0.1768, m_1 = -1.1468$ .

**Случай 4:** Рассмотрим начальные данные систем (3.60) и (3.61) на одном из симметричных самовозбуждающихся аттракторов и неустойчивое нулевое состояние равновесия: ведущая система (3.60) –  $x(0) = (2.0848, 0.0868, -2.819)^T$ ; ведомая система (3.22) –  $y(0) = (0.1, 0, 0)^T$ . С параметрами  $\alpha = 9.3516, \beta = 14.7903, \gamma = 0.0161, m_0 = -1.1384, m_1 = -0.7225$ .

Отметим, что существование скрытых колебаний и неправильный выбор формы управляющего сигнала могут привести к неработоспособности режимов синхронизации. В [49; 194] показано, что синхронизация двух цепей Чуа (3.57), линейно связанных через второе уравнение с добавкой  $K(y - \tilde{y})$ , которая рассматривалась в работах [236; 237] Т. Капитаняка и др, достигается для самовозбуждающегося аттрактора и может не достигаться для скрытого аттрактора. Этот недостаток подчеркивает, что мультиустойчивость и скрытые аттракторы в системе могут усложнить проблему разработки эффективной схемы синхронизации.

Ниже показано, что наши стратегии синхронизации эффективно достигают синхронизации для таких систем с мультиустойчивостью и скрытыми аттракторами.

### 3.4.1 Полная синхронизация и синхронизация с запаздыванием для пары идентичных систем Чуа

Здесь мы исследуем полную и запаздывающую синхронизацию, описанную в Разделе 3.2 для цепей Чуа. Чтобы применить предложенную схему, мы выражаем ведущее и ведомое цепи Чуа следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_m = \alpha(y_m - x_m) - \alpha\Psi(x_m), \\ \dot{y}_m = x_m - y_m + z_m, \\ \dot{z}_m = -\beta y_m - \gamma z_m, \end{cases} \quad (3.58)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_s = \alpha(y_s - x_s) - \alpha\Psi(x_s) + \theta_1, \\ \dot{y}_s = x_s - y_s + z_s + \theta_2, \\ \dot{z}_s = -\beta y_s - \gamma z_s + \theta_3, \end{cases} \quad (3.59)$$

где  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  - функции управления.

Рассмотрим вышеприведенные четыре случая; полная синхронизация для цепей Чуа (3.58) и (3.59) показана на Рис. 3.27–3.30. Синхронизация по запаздыванию для цепей Чуа (3.60) и (3.61) с запаздыванием  $\tau = 0.5$  показана на Рис. 3.31–3.34.

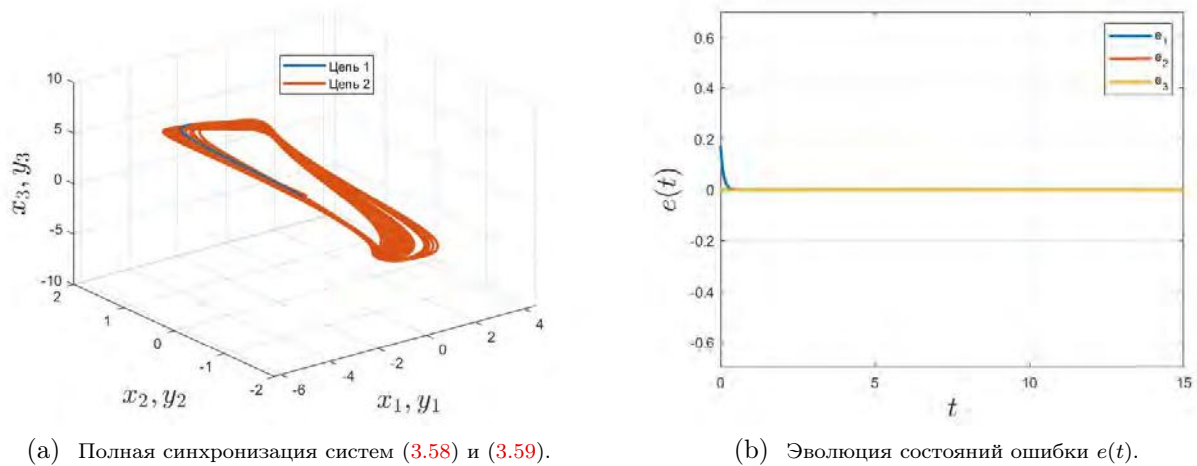
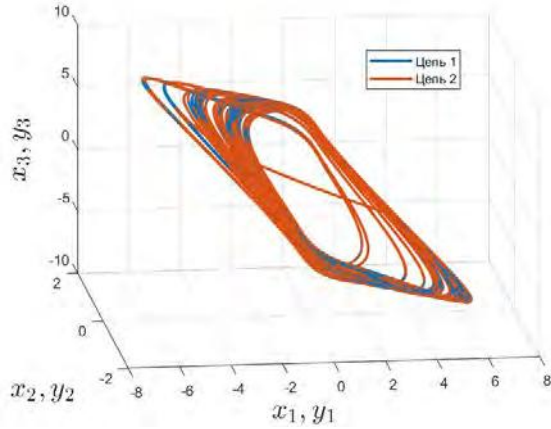


Рисунок 3.27 — **Случай 1:** Начальные данные систем Чуа на одном скрытом аттракторе с матрицей усиления управления  $k = \text{diag}(11,11,11)$ .



(a) Полная синхронизация систем (3.58) и (3.59).

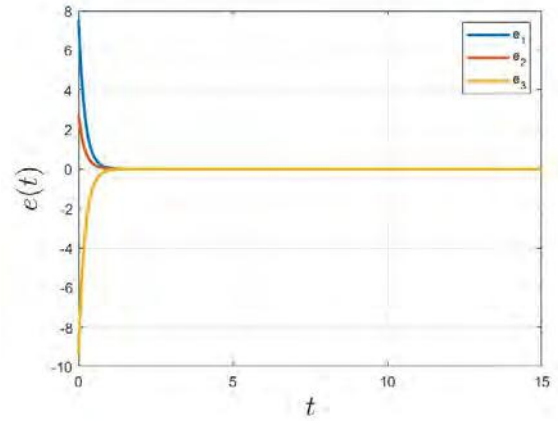
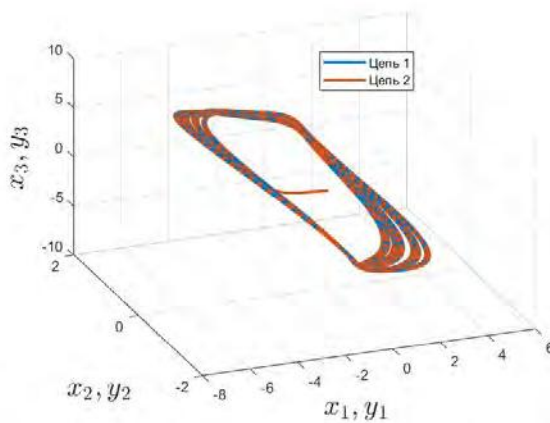
(b) Эволюция состояний ошибки  $e(t)$ .

Рисунок 3.28 — **Случай 2:** Начальные данные систем Чуа на двух симметричных скрытых аттракторах с матрицей усиления управления  $k = \text{diag}(5,5,5)$ .



(a) Полная синхронизация систем (3.58) и (3.59).

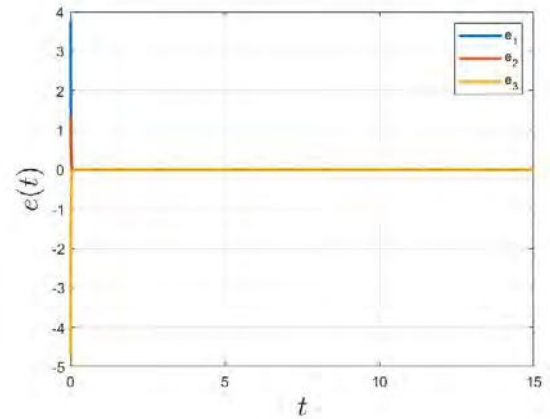
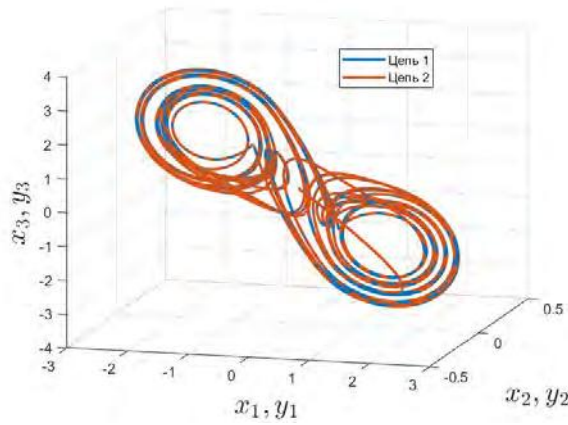
(b) Эволюция состояний ошибки  $e(t)$ .

Рисунок 3.29 — **Случай 3:** Начальные данные систем Чуа на скрытом аттракторе и устойчивом нулевом состоянии равновесия с матрицей усиления управления  $k = \text{diag}(90,90,90)$ .

### 3.4.2 Адаптивная синхронизация для пары идентичных систем Чуа с неопределенными параметрами

Теперь мы применим схему адаптивной синхронизации (см. Раздел 3.3) для цепи Чуа (3.57). Для этого ведущее и ведомое цепи Чуа записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_m = \alpha(y_m - x_m) - \rho x_m - \eta \Phi(x_m), \\ \dot{y}_m = x_m - y_m + z_m, \\ \dot{z}_m = -\beta y_m - \gamma z_m, \end{cases} \quad (3.60)$$



(a) Полная синхронизация систем (3.58) и (3.59).

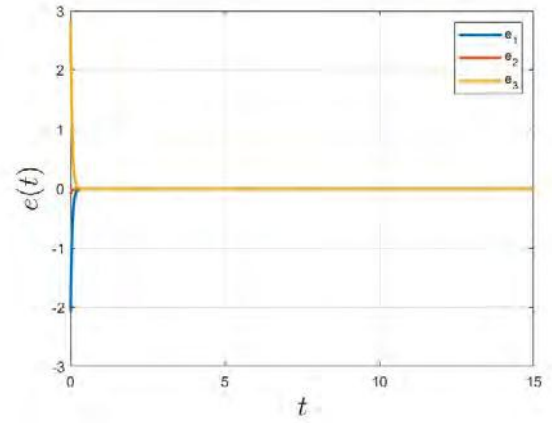
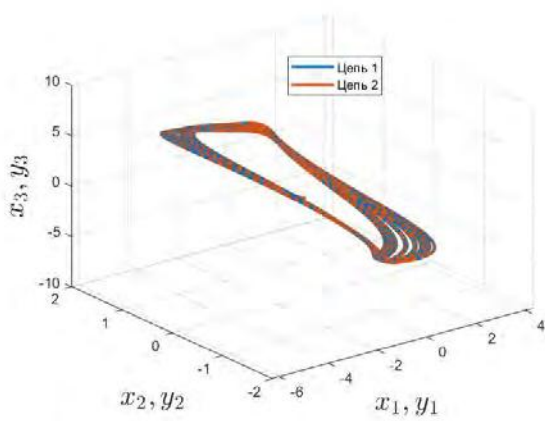
(b) Эволюция состояний ошибки  $e(t)$ .

Рисунок 3.30 — **Случай 4:** Начальные данные систем Чуа на самовозбуждающемся аттракторе и неустойчивом нулевом состоянии равновесия с матрицей усиления управления  $k = \text{diag}(20,20,20)$ .



(a) Синхронизация запаздывания систем (3.58) и (3.59).

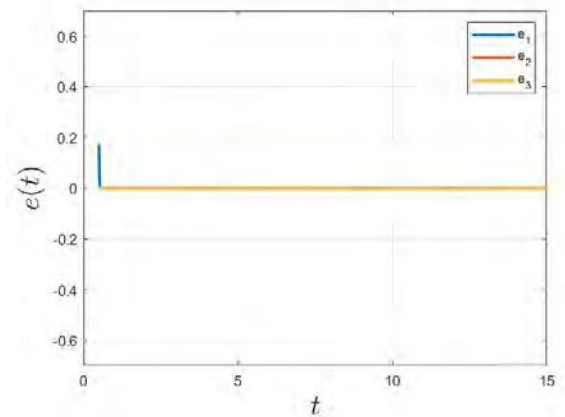
(b) Эволюция состояний ошибки  $e(t)$ .

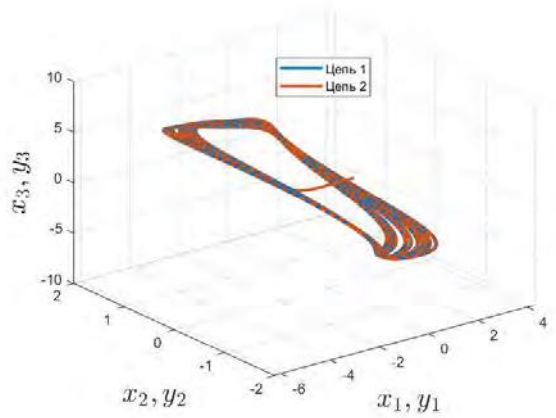
Рисунок 3.31 — **Case 1:** Начальные данные систем Чуа на одном скрытом аттракторе с матрицей усиления управления  $k = \text{diag}(103,103,103)$ .

$$\begin{cases} \dot{x}_s = \hat{\alpha}(y_s - x_s) - \hat{\rho}x_s - \hat{\eta}\Phi(x_s) + \theta_1, \\ \dot{y}_s = x_s - y_s + z_s + \theta_2, \\ \dot{z}_s = -\hat{\beta}y_s - \hat{\gamma}z_s + \theta_3, \end{cases} \quad (3.61)$$

где  $\rho = \alpha m_1$ ,  $\eta = \alpha(m_0 - m_1)$  и  $\Phi(\bullet) = |\bullet + 1| - |\bullet - 1|$ ,  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  - функции управления.

Реализация адаптивной синхронизации с неопределенными параметрами между системами с мультиустойчивостью и скрытыми аттракторами является гораздо более сложной задачей. Ниже мы рассмотрим вышеупомянутые четыре различных случая для достижения адаптивной синхронизации между системами (3.60) и (3.61). (см. Рис. 3.35–3.38). Матрицы усиления управления в каждом случае следующие:

**Случай 1:**  $K_1 = \text{diag}(10,10,10)$ ,  $K_2 = K_3 = \begin{pmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 500 \end{pmatrix}$ .



(a) Синхронизация запаздывания систем (3.58) и (3.59).

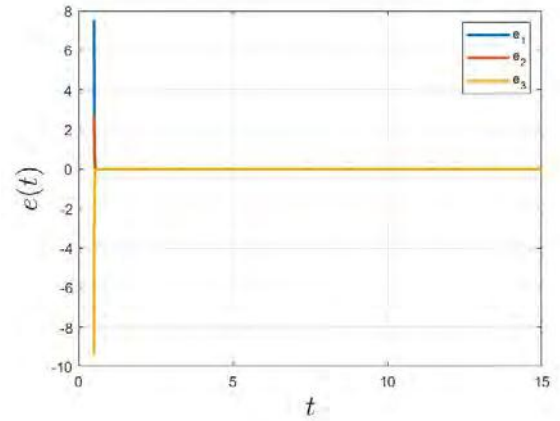
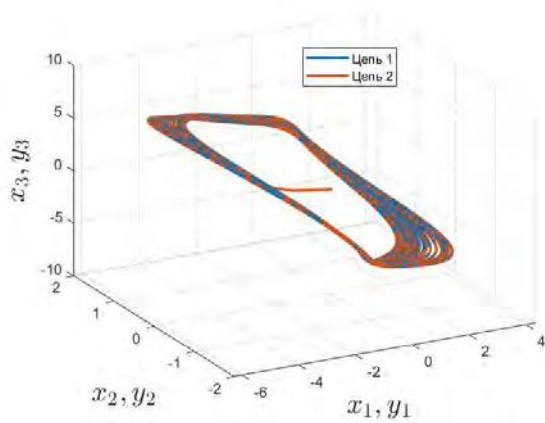
(b) Эволюция состояний ошибки  $e(t)$ .

Рисунок 3.32 — **Case 2:** Начальные данные систем Чуа на двух симметричных скрытых аттракторах с матрицей усиления управления  $k = \text{diag}(111,111,111)$ .



(a) Синхронизация запаздывания систем (3.58) и (3.59).

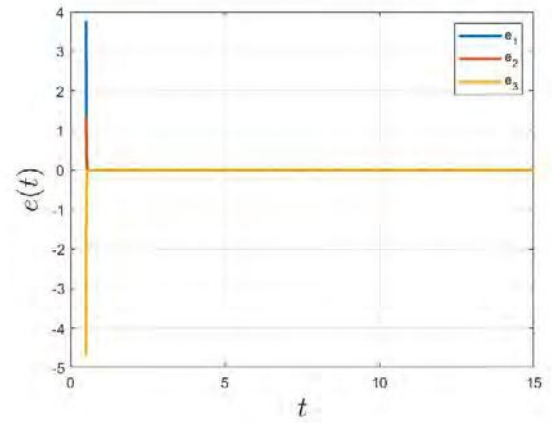
(b) Эволюция состояний ошибки  $e(t)$ .

Рисунок 3.33 — **Case 3:** Начальные данные систем Чуа на скрытом аттракторе и устойчивом нулевом состоянии равновесия с матрицей усиления управления

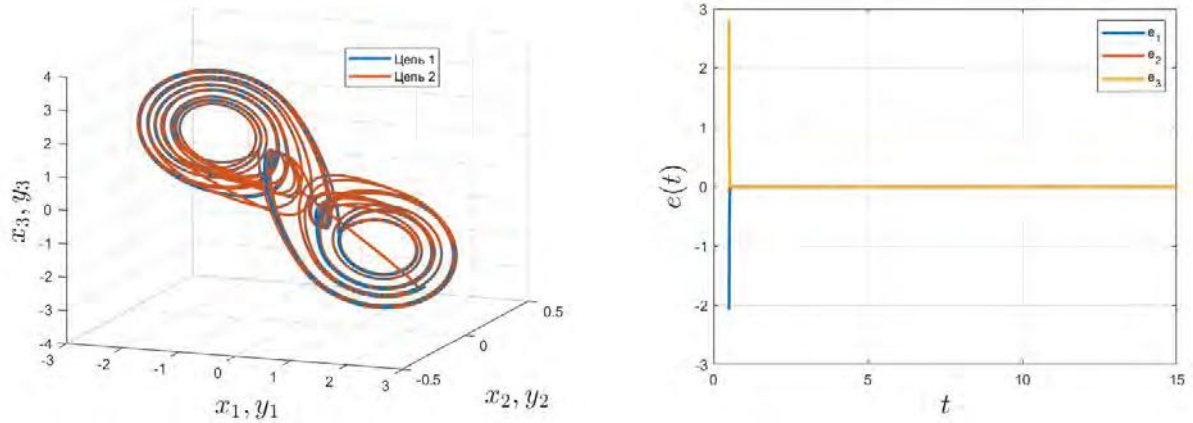
$$k = \text{diag}(111,111,111).$$

**Случай 2:**  $K_1 = \text{diag}(1000,1000,1000)$ ,  $K_2 = K_3 = \begin{pmatrix} 900 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 900 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 900 & 900 \end{pmatrix}$ .

**Случай 3:**  $K_1 = \text{diag}(700,700,700)$ ,  $K_2 = K_3 = \begin{pmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 1000 \end{pmatrix}$ .

**Случай 4:**  $K_1 = \text{diag}(300,300,300)$ ,  $K_2 = K_3 = \begin{pmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 500 \end{pmatrix}$ .

**Замечание 3.11.** Отметим, что реализация синхронизации для цепей Чуа дробного порядка с многустойчивостью является более сложной задачей. В настоящее время можно применить технику активного управления описанную в Разделе 3.1. Достижение адаптивной



(a) Синхронизация запаздывания систем (3.58) и (3.59).

(b) Эволюция состояний ошибки  $e(t)$ .

Рисунок 3.34 — **Case 4:** Начальные данные систем Чуа на самовозбуждающемся аттракторе и неустойчивом нулевом состоянии равновесия с матрицей усиления управления

$$k = \text{diag}(117, 117, 117).$$

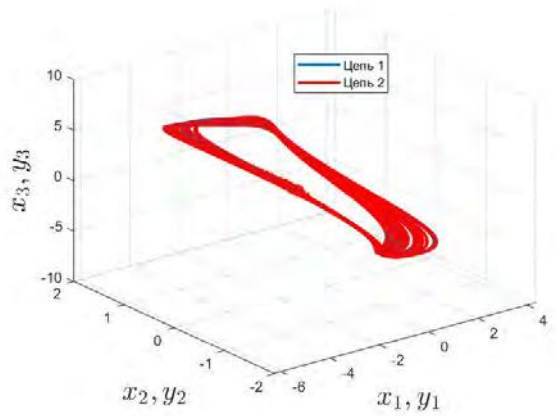
синхронизации с неопределенными параметрами для систем дробного порядка будет нашей будущей работой.

### 3.4.3 Сравнение схем синхронизации в применении к системам защищенной коммуникации

В этом подразделе на примере цепей Чуа оценивается скорость, с которой ошибка между состояниями стремится к нулю (т.е. время синхронизации) для полной синхронизации, синхронизации с запаздыванием и адаптивной синхронизации. Для оценки времени синхронизации мы рассматриваем случай 3 (см. Рис. 3.39). Из Рис. 3.39 видно, что время полной синхронизации составляет  $\approx 0.05s$ , время запаздывающей синхронизации составляет  $\approx 0.55s$ , а время адаптивной синхронизации составляет  $\approx 0.02s$ . Таким образом, время синхронизации для полной синхронизации и адаптивной синхронизации очень близко и в 11 и 27.5 раз быстрее, чем для запаздывающей синхронизации, соответственно.

Из этого эксперимента мы можем сделать вывод, что адаптивная синхронизация обеспечивает эффективную технику с точки зрения безопасной связи. Это обусловлено следующим:

- (1) Как мы уже обсуждали в предыдущем разделе, адаптивная синхронизация улучшает технику дешифрования, поскольку можно внедрить часть сигнала сообщения в параметры системы, а другую часть в ее состояния.
- (2) Время синхронизации при адаптивной синхронизации может быть быстрым, что улучшает безопасные режимы связи.



(a) Адаптивная синхронизация систем (3.60) и (3.61).

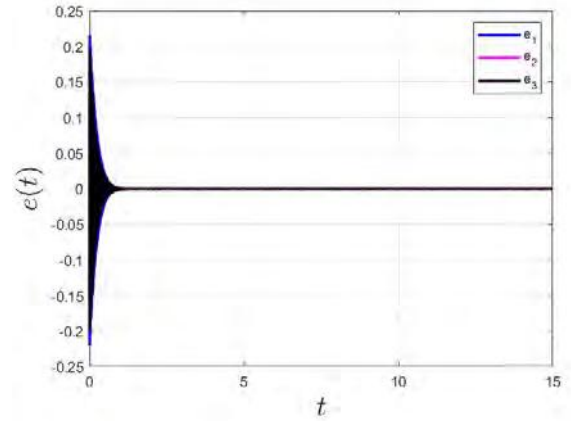
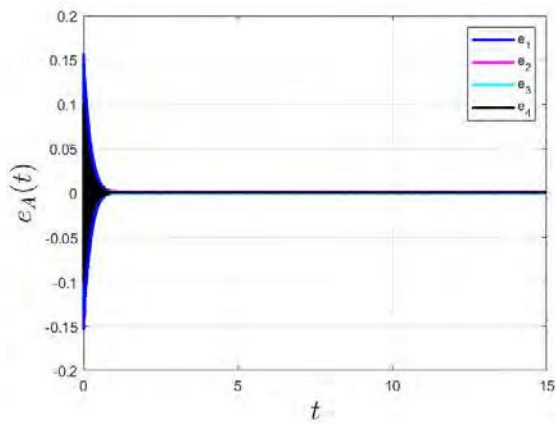
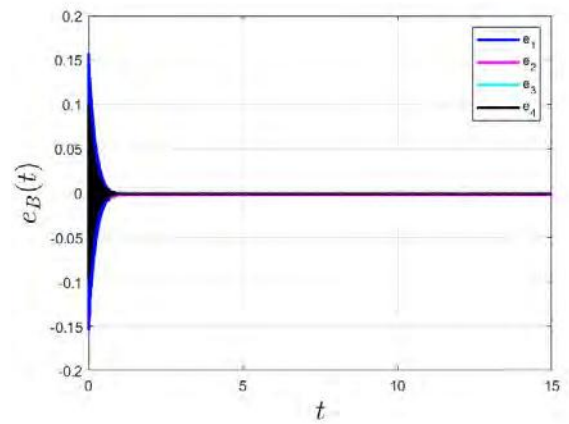
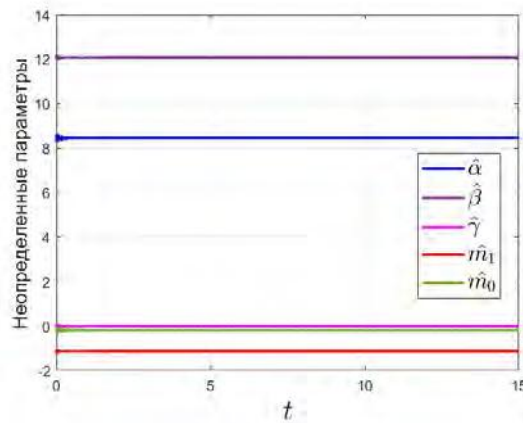
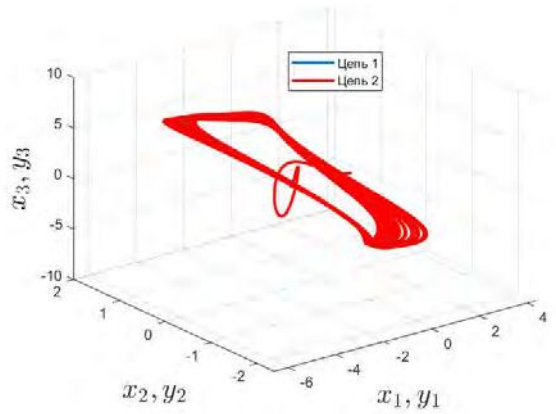
(b) Эволюция состояний ошибки  $e(t)$ .(c) Эволюция ошибки модуляции параметров  $e_A(t)$ .(d) Эволюция ошибки модуляции параметров  $e_B(t)$ .(e) Оценка неопределенных параметров  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{m}_1, \hat{m}_0)$ .

Рисунок 3.35 — **Случай 1:** Начальные данные систем Чуа на одном и том же скрытом аттракторе.

### 3.4.4 Обсуждение

В этом разделе была рассмотрена цепь Чуа, которая представляет собой простую электронную цепь, демонстрирующую хаос. Была реализована синхронизация цепей Чуа с мульт-





(a) Адаптивная синхронизация систем (3.60) и (3.61).

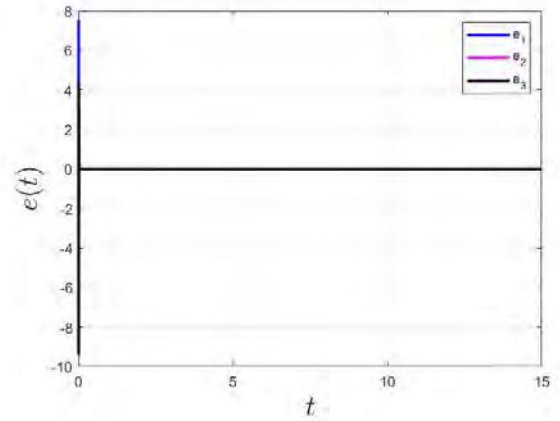
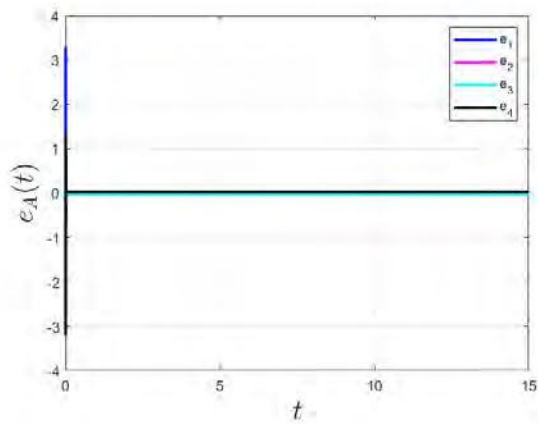
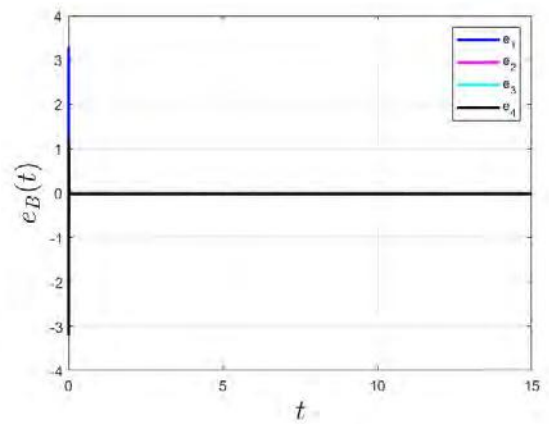
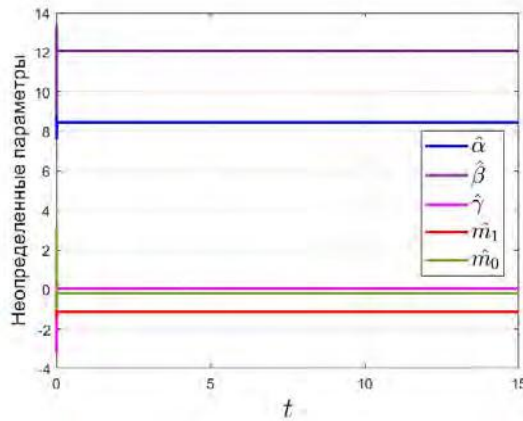
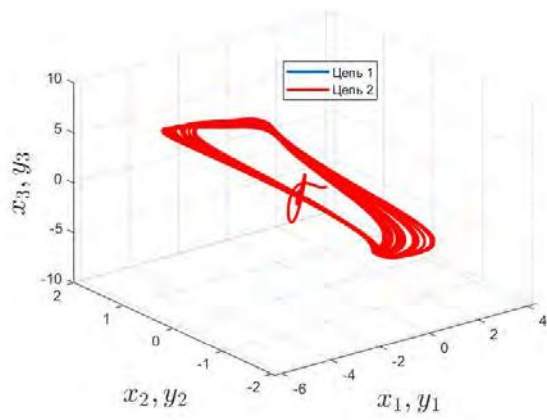
(b) Эволюция состояний ошибки  $e(t)$ .(c) Эволюция ошибки модуляции параметров  $e_A(t)$ .(d) Эволюция ошибки модуляции параметров  $e_B(t)$ .(e) Оценка неопределенных параметров  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{m}_1, \hat{m}_0)$ .

Рисунок 3.36 — **Случай 2:** Начальные данные систем Чуа на двух симметричных скрытых аттракторах.

тиустойчивостью и скрытыми аттракторами. Для этого были использованы три типа стратегий синхронизации (полная синхронизация, синхронизация с запаздыванием и адаптивная синхронизация с неопределенными параметрами). Далее было проведено сравнение времени синхронизации для этих стратегий синхронизации на примере цепи Чуа.



(a) Адаптивная синхронизация систем (3.60) и (3.61).

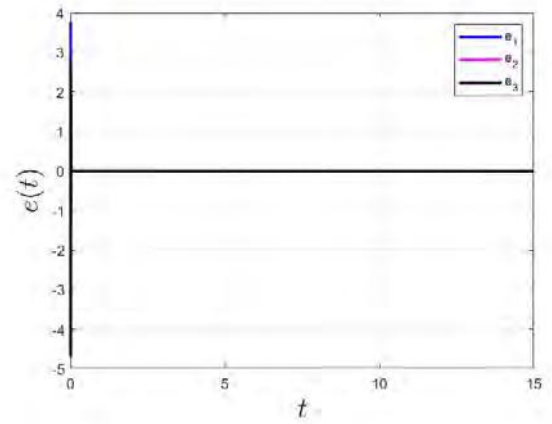
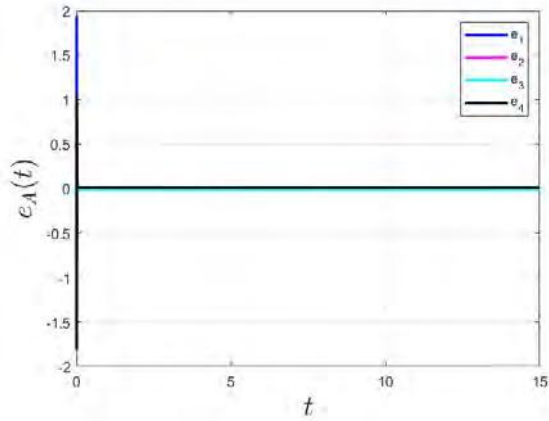
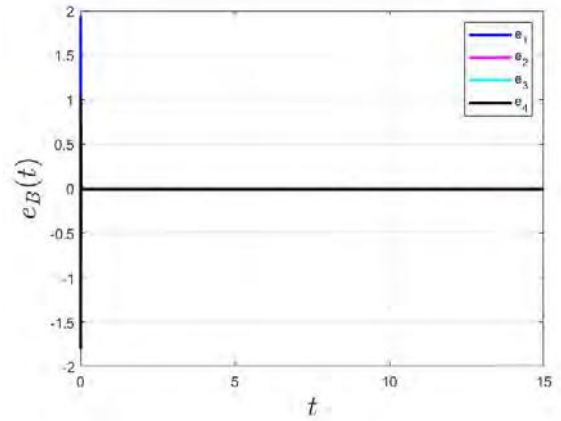
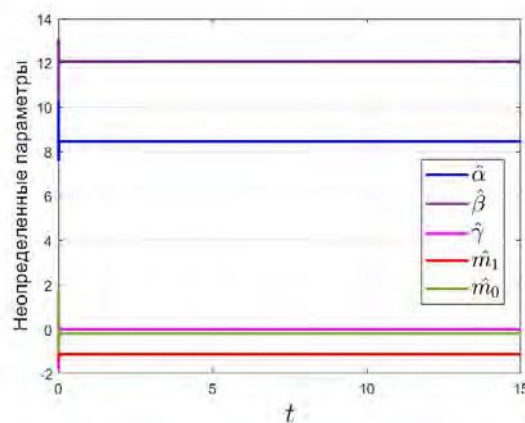
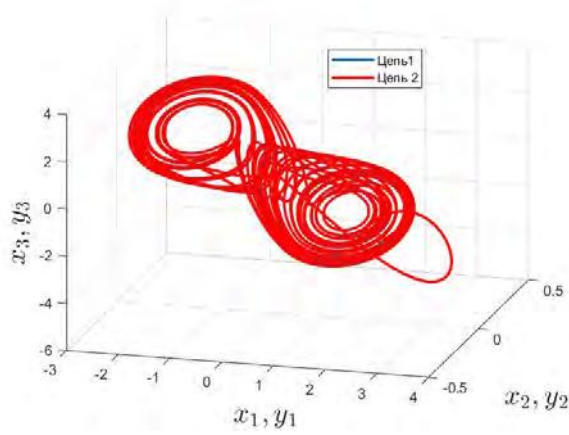
(b) Эволюция состояний ошибки  $e(t)$ .(c) Эволюция ошибки модуляции параметров  $e_A(t)$ .(d) Эволюция ошибки модуляции параметров  $e_B(t)$ .(e) Оценка неопределенных параметров  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{m}_1, \hat{m}_0)$ .

Рисунок 3.37 — **Случай 3:** Начальные данные систем Чуа на скрытом аттракторе и устойчивом нулевом состоянии равновесия.



(a) Адаптивная синхронизация систем (3.60) и (3.61).

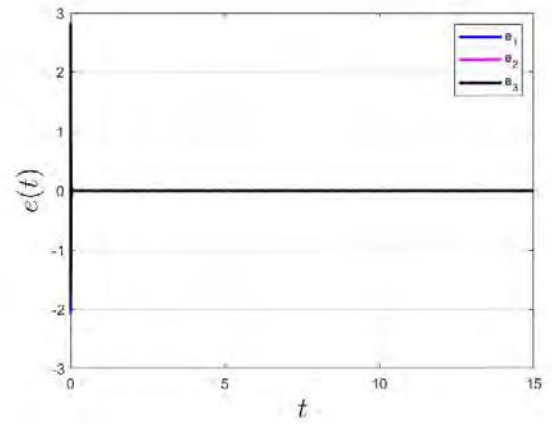
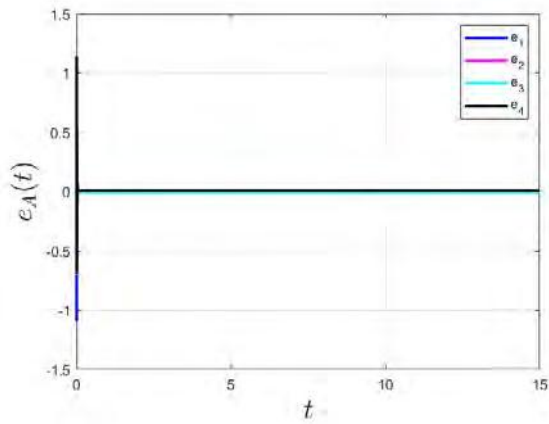
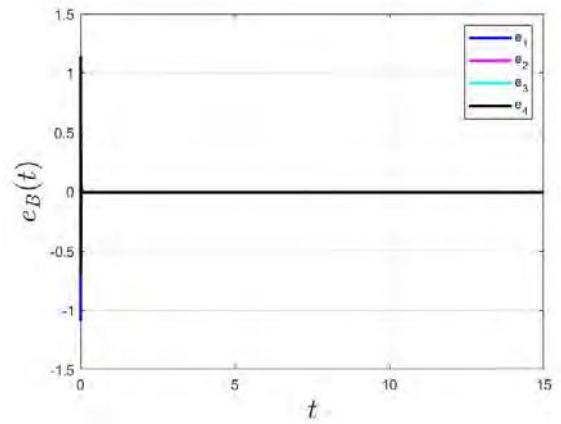
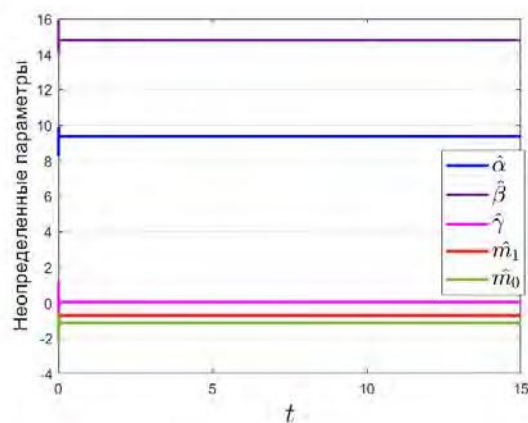
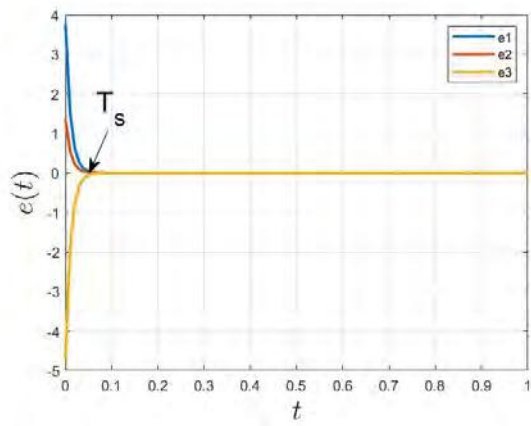
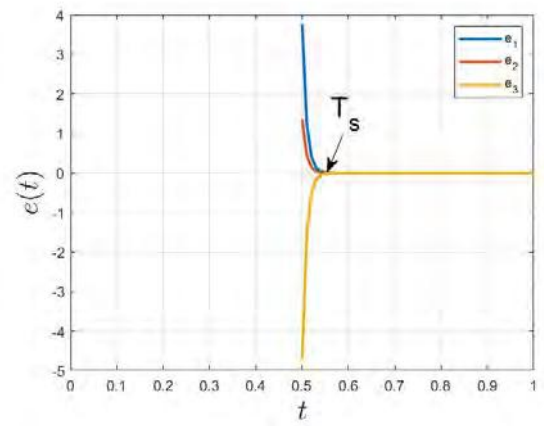
(b) Эволюция состояний ошибки  $e(t)$ .(c) Эволюция ошибки модуляции параметров  $e_A(t)$ .(d) Эволюция ошибки модуляции параметров  $e_B(t)$ .(e) Оценка неопределенных параметров  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{m}_1, \hat{m}_0)$ .

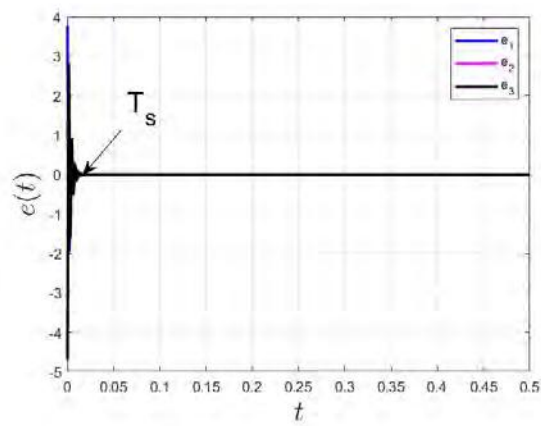
Рисунок 3.38 — Случай 4: Начальные данные систем Чуа на самовозбуждающемся аттракторе и неустойчивом нулевом состоянии равновесия.



(a) Полная синхронизация.



(b) Синхронизация запаздывания.



(c) Адаптивная синхронизация.

Рисунок 3.39 — Сравнение времени синхронизации на примере цепей Чуа.

## Заключение

Основные результаты, полученные в данной диссертации, состоят в следующем:

- (1) Получены оценки границы глобальной устойчивости для комплексной системы Лоренца и исследованы трудности численного изучения рождения самовозбуждающихся и скрытых аттракторов, вызванного потерей глобальной устойчивости.
- (2) Исследованы проблемы существования устойчивых скрытых хаотических аттракторов и переходных хаотических множеств в комплексной системе Лоренца в рамках специального аналитического преобразования, учитывающего симметрию фазового пространства.
- (3) Рассмотрена новая комплексная система Спротта дробного порядка без состояний равновесия, в которой обнаружено существование скрытого гиперхаотического аттрактора при различных значениях параметра дробного порядка.
- (4) Исследован метод синхронизации с активным управлением скрытых гиперхаотических аттракторов в комплексных системах дробного порядка.
- (5) Разработана новая схема реализующая синхронизацию с запаздыванием для гиперхаотических комплексных систем.
- (6) Предложен новый алгоритм для достижения адаптивной синхронизации общего класса гиперхаотических комплексных систем с неопределенными параметрами. Опираясь на этот тип стратегии синхронизации, была разработана новая схема для защищенной коммуникации с усовершенствованной криптосистемой.
- (7) Используя три описанные выше схемы, была достигнута синхронизация для классической цепи Чуа с мультиустойчивостью и скрытыми аттракторами. Результаты синхронизации для трех схем были сопоставлены между собой. Были продемонстрированы улучшения по сравнению со схемой синхронизации, рассмотренной в работе Т. Капитаниака и др.
- (8) Представлены приложения описанных трех схем синхронизации для проектирования защищенных систем связи и криптосистем.

## Список литературы

1. *Landau L. D.* On the problem of turbulence // Dokl. Akad. Nauk USSR. т. 44. — 1944. — с. 311.
2. *Hopf E.* A mathematical example displaying features of turbulence // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1948. — т. 1, № 4. — с. 303–322.
3. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25. — 1971. — т. 12. — с. 1–44.
4. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bulletin of the American mathematical Society. — 1967. — т. 73, № 6. — с. 747–817.
5. *Ladyzhenskaya O. A.* Finite-dimensionality of bounded invariant sets for Navier–Stokes systems and other dissipative systems // Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI. — 1982. — т. 115. — с. 137–155.
6. *Chen G., Hill D. J., Yu X.* Bifurcation control: theory and applications. т. 293. — Springer Science & Business Media, 2003.
7. *Kovacic I., Brennan M. J.* The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour. — John Wiley & Sons, 2011.
8. *Cveticanin L.* Strong nonlinear oscillators // Analytical Solutions, 2nd edition, Springer, Cham. — 2018.
9. *Chueshov I.* Introduction to the theory of infinite-dimensional dissipative systems. — "Acta"publishers, 2002.
10. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow // Journal of atmospheric sciences. — 1963. — т. 20, № 2. — с. 130–141.
11. *Rossler O.* An equation for hyperchaos // Physics Letters A. — 1979. — т. 71, № 2/3. — с. 155–157.
12. *Chen G., Ueta T.* Yet another chaotic attractor // International Journal of Bifurcation and chaos. — 1999. — т. 9, № 07. — с. 1465–1466.
13. *Chua L., Komuro M., Matsumoto T.* The double scroll family // IEEE transactions on circuits and systems. — 1986. — т. 33, № 11. — с. 1072–1118.
14. *Lü J., Chen G.* A new chaotic attractor coined // International Journal of Bifurcation and chaos. — 2002. — т. 12, № 03. — с. 659–661.
15. *Stewart I.* The Lorenz attractor exists // Nature. — 2000. — т. 406, № 6799. — с. 948–949.
16. *Leonov G., Kuznetsov N., Vagaitsev V.* Localization of hidden Chua’s attractors // Physics Letters A. — 2011. — т. 375, № 23. — с. 2230–2233.

17. *Leonov G., Kuznetsov N., Vagitsev V.* Hidden attractor in smooth Chua systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2012. — т. 241, № 18. — с. 1482–1486.
18. *Leonov G. A., Kuznetsov N. V.* Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert–Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2013. — т. 23, № 01. — с. 1330002.
19. *Leonov G., Kuznetsov N., Mokaev T.* Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2015. — т. 224, № 8. — с. 1421–1458.
20. *Kuznetsov N. et al.* The Lorenz system: hidden boundary of practical stability and the Lyapunov dimension // *Nonlinear Dynamics*. — 2020. — т. 102, № 2. — с. 713–732.
21. *Hilbert D.* Mathematical problems // *Bulletin of the American Mathematical Society*. — 1902. — т. 8, № 10. — с. 437–479.
22. *Kuznetsov N., Leonov G.* Lyapunov quantities, limit cycles and strange behavior of trajectories in two-dimensional quadratic systems // *Journal of Vibroengineering*. — 2008. — т. 10, № 4. — с. 460–467.
23. *Leonov G., Kuznetsov N., Kudryashova E.* Cycles of two-dimensional systems: Computer calculations, proofs, and experiments // *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*. — 2008. — т. 41, № 3. — с. 216–250.
24. *Kuznetsov N., Kuznetsova O., Leonov G.* Visualization of four normal size limit cycles in two-dimensional polynomial quadratic system // *Differential equations and dynamical systems*. — 2013. — т. 21, № 1/2. — с. 29–34.
25. *Bautin N. N.* On the number of limit cycles appearing with variation of the coefficients from an equilibrium state of the type of a focus or a center // *Matematicheskii Sbornik*. — 1952. — т. 72, № 1. — с. 181–196.
26. *Li C., Sprott J.* Chaotic flows with a single nonquadratic term // *Physics Letters A*. — 2014. — т. 378, № 3. — с. 178–183.
27. *Markus L., Yamabe H.* Global stability criteria for differential systems // *Osaka Mathematical Journal*. — 1960. — т. 12, № 2. — с. 305–317.
28. *Aizerman M. A.* On a problem concerning the stability “in the large” of dynamical systems // *Uspekhi matematicheskikh nauk*. — 1949. — т. 4, № 4. — с. 187–188.
29. *Kalman R. E.* Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // *Trans. ASME*. — 1957. — т. 79, № 3. — с. 553–566.
30. *Fitts R.* Two counterexamples to Aizerman’s conjecture // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1966. — т. 11, № 3. — с. 553–556.
31. *Barabanov N.* On the Kalman problem // *Siberian Mathematical Journal*. — 1988. — т. 29, № 3. — с. 333–341.

32. *Llibre J., Bernat J.* Counterexample to Kalman and Markus-Yamabe conjectures in dimension larger than 3 // *Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems*. — 1996. — т. 2, № 3. — с. 377–379.
33. *Bragin V. et al.* Algorithms for finding hidden oscillations in nonlinear systems. The Aizerman and Kalman conjectures and Chua’s circuits // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2011. — т. 50, № 4. — с. 511–543.
34. *Leonov G., Kuznetsov N.* Algorithms for searching for hidden oscillations in the Aizerman and Kalman problems // *Doklady Mathematics*. т. 84. — Citeseer. 2011. — с. 475–481.
35. *Leonov G., Kuznetsov N.* Analytical-numerical methods for investigation of hidden oscillations in nonlinear control systems // *IFAC Proceedings Volumes*. — 2011. — т. 44, № 1. — с. 2494–2505.
36. *Alli-Oke R. et al.* A robust Kalman conjecture for first-order plants // *IFAC Proceedings Volumes*. — 2012. — т. 45, № 13. — с. 27–32.
37. *Kuznetsov N. et al.* Nonlinear analysis of classical phase-locked loops in signal’s phase space // *IFAC Proceedings Volumes*. — 2014. — т. 47, № 3. — с. 8253–8258.
38. *Kuznetsov N. et al.* Limitations of the classical phase-locked loop analysis // *2015 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*. — IEEE. 2015. — с. 533–536.
39. *Leonov G. et al.* Aircraft control with anti-windup compensation // *Differential equations*. — 2012. — т. 48, № 13. — с. 1700–1720.
40. *Andrievsky B. R. et al.* Hidden oscillations in aircraft flight control system with input saturation // *IFAC Proceedings Volumes*. — 2013. — т. 46, № 12. — с. 75–79.
41. *Andrievsky B., Kuznetsov N., Leonov G.* Convergence-based analysis of robustness to delay in anti-windup loop of aircraft autopilot // *IFAC-PapersOnLine*. — 2015. — т. 48, № 9. — с. 144–149.
42. *Kiseleva M. et al.* Drilling systems failures and hidden oscillations // *2012 IEEE 4th International Conference on Nonlinear Science and Complexity (NSC)*. — IEEE. 2012. — с. 109–112.
43. *Leonov G. et al.* Hidden oscillations in mathematical model of drilling system actuated by induction motor with a wound rotor // *Nonlinear Dynamics*. — 2014. — т. 77, № 1/2. — с. 277–288.
44. *Mokaev T.* Localization and dimension estimation of attractors in the Glukhovsky-Dolzhansky system // *Jyväskylä studies in computing*. — 2016. — № 240.
45. *Kuznetsov N. V. et al.* The birth of the global stability theory and the theory of hidden oscillations // *2020 European Control Conference (ECC)*. — IEEE. 2020. — с. 769–774.
46. *Kuznetsov N.* Theory of hidden oscillations and stability of control systems // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2020. — т. 59, № 5. — с. 647–668.



47. *Kuznetsov N. et al.* Finite-time Lyapunov dimension and hidden attractor of the Rabinovich system // *Nonlinear dynamics*. — 2018. — т. 92, № 2. — с. 267–285.
48. *Chen G. et al.* Hidden attractors on one path: Glukhovsky–Dolzhansky, Lorenz, and Rabinovich systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2017. — т. 27, № 08. — с. 1750115.
49. *Kuznetsov N. et al.* Hidden attractor in the Rabinovich system, Chua circuits and PLL // *AIP Conference Proceedings*. т. 1738. — AIP Publishing LLC. 2016. — с. 210008.
50. *Glukhovskii A., Dolzhanskii F.* Three-component geostrophic models of convection in a rotating fluid // *Academy of Sciences, USSR, Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. — 1980. — т. 16. — с. 451–462.
51. *Singh J. P., Roy B.* Hidden attractors in a new complex generalised Lorenz hyperchaotic system, its synchronisation using adaptive contraction theory, circuit validation and application // *Nonlinear Dynamics*. — 2018. — т. 92, № 2. — с. 373–394.
52. *Shoreh A. A.-H., Kuznetsov N. V., Mokaev T. N.* Lag synchronization for complex-valued Rabinovich system with application to encryption techniques // *2020 16th International Computer Engineering Conference (ICENCO)*. — IEEE. 2020. — с. 11–16.
53. *Shoreh A. A.-H. et al.* Synchronization of hidden hyperchaotic attractors in fractional-Order complex-valued systems with application to secure communications // *2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus)*. — IEEE. 2021. — с. 62–67.
54. *Gibbon J., McGuinness M.* The real and complex Lorenz equations in rotating fluids and lasers // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1982. — т. 5, № 1. — с. 108–122.
55. *Ning C.-z., Haken H.* Detuned lasers and the complex Lorenz equations: subcritical and supercritical Hopf bifurcations // *Physical Review A*. — 1990. — т. 41, № 7. — с. 3826.
56. *Kuznetsov N. et al.* Analytical and numerical study of the hidden boundary of practical stability: complex versus real Lorenz systems // *arXiv preprint arXiv:2106.10725*. — 2021.
57. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. т. 204. — elsevier, 2006.
58. *Miller K. S., Ross B.* An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. — Wiley, 1993.
59. *Xu Y. et al.* Chaos in diffusionless Lorenz system with a fractional order and its control. — 2012.
60. *Xu Y., Li Y., Liu D.* Response of fractional oscillators with viscoelastic term under random excitation // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. — 2014. — т. 9, № 3.
61. *Hilfer R.* Applications of fractional calculus in physics. — World scientific, 2000.
62. *Tarasov V. E.* Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. — Springer Science & Business Media, 2011.

63. *Arkhincheev V.* Anomalous diffusion in inhomogeneous media: some exact results // Modelling Measurement and Control a General Physics Electronics and Electrical Engineering. — 1993. — т. 49. — с. 11–11.
64. *El-Sayed A. M.* Fractional-order diffusion-wave equation // International Journal of Theoretical Physics. — 1996. — т. 35, № 2. — с. 311–322.
65. *Cole K. S.* Electric conductance of biological systems // Cold Spring Harbor symposia on quantitative biology. т. 1. — Cold Spring Harbor Laboratory Press. 1933. — с. 107–116.
66. *Laskin N.* Fractional market dynamics // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2000. — т. 287, № 3/4. — с. 482–492.
67. *Podlubny I.* Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. — Elsevier, 1998.
68. *Xu Y. et al.* Responses of Duffing oscillator with fractional damping and random phase // Nonlinear Dynamics. — 2013. — т. 74, № 3. — с. 745–753.
69. *Xu Y. et al.* Sliding mode control of a class of fractional chaotic systems in the presence of parameter perturbations // Journal of Vibration and Control. — 2015. — т. 21, № 3. — с. 435–448.
70. *Mahmoud G. M., Ahmed M. E., Abed-Elhameed T. M.* Active control technique of fractional-order chaotic complex systems // The European Physical Journal Plus. — 2016. — т. 131, № 6. — с. 1–11.
71. *Liu T. et al.* Long-Term dynamics of autonomous fractional differential equations // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2016. — т. 26, № 04. — с. 1650055.
72. *Mahmoud G. M., Farghaly A. A., Shoreh A. A.-H.* A technique for studying a class of fractional-order nonlinear dynamical systems // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2017. — т. 27, № 09. — с. 1750144.
73. *Ahmad W., El-Khazali R., Elwakil A.* Fractional-order Wien-bridge oscillator // Electronics Letters. — 2001. — т. 37, № 18. — с. 1110–1112.
74. *Wang Y., Li C.* Does the fractional Brusselator with efficient dimension less than 1 have a limit cycle? // Physics Letters A. — 2007. — т. 363, № 5/6. — с. 414–419.
75. *Gao X., Yu J.* Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing's oscillators // Chaos, Solitons & Fractals. — 2005. — т. 24, № 4. — с. 1097–1104.
76. *Grigorenko I., Grigorenko E.* Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system // Physical review letters. — 2003. — т. 91, № 3. — с. 034101.
77. *Hartley T. T., Lorenzo C. F., Qammer H. K.* Chaos in a fractional order Chua's system // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. — 1995. — т. 42, № 8. — с. 485–490.

78. *Lu J. G.* Chaotic dynamics of the fractional-order Lü system and its synchronization // *Physics Letters A*. — 2006. — т. 354, № 4. — с. 305–311.
79. *Ahmad W. M., Sprott J. C.* Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2003. — т. 16, № 2. — с. 339–351.
80. *Li C., Chen G.* Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2004. — т. 341. — с. 55–61.
81. *Li C., Chen G.* Chaos in the fractional order Chen system and its control // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2004. — т. 22, № 3. — с. 549–554.
82. *Yu Y., Li H.-X.* The synchronization of fractional-order Rössler hyperchaotic systems // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2008. — т. 387, № 5/6. — с. 1393–1403.
83. *Wu X., Lu Y.* Generalized projective synchronization of the fractional-order Chen hyperchaotic system // *Nonlinear Dynamics*. — 2009. — т. 57, № 1. — с. 25–35.
84. *Farghaly A. A., Shoreh A. A.-H.* Some complex dynamical behaviors of the new 6d fractional-order hyperchaotic Lorenz-like system // *Journal of the Egyptian Mathematical Society*. — 2018. — т. 26, № 1. — с. 138–155.
85. *Danca M.-F.* Hidden chaotic attractors in fractional-order systems // *Nonlinear Dynamics*. — 2017. — т. 89, № 1. — с. 577–586.
86. *Danca M.-F.* et al. Complex dynamics, hidden attractors and continuous approximation of a fractional-order hyperchaotic PWC system // *Nonlinear Dynamics*. — 2018. — т. 91, № 4. — с. 2523–2540.
87. *Munoz-Pacheco J. M.* et al. A new fractional-order chaotic system with different families of hidden and self-excited attractors // *Entropy*. — 2018. — т. 20, № 8. — с. 564.
88. *Wang S., Wang C., Xu C.* An image encryption algorithm based on a hidden attractor chaos system and the Knuth–Durstenfeld algorithm // *Optics and Lasers in Engineering*. — 2020. — т. 128. — с. 105995.
89. *Xu Y.* et al. Image encryption based on synchronization of fractional chaotic systems // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2014. — т. 19, № 10. — с. 3735–3744.
90. *Tavazoei M. S., Haeri M.* Synchronization of chaotic fractional-order systems via active sliding mode controller // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2008. — т. 387, № 1. — с. 57–70.
91. *Asheghan M. M.* et al. Robust outer synchronization between two complex networks with fractional order dynamics // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2011. — т. 21, № 3. — с. 033121.

92. *Martens M., Poon S.-H.* Returns synchronization and daily correlation dynamics between international stock markets // *Journal of Banking & Finance*. — 2001. — т. 25, № 10. — с. 1805—1827.
93. *Pecora L. M., Carroll T. L.* Synchronization in chaotic systems // *Physical review letters*. — 1990. — т. 64, № 8. — с. 821.
94. *Lin W., He Y.* Complete synchronization of the noise-perturbed Chua's circuits // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2005. — т. 15, № 2. — с. 023705.
95. *Mahmoud G. M., Mahmoud E. E.* Complete synchronization of chaotic complex nonlinear systems with uncertain parameters // *Nonlinear Dynamics*. — 2010. — т. 62, № 4. — с. 875—882.
96. *Zhang H., Ma X.-k.* Synchronization of uncertain chaotic systems with parameters perturbation via active control // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2004. — т. 21, № 1. — с. 39—47.
97. *Du H., Zeng Q., Lü N.* A general method for modified function projective lag synchronization in chaotic systems // *Physics Letters A*. — 2010. — т. 374, № 13/14. — с. 1493—1496.
98. *Tang Z., Park J. H., Feng J.* Novel approaches to pin cluster synchronization on complex dynamical networks in Lur'e forms // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2018. — т. 57. — с. 422—438.
99. *He H., Tu J., Xiong P.* Lr-synchronization and adaptive synchronization of a class of chaotic Lurie systems under perturbations // *Journal of the Franklin Institute*. — 2011. — т. 348, № 9. — с. 2257—2269.
100. *Xu Y., Zhou W., Sun W.* Adaptive synchronization of uncertain chaotic systems with adaptive scaling function // *Journal of the Franklin Institute*. — 2011. — т. 348, № 9. — с. 2406—2416.
101. *Li X., Cao J.* Adaptive synchronization for delayed neural networks with stochastic perturbation // *Journal of the Franklin Institute*. — 2008. — т. 345, № 7. — с. 779—791.
102. *Shoreh A.-H., Kuznetsov N., Mokaev T.* New adaptive synchronization algorithm for a general class of complex hyperchaotic systems with unknown parameters and its application to secure communication // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2021. — с. 126466.
103. *Mahmoud G. M., Bountis T., Mahmoud E. E.* Active control and global synchronization of the complex Chen and Lü systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2007. — т. 17, № 12. — с. 4295—4308.
104. *Stuart A., Humphries A. R.* *Dynamical systems and numerical analysis*. т. 2. — Cambridge University Press, 1998.

105. *Hirsch M. W., Smale S., Devaney R. L.* Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. — Academic press, 2012.
106. *Strogatz S. H.* Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering. — CRC press, 2018.
107. *Hilborn R. C.* Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers. — Oxford University Press on Demand, 2000.
108. *Wolf A.* et al. Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D: nonlinear phenomena*. — 1985. — т. 16, № 3. — с. 285—317.
109. *Singh J. P., Roy B.* The nature of Lyapunov exponents is  $(+,+,-,-)$ . Is it a hyperchaotic system? // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2016. — т. 92. — с. 73—85.
110. *Fowler A., Gibbon J., McGuinness M.* The complex Lorenz equations // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1982. — т. 4, № 2. — с. 139—163.
111. *Rauh A., Hannibal L., Abraham N.* Global stability properties of the complex Lorenz model // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1996. — т. 99, № 1. — с. 45—58.
112. *Coddington E. A., Levinson N.* Theory of ordinary differential equations. — Tata McGraw-Hill Education, 1955.
113. *Lawrence P.* Differential equations and dynamical systems. — 1991.
114. *Lapidus L., Seinfeld J. H.* Numerical solution of ordinary differential equations. — Academic press, 1971.
115. *Kehlet B., Logg A.* A posteriori error analysis of round-off errors in the numerical solution of ordinary differential equations // *Numerical Algorithms*. — 2017. — т. 76, № 1. — с. 191—210.
116. *Liao S., Wang P.* On the mathematically reliable long-term simulation of chaotic solutions of Lorenz equation in the interval  $[0, 10000]$  // *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*. — 2014. — т. 57, № 2. — с. 330—335.
117. *Petráš I.* Method for simulation of the fractional order chaotic systems // *Acta Montanistica Slovaca*. — 2006. — т. 11, № 4. — с. 273—277.
118. *Tripathi D., Pandey S., Das S.* Peristaltic flow of viscoelastic fluid with fractional Maxwell model through a channel // *Applied Mathematics and Computation*. — 2010. — т. 215, № 10. — с. 3645—3654.
119. *Magin R. L.* Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues // *Computers & Mathematics with Applications*. — 2010. — т. 59, № 5. — с. 1586—1593.
120. *Picozzi S., West B. J.* Fractional Langevin model of memory in financial markets // *Physical Review E*. — 2002. — т. 66, № 4. — с. 046118.
121. *Lundstrom B. N.* et al. Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons // *Nature neuroscience*. — 2008. — т. 11, № 11. — с. 1335—1342.

122. *Magin R., Ovadia M.* Modeling the cardiac tissue electrode interface using fractional calculus // *Journal of Vibration and Control*. — 2008. — т. 14, № 9/10. — с. 1431—1442.
123. *Tavazoei M. S., Haeri M.* A note on the stability of fractional order systems // *Mathematics and Computers in simulation*. — 2009. — т. 79, № 5. — с. 1566—1576.
124. *Luo C., Wang X.* Chaos in the fractional-order complex Lorenz system and its synchronization // *Nonlinear Dynamics*. — 2013. — т. 71, № 1. — с. 241—257.
125. *Mahmoud G. M., Abed-Elhameed T. M., Ahmed M. E.* Generalization of combination-combination synchronization of chaotic n-dimensional fractional-order dynamical systems // *Nonlinear Dynamics*. — 2016. — т. 83, № 4. — с. 1885—1893.
126. *Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D.* A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations // *Nonlinear Dynamics*. — 2002. — т. 29, № 1. — с. 3—22.
127. *Zhou Y.* Fractional evolution equations and inclusions: Analysis and control. — Academic Press, 2016.
128. *Danca M.-F.* et al. Fractional-order PWC systems without zero Lyapunov exponents // *Nonlinear Dynamics*. — 2018. — т. 92, № 3. — с. 1061—1078.
129. *Matignon D.* Stability results for fractional differential equations with applications to control processing // *Computational engineering in systems applications*. т. 2. — Citeseer. 1996. — с. 963—968.
130. *Rabinovich M. I.* Stochastic self-oscillations and turbulence // *Soviet Physics Uspekhi*. — 1978. — т. 21, № 5. — с. 443.
131. *Vidyasagar M.* Nonlinear systems analysis. — SIAM, 2002.
132. *Chellaboina V., Haddad W. M.* Nonlinear dynamical systems and control: A Lyapunov-based approach. — Princeton University Press, 2008.
133. *Reitmann V., Smirnova V. B., Leonov G. A.* Non-local methods for pendulum-like feedback systems. — Springer, 2013.
134. *Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A. K.* Stability of stationary sets in control systems with discontinuous nonlinearities. т. 14. — World Scientific Singapore, 2004.
135. *Barbashin E., Krasovskii N. N.* On stability of motion in the large : *тек. отч. / Trw space technology labs Los Angeles calif.* — 1961.
136. *LaSalle J.* Some extensions of Liapunov's second method // *IRE Transactions on circuit theory*. — 1960. — т. 7, № 4. — с. 520—527.
137. *Leonov G. A., Ponomarenko D. V., Smirnova V. B.* Frequency-domain methods for nonlinear analysis: theory and applications. т. 9. — World Scientific, 1996.
138. *La Salle J., Lefschetz S.* Stability by Liapunov's Direct Method with Applications. — Elsevier, 2012.

139. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynuk A. A.* Practical stability of nonlinear systems. — World Scientific, 1990.
140. *Afraimovich V. S., Bykov V., Shilnikov L. P.* On the origin and structure of the Lorenz attractor // *Akademiia Nauk SSSR Doklady*. т. 234. — 1977. — с. 336—339.
141. *Auerbach D.* et al. Exploring chaotic motion through periodic orbits // *Physical Review Letters*. — 1987. — т. 58, № 23. — с. 2387.
142. *Cvitanović P.* Periodic orbits as the skeleton of classical and quantum chaos // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1991. — т. 51, № 1—3. — с. 138—151.
143. *Chua L. O.* et al. *Methods Of Qualitative Theory In Nonlinear Dynamics (Part II)*. т. 5. — World Scientific, 2001.
144. *Leonov G. A.* Shilnikov chaos in Lorenz-like systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2013. — т. 23, № 03. — с. 1350058.
145. *Leonov G. A.* et al. Homoclinic bifurcations and chaos in the Fishing principle for the Lorenz-like systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2020. — т. 30, № 08. — с. 2050124.
146. *Levinson N.* Transformation theory of non-linear differential equations of the second order // *Annals of Mathematics*. — 1944. — с. 723—737.
147. *Kuznetsov N. V.* Hidden attractors in fundamental problems and engineering models: A short survey // *AETA 2015: Recent Advances in Electrical Engineering and Related Sciences*. — Springer, 2016. — с. 13—25.
148. *Leonov G., Boichenko V.* Lyapunov's direct method in the estimation of the Hausdorff dimension of attractors // *Acta Applicandae Mathematica*. — 1992. — т. 26, № 1. — с. 1—60.
149. *Leonov G.* Lyapunov functions in the global analysis of chaotic systems // *Ukrainian Mathematical Journal*. — 2018. — т. 70, № 1. — с. 42—66.
150. *Sparrow C.* *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*. т. 41. — Springer Science & Business Media, 2012.
151. *Yuan Q., Yang F.-Y., Wang L.* A note on hidden transient chaos in the Lorenz system // *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. — 2017. — т. 18, № 5. — с. 427—434.
152. *Munmuangsaen B., Srisuchinwong B.* A hidden chaotic attractor in the classical Lorenz system // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2018. — т. 107. — с. 61—66.
153. *Greboği C., Ott E., Yorke J. A.* Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation // *Physical Review Letters*. — 1983. — т. 50, № 13. — с. 935.
154. *Lai Y.-C., Tél T.* *Transient chaos: complex dynamics on finite time scales*. т. 173. — Springer Science & Business Media, 2011.

155. *Danca M.-F., Kuznetsov N.* Hidden chaotic sets in a Hopfield neural system // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2017. — т. 103. — с. 144–150.
156. *Fowler A., Gibbon J., McGuinness M.* The real and complex Lorenz equations and their relevance to physical systems. — 1983.
157. *Neimark Y., Landa P.* Stochastic and chaotic oscillations. т. 77. — Springer Science & Business Media, 1992.
158. *Leonov G. A., Reitmann V.* Attraktoreingrenzung für nichtlineare Systeme. — 1987.
159. *Leonov G. A.* On estimations of Hausdorff dimension of attractors // *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*. — 1991. — т. 23, № 3. — с. 38–41.
160. *Kuznetsov N., Alexeeva T., Leonov G.* Invariance of Lyapunov exponents and Lyapunov dimension for regular and irregular linearizations // *Nonlinear Dynamics*. — 2016. — т. 85, № 1. — с. 195–201.
161. *Kuznetsov N.* The Lyapunov dimension and its estimation via the Leonov method // *Physics Letters A*. — 2016. — т. 380, № 25/26. — с. 2142–2149.
162. *Siminos E., Cvitanović P.* Continuous symmetry reduction and return maps for high-dimensional flows // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2011. — т. 240, № 2. — с. 187–198.
163. *Froehlich S., Cvitanović P.* Reduction of continuous symmetries of chaotic flows by the method of slices // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2012. — т. 17, № 5. — с. 2074–2084.
164. *Vladimirov A. G., Toronov V. Y., Derbov V. L.* Complex Lorenz equations // *CIS Selected Papers Nonlinear Dynamics of Laser and Optical Systems*. т. 3177. — International Society for Optics, Photonics. 1997. — с. 97–106.
165. *Vladimirov A., Toronov V. Y., Derbov V. L.* The complex Lorenz model: Geometric structure, homoclinic bifurcation and one-dimensional map // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 1998. — т. 8, № 04. — с. 723–729.
166. *Vladimirov A., Toronov V. Y., Derbov V.* Properties of the phase space and bifurcations in the complex Lorenz model // *Technical Physics*. — 1998. — т. 43, № 8. — с. 877–884.
167. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. т. 1. — New York, London, 1963.
168. *Lü J., Chen G., Zhang S.* The compound structure of a new chaotic attractor // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2002. — т. 14, № 5. — с. 669–672.
169. *May R. M.* Simple mathematical models with very complicated dynamics // *The Theory of Chaotic Attractors*. — 2004. — с. 85–93.
170. *Chen A. et al.* Generating hyperchaotic Lü attractor via state feedback control // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2006. — т. 364. — с. 103–110.



171. *Jia Q.* Projective synchronization of a new hyperchaotic Lorenz system // *Physics Letters A.* — 2007. — т. 370, № 1. — с. 40–45.
172. *Gao Y.* et al. A new fractional-order hyperchaotic system and its modified projective synchronization // *Chaos, Solitons & Fractals.* — 2015. — т. 76. — с. 190–204.
173. *Wang G.* et al. A new modified hyperchaotic Lü system // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2006. — т. 371, № 2. — с. 260–272.
174. *Li Y., Chen G., Tang W. K.-S.* Controlling a unified chaotic system to hyperchaotic // *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs.* — 2005. — т. 52, № 4. — с. 204–207.
175. *Li Y., Tang W. K., Chen G.* Hyperchaos evolved from the generalized Lorenz equation // *International Journal of Circuit Theory and Applications.* — 2005. — т. 33, № 4. — с. 235–251.
176. *Mahmoud G. M., Ahmed M. E., Mahmoud E. E.* Analysis of hyperchaotic complex Lorenz systems // *International Journal of Modern Physics C.* — 2008. — т. 19, № 10. — с. 1477–1494.
177. *Mahmoud G. M., Mahmoud E. E., Ahmed M. E.* On the hyperchaotic complex Lü system // *Nonlinear Dynamics.* — 2009. — т. 58, № 4. — с. 725–738.
178. *Mahmoud E. E.* Dynamics and synchronization of new hyperchaotic complex Lorenz system // *Mathematical and Computer Modelling.* — 2012. — т. 55, № 7/8. — с. 1951–1962.
179. *Mahmoud G. M., Ahmed M. E.* A hyperchaotic complex system generating two-, three-, and four-scroll attractors // *Journal of Vibration and Control.* — 2012. — т. 18, № 6. — с. 841–849.
180. *Mahmoud G. M.* et al. Dynamics of distributed-order hyperchaotic complex van der Pol oscillators and their synchronization and control // *The European Physical Journal Plus.* — 2020. — т. 135, № 1. — с. 1–16.
181. *Chen D.-Y.* et al. Analysis and control of a hyperchaotic system with only one nonlinear term // *Nonlinear Dynamics.* — 2012. — т. 67, № 3. — с. 1745–1752.
182. *Dadras S., Momeni H. R.* Four-scroll hyperchaos and four-scroll chaos evolved from a novel 4D nonlinear smooth autonomous system // *Physics Letters A.* — 2010. — т. 374, № 11/12. — с. 1368–1373.
183. *Wei Z., Wang R., Liu A.* A new finding of the existence of hidden hyperchaotic attractors with no equilibria // *Mathematics and Computers in Simulation.* — 2014. — т. 100. — с. 13–23.
184. *Jia Q.* Hyperchaos generated from the Lorenz chaotic system and its control // *Physics Letters A.* — 2007. — т. 366, № 3. — с. 217–222.
185. *Xu G., Chen S.* Hybrid synchronization of a Chen hyper-chaotic system with two simple linear feedback controllers // *Applied Mathematics.* — 2013. — т. 4, 11B. — с. 13.

186. *Singh P. P., Singh J. P., Roy B.* Synchronization and anti-synchronization of Lu and Bhalekar–Gejji chaotic systems using nonlinear active control // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2014. — т. 69. — с. 31–39.
187. *Jafari S., Sprott J., Golpayegani S. M. R. H.* Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria // *Physics Letters A*. — 2013. — т. 377, № 9. — с. 699–702.
188. *Jafari S., Pham V.-T., Kapitaniak T.* Multiscroll chaotic sea obtained from a simple 3D system without equilibrium // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2016. — т. 26, № 02. — с. 1650031.
189. *Wei Z., Zhang W.* Hidden hyperchaotic attractors in a modified Lorenz–Stenflo system with only one stable equilibrium // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2014. — т. 24, № 10. — с. 1450127.
190. *Wei Z. et al.* Study of hidden attractors, multiple limit cycles from Hopf bifurcation and boundedness of motion in the generalized hyperchaotic Rabinovich system // *Nonlinear Dynamics*. — 2015. — т. 82, № 1. — с. 131–141.
191. *Li Q., Zeng H., Li J.* Hyperchaos in a 4D memristive circuit with infinitely many stable equilibria // *Nonlinear Dynamics*. — 2015. — т. 79, № 4. — с. 2295–2308.
192. *Chen Y., Yang Q.* A new Lorenz-type hyperchaotic system with a curve of equilibria // *Mathematics and Computers in Simulation*. — 2015. — т. 112. — с. 40–55.
193. *Dudkowski D. et al.* Hidden attractors in dynamical systems // *Physics Reports*. — 2016. — т. 637. — с. 1–50.
194. *Kuznetsov N., Leonov G.* Hidden attractors in dynamical systems: systems with no equilibria, multistability and coexisting attractors // *IFAC Proceedings Volumes*. — 2014. — т. 47, № 3. — с. 5445–5454.
195. *Koeller R.* Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. — 1984.
196. *Stratton J. A.* Electromagnetic theory. т. 33. — John Wiley & Sons, 2007.
197. *Sprott J. C.* Some simple chaotic flows // *Physical review E*. — 1994. — т. 50, № 2. — R647.
198. *Zhang S., Zeng Y. C., Jun Li Z.* A novel four-dimensional no-equilibrium hyper-chaotic system with grid multiwing hyper-chaotic hidden attractors // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. — 2018. — т. 13, № 9.
199. *Mahmoud G. M., Ahmed M. E., Sabor N.* On autonomous and nonautonomous modified hyperchaotic complex Lü systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2011. — т. 21, № 07. — с. 1913–1926.
200. *Boiko I. et al.* On counter-examples to Aizerman and Kalman conjectures // *International Journal of Control*. — 2020. — с. 1–8.
201. *Boccaletti S. et al.* The synchronization of chaotic systems // *Physics reports*. — 2002. — т. 366, № 1/2. — с. 1–101.

202. *Banerjee S.* Chaos synchronization and cryptography for secure communications: applications for encryption. — IGI global, 2010.
203. *Jiang Z.-P.* A note on chaotic secure communication systems // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. — 2002. — т. 49, № 1. — с. 92–96.
204. *Chai X.* An image encryption algorithm based on bit level Brownian motion and new chaotic systems // Multimedia Tools and Applications. — 2017. — т. 76, № 1. — с. 1159–1175.
205. *Muthukumar P., Balasubramaniam P., Ratnavelu K.* Sliding mode control design for synchronization of fractional order chaotic systems and its application to a new cryptosystem // International Journal of Dynamics and Control. — 2017. — т. 5, № 1. — с. 115–123.
206. *Chen L.* et al. Cluster synchronization in fractional-order complex dynamical networks // Physics Letters A. — 2012. — т. 376, № 35. — с. 2381–2388.
207. *Mahmoud G. M., Mahmoud E. E.* Lag synchronization of hyperchaotic complex nonlinear systems // Nonlinear Dynamics. — 2012. — т. 67, № 2. — с. 1613–1622.
208. *Lee T. H., Park J. H.* Adaptive functional projective lag synchronization of a hyperchaotic Rössler system // Chinese Physics Letters. — 2009. — т. 26, № 9. — с. 090507.
209. *Jahanshahi H.* et al. Entropy analysis and neural network-based adaptive control of a non-equilibrium four-dimensional chaotic system with hidden attractors // Entropy. — 2019. — т. 21, № 2. — с. 156.
210. *Li C., Liao X., Wong K.-w.* Lag synchronization of hyperchaos with application to secure communications // Chaos, Solitons & Fractals. — 2005. — т. 23, № 1. — с. 183–193.
211. *Liu L.* et al. Pinning impulsive cluster synchronization of complex dynamical network // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2020. — т. 545. — с. 123580.
212. *Zambrano-Serrano E.* et al. On chaos and projective synchronization of a fractional difference map with no equilibria using a fuzzy-based state feedback control // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2021. — с. 126100.
213. *Liu J.* et al. New results of projective synchronization for memristor-based coupled neural networks // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2020. — т. 545. — с. 123739.
214. *Chen X.* et al. Synchronizing hyperchaotic subsystems with a single variable: A reservoir computing approach // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2019. — т. 534. — с. 122273.
215. *Leonov G. A.* et al. Nonlinear dynamical model of Costas loop and an approach to the analysis of its stability in the large // Signal processing. — 2015. — т. 108. — с. 124–135.

216. *Liu B.* et al. Uniform synchronization for chaotic dynamical systems via event-triggered impulsive control // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2019. — т. 531. — с. 121725.
217. *Wang F., Zheng Z.* Quasi-projective synchronization of fractional order chaotic systems under input saturation // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2019. — т. 534. — с. 122132.
218. *Luo F., Xiang Y., Wu E.* Finite-time synchronization of coupled complex-valued chaotic systems with time-delays and bounded perturbations // *Modern Physics Letters B*. — 2021. — т. 35, № 07. — с. 2150130.
219. *Dang T. S.* et al. Complexity and synchronization in stochastic chaotic systems // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2016. — т. 225, № 1. — с. 159—170.
220. *Huang Y., Bao H.* Master-slave synchronization of complex-valued delayed chaotic Lur'e systems with sampled-data control // *Applied Mathematics and Computation*. — 2020. — т. 379. — с. 125261.
221. *Mahmoud G. M., Mahmoud E. E., Arafa A. A.* Projective synchronization for coupled partially linear complex-variable systems with known parameters // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. — 2017. — т. 40, № 4. — с. 1214—1222.
222. *Mahmoud E. E.* Adaptive anti-lag synchronization of two identical or non-identical hyperchaotic complex nonlinear systems with uncertain parameters // *Journal of the Franklin Institute*. — 2012. — т. 349, № 3. — с. 1247—1266.
223. *Xu Y.* et al. Topology identification and adaptive synchronization of uncertain complex networks with non-derivative and derivative coupling // *Journal of the Franklin Institute*. — 2010. — т. 347, № 8. — с. 1566—1576.
224. *Mahmoud G. M.* et al. Adaptive dual synchronization of chaotic (hyperchaotic) complex systems with uncertain parameters and its application in image encryption // *Acta Phys. Pol. B*. — 2018. — т. 49. — с. 1923.
225. *Liao T.-L., Tsai S.-H.* Adaptive synchronization of chaotic systems and its application to secure communications // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2000. — т. 11, № 9. — с. 1387—1396.
226. *Li Z., Xu D.* A secure communication scheme using projective chaos synchronization // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2004. — т. 22, № 2. — с. 477—481.
227. *Wu X.-J., Wang H., Lu H.-T.* Hyperchaotic secure communication via generalized function projective synchronization // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. — 2011. — т. 12, № 2. — с. 1288—1299.
228. *He J., Cai J., Lin J.* Synchronization of hyperchaotic systems with multiple unknown parameters and its application in secure communication // *Optik*. — 2016. — т. 127, № 5. — с. 2502—2508.

229. *Alvarez G.* et al. Breaking a secure communication scheme based on the phase synchronization of chaotic systems // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2004. — т. 14, № 2. — с. 274–278.
230. *JinFeng H., JingBo G.* Breaking a chaotic secure communication scheme // *Chaos: An interdisciplinary journal of nonlinear science*. — 2008. — т. 18, № 1. — с. 013121.
231. *Kolumbán G., Kennedy M. P., Chua L. O.* The role of synchronization in digital communications using chaos. I. Fundamentals of digital communications // *IEEE Transactions on circuits and systems I: Fundamental theory and applications*. — 1997. — т. 44, № 10. — с. 927–936.
232. *Kolumbán G., Kennedy M. P., Chua L. O.* The role of synchronization in digital communications using chaos. II. Chaotic modulation and chaotic synchronization // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*. — 1998. — т. 45, № 11. — с. 1129–1140.
233. *Wang Z.* et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity // *IEEE transactions on image processing*. — 2004. — т. 13, № 4. — с. 600–612.
234. *Wang Z., Bovik A. C.* A universal image quality index // *IEEE signal processing letters*. — 2002. — т. 9, № 3. — с. 81–84.
235. *Kiseleva M.* et al. Hidden and self-excited attractors in Chua circuit: synchronization and SPICE simulation // *International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems*. — 2018. — т. 33, № 5. — с. 513–523.
236. *Kapitaniak T.* Generating strange nonchaotic trajectories // *Physical review E*. — 1993. — т. 47, № 2. — с. 1408.
237. *Kapitaniak T.* Uncertainty in coupled chaotic systems: Locally intermingled basins of attraction // *Physical Review E*. — 1996. — т. 53, № 6. — с. 6555.
238. *Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Mokaev T. N.* Hidden attractor and homoclinic orbit in Lorenz-like system describing convective fluid motion in rotating cavity // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2015. — т. 28, № 1–3. — с. 166–174.
239. *Prasad A.* Existence of perpetual points in nonlinear dynamical systems and its applications // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2015. — т. 25, № 02. — с. 1530005.
240. *Prasad A.* A note on topological conjugacy for perpetual points // *arXiv preprint arXiv:1511.05836*. — 2015.

## Список рисунков

- 2.1 Динамика системы Лоренца (2.1) с фиксированными параметрами  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ , когда параметр  $r$  изменяется в соответствии с внутренней оценкой глобальной устойчивости (см. [20]). . . . . 185
- 2.2 Динамика системы Лоренца (2.1) с фиксированными параметрами  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ , когда параметр  $r$  изменяется в соответствии с внешней оценкой глобальной устойчивости (см. [20]). . . . . 186
- 2.3 Отсутствие самовозбуждающихся и скрытых аттракторов и глобальная устойчивость стационарного множества  $\{S_0, S_\theta\}$  в системе (2.8) с параметрами  $\sigma = 4$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = -e = 0.001$ ,  $b = 4$ . Траектории (синий, фиолетовый) в малой окрестности неустойчивого состояния равновесия  $S_0$  стремятся к устойчивому множеству состояний равновесия  $S_\theta$  (тривиальные аттракторы). 194
- 2.4 Существование нетривиального притягивающего тора и неустойчивого состояния равновесия  $S_0$  в системе (2.8) с параметрами  $\sigma = 4$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 0.002$ ,  $e = -0.001$ ,  $b = 4$ . Траектории (синий, фиолетовый) в малых окрестностях неустойчивого состояния равновесия  $S_0$  притягиваются к тору (нетривиальные аттракторы). . . . . 195
- 2.5 Глобальная устойчивость стационарного множества  $\{S'_0, S'_1\}$  в проективной системе (2.29) с параметрами  $\sigma = 4$ ,  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = -e = 0.001$ ,  $b = 4$ . . . . . 196
- 2.6 Визуализация гомоклинических орбит с  $\sigma = 10$ ,  $r_2 = 4.5 \times 10^{-4}$ ,  $e = -0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$  и  $r_{1h} \approx 13.9$ . . . . . 197
- 2.7 Визуализация гомоклинических орбит с  $\sigma = 10$ ,  $r_2 = 0$ ,  $e = 0$ ,  $b = \frac{8}{3}$  и  $r_{1h} \approx 13.9$ . 198
- 2.8 (a), (b) Численная визуализация самовозбуждающегося хаотического аттрактора в системе (2.8) с  $r_1 = 28$ ,  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ ,  $r_2 = -e = 0.001$  интегрируя траектории с начальными данными из небольших окрестностей неустойчивых состояний равновесия  $S_0, S_\theta$ ; (c), (d) Соответствующие изображения в проективном пространстве  $\mathcal{P}$ . . . . . 200
- 2.9 (a), (b) Численная визуализация самовозбуждающегося локального хаотического аттрактора системе (2.8) с  $r_1 = 24.6$ ,  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ ,  $r_2 = -e = 0.001$  по траектории, начинающейся в окрестности неустойчивого состояния равновесия  $S_0$ . Этот аттрактор сосуществует со устойчивым множеством состояний равновесия  $S_\theta$ ; (c), (d) Соответствующие изображения в проективном пространстве  $\mathcal{P}$ . . . . . 201
- 2.10 Локальные конечно-временные показатели Ляпунова на временном интервале  $[0, 100]$  системы (2.33) с варьированием дробного порядка так, что  $\alpha \in [0.8, 1[$ . 206
- 2.11 Визуализация скрытого хаотического аттрактора системы (2.33) с  $(a, b, c, d) = (15, 1, 25.5, 0.01)$ ,  $\alpha = 0.99$  и начальной точкой  $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ . . . . . 207

2.12	Визуализация скрытого гиперхаотического аттрактора системы (2.33) с $(a, b, c, d) = (15, 1, 25.5, 0.01)$ , $\alpha = 0.89$ и начальной точкой $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ . . . . .	207
2.13	Локальные конечно-временные показатели Ляпунова на временном интервале $[0, 100]$ системы (2.33) против $a \in [5, 20]$ . . . . .	208
2.14	Локальные конечно-временные показатели Ляпунова на временном интервале $[0, 100]$ системы (2.33) против $b \in [0, 3]$ . . . . .	209
2.15	Локальные конечно-временные показатели Ляпунова на временном интервале $[0, 100]$ системы (2.33) против $c \in [5, 30]$ . . . . .	209
2.16	Локальные конечно-временные показатели Ляпунова на временном интервале $[0, 100]$ системы (2.33) против $d \in [0, 0.1]$ . . . . .	210
2.17	Локализация гиперхаотического аттрактора системы (2.36) с $v = -0.03$ , $\alpha = 0.5$ , $\beta = 0.001$ , $\gamma = 0.11$ . . . . .	213
2.18	Сферическая окрестность вокруг состояния равновесия $F_0$ со 100 начальными точками на ней. . . . .	213
2.19	Визуализация скрытого переходного хаотического множества в системе (2.36)	214
3.1	Синхронизация скрытых гиперхаотических аттракторов систем (3.7) и (3.8), для $a = 15$ , $b = 1$ , $c = 25.5$ , $d = 0.01$ с $\alpha = 0.89$ . . . . .	219
3.2	Динамика эволюции ошибок описывается решениями системы (3.6). . . . .	220
3.3	Гиперхаотическая система защищенной связи. . . . .	220
3.4	Оригинальный текст. . . . .	221
3.5	Зашифрованный текст. . . . .	222
3.6	Расшифрованный текст. . . . .	222
3.7	Результаты моделирования защищенной связи для голосового сигнала с использованием гиперхаотической системы Спротта дробного порядка (а) Оригинальный сигнал $S(t)$ (б) Зашифрованный сигнал $S_e(t)$ (с) Восстановленный сигнал $S_d(t)$ (д) Ошибка расшифровки $S(t) - S_d(t)$ . . . . .	223
3.8	<b>Случай 1:</b> Синхронизация с начальными данными комплексных систем Лоренца на одном скрытом множестве. . . . .	227
3.9	<b>Случай 2:</b> Синхронизация с начальными данными комплексных систем Лоренца на двух симметричных скрытых множествах. . . . .	228
3.10	<b>Случай 3:</b> Синхронизация с начальными данными комплексных систем Лоренца на скрытом множестве и устойчивые состояния равновесия $S_\theta$ . . . . .	228
3.11	<b>Случай 4:</b> Синхронизация с начальными данными комплексных систем Лоренца на самовозбуждающемся аттракторе и неустойчивом нулевом состоянии равновесия. . . . .	229
3.12	Оригинальный текст. . . . .	230
3.13	Шифрованный текст. . . . .	230
3.14	Расшифрованный текст. . . . .	231

3.15	Результаты моделирования защищенной связи для голосового сигнала с использованием комплексной системы Лоренца (а) Исходный сигнал $S(t)$ (b) Зашифрованный сигнал $S_e(t)$ (c) Восстановленный сигнал $S_d(t)$ (d) Ошибка дешифрования $S(t) - S_d(t)$ . . . . .	232
3.16	Адаптивная синхронизация гиперхаотических аттракторов систем (3.41) и (3.42) (в форме (3.43) и (3.44)), с $\nu = -0.03$ , $\alpha = 0.4$ , $\beta = 0.001$ , $\gamma = 0.11$ . . . . .	239
3.17	Динамика вещественных и мнимых частей состояний ошибок (см. (3.45)) между ведущей (3.41) и ведомой (3.42) системами представлена решением системы (3.36). . . . .	240
3.18	Динамика вещественной и мнимой частей ошибок оценки параметра $\hat{A}$ (см. (3.46)) представлена решением системы (3.33). . . . .	240
3.19	Динамика вещественной и мнимой частей ошибок оценки параметра $\hat{B}$ (см. (3.47)) представлена решением системы (3.34). . . . .	241
3.20	Оценка неопределенных параметров $(\hat{\nu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ . . . . .	241
3.21	Гиперхаотическая стратегия безопасной связи. . . . .	242
3.22	Оригинальный текст. . . . .	244
3.23	Зашифрованный текст. . . . .	245
3.24	Расшифрованный текст. . . . .	246
3.25	Численные результаты шифрования градаций серого изображения с использованием модели Рабиновича. . . . .	247
3.26	Численные результаты шифрования изображений с шумом. (a)-(c) оригинальные изображения с 0,03, 0,07 и 0,1 белого гауссовского шума, соответственно; (d)-(f) зашифрованные изображения; (g)-(i) восстановленные изображения с шумом. . . . .	249
3.27	<b>Случай 1:</b> Начальные данные систем Чуа на одном скрытом аттракторе с матрицей усиления управления $k = \text{diag}(11,11,11)$ . . . . .	251
3.28	<b>Случай 2:</b> Начальные данные систем Чуа на двух симметричных скрытых аттракторах с матрицей усиления управления $k = \text{diag}(5,5,5)$ . . . . .	252
3.29	<b>Случай 3:</b> Начальные данные систем Чуа на скрытом аттракторе и устойчивом нулевом состоянии равновесия с матрицей усиления управления $k = \text{diag}(90,90,90)$ . . . . .	252
3.30	<b>Случай 4:</b> Начальные данные систем Чуа на самовозбуждающемся аттракторе и неустойчивом нулевом состоянии равновесия с матрицей усиления управления $k = \text{diag}(20,20,20)$ . . . . .	253
3.31	<b>Case 1:</b> Начальные данные систем Чуа на одном скрытом аттракторе с матрицей усиления управления $k = \text{diag}(103,103,103)$ . . . . .	253
3.32	<b>Case 2:</b> Начальные данные систем Чуа на двух симметричных скрытых аттракторах с матрицей усиления управления $k = \text{diag}(111,111,111)$ . . . . .	254



- 3.33 **Case 3:** Начальные данные систем Чуа на скрытом аттракторе и устойчивом нулевом состоянии равновесия с матрицей усиления управления  $k = \text{diag}(111, 111, 111)$ . . . . . 254
- 3.34 **Case 4:** Начальные данные систем Чуа на самовозбуждающемся аттракторе и неустойчивом нулевом состоянии равновесия с матрицей усиления управления  $k = \text{diag}(117, 117, 117)$ . . . . . 255
- 3.35 **Случай 1:** Начальные данные систем Чуа на одном и том же скрытом аттракторе. . . . . 256
- 3.36 **Случай 2:** Начальные данные систем Чуа на двух симметричных скрытых аттракторах. . . . . 257
- 3.37 **Случай 3:** Начальные данные систем Чуа на скрытом аттракторе и устойчивом нулевом состоянии равновесия. . . . . 258
- 3.38 **Случай 4:** Начальные данные систем Чуа на самовозбуждающемся аттракторе и неустойчивом нулевом состоянии равновесия. . . . . 259
- 3.39 Сравнение времени синхронизации на примере цепей Чуа. . . . . 260
- A.1 Путь  $P_0(r_1^0, \sigma^*) \rightarrow P_1(r_1^1, \sigma^*) \rightarrow P_2(r_1^2, \sigma^*)$ , в плоскости параметров  $(r_1, \sigma)$  для локализации скрытого хаотического множества в системе (2.29) с  $r_2 = 0.001$ ,  $e = -0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$ . Здесь  $r_1^0 = 25.4$ ,  $r_1^1 = 24.7$ ,  $r_1^2 = 24$ ,  $\sigma = \sigma^* = 10$ ; (●)  $P_0(r_1^0, \sigma^*)$  : самовозбуждающийся аттрактор в отношении  $S'_{0,1}$ ; (●)  $P_1(r_1^1, \sigma^*)$  : самовозбуждающийся аттрактор в отношении  $S'_0$ ; (●)  $P_2(r_1^2, \sigma^*)$  : скрытое хаотическое множество. . . . . 285
- A.2 Локализация с помощью МЧП скрытого хаотического множества в системе (2.29) с  $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.001, -0.001, \frac{8}{3})$ . Траектории  $u^i(t) = (\xi', v', w', Z')$  (синий и зеленый цвета) определены на временном интервале  $[0, T = 10^3]$ , и начальная точка (серая) на  $(i + 1)$ -й итерации определяется как  $u_0^{i+1} := u_T^i$  (фиолетовые стрелки), где  $u_T^i = u^i(T)$  - конечная точка (оранжевая). . . . . 286
- A.3 Локализация скрытого хаотического множества в системе (2.8) и соответствующего изображения в системе (2.29) для  $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.001, -0.001, 8/3)$ . . . . . 287
- A.4 (a) Траектория, которая притягивается к тору (синий) в интервале времени  $[0, 7000]$ , которая ближе к состояниям равновесия  $S_\theta$  (пурпурный). (b) Визуализация скрытого хаотического множества в системе (2.8) с временным интервалом  $[0, 100]$ ,  $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.002, -0.001, \frac{8}{3})$  и начальной точкой является  $(5, 5, 5, 5, 5)$ . . . . . 287
- A.5 (a) Визуализация траекторий, стремящихся к тору в интервале времени  $[0, 7000]$ , с начальными точками из сферических случайных точек в окрестности  $S_0$ ; (b) Увеличение области вокруг  $S_0$ , чтобы показать сферические случайные точки и рассматриваемые 100 траекторий, стремящихся к тору. . . . . 288

- A.6 Визуализация локальных устойчивых, неустойчивых многообразий  $S_0$  и случайных начальных точек на локальных двумерных неустойчивых многообразиях  $S_0$ . (Красный) локальный 2-мерный неустойчивый многогранник, соответствующий  $\lambda_{1,2} = 10.6323 \pm 0.0003i$ , (Зеленый) локальный 2-мерный устойчивый подмногообразие, соответствующее  $\lambda_{3,4} = -21.6323 \pm 0.0007i$ . . . . . 290
- A.7 Визуализация неустойчивых многообразий в системе (2.8) с  $\sigma = 10$ ,  $r_1 = 24$ ,  $r_2 = -e = 0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$  и 100 случайных начальных точек в окрестности  $S_0$ , которые стремятся к кругу состояний равновесия  $S_\theta$ . . . . . 291
- A.8 Визуализация траекторий во временном интервале  $[0, 7000]$  в системе (2.8) с  $\sigma = 10$ ,  $r_1 = 24$ ,  $r_2 = 0.002$ ,  $e = -0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$  и 100 случайных начальных точек в окрестности  $S_0$ , стремящихся к тору. . . . . 291
- A.9 Визуализация белой области вокруг множества состояний равновесия  $S_\theta$  на Рис. A.4 и A.3a и рассматриваемых отрезков линий. . . . . 292
- A.10 Визуализация двух траекторий с начальными точками из синей и красной частей вертикальной диагонали в белом зазоре Рис. A.4. . . . . 292
- A.11 Визуализация двух траекторий с начальными точками из синей и красной частей вертикальной диагонали в белом зазоре Рис. A.3a. . . . . 293
- A.12 (a) Визуализация отрезков линий вокруг неустойчивого многообразия на Рис. A.4, начальные траектории из всех точек на этих отрезках приближаются к аттрактору; (b) Локализация траектории с начальной точкой на верхнем внешнем отрезке. . . . . 293
- A.13 (a) Локализация хаотического множества (зеленого цвета) в проективном пространстве и 100 неустойчивых многообразий с начальными точками из сферических случайных точек в окрестности  $S'_0$ , с  $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.001, -0.001, \frac{8}{3})$ . (b) Увеличение области вокруг  $S'_0$ , чтобы показать сферу случайных начальных точек и соответствующих 100 траекторий, стремящихся к  $S'_1$ . . . . . 294
- A.14 (a) Локализация хаотического множества (зеленого цвета) в проективном пространстве и 100 неустойчивых многообразия с начальными точками из сферических случайных точек в окрестности  $S'_0$ ,  $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.002, -0.001, \frac{8}{3})$ . (b) Увеличение области вокруг  $S'_0$ , чтобы показать сферичность случайных точек и рассматриваемых 100 траекторий, стремящихся к предельному циклу  $\Gamma$ . . . . . 295

## Список таблиц

1	Знаки показателей Ляпунова и соответствующий тип решений. . . . .	172
2	Локальные конечно-временные показатели Ляпунова с $(a, b, c, d) = (15, 1, 25.5, 0.01)$ . . . . .	207
3	Локальные конечно-временные показатели Ляпунова с $(b, c, d) = (1, 25.5, 0.01)$ , $\alpha = 0.89$ . . . . .	208
4	Локальные конечно-временные показатели Ляпунова с $(a, c, d) = (15, 25.5, 0.01)$ , $\alpha = 0.89$ . . . . .	208
5	Локальные конечно-временные показатели Ляпунова с $(a, b, d) = (15, 1, 0.01)$ , $\alpha = 0.89$ . . . . .	209
6	Локальные конечно-временные показатели Ляпунова с $(a, b, c) = (15, 1, 25.5)$ , $\alpha = 0.89$ . . . . .	210
7	Оценка PSNR и SSIM для градации серого изображения cameraman.tif. . . . .	248

## Приложение А

### Численные исследования локализации скрытых аттракторов и переходных хаотических множеств в комплексной системе Лоренца

#### А.1 Локализация с помощью метода численного продолжения по параметру

Один из эффективных методов численной локализации скрытых аттракторов в многомерных динамических системах основан на методе гомотопии и численного продолжения (МЧП). Он основан на предположении, что положение аттрактора непрерывно меняется с изменением параметров. Идея состоит в том, чтобы построить последовательность подобных систем таким образом, чтобы для первой (начальной) системы начальная точка для численного расчета колеблющегося решения (начального аттрактора) могла быть получена аналитически. Например, часто можно рассмотреть начальную систему с самовозбуждающимся начальным аттрактором; затем, трансформация этого начального аттрактора в фазового пространства отслеживается численно при переходе от одной системы к другой; последняя система соответствует системе, в которой скрытый аттрактор ищется [20; 47; 238].

В нашем эксперименте мы фиксируем параметры  $\sigma, r_2, e, b$ , определяем параметры  $r_1 = 26.1 - \varepsilon$  и  $\sigma = \sigma^* = 10$ . Для  $r_2 = 0.001, e = -0.001, b = 8/3, \varepsilon = 0.7$ , получаем  $r_1 = r_1^0 = 25.4$  и принимаем  $P_0(r_1^0, \sigma^*)$  как начальную точку отрезка прямой на плоскости  $(r_1, \sigma)$ . Собственные значения матрицы Якобиана в состояниях равновесия  $S'_0, S'_1$  системы (2.29) для этих параметров следующие:

$$\begin{aligned} S'_0 &: 2.00002, -0.1707, -0.7042, -0.7042, \\ S'_1 &: 0.0013 \pm 0.6238i, -0.8775, -0.7042. \end{aligned}$$

Рассмотрим на плоскости  $(r_1, \sigma)$  отрезок прямой, пересекающий границу области устойчивости состояний равновесия  $S_\theta$  с конечной точкой  $P_2(r_1^2, \sigma^*)$ , где  $r_1^2 = r_1^0 - 2\varepsilon = 24$ , т.е. состояния равновесия  $S_\theta$  переходит из седловой точки в устойчивый фокус-узел

$$\begin{aligned} S'_0 &: 2.00003, -0.1758, -0.7253, -0.7253 \\ S'_1 &: -0.0015 \pm 0.6257i, -0.8982, -0.7253. \end{aligned}$$

Начальная точка  $P_0(r_1^0, \sigma^*)$  соответствует тем параметрам, для которых в системе (2.29), существует самовозбуждающийся аттрактор. Тогда для рассматриваемого отрезка прямой выбирается достаточно малый шаг разбиения. На каждом итерационном шаге процедуры, аттрактор в фазовом пространстве системы (2.29) вычисляется аттрактор. Последняя вычисленная точка на каждом шаге используется в качестве начальной точки для вычисле-

ний на следующем шаге. В данном эксперименте мы используем МЧП с 3 шагами на пути  $P_0(r_1^0, \sigma^*) \rightarrow P_1(r_1^1, \sigma^*) \rightarrow P_2(r_1^2, \sigma^*)$ , с  $r_1^1 = \frac{1}{2}(r_1^0 + r_1^2)$  (см. Рис. A.1). На первом шаге мы имеем самовозбуждающийся аттрактор неустойчивых состояний равновесия  $S_0$  и  $S_\theta$ ; на втором шаге состояния равновесия  $S_\theta$  становятся устойчивыми, но аттрактор остается самовозбужденным относительно состояния равновесия  $S_0$ ; на третьем шаге, можно визуализировать скрытое хаотическое множество системы (2.29) (см. Рис. A.2). На Рис. A.3 визуализация скрытого хаотического множества как в начальном пространстве  $\mathcal{H}$ , так и в проективном пространстве  $\mathcal{P}$ .

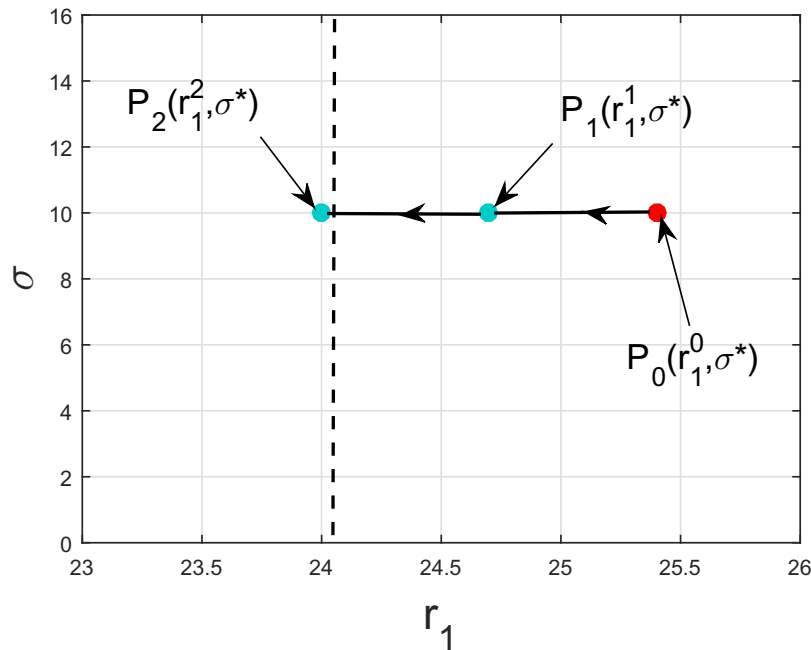


Рисунок A.1 — Путь  $P_0(r_1^0, \sigma^*) \rightarrow P_1(r_1^1, \sigma^*) \rightarrow P_2(r_1^2, \sigma^*)$ , в плоскости параметров  $(r_1, \sigma)$  для локализации скрытого хаотического множества в системе (2.29) с  $r_2 = 0.001$ ,  $e = -0.001$ ,

$b = \frac{8}{3}$ . Здесь  $r_1^0 = 25.4$ ,  $r_1^1 = 24.7$ ,  $r_1^2 = 24$ ,  $\sigma = \sigma^* = 10$ ;

- (•)  $P_0(r_1^0, \sigma^*)$  : самовозбуждающийся аттрактор в отношении  $S'_{0,1}$ ;
- (•)  $P_1(r_1^1, \sigma^*)$  : самовозбуждающийся аттрактор в отношении  $S'_0$ ;
- (•)  $P_2(r_1^2, \sigma^*)$  : скрытое хаотическое множество.

Для  $\sigma = 10$ ,  $r_1 = 24$ ,  $r_2 = 0.002$ ,  $e = -0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$ , здесь параметр  $r_2$  немного отличается от параметра в приведенном выше случае и  $e \neq -r_2$ . Поэтому  $S_0$  является единственным состоянием равновесия системы (2.8). В этом случае мы также можем представить скрытое хаотическое множество в системе (2.8). Чтобы убедиться, что множество на Рис. A.4b скрыто, вокруг состояния равновесия  $S_0$ , мы выбираем небольшую сферическую окрестность радиусом  $\delta = 0.2$  и возьмем на ней  $N$  случайных начальных точек (в нашем эксперименте  $N = 100$ , как на Рис. A.5b). Используя MATLAB, мы интегрируем систему (2.8) с этими начальными точками, чтобы исследуем полученные траектории. Мы повторяем эту процедуру несколько раз для того, чтобы получить различные начальные точек для траекторий на сфере. Мы получаем следующие результаты: все полученные траектории стремятся к тору и

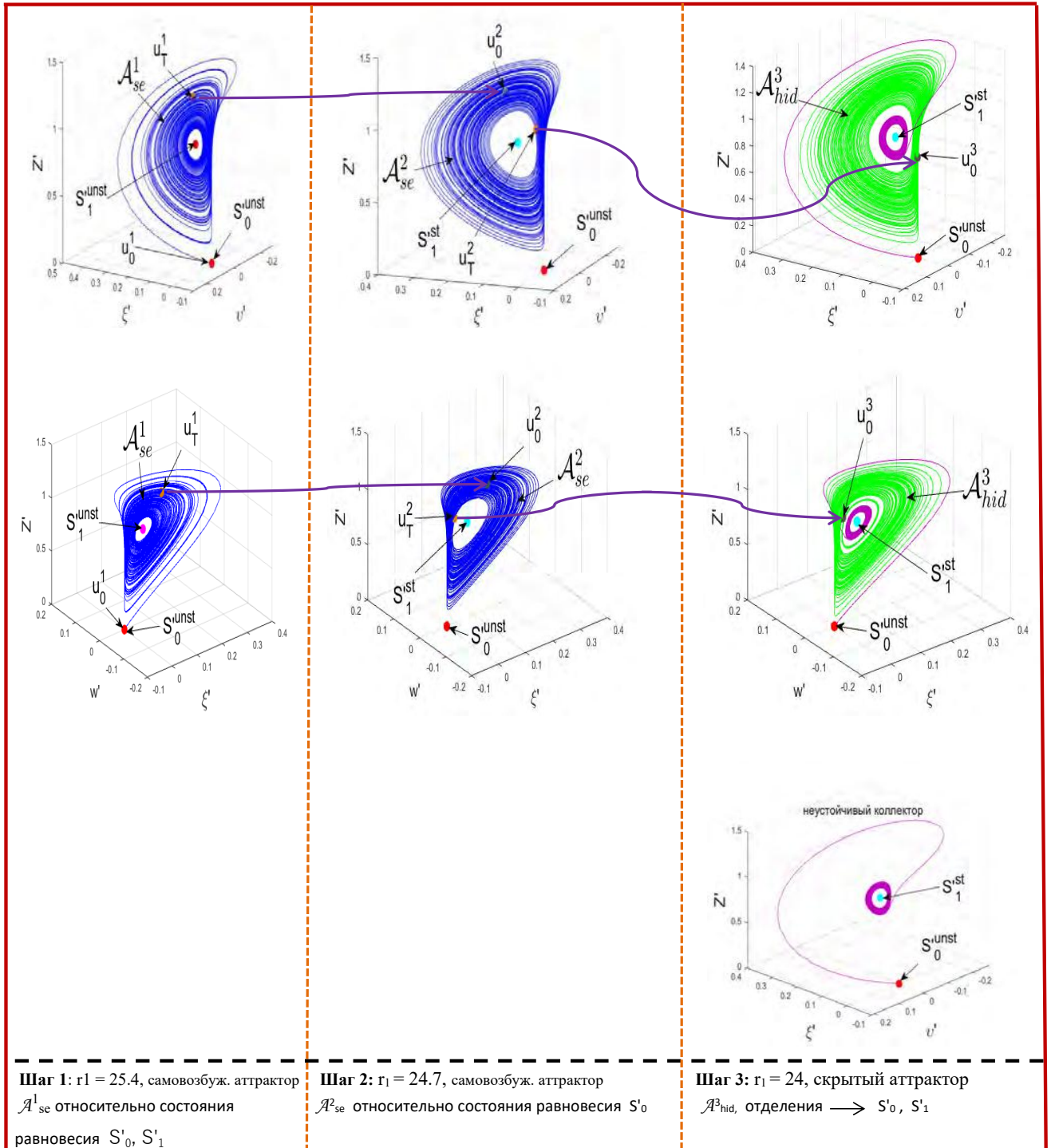


Рисунок А.2 — Локализация с помощью МЧП скрытого хаотического множества в системе (2.29) с  $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.001, -0.001, \frac{8}{3})$ . Траектории  $u^i(t) = (\xi', v', w', Z')$  (синий и зеленый цвета) определены на временном интервале  $[0, T = 10^3]$ , и начальная точка (серая) на  $(i + 1)$ -й итерации определяется как  $u_0^{i+1} := u_T^i$  (фиолетовые стрелки), где  $u_T^i = u^i(T)$  - конечная точка (оранжевая).

не стремятся к хаотическому множеству (см. Рис. А.5а), этот тор ближе<sup>1</sup> к множеству состо-

<sup>1</sup>Расстояние между тором и состояниями равновесия  $S_\theta$  можно оценить рассматривая последнюю точку на торе и плоскости, которая содержит множество состояний равновесия  $S_\theta$ . Если мы рассмотрим в  $\mathbb{R}^5$  точку

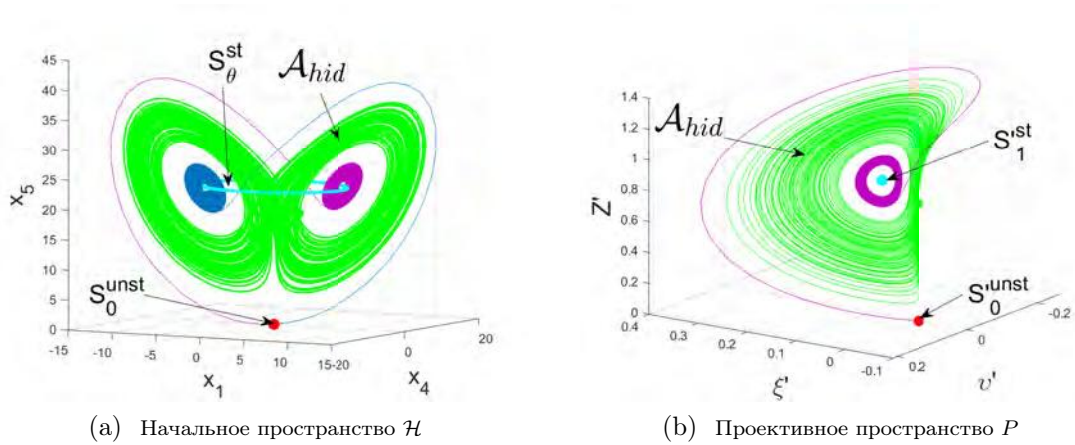


Рисунок А.3 — Локализация скрытого хаотического множества в системе (2.8) и соответствующего изображения в системе (2.29) для  $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.001, -0.001, 8/3)$ .

яний равновесия  $S_\theta$  (см. Рис. А.4а). Это дает нам основание классифицировать хаотическое множество, полученное в системе (2.8), как скрытое (см. Рис. А.4б).

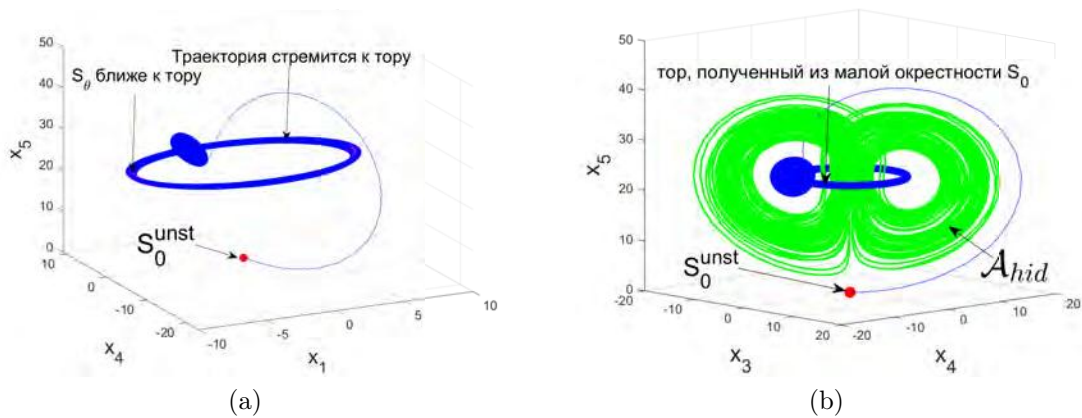


Рисунок А.4 — (а) Траектория, которая притягивается к тору (синий) в интервале времени  $[0, 7000]$ , которая ближе к состояниям равновесия  $S_\theta$  (пурпурный). (б) Визуализация скрытого хаотического множества в системе (2.8) с временным интервалом  $[0, 100]$ ,  $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.002, -0.001, \frac{8}{3})$  и начальной точкой является  $(5, 5, 5, 5, 5)$ .

$P(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*)$  и плоскость  $A(x_1 - x_{01}) + B(x_2 - x_{02}) + C(x_3 - x_{03}) + D(x_4 - x_{04}) + E(x_5 - x_{05}) = 0$ , тогда расстояние от точки  $P$  до плоскости составляет:

$$d = \frac{|Ax_1^* + Bx_2^* + Cx_3^* + Dx_4^* + Ex_5^* + F|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2}}.$$

Чтобы определить уравнение плоскости в  $\mathbb{R}^5$  можно рассмотреть пять точек, которые не лежат на одной прямой. Вектор нормали к плоскости можно получить, взяв перекрестного произведения четырех векторов на этой плоскости. В нашем случае уравнение плоскости, содержащей множество состояний равновесия  $S_\theta$ , имеет вид:  $x_5 - 23 = 0$ . Из Рис. А.4а последняя точка на тора является  $P(-2.5011, 7.6357, -2.5958, 7.9228, 22.8110)$ , тогда расстояние от этой точки до плоскости  $x_5 - 23 = 0$  составляет:  $d = 0.1890$ .

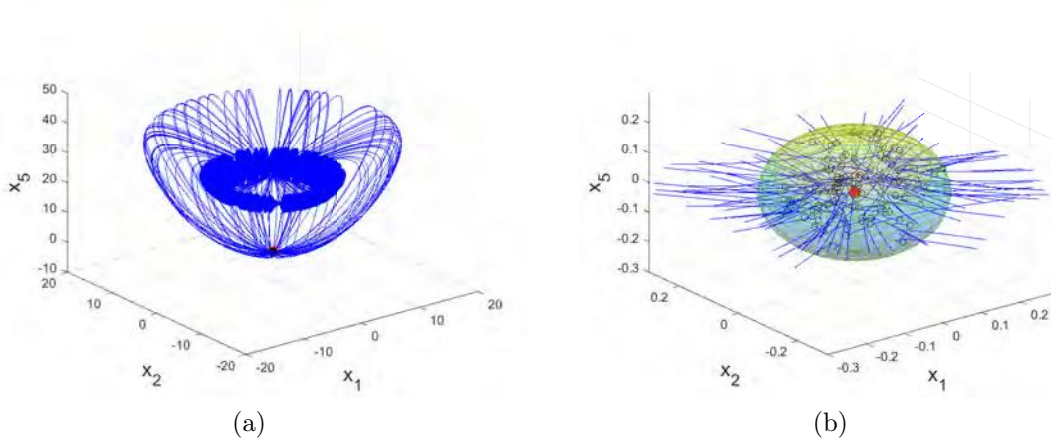


Рисунок А.5 — (а) Визуализация траекторий, стремящихся к тору в интервале времени  $[0, 7000]$ , с начальными точками из сферических случайных точек в окрестности  $S_0$ ; (b) Увеличение области вокруг  $S_0$ , чтобы показать сферические случайные точки и рассматриваемые 100 траекторий, стремящихся к тору.

## А.2 Локализация с использованием точек нулевого ускорения

Рассмотрим систему (2.8) как автономное дифференциальное уравнение общего вида:

$$\dot{u} = f(u), \quad (\text{A.1})$$

где  $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$  представляет собой правую часть системы (2.8).

Состояния равновесия динамической системы являются те., в которых скорость и ускорение системы одновременно становятся нулевыми. В этом разделе мы утверждаем, что существуют точки, называемые вечными точками. [239], которые могут помочь в визуализации скрытых аттракторов.

Для системы (A.1), состояния равновесия  $u_{ep}$  определяются уравнением  $\dot{u} = f(u_{ep}) = 0$ . Рассмотрим производную системы (A.1) по времени:

$$\ddot{u} = J(u)f(u) = g(u), \quad (\text{A.2})$$

где  $J(u) = \left[ \frac{\partial f_i(u)}{\partial u_j} \right]_{i,j=1}^5$  - матрица Якобиана. Здесь  $g(u)$  может быть назван вектором ускорения. Система (A.2) показывает изменение ускорения в фазовом пространстве. Аналогично оценке состояний равновесия, где мы устанавливаем вектор скорости в ноль, мы также можем получить множество точек, где  $\ddot{u} = g(u_{pp}) = 0$  в (A.2), т.е. точки соответствующих нулевому ускорению. В этих точках, скорость  $\dot{u}$  может быть как нулевой, так и ненулевой. Это множество включает состояния равновесия  $u_{ep}$  с нулевой скоростью а также подмножество точек с ненулевой скоростью. Эти точки с ненулевой скоростью  $u$  называются вечными точками [193; 239; 240].



**Замечание А.1.** Аналитическая формула вечных точек системы (2.8) не может быть выведена, между тем численное решение алгебраической системы  $\ddot{u} = g(u_{pp}) = 0$  равно  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ , что совпадает с состоянием равновесия  $S_0$ , поэтому система (2.8) не имеет вечных точек. Для системы (2.29), структура которой кажется более простой, чем исходная система (2.8),  $\xi' = v' = w' = Z' = 0$  является единственным решением системы  $\ddot{u} = g(u_{pp}) = 0$ , следовательно, ненулевых точек скорости также не существует  $u_{pp}$ .

### А.3 Численная проверка бассейнов притяжения вблизи нулевого состояния равновесия

Для системы (2.8) собственные значения при  $S_0$  составляют:  $10.6323 \pm 0.0003i$ ,  $-21.6323 \pm 0.0007i$ ,  $-2.6667$ . Таким образом, состояние равновесия  $S_0$  имеет двумерное неустойчивое многообразие. Для первых двух собственных значений  $\lambda_{1,2} = 10.6323 \pm 0.0003i$  с положительной вещественной частью, соответствующие собственные векторы имеют вид:  $v_1 = (-0.3084, -0.3084i, -0.6363, -0.6363i, 0)$  и  $v_2 = (-0.3084, 0.3084i, -0.6363, 0.6363i, 0)$  соответственно. В случае комплексных собственных значений мы можем использовать следующую формулу для построения траекторий в окрестности  $S_0$

$$u(t) = \Omega e^{\alpha t} [\eta \sin(\beta t + \delta) + \mu \cos(\beta t + \delta)], \quad (\text{A.3})$$

где  $\Omega$  - постоянная, которая представляет размер окрестности и должна быть мала,  $\alpha$ ,  $\beta$  - вещественная и мнимая части собственных значений соответственно,  $\delta$  - вспомогательный угол,  $\eta = \text{Re } v_1$  и  $\mu = \text{Im } v_1$ . Начальные точки неустойчивых многообразий  $S_0$  можно получить, положив  $t = 0$  в (A.3) следующим образом:

$$u(0) = \Omega [\eta \sin(\delta) + \mu \cos(\delta)]. \quad (\text{A.4})$$

На Рис. А.6, построены локальные устойчивые, неустойчивые многообразия  $S_0$  и случайные начальные точки на локальных 2-мерных неустойчивых многообразиях  $S_0$ . Рис. А.7 показывает неустойчивые многообразия со случайными начальными точками на локальных 2-D неустойчивых многообразиях  $S_0$  (в нашем эксперименте мы выбираем 100 случайных точек для угла  $\delta$  внутри интервала  $[0, 2\pi]$  и фиксируем размер окрестности как  $\Omega = 0.5$ ). Мы повторяем эту процедуру несколько раз, чтобы получить различные начальные точки). Из Рис. А.7 видно, что эти неустойчивые многообразия образуют своим прокручиванием трубку вокруг круга состояний равновесия  $S_\theta$ . Этот эксперимент подтверждает, что все траектории, которые начинаются из окрестности неустойчивого состояния равновесия  $S_0$ , идут к кругу состояний равновесия  $S_\theta$ , а это означает, что зеленое множество на Рис. А.3а не является самовозбуждающимся. Мы можем проделать тот же эксперимент в случае тора, как на Рис А.4б. На Рис. А.8 мы построили траектории со случайными начальными точками на

локальных двумерных неустойчивых многообразиях  $S_0$ , которые стремятся к тору. Поэтому зеленый множество на Рис. А.4б не является самовозбуждающимся. Чтобы продемонстрировать разделение бассейнов притяжения  $S_\theta$  и зеленого множества (как на Рис. А.3а), которое находится между синей трубкой, образованной прокруткой этих траекторий, и областью, определяемой сепаратрисами. Нам нужно не только отделить бассейн притяжения этого зеленого множества от этих синих многообразий, но и траекторию, идущую из бесконечности в  $S_0$ , которая может быть получена аналитически по формуле  $u(t) = (0, 0, 0, 0, 0, z_0 \exp(-bt))$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}$ . Поскольку система (2.8) является 5-мерной, трудно показать такое разделение, поэтому можно сказать, что зеленое множество возможно является аттрактором.

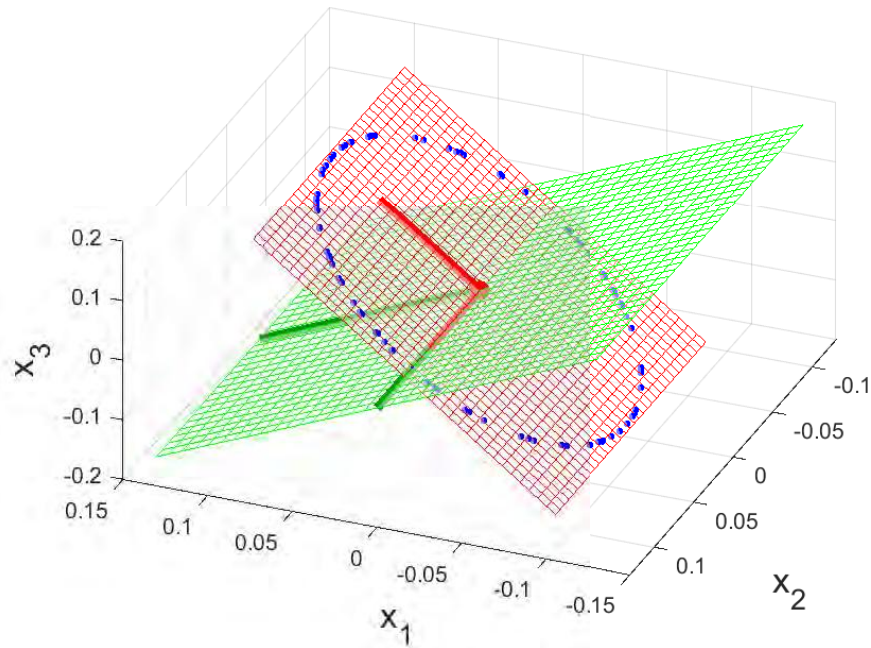


Рисунок А.6 — Визуализация локальных устойчивых, неустойчивых многообразий  $S_0$  и случайных начальных точек на локальных двумерных неустойчивых многообразиях  $S_0$ .

(Красный) локальный 2-мерный неустойчивый многогранник, соответствующий  $\lambda_{1,2} = 10.6323 \pm 0.0003i$ , (Зеленый) локальный 2-мерный устойчивый подмногообразие, соответствующее  $\lambda_{3,4} = -21.6323 \pm 0.0007i$ .

#### А.4 Численная проверка бассейнов притяжения вокруг множества состояний равновесия $S_\theta$

Для того чтобы численно проверить привлекательность хаотического множества, можно использовать следующий численный эксперимент. В этом эксперименте мы рассматриваем начальные точки на различных отрезках прямой в окрестности вокруг множества состояний равновесия  $S_\theta$  на Рис. А.3а и А.4б (см. Рис. А.9). Из Рис. А.9 можно заключить следующее: во-

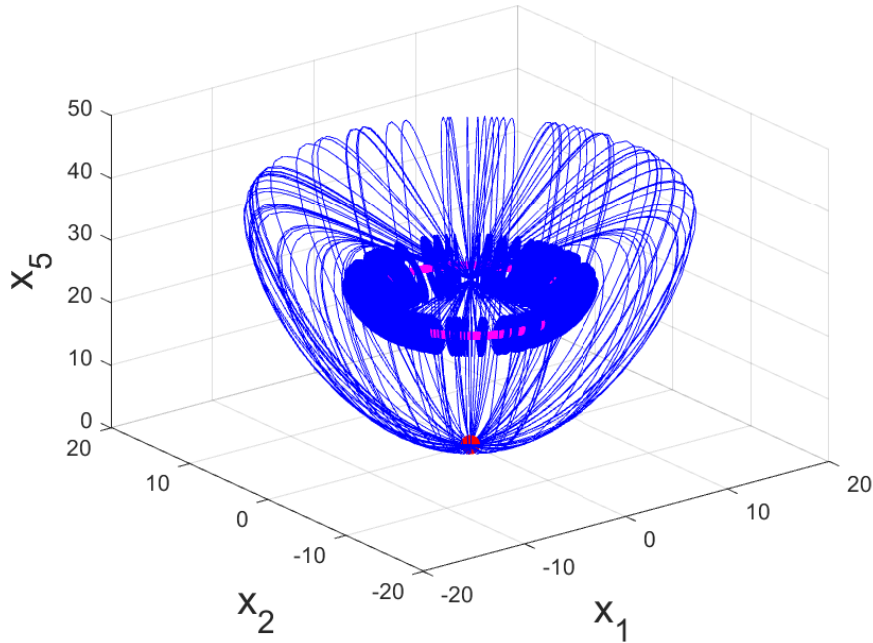


Рисунок А.7 — Визуализация неустойчивых многообразий в системе (2.8) с  $\sigma = 10$ ,  $r_1 = 24$ ,  $r_2 = -e = 0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$  и 100 случайных начальных точек в окрестности  $S_0$ , которые стремятся к кругу состояний равновесия  $S_\theta$ .

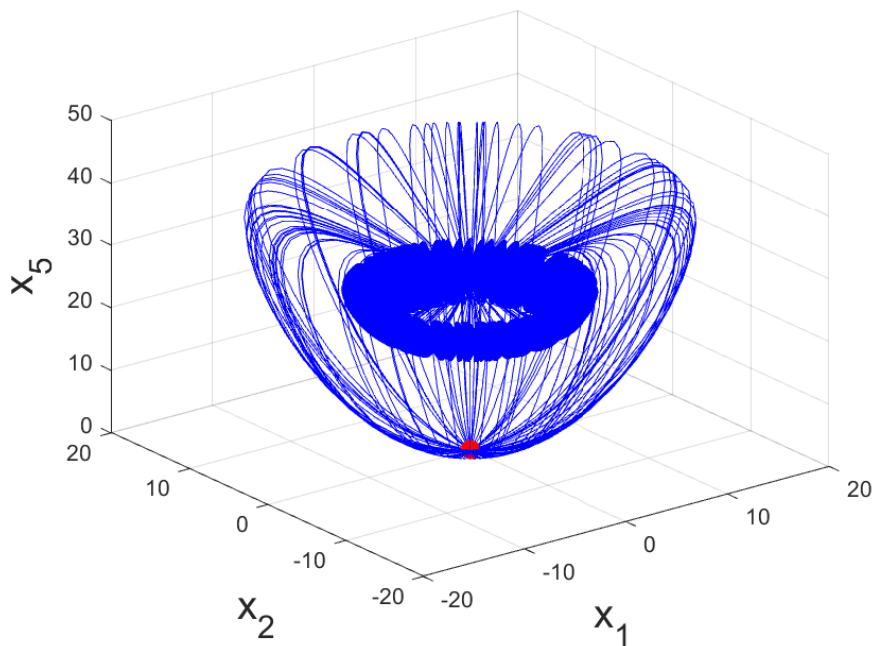
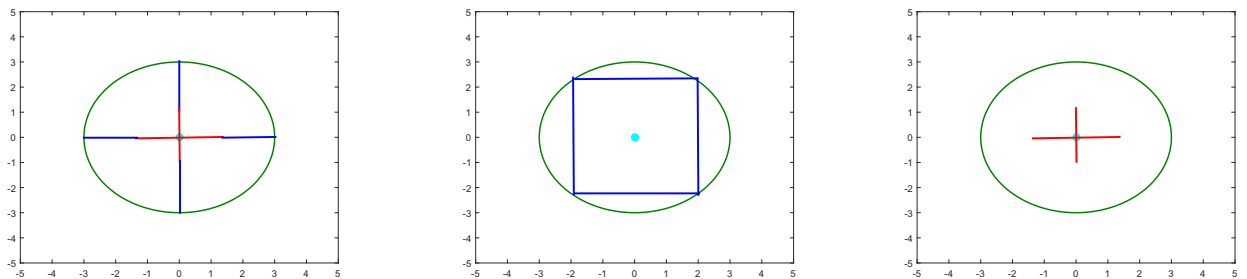


Рисунок А.8 — Визуализация траекторий во временном интервале  $[0, 7000]$  в системе (2.8) с  $\sigma = 10$ ,  $r_1 = 24$ ,  $r_2 = 0.002$ ,  $e = -0.001$ ,  $b = \frac{8}{3}$  и 100 случайных начальных точек в окрестности  $S_0$ , стремящихся к тору.

круг состояний равновесия  $S_\theta$  существует окрестность такая, что траектории, начинающиеся из этой окрестности, приближаются к состояниям равновесия  $S_\theta$  а вне ее они приближаются к аттрактору. Для Рис. А.4б, рассматриваются вертикальная и горизонтальная диагонали

с радиусом 2.5 и 2 соответственно и шагом разбиения 0.01. Для остальных отрезков, как на Рис. A.9b и A.9c мы использовали тот же шаг разбиения. На Рис. A.10, мы построили две траектории с начальными точками из синей и красной частей вертикальной диагонали. Такую же процедуру можно использовать для Рис. A.3a, где вертикальная и горизонтальная диагонали имеют радиус 3 и 2.5 соответственно и шаг разбиения 0.01 на всех рассматриваемых отрезках прямой. На Рис. A.11 показаны две траектории с начальными точками из синей и красной частей вертикальной диагонали. Кроме того, с помощью другой процедуры можно проверить, что зеленое множество на Рис. A.3a не попадает на круг состояний равновесия  $S_\theta$ .

Вокруг одного завитка траектории неустойчивого многообразия с его внешних сторон мы рассматриваем отрезки прямой длиной 5 и шагом разбиения 0.01, как на Рис. A.12a. На Рис. A.12b, мы построили траекторию с точкой отсчета из верхнего внешнего отрезка линии.



- (a) Начальные траектории из всех точек лежат на синих и красных частях этих диагоналей, приближающихся к аттрактору и состояниям равновесия соответственно.
- (b) Начальные траектории из всех точек лежат на этих отрезках синей линии, приближающихся к аттрактору.
- (c) Начальные траектории из всех точек лежат на этих отрезках красной линии, приближающихся к состояниям равновесия.

Рисунок A.9 — Визуализация белой области вокруг множества состояний равновесия  $S_\theta$  на Рис. A.4 и A.3a и рассматриваемых отрезков линий.

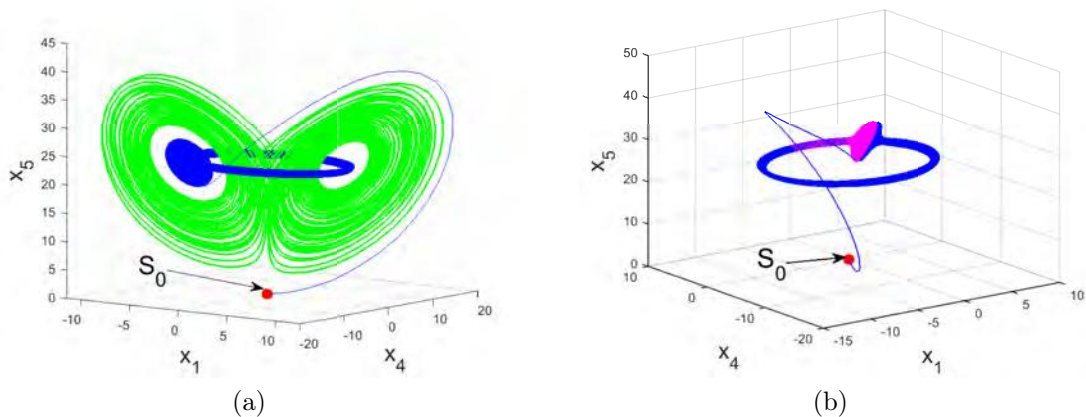


Рисунок A.10 — Визуализация двух траекторий с начальными точками из синей и красной частей вертикальной диагонали в белом зазоре Рис. A.4.

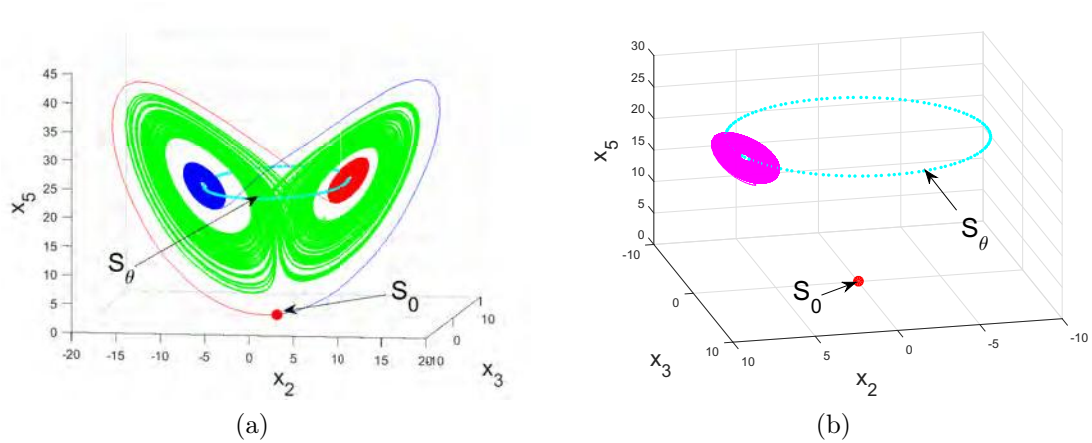


Рисунок А.11 — Визуализация двух траекторий с начальными точками из синей и красной частей вертикальной диагонали в белом зазоре Рис.А.3а.

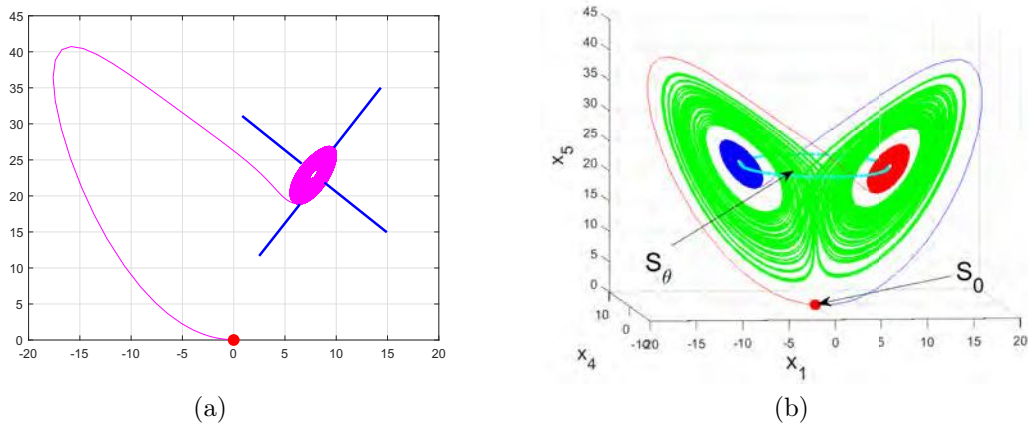


Рисунок А.12 — (а) Визуализация отрезков линий вокруг неустойчивого многообразия на Рис. А.4, начальные траектории из всех точек на этих отрезках приближаются к аттрактору; (б) Локализация траектории с начальной точкой на верхнем внешнем отрезке.

## А.5 Проверка притягиваемости для переходных множеств

Чтобы строго продемонстрировать привлекательность зеленых множеств, как на Рис. А.3а и А.4б, можно использовать другую технику. Идея этой техники основана на том, что комплексная система Лоренца (2.4) имеет проективное пространство, в котором состояния, отличающиеся только общей фазой переменных  $X$  и  $Y$ , считаются эквивалентными (см. раздел 2.1.3).

Теперь важно отметить следующие свойства проективной системы (2.29) [164; 165]:

- (i) Вся физическая информация и динамика в фазовом пространстве системы (2.4) может быть получена из уравнений движения (2.29) в проективном пространстве.
- (ii) Проективная система (2.29) имеет одномерное неустойчивое многообразие и трехмерное устойчивое многообразие.

Заметим, что проективная система (2.29) имеет следующие два состояния равновесия:  $S'_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$  и  $S'_1 = (\xi'_1, v'_1, w'_1, Z'_1)$ , где

$$\xi'_1 = \frac{\beta(\mu^2 + \kappa^2)(\mu^2 - \kappa^2)}{2\mu^4(\beta\varrho + 1)}, \quad v'_1 = 0, \quad w'_1 = \frac{\beta v(\mu^2 + \kappa^2)}{\mu^3(\beta\varrho + 1)}, \quad Z'_1 = \frac{\mu^2 + \kappa^2}{\mu^2(\beta\varrho + 1)}.$$

Состояния равновесия  $S'_0$  и  $S'_1$  в проективном пространстве представляют собой проекции состояний равновесия  $S_0$  и  $S_\theta$  системы (2.8) соответственно. Для тора как на Рис. A.4a его проекция в проективном пространстве  $\mathcal{P}$  является предельным циклом  $\Gamma$ .

Поскольку проективная система (2.29) имеет 1-мерное неустойчивое многообразие а проективное отображение (2.27) сохраняет "хаотичность" аттракторов. Таким образом, разумно использовать проекционную систему (2.29), чтобы определить, являются ли хаотические множества на Рис. A.3a и A.4b аттракторами или переходными хаотическими множествами. Для параметров  $\sigma = 10, r_1 = 24, r_2 = 0.001, e = -0.001, b = \frac{8}{3}$  (см. Рис. A.3a), вокруг состояния равновесия  $S'_0$  мы выбираем небольшую сферическую окрестность радиуса 0.002 и рассмотрим 100 случайных начальных точек на ней. Из Рис. A.13 можно заметить следующее: все рассматриваемые неустойчивые многообразия из  $S'_0$  идут в одном направлении и приближаются к  $S'_1$ . Мы провели тот же эксперимент для случая тора и получили тот же вывод (см. Рис. A.14).

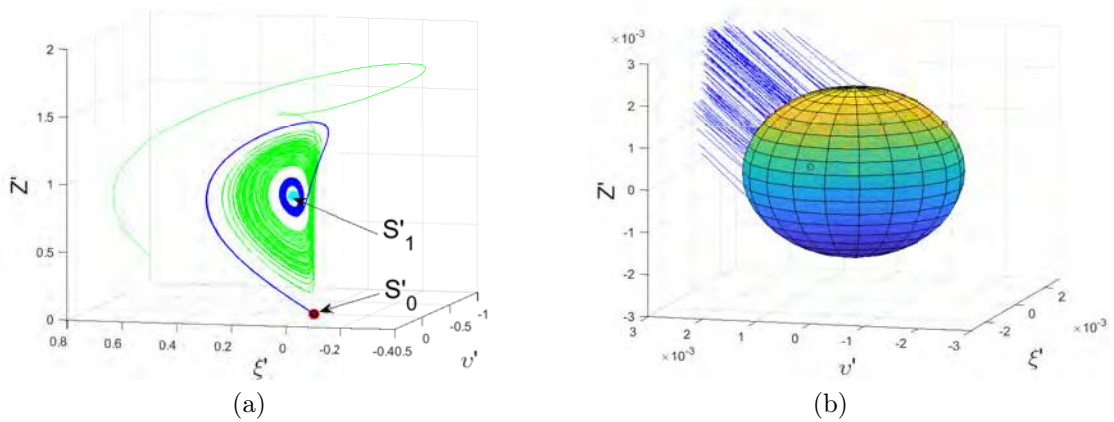


Рисунок A.13 — (a) Локализация хаотического множества (зеленого цвета) в проективном пространстве и 100 неустойчивых многообразий с начальными точками из сферических случайных точек в окрестности  $S'_0$ , с  $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.001, -0.001, \frac{8}{3})$ .

(b) Увеличение области вокруг  $S'_0$ , чтобы показать сферу случайных начальных точек и соответствующих 100 траекторий, стремящихся к  $S'_1$ .

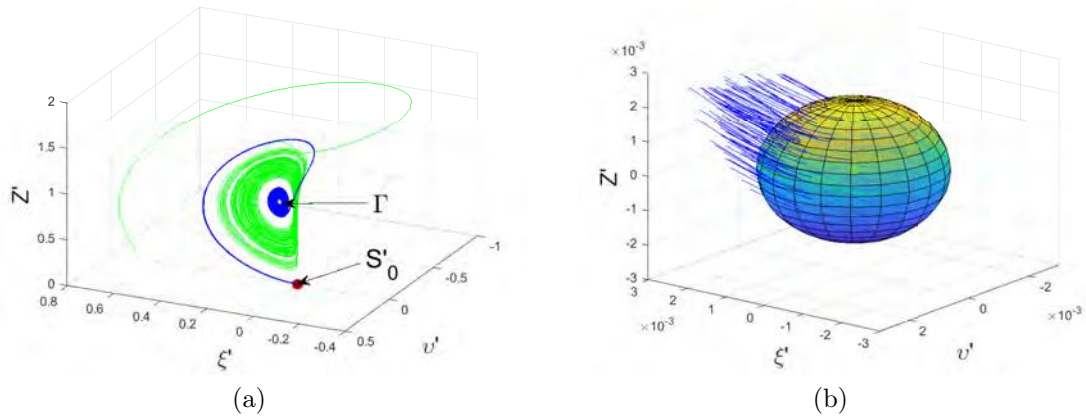


Рисунок А.14 — (а) Локализация хаотического множества (зеленого цвета) в проективном пространстве и 100 неустойчивые многообразия с начальными точками из сферических случайных точек в окрестности  $S'_0$ ,  $(\sigma, r_1, r_2, e, b) = (10, 24, 0.002, -0.001, \frac{8}{3})$ .  
 (б) Увеличение области вокруг  $S'_0$ , чтобы показать сферичность случайных точек и рассматриваемых 100 траекторий, стремящихся к предельному циклу  $\Gamma$ .

## Приложение Б

### Реализация на MATLAB процедуры визуализации скрытых переходных хаотических множеств в комплексной системе Лоренца и соответствующей проективной системе

Листинг Б.1: Функция “Sys\_Projective\_Complex\_Lorenz.m” определяет проективную систему (2.29)

```

function dx = Sys_Projective_Complex_Lorenz(t,x,mu,kappa,varrho,
    beta)

% Projective system with parameters: mu kappa varrho beta
5
dx = zeros(4,1);

R=sqrt(x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2);

10 % Projective system equations:

dx(1)= x(2)+mu*(R-x(1))-x(2)*(1-x(4)-varrho*(R+x(1)))-kappa*x(3)
    ;
dx(2)= -mu*x(2)+(R-x(1))+(R+x(1))*(1-x(4)-varrho*(R+x(1)));
dx(3)= -mu *x(3)+kappa*(R+x(1));
15 dx(4)=(R+x(1))-beta*x(4);

```

Листинг Б.2: Projrctive\_NC\_Method.m- метод численного продолжения для локализации скрытого переходного хаотического множества в проективной системе (2.29)

```

function Projrctive_NC_Method

close all
5
% Initial point from vicinity of S'_0
x_start=[0.001 .001 0.001 0.001 ];

global r1
10
% Parameters of complex Lorenz system
sigma=10; e=-0.001; b=8/3; r2=0.001 ;

```



```

% Variation of bifurcation parameter r1
15 for r1=25.4:-0.7: 24

% Parameters of projective system
eta=segma*(r1-1)-e^2/4; kappa=(2*r2*segma+e*(segma-1))/(2*eta);
mu=(1+segma)/sqrt(eta); varrho=sqrt(eta)/(2*segma-b);
20 beta=b/sqrt(eta);

% Equilibrium points of projective system
S0=[0 0 0 0];

25 S1u=beta*(mu^2+kappa^2)*(mu^2-kappa^2)/(2*(beta*varrho+1)*mu^4);
S1v=0;
S1w=beta*kappa*(mu^2+kappa^2)/ ((beta*varrho+1)*mu^3);
S1z=(mu^2+kappa^2)/ ((beta*varrho+1)*mu^2);

30 S1=[S1u ,S1v, S1w, S1z];

RelTol = 1e-6; AbsTol = 1e-6;
odeSolverOptions = odeset('RelTol', RelTol, 'AbsTol', AbsTol);

35 % Plot self-excited and hidden chaotic set
[~,z1] = ode45(@(t,x)Sys_Projective_Complex_Lorenz(t,x,mu,kappa,
varrho,beta),[0 1000], x_start,odeSolverOptions);

% Plot unstable manifold
x_start_uns_manif=[0.0001 0.0001 0.0001 0.0001];
40 [~,z2] = ode45(@(t,x)Sys_Projective_Complex_Lorenz(t,x,mu,kappa,
varrho,beta),[0 1000],x_start_uns_manif,odeSolverOptions );

figure
% Specify a plot
plot3 ( S1(1) , S1(3),S1(4),'c.','MarkerSize', 30);
45 hold on;
plot3 ( S0(1),S0(3),S0(4) , 'r.', 'MarkerSize', 30);

% Visualization of self-excited and hidden chaotic set
if r1==25.4 || r1==24.7
50 plot3 ( z1 ( :,1 ) , z1 ( :,3 ),z1 ( :,4 ),'Color','blue');

```

```

else
plot3 ( z1 ( :,1 ) , z1 ( :,3 ),z1 ( :,4 ),'Color','green');
end

55 % Visualization of unstable manifold
if r1==24
plot3 ( z2 ( :,1) , z2 ( :,3 ),z2 ( :,4 ),'Color','0.75,0,0.75')
;
end

60 % Start and end points on the trajectory
plot3 ( x_start(1) , x_start(3), x_start(4) , '.', 'Color', '
      0.87,0.49,0', 'MarkerSize', 30);

if r1==25.4
text(0.5,0.5,0.5, '$\mathcal{A}_{se}^{\{1}\}$', 'Interpreter', 'Latex',
      'FontSize', 20)
65 elseif r1==24.7
text(0.5,0.5,0.5, '$\mathcal{A}_{se}^{\{2}\}$', 'Interpreter', 'Latex'
      , 'FontSize', 20)
else
text(0.5,0.5,0.5, '$\mathcal{A}_{hid}^{\{3}\}$', 'Interpreter', 'Latex'
      , 'FontSize', 20)
end
70 xlabel('\xi', 'FontSize', 18); ylabel('w', 'FontSize', 18);
zlabel('Z', 'FontSize', 18)
axis([-0.1 0.4 -0.2 0.2 0 1.5 ])
grid on;

% Update Initial point
75 x_start=z1(end,:);
end

```

Листинг Б.3: Функция "Sys\_Complex\_Lorenz.m" определяет систему (2.8)

```

function dx = Sys_Complex_Lorenz(t, x, sigma, r1, r2, e, b)

% Complex Lorenz System with parameters: sigma r1 r2 e b
5
dx = zeros(5,1);

```

```

% Complex Lorenz equations:
10 dx(1)= sigma*(x(3)-x(1));
    dx(2)= sigma*(x(4)-x(2));
    dx(3)= r1*x(1)-r2*x(2)-x(3)-e*x(4)-x(1)*x(5);
    dx(4)= r2*x(1)+r1*x(2)+e*x(3)-x(4)-x(2)*x(5);
    dx(5)=x(1)*x(3)+x(2)*x(4)-b*x(5);

```

Листинг Б.4: Функция "randsphere.m" генерирует случайные точки

```

function X = randsphere(m,n,r)

% This function returns an m by n array, X, in which
5 % each of the m rows has the n Cartesian coordinates
% of a random point uniformly-distributed over the
% interior of an n-dimensional hypersphere with
% radius r and center at the origin. The function
% 'randn' is initially used to generate m sets of n
10 % random variables with independent multivariate
% normal distribution, with mean 0 and variance 1.
% Then the incomplete gamma function, 'gammainc',
% is used to map these points radially to fit in the
% hypersphere of finite radius r with a uniform % spatial
% distribution.
15 % Roger Stafford - 12/23/05

X = randn(m,n);
s2 = sum(X.^2,2);
X = X.*repmat(r*(gammainc(s2/2,n/2).^(1/n))./sqrt(s2),1,n);

```

Листинг Б.5: runCL.m-визуализация траекторий, стремящихся к тору, с начальными точками из сферических случайных точек в окрестности  $S_0$  (см. Рис. A.5)

```

function runCL

close all
5
% Parameters of complex Lorenz system
sigma = 10; r1 = 24;r2 = 0.002;e = -0.001; b = 8/3;

% Equilibrium point
10 S0 = [0,0,0,0,0];

```

```

tEnd = 7000; rEps0 = 0.2;

% Generate random points
15
numPoints = 100;
spherePoints = randsphere(numPoints, 5, rEps0);

% Visualization of 100 trajectories that tend to the torus
20 for iPoint = 1 : numPoints

    x_start= spherePoints(iPoint, :);

    [~, z1] = ode45(@(t,x) Sys_Complex_Lorenz(t, x, sigma, r1, r2, e
        , b),[0 tEnd], x_start);

25
% Specify a plot
figure(1); hold on;
plot3( z1 ( :,1 ) , z1 ( :,2 ) , z1 ( :,5 ) , 'b');
plot3( S0(1), S0(2), S0(5), 'r.', 'MarkerSize', 30);
30 plot3(x_start(1),x_start(2),x_start(4),'ko', 'MarkerSize', 5)

% Plot sphere
[xx, yy, zz]=sphere;
mysphere=surf(rEps0*xx, rEps0*yy, rEps0*zz);
35 mysphere.FaceAlpha=0.25;

xlabel('x_{1}','FontSize',18); ylabel('x_{2}','FontSize',18);
    zlabel('x_{5}','FontSize',18)
grid on; axis on;
view(3);
40 hold off;

% Showing the spherical of random points
figure(2); hold on;
plot3( z1 ( :,1 ) , z1 ( :,2 ) , z1 ( :,5 ) , 'b');
45 plot3( S0(1), S0(2), S0(5), 'r.', 'MarkerSize', 30);
    plot3(x_start(1),x_start(2),x_start(4),'ko', 'MarkerSize', 5)

[xx, yy, zz]=sphere;

```

```
mysphere=surf(rEps0*xx, rEps0*yy, rEps0*zz);
50 mysphere.FaceAlpha=0.25;

xlabel('x_{1}','FontSize',18); ylabel('x_{2}','FontSize',18);
    zlabel('x_{5}','FontSize',18)
grid on;
axis([-0.3 0.3 -0.3 0.3 -0.3 0.3]);
55 view(3);
hold off;
    end
```

## Приложение В

Реализация на MATLAB процедуры вычисления показателей Ляпунова для системы Спротта дробного порядка, процедуры синхронизации скрытых гиперхаотических аттракторов в комплексных системах Спротта дробного порядка

Листинг В.1: Function “fdefun\_Sprott.m” определяет систему (2.33) и ее вариационные уравнения

```

function dx=fdefun_Sprott(t,x,param)

% Parameters
5 a=param(1); b=param(2); c=param(3);d=param(4);

% Output must be a column vector
dx = zeros(56,1);

10 % Right-hand side of the fractinal-oredr Sprott system :
    dx(1)= -x(3)*x(4)-d*x(6);
    dx(2)= -x(3)*x(5)-d*x(7);
    dx(3)= (x(4))^2+(x(5))^2-1;
    dx(4)= a*x(1)-b*x(3)*x(4)-x(4);
15 dx(5)=a*x(2)-b*x(3)*x(5)-x(5);
    dx(6)=c*x(4);
    dx(7)=c*x(5);

% Variational matrix :
20 Y= [x(8), x(15), x(22),x(29),x(36), x(43),x(50);
      x(9), x(16), x(23),x(30),x(37), x(44),x(51);
      x(10), x(17), x(24),x(31),x(38), x(45),x(52);
      x(11), x(18), x(25),x(32),x(39), x(46),x(53);
      x(12), x(19), x(26),x(33),x(40), x(47),x(54);
25 x(13), x(20), x(27),x(34),x(41), x(48),x(55);
      x(14), x(21), x(28),x(35),x(42), x(49),x(56)];

Jас=[0, 0, -x(4), -x(3), 0, -d, 0;
     0, 0, -x(5), 0, -x(3), 0, -d;
30 0, 0, 0, 2*x(4), 2*x(5), 0, 0;

```

```

a, 0, -b*x(4), -b*x(3)-1, 0, 0, 0;
0, a, -b*x(5), 0, -b*x(3)-1, 0, 0;
0, 0, 0, c, 0, 0, 0;
0, 0, 0, 0, c, 0, 0;
];

dx(8:56)=Jac*Y;

```

Листинг В.2: ComputeLE\_Frac\_Sprott.m- вычислить показатели Ляпунова системы Спротта дробного порядка (2.33)

```

function [Texp,Lexp]=ComputeLE_Frac_Sprott(q,extOde, ystart,
    tstart,stept,nit,param)

close all
5
% Dimension of the FDEs :
n=length(ystart);

% Dimension of the extended FDEs (FDEs + Var. Eq.):
10 n1=n; n2=n1*(n1+1);

% Memory allocation

15 y=zeros(n2,1); cum=zeros(n1,1); y0=y; z=zeros(1,n2);
gsc=cum; znorm=cum; x=cum; w=zeros(1,n1);

% Initial values

20 y(1:n)=ystart(:);

for i=1:n1 y((n1+1)*i)=1.0; end

t=tstart;

25
% Main loop

for ITERLYAP=1:nit
    [~,Y]=fde12(q, extOde, t,t+stept,y,stept,param,Inf,1.E-8);
30 y=Y(:,end);

```

```

t=t+stept;
for i=1:n1
    for j=1:n1 y0(n1*i+j)=y(n1*j+i);
35     end
end

%
%     construct new orthonormal basis by gram-schmidt
40 %

znorm(1)=0.0;
for j=1:n1 znorm(1)=znorm(1)+y0(n1*j+1)^2; end

45 znorm(1)=sqrt(znorm(1));

for j=1:n1 y0(n1*j+1)=y0(n1*j+1)/znorm(1);
end

50 for j=2:n1
    for k=1:(j-1)
        gsc(k)=0.0;
        for l=1:n1 gsc(k)=gsc(k)+y0(n1*l+j)*y0(n1*l+k); end
    end

55

    for k=1:n1
        for l=1:(j-1)
            y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)-gsc(l)*y0(n1*k+l);
            end
60        end

        znorm(j)=0.0;
        for k=1:n1 znorm(j)=znorm(j)+y0(n1*k+j)^2; end
        znorm(j)=sqrt(znorm(j));

65

        for k=1:n1 y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)/znorm(j); end
    end

%
70 %     Update running vector magnitudes

```



```

%
    for k=1:n1 cum(k)=cum(k)+log(znorm(k)); end

75 %
%       Normalize exponent
%
    for k=1:n1
80         lp(k)=cum(k)/(t-tstart);
    end

% Output modification

85 if ITERLYAP==1
    Lexp=lp;
    Texp=t;
else
    Lexp=[Lexp; lp];
90    Texp=[Texp; t];
end
for i=1:n1
    for j=1:n1
95         y(n1*j+i)=y0(n1*i+j);
    end
end
end
end

```

Листинг В.3: runLEs.m- запустить код и построить показатели Ляпунова системы Спротта дробного порядка (2.33)

```

close all

5 tstart=0; stept=0.01; tend=100; ystart=[1 1 1 1 1 1 1];

% Number of steps
nit = round((tend-tstart)/stept);

10 % System parameters
a = 15;b = 1;c = 25.5;d=.01;

```

```

% Freactional-order
q=0.89;
15 [Texp, Lexp] = ComputeLE_Frac_Sprott(q,@fdefun_Sprott,ystart,
    tstart,stept,nit, [a b c d]);

% Plot Lyapunov exponents
disp(Lexp(end,:));
20 plot(Texp,Lexp,'LineWidth', 2);
    xlim([tstart tend])
    grid on;

```

Листинг В.4: Function “Sys\_Master\_slave\_Error\_Sprott.m” определяет ведущую (3.7), ведомую (3.8) и ошибку (3.6) системы

```

function dx = Sys_Master_Slave_Error_Sprott(t,x,param)

%Define system parameters
5 a=param(1);b=param(2);c=param(3);d=param(4);

dx = zeros(21,1);

% Master system
10 dx(1)= -x(3)*x(4)-d*x(6);
    dx(2)= -x(3)*x(5)-d*x(7);
    dx(3)= (x(4))^2+(x(5))^2-1;
    dx(4)= a*x(1)-b*x(3)*x(4)-x(4);
    dx(5)=a*x(2)-b*x(3)*x(5)-x(5);
15    dx(6)=c*x(4);
    dx(7)=c*x(5);

% slave system
dx(8)= -d*x(13)-x(3)*x(4)-5*(x(8)-x(1));
20 dx(9)=-d*x(14)-x(3)*x(5)-(x(9)-x(2));
    dx(10)= (x(4))^2+(x(5))^2-1-7*(x(10)-x(3));
    dx(11)= a*x(8)-b*x(3)*x(4)-x(11)-15*(x(8)-x(1));
    dx(12)=a*x(9)-b*x(3)*x(5)-x(12)-15*(x(9)-x(2))-15*(x(12)-x(5));
    dx(13)=c*x(11)-3*(x(13)-x(6));
25 dx(14)=c*x(12)-(x(14)-x(7));

```

```

% Error system
A=[0 0 0 0 0 -d 0;
    0 0 0 0 0 0 -d;
    0 0 0 0 0 0 0;
    a 0 0 -1 0 0 0;
    0 a 0 0 -1 0 0;
    0 0 0 c 0 0 0 ;
    0 0 0 0 c 0 0];

K=[5 0 0 0 0 0 0;
    0 1 0 0 0 0 0;
    0 0 7 0 0 0 0;
    15 0 0 0 0 0 0;
    0 15 0 0 3 0 0;
    0 0 0 0 0 3 0;
    0 0 0 0 0 0 1];

e=[x(15); x(16); x(17); x(18); x(19); x(20); x(21)];
dx(15:21)=(A-K)*e;

```

Листинг В.5: Synch\_FSs.m- синхронизация графиков скрытых аттракторов в системах дробного порядка (3.7) и (3.8) и эволюция ошибок (3.6)

```

function Synch_FSs

close all
5 % System parameters
a = 15;b = 1;c = 25.5;d=.01;

% Initial point corresponding to master, slave and error systems
x_start=[1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3.3; 4; 10.01; -0.7; -12; 7; -4;
    1; 1; 1; 1.3; 2; 0.01; -0.7    ];
10

% Fractional-order
q=0.89;

[t,z] = fde12(q,@Sys_Master_Slave_Sprott,0,100, x_start,0.0008,[
    a b c d]);
15

% Specify a plot

% Plot synchronization

```

```

plot (t, z ( 1,: ),'LineWidth', 1.5)
20 hold on
plot ( t ,z ( 8,: ),'--r' , 'LineWidth', 2 )
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('$x_{1},y_{1}$','Interpreter'
    , 'latex','FontSize',20);
legend('$x_{1}$','$y_{1}$','Interpreter','latex', 'Location','
    NW','FontSize',16)
grid on;
25 figure

plot (t, z ( 2,: ),'LineWidth', 1.5)
hold on
plot ( t ,z ( 9,: ),'--r' , 'LineWidth', 2 )
30 xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('$x_{2},y_{2}$','Interpreter'
    , 'latex','FontSize',20);
legend('$x_{2}$','$y_{2}$','Interpreter','latex', 'Location','
    NW','FontSize',16)
grid on;
figure

35 plot (t, z ( 3,: ),'LineWidth', 1.5)
hold on
plot ( t ,z ( 10,: ),'--r' , 'LineWidth', 2 )
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('$x_{3},y_{3}$','Interpreter'
    , 'latex','FontSize',20);
    legend('$x_{1}$','$y_{1}$','Interpreter','latex', 'Location','
        NW','FontSize',16)
40 grid on;
figure
plot (t, z ( 4,: ),'LineWidth', 1.5)
hold on
plot ( t ,z ( 11,: ),'--r' , 'LineWidth', 2 )
45 xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('$x_{4},y_{4}$','Interpreter'
    , 'latex','FontSize',20);
legend('$x_{4}$','$y_{4}$','Interpreter','latex', 'Location','
    NW','FontSize',16)
grid on;
figure

50 plot (t, z ( 5,: ),'LineWidth', 1.5)

```

```

hold on
plot ( t ,z ( 12,: ), '--r' , 'LineWidth', 2 )
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('$x_{5},y_{5}$', 'Interpreter'
    , 'latex', 'FontSize',20);
legend('$x_{5}$', '$y_{5}$', 'Interpreter', 'latex', 'Location', '
    NW', 'FontSize',16)
55 grid on;
figure
plot (t, z ( 6,: ), 'LineWidth', 1.5)
hold on
plot ( t ,z ( 13,: ), '--r' , 'LineWidth', 2 )
60 xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('$x_{6},y_{6}$', 'Interpreter'
    , 'latex', 'FontSize',20);
legend('$x_{6}$', '$y_{6}$', 'Interpreter', 'latex', 'Location', '
    NW', 'FontSize',16)
grid on;
figure
65 plot (t, z ( 7,: ), 'LineWidth', 1.5)
hold on
plot ( t ,z ( 14,: ), '--r' , 'LineWidth', 2 )
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('$x_{7},y_{7}$', 'Interpreter'
    , 'latex', 'FontSize',20);...
legend('$x_{7}$', '$y_{7}$', 'Interpreter', 'latex', 'Location', '
    NW', 'FontSize',16)
70 grid on;

% Plot errors
figure
plot (t, z (15, : ), 'LineWidth', 2.5)
75 xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('e_{1} ', 'FontSize',20);
axis([0 100 -1 1 ])
grid on;

figure
80 plot (t, z (16, : ), 'LineWidth', 2.5)
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('e_{2} ', 'FontSize',20);
axis([0 100 -1 1 ]);
grid on;

```

```

85 figure
   plot (t, z (17, : ), 'LineWidth', 2.5)
   xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('e_{3} ', 'FontSize',20);
   axis([0 100 -1 1 ]);
   grid on;

90 figure
   plot (t, z (18, : ), 'LineWidth', 2.5)
   xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('e_{4} ', 'FontSize',20);
   axis([0 100 -1 1 ]);
95 grid on;

   figure
   plot (t, z (19, : ), 'LineWidth', 2.5)
   xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('e_{5} ', 'FontSize',20);
100 axis([0 100 -1 1 ]);
   grid on;

   figure
   plot (t, z (20, : ), 'LineWidth', 2.5)
105 xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('e_{6} ', 'FontSize',20);
   axis([0 100 -1 1 ]);
   grid on;

   figure
110 plot (t, z (21, : ), 'LineWidth', 2.5)
   xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('e_{7} ', 'FontSize',20);
   grid on;

```

Листинг В.6: Text\_Encryption\_Sprott.m- шифрование текстовых сообщений с использованием комплексной системы Спротта дробного порядка

```

function Text_Encryption_Sprott

close all
5 % System parameters
a = 15;b = 1;c = 25.5;d=.01;

% Initial point corresponding to master, slave and error systems
x_start=[1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3.3; 4; 10.01; -0.7; -12; 7; -4;
        1; 1; 1; 1.3; 2; 0.01; -0.7    ];

```

```

10 % Fractional-order
    q=0.89;

    [t,z] = fde12(q,@Sys_Master_Slave_Sprott,0,100, x_start,0.0008,[
        a b c d]);
15 % Name of the text file
    filename = 'Abstract.txt';

    % Import the text
20 X1 = importdata(filename);
    X2=X1';

    % Convert cell array to ordinary array of the underlying data
        type
    X3= cell2mat(X2);
25 % Convert the text into a vector of digits
    X4 = double(X3);

    % Time after realize synchronization
30 Ts=find(t==40);

    % Encryption function
    Encryp=(5+z( 5,(Ts: Ts+length(X4)-1))).^2+(3+(z( 5,(Ts: Ts+
        length(X4)-1))).^2).*X4;

35 % Convert the vector of digits back to a text
    Y1=(char(Encryp));
    disp(Y1);

    % Decryption function
40 Decryp=(-((5+z( 12,(Ts: Ts+length(X4)-1))).^2)+Encryp)./(3+(z(
        12,(Ts: Ts+length(X4)-1))).^2);

    % Convert the vector of digits back to a text
    Y2=(char(Decryp));
    disp(Y2);

```

Листинг В.7: Audio\_Encryption\_Sprott.m- шифрование аудиосообщений с помощью комплексной системы Спротта с дробным порядком

```

function Audio_Encryption_Sprott

close all

5 % System parameters
a = 15;b = 1;c = 25.5;d=.01;

% Initial point corresponding to master, slave and error systems
x_start=[1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 3.3; 4; 10.01; -0.7; -12; 7; -4;
10     1; 1; 1; 1.3; 2; 0.01; -0.7    ];

% Fractional-order
q=0.89;

[t1,z] = fde12(q,@Sys_Master_Slave_Sprott,0,100, x_start
15     ,0.0008,[a b c d]);

% Load voice signal
load handel.mat

% Name of the audio file
20 filename = 'handel.wav';

% Writes a matrix of audio data, y, with sample rate Fs to a
file called filename
audiowrite(filename,y,Fs);

25 clear y Fs
% Reads data from the file named filename, and returns sampled
data, y, and a sample rate for that data, Fs.
[y,Fs] = audioread(filename);

% Amplitude
30 y = y(:,1);

% Define the time
dt = 1/Fs;
t2 = 0:dt:(length(y)*dt)-dt;

35

```



```

% plot the original signal
plot(t2,y);xlabel( 't', 'FontSize',20); ylabel('S(t) ', '
    FontSize',22)
grid on;

40 % Time after realize synchronization
Ts=find(t1==40);

figure

45 % Encryption function
Encryp=((5+z (5, (Ts: Ts+length(y)-1) )).^2)+(3+(z (5, (Ts: Ts+
    length(y)-1) )).^2).*y';

% Plot encrypted signal
plot ( t2, Encryp);
50 xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('S_{e}(t) ', 'FontSize',22);
grid on;

figure
% Decryption function
55 Decryp=(-((5+z (12, (Ts: Ts+length(y)-1))).^2)+Encryp)./(3+(z
    (12, (Ts: Ts+length(y)-1) )).^2);

% Plot decrypted signal
plot ( t2, Decryp);
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('S_{d}(t) ', 'FontSize',22);
60 axis([0 9 -1 .8])
grid on;

figure
% Plot the error between original and decrypted signal
65 plot ( t2, y'-Decryp, 'LineWidth', 1.5);
axis([0 9 -6 2])
xlabel('t', 'FontSize',20); ylabel('S(t)-S_{d}(t) ', 'FontSize'
    ,22);
grid on;

```

## Приложение Г

### Реализация на MATLAB процедуры адаптивной синхронизации гиперхаотических комплексных систем Рабиновича с неопределенными параметрами

Листинг Г.1: Функция "Sys\_Master\_Slave\_Errors\_Rabinovch.m" определяет ведущую (3.41), ведомую (3.42), состояния ошибки (3.36), параметра модуляции ошибки  $A$  (3.33) и параметра модуляции ошибки  $B$  (3.34) системы

```

function dx = Sys_Master_Slave_Errors_Rabinovch(t,x,upsilon,
    alpha,gamma,beta)

dx = zeros(30,1);
5
% Master system
dx(1) = -upsilon*x(1)+x(1)*x(3)+x(2)*x(4)+x(3)*x(5)+x(4)*x(6);
dx(2) = -upsilon*x(2)+x(1)*x(4)-x(2)*x(3)+x(3)*x(6)-x(4)*x(5);
dx(3) = alpha*x(3)+(x(2))^2-(x(1))^2+2*(x(1)*x(5)+x(2)*x(6))-
    beta*x(3)*((x(3))^2+(x(4))^2);
10 dx(4) = alpha*x(4)-2*x(1)*x(2)+2*(x(1)*x(6)-x(2)*x(5))-beta*x
    (4)*((x(3))^2+(x(4))^2);
dx(5) = gamma*x(5)-3*(x(1)*x(3)-x(2)*x(4))-beta*x(5)*((x(5))
    ^2+(x(6))^2);
dx(6) = gamma*x(6)-3*(x(1)*x(4)+x(2)*x(3))-beta*x(6)*((x(5))
    ^2+(x(6))^2);

% Slave system
15 k1=66;k2=66;k3=55;k4=55;k5=77;k6=77;
k11=13;k21=13;k31=12;k41=12;k51=15;k61=15;
k12=15;k22=15;k32=15;k42=15;k52=59;k62=59;
dx(7) = -x(7)*x(19)-upsilon*x(1)+x(1)*x(3)+x(2)*x(4)+x(3)*x(5)+
    x(4)*x(6)-k1*x(13)-k11*x(19)-k12*x(25);
dx(8) = -x(8)*x(20)-upsilon*x(2)+x(1)*x(4)-x(2)*x(3)+x(3)*x(6)-
    x(4)*x(5)-k2*x(14)-k21*x(20)-k22*x(26);
20 dx(9) = x(9)*x(21)+alpha*x(3)+(x(2))^2-(x(1))^2+2*(x(1)*x(5)+x
    (2)*x(6))-x(9)*((x(9))^2+(x(10))^2)*x(27)-beta*x(3)*((x(3))
    ^2+(x(4))^2)-k3*x(15)-k31*x(21)-k32*x(27);

```

```

dx(10)= x(10)*x(22)+alpha*x(4) -2*x(1)*x(2)+2*(x(1)*x(6) -x(2)*x
(5)) -x(10)*((x(9))^2+(x(10))^2)*x(28) - beta*x(4)*((x(3))^2+(
x(4))^2) -k4*x(16) -k41*x(22) -k42*x(28);
dx(11)=x(11)*x(23)+gamma*x(5) -3*(x(1)*x(3) -x(2)*x(4)) -x(11)*((
x(11))^2+(x(12))^2)*x(29) - beta*x(5)*((x(5))^2+(x(6))^2) -k5*
x(17) -k51*x(23) -k52*x(29);
dx(12)=x(12)*x(24)+gamma*x(6) -3*(x(1)*x(4)+x(2)*x(3)) -x(12)*((
x(11))^2+(x(12))^2)*x(30) - beta*x(6)*((x(5))^2+(x(6))^2) -k6*
x(18) -k61*x(24) -k62*x(30);
25
% Error ststes system
dx(13)= -x(7)*x(19) -k1*x(13) -k11*x(19) -k12*x(25);
dx(14)= -x(8)*x(20) -k2*x(14) -k21*x(20) -k22*x(26);
dx(15)= x(9)*x(21) -x(9)*((x(9))^2+(x(10))^2)*x(27) -k3*x(15) -
k31*x(21) -k32*x(27);
30
dx(16)= x(10)*x(22) -x(10)*((x(9))^2+(x(10))^2)*x(28) -k4*x(16) -
k41*x(22) -k42*x(28);
dx(17)=x(11)*x(23) -x(11)*((x(11))^2+(x(12))^2)*x(29) -k5*x(17) -
k51*x(23) -k52*x(29);
dx(18)=x(12)*x(24) -x(12)*((x(11))^2+(x(12))^2)*x(30) -k6*x(18) -
k61*x(24) -k62*x(30);

% Error parametre estimation A system
35
dx(19)= x(7)*x(13)+k11*x(13);
dx(20)= x(8)*x(14)+k21*x(14);
dx(21)= -x(9)*x(15)+k31*x(15);
dx(22)= -x(10)*x(16)+k41*x(16);
dx(23)=-x(11)*x(17)+k51*x(17);
40
dx(24)=-x(12)*x(18)+k61*x(18);

% Error parametre estimation B system
dx(25)= k12*x(13);
dx(26)= k22*x(14);
45
dx(27)= x(9)*((x(9))^2+(x(10))^2)*x(15)+k32*x(15);
dx(28)= x(10)*((x(9))^2+(x(10))^2)*x(16)+k42*x(16);
dx(29)=x(11)*((x(11))^2+(x(12))^2)*x(17)+k52*x(17);
dx(30)=x(12)*((x(11))^2+(x(12))^2)*x(18)+k62*x(18);

```

Листинг Г.2: Adpative\_Synchr\_Rabinovch.m- построение адаптивной синхронизации гиперхаотических аттракторов в системах Рабиновича (3.41) и (3.42), оценка неопределенных параметров  $A, B$ , состояния ошибок (3.36), модуляция параметра ошибки  $A$  (3.33) и модуляция параметра ошибки  $B$  (3.34)

```

function Adpative_Synchr_Rabinovch

close all

5
% System parameters
epsilon=-0.03;
alpha =0.5;
gamma=0.11;
10 beta=.001;

[t1,z1] = ode45(@(t,x)Sys_Master_Slave_Errors_Rabinovch(t,x,
    epsilon,alpha,gamma,beta),[0 50],[1 1 1 1 1 1 3 3 3 3 3 3 2 2
    2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4]);

% Specify a plot
15 % Plot synchronization trajectory in different projections

plot3( z1 ( :,1 ),z1 ( :,4 ),z1 ( :,6 ),'LineWidth', 2)
xlabel('$x_{1}$','Interpreter','latex','FontSize',20); ylabel('$
    x_{4}$','Interpreter','latex','FontSize',20);
zlabel('$x_{6}$','Interpreter','latex','FontSize',20);
20 grid on;

figure
plot3( z1 ( :,7 ),z1 ( :,10 ),z1 ( :,12 ),'r','LineWidth', 2)
xlabel('$y_{1}$','Interpreter','latex','FontSize',20); ylabel('$
    y_{4}$','Interpreter','latex','FontSize',20);
25 zlabel('$y_{6}$','Interpreter','latex','FontSize',20);
grid on;

figure
plot3( z1 ( :,2 ),z1 ( :,3 ),z1 ( :,5 ),'LineWidth', 2)
30 view(50,50);
xlabel('$x_{2}$','Interpreter','latex','FontSize',20); ylabel('$
    x_{3}$','Interpreter','latex','FontSize',20);
zlabel('$x_{5}$','Interpreter','latex','FontSize',20);

```

```

grid on;

35 figure
plot3( z1 ( :,8 ),z1 ( :,9 ),z1 ( :,11 ),'r','LineWidth', 2)
view(50,50);
xlabel('$y_{2}$','Interpreter','latex','FontSize',20); ylabel('$
    y_{3}$','Interpreter','latex','FontSize',20);
zlabel('$y_{5}$','Interpreter','latex','FontSize',20);
40 grid on;

% Estimation of unknown parameters
figure
plot( t1,upsilon+z1 ( :,19 ),'LineWidth', 2, 'Color', 'blue')
45 str = {'$$\hat{\upsilon}$$'};
xlabel('t','FontSize',20);ylabel(str,'Interpreter','latex','
    FontSize',20)
grid on;

figure
50 plot( t1,alpha+z1 ( :,21 ),'LineWidth', 2, 'Color', 'red')
str = {'$$\hat{\alpha}$$'};
xlabel('t','FontSize',20);ylabel(str,'Interpreter','latex','
    FontSize',20)
grid on;

55 figure
plot( t1,beta+z1 ( :,27 ),'LineWidth', 2, 'Color', '0.87,
    0.49, 0')
str = {'$$\hat{\beta}$$'};
xlabel('t','FontSize',20);ylabel(str,'Interpreter','latex','
    FontSize',20)
grid on;

60 figure
plot( t1,gamma+z1 ( :,23 ),'LineWidth', 2, 'Color', '0.49,
    0.18, 0.56')
str = {'$$\hat{\gamma}$$'};
xlabel('t','FontSize',20);ylabel(str,'Interpreter','latex','
    FontSize',20)
65 grid on;

```

```
% Plot error ststes
figure
subplot(3,2,1)
70 plot( t1,z1 ( :,13 ),'LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{1}','FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,2)
75 plot( t1,z1 ( :,14 ),'LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{2}','FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,3)
80 plot( t1,z1 ( :,15 ),'LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{3}','FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,4)
85 plot( t1,z1 ( :,16 ),'LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{4}','FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,5)
90 plot( t1,z1 ( :,17 ),'LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{5}','FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,6)
95 plot( t1,z1 ( :,18 ),'LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{6}','FontSize',20)
grid on;

% Plot error parametre estimation A
100 figure
subplot(3,2,1)
plot( t1,z1 ( :,19 ),'b','LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{A_{1}}','FontSize',20)
grid on;
105
```

```
subplot(3,2,2)
plot( t1,z1 ( :,20 ),'b','LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{A_{2}}','FontSize',20)
grid on;
110
subplot(3,2,3)
plot( t1,z1 ( :,21 ),'b','LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{A_{3}}','FontSize',20)
grid on;
115
subplot(3,2,4)
plot( t1,z1 ( :,22 ),'b','LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{A_{4}}','FontSize',20)
grid on;
120
subplot(3,2,5)
plot( t1,z1 ( :,23 ),'b','LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{A_{5}}','FontSize',20)
grid on;
125
subplot(3,2,6)
plot( t1,z1 ( :,24 ),'b','LineWidth', 2)
xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{A_{6}}','FontSize',20)
grid on;
130
% Plot error parametre estimation B
figure
subplot(3,2,1)
plot( t1,z1 ( :,25 ),'b','LineWidth', 2)
135 xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{B_{1}}','FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,2)
plot( t1,z1 ( :,26 ),'b','LineWidth', 2)
140 xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{B_{2}}','FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,3)
plot( t1,z1 ( :,27 ),'b','LineWidth', 2)
145 xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{B_{3}}','FontSize',20)
```

```

grid on;

subplot(3,2,4)
plot( t1,z1 ( :,28 ),'b','LineWidth', 2)
150 xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{B_{4}}','FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,5)
plot( t1,z1 ( :,29 ),'b','LineWidth', 2)
155 xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{B_{5}}','FontSize',20)
grid on;

subplot(3,2,6)
plot( t1,z1 ( :,30 ),'b','LineWidth', 2)
160 xlabel('t','FontSize',20);ylabel('e_{B_{6}}','FontSize',20)
grid on;

```

Листинг Г.3: Adpative\_Synchr\_Image\_Noise\_Encryption\_Rabinovch.m-однопараметрическая модуляция и гиперхаотическая маскировка для изображения в градациях серого с использованием комплексной системы Рабиновича

```

function Adpative_Synchr_Image_Noise_Encryption_Rabinovch
close all

5 % Variation of parameter modulation

global gamma
epsilon=-0.03;
alpha =0.5;
10 %gamma=0.11;
beta=.001;

% Name of the image file
filename = 'cameraman.tif';
15

% Read image
Img1 = imread(filename);
% Adding white Gaussian noise
Original_Image=imnoise(Img1,'gaussian',0.1);
20 % Image size
[r, c] = size(Original_Image);

```



```

% Show the original image
imshow(Original_Image);

25 figure
% Show histogram of the original image
imhist(Original_Image)

ImgVector = Original_Image(:);
30 % Convert the image into a vector of digits
Y = double(ImgVector);

% Split the message
RR=Y(1:1000);
35 TT=Y(1001:end)';

% Inject the message part into parameter modulation
Encryp1=RR'/(10*(max(Y)-min(Y))) +0.11;

40 W=[];
% Main loop fpr parameter modulation
for gamma=Encryp1

[~,z1] = ode45(@(t,x)Sys_Master_Slave_Errors_Rabinovch(t,x,
    epsilon,alpha,gamma,beta),[0 50],[1 1 1 1 1 1 3 3 3 3 3 3 2 2
    2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4]);
45

% Recovery the message part from parameter modulation
Decryp1=((gamma+z1 ( end,23 ))-0.11)*(10*(max(Y)-min(Y)));

W=[W, Decryp1];
50

end

% Encryption function
Encryp2=(z1 ( end,6)).^2+(1+(z1 (end,6 )).^2).*TT;
55 X1=[Encryp1 Encryp2];
X2 = uint8(X1);

figure
Encrypted_Image=reshape(X2, r, c);

```

```

60 % Show the encrypted image
    imshow(Encrypted_Image)

    figure
    % Show histogram of the encrypted image
65    imhist(Encrypted_Image)

    % Decryption function
    Decryp2=(-((z1 (end,12 )).^2)+Encryp2)./(1+(z1 ( end,12 )).^2)
        ;
    D=[W Decryp2];
70 DD = uint8(D);
    Decrypted_Image=reshape(DD , r, c);

    figure
    % Show the decrypted image
75    imshow(Decrypted_Image)

    figure
    % Show histogram of the decrypted image
    imhist(Decrypted_Image)
80

    % Estimate peak signal-to-noise ratio (PSNR)
    peaksnr = psnr(Decrypted_Image,Original_Image);
    fprintf('\n The Peak-SNR value is %0.4f', peaksnr);

85    % Estimate structural similarity image index (SSIM)
    ssimval = ssim(Decrypted_Image,Original_Image);
    fprintf('\n The structural similarity index is %0.4f',ssimval)
        ;

```