

Федеральный исследовательский центр  
Карельский научный центр Российской академии наук  
Институт прикладных математических исследований

*На правах рукописи*

Чиркова Юлия Васильевна

**СЕТЕВЫЕ ИГРЫ:  
РАВНОВЕСНОЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ**

Научная специальность 1.2.3.  
Теоретическая информатика, кибернетика

Диссертация  
на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант:  
доктор физико-математических наук,  
профессор Мазалов Владимир Викторович

Петрозаводск

2022

# Оглавление

<b>Введение</b> .....	7
<b>Глава 1. Выбор момента обращения к системе обслуживания со случайным доступом</b> .....	34
§ 1.1 Система обслуживания с двумя серверами.....	36
§ 1.2 Игра с рационально случайной схемой доступа .....	38
§ 1.2.1 Фиксированное число игроков.....	44
§ 1.2.2 Случайное число игроков.....	53
§ 1.2.3 Цена анархии .....	60
§ 1.3 Игра с чисто случайной схемой доступа.....	62
§ 1.3.1 Фиксированное число игроков.....	68
§ 1.3.2 Случайное число игроков.....	79
§ 1.3.3 Цена анархии .....	85
§ 1.4 Сравнение эффективности схем доступа .....	87
§ 1.5 Результаты.....	90
<b>Глава 2. Выбор момента обращения к системе обслуживания с вытеснением</b> .....	97
§ 2.1 Система обслуживания .....	99
§ 2.2 Модель игры.....	100
§ 2.3 Фиксированное число игроков.....	105
§ 2.4 Случайное число игроков.....	110
§ 2.5 Вычисление равновесия .....	113
§ 2.6 Численные примеры равновесий .....	115
§ 2.7 Цена анархии .....	117
§ 2.8 Результаты .....	119

<b>Глава 3. Выбор момента обращения к системе с повторными вызовами</b> .....	123
§ 3.1 Система обслуживания .....	124
§ 3.2 Игра с двумя игроками .....	125
§ 3.3 Игра с тремя игроками .....	128
§ 3.4 Вычисление равновесия для случая трех игроков .....	134
§ 3.5 Результаты .....	138
<b>Глава 4. Задача выбора базовой станции</b> .....	139
§ 4.1 Задача оптимизации для одного игрока .....	140
§ 4.2 Игра двух игроков .....	140
§ 4.2.1 Биматричная игра с полной информацией .....	141
§ 4.2.2 Биматричная модель с неполной информацией .....	143
§ 4.3 КР-подобная модель $n$ игроков .....	148
§ 4.4 Численные примеры .....	149
§ 4.4.1 Низкий уровень шума .....	151
§ 4.4.2 Высокий уровень шума .....	152
§ 4.5 Результаты .....	153
<b>Глава 5. Двухсторонний рынок телекоммуникаций</b> .....	155
§ 5.1 Модель рынка .....	156
§ 5.2 Обобщенная модель Хотеллинга для двух игроков .....	158
§ 5.2.1 Ориентированные на компании предпочтения клиентов .....	162
§ 5.2.2 Ориентированные на операторов предпочтения .....	166
§ 5.3 $M$ игроков, предпочтения клиентов ориентированы на компании .....	169
§ 5.4 Результаты .....	177
<b>Глава 6. Оптимальная маршрутизация с неделимым трафиком</b> .....	178
§ 6.1 КР-модель маршрутизации .....	178
§ 6.2 Равновесие в чистых стратегиях .....	180
§ 6.3 Полностью смешанное равновесие в задаче с различными пользователями и одинаковыми каналами .....	182
§ 6.4 Полностью смешанное равновесие в задаче с одинаковыми пользователями и различными каналами .....	183

§ 6.5 Полностью смешанное равновесие в общем случае .....	187
§ 6.6 Результаты .....	189
<b>Глава 7. Игра балансировки загрузки .....</b>	<b>191</b>
§ 7.1 Модель игры .....	192
§ 7.2 Цена анархии в общем случае $N$ узлов .....	193
§ 7.3 Цена анархии в случае трех узлов .....	196
§ 7.4 Численный метод нахождения цены анархии .....	203
§ 7.5 Численные примеры .....	208
§ 7.6 Результаты .....	209
<b>Глава 8. Игра балансировки загрузки с линейными экстерналиями .....</b>	<b>211</b>
§ 8.1 Модель игры .....	212
§ 8.2 Случай двух вычислительных узлов .....	215
§ 8.3 Цена анархии .....	217
§ 8.4 Численные примеры .....	223
§ 8.5 Результаты .....	224
<b>Глава 9. Игра покрытия .....</b>	<b>225</b>
§ 9.1 Модель игры .....	226
§ 9.2 Цена анархии в общем случае $N$ узлов .....	227
§ 9.3 Цена анархии в случае трех узлов .....	232
§ 9.4 Численный метод нахождения цены анархии .....	238
§ 9.5 Численные примеры .....	243
§ 9.6 Результаты .....	246
<b>Глава 10. Игра покрытия с линейными экстерналиями .....</b>	<b>248</b>
§ 10.1 Модель игры .....	248
§ 10.2 Цена анархии для двух вычислительных узлов .....	250
§ 10.3 Вычислительные эксперименты .....	263
§ 10.4 Результаты .....	264
<b>Глава 11. Вычисление цены анархии в играх балансировки загрузки и покрытия с линейными задержками .....</b>	<b>266</b>
§ 11.1 Обобщенная КР-модель с линейными задержками .....	267

§ 11.2	Равновесие по Нэшу в игре с тремя узлами	268
§ 11.3	Игра балансировки загрузки	272
§ 11.3.1	Вычисление цены анархии для модели трех узлов	273
§ 11.3.2	Цена анархии для модели с линейными экстерналиями	276
§ 11.3.3	Численные примеры	277
§ 11.4	Игра покрытия	278
§ 11.4.1	Вычисление цены анархии для модели трех узлов	280
§ 11.5	Результаты	283
<b>Глава 12. Оптимальная маршрутизация с разделяемым</b>		
<b>трафиком</b>		
§ 12.1	Модель Вардропа с параллельными каналами	284
§ 12.2	Игра с функциями задержки $\frac{\delta}{c-\delta}$	287
§ 12.3	Игра с функциями задержки $1 - e^{-\alpha\delta}$	289
§ 12.4	Результаты	293
<b>Глава 13. Модель Вардропа с параллельными каналами и</b>		
<b>неполной информацией</b>		
§ 13.1	Байесовская модель Вардропа с параллельными каналами	295
§ 13.2	Равновесия двух типов	298
§ 13.3	Потенциал и существование равновесия по Вардропу	302
§ 13.4	Результаты	305
<b>Глава 14. Транспортная модель Вардропа с экстерналиями</b>		
§ 14.1	Модель транспортной системы	306
§ 14.2	Оптимальные экстерналии	309
§ 14.2.1	Система с двумя каналами	310
§ 14.2.2	Система с тремя каналами	311
§ 14.2.3	Система с $n$ каналами	316
§ 14.3	Социализация эгоистичного поведения	321
§ 14.3.1	Система с двумя каналами	322
§ 14.3.2	Система с $n$ каналами	323
§ 14.3.3	Стоимость социализации для системы	324
§ 14.4	Результаты	326

Заключение .....	327
Литература.....	332

# Введение

## **Актуальность темы диссертации**

Диссертационная работа посвящена исследованию поведения игроков в сетевых играх разделения совместно используемых ресурсов. В работе исследуется равновесное и оптимальное поведение игроков, а также возможность управления поведением эгоистичных игроков для оптимизации их поведения.

Появление и стремительное развитие телекоммуникационных, транспортных и информационных технологий с внедрением их в повседневную жизнь породило множество актуальных задач. Это задачи оптимизации систем с сетевой структурой [2, 11, 12], включающие оптимальную маршрутизацию, выбор между операторами связи и поставщиками “облачных” услуг, задачи увеличения производительности многопроцессорных вычислителей, оптимизации систем массового обслуживания и другие задачи, связанные с необходимостью совместного использования ресурсов различными пользователями.

При решении задач оптимизации работы сетевых систем возникает ряд проблем, как практических, так и при построении математических моделей и разработке методик решения. Эти проблемы связаны с отсутствием возможности централизованного управления компонентами таких систем. Протоколы передачи трафика в разных узлах сети не могут взаимодействовать друг с другом для поддержания определенного уровня общего потока. Более того, на практике они ведут себя “эгоистично” по отношению к свободным ресурсам каналов связи. [4] Пользователи также действуют в своих собственных интересах самостоятельно и несогласованно. Поэтому в задачах распределения ресурсов сети применение методов глобальной оптимизации часто оказывается неприемлемым, так как обычно нет возможности обеспечить выполнение получаемых оптимальных планов использования ресурсов сетей (расписаний обращений к

серверам, норм занимаемой пропускной способности каналов коммуникации и т.п.). Подобные задачи могут быть решены методами некооперативной теории игр. При этом каждый пользователь сети или узел, входящий в сеть, трактуется как некоторый игрок, а задача распределения ресурсов сети рассматривается как игра, в которой игроки, действуя оптимально для себя, могут достигать равновесия – ситуации, в которой никому из игроков не выгодно отклоняться от своей стратегии. Нахождение равновесий и исследование их свойств и структуры позволяет оценить эффективность анализируемой системы.

Очень важно для анализируемой системы определить степень различия эффективности децентрализованной системы по сравнению с ее эффективностью в случае оптимального централизованного управления. Тогда на основании этого можно сделать рекомендации по изменению дизайна структуры самой системы. Хорошей характеристикой для этого является так называемая цена анархии, которую ввели в рассмотрение Коутсоупиас и Пападимитриу в 1999 г. В работе ее вычислению уделяется большое внимание.

Другой актуальной задачей работы является изучение возможности управления поведением эгоистичных игроков для оптимизации (“социализации”) их равновесного поведения. Важно исследовать не только вопрос влияния структуры системы на значение цены анархии, но и наличие возможности и стоимость введения в данную систему дополнительных факторов (экстерналий), управление которыми обеспечит такое равновесное поведение игроков, которое выгодно самой системе.

### **Степень разработанности проблемы в литературе**

В последнее время в исследованиях, связанных с оптимизацией работы сетевых систем, стали применяться методы некооперативной теории игр  $n$  лиц [3, 8, 10, 15, 161]. Это направление получило название “сетевые игры” (Networking Games, Noncooperative Networks) [2, 5, 11, 12, 31, 36, 79, 80, 130, 147]. При этом каждый пользователь сети или узел, входящий в сеть, трактуется как некоторый игрок, а задача распределения ресурсов сети рассматривается как игра, в которой игроки, действуя оптимально для себя, могут достигать равновесия – ситуации, в которой никому из игроков не выгодно отклоняться от своей стра-



тегии.

Один из классов задач данного направления связан с управлением загруженностью серверов – узлов сети, обрабатывающих запросы клиентов и отвечающих на них. Здесь сервер рассматривается как система массового обслуживания, обрабатывающая поток пользовательских заявок. В зависимости от назначения и условий работы сервера-прототипа в рассматриваемой модели система может обрабатывать одновременно одну или несколько заявок, может иметь одну или несколько очередей, или же в случае занятости системы заявка получает отказ в обслуживании.

В традиционной теории массового обслуживания обычно предполагается, что структура входного процесса предопределена и определяется скоростью поступления клиентов. Однако существует другой подход к организации очереди, основанный на предположении, что клиенты, входящие в систему, являются стратегическими [7, 19, 33, 76, 103, 104, 109, 110, 111, 112, 118, 147, 169, 170]. В работах [32, 35] рассматриваются модели, в которых пользователь, зная длину очереди на обслуживание на мощном сервере общего доступа, решает, отправлять ли свою заявку в очередь или выполнить ее на своей рабочей станции, стремясь минимизировать временные затраты. В моделях [29, 30, 33, 34] дисциплина поступления заявок задается сверху, а в качестве стратегии рассматривается схема выбора одной из очередей в системе для каждой из поступающих заявок.

Особую группу составляют работы, в которых стратегией пользователя является вероятностное распределение моментов поступления его заявок на временном отрезке работы системы. А именно, предполагается, что стратегия пользователя заключается в выборе момента прихода в систему на интервале времени  $[0, T]$ . В этой постановке очередь в системе определяется после того, как каждый игрок выбирает свой случайный момент прибытия в систему. Таким образом, каждый пользователь проводит некоторое время в системе, и это время определяет его персональные затраты. В результате получается игра с ненулевой суммой, в которой нужно найти равновесие по Нэшу. Статьи [103, 150] являются ранними работами, в которых очередь рассматривается как резуль-

тат поведения пользователей, которые стремятся минимизировать свое время ожидания в системе. В [150] обсуждается метод нахождения неравновесного и равновесного распределения длины очереди в зависимости от времени. В [103] показано, что симметричная стратегия равновесия Нэша является смешанной. В частности, было выявлено, что эта стратегия представляет собой непрерывное распределение на интервале времени  $[0, T]$ , за исключением сингулярности в нуле, а функция плотности убывает между нулем и  $T$ . Аналогичная модель с  $m \geq 1$  одинаковыми серверами с экспоненциальным обслуживанием и размером буфера  $c \geq 0$  для ожидающих заявок рассматривается в статье [110]. Также игра выбора моментов прибытия с пакетным обслуживанием была исследована в [104]. Односерверная система без очереди, в которой у клиентов есть чувствительная ко времени вероятность успешного обслуживания, которую они хотят максимизировать, вместо собственных затрат на ожидание, изучалась в [7, 23]. В работе [109] определяются условия, при которых клиенты не могут стоять в очереди до времени открытия, и показывается, что в равновесии существует сингулярность в момент  $t = 0$  и что плотность положительна только с момента  $t_e > 0$ . В [118] рассматривается модель, в которой потребители могут нести расходы, связанные с опозданием, в дополнение к затратам на ожидание. В статье [112] рассматривается модель, сочетающая затраты на опоздания, затраты на ожидание и ограничения на время открытия и закрытия.

Работы [18, 19] представляют вероятностное расширение безбуферного варианта модели, исследуемой в работах [169, 170]. На заданном временном интервале в систему поступают запросы и принимаются на обслуживание при наличии свободных мест. В системе имеется два обслуживающих сервера с идентичной функциональностью и, возможно, различной производительностью. Когда пользователь обращается к системе, он случайным образом перенаправляется на один из серверов, на котором запрос либо принимается на обслуживание, либо теряется. Примером организации такого случайного доступа в Internet является использование циклического алгоритма (round robin [126, 129]) в DNS-системе для распределения нагрузки между несколькими серверами, которые предоставляют некоторый Web-сервис. В этом случае разные пользователи по-

лучают разные IP адреса при обращении к домену. В простейшем случае IP адреса выдаются по очереди (сначала первый, потом — второй и т.п.), в более общем каждый адрес выдается с определенной вероятностью. Для исследуемых моделей доказывалось существование равновесия по Нэшу и численно находилась цена анархии.

В работах [53, 63, 86, 108, 192] представлена система обслуживания, в которой один сервер открывается и обслуживает пользователей в соответствии с принципом LIFO (Last-In-First-Out – последний пришел, первый ушел) с вытесняющим обслуживанием, когда очередная поступившая заявка вытесняет предыдущую. В работах [53, 108] для различных постановок показано, что такая дисциплина обслуживания может быть социально оптимальной для широкого класса моделей с различными пользовательскими предпочтениями и распределениями времени обслуживания. Авторы работ [86, 192] рассматривают системы с дисциплиной обслуживания LIFO, предполагая, что предыдущее обслуживание прерывается, но не теряется, показывая, что равновесное распределение моментов поступления является геометрическим. В статье [53] исследуется существование симметричных и несимметричных равновесий в игре с очередью, где владельцы заявок выбирают распределения моментов отправки заявок, минимизируя время нахождения в системе. В работе [63] доказывалось существование единственного равновесия в аналогичной игре с потерями, где игроки максимизируют вероятность успешного завершения обслуживания своих заявок. Работа [182] представлена интерпретация такой игры в терминах рынка, где фермеры выбирают момент, когда предложить свой товар, максимизируя цену на него, которая растет со временем, но уменьшается с числом продавцов, одновременно предлагающих товар.

Недавняя статья [62] посвящена поиску равновесия в односерверной системе массового обслуживания с повторными вызовами и стратегическим временем прибытия. Системы обслуживания с повторными вызовами [41, 76, 85, 127, 158, 164] вызывают все больший интерес благодаря своей важности в моделировании современных беспроводных телекоммуникационных систем. Традиционно в таких системах используются так называемые классические повторные вызовы

[37, 155, 157], когда заблокированные на орбитах клиенты повторно вызываются независимо, и в этом случае частота повторных вызовов увеличивается линейно по мере увеличения размера орбиты. Анализ устойчивости таких систем рассматривается в упомянутых работах. Другим широким и важным классом моделей повторных вызовов являются системы массового обслуживания с постоянной частотой повторных вызовов [158]. Эти модели играют важную роль в анализе современных беспроводных телекоммуникационных систем. В статье [87] такая модель впервые использовалась для моделирования системы телефонной станции. Система очередей с повторными вызовами с постоянной частотой повторных вызовов подходит для описания поведения протоколов множественного доступа [67]. Такие очереди были применены к моделированию ТСП-трафика (Transmission Control Protocol), обеспечивающего короткие НТТР-соединения (HyperText Transfer Protocol), и для описания оптико-электрической гибридной схемы разрешения конфликтов [42]. Существует также модификация системы повторных вызовов, в которой после каждого ухода выполненной заявки сервер ищет на орбите клиента для следующего обслуживания в течение случайного времени поиска. В статье [159] для такой системы получена логарифмическая асимптотика вероятности большого отклонения размера орбиты за период регенерации. Среди наиболее важных результатов анализа систем с повторными вызовами отметим явное выражение для стационарного остаточного времени обслуживания сервера, полученное в [156].

Значительная часть современных исследований в области беспроводной связи посвящена проблеме выбора базовой станции. Представляемые в них подходы по выбору базовой станции преследуют несколько целей: увеличить пропускную способность пользователей с минимизацией помех между пользователями [26, 57, 136], сбалансировать сетевую нагрузку между базовыми станциями [105, 153] и контролировать энергопотребление [114, 179]. В работе [121] путем моделирования анализируются недостатки существующего протокола выбора базовой станции стандарта 802.11, где пользователи измеряют уровень принимаемого сигнала от каждой базовой станции и выбирают самый сильный из них для подключения, и оцениваются альтернативные модели. Хи и др. предло-

жили новый протокол стратегии объединения точек доступа для беспроводных локальных сетей (WLAN) [190]. Когда появляется новый пользователь, он устанавливает постоянную связь с одной из видимых точек доступа так, чтобы минимизировать максимальную нагрузку на все точки доступа в пределах своего диапазона видимости. Другая политика выбора точки доступа, предложенная для сетей 802.11 WLAN, использует метрику, учитывающую как интерференцию между базовыми станциями, так и внутри каждой базовой станции [26]. Gong и др. предложен алгоритм распределения для достижения балансировки нагрузки между точками доступа в сетях Wi-Fi [105].

В [56] авторы моделируют некооперативную игру выбора базовой станции, в которой мобильные пользователи эгоистично конкурируют, чтобы минимизировать собственные затраты. В этой статье анализируется качество соответствующих равновесий по Нэшу для стоимости выбора в зависимости от уровня помех и номинальной пропускной способности. Yen и др. [193] моделировали игру выбора базовой станции, в которой единственной целью каждого мобильного пользователя является максимизация его достижимой пропускной способности. Достижимая пропускная способность зависит не только от количества мобильных пользователей, которые подключаются к одной и той же точке доступа, но и от уровня мощности соединения этих мобильных пользователей. Корреляция между эффективностью равновесия по Нэшу в игре выбора базовой станции и стратегиями распределения ресурсов станций была изучена в [119]. Chen [60] формулирует игру выбора базовой станции как попытку каждого пользователя максимизировать свою функцию полезности, определяемую как вознаграждение за пропускную способность минус плата, взимаемая станцией. Авторы [57] предложили некооперативную теоретико-игровую структуру для моделирования задач выбора сети (на стороне пользователя) и распределения ресурсов (на стороне сети), учитывающую взаимозависимость решений, принимаемых разными игроками. В [136] игры напрямую учитывают взаимосвязь помех и повторное использование пространства в беспроводных сетях. Mittal и др. [153] предложена игра выбора точки доступа, в которой пользователям, возможно, потребуется преодолеть некоторое расстояние, чтобы добраться до точки до-

ступа. Стоимость выбора точки доступа измеряется нагрузкой точки доступа и расстоянием перемещения, необходимым для этого выбора. Комбинированная задача объединения базовых станций и управления питанием изучается для сотовых сетей как некооперативная игра в [179]. Авторы показывают, что их алгоритм распределенной ассоциации и обновления мощности сходится к равновесию по Нэшу. Концепция теории игр также использовалась для выбора базовых станций в когнитивных радиосетях (CRN). Некооперативная игра моделируется для решения проблемы совместного выбора точки доступа и распределения мощности в многоканальной CRN с несколькими точками доступа [114]. В [106] авторы изучили кооперативную игру в гетерогенной CRN, где пользователи беспроводной сети стремятся максимизировать свою собственную пропускную способность, руководствуясь информацией, передаваемой сетью о загрузке каждой системы. В [13] исследуется кооперативная игра передачи данных в беспроводной сети, на основе марковской модели с системой штрафов и вознаграждений. Perlaza и др. сравнили самонастраивающиеся и централизованные методы выбора базовой станции [165]. Также в [180] сделан обзор по применению теории игр для моделирования сетей ad-hoc. В [141] моделируется игра, учитывающая не только количество пользователей, подключенных к базовой станции, но и их местоположение, влияющее на уровни сигналов и помех. В [16] рассматривается аналогичная модель, где игроки распределены на отрезке с некоторой плотностью.

Современные средства передачи информации, такие как Интернет и мобильная связь, привели к созданию рынка нового типа, в котором участие принимают виртуальные агенты, распределенные в пространстве. Облачные или виртуальные операторы [54, 188] предлагают разнообразные услуги на основе собственных, а также арендуемых у крупных компаний платформ и интерфейсов, что позволяет виртуальным операторам исключить капиталовложения, необходимые для построения и поддержания собственной инфраструктуры большой мощности. При этом репутация компаний и виртуальных операторов зависит от качества предоставляемых услуг, что в итоге влияет на распределение клиентов [101]. В таких условиях становятся актуальными задачи оптимальной органи-

зации и использования ресурсной базы рынка. К таким относятся определение оптимального числа и мощности узлов, составляющих платформу облачных сервисов [59], оптимизация схемы распределения заданий и потоков данных между сервисами с учетом требований на ресурсы [58, 115, 128, 148]. В ряде работ [28, 55, 58, 59, 128, 148, 149, 166, 184, 187] решается задача балансировки распределения ресурсов между частным и общедоступным секторами гибридного облачного сервиса [166], с учетом критериев масштабируемости, адаптивности и надежности [28], а также соответствия требованиям производительности [58, 59, 128, 166], экономичности [55, 148, 184, 187] и экологичности [149]. Модели [167, 171] также предполагают использование брокеров для управления рынком. В последнее время теория игр приобрела популярность и в контексте облачных вычислений, где поставщики услуг стремятся максимизировать прибыль, а пользователи – минимизировать расходы [39, 102], достигая в итоге равновесия по Нэшу. В работах [168, 186] кроме прибыли и расходов также учитывается наличие соглашения об уровне услуг (Service Level Agreement, SLA). Рассматриваются также модели, где несколько облачных операторов предлагают один ресурс, конкурируя по производительности и стоимости [162]. В [6] исследуется сходимость динамики наилучших ответов игроков [1, 47, 88] в двухшаговой игре, где на первом шаге виртуальные операторы выбирают партнеров-владельцев инфраструктурных ресурсов, а на втором объявляют цены на свои услуги. Аналогичный механизм взаимодействия рассмотрен в [14], где на первом шаге игроки формируют сеть, а на втором выбирают стратегии с учетом структуры сети. Прибыль виртуальные операторы получают в результате продажи услуг пользователям, которые выбирают виртуальных операторов в соответствии с личными предпочтениями. Здесь возможен подход, основанный на принципе Вардропа, когда пользователи минимизируют свои затраты [122, 146]. Другой подход основывается на распределении пользователей в виде логистической функции [144]. В [6] предполагается, что распределение пользователей по сервисам происходит согласно идее Хотеллинга [40], когда пользователи сравнивают полезности от использования той или иной фирмы.

Другой класс задач данного направления составляют задачи маршрутизации

трафика, где пользователи, действуя в собственных интересах, самостоятельно выбирают свои маршруты, стремясь минимизировать задержку своего пересылаемого трафика. Здесь рассматриваются две базовые модели: КР-модель (Koutsoupias, Papadimitriou) [43, 45, 89, 90, 95, 132, 137, 138, 143] с неделимым трафиком и модель Вардропа (Wardrop model) с произвольно разделяемым трафиком [25, 71, 72, 90, 98, 133, 185, 194]. В КР-модели, основанной на равновесии по Нэшу, каждый пользователь определяет маршрут для отправки всего своего трафика. Другой интерпретацией КР-модели являются задачи балансировки загрузки [21, 38, 44, 82] и покрытия [20, 61, 81, 181, 189], где набор задач распределяется по вычислительным узлам. Для модели КР в базовой постановке доказано существование равновесия по Нэшу чистых стратегиях [83, 94]. В модели Вардропа определяется количество трафика, посылаемого по каждому из маршрутов. Равновесие транспортных потоков и социальный оптимум стали концепциями решения, которые широко используются в теории транспортных систем [75, 133, 178, 194]. В основе данной концепции лежит гипотеза Вардропа [185], что время движения на всех существующих маршрутах одинаково для всех участников дорожного движения и меньше, чем время любого пользователя на любом из неиспользуемых им маршрутах. Таким образом, мы полагаем, что все пользователи рациональны. Другой тип поведения пользователей был исследован в работе [123]. Здесь часть пользователей предполагалась иррациональными (oblivious): в то время, как рациональные пользователи минимизировали индивидуальные затраты, эти пользователи использовали только определенный маршрут. Для сети из параллельных путей были получены точные выражения оценки для цены анархии. Для многих постановок задач на основе модели Вардропа существование равновесий [24, 98, 147, 151] оказывается связанным с наличием потенциальной функции [154, 172], минимум которой существует и соответствует равновесию. В работах, посвященных решению задач маршрутизации при задаваемом виде функций задержки трафика (например, линейных [20, 21, 43, 61, 81, 82, 98, 143, 175, 181, 189], квадратичных [137], полиномиальных [43, 77, 95], произвольных выпуклых [96]), исследуется основной вопрос: насколько отказ от централизованного управления ухудшает систему,



то есть насколько равновесные затраты всей системы в целом больше затрат в ситуации глобального оптимума, и находятся точные выражения и оценки для значения цены анархии в моделях с различными характеристиками. Авторы [132] показали, что в модели Вардропа с линейными функциями задержки и параллельными каналами связи цена анархии ограничена сверху  $4/3$ , а в [175] справедливость данной оценки была установлена для сети произвольной топологии с линейными задержками. В [174] получена оценка для цены анархии в случае, когда задержки имеют вид полиномиальных функций, которые принадлежат классу BPR-функций (Bureau of Public Roads) [183], которые широко используются в приложениях.

Во многих моделях, связанных с оптимизацией работы сети, отдельного изучения требует вопрос возможного ухудшения качества работы сети при физическом наращивании мощности отдельных ее компонент. Этот вопрос в литературе получил название парадокса Браесса [160]. В частности, в задачах маршрутизации при добавлении нового канала могут увеличиться пользовательские затраты при отправке трафика [48, 130, 175]. Ряд работ [130, 131] направлен на нахождение характеристик добавляемого канала, таких чтобы гарантированно избежать возникновения парадокса Браесса. В работах [107, 140, 173] исследуется вопрос проявления и обнаружения данного парадокса в равновесных ситуациях в рамках модели Вардропа.

Согласование социальных и индивидуальных затрат важно рассматривать с учетом внешних факторов, так называемых экстерналий [46, 52, 116, 135], которые обычно не включаются в рассмотрение транспортных проблем. К внешним факторам относятся расписание движения скорость и вместимость транспортных единиц, качество обслуживания, комфорт пассажиров и др. Управление экстерналиями также может обеспечить центру возможность координации равновесий для приближения равновесий к социальному оптимуму с целью улучшения значения цены анархии. Работа [116] является одной из первых, где было введено понятие экстерналий как внешних эффектов, создаваемых соседними игроками в сети. При таком подходе предполагается, что агенты в сети действуют как рациональные лица, принимающие решения, действия которых яв-

ляются результатом решения оптимизационных задач, а профиль действий всех агентов в сети представляет собой игровое равновесие. Предполагается, что на решение каждого агента влияет поведение его соседей по сети. В моделях маршрутизации трафика в сетях вводятся экстерналии различного вида. Ряд работ связан с введением пошлин/налогов для улучшения работы системы. В работах [27, 73, 74, 91, 92, 124] эгоистичное поведение разнородных пользователей в сети можно регулировать с помощью экономических дестимулирующих мер, т.е. путем введения соответствующего налогообложения. Цель состоит в том, чтобы ввести налоги / сборы на ребрах так, чтобы любое равновесие трафика, достигнутое эгоистичными пользователями, которые учитывают как задержки в пути, так и налоги, сводило к минимуму затраты системы, т.е. общую задержку. Коул и др. в [73] показывают, что это происходит для одной пары источник-приемник. Флейшер и др. [92] и Каракостас и Коллиопулос [124] обобщают этот результат для однородных пользователей сети с несколькими парами “источник-приемник”. Они доказывают, что в дискретной модели можно найти выплаты, обеспечивающие оптимум как решение пары линейных задач. Если в этих работах налоги были включены в модель для приведения потоков к социальному оптимуму в том смысле, что они минимизируют общую задержку всех пользователей, то в [74] налоги включены в затраты системы. Для случая одной пары пунктов “источник-приемник” находится соотношение между затратами системы в моделях с налогами и без них. Другой тип экстерналий – ценообразование. В этом случае в затраты пользователей включается не только время в пути, а также цена на сервис, например цена на билеты [146]. В работе [139] было показано, что в этом случае цена анархии может быть бесконечно большой. Экстерналии также могут рассматриваться как ограничения для допустимых путей пользователей. В [117] найден оптимум системы с ограничениями, в котором ни один путь, несущий положительный поток между определенной парой пунктов источник-приемник, не может превышать длину кратчайшего пути между той же парой более, чем на допустимый коэффициент. Таким образом получаются решения, которые являются справедливыми и эффективными одновременно.

В работах [27, 78, 113, 134] рассматриваются игры маршрутизации с положительными, связанными с разделением затрат (cost-sharing) и отрицательными перегрузочными (congestion) экстерналиями. В [152] показывается, что перегрузочные экстерналии могут быть причиной неэффективности по Парето равновесий, в том числе вызывать возникновение парадокса Браесса [51, 175]. В [142] учитываются экстерналии смешанного типа, включающие отрицательные и положительные компоненты и влияющие на возникновение и характеристики парадокса Браесса в сети. В работе [100] в модели пассажирских перевозок в качестве экстерналий рассмотрены характеристики обслуживающих компаний и предложена оптимизация их выбора.

Экстерналии можно интерпретировать как элементы централизованного управления, которые могут быть включены, например, в правила дорожного движения (знаки ограничения скорости, регулируемые светофоры), политику ценообразования на общественный транспорт, топливо и т. д. Экстерналии можно рассматривать как механизм координации для повышения производительности в системах с независимыми эгоистичными агентами. В [68] было предложено изменить вид функций задержки, чтобы привести затраты системы в равновесии к социальному оптимуму. В работах [66, 135] используется новый подход, при котором функция задержки зависит не только от потоков на этом ребре, но и от потоков на других ребрах. Эти экстерналии вводятся в функции задержки игроков как инструмент влияния системы на равновесное распределение потоков трафика, а также на значения цены анархии.

**Объектом исследования** диссертационной работы являются системы с сетевой структурой, моделирующие распределение ресурсов телекоммуникационных, транспортных и информационных систем между пользователями. **Предметом исследования** являются методы нахождения равновесных и оптимальных решений в таких системах, их сравнения, а также методы социализации равновесных решений.

### **Цель работы**

Цель диссертационной работы заключается в построении и исследовании математических моделей поведения игроков в сетевых играх разделения сов-

местно используемых ресурсов, задач оценки и повышения производительности сетевых систем с помощью методов некооперативной теории игр, а также разработке механизмов управления поведением эгоистичных игроков для оптимизации их поведения. В основе исследуемых моделей лежит построение и оценка схемы распределения ресурсов сетей между пользователями в условиях, когда пользователи действуют самостоятельно в собственных интересах по отношению к используемым ресурсам рабочего времени обслуживающих узлов сети и пропускной способности каналов связи.

### **Основные задачи**

Одним из направлений данной работы является построение и исследование моделей обращения пользователей к системам обслуживания с различными характеристиками, которые принимают запросы на заданном интервале времени. Первая из исследуемых моделей – это выбор моментов обращения к системе обслуживания со случайным доступом. Для 2-серверной системы обслуживания с потерями исследуются модели с рационально случайным доступом и чисто случайным доступом. Каждая из них рассматривается для двух случаев: когда число игроков фиксировано и когда оно является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона. Вторая модель – это выбор моментов обращения к системе обслуживания с вытеснением, которая также рассматривается для случаев известного и случайного числа игроков. Третья модель строится для системы обслуживания с повторными вызовами для случаев двух и трех игроков. Для игр такого вида ставится задача построения и исследования свойств симметричного равновесия в виде вероятностного распределения моментов обращения пользователя к системе обслуживания на интервале времени, когда система принимает запросы. Также для первых двух моделей ставится задача оценки значения цены анархии.

Следующая из задач, исследуемых в данной работе – одномерная задача выбора базовой станции. Данная задача формулируется как игра, в которой игроки являются мобильными пользователями, которые выбирают базовые радиостанции для подключения к беспроводной сети. Стратегии в игре – это номера станций или вероятности, которые игроки используют для выбора базовых

вых станций. Каждый эгоистичный пользователь выбирает станцию, пытаясь максимизировать свое отношение «сигнал к интерференции + шум» (SINR или просто SNR), которое зависит от расстояния между игроком и станцией, а также числа подключений к станции. В этой модели сигнал обратно пропорционален квадрату расстояния до выбранной базовой станции, а интерференция+шум – сумма всех сигналов на станции и некоторый постоянный уровень шума. Наша цель – найти равновесие Нэша для случаев данной модели, где пользователи знают, либо не знают местоположение друг друга.

Также в работе исследуется теоретико-игровая модель поведения конкурирующих виртуальных операторов на двухстороннем рынке телекоммуникаций, представляемая как повторяющаяся двухшаговая игра следующего вида. На первом шаге игроки, виртуальные операторы, владельцы облачных сервисов, распределяются по крупным компаниям, собственникам ресурсов связи, вычислительных и т.п., и после этого объявляют цены на свои услуги. Пользователи выбирают тот или иной сервис, следуя своим личным предпочтениям и распределяются по сервисам, сравнивая полезности от использования той или иной фирмы. Для данной модели ставится задача построения и исследования равновесий и стационарных решений для различных постановок вариантов рынка, в которых предпочтения пользователей касаются самих облачных фирм, а также владельцев ресурсов.

Следующее направление данной работы включает исследование задач оптимальной маршрутизации. В рамках КР-модели передачи данных с параллельными каналами и неделимым трафиком строятся и исследуются равновесия по Нэшу: в чистых стратегиях и полностью смешанные. Для них находятся затраты системы и анализируются случаи ухудшения такого равновесия при добавлении в систему нового канала.

Также в диссертационной работе ставятся задачи аналитического нахождения оценок и значений цены анархии для моделей балансировки загрузки и покрытия вычислительных узлов, которые наследуются от КР-модели. Более подробно анализируются случаи трех игроков и условия изменения цены анархии при добавлении в систему нового вычислительного узла. Также ставится

задача разработки методики численного нахождения точного значения цены анархии.

Для моделей балансировки загрузки и покрытия вычислительных узлов изучается возможность введения экстерналий линейного вида в функции задержки, для случая двух вычислительных узлов решается задача аналитического нахождения цены анархии. Также анализируется вопрос, как введение в модель экстерналий влияет на наличие в модели равновесий по Нэшу в чистых стратегиях и на значение цены анархии. Также ставится задача обобщения методики вычисления точного значения цены анархии для случая произвольных линейных функций задержки.

В работе также исследуется задача маршрутизации на основе модели Вардропа с параллельными каналами. Изучаются свойства равновесий и цены анархии для моделей с функциями задержки вида  $\frac{\delta}{c-\delta}$  и  $1 - e^{-\alpha\delta}$ . Строится также байесовская модель Вардропа с параллельными каналами, в которой игроки управляют по каналам трафик разных типов, зная при этом тип только своего трафика. Для данной модели исследуется вопрос существования равновесий.

Для модели Вардропа с параллельными каналами и VPR-функциями задержки с линейными экстерналиями формулируется задача нахождения оптимально-равновесного профиля и соответствующих значений экстерналий в условиях, когда на задержку только одного из каналов влияют потоки на всех остальных каналах. Также исследуется возможность разработки процедуры социализации равновесного поведения участников транспортного потока путем задания определенных значений экстерналий и изучается влияние применения процедуры социализации на значение затрат системы.

### **Научная новизна**

В диссертационной работе построена модель игры выбора моментов обращения к 2-серверной системе обслуживания со случайным доступом в двух постановках: рационально случайный и чисто случайный доступ, каждая из которых исследована для случая известного и случайного числа игроков, имеющего распределение Пуассона. Для всех рассмотренных вариантов игры доказано существование единственного симметричного равновесия, такого что с

некоторой положительной вероятностью пользователи обращаются к системе в нулевой момент времени, и далее существует интервал времени  $[t_e, T]$ , на котором определена положительная плотность распределения моментов обращения в систему. Для случая двух игроков в системе с чисто случайным доступом равновесие найдено аналитически и показано, что равновесное распределение на интервале  $[t_e, T]$  имеет экспоненциальный вид. Для обеих постановок предложены алгоритмы для численного нахождения равновесий. Проведены численные эксперименты по сравнению равновесий при различных значениях параметров модели. Также предложено сравнение конкурентного и кооперативного поведения в системе обслуживания, основанное на применении цены анархии для фиксированного и случайного количества игроков.

Построена теоретико-игровая модель односерверной системы массового обслуживания с вытесняющим доступом для случаев, когда количество игроков фиксировано и является случайной величиной с Пуассоновским законом распределения. Для обоих случаев доказано, что существует единственное симметричное равновесие со следующими свойствами. Ненулевая функция плотности моментов поступления в систему определяется на временном интервале  $[0, t_e]$ . На интервале времени  $[t_e, T]$  поступлений нет. В момент  $T$  игроки отправляют свои запросы в систему с некоторой положительной вероятностью  $p$ . Был проведен ряд численных экспериментов для сравнения равновесия при различных значениях параметров модели. Также предложено сравнение конкурентного и кооперативного поведения в системе обслуживания, основанное на применении цены анархии для фиксированного и случайного количества игроков.

Построена теоретико-игровая модель односерверной системы массового обслуживания с повторными вызовами. Для случая двух и трех игроков доказано, что оптимальная стратегия такова, что игрок обращается к системе с ненулевой вероятностью в начальный момент времени, далее присутствует пауза в поступлениях в систему, далее существует интервал времени  $[t_e, T]$ , на котором определена положительная плотность распределения моментов обращения в систему. Предложен алгоритмы для численного нахождения равновесий и проведены численные эксперименты по нахождению равновесий для различных

параметров системы.

Построена и исследована теоретико-игровая одномерная модель выбора базовой станции, учитывающая не только количество пользователей, подключенных к станции, но также расстояния каждого пользователя до станций и уровень шума. Для случая двух игроков найдены равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях в биматричных играх с известным и с неизвестным местонахождением оппонента, а также области существования равновесий. Для произвольного числа игроков предложена КР-подобная модель игры с полной информацией, когда известно расположение всех игроков. Проведены численные эксперименты по сравнению эффективности стратегии выбора ближайшей станции с равновесными в играх двух игроков с известным и неизвестным местонахождением оппонента для случаев низкого и высокого уровней шума.

Построена и исследована двухшаговая игра, моделирующая поведение двух облачных операторов на рынке телекоммуникационных услуг. Получены равновесные и стационарные решения для данной игры. Найдены оптимальные стратегии операторов на первом и втором шаге и показаны условия существования равновесия в чистых стратегиях на первом шаге. Для случаев, когда предпочтения клиентов ориентированы на компании или операторов, показано, что при повторении игры система приходит в стационарное состояние не более чем за 3 повторения. Кроме того, показано, что в игре более двух операторов в случае, когда предпочтения клиентов ориентированы на компании, система также приходит в стационарное состояние не более чем за 3 повторения.

В КР-модели задачи оптимальной маршрутизации трафика в сети для случая одинаковых каналов найдены линейные и квадратичные затраты системы в полностью смешанном равновесии. В этой же модели для случаев различных каналов найдены линейные и квадратичные затраты системы в полностью смешанном равновесии, а также условия ухудшения такого равновесия при добавлении в систему нового канала.

В игре баланса загрузки с  $N$  вычислительными узлами и  $n$  игроками получена оценка верхней границы цены анархии. Найдены условия, при которых она является точной оценкой цены анархии. Найдены условия возрастания цены



анархии при добавлении в систему нового узла. Для системы трех узлов получена верхняя оценка цены анархии, которая является точной при достаточно высокой скорости обслуживания на одном из узлов. Также найдены условия возрастания цены анархии при добавлении в систему двух узлов третьего узла. На примере системы трех узлов разработана методика вычисления точного значения цены анархии, которая может быть обобщена на системы с большим количеством машин. Разработана программная реализация алгоритма вычисления точного значения цены анархии, с помощью которой проведены численные эксперименты сравнения полученных оценок цены анархии с ее точным значением, показывающие корректность полученных оценок.

Для игры баланса загрузки с линейными экстерналиями определены предположения, обеспечивающие адекватное поведение системы. Показано, что в общем случае даже при сделанных предположениях чистое равновесие по Нэшу может не существовать. Для случая двух вычислительных узлов в данной модели доказано существование чистого равновесия по Нэшу и получено аналитическое выражение цены анархии.

В игре покрытия вычислительных узлов для системы обслуживания с  $N$  узлами и  $n$  игроками получена нижняя граница цены анархии. Для модели с тремя узлами найдено точное значение цены анархии и доказано, что цена анархии не меняется или растет при добавлении нового узла в систему двух вычислительных узлов. Также разработана методика вычисления точного значения цены анархии на примере трех узлов, которая может быть обобщена на системы с большим количеством узлов. Разработана программная реализация алгоритма вычисления точного значения цены анархии, с помощью которой проведены численные эксперименты сравнения полученных оценок цены анархии с ее точным значением, показывающие корректность полученных оценок. Для случая четырех узлов в системе вычислительные эксперименты показывают частичное совпадение цены анархии для трех и четырех узлов в системе.

В игре покрытия вычислительных узлов с линейными экстерналиями для случая двух вычислительных узлов получено аналитическое выражение цены анархии. Показано, также, что в отличие от модели без экстерналий, в которой

цена анархии не ограничена, когда скорость самого быстрого узла не менее 2, в модели с экстерналиями цена анархии имеет конечное значение.

Предложен численный метод нахождения точного значения цены анархии для игр балансировки загрузки и покрытия вычислительных узлов с линейными функциями задержки, который может быть обобщен на систему с большим, числом вычислительных узлов. Предложенный алгоритм реализован программно и проведены вычислительные эксперименты для случая игры балансировки загрузки с экстерналиями с двумя узлами, в которой всегда есть равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

На основе модели Вардропа с параллельными каналами построены две игры с функциями задержки вида  $\frac{\delta}{c-\delta}$  и  $1 - e^{-\alpha\delta}$ . Для первой игры доказана глобальная оптимальность равновесных по Вардропу ситуаций и для случая общедоступных каналов найдено равновесие. Для второй игры найдено равновесие и верхняя граница цены анархии и показано, что она не может превышать 1.3.

Построена байесовская модель Вардропа с параллельными каналами, в которой игроки отправляют по каналам трафик разных типов, зная при этом тип только своего трафика. Для данной модели определены два вида равновесия: равновесие по Вардропу, которое, как здесь показано, всегда существует и может быть найдено с использованием потенциала, и его частный случай – байесовское равновесие по Вардропу.

В работе также изучена модель Вардропа с разделяемым трафиком применительно к транспортной системе с параллельными каналами и BPR-функциями задержки с линейными экстерналиями. Предложено два возможных сценария применения экстерналий для систем двух, трех и  $n$  каналов. В первом случае находится оптимально-равновесный профиль и соответствующие значения экстерналий в условиях, когда на задержку только одного из каналов влияют потоки на всех остальных каналах. Для данного случая найден явный вид решения и условия его допустимости. Вторым сценарий представляет собой процедуру социализации равновесного поведения участников транспортного потока. Для него найдены значения экстерналий, обеспечивающих оптимальность

равновесного поведения участников потока, а также доказано, что применение процедуры социализации не меняет значение затрат системы.

### **Методы исследования**

В диссертационной работе используются методы некооперативной теории игр (построение игр в стратегической форме, построение равновесий по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях, построение равновесий по Вардропу, процедуры последовательных улучшений), математического анализа, оптимизации (теорема Каруша-Куна-Таккера), теории вероятностей, случайных процессов и массового обслуживания (распределения случайных величин, марковские процессы, системы Колмогорова), случайных порядков, линейной алгебры (системы линейных уравнений и неравенств), теории дифференциальных уравнений (задача Коши, разностные схемы решения).

### **Теоретическая и практическая значимости**

Полученные в диссертационной работе теоретические результаты относятся к области некооперативных сетевых игр. Теоретическая значимость диссертации заключается в построении теоретико-игровых моделей в рамках теории некооперативных сетевых игр и определении в них равновесий, а также в разработке механизмов управления поведением эгоистичных игроков для оптимизации их поведения.

Практическая ценность работы определяется областью применения исследуемых прикладных моделей: при математическом моделировании систем массового обслуживания, распределенных вычислений, систем связи, мобильных сетей, при решении задач оптимальной маршрутизации в телекоммуникационных и транспортных сетях, а также экономических моделей рынка.

Исследования, проведенные в рамках диссертационной работы, были поддержаны следующими грантами:

РФФИ N 13-01-00033\_а “Равновесие по Нэшу в несимметричных динамических моделях управления биоресурсами”;

РГНФ N 15-02-00352\_а “Конкурентные системы массового обслуживания”;

РФФИ N 16-51-55006 Китай\_а “Конкурентные транспортные системы: теория и приложения”;

РНФ N 22-11-20015 “Разработка и исследование математических моделей и программ нахождения равновесия транспортных потоков и оптимизации транспортной сети на примере Петрозаводска” проводимого совместно с органами власти Республики Карелия с финансированием из Фонда венчурных инвестиций Республики Карелия (ФВИ РК).

Также результаты диссертационной работы были получены в рамках выполнения исследований по проектам “Задачи оптимального распределения ресурсов и защиты информации в высокопроизводительных вычислительных системах и сетях”, “Структурное исследование и анализ данных в информационных сетях на основе теории вероятностей, теории игр и методов дискретной математики с использованием технологии параллельного программирования для высокопроизводительных систем” и “Задачи оптимальной маршрутизации трафика, распределения и защиты информационных ресурсов” по программе фундаментальных исследований ОМН РАН “Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения.”

Результаты диссертационной работы могут быть использованы в учебном процессе в курсах по теории игр и исследованию операций для аспирантов и студентов специальностей “Прикладная математика и информатика” и “Экономическая кибернетика”.

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обусловлена строгостью математических доказательств.

### **Краткое описание работы**

Диссертация состоит из введения, 14 глав и заключения, включает 352 страницы, 15 таблиц и 50 рисунков. Список литературы содержит 194 наименования.

Первые три главы диссертационной работы посвящены решению задач выбора оптимального момента обращения к системам обслуживания с различными характеристиками. В первой главе исследуется система обслуживания с двумя серверами и случайным доступом. Вторая глава посвящена модели с выбором моментов обращения к системе обслуживания с вытеснением, в третьей главе строится и исследуется модель системы обслуживания с повторными вызовами. В четвертой главе решается одномерная задача выбора базовой станции.

Пятая глава посвящена теоретико-игровой модели поведения конкурирующих виртуальных операторов на двухстороннем рынке телекоммуникаций. В шестой главе представлены результаты анализа КР-модели передачи данных с неделимым трафиком. Седьмая глава посвящена анализу цены анархии в задаче балансировки загрузки, а в восьмой главе в функции задержек в данной модели вводятся экстерналии линейного вида. Девятая и десятая глава посвящены анализу цены анархии в задаче покрытия вычислительных узлов без и с экстерналиями, соответственно. В одиннадцатой главе делается обобщение методики численного нахождения цены анархии на задачи балансировки загрузки и покрытия вычислительных узлов с линейными задержками. Двенадцатая глава посвящена оптимальной маршрутизации на основе модели Вардропа с разделяемым трафиком и параллельными каналами, а в тринадцатой главе строится байесовский вариант модели Вардропа с параллельными каналами. В последней главе изучается оптимизация равновесного поведения в транспортной модели Вардропа с экстерналиями. В каждой главе используется своя, независимая от других глав, система обозначений. Заключение содержит краткое описание полученных результатов.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Нахождение равновесия по Нэшу в игре выбора моментов обращения к 2-серверной системе обслуживания со случайным доступом в двух постановках: рационально случайный и чисто случайный доступ, каждая из которых исследована для случая известного и случайного числа игроков, имеющего распределение Пуассона. Единственность равновесия и его свойства. Результаты численного моделирования.
2. Нахождение равновесия по Нэшу в игре выбора моментов обращения к односерверной системе массового обслуживания с вытесняющим доступом для случаев, когда количество игроков фиксировано и является случайной величиной с Пуассоновским законом распределения. Единственность равновесия и его свойства. Результаты численного моделирования.
3. Нахождение равновесия по Нэшу в игре выбора моментов обращения к

односерверной системе массового обслуживания с повторными вызовами. Свойства равновесия и результаты численного моделирования.

4. Нахождение равновесий по Нэшу для одномерной игры выбора базовой станции для двух игроков с известным и неизвестным нахождением оппонента. КР-подобная модель игры с полной информацией для произвольного числа игроков.
5. Построение равновесий в двухшаговых играх облачных операторов на рынке телекоммуникационных услуг. Сходимость игр к стационарному состоянию не более чем за три повторения.
6. Явные выражения оценок и точных значений цены анархии в игре баланса загрузки вычислительных узлов. Условия возрастания цены анархии при добавлении третьего узла в систему двух узлов. Игра баланса загрузки с линейными экстерналиями. Существование чистого равновесия по Нэшу для случая двух вычислительных узлов. Явное выражение цены анархии для случая двух узлов.
7. Явные выражения оценок и точных значений цены анархии в игре покрытия вычислительных узлов. Возрастание цены анархии при добавлении третьего узла в систему двух узлов. Результаты численного моделирования цены анархии для трех и четырех узлов в системе. Игра покрытия с линейными экстерналиями. Явное выражение цены анархии для случая двух узлов в игре покрытия вычислительных узлов с линейными экстерналиями. Ограниченность цены анархии в модели с линейными экстерналиями в отличие от модели без экстерналий.
8. Численный метод нахождения точного значения цены анархии для игр балансировки загрузки и покрытия вычислительных узлов с линейными функциями задержки.
9. Глобальная оптимальность равновесных по Вардропу ситуаций в игре на основе модели Вардропа с параллельными каналами с функциями задержки вида  $\frac{\delta}{c-\delta}$ . Верхняя граница цены анархии в игре на основе модели Вар-

дропа с параллельными каналами с функциями задержки вида  $1 - e^{-\alpha\delta}$ .  
Байесовская модель Вардропа с параллельными каналами, равновесия в данной модели. Существование равновесия по Вардропу.

10. Нахождение оптимально-равновесного профиля и соответствующих значений экстерналий в транспортной модели Вардропа с линейными экстерналиями. Процедура социализации равновесного поведения участников транспортного потока с сохранением значения затрат системы.

### **Апробация результатов**

Основные результаты диссертационной работы докладывались на Международных конференциях «Теория игр и менеджмент» (Санкт-Петербург, 2009, 2010, 2011, 2012, 2017, 2021);

Международном рабочем совещании «Задачи оптимальной остановки и стохастического управления» (Петрозаводск, 2005);

семинаре российско-финской школы аспирантов «Динамические игры и многокритериальная оптимизация» (Петрозаводск, 2006);

Международных семинарах «Сетевые игры и менеджмент» (Петрозаводск, 2009, 2012, 2015);

V Московской международной конференции по исследованию операций (ORM2007);

13-м международном симпозиуме по динамическим играм и приложениям (Вроцлав, 2008);

Семинаре Kosen MTE2008 - Математика, технологии и образование (Ибараки, Япония, 2008);

IX международной петрозаводской конференции «Вероятностные методы в дискретной математике» (Петрозаводск, 2016);

XXXVI международном семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей (Петрозаводск, 2020);

Международных конференциях «Математическая теория оптимизации и исследование операций» (Иркутск, 2021 и Петрозаводск, 2022).

## Публикации

Автором опубликовано 39 научных работ, из них 23 научные работы по теме диссертационного исследования. Основные результаты диссертации опубликованы в 19 работах:

в 3 статьях [22, 24, 25] в рецензируемых научных изданиях из Перечня российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук: Математическая Теория Игр и ее Приложения, Управление большими системами, Системы управления и информационные технологии;

в 11 статьях [6, 17, 18, 19, 20, 21, 62, 63, 64, 65, 66] в периодических изданиях, индексируемых в международных реферативных базах данных и системах цитирования Web of Science и Scopus: Mathematics, Lecture Notes in Computer Science, Optimization Letters, Contributions to Game Theory and Management, Communications in Computer and Information Science, Automation and Remote Control, Advances in Systems Science and Applications;

в 2 статьях в сборниках трудов международных конференций [71, 141], из которых [141] также проиндексирована в Scopus,

а также в статье [72] в рецензируемом научном журнале Game Theory and Applications; также результаты диссертации вошли в монографию [147] в соавторстве, индексируемую с Scopus, и учебное пособие [5] в соавторстве.

Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно. Достоверность результатов диссертации подтверждается получением положительных заключений от членов редакционных коллегий и программных комитетов вышеупомянутых научных изданий и мероприятий путем принятия соответствующих статей к опубликованию и включения докладов автора в программы мероприятий.

## Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность и глубокую признательность доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Викторовичу Мазалову за предложенную тему исследования, формирование научного интереса к



математической теории игр, многолетнее и плодотворное сотрудничество, внимание к работе и всестороннюю помощь. Также автор благодарит своих коллег в ИПМИ КарНЦ РАН, Санкт-Петербургском государственном университете и Университете Аалто за интересные дискуссии в ходе обсуждения результатов диссертации и совместную работу. Автор благодарит свою семью за терпеливое отношение к научной работе, помощь и поддержку в любых ситуациях.

## Глава 1

# Выбор момента обращения к системе обслуживания со случайным доступом

В данной главе рассматривается следующая система обслуживания  $M/m/0$ . На заданном временном интервале  $[0, T]$  в систему поступают запросы и принимаются на обслуживание при наличии свободных мест. В системе имеются обслуживающие серверы с идентичной функциональностью и, возможно, различной производительностью. Когда пользователь обращается к системе, он случайным образом перенаправляется на один из серверов, на котором запрос либо принимается на обслуживание, либо теряется.

В модели, рассматриваемой в данном разделе, предполагается, что запросы могут поступать в систему как друг за другом, так и приходиться несколько запросов одновременно. Такая ситуация может возникнуть, например, при высокой популярности обслуживаемого сервиса, возможно, в определенные моменты времени. На практике протоколы доступа к обслуживающим сервисам (например, интернет-сервисам) реализованы таким образом, что доступ пользователей в систему в любом случае происходит последовательно друг за другом. При одновременном поступлении двух и более запросов в систему из них формируется очередь, где порядковые номера в очереди они получают случайным образом равновероятно. За неимением в системе буфера, где запросы могли бы ожидать обслуживания, из них будут обслуживаться только первые в сформированной очереди по числу доступных серверов в системе, не занятых в данный момент. Поэтому можно считать, что при одновременном поступлении  $k$  запросов в систему с  $m$  доступными серверами вероятность успешного попадания на

обслуживание каждого равна  $\min\{1, \frac{m}{k}\}$ .

Примером организации такого случайного доступа в Интернет является использование циклического алгоритма (round robin) в DNS-системе для распределения нагрузки между несколькими серверами, которые предоставляют некоторый веб-сервис. В этом случае разные пользователи получают разные IP-адреса при обращении к домену. В простейшем случае IP-адреса выдаются по очереди (сначала первый, потом — второй и т.п.), в более общем каждый адрес выдается с определенной вероятностью. Кроме задач распределения нагрузки между веб-ресурсами, модели со случайным доступом могут найти приложение в задачах оптимизации облачных вычислений, работы колл-центров и т.п.

В данном разделе рассматриваются две модели перенаправления заявок на серверы. В первой модели, назовем ее моделью с чисто случайным доступом к серверам [19], система не имеет информации о состоянии серверов и заявка может быть перенаправлена на занятый сервер при имеющемся свободном. Так, на практике система DNS, выдающая клиенту очередной IP-адрес запрашиваемого домена, не имеет информации о его доступности. Во втором варианте модели доступ к серверам будет случайным только том в случае, когда оба сервера свободны. Назовем такой вариант доступа рационально случайным [18].

Для каждой из таких систем рассматривается некооперативная игра, в которой чистой стратегией игрока является момент времени обращения к системе обслуживания и смешанной — распределение моментов таких обращений. Выигрышем является вероятность, что его запрос получит обслуживание. В качестве критерия оптимальности используется симметричное равновесие по Нэшу в предположении, что все игроки действуют одинаково эгоистично.

Подобная модель  $M/1/0$  с одним сервером была исследована в [169]. Формально она является частным случаем модели с чисто случайным доступом к серверам, где вероятность перенаправления на один из серверов равна 1. Позже односерверная модель была расширена на несколько серверов одинаковой мощности [170]. Авторами были получены следующие качественные свойства симметричных равновесных по Нэшу решений в таких моделях:

- симметричное равновесие по Нэшу существует и единственно;

- в момент 0 существует строго положительная вероятность поступления запросов в систему;
- далее есть некоторый интервал времени  $(0, t_e)$ , в течение которого в систему запросы не приходят;
- далее на интервале времени  $[t_e, T]$  существует положительная плотность распределения моментов обращения в систему.

Модели, исследуемые ниже в данном разделе, являются вероятностными расширениями модели Равнера и Хавива с одним сервером [169]. Для них будет показано выполнение вышеприведенных свойств симметричных равновесий по Нэшу. Рассматриваются вероятностные модели на примере двухсерверных систем.

## § 1.1 Система обслуживания с двумя серверами

Рассмотрим систему массового обслуживания с двумя серверами, которая принимает запросы от пользователей на интервале времени  $[0, T]$ . Каждый из серверов системы способен обслуживать не более одного запроса одновременно. Времена обслуживания запросов – независимые и экспоненциально распределенные случайные величины с интенсивностями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  на первом и втором серверах соответственно.

Для данной модели рассматриваются два варианта схемы доступа: чисто случайный и рационально случайный. В первом случае при обращении пользователя к системе его запрос с вероятностью  $r$  направляется на первый сервер и с вероятностью  $\bar{r} = 1 - r$  на второй. Возможна ситуация, когда несколько пользователей обращаются в систему в одно и то же время. Тогда система может направить на один сервер больше одного запроса. Если он в данный момент занят, все поступившие в данный момент на него запросы теряются. Если же он свободен, то тот запрос, который получит обслуживание, выбирается из числа всех поступивших одновременно на данный сервер запросов равновероятным образом.

Рассмотрим второй вариант схемы доступа – рационально случайный. При обращении пользователя к системе в случае, если оба сервера свободны, его запрос с вероятностью  $r$  направляется на первый сервер и с вероятностью  $\bar{r} = 1 - r$  на второй. Если свободен только один из серверов, то заявка перенаправляется на него. Если оба сервера заняты, заявка получает отказ в обслуживании. В системе отсутствует какая-либо очередь, заявка, получившая отказ в обслуживании, теряется. Заметим, что при  $r \in \{0, 1\}$  рассматриваемая модель является системой обслуживания с приоритетами. Если несколько пользователей обращаются в систему в одно и то же время, то получают обслуживание столько из них, сколько серверов в данный момент свободны. Один или два запроса, получающие обслуживание, выбираются из числа всех поступивших одновременно запросов равновероятным образом.

Дисциплина поступления запросов в систему не задана. Она определяется пользователями системы, стремящимися максимизировать вероятность получения обслуживания для своих запросов.

Рассмотрим задачу определения оптимальной дисциплины поступления запросов в систему как некооперативную игру. Игроками являются пользователи системы, отправляющие запросы на обслуживание. Множество игроков обозначим  $\mathbb{N}$ . Каждый игрок выбирает момент времени для обращения к системе, стремясь максимизировать вероятность получения обслуживания для своего запроса. Чистой стратегией игрока  $i$  является выбранный им момент времени  $t_i$  обращения к системе. Смешанная стратегия игрока  $i$  – функция распределения  $F_i(t)$  моментов обращения к системе на интервале  $[0, T]$ . Профиль стратегий обозначим  $F = \{F_i(t), i \in \mathbb{N}\}$ . Выигрышем игрока в момент  $t$  является вероятность получения обслуживания при обращении к системе в момент  $t$ .

Все игроки одинаковы, независимы и действуют эгоистично, без кооперации, поэтому в качестве критерия оптимальности рассматривается симметричное равновесие по Нэшу. В этом случае все стратегии игроков одинаковы:  $F_i(t) = F(t)$  для всех  $i$ .

**Определение 1.1.** *Функция распределения  $F(t)$  моментов обращения к системе  $t$  является симметричным равновесием по Нэшу, если существует*

константа  $C$  такая, что в любой момент  $t \in [0, T]$  вероятность получения обслуживания не более  $C$  и равна  $C$  на носителе  $F(t)$ .

Для каждого из двух вариантов схем доступа к серверам рассматриваются два случая. В первом количество игроков фиксировано и известно каждому игроку. Во втором каждый игрок знает, что количество противников имеет распределение Пуассона с известным параметром.

Далее будут детально исследованы свойства равновесий для обоих вариантов схем доступа. Первой будет рассмотрена модель с рационально случайным доступом как более простая для анализа.

## § 1.2 Игра с рационально случайной схемой доступа

Рассмотрим некоторого игрока, который пытается обратиться к системе в момент  $t$ , зная, что остальные игроки обращаются в этот момент с вероятностью  $p$ . Обозначим  $X_p$  случайную величину противников данного игрока, которые обращаются в систему и могут помешать ему получить обслуживание в данный момент. Количество игроков может быть фиксировано, и тогда у каждого игрока  $N$  противников либо  $N$  является случайной величиной. Тогда для каждого значения случайной или фиксированной  $N$  случайная величина  $X_p = X_{N,p}$  имеет распределение  $Bin(N, p)$ . Для удобства обозначения мы опускаем индекс  $N$ , указывая в контексте, является число игроков фиксированным или случайным.

Если  $p$  – вероятность обращения в систему в нулевой момент времени, когда система изначально свободна, то вероятность получения обслуживания в этот момент равна

$$C(p) = E \left( \min \left\{ 1, \frac{2}{X_p + 1} \right\} \right). \quad (1.2.1)$$

В случае, если  $N$  фиксирована, данная вероятность равна

$$P(X_p < 2) + \sum_{i=2}^n \left( \frac{2}{i+1} P(X_p = i) \right),$$

и для случайной  $N$  равна

$$P(X_p < 2) + \sum_{n=2}^{\infty} P(N = n) \sum_{i=2}^N \left( \frac{2}{i+1} P(X_p = i) \right).$$

Пусть некоторое время после нулевого момента на интервале  $(0, t)$  нет поступлений. Тогда вероятность получить обслуживание в момент  $t > 0$  равна

$$1 - P(X_p \geq 2)e^{-(\mu_1 + \mu_2)t} = P(X_p < 2) + P(X_p \geq 2)(1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}).$$

Заметим, что данная вероятность возрастает по  $t$ .

Пусть теперь игрок отправляет в систему запрос в момент  $0+$ , бесконечно близкий к моменту  $0$ , но сразу после него такой, что каждый из поступивших в нулевой момент запросов либо начал обслуживаться, либо покинул систему, но ни один новый запрос не поступил в систему и ни один не завершил свое обслуживание. Эта вероятность равна

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \left( P(X_p < 2) + P(X_p \geq 2)(1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}) \right) = P(X_p < 2),$$

что меньше, чем  $C(p)$ . Это означает, что лучше обратиться в систему в нулевой момент времени, чем сразу после него. Тогда получаем следующую лемму.

**Лемма 1.1.** *В игре с рационально случайным доступом к серверам выигрыш игрока в нулевой момент времени строго больше, чем выигрыш в момент  $0+$ , бесконечно близкий к нулевому моменту, сразу после него. Выигрыш игрока в момент  $t$  возрастает по времени  $t$ , если на интервале  $(0, t)$  нет обращений в систему.*

**Лемма 1.2.** *В игре с рационально случайным доступом к серверам носитель стратегии в равновесии содержит атом в точке  $t = 0$ , то есть равновесная вероятность  $p_e = F(0)$  обращения в начальный нулевой момент времени строго положительна. Далее имеется интервал времени  $(0, t_e)$ , на котором нет обращений к системе.*

*Доказательство.* Положительность вероятности обращения в систему в нулевой момент времени обусловлена тем, что если бы никто не обращался в систему в этот момент, то при обращении к системе в нулевой момент времени любой отклонившийся от равновесия игрок получал бы обслуживание с вероятностью 1.

Лемма 1.1 показывает, что некоторое время после нулевого момента выигрыш игрока, возрастая по времени, остается меньше, чем в нулевой момент,

даже если известно, что в это время никто не обращается в систему. Этим объясняется наличие интервала времени без обращений после нулевого момента времени. На этом интервале значение выигрыша возрастает до уровня равновесного в момент  $t_e$ , до которого обращений в систему нет.  $\square$

Таким образом, в носителе равновесной стратегии существует область разрыва  $(0, t_e)$ . Эта область возникает по причине того, что в нулевой момент времени, когда система изначально свободна, возможно поступление в систему нескольких обращений одновременно и вероятность выиграть в розыгрыше мест обслуживания в этот момент выше, чем вероятность получить обслуживание сразу после него, когда система с достаточно большой вероятностью оказывается занята.

Предположим теперь, что равновесная вероятность обращения игрока к системе в нулевой момент времени известна и равна  $0 < p_e \leq 1$ . Вероятность получить обслуживание в момент  $t > 0$ , такой что на интервале  $(0, t)$  нет поступлений запросов в систему, возрастает по  $t$  и стремится к 1. В момент  $t = 0+$  вероятность получения обслуживания меньше, чем в нулевой момент. Поэтому существует момент  $t_e$  (возможно, после момента  $T$ ), где данные вероятности равны. Тогда решение уравнения

$$E \left( \min \left\{ 1, \frac{2}{X_{p_e} + 1} \right\} \right) = 1 - P(X_{p_e} \geq 2) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e} \quad (1.2.2)$$

дает момент  $t_e > 0$  для данной вероятности обращения игрока в нулевой момент времени. При этом после нулевого момента и до момента  $t_e$  обращений в систему нет.

Для доказательства следующей леммы будем использовать аппарат теории стохастических порядков [177]. Приведем формулировки определений из данного источника в терминах нашего случая, а также теоремы, являющиеся следствиями теорем из того же источника, описывающих более общий случай, на которые мы будем ссылаться в данном доказательстве. При этом, как и в данном источнике, под возрастанием будем иметь в виду неубывание. Иначе, будем писать “строгое возрастание”. Кроме того, будем использовать следующее обозначение из данного источника.  $[Z|A]$  обозначает случайную величину, имею-



щую в качестве своего распределения условное распределение величины  $Z$  при условии  $A$ .

**Определение 1.2.** *Случайная величина  $X_p$  стохастически возрастает по  $r$  согласно обычному стохастическому порядку тогда и только тогда, когда вероятность  $P(X_p \geq i)$  возрастает по  $r$  для всех ее возможных значений  $i \in (-\infty, +\infty)$ .*

**Определение 1.3.** *Случайная величина  $X_p$  стохастически возрастает по  $r$  согласно порядку отношения правдоподобия тогда и только тогда, когда  $\frac{P(X_p=i)}{P(X_q=i)}$  возрастает по  $i \in (-\infty, +\infty)$  для любых  $0 \leq p \leq q \leq 1$ .*

**Теорема 1.1.** *Из теоремы 1.С.1 [177]. Если случайная величина  $X_p$  стохастически возрастает согласно порядку отношения правдоподобия, то она стохастически возрастает согласно обычному стохастическому порядку.*

**Теорема 1.2.** *Из теоремы 1.С.6 [177]. Если случайная величина  $X_p$  стохастически возрастает согласно порядку отношения правдоподобия, то случайная величина  $[X_p | X_p \geq i]$  также стохастически возрастает согласно порядку отношения правдоподобия.*

**Теорема 1.3.** *Из теоремы 1.С.8 [177]. Если случайная величина  $X_p$  стохастически возрастает согласно порядку отношения правдоподобия, а  $\psi$  – любая возрастающая функция, то случайная величина  $\psi(X_p)$  также стохастически возрастает согласно порядку отношения правдоподобия.*

**Теорема 1.4.** *Из теоремы 1.С.9 [177]. Если случайные величины  $X_{n,p}$  для всех  $n = 1, 2, \dots$  стохастически возрастают по  $r$  согласно порядку отношения правдоподобия, а их плотности распределения обладают свойством логарифмической вогнутости, то случайная величина  $\sum_n X_{n,p}$  также стохастически возрастает по  $r$  согласно порядку отношения правдоподобия.*

**Лемма 1.3.** *Для любых вещественных  $0 < p_e \leq 1$  и  $\mu_1, \mu_2 > 0$  уравнение (1.2.2) определяет функцию  $t_e(p_e)$ , строго убывающую по  $p_e$ .*

*Доказательство.* Преобразуем уравнение (1.2.2) следующим образом:

$$\frac{1 - E\left(\min\left\{1, \frac{2}{X_{p_e}+1}\right\}\right)}{P(X_{p_e} \geq 2)} = e^{-(\mu_1+\mu_2)t_e},$$

$$\frac{E\left(\max\left\{0, \frac{X_{p_e}-1}{X_{p_e}+1}\right\}\right)}{P(X_{p_e} \geq 2)} = e^{-(\mu_1+\mu_2)t_e}$$

и далее получим

$$E\left(\frac{X_{p_e}-1}{X_{p_e}+1} \mid X_{p_e} \geq 2\right) = e^{-(\mu_1+\mu_2)t_e}. \quad (1.2.3)$$

Правая часть уравнения (1.2.3) не зависит от  $p_e$  и строго убывает по  $t_e$ . Левая часть зависит только от  $p_e$ , нужно показать, что она возрастает по  $p_e$ .

Пусть сначала величина  $N$  фиксирована. Проверим, что для любых вещественных  $0 \leq q < p \leq 1$  отношение  $\frac{P(X_p=i)}{P(X_q=i)}$  возрастает относительно натурального индекса  $i$ . Отношение  $\frac{P(X_p=k+1)}{P(X_p=k)} = \frac{N-k}{k+1} \left(\frac{1}{1-p} - 1\right)$  возрастает по  $p$ . Тогда справедливо  $\frac{P(X_q=k+1)}{P(X_q=k)} < \frac{P(X_p=k+1)}{P(X_p=k)}$  и  $\frac{P(X_p=k)}{P(X_q=k)} < \frac{P(X_p=k+1)}{P(X_q=k+1)}$ . Это означает по определению 1.3, что случайная величина  $X_{p_e}$  стохастически возрастает по  $p_e$  согласно порядку отношения правдоподобия.

Пусть теперь  $N$  случайна. По теореме 1.4, случайная величина  $\sum_{n=1}^{\infty} P(N=n)X_{n,p_e}$  также стохастически возрастает по  $p_e$  согласно порядку отношения правдоподобия, где  $X_{n,p_e}$  обозначает  $X_{p_e}$  для каждого фиксированного значения  $N=n$ , так как плотность биномиального распределения обладает свойством логарифмической вогнутости [120]. Тогда случайная величина  $X_{p_e}$  стохастически возрастает по  $p_e$  согласно порядку отношения правдоподобия для случайной  $N$ .

По теореме 1.2 случайная величина  $[X_{p_e} \mid X_{p_e} \geq 2]$  также стохастически возрастает по  $p_e$  согласно порядку отношения правдоподобия. Тогда по теореме 1.3 и случайная величина  $\left[\frac{X_{p_e}-1}{X_{p_e}+1} \mid X_{p_e} \geq 2\right]$  стохастически возрастает по  $p_e$  согласно порядку отношения правдоподобия.

По теореме 1.1 из стохастического возрастания случайной величины согласно порядку отношения правдоподобия следует ее возрастание согласно обычному стохастическому порядку и, следовательно, возрастание ее математического ожидания. Таким образом,  $E\left(\frac{X_{p_e}-1}{X_{p_e}+1} \mid X_{p_e} \geq 2\right)$  возрастает по  $p_e$ .  $\square$

**Следствие 1.1.** *Значение математического ожидания  $E\left(\frac{1}{X_{p_e}+1}\right)$  убывает по  $p_e$ .*

*Доказательство.* Из доказательства леммы 1.3 имеем, что случайная величина

$\frac{1}{X_{p_e+1}}$  стохастически убывает по  $p_e$  согласно обычному стохастическому порядку как убывающая функция от случайной величины, стохастически возрастающей по  $p_e$ . Тогда ее математическое ожидание также убывает по  $p_e$ .  $\square$

В соответствии с леммой 1.3, чем больше вероятность  $p_e$  обращения к системе в нулевой момент, тем раньше момент  $t_e$ , когда возобновляются поступления запросов в систему после интервала без поступления запросов, начавшегося сразу за нулевым моментом. Заметим, что значение  $t_e$  для данного  $p_e$  может получиться больше, чем  $T$ . В этом случае необходимо увеличивать значение  $p_e$ . Если же  $t_e(1) \geq T$ , тогда равновесной является чистая стратегия, согласно которой все запросы приходят в систему в нулевой момент времени с вероятностью 1. Далее в данном разделе будем предполагать, что  $t_e(1) < T$ .

**Лемма 1.4.** *Если  $t_e < T$ , то с момента  $t_e$  до конца  $T$  существует строго положительная плотность распределения моментов обращения к системе  $f(t) > 0$ . Данный интервал не содержит атомов и разрывов.*

*Доказательство.* Рассмотрим интервал  $[t_e, T]$ , на котором возобновляются обращения в систему. Покажем, что равновесная плотность распределения моментов обращения в систему на всем интервале строго положительна. Пусть, наоборот, на интервале  $[t_e, T]$  существует некоторая область  $(s_1, s_2)$ , на которой обращений в систему нет. Пусть  $p_{ij}(t)$  – вероятность состояния  $(i, j)$  системы в момент  $t$ , где  $i, j \in \{0, 1\}$  обозначают состояния занятости (0 – свободен, 1 – занят) первого и второго серверов соответственно. Тогда вероятность получения обслуживания в момент  $s_1$  равна

$$p_{00}(s_1) + p_{01}(s_1) + p_{10}(s_1).$$

С учетом того, что на  $(s_1, s_2)$  нет поступлений, выигрыш в момент  $s_2$  равен

$$\begin{aligned} p_{00}(s_2) + p_{01}(s_2) + p_{10}(s_2) = & p_{00}(s_1) + \\ & + p_{10}(s_1)(1 - e^{-\mu_1(s_2-s_1)}) + p_{01}(s_1)(1 - e^{-\mu_2(s_2-s_1)}) + \\ & + p_{11}(s_1)(1 - e^{-\mu_1(s_2-s_1)})(1 - e^{-\mu_2(s_2-s_1)}) + \\ & + p_{01}(s_1) + p_{11}(s_1)(1 - e^{-\mu_1(s_2-s_1)}) + \\ & + p_{10}(s_1) + p_{11}(s_1)(1 - e^{-\mu_2(s_2-s_1)}), \end{aligned}$$

что больше выигрыша в момент  $s_1$ . Следовательно, в равновесии таких разрывов в носителе стратегии после момента  $t_e$  не может быть.

Покажем, что после момента  $t_e$  носитель стратегии не содержит атомов. Пусть такой атом есть в точке  $t \in [t_e, T]$  и вероятность обращения игрока в момент  $t$  строго положительна и равна  $p$ . Пусть момент  $s = t-$  перед моментом  $t$  и бесконечно близкий к нему, такой что вероятности ухода обслуженных и поступления новых заявок между этими моментами равны нулю. Рассмотрим некоторого игрока, который пытается обратиться в систему в момент  $t$ , зная, что остальные обращаются в этот же момент с вероятностью  $p$ . Пусть случайная величина  $X_p$  обозначает число его противников, обратившихся в систему в момент времени  $t$ . Так как вероятность  $p$  строго положительна, то и математическое ожидание  $X_p$  должно быть положительно. Тогда вероятность получения обслуживания в момент времени  $t$  равна

$$\begin{aligned} p_{00}(t)E\left(\min\left\{1, \frac{2}{X_p+1}\right\}\right) + (p_{01}(t) + p_{10}(t))E\left(\frac{1}{X_p+1}\right) = \\ = p_{00}(s)E\left(\min\left\{1, \frac{2}{X_p+1}\right\}\right) + (p_{01}(s) + p_{10}(s))E\left(\frac{1}{X_p+1}\right), \end{aligned}$$

что меньше выигрыша в момент  $s$ , равного

$$p_{00}(s) + p_{01}(s) + p_{10}(s).$$

То есть в случае, если в распределении обращений в систему после момента  $t_e$  есть атом, всегда лучше обратиться в систему непосредственно до него. В отличие от нулевого момента времени, когда система изначально свободна и игроку нужно только выиграть розыгрыш мест для получения обслуживания, здесь серверы могут быть уже заняты, и розыгрыш мест на обслуживание дополнительно снижает вероятность получения обслуживания.  $\square$

### § 1.2.1 Фиксированное число игроков

Обозначим  $N + 1$  количество игроков, которые отправляют запросы в систему. У каждого из них  $N$  противников, которые могут помешать ему получить обслуживание своего запроса. Полагаем  $N > 1$ , так как иначе обслуживание будет получено всеми игроками при обращении в любой момент времени. Пусть с вероятностью  $p_e$  каждый из  $N$  противников обращается к системе в момент времени  $t = 0$ . Случайная величина  $X_{p_e}$  – число игроков, обратившихся к серверу в

нулевой момент времени, ее распределение  $Bin(N, p_e)$ . В начальный момент оба сервера свободны, поэтому обслуживание получают два запроса, если  $X_{p_e} \geq 2$ , либо один. Тогда вероятность получения обслуживания в нулевой момент времени равна, согласно (1.2.1):

$$\begin{aligned}
C(p_e) &= \\
&= (1 - p_e)^N + C_N^1 p_e (1 - p_e)^{N-1} + \sum_{i=2}^N C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \frac{2}{i+1} = \\
&= (1 - p_e)^N + \sum_{i=1}^N C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \frac{2}{i+1} = \\
&= (1 - p_e)^N + 2 \frac{1 - (1 - p_e)^{N+1}}{p_e(N+1)} - 2(1 - p_e)^N = \\
&= 2 \frac{1 - (1 - p_e)^{N+1}}{p_e(N+1)} - (1 - p_e)^N.
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Найдем вероятность получения обслуживания в момент  $t_e > 0$  при условии, что вероятности обращений к системе на интервале  $(0, t_e)$  равны нулю. Эта вероятность равна

$$\begin{aligned}
1 - P(X_{p_e} \geq 2) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e} &= \\
&= 1 - (1 - P(X_{p_e} = 0) - P(X_{p_e} = 1)) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e} = \\
&= 1 - (1 - (1 - p_e)^N - N p_e (1 - p_e)^{N-1}) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e}.
\end{aligned}$$

Тогда уравнение (1.2.2) для случая фиксированного числа игроков имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{2(1 - (1 - p_e)^{N+1})}{p_e(N+1)} - (1 - p_e)^N &= \\
&= 1 - (1 - (1 - p_e)^N - N p_e (1 - p_e)^{N-1}) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e}. \tag{1.2.5}
\end{aligned}$$

Согласно лемме 1.3, если  $t_e(1) \geq T$ , то равновесной является чистая стратегия – обращение в систему в момент  $t = 0$  с вероятностью 1. Иначе на интервале  $[t_e, T]$  существует строго положительная плотность распределения моментов обращения в систему. Далее будем считать, что  $t_e(1) < T$ .

Необходимо найти равновесную плотность  $f(t)$  распределения моментов обращения к системе на интервале  $[t_e, T]$ . Определим марковский процесс с состояниями системы  $(i, j, k)$  в каждый момент времени  $t \in [t_e, T]$ , где  $i, j \in \{0, 1\}$  – состояния занятости первого и второго сервера соответственно (0 – свободен, 1 – занят),  $k \in \{0, \dots, N\}$  – число игроков, обратившихся в систему до момента  $t$ .

Данный процесс неоднороден по времени, так как интенсивность поступлений запросов в систему скачком уменьшается с каждым обращением очередного игрока в систему и равна  $\lambda_k(t) = (N - k) \frac{f(t)}{1 - F(t)}$ . Система Колмогорова для вероятностей состояний системы  $p_{ijk}$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
p'_{000}(t) &= -\lambda_0(t)p_{000}(t); \\
p'_{101}(t) &= r\lambda_0(t)p_{000}(t) - (\lambda_1(t) + \mu_1)p_{101}(t); \\
p'_{011}(t) &= \bar{r}\lambda_0(t)p_{000}(t) - (\lambda_1(t) + \mu_2)p_{011}(t); \\
p'_{00i}(t) &= -\lambda_i(t)p_{00i}(t) + \mu_1p_{10i}(t) + \mu_2p_{01i}(t); \\
p'_{10i}(t) &= r\lambda_{i-1}(t)p_{00i-1}(t) - (\lambda_i(t) + \mu_1)p_{10i}(t) + \mu_2p_{11i}(t); \\
p'_{01i}(t) &= \bar{r}\lambda_{i-1}(t)p_{00i-1}(t) - (\lambda_i(t) + \mu_2)p_{01i}(t) + \mu_1p_{11i}(t); \\
p'_{11i}(t) &= \lambda_{i-1}(t)(p_{01i-1}(t) + p_{10i-1}(t) + p_{11i-1}(t)) - \\
&\quad - (\lambda_i(t) + \mu_1 + \mu_2)p_{11i}(t), \\
&\quad i = 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Вероятность получить обслуживание в момент  $t \in [t_e, T]$  в равновесии постоянна для всех  $t \in [t_e, T]$ :

$$\sum_{i=0}^N p_{00i}(t) + \sum_{i=1}^N p_{01i}(t) + \sum_{i=1}^N p_{10i}(t) = 1 - \sum_{i=2}^N p_{11i}(t) = C(p_e).$$

Тогда сумма соответствующих производных должна быть равна нулю. Отсюда, подставив в суммы производные вероятностей состояний из системы Колмогорова (1.2.6), получаем дифференциальное уравнение для определения равновесной плотности:

$$\frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(1 - C(p_e))}{\sum_{i=0}^{N-1} (N - i)(p_{01i}(t) + p_{10i}(t))} \tag{1.2.7}$$

для  $t \in [t_e, T]$ .

Носитель равновесного распределения моментов обращений в систему находится на интервале  $[0, T]$ , поэтому должно выполняться  $F(T) = 1$ . Это создает неопределенность в уравнении (1.2.7) в точке  $t = T$ , принадлежащей интервалу, на котором обращения в систему определяются положительной плотностью распределения. Преобразуем уравнение (1.2.7) для получения равновесного распределения, чтобы исключить из него множитель  $1 - F(t)$ .

Обозначим  $T_i$  моменты обращений игроков  $i \in \{1, \dots, N\}$ , независимые и одинаково распределенные согласно функции  $F$ . Пусть  $A(t)$  – число обращений в систему до момента  $t$  и  $B_N(t) \in \{0, 1, 2\}$  – количество занятых серверов в момент  $t$ .

Знаменатель правой части в уравнении (1.2.7) можно преобразовать как

$$\begin{aligned} & N \sum_{i=0}^N (p_{01i}(t) + p_{10i}(t)) - \sum_{i=0}^N i(p_{01i}(t) + p_{10i}(t)) = \\ & = NP(B_N(t) = 1) - E(A(t)\mathbb{1}_{B_N(t)=1}). \end{aligned}$$

Преобразуем вычитаемое

$$\begin{aligned} \phi(t) &= E(A(t)\mathbb{1}_{B_N(t)=1}) = E \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{B_N(t)=1, T_i \leq t} = \\ &= E \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{B_N(t)=1, T_1 \leq t} = NE \mathbb{1}_{B_N(t)=1, T_1 \leq t} = \\ &= NP(B_N(t) = 1, T_1 \leq t). \end{aligned}$$

При  $t \rightarrow T$  вероятность  $P(B_N(t) = 1, T_1 \leq t)$  стремится к  $P(B_N(t) = 1)$  и знаменатель стремится к нулю, что создает неопределенность для плотности в уравнении (1.2.7). Далее, предполагая, что  $t < T$ , получим выражение для плотности и доопределим значение плотности в точке  $T$  как предел.

$$\phi(t) = N(P(B_N(t) = 1) - P(B_N(t) = 1, T_1 > t)).$$

Тогда знаменатель правой части в уравнении (1.2.7) равен

$$\begin{aligned} NP(B_N(t) = 0, T_1 > t) &= NP(B_N(t) = 0 | T_1 > t)(1 - F(t)) = \\ &= NP(B_{N-1}(t) = 0)(1 - F(t)), \end{aligned}$$

где  $B_{N-1}(t)$  – число занятых серверов в момент  $t$  в модели с числом игроков, меньшим на 1, где моменты обращений  $N - 1$  игроков независимые и одинаково распределенные согласно той же функции  $F$ . Заметим, что для этой модели интенсивности поступлений обращений в систему  $\lambda_i(t)$  остаются теми же, что и для  $N$  игроков, с точностью до постоянных множителей  $\frac{N-1}{N}$ , определяемых числом игроков, так как распределение остается неизменным, однако вероятности состояний здесь свои.

Тогда для  $t \in [t_e, T)$  плотность распределения моментов обращения в систему можно представить выражением, не зависящим от  $1 - F(t)$ :

$$f(t) = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(1 - C(p_e))}{NP(B_{N-1}(t) = 1)}. \quad (1.2.8)$$

Правая часть данного выражения определена для  $t = T$ , и тогда по непрерывности можно доопределить плотность в точке  $t = T$ :

$$f(T) = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(1 - C(p_e))}{NP(B_{N-1}(T) = 1)}.$$

То есть выражение (1.2.8) определяет плотность распределения обращений в систему на всем интервале  $[t_e, T]$ .

Данное выражение позволяет, преобразовав систему (1.2.6), исключить из нее неизвестную функцию плотности  $f(t)$  и получить систему дифференциальных уравнений относительно вероятностей состояний.

Определим для системы начальные условия – вероятности состояний в момент  $t_e$ , при условии, что на  $(0, t_e)$  нет поступлений.

$$\begin{aligned} p_{00i}(t_e) &= C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \\ &[\mathbb{1}_{i=0} + \mathbb{1}_{i=1}(r(1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}(1 - e^{-\mu_2 t_e})) + \\ &+ \mathbb{1}_{i>1}(1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})], \\ &i = 0, \dots, N, \\ p_{10i}(t_e) &= C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \\ &[\mathbb{1}_{i=1} r e^{-\mu_1 t_e} + \mathbb{1}_{i>1} e^{-\mu_1 t_e} (1 - e^{-\mu_2 t_e})], \\ &i = 1, \dots, N, \\ p_{01i}(t_e) &= C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \\ &[\mathbb{1}_{i=1} \bar{r} e^{-\mu_2 t_e} + \mathbb{1}_{i>1} (1 - e^{-\mu_1 t_e}) e^{-\mu_2 t_e}], \\ &i = 1, \dots, N, \\ p_{11i}(t_e) &= C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \mathbb{1}_{i>1} e^{-\mu_1 t_e} e^{-\mu_2 t_e}, \\ &i = 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Таким образом, имеется задача Коши с системой дифференциальных уравнений (1.2.6) и начальными условиями (1.2.9). Ее решение дает вероятности состояний  $p_{ijk}(t)$ , зависящие от параметра  $p_e$ . С известными вероятностями состояний выражение (1.2.8) определяет равновесную плотность распределения



моментов обращения  $f(t)$  на интервале  $[t_e, T]$ , также зависящую от параметра  $p_e$ . Необходимо, чтобы положительная плотность распределения моментов обращения заканчивалась точно в момент  $T$ , поэтому значение параметра  $p_e$  выбирается так, чтобы

$$p_e + \int_{t_e}^T f(t)dt = 1. \quad (1.2.10)$$

В итоге вышеизложенного анализа получаем следующую теорему.

**Теорема 1.5.** *Любое симметричное равновесное по Нэшу распределение моментов обращения к системе обслуживания с двумя серверами со случайным доступом и потерями с функцией распределения  $F(t)$  на интервале  $[0, T]$  обладает следующими свойствами:*

1. *Существует строго положительная вероятность обращения в нулевой момент времени  $p_e = F(0) > 0$ .*
2. *На интервале  $(0, t_e)$  игроки обращаются в систему с нулевой вероятностью, где*

$$t_e = \left( \ln \frac{1 - (1 - p_e)^N - Np_e(1 - p_e)^{N-1}}{1 - \frac{2(1 - (1 - p_e)^{N+1})}{p_e(N+1)} + (1 - p_e)^N} \right) / (\mu_1 + \mu_2).$$

3. *Если для  $p_e = 1$  решение уравнения (1.2.5) дает  $t_e > T$ , то равновесная стратегия – чистая стратегия, когда все игроки обращаются в систему в нулевой момент времени.*
4. *Иначе,  $p_e < 1$  и на интервале  $[t_e, T]$  существует непрерывная положительная плотность распределения моментов обращения в систему  $f(t)$ , определяемая выражением (1.2.8).*
5. *Равновесная вероятность обращения в нулевой момент времени находится из уравнения (1.2.10).*
6.  *$C(p_e) = 2 \frac{1 - (1 - p_e)^{N+1}}{p_e(N+1)} - (1 - p_e)^N$  – вероятность получить обслуживание на всем носителе стратегии.*

**Лемма 1.5.** *Функция распределения  $F(t)$ , являющаяся решением (1.2.5) и (1.2.7) для заданного значения начального условия  $F(0) = p$ , возрастает по значению  $p$  в любой точке интервала  $[0, T]$ .*

*Доказательство.* Пусть заданы две вероятности обращений в нулевой момент времени  $0 < p < q \leq 1$ , определяющие начальные условия для получения двух соответствующих функций распределения  $F_p(t)$  и  $F_q(t)$ , являющихся решениями (1.2.5) и (1.2.7). Соответствующие вероятности обслуживания  $C(p)$  и  $C(q)$  постоянны на всем носителе распределения. По следствию 1.1 функция  $C(\cdot)$  убывающая. Тогда вероятность потери для  $p$  должна быть меньше, чем для  $q$ , на всем носителе распределения.

По лемме 1.3 для соответствующих начал интервалов, на которых возобновляются обращения в систему, справедливо  $t_q = t(q) < t_p = t(p)$ . То есть функция  $F_q(t)$  начинает возрастать от значения  $q$  в момент, когда  $F_p(t)$  еще остается константой  $p < q$ . Для  $t \in [0, t_p]$  утверждение леммы справедливо, так как здесь  $F_p(t) = p < q \leq F_q(t)$ .

Пусть есть некоторый момент  $s > t_p$  такой, что  $F_p(t) < F_q(t)$  для  $t < s$ , и  $F_p(s) = F_q(s)$ . Тогда  $f_p(s) > f_q(s)$ , так как обе функции неубывающие по  $t$ , в точке  $s$  функция  $F_p(t)$  должна пересечь  $F_q(t)$  снизу вверх и, следовательно, угол наклона  $F_p(t)$  больше угла наклона  $F_q(t)$ . Тогда  $\frac{f_p(s)}{1-F_p(s)} > \frac{f_q(s)}{1-F_q(s)}$ , что означает, что интенсивность обращений в момент  $s$  больше для вероятности обращений в начальный момент  $p$ , чем для  $q$ , при том, что интенсивности обслуживания в обоих случаях одинаковы. Тогда вероятность потери в момент  $s$  для  $p$  должна быть больше, чем для  $q$ , что противоречит тому, что на всем носителе распределения вероятность потери для  $p$  должна быть меньше, чем для  $q$ .  $\square$

**Теорема 1.6.** *Симметричное равновесное распределение поступлений  $F$ , определенное в теореме 1.5, существует и единственно.*

*Доказательство.* Единственность равновесия следует из леммы 1.5. Условие равновесия (1.2.10) представляет собой уравнение, левая часть которого монотонно возрастает по  $p_e$ . При  $p_e$ , близких к нулю, она равна вероятности обращения на интервале  $[t_e, T]$ , которая не превышает 1. При  $p_e = 1$  значение

левой части не меньше 1. Поэтому существует единственное решение  $p_e$ , которому соответствует единственное значение  $t_e$  и плотность распределения  $f(t)$  на  $[t_e, T]$ .  $\square$

### Численные примеры

Для нахождения равновесий в рассматриваемой задаче при  $N > 1$  используется численный алгоритм, являющийся комбинацией методов дихотомии решения уравнений с одним неизвестным и метода Эйлера решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Сначала проверяется, что  $t_e(1) < T$ , иначе равновесной является чистая стратегия, когда все игроки обращаются в систему в нулевой момент времени. Далее выбирается некоторое начальное значение  $p_e$ , для него находится  $t_e$  как решение уравнения (1.2.5). В точке  $t_e$  вычисляются начальные значения для систем (1.2.6) для  $N$  и  $N - 1$  игроков, а также  $f(t_e)$ . Для каждой следующей точки разбиения отрезка  $[t_e, T]$  строится решение обеих систем по методу Эйлера:  $p_{ijk}(t + \delta) \approx p_{ijk}(t) + \delta p'_{ijk}(t)$ , используя соотношение (1.2.7) для вычисления  $\lambda_i(t) = \frac{(N-i)f(t)}{1-F(t)}$ , и по формуле (1.2.8) находится очередное  $f(t)$ . Затем вычисляется  $F(T)$  и сравнивается с 1. Если получено равенство (с точностью до некоторого  $\epsilon$ , близкого к нулю), алгоритм завершает работу. Если это значение больше 1, то  $p_e$  уменьшается, а если меньше, то увеличивается. Далее алгоритм повторяется для нового значения  $p_e$ .

В таблице 1.1 приведены результаты вычисления равновесий для конкретных значений параметров системы. Рассматривается временной интервал работы системы  $[0, 1]$ . В системе первый сервер значительно уступает в производительности второму:  $\mu_1 = 1, \mu_2 = 10$ . Сравниваются равновесия для различного числа игроков в случаях высокой ( $r = 0.1$ ) и низкой ( $r = 0.9$ ) вероятностей попадания запроса на быстрый сервер. На рисунках 1.1 и 1.2 приведены графики соответствующих равновесных плотностей распределения моментов обращения в систему. На примерах видно, что при увеличении числа игроков распределение моментов обращения в систему стремится к равномерному, причем одному и тому же для различных вероятностей попадания на быстрый сервер. В последних трех случаях для  $N = 100, 200, 300$  равновесная плотность распреде-

ления моментов обращения в систему примерно равна 0.84 на всем интервале  $[t_e, T]$ . Рисунок 1.3 показывает, как изменяется вид равновесных плотностей при изменении параметра  $r$  – вероятности, что обратившийся в систему игрок пренаправляется на первый сервер.

Таблица 1.1: Равновесные характеристики

	$r = 0.1$			$r = 0.9$		
$N$	$p_e$	$t_e$	$C(p_e)$	$p_e$	$t_e$	$C(p_e)$
2	0.236	0.999	0.981	0.397	0.099	0.947
5	0.275	0.085	0.836	0.319	0.082	0.794
10	0.255	0.067	0.632	0.267	0.065	0.613
100	0.169	0.011	0.117	0.169	0.011	0.117
200	0.161	0.006	0.061	0.162	0.006	0.061
300	0.159	0.004	0.042	0.159	0.004	0.042

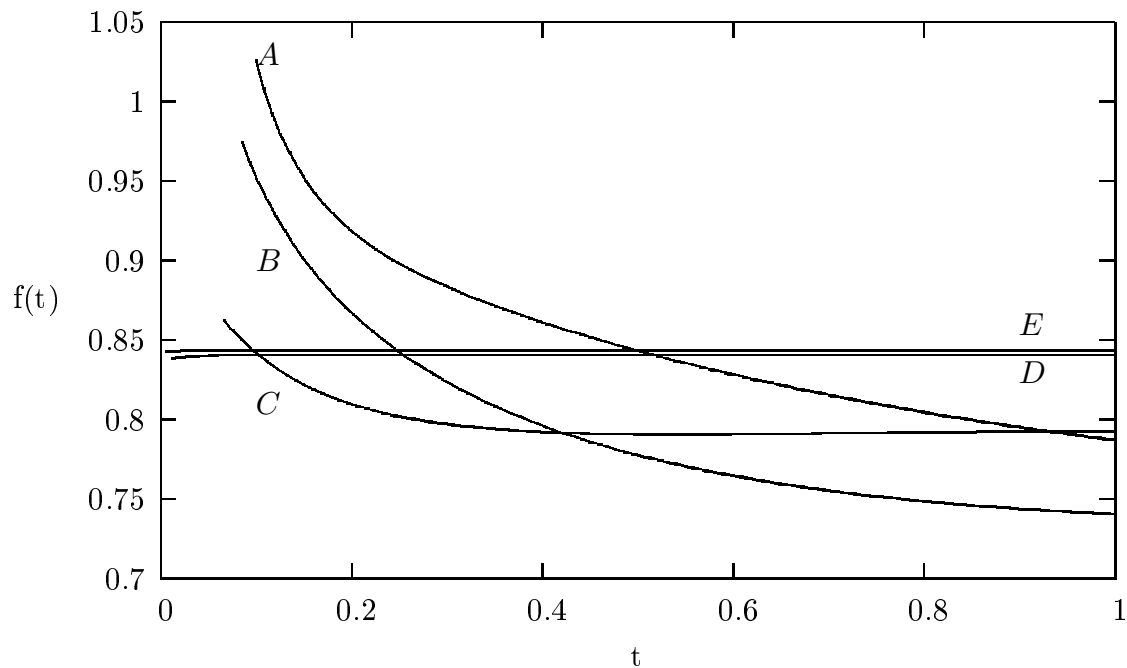


Рис. 1.1: Равновесные плотности  $f(t)$  при  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.1$ . График  $A$  для  $N = 2$ ,  $B$  для  $N = 5$ ,  $C$  для  $N = 10$ ,  $D$  для  $N = 100$ ,  $E$  для  $N = 200$

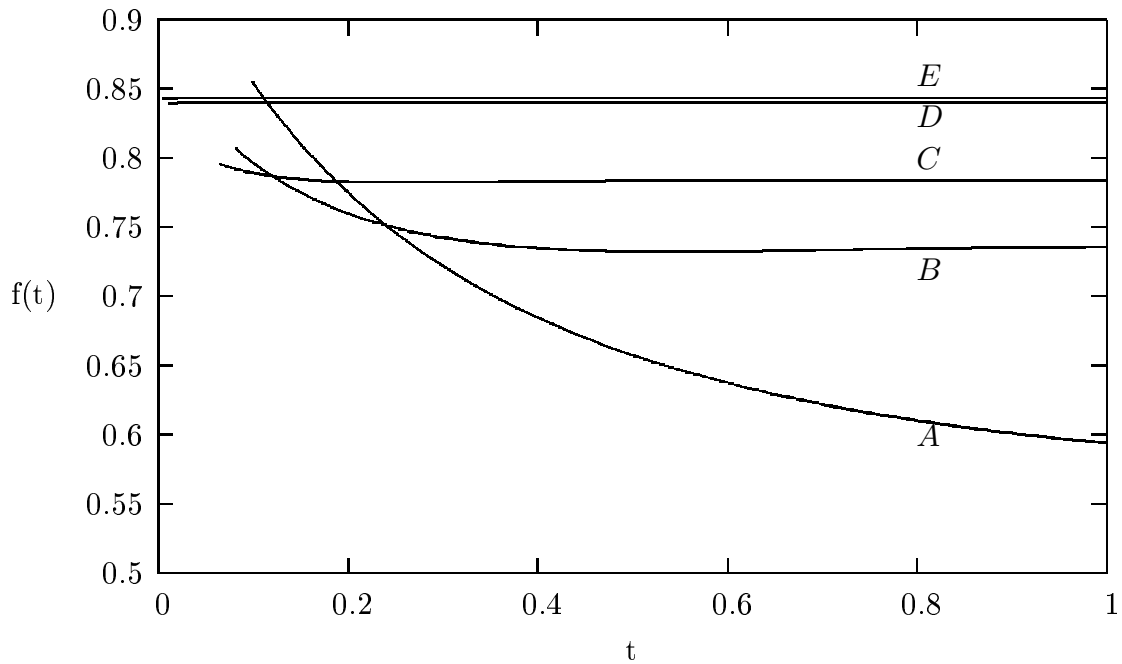


Рис. 1.2: Равновесные плотности  $f(t)$  при  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.9$ . График  $A$  для  $N = 2$ ,  $B$  для  $N = 5$ ,  $C$  для  $N = 10$ ,  $D$  для  $N = 100$ ,  $E$  для  $N = 200$

### § 1.2.2 Случайное число игроков

Пусть теперь ни одному игроку не известно число его противников  $N$ , известно только, что  $N$  – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром  $\lambda$ . Пусть с вероятностью  $p_e$  каждый из противников обращается к системе в момент времени  $t = 0$ . Случайная величина  $X_{p_e}$  – число игроков, обратившихся к серверу в нулевой момент времени. Заметим, что для каждого значения случайной величины  $N$  случайная величина  $X_{p_e}$  имеет биномиальное распределение  $Bin(N, p_e)$ . Тогда вероятность получения обслуживания в нулевой момент времени равна, согласно (1.2.1):

$$C(p) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \left( (1 - p_e)^N + C_N^1 p_e (1 - p_e)^{N-1} + \right. \\ \left. + \sum_{i=2}^N C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \frac{2}{i+1} \right).$$

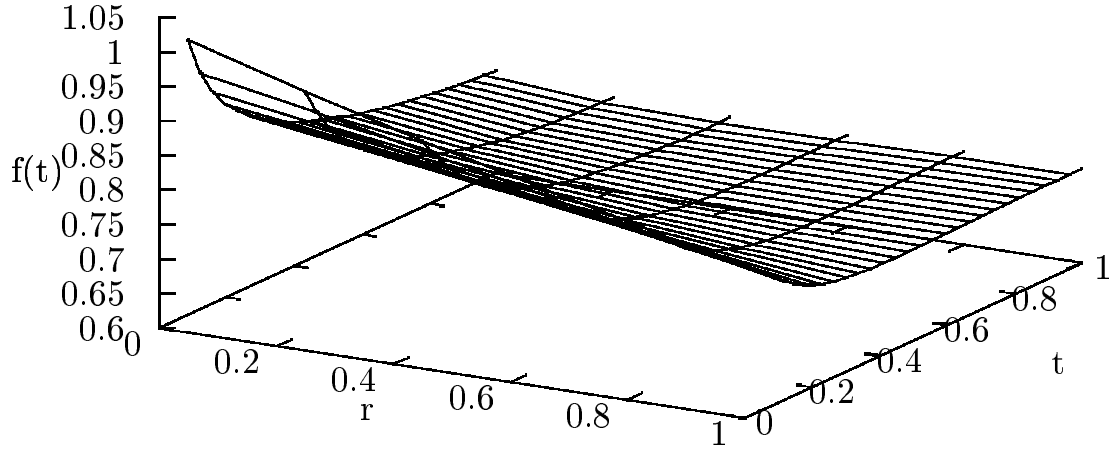


Рис. 1.3: Как изменение  $r$  изменяет вид стратегии при  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, N = 5$

Сумма в скобках в правой части данного выражения равна правой части (1.2.4), откуда получаем

$$\begin{aligned}
 C(p_e) &= e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \left( 2 \frac{1-(1-p_e)^{N+1}}{p_e^{N+1}} - (1-p_e)^N \right) = \\
 &= 2 \frac{e^{-\lambda}}{p_e \lambda} \left( \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^{N+1}}{(N+1)!} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^{N+1}(1-p_e)^{N+1}}{(N+1)!} \right) - e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p_e)} = \\
 &= 2 \frac{e^{-\lambda}}{p_e \lambda} (e^{\lambda} - e^{\lambda(1-p_e)}) - e^{-\lambda p_e} = 2 \frac{1-e^{-\lambda p_e}}{\lambda p_e} - e^{-\lambda p_e}.
 \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Найдем вероятность получения обслуживания в момент  $t_e > 0$  при условии, что вероятности обращений к системе на интервале  $(0, t_e)$  равны нулю. Эта вероятность равна

$$\begin{aligned}
 &1 - P(X_{p_e} \geq 2) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e} = \\
 &= 1 - (1 - P(X_{p_e} = 0) - P(X_{p_e} = 1)) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e} = \\
 &= 1 - (1 - e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} (1-p_e)^N - \\
 &\quad - e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} N p (1-p_e)^{N-1}) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e} = \\
 &= 1 - (1 - e^{-\lambda p_e} - \\
 &\quad - e^{-\lambda} \lambda p_e \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\lambda^{N-1}}{(N-1)!} (1-p)^{N-1}) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e} = \\
 &= 1 - (1 - e^{-\lambda p_e} - e^{-\lambda} \lambda p_e \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} (1-p_e)^N) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e} = \\
 &= 1 - (1 - e^{-\lambda p_e} - e^{-\lambda} \lambda p_e e^{\lambda(1-p_e)}) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e} = \\
 &= 1 - (1 - e^{-\lambda p_e} - \lambda p_e e^{-\lambda p_e}) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e}.
 \end{aligned}$$

Тогда уравнение (1.2.2) для случая пуассоновского числа игроков имеет вид

$$2 \frac{1 - e^{-\lambda p_e}}{\lambda p_e} - e^{-\lambda p_e} = 1 - (1 - e^{-\lambda p_e} - \lambda p_e e^{-\lambda p_e}) e^{-(\mu_1 + \mu_2) t_e}. \quad (1.2.12)$$

Если  $t_e(1) \geq T$ , то равновесной является чистая стратегия – обращение в систему в момент  $t = 0$  с вероятностью 1. Далее будем считать, что  $t_e(1) < T$ .

Необходимо найти равновесную плотность  $f(t)$  распределения моментов обращения к системе на интервале  $[t_e, T]$ . Определим марковский процесс с состояниями системы  $(i, j)$  в каждый момент времени  $t \in [t_e, T]$ , где  $i, j \in \{0, 1\}$  – состояния занятости первого и второго сервера соответственно (0 – свободен, 1 – занят). Интенсивность поступлений запросов в систему в каждый момент времени  $t$  равна  $\lambda f(t)$ . Система Колмогорова для вероятностей состояний системы  $p_{ij}$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} p'_{00}(t) &= -\lambda f(t) p_{00}(t) + \mu_1 p_{10}(t) + \mu_2 p_{01}(t); \\ p'_{10}(t) &= r \lambda f(t) p_{00}(t) - (\bar{r} \lambda f(t) + \mu_1) p_{10}(t) + \mu_2 p_{11}(t); \\ p'_{01}(t) &= \bar{r} \lambda f(t) p_{00}(t) - (r \lambda f(t) + \mu_2) p_{01}(t) + \mu_1 p_{11}(t); \\ p'_{11}(t) &= \lambda f(t) (p_{01}(t) + p_{10}(t)) - (\mu_1 + \mu_2) p_{11}(t). \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Вероятность получить обслуживание в момент  $t \in [t_e, T]$  в равновесии постоянна для всех  $t \in [t_e, T]$  и равна  $p_{00}(t) + p_{01}(t) + p_{10}(t) = 1 - p_{11}(t) = C(p_e)$ . Тогда сумма соответствующих производных должна быть равна нулю. Отсюда, подставив в суммы производные вероятностей состояний из системы Колмогорова (1.2.13), получаем равновесную плотность:

$$f(t) = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(1 - C(p_e))}{\lambda(p_{01}(t) + p_{10}(t))} \quad (1.2.14)$$

для  $t \in [t_e, T]$ .

Заметим, что в случае с одним сервером равновесная стратегия на интервале  $[t_e, T]$  представляет собой равномерное распределение. В нашем более общем случае это не так.

Определим для системы начальные условия – вероятности состояний в момент  $t_e$  при условии, что на  $(0, t_e)$  нет поступлений. Для каждого состояния  $(i, j)$  соответствующую вероятность можно найти как

$$p_{ij}(t_e) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \sum_{k=0}^N p_{ijk}^N(t_e),$$

где  $p_{ijk}^N(t_e)$  – вероятность состояния  $(i, j, k)$  в момент  $t_e$  для случая  $N$  игроков.

Тогда

$$\begin{aligned} p_{00}(t_e) &= e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \sum_{k=0}^N C_N^k p_e^k (1-p_e)^{N-k} \times \\ &\times [\mathbb{1}_{k=0} + \mathbb{1}_{k=1} (r(1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}(1 - e^{-\mu_2 t_e})) + \\ &+ \mathbb{1}_{k>1} (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})]. \end{aligned}$$

Преобразуем внутреннюю сумму:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^N C_N^k p_e^k (1-p_e)^{N-k} \times \\ &\times [\mathbb{1}_{k=0} + \mathbb{1}_{k=1} (r(1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}(1 - e^{-\mu_2 t_e})) + \\ &+ \mathbb{1}_{k>1} (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})] = \\ &= (1 - p_e)^N + N p_e (1 - p_e)^{N-1} (r(1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}(1 - e^{-\mu_2 t_e})) + \\ &+ (1 - (1 - p_e)^N - N p_e (1 - p_e)^{N-1}) (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e}). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} p_{00}(t_e) &= e^{-\lambda p_e} + \lambda p_e e^{-\lambda p_e} (r(1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}(1 - e^{-\mu_2 t_e})) + \\ &+ (1 - e^{-\lambda p_e} - \lambda p_e e^{-\lambda p_e}) (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e}). \end{aligned}$$

Аналогично получаем выражение для остальных вероятностей состояний в момент  $t_e$ :

$$\begin{aligned} p_{00}(t_e) &= e^{-\lambda p_e} + \lambda p_e e^{-\lambda p_e} (r(1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}(1 - e^{-\mu_2 t_e})) + \\ &+ (1 - e^{-\lambda p_e} - \lambda p_e e^{-\lambda p_e}) (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e}); \\ p_{10}(t_e) &= \lambda p_e e^{-\lambda p_e} r e^{-\mu_1 t_e} + \\ &+ (1 - e^{-\lambda p_e} - \lambda p_e e^{-\lambda p_e}) e^{-\mu_1 t_e} (1 - e^{-\mu_2 t_e}); \\ p_{01}(t_e) &= \lambda p_e e^{-\lambda p_e} \bar{r} e^{-\mu_2 t_e} + \\ &+ (1 - e^{-\lambda p_e} - \lambda p_e e^{-\lambda p_e}) (1 - e^{-\mu_1 t_e}) e^{-\mu_2 t_e}; \\ p_{11}(t_e) &= (1 - e^{-\lambda p_e} - \lambda p_e e^{-\lambda p_e}) e^{-\mu_1 t_e} e^{-\mu_2 t_e}. \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

Таким образом, имеется задача Коши с системой дифференциальных уравнений (1.2.13) и начальными условиями (1.2.15). Ее решение дает вероятности состояний  $p_{ij}(t)$ , зависящие от параметра  $p_e$ . С известными вероятностями состояний выражение (1.2.14) определяет равновесную плотность распределения моментов обращения  $f(t)$  на интервале  $[t_e, T]$ , также зависящую от параметра  $p_e$ . Необходимо, чтобы положительная плотность распределения моментов



обращения заканчивалась точно в момент  $T$ , поэтому значение параметра  $p_e$  выбирается так, чтобы

$$p_e + \int_{t_e}^T f(t)dt = 1. \quad (1.2.16)$$

В итоге вышеизложенного анализа получаем следующую теорему.

**Теорема 1.7.** *Любое симметричное равновесное по Нэшу распределение моментов обращения к системе обслуживания с двумя серверами со случайным доступом и потерями с функцией распределения  $F(t)$  на интервале  $[0, T]$  обладает следующими свойствами:*

1. Существует строго положительная вероятность обращения в нулевой момент времени  $p_e = F(0) > 0$ .
2. На интервале  $(0, t_e)$  игроки обращаются в систему с нулевой вероятностью, где
 
$$t_e = \left( \ln \frac{1 - e^{-\lambda p_e} - \lambda p_e e^{-\lambda p_e}}{1 - 2\frac{1 - e^{-\lambda p_e}}{\lambda p_e} + e^{-\lambda p_e}} \right) / (\mu_1 + \mu_2).$$
3. Если для  $p_e = 1$  решение уравнения (1.2.12) дает  $t_e > T$ , то равновесная стратегия – чистая стратегия, когда все игроки обращаются в систему в нулевой момент времени.
4. Иначе,  $p_e < 1$  и на интервале  $[t_e, T]$  существует непрерывная положительная плотность распределения моментов обращения в систему  $f(t)$ , определяемая выражением (1.2.14).
5. Равновесная вероятность обращения в нулевой момент времени находится из уравнения (1.2.16).
6.  $C(p_e) = 2\frac{1 - e^{-\lambda p_e}}{\lambda p_e} - e^{-\lambda p_e}$  – вероятность получить обслуживание на всем носителе стратегии.

**Лемма 1.6.** *Функция распределения  $F(t)$ , являющаяся решением (1.2.12) и (1.2.14) для заданного значения начального условия  $F(0) = p$ , возрастает по значению  $p$  в любой точке интервала  $[0, T]$ .*

*Доказательство.* Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 1.5 для случая фиксированного числа игроков.  $\square$

Тогда, как и в случае для фиксированного числа игроков, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.8.** *Симметричное равновесное распределение поступлений  $F$ , определенное в теореме 1.7, существует и единственно.*

### Численные примеры

Для нахождения равновесий в рассматриваемой задаче при  $\lambda > 0$  используется численный алгоритм, являющийся комбинацией методов дихотомии решения уравнений с одним неизвестным и метода Эйлера решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Сначала проверяется, что  $t_e(1) < T$ , иначе равновесной является чистая стратегия, когда все игроки обращаются в систему в нулевой момент времени. Далее выбирается некоторое начальное значение  $p_e$ , для него находится  $t_e$  как решение уравнения (1.2.12). В точке  $t_e$  вычисляются начальные значения для системы (1.2.13) и  $f(t_e)$ . Для каждой следующей точки разбиения отрезка  $[t_e, T]$  строится решение обеих систем по методу Эйлера:  $p_{ij}(t+\delta) \approx p_{ij}(t) + \delta p'_{ij}(t)$ , и по формуле (1.2.14) находится очередное  $f(t)$ . Затем вычисляется  $F(T)$  и сравнивается с 1. Если получено равенство (с точностью до некоторого  $\epsilon$ , близкого к нулю), алгоритм завершает работу. Если это значение больше 1, то  $p_e$  уменьшается, а если меньше, то увеличивается. Далее алгоритм повторяется для нового значения  $p_e$ .

В таблице 1.2 приведены результаты вычисления равновесий для конкретных значений параметров системы. Рассматривается временной интервал работы системы  $[0, 1]$ . В системе первый сервер значительно уступает в производительности второму:  $\mu_1 = 1, \mu_2 = 10$ . Сравниваются равновесия для различного числа игроков в случаях высокой ( $r = 0.1$ ) и низкой ( $r = 0.9$ ) вероятностей попадания запроса на быстрый сервер. На рисунках 1.4 и 1.5 приведены графики соответствующих равновесных плотностей распределения моментов обращения в систему. На примерах видно, что, как и в случае фиксированного числа игроков, при увеличении значения  $\lambda$  распределение моментов обращения в систему стремится к равномерному, причем одному и тому же для различных вероятностей

попадания на быстрый сервер. В последних трех случаях для  $\lambda = 100, 200, 300$  равновесная плотность распределения моментов обращения в систему примерно равна 0.84 на всем интервале  $[t_e, T]$ . Можно также заметить идентичность данных результатов для обоих случаев – фиксированного и случайного числа игроков. Рисунок 1.6 показывает, как изменяется вид равновесных плотностей при изменении параметра  $r$  – вероятности, что обратившийся в систему игрок пренаправляется на первый сервер.

Таблица 1.2: Равновесные характеристики

$\lambda$	$r = 0.1$			$r = 0.9$		
	$p_e$	$t_e$	$C(p_e)$	$p_e$	$t_e$	$C(p_e)$
1	0.251	0.096	0.99	0.374	0.094	0.98
5	0.268	0.08	0.84	0.311	0.077	0.803
20	0.221	0.045	0.433	0.226	0.045	0.426
100	0.169	0.114	0.118	0.170	0.011	0.118
200	0.162	0.006	0.062	0.162	0.006	0.062
300	0.159	0.004	0.042	0.159	0.004	0.042

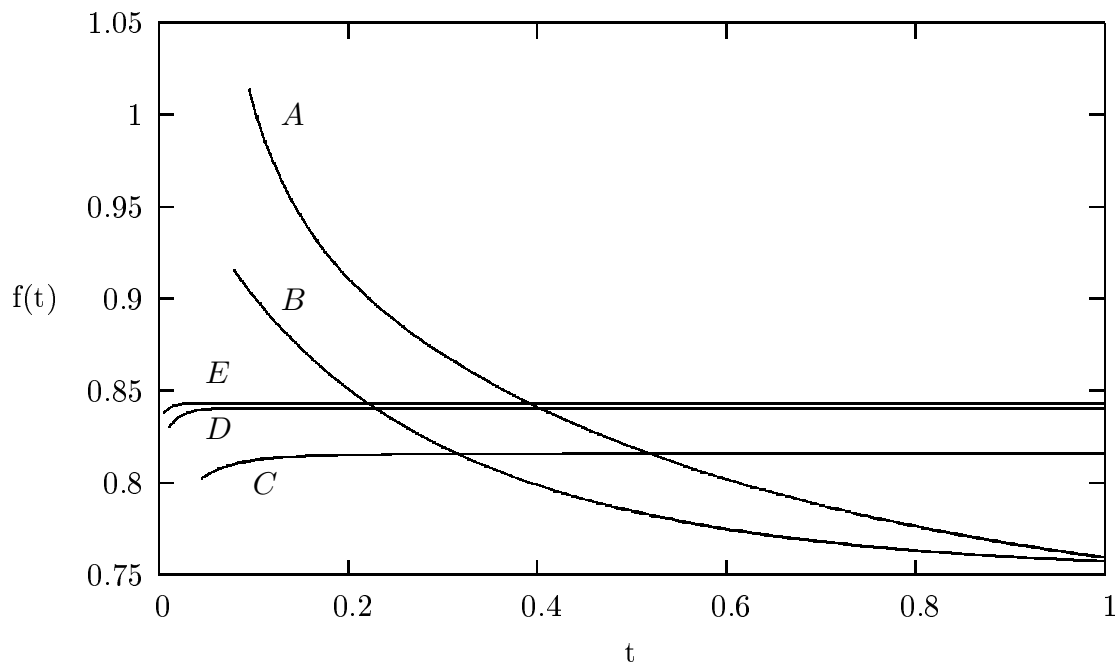


Рис. 1.4: Равновесные плотности  $f(t)$  при  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.1$ . График  $A$  для  $\lambda = 1$ ,  $B$  для  $\lambda = 5$ ,  $C$  для  $\lambda = 20$ ,  $D$  для  $\lambda = 100$ ,  $E$  для  $\lambda = 200$

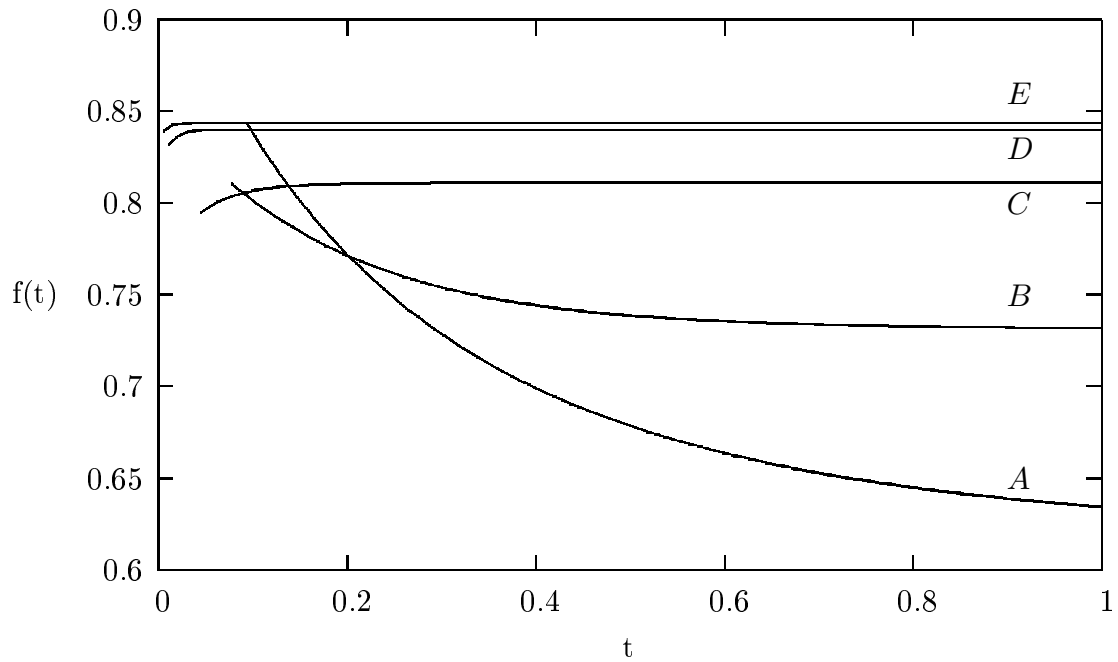


Рис. 1.5: Равновесные плотности  $f(t)$  при  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.9$ . График  $A$  для  $\lambda = 1$ ,  $B$  для  $\lambda = 5$ ,  $C$  для  $\lambda = 20$ ,  $D$  для  $\lambda = 100$ ,  $E$  для  $\lambda = 200$

### § 1.2.3 Цена анархии

Цена анархии является достаточно мощным инструментом для характеристики потерь эффективности из-за конкуренции в системе обслуживания [169, 170]. Оценим значение цены анархии для систем с рационально случайной схемой доступа. Сначала рассмотрим случай фиксированного  $N$ . Полезность клиента определяется как его вероятность получения обслуживания с учетом профиля поступления запросов всех клиентов (включая его самого). Следовательно, общая социальная полезность — это ожидаемое число клиентов, получивших обслуживание. В случае рационально случайной схемы доступа можно найти верхнюю и нижнюю оценки значения социально-оптимальной полезности. Пусть в системе имеется какой-то центральный планировщик, который, видя завершение обслуживания, немедленно отправляет нового клиента. Тогда социально-оптимальная полезность равна  $E(\min\{\text{число запросов, обслуженных на } [0, T) + 2, N + 1\})$ , то есть  $(\mu_1 + \mu_2)T + 2$  для больших  $N$  [169, 170]. Таким образом, социально-оптимальная полезность равна  $\min\{(\mu_1 + \mu_2)T + 2, N + 1\}$ . В равновесии полезность системы равна

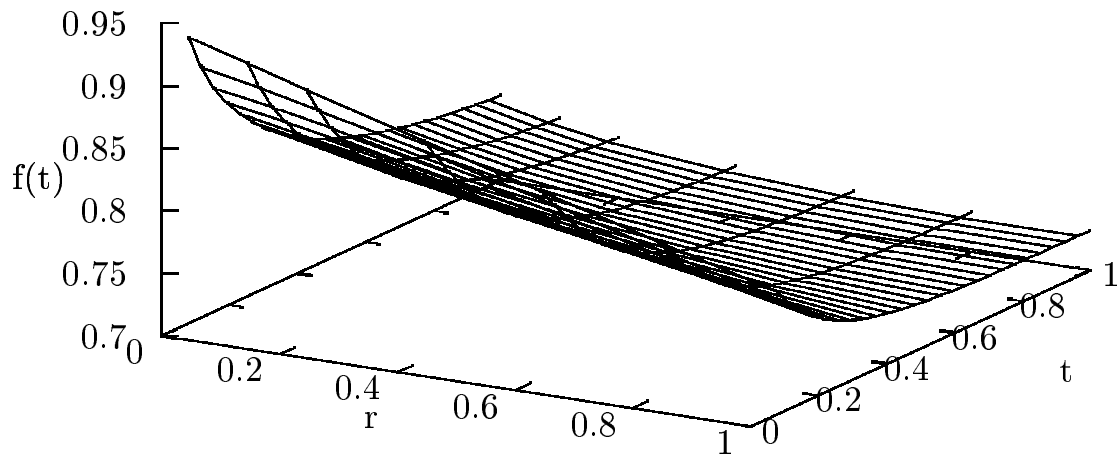


Рис. 1.6: Как изменение  $r$  меняет вид стратегии при  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, \lambda = 5$

$(N + 1)C(t)$ , где  $C(t)$  – равновесная вероятность попасть на обслуживание для запроса.

Цена анархии определяется как отношение между социально-оптимальной полезностью и полезностью в равновесии. Для случаев, представленных в примерах для фиксированного  $N$  (таб. 1.1 и рис. 1.1 и 1.2), найдены значения социально-оптимальной и равновесной полезности и соответствующие значения цены анархии (таблица 1.3).

Предположим теперь, что число игроков  $N$  – случайная величина с распределением Пуассона с параметром  $\lambda$ . Тогда социально-оптимальная полезность равна  $\min\{(\mu_1 + \mu_2)T + 2, \lambda + 1\}$ . В равновесии социальная полезность системы равна  $(\lambda + 1)C(t)$ , где  $C(t)$  – равновесная вероятность получения обслуживания для запроса.

Найдем теперь цену анархии как отношение между социально-оптимальной полезностью и полезностью в равновесии. Для случаев, представленных в примерах для случайного числа игроков (таб. 1.2 и рис. 1.4 и 1.5), найдены значения социально-оптимальной и равновесной полезности и соответствующие значения цены анархии (таблица 1.4).

По результатам вычислений в таб. 1.3 и 1.4 в обоих случаях, с фиксированным и случайным числом игроков, видно, что значение цены анархии с ростом числа игроков сначала растет, затем уменьшается, что согласуется с результатами для одного сервера[169]. Существование такого максимума в цене анархии

нетривиально и может быть использовано для рекомендации, какое количество игроков должно быть в такой системе обслуживания.

### § 1.3 Игра с чисто случайной схемой доступа

Пусть некоторый игрок пытается обратиться к системе в момент  $t$ , зная, что остальные игроки обращаются в этот момент с вероятностью  $p$ .  $X_p$  – случайная величина противников данного игрока, которые обращаются в систему и могут помешать ему получить обслуживание в данный момент. Для каждого значения случайной или фиксированной  $N$  случайная величина  $X_p = X_{N,p}$  имеет распределение  $Bin(N, p)$ . Для удобства обозначения мы опускаем индекс  $N$ , указывая в контексте, является число игроков фиксированным или случайным. Пусть  $X_{pr}$  – число игроков из  $X_p$ , которые перенаправляются на первый сервер с вероятностью  $r$ . Для каждого значения  $X_p$  случайная величина  $X_{pr}$  имеет распределение  $Bin(X_p, r)$ . Тогда, получаем следующую вероятность:

$$\begin{aligned}
P(X_{pr} = j) &= \sum_{i=j}^N C_N^i p^i (1-p)^{N-i} C_i^j r^j (1-r)^{i-j} = \\
&= \sum_{i=j}^N \frac{N!}{i!(N-i)!} \frac{i!}{j!(i-j)!} p^i (1-p)^{N-i} r^j (1-r)^{i-j} = \\
&= C_N^j \sum_{i=j}^N \frac{(N-j)!}{(N-i)!(i-j)!} p^i (1-p)^{N-i} r^j (1-r)^{i-j} = \\
&= C_N^j (pr)^j \sum_{k=0}^{N-j} \frac{(N-j)!}{(N-j-k)!k!} p^k (1-p)^{N-j-k} (1-r)^k = \\
&= C_N^j (pr)^j (1-p)^{N-j} \sum_{k=0}^{N-j} C_{N-j}^k \left( \frac{p(1-r)}{1-p} \right)^k = \\
&= C_N^j (pr)^j (1-p)^{N-j} \left( 1 + \frac{p(1-r)}{1-p} \right)^{N-j} = C_N^j (pr)^j (1-pr)^{N-j},
\end{aligned}$$

откуда следует, что  $X_{pr}$  имеет распределение  $Bin(N, pr)$ . Аналогично можно показать, что  $X_{p\bar{r}}$  – число игроков из  $X_p$ , которые перенаправляются на второй сервер с вероятностью  $\bar{r}$ , имеет распределение  $Bin(N, p\bar{r})$  для каждого значения

фиксированной или случайной  $N$ .

Если  $p$  – вероятность обращения в систему в нулевой момент времени, когда система изначально свободна, то вероятность получения обслуживания в этот момент равна

$$C(p) = E \left( \frac{r}{X_{pr} + 1} + \frac{\bar{r}}{X_{p\bar{r}} + 1} \right). \quad (1.3.1)$$

В случае, если  $N$  фиксирована, данная вероятность равна

$$rP(X_{pr} = 0) + \bar{r}P(X_{p\bar{r}} = 0) + \sum_{i=1}^N \left( \frac{r}{i+1} P(X_{pr} = i) + \frac{\bar{r}}{i+1} P(X_{p\bar{r}} = i) \right),$$

и для случайной  $N$  равна

$$rP(X_{pr} = 0) + \bar{r}P(X_{p\bar{r}} = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \sum_{i=1}^n \left( \frac{r}{i+1} P(X_{pr} = i) + \frac{\bar{r}}{i+1} P(X_{p\bar{r}} = i) \right).$$

Пусть некоторое время после нулевого момента на интервале  $(0, t)$  нет поступлений. Тогда вероятность получить обслуживание в момент  $t > 0$  равна

$$\begin{aligned} & 1 - rP(X_{pr} \geq 1)e^{-\mu_1 t} - \bar{r}P(X_{p\bar{r}} \geq 1)e^{-\mu_2 t} = \\ & = r(P(X_{pr} = 0) + P(X_{pr} \geq 1)(1 - e^{-\mu_1 t})) + \\ & + \bar{r}(P(X_{p\bar{r}} = 0) + P(X_{p\bar{r}} \geq 1)(1 - e^{-\mu_2 t})). \end{aligned}$$

Заметим, что данная вероятность возрастает по  $t$ .

Пусть теперь игрок отправляет в систему запрос в момент  $0+$ , бесконечно близкий к моменту  $0$ , но сразу после него такой, что каждый из поступивших в нулевой момент запросов либо начал обслуживаться, либо покинул систему, но ни один новый запрос не поступил в систему и ни один не завершил свое обслуживание. Эта вероятность равна

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0+} r(P(X_{pr} = 0) + P(X_{pr} \geq 0)(1 - e^{-\mu_1 t})) + \\ & + \bar{r}(P(X_{p\bar{r}} = 0) + P(X_{p\bar{r}} \geq 1)(1 - e^{-\mu_2 t})) = \\ & = rP(X_{pr} = 0) + \bar{r}P(X_{p\bar{r}} = 0), \end{aligned}$$

что меньше, чем  $C(p)$ . Это означает, что лучше обратиться в систему в нулевой момент времени, чем сразу после него. Тогда получаем следующую лемму.

**Лемма 1.7.** В игре с чисто случайным доступом к серверам выигрыш игрока в нулевой момент времени строго больше, чем выигрыш в момент  $0+$ , бесконечно близкий к нулевому моменту, сразу после него. Выигрыш игрока в момент  $t$  возрастает по времени  $t$ , если на интервале  $(0, t)$  нет обращений в систему.

**Лемма 1.8.** В игре с чисто случайным доступом к серверам носитель стратегии в равновесии содержит атом в точке  $t = 0$ , то есть равновесная вероятность  $p_e = F(0)$  обращения в начальный нулевой момент времени строго положительна. Далее имеется интервал времени  $(0, t_e)$ , на котором нет обращений к системе.

*Доказательство.* Доказательство данной леммы полностью повторяет доказательство леммы 1.2 с использованием результата леммы 1.7.  $\square$

Таким образом, в игре с чисто случайным доступом также в носителе равновесной стратегии существует область разрыва  $(0, t_e)$ .

Предположим теперь, что равновесная вероятность обращения игрока к системе в нулевой момент времени известна и равна  $0 < p_e \leq 1$ . Вероятность получить обслуживание в момент  $t > 0$ , такой что на интервале  $(0, t)$  нет поступлений запросов в систему, возрастает по  $t$  и стремится к 1. В момент  $t = 0+$  вероятность получения обслуживания меньше, чем в нулевой момент. Поэтому существует момент  $t_e$  (возможно, после момента  $T$ ), где данные вероятности равны. Тогда решение уравнения

$$\begin{aligned} E \left( \frac{r}{X_{p_e r} + 1} + \frac{\bar{r}}{X_{p_e \bar{r}} + 1} \right) = \\ = 1 - rP(X_{p_e r} \geq 1)e^{-\mu_1 t_e} - \bar{r}P(X_{p_e \bar{r}} \geq 1)e^{-\mu_2 t_e} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

дает момент  $t_e > 0$  для данной вероятности обращения игрока в нулевой момент времени. При этом после нулевого момента и до момента  $t_e$  обращений в систему нет.

**Лемма 1.9.** Для случая двух игроков ( $N = 1$ ) и любых вещественных  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 < p_e \leq 1$  и  $\mu_1, \mu_2 > 0$  уравнение (1.3.2) определяет константу  $t_e$ , не



зависящую от  $p_e$ . Для любого другого числа игроков для любых вещественных  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 < p_e \leq 1$  и  $\mu_1, \mu_2 > 0$  уравнение (1.3.2) определяет функцию  $t_e(p_e)$ , строго убывающую по  $p_e$ .

*Доказательство.* Для случая двух игроков уравнение (1.3.2) имеет вид

$$r^2 + \bar{r}^2 = 2(r^2 e^{-\mu_1 t_e} + \bar{r}^2 e^{-\mu_2 t_e}).$$

Пусть теперь  $N > 1$  или  $N$  случайно. Преобразуем уравнение (1.3.2) следующим образом:

$$E \left( \frac{r X_{p_e r}}{X_{p_e r} + 1} + \frac{\bar{r} X_{p_e \bar{r}}}{X_{p_e \bar{r}} + 1} \right) = r P(X_{p_e r} \geq 1) e^{-\mu_1 t_e} + \bar{r} P(X_{p_e \bar{r}} \geq 1) e^{-\mu_2 t_e}$$

и далее получим

$$\begin{aligned} r P(X_{p_e r} \geq 1) E \left( \frac{X_{p_e r}}{X_{p_e r} + 1} \middle| X_{p_e r} \geq 1 \right) + \\ + \bar{r} P(X_{p_e \bar{r}} \geq 1) E \left( \frac{X_{p_e \bar{r}}}{X_{p_e \bar{r}} + 1} \middle| X_{p_e \bar{r}} \geq 1 \right) = \\ = r P(X_{p_e r} \geq 1) e^{-\mu_1 t_e} + \bar{r} P(X_{p_e \bar{r}} \geq 1) e^{-\mu_2 t_e}. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Теперь нужно показать, что множители, содержащие  $p_e$  в уравнении (1.3.3), возрастают по  $p_e$ . Используем, как и в случае рационально случайного доступа, теорию стохастических порядков, чтобы показать возрастание  $P(X_{p_e r} \geq i)$  и  $E \left( \frac{X_{p_e r}}{X_{p_e r} + 1} \middle| X_{p_e r} \geq 1 \right)$  по  $p_e$ . Очевидно, что то же самое выполняется и для соответствующих множителей с  $\bar{r}$  вместо  $r$ .

Пусть сначала величина  $N$  фиксирована. Проверим, что для любых вещественных  $0 \leq q < p \leq 1$  отношение  $\frac{P(X_{pr}=i)}{P(X_{qr}=i)}$  возрастает относительно натурального индекса  $i$ . Отношение  $\frac{P(X_{pr}=k+1)}{P(X_{pr}=k)} = \frac{N-k}{k+1} \left( \frac{1}{1-pr} - 1 \right)$  возрастает по  $p$ . Тогда справедливо  $\frac{P(X_{qr}=k+1)}{P(X_{qr}=k)} < \frac{P(X_{pr}=k+1)}{P(X_{pr}=k)}$  и  $\frac{P(X_{pr}=k)}{P(X_{qr}=k)} < \frac{P(X_{pr}=k+1)}{P(X_{qr}=k+1)}$ . Это означает по определению 1.3, что случайная величина  $X_{p_e r}$  стохастически возрастает по  $p_e$  согласно порядку отношения правдоподобия.

Пусть теперь  $N$  случайна. По теореме 1.4 случайная величина  $\sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) X_{n, p_e r}$  также стохастически возрастает по  $p_e$  согласно порядку отношения правдоподобия, где  $X_{n, p_e r}$  обозначает  $X_{p_e r}$  для каждого фиксированного  $N = n$ , так как плотность биномиального распределения обладает свойством логарифмической вогнутости. Таким образом, случайная величина  $X_{p_e r}$

стохастически возрастает по  $p_e$  согласно порядку отношения правдоподобия для случайной  $N$ .

По теореме 1.1 из стохастического возрастания случайной величины согласно порядку отношения правдоподобия следует ее возрастание согласно обычному стохастическому порядку, то есть  $P(X_{p_e r} \geq i)$  возрастает по  $p_e$  для любых натуральных  $i$ .

По теореме 1.2 случайная величина  $[X_{p_e r} | X_{p_e r} \geq 1]$  также стохастически возрастает по  $p_e$  согласно порядку отношения правдоподобия. Тогда по теореме 1.3 и случайная величина  $\left[ \frac{X_{p_e r}}{X_{p_e r} + 1} | X_{p_e r} \geq 1 \right]$  стохастически возрастает по  $p_e$  согласно порядку отношения правдоподобия.

Из стохастического возрастания случайной величины согласно порядку отношения правдоподобия следует ее возрастание согласно обычному стохастическому порядку и, следовательно, возрастание ее математического ожидания. Таким образом,  $E\left(\frac{X_{p_e r}}{X_{p_e r} + 1} | X_{p_e r} \geq 1\right)$  возрастает по  $p_e$ .

Рассмотрим теперь две пары  $(p_1, t_1)$  и  $(p_2, t_2)$ , удовлетворяющие уравнению (1.3.3), такие что  $p_1 < p_2$ . Пусть  $t_1 \leq t_2$ . Для  $p_e = p_1$  и  $t_e = t_1$  левая и правая части (1.3.3) равны. Когда  $p_e$  растет с  $p_1$  до  $p_2$  и  $t_e$  растет с  $t_1$  до  $t_2$ , вероятности в левой и правой частях уравнения увеличиваются одинаково. Математические ожидания в левой части также растут, но экспоненты в правой части либо уменьшаются, либо не меняются, что нарушает равенство. То есть  $t_1 > t_2$ .  $\square$

**Следствие 1.2.** *Значения математических ожиданий  $E\left(\frac{1}{X_{p_e r} + 1}\right)$  и  $E\left(\frac{1}{X_{p_e r} + 1}\right)$  убывают по  $p_e$ .*

*Доказательство.* Из доказательства леммы 1.9 имеем, что случайная величина  $\frac{1}{X_{p_e r} + 1}$  стохастически убывает по  $p_e$  согласно обычному стохастическому порядку как убывающая функция от случайной величины, стохастически возрастающей по  $p_e$ . Тогда ее математическое ожидание также убывает по  $p_e$ .  $\square$

В соответствии с леммой 1.9, чем больше вероятность  $p_e$  обращения к системе в нулевой момент, тем раньше момент  $t_e$ , когда возобновляются поступления запросов в систему после интервала без поступления запросов, начавшегося сразу за нулевым моментом. Заметим, что значение  $t_e$  для данного  $p_e$  может получиться больше, чем  $T$ . В этом случае необходимо увеличивать значение  $p_e$ . Если же

$t_e(1) \geq T$ , тогда равновесной является чистая стратегия, согласно которой все запросы приходят в систему в нулевой момент времени с вероятностью 1. Далее в данном разделе будем предполагать, что  $t_e(1) < T$ .

**Лемма 1.10.** *Если  $t_e < T$ , то с момента  $t_e$  до конца  $T$  существует строго положительная плотность распределения моментов обращения к системе  $f(t) > 0$ . Данный интервал не содержит атомов и разрывов.*

*Доказательство.* Рассмотрим интервал  $[t_e, T]$ , на котором возобновляются обращения в систему. Покажем, что равновесная плотность распределения моментов обращения в систему на всем интервале строго положительна. Пусть, наоборот, на интервале  $[t_e, T]$  существует некоторая область  $(s_1, s_2)$ , на которой обращений в систему нет. Пусть  $p_{ij}(t)$  – вероятность состояния  $(i, j)$  системы в момент  $t$ , где  $i, j \in \{0, 1\}$  обозначают состояния занятости (0 – свободен, 1 – занят) первого и второго серверов соответственно. Тогда вероятность получения обслуживания в момент  $s_1$  равна

$$p_{00}(s_1) + rp_{01}(s_1) + \bar{r}p_{10}(s_1).$$

С учетом того, что на  $(s_1, s_2)$  нет поступлений, выигрыш в момент  $s_2$  равен

$$\begin{aligned} p_{00}(s_2) + rp_{01}(s_2) + \bar{r}p_{10}(s_2) = & p_{00}(s_1) + \\ & + p_{10}(s_1)(1 - e^{-\mu_1(s_2-s_1)}) + p_{01}(s_1)(1 - e^{-\mu_2(s_2-s_1)}) + \\ & + p_{11}(s_1)(1 - e^{-\mu_1(s_2-s_1)})(1 - e^{-\mu_2(s_2-s_1)}) + \\ & + r(p_{01}(s_1) + p_{11}(s_1)(1 - e^{-\mu_1(s_2-s_1)})) + \\ & + \bar{r}(p_{10}(s_1) + p_{11}(s_1)(1 - e^{-\mu_2(s_2-s_1)})), \end{aligned}$$

что больше выигрыша в момент  $s_1$ . Следовательно, в равновесии таких разрывов в носителе стратегии после момента  $t_e$  не может быть.

Покажем, что после момента  $t_e$  носитель стратегии не содержит атомов. Пусть такой атом есть в точке  $t \in [t_e, T]$  и вероятность обращения игрока в момент  $t$  строго положительна и равна  $p$ . Пусть момент  $s = t-$  перед моментом  $t$  и бесконечно близкий к нему, такой что вероятности ухода обслуженных и поступления новых заявок между этими моментами равны нулю. Рассмотрим некоторого игрока, который пытается обратиться в систему в момент  $t$ , зная,

что остальные обращаются в этот же момент с вероятностью  $p$ . Пусть случайная величина  $X_p$  обозначает число его противников, обратившихся в систему в момент времени  $t$ . Пусть  $X_{pr}$ ,  $X_{p\bar{r}}$  случайные величины запросов из  $X_p$ , перенаправленных на первый и на второй сервер в момент  $t$ . Так как вероятность  $p$  строго положительна, то и математическое ожидание  $X_p$  должно быть положительно. Тогда вероятность получения обслуживания в момент времени  $t$  равна

$$\begin{aligned} E \left( \frac{r(p_{00}(t)+p_{01}(t))}{X_{pr}+1} + \frac{\bar{r}(p_{00}(t)+p_{10}(t))}{X_{p\bar{r}}+1} \right) = \\ = r(p_{00}(s) + p_{01}(s))E \frac{1}{X_{pr}+1} + \bar{r}(p_{00}(s) + p_{10}(s))E \frac{1}{X_{p\bar{r}}+1}, \end{aligned}$$

что меньше выигрыша в момент  $s$ , равного

$$r(p_{00}(s) + p_{01}(s)) + \bar{r}(p_{00}(s) + p_{10}(s)).$$

То есть в случае, если в распределении обращений в систему после момента  $t_e$  есть атом, всегда лучше обратиться в систему непосредственно до него. В отличие от нулевого момента времени, когда система изначально свободна и игроку нужно только выиграть розыгрыш мест для получения обслуживания, здесь серверы могут быть уже заняты и розыгрыш мест на обслуживание дополнительно снижает вероятность получения обслуживания.  $\square$

### § 1.3.1 Фиксированное число игроков

Обозначим  $N + 1$  общее число игроков, отправляющих свои запросы в систему. У каждого из игроков  $N$  противников, которые могут помешать ему получить обслуживание. Случайная величина  $X_{p_e r}$  – число запросов, поступивших на первый сервер в нулевой момент времени, ее распределение  $Bin(N, p_e r)$ . Аналогично случайная величина  $X_{p_e \bar{r}}$  – число запросов, поступивших на второй сервер в нулевой момент времени, ее распределение  $Bin(N, p_e \bar{r})$ . Вероятность получить обслуживание в нулевой момент времени определяется (1.3.1).

Первое слагаемое (1.3.1) равно

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{r}{X_{p_e r} + 1}\right) &= r \sum_{i=0}^N C_N^i (p_e r)^i (1 - p_e r)^{N-i} \frac{1}{i+1} = \\
&= r \frac{(1-p_e r)^N}{N+1} \sum_{i=0}^N C_{N+1}^{i+1} \left(\frac{p_e r}{1-p_e r}\right)^i = \\
&= r \frac{(1-p_e r)^{N+1}}{p_e r (N+1)} \sum_{i=1}^{N+1} C_{N+1}^i \left(\frac{p_e r}{1-p_e r}\right)^i = \\
&= r \frac{(1-p_e r)^{N+1}}{p_e r (N+1)} \left( \left(1 + \frac{p_e r}{1-p_e r}\right)^{N+1} - 1 \right) = \frac{1 - (1-p_e r)^{N+1}}{p_e (N+1)}.
\end{aligned}$$

Аналогично второе равно

$$E\left(\frac{\bar{r}}{X_{p_e \bar{r}} + 1}\right) = \frac{1 - (1 - p_e \bar{r})^{N+1}}{p_e (N+1)}.$$

Тогда выигрыш в момент времени  $t = 0$  равен

$$C(p) = \frac{2 - (1 - p_e r)^{N+1} - (1 - p_e \bar{r})^{N+1}}{p_e (N+1)}. \quad (1.3.4)$$

Найдем вероятность получения обслуживания в момент  $t_e > 0$  при условии, что вероятности обращений к системе на интервале  $(0, t_e)$  равны нулю. Эта вероятность равна

$$\begin{aligned}
&1 - rP(X_{p_e r} \geq 1)e^{-\mu_1 t} - \bar{r}P(X_{p_e \bar{r}} \geq 1)e^{-\mu_2 t} = \\
&= 1 - r(1 - P(X_{p_e r} = 0))e^{-\mu_1 t} - \bar{r}(1 - P(X_{p_e \bar{r}} = 0))e^{-\mu_2 t} = \\
&= 1 - r(1 - (1 - p_e r)^N)e^{-\mu_1 t} - \bar{r}(1 - (1 - p_e \bar{r})^N)e^{-\mu_2 t}.
\end{aligned}$$

Тогда уравнение (1.3.2) для случая фиксированного числа игроков имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{2 - (1 - p_e r)^{N+1} - (1 - p_e \bar{r})^{N+1}}{p_e (N+1)} = \\
&= 1 - r(1 - (1 - p_e r)^N)e^{-\mu_1 t_e} - \bar{r}(1 - (1 - p_e \bar{r})^N)e^{-\mu_2 t_e}. \quad (1.3.5)
\end{aligned}$$

Согласно лемме 1.9, если  $t_e(1) \geq T$ , то равновесной является чистая стратегия – обращение в систему в момент  $t = 0$  с вероятностью 1. Иначе на интервале  $[t_e, T]$  существует строго положительная плотность распределения моментов обращения в систему. Далее будем считать, что  $t_e(1) < T$ .

Необходимо найти равновесную плотность  $f(t)$  распределения моментов обращения к системе на интервале  $[t_e, T]$ . Определим марковский процесс с состояниями системы  $(i, j, k)$  в каждый момент времени  $t \in [t_e, T]$ , где  $i, j \in \{0, 1\}$  –

состояния занятости первого и второго сервера соответственно (0 – свободен, 1 – занят),  $k \in \{0, \dots, N\}$  – число игроков, обратившихся в систему до момента  $t$ . Данный процесс неоднороден по времени, так как интенсивность поступлений запросов в систему скачком уменьшается с каждым обращением очередного игрока в систему и равна  $\lambda_k(t) = (N - k) \frac{f(t)}{1 - F(t)}$ . Система Колмогорова для вероятностей состояний системы  $p_{ijk}$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
p'_{000}(t) &= -\lambda_0(t)p_{000}(t), \\
p'_{101}(t) &= r\lambda_0(t)p_{000}(t) - (\lambda_1(t) + \mu_1)p_{101}(t), \\
p'_{011}(t) &= \bar{r}\lambda_0(t)p_{000}(t) - (\lambda_1(t) + \mu_2)p_{011}(t), \\
p'_{00i}(t) &= -\lambda_i(t)p_{00i}(t) + \mu_1p_{10i}(t) + \mu_2p_{01i}(t), \\
p'_{10i}(t) &= r\lambda_{i-1}(t)(p_{00i-1}(t) + p_{10i-1}(t)) - \\
&\quad - (\lambda_i(t) + \mu_1)p_{10i}(t) + \mu_2p_{11i}(t), \\
p'_{01i}(t) &= \bar{r}\lambda_{i-1}(t)(p_{00i-1}(t) + p_{01i-1}(t)) - \\
&\quad - (\lambda_i(t) + \mu_2)p_{01i}(t) + \mu_1p_{11i}(t), \\
p'_{11i}(t) &= \lambda_{i-1}(t)(rp_{01i-1}(t) + \bar{r}p_{10i-1}(t) + p_{11i-1}(t)) - \\
&\quad - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda_i(t))p_{11i}(t), \\
i &= 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Вероятность получить обслуживание в момент  $t \in [t_e, T]$  в равновесии постоянна для всех  $t \in [t_e, T]$ :

$$\sum_{i=0}^N p_{00i}(t) + r \sum_{i=1}^N p_{01i}(t) + \bar{r} \sum_{i=1}^N p_{10i}(t) = C(p_e).$$

Тогда сумма соответствующих производных должна быть равна нулю. Отсюда, подставив в суммы производные вероятностей состояний из системы Колмогорова (1.3.6), получаем дифференциальное уравнение для определения равновесной плотности:

$$\frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{r\mu_1 \left( \sum_{i=1}^N p_{10i}(t) + \sum_{i=2}^N p_{11i}(t) \right) + \bar{r}\mu_2 \left( \sum_{i=1}^N p_{01i}(t) + \sum_{i=2}^N p_{11i}(t) \right)}{\sum_{i=0}^{N-1} (N - i)(r^2(p_{00i}(t) + p_{01i}(t)) + \bar{r}^2(p_{00i}(t) + p_{10i}(t)))} \tag{1.3.7}$$

для  $t \in [t_e, T]$ .

Носитель равновесного распределения моментов обращений в систему находится на интервале  $[0, T]$ , поэтому должно выполняться  $F(T) = 1$ . Это создает неопределенность в уравнении (1.3.7) в точке  $t = T$ , принадлежащей интервалу, на котором обращения в систему определяются положительной плотностью распределения. Преобразуем уравнение (1.3.7) для получения равновесного распределения, чтобы исключить из него множитель  $1 - F(t)$ .

Обозначим  $T_i$  моменты обращений игроков  $i \in \{1, \dots, N\}$ , независимые и одинаково распределенные согласно функции  $F$ . Пусть  $A(t)$  – число обращений в систему до момента  $t$  и  $B_N^s(t) \in \{0, 1\}$  – состояния занятости сервера  $s$  в момент  $t$  (0 – свободен, 1 – занят).

Знаменатель правой части в уравнении (1.3.7) можно преобразовать как

$$\begin{aligned} & N \sum_{i=0}^N (r^2(p_{00i}(t) + p_{01i}(t)) + \bar{r}^2(p_{00i}(t) + p_{10i}(t))) - \\ & - \sum_{i=0}^N i (r^2(p_{00i}(t) + p_{01i}(t)) + \bar{r}^2(p_{00i}(t) + p_{10i}(t))) = \\ & = N(r^2 P(B_N^1(t) = 0) + \bar{r}^2 P(B_N^2(t) = 0)) - \\ & - (r^2 E(A(t) \mathbb{1}_{B_N^1(t)=0}) + \bar{r}^2 E(A(t) \mathbb{1}_{B_N^2(t)=0})). \end{aligned}$$

Преобразуем вычитаемое

$$\begin{aligned} \phi(t) &= r^2 E(A(t) \mathbb{1}_{B_N^1(t)=0}) + \bar{r}^2 E(A(t) \mathbb{1}_{B_N^2(t)=0}) = \\ &= r^2 E \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{B_N^1(t)=0, T_i \leq t} + \bar{r}^2 E \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{B_N^2(t)=0, T_i \leq t} = \\ &= r^2 E \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{B_N^1(t)=0, T_1 \leq t} + \bar{r}^2 E \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{B_N^2(t)=0, T_1 \leq t} = \\ &= N (r^2 E \mathbb{1}_{B_N^1(t)=0, T_1 \leq t} + \bar{r}^2 E \mathbb{1}_{B_N^2(t)=0, T_1 \leq t}) = \\ &= N (r^2 P(B_N^1(t) = 0, T_1 \leq t) + \bar{r}^2 P(B_N^2(t) = 0, T_1 \leq t)). \end{aligned}$$

При  $t \rightarrow T$  вероятность  $P(B_N^s(t) = 0, T_1 \leq t)$  стремится к  $P(B_N^s(t) = 0)$  для обоих значений  $s$  и знаменатель стремится к нулю, что создает неопределенность для плотности в уравнении (1.3.7). Далее, предполагая, что  $t < T$ , получим выражение для плотности и доопределим значение плотности в точке  $T$  как предел.

$$\begin{aligned} \phi(t) &= N(r^2(P(B_N^1(t) = 0) - P(B_N^1(t) = 0, T_1 > t)) + \\ & + \bar{r}^2(P(B_N^2(t) = 0) - P(B_N^2(t) = 0, T_1 > t))). \end{aligned}$$

Тогда знаменатель правой части в уравнении (1.3.7) равен

$$\begin{aligned}
& N(r^2 P(B_N^1(t) = 0, T_1 > t) + \bar{r}^2 P(B_N^2(t) = 0, T_1 > t)) = \\
& = N(r^2 P(B_N^1(t) = 0 | T_1 > t)(1 - F(t)) + \\
& \quad + \bar{r}^2 P(B_N^2(t) = 0 | T_1 > t)(1 - F(t))) = \\
& = N(r^2 P(B_{N-1}^1(t) = 0)(1 - F(t)) + \\
& \quad + \bar{r}^2 P(B_{N-1}^2(t) = 0)(1 - F(t))),
\end{aligned}$$

где  $B_{N-1}^s(t)$  – состояние занятости сервера в модели с числом игроков, меньшим на 1, где моменты обращений  $N - 1$  игроков независимые и одинаково распределенные согласно той же функции  $F$ . Заметим, что для этой модели интенсивности поступлений обращений в систему  $\lambda_i(t)$  остаются теми же, что и для  $N$  игроков, так как распределение остается неизменным, однако вероятности состояний здесь свои.

Тогда для  $t \in [t_e, T)$  плотность распределения моментов обращения в систему можно представить выражением, не зависящим от  $1 - F(t)$ :

$$f(t) = \frac{r\mu_1 P(B_N^1(t) = 1) + \bar{r}\mu_2 P(B_N^2(t) = 1)}{N(r^2 P(B_{N-1}^1(t) = 0) + \bar{r}^2 P(B_{N-1}^2(t) = 0))}. \quad (1.3.8)$$

Правая часть данного выражения определена для  $t = T$ , и тогда по непрерывности можно доопределить плотность в точке  $t = T$ :

$$f(T) = \frac{r\mu_1 P(B_N^1(T) = 1) + \bar{r}\mu_2 P(B_N^2(T) = 1)}{N(r^2 P(B_{N-1}^1(T) = 0) + \bar{r}^2 P(B_{N-1}^2(T) = 0))}.$$

То есть выражение (1.3.8) определяет плотность распределения обращений в систему на всем интервале  $[t_e, T]$ .

Данное выражение позволяет, преобразовав систему (1.3.6), исключить из нее неизвестную функцию плотности  $f(t)$  и получить систему дифференциальных уравнений относительно вероятностей состояний.

Определим для системы начальные условия – вероятности состояний в мо-



мент  $t_e$  при условии, что на  $(0, t_e)$  нет поступлений.

$$\begin{aligned}
p_{00i}(t_e) &= C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \times \\
&\quad \times [\mathbb{1}_{i=0} + \mathbb{1}_{i>0} (r^i (1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}^i (1 - e^{-\mu_2 t_e})) + \\
&\quad + \mathbb{1}_{i>1} (1 - r^i - \bar{r}^i) (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e})], \\
&\quad i = 0, \dots, N, \\
p_{10i}(t_e) &= C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \times \\
&\quad \times [r^i e^{-\mu_1 t_e} + \mathbb{1}_{i>1} (1 - r^i - \bar{r}^i) e^{-\mu_1 t_e} (1 - e^{-\mu_2 t_e})], \\
&\quad i = 1, \dots, N, \\
p_{01i}(t_e) &= C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \times \\
&\quad \times [\bar{r}^i e^{-\mu_2 t_e} + \mathbb{1}_{i>1} (1 - r^i - \bar{r}^i) (1 - e^{-\mu_1 t_e}) e^{-\mu_2 t_e}], \\
&\quad i = 1, \dots, N, \\
p_{11i}(t_e) &= C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} (1 - r^i - \bar{r}^i) e^{-\mu_1 t_e} e^{-\mu_2 t_e}, \\
&\quad i = 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Таким образом, имеется задача Коши с системой дифференциальных уравнений (1.3.6) и начальными условиями (1.3.9). Ее решение дает вероятности состояний  $p_{ijk}(t)$ , зависящие от параметра  $p_e$ . С известными вероятностями состояний выражение (1.3.8) определяет равновесную плотность распределения моментов обращения  $f(t)$  на интервале  $[t_e, T]$ , также зависящую от параметра  $p_e$ . Необходимо, чтобы положительная плотность распределения моментов обращения заканчивалась точно в момент  $T$ , поэтому значение параметра  $p_e$  выбирается так, чтобы

$$p_e + \int_{t_e}^T f(t) dt = 1. \tag{1.3.10}$$

В итоге вышеизложенного анализа получаем следующую теорему.

**Теорема 1.9.** *Любое симметричное равновесное по Нэшу распределение моментов обращения к системе обслуживания с двумя серверами со случайным доступом и потерями с функцией распределения  $F(t)$  на интервале  $[0, T]$  обладает следующими свойствами:*

1. *Существует строго положительная вероятность обращения в нулевой момент времени  $p_e = F(0) > 0$ .*

2. На интервале  $(0, t_e)$  игроки обращаются в систему с нулевой вероятностью, где  $t_e$  удовлетворяет уравнению (1.3.5).
3. Если для  $p_e = 1$  решение уравнения (1.3.5) дает  $t_e > T$ , то равновесная стратегия – чистая стратегия, когда все игроки обращаются в систему в нулевой момент времени.
4. Иначе,  $p_e < 1$  и на интервале  $[t_e, T]$  существует непрерывная положительная плотность распределения моментов обращения в систему  $f(t)$ , определяемая выражением (1.3.8).
5. Равновесная вероятность обращения в нулевой момент времени находится из уравнения (1.3.10).
6.  $C(p_e) = \frac{2 - (1 - p_e r)^{N+1} - (1 - p_e \bar{r})^{N+1}}{p_e(N+1)}$  – вероятность получить обслуживание на всем носителе стратегии.

**Лемма 1.11.** Функция распределения  $F(t)$ , являющаяся решением (1.3.5) и (1.3.7) для заданного значения начального условия  $F(0) = p$ , возрастает по значению  $p$  в любой точке интервала  $[0, T]$ .

*Доказательство.* Пусть заданы две вероятности обращений в нулевой момент времени  $0 < p < q \leq 1$ , определяющие начальные условия для получения двух соответствующих функций распределения  $F_p(t)$  и  $F_q(t)$ , являющихся решениями (1.3.5) и (1.3.7). Соответствующие вероятности обслуживания  $C(p)$  и  $C(q)$  постоянны на всем носителе распределения. По следствию 1.2 функция  $C(\cdot)$  убывающая. Тогда вероятность потери на носителе распределения для  $p$  должна быть меньше, чем для  $q$ .

По лемме 1.9 для соответствующих начал интервалов, на которых возобновляются обращения в систему, справедливо  $t_q = t(q) < t_p = t(p)$ . То есть функция  $F_q(t)$  начинает возрастать от значения  $q$  в момент, когда  $F_p(t)$  еще остается константой  $p < q$ . Для  $t \in [0, t_p]$  утверждение леммы справедливо, так как здесь  $F_p(t) = p < q \leq F_q(t)$ .

Пусть есть некоторый момент  $s > t_p$  такой, что  $F_p(t) < F_q(t)$  для  $t < s$ , и  $F_p(s) = F_q(s)$ . Тогда  $f_p(s) > f_q(s)$ , так как обе функции неубывающие по  $t$ , в

точке  $s$  функция  $F_p(t)$  должна пересечь  $F_q(t)$  снизу вверх и, следовательно, угол наклона  $F_p(t)$  больше угла наклона  $F_q(t)$ . Тогда  $\frac{f_p(s)}{1-F_p(s)} > \frac{f_q(s)}{1-F_q(s)}$ , что означает что интенсивность обращений в момент  $s$  больше для вероятности обращений в начальный момент  $p$ , чем для  $q$ , при том, что интенсивности обслуживания в обоих случаях одинаковы. Тогда вероятность потери в момент  $s$  для  $p$  должна быть больше, чем для  $q$ , что противоречит тому, что на всем носителе распределения вероятность потери для  $p$  должна быть меньше, чем для  $q$ .  $\square$

**Теорема 1.10.** *Симметричное равновесное распределение поступлений  $F$ , определенное в теореме 1.9, существует и единственно.*

*Доказательство.* Единственность равновесия следует из леммы 1.11. Условие равновесия (1.3.10) представляет собой уравнение, левая часть которого монотонно возрастает по  $p_e$ . При  $p_e$ , близких к нулю, она равна вероятности обращения на интервале  $[t_e, T]$ , которая не превышает 1. При  $p_e = 1$  значение левой части не меньше 1. Поэтому существует единственное решение  $p_e$ , которому соответствует единственное значение  $t_e$  и плотность распределения  $f(t)$  на  $[t_e, T]$ .  $\square$

### Случай двух игроков

Пусть в системе всего два игрока, в этом случае  $N = 1$ , так как у каждого только один противник.

Равновесный момент возобновления поступлений в систему  $t_e$  не зависит от вероятности обращения в нулевой момент времени  $p_e$  и является корнем уравнения

$$r^2 + \bar{r}^2 = 2(r^2 e^{-\mu_1 t_e} + \bar{r}^2 e^{-\mu_2 t_e}).$$

В случае с одним сервером равновесная стратегия на интервале  $[t_e, T]$  представляет собой равномерное распределение. Покажем, что в общем случае это не так.

Согласно (1.3.8), плотность распределения моментов обращения в систему определяется функцией

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{r\mu_1 P(B_1^1(t)=1) + \bar{r}\mu_2 P(B_1^2(t)=1)}{N(r^2 P(B_0^1(t)=0) + \bar{r}^2 P(B_0^2(t)=0))} = \\ &= \frac{r\mu_1 p_{101}(t) + \bar{r}\mu_2 p_{011}(t)}{r^2 + \bar{r}^2}. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Выразим плотность через  $C(p_e)$ , равновесную вероятность получения обслуживания, константу по отношению к  $t$ :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{r\mu_1 p_{101}(t) + \bar{r}\mu_1 p_{011}(t) - \bar{r}\mu_1 p_{011}(t) + \bar{r}\mu_2 p_{011}(t)}{r^2 + \bar{r}^2} = \\ &= \frac{\mu_1(1 - C(p_e)) + (\mu_2 - \mu_1)\bar{r}p_{011}}{r^2 + \bar{r}^2}. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Из системы (1.3.6) возьмем дифференциальное уравнение для  $p_{011}$ :

$$p'_{011}(t) = \lambda_0(t)\bar{r}p_{000}(t) - \mu_2 p_{011}(t). \quad (1.3.13)$$

Согласно уравнению (1.3.7):

$$\frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{r\mu_1 p_{101}(t) + \bar{r}\mu_2 p_{011}(t)}{(r^2 + \bar{r}^2)p_{000}(t)},$$

откуда с учетом (1.3.11) получаем  $\lambda_0(t) = \frac{f(t)}{p_{000}(t)}$ . Тогда из (1.3.13) получим уравнение

$$p'_{011}(t) = \bar{r} \frac{\mu_1(1 - C(p_e)) + (\mu_2 - \mu_1)\bar{r}p_{011}}{r^2 + \bar{r}^2} - \mu_2 p_{011}(t), \quad (1.3.14)$$

добавим к нему начальное условие  $p_{011}(t_e) = \bar{r}p_e e^{-\mu_2 t_e}$  и условие (1.3.10).

Решением полученной задачи является:

$$\begin{aligned} p_e &= \frac{1}{1 + \frac{\mu_1 \mu_2 (T - t_e)}{2A} + \frac{\mu_2 - A}{A^2} \left( \frac{\mu_1}{2} - A e^{-\mu_2 t_e} \right) (e^{-A(T - t_e)} - 1)}, \\ f(t) &= \frac{\mu_1 \mu_2 p_e}{2A} + \frac{(A - \mu_2)(B - A\bar{r}p_e e^{-\mu_2 t_e}) e^{-A(t - t_e)}}{\bar{r}A}, \quad t \in [t_e, T], \end{aligned}$$

где  $A = \frac{r^2 \mu_2 + \bar{r}^2 \mu_1}{r^2 + \bar{r}^2}$ ,  $B = \frac{\bar{r} \mu_1 p_e}{2}$ . Равновесный выигрыш равен

$$C(p_e) = 1 - \frac{p_e(r^2 + \bar{r}^2)}{2}.$$

Пусть теперь оба сервера одинаковы по производительности, то есть  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . В этом случае равновесная стратегия совпадает с равновесной стратегией для случая с одним сервером [169] и не зависит от  $r$ :  $t_e = \frac{\log 2}{\mu}$ ,  $p_e = \frac{2}{2 + \mu T - \log 2}$ ,  $f(t) = \frac{\mu}{2 + \mu T - \log 2}$ ,  $t \in [t_e, T]$ . Равновесный выигрыш равен  $C(p_e) = \frac{1 + \mu T - \log 2 + 2r\bar{r}}{2 + \mu T - \log 2}$ . Для сравнения отметим, что в задаче с одним сервером он равен  $\frac{1 + \mu T - \log 2}{2 + \mu T - \log 2}$ . Назовем социальной полезностью системы ожидаемое число обслуженных в

ней игроков. В равновесии она равна  $SU_{NE} = 2 * C(p_e)$ . Социально оптимальным является такой профиль стратегий, при котором социальная полезность максимальна. Заметим, что социально оптимальный профиль не обязательно является симметричным и равновесным. В данном случае социально оптимальным является профиль чистых стратегий, при котором один игрок обращается в момент 0, а другой в момент  $T$ . Оптимальная социальная полезность равна  $SU_{OPT} = 2 - (r^2 + \bar{r}^2)e^{-\mu T}$ . Ценой анархии назовем отношение равновесной социальной полезности к оптимальной. Она равна здесь  $POA = \frac{(2 - (r^2 + \bar{r}^2)e^{-\mu T})(2 + \mu T - \log 2)}{2(1 + \mu T - \log 2 + 2r\bar{r})}$ .

### Численные примеры

Для нахождения равновесий в рассматриваемой задаче при  $N > 1$  используется численный алгоритм, являющийся комбинацией методов дихотомии решения уравнений с одним неизвестным и метода Эйлера решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Сначала проверяется, что  $t_e(1) < T$ , иначе равновесной является чистая стратегия, когда все игроки обращаются в систему в нулевой момент времени. Далее выбирается некоторое начальное значение  $p_e$ , для него находится  $t_e$  как решение уравнения (1.3.5). В точке  $t_e$  вычисляются начальные значения для систем (1.3.6) для  $N$  и  $N - 1$  игроков, а также  $f(t_e)$ . Для каждой следующей точки разбиения отрезка  $[t_e, T]$  строится решение обеих систем по методу Эйлера:  $p_{ijk}(t + \delta) \approx p_{ijk}(t) + \delta p'_{ijk}(t)$ , используя соотношение (1.3.7) для вычисления  $\lambda_i(t) = \frac{(N-i)f(t)}{1-F(t)}$ , и по формуле (1.3.8) находится очередное  $f(t)$ . Затем вычисляется  $F(T)$  и сравнивается с 1. Если получено равенство (с точностью до некоторого  $\varepsilon$ , близкого к нулю), алгоритм завершает работу. Если это значение больше 1, то  $p_e$  уменьшается, а если меньше, то увеличивается. Далее алгоритм повторяется для нового значения  $p_e$ .

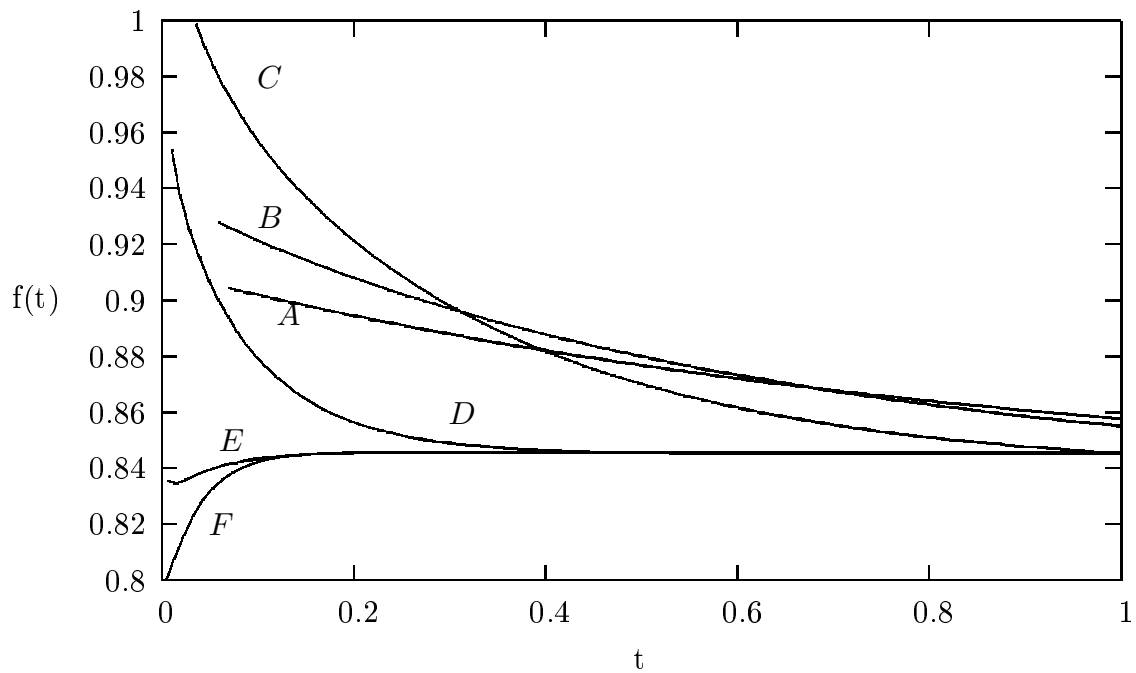


Рис. 1.7: Равновесные плотности  $f(t)$  при  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.1$ . График  $A$  для  $N = 1$ ,  $B$  для  $N = 5$ ,  $C$  для  $N = 20$ ,  $D$  для  $N = 100$ ,  $E$  для  $N = 200$ ,  $F$  для  $N = 300$

В таблице 1.5 приведены результаты вычисления равновесий для конкретных значений параметров системы. Рассматривается временной интервал работы системы  $[0, 1]$ . В системе первый сервер значительно уступает в производительности второму:  $\mu_1 = 1, \mu_2 = 10$ . Сравниваются равновесия для различного числа игроков в случаях высокой ( $r = 0.1$ ) и низкой ( $r = 0.9$ ) вероятностей попадания запроса на быстрый сервер. На рисунках 1.7 и 1.8 приведены графики соответствующих равновесных плотностей распределения моментов обращения в систему. Рисунок 1.9 показывает, как изменяется вид равновесных плотностей при изменении параметра  $r$  – вероятности, что обратившийся в систему игрок перенаправляется на первый сервер.

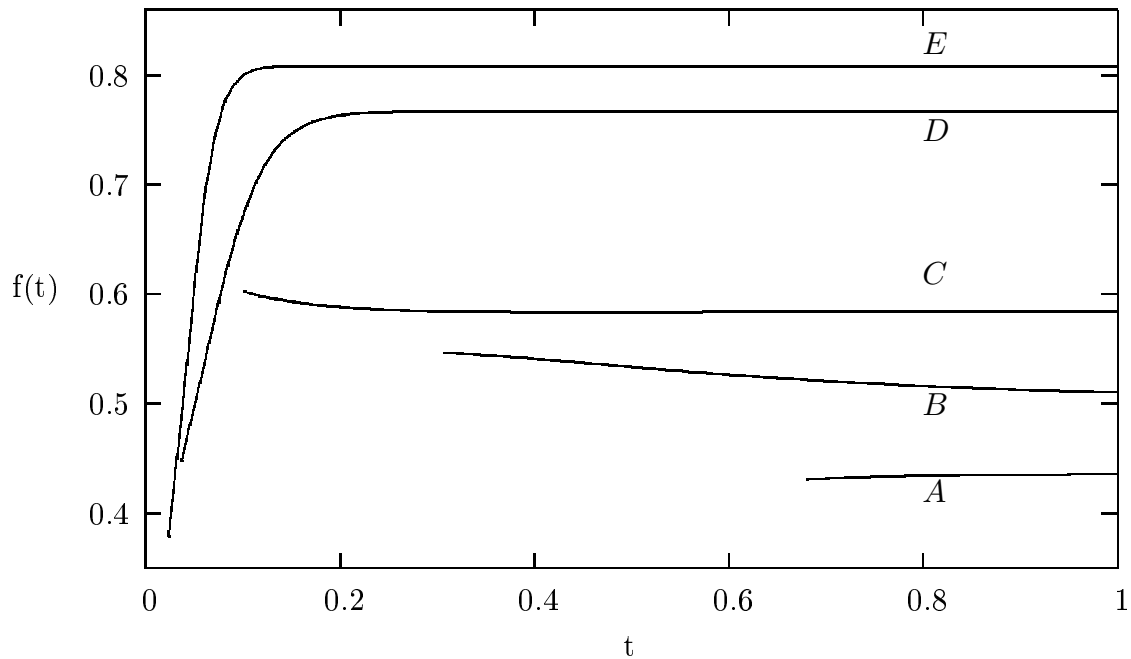


Рис. 1.8: Равновесные плотности  $f(t)$  при  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.9$ . График  $A$  для  $N = 1$ ,  $B$  для  $N = 5$ ,  $C$  для  $N = 20$ ,  $D$  для  $N = 100$ ,  $E$  для  $N = 200$

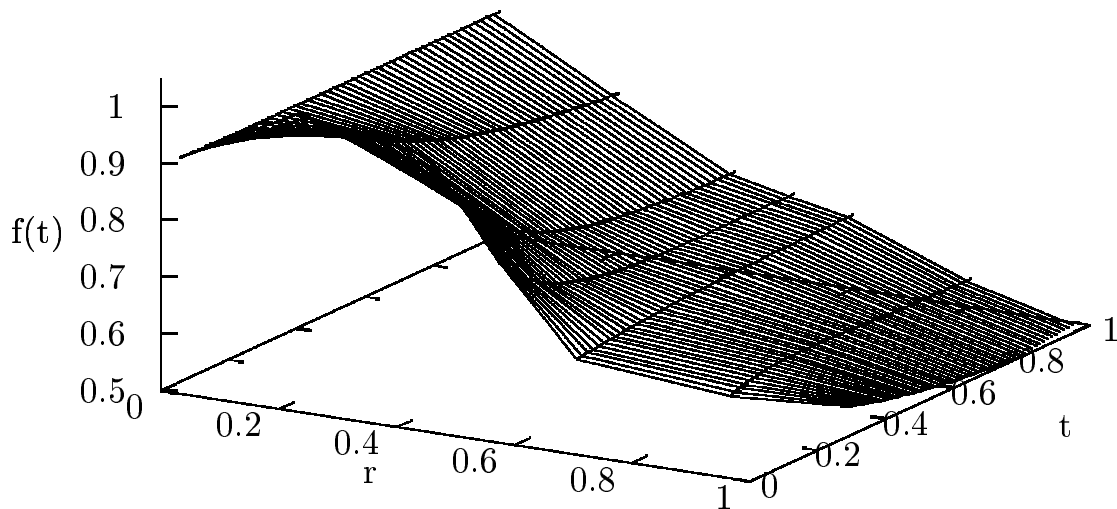


Рис. 1.9: Как изменение  $r$  изменяет вид стратегии при  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, N = 5$

### § 1.3.2 Случайное число игроков

Пусть теперь ни одному игроку не известно число его противников  $N$ , известно только, что  $N$  – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром  $\lambda$ . Пусть с вероятностью  $p_e$  каждый из противников обращается к системе в момент времени  $t = 0$ . Пусть случайная величина  $X_{p_e r}$  – число за-

просов, поступивших на первый сервер в нулевой момент времени, для каждого значения  $N$  ее распределение  $Bin(N, p_e r)$ . Аналогично  $X_{p_e \bar{r}}$  – число запросов, поступивших на второй сервер в нулевой момент времени, и для каждого значения величины  $N$  ее распределение  $Bin(N, p_e \bar{r})$ . Вероятность получить обслуживание в нулевой момент времени определена (1.3.1) и равна

$$C(p) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \times \left( r \sum_{i=0}^N C_N^i (p_e r)^i (1 - p_e r)^{N-i} \frac{1}{i+1} + \bar{r} \sum_{i=0}^N C_N^i (p_e \bar{r})^i (1 - p_e \bar{r})^{N-i} \frac{1}{i+1} \right).$$

Сумма в скобках равна правой части (1.3.4), отсюда получаем

$$\begin{aligned} C(p) &= e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \frac{2 - (1-pr)^{N+1} - (1-p\bar{r})^{N+1}}{p(N+1)} = \frac{e^{-\lambda}}{p\lambda} \times \\ &\times \left( 2 \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^{N+1}}{(N+1)!} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^{N+1} (1-pr)^{N+1}}{(N+1)!} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^{N+1} (1-p\bar{r})^{N+1}}{(N+1)!} \right) = \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{p\lambda} (2e^\lambda - e^{\lambda(1-pr)} - e^{\lambda(1-p\bar{r})}) = \frac{2 - e^{-\lambda pr} - e^{-\lambda p\bar{r}}}{\lambda p}. \end{aligned}$$

Найдем вероятность получения обслуживания в момент  $t_e > 0$  при условии, что вероятности обращений к системе на интервале  $(0, t_e)$  равны нулю. Эта вероятность равна

$$\begin{aligned} &1 - rP(X_{pr} \geq 1)e^{-\mu_1 t} - \bar{r}P(X_{p\bar{r}} \geq 1)e^{-\mu_2 t} = \\ &= 1 - r(1 - P(X_{pr} = 0))e^{-\mu_1 t} - \bar{r}(1 - P(X_{p\bar{r}} = 0))e^{-\mu_2 t} = \\ &= 1 - r \left( 1 - e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} (1-pr)^N \right) e^{-\mu_1 t} - \\ &\quad - \bar{r} \left( 1 - e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} (1-p\bar{r})^N \right) e^{-\mu_2 t} = \\ &= 1 - r(1 - e^{-\lambda pr})e^{-\mu_1 t} - \bar{r}(1 - e^{-\lambda p\bar{r}})e^{-\mu_2 t}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (1.3.2) для случая пуассоновского числа игроков имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{2 - e^{-\lambda p_e r} - e^{-\lambda p_e \bar{r}}}{\lambda p_e} &= \\ &= 1 - r(1 - e^{-\lambda p_e r})e^{-\mu_1 t_e} - \bar{r}(1 - e^{-\lambda p_e \bar{r}})e^{-\mu_2 t_e}. \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Если  $t_e(1) \geq T$ , то равновесной является чистая стратегия – обращение в систему в момент  $t = 0$  с вероятностью 1. Далее будем считать, что  $t_e(1) < T$ .



Необходимо найти равновесную плотность  $f(t)$  распределения моментов обращения к системе на интервале  $[t_e, T]$ . Определим марковский процесс с состояниями системы  $(i, j)$  в каждый момент времени  $t \in [t_e, T]$ , где  $i, j \in \{0, 1\}$  – состояния занятости первого и второго сервера соответственно (0 – свободен, 1 – занят). Интенсивность поступлений запросов в систему в каждый момент времени  $t$  равна  $\lambda f(t)$ . Система Колмогорова для вероятностей состояний системы  $p_{ij}$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} p'_{00}(t) &= -\lambda f(t)p_{00}(t) + \mu_1 p_{10}(t) + \mu_2 p_{01}(t), \\ p'_{10}(t) &= r\lambda f(t)p_{00}(t) - (\bar{r}\lambda f(t) + \mu_1)p_{10}(t) + \mu_2 p_{11}(t), \\ p'_{01}(t) &= \bar{r}\lambda f(t)p_{00}(t) - (r\lambda f(t) + \mu_2)p_{01}(t) + \mu_1 p_{11}(t), \\ p'_{11}(t) &= \lambda f(t)(rp_{01}(t) + \bar{r}p_{10}(t)) - (\mu_1 + \mu_2)p_{11}(t). \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Вероятность получить обслуживание в момент  $t \in [t_e, T]$  в равновесии постоянна для всех  $t \in [t_e, T]$  и равна  $p_{00}(t) + rp_{01}(t) + \bar{r}p_{10}(t) = C(p_e)$ . Тогда сумма соответствующих производных должна быть равна нулю. Отсюда, подставив в суммы производные вероятностей состояний из системы Колмогорова (1.3.16), получаем равновесную плотность:

$$f(t) = \frac{r\mu_1(p_{10}(t) + p_{11}(t)) + \bar{r}\mu_2(p_{01}(t) + p_{11}(t))}{\lambda(r^2(p_{00}(t) + p_{01}(t)) + \bar{r}^2(p_{00}(t) + p_{10}(t)))} \quad (1.3.17)$$

для  $t \in [t_e, T]$ .

Заметим, что в случае с одним сервером равновесная стратегия на интервале  $[t_e, T]$  представляет собой равномерное распределение. В нашем более общем случае это не так, даже для случая одинаковых серверов, из-за присутствия  $r^2$  и  $\bar{r}^2$  в знаменателе.

Определим для системы начальные условия – вероятности состояний в момент  $t_e$  при условии, что на  $(0, t_e)$  нет поступлений. Для каждого состояния  $(i, j)$  соответствующую вероятность можно найти как

$$p_{ij}(t_e) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \sum_{k=0}^N p_{ijk}^N(t_e),$$

где  $p_{ijk}^N(t_e)$  – вероятность состояния  $(i, j, k)$  в момент  $t_e$  для случая  $N$  игроков.

Тогда

$$\begin{aligned}
p_{00}(t_e) &= e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \sum_{k=0}^N C_N^k p_e^k (1-p_e)^{N-k} \times \\
&\times \left[ \mathbb{1}_{k=0} + \mathbb{1}_{k>0} \left( r^k (1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}^k (1 - e^{-\mu_2 t_e}) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{1}_{k>1} (1 - r^k - \bar{r}^k) (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e}) \right].
\end{aligned}$$

Преобразуем внутреннюю сумму

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^N C_N^k p_e^k (1-p_e)^{N-k} \times \\
&\times \left[ \mathbb{1}_{k=0} + \mathbb{1}_{k>0} \left( r^k (1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}^k (1 - e^{-\mu_2 t_e}) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{1}_{k>1} (1 - r^k - \bar{r}^k) (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e}) \right] = \\
&= \sum_{k=0}^N C_N^k p_e^k (1-p_e)^{N-k} \left[ \left( r^k (1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}^k (1 - e^{-\mu_2 t_e}) \right) + \right. \\
&\quad \left. + (1 - r^k - \bar{r}^k) (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e}) \right] + \\
&\quad + (1-p_e)^N (1 - (1 - e^{-\mu_1 t_e}) - (1 - e^{-\mu_2 t_e}) - \\
&\quad - (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e})) = \\
&= (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1-p_e)^N \sum_{k=0}^N C_N^k \left( \frac{p_e r}{1-p_e} \right)^k + \\
&\quad + (1 - e^{-\mu_2 t_e}) (1-p_e)^N \sum_{k=0}^N C_N^k \left( \frac{p_e \bar{r}}{1-p_e} \right)^k + \\
&\quad + (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e}) (1-p_e)^N \times \\
&\quad \times \sum_{k=0}^N C_N^k \left[ \left( \frac{p_e}{1-p_e} \right)^k - \left( \frac{p_e r}{1-p_e} \right)^k - \left( \frac{p_e \bar{r}}{1-p_e} \right)^k \right] + \\
&\quad + (1-p_e)^N (1 - (1 - e^{-\mu_1 t_e}) - (1 - e^{-\mu_2 t_e}) - \\
&\quad - (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e})) = \\
&= (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - p_e \bar{r})^N + (1 - e^{-\mu_2 t_e}) (1 - p_e r)^N + \\
&\quad + (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e}) \left[ 1 - (1 - p_e \bar{r})^N - (1 - p_e r)^N \right] + \\
&\quad + (1-p_e)^N (1 - (1 - e^{-\mu_1 t_e}) - (1 - e^{-\mu_2 t_e}) - \\
&\quad - (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e})) = \\
&= (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e}) + \\
&\quad + (1 - p_e r)^N ((1 - e^{-\mu_2 t_e}) - (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e})) + \\
&\quad + (1 - p_e \bar{r})^N ((1 - e^{-\mu_1 t_e}) - (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e})) + \\
&\quad + (1-p_e)^N (1 - (1 - e^{-\mu_1 t_e}) - \\
&\quad - (1 - e^{-\mu_2 t_e}) - (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e})).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
p_{00}(t_e) &= (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e}) + \\
&+ e^{-\lambda p_e r}((1 - e^{-\mu_2 t_e}) - (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})) + \\
&+ e^{-\lambda p_e \bar{r}}((1 - e^{-\mu_1 t_e}) - (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})) + \\
&+ e^{-\lambda p_e} (1 - (1 - e^{-\mu_1 t_e}) - (1 - e^{-\mu_2 t_e}) - \\
&- (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})).
\end{aligned}$$

После преобразования получаем следующее выражение для  $p_{00}(t_e)$  и аналогично для остальных вероятностей состояний в момент  $t_e$ .

$$\begin{aligned}
p_{00}(t_e) &= (1 - e^{-r\lambda p_e})(1 - e^{-\mu_1 t_e})e^{-\bar{r}\lambda p_e} + \\
&+ e^{-r\lambda p_e}(1 - e^{-\bar{r}\lambda p_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e}) + \\
&+ (1 - e^{-r\lambda p_e})(1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\bar{r}\lambda p_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e}) + e^{-\lambda p_e}, \\
p_{10}(t_e) &= (1 - e^{-r\lambda p_e})e^{-\mu_1 t_e}(e^{-\bar{r}\lambda p_e} + (1 - e^{-\bar{r}\lambda p_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})), \\
p_{01}(t_e) &= (1 - e^{-\bar{r}\lambda p_e})e^{-\mu_2 t_e}(e^{-r\lambda p_e} + (1 - e^{-r\lambda p_e})(1 - e^{-\mu_1 t_e})), \\
p_{11}(t_e) &= (1 - e^{-r\lambda p_e})e^{-\mu_1 t_e}(1 - e^{-\bar{r}\lambda p_e})e^{-\mu_2 t_e}.
\end{aligned} \tag{1.3.18}$$

Таким образом, имеется задача Коши с системой дифференциальных уравнений (1.3.16) и начальными условиями (1.3.18). Ее решение дает вероятности состояний  $p_{ij}(t)$ , зависящие от параметра  $p_e$ . С известными вероятностями состояний выражение (1.3.17) определяет равновесную плотность распределения моментов обращения  $f(t)$  на интервале  $[t_e, T]$ , также зависящую от параметра  $p_e$ . Необходимо, чтобы положительная плотность распределения моментов обращения заканчивалась точно в момент  $T$ , поэтому значение параметра  $p_e$  выбирается так, чтобы

$$p_e + \int_{t_e}^T f(t)dt = 1. \tag{1.3.19}$$

В итоге вышеизложенного анализа получаем следующую теорему.

**Теорема 1.11.** *Любое симметричное равновесное по Нэшу распределение моментов обращения к системе обслуживания с двумя серверами со случайным доступом и потерями с функцией распределения  $F(t)$  на интервале  $[0, T]$  обладает следующими свойствами:*

1. Существует строго положительная вероятность обращения в нулевой момент времени  $p_e = F(0) > 0$ .
2. На интервале  $(0, t_e)$  игроки обращаются в систему с нулевой вероятностью, где  $t_e$  удовлетворяет уравнению (1.3.15).
3. Если для  $p_e = 1$  решение уравнения (1.3.15) дает  $t_e > T$ , то равновесная стратегия – чистая стратегия, когда все игроки обращаются в систему в нулевой момент времени.
4. Иначе,  $p_e < 1$  и на интервале  $[t_e, T]$  существует непрерывная положительная плотность распределения моментов обращения в систему  $f(t)$ , определяемая выражением (1.3.17).
5. Равновесная вероятность обращения в нулевой момент времени находится из уравнения (1.3.19).
6.  $C(p_e) = \frac{2 - e^{-\lambda p_e T} - e^{-\lambda p_e \bar{T}}}{\lambda p_e}$  – вероятность получить обслуживание на всем носителе стратегии.

**Лемма 1.12.** Функция распределения  $F(t)$ , являющаяся решением (1.3.15) и (1.3.17) для заданного значения начального условия  $F(0) = p$ , возрастает по значению  $p$  в любой точке интервала  $[0, T]$ .

*Доказательство.* Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 1.11 для случая фиксированного числа игроков. □

Тогда, как и в случае для фиксированного числа игроков, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.12.** Симметричное равновесное распределение поступлений  $F$ , определенное в теореме 1.11, существует и единственно.

### Численные примеры

Для нахождения равновесий в рассматриваемой задаче при  $\lambda > 0$  используется численный алгоритм, являющийся комбинацией методов дихотомии решения уравнений с одним неизвестным и метода Эйлера решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Сначала проверяется,

что  $t_e(1) < T$ , иначе равновесной является чистая стратегия, когда все игроки обращаются в систему в нулевой момент времени. Далее выбирается некоторое начальное значение  $p_e$ , для него находится  $t_e$  как решение уравнения (1.3.15). В точке  $t_e$  вычисляются начальные значения для системы (1.3.16) и  $f(t_e)$ . Для каждой следующей точки разбиения отрезка  $[t_e, T]$  строится решение обеих систем по методу Эйлера:  $p_{ij}(t+\delta) \approx p_{ij}(t) + \delta p'_{ij}(t)$ , и по формуле (1.3.17) находится очередное  $f(t)$ . Затем вычисляется  $F(T)$  и сравнивается с 1. Если получено равенство (с точностью до некоторого  $\varepsilon$ , близкого к нулю), алгоритм завершает работу. Если это значение больше 1, то  $p_e$  уменьшается, а если меньше, то увеличивается. Далее алгоритм повторяется для нового значения  $p_e$ .

В таблице 1.6 приведены результаты вычисления равновесий для конкретных значений параметров системы. Рассматривается временной интервал работы системы  $[0, 1]$ . В системе первый сервер значительно уступает в производительности второму:  $\mu_1 = 1, \mu_2 = 10$ . Сравняются равновесия для различного числа игроков в случаях высокой ( $r = 0.1$ ) и низкой ( $r = 0.9$ ) вероятностей попадания запроса на быстрый сервер. На рисунках 1.10 и 1.11 приведены графики соответствующих равновесных плотностей распределения моментов обращения в систему. Рисунок 1.12 показывает, как изменяется вид равновесных плотностей при изменении параметра  $r$  – вероятности, что обратившийся в систему игрок перенаправляется на первый сервер.

### § 1.3.3 Цена анархии

Для данной чисто случайной схемы доступа можно найти верхнюю оценку цены анархии. Сначала рассмотрим случай фиксированного  $N$ . Полезность клиента определяется как его вероятность получения обслуживания с учетом профиля поступления запросов всех клиентов (включая его самого). Следовательно, общая социальная полезность — это ожидаемое число клиентов, получивших обслуживание. Очевидно, что социальный оптимум не может быть лучше, чем в случае оптимума для рационально случайной схемы доступа (раздел § 1.2.3), когда оба сервера непрерывно выполняют запросы, причем каждый из серверов получит очередной запрос сразу после завершения выполнения предыду-

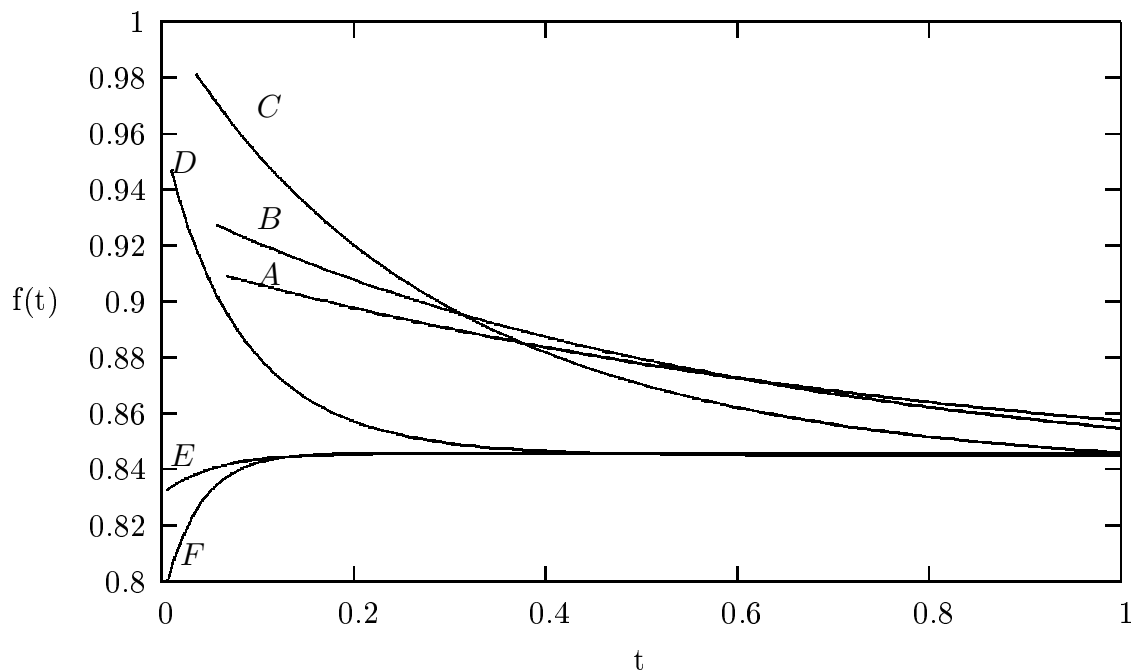


Рис. 1.10: Равновесные плотности  $f(t)$  при  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.1$ . График  $A$  для  $\lambda = 1$ ,  $B$  для  $\lambda = 5$ ,  $C$  для  $\lambda = 20$ ,  $D$  для  $\lambda = 100$ ,  $E$  для  $\lambda = 200$ ,  $F$  для  $\lambda = 300$

щего. Причина заключается в возможности потерь запросов в случае, когда один из серверов свободен, в отличие от рационально случайной схемы доступа. Это значит, что социально-оптимальная полезность не превышает значение  $\min\{(\mu_1 + \mu_2)T + 2, N + 1\}$ . В равновесии полезность системы равна  $(N + 1)C(t)$ , где  $C(t)$  – равновесная вероятность попасть на обслуживание для запроса.

Цена анархии определяется как отношение между социально-оптимальной полезностью и полезностью в равновесии. Для случаев, представленных в примерах для фиксированного  $N$  (таб. 1.5 и рис. 1.7 и 1.8), найдены значения верхних оценок социально-оптимальной полезности, значения равновесной полезности и соответствующие значения верхних оценок цены анархии (таблица 1.7).

Предположим теперь, что число игроков  $N$  – случайная величина с распределением Пуассона с параметром  $\lambda$ . Тогда социально-оптимальная полезность не превышает  $\min\{(\mu_1 + \mu_2)T + 2, \lambda + 1\}$ . В равновесии социальная полезность системы равна  $(\lambda + 1)C(t)$ , где  $C(t)$  – равновесная вероятность получения обслуживания для запроса.

Найдем теперь цену анархии как отношение между социально-оптимальной

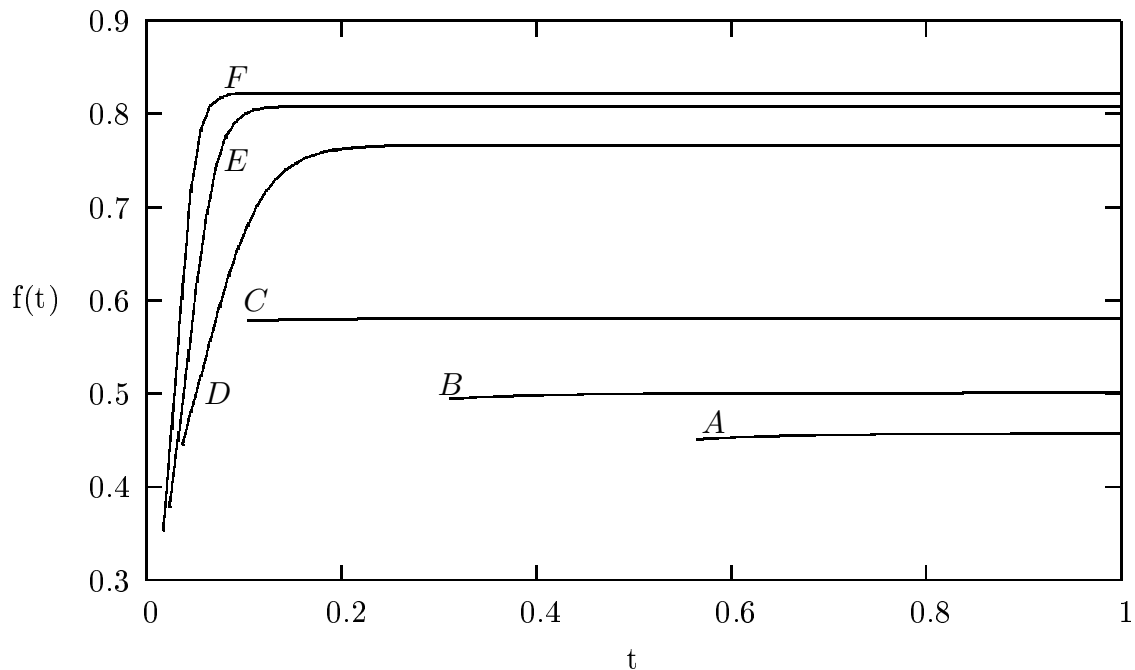


Рис. 1.11: Равновесные плотности  $f(t)$  при  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.9$ . График  $A$  для  $\lambda = 1$ ,  $B$  для  $\lambda = 5$ ,  $C$  для  $\lambda = 20$ ,  $D$  для  $\lambda = 100$ ,  $E$  для  $\lambda = 200$ ,  $F$  для  $\lambda = 300$

полезностью и полезностью в равновесии. Для случаев, представленных в примерах для случайного числа игроков (таб. 1.6 и рис. 1.10 и 1.11), найдены значения социально-оптимальной и равновесной полезности и соответствующие значения цены анархии (таблица 1.8).

По результатам вычислений в таб. 1.7 и 1.8 в обоих случаях, с фиксированным и случайным числом игроков, видно, что значение верхней оценки цены анархии с ростом числа игроков сначала растет, затем уменьшается, что согласуется с результатами для одного сервера [169].

## § 1.4 Сравнение эффективности схем доступа

### Фиксированное число игроков

Сравним эффективность систем с различными схемами доступа к серверам. Первая – это система с одним сервером. Вторая – модель со случайным доступом, где система, перенаправляющая запросы на серверы, не имеет информации о занятости серверов. Рассмотрим на примере проблему: что лучше – использовать два сервера или один с производительностью, равной сумме про-

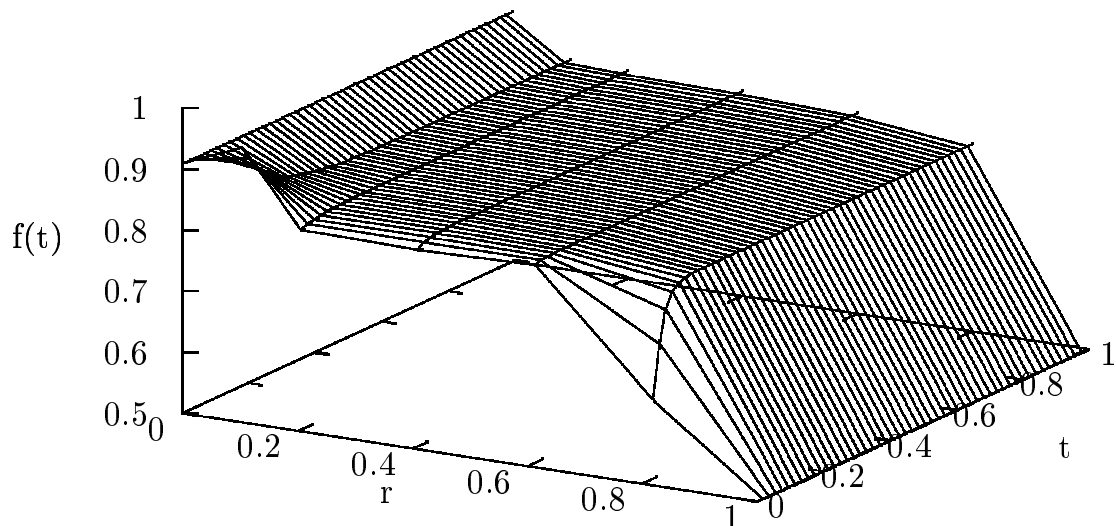


Рис. 1.12: Как изменение  $r$  меняет вид стратегии при  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, \lambda = 100$

изводительностей двух серверов. Пусть в двухсерверной системе два сервера с интенсивностями обслуживания  $\mu_1 = 1, \mu_2 = 10$ . В односерверной системе  $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 11$ . Рассматривается временной интервал работы системы  $[0, 1]$ . В качестве критерия эффективности системы возьмем равновесный выигрыш игрока, то есть равновесную вероятность получения обслуживания в системе, которая прямо пропорциональна ожидаемому числу обслуженных системой запросов. На рисунке 1.13 сравнивается эффективность систем для различного числа игроков  $N$ . Кривые представленных графиков располагаются друг над другом, не пересекаясь, и соответствуют следующим случаям в порядке убывания эффективности сверху вниз:

- 1) система с двумя серверами с рациональным случайным доступом, высокая вероятность попадания на быстрый сервер  $r = 0.1$ ;
- 2) система с двумя серверами с рациональным случайным доступом, низкая вероятность попадания на быстрый сервер  $r = 0.9$ ;
- 3) система с двумя серверами со случайным доступом, высокая вероятность попадания на быстрый сервер  $r = 0.1$ ;
- 4) система с одним сервером;
- 5) система с двумя серверами со случайным доступом, низкая вероятность попадания на быстрый сервер  $r = 0.9$ .



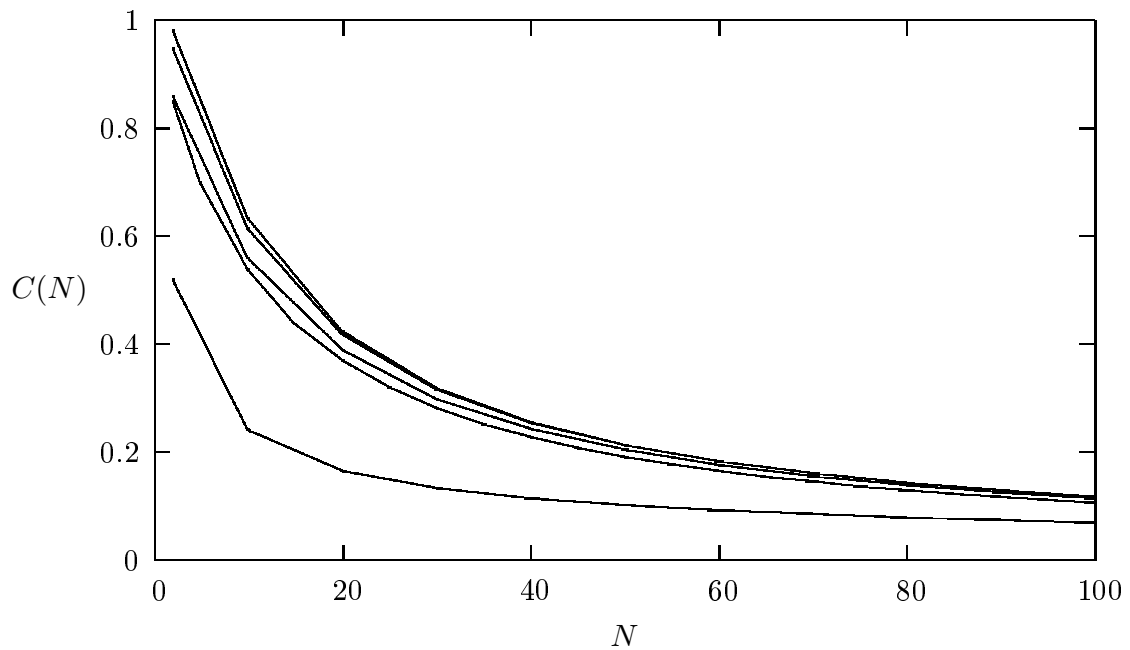


Рис. 1.13: Изменение эффективности различных систем с изменением числа игроков

### Пуассоновское число игроков

Сравним, как и в случае фиксированного числа игроков, эффективность систем с различными схемами доступа к серверам на примере: что лучше — использовать два сервера или один с производительностью, равной сумме производительностей двух серверов. Пусть в двухсерверной системе два сервера с интенсивностями обслуживания  $\mu_1 = 1, \mu_2 = 10$ . В односерверной системе  $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 11$ . Рассматривается временной интервал работы системы  $[0, 1]$ . В качестве критерия эффективности системы возьмем равновесную вероятность получения обслуживания в системе, которая прямо пропорциональна ожидаемому числу обслуженных системой запросов. На рисунке 1.14 сравнивается эффективность систем для различных величин  $\lambda$ . Как и в случае фиксированного числа игроков, кривые представленных графиков располагаются друг над другом, не пересекаясь, и соответствуют следующим случаям в порядке убывания эффективности сверху вниз:

- 1) система с двумя серверами с рациональным случайным доступом, высокая вероятность попадания на быстрый сервер  $r = 0.1$ ;
- 2) система с двумя серверами с рациональным случайным доступом, низкая вероятность попадания на быстрый сервер  $r = 0.9$ ;

- 3) система с двумя серверами со случайным доступом, высокая вероятность попадания на быстрый сервер  $r = 0.1$ ;
- 4) система с одним сервером;
- 5) система с двумя серверами со случайным доступом, низкая вероятность попадания на быстрый сервер  $r = 0.9$ .

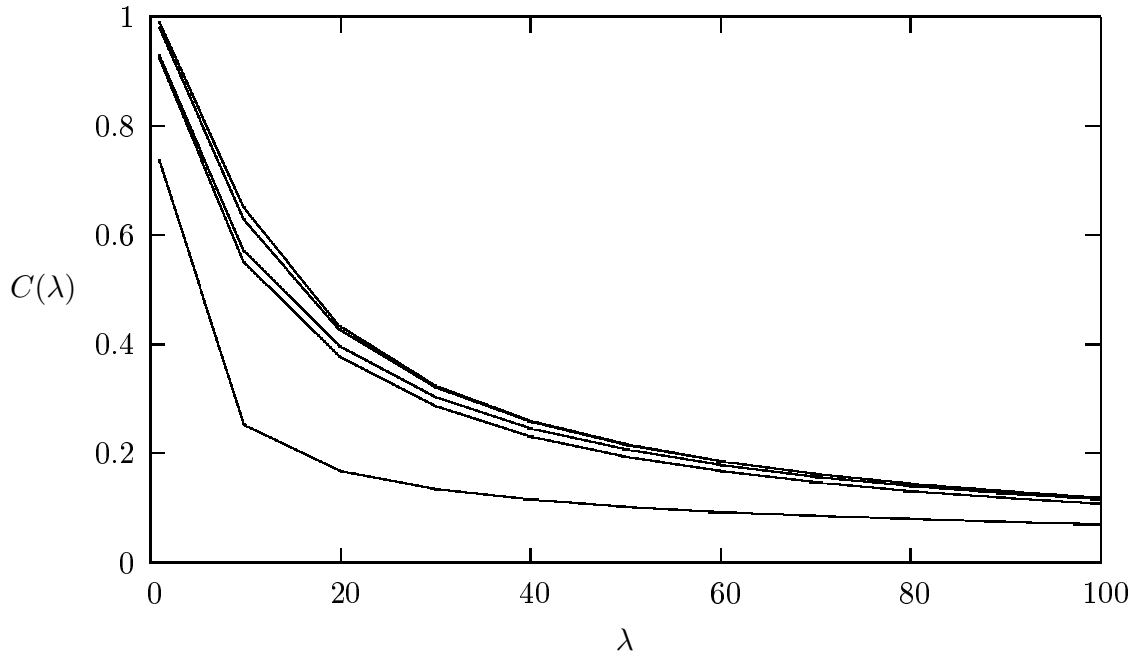


Рис. 1.14: Изменение эффективности различных систем с изменением  $\lambda$

## § 1.5 Результаты

Построена модель игры выбора моментов обращения к системе обслуживания со случайным доступом в двух постановках: рационально случайный и чисто случайный доступ, каждая из которых исследована для случая известного и случайного числа игроков, имеющего распределение Пуассона. Для всех рассмотренных вариантов игры доказано существование единственного симметричного равновесия, такого что с некоторой положительной вероятностью  $p_e$  пользователи обращаются к системе в нулевой момент времени, и далее существует интервал времени  $[t_e, T]$ , на котором определена положительная плотность распределения моментов обращения в систему. Для случая двух игроков в системе с чисто случайным доступом равновесие найдено аналитически и показана-

но, что равновесное распределение на интервале  $[t_e, T]$  имеет экспоненциальный вид. Для обеих постановок предложены алгоритмы для численного нахождения равновесий. Данные алгоритмы положены в основу реализации программной системы, позволяющей графически представлять равновесные стратегии. Проведены численные эксперименты по сравнению равновесий при различных значениях параметров модели. Также предложено сравнение конкурентного и кооперативного поведения в системе обслуживания, основанное на применении цены анархии для фиксированного и случайного количества игроков.

Возможны следующие пути развития данной модели. Во-первых, результат легко может быть обобщен на произвольное количество серверов. Результаты качественно останутся такими же, увеличится число переменных и уравнений. Численные эксперименты для числа серверов больше двух могут дать интересные результаты. Например, таким образом можно решать прикладные задачи определения оптимального выбора вероятностей доступа к серверам  $r$  с целью максимизировать производительность системы, то есть ожидаемое число обслуженные системой запросов. Также возможно ввести в обе модели функцию комфорта [7] для исследования ее влияния на вид равновесия.

Таблица 1.3: Социально-оптимальная и равновесная полезности и цена анархии для  $T = 1$  при фиксированном числе игроков

$N$	Социально-оптимальная полезность	Равновесная полезность	Цена анархии
$r = 0.1$			
2	3	2,94421	1,01895
10	11	6,95698	1,58115
20	13	8,89018	1,46229
30	13	9,8753	1,31642
40	13	10,47866	1,24062
50	13	10,88274	1,19455
60	13	11,17517	1,16329
70	13	11,40015	1,14034
80	13	11,57158	1,12344
90	13	11,70887	1,11027
100	13	11,82533	1,09933
$r = 0.9$			
2	3	2,84227	1,0555
10	11	6,74274	1,63138
20	13	8,76762	1,48273
30	13	9,79837	1,32675
40	13	10,424	1,24712
50	13	10,84449	1,19876
60	13	11,14637	1,1663
70	13	11,37151	1,14321
80	13	11,55063	1,12548
90	13	11,6941	1,11167
100	13	11,81145	1,10063

Таблица 1.4: Социально-оптимальная и равновесная полезности и цена анархии для  $T = 1$  при случайном числе игроков

$\lambda$	Социально-оптимальная полезность	Равновесная полезность	Цена анархии
$r = 0.1$			
2	3	1,98137	1,0094
10	11	7,12686	1,54346
20	13	9,09643	1,42913
30	13	10,06418	1,29171
40	13	10,64564	1,22116
50	13	11,03571	1,17799
60	13	11,31444	1,14897
70	13	11,52394	1,12809
80	13	11,68628	1,11242
90	13	11,81599	1,1002
100	13	11,92207	1,09041
$r = 0.9$			
2	3	1,96119	1,01979
10	11	6,88529	1,59761
20	13	8,9555	1,45162
30	13	9,97871	1,30277
40	13	10,58603	1,22803
50	13	10,99233	1,18264
60	13	11,28	1,15248
70	13	11,49605	1,13082
80	13	11,66574	1,11437
90	13	11,79916	1,10177
100	13	11,9092	1,09159

Таблица 1.5: Равновесные характеристики

$N$	$r = 0.1$			$r = 0.9$		
	$p_e$	$t_e$	$C(p_e)$	$p_e$	$t_e$	$C(p_e)$
1	0.185	0.070	0.924	0.861	0.681	0.647
5	0.171	0.060	0.713	0.636	0.307	0.346
10	0.160	0.050	0.557	0.555	0.178	0.240
20	0.150	0.037	0.389	0.474	0.101	0.164
100	0.155	0.011	0.114	0.278	0.038	0.0069
200	0.160	0.006	0.061	0.223	0.024	0.044

Таблица 1.6: Равновесные характеристики

$\lambda$	$r = 0.1$			$r = 0.9$		
	$p_e$	$t_e$	$C(p_e)$	$p_e$	$t_e$	$C(p_e)$
1	0.181	0.068	0.929	0.802	0.566	0.737
5	0.17	0.059	0.725	0.656	0.312	0.374
20	0.15	0.037	0.396	0.48	0.105	0.168
100	0.155	0.011	0.115	0.279	0.039	0.069
200	0.16	0.066	0.061	0.224	0.024	0.044
300	0.1598	0.004	0.042	0.202	0.018	0.033

Таблица 1.7: Оценки полезности и цены анархии для  $T = 1$  при фиксированном числе игроков

$N$	Социально-оптимальная полезность	Равновесная полезность	Цена анархии
$r = 0.1$			
2	3	2,57975	1,1629
10	11	6,12829	1,79496
20	13	8,16145	1,59286
30	13	9,25851	1,40411
40	13	9,94402	1,30732
50	13	10,41608	1,24807
60	13	10,76155	1,208
70	13	11,02663	1,17896
80	13	11,23436	1,15716
90	13	11,40101	1,14025
100	13	11,54226	1,1263
$r = 0.9$			
2	3	1,55616	1,92783
10	11	2,63993	4,16677
20	13	3,45573	3,76187
30	13	4,11016	3,1629
40	13	4,67584	2,78025
50	13	5,17494	2,51211
60	13	5,61932	2,31345
70	13	6,01642	2,16075
80	13	6,37461	2,03934
90	13	6,69621	1,9414
100	13	6,98997	1,85981

Таблица 1.8: Оценки полезности и цены анархии для  $T = 1$  при случайном числе игроков

$\lambda$	Социально-оптимальная полезность	Равновесная полезность	Цена анархии
$r = 0.1$			
2	3	1,85917	1,07575
10	11	6,24838	1,76046
20	13	8,31385	1,56366
30	13	9,41044	1,38144
40	13	10,08958	1,28846
50	13	10,54924	1,23232
60	13	10,88511	1,19429
70	13	11,14154	1,1668
80	13	11,33834	1,14655
90	13	11,50085	1,13035
100	13	11,63247	1,11756
$r = 0.9$			
2	3	1,47429	1,35658
10	11	2,76107	3,98396
20	13	3,53299	3,67961
30	13	4,16776	3,11918
40	13	4,72209	2,75302
50	13	5,21479	2,49291
60	13	5,65477	2,29895
70	13	6,04911	2,14908
80	13	6,40594	2,02937
90	13	6,72618	1,93275
100	13	7,01938	1,85201



## Глава 2

# Выбор момента обращения к системе обслуживания с вытеснением

Мы рассматриваем односерверную систему массового обслуживания со стратегическими пользователями. Клиенты (игроки) обращаются к системе с вытеснением [63] в течение фиксированного интервала времени  $[0, T]$ . Как только клиент поступает в систему, сервер сразу начинает его обслуживание. Но когда в систему поступает очередной запрос, текущий запрос покидает систему, даже если он еще не закончил свое обслуживание, в отличие от модели в [53], где текущий запрос перемещается в очередь для возобновления обслуживания позже.

Такая дисциплина обслуживания выглядит странно и несправедливо, но в реальной жизни она часто встречается в системах без какого-либо управления доступом. В природе животные метят свою территорию и обмениваются метками в брачный период – последний является хозяином, пока следующий не оставит свою метку. Следующий пример – доска объявлений. Клиент прикрепляет свое объявление на доску и оно работает до тех пор, пока новый клиент не прикрепит свое объявление, закрывая предыдущее. Аналогичная ситуация и с граффити на стенах. Другой пример – доступ к объектам общего доступа. Например, наблюдая за каким-то арт-объектом, пользователь покидает его, чтобы освободить место для следующего посетителя. Или мы можем рассмотреть веб-камеру с открытым доступом (например, <http://webcam.anw.at/>), которая может изменять угол обзора в соответствии с командами пользователя. Когда один пользователь взаимодействует с таким сервисом, другой пользователь

может перехватить управление. Еще одна интерпретация дается в статье [182], где каждый из фермеров хочет определить оптимальное время для размещения своего продукта на рынке до следующего сезона сбора урожая, максимизируя цену, увеличивающуюся со временем, но уменьшающуюся с увеличением числа продавцов. Если предположить, что покупатели выбирают только последнего продавца со свежим товаром и игнорируют всех предыдущих продавцов, мы получаем модель, близкую к рассматриваемой в данной главе.

Существуют системы передачи данных, в которых важна не целостность информации, а ее актуальность. Таковы приложения для потоковой передачи аудио и видео. Обмен данными в таких приложениях реализован на основе протокола UDP (User Datagram Protocol). Передаваемый поток данных разбивается на фрагменты — пакеты данных, возможно разного размера. Они отправляются по сети асинхронно и без подтверждения доставки. В процессе передачи пакеты могут задерживаться, и следующий пакет может быть не полностью доставлен до получения следующего пакета. При анализе таких систем важно понимать, что высокие исходящие потери — это норма, так как UDP-трафик не требует подтверждения. Использование надежных протоколов, таких как TCP, неизбежно привело бы к большим задержкам при обмене данными, что недопустимо при необходимости обмена видео- и аудиоинформацией в режиме реального времени. Поэтому используется UDP, который является ненадежным протоколом передачи данных. Это означает, что сторона, отправляющая пакеты, может отправлять столько трафика, сколько может принять сетевая система, не беспокоясь о потерях из-за сетевых задержек. Адресат своевременно обрабатывает ту часть информации, которая была получена. Поскольку пакетов много, успешно доставленных пакетов достаточно для непрерывного воспроизведения видео в точке приема. Качество видео зависит от процента потерь доставки. Потери UDP определяют степень комфорта пользователя при работе с такими приложениями. Высокий процент потерь приводит к сильному искажению (jitter) и задержкам аудио и видео. Если есть несколько устройств (камеры, датчики и т. д.), отправляющих потоковую информацию, они могут конкурировать за доставку своих пакетов. Эту систему передачи данных также можно рассматривать

как систему с вытесняющим доступом.

В этой главе мы применяем теоретико-игровой подход к системе обслуживания с вытеснением с одним сервером. Очередь формируется стратегическими игроками. Стратегия игрока состоит в том, чтобы выбрать момент для входа в систему. Мы предполагаем, что каждый игрок старается максимизировать вероятность полного выполнения своего запроса.

## § 2.1 Система обслуживания

Опишем нашу модель более подробно в общей постановке. Предположим, что существует один сервер, который обслуживает  $N + 1$  запросов, представленных в системе в начальный момент времени  $t = 0$ . В отличие от обычной установки теории массового обслуживания, эти запросы используют некоторую стратегию для выбора момента на интервале времени  $[0, T]$  для обращения к серверу. По симметрии эта стратегия одинакова для каждого пользователя. Эта стратегия определяется искомой функцией распределения, которая определяет момент попытки обращения к серверу.

Когда приходит запрос, то он занимает сервер на экспоненциально распределенное время с параметром  $\mu$ . Но когда в систему приходит следующий запрос, текущий должен покинуть систему, даже если он еще не закончил свое обслуживание. В системе нет очередей. Сервер может одновременно выполнять только один запрос. Может случиться так, что в систему одновременно поступит несколько клиентов. Тогда сервер с равной вероятностью выбирает для обслуживания один из текущих поступивших запросов.

В теории массового обслуживания обычно предполагается, что структура входного процесса и процесса обслуживания predetermined и определяется интенсивностью поступления и временем обслуживания заявок. Здесь входной процесс фактически формируется стратегическими клиентами, которым стараются максимизировать вероятность быть обслуженными в системе.

## § 2.2 Модель игры

Рассмотрим задачу нахождения оптимальной дисциплины поступления запросов в систему как некооперативную игру. Здесь игроки — это пользователи системы, отправляющие свои запросы на обслуживание. Обозначим через  $S$  множество игроков. Число игроков  $N + 1 = |S|$  может быть фиксированным или случайной величиной. Каждый игрок сам выбирает время отправки своего запроса в систему, стремясь максимизировать вероятность обслуживания своего запроса. Чистая стратегия игрока  $i$  — это время поступления  $t_i$  его запроса в систему. Смешанной стратегией игрока  $i$  называется функция распределения  $F_i(t)$  (с плотностью  $f_i(t)$ ) моментов поступления в систему на интервале времени  $[0, T]$ . Пусть  $F = \{F_i(t), i \in S\}$  — профиль стратегий.

Все игроки одинаковы, независимы и демонстрируют эгоистичное поведение без кооперации. В качестве критерия оптимальности выбираем симметричное равновесие по Нэшу. В таком случае, стратегии всех игроков совпадают, т. е.  $F_i(t) = F(t)$  для всех  $i$ .

**Определение 2.1.** *Функция распределения  $F(t)$  моментов прихода  $t$  в систему является симметричным равновесием по Нэшу, если существует константа  $C$  такая, что в любой момент времени  $t \in [0, T]$  вероятность обслуживания не превосходит  $C$  и равна  $C$  на носителе  $F(t)$ .*

Для нахождения равновесия Нэша в этой игре воспользуемся следующим подходом. Предположим, что все игроки  $\{1, 2, \dots, N\}$  используют одну и ту же смешанную стратегию  $F(t), t \in [0, T]$ . Затем находим наилучший ответ игрока  $N + 1$  на описанную стратегию  $F(t)$ . В качестве функции выигрыша игрока  $N + 1$  будем рассматривать вероятность обслуживания его запроса. Таким образом, задача игрока  $N + 1$  состоит в том, чтобы выбрать стратегию, максимизирующую его функцию выигрыша. В силу симметрии задачи в равновесии оптимальная стратегия игрока  $N + 1$  должна совпадать с выбранной стратегией его противников. Для этого достаточно, чтобы стратегия игрока  $N + 1$  была выбрана таким образом, чтобы функция выигрыша игрока  $N + 1$  принимала постоянное значение на носителе функции распределения  $F(t)$  [147]. Получает-

ся, что лучший ответ игрока  $N + 1$  для смешанных стратегий его противников  $F_i(t) = F(t), i = 1, \dots, N$  совпадает с  $F(t)$ . Таким образом,  $F(t)$  является равновесием Нэша в этой игре.

Мы рассматриваем данную задачу в двух постановках. В первом случае количество игроков фиксировано, и известно каждому игроку. Во втором случае каждый игрок знает, что количество противников имеет распределение Пуассона с заданным параметром.

Следующая лемма определяет структуру стратегий игроков в равновесии по Нэшу.

**Лемма 2.1.** *Носитель равновесной стратегии содержит атом в точке  $t = T$ , т.е. равновесная вероятность  $p$  поступлений запросов в момент  $T$  строго положительна. Кроме того, существует интервал времени  $(t_e, T)$  без поступления запросов в систему.*

*Доказательство.* Действительно, вероятность поступления запросов в систему в момент времени  $t = T$  строго положительна. Предположим, что это неверно, т.е. в этот момент никто не отправляет свои запросы в систему. Тогда любой игрок отклоняясь от равновесия и посылая свой запрос в систему в момент времени  $T$  получает обслуживание с вероятностью 1. Следовательно, существует положительная вероятность обратиться в момент  $T$  в состоянии равновесия.

Предположим, что  $X_p$  — случайная величина, представляющая количество запросов, поступивших в момент времени  $T$ . Вероятность того, что запрос, поступающий в момент  $T$ , получает обслуживание, равна

$$E \left[ \frac{1}{X_p + 1} \right] = P(X_p = 0) + E \left[ \frac{1}{X_p + 1} | X_p > 0 \right].$$

Рассмотрим момент  $t$  такой, что на интервале  $(t, T)$  нет поступлений. Вероятность того, что запрос, поступающий в момент  $t$ , получает обслуживание, равна

$$P(X_p = 0) + P(X_p > 0)(1 - e^{-\mu(T-t)}) = 1 - P(X_p > 0)e^{-\mu(T-t)},$$

она очевидно убывает по  $t$ .

Рассмотрим момент  $t = T-$ . Вероятность, что запрос, поступающий в момент  $T-$ , получит обслуживание, равна

$$\lim_{t \rightarrow T-} P(X_p = 0) + P(X_p > 0)(1 - e^{-\mu(T-t)}) = P(X_p = 0),$$

что меньше, чем если бы запрос пришел в момент  $T$ .

Таким образом, выигрыш игрока уменьшается до момента  $T-$  и остается меньше, чем в момент  $T$ , при условии, что никто не отправлял запросы в систему в течение периода  $(t, T)$ . Этим и объясняется существование интервала времени  $[t_e, T)$  без заявок, поступивших до момента  $T$ .  $\square$

Предположим, что известна равновесная вероятность  $p$  поступления запроса в момент времени  $T$ , где  $0 < p \leq 1$ . Покажем, что выигрыш игрока является убывающей функцией на интервале  $(t_e, T)$ . Следовательно, существует момент  $t_e$  (возможно, отрицательный), когда выигрыши в моменты  $t_e$  и  $T$  совпадают. Тогда

$$E \left[ \frac{1}{X_p + 1} \right] = 1 - P(X_p > 0)e^{-\mu(T-t)}. \quad (2.2.1)$$

**Лемма 2.2.** *В игре с двумя игроками уравнение (2.2.1) определяет значение  $t_e$ , которое не зависит от  $p$ . В игре с  $N + 1 \geq 3$  игроками уравнение (2.2.1) определяет функцию  $t_e(p)$ , которая строго возрастает по  $p$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим игру с двумя игроками, то есть  $N = 1$ . Уравнение (2.2.1) примет вид

$$(1 - p) \cdot 1 + p \frac{1}{2} = 1 - p \left( 1 - e^{-\mu(T-t_e)} \right).$$

Отсюда

$$t_e = T - \frac{1}{\mu} \log 2.$$

Мы видим, что  $t_e$  не зависит от  $p$ .

Пусть  $N = n \geq 2$ . Уравнение (2.2.1) может быть представлено как

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 - (1 - (1-p)^n) e^{-\mu(T-t_e)}. \quad (2.2.2)$$

Перепишем (2.2.2) как

$$e^{-\mu(T-t_e)} = \frac{1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{1 - (1-p)^n}. \quad (2.2.3)$$

Дифференцируя (2.2.3) по  $p$ , получим

$$\mu e^{-\mu(T-t_e)} \frac{dt_e}{dp} = \frac{(1 - (1-p)^n)^2 - n^2 p^2 (1-p)^{n-1}}{(n+1)(1 - (1-p)^n)^2 p^2}. \quad (2.2.4)$$

Из неравенства Коши

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} (1-p)^i}{n} \geq \left( \prod_{i=0}^n (1-p)^i \right)^{\frac{1}{n}} = (1-p)^{\frac{n-1}{2}}$$

получим

$$(1 - (1-p)^n)^2 = p^2 \left( \sum_{i=0}^{n-1} (1-p)^i \right)^2 \geq n^2 p^2 (1-p)^{n-1}.$$

Наконец, правая часть (2.2.4) неотрицательна (на самом деле она положительна для всех  $p \in [0, 1)$ ). Отсюда  $dt_e/dp > 0$ ,  $\forall p \in [0, 1)$ . Это означает, что функция  $t_e(p)$  строго возрастает по  $p$ .  $\square$

Как следует из леммы 2.2, чем выше вероятность  $p$  поступления запросов в систему в момент времени  $T$ , тем больше интервал  $[0, t_e]$ , на котором игроки отправляют свои запросы в систему с положительной плотностью. Также заметим, что для данного  $p$  значение  $t_e$  может быть даже меньше 0. В этом случае вероятность  $p$  должна быть увеличена. Даже если  $t_e(0) \leq 0$ , то равновесная стратегия является чистой, т.е. запросы отправляются в систему в момент времени  $t = T$  с вероятностью 1. Далее считаем, что  $t_e(0) > 0$ .

**Замечание 2.1.** Ожидаемое значение  $E \left[ \frac{1}{X_{p+1}} \right]$  убывает по  $p$  (см. следствие 1.2).

Замечание 2.1 означает, что с увеличением вероятности прихода в момент  $T$  возрастает вероятность потери в этот момент. Это можно объяснить тем, что чем больше запросов поступает в систему в момент времени  $T$  с ростом  $p$ , тем больше запросов теряется, поскольку обслуживается только один из них.

**Лемма 2.3.** Если  $t_e > 0$ , то на интервале  $[0, t_e]$  существует строго положительная функция плотности  $f(t) > 0$  моментов прихода в систему. Этот интервал не имеет атомов или разрывов.

*Доказательство.* Рассмотрим интервал  $[0, t_e]$ , на котором запросы приходят в систему. Покажем, что в равновесии функция плотности распределения строго положительна на всем интервале. Предположим противное, т.е. на интервале  $[0, t_e]$  есть некоторый интервал  $(t_1, t_2)$  когда ни один из игроков не обращается к системе. Тогда, если один из игроков решит послать запрос в систему в момент  $t_1$ , то он получит обслуживание с вероятностью

$$1 - e^{-\mu(t_2-t_1)} + \int_{t_2}^T (1 - e^{-\mu(\theta-t_1)})dP(\theta),$$

где  $dP(\theta)$  – вероятность, что в момент  $\theta$  в систему поступит другой запрос. Но если этот игрок обратится к системе в момент  $t_2$ , то он получит обслуживание с вероятностью

$$\int_{t_2}^T (1 - e^{-\mu(\theta-t_2)})dP(\theta),$$

что меньше, чем вероятность получить обслуживание в момент  $t_1$ . Это означает, что носитель стратегии  $[0, t_e]$  не содержит таких разрывов.

Теперь покажем, что носитель стратегии  $[0, t_e]$  не содержит атомов. Пусть такой атом есть в точке  $t \in [0, t_e]$  и  $p > 0$  – вероятность, что запрос придет в этот момент  $t$ . Рассмотрим момент  $t+$ , бесконечно близкий справа к моменту  $t$ . Пусть некоторый определенный игрок пытается послать свой запрос в систему в момент  $t$ . Пусть случайная величина  $X_p$  представляет число противников – других игроков, которые также отправляют свои запросы в систему в момент  $t$ . Так как вероятность  $p$  строго положительна, данная случайная величина также должна быть положительной. Тогда вероятность, что рассматриваемый игрок получит обслуживание в момент  $t$ , равна

$$E \frac{1}{X_p + 1} \int_{t+}^T (1 - e^{-\mu(\theta-t+)})dP(\theta),$$

что меньше, чем такая вероятность в момент  $t+$ :

$$\int_{t+}^T (1 - e^{-\mu(\theta-t+)})dP(\theta).$$



Другими словами, если распределение моментов поступления в систему до момента  $t_e$  содержит атом в некоторой точке, то лучше отправить запрос в систему непосредственно после него. В отличие от момента  $T$  (когда система закрывает прием заявок и игроку только нужно получить возможность обслуживания), при поступлении в момент  $t$  обслуживание может быть прервано поступлением другого запроса, а шанс не быть выбранным снижает вероятность обслуживания.  $\square$

### § 2.3 Фиксированное число игроков

Предположим, что количество игроков, отправляющих свои запросы в систему, равно  $N + 1$ . У каждого игрока есть  $N$  оппонентов, которые могут помешать ему получить обслуживание. Для определенности рассмотрим игрока  $N + 1$ . Предположим, что в момент времени  $t = T$  каждый из его  $N$  противников посылает свой запрос в систему с вероятностью  $p$ . Обозначим через  $X_p$  количество игроков, отправивших свои запросы на сервер в момент времени  $T$ . Тогда для игрока  $N + 1$  вероятность получения услуги в системе в момент времени  $T$  определяется как

$$C(T) = E \left[ \frac{1}{X_p + 1} \right].$$

Заметим, что при фиксированном числе игроков случайная величина  $X_p$  имеет биномиальное распределение  $Bin(N, p)$ . Итак, функция выигрыша игрока  $N + 1$  в момент времени  $T$  равна

$$C(T) = \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} \frac{1}{i+1} = \frac{1 - (1-p)^{N+1}}{p(N+1)}. \quad (2.3.1)$$

Вероятность того, что игрок  $N + 1$  получит обслуживание в момент времени  $t_e < T$  при отсутствии заявок, поступающих на интервале  $(t_e, T)$ , определяется выражением

$$C(t_e) = 1 - (1 - (1-p)^N) e^{-\mu(T-t_e)}. \quad (2.3.2)$$

Тогда в равновесии значения  $p$  и  $t_e$  должны удовлетворять уравнению

$$\frac{1 - (1-p)^{N+1}}{p(N+1)} = 1 - (1 - (1-p)^N) e^{-\mu(T-t_e)},$$

откуда

$$t_e = T - \frac{1}{\mu} \log \frac{p(N+1)(1 - (1-p)^N)}{p(N+1) - 1 + (1-p)^{N+1}}. \quad (2.3.3)$$

Теперь наша цель — найти равновесную функцию плотности  $f(t)$  для моментов поступления в систему на интервале  $[0, t_e]$ . Определим марковский процесс с состояниями системы  $(i)$  в каждый момент времени  $t \in [0, t_e]$ , где  $i \in \{0, \dots, N\}$  указывает количество игроков, отправивших свои запросы в систему до момента времени  $t$ . Этот процесс неоднороден во времени, так как скорость запросов в системе уменьшается скачками, как только поступает новый запрос от очередного игрока. Интенсивность поступлений запросов в момент времени  $t$  зависит от выбранной стратегии и числа  $k$  запросов, которые уже поступили в систему до момента  $t$ . Эти интенсивности имеют следующий вид  $\lambda_k(t) = (N - k) \frac{f(t)}{1 - F(t)}$ . Теперь мы можем написать соответствующие уравнения Колмогорова для вероятностей состояний  $p_i(t)$

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= -\lambda_0(t)p_0(t), \\ p'_i(t) &= -\lambda_i(t)p_i(t) + \lambda_{i-1}(t)p_{i-1}(t) \text{ for } i = 1, \dots, N-1, \\ p'_N(t) &= \lambda_{N-1}(t)p_{N-1}(t), \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

которые могут быть разрешены следующим образом.

$$p_i(t) = \binom{N}{i} F(t)^i (1 - F(t))^{N-i} \text{ for } i = 0, \dots, N. \quad (2.3.5)$$

Вероятности начальных состояний равны  $p_0(0) = 1$  и  $p_i(0) = 0$  для всех  $i = 1, \dots, N$ .

Тогда функция выигрыша игрока  $N + 1$  в момент  $t \in [0, t_e]$

$$C(t) = \sum_{i=0}^{N-1} p_i(t) C_{N-i}(t) + p_N(t),$$

где  $C_j(t)$  — вероятность, что игрок  $N + 1$ , приходя в систему в момент  $t \in [0, t_e]$  будет обслужен, при условии, что  $j$  игроков еще не обращались к системе до момента  $t$ .

Для  $j = 1$  пусть  $\tau_1$  — момент поступления запроса оппонента в систему. Тогда

$$C_1(t) = E(1 - e^{-\mu(\tau_1 - t)} | t \leq \tau_1 \leq t_e) + P(\tau_1 = T)(1 - e^{-\mu(T-t)}) =$$

$$= \frac{1}{1 - F(t)} \left( \int_t^{t_e} dF(\tau)(1 - e^{-\mu(\tau-t)} + p(1 - e^{-\mu(T-t)})) \right).$$

Для  $j = 2$  пусть  $\tau_1, \tau_2$  – моменты поступлений запросов двух оппонентов в систему. Получаем

$$\begin{aligned} C_2(t) &= 2E(1 - e^{-\mu(\tau_1-t)} | t \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq t_e) + 2E(1 - e^{-\mu(\tau_1-t)} | t \leq \tau_1 \leq t_e, \tau_2 = T) + \\ &\quad + P(\tau_1 = T, \tau_2 = T)(1 - e^{-\mu(T-t)}) = \\ &= \frac{1}{(1 - F(t))^2} \left( 2 \int_t^{t_e} dF(t_1) \int_{t_1}^{t_e} dF(t_2)(1 - e^{-\mu(t_1-t)}) + 2p \int_t^{t_e} dF(t_1)(1 - e^{-\mu(t_1-t)}) + \right. \\ &\quad \left. + p^2(1 - e^{-\mu(T-t)}) \right) = \\ &= \frac{1}{(1 - F(t))^2} \left( 2 \int_t^{t_e} dF(t_1)(1 - F(t_1))(1 - e^{-\mu(t_1-t)}) + p^2(1 - e^{-\mu(T-t)}) \right). \end{aligned}$$

Аналогичным образом мы получаем  $k = 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} C_k(t) &= kE(1 - e^{-\mu(\tau_1-t)} | t \leq \tau_1 \leq t_e, \tau_1 \leq \tau_j, j = 2, \dots, N) + \\ &\quad P(\tau_j = T, j = 1, \dots, N)(1 - e^{-\mu(T-t)}) = \\ &\quad \frac{1}{(1 - F(t))^k} \left( k \int_t^{t_e} dF(t_1)(1 - F(t_1))^{k-1}(1 - e^{-\mu(t_1-t)}) + p^k(1 - e^{-\mu(T-t)}) \right). \end{aligned}$$

Подставляя  $C_j(t)$  в  $C(t)$ , получим

$$\begin{aligned} C(t) &= F(t)^N + \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N}{i} F(t)^i p^{N-i} (1 - e^{-\mu(T-t)}) + \\ &\quad \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N}{i} F(t)^i (N - i) \int_t^{t_e} (1 - e^{-\mu(s-t)})(1 - F(s))^{N-i-1} dF(s). \end{aligned}$$

Первая сумма равна

$$(F(t) + p)^N (1 - e^{-\mu(T-t)}) - F(t)^N (1 - e^{-\mu(T-t)}).$$

Упрощая вторую сумму, получим

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{N-1} \binom{N}{i} F(t)^i (N - i) \int_t^{t_e} (1 - e^{-\mu(s-t)})(1 - F(s))^{N-i-1} dF(s) = \\ &N \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N-1}{i} F(t)^i \int_t^{t_e} (1 - e^{-\mu(s-t)})(1 - F(s))^{N-i-1} dF(s) = \\ &N \int_t^{t_e} (1 - e^{-\mu(s-t)})(F(t) + 1 - F(s))^{N-1} dF(s). \end{aligned}$$

В итоге, получаем

$$C(t) = (F(t) + p)^N(1 - e^{-\mu(T-t)}) + F(t)^N e^{-\mu(T-t)} + N \int_t^{t_e} (1 - e^{-\mu(s-t)})(F(t) + 1 - F(s))^{N-1} dF(s). \quad (2.3.6)$$

Равновесная функция выигрыша должна быть постоянной на интервале  $[0, t_e]$ , тогда распределение  $F(t)$  должно удовлетворять уравнению  $C(t) = C(t_e)$  для  $t \in [0, t_e]$ , то есть

$$(F(t) + p)^N(1 - e^{-\mu(T-t)}) + N \int_t^{t_e} (1 - e^{-\mu(s-t)})(F(t) + 1 - F(s))^{N-1} dF(s) + F(t)^N e^{-\mu(T-t)} = 1 - (1 - (1 - p)^N)e^{-\mu(T-t_e)}. \quad (2.3.7)$$

Вероятность поступления в момент  $t = T$  может быть найдена из условия нормализации

$$\int_0^{t_e} dF(t) + p = 1. \quad (2.3.8)$$

Таким образом, получили следующую теорему.

**Теорема 2.1.** *Симметричное равновесие по Нэшу в игре  $N + 1$  игроков с вытеснением описывается функцией распределения  $F(t)$  на интервале  $[0, T]$ , которая обладает следующими свойствами.*

1. *Существует ненулевая вероятность  $p$  поступления запроса в систему в момент  $T$ .*
2. *На интервале  $[t_e, T]$ , где  $t_e$  определяется уравнением (2.3.3), игроки не обращаются в систему обслуживания.*
3. *Если решение уравнения (2.3.3) отрицательно для  $p = 1$ , то в равновесии все игроки отправляют свои запросы в систему в момент  $T$ . Иначе,  $p < 1$ , и  $t_e$  больше 0; и вероятностная плотность распределения  $f(t)$  на носителе  $[0, t_e]$  определяется из уравнений (2.3.7).*
4. *Вероятность  $p$  поступления запроса в момент  $T$  определяется из уравнения (2.3.8).*

5. В равновесии вероятность, что игрок получит обслуживание, равна  $C(T) = \frac{1-(1-p)^{N+1}}{p(N+1)}$ .

**Лемма 2.4.** Функция распределения  $F(t)$ , являющаяся решением (2.3.7) с граничным условием  $F(t_e) = 1 - p$ , где  $t_e$  определяется уравнением (2.3.3), возрастает по  $p$  в любой точке интервала  $[0, T]$ .

*Доказательство.* Рассмотрим две заданные вероятности  $0 < p < q \leq 1$  поступления заявки в момент времени  $T$ , которые определяют начальные условия для построения двух функций распределения  $F_p(t)$  и  $F_q(t)$  как решений уравнения (2.3.7). Соответствующие вероятности обслуживания  $C_p(t)$  и  $C_q(t)$  постоянны на всем носителе распределения. Согласно замечанию 2.1 функция  $C(\cdot)$  убывает по вероятности поступления в момент времени  $T$ . Тогда вероятность потери запроса должна быть меньше для  $p$ , чем для  $q$ , на всем носителе распределения.

По лемме 2.2 имеем  $t_q = t(q) > t_p = t(p)$  для соответствующих конечных точек интервалов, на которых запросы поступают в систему. То есть функция  $F_q(t)$  продолжает возрастать до значения  $1 - q$  в тот момент, когда  $F_p(t)$  становится константой  $1 - p > 1 - q$ . Для  $t \in [t_p, T]$  лемма верна, так как в этом случае  $F_p(t) = 1 - p > 1 - q \geq F_q(t)$ .

Пусть есть некоторый момент  $s < t_p$  такой, что  $F_p(t) < F_q(t)$  для  $t < s$ , и  $F_p(s) = F_q(s)$ . Тогда  $f_p(s) > f_q(s)$ , так как обе функции неубывающие по  $t$ , в точке  $s$  функция  $F_p(t)$  должна пересечь  $F_q(t)$  снизу вверх и, следовательно, угол наклона  $F_p(t)$  больше угла наклона  $F_q(t)$ . Тогда  $\frac{f_p(s)}{1-F_p(s)} > \frac{f_q(s)}{1-F_q(s)}$ , что означает, что интенсивность обращений в момент  $s$  больше для вероятности обращений в начальный момент  $p$ , чем для  $q$ , при том, что интенсивности обслуживания в обоих случаях одинаковы. Тогда вероятность потери в момент  $s$  для  $p$  должна быть больше, чем для  $q$ , что противоречит тому, что на всем носителе распределения вероятность потери для  $p$  должна быть меньше, чем для  $q$ .  $\square$

**Теорема 2.2.** Симметричное равновесное распределение поступлений  $F$ , определенное в теореме 2.1, существует и единственно.

*Доказательство.* Единственность равновесия следует из леммы 2.4. Условие

равновесия (2.3.8) представляет собой уравнение, левая часть которого монотонно возрастает по  $p$ . При  $p$ , близких к нулю, левая сторона равна вероятности обращения на интервале  $[0, t_e]$ , которая не превышает 1. При  $p_e = 1$  значение левой части не меньше 1. Поэтому существует единственное решение  $p$ , которому соответствует единственное значение  $t_e$  и плотность распределения  $f(t)$  на  $[0, t_e]$ .  $\square$

## § 2.4 Случайное число игроков

Теперь предположим, что количество оппонентов для каждого игрока  $N$  неизвестно и представляет собой случайную величину, подчиняющуюся распределению Пуассона с параметром  $\lambda$ . В момент  $T$  каждый из оппонентов отправляет в систему свой запрос с вероятностью  $p$ . Обозначим через  $X_p$  случайное количество игроков, чьи заявки поступают в систему в момент  $T$ . Заметим, что для каждого значения случайной величины  $N$  случайная величина  $X_p$  имеет биномиальное распределение  $Bin(N, p)$ . Тогда вероятность того, что игрок получит обслуживание в данный момент  $T$  задается выражением

$$C(T) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} C^{(N)}(T),$$

где  $C^{(N)}(T)$  – соответствующая вероятность для фиксированного числа оппонентов  $N$ , определенная выражением (2.3.1). После упрощения получим

$$C(T) = \frac{1 - e^{-\lambda p}}{\lambda p}. \quad (2.4.1)$$

Аналогично,

$$C(t_e) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} C^{(N)}(t_e),$$

где  $C^{(N)}(t_e)$  соответствующая вероятность для фиксированного числа оппонентов  $N$ , определенная выражением (2.3.2), следовательно,

$$C(t_e) = 1 - (1 - e^{-\lambda p}) e^{-\mu(T-t_e)}. \quad (2.4.2)$$

Наконец, в равновесии значения  $p$  и  $t_e$  должны удовлетворять уравнению

$$\frac{1 - e^{-\lambda p}}{\lambda p} = 1 - (1 - e^{-\lambda p}) e^{-\mu(T-t_e)},$$

откуда

$$t_e = T - \frac{1}{\mu} \log \frac{\lambda p (1 - e^{\lambda p})}{\lambda p - 1 + e^{-\lambda p}}. \quad (2.4.3)$$

**Лемма 2.5.** В игре, в которой число оппонентов для каждого игрока является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона с параметром  $\lambda$ , уравнение (2.4.3) определяет функцию  $t_e(p)$ , строго возрастающую по  $p$ .

*Доказательство.* Дифференцируя (2.4.3), мы получим

$$e^{-\mu(T-t_e)} \frac{dt_e}{dp} = \lambda \frac{1 - e^{\lambda p} - \lambda p e^{-\lambda p}}{(1 - e^{-\lambda p})^2}.$$

Выражение в правой части равенства

$$\lambda e^{-\lambda p} (e^{\lambda p} - 1 - \lambda p) = \lambda e^{-\lambda p} \left( 1 + \lambda p + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(\lambda p)^i}{i!} - 1 - \lambda p \right)$$

строго положительно при  $p \in (0, 1]$ . Отсюда следует, что  $\frac{dt_e}{dp} > 0$  при  $p \in (0, 1]$  и функция  $t_e(p)$  строго возрастает по  $p$ .  $\square$

Вероятность получить обслуживание в момент  $t \in [0, t_e]$  выражается как

$$C(t) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} C^{(N)}(t),$$

где  $C^{(N)}(t)$  соответствующая вероятность для фиксированного числа оппонентов  $N$ , определенная выражением (2.3.6). Вычислив сумму, получаем

$$C(t) = e^{-\lambda(1-p-F(t))} (1 - e^{\mu(T-t)}) + \lambda \int_t^{t_e} e^{-\lambda(F(s)-F(t))} (1 - e^{-\mu(s-t)}) dF(s) + e^{-\lambda(1-F(t))} e^{-\mu(T-t)}. \quad (2.4.4)$$

Как и в случае фиксированного числа  $N$ , равновесный выигрыш должен быть постоянным на интервале  $[0, t_e]$ , то есть распределение  $F(t)$  должно удовлетворять уравнению  $C(t) = C(t_e)$  для  $t \in [0, t_e]$ , то есть

$$e^{-\lambda(1-p-F(t))} (1 - e^{\mu(T-t)}) + \lambda \int_t^{t_e} e^{-\lambda(F(s)-F(t))} (1 - e^{-\mu(s-t)}) dF(s) + e^{-\lambda(1-F(t))} e^{-\mu(T-t)} = 1 - (1 - e^{-\lambda p}) e^{-\mu(T-t_e)}. \quad (2.4.5)$$

Также вероятность поступления в момент  $t = T$  может быть найдена из условия нормализации

$$\int_0^{t_e} dF(t) + p = 1. \quad (2.4.6)$$

Тогда, как и в случае фиксированного  $N$ , верна следующая теорема для случайного  $N$ .

**Теорема 2.3.** *Симметричное равновесие по Нэшу в игре с вытеснением с Пуассоновским числом игроков описывается функцией распределения  $F(t)$  на интервале  $[0, T]$ , которая обладает следующими свойствами.*

1. *Существует ненулевая вероятность  $p$  поступления запроса в систему в момент  $T$ .*
2. *На интервале  $[t_e, T)$ , где  $t_e$  определяется уравнением (2.4.3), игроки не обращаются в систему обслуживания.*
3. *Если решение уравнения (2.4.3) отрицательно для  $p = 1$ , то в равновесии все игроки отправляют свои запросы в систему в момент  $T$ . Иначе,  $p < 1$ , и  $t_e$  больше 0; и вероятностная плотность распределения  $f(t)$  на носителе  $[0, t_e]$  определяется из уравнений (2.4.5).*
4. *Вероятность  $p$  поступления запроса в момент  $T$  определяется из уравнения (2.4.6).*
5. *В равновесии вероятность, что игрок получит обслуживание, равна  $C(T) = \frac{1 - e^{-\lambda p}}{\lambda p}$ .*

Также выполняется следующая лемма и ее доказательство использует лемму 2.5 и совпадает с доказательством леммы 2.4 для фиксированного  $N$ .

**Лемма 2.6.** *Функция распределения  $F(t)$ , являющаяся решением (2.4.5) с граничным условием  $F(t_e) = 1 - p$ , где  $t_e$  определяется уравнением (2.4.3), возрастает по  $p$  в любой точке интервала  $[0, T]$ .*

Отсюда аналогично следует следующая теорема для случайного числа игроков  $N$ .



**Теорема 2.4.** *Симметричное равновесное распределение  $F$  моментов поступления, которое определяется теоремой 2.3 всегда существует и единственно.*

## § 2.5 Вычисление равновесия

В этом разделе мы подробно опишем численное решение полученных выше уравнений. Зафиксируем  $p$  и  $T$ . Найдем  $t_e$  непосредственно из (2.3.3) в случае фиксированного количества игроков и из (2.4.3) в случае случайного количества игроков. Разобьем интервал  $[0, t_e]$  на  $k$  равных отрезков. Затем находим приближенное решение в узлах сетки  $K = \{t_1 = 0, t_2 = \Delta, \dots, t_k = t_{k-1} + \Delta = t_e - \Delta\}$ , где  $\Delta = t_e/k$ . В качестве аргументов нашей задачи представим значения неизвестной функции  $f(t)$  в узлах сетки:

$$\{x_1 = f(t_1) = f(0), x_2 = f(t_2), \dots, x_k = f(t_k)\}.$$

Тогда полученные условия равновесия можно представить в виде разностных уравнений. Точнее, для фиксированного числа игроков условие (2.3.7) принимает вид:

$$\begin{aligned} & (F_i + p)^N (1 - e^{-\mu(T-t_i)}) + \\ & N \sum_{j=i}^k (1 - e^{-\mu(t_j-t_i)}) (F_i + 1 - F_j)^{N-1} x_j \Delta + F_i^N e^{-\mu(T-t_i)} = \\ & 1 - (1 - (1 - p)^N) e^{-\mu(T-t_e)}, \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

где  $F_i = 1 - p - \Delta \sum_{j=i}^k x_j$  аппроксимирует точное значение  $F(t_i) = \int_0^{t_i} f(t) dt = 1 - p - \int_{t_i}^{t_e} f(t) dt$ . Мы аппроксимируем интегралы левыми суммами Римана.

Для случайного числа игроков аналогичное условие (2.4.5) принимает вид:

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda(1-p-F_i)} (1 - e^{\mu(T-t_i)}) + \\ & \lambda \sum_{j=i}^k e^{-\lambda(F_j-F_i)} (1 - e^{-\mu(t_j-t_i)}) x_j \Delta + e^{-\lambda(1-F_i)} e^{-\mu(T-t_i)} = \\ & 1 - (1 - e^{-\lambda p}) e^{-\mu(T-t_e)}, \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

где также  $F_i = 1 - p - \Delta \sum_{j=i}^k x_j$ .

Условие нормализации примет вид:

$$\Delta \sum_{i=1}^k x_i + p - 1 = 0, \quad (2.5.3)$$

где левая часть возрастает по  $p$ , поскольку искомая функция распределения возрастает по  $p$  в любой точке интервала  $[0, T]$ .

Теперь находим решение следующим образом. Перебираем значения  $p$  на интервале  $[0, 1]$ . Для каждого  $p$  вычисляем соответствующее ему  $t_e$ , принадлежащее интервалу  $[0, T]$ . Для каждого заданного  $p$  и  $t_e$  решаем систему разностных уравнений (2.5.1) для модели с фиксированным числом игроков или (2.5.2) для случайного. Мы ищем значение  $p$  таким образом, чтобы выполнялось условие нормализации (2.5.3). А именно, решение  $(p, t_e, x)$  находится с помощью алгоритма 1.

---

**Алгоритм 1** Нахождение решения  $(p, t_e, x)$ .

---

$p_l \leftarrow 0, p_r \leftarrow 1$

$\epsilon \leftarrow$  малое положительное значение, близкое к 0 (заданная точность)

**выполнить**

$p \leftarrow \frac{p_l + p_r}{2}$

Вычисляем  $t_e$  из (2.3.3) для фиксированного числа игроков или (2.4.3) для случайного числа игроков.

$\Delta \leftarrow \frac{t_e}{k}$

для  $i = k$  до 1 **выполнить**

Находим  $x_i$ , удовлетворяющее (2.5.1) для фиксированного числа игроков или (2.5.2) для случайного числа игроков.

**конец для**

$continue \leftarrow true$

**если** левая часть (2.5.3) меньше  $-\epsilon$  **то**

$p_l \leftarrow p$

**иначе если** левая часть (2.5.3) больше  $\epsilon$  **то**

$p_r \leftarrow p$

**иначе**

$(p, t_e, x)$  является решением

$continue \leftarrow false$

**конец если**

**пока**  $continue$

---

## § 2.6 Численные примеры равновесий

Найдем равновесие в игре с очередью при фиксированном и случайном числе игроков и сравним результаты моделирования. Первые два примера предназначены для фиксированного количества игроков.

**Пример 1.** Пусть  $T = 12$  (например, часов или месяцев, в зависимости от контекста задачи),  $\mu = 0.1$ . Здесь среднее время обслуживания равно  $1/\mu = 10$ , то есть велико по сравнению с длиной периода работы системы  $T$ . В результате вычисления получают оптимальные значения для различных  $N$ , которые представлены в таблице 2.1. Оптимальные плотности распределения для моментов поступления в систему на интервале  $[0, t_e]$  представлены на рис. 2.1.

**Пример 2.** Пусть  $T = 12$ ,  $\mu = 1$ . Здесь среднее время обслуживания мало по сравнению с  $T$ . Значения параметров для оптимальных стратегий для различных  $N$  представлены в таблице 2.1. Плотности распределения моментов поступления в систему на интервале  $[0, t_e]$  представлены на рис. 2.2.

Таблица 2.1: Оптимальные  $p$ ,  $t_e$  и выигрыш для  $T = 12$  при фиксированном числе игроков

$N$	$\mu = 0.1$			$\mu = 1$		
	$p$	$t_e$	Выигрыш $C(t)$	$p$	$t_e$	Выигрыш $C(t)$
2	0.69318	6.69662	0.46698	0.15074	11.33367	0.85683
5	0.59352	8.83290	0.27954	0.13923	11.40124	0.71017
10	0.53734	10.15144	0.16915	0.12760	11.48802	0.55373
20	0.50081	11.00088	0.09508	0.11402	11.60724	0.38477
100	0.47181	11.78791	0.02099	0.09365	11.88832	0.10572

В следующих двух примерах мы полагаем, что число игроков – случайная величина с распределением Пуассона с параметром  $\lambda$ .

**Пример 3.** Пусть  $T = 12$ ,  $\mu = 0.1$ . В результате вычислений получены оптимальные значения в равновесии для различных  $\lambda$ , которые приведены в таблице 2.2. Плотности распределения для оптимальных моментов поступления в систему на интервале  $[0, t_e]$  представлены на рис. 2.3.

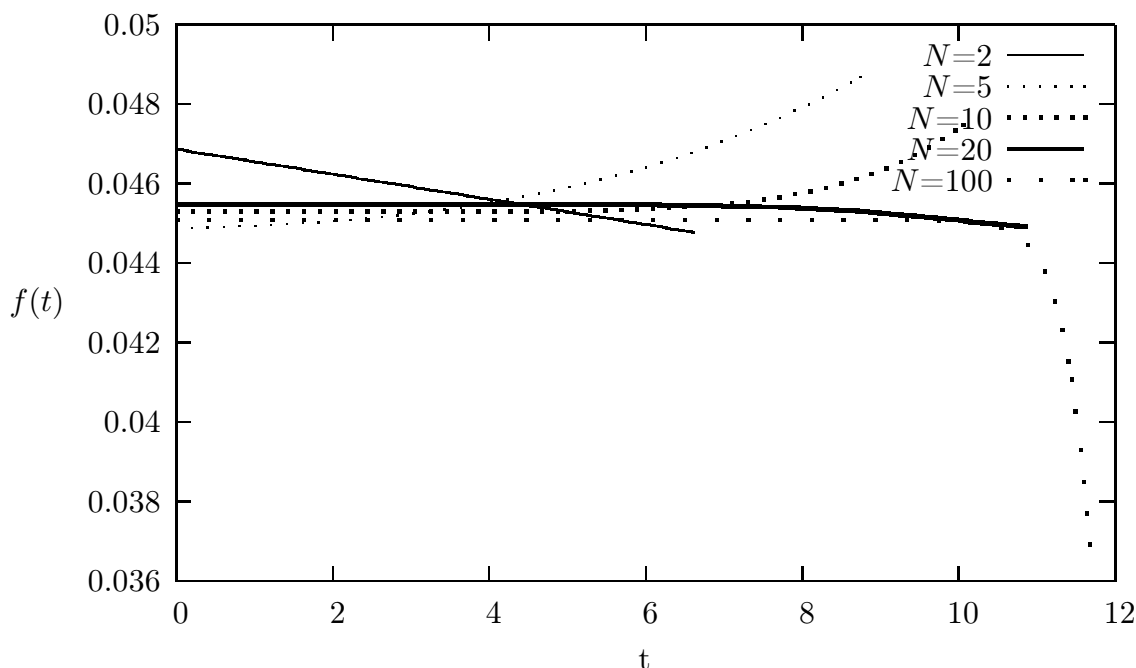


Рис. 2.1: Равновесная плотность распределения  $f(t)$  для  $T = 12$  и  $\mu = 0.1$  при фиксированном числе игроков

**Пример 4.** Пусть  $T = 12$ ,  $\mu = 1$ . В результате вычислений получены оптимальные значения в равновесии для различных  $\lambda$ , которые приведены в таблице 2.2. Плотности распределения для оптимальных моментов поступления в систему на интервале  $[0, t_e]$  представлены на рис. 2.4.

Таблица 2.2: Оптимальные  $p$ ,  $t_e$  и выигрыш для  $T = 12$  при случайном числе игроков

$\lambda$	$\mu = 0.1$			$\mu = 1$		
	$p$	$t_e$	Выигрыш $C(t)$	$p$	$t_e$	Выигрыш $C(t)$
2	0.69786	7.10122	0.53903	0.14784	11.35489	0.86572
5	0.61389	8.75541	0.31066	0.13831	11.41513	0.72185
10	0.54939	10.04117	0.18127	0.12770	11.49521	0.56470
20	0.50490	10.95763	0.09903	0.11464	11.60870	0.39210
100	0.47194	11.78583	0.02119	0.09378	11.88734	0.10662

Заметим, что в большинстве численных экспериментов функция плотности  $f(t)$  в равновесии убывает на носителе  $[0, t_e]$  (примеры 2, 3, 4). Однако, в случае, когда число игроков фиксировано, а горизонт времени  $T$  сравним со средним временем обслуживания (пример 1), оптимальные стратегии могут быть качественно отличны. Для небольших значений  $N$  функция плотности  $f(t)$  возрастает

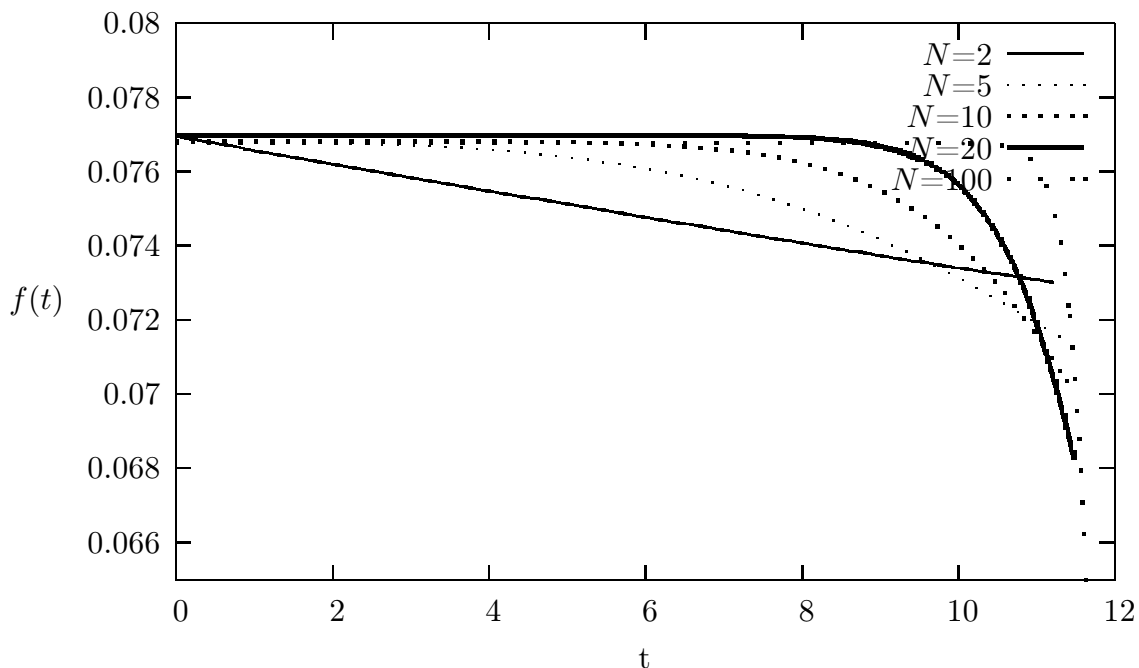


Рис. 2.2: Равновесная плотность распределения  $f(t)$  для  $T = 12$  и  $\mu = 1$  при фиксированном числе игроков

тает на носителе распределения, но с ростом числа игроков  $N$  функция плотности становится убывающей функцией.

## § 2.7 Цена анархии

Цена анархии является достаточно мощным инструментом для характеристики потерь эффективности из-за конкуренции в системе обслуживания [169, 170]. Сначала рассмотрим случай фиксированного  $N$ . Полезность клиента определяется как его вероятность получения обслуживания с учетом профиля поступления запросов всех клиентов (включая его самого). Следовательно, общая социальная полезность — это ожидаемое число клиентов, получивших обслуживание полностью. Очевидно, что в социальном оптимуме имеется какой-то центральный планировщик, который, видя завершение обслуживания, немедленно отправляет нового клиента. Тогда социально-оптимальная полезность равна

$$E(\min\{\text{число запросов, обслуженных на } [0, T) + \\ + \text{ один запрос, поступивший в } T, N + 1\}),$$

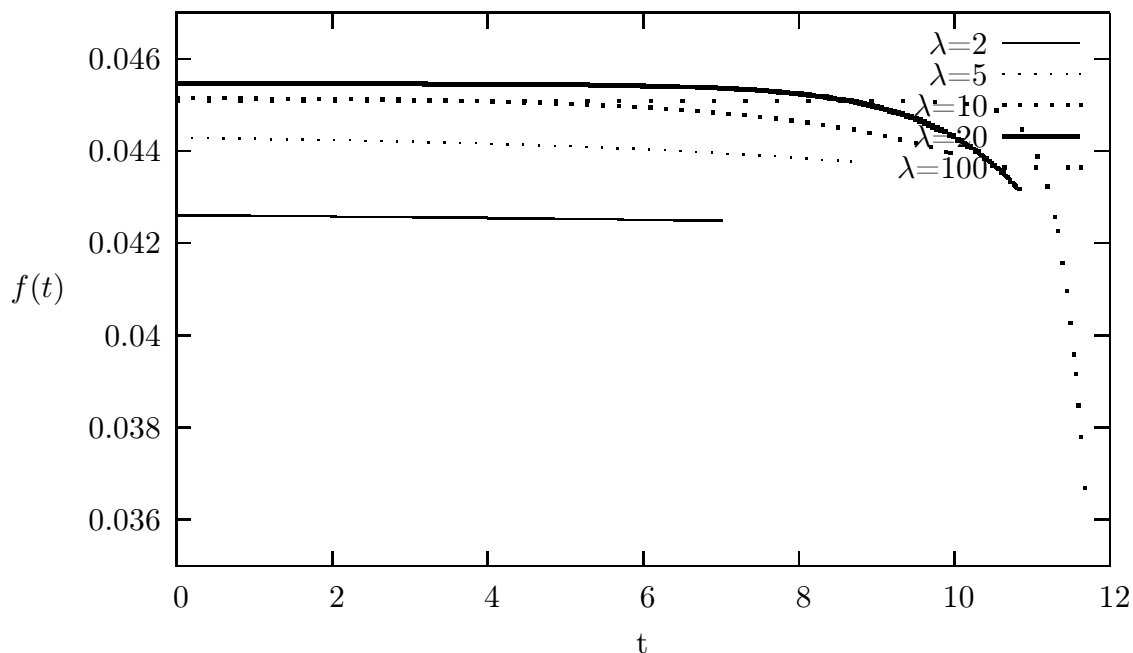


Рис. 2.3: Равновесные плотности  $f(t)$  для  $T = 12$  и  $\mu = 0.1$  при случайном числе игроков

то есть  $\mu T + 1$  для больших  $N$  [169, 170]. Таким образом, для фиксированного  $N$  социально-оптимальная полезность имеет вид  $\min\{\mu T + 1, N + 1\}$ . В равновесии полезность системы равна  $(N + 1)C(t)$ , где  $C(t)$  – равновесная вероятность завершения обслуживания для запроса.

Цена анархии определяется как отношение между социально-оптимальной полезностью и полезностью в равновесии. Для случаев, представленных в примерах 1 и 2 найдены значения социально-оптимальной и равновесной полезности и соответствующие значения цены анархии (таблица 2.3).

Предположим теперь, что число игроков  $N$  – случайная величина с распределением Пуассона с параметром  $\lambda$ . Тогда социально-оптимальная полезность равна  $\min\{\mu T + 1, \lambda + 1\}$ . В равновесии социальная полезность системы равна  $(\lambda + 1)C(t)$ , где  $C(t)$  – равновесная вероятность завершения обслуживания для запроса.

Найдем теперь цену анархии как отношение между социально-оптимальной полезностью и полезностью в равновесии. Для случаев, представленных в примерах 3 и 4 найдены значения социально-оптимальной и равновесной полезности и соответствующие значения цены анархии (таблица 2.4).

Видно, что с ростом  $N$  или  $\lambda$  цена анархии сначала снижается, а с некоторого  $N$  или  $\lambda$ , в зависимости от среднего времени обслуживания, начинает

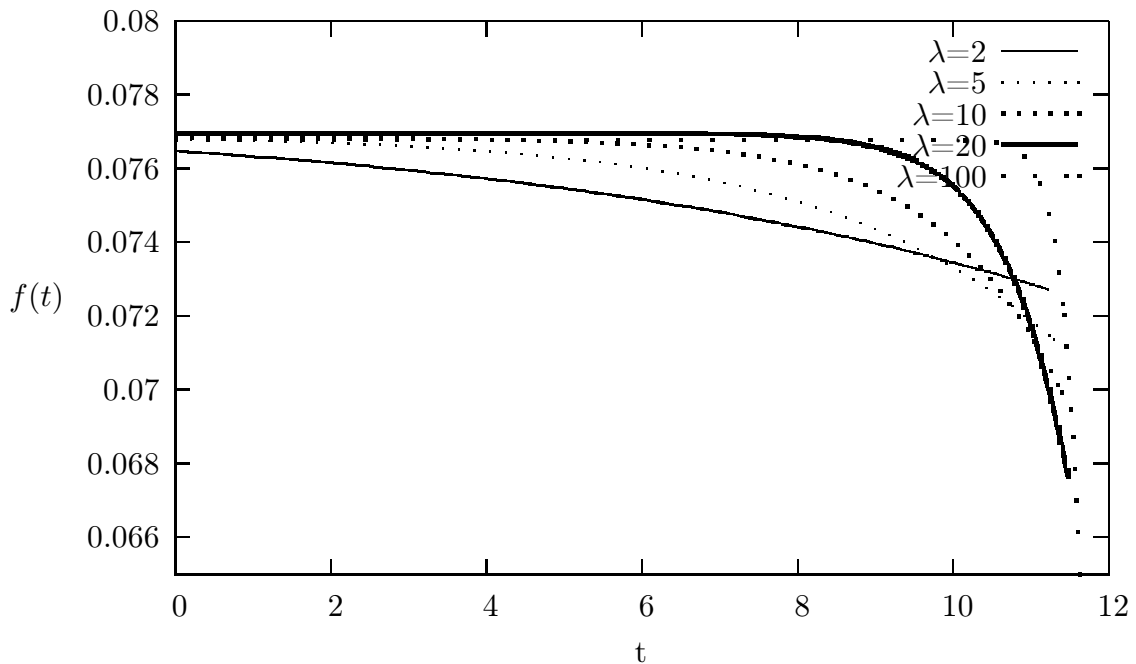


Рис. 2.4: Равновесные плотности  $f(t)$  для  $T = 12$  и  $\mu = 1$  при случайном числе игроков

расти. Это связано с растущим числом конкурирующих игроков, которые мешают друг другу, препятствуя завершению обслуживания. Существование такого минимума в цене анархии нетривиально и может быть использовано для рекомендации, какое количество игроков должно быть в такой системе обслуживания. В таблицах 2.3 и 2.4 жирным шрифтом выделено количество игроков с минимальным значением цены анархии. Для фиксированного числа игроков  $N$  это 92 (при  $\mu = 0.1$ ) и 93 (при  $\mu = 1$ ). Для случайного числа игроков интенсивность  $\lambda$  при минимальном значении цены анархии равна 75 (при  $\mu = 0.1$ ) и 91 (при  $\mu = 1$ ).

## § 2.8 Результаты

В этой главе изучалась теоретико-игровая модель односерверной системы массового обслуживания со стратегическими пользователями, в которой клиенты (игроки) поступают в систему с вытесняющим доступом. на интервале времени  $[0, T]$ . Мы рассмотрели случаи, когда количество игроков фиксировано и является случайной величиной с Пуассоновским законом распределения. Как было показано, существует единственное симметричное равновесие со следующими свойствами. Ненулевая функция плотности моментов поступления в

систему определяется на временном интервале  $[0, t_e]$ . На интервале времени  $[t_e, T]$  поступлений нет. В момент  $T$  игроки отправляют свои запросы в систему с некоторой положительной вероятностью  $p$ . Был проведен ряд численных экспериментов для сравнения равновесия при различных значениях параметров модели. Также предложено сравнение конкурентного и кооперативного поведения в системе обслуживания, основанное на применении цены анархии для фиксированного и случайного количества игроков.



Таблица 2.3: Социально-оптимальная и равновесная полезности и цена анархии для  $T = 12$  при фиксированном числе игроков

$N$	Социально-оптимальная полезность	Равновесная полезность	Цена анархии
$\mu = 0.1$			
2	2.2	1.40095	1.57036
5	2.2	1.67725	1.31167
10	2.2	1.86065	1.18238
20	2.2	1.99677	1.10178
<b>92</b>	2.2	2.11994	1.03777
100	2.2	2.11951	1.03798
150	2.2	2.10152	1.04686
200	2.2	2.06755	1.06406
250	2.2	2.02500	1.08642
300	2.2	1.97818	1.11213
1000	2.2	1.49987	1.46679
$\mu = 1$			
2	3.0	2.57050	1.16709
5	6.0	4.26100	1.40812
10	11.0	6.09105	1.80593
20	13.0	8.08026	1.60887
<b>93</b>	13.0	10.68613	1.21654
100	13.0	10.67722	1.21756
150	13.0	10.23158	1.27059
200	13.0	9.406694	1.38199
250	13.0	8.437086	1.54083
300	13.0	7.460338	1.74255
1000	13.0	2.277287	5.70855

Таблица 2.4: Социально-оптимальная и равновесная полезности и цена анархии для  $T = 12$  при случайном числе игроков

$\lambda$	Социально-оптимальная полезность	Равновесная полезность	Цена анархии
$\mu = 0.1$			
2.0	2.2	1.61710	1.36045
5.0	2.2	1.86395	1.18029
10.0	2.2	1.99399	1.10332
20.0	2.2	2.07953	1.05793
50.0	2.2	2.13733	1.02932
<b>75.0</b>	2.2	2.14416	1.02604
100.0	2.2	2.14010	1.02799
150.0	2.2	2.11555	1.03992
200.0	2.2	2.07820	1.05861
250.0	2.2	2.03360	1.08183
300.0	2.2	1.98539	1.10809
1000.0	2.2	1.50193	1.46479
$\mu = 1$			
2.0	3.0	2.59715	1.15511
5.0	6.0	4.33111	1.38533
10.0	11.0	6.21171	1.77085
20.0	13.0	8.23416	1.57879
50.0	13.0	10.28210	1.26433
<b>91.0</b>	13.0	10.78224	1.20569
100.0	13.0	10.76862	1.20721
150.0	13.0	10.30158	1.26194
200.0	13.0	9.46474	1.37352
250.0	13.0	8.48753	1.53166
300.0	13.0	7.50503	1.73217
1000.0	13.0	2.28423	5.69119

## Глава 3

# Выбор момента обращения к системе с повторными вызовами

Системы обслуживания с повторными вызовами вызывают все больший интерес благодаря своей важности в моделировании современных беспроводных телекоммуникационных систем. Выделим сначала основные параметры, описывающие динамику широкого класса систем с повторными вызовами.

Существует множество практических ситуаций, которые можно смоделировать как систему массового обслуживания, в которой клиентам разрешено несколько попыток обслуживания. Например, это колл-центры с возможностью обратного звонка, либо возможностью возврата для клиентов, которые не могут сразу соединиться с оператором, регистрируют свои номера и возвращаются позже. Этих клиентов можно назвать орбитальными, потому что можно естественным образом представить, что зарегистрированные клиенты ожидают обслуживания в так называемой орбитальной очереди (орбите). Поскольку этих клиентов нет возможности вызвать сразу, как только оператор освободится, для доступа к зарегистрированному клиенту необходимо некоторое время поиска (называемое временем повторного вызова). Отметим, что иногда оператор может совершить исходящий вызов, не зная о наличии зарегистрированных клиентов на орбите. Аналогичная ситуация с повторными вызовами возникает во многих системах обслуживания, где по приходу клиента выдается талон, который будет обслужен в более позднее время, когда сервер будет доступен.

В этой главе мы применяем теоретико-игровой подход к системе обслуживания с повторными вызовами с одним сервером [62]. Очередь формируется

стратегическими игроками. Стратегия игрока состоит в том, чтобы выбрать момент для входа в систему. Если сервер занят, то пользователь блокируется и присоединяется к орбитальной очереди. В противном случае, если сервер свободен, он ищет заблокированного пользователя с орбиты в течение случайного экспоненциально распределенного времени поиска. В этой постановке мы будем искать оптимальные стратегии игроков. Сначала рассмотрим случай двух пользователей, затем подробно рассмотрим случай трех игроков.

### § 3.1 Система обслуживания

Теперь опишем нашу модель более подробно в общей постановке. Предположим, что существует единственный сервер, который обслуживает  $N$  заявок, присутствующих в системе в начальный момент времени  $t = 0$ . В отличие от обычной теории массового обслуживания, эти клиенты используют некоторую стратегию, выбирая момент для обращения к серверу. По симметрии эта стратегия одинакова для каждого пользователя. Эта стратегия определяется функцией распределения, которая является основной целью анализа, и определяет момент попытки обращения к серверу. Это важное отличие от стандартной постановки теории массового обслуживания, где клиентам не разрешается принимать собственные решения, но они следуют заранее определенным правилам, описывающим динамику системы. После ухода обслуживаемой заявки сервер начинает поиск заблокированных на орбите заявок (если таковые имеются) для обслуживания следующей. Как упоминалось выше, это время поиска экспоненциально распределено с параметром  $\gamma$  и средним значением  $\tau$ , и называется временем поиска в терминологии очередей с повторными вызовами [159]. Если приходящий извне новый клиент обнаруживает, что сервер занят, то он присоединяется к орбите, и такие орбитальные клиенты составляют виртуальную орбитальную очередь (см. [76]), которая обслуживается по принципу FIFO (First-In-First-Out). Если во время поиска (когда сервер ждет поступлений с орбиты) приходит какая-то заявка, то она занимает сервер на экспоненциально распределенное время с параметром  $\mu$ . Напомним, что время прибытия выбирается согласно распределению, выбранному в качестве стратегии. Таким

образом, данная постановка сочетает в себе некоторые черты как классической системы с повторными вызовами, так и шлюзовой очереди, в которой вход остается закрытым до тех пор, пока все  $N$  клиентов не покинут систему. Кроме того, аналогичная ситуация возникает в системе опроса (см., например, [50]), в которой разные очереди обслуживаются по порядку, а сервер, возвращаясь в фиксированную очередь, как правило, находит там несколько новых клиентов для обслуживания.

### § 3.2 Игра с двумя игроками

Рассмотрим случай двух пользователей. Чтобы найти равновесие в данной игре двух лиц, будем использовать следующий подход. Предположим, один из игроков (для определенности второй игрок) в качестве стратегии использует случайное время прихода с функцией распределения  $F(t)$  и плотностью  $f(t)$  следующего вида:

$$F(t) = \begin{cases} p, & 0 \leq t < t_e, \\ p + \int_{t_e}^t f(x)dx, & t_e \leq t \leq T. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Т.е. второй игрок может обратиться в систему в начальный момент времени  $t = 0$  с вероятностью  $p$ , и в любой другой момент времени  $t \in [t_e, T]$  в соответствии с распределением  $F(t)$ .

Найдем наилучший ответ первого игрока на эту стратегию второго игрока. В качестве функции затрат первого игрока будем рассматривать среднее время его обслуживания. Таким образом, целью первого игрока является выбрать стратегию, которая будет минимизировать среднее время его обслуживания. В силу симметрии задачи, в равновесии оптимальная стратегия первого игрока должна совпадать с выбранной стратегией его оппонента. Для этого достаточно, чтобы стратегия второго игрока была выбрана таким образом, чтобы функция полезности первого игрока принимала постоянное значение на интервале  $[t_e, T]$  и в начальный момент времени  $t = 0$  [147]. Тогда значение затрат первого игрока не будет зависеть от его собственной стратегии.

Перейдем к нахождению наилучшего ответа первого игрока на стратегию второго игрока 3.2.1. Найдем его функцию полезности. Среднее время обслу-

живания при поступлении первого игрока в систему в начальный момент  $t = 0$  равно:

$$C(0) = (1 - p)\frac{1}{\mu} + p\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2}\left(\tau + \frac{2}{\mu}\right)\right) = (1 - p)\frac{1}{\mu} + p\left(\frac{3}{2\mu} + \frac{\tau}{2}\right).$$

Здесь учтено, что с вероятностью  $1 - p$  второй игрок не обратится в систему в момент  $t = 0$ . Тогда первый игрок будет обслужен первым и среднее время обслуживания будет равно  $1/\mu$ . Если же второй игрок обратится в систему в момент  $t = 0$  (с вероятностью  $p$ ), то с вероятностью  $1/2$  первый игрок может быть выбран для обслуживания и среднее время его обслуживания будет равно  $1/\mu$ , но с вероятностью  $1/2$  выберут второго игрока и тогда первая заявка отправится на орбиту, будет ждать, когда закончится обслуживание второго игрока.

Для  $0 < t < t_e$  среднее время обслуживания заявки, поступившей в момент  $t$ , имеет вид

$$\begin{aligned} C(t) &= (1 - p)\frac{1}{\mu} + p\left(\left(1 - e^{-\mu t}\right)\frac{1}{\mu} + e^{-\mu t}\left(\frac{1}{\mu} + \tau + \frac{1}{\mu}\right)\right) \\ &= (1 - p)\frac{1}{\mu} + p\left(\frac{1}{\mu} + e^{-\mu t}\left(\tau + \frac{1}{\mu}\right)\right). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что с вероятностью  $1 - p$  второй игрок не обратится в систему в момент  $t = 0$ . Тогда первый игрок будет обслужен первым и среднее время обслуживания будет равно  $1/\mu$ . Если же второй игрок обратится в систему в момент  $t = 0$  (с вероятностью  $p$ ), то с вероятностью  $1 - \exp\{-\mu t\}$  он будет обслужен к моменту  $t$  и первый игрок начнет сразу же обслуживаться. Но с вероятностью  $\exp\{-\mu t\}$  второй игрок не будет еще обслужен в момент  $t$  и тогда первая заявка отправится на орбиту, будет ждать, когда закончится обслуживание второго игрока, и выберут ее через время  $\tau$ .

Заметим, что функция  $C(t)$  убывает по  $t$ , и тогда в пределе  $t \rightarrow 0+$  получим

$$C(0+) = (1 - p)\frac{1}{\mu} + p\left(\tau + \frac{2}{\mu}\right) > C(0).$$

Потребуем выполнения условия на  $t_e$ :  $C(0) = C(t_e)$ , то есть

$$\frac{1}{\mu} + e^{-\mu t_e}\left(\tau + \frac{1}{\mu}\right) = \frac{3}{2\mu} + \frac{\tau}{2},$$

откуда

$$t_e = \frac{\log 2}{\mu}. \quad (3.2.2)$$

Аналогично, для  $t \geq t_e$  среднее время обслуживания имеет вид

$$C(t) = p \left( (1 - e^{-\mu t}) \frac{1}{\mu} + e^{-\mu t} \left( \frac{1}{\mu} + \tau + \frac{1}{\mu} \right) \right) + \left( \int_{t_e}^t dF(\theta) \left( (1 - e^{-\mu(t-\theta)}) \frac{1}{\mu} + e^{-\mu(t-\theta)} \left( \frac{1}{\mu} + \tau + \frac{1}{\mu} \right) \right) + \int_t^T \frac{1}{\mu} dF(\theta) \right),$$

откуда находим

$$C(t) = p \left( \frac{1}{\mu} + e^{-\mu t} \left( \tau + \frac{1}{\mu} \right) \right) + \left( \frac{1-p}{\mu} + \int_{t_e}^t e^{-\mu(t-\theta)} \left( \tau + \frac{1}{\mu} \right) dF(\theta) \right). \quad (3.2.3)$$

Далее найдем точный вид искомой функции распределения  $F(t)$  из условия  $C'(t) = 0$ . Дифференцируя, получим

$$-\mu p \left( \tau + \frac{1}{\mu} \right) e^{-\mu t} - \mu \left( \tau + \frac{1}{\mu} \right) \int_{t_e}^t e^{-\mu(t-\theta)} dF(\theta) + \left( \tau + \frac{1}{\mu} \right) f(t) = 0,$$

откуда

$$\int_{t_e}^t e^{\mu\theta} f(\theta) d\theta = \frac{1}{\mu} f(t) e^{\mu t} - p.$$

Обозначив

$$g(t) = f(t) e^{\mu t},$$

можно записать уравнение для  $g(t)$  в следующем виде

$$\int_{t_e}^t g(\theta) d\theta = \frac{1}{\mu} g(t) - p. \quad (3.2.4)$$

Дополнительно, имеем следующее соотношение

$$g'(t) = \mu g(t),$$

откуда

$$g(t) = \text{const} \cdot e^{\mu t} \text{ and } f(t) = K = \text{const}.$$

Подставив  $g(t)$  в (3.2.4) получим

$$K = \mu p e^{-\mu t_e} = \frac{\mu p}{2}. \quad (3.2.5)$$

С другой стороны, из условия

$$1 - p = \int_{t_e}^T K dt$$

следует

$$p = 1 - K(T - t_e),$$

и тогда, используя (3.2.5), получим вероятность  $p$ :

$$p = \frac{1}{1 + \mu(T - t_e)e^{-\mu t_e}} = \frac{2}{2\mu + \mu T - \log 2}. \quad (3.2.6)$$

Теперь из (3.2.3) находим

$$C(t) = C(t_e) = pe^{-\mu t_e} \left( \tau + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2\mu + \mu T - \log 2} \left( \tau + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{1}{\mu}.$$

Результат проделанного анализа оформим в виде следующего утверждения.

**Утверждение 3.1.** *Равновесие в игре двух лиц обслуживания с повторными вызовами имеет вид (3.2.1), где  $f(t) = K = \text{const}$  для  $t \in [t_e, T]$ , и параметры  $p, t_e, K$  удовлетворяют условиям (3.2.2), (3.2.5) и (3.2.6).*

**Пример 5.** *Рассмотрим систему, которая принимает заявки на интервале  $[0, 2]$ , и предположим, что интенсивность обслуживания равна  $\mu = 2$ , а интенсивность снятия задачи с орбиты равна  $\gamma = \frac{1}{\tau} = 1$ . Тогда легко вычислить, что*

$$t_e \approx 0.347, \quad f(t) \approx 0.377 \quad \text{для } t \geq t_e,$$

*вероятность прихода в момент 0 равна  $p \approx 0.377$  и среднее время обслуживания равно*

$$C(0) = C(t) \approx 0.783 \quad \text{for } t \geq t_e.$$

### § 3.3 Игра с тремя игроками

Рассмотрим случай трех игроков. Предположим, двое из игроков (для определенности второй и третий игрок) в качестве стратегии использует случайное время прихода с распределением  $F(t)$  следующего вида (3.2.1). Предполагаем, что с орбиты на сервер заявки поступают в порядке их попадания на орбиту, т.е. используется дисциплина FIFO. Если две заявки попали на орбиту одновременно, то порядок назначается равновероятным образом (то есть каждый выбирается с вероятностью  $1/2$ ).



Найдем наилучший ответ первого игрока. Если первый игрок приходит в момент времени  $t = 0$ , то его затраты равны

$$C(0) = (1-p)^2 \frac{1}{\mu} + 2p(1-p) \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2} W_1^1(0) \right) + p^2 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{2}{3} W_2^0(0) \right),$$

где,

$$\begin{aligned} W_1^0(0) &= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}, \\ W_2^0(0) &= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) = \frac{3}{2\mu} + \frac{3}{2\gamma}, \\ W_1^1(0) &= \frac{1}{1-p} \int_{t_e}^T \int_0^{\theta-s} \mu e^{-\mu s} ds \int_0^{\theta-s} \gamma e^{-\gamma u} (s+u) du + \\ &+ \int_0^{\theta} \mu e^{-\mu s} ds \int_{\theta-s}^{\infty} \gamma e^{-\gamma u} (s+u+\frac{1}{\mu}) du + \int_{\theta}^{\infty} \mu e^{-\mu s} s ds dF(\theta) = \\ &= \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma(\mu-\gamma)(1-p)} \int_{t_e}^T (\gamma e^{-\gamma \theta} - \mu e^{-\mu \theta}) dF(\theta), \end{aligned}$$

и обозначим  $W_i^j(t)$  среднее время нахождения на орбите заявки, поступившей в момент  $t$ , если всего на орбите  $i$  заявок, а  $j$  заявок ожидают в основной очереди.

Найдем теперь значение  $C(0+)$  для игрока, который обращается в систему в момент  $t = 0+$ . Тогда он занимает сервер, если оба оставшихся игрока придут после  $t_e$ . Если один игрок обращается в систему в момент  $t = 0$ , тогда игрок, приходящий в момент  $t = 0+$ , очевидно, попадает на орбиту. Наконец, если оба других игрока приходят в момент  $t = 0$ , то игрок, поступающий в момент  $t = 0+$  попадает на орбиту в конец очереди. Поэтому

$$\begin{aligned} C(0+) &= (1-p)^2 \frac{1}{\mu} + p(1-p) \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{1-p} W_1^1(0) \right) + p^2 \left( \frac{1}{\mu} + W_2^0(0+) \right) > \\ &> C(0), \quad (3.3.1) \end{aligned}$$

где,

$$W_2^0(0+) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\mu} + \frac{2}{\gamma} > W_2^0(0).$$

Затраты игрока, который обращается в систему в момент  $t_e$ , при условии,

что на интервале  $(0, t_e)$  нет поступлений заявок в систему,

$$\begin{aligned}
C(t_e) = & \\
(1-p)^2 \frac{1}{\mu} + 2p(1-p) & \left( \frac{1}{\mu} + \int_{t_e}^T \frac{dF(\theta)}{1-F(t_e)} \left( \int_{t_e}^{\theta} \mu e^{-\mu s} ds \int_0^{\theta-s} \gamma e^{-\gamma \tau} (s - t_e + \tau) d\tau + \right. \right. \\
& \left. \int_{t_e}^{\theta} \mu e^{-\mu s} ds \int_{\theta-s}^{\infty} \gamma e^{-\gamma \tau} (\theta - t_e + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}) d\tau + \int_{\theta}^{\infty} \mu e^{-\mu s} (s - t_e + \frac{1}{\gamma}) ds \right) + \\
p^2 & \left( \frac{1}{\mu} + \int_0^{t_e} \mu e^{-\mu s} ds \int_0^{t_e-s} \gamma e^{-\gamma \tau} d\tau \int_{t_e-s-\tau}^{\infty} \mu e^{-\mu v} (s + \tau + v - t_e + \frac{1}{\gamma}) dv + \right. \\
& \left. \int_{t_e}^{\infty} \mu e^{-\mu s} ds (s + \frac{1}{\mu} + \frac{2}{\gamma} - t_e) \right) = (1-p)^2 \frac{1}{\mu} + \\
2p(1-p) & \left( \frac{1}{\mu} + (\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}) e^{-\mu t_e} + \frac{e^{-\mu t_e}}{(1-p)(\mu-\gamma)} \int_{t_e}^T (e^{-\gamma(\theta-t_e)} - e^{-\mu(\theta-t_e)}) dF(\theta) \right) + \\
p^2 & \left( \frac{1}{\mu} + 2(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}) e^{-\mu t_e} + (\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}) \frac{\gamma}{(\mu-\gamma)^2} (e^{-\gamma t_e} - e^{-\mu t_e}) - (\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}) \frac{\gamma}{\mu-\gamma} t_e e^{-\mu t_e} \right).
\end{aligned}$$

Положим, что:

$$\mu > \gamma. \quad (3.3.2)$$

Тогда значение затрат  $C(t_e)$  убывает по  $t_e$ , при условии, что на интервале  $(0, t_e)$  нет поступлений заявок в систему. Это вместе с неравенством (3.3.1), откуда  $C(0+) > C(0)$ , подтверждает, что выгоднее обратиться в систему с некоторой задержкой после нулевого момента времени  $t = 0$ , а не сразу после него в момент  $0+$ . Так как в равновесии выигрыш должен быть одинаков на всем носителе стратегии, то

$$C(0) = C(t_e).$$

Покажем, что поступление в момент  $t \in (0, t_e)$  невыгодно даже одному игроку, когда остальные возобновляют поступление, начиная с момента  $t_e$ . Для

таких  $t$

$$\begin{aligned}
C(t) = & (1-p)^2 \frac{1}{\mu} + 2p(1-p) \left( \frac{1}{\mu} + \int_{t_e}^T dF(\theta) \left( \frac{1}{\mu} + \int_t^\theta \mu e^{-\mu s} ds \int_0^{\theta-s} \gamma e^{-\gamma \tau} (s-t+\tau) d\tau + \right. \right. \\
& \left. \left. \int_t^\theta \mu e^{-\mu s} ds \int_{\theta-s}^\infty \gamma e^{-\gamma \tau} (\theta-t+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\gamma}) d\tau + \int_\theta^\infty \mu e^{-\mu s} (s-t+\frac{1}{\gamma}) ds \right) + \right. \\
& p^2 \left( \frac{1}{\mu} + \int_0^t \mu e^{-\mu s} ds \int_0^{t-s} \gamma e^{-\gamma \tau} d\tau \int_{t-s-\tau}^\infty \mu e^{-\mu v} (s+\tau+v-t+\frac{1}{\gamma}) dv + \right. \\
& \left. \int_t^\infty \mu e^{-\mu s} ds (s+\frac{1}{\mu}+\frac{2}{\gamma}-t) \right) = \\
& (1-p)^2 \frac{1}{\mu} + p^2 \left( \frac{1}{\mu} + 2\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}\right) e^{-\mu t} + \frac{1}{\mu-\gamma} (e^{-\gamma t} - e^{-\mu t}) - t e^{-\mu t} \right) + \\
& 2p(1-p) \left( \frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}\right) e^{-\mu t} + \frac{e^{-\mu t}}{(1-p)(\mu-\gamma)} \int_{t_e}^T (e^{-\gamma(\theta-t)} - e^{-\mu(\theta-t)}) dF(\theta) \right).
\end{aligned}$$

Тогда легко проверить, что значение  $C(t)$  убывает по  $t < t_e$ , подтверждая, что даже одному игроку лучше избегать обращения в систему раньше момента  $t_e$ .

Теперь рассмотрим ситуацию, когда первый игрок обращается в систему на интервале  $t \in [t_e, T]$ . Для этого определим в каждый момент  $t$  вероятности состояний  $p_{ijk}(t)$ , где  $i \in \{0, 1, 2\}$  заявок обратилось в систему на интервале  $[t_e, t]$ ,  $j \in \{0, 1\}$  заявок выполняется на сервере и  $k \in \{0, 1\}$  заявок находится на орбите в момент  $t$ . Интенсивность поступления заявок в момент  $t$  (из общей очереди) зависит от выбранной стратегии и числа  $k$  заявок, которые уже пришли в систему к моменту  $t$ . Данные интенсивности равны

$$\lambda_0(t) = 2 \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad \lambda_1(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

Запишем теперь соответствующие вероятностям состояний уравнения Колмо-

горова.

$$\begin{aligned}
p'_{000}(t) &= -\lambda_0(t)p_{000}(t), \\
p'_{100}(t) &= -\lambda_1(t)p_{100}(t) + \mu p_{110}(t), \\
p'_{110}(t) &= -(\mu + \lambda_1(t))p_{110}(t) + \lambda_0(t)p_{000}(t), \\
p'_{201}(t) &= -\gamma p_{201}(t) + \mu p_{211}(t), \\
p'_{210}(t) &= -\mu p_{210}(t) + \gamma p_{201}(t) + \lambda_1(t)p_{100}(t), \\
p'_{211}(t) &= -\mu p_{211}(t) + \lambda_1(t)p_{110}(t), \\
p'_{200}(t) &= \mu p_{210}(t).
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Вероятности состояний для  $t = t_e$  выглядят следующим образом.

$$\begin{aligned}
p_{000}(t_e) &= (1 - p)^2 \\
p_{100}(t_e) &= 2p(1 - p)(1 - e^{-\mu t_e}) \\
p_{110}(t_e) &= 2p(1 - p)e^{-\mu t_e} \\
p_{201}(t_e) &= p^2 \int_0^{t_e} \mu e^{-\mu\theta} e^{-\gamma(t_e - \theta)} d\theta = p^2 \mu \frac{e^{-\gamma t_e} - e^{-\mu t_e}}{\mu - \gamma} \\
p_{210}(t_e) &= p^2 \int_0^{t_e} \mu e^{-\mu\theta} \int_0^{t_e - \theta} \gamma e^{-\gamma\tau} e^{-\mu(t_e - (\theta + \tau))} d\tau d\theta = p^2 \gamma \frac{e^{-\gamma t_e} - e^{-\mu t_e}(\mu t_e - \gamma t_e + 1)}{(\mu - \gamma)^2} \\
p_{211}(t_e) &= p^2 e^{-\mu t_e} \\
p_{200}(t_e) &= p^2 \int_0^{t_e} \mu e^{-\mu\theta} \int_0^{t_e - \theta} \gamma e^{-\gamma\tau} (1 - e^{-\mu(t_e - (\theta + \tau))}) d\tau d\theta = \\
&= p^2 (1 - e^{-\mu t_e} - \gamma \frac{e^{-\gamma t_e} - e^{-\mu t_e}(\mu t_e - \gamma t_e + 1)}{(\mu - \gamma)^2} - \mu \frac{e^{-\gamma t_e} - e^{-\mu t_e}}{\mu - \gamma}).
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Выражения (3.3.4) являются начальными граничными условиями для задачи Коши с дифференциальными уравнениями (3.3.3). Вероятность  $p$  поступления в момент  $t = 0$  может быть найдена из нормализующего условия

$$p + \int_{t_e}^T f(t) dt = 1.$$

Тогда среднее время обслуживания заявки игрока при поступлении в систему в момент  $t$  равно

$$\begin{aligned}
C(t) &= \frac{1}{\mu} \left( p_{000}(t) + p_{100}(t) + p_{201}(t) + p_{200}(t) \right) \\
&\quad + p_{110}(t) \left( \frac{1}{\mu} + W_1^1(t) \right) + p_{210}(t) \left( \frac{1}{\mu} + W_1^0(t) \right) + p_{211}(t) \left( \frac{1}{\mu} + W_2^0(t) \right) \\
&= \frac{1}{\mu} + p_{110}(t) W_1^1(t) + p_{210}(t) W_1^0(t) + p_{211}(t) W_2^0(t),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
W_1^0(t) &= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}, \\
W_2^0(t) &= \frac{2}{\mu} + \frac{2}{\gamma}, \\
W_1^1(t) &= \frac{1}{1-F(t)} \int_t^T dF(\theta) \left( \int_0^{\theta-t} \mu e^{-\mu s} ds \int_0^{\theta-t-s} \gamma e^{-\gamma \tau} (s + \tau) d\tau + \right. \\
&\quad \left. \int_0^{\theta-t} \mu e^{-\mu s} \int_{\theta-t-s}^{\infty} \gamma e^{-\gamma \tau} (\theta - t + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}) d\tau + \int_{\theta-t}^{\infty} \mu e^{-\mu s} (\frac{1}{\gamma} + s) ds \right) \\
&= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{(1-F(t))(\mu-\gamma)} \int_t^T e^{-\gamma(\theta-t)} - e^{-\mu(\theta-t)} dF(\theta).
\end{aligned}$$

В равновесии  $C(t) = C(t_e) = const$ ,  $t \in [t_e, T]$  то есть

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) \left( p_{110}(t) - p_{110}(t_e) + p_{210}(t) - p_{210}(t_e) + 2(p_{211}(t) - p_{211}(t_e)) \right) + \\
& \frac{1}{\mu-\gamma} \left( \frac{p_{110}(t)}{1-F(t)} \int_t^T (e^{-\gamma(\theta-t)} - e^{-\mu(\theta-t)}) dF(\theta) - \frac{p_{110}(t_e)}{1-p} \int_{t_e}^T (e^{-\gamma(\theta-t_e)} - e^{-\mu(\theta-t_e)}) dF(\theta) \right) \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

При выполнении условия (3.3.5) функция  $C(t)$  должна быть постоянной на интервале  $[t_e, T]$ . Остается лишь потребовать выполнения условия  $C(t_e) = C(0)$ , или

$$\begin{aligned}
& (1-p)^2 \frac{1}{\mu} + p^2 \left( \frac{2}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) \\
& 2p(1-p) \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) + \frac{1}{2\gamma(\mu-\gamma)(1-p)} \int_{t_e}^T (\gamma e^{-\gamma \theta} - \mu e^{-\mu \theta}) dF(\theta) \right) = \\
& (1-p)^2 \frac{1}{\mu} + \\
& 2p(1-p) \left( \frac{1}{\mu} + \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) e^{-\mu t_e} + \frac{e^{-\mu t_e}}{(1-p)(\mu-\gamma)} \int_{t_e}^T (e^{-\gamma(\theta-t_e)} - e^{-\mu(\theta-t_e)}) dF(\theta) \right) + \\
& p^2 \left( \frac{1}{\mu} + 2 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) e^{-\mu t_e} + \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\gamma}{(\mu-\gamma)^2} (e^{-\gamma t_e} - e^{-\mu t_e}) - \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\gamma}{\mu-\gamma} t_e e^{-\mu t_e} \right)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) (1 - 2e^{-\mu t_e}) + \\
& \frac{1}{(\mu-\gamma)} \left( \frac{1}{\gamma} \int_{t_e}^T (\gamma e^{-\gamma \theta} - \mu e^{-\mu \theta}) dF(\theta) - 2e^{-\mu t_e} \int_{t_e}^T (e^{-\gamma(\theta-t_e)} - e^{-\mu(\theta-t_e)}) dF(\theta) \right) + \\
& p \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) \left( \frac{\gamma}{\mu-\gamma} t_e e^{-\mu t_e} - \frac{\gamma}{(\mu-\gamma)^2} (e^{-\gamma t_e} - e^{-\mu t_e}) \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

В результате вышеприведенного анализа получаем следующее утверждение.

**Утверждение 3.2.** *Равновесие в игре трех игроков с обратными вызовами имеет вид (3.2.1), где  $f(t)$  для  $t \in [t_e, T]$  определяется как решение уравнений (3.3.3), (3.3.5) и (3.3.6).*

### § 3.4 Вычисление равновесия для случая трех игроков

В данном разделе опишем детально численное решение полученных выше уравнений. Зафиксируем  $t_e$  и  $T$ . Разобьем интервал  $[t_e, T]$  на  $k - 1$  равных отрезков. Далее найдем приближенные решения в узлах сетки  $K = \{t_1 = t_e, t_2 = t_1 + \Delta, \dots, t_k = t_{k-1} + \Delta\}$ , где  $\Delta = (T - t_e)/(k - 1)$ . Представим значения неизвестной функции  $f(t)$  в начальный момент и в узлах сетки как аргументы задачи

$$\{x_0 = f(0) = p, x_1 = f(t_1), \dots, x_k = f(t_k) = f(T)\}.$$

Тогда найденные условия для равновесия могут быть представлены в виде разностных уравнений. Условие (3.3.5) примет вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}\right)(p_{110}(t_i) - p_{110}(t_e) + p_{210}(t_i) - p_{210}(t_e) + \\ & + 2(p_{211}(t_i) - p_{211}(t_e)) + \frac{p_{110}(t_i)}{(\mu-\gamma)(1-p-\sum_{j=1}^{i-1} x_j \Delta)} \sum_{j=i}^{k-1} (e^{-\gamma(t_j-t_i)} - e^{-\mu(t_j-t_i)}) x_j \Delta - \\ & - \frac{p_{110}(t_e)}{(\mu-\gamma)(1-p)} \sum_{j=1}^{k-1} (e^{-\gamma(t_j-t_e)} - e^{-\mu(t_j-t_e)}) x_j \Delta = 0, \quad i = 2, \dots, k. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Условие (3.3.6) примет вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}\right)(1 - 2e^{-\mu t_e}) + \\ & \frac{1}{(\mu-\gamma)} \left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{k-1} (\gamma e^{-\gamma t_j} - \mu e^{-\mu t_j}) x_j \Delta - 2e^{-\mu t_e} \sum_{j=1}^{k-1} (e^{-\gamma(t_j-t_e)} - e^{-\mu(t_j-t_e)}) x_j \Delta\right) + \\ & p \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}\right) \left(\frac{\gamma}{\mu-\gamma} t_e e^{-\mu t_e} - \frac{\gamma}{(\mu-\gamma)^2} (e^{-\gamma t_e} - e^{-\mu t_e})\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Дифференциальные уравнения Колмогорова запишутся в виде

$$\begin{aligned}
p_{000}(t_{i+1}) &= p_{000}(t_i) \left( 1 - \Delta \frac{2x_i}{1-p-\Delta \sum_{j=1}^{i-1} x_j} \right), \\
p_{100}(t_{i+1}) &= p_{100}(t_i) \left( 1 - \Delta \frac{x_i}{1-p-\Delta \sum_{j=1}^{i-1} x_j} \right) + \Delta \mu p_{110}(t_i), \\
p_{110}(t_{i+1}) &= p_{110}(t_i) \left( 1 - \Delta \left( \mu + \frac{x_i}{1-p-\Delta \sum_{j=1}^{i-1} x_j} \right) \right) + \Delta \frac{2x_i}{1-p-\Delta \sum_{j=1}^{i-1} x_j} p_{000}(t_i), \\
p_{201}(t_{i+1}) &= (1 - \Delta \gamma) p_{201}(t_i) + \Delta \mu p_{211}(t_i), \\
p_{210}(t_{i+1}) &= (1 - \Delta \mu) p_{210}(t_i) + \Delta \gamma p_{201}(t_i) + \Delta \frac{x_i}{1-p-\Delta \sum_{j=1}^{i-1} x_j} p_{100}(t_i), \\
p_{211}(t_{i+1}) &= (1 - \Delta \mu) p_{211}(t_i) + \Delta \frac{x_i}{1-p-\Delta \sum_{j=1}^{i-1} x_j} p_{110}(t_i), \\
p_{200}(t_{i+1}) &= p_{200}(t_i) + \Delta \mu p_{210}(t_i), \\
i &= 1, \dots, k-1.
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Наконец, условие нормализации в разностной форме станет

$$p + \Delta \sum_{i=1}^{k-1} x_i - 1 = 0. \tag{3.4.4}$$

Алгоритм нахождения решения выглядит следующим образом. Перебираем значения  $p$  на интервале  $[0, 1]$ . Для каждого  $p$  перебираем значения  $t_e$  на интервале  $[0, T]$ . Для каждой заданных  $p$  и  $t_e$  решаем систему разностных уравнений (3.4.1), где вероятности состояний удовлетворяют системе (3.4.3). Ищем такую пару  $p$  и  $t_e$ , чтобы выполнялись условия (3.4.2) и (3.4.4).

Для поиска  $p$  и  $t_e$  сначала используем разбиение  $[0, 1] \times [0, T]$  на сетку с небольшим рангом и ищем узел, при переходе через который левые части уравнений (3.4.2) и (3.4.4) меняют знак. В окрестности данного узла будем искать решение. В частности, для каждой данной пары  $p$  и  $t_e$  находим решение  $x$ , используя алгоритм 2. Сначала мы используем равномерное распределение на интервале  $[t_e, T]$  в качестве начального приближения решения  $x$ , учитывая, что в момент  $t = 0$  находится атом с заданной вероятностью обращения  $p$ . Далее ищем решение  $x$ , удовлетворяющее (3.4.1). Шаг 1 алгоритма 2 повторяется,

пока решение не стабилизируется с некоторой заданной точностью  $\epsilon$ . Как показывают эксперименты, алгоритм сходится за 2-3 прохода.

---

**Алгоритм 2** Нахождение решения  $x$  для  $p$  и  $t_e$ .

---

Шаг 0. Инициализация.

для  $i = 1 \dots k$  **выполнить**

$$x_i \leftarrow \frac{1-p}{T-t_e}$$

**конец для**

Вычислить  $p_{000}(t_1), \dots, p_{200}(t_1)$  из (3.3.4).

Шаг 1. Дальнейшие приближения.

**выполнить**

$$x^{prev} \leftarrow x$$

для  $i = 2 \dots k$  **выполнить**

Найти  $x_{i-1}$  из (3.4.1) с новыми  $p_{000}(t_i), \dots, p_{200}(t_i)$ , пересчитанными по (3.4.3).

**конец для**

**пока** ( $|x - x^{prev}| > \epsilon$ )

---

На каждой итерации  $i = 2, \dots, k$  в начале выполнения имеем  $x_j$ , где  $j = 1, \dots, i-2$ , и вероятности состояний для всех шагов от 1 до  $i-1$ , найденные на предыдущих итерациях. На данной итерации  $i$  решаем уравнение (3.4.1) относительно  $x_{i-1}$ , рассчитывая каждый раз предварительно вероятности состояний на шаге  $i$  с учетом значения очередного приближения  $x_{i-1}$  согласно (3.4.3). При этом сумма в предпоследнем и последнем слагаемых левой части уравнения (3.4.1) частично вычисляется по старым значениям  $x^{prev}$  из решения на предыдущей итерации, а все остальные компоненты уравнения – по новым, согласно решению  $x$  на текущей итерации. Однако, с каждым проходом шага 1 разница между решениями уменьшается.

После выполнения всех итераций получаем набор значений  $x_i$ , где  $i = 1, \dots, k-1$ , что достаточно для нахождения  $F(T) \approx p + \sum_{i=1}^{k-1} x_i \Delta$ . Если условия (3.4.2) и (3.4.4) выполнены с заданной точностью  $\epsilon$ , считаем, что текущие  $p$ ,  $t_e$  и  $x$  дают решение, иначе меняем  $t_e$  и  $p$ .

**Пример 6.** Пусть  $T = 2$ ,  $\mu = 2$ ,  $\gamma = 1$ . Результатом вычислений являются оптимальные значения в равновесии:  $p \approx 0.412$ ,  $t_e \approx 0.380$ . Плотность оптимальных моментов обращения в систему на интервале  $[t_e, T]$  представлена на



рис. 3.1. На графике видно, что функция  $f(t)$  сначала убывает на интервале  $[t_e, 0.833]$ , затем возрастает на интервале  $[0.833, 1.676]$ , затем снова убывает на интервале  $[1.676, 2]$ . Значение затрат в равновесии равно  $C(t) \approx 1.133$ .

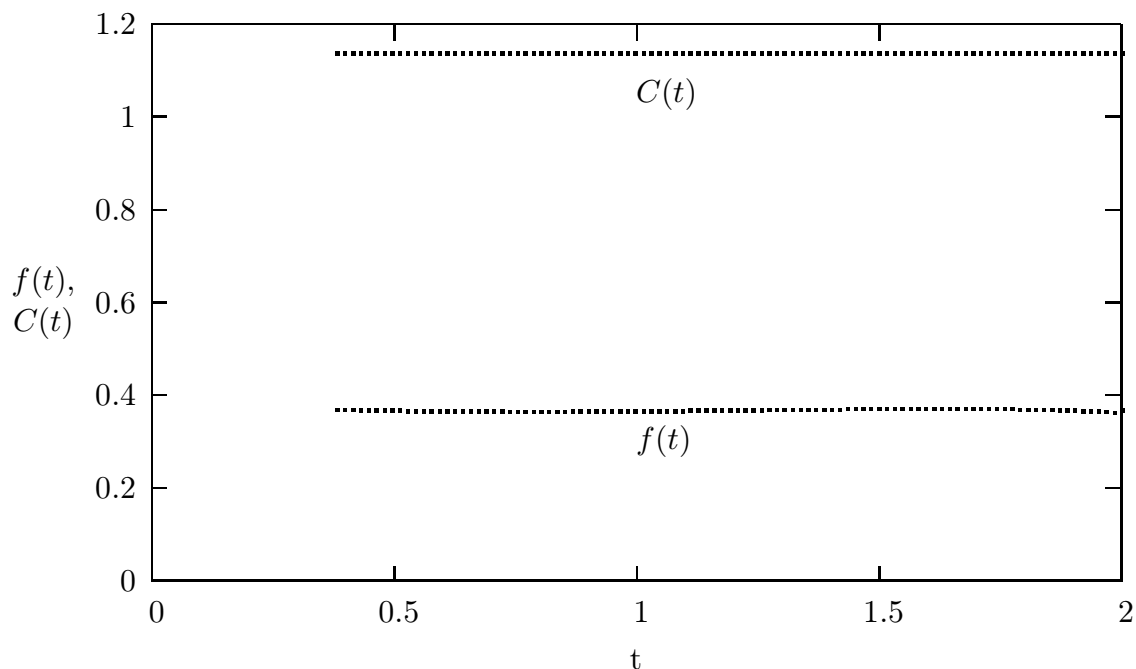


Рис. 3.1: Равновесная плотность  $f(t)$  и затраты  $C(t)$  для  $T = 2, \mu = 2, \gamma = 1$ .

**Пример 7.** Если  $T = 4, \mu = 2, \gamma = 1$ , тогда  $p \approx 0.232, t_e \approx 0.369$ . Вид равновесной плотности аналогичен представленному на рис. 3.1, и  $C(t) \approx 0.857$ .

**Пример 8.** Если  $T = 4, \mu = 4, \gamma = 1$ , тогда вид равновесной плотности аналогичен представленному на рис. 3.1, и  $p \approx 0.121, t_e \approx 0.179$ , а  $C(t) \approx 0.404$ .

**Пример 9.** Если  $T = 1, \mu = 2, \gamma = 1$ , тогда  $p \approx 0.661, t_e \approx 0.381$ , и  $C(t) \approx 1.485$ . Плотность оптимальных моментов поступления в систему на интервале  $[t_e, T]$  представлена на рис. 3.2. На графике видно, что функция  $f(t)$  убывает на интервале  $[0.381, 1]$ .

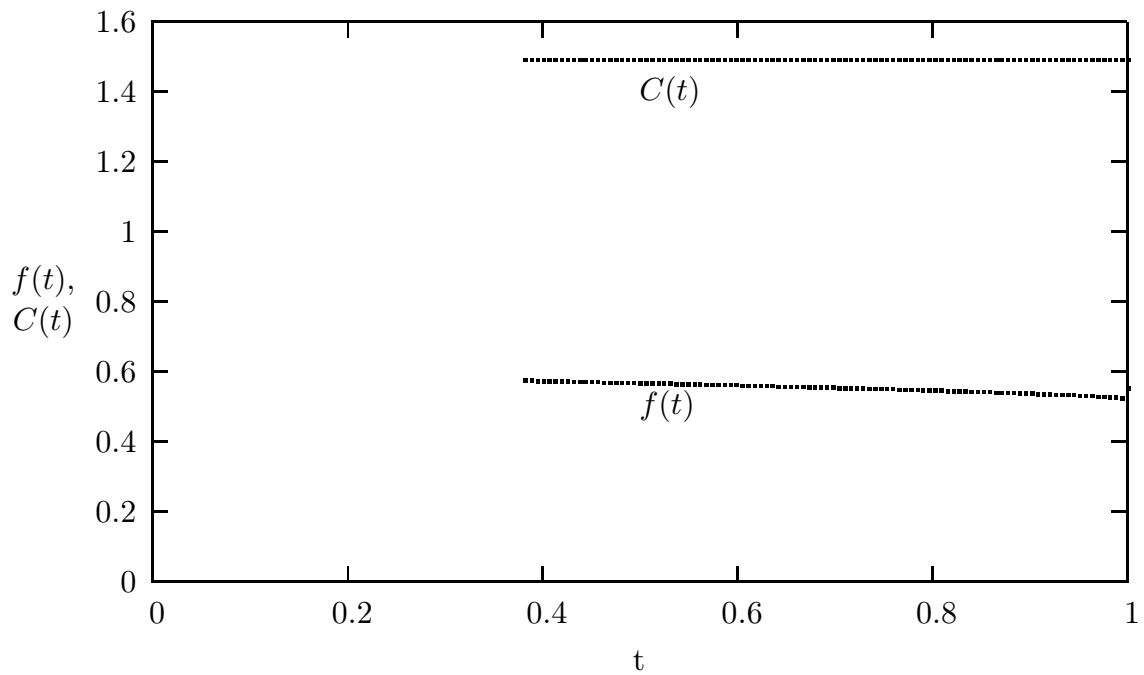


Рис. 3.2: Равновесная плотность  $f(t)$  и затраты  $C(t)$  для  $T = 1, \mu = 2, \gamma = 1$ .

### § 3.5 Результаты

В данной главе построена теоретико-игровая модель односерверной системы массового обслуживания с повторными вызовами. Для случая двух и трех игроков доказано, что оптимальная стратегия такова, что игрок обращается к системе с ненулевой вероятностью в начальный момент времени, далее присутствует пауза в поступлениях в систему, далее существует интервал времени  $[t_e, T]$ , на котором определена положительная плотность распределения моментов обращения в систему. Предложены алгоритмы для численного нахождения равновесий и проведены численные эксперименты по нахождению равновесий для различных параметров системы.

## Глава 4

# Задача выбора базовой станции

Сформулируем задачу как игру [141], в которой игроки являются мобильными пользователями, которые выбирают базовые радиостанции для подключения к беспроводной сети. Стратегии в игре – это номера станций или вероятности, которые игроки используют для выбора базовых станций. Каждый эгоистичный пользователь выбирает станцию, пытаясь максимизировать свое отношение «сигнал к интерференции + шум» (SINR или просто SNR), которое зависит от: 1) расстояния между игроком и станцией, 2) числа подключений к станции. В этой модели сигнал обратно пропорционален квадрату расстояния до выбранной базовой станции, а интерференция+шум – сумма всех сигналов на станции и некоторый постоянный уровень шума. Наша цель – найти равновесие Нэша для случаев данной модели, где пользователи знают, либо не знают местоположение друг друга.

Первоначально общим критерием выбора в существующих архитектурах был выбор базовой станции, от которой приходит самый сильный сигнал. Пользователи измеряют уровень принимаемого сигнала от каждой БС и выбирают самый сильный из них для подключения. Однако из-за неравномерного распределения пользовательской нагрузки этот метод страдает от ограничений полосы пропускания и несбалансированной нагрузки между базовыми станциями, что снижает общую пропускную способность системы [121].

Ключевое предположение, лежащее в основе большинства игр выбора базовой станции в вышеприведенной литературе, заключается в том, что все пользователи оказывают равное влияние на загрузку. Поэтому основной определяющий параметр – это общее количество пользователей, связанных с конкретной

БС. Однако это не всегда верно в беспроводной связи. Влияние конкретного пользователя на других пользователей той же базовой станции зависит от профиля пользователя. Одним из таких факторов является расстояние до станции, поскольку от данного расстояния зависят уровень принимаемого сигнала и помехи для других пользователей. Мы моделируем игру, учитывая не только количество пользователей, подключенных к базовой станции, но и профиль каждого пользователя.

## § 4.1 Задача оптимизации для одного игрока

Рассмотрим одномерную модель с одним игроком, перемещающимся на интервале  $[0, 1]$ . Две идентичные базовые станции (“0” и “1”) с уровнями шума  $c$  расположены на соответствующих концах интервала. В каждый момент времени координата игрока равна  $x \in [0, 1]$ . Его значение SINR равно  $\frac{1/x^2}{1/x^2+c} = \frac{1}{cx^2+1}$ , если он соединяется с базовой станцией 0 и  $\frac{1}{1+c(1-x)^2}$  на станции 1.

Очевидным решением является выбор станции 0, если  $x \leq \frac{1}{2}$  и 1 иначе, так как  $\frac{1}{cx^2+1} \geq \frac{1}{1+c(1-x)^2}$  при  $x \leq \frac{1}{2}$ .

## § 4.2 Игра двух игроков

Рассмотрим одномерную игру с двумя игроками (0 и 1), движущимися на интервале  $[0, 1]$ . Две идентичные базовые радиостанции (“0” и “1”) с уровнями шума  $c$  расположены на соответствующих концах интервала. В каждый момент времени координата игрока 0 равна некоторому значению  $x \in [0, 1]$ , а 1 игрока равна  $y \in [0, 1]$ . Каждый игрок  $i$  в каждой ситуации  $(x, y)$  должен определить, к какой из двух станций лучше подключиться.

Чистая стратегия для каждого игрока  $i$  – это номер  $l_i$  радиостанции, к которой он выбирает подключение. Тогда  $(l_0, l_1)$  – чистый профиль стратегии. Также определены следующие смешанные стратегии:  $p$  - вероятность того, что игрок 0 выберет станцию 0,  $q$  - вероятность того, что игрок 1 выберет станцию 0. Для станции 1 вероятности соответственно равны  $1 - p$  и  $1 - q$ .  $(p, q)$  определяет профиль смешанной стратегии. Каждый профиль чистой стратегии

соответствует смешанному профилю, поскольку  $p = P(l_0 = 0)$ ,  $q = P(l_1 = 0)$ . Функция выигрыша для каждого игрока – это его ожидаемое значение SINR.

Значение SINR для чистых стратегий для  $i$ -го игрока, который подключается к  $j$ -й станции равно

$$SINR_i^j = \begin{cases} \frac{\frac{1}{(\rho_i^j)^2}}{\frac{1}{(\rho_i^j)^2} + \frac{1}{(\rho_{1-i}^j)^2} + c} & \text{если } l_{1-i} = j, \\ \frac{\frac{1}{(\rho_i^j)^2}}{\frac{1}{(\rho_i^j)^2} + c} & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $\rho_i^j$  – расстояние между игроком  $i$  и базовой станцией  $j$ . Упростим это выражение и доопределим в областях неопределенности:

$$SINR_i^j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{если } l_{1-i} = j \text{ и } \rho_i^j = \rho_{1-i}^j = 0, \\ \frac{1}{\frac{(\rho_i^j)^2}{(\rho_{1-i}^j)^2} + 1 + c(\rho_i^j)^2} & \text{если } l_{1-i} = j \text{ и } \rho_i^j + \rho_{1-i}^j > 0, \\ \frac{1}{1 + c(\rho_i^j)^2} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Далее мы будем опускать написание  $\frac{1}{2}$  для SINR полагая, что для значений  $u, v \in [0, 1]$   $\frac{u}{v}|_{u=v=0} \stackrel{def}{=} 1$  и  $\frac{1}{\frac{u^2}{v^2} + 1 + cu^2}|_{u=v=0} = \frac{1}{2}$ . Также обозначим  $\bar{u} \stackrel{def}{=} 1 - u$ .

### § 4.2.1 Биматричная игра с полной информацией

Здесь мы рассмотрим модель с полной информацией, где каждый игрок знает, где находится его оппонент. Рассмотрим игру как биматричную модель. Матрица выигрышей выглядит следующим образом:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2} + cx^2}, \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2} + cy^2} & \frac{1}{1 + cx^2}, \frac{1}{1 + cy^2} \\ \frac{1}{1 + c\bar{x}^2}, \frac{1}{1 + cy^2} & \frac{1}{1 + \frac{\bar{x}^2}{y^2} + c\bar{x}^2}, \frac{1}{1 + \frac{\bar{y}^2}{\bar{x}^2} + c\bar{y}^2} \end{pmatrix}$$

и функции выигрыша для каждого игрока:

$$H_{x,y}^1(p, q) = \frac{pq}{1 + \frac{x^2}{y^2} + cx^2} + \frac{p(1-q)}{1 + cx^2} + \frac{(1-p)q}{1 + c\bar{x}^2} + \frac{(1-p)(1-q)}{1 + \frac{\bar{x}^2}{y^2} + c\bar{x}^2},$$

$$H_{x,y}^2(p, q) = \frac{pq}{1 + \frac{y^2}{x^2} + cy^2} + \frac{p(1-q)}{1 + c\bar{y}^2} + \frac{(1-p)q}{1 + cy^2} + \frac{(1-p)(1-q)}{1 + \frac{\bar{y}^2}{\bar{x}^2} + c\bar{y}^2}.$$

Для каждой позиции игроков  $(x, y)$  чистое равновесие – это такой выбор номеров станций  $(l_0^*, l_1^*)$ , что  $a_{il_1^*} \leq a_{l_0^*l_1^*}$  и  $b_{l_0^*j} \leq b_{l_0^*l_1^*}$ . Для каждой позиции на квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$  существует некоторое чистое равновесие:

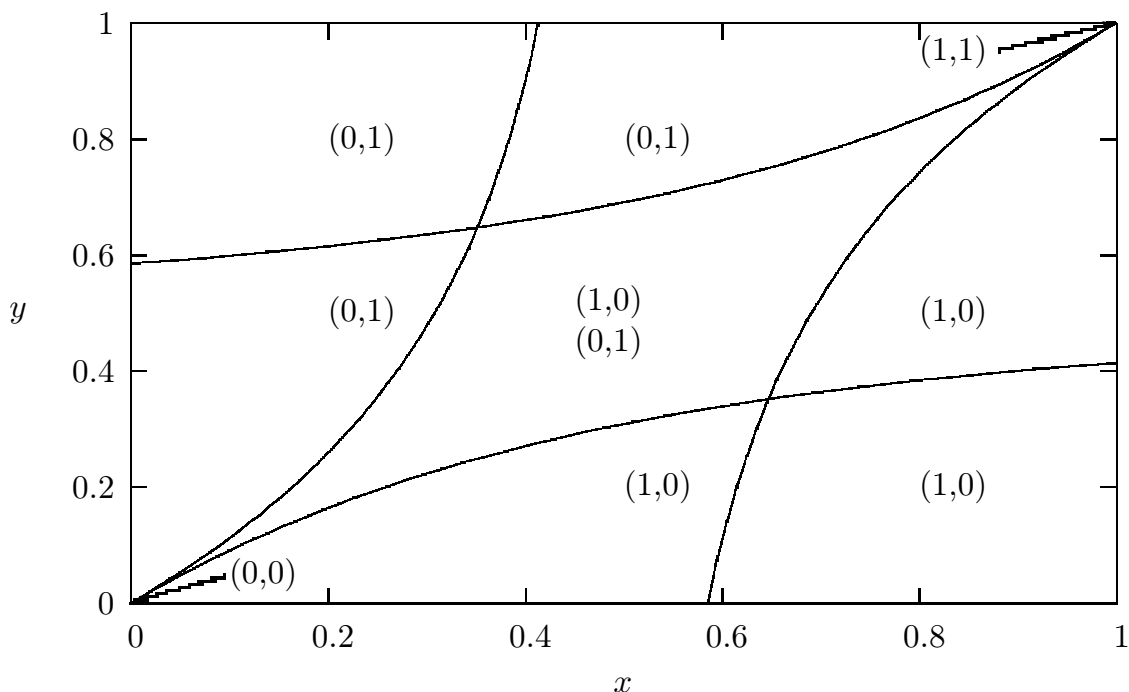


Рис. 4.1: Чистые равновесия в биматричной игре с полной информацией для  $c = 1$ .

$(l_0^*, l_1^*)$	равновесие в $(x, y)$ такое, что
$(0, 0)$	$c(1 - 2x) \geq \frac{x^2}{y^2}$ и $c(1 - 2y) \geq \frac{y^2}{x^2}$
$(0, 1)$	$c(2x - 1) \leq \frac{x^2}{y^2}$ и $c(1 - 2y) \leq \frac{y^2}{x^2}$
$(1, 0)$	$c(1 - 2x) \leq \frac{x^2}{y^2}$ и $c(2y - 1) \leq \frac{y^2}{x^2}$
$(1, 1)$	$c(2x - 1) \geq \frac{x^2}{y^2}$ и $c(2y - 1) \geq \frac{y^2}{x^2}$

Заметим, что при  $c \leq 1$  пара условий равновесия  $(0,0)$  обеспечивает только одноточечное допустимое положение  $x = y = 0$ , в котором существует это чистое равновесие. Действительно, для  $c \leq 1$  кривые  $c(1 - 2x) = \frac{x^2}{y^2}$  и  $c(1 - 2y) = \frac{y^2}{x^2}$  имеют только одну точку контакта на  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Но при  $c > 1$  они пересекаются в двух точках на  $[0, 1] \times [0, 1]$ , тогда в этом случае положением, заданным для этого равновесия, является некоторая область. Это верно и для кривых, ограничивающих область существования равновесия  $(1,1)$ . При  $c \leq 1$  это равновесие существует только в положении  $x = y = 1$ . Рисунок 4.1 и 4.2 иллюстрируют этот факт. С увеличением  $c$  области  $(0,0)$  и  $(1,1)$ , где существуют равновесия, увеличиваются, и равновесное решение для каждого игрока стремится к оптимальному решению задачи одного игрока.

Смешанными стратегиями являются  $p = \frac{b_{11} - b_{10}}{b_{00} + b_{11} - b_{01} - b_{10}}$  и  $q = \frac{a_{11} - a_{01}}{a_{00} + a_{11} - a_{01} - a_{10}}$ .

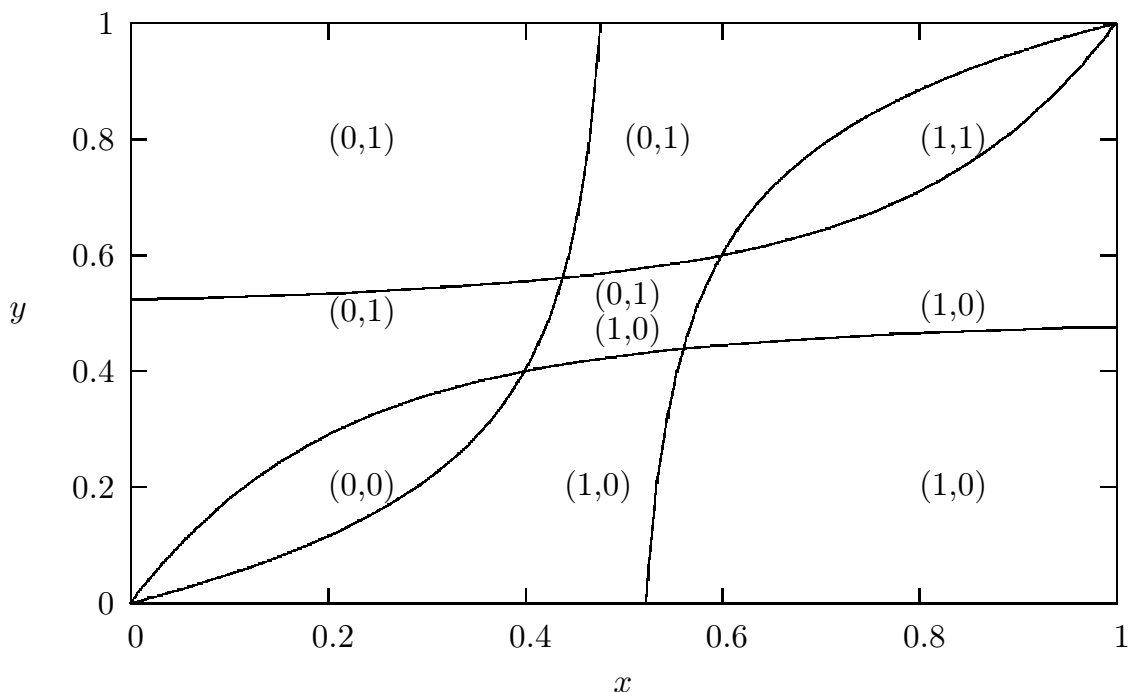


Рис. 4.2: Чистые равновесия в биматричной игре с полной информацией для  $c = 5$ .

Они допустимы только при  $0 \leq p, q \leq 1$ , то есть в точности там, где существуют обе чистые стратегии  $(0,1)$  и  $(1,0)$  использовать различные станции.

На рисунках 4.3, 4.4, 4.5 показаны смешанные стратегии игроков в зависимости от  $x$  – позиции игрока 0 при  $y = y_0$ , т.е. игрок 1 неподвижен. Концы стрелок на каждом рисунке показывают границы интервала  $[x_l, x_r]$  для  $x$ , где существуют смешанные равновесия. Интересное наблюдение состоит в том, что каждый игрок в смешанном равновесии использует самую удаленную станцию и позволяет своему противнику в основном использовать ближайшую станцию.

### § 4.2.2 Биматричная модель с неполной информацией

Теперь предположим, что каждый игрок не знает, где находится его противник, и думает, что он равномерно распределен на  $[0, 1]$ . Тогда игрок 0 ищет свое решение, используя матрицу ожидаемых выигрышей, зависящих от выбора игроков:

$$(A', B') =$$

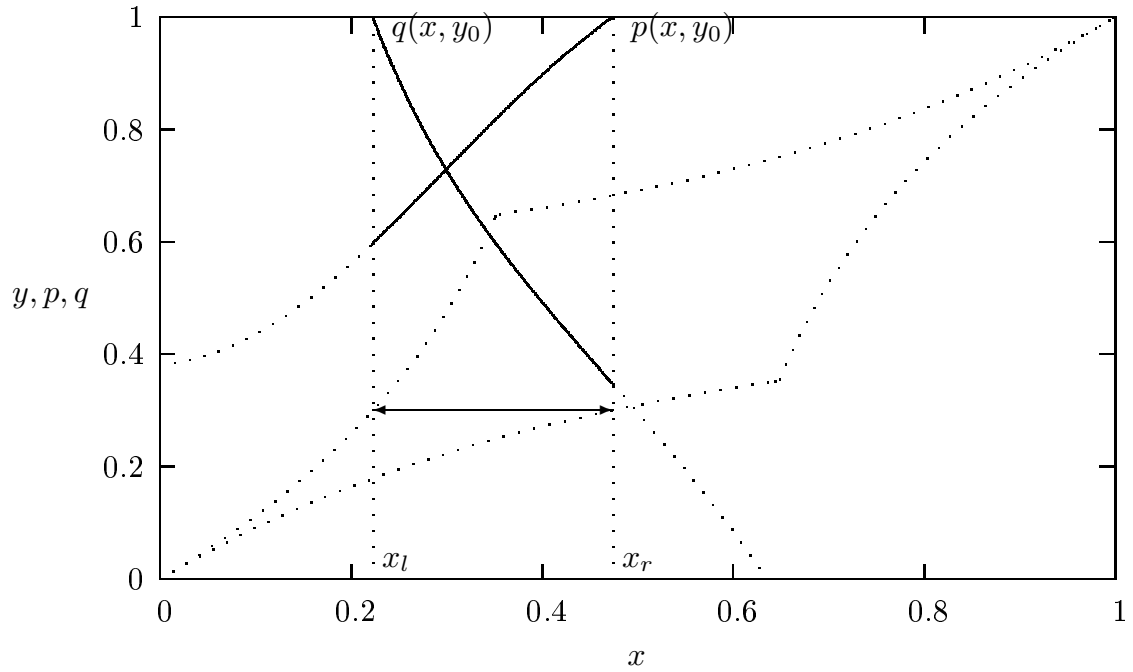


Рис. 4.3: Смешанные равновесия в биматричной игре с полной информацией для  $c = 1$  и  $y_0 = 0.3$ .

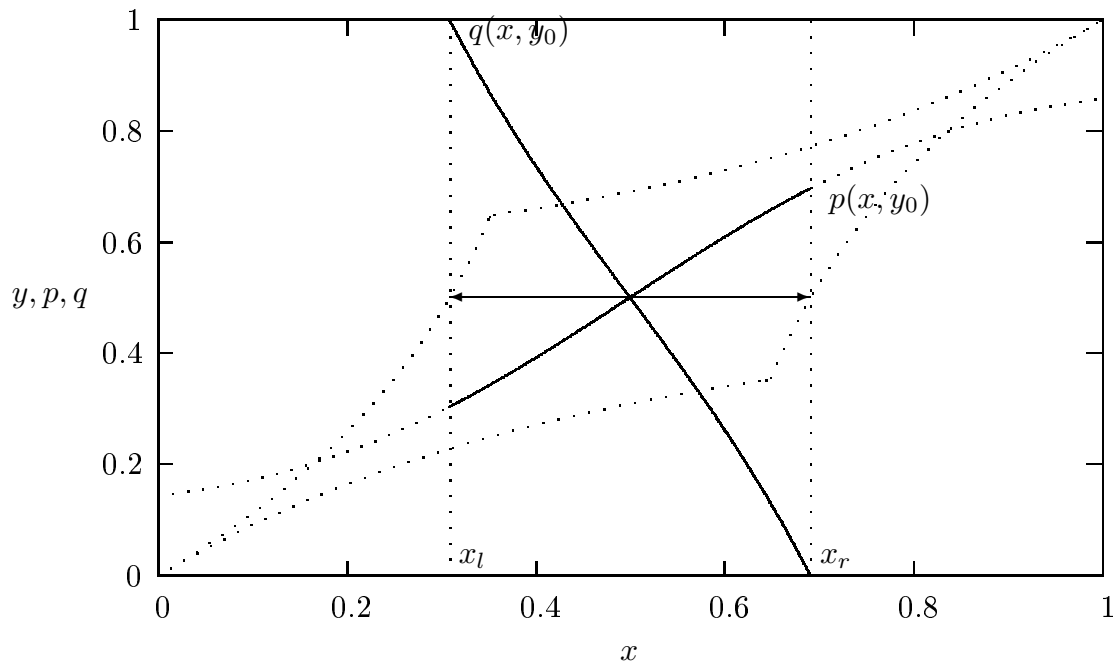


Рис. 4.4: Смешанные равновесия в биматричной игре с полной информацией для  $c = 1$  и  $y_0 = 0.5$ .



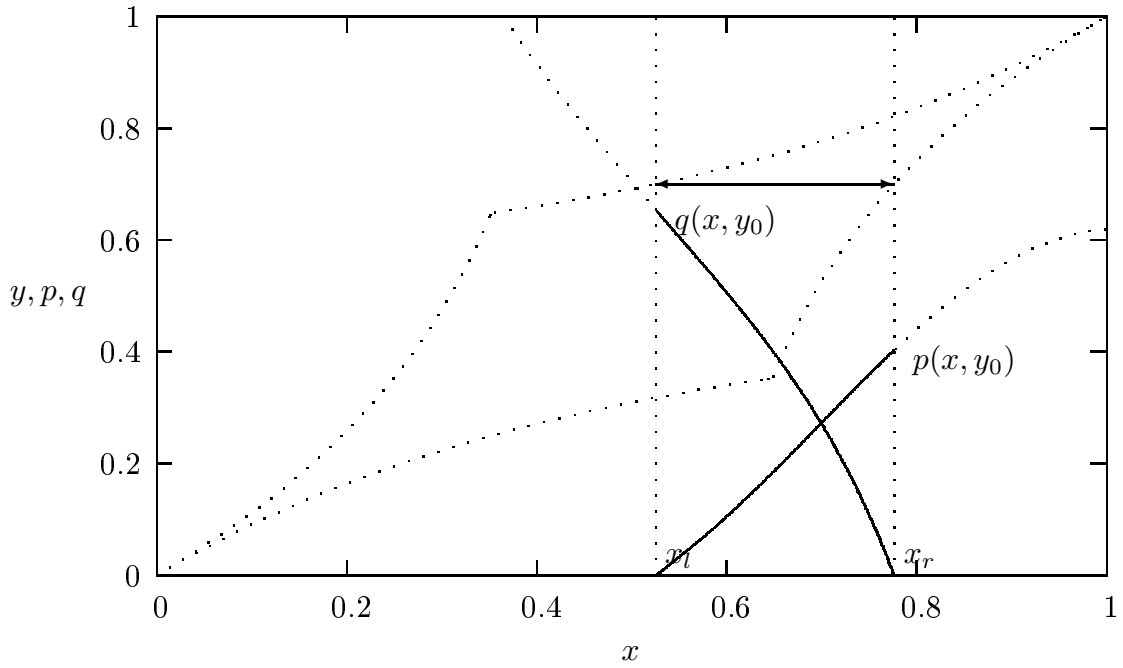


Рис. 4.5: Смешанные равновесия в биматричной игре с полной информацией для  $c = 1$  и  $y_0 = 0.7$ .

$$\begin{pmatrix} \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}+cx^2} dy, \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}+cy^2} dy & \int_0^1 \frac{1}{1+cx^2} dy, \int_0^1 \frac{1}{1+cy^2} dy \\ \int_0^1 \frac{1}{1+c\bar{x}^2} dy, \int_0^1 \frac{1}{1+cy^2} dy & \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{\bar{x}^2}{y^2}+c\bar{x}^2} dy, \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{y^2}{\bar{x}^2}+cy^2} dy \end{pmatrix}$$

или в упрощенном виде:

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{cx^2+1}-x \arctan \frac{\sqrt{cx^2+1}}{x}}{\sqrt{cx^2+1}(1+cx^2)} & \frac{1}{1+cx^2} \\ \frac{1}{1+c\bar{x}^2} & \frac{\sqrt{c\bar{x}^2+1}-\bar{x} \arctan \frac{\sqrt{c\bar{x}^2+1}}{\bar{x}}}{\sqrt{c\bar{x}^2+1}(c\bar{x}^2+1)} \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} \frac{x \arctan \frac{\sqrt{cx^2+1}}{x}}{\sqrt{cx^2+1}} & \frac{\arctan \sqrt{c}}{\sqrt{c}} \\ \frac{\arctan \sqrt{c}}{\sqrt{c}} & \frac{\bar{x} \arctan \frac{\sqrt{c\bar{x}^2+1}}{\bar{x}}}{\sqrt{c\bar{x}^2+1}} \end{pmatrix}.$$

Аналогичная матрица  $(A'', B'')$  может быть получена для игрока 1 путем интегрирования элементов  $(A, B)$  по  $x$ .

Игрок 0 получает ожидаемый равновесный профиль  $(l'_0, l'_1)$  такой, что  $a'_{i'l'_i} \leq a'_{l'_0 l'_1}$  и  $b'_{l'_0 j} \leq b'_{l'_0 l'_1}$ .

Рассмотрим функцию  $\frac{\arctan x}{x}$ . Она монотонно убывает для  $x \geq 0$ . Поскольку  $\frac{\sqrt{cx^2+1}}{x} = \sqrt{c + \frac{1}{x^2}} > \sqrt{c}$ , тогда  $b'_{01} = b'_{10} = a''_{01} = a''_{10}$  являются максимальными

элементами в  $B'$  и  $A''$ . То есть, каждый игрок считает, что выбор базовой станции, отличной от выбранной им, – лучший ответ оппонента на любой его выбор. Каждый ожидает два возможных типа равновесия: игрок 0 ожидает  $(0, 1)$  для  $x$  при  $a'_{01} \geq a'_{11}$  и  $(1, 0)$  при  $a'_{10} \geq a'_{00}$ , игрок 1 ожидает  $(0, 1)$  для  $y$  при  $b''_{01} \geq b''_{00}$  и  $(1, 0)$  при  $b''_{10} \geq b''_{11}$ .

Пусть  $x_l$  будет таким, что  $a'_{01}(x_l) = a'_{11}(x_l)$ ,  $x_r$  – таким, что  $a'_{10}(x_r) = a'_{00}(x_r)$ ,  $y_l$  – таким, что  $b''_{10}(y_l) = b''_{11}(y_l)$  и  $y_h$  – таким, что  $b''_{01}(y_h) = b''_{00}(y_h)$ . Численные результаты показывают, что игрока 0 равновесия первого типа существуют на  $0 \leq x \leq x_r$  и второго – на  $x_l \leq x \leq 1$ , где  $x_l < \frac{1}{2} < x_r$  симметричны относительно  $\frac{1}{2}$  и стремятся к данной точке с ростом  $c$ . Для игрока 1 равновесия первого типа существуют при  $y_l \leq y \leq 1$  и второго – при  $0 \leq y \leq y_h$ , где  $y_l < \frac{1}{2} < y_h$  симметричны относительно  $\frac{1}{2}$  и стремятся к данной точке с ростом  $c$ .

Каждый игрок действует в соответствии со своими представлениями об ожидаемом равновесии, и таким образом все достигают ситуации реального равновесия. Равновесия для разных областей представлены на рисунке 4.6. Покажем, что это действительно так.

Рассмотрим область  $[0, x_l] \times [0, y_l]$ . Здесь  $a'_{01} \geq a'_{11}$ ,  $a'_{10} \leq a'_{00}$ ,  $b''_{10} \geq b''_{11}$ ,  $b''_{01} \leq b''_{00}$ . Игрок 0 ожидает  $(0, 1)$ , то есть он выбирает станцию 0. Игрок 1 ожидает  $(1, 0)$  и выбирает станцию 0. Почему  $(0, 0)$  является равновесием? Игрок 0 ожидает  $a'_{01}$ , но получает  $a'_{00} > a'_{10}$ , то есть у него нет причин переключаться на станцию 1. Игрок 1 ждет  $b''_{10}$ , но получает  $b''_{00} \geq b''_{01}$ , то есть у него так же нет причин переключаться на станцию 1.

Рассмотрим теперь область  $[x_l, x_r] \times [0, y_l]$ . Здесь  $a'_{01} \geq a'_{11}$ ,  $a'_{10} \geq a'_{00}$ ,  $b''_{10} \geq b''_{11}$ ,  $b''_{01} \leq b''_{00}$ . Игрок 0 ожидает  $(0, 1)$  или  $(1, 0)$ . Игрок 1 ожидает  $(1, 0)$ , следовательно, он выбирает станцию 0. Если игрок 0 выберет станцию 1 в соответствии с ожидаемым равновесием  $(1, 0)$ , игроки достигают равновесия. Если же игрок 0 выберет станцию 0 согласно  $(0, 1)$ , он получит  $a'_{00} \leq a'_{10}$  вместо  $a'_{01}$  и переключится на станцию 1.

Аналогично можно определить равновесия и для оставшихся областей.

Смешанные стратегии игроки также определяют согласно своим ожиданиям. Стратегия игрока 0 определяется как  $p = \frac{b'_{11} - b'_{10}}{b'_{00} + b'_{11} - b'_{01} - b'_{10}}$ . Она зависит только от

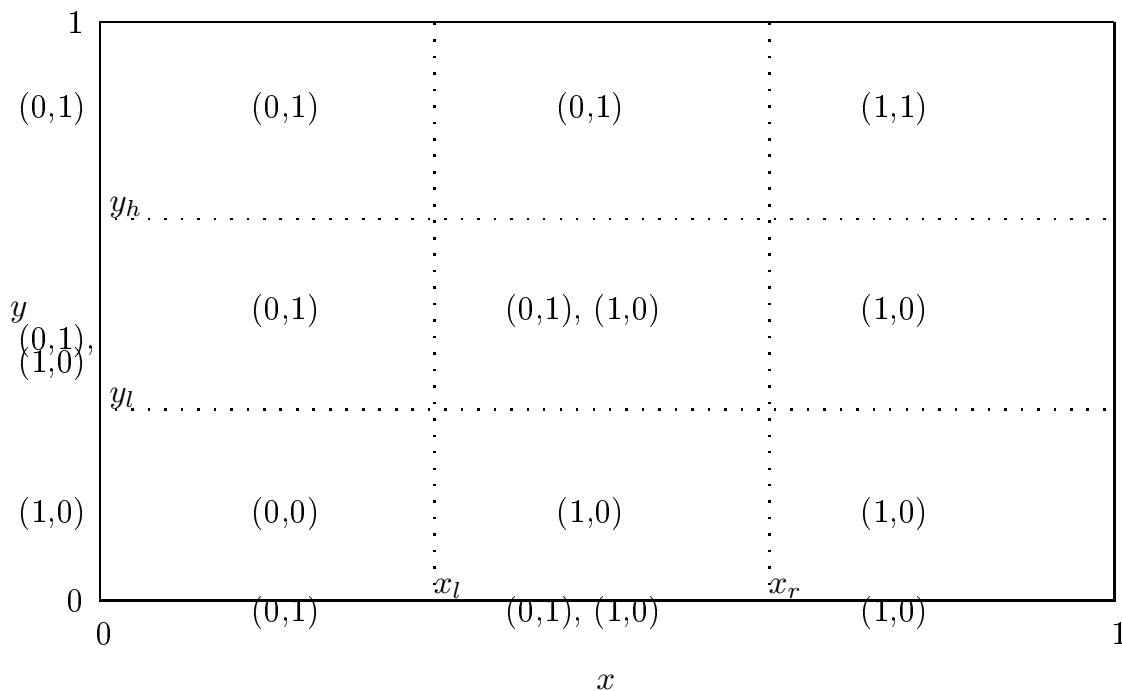


Рис. 4.6: Чистые равновесия в биматричной игре с неполной информацией.

его собственного положения и не зависит от положения оппонента. Заметим, что  $0 < p < 1$  для всех  $x$  на  $[0, 1]$ , поскольку  $b'_{11} < b'_{10}$  и  $b'_{00} < b'_{01}$ . Но  $p$  связано с ожидаемой стратегией игрока 1:  $q' = \frac{a'_{11} - a'_{01}}{a'_{00} + a'_{11} - a'_{01} - a'_{10}}$  которая существует при  $0 \leq q' \leq 1$ , и это условие допустимости для смешанной стратегии игрока 0.

Поскольку  $a'_{00} = a'_{01}(1 - b'_{00})$  и  $a'_{11} = a'_{10}(1 - b'_{11})$ , то  $q' = \frac{a'_{10}(1 - b'_{11}) - a'_{01}}{-a'_{10}b'_{11} - a'_{01}b'_{00}}$ . Таким образом, данное значение неотрицательно, когда  $a'_{10}(1 - b'_{11}) - a'_{01} = a'_{11} - a'_{01} \leq 0$  и не превосходит 1, когда  $a'_{10}(1 - b'_{11}) - a'_{01} + a'_{10}b'_{11} + a'_{01}b'_{00} = a'_{10} - a'_{01} + a'_{01}b'_{00} = a'_{10} - a'_{00} \geq 0$ .

Рисунок 4.7 демонстрирует восприятие игроком 0 ожидаемой стратегии противника  $q'$  и его собственную смешанную стратегию  $p$ .

Для игрока 1 его смешанная стратегия  $q = \frac{a''_{11} - a''_{01}}{a''_{00} + a''_{11} - a''_{01} - a''_{10}}$ . Это такая же функция, как у игрока 0, зависящая от  $y$ . Она допустима при  $b''_{01} \geq b''_{00}$  и  $b''_{10} \geq b''_{11}$ . Заметим, что смешанные стратегии допустимы точно в области  $[x_l, x_r] \times [y_l, y_h]$ , где существуют оба типа чистых равновесий.

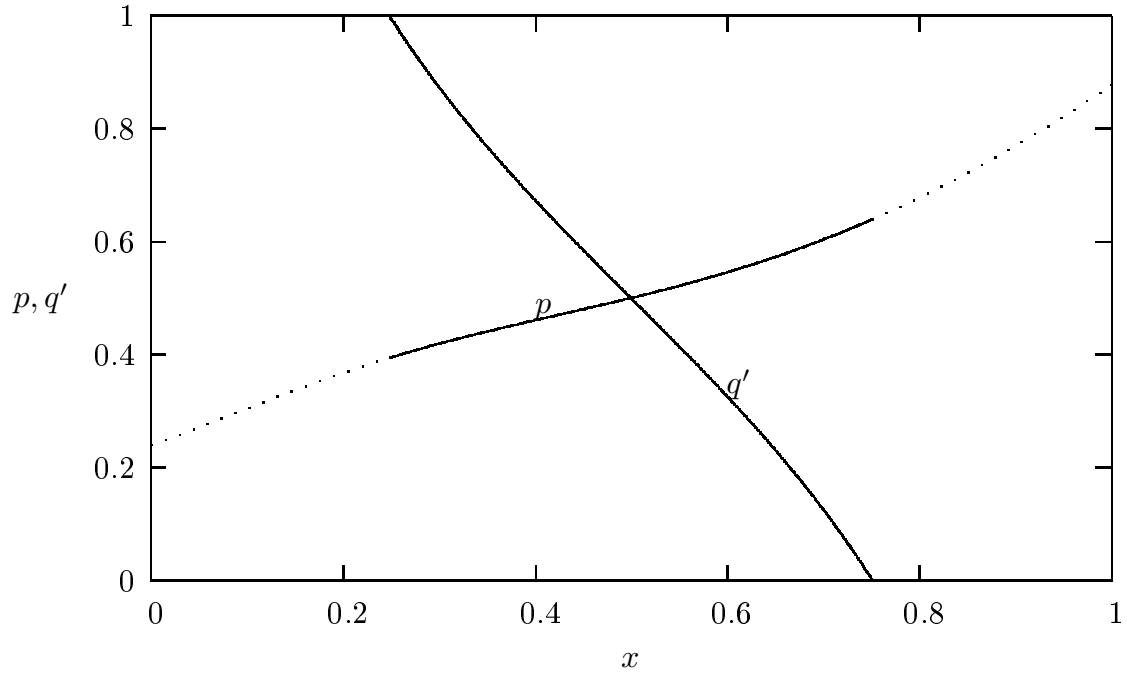


Рис. 4.7: Смешанные равновесия в биматричной игре с неполной информацией для  $c = 1$ .

### § 4.3 КР-подобная модель $n$ игроков

Рассматриваемая задача может быть представлена в виде КР-подобной (Koutsoupias and Papadimitriou) модели [132] с  $n$  игроками и двумя параллельными каналами. Каждый игрок находится в положении  $x_i$ . Профиль чистых стратегий игроков представляется как  $(l_1, \dots, l_n)$ , где  $l_i$  является номером станции, выбранной игроком  $i$ , и профиль смешанных стратегий  $(p_1, \dots, p_n)$ , где  $p_i$  – вероятность, что игрок  $i$  выбрал станцию 0. Выражение SINR для чистых стратегий в случае, когда игрок  $i$  соединяется с  $j$ -й станцией

$$SINR_i^j = \frac{1}{\sum_{k \neq i: l_k = j} \frac{(\rho_i^j)^2}{(\rho_k^j)^2} + 1 + c(\rho_i^j)^2}.$$

Положим также, что  $SINR_i^j = \frac{1}{n}$ , если все  $l_k = j$ , и  $\rho_k^j = 0$  для  $k = 1, \dots, n$ .

В случае чистых стратегий персональный выигрыш  $i$ -го игрока равен  $\Lambda_i = SINR_i^{l_i}$ . Профиль чистых стратегий  $(l_1, \dots, l_n)$  является равновесием по Нэшу, если для каждого игрока  $i = 1, \dots, n$  его выигрыш равен  $\Lambda_i = \max_{j=0,1} SINR_i^j$ .

Смешанный персональный выигрыш  $i$ -го игрока в случае использования им

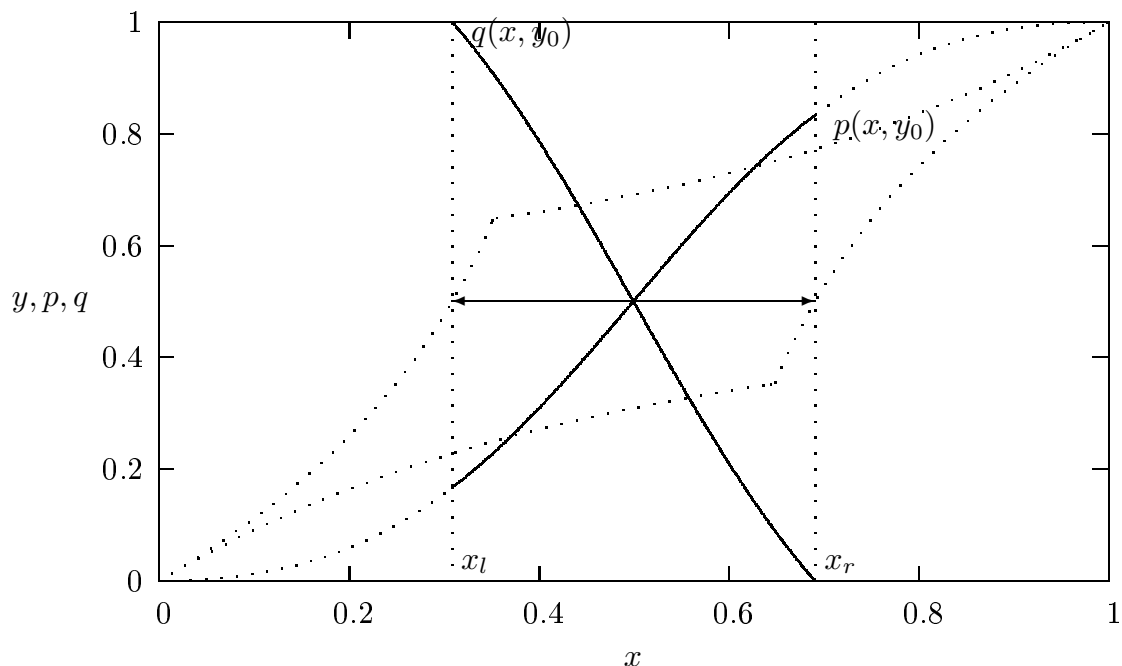


Рис. 4.8: Смешанные равновесия в КР-подобной модели для  $c = 1$  и  $y_0 = 0.5$ .

станции  $j$  равен

$$\Lambda_i^j = \frac{1}{\sum_{k \neq i} \frac{p_k^j (\rho_k^j)^2}{(\rho_k^j)^2} + 1 + c(\rho_i^j)^2},$$

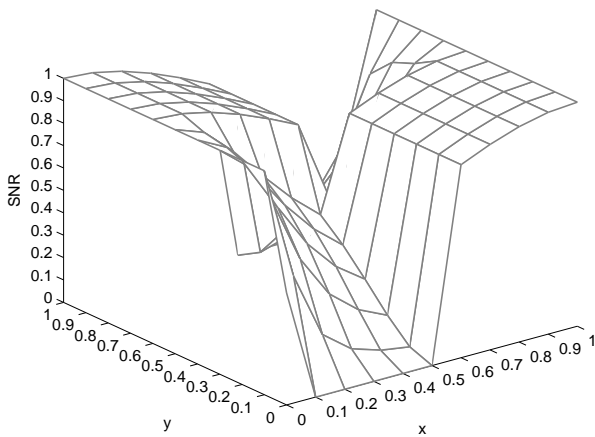
где  $p_k^0 = p_k$  и  $p_k^1 = 1 - p_k$ .  $\Lambda_i = \max_{j=0,1} \Lambda_i^j$ . Профиль смешанных стратегий  $(p_1, \dots, p_n)$  является равновесием по Нэшу, если для каждого игрока  $i$  и каждой станции  $j$  выполняется  $\Lambda_i^l = \Lambda_i$  при  $p_i^j > 0$  и  $\Lambda_i^l < \Lambda_i$  при  $p_i^j = 0$ .

Можно проверить, что чистое равновесие в КР-подобной модели для двух игроков с координатами  $x$  и  $y$  полностью совпадает с чистым равновесием в биматричной игре с полной информацией. Смешанные равновесные вероятности будут следующими  $p = \frac{\bar{y}^2 x^2 - c \bar{x}^2 x^2 (2y-1)}{\bar{x}^2 y^2 + x^2 \bar{y}^2}$  и  $q = \frac{\bar{x}^2 y^2 - c \bar{y}^2 y^2 (2x-1)}{\bar{x}^2 y^2 + x^2 \bar{y}^2}$ . Они допустимы в тех же областях, что и в биматричной модели с полной информацией и имеют то же свойство, что каждый игрок в смешанном равновесии выбирает наиболее удаленную станцию (см. рис 4.8).

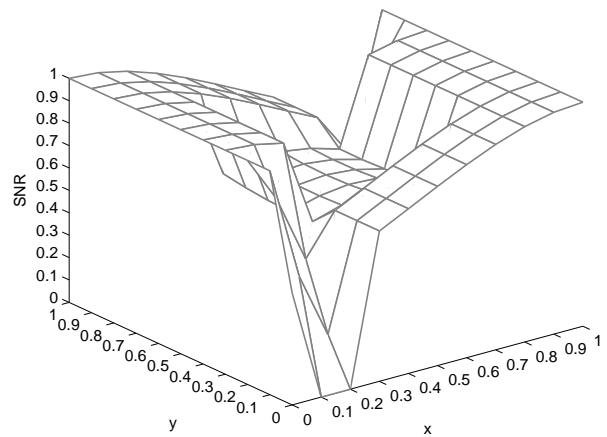
## § 4.4 Численные примеры

Мы провели моделирование в Matlab, чтобы изучить производительность предложенных игровых моделей. Используемые настройки моделирования следующие:

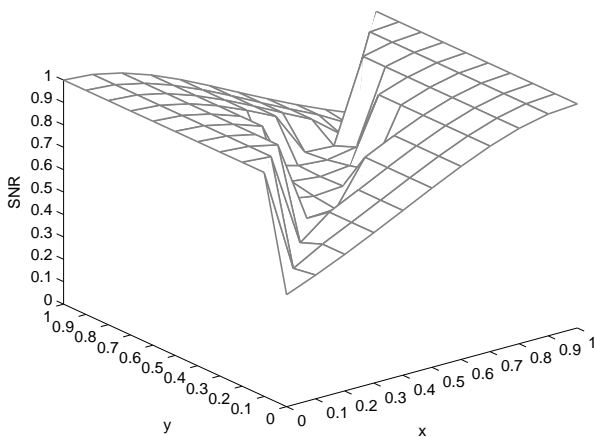
щие: мы рассмотрели две БС (БС0 и БС1), которые имеют одинаковую мощность передачи. Расстояние между двумя БС равно единице. Мы рассмотрели одномерную модель с двумя игроками (игроком 0 и игроком 1), которые независимо перемещаются между двумя БС. Мы сравнили производительность предложенных моделей игры для двух игроков и КР-подобной модели с результатами применения стратегии, в которой каждый игрок связывается с ближайшей для него точкой доступа. Моделирование проводится как для случая с низким уровнем шума ( $c=1$ ), так и для случая с высоким уровнем шума ( $c=5$ ).



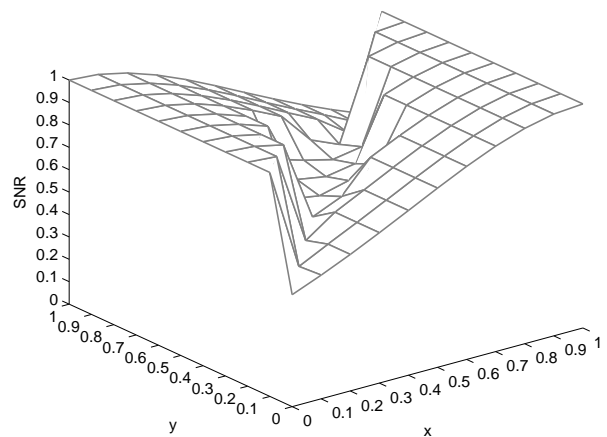
(a) Ближайшая привязка



(b) Неполная информация



(c) Полная информация



(d) КР-подобная модель

Рис. 4.9: Значения SINR игрока 0 для ситуации низкого уровня шума ( $c=1$ ).

### § 4.4.1 Низкий уровень шума

На рис. 4.9 показаны значения SINR игрока 0 при различных стратегиях для ситуации с низким уровнем шума ( $c=1$ ). Игра симметрична, поэтому мы рассматриваем выигрыш только одного игрока, а именно игрока 0. Мы меняем положение каждого игрока между базовыми станциями независимо и измеряем значение SINR для каждой настройки при разных стратегиях выбора БС. Мы заметили, что стратегия ближайшего подключения (рис. 4.9а) дает наихудший выигрыш. В некоторых случаях ожидаемое SINR падает до нуля. Модель для двух игроков с неполной информацией является более реалистичным сценарием для реальной мобильной сети. Примечательно, что этот случай также дает лучший выигрыш (рис. 4.9b), чем ближайшее подключение. Несмотря на то, что ожидаемое SINR падает до нуля, область с таким выигрышем сравнительно меньше, чем при стратегии ближайшего подключения.

В таблице 4.1 представлен среднее значение SINR для каждой стратегии, в том числе и в предположении, что позиции игроков равномерно распределены между двумя базовыми станциями. Результат указывает на то, что предложенная игра для двух игроков может достичь прироста на 11% по сравнению со стратегией ближайшего подключения, даже без какой-либо информации о другом игроке.

Преимущество использования игровой модели еще больше увеличивается за счет наличия полной информации об игроках. Статистически прирост составляет более 18%. Когда у игроков есть полная информация друг о друге, они могут сделать соответствующий выбор. Как модель с двумя игроками с информацией (рис. 4.10с), так и КР-подобная модель с информацией (рис. 4.9d) дают аналогичный выигрыш. Для обеих моделей SINR не превышал 0.5 ни при каких настройках.

Есть объяснения более низкого выигрыша при стратегии ближайшего подключения. Можно доминировать над одним игроком, подавляя выигрыш другого игрока. Как правило, если первый игрок находится очень близко к БС, чем второй игрок, и оба подключаются к одной и той же БС, SINR второго игрока будет очень низким. Между тем, второй игрок может улучшить SINR, подклю-

Таблица 4.1: Средние значения SINR для игрока 0.

	$c=1$	$c=5$
Ближайшее подключение	0.7097	0.6140
Полная информация	0.8380	0.6634
Неполная информация	0.7874	0.6140
КР-подобная модель	0.8461	0.6775

чившись к другой БС, даже если она находится намного дальше, чем первая БС. Кроме того, это увеличивает использование сетевых ресурсов. Однако это невозможно со стратегией ближайшего подключения.

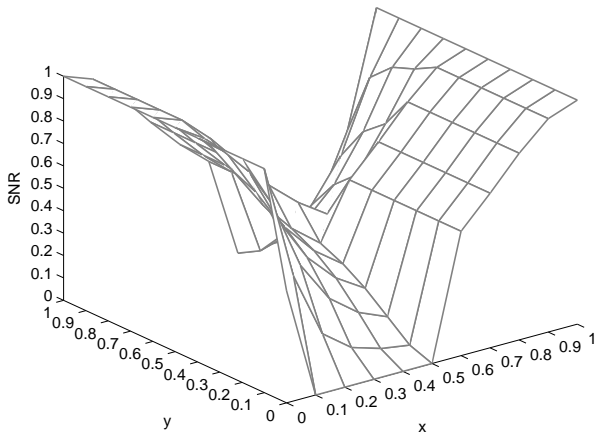
Мы наблюдаем общую область высокого выигрыша на всех четырех графиках, когда игроки находятся далеко друг от друга и находятся близко к разным БС. В таких случаях подключение к ближайшей БС является наиболее эффективным выбором. Таким образом, в таких ситуациях игровые модели также предлагают выбор ближайших БС.

#### § 4.4.2 Высокий уровень шума

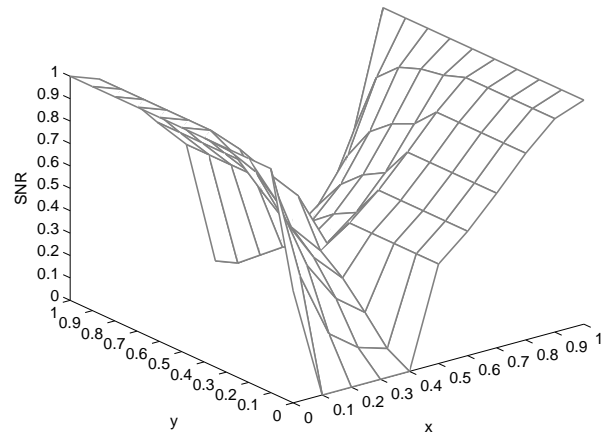
На рис. 4.10 показаны значения SINR игрока 0 при различных стратегиях для ситуации с высоким уровнем шума ( $c=5$ ). Здесь мы заметили, что стратегия ближайшего подключения (рис. 4.10а) и модель двух игроков с неполной информацией дают почти одинаковый выигрыш (рис. 4.10б). Здесь преобладает более высокий шум. Поэтому преимущество, которое может быть достигнуто за счет подключения к разным БС, подавляется. Поскольку обе стратегии имеют схожие графики SINR, делается вывод, что в худшем случае наша модель игры с неполной информацией достигает, по крайней мере, выигрыша модели ближайшего подключения.

Тем не менее, модель с полной информацией и КР-подобная модель по-прежнему способны повысить производительность за счет полной информации об игроках. Модель двух игроков с полной информацией (рис. 4.10с) и КР-подобная модель (рис. 4.10д) имеют почти одинаковую производительность, и в этом случае прирост производительности SINR составляет 9%. Преобладаю-

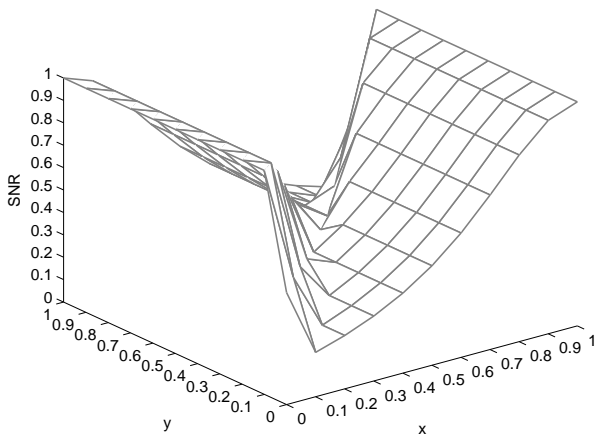




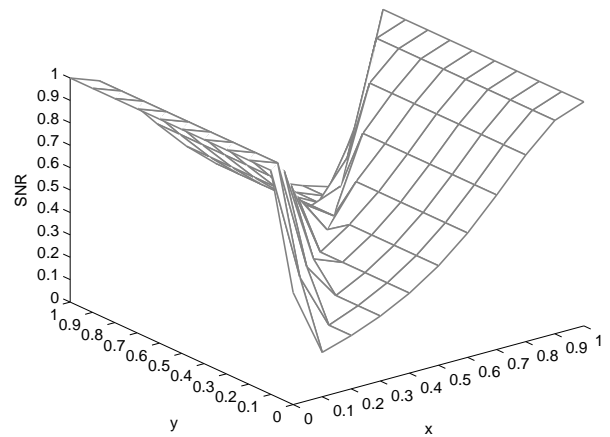
(a) Ближайшее подключение



(b) Неполная информация



(c) Полная информация



(d) КР-подобная модель

Рис. 4.10: Значения SINR игрока 0 с высоким уровнем шума ( $c=5$ ).

ший шум здесь уменьшил преимущество игровых моделей.

Мы видим, что все четыре графика имеют большую общую область высокого выигрыша, чем в ситуацию с низким уровнем шума. Когда условия канала ухудшаются, игровые модели приближаются к стратегии ближайшего подключения.

## § 4.5 Результаты

Построена и исследована теоретико-игровая одномерная модель выбора базовой станции, учитывающая не только количество пользователей, подключенных к станции, но также расстояния каждого пользователя до станций и уро-

вень шума. Для случая двух игроков найдены равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях в биматричных играх с известным и с неизвестным местонахождением оппонента, а также области существования равновесий. Для произвольного числа игроков предложена КР-подобная модель игры с полной информацией, когда известно расположение всех игроков. Проведены численные эксперименты по сравнению эффективности стратегии выбора ближайшей станции с равновесными в играх двух игроков с известным и неизвестным местонахождением оппонента для случаев низкого и высокого уровней шума. По результатам численных экспериментов можно сделать следующие выводы.

- Игрок может улучшить SINR до 18%, используя игровую стратегию (по сравнению с простым подключением к ближайшей базовой станции).
- При большем уровне шума разница между стратегиями в различных моделях меньше.
- Как и ожидалось, знание местоположения другого игрока позволяет получить лучший SINR.
- КР-модель для двух игроков очень близка к биматричной игре для двух игроков с полной информацией, что подтверждает ее адекватность.

## Глава 5

# Двухсторонний рынок телекоммуникаций

Современные средства передачи информации, такие как Интернет и мобильная связь, привели к созданию рынка нового типа, в котором участие принимают виртуальные агенты, распределенные в пространстве. Формируются новые рыночные структуры, которые различаются по масштабу ресурсов и решаемых задач, цене и качеству сервиса и другим параметрам. История показала, что разделение сети и услуг привело к росту конкуренции в бывших монополиях связи и коммуникационных технологий. Рынки стали действовать в этих отраслях более эффективно из-за возросшей функциональной совместимости и снижения затрат на изменение конфигурации. Это привело к созданию облачных технологий и появлению облачных или виртуальных операторов, предлагающих разнообразные услуги на основе собственных, а также арендуемых у крупных компаний платформ и интерфейсов, что позволяет виртуальным операторам исключить капиталовложения, необходимые для построения и поддержания собственной инфраструктуры большой мощности (например, сотовой сети, вычислительных кластеров и сетей и т.п.).

Поэтому, как правило, облачные сервисы покупают вычислительные ресурсы у больших компаний, и получают доход за счет удобства предоставляемых услуг. Например, облачные фирмы, связанные с решением больших вычислительных задач, могут арендовать ресурсы компаний Google или Amazon. Операторы связи федерального значения, такие как Ростелеком, Транстелеком, предоставляют в аренду магистрали связи фирмам, продающим провайдерские услуги. Крупные операторы сотовой связи, такие как МТС, Мегафон, Билайн, предоставляют инфраструктуру своих сотовых сетей виртуальным операторам

сотовой связи, таким как NetbyNet, Связной Мобайл и т.п. продающим услуги под собственной маркой. Сети сотовой связи также могут использоваться для передачи данных в различных облачных сервисах, например, для работы облачных центров отправки SMS-сообщений [166].

Теоретико-игровая модель поведения конкурирующих виртуальных операторов в данной работе представлена как повторяющаяся двухшаговая игра следующего вида [6]. На первом шаге игроки, виртуальные операторы, владельцы облачных сервисов, распределяются по крупным компаниям, собственникам ресурсов (связи, вычислительных и т.п.), и после этого объявляют цены на свои услуги. Пользователи, это люди, которые через Интернет или мобильные устройства выбирают тот или иной сервис, следуя своим личным предпочтениям. Мы предполагаем, что распределение пользователей по сервисам происходит согласно идее Хотеллинга [40], когда пользователи сравнивают полезности от использования той или иной фирмы.

После того, как определено распределение пользователей, определяются выигрыши всех облачных операторов, и находится равновесие по Нэшу [9] в данной конкурентной модели. Равновесие по Нэшу ищется как результат последовательности наилучших реакций игроков на поведение конкурентов [1, 47, 88]. В разделе § 5.2 равновесие ищется в модели рынка с двумя виртуальными операторами. При этом рассмотрены две модификации модели, в которых предпочтения пользователей касаются самих облачных фирм, а также владельцев ресурсов. В разделе § 5.3 рассмотрена модель симметричных операторов, в которой предпочтения пользователей касаются лишь владельцев ресурсов. Такое предположение упрощает нахождение равновесия, поскольку операторы, покупающие ресурс у какой-то компании, ведут себя одинаково. Аналитические результаты сопровождаются численными примерами.

## § 5.1 Модель рынка

Рассмотрим рынок, на котором ряд крупных компаний предоставляют свои услуги населению через более мелкие, являющиеся “облачными” виртуальными операторами, перепродающими услуги крупных. Здесь и далее под термином

*оператор* мы будем понимать именно виртуального оператора, а крупных операторов, ресурсы которых перепродают виртуальные операторы, будем называть *компаниями*.

Каждая из крупных компаний  $i$  выделяет ресурс  $r_i > 0$  и предоставляет его в аренду виртуальным операторам по цене  $p_i > 0$  за единицу ресурса. Для компании также известен размер клиентской базы  $n_i$ . Ресурс  $r_i > 0$  характеризует объем и качество услуг, предоставляемых данной компанией, и, соответственно, степень привлекательности данной компании для своих пользователей.

Каждый виртуальный оператор должен выбрать, с какой из крупных компаний он будет сотрудничать, а также по какой цене будет продавать услуги населению. Каждый из виртуальных операторов  $j$  определяет компании, с которыми он будет заключать договор. Положим  $x_{ij} = 1$ , если оператор  $j$  работает с компанией  $i$ , и  $x_{ij} = 0$  иначе. Вначале удобно будет предполагать, что  $0 \leq x_{ij} \leq 1$ . Интерпретировать это можно как вероятность, с которой оператор  $j$  сотрудничает с компанией  $i$ . Затем каждый оператор  $j$  объявляет  $q_j$ , цену на продаваемые населению услуги.

В зависимости от этих характеристик покупатели выбирают, к какому из виртуальных операторов обращаться. При этом покупателю при выборе оператора важно, чтобы его цена на услуги была как можно ниже, а показатель привлекательности услуг и вероятность того, что данный оператор предоставляет услуги именно той компании, клиентом которой он является, как можно выше. Обозначим  $h_{ij} = S + r_i x_{ij} - q_j$  полезность клиента компании  $i$  от выбора оператора  $j$ . Покупая у оператора единицу услуги, полезность которой равна  $S$ , клиент платит за услугу  $q_j$  и получает ресурс (повышенное качество услуг, дополнительные возможности, скидку)  $r_i$ , если данный оператор сотрудничает с его компанией. Выбирая между операторами  $j$  и  $l$ , клиент сравнивает, где полезность выше.

Каждый оператор  $j$  стремится максимизировать свой общий доход, который для известных  $x$  и  $q$  выглядит как  $u_j(x, q) + C_j$ , где  $u_j(x, q)$  строится в форме [125] *доход\_от\_клиента \* число\_клиентов - затраты* и включает выигрыш (или затраты в случае его отрицательности), зависящий от стратегий игроков,

а  $C_j$  – некоторая постоянная достаточно большая величина, обеспечивающая положительность дохода и включающая полезность арендуемого ресурса для оператора  $j$  и, возможно, дополнительные источники финансирования оператора (например, размер гранта, полученного оператором  $j$  на создание бизнеса). Далее в качестве функции выигрыша оператора  $j$  мы будем рассматривать часть  $u_j(x, q)$ , которая может оказаться отрицательной, предполагая, что общая величина его дохода положительна.

## § 5.2 Обобщенная модель Хотеллинга для двух игроков

Пусть у нас на рынке два оператора ( $j = 1, 2$ ), конкурирующих между собой. Тогда доля клиентов компании  $i$ , которые выберут оператора  $j$ , определяется как  $\frac{1}{2} + \frac{h_{ij} - h_{i(3-j)}}{2k_{ij}}$ . Здесь коэффициент  $k_{ij}$  определяет предпочтения клиентов и отражает уровень недовольства клиентов компании  $i$  обслуживанием у оператора  $j$  и может быть связан с труднодоступностью точек обслуживания и транспортными расходами, низким уровнем сервиса и т.п. При этом, если для случая спецификации Хотеллинга [1], когда  $k_{ij} = k_i$  для всех возможных  $j$ , все множество клиентов строго разбивается на две группы по операторам, в обобщенном случае эти группы могут пересекаться (то есть какая-то часть клиентов может обслуживаться у обоих операторов) и их объединение может включать не всех клиентов (какие-то клиенты могут обслуживаться в компаниях напрямую без операторов). При этом мы считаем, что параметры задачи задаются таким образом, что доля клиентов компании  $i$ , которые выберут оператора  $j$ , не превосходит единицы для всех  $i, j$ . Этого можно добиться, например, выбрав достаточно большие значения  $k_{ij}$ . Также считаем, что  $(k_{ij} - k_i(3-j))(h_{ij} - h_{i(3-j)}) \geq 0$ , чтобы число клиентов компании  $i$ , выбравших сервис первого или второго оператора, не превосходило  $n_i$ .

Функция выигрыша для каждого оператора  $j = 1, 2$  для известных  $x$  и  $q$  равна

$$u_j(x, q) = q_j \sum_i n_i \left( \frac{1}{2} + \frac{h_{ij} - h_{i(3-j)}}{2k_{ij}} \right) - \sum_i \frac{x_{ij}}{x_{i1} + x_{i2}} p_i r_i.$$

В начале игры заданы первоначальные значения цен  $q$ , по которым операторо-

ры продают услуги клиентам. Система переходит в новое состояние за два шага. На первом шаге операторы для текущих цен  $q$  определяют стратегии  $x$  – распределение своего выбора между крупными компаниями. На втором шаге они в соответствии с выбором компаний оптимизируют  $q$ , цены на продажу услуг клиентам. Далее игра повторяется – для новой цены корректируется распределение выбора компаний и для нового распределения выбирается оптимальная цена. После ряда итераций система может попасть в стационарное состояние, которое является равновесием по Нэшу для игры, в которой операторы выбирают компании, и одновременно равновесием по Нэшу в игре выбора оптимальных цен на продаваемые услуги. Заметим, что на любом из шагов может оказаться, что существует не одно равновесие, поэтому мы будем различать термины “стационарное” и “равновесное” состояние.

Пусть на рынке две крупных компании, между которыми делают выбор операторы. Обозначим  $x_1$  и  $x_2$  – вероятности, соответственно, первому и второму оператору выбрать первую компанию. Тогда  $1 - x_1$  и  $1 - x_2$  – вероятности выбрать вторую компанию. Функции выигрыша примут следующий вид

$$u_1(x, q) = \frac{q_1}{2} \left( (n_1 + n_2) - (q_1 - q_2) \left( \frac{n_1}{k_{11}} + \frac{n_2}{k_{21}} \right) + \left( \frac{n_1 r_1}{k_{11}} - \frac{n_2 r_2}{k_{21}} \right) (x_1 - x_2) \right) - \frac{x_1}{x_1 + x_2} p_1 r_1 - \frac{1 - x_1}{2 - x_1 - x_2} p_2 r_2,$$

$$u_2(x, q) = \frac{q_2}{2} \left( (n_1 + n_2) + (q_1 - q_2) \left( \frac{n_1}{k_{12}} + \frac{n_2}{k_{22}} \right) - \left( \frac{n_1 r_1}{k_{12}} - \frac{n_2 r_2}{k_{22}} \right) (x_1 - x_2) \right) - \frac{x_2}{x_1 + x_2} p_1 r_1 - \frac{1 - x_2}{2 - x_1 - x_2} p_2 r_2.$$

По  $x_j$  каждая функция  $u_j$  выпукла. Значит, оптимальное значение  $x_j$  будет находиться на одном из концов отрезка  $[0, 1]$ , то есть при выборе компаний оптимальными будут чистые стратегии.

Рассмотрим первый шаг перехода, когда операторы выбирают компании. Найдем наилучший ответ первого игрока на стратегию второго выбрать первую

компанию  $x_2 = 1$ . В этом случае выигрыш первого игрока определяется как

$$\begin{aligned}
 u_1(x_1|x_2 = 1, q) = & \\
 & \frac{q_1}{2} \left( (n_1 + n_2) - (q_1 - q_2) \left( \frac{n_1}{k_{11}} + \frac{n_2}{k_{21}} \right) + \left( \frac{n_1 r_1}{k_{11}} - \frac{n_2 r_2}{k_{21}} \right) (x_1 - 1) \right) \\
 & - \frac{x_1}{x_1 + 1} p_1 r_1 - \frac{1 - x_1}{1 - x_1} p_2 r_2 = \\
 & \alpha(q) + \frac{q_1 x_1}{2} \left( \frac{n_1 r_1}{k_{11}} - \frac{n_2 r_2}{k_{21}} \right) - \frac{x_1}{x_1 + 1} p_1 r_1,
 \end{aligned}$$

где  $\alpha(q)$  означает не зависящее от  $x_1$  слагаемое. Выигрыш является выпуклой по  $x_1$  функцией с наибольшим значением на одном из концов отрезка  $[0, 1]$ .

Обозначим для сокращения записи  $R_j = \frac{n_1 r_1}{k_{1j}} - \frac{n_2 r_2}{k_{2j}}$ ,  $j = 1, 2$ . Тогда наилучший ответ первого игрока на стратегию второго  $x_2 = 1$  определяется как

$$x_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{q_1}{2} R_1 - \frac{p_1 r_1}{2} \geq 0, \\ 0, & \text{если } \frac{q_1}{2} R_1 - \frac{p_1 r_1}{2} \leq 0. \end{cases} \quad \text{Заметим, что если } \frac{q_1}{2} R_1 - \frac{p_1 r_1}{2} = 0, \text{ то наи-}$$

лучший ответ принадлежит множеству из двух вариантов  $\{0, 1\}$ . Аналогично,

наилучший ответ первого игрока на стратегию второго  $x_2 = 0$  определяется как

$$x_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{q_1}{2} R_1 + \frac{p_2 r_2}{2} \geq 0, \\ 0, & \text{если } \frac{q_1}{2} R_1 + \frac{p_2 r_2}{2} \leq 0, \end{cases}$$

Наилучший ответ второго игрока на стратегию первого  $x_1 = 0$  определяет-

$$\text{ся как } x_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{q_2}{2} R_2 + \frac{p_2 r_2}{2} \geq 0, \\ 0, & \text{если } \frac{q_2}{2} R_2 + \frac{p_2 r_2}{2} \leq 0, \end{cases} \quad \text{и наилучший ответ второго игрока на}$$

$$\text{стратегию первого } x_1 = 1 \text{ определяется как } x_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{q_2}{2} R_2 - \frac{p_1 r_1}{2} \geq 0, \\ 0, & \text{если } \frac{q_2}{2} R_2 - \frac{p_1 r_1}{2} \leq 0. \end{cases}$$

Тогда получаем следующие варианты равновесного выбора компаний в условиях текущих цен  $q$

$$x^*(q) = (x_1^*(q), x_2^*(q)) = \begin{cases} (0, 0), & \text{если } \begin{cases} q_1 R_1 \leq -p_2 r_2, \\ q_2 R_2 \leq -p_2 r_2, \end{cases} \\ (0, 1), & \text{если } \begin{cases} q_1 R_1 \leq p_1 r_1, \\ q_2 R_2 \geq -p_2 r_2, \end{cases} \\ (1, 0), & \text{если } \begin{cases} q_1 R_1 \geq -p_2 r_2, \\ q_2 R_2 \leq p_1 r_1, \end{cases} \\ (1, 1), & \text{если } \begin{cases} q_1 R_1 \geq p_1 r_1, \\ q_2 R_2 \geq p_1 r_1. \end{cases} \end{cases} \quad (5.2.1)$$



В этих случаях каждая стратегия игрока является наилучшим ответом на стратегию противника, поэтому никому не выгодно отклоняться. Заметим, что единичное изменение своей стратегии любым из игроков вызывает изменение стратегии противника, соответствующее наилучшему ответу на новую стратегию. Заметим также, что равновесие в чистых стратегиях на первом шаге существует не всегда. Если  $R_1$  и  $R_2$  одновременно положительны или отрицательны, чистое равновесие существует (в некоторых случаях чистых равновесий может быть два или три), но если они имеют разные знаки, то есть области для значений  $q$ , где чистого равновесия нет. Например, если  $R_1 < 0$  и  $R_2 > 0$ , то равновесия в чистых стратегиях нет при выполнении условий  $\frac{p_1 r_1}{R_1} < q_1 < -\frac{p_2 r_2}{R_1}$  и  $-\frac{p_2 r_2}{R_2} < q_2 < \frac{p_1 r_1}{R_2}$ .

Рассмотрим следующий шаг, на котором операторы назначают цены на предоставляемые услуги при уже определенном распределении между компаниями  $x$ . Будем считать отрицательные значения цен  $q$  допустимыми, показывающими, что оператор тратит средства на рекламные акции, минимизируя затраты. Каждая из функций  $u_j$  по  $q_j$  вогнута и представляет собой параболу с ветвями вниз. Это означает, что оптимальной стратегией назначения цены  $q_j$  является точка максимума  $u_j$  по  $q_j$ .

Наилучшим ответом первого игрока на стратегию второго  $q_2$  является

$$q_1 = \frac{n_1 + n_2 + q_2 \left( \frac{n_1}{k_{11}} + \frac{n_2}{k_{21}} \right) + R_1(x_1 - x_2)}{2 \left( \frac{n_1}{k_{11}} + \frac{n_2}{k_{21}} \right)}.$$

Наилучший ответ второго игрока на стратегию первого  $q_1$

$$q_2 = \frac{n_1 + n_2 + q_1 \left( \frac{n_1}{k_{12}} + \frac{n_2}{k_{22}} \right) - R_2(x_1 - x_2)}{2 \left( \frac{n_1}{k_{12}} + \frac{n_2}{k_{22}} \right)}.$$

Отсюда получим равновесные цены

$$q^*(x) = (q_1^*(x), q_2^*(x)) = \left( \frac{n_1 + n_2}{3} \left( \frac{2}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) + \frac{x_1 - x_2}{3} \left( \frac{2R_1}{K_1} - \frac{R_2}{K_2} \right), \right. \\ \left. \frac{n_1 + n_2}{3} \left( \frac{2}{K_2} + \frac{1}{K_1} \right) - \frac{x_1 - x_2}{3} \left( \frac{2R_2}{K_2} - \frac{R_1}{K_1} \right) \right) = \\ \left( \frac{(n_1 + n_2)(K_1 + 2K_2) + (x_1 - x_2)(2R_1K_2 - R_2K_1)}{3K_1K_2}, \right. \\ \left. \frac{(n_1 + n_2)(2K_1 + K_2) - (x_1 - x_2)(2R_2K_1 - R_1K_2)}{3K_1K_2} \right), \quad (5.2.2)$$

где  $K_j = \frac{n_1}{k_{1j}} + \frac{n_2}{k_{2j}}$ ,  $j = 1, 2$ .

Таким образом, действуя оптимально, при каждом переходе система будет менять свое состояние по следующему правилу. Пусть состояние системы перед выполнением первого шага перехода  $s$ , когда переопределяется выбор компаний, описывается как  $x^{(s)} = (x_1^{(s)}, x_2^{(s)})$ . Ему соответствует пара значений оптимальных цен  $q^{(s)} = (q_1^*(x^{(s)}), q_2^*(x^{(s)}))$ , определяемых, согласно (5.2.2). Тогда следующее состояние, согласно (5.2.1), определяется как  $(x_1^*(q^{(s)}), x_2^*(q^{(s)}))$ .

Перед выполнением перехода  $s > 1$ , когда хотя бы один раз были определены равновесное распределение выбора компаний и цены на продаваемые услуги,

возможны	четыре	состояния	системы:
1) $(0, 0)$	с	ценами	$\left( \frac{(n_1+n_2)(K_1+2K_2)}{3K_1K_2}, \frac{(n_1+n_2)(2K_1+K_2)}{3K_1K_2} \right),$
2) $(0, 1)$	с		$\left( \frac{(n_1+n_2)(K_1+2K_2)-(2R_1K_2-R_2K_1)}{3K_1K_2}, \frac{(n_1+n_2)(2K_1+K_2)+(2R_2K_1-R_1K_2)}{3K_1K_2} \right),$
3) $(1, 0)$	с		$\left( \frac{(n_1+n_2)(K_1+2K_2)+(2R_1K_2-R_2K_1)}{3K_1K_2}, \frac{(n_1+n_2)(2K_1+K_2)-(2R_2K_1-R_1K_2)}{3K_1K_2} \right),$
4) $(1, 1)$	с		$\left( \frac{(n_1+n_2)(K_1+2K_2)}{3K_1K_2}, \frac{(n_1+n_2)(2K_1+K_2)}{3K_1K_2} \right).$

### § 5.2.1 Ориентированные на компании предпочтения клиентов

Пусть по-прежнему у нас на рынке два оператора ( $j = 1, 2$ ), конкурирующих между собой. Пусть доля клиентов компании  $i$ , которые выберут оператора  $j$  определяется как  $\frac{1}{2} + \frac{h_{ij} - h_{i(3-j)}}{2k_i}$ , согласно спецификации Хотеллинга [1], где коэффициент  $k_i$  отражает уровень консервативности клиентов компании  $i$ , неудобство смены оператора для них и степень неготовности переходить от одного

оператора к другому. В этом случае суммарное количество клиентов компании  $i$ , выбравших первого или второго оператора, равно  $n_i$ .

Функции выигрыша примут следующий вид

$$u_1(x, q) = \frac{q_1}{2} \left( (n_1 + n_2) - (q_1 - q_2) \left( \frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2} \right) + (x_1 - x_2) \left( \frac{n_1 r_1}{k_1} - \frac{n_2 r_2}{k_2} \right) \right) - \frac{x_1}{x_1 + x_2} p_1 r_1 - \frac{(1 - x_1)}{2 - x_1 - x_2} p_2 r_2,$$

$$u_2(x, q) = \frac{q_2}{2} \left( (n_1 + n_2) + (q_1 - q_2) \left( \frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2} \right) - (x_1 - x_2) \left( \frac{n_1 r_1}{k_1} - \frac{n_2 r_2}{k_2} \right) \right) - \frac{x_2}{x_1 + x_2} p_1 r_1 - \frac{(1 - x_2)}{2 - x_1 - x_2} p_2 r_2.$$

Для определенности предположим, не умаляя общности, что  $\frac{n_1 r_1}{k_1} - \frac{n_2 r_2}{k_2} \geq 0$ , иначе перенумеруем компании. Обозначим разницу  $R = \frac{n_1 r_1}{k_1} - \frac{n_2 r_2}{k_2}$ .

При выборе операторами распределения по компаниям возможны следующие равновесия

$$x^*(q) = (x_1^*(q), x_2^*(q)) = \begin{cases} (0, 0), & \text{если } \begin{cases} q_1 R \leq -p_2 r_2, \\ q_2 R \leq -p_2 r_2, \end{cases} \\ (0, 1), & \text{если } \begin{cases} q_1 R \leq p_1 r_1, \\ q_2 R \geq -p_2 r_2, \end{cases} \\ (1, 0), & \text{если } \begin{cases} q_1 R \geq -p_2 r_2, \\ q_2 R \leq p_1 r_1, \end{cases} \\ (1, 1), & \text{если } \begin{cases} q_1 R \geq p_1 r_1, \\ q_2 R \geq p_1 r_1. \end{cases} \end{cases} \quad (5.2.3)$$

В этих случаях каждая стратегия игрока является наилучшим ответом на стратегию противника, поэтому никому не выгодно отклоняться.

Равновесие при выборе операторами цен на предоставляемые услуги имеет

ВИД

$$q^*(x) = (q_1^*(x), q_2^*(x)) = \left( \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} + \frac{(x_1 - x_2)(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)}, \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} - \frac{(x_1 - x_2)(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)} \right). \quad (5.2.4)$$

Следующий вопрос – придет ли система в стационарное состояние при многократном повторении двухшаговой игры, или образуется повторяющийся цикл состояний?

Перед выполнением перехода  $s > 1$ , когда хотя бы один раз были определены равновесное распределение выбора компаний и цены на продаваемые услуги, возможны четыре состояния системы: 1)  $(0, 0)$  с ценами  $\left( \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1}, \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} \right)$ , 2)  $(0, 1)$  с  $\left( \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} - \frac{(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)}, \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} + \frac{(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)} \right)$ , 3)  $(1, 0)$  с  $\left( \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} + \frac{(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)}, \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} - \frac{(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)} \right)$ , 4)  $(1, 1)$  с  $\left( \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1}, \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} \right)$ .

а) Состояние  $(0, 0)$  не может быть стационарным, так как для него не выполняются условия равновесия для (5.2.3), и система перейдет из него в одно из трех оставшихся состояний.

б) Рассмотрим четвертое состояние системы  $(1, 1)$ . Здесь  $q_1^{(s)} = q_2^{(s)}$ . Если выполняются условия для равновесного выбора компаний  $(1, 1)$  из (5.2.3), то система попала в стационарное состояние. Иначе оба условия не выполняются. Тогда система переходит в  $(0, 1)$  или в  $(1, 0)$ . При этом у оператора, выбирающего первую компанию, цена увеличится, а у того, кто выбирает вторую компанию, уменьшится, что обеспечит выполнение условий равновесия и стационарность нового состояния.

в) Пусть система во втором состоянии  $(0, 1)$ . Второе условие из (5.2.3) для данного состояния выполнено, так как  $q_2^{(s)} > 0$ . Если выполнено первое условие, то система в стационарном состоянии. Если первое условие не выполнено, система перейдет в состояние  $(1, 1)$ , которое станет стационарным, так как  $q_1^{(s+1)} = q_2^{(s+1)}$  увеличится по сравнению с  $q_1^{(s)}$ , и будут выполнены оба условия для данного состояния.

г) Пусть система в третьем состоянии  $(1, 0)$ . Первое условие из (5.2.3) для данного состояния выполнено, так как  $q_1^{(s)} > 0$ . Если выполнено второе условие, то система в стационарном состоянии. Иначе по аналогии с предыдущим пунктом система перейдет в стационарное состояние  $(1, 1)$ .

В итоге вышеприведенного анализа можно сделать следующие выводы для системы, в которой  $\frac{n_1 r_1}{k_1} \geq \frac{n_2 r_2}{k_2}$ .

1. Система не более чем за три перехода попадает в стационарное состояние. Причем за первый переход система попадает в одно из перечисленных четырех состояний. Далее самый длинный путь за два перехода в стационарное состояние возможен, если на первом переходе система попадает в состояние  $(0, 0)$ .

2. Возможные стационарные состояния системы определяются параметрами системы. Система может прийти в стационарные состояния  $(0, 1)$  и  $(1, 0)$ , если

$$\left( \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} - \frac{(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)} \right) R \leq p_1 r_1,$$

и в состояние  $(1, 1)$ , если

$$\frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} R \geq p_1 r_1.$$

Заметим, что невыполнение второго условия означает выполнение первого, однако при

$$\frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} - \frac{(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)} \leq \frac{p_1 r_1}{R} \leq \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1}$$

оба условия выполнены и любое из трех состояний является стационарным.

3. Равновесные и стационарные состояния системы не зависят от цены на аренду услуг второй компании.

**Пример 10.** Пусть у компаний одинаковое число клиентов  $n_1 = n_2 = 10$ , первая выделяет больший ресурс ( $r_1 = 1, r_2 = 0.5$ ), но и цены у нее выше ( $p_1 = 5, p_2 = 1$ ), и уровень недовольства первой компанией меньше ( $k_1 = 1, k_2 = 2$ ). Пусть начальные цены операторов на услуги  $q_1 = 1, q_2 = 0.5$ . Для таких цен, согласно (5.2.3), получаем равновесное распределение на рынке  $x^{(1)} = (1, 0)$ . Согласно (5.2.4), новые цены  $q^{(1)} \approx (1.5, 1.667)$ . Для новых цен, согласно (5.2.3), распределение  $x^{(2)} = (1, 1)$ . Для распределения  $x^{(2)}$  новые цены

$q^{(2)} = (1.333, 1.333)$ , для которых  $x^{(3)} = x^{(2)} = (1, 1)$ . То есть система пришла в стационарное состояние за два шага.

### § 5.2.2 Ориентированные на операторов предпочтения

Пусть доля клиентов компании  $i$ , которые выберут оператора  $j$  определяется как  $\frac{1}{2} + \frac{h_{ij} - h_{i(3-j)}}{2k_j}$ , где коэффициент  $k_j$  отражает уровень недовольства клиентов обслуживанием у оператора  $j$  и может быть связан с труднодоступностью точек обслуживания и транспортными расходами, низким уровнем сервиса и т.п.

Функции выигрыша примут следующий вид

$$u_1(x, q) = \frac{q_1}{2k_1} ((n_1 + n_2)(k_1 - q_1 + q_2) + (n_1r_1 - n_2r_2)(x_1 - x_2)) - \frac{x_1}{x_1 + x_2} p_1 r_1 - \frac{(1 - x_1)}{2 - x_1 - x_2} p_2 r_2,$$

$$u_2(x, q) = \frac{q_2}{2k_2} ((n_1 + n_2)(k_2 + q_1 - q_2) - (n_1r_1 - n_2r_2)(x_1 - x_2)) - \frac{x_2}{x_1 + x_2} p_1 r_1 - \frac{(1 - x_2)}{2 - x_1 - x_2} p_2 r_2.$$

При выборе операторами распределения по компаниям возможны следующие ситуации равновесия

$$x^*(q) = (x_1^*(q), x_2^*(q)) = \begin{cases} (0, 0), & \text{если } \begin{cases} q_1(n_1r_1 - n_2r_2) \leq -p_2r_2k_1, \\ q_2(n_1r_1 - n_2r_2) \leq -p_2r_2k_2, \end{cases} \\ (0, 1), & \text{если } \begin{cases} q_1(n_1r_1 - n_2r_2) \leq p_1r_1k_1, \\ q_2(n_1r_1 - n_2r_2) \geq -p_2r_2k_2, \end{cases} \\ (1, 0), & \text{если } \begin{cases} q_1(n_1r_1 - n_2r_2) \geq -p_2r_2k_1, \\ q_2(n_1r_1 - n_2r_2) \leq p_1r_1k_2, \end{cases} \\ (1, 1), & \text{если } \begin{cases} q_1(n_1r_1 - n_2r_2) \geq p_1r_1k_1, \\ q_2(n_1r_1 - n_2r_2) \geq p_1r_1k_2. \end{cases} \end{cases} \quad (5.2.5)$$

Равновесие при выборе операторами цен на предоставляемые услуги имеет

вид

$$q^*(x) = (q_1^*(x), q_2^*(x)) = \left( \frac{2k_1 + k_2}{3} + \frac{(x_1 - x_2)(n_1 r_1 - n_2 r_2)}{3(n_1 + n_2)}, \frac{2k_2 + k_1}{3} - \frac{(x_1 - x_2)(n_1 r_1 - n_2 r_2)}{3(n_1 + n_2)} \right). \quad (5.2.6)$$

Проверим, как и для предыдущего случая, придет ли система в стационарное состояние при многократном повторении двухшаговой игры, или образуется повторяющийся цикл состояний. Пусть для определенности  $n_1 r_1 \geq n_2 r_2$ , иначе перенумеруем компании.

Перед выполнением перехода  $s > 1$ , когда хотя бы один раз были определены равновесное распределение выбора компаний и цены на продаваемые услуги, возможны четыре состояния системы: 1)  $(0, 0)$  с ценами  $(\frac{2k_1+k_2}{3}, \frac{2k_2+k_1}{3})$ , 2)  $(0, 1)$  с ценами  $(\frac{2k_1+k_2}{3} - \frac{(n_1 r_1 - n_2 r_2)}{3(n_1 + n_2)}, \frac{2k_2+k_1}{3} + \frac{(n_1 r_1 - n_2 r_2)}{3(n_1 + n_2)})$ , 3)  $(1, 0)$  с ценами  $(\frac{2k_1+k_2}{3} + \frac{(n_1 r_1 - n_2 r_2)}{3(n_1 + n_2)}, \frac{2k_2+k_1}{3} - \frac{(n_1 r_1 - n_2 r_2)}{3(n_1 + n_2)})$ , 4)  $(1, 1)$  с ценами  $(\frac{2k_1+k_2}{3}, \frac{2k_2+k_1}{3})$ .

а) Из первого состояния система перейдет в одно из состояний  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  или  $(1, 1)$ .

б) Рассмотрим четвертое состояние системы  $(1, 1)$ . Если выполняются условия для равновесного выбора компаний  $(1, 1)$  из (5.2.5), то система попала в стационарное состояние. Если не выполняется первое из условий, то система перейдет в состояние  $(0, 1)$ . При этом  $q_1^{(s+1)}$  уменьшается по сравнению с  $q_1^{(s)}$ , а  $q_2^{(s+1)}$  увеличивается по сравнению с  $q_2^{(s)}$ , то есть сохраняется выполнение условий для данного состояния на следующем переходе  $s+1$ , и данное состояние становится стационарным для системы. Аналогично, если не выполняется второе из условий, то система перейдет в состояние  $(1, 0)$ , которое также станет началом стационарного состояния. Если не выполняются оба условия, то возможен переход в любое из состояний  $(0, 1)$  или  $(1, 0)$ , которое станет стационарным.

в) Пусть система во втором состоянии  $(0, 1)$ . Второе условие из (5.2.5) для данного состояния выполнено, так как  $q_2^{(s)} > 0$ . Если выполнено первое условие, то система в стационарном состоянии. Пусть первое условие не выполнено. Тогда возможен переход либо в состояние  $(1, 1)$ , либо в состояние  $(1, 0)$ . Если

выполнены оба условия состояния  $(1, 1)$ , то будет выполнен переход в это состояние, назначены цены для данного состояние и, в соответствии с пунктом б), система не более чем за один переход попадет в стационарное состояние. Если же не выполняется второе условие для  $(1, 1)$ , то система переходит в состояние  $(1, 0)$ . В данном состоянии  $q_1^{(s+1)}$  увеличится по сравнению с  $q_1^{(s)}$ , а  $q_2^{(s+1)}$  уменьшится по сравнению с  $q_2^{(s)}$ , то есть сохранится выполнение условий для состояния  $(1, 0)$ , и данное состояние станет стационарным.

г) Пусть система в третьем состоянии  $(1, 0)$ . Первое условие из (5.2.5) для данного состояния выполнено, так как  $q_1^{(s)} > 0$ . Если выполнено второе условие, то система в стационарном состоянии. Пусть второе условие не выполнено. Тогда возможен переход либо в состояние  $(1, 1)$ , либо в состояние  $(0, 1)$ . Если выполнены оба условия состояния  $(1, 1)$ , то будет выполнен переход в это состояние, назначены цены для данного состояние и, в соответствии с пунктом б), система не более чем за один переход попадет в стационарное состояние. Если же не выполняется первое условие для  $(1, 1)$ , то система переходит в состояние  $(0, 1)$ . В данном состоянии  $q_1^{(s+1)}$  уменьшится по сравнению с  $q_1^{(s)}$ , а  $q_2^{(s+1)}$  увеличится по сравнению с  $q_2^{(s)}$ , то есть сохранится выполнение условий для состояния  $(0, 1)$ , и данное состояние станет стационарным.

В итоге вышеприведенного анализа можно сделать следующие выводы для системы, в которой  $n_1 r_1 \geq n_2 r_2$ .

1. Система, как и в предыдущем случае не более чем за три перехода попадает в стационарное состояние.

2. Система может прийти в следующие стационарные состояния  $(x_1, x_2)$ , если ее параметры таковы, что выполняются следующие условия.

$$(x_1, x_2) = \begin{cases} (0, 1), & \text{если } \left( \frac{2k_1+k_2}{3} - \frac{(n_1 r_1 - n_2 r_2)}{3(n_1+n_2)} \right) (n_1 r_1 - n_2 r_2) \leq p_1 r_1 k_1, \\ (1, 0), & \text{если } \left( \frac{2k_2+k_1}{3} - \frac{(n_1 r_1 - n_2 r_2)}{3(n_1+n_2)} \right) (n_1 r_1 - n_2 r_2) \leq p_1 r_1 k_2, \\ (1, 1), & \text{если } \begin{cases} \frac{2k_1+k_2}{3} (n_1 r_1 - n_2 r_2) \geq p_1 r_1 k_1, \\ \frac{2k_2+k_1}{3} (n_1 r_1 - n_2 r_2) \geq p_1 r_1 k_2. \end{cases} \end{cases}$$

3. Равновесные и стационарные состояния системы не зависят от цены на аренду услуг второй компании.

**Пример 11.** Пусть у компаний одинаковое число клиентов  $n_1 = n_2 = 10$ , пер-



вая выделяет больший ресурс ( $r_1 = 1, r_2 = 0.5$ ), но и цены у нее выше ( $p_1 = 5, p_2 = 1$ ), и уровень недовольства первым оператором больше ( $k_1 = 4, k_2 = 2$ ). Пусть начальные цены операторов на услуги  $q_1 = 1, q_2 = 2$ . Для таких цен, согласно (5.2.5), получаем равновесное распределение на рынке  $x^{(1)} = (0, 1)$ . Согласно (5.2.6), новые цены  $q^{(1)} = (3.25, 2.75)$ . Для новых цен, согласно (5.2.5), распределение  $x^{(2)} = x^{(1)} = (0, 1)$ . То есть система пришла в стационарное состояние за один шаг.

**Пример 12.** Пусть у компаний одинаковое число клиентов  $n_1 = n_2 = 10$ , первая выделяет больший ресурс ( $r_1 = 0.5, r_2 = 0.25$ ), но и цены у нее выше ( $p_1 = 5, p_2 = 1$ ), и уровень недовольства первым оператором меньше ( $k_1 = 2, k_2 = 4$ ). Пусть начальные цены операторов на услуги  $q_1 = 1, q_2 = 2$ . Для таких цен, согласно (5.2.5), получаем равновесное распределение на рынке  $x^{(1)} = (0, 1)$ . Согласно (5.2.6), новые цены  $q^{(1)} = (2.625, 3.375)$ . Для новых цен, согласно (5.2.5), распределение  $x^{(2)} = (1, 0)$ . Для распределения  $x^{(2)}$  новые цены  $q^{(2)} \approx (2.708, 3.292)$ , для которых  $x^{(3)} = x^{(2)} = (1, 0)$ . То есть система пришла в стационарное состояние за два шага.

### § 5.3 М игроков, предпочтения клиентов ориентированы на компании

Пусть у нас на рынке  $M \geq 3$  операторов ( $j = 1, \dots, M$ ), конкурирующих между собой. Долю клиентов компании  $i$ , которые выберут оператора  $j$  определим как  $\frac{1}{M} + \sum_{l \neq j} \frac{h_{ij} - h_{il}}{Mk_i}$ .

Функция выигрыша для каждого оператора  $j$  для известных  $x$  и  $q$  равна

$$u_j(x, q) = q_j \sum_i n_i \left( \frac{1}{M} + \sum_{l \neq j} \frac{h_{ij} - h_{il}}{Mk_i} \right) - \sum_i \frac{x_{ij}}{\sum_l x_{il}} p_i r_i.$$

Пусть на рынке две крупных компании, между которыми делают выбор операторы. Обозначим  $x_j$  вероятность оператору  $j$  выбрать первую компанию. Тогда  $1 - x_j$  — его вероятность выбрать вторую компанию. Функция выигрыша

примет следующий вид

$$\begin{aligned}
u_j(x, q) = & \frac{q_j}{M} \left( (n_1 + n_2) - ((M-1)q_j - \sum_{l \neq j} q_l) \left( \frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2} \right) + \right. \\
& \left. ((M-1)x_j - \sum_{l \neq j} x_l) \left( \frac{n_1 r_1}{k_1} - \frac{n_2 r_2}{k_2} \right) \right) - \\
& \frac{x_j}{\sum_l x_l} p_1 r_1 - \frac{(1-x_j)}{M - \sum_l x_l} p_2 r_2 = \\
& \alpha_j(q) + \frac{\left( \frac{n_1 r_1}{k_1} - \frac{n_2 r_2}{k_2} \right) q_j}{M} \left( (M-1)x_j - \sum_{l \neq j} x_l \right) - \\
& \frac{x_j}{\sum_l x_l} p_1 r_1 - \frac{(1-x_j)}{M - \sum_l x_l} p_2 r_2,
\end{aligned}$$

где  $\alpha_j(q)$  не зависящая от  $x$  величина. Здесь мы считаем, что  $\frac{0}{0} = 1$ .

По  $x_j$  каждая функция  $u_j$  выпукла. Значит, оптимальное значение  $x_j$  будет находиться на одном из концов отрезка  $[0, 1]$ , то есть при выборе компаний оптимальными будут чистые стратегии.

Пусть для определенности  $\frac{n_1 r_1}{k_1} \geq \frac{n_2 r_2}{k_2}$ , иначе перенумеруем компании. Обозначим для сокращения записи разницу  $R = \frac{n_1 r_1}{k_1} - \frac{n_2 r_2}{k_2} \geq 0$ .

Тогда для определенных цен  $q$  равновесным является такое распределение операторов между компаниями  $x^*(q) = \{x_j^*(q)\}_{j=1}^M$ , где все  $x_j^*(q) \in \{0, 1\}$ , для которого для всех  $j = 1, \dots, M$  выполняется  $u_j(x, q)|_{x=x^*(q)} \geq u_j(x, q)|_{x_j=1-x_j^*(q), x_{l \neq j}=x_l^*(q)}$ , то есть для каждого оператора  $j$  его выбор  $x_j^*(q)$  является наилучшим ответом на выбор остальных. Обозначим  $K^{-j} = \sum_{l \neq j} x_l^*(q)$  – количество операторов кроме  $j$ , выбравших первую компанию.

Рассмотрим ситуацию, где все кроме оператора  $j$  выбрали вторую компанию, то есть  $K^{-j} = 0$  для любого  $j$ . Тогда для каждого оператора  $j$  его выбор  $x_j = 0$  является наилучшим, если  $-\frac{0}{0} p_1 r_1 - \frac{1}{M} p_2 r_2 \geq \frac{R q_j}{M} (M-1) - \frac{1}{1} p_1 r_1$ , или  $\frac{(M-1) R q_j}{M} \leq -\frac{p_2 r_2}{M}$ . И наоборот, если  $\frac{(M-1) R q_j}{M} \geq -\frac{p_2 r_2}{M}$ , то наилучшим будет его выбор  $x_j = 1$ .

Рассмотрим ситуацию, когда все кроме оператора  $j$  выбрали первую компанию, то есть  $K^{-j} = M-1$  для любого  $j$ . Тогда для оператора  $j$  его выбор

$x_j = 1$  является наилучшим, если  $\frac{1}{M}p_1r_1 - \frac{0}{0}p_2r_2 \geq -\frac{Rq_j}{M}(M-1) - \frac{1}{1}p_2r_2$ , или  $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \geq \frac{p_1r_1}{M}$ . И наоборот, если  $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \leq \frac{p_1r_1}{M}$ , то наилучшим будет его выбор  $x_j = 0$ .

Если же  $0 < K^{-j} < M-1$ , то для оператора  $j$  его выбор  $x_j = 1$  является наилучшим, если  $\frac{Rq_j}{M}(M-1-K^{-j}) - \frac{1}{K^{-j}+1}p_1r_1 \geq -\frac{Rq_j}{M}K^{-j} - \frac{1}{M-K^{-j}}p_2r_2$ , или  $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \geq \frac{p_1r_1}{K^{-j}+1} - \frac{p_2r_2}{M-K^{-j}}$ . И если  $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \leq \frac{p_1r_1}{K^{-j}+1} - \frac{p_2r_2}{M-K^{-j}}$ , то наилучшим будет его выбор  $x_j = 0$ .

Тогда в общем случае наилучшим ответом оператора  $j$  на выбор первой компании группой  $K^{-j}$  операторов будет  $x_j = 0$ , если  $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \leq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K^{-j}>0}}{K^{-j}+1} - \frac{p_2r_2\mathbb{I}_{K^{-j}<M-1}}{M-K^{-j}}$  и  $x_j = 1$  при  $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \geq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K^{-j}>0}}{K^{-j}+1} - \frac{p_2r_2\mathbb{I}_{K^{-j}<M-1}}{M-K^{-j}}$ .

То есть получаем набор равновесий вида  $x^*(q) = \{x_j^*(q)\}_{j=1}^M$ , где все  $x_j^*(q) \in \{0, 1\}$ ,  $K = \sum_l x_l^*(q)$ , каждое из которых возможно при выполнении условий

$$\begin{cases} \frac{(M-1)Rq_j}{M} \geq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K>1}}{K} - \frac{p_2r_2\mathbb{I}_{K<M}}{M-K+1} \text{ для } x_j^*(q) = 1, \\ \frac{(M-1)Rq_j}{M} \leq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K>0}}{K+1} - \frac{p_2r_2\mathbb{I}_{K<M-1}}{M-K} \text{ для } x_j^*(q) = 0. \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Рассмотрим шаг, на котором операторы определяют цены на продаваемые услуги. Каждая из функций  $u_j$  по  $q_j$  вогнута и представляет собой параболу с ветвями вниз. Это означает, что оптимальной стратегией назначения цены  $q_j$  является точка максимума  $u_j$  по  $q_j$ .

Наилучшим ответом каждого игрока  $j$  на стратегии остальных является  $q_j$ , удовлетворяющее уравнению

$$2(M-1) \left( \frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2} \right) q_j = n_1 + n_2 + \left( \sum_l q_l - q_j \right) \left( \frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2} \right) + R \left( Mx_j - \sum_l x_l \right).$$

Суммируя уравнения и выражая  $q_j$ , получим равновесную ситуацию  $q^*(x) = \{q_j^*(x)\}_{j=1}^M$ , где

$$q_j^*(x) = \frac{k_1k_2(n_1+n_2)}{(M-1)(n_1k_2+n_2k_1)} + \frac{k_1k_2R \left( Mx_j - \sum_l x_l \right)}{(2M-1)(n_1k_2+n_2k_1)}. \quad (5.3.2)$$

Таким образом, действуя оптимально, при каждом переходе система будет менять свое состояние по следующему правилу. Пусть состояние системы перед

выполнением первого шага перехода  $s$ , когда переопределяется выбор компаний, описывается как  $x^{(s)} = (x_j^{(s)}, j = 1, \dots, M)$ . Ему соответствуют значения оптимальных

цен  $q^{(s)} = (q_j^*(x^{(s)}), j = 1, \dots, M)$ , определяемых, согласно (5.3.2). Тогда следующее состояние, согласно (5.3.1), определяется как  $x * (q^{(s)})$ .

Рассмотрим состояние системы перед выполнением перехода  $s > 1$ , когда хотя бы один раз были определены равновесное распределение выбора компаний и цены на продаваемые услуги. Пусть  $x^{(s)}$  – текущее состояние системы перед выполнением перехода  $s$ . В силу симметричности задачи, так как операторы различаются только стратегиями, можно упростить обозначения, разбив операторов на две группы.

Пусть к группе  $A$  относятся игроки  $j$ , выбравшие первую компанию, то есть для которых  $x_j^{(s)} = 1$ , остальные относятся к группе  $B$ . Заметим, что цены  $q_j^{(s)}$ , определяемые (5.3.2), одинаковы для всех игроков, относящихся к одной и той же группе, а, следовательно, для них одинаково выполняются или нет условия равновесия. Обозначим  $q_A(K)$  и  $q_B(K)$  соответственно цены операторов в группах  $A$  и  $B$ . Тогда условие равновесия (5.3.1), когда в группе  $A$  ровно  $K$  операторов, можно переписать как

$$\begin{cases} \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \geq \frac{p_1 r_1 \mathbb{I}_{K>1}}{K} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K<M}}{M-K+1}, \\ \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1 \mathbb{I}_{K>0}}{K+1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K<M-1}}{M-K}. \end{cases} \quad (5.3.3)$$

При этом, в случае  $K = 0$  первое условие отсутствует, а в случае  $K = M$  отсутствует второе.

К началу любой итерации  $s > 1$  игры состояние системы можно описать как число игроков в группе  $A$ . Состояния будут следующими:  
 0) все выбрали вторую компанию, у всех одинаковые цены  $q_B(0) = Q = \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{(M-1)(n_1 k_2 + n_2 k_1)}$ ,  
 $K) 1 \leq K \leq M-1$  игроков выбрали первую компанию, у них цены  $q_A(K) = Q + \frac{k_1 k_2 R(M-K)}{(2M-1)(n_1 k_2 + n_2 k_1)}$ , у остальных цены  $q_B(K) = Q - \frac{k_1 k_2 R K}{(2M-1)(n_1 k_2 + n_2 k_1)}$ ,  
 $M) все  $M$  игроков выбрали первую компанию, у всех одинаковые цены  $q_A(M) = Q$ .$

1) Рассмотрим состояния системы 0 и  $M$ . Здесь все цены одинаковы и равны

$Q$ . Состояние 0 не может быть стационарным, так как нарушается второе из условий (5.3.3)  $(M-1)Rq_B(0) \leq -p_2r_2$ , так как  $Rq_B(0) = Q > 0$ , значит система перейдет в одно из оставшихся состояний. Система в стационарном состоянии только в том случае, если в состоянии  $M$  (была в нем или перешла в него из 0) и выполняется первое условие для равновесного выбора компаний из (5.3.3)  $(M-1)RQ \geq p_1r_1$ . Иначе из состояния 0 или  $M$  система перейдет в состояние  $K < M$ , для которого должно выполняться

$$\begin{cases} \frac{(M-1)RQ}{M} \geq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K>1}}{K} - \frac{p_2r_2\mathbb{I}_{K<M}}{M-K+1}, \\ \frac{(M-1)RQ}{M} \leq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K>0}}{K+1} - \frac{p_2r_2\mathbb{I}_{K<M-1}}{M-K}, \end{cases}$$

что возможно только для  $K \in \{1, M-1\}$ .

$K$  может равняться 1, если выполнены оба условия

$$\begin{cases} \frac{(M-1)RQ}{M} \geq -\frac{p_2r_2}{M}, \\ \frac{(M-1)RQ}{M} \leq \frac{p_1r_1}{2} - \frac{p_2r_2}{M-1}, \end{cases}$$

первое из которых очевидно выполнено. Если выполнено и второе, то в таком состоянии  $q_A(1) > Q > 0$ ,  $q_B(1) < Q$  и после назначения новых цен выполнение условий равновесия сохранится и состояние  $K = 1$  станет стационарным.

Если второе условие не выполнено, то есть  $\frac{(M-1)RQ}{M} < \frac{p_1r_1}{2} - \frac{p_2r_2}{M-1}$ , тогда остается  $K = M-1$ . Проверим выполнение условий

$$\begin{cases} \frac{(M-1)RQ}{M} \geq \frac{p_1r_1}{M-1} - \frac{p_2r_2}{2}, \\ \frac{(M-1)RQ}{M} \leq \frac{p_1r_1}{M}. \end{cases}$$

Второе условие выполняется в силу нестационарности состояния  $K = M$ . Первое выполняется, так как  $\frac{(M-1)RQ}{M} > \frac{p_1r_1}{2} - \frac{p_2r_2}{M-1} \geq \frac{p_1r_1}{M-1} - \frac{p_2r_2}{2}$  для  $M \geq 3$ . Для новых цен  $q_A(M-1) > Q$  и  $q_B(M-1) < Q$  выполнение условий также сохранится и состояние  $K = M-1$  станет стационарным.

То есть из состояния 0 система перейдет в стационарное состояние из набора  $\{1, M-1, M\}$ . Состояние  $M$  либо стационарное, либо из него система перейдет в стационарное состояние из набора  $\{1, M-1\}$ .

2) Пусть система в состоянии  $K$  ( $1 \leq K \leq M-1$ ). Если выполняются условия для равновесного выбора компаний из (5.3.3), то система попала в стационарное состояние. Если условия не выполнены, то формируется новое состояние  $K'$ .

Если  $K' = M$  и это состояние не стационарно, то, согласно пункту 1) система перейдет из него в стационарное состояние из набора  $\{1, M - 1\}$ . Если  $K' = 0$  (такое возможно, если цены  $q_B(K)$  были отрицательны), то, согласно пункту 1) система перейдет из него в стационарное состояние из набора  $\{1, M - 1, M\}$ .

Иначе  $1 \leq K' \leq M - 1$ , такое, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \geq \frac{p_1 r_1 \mathbb{I}_{K' > 1}}{K'} - \frac{p_2 r_2}{M - K' + 1} \text{ для оставшихся в } A, \\ \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1}{K' + 1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K' < M-1}}{M - K'} \text{ для оставшихся в } B, \\ \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \geq \frac{p_1 r_1 \mathbb{I}_{K' > 1}}{K'} - \frac{p_2 r_2}{M - K' + 1} \text{ для сменивших } B \text{ на } A, \\ \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1}{K' + 1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K' < M-1}}{M - K'} \text{ для сменивших } A \text{ на } B. \end{array} \right.$$

Далее для  $K'$  назначаются новые цены  $q_A(K')$  и  $q_B(K')$ . При этом для сменивших группу  $B$  на  $A$  цены увеличатся, а для сменивших группу  $A$  на  $B$  цены уменьшатся независимо от  $K'$ , так как  $q_A(K) > Q \geq q_B(K')$  и  $q_B(K) < Q \leq q_A(K')$  для  $1 \leq K \leq M - 1$ , а, значит, для них условия равновесия (5.3.3) будут выполнены и с новыми ценами. Поэтому в случае, когда все операторы сменили свою группу, новое состояние будет стационарным.

а) Если  $1 \leq K < K' \leq M - 1$ , то обязательно есть операторы, сменившие группу  $B$  на  $A$ . То есть

$$\frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \geq \frac{p_1 r_1}{K'} - \frac{p_2 r_2}{M - K' + 1}.$$

Так как  $K' \leq M - 1$ , то либо кто-то остался в группе  $B$ , либо пришел в нее из группы  $A$ . В первом случае

$$\frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1}{K' + 1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K' < M-1}}{M - K'},$$

во втором случае также

$$\frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} < \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1}{K' + 1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K' < M-1}}{M - K'},$$

и тогда

$$\frac{p_1 r_1}{K'} - \frac{p_2 r_2}{M - K' + 1} \leq \frac{p_1 r_1}{K' + 1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K' < M-1}}{M - K'},$$

что возможно только в случае  $K' = M - 1$ .

Тогда при  $K' = M - 1$  и, соответственно,  $K < M$  выполняется

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} > \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \geq \frac{p_1 r_1}{M-1} - \frac{p_2 r_2}{2}, \\ \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1}{M}. \end{array} \right.$$

После назначения новых цен выполнение второго условия (5.3.3) сохранится, так как  $q_B(M-1) < q_B(K)$  для  $K < M-1$ . Первое неравенство будет выполнено, так как

$$\frac{(M-1)Rq_A(M-1)}{M} > \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \geq \frac{p_1r_1}{M-1} - \frac{p_2r_2}{2}$$

при  $1 < K < M-2$ . То есть состояние  $K' = M-1$  стационарное.

б) Если  $1 \leq K' < K \leq M-1$ , то обязательно есть операторы, сменившие группу  $A$  на  $B$ . То есть

$$\frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \leq \frac{p_1r_1}{K'+1} - \frac{p_2r_2}{M-K'}.$$

Так как  $K' \geq 1$ , то либо кто-то остался в группе  $A$ , либо пришел в нее из группы  $B$ . В первом случае

$$\frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \geq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K'>1}}{K'} - \frac{p_2r_2}{M-K'+1},$$

во втором случае

$$\frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} > \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \geq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K'>1}}{K'} - \frac{p_2r_2}{M-K'+1},$$

и тогда

$$\frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K'>1}}{K'} - \frac{p_2r_2}{M-K'+1} \leq \frac{p_1r_1}{K'+1} - \frac{p_2r_2}{M-K'},$$

что возможно только в случае  $K' = 1$ .

То есть при  $K' = 1$  и, соответственно,  $K > 1$  выполняется

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \geq -\frac{p_2r_2}{M}, \\ \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} < \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \leq \frac{p_1r_1}{2} - \frac{p_2r_2}{M-1}. \end{array} \right.$$

После назначения новых цен выполнение первого условия (5.3.3) сохранится, так как  $q_A(1) > q_A(K)$  для  $K > 1$ . Второе неравенство будет выполнено, так как

$$\frac{(M-1)Rq_B(1)}{M} < \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \leq \frac{p_1r_1}{2} - \frac{p_2r_2}{M-1}$$

при  $2 < K < M-1$ . То есть состояние  $K' = 1$  стационарное.

Таким образом, если система действует по правилам пошагового выбора оптимальных состояний, то в любом случае не более чем за три перехода попадет

в стационарное состояние, одно из трех возможных: 1,  $M - 1$  или  $M$ . При этом не исключается наличие и других стационарных состояний, попасть в которые можно только случайно, назначив подходящие первоначальные цены.

**Пример 13.** Рассмотрим две компании. Первая давно на рынке, у нее больше клиентов ( $n_1 = 25$ ,  $n_2 = 10$ ), но и цены у нее выше ( $p_1 = 10$ ,  $p_2 = 5$ ). Вторая, пытаясь захватить рынок, выставляет низкие цены, ведет агрессивную рекламную политику с навязчивой рекламой ( $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ ) и выделяет в аренду большой ресурс ( $r_1 = 0.5$ ,  $r_2 = 0.6$ ). На рынке  $M = 10$  операторов, перепродающих услуги этих двух компаний. В зависимости от первоначальных цен  $q$  система попадет в одно из состояний, представленных в таблице 5.1, и далее будет менять состояния до тех пор, пока не попадет в одно из стационарных, выделенных жирным шрифтом. Видно, что в состояниях  $K = 8$  и  $K = 9$  у операторов, выбравших вторую компанию, цены отрицательны, но это не мешает состоянию  $K = 9$  быть стационарным. Заметим также, что стационарные состояния  $K = 2, 3$  являются изолированными, попасть в них система может только, назначив подходящие первоначальные цены.

Таблица 5.1: Переходы между состояниями

Состояние $K$	$q_A$	$q_B$	Возможные переходы
0	–	0.13	1, 10
<b>1</b>	0.28	0.112	
<b>2</b>	0.26	0.096	
<b>3</b>	0.246	0.08	
4	0.23	0.063	1, 10
5	0.213	0.046	1, 9
6	0.196	0.03	1, 9
7	0.18	0.013	1, 9
8	0.163	-0.004	1, 9
<b>9</b>	0.146	-0.02	
<b>10</b>	0.13	–	

**Пример 14.** Рассмотрим предыдущий пример с меньшим числом клиентов и операторов ( $n_1 = 10$ ,  $n_2 = 4$ ,  $M = 4$ ). В зависимости от первоначальных



цен  $q$  система попадет в одно из состояний, представленных на схеме Рис. 5.1, и в итоге окажется в одном из стационарных состояний 1 или 3.

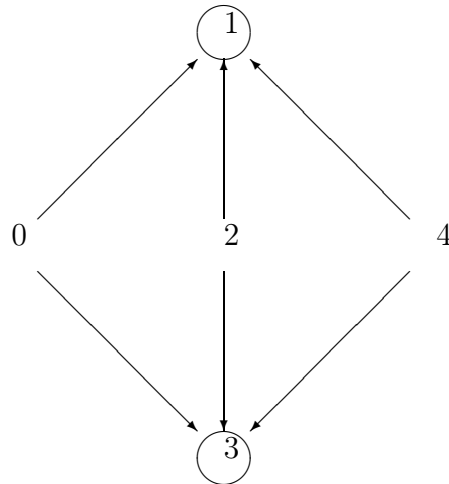


Рис. 5.1: Переходы между состояниями

## § 5.4 Результаты

В данной главе построена и исследована модель поведения двух облачных операторов на рынке телекоммуникационных услуг, на котором игроками являются операторы, перепродающие услуги крупных компаний. Поведение игроков на данном рынке смоделировано как повторяющаяся двухшаговая игра, где на первом шаге операторы определяют распределение степеней своего участия в сотрудничестве с крупными компаниями, а на втором шаге назначают цены на продаваемые услуги для клиентов. Получены равновесные и стационарные решения для данной игры. Найдены оптимальные стратегии операторов на первом и втором шаге и показаны условия существования равновесия в чистых стратегиях на первом шаге. Для случаев, когда предпочтения клиентов ориентированы на компании или операторов, показано, что при повторении игры система приходит в стационарное состояние не более чем за 3 повторения. Кроме того, показано, что в игре более двух операторов в случае, когда предпочтения клиентов ориентированы на компании, система также приходит в стационарное состояние не более чем за 3 повторения.

## Глава 6

# Оптимальная маршрутизация с неделимым трафиком

Игры маршрутизации представляют современное направление в теории игр. Они бурно развиваются благодаря широкому распространению глобальной информационной сети Интернет, а также в связи с важностью и сложностью проблем грузо- и пассажироперевозок в транспортных сетях. Такие игры характеризуются большим количеством игроков, у каждого из которых персональные выигрыши, которые, в свою очередь, зависят от поведения всех участников сети. Затраты игроков здесь определяются либо как время выполнения задания, либо как время прохождения пакета по сети, а выигрыши как переданный объем информации или пропускная способность канала.

В данной главе исследуется вопрос оптимальной маршрутизации трафика в сети передачи данных в условиях, когда пользователи, действуя в собственных интересах, самостоятельно выбирают свои маршруты. Рассматриваемая схема маршрутизации основана на КР-модели (Koutsoupias, Papadimitriou) [43, 45, 89, 90, 95, 132, 137, 138, 143] с неделимым трафиком.

### § 6.1 КР-модель маршрутизации

Рассматривается система  $n$  пользователей и  $m$  параллельных каналов. Каждый пользователь  $i = 1, \dots, n$  собирается отправить трафик объемом  $w_i$  по одному из каналов. Для каждого канала  $l = 1, \dots, m$  задана пропускная способность  $c_l$ . При отправке трафика объемом  $w$  по каналу с пропускной способностью  $c$

задержка на канале определяется как  $w/c$ .

Каждый пользователь действует в своих собственных интересах и стремится занять тот канал, на котором задержка его трафика будет наименьшей. Чистой стратегией для пользователя  $i$  является выбор канала  $l$ , по которому он собирается отправить свой трафик. Тогда вектор  $L = (l_1, \dots, l_n)$  представляет собой профиль чистых стратегий пользователей, где  $l_i$  – номер канала, выбранного пользователем  $i$ . Смешанной стратегией для него является вероятностное распределение  $p_i = (p_i^1, \dots, p_i^m)$ , где  $p_i^l$  – вероятность, с которой пользователь  $i$  выбирает  $l$ . Матрица  $P$ , образованная векторами  $p_i$ , представляет профиль смешанных стратегий пользователей.

В случае чистых стратегий для пользователя  $i$  задержка трафика на используемом им канале  $l_i$  определяется как  $\lambda_i = \frac{\sum_{k:l_k=l_i} w_k}{c_{l_i}}$ .

**Определение 6.1.** Профиль чистых стратегий  $(l_1, \dots, l_n)$  называется равновесием по Нэшу, если для каждого пользователя  $i$   $\lambda_i = \min_{j=1, \dots, m} \frac{w_i + \sum_{k \neq i: l_k=j} w_k}{c_j}$ .

Для смешанных стратегий определяется ожидаемая задержка трафика пользователя  $i$  в случае использования им канала  $l$ , равная  $\lambda_i^l = \frac{w_i + \sum_{k=1, k \neq i}^n p_k^l w_k}{c_l}$ . Минимальная ожидаемая задержка пользователя  $i$  равна  $\lambda_i = \min_{l=1, \dots, m} \lambda_i^l$ .

**Определение 6.2.** Профиль  $P$  называется равновесием по Нэшу, если для каждого пользователя  $i$  для любого из используемых им каналов справедливо:  $\lambda_i^l = \lambda_i$  если  $p_i^l > 0$ , и  $\lambda_i^l > \lambda_i$  если  $p_i^l = 0$ .

**Определение 6.3.** Смешанное равновесие  $P$  называется полностью смешанным равновесием, если каждый пользователь выбирает каждый канал с положительной вероятностью, то есть для любого  $i = 1, \dots, n$  и для любого  $l = 1, \dots, m$   $p_i^l > 0$ .

$\lambda_i$  определяет минимальные возможные индивидуальные затраты каждого пользователя  $i$  от пересылки своего трафика, который, действуя в своих личных интересах, выбирает стратегии, обеспечивающие ему такое значение ожидаемой задержки. Затраты системы (social costs) характеризуют общие затраты, которые несет система в целом в результате эксплуатации каналов. В качестве функ-

ции затрат системы  $SC(w, c, L)$  для чистого профиля могут быть рассмотрены следующие варианты:

1. линейные затраты  $LSC(w, c, L) = \sum_{l=1}^m \frac{\sum_{k:l_k=l} w_k}{c_l}$ ;
2. квадратичные затраты [137]  $QSC(w, c, L) = \sum_{l=1}^m \frac{(\sum_{k:l_k=l} w_k)^2}{c_l}$ ;
3. максимальные затраты [89, 97, 132, 138]  $MSC(w, c, L) = \max_{l=1, \dots, m} \frac{\sum_{k:l_k=l} w_k}{c_l}$ .

**Определение 6.4.** *Затратами системы для профиля смешанных стратегий  $P$  называется математическое ожидание затрат системы  $SC(w, c, L)$  для случайного профиля чистых стратегий  $L$*

$$SC(w, c, P) = E(SC(w, c, L)) = \sum_{L=(l_1, \dots, l_n)} \left( \prod_{k=1}^n p_k^{l_k} \cdot SC(w, c, L) \right).$$

Глобальный оптимум  $opt = \min_P SC(w, P)$  в данной модели определяется как решение задачи минимизации затрат системы. В данной работе, как и во всех рассмотренных работах по данной теме, глобальный оптимум находится путем перебора всех возможных чистых профилей, но в общем случае он может быть результатом решения непрерывной задачи условной минимизации затрат системы, где в качестве переменных рассматривается профиль смешанных стратегий пользователей  $P$ .

## § 6.2 Равновесие в чистых стратегиях

Рассмотрим несколько примеров систем, ограничивая поведение пользователей профилями чистых стратегий. В качестве затрат системы будем использовать функцию максимальных затрат системы. Будем использовать обозначение  $(w_{i_1}, \dots, w_{i_k}) \rightarrow c_l$  для ситуации, когда порции пользовательского трафика объемом  $w_{i_1}, \dots, w_{i_k}$ , принадлежащие пользователям  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ , отправляются по каналу с пропускной способностью  $c_l$ .

**Пример 15.** *Данный пример иллюстрирует проявление парадокса Браесса при удалении одного из каналов. Рассмотрим следующий набор пользователей и*

каналов:  $n = 5$ ,  $m = 3$ ,  $w = (20, 10, 10, 10, 5)$ ,  $c = (20, 10, 8)$ . В этом случае равновесные затраты в худшем случае равны

$$MSC(w; c; (10, 10, 10) \rightarrow 20, 5 \rightarrow 10, 20 \rightarrow 8) = 2.5.$$

Глобальный оптимум достигается в ситуации  $(20, 10) \rightarrow 20$ ,  $(10, 5) \rightarrow 10$ ,  $10 \rightarrow 8$  и равен 1.5. Он же является наилучшим чистым равновесием по Нэшу. Если удалить канал 8, то в худшем случае затраты системы становятся равны

$$MSC(w; c; (20, 10, 10) \rightarrow 20, (10, 5) \rightarrow 10) = 2.$$

Эта же ситуация является и наилучшим чистым равновесием и глобально оптимальной.

**Пример 16.**  $n = 4$ ,  $m = 3$ ,  $w = (15, 5, 4, 3)$ ,  $c = (15, 10, 8)$ . Затраты системы для худшего случая равновесия равны

$$MSC(w; c; (5, 4) \rightarrow 15, 15 \rightarrow 10, 3 \rightarrow 8) = 1.5.$$

В наилучшем равновесии в ситуации  $15 \rightarrow 15$ ,  $(5, 3) \rightarrow 10$ ,  $4 \rightarrow 8$  достигается значение глобального оптимума 1. Глобально оптимальной является также и не равновесная ситуация  $15 \rightarrow 15$ ,  $(5, 4) \rightarrow 10$ ,  $3 \rightarrow 8$ . При удалении канала 10 худшим случаем равновесия становится  $(15, 5) \rightarrow 15$ ,  $(4, 3) \rightarrow 8$  с затратами системы, равными 1.333. Глобальный оптимум и наилучшее равновесие достигаются при  $(15, 3) \rightarrow 15$ ,  $(5, 4) \rightarrow 8$ , и затраты в этом случае равны 1.2.

**Пример 17.**  $n = 4$ ,  $m = 3$ ,  $w = (15, 8, 4, 3)$ ,  $c = (15, 8, 3)$ . Затраты системы для худшего случая равновесия равны

$$MSC(w; c; (8, 4, 3) \rightarrow 15, 15 \rightarrow 8) = 1.875.$$

В наилучшем равновесии в ситуации  $(15, 4) \rightarrow 15$ ,  $8 \rightarrow 8$ ,  $4 \rightarrow 3$  достигается значение глобального оптимума 1.2666. При удалении канала 8 худшим случаем равновесия становится  $(15, 8, 4) \rightarrow 15$ ,  $3 \rightarrow 3$  с затратами системы, равными 1.8. Глобальный оптимум и наилучшее равновесие достигаются при  $(15, 8, 3) \rightarrow 15$ ,  $4 \rightarrow 3$ , и затраты в этом случае равны 1.733.

### § 6.3 Полностью смешанное равновесие в задаче с различными пользователями и одинаковыми каналами

Рассмотрим систему, в которой каналы не различаются по пропускной способности. Будем считать для любого канала  $l$  его пропускная способность  $c_l = 1$ . В качестве затрат системы будем рассматривать функции линейных и квадратичных затрат системы.

**Лемма 6.1. (Mavronikolas, Spirakis) [143]** *Для системы  $n$  пользователей,  $m$  параллельных каналов, в которой каналы имеют одинаковую пропускную способность, существует единственное полностью смешанное равновесие по Нэшу, такое что для любого пользователя  $i$  и канала  $l$  равновесные вероятности  $p_i^l = 1/m$ .*

Найдем для данной модели затраты системы для полностью смешанного равновесия  $F$ .

$$\begin{aligned}
 LSC(w, F) &= E \left( \sum_{l=1}^m \sum_{k:l_k=l} w_k \right) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n E(w_k \cdot I_{l_k=l}) = \\
 &= \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n w_k p_l^k = \sum_{k=1}^n w_k. \\
 QSC(w, F) &= E \left( \sum_{l=1}^m \left( \sum_{k:l_k=l} w_k \right)^2 \right) = \sum_{l=1}^m E \left( \sum_{k:l_k=l} w_k \right)^2 = \\
 &= \sum_{l=1}^m E \left( \sum_{k:l_k=l} w_k^2 + 2 \sum_{k,j:l_k=l, l_j=l, k \neq j} w_k w_j \right) = \\
 &= \sum_{l=1}^m \left( \sum_{k=1}^n E(w_k^2 \cdot I_{l_k=l}) + 2 \sum_{k,j=1, k \neq j}^n E(w_k w_j I_{l_k=l} I_{l_j=l}) \right) = \\
 &= \sum_{l=1}^m \left( \sum_{k=1}^n w_k^2 p_k^l + 2 \sum_{k,j=1, k \neq j}^n w_k w_j p_k^l p_j^l \right) = \\
 &= \sum_{k=1}^n w_k^2 + \frac{2}{m} \sum_{k \neq j} w_k w_j.
 \end{aligned}$$

## § 6.4 Полностью смешанное равновесие в задаче с одинаковыми пользователями и различными каналами

Рассмотрим систему, в которой отправляемый трафик пользователей не различается по объему. Будем считать для любого пользователя  $i$  его трафик  $w_i = 1$ . Определим общую пропускную способность системы каналов  $C = \sum_{l=1}^m c_l$ . В качестве затрат системы будем рассматривать функции линейных и квадратичных затрат системы. Не умаляя общности, упорядочим каналы по возрастанию пропускной способности:  $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_m$ .

**Лемма 6.2.** *В модели  $n$  одинаковых пользователей,  $m$  параллельных каналов единственное полностью смешанное равновесие по Нэшу существует тогда и только тогда, когда  $c_1(m+n-1) > C$ . При этом для каждого канала  $l = 1, \dots, m$  для любого пользователя  $i = 1, \dots, n$  равновесные вероятности  $p_i^l = p^l = \frac{c_l(m+n-1)-C}{C(n-1)}$ , а индивидуальные равновесные задержки для всех пользователей одинаковы и равны  $\frac{m+n-1}{C}$ .*

*Доказательство.* Пусть полностью смешанное равновесие существует. Тогда для каждого пользователя  $i$  ожидаемая задержка его трафика на любом канале должна быть одинаковой.

$$\frac{1 + \sum_{k \neq i} p_k^l}{c_l} = \frac{1 + \sum_{k \neq i} p_k^j}{c_j} \text{ для } i = 1, \dots, n \text{ и } l, j = 1, \dots, m.$$

Умножим обе части каждого из тождеств на  $c_l$  и просуммируем по  $l$  каждую из групп тождеств с одинаковыми номерами  $i$  и  $j$ . Учитывая, что  $\sum_{l=1}^m p_k^l = 1$  для  $k = 1, \dots, n$ , получим

$$m + (n-1) = C \frac{1 + \sum_{k \neq i} p_k^j}{c_j} \text{ для } i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

$$\frac{m+n-1}{C} = \frac{1 + \sum_{k \neq i} p_k^j}{c_j} = \lambda_i^j \text{ для } i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

Так как значение левой части тождества одинаково для любого отсутствующего слагаемого  $\frac{p_i^j}{c_j}$ , следовательно, все  $p_i^j = p^j$  для любого  $i$ . Тогда тождество может быть преобразовано к виду

$$\frac{m+n-1}{C} = \frac{1 + (n-1)p^j}{c_j} \text{ для } j = 1, \dots, m,$$

$$\text{откуда } p^j = \frac{c_j(m+n-1) - C}{C(n-1)} \text{ для } j = 1, \dots, m.$$

Легко проверить, что сумма равновесных вероятностей по всем каналам равна 1. Тогда необходимым и достаточным условием допустимости полученного решения является для всех  $l = 1, \dots, m$   $p^l > 0$ , то есть должно выполняться  $c_1(m+n-1) > C$ .  $\square$

Для этого случая в [143] доказана лемма, которая утверждает существование единственного полностью смешанного равновесия тогда и только тогда, когда для каждого канала  $l = 1, \dots, m$  выполнено  $\frac{c_l}{C} \in (\frac{1}{m+n-1}, \frac{n}{m+n-1})$ , и значения равновесных вероятностей для всех  $i = 1, \dots, n$  и для всех  $l = 1, \dots, m$  равны  $p_i^l = \frac{c_l(m+n-1) - C}{C(n-1)}$ . В лемме 6.2, кроме того, в процессе доказательства получают значения индивидуальных равновесных задержек пользователей в ситуации полностью смешанного равновесия.

Для нахождения затрат системы в полностью смешанном равновесии понадобятся следующие тождества.

**Лемма 6.3.** *Для любого вещественного числа  $x$  и целого  $n$  выполняются соотношения:*

$$\sum_{k=1}^n C_n^k k x^k (1-x)^{n-k} = nx;$$

$$\sum_{k=1}^n C_n^k k^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(nx - x + 1).$$

*Доказательство.* В общем случае для произвольных вещественных  $x$  данные тождества доказываются двойным дифференцированием по  $x$  тождества, известного как Бином Ньютона:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n.$$

Для случая  $0 \leq x \leq 1$  можно также воспользоваться свойством биномиального распределения. Пусть каждая из независимых случайных величин  $\xi_i$ , где  $i = 1, \dots, n$ , принимает значения 0, 1 и  $E\xi_i = x$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^n C_n^k k x^k (1-x)^{n-k} = E \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \right) = \sum_{i=1}^n E\xi_i = nx.$$



$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n C_n^k k^2 x^k (1-x)^{n-k} &= E \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \right)^2 = E \left( \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \xi_i \xi_j \right) = \\
&= \sum_{i=1}^n E \xi_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} E \xi_i E \xi_j = \sum_{i=1}^n x + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} x^2 = \\
&= nx + 2x^2 \sum_{i=1}^n (i-1) = nx + 2x^2 \frac{n(n-1)}{2} = nx(nx - x + 1).
\end{aligned}$$

□

Найдем теперь значение затрат системы для полностью смешанного равновесия.

$$\begin{aligned}
LSC(c, F) &= E \left( \sum_{l=1}^m \frac{\text{к-во пользователей на } l}{c_l} \right) = \\
&= \sum_{l=1}^m \frac{1}{c_l} \sum_{k=1}^n C_n^k k (1-p^l)^{n-k} (p^l)^k = n \sum_{l=1}^m \frac{p^l}{c_l} = \\
&= \frac{mn(m+n-1)}{C(n-1)} - \frac{n}{n-1} \sum_{l=1}^m \frac{1}{c_l}. \\
QSC(c, F) &= E \left( \sum_{l=1}^m \frac{(\text{к-во пользователей на } l)^2}{c_l} \right) = \\
&= \sum_{l=1}^m \frac{1}{c_l} \sum_{k=1}^n C_n^k k^2 (1-p^l)^{n-k} (p^l)^k = \sum_{l=1}^m \frac{np^l(np^l - p^l + 1)}{c_l} = \\
&= n \sum_{l=1}^m p^l \frac{1 + (n-1)p^l}{c_l} = \frac{n(m+n-1)}{C}.
\end{aligned}$$

Исследуем возможность проявления парадокса Браесса в данной модели, то есть возможность возникновения такой ситуации, когда добавление в систему дополнительного канала ухудшает полностью смешанное равновесие, то есть увеличивает затраты системы для полностью смешанного равновесия. Будем считать, что в исходной системе полностью смешанное равновесие существует, то есть выполнено  $c_1(m+n-1) > C$ . Добавление нового канала не должно нарушать существование полностью смешанного равновесия, то есть будем рассматривать добавление такого канала  $c_0$ , что выполнено  $c_0(m+n) > C + c_0$  и  $c_1(m+n) > C + c_0$ .

**Теорема 6.1.** В модели с  $n$  одинаковыми пользователями и  $m$  различными параллельными каналами линейные затраты системы в полностью смешанном равновесии увеличиваются при добавлении нового канала с пропускной способностью  $\frac{C}{m+n-1} < c_0 < \frac{C}{m}$  такого, что выполнено  $c_0(m+n) > C + c_0$  и  $c_1(m+n) > C + c_0$ .

*Доказательство.* Пусть  $F$  – ситуация полностью смешанного равновесия в модели с  $n$  одинаковыми пользователями и  $m$  различными параллельными каналами. Пусть добавили канал с пропускной способностью  $c_0$ , и пусть  $F_0$  – полностью смешанное равновесие в полученной системе.

Тогда для линейной функции изменение затрат системы:

$$\begin{aligned} LSC(w, F_0) - LSC(w, F) &= \\ &= -\frac{n}{(n-1)c_0} + \frac{(m+1)n(m+n)}{(C+c_0)(n-1)} - \frac{mn(m+n-1)}{C(n-1)} = \\ &= \frac{n}{(n-1)C c_0(C+c_0)} (C c_0(2m+n-1) - C^2 - m c_0^2(m+n-1)). \end{aligned}$$

Данная разность положительна, если  $C c_0(2m+n-1) - C^2 - m c_0^2(m+n-1) > 0$ . Левая часть данного неравенства представляет собой параболическую функцию по  $c_0$  с отрицательным коэффициентом при  $c_0^2$ , поэтому положительные значения данной функции будут находиться между ее двумя корнями  $\frac{C}{m+n-1}$  и  $\frac{C}{m}$ . Тогда при добавлении канала с пропускной способностью  $\frac{C}{m+n-1} < c_0 < \frac{C}{m}$  линейные затраты системы увеличатся.  $\square$

**Пример 18.** Рассмотрим систему с 4 пользователями и 2 параллельными каналами с пропускной способностью 1. Полностью смешанное равновесие – ситуация, в которой все равновесные вероятности равны 0.5. Равновесные линейные затраты системы равны 4. При добавлении канала с пропускной способностью  $\frac{2}{5} < c_0 < 1$  полностью смешанное равновесие существует и равновесные вероятности равны  $\frac{5c_0-2}{3(c_0+2)}$  на новом канале и  $\frac{4-c_0}{3(c_0+2)}$  на первоначальных двух каналах. Равновесные линейные затраты системы в новой системе равны  $\frac{52c_0-8c_0^2-8}{3c_0(c_0+2)} > 4$ .

**Теорема 6.2.** В модели с  $n$  одинаковыми пользователями и  $m$  различными параллельными каналами добавление нового канала либо не увеличивает квад-

*ратичные затраты системы для полностью смешанного равновесия, либо делает невозможным существование полностью смешанного равновесия.*

*Доказательство.* Пусть  $F$  – ситуация полностью смешанного равновесия в модели с  $n$  одинаковыми пользователями и  $m$  различными параллельными каналами. Пусть добавили канал с пропускной способностью  $c_0$ , и пусть  $F_0$  – полностью смешанное равновесие в полученной системе.

Для квадратичной функции изменение затрат системы:

$$\begin{aligned} QSC(w, F_0) - QSC(w, F) &= \frac{n(m+n)}{C+c_0} - \frac{n(m+n-1)}{C} = \\ &= \frac{Cn - c_0n(m+n-1)}{(C+c_0)C}. \end{aligned}$$

Данная разность будет положительной при добавлении канала  $c_0 < \frac{C}{m+n-1}$ .

При этом для допустимости полностью смешанного равновесия  $F_0$  необходимо и достаточно выполнения  $c_0(m+n) > C + c_0$  и  $c_1(m+n) > C + c_0$ . Для проявления парадокса Браесса добавляемый канал должен иметь пропускную способность  $c_0(m+n-1) < C$ , откуда  $c_0(m+n) < C + c_0 < c_0(m+n)$ , что приводит к противоречию.  $\square$

## § 6.5 Полностью смешанное равновесие в общем случае

Рассмотрим общий случай модели, в которой пользователи могут отправлять трафик различного объема по каналам с различной пропускной способностью. В качестве затрат системы будем рассматривать функции линейных затрат системы. Пусть  $W = \sum_{i=1}^n w_i$  – общий объем пользовательского трафика,  $C = \sum_{l=1}^m c_l$  – суммарная пропускная способность системы каналов.

Для этого случая справедлива следующая теорема, дающая условие существования полностью смешанного равновесия и значения равновесных вероятностей.

**Теорема 6.3. (Mavronikolas, Spirakis) [143]** *Полностью смешанное равновесие существует и единственно тогда и только тогда, когда для всех пользователей  $i = 1, \dots, n$  и всех каналов  $l = 1, \dots, m$  справедливо*

$$\left(1 - \frac{mc_l}{C}\right) \left(1 - \frac{W}{(n-1)w_i}\right) + \frac{c_l}{C} \in (0, 1).$$

Тогда соответствующие равновесные вероятности равны

$$p_i^l = \left(1 - \frac{mc_l}{C}\right) \left(1 - \frac{W}{(n-1)w_i}\right) + \frac{c_l}{C}.$$

Легко проверить, что для любого пользователя сумма его равновесных вероятностей по всем каналам равна 1. Поэтому, в условии существования равновесия в теореме достаточно проверять выполнение неравенства только с одной стороны: для всех пользователей  $i = 1, \dots, n$  и всех каналов  $l = 1, \dots, m$  справедливо

$$\left(1 - \frac{mc_l}{C}\right) \left(1 - \frac{W}{(n-1)w_i}\right) + \frac{c_l}{C} > 0. \quad (6.5.1)$$

Найдем линейные затраты системы для полностью смешанного равновесия  $F$ .

$$\begin{aligned} LSC(w, c, F) &= E \left( \sum_{l=1}^m \frac{\sum_{k:l_k=l} w_k}{c_l} \right) = \sum_{l=1}^m \frac{\sum_{k=1}^n E(w_k \cdot I_{l_k=l})}{c_l} = \\ &= \sum_{l=1}^m \frac{\sum_{k=1}^n w_k p_l^k}{c_l} = \frac{mW(n+m-1)}{C(n-1)} - \frac{W}{n-1} \sum_{l=1}^m \frac{1}{c_l}. \end{aligned}$$

Исследуем возможность проявления парадокса Браесса в данной модели. Будем считать, что в исходной системе полностью смешанное равновесие существует, то есть выполнено условие (6.5.1). Добавление нового канала не должно нарушать существование полностью смешанного равновесия, то есть будем рассматривать добавление такого канала  $c_0$ , что выполнено условие, аналогичное условию (6.5.1), для новой системы  $m+1$  каналов.

**Теорема 6.4.** *В модели с  $n$  различными пользователями и  $m$  различными параллельными каналами линейные затраты системы в полностью смешанном равновесии увеличиваются при добавлении нового канала с пропускной способностью  $\frac{C}{m+n-1} < c_0 < \frac{C}{m}$  такого, что для всех пользователей  $i = 1, \dots, n$  и всех каналов  $l = 0, \dots, m$  справедливо*

$$\left(1 - \frac{(m+1)c_l}{C+c_0}\right) \left(1 - \frac{W}{(n-1)w_i}\right) + \frac{c_l}{C+c_0} > 0.$$

*Доказательство.* Пусть  $F$  – ситуация полностью смешанного равновесия в модели с  $n$  различными пользователями и  $m$  различными параллельными каналами. Пусть добавили канал с пропускной способностью  $c_0$ , и пусть  $F_0$  – полностью смешанное равновесие в полученной системе.

Тогда для линейной функции изменение затрат системы:

$$\begin{aligned} LSC(w, c, F_0) - LSC(w, c, F) &= \\ &= -\frac{W}{(n-1)c_0} + \frac{(m+1)W(m+n)}{(C+c_0)(n-1)} - \frac{mW(m+n-1)}{C(n-1)} = \\ &= \frac{W}{(n-1)C c_0 (C+c_0)} (C c_0 (2m+n-1) - C^2 - m c_0^2 (m+n-1)). \end{aligned}$$

Оставшаяся часть доказательства полностью совпадает с последней частью доказательства теоремы 6.1 для системы с различными каналами и одинаковыми пользователями.  $\square$

**Пример 19.** Рассмотрим систему с 2 пользователями, отправляющими трафик объемом  $w_1 = 1$  и  $w_2 = 3$ , и 2 параллельными каналами с пропускной способностью  $c_1 = c_2 = 1$ . Полностью смешанное равновесие – ситуация, в которой все равновесные вероятности равны 0.5. Равновесные линейные затраты системы равны 4. При добавлении канала с пропускной способностью  $\frac{6}{7} < c_0 < 1$  полностью смешанное равновесие существует и равновесные вероятности равны:

$$p_1^0 = \frac{7c_0-6}{2+c_0}; \quad p_2^0 = \frac{5c_0-2}{3(2+c_0)}; \quad p_1^1 = p_1^2 = \frac{4-3c_0}{2+c_0}; \quad p_2^1 = p_2^2 = \frac{4-c_0}{3(2+c_0)}.$$

Равновесные линейные затраты системы в новой системе равны  $\frac{28c_0-8c_0^2-8}{c_0(c_0+2)} > 4$ .

## § 6.6 Результаты

В данной главе рассмотрена задача оптимальной маршрутизации трафика в сети с параллельными каналами и неделимым трафиком, основанная на КР-модели,

В КР-модели задачи оптимальной маршрутизации трафика в сети для случая одинаковых каналов найдены линейные и квадратичные затраты системы

в полностью смешанном равновесии. В этой же модели для случаев различных каналов найдены линейные и квадратичные затраты системы в полностью смешанном равновесии, а также условия ухудшения такого равновесия при добавлении в систему нового канала.

## Глава 7

# Игра балансировки загрузки

Задача балансировки загрузки вычислительных узлов [21, 22, 44, 82] (процессоров) или задача составления расписания [38], рассматривается в виде игры, которая также эквивалентна КР-модели с параллельными каналами различной пропускной способности [143], в которой затратами системы (социальными затратами) является максимальная задержка среди всех узлов. Множество задач различных объемов должно быть распределено между вычислительными узлами с различными скоростями обслуживания, на которых задачи будут выполняться. Объемом задачи считается время ее обслуживания на свободном узле со скоростью 1. Загрузкой узла является суммарный объем выполняющихся на нем задач. Отношение загрузки к скорости узла определяет ее задержку, то есть время завершения работы данного узла. Теоретико-игровой подход позволяет рассматривать баланс загрузки как игру, в которой участники действуют эгоистично и могут достигать некоторого равновесного состояния, когда каждый игрок выбирает стратегию, минимизирующую задержку выполнения своей задачи. Здесь мы рассматриваем только чистое равновесие по Нэшу, известно [94], что для игр такого типа оно всегда существует. Сравнение таких равновесий с глобальным оптимумом, минимизирующим затраты системы, позволяет оценить ее эффективность. Цена анархии – это мера, впервые использованная в [132] и позволяющая сравнить выигрыш системы при кооперативном и конкурентном поведении игроков [5].

## § 7.1 Модель игры

Рассмотрим систему  $S = S(N, v)$ , состоящую из  $N$  вычислительных узлов со скоростями  $v_1, \dots, v_N$ . Система используется множеством игроков  $U = U(n, w)$ , где каждый из  $n$  игроков выбирает узел для обслуживания своей задачи. Объем задачи игрока  $j$  равен  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Суммарный объем всех задач обозначим как  $W = \sum_{j=1}^n w_j$ . Время выполнения задачи объемом  $w$  на свободном узле  $i$  со скоростью  $v_i$  равно  $w/v_i$ .

Рассмотрим следующую игру  $\Gamma = \langle S(N, v), U(n, w), \lambda \rangle$  в чистых стратегиях. Полагаем, что каждый игрок может выбирать любой из узлов. Стратегией игрока  $j$  является номер узла  $l_j$ , который он выбирает для выполнения своей задачи. Тогда профиль стратегий в игре  $\Gamma$  – это вектор  $L = (l_1, \dots, l_n)$ . Загрузку узла  $i$ , то есть суммарный объем задач на нем, обозначим как  $\delta_i(L) = \sum_{j=1, \dots, n: l_j=i} w_j$ . Задержка на узле  $i$  обозначается как

$$\lambda_i(L) = \sum_{j=1, \dots, n: l_j=i} w_j/v_i = \frac{\delta_i(L)}{v_i},$$

заметим, что она одинакова для всех игроков, выбравших данный узел.

Затраты системы определяются как максимальная среди всех узлов задержка

$$SC(L) = \max_{i=1, \dots, N} \lambda_i(L).$$

Обозначим

$$OPT = OPT(S, U) = \min_{L \text{ профиль в } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)$$

оптимальные затраты, или затраты системы в оптимальном случае, где минимум находится среди всех возможных профилей стратегий в игре  $\Gamma(S, U, \lambda)$ .

Профиль стратегий  $L$ , где ни одному игроку не выгодно единолично менять выбранный в  $L$  узел на другой для выполнения своей задачи, называется чистым равновесием по Нэшу. Для того чтобы дать формальное определение, обозначим  $L(j \rightarrow i) = (l_1, \dots, l_{j-1}, i, l_{j+1}, \dots, l_n)$  профиль, получаемый из профиля  $L$ , если игрок  $j$  меняет выбранный им в  $L$  узел  $l_j$  на некоторый узел  $i$ , а все остальные игроки сохраняют свои стратегии неизменными.



**Определение 7.1.** Профиль стратегий  $L$  называется чистым равновесием по Нэшу тогда и только тогда, если каждый игрок выбрал узел с минимальной задержкой, то есть для каждого игрока  $j = 1, \dots, n$  выполняется  $\lambda_j(L) \leq \lambda_j(L(j \rightarrow i))$  для всех узлов  $i = 1, \dots, N$ .

**Определение 7.2.** Ценой анархии для системы  $S$  называется максимум отношения затрат систем в наихудшем равновесии по Нэшу к затратам системы в оптимальном случае:

$$PoA(S) = \max_U \frac{\max_{L - \text{равновесие по Нэшу в } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)}{OPT(S, U)}.$$

## § 7.2 Цена анархии в общем случае $N$ узлов

Приведем следующие оценки, очевидные для любой игры рассматриваемого типа. Они будут использованы в дальнейшем анализе.

- Равновесные затраты системы не могут быть больше, чем затраты системы в случае, когда все задачи выполняются на одном самом быстром узле:

$$SC(L) \leq \frac{W}{\max_{i=1, \dots, N} v_i}. \quad (7.2.1)$$

- Оптимальные затраты системы не могут быть меньше, чем в случае, когда весь объем задач распределен по узлам пропорционально их скоростям так, что задержка на всех узлах одинакова:

$$OPT \geq \frac{W}{\sum_{i=1}^N v_i}. \quad (7.2.2)$$

Непосредственно из оценок (7.2.1) и (7.2.2) получается основная верхняя оценка для цены анархии:

$$PoA(S) \leq \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{\max_{i=1, \dots, N} v_i}. \quad (7.2.3)$$

Как показывает следующая теорема, при определенных условиях для значений скоростей узлов данная верхняя оценка равна точному значению цены анархии.

**Теорема 7.1.** Для системы  $S$ , состоящей из  $N \geq 3$  узлов со скоростями  $v_1 = 1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_{N-1} = r \leq v_N = s$ , такими что:

$$1) (s - r) \sum_{i=1}^N v_i \leq \frac{s}{v_{N-2}} \left( s^2 - r \sum_{i=1}^N v_i \right) \text{ и}$$

$$2) (s - r) \sum_{i=1}^N v_i \leq \frac{s^2}{v_{N-2}},$$

цена анархии равна  $PoA(S) = \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{s}$ .

*Доказательство.* Для системы  $S$  справедлива верхняя оценка цены анархии (7.2.3).

Покажем, что она становится точной при выполнении условий теоремы 1) и 2).

Рассмотрим пример системы, где  $N + 1$  имеют задачи с объемами  $w_1 = r \sum_i v_i$ ,  $w_2 = s^2 - r \sum_i v_i$ , и  $w_{2+i} = sv_i$  для всех  $i = 1, \dots, N - 1$ . Условие 1) гарантирует неотрицательность  $w_2$ .

В оптимальном случае задачи распределяются по узлам так, что задержки на всех узлах равны  $s$ : задачи с объемами  $w_1$  и  $w_2$  размещаются на узле  $N$ , а каждая задача объемом  $w_{2+i}$  – на узле  $i$  для всех  $i = 1, \dots, N - 1$ .

В равновесии по Нэшу задача объемом  $w_1$  размещается на узле  $N - 1$ , этот узел имеет наибольшую задержку  $\sum_{i=1}^N v_i$ . Остальные задачи размещаются на

узле  $N$ , его задержка равна  $\frac{(s-r) \sum_{i=1}^N v_i}{s}$ . Первому игроку невыгодно перемещать свою задачу объемом  $w_1$  на другой узел, поскольку ее задержка на узле  $N$  станет такой же, как на узле  $N - 1$  со скоростью  $r$ , а на любом другом узле  $k$  со

скоростью  $v_k \leq r$  станет  $\frac{r \sum_{i=1}^N v_i}{v_k} \geq \sum_{i=1}^N v_i$ . Условия 1) и 2) гарантируют, что также невыгодно перемещать задачи объемов  $w_i$ ,  $i \geq 2$ , с узла  $N$  на любой узел  $k$  со скоростью  $v_k \leq r$ .

Для данного примера отношение равновесных затрат системы к оптимальным равно  $\frac{\sum_{i=1}^N v_i}{s}$ , а так как это верхняя граница цены анархии, то это максимальное значение отношения.  $\square$

Наличие точного значения цены анархии дает возможность нахождения достаточных условий для роста цены анархии при включении в систему дополнительного узла, то есть ситуации, аналогичной парадоксу Браесса [51, 131, 140,

175]. Следующая теорема показывает, какой должна быть скорость нового узла для возникновения такой ситуации.

**Теорема 7.2.** Для системы  $S$ , состоящей из  $N \geq 2$  узлов со скоростями  $v_1 = 1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_N = s$ , цена анархии строго возрастает при добавлении в систему нового узла со скоростью  $s'$ , такой что

1) для новой системы с  $N + 1$  узлами выполняются условия 1) и 2) теоремы 7.1 и

$$2) s' < s \left( 1 + \frac{s}{\sum_{i=1}^{N-1} v_i} \right).$$

*Доказательство.* Для системы  $S$  цена анархии имеет следующую оценку:

$$PoA(S) \leq \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{s}. \text{ Пусть для новой системы выполнены условия 1) и 2) теоремы 7.1. Если } s' \leq s, \text{ то для новой системы цена анархии становится равной } \frac{\sum_{i=1}^N v_i + s'}{s} > \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{s}.$$

$$\text{Если же } s' > s, \text{ то для новой системы цена анархии } \frac{\sum_{i=1}^N v_i + s'}{s'} > \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{s} \text{ при } s' < s \left( 1 + \frac{s}{\sum_{i=1}^{N-1} v_i} \right). \quad \square$$

Следующая теорема показывает, что для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением только тех игр, для которых оптимальные затраты системы равны 1.

**Теорема 7.3.** Цена анархии для системы  $S$  равна  $PoA(S) =$

$$= \max_{U_1: OPT(S, U_1) = 1} \max_{L - \text{равновесие по Нэшу в } \Gamma(S, U_1, \lambda)} SC(L).$$

*Доказательство.* Пусть  $L$  – наихудшее равновесие в игре  $\Gamma(S, U, \lambda)$  с произвольным множеством игроков  $U(n, w)$ , где объем задачи каждого игрока  $j$  равен  $w_j$ , а  $L_{OPT}$  – оптимальный профиль в этой игре. Значение затрат системы в  $L$  равно  $SC$ , и затраты системы в оптимальном профиле равны  $OPT$ . Отношение затрат системы в наихудшем равновесии к оптимальным равно  $\frac{SC}{OPT}$ . Так как  $L$  – равновесие, то для любого игрока  $j$   $\frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k = l_j} w_k}{v_{l_j}} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k = i} w_k + w_j}{v_i}$  для любого узла  $i$ .

Рассмотрим теперь игру с тем же набором узлов и игроков, но где у каждого игрока  $j$  объем задачи равен  $\frac{w_j}{OPT}$ . Значение затрат системы в  $L$  равно  $\frac{SC}{OPT}$ , и затраты системы в  $L_{OPT}$  равны 1. Благодаря свойству линейной однородности задержек на узлах относительно их загрузок профили  $L$  и  $L_{OPT}$  являются соответственно наихудшим равновесием и оптимальным профилем в новой игре. В частности,  $L$  является равновесием в новой игре, так как для любого игрока  $j$  справедливо  $\frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l_j} w_k}{v_j OPT} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k + w_j}{v_i OPT}$  для любого узла  $i$ . Пусть  $L$  – не наихудшее равновесие в новой игре. Тогда в ней существует равновесие  $L'$  с затратами системы  $\frac{SC'}{OPT}$  такое, что затраты системы в  $L'$  больше затрат системы в  $L$ , то есть  $\frac{SC'}{OPT} > \frac{SC}{OPT}$ . Но тогда в исходной игре профилю  $L'$  соответствуют затраты системы  $SC' > SC$  и равновесие  $L'$  хуже равновесия  $L$ . Аналогично,  $L_{OPT}$  является оптимальным профилем в новой игре. Тогда отношение затрат системы в наихудшем равновесии к оптимальным в новой игре также равно  $\frac{SC}{OPT}$ .

Следовательно, любой игре  $\Gamma(S, U, \lambda)$  соответствует игра  $\Gamma(S, U_1, \lambda)$  с объемами задач, нормированными таким образом, что  $OPT(S, U_1) = 1$ . При этом отношения затрат системы в наихудшем равновесии к оптимальным для обеих игр одинаковы. Значит, для нахождения цены анархии достаточно рассмотреть только те игры, в которых оптимальные затраты равны 1.  $\square$

### § 7.3 Цена анархии в случае трех узлов

Точное значение цены анархии для случая двух узлов со скоростями  $1 \leq s$  найдено в работе [82] и равно

$$PoA(S) = \begin{cases} 1 + \frac{s}{s+2}, & \text{if } 1 \leq s \leq \sqrt{2}, \\ s, & \text{if } \sqrt{2} \leq s \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ 1 + \frac{1}{s}, & \text{if } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq s. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь случай, когда система  $S$  состоит из 3 узлов. В данном разделе без потери общности полагаем, что скорости узлов следующие:  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s$ , то есть узел 1 – самый медленный, узел 2 имеет среднюю скорость и узел 3 – самый быстрый.

Для случая 3 узлов оценка цены анархии (7.2.3) имеет следующий вид:

$$PoA(S) \leq \frac{s+r+1}{s}. \quad (7.3.1)$$

Построим систему неравенств, выполнение которых необходимо в равновесии по Нэшу. Пусть  $L$  – произвольное равновесие по Нэшу. Обозначим  $a$  – суммарный объем задач на узле 2 со скоростью  $r$ ,  $b+c$  – объем задач на узле 3 со скоростью  $s$ , где  $c$  – объем наименьшей из задач на данном узле. Тогда  $W-a-b-c$  – объем задач на самом медленном узле 1 со скоростью 1. В равновесии попытка перевести любую задачу  $j$  с узла  $l_j$  на другой узел увеличивает ее время обслуживания. Это же, очевидно, справедливо и при переводе нескольких задач с одного узла на другой. Тогда в равновесии по Нэшу должна выполняться следующая система неравенств (7.3.2).

$$\frac{a}{r} \leq \frac{b+c+a}{s}; \quad (7.3.2a)$$

$$\frac{a}{r} \leq W-b-c; \quad (7.3.2b)$$

$$\frac{b+c}{s} \leq \frac{a+c}{r}; \quad (7.3.2c)$$

$$\frac{b+c}{s} \leq W-a-b; \quad (7.3.2d)$$

$$W-a-b-c \leq \frac{W-b-c}{r}; \quad (7.3.2e)$$

$$W-a-b-c \leq \frac{W-a}{s}. \quad (7.3.2f)$$

**Лемма 7.1.** Для системы  $S$ , состоящей из 3 узлов со скоростями  $1 \leq r \leq s$ , в любом равновесии по Нэшу  $L$ , затраты системы не превышают  $\frac{W+c}{s+1-\frac{r}{s}}$ , где  $c$  – объем наименьшей из задач на узле со скоростью  $s$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное равновесие по Нэшу  $L$ . Нужно показать, что на всех узлах задержка не превышает  $\frac{W+c}{s+1-\frac{r}{s}}$ .

Рассмотрим задержку на узле 2, равную  $\frac{a}{r}$ . Из неравенства (7.3.2a) получаем  $\frac{a}{r} \leq \frac{b+c}{s-r}$  и  $b \geq \frac{s-r}{r}a - c$ , из (7.3.2d) получаем  $b+c \leq s(W-a-b)$ , откуда

$$\frac{a}{r}(s-r+rs) \leq s(W-b) \leq s(W - \frac{s-r}{r}a + c),$$

тогда  $\frac{a}{r}(s^2 + s - r) \leq (W + c)s$ .

Рассмотрим задержку на узле 3, которая равна  $\frac{b+c}{s}$ . Из неравенства (7.3.2с) имеем  $\frac{a}{r} \geq \frac{b+c}{s} - \frac{c}{r}$ , тогда, используя (7.3.2b), получаем

$$b + c \leq W - \frac{a}{r} \leq W - \frac{b+c}{s} + \frac{c}{r},$$

$$\text{откуда } \frac{b+c}{s} \leq \frac{W + \frac{c}{r}}{s+1} < \frac{W+c}{s+1 - \frac{r}{s}}. \quad (7.3.3)$$

Рассмотрим задержку на самом медленном узле  $W - a - b - c$ . Из неравенства (7.3.2f), используя  $a = W - b - c - (W - a - b - c)$ , получаем:

$$b + c \geq (s-1)(W - a - b - c); \quad (7.3.4)$$

$$b \geq (s-1)(W - a - b - c) - c. \quad (7.3.5)$$

Из неравенства (7.3.2с) имеем

$$\frac{b+c}{s} \leq \frac{W - b - c - (W - a - b - c) + c}{r} = \frac{W - b - (W - a - b - c)}{r}.$$

Применяя к левой части неравенство (7.3.4) и к правой части неравенство (7.3.5), получаем

$$\frac{s-1}{s}(W - a - b - c) \leq \frac{W + c - s(W - a - b - c)}{r},$$

$$\text{откуда } W - a - b - c \leq \frac{W + c}{s + r - \frac{r}{s}} \leq \frac{W + c}{s + 1 - \frac{r}{s}}. \quad (7.3.6)$$

□

**Лемма 7.2.** Для системы  $S$ , состоящей из 3 узлов со скоростями  $1 \leq r \leq s$ , в любом равновесии по Нэшу  $L$ , таком что суммарный объем задач на узле со скоростью  $s$  не больше  $s * OPT$ , затраты системы не превышают  $OPT \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное равновесие по Нэшу  $L$ .

Если  $s \leq r^2 + r$ , то из оценок (7.2.1) и (7.2.2) имеем

$$SC(L) \leq \frac{W}{s} \leq OPT \frac{s+r+1}{s} \leq OPT \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}.$$

Пусть теперь  $s > r^2 + r$ . Рассмотрим задержку на узле 2, равную  $\frac{a}{r}$ . Из неравенства (7.3.2а) получаем

$$\frac{a}{r} \leq \frac{b+c}{s-r} \leq OPT \frac{s}{s-r} < OPT \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}.$$

На узле 3

$$\frac{b+c}{s} \leq OPT < OPT \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}.$$

Из неравенства (7.3.2f), используя  $a = W - b - c - (W - a - b - c)$ , получаем на самом медленном узле:

$$W - a - b - c \leq \frac{b+c}{s-1} \leq OPT \frac{s}{s-1} \leq OPT \frac{s}{s-r} < OPT \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}.$$

□

**Лемма 7.3.** Для системы  $S$ , состоящей из 3 узлов со скоростями  $1 \leq r \leq s$ , в любом равновесии по Нэшу  $L$ , таком что наименьшая из задач на узле со скоростью  $s$  имеет объем  $c > r * OPT$ , затраты системы не превышают  $OPT \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное равновесие по Нэшу  $L$ . Если на узле 3 каждая из задач имеет объем больше  $r * OPT$ , то в оптимальном профиле все эти задачи также находятся на этом же узле. А это означает, что их общий объем не более  $s * OPT$ , то есть выполнено условие леммы 7.2. □

**Лемма 7.4.** Для системы  $S$ , состоящей из 3 узлов со скоростями  $1 \leq r \leq s$ , в любом равновесии по Нэшу, таком что на узле со скоростью  $s$  наименьшая из задач имеет объем  $c > OPT$ , но  $c \leq r * OPT$ , а общий объем задач на ней больше  $s * OPT$ , затраты системы не превышают  $OPT \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное равновесие по Нэшу  $L$ . Для всех значений  $c \leq r * OPT$ , используя оценку (7.2.2), из (7.3.3) получаем

$$\frac{b+c}{s} \leq \frac{W+\frac{c}{r}}{s+1} \leq OPT \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$$

и из (7.3.6) имеем

$$W - a - b - c \leq \frac{W+c}{s+r-\frac{r}{s}} \leq OPT \frac{s+2r+2}{s+r-\frac{r}{s}} \leq OPT \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}.$$

Если  $a \leq r * OPT$ , тогда  $\frac{a}{r} \leq OPT \leq OPT \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$ .

Пусть теперь  $a > r * OPT$ . Поскольку  $b+c > s * OPT$  и объем каждой задачи на узле 3 больше  $OPT$  и не больше  $r * OPT$ , то в оптимальном профиле

все эти задачи размещаются только на узлах 2 и 3. Их суммарный объем равен  $b + c$ . Пусть объем каждой задачи на узле 2 в равновесии по Нэшу  $L$  также больше  $OPT$ . Тогда в оптимальном профиле все эти задачи также размещаются только на узлах 2 и 3. Их общий объем равен  $a$ . Но тогда  $OPT \geq \frac{a+b+c}{s+r}$ , что противоречит  $a > r * OPT$  и  $b + c > s * OPT$ . Это означает, что в равновесии по Нэшу  $L$  на узле 2 размещается хотя бы одна задача объемом не больше  $OPT$ .

Тогда  $\frac{a}{r} \leq \frac{b+c+OPT}{s}$ , откуда  $\frac{b+c}{s} \geq \frac{a}{r} - \frac{OPT}{s}$  и  $b \geq \frac{as}{r} - OPT - c$ . Отсюда, используя оценку (7.2.2) и неравенство (7.3.2d), получаем

$$\begin{aligned} \frac{a}{r} - \frac{OPT}{s} &\leq \frac{b+c}{s} \leq W - b - a \leq \\ &\leq W - \frac{as}{r} + OPT + c - a \leq \\ &\leq OPT(r + s + 1) - \frac{as}{r} + OPT + r * OPT - a \\ \text{и } \frac{a}{r} &\leq OPT \frac{s + 2r + 2 + \frac{1}{s}}{s + r + 1} \leq OPT \frac{s + r + 2}{s + 1 - \frac{r}{s}}. \end{aligned}$$

□

Используя приведенные выше леммы, получаем обобщенную верхнюю оценку цены анархии для системы, состоящей из трех узлов.

**Теорема 7.4.** *Для системы  $S$ , состоящей из 3 узлов со скоростями  $1 \leq r \leq s$ , цена анархии имеет верхнюю оценку:*

$$PoA(S) \leq \begin{cases} \frac{s+r+1}{s}, & \text{если } s \leq r^2 + r \\ \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное равновесие по Нэшу  $L$ . Из лемм 7.2–7.4 получаем, что  $SC(L) \leq OPT \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$  для всех случаев, когда объем каждой из задач на узле 3 со скоростью  $s$  больше  $OPT$ . Для случая, когда на узле 3 есть хотя бы одна задача объемом  $c \leq OPT$ , эта же оценка следует из леммы 7.1.

Кроме того, справедлива оценка (7.3.1). Поскольку  $\frac{s+r+1}{s} \leq \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$  для  $s \leq r^2 + r$ , получаем искомую верхнюю оценку. □

Покажем теперь, что для скоростей узлов  $s$  и  $r$  существуют области значений, где найденные верхние оценки дают точное значение цены анархии. Следующая теорема является частным случаем теоремы 7.1.



**Теорема 7.5.** Для системы  $S$ , состоящей из 3 узлов со скоростями  $1 \leq r \leq s$ , такими что  $(s-r)(s+r+1) \leq s(s^2 - r(s+r+1))$  и  $s \leq r^2 + r$ , цена анархии равна  $PoA(S) = \frac{s+r+1}{s}$ .

Следующая теорема определяет области значений для  $s$  и  $r$ , где  $\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$  является точным значением цены анархии.

**Теорема 7.6.** Для системы  $S$ , состоящей из 3 узлов со скоростями  $1 \leq r \leq s$ , такими что  $s > r^2 + r$  и  $s(s^2 - r(s+r+1)) \geq 2(rs + s - r)$ , цена анархии равна  $PoA(S) = \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$ .

*Доказательство.* Поскольку  $\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$  является верхней оценкой цены анархии, достаточно показать, что для системы  $S$  существуют такие игры, для которых отношение равновесных затрат системы к оптимальным точно равно данной оценке.

Рассмотрим игру, в которой пять игроков имеют задачи следующих объемов:

$$\begin{aligned} w_1 &= rs(s+r+2); \\ w_2 &= s^2 + s - r; \\ w_3 &= s - r - r^2 > 0 \text{ при } s > r + r^2; \\ w_4 &= r(s^2 + s - r) \geq w_2; \\ w_5 &= s^3 + s^2 + r^2 - rs^2 - sr^2 - 3sr - s + r \geq w_2 \\ &\text{при } s(s^2 - r(s+r+1)) \geq 2(rs + s - r). \end{aligned}$$

В равновесии по Нэшу на узел 2 поступает задача объемом  $w_1$  – это будет узел с наибольшей задержкой, равной  $\lambda_2 = s(s+r+2)$ . На узел 3 поступают задачи с объемами  $w_2$ ,  $w_4$  и  $w_5$ , обеспечивая там задержку  $\lambda_3 = (s-r)(s+r+2) < \lambda_2$ . На самом медленном узле 1 размещается задача объемом  $w_3$ , обеспечивая задержку  $\lambda_1 = s - r - r^2 < s^2 + (2s - r) - r - r^2 = \lambda_3$ . Это наименее загруженный узел.

Покажем, что это равновесие. Если задача объемом  $w_1$  переходит с самого загруженного узла 2 на менее загруженный узел 3, то ее задержка не изменится. При переходе на узел 1 ее задержка становится равной  $s - r - r^2 + s^2r + sr^2 + 2rs > \lambda_2$ . Если задача минимального объема  $w_2$  перейдет с узла 3 на узел 1, то ее задержка не изменится.

В оптимальном случае на узле 2 размещается задача объемом  $w_4$ , на узле 3 – задачи с объемами  $w_1$ ,  $w_3$  и  $w_5$ , на узле 1 – задача с объемом  $w_2$ . На всех узлах задержка одинакова и равна  $s^2 + s - r$ .

Тогда отношение равновесных затрат к оптимальным равно  $\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$ .  $\square$

Область значений  $s$  и  $r$ , в которой цена анархии равна  $\frac{s+r+1}{s}$ , на рисунке 7.1 ограничена кривыми  $s = r^2 + r$  слева и  $(s-r)(s+r+1) = s(s^2 - r(s+r+1))$  справа. В области, ограниченной справа и снизу кривыми  $s = r^2 + r$  и  $2(rs + s - r) = s(s^2 - r(s+r+1))$ , цена анархии равна  $\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$ .

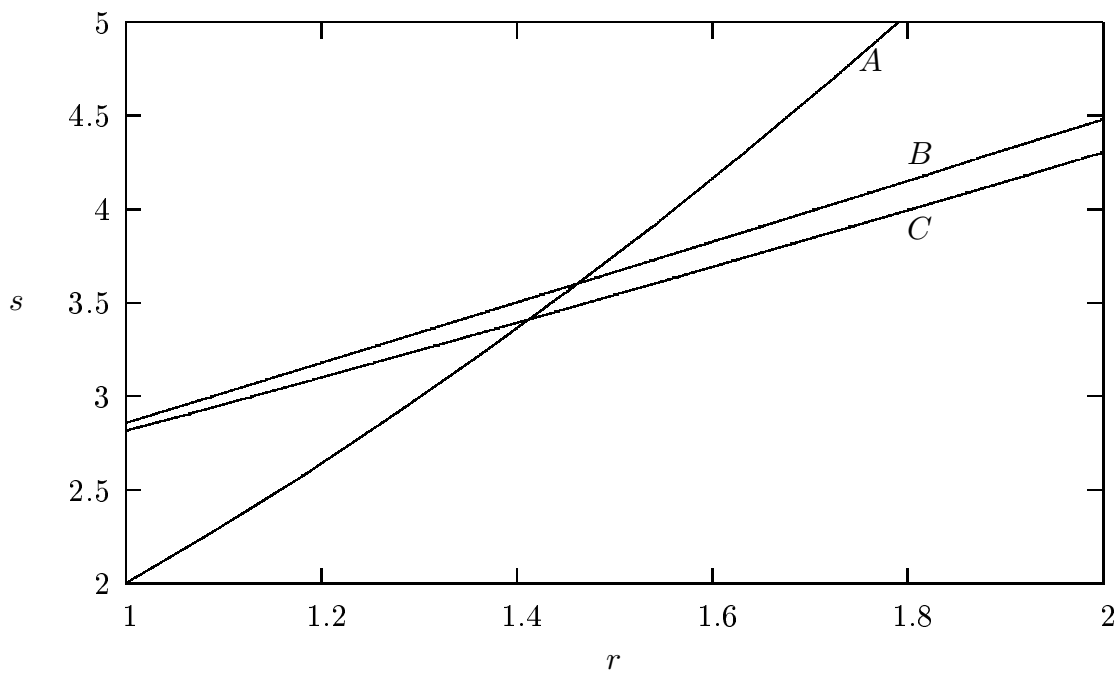


Рис. 7.1: Области определения оценок  $POA(S)$ . A – кривая  $s = r^2 + r$ , B – кривая  $2(rs + s - r) = s(s^2 - r(s+r+1))$ , C – кривая  $(s-r)(s+r+1) = s(s^2 - r(s+r+1))$

Следующая теорема формулирует достаточные условия роста цены анархии при добавлении в систему нового узла.

**Теорема 7.7.** Для системы  $S$ , состоящей из 2 узлов со скоростями  $1 \leq s$ , цена анархии строго увеличивается при добавлении нового узла со скоростью  $q$ , такой что выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1)  $1 \leq q \leq s$ ,  $s \leq q^2 + q$  и  $(s - q)(s + q + 1) \leq s(s^2 - q(s + q + 1))$ ;
- 2)  $1 \leq q \leq s$ ,  $s > q^2 + q$ ,  $s(s^2 - q(s + q + 1)) \geq 2(qs + s - q)$  и  $q > \frac{s+1}{s(s-1)}$ ;
- 3)  $s < q < s^2 + s$  и  $(q - s)(q + s + 1) \leq q(q^2 - s(q + s + 1))$ .

*Доказательство.* В соответствии с оценкой (7.2.3) для системы  $S$  с двумя узлами со скоростями  $1 < s$  цена анархии не больше  $\frac{s+1}{s}$ .

Если  $s \leq q^2 + q$  и  $(s - q)(s + q + 1) \leq s(s^2 - q(s + q + 1))$ , то, согласно теореме 7.5, цена анархии для новой системы с тремя узлами со скоростями 1,  $q$ ,  $s$  равна  $\frac{s+q+1}{s}$ , что больше  $\frac{s+1}{s}$ .

Если  $s > q^2 + q$  и  $s(s^2 - r(s + q + 1)) \geq 2(qs + s - q)$ , то по теореме 7.6 цена анархии для новой системы равна  $\frac{s+q+2}{s+1-\frac{q}{s}}$ , что больше  $\frac{s+1}{s}$  при  $q > \frac{s+1}{s(s-1)}$ .

Если  $s < q < s^2 + s$  и  $(q - s)(q + s + 1) \leq q(q^2 - s(q + s + 1))$ , то по теореме 7.5 цена анархии для новой системы равна  $\frac{q+s+1}{q}$ , что больше  $\frac{s+1}{s}$  при  $q < s^2 + s$ .  $\square$

## § 7.4 Численный метод нахождения цены анархии

В предыдущем разделе получено аналитическое выражение для цены анархии для системы трех узлов, когда скорость самого быстрого узла достаточно большая. Но если значения скоростей двух быстрых узлов достаточно близки, выражение станет намного сложнее. В данном разделе предлагается метод вычисления цены анархии на примере системы трех узлов. Данный метод может быть обобщен на системы с большим количеством узлов, при этом возрастает количество задач линейного программирования, которые необходимо решать, а также число переменных и ограничений в них.

Рассмотрим систему линейных уравнений для компонент векторов  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $c = (c_1, c_2, c_3)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leq \frac{b_1+b_2+b_3 + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k}{v_j}; \\ \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leq \frac{c_1+c_2+c_3 + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k}{v_l}; \\ \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \leq \frac{c_1+c_2+c_3 + \min_{k=1,2,3:b_k>0} b_k}{v_l} \text{ или } \max_{k=1,2,3} b_k = 0; \\ \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \geq \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \geq \frac{c_1+c_2+c_3}{v_l}; \\ a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (7.4.1)$$

Данная система представляет собой набор гиперплоскостей в 9-мерном пространстве, проходящих через точку  $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ , и множество решений представляет собой область пространства, ограниченную данными гиперплоскостями. Система совместна, так как, например,  $a_1 = a_2 = a_3 = \alpha v_i$ ,

$b_1 = b_2 = b_3 = \alpha v_j$ ,  $c_1 = c_2 = c_3 = \alpha v_l$  является ее решением для всех  $\alpha > 0$ . При этом множество ее решений не ограничено, так как  $\alpha$  может быть сколь угодно большим.

Рассмотрим систему  $S$  с тремя вычислительными узлами со скоростями  $1 \leq r \leq s$ . Пусть  $L$  – равновесие по Нэшу для системы  $S$  с тремя узлами и  $n$  игроками, такое что  $i$  – номер узла с наибольшей задержкой в данном профиле, узел  $j$  имеет среднюю по порядку задержку,  $l$  – наименьшую. Положим, что в равновесии  $L$  на узле  $i$  находится суммарный объем задач, равный  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k = a_1 + a_2 + a_3$ , на узле  $j$  – объем  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k = b_1 + b_2 + b_3$  и на узле  $l$  – объем  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k = c_1 + c_2 + c_3$ . Объем задач на каждом узле некоторым образом разделен на три части так, что каждая из компонент трехмерных векторов  $a$ ,  $b$  и  $c$  либо нулевая, либо положительная и включает в себя объем не менее чем одной задачи.

**Лемма 7.5.** Пусть  $L$  – такое равновесие по Нэшу для игры с тремя узлами  $i, j, l$  и  $n$  игроков, что

$$\begin{aligned} \lambda_i(L) &\geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L), \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k &= a_1 + a_2 + a_3, \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k &= b_1 + b_2 + b_3, \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k &= c_1 + c_2 + c_3, \end{aligned}$$

где для всех  $k = 1, 2, 3$  каждая компонента  $a_k$  равна либо нулю, либо объему не менее чем одной задачи на узле  $i$ ,  $b_k$  равна либо нулю, либо объему не менее чем одной задачи на узле  $j$ ,  $c_k$  равна либо нулю, либо объему не менее чем одной задачи на узле  $l$ . Тогда набор векторов  $a, b, c$  является решением системы (7.4.1).

*Доказательство.* Пусть  $L$  – равновесие по Нэшу и  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ .

Тогда выполняются следующие неравенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k}{v_i} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k + \min_{k=1, \dots, n: l_k=i, w_k>0} w_k}{v_j}; \\ \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k}{v_i} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k + \min_{k=1, \dots, n: l_k=i, w_k>0} w_k}{v_l}; \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k}{v_j} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k + \min_{k=1, \dots, n: l_k=j, w_k>0} w_k}{v_l} \\ \text{или} \quad \max_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k = 0; \end{array} \right. \\ \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k}{v_i} \geq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k}{v_j} \geq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k}{v_l}. \end{array} \right.$$

Поскольку каждое ненулевое значение  $a_k$ , где  $k = 1, 2, 3$ , равно объему не менее чем одной задачи на узле  $i$ , то  $\min_{k: a_k>0} a_k \geq \min_{k: l_k=i, w_k>0} w_k$ . Аналогично,  $\min_{k: a_k>0} a_k \geq \min_{k: l_k=i, w_k>0} w_k$  и  $\min_{k: b_k>0} b_k \geq \min_{k: l_k=j, w_k>0} w_k$ . Это означает выполнение системы (7.4.1).  $\square$

**Лемма 7.6.** Любое решение системы (7.4.1) определяет равновесие по Нэшу  $L$  в игре с системой  $S$  из 3 узлов  $i, j, l$  и игроками, задачи которых соответствуют ненулевым компонентам векторов  $a, b$  и  $c$ , а задержки упорядочены следующим образом:  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ .

*Доказательство.* Пусть набор векторов  $a, b$  и  $c$  является решением системы (7.4.1). Рассмотрим игру с тремя узлами  $i, j$  и  $l$ . Пусть каждая из ненулевых компонент векторов  $a, b$  и  $c$  является объемом задачи очередного игрока. Предположим, что профиль  $L$  такой, что задачи с объемами  $a_k > 0$  размещаются на узле  $i$ , задачи с объемами  $b_k > 0$  – на узле  $j$  и задачи с объемами  $c_k$  – на узле  $l$ . Поскольку выполняются все неравенства системы (7.4.1), профиль  $L$  является искомым равновесием по Нэшу.  $\square$

Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 7.8.** Любому равновесию по Нэшу  $L$  в игре с системой  $S$ , состоящей из 3 узлов  $i, j, l$  и с  $n$  игроками, соответствует равновесие по Нэшу  $L'$  в игре с той же системой  $S$  и не более чем с 9 игроками, в котором на каждом узле размещено не более 3 задач, а задержки на узлах в  $L$  и  $L'$  совпадают.

*Доказательство.* Рассмотрим равновесие по Нэшу  $L$  в игре с системой  $S$ , состоящей из 3 узлов с  $n$  игроками. Пронумеруем узлы так, что  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq$

$\lambda_l(L)$ . Согласно лемме 7.5, для любого равновесия по Нэшу в игре с системой  $S$  и любым количеством игроков есть соответствующее решение  $a, b, c$  системы (7.4.1). Согласно лемме 7.6, это решение определяет такое равновесие по Нэшу  $L'$  в игре с системой  $S$ , что ненулевые компоненты вектора  $a$  являются объемами задач на узле  $i$ , ненулевые компоненты  $b$  – объемами задач на узле  $j$  и ненулевые компоненты  $c$  – объемами задач на узле  $l$ . По определению, сумма компонент вектора  $a$  равна нагрузке на узле  $i$  в профиле  $L$ . Следовательно, задержки на узле  $i$  совпадают в обоих равновесиях  $L$  и  $L'$ . Аналогично, для узлов  $j$  и  $l$  задержки на них в равновесии  $L$  совпадают с соответствующими задержками в равновесии  $L'$ .  $\square$

Из данной теоремы следует, что достаточно рассматривать только те игры, где в равновесии на каждом узле находится не более трех задач и равновесие является решением системы (7.4.1). При этом область значений затрат системы совпадает с областью значений для игр с произвольным числом игроков.

Пусть компоненты векторов  $a, b, c$  выбираются таким образом, что в оптимальном профиле, дающем минимум затрат системы, на узле  $i$  находится суммарный объем задач, равный  $a_1 + b_1 + c_1$ , на  $j$  – объем  $a_2 + b_2 + c_2$ , на  $l$  – объем  $a_3 + b_3 + c_3$ . При этом в оптимальном профиле наибольшей может оказаться задержка на любом из трех узлов. Кроме того, согласно теореме 7.3, объемы задач можно считать пронормированными таким образом, чтобы в оптимальном профиле максимальная среди всех узлов задержка была строго равна 1. В нашем случае это означает, что справедливы следующие неравенства:

$$a_1 + b_1 + c_1 \leq v_i,$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \leq v_j,$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \leq v_l,$$

причем как минимум одно из них выполняется как равенство.

**Лемма 7.7.** *Решение задачи линейного программирования  $LPP(v_i, v_j, v_l)$  от-*

носителем компонент векторов  $a, b, c$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 \rightarrow \max; \\ (r1) \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3}{v_i} \leq \frac{b_1 + b_2 + b_3 + \min_{k:a_k > 0} a_k}{v_j}; \\ (r2) \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3}{v_i} \leq \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \min_{k:a_k > 0} a_k}{v_l}; \\ (r3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{b_1 + b_2 + b_3}{v_j} \leq \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \min_{k:b_k > 0} b_k}{v_l} \\ \text{или } \max_{k=1,2,3} b_k = 0; \end{array} \right. \\ (r4) \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3}{v_i} \geq \frac{b_1 + b_2 + b_3}{v_j} \geq \frac{c_1 + c_2 + c_3}{v_l}; \\ (r5) \quad a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3; \\ (r6) \quad a_1 + b_1 + c_1 \leq v_i; \\ (r7) \quad a_2 + b_2 + c_2 \leq v_j; \\ (r8) \quad a_3 + b_3 + c_3 \leq v_l \end{array} \right. \quad (7.4.2)$$

дает максимальное значение затрат системы в равновесии по Нэшу среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач на каждом узле,  $i, j, l$  – номера узлов в порядке уменьшения задержки, а оптимальные затраты системы равны 1.

*Доказательство.* По лемме 7.6 любое решение неравенств (r1) – (r5) задачи  $LPP(v_i, v_j, v_l)$  определяет равновесие в игре с тремя узлами, где на каждом узле находится не более трех задач и  $i, j, l$  – номера узлов в порядке уменьшения задержки.

Целевая функция в данной задаче ограничена сверху только гиперплоскостями, соответствующими неравенствам (r6) – (r8). Неравенства (r1) – (r5) допускают сколь угодно большие значения целевой функции, например для решения  $a_1 = a_2 = a_3 = \alpha v_i$  для любого значения  $\alpha > 0$  при  $b_1 = b_2 = b_3 = \alpha v_j$ ,  $c_1 = c_2 = c_3 = \alpha v_l$ . Следовательно, максимум задачи достигается на одной из границ, соответствующих трем последним неравенствам, что гарантирует выполнение одного из них как равенства, а значит, оптимальные затраты для игры, соответствующей решению задачи  $LPP(v_i, v_j, v_l)$ , строго равны 1.  $\square$

Тогда для нахождения точного значения цены анархии для системы  $S$  с тремя узлами нужно решить ряд задач линейного программирования  $LPP(v_i, v_j, v_l)$

для всех перестановок  $(1, r, s)$ . Максимальное из этих решений даст значение  $PoA(S)$ . То есть справедлива следующая теорема.

**Теорема 7.9.** *Цена анархии для системы трех узлов  $S$  равна*

$$PoA(S) = \max_{(v_i, v_j, v_l) - \text{перестановки } (1, r, s)} \left\{ \frac{a_1 + a_2 + a_3}{v_i} \mid a, b, c - \text{решение } LPP(v_i, v_j, v_l) \right\},$$

где  $LPP(v_i, v_j, v_l)$  – задача линейного программирования (7.4.2).

*Доказательство.* Согласно лемме 7.7, решение задачи (7.4.2) дает максимальное значение затрат системы в равновесии по Нэшу, где  $i, j, l$  – номера узлов в порядке уменьшения задержки, среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач на каждом узле, а оптимальные затраты равны 1. Максимум решения среди задач для всех возможных перестановок  $(1, r, s)$  в качестве значений  $(v_i, v_j, v_l)$  даст максимальное значение затрат системы в равновесии по Нэшу среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач на каждом узле, а оптимальные затраты равны 1.

По теореме 7.8 для любого равновесия в игре с системой обслуживания трех узлов  $S$  и произвольным числом игроков можно найти соответствующее равновесие в игре с теми же узлами и множеством не более 9 игроков, где на каждом узле находится не более трех задач, причем затраты системы в обоих равновесиях совпадают. Значит, для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением игр, где в равновесии на каждом узле находится не более трех задач.

По теореме 7.3 для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением игр, где затраты системы в оптимальном профиле строго равны 1. □

## § 7.5 Численные примеры

Для нахождения оценок цены анархии в модели с тремя узлами разработано программное обеспечение, позволяющее визуально сравнить на графике значения верхней оценки цены анархии и численно найденного путем решения ряда



задач линейного программирования ее точного значения. Параметры системы  $S$  задаются как опции программы, при этом скорость первого узла считается равной 1, для второго задается точное значение, а для скорости третьего узла задается диапазон значений. Таким образом можно наблюдать, как изменяется значение цены анархии для конкретного значения при изменении скорости одного из узлов.

На графиках рисунков 7.2 и 7.3 представлены примеры оценок цены анархии для значений скорости второго узла  $r = 2$  и  $r = 5$  соответственно. Скорость первого узла равна 1, а скорость третьего узла  $s$  возрастает от  $r$ . На графиках пунктиром обозначена обобщенная верхняя оценка цены анархии, а сплошной линией – ее точное значение.

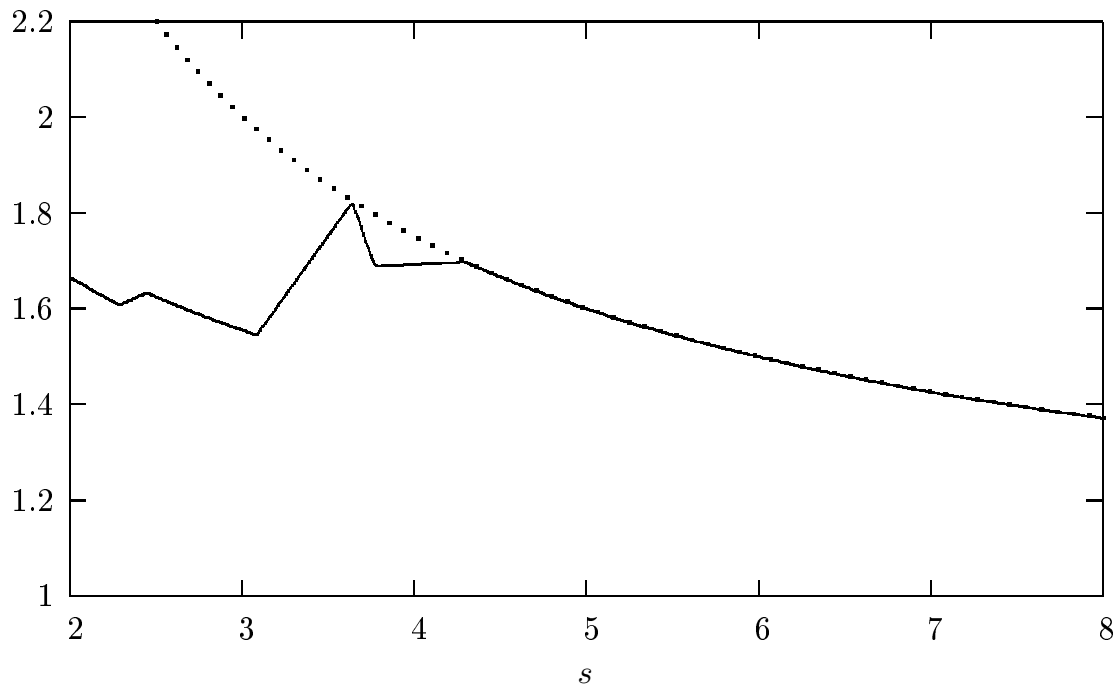


Рис. 7.2: Оценка цены анархии для системы  $S$ , где  $r = 2$ ,  $s \in [2, 8]$

## § 7.6 Результаты

В работе исследована игра баланса загрузки системы обслуживания с вычислительными узлами, где игроки распределяют свои задачи различного объема между вычислительными узлами, различающимися скоростями обслуживания. Каждый игрок стремится минимизировать время обслуживания своей задачи

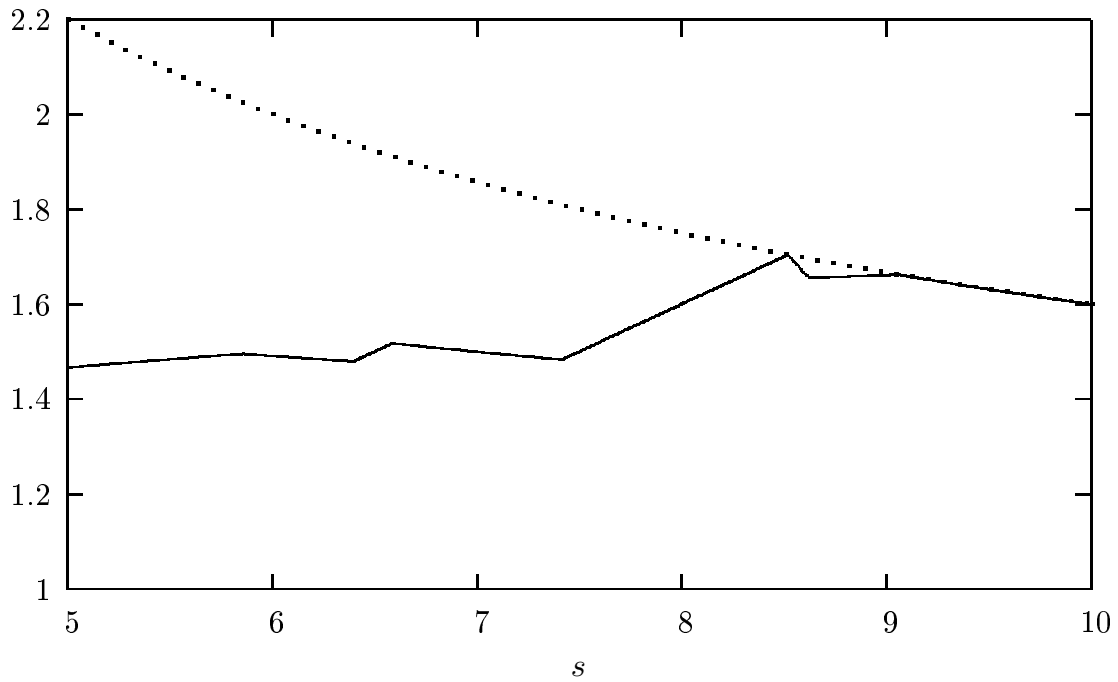


Рис. 7.3: Оценка цены анархии для системы  $S$ , где  $r = 5, s \in [5, 10]$

на выбранном им узле. Затратами системы является максимальное время работы среди всех узлов. Для системы обслуживания с  $N$  вычислительными узлами и  $n$  игроками получена оценка верхней границы цены анархии в игре баланса загрузки. Найдены условия, при которых она является точной оценкой цены анархии. Найдены условия возрастания цены анархии при добавлении в систему нового узла. Более детально рассмотрена модель с тремя вычислительными узлами. Для данной модели получена верхняя оценка цены анархии, которая является точной при достаточно высокой скорости обслуживания на одном из узлов. Также найдены условия возрастания цены анархии при добавлении в систему двух узлов третьего узла. На примере системы трех узлов разработана методика вычисления точного значения цены анархии. Данная методика может быть обобщена на системы с большим количеством узлов, при этом возрастает количество задач линейного программирования, которые необходимо решать, а также число переменных и ограничений в них. Разработана программная реализация алгоритма вычисления точного значения цены анархии, с помощью которой проведены эксперименты сравнения полученных оценок цены анархии с ее точным значением, показывающие корректность полученных оценок.

## Глава 8

# Игра балансировки загрузки с линейными экстерналиями

В данной главе строится игра баланса загрузки системы обслуживания, где игроки распределяют свои задачи различного объема между вычислительными узлами, различающимися задержкой, зависящей как от собственной загрузки, так и от загрузки других узлов. Каждый игрок стремится минимизировать время обслуживания своей задачи на выбранном им вычислительном узле. Затратами системы является максимальное время работы среди всех узлов.

Данная работа иллюстрирует возможность введения экстерналий линейного вида в функции задержки в КР-модели [17], подобно тому, как это было сделано в работах [100, 135] для модели Вардропа транспортной системы с параллельными каналами. В рассматриваемой в данной главе модели мы считаем, что на задержку при выполнении задач на вычислительном узле влияет не только его собственная загрузка, но также и загрузка других узлов через экстерналии. Это можно интерпретировать так, что часть своих ресурсов вычислительные узлы тратят на совместное выполнение управляющих операций, участие в организации, контроле и поддержке процесса выполнения задач, а также на связанный вместе с этими операциями обмен данными. Поэтому даже не загруженный задачами вычислительный узел имеет некоторую задержку, поскольку участвует в организации работы загруженных узлов.

Мы рассматриваем только чистое равновесие по Нэшу, показано, что подобно КР-модели без экстерналий [83, 94], что для игр такого типа с двумя узлами оно всегда существует, в отличие от общего случая.

## § 8.1 Модель игры

Рассмотрим систему  $S = S(N, v, e)$ , состоящую из  $n = |N|$  вычислительных узлов со скоростями  $v = (v_1, \dots, v_n)$  и экстерналиями  $e_{ik}$ , где  $i, k \in N, i \neq k$ , а каждый коэффициент  $e_{ik}$  отражает степень влияния загрузки узла  $k \neq i$  на задержку узла  $i$ . Система используется множеством игроков  $U = U(M, w)$ , где каждый из  $m = |M|$  игроков выбирает вычислительный узел для выполнения своей задачи. Объем задачи игрока  $j$  равен  $w_j, j = 1, \dots, m$ . Все задачи игроков составляют профиль задач  $w = (w_1, \dots, w_m)$ . Суммарный объем всех задач обозначим как  $W = \sum_{j=1}^m w_j$ . Время выполнения задачи объемом  $w_j$  в свободной от других задач системе на узле  $i$  со скоростью  $v_i$  равно  $\frac{w_j}{v_i}$ .

Полагаем, что каждый игрок может выбирать любой из узлов. Стратегией игрока  $j$  является номер вычислительного узла  $l_j$ , который он выбирает для выполнения своей задачи. Тогда профиль стратегий в игре  $\Gamma$  – это вектор  $L = (l_1, \dots, l_m)$ . Загрузку узла  $i$ , то есть суммарный объем задач на нем, обозначим как  $\delta_i(L) = \sum_{j \in M: l_j = i} w_j$ . Задержка вычислительного узла  $i$  обозначается как

$$\lambda_i(L) = \sum_{j \in M: l_j = i} \frac{w_j}{v_i} + \sum_{k \neq i} e_{ik} \sum_{j \in M: l_j = k} w_j = \frac{\delta_i(L)}{v_i} + \sum_{k \neq i} e_{ik} \delta_k(L),$$

заметим, что она одинакова для всех игроков, выбравших данный узел. Можно также доопределить  $e_{ii} = \frac{1}{v_i}$ , и тогда записать компактнее

$$\lambda_i(L) = \sum_{k \in N} e_{ik} \sum_{j \in M: l_j = k} w_j = \sum_{k \in N} e_{ik} \delta_k(L).$$

Таким образом, мы определили игру  $\Gamma = \langle S(N, v, e), U(M, w), \lambda \rangle$  в чистых стратегиях. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением только чистых стратегий.

Затраты системы определяются как максимальная среди всех узлов задержка

$$SC(L) = \max_{i \in N} \lambda_i(L).$$

Обозначим

$$OPT = OPT(S, U) = \min_{L \text{ профиль в } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)$$

оптимальные затраты, или затраты системы в оптимальном случае, где минимум находится среди всех возможных профилей стратегий в игре  $\Gamma(S, U, \lambda)$ .

Профиль стратегий  $L$ , где ни одному игроку не выгодно единолично менять выбранный в  $L$  вычислительный узел на другой для выполнения своей задачи, называется чистым равновесием по Нэшу. Для того, чтобы дать формальное определение, обозначим  $L(j \rightarrow i) = (l_1, \dots, l_{j-1}, i, l_{j+1}, \dots, l_m)$  профиль, получаемый из профиля  $L$ , если игрок  $j$  меняет выбранный им в  $L$  узел  $l_j$  на некоторый узел  $i$ , а все остальные игроки сохраняют свои стратегии неизменными.

**Определение 8.1.** Профиль стратегий  $L$  называется чистым равновесием по Нэшу тогда и только тогда, если каждый игрок выбрал узел с минимальной задержкой, то есть для каждого игрока  $j \in M$  выполняется  $\lambda_{l_j}(L) \leq \lambda_i(L(j \rightarrow i))$  для всех вычислительных узлов  $i \in N$ .

Введем предположения, обеспечивающие адекватное поведение системы. Рассмотрим произвольный профиль  $L$ . Во-первых, будем считать, что экстерналии таковы, что перевод любой задачи объема  $w_j$  с узла  $l_j$  на узел  $k$  строго уменьшает задержку на узле  $l_j$  и строго увеличивает задержку на узле  $k$ . Для этого должно выполняться следующее.

**Предположение 8.1.** Для всех пар вычислительных узлов  $i, k$  выполняется  $e_{ik} < \frac{1}{v_i}$ .

Тогда  $\lambda_{l_j}(L(j \rightarrow k)) = \lambda_{l_j}(L) - w_j(\frac{1}{v_{l_j}} - e_{l_j k}) < \lambda_{l_j}(L)$  и  $\lambda_k(L(j \rightarrow k)) = \lambda_k(L) + w_j(\frac{1}{v_k} - e_{kl_j}) > \lambda_k(L)$ .

Во-вторых, естественно предположить, что загрузка узла  $\delta_i(L)$  в большей степени влияет на задержку узла  $i$ , чем на задержку остальных узлов. То есть, выполняется следующее.

**Предположение 8.2.** Для всех пар узлов  $i, k$  выполняется  $e_{ki} < \frac{1}{v_i}$ .

В-третьих, предположим, что влияние экстерналий обратно пропорционально скоростям вычислительных узлов. Это означает, что на более быстрый узел в меньшей степени влияют загрузки остальных узлов, чем на медленный.

**Предположение 8.3.** Для всех пар узлов  $i, k$ , таких, что  $v_i \geq v_k$ , выполняется  $\sum_{l \neq i} e_{il} \leq \sum_{l \neq k} e_{kl}$ .

Заметим, что в случае модели с экстерналиями при переводе задачи с узла  $i$  на узел  $k$  также могут увеличиться или уменьшиться задержки на других узлах  $l \neq i, k$ . Поэтому в отличие от классической КР-модели, где чистое равновесие по Нэшу существует всегда, в модели с экстерналиями в общем случае равновесие по Нэшу может не существовать, как показывает пример 20. Однако, как будет показано в следующем разделе, в модели с двумя вычислительными узлами равновесие по Нэшу существует.

**Пример 20.** Приведем пример простой игры, в которой чистого равновесия по Нэшу не существует. Рассмотрим игру с двумя задачами единичного объема и тремя вычислительными узлами с единичными скоростями. Экстерналии заданы в виде матрицы

$$e = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ \epsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } 0 < \epsilon < 1.$$

Рассмотрим любой профиль, например,  $L = (1, 2)$ . Задержка для первой задачи равна  $1 + \epsilon$ , для второй 1. Первая задача может перейти на свободный узел 3 и получить задержку, равную 1, что она и делает. Тогда у второй задачи задержка увеличивается до  $1 + \epsilon$ , что заставляет его перейти на освободившийся первый узел. Это в свою очередь увеличивает задержку для первой задачи, которая переходит на узел 2. И так далее, получается бесконечный цикл профилей  $(1, 2) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (1, 2) \rightarrow \dots$

Пусть система и наборы задач игроков таковы, что чистое равновесие по Нэшу существует. Тогда можно говорить о цене анархии для данной системы.

**Определение 8.2.** Ценой анархии для системы  $S$  называется максимум отношения затрат систем в наихудшем чистом равновесии по Нэшу к затратам системы в оптимальном случае:

$$PoA(S) = \max_U \frac{\max_{L - \text{равновесие по Нэшу в } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)}{OPT(S, U)}.$$

## § 8.2 Случай двух вычислительных узлов

В данном разделе постараемся оценить значение цены анархии для случая двух вычислительных узлов с экстерналиями и сравнить его со значением цены анархии для исходной модели без экстерналий.

Рассмотрим модель с двумя узлами со скоростями  $v_1 = 1$  и  $v_2 = s \geq 1$ . Заметим, что такой выбор скоростей узлов не нарушает общности. Всегда можно нормализовать значения скоростей путем их деления на значение скорости самого медленного узла. Заметим также, что при этом нужно умножить на это же значение и экстерналии. Так мы сохраним отношение между задержками неизменным.

В работах [83, 94] показано, что в КР-модели без экстерналий всегда существует чистое равновесие по Нэшу. Используя аналогичную идею доказательства покажем, что это же справедливо в случае рассматриваемой в данной работе модели с экстерналиями для случая двух узлов.

**Теорема 8.1.** *В КР-модели с линейными экстерналиями с двумя вычислительными узлами при предположениях 8.1, 8.2 и 8.3 всегда существует чистое равновесие по Нэшу.*

*Доказательство.* Каждому чистому профилю  $L$  соответствует вектор задержек на узлах  $\lambda(L) = (\lambda_1(L), \lambda_2(L))$ . Пусть вектор  $\lambda'(L) = (\lambda'_1(L), \lambda'_2(L))$  состоит из компонент вектора  $\lambda(L)$ , отсортированных в порядке убывания. Пусть  $\lambda^0$  – лексикографический минимум из множества векторов  $\lambda'(L)$  для всех возможных чистых профилей  $L$ , а  $L^0$  – соответствующий ему профиль. Покажем, что  $L^0$  – чистое равновесие по Нэшу.

Пусть это не так. Тогда существует некоторый игрок  $j$ , которому выгодно перевести свою задачу с узла  $l_j$  на узел  $k \neq l_j$ . Это означает, что, во-первых,  $\lambda_{l_j}(L^0) > \lambda_k(L^0)$ , то есть узел  $l_j$  более загружен. Во-вторых, при переходе задачи задержки на обоих узлах становятся меньше чем  $\lambda_{l_j}(L^0)$ , так как  $\lambda_{l_j}(L^0(j \rightarrow k)) = \lambda_{l_j}(L^0) - w_j(\frac{1}{v_{l_j}} - e_{l_j k}) < \lambda_{l_j}(L^0)$ , а  $\lambda_k(L^0(j \rightarrow k)) < \lambda_{l_j}(L^0)$ . То есть  $\lambda^0$  не является лексикографическим минимумом.  $\square$

Обозначим для сокращения записи величины  $\eta = \eta(s) = 1 + s - s(e_{12} + e_{21})$ ,

$$\zeta = \zeta(s) = 1 - se_{12}e_{21}.$$

Приведем следующие оценки, справедливые для игры рассматриваемого типа при предположениях 8.1, 8.2 и 8.3. Они будут использованы в дальнейшем анализе.

**Утверждение 8.1.** *Затраты системы в равновесии не могут быть больше, чем затраты системы в случае, когда все задачи выполняются на одном, самом быстром узле:*

$$SC(L) \leq \frac{W}{s}. \quad (8.2.1)$$

*Доказательство.* Пусть равновесный профиль  $L$  такой, что  $SC(L) > \frac{W}{s}$ . Пусть  $SC(L) = \lambda_2(L) = \frac{W-\Delta}{s} + e_{21}\Delta = \frac{W}{s} - \Delta(\frac{1}{s} - e_{21}) < \frac{W}{s}$ , где  $\Delta$  составляют задачи из общего объема  $W$ , находящиеся на узле 2. Тогда пусть  $SC(L) = \lambda_1(L) = W - \Delta + e_{12}\Delta \leq \frac{\Delta+w_j}{s} + e_{21}(W - \Delta - w_j)$ , где  $\Delta$  составляют задачи из общего объема  $W$ , находящиеся на узле 2, а  $w_j$  – любая из задач на узле 1. Тогда  $\frac{W}{s} < \frac{\Delta+w_j}{s} + e_{21}(W - \Delta - w_j)$ , откуда  $\frac{1}{s} < e_{21}$ , что противоречит предположению 8.1.  $\square$

**Утверждение 8.2.** *Для оптимальных затрат системы справедлива следующая оценка.*

$$OPT \geq \frac{W\zeta}{\eta} \quad (8.2.2)$$

*Доказательство.* Рассмотрим ситуацию, где задачи можно разделять произвольным образом. Тогда они могут быть поделены между двумя вычислительными узлами так, что их задержки станут одинаковыми:  $\lambda' = \frac{W-\Delta}{v_1} + e_{12}\Delta = \frac{\Delta}{v_2} + e_{21}(W - \Delta)$ , где  $\Delta$  – часть от общего объема задач  $W$ , выполняемая узлом 2. Отсюда получим  $\Delta = \frac{W(v_2 - e_{21}s)}{\eta(s)}$  и  $\lambda' = \frac{W\zeta(s)}{\eta(s)}$ . Оптимальные затраты системы  $OPT$  в нашей модели с неделимыми задачами не может быть меньше, чем  $\lambda'$  в описанной ситуации с разделяемыми задачами.  $\square$



### § 8.3 Цена анархии

В работе [82] найдено точное значение цены анархии для системы двух вычислительных узлов без экстерналий:

$$PoA^0(S) = \begin{cases} 1 + \frac{s}{s+2}, & \text{if } 1 \leq s \leq \sqrt{2}, \\ s, & \text{if } \sqrt{2} \leq s \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ 1 + \frac{1}{s}, & \text{if } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq s. \end{cases}$$

Найдем подобную оценку для системы с экстерналиями.

Непосредственно из оценок (8.2.1) и (8.2.2) получается следующая верхняя оценка для цены анархии.

**Лемма 8.1.** *Для системы  $S$  двух вычислительных узлов с линейными экстерналиями цена анархии имеет следующую верхнюю оценку:*

$$PoA(S) \leq \frac{\eta}{s\zeta}. \quad (8.3.1)$$

Найдем другие оценки, уточняющие данную в некоторых областях, в зависимости от значений параметров задачи. Определим понятие активности и области активности для оценок.

Пусть  $A$  – множество некоторых функций  $\alpha_i(\cdot)$ , определим функцию  $\alpha(\cdot)$  как комбинацию операторов  $\min$  и  $\max$ , примененных к подмножествам  $\{\alpha_i(\cdot) \in A\} \subseteq A$ . Мы говорим, что компонента  $\alpha_*(s) \in A$  активна для данного  $s$ , если  $\alpha_*(s) \equiv \alpha(s)$ . Область определения  $s$ , где выполняется данное тождество, назовем областью активности для функции  $\alpha_*(s)$ .

**Лемма 8.2.** *Для системы  $S$  двух вычислительных узлов с линейными экстерналиями при предположениях 8.1, 8.2 и 8.3 цена анархии имеет следующую верхнюю оценку:*

$$PoA(S) \leq \max \left\{ \frac{\eta(\zeta + 1 - se_{21})}{\zeta(\eta + 1 - se_{21})}, \frac{s(1 - e_{12})}{\eta - s + s^2e_{21}}, \frac{s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12})}{\zeta} \right\}. \quad (8.3.2)$$

*Доказательство.* Рассмотрим некоторое равновесие по Нэшу  $L$ . Пусть  $i$  – номер узла с наибольшей задержкой такого, что  $\lambda_i(L) = SC(L)$ . Его скорость

равна  $v_i$ . Номер и скорость другого узла обозначим, соответственно,  $k$  и  $v_k$ . Обозначим  $w' = \min_{j:l_j=i} w_j$  – минимальная по объему задача на узле  $i$ ,  $a = \sum_{j \neq k: l_j=i} w_j$  – объем всех остальных задач на узле  $i$ . Тогда объем задач на узле  $k$  равен  $W - a - w'$ .

$$\lambda_i(L) = \frac{w' + a}{v_i} + e_{ik}(W - a - w') \leq \frac{W - a}{v_k} + e_{ki}a. \quad (8.3.3)$$

Выразим  $a$  из (8.3.3)

$$a \leq \frac{W(v_i - se_{ik}) - w'(v_k - se_{ik})}{\eta}$$

и оценим левую часть (8.3.3), равную  $SC(L)$ , подставив в нее оценку  $a$ .

$$\frac{w' + a}{v_i} + e_{ik}(W - a - w') \leq \frac{w'(1 - e_{ik}v_i)(1 - e_{ki}v_k) + W\zeta}{\eta}. \quad (8.3.4)$$

Рассмотрим два случая: в первом на узле  $i$  находится более одной задачи, во втором – одна задача.

1.  $a > 0$ . Тогда  $w' \leq a \leq \frac{W(v_i - se_{ik}) - w'(v_k - se_{ik})}{\eta}$ , откуда  $w' \leq \frac{W(v_i - se_{ik})}{\eta + v_k - se_{ik}}$  и из (8.3.4)  $SC(L) \leq \frac{W(\zeta + 1 - v_i e_{ik})}{\eta + v_k - se_{ik}}$ . Используем оценку (8.2.2), и тогда  $PoA \leq \frac{\eta(\zeta + 1 - v_i e_{ik})}{\zeta(\eta + v_k - se_{ik})}$ . То есть  $PoA \leq \max\left\{\frac{\eta(\zeta + 1 - e_{12})}{\zeta(\eta + s - se_{12})}, \frac{\eta(\zeta + 1 - se_{21})}{\zeta(\eta + 1 - se_{21})}\right\} = \frac{\eta(\zeta + 1 - se_{21})}{\zeta(\eta + 1 - se_{21})}$  при  $s \geq \frac{2}{e + e_{12} - e_{21}}$  (то есть  $e_{12} \geq e_{21}$ , так как  $s \geq 1$ ) и  $s < \frac{1}{e_{21}}$ .

2.  $a = 0$ . Тогда  $SC(L) = \frac{w'}{v_i} + e_{ik}(W - w') \leq \frac{W}{v_k}$ . Пусть в оптимальном профиле  $w'$  также остается на узле  $i$ . Тогда  $OPT \geq \frac{w' + \Delta}{v_i} + e_{ik}(W - w' - \Delta) \geq \frac{w'}{v_i} + e_{ik}(W - w')$ . Тогда  $\frac{SC(L)}{OPT} = 1$ .

Пусть теперь в оптимальном профиле  $w'$  переходит на узел  $k$ . Тогда  $OPT \geq \frac{w' + \Delta}{v_k} + e_{ki}(W - w' - \Delta) \geq \frac{w'}{v_k} + e_{ki}(W - w')$ .

а) Пусть сначала  $SC(L) = \frac{w'}{v_i} + e_{ik}(W - w') = \frac{W}{v_k}$ . Отсюда выражаем  $w' = \frac{W(\frac{1}{v_k} - e_{ik})}{\frac{1}{v_i} - e_{ik}}$ . Подставляем его в  $OPT$  и получаем  $OPT \geq \frac{w'}{v_k} + e_{ki}(W - w') = W \frac{v_i - s(e_{ik} + e_{ki}) + e_{ki}v_k^2}{v_k^2(1 - v_i e_{ik})}$ , обозначим  $OPT^{eq} = W \frac{v_i - s(e_{ik} + e_{ki}) + e_{ki}v_k^2}{v_k^2(1 - v_i e_{ik})}$ . Тогда  $\frac{SC(L)}{OPT} \leq \frac{W}{v_j OPT^{eq}} =$

То есть

$$PoA \leq \max\left\{\frac{s(1 - e_{12})}{1 - s(e_{12} + e_{21}) + e_{21}s^2}, \frac{1 - se_{21}}{s - s(e_{12} + e_{21}) + e_{12}}\right\} = \max\left\{\frac{s(1 - e_{12})}{\eta - s + e_{21}s^2}, \frac{1 - se_{21}}{\eta - 1 + e_{12}}\right\} = \frac{s(1 - e_{12})}{\eta - s + e_{21}s^2},$$

так как  $\frac{s(1 - e_{12})}{\eta - s + e_{21}s^2} \geq 1$ , а  $\frac{1 - se_{21}}{\eta - 1 + e_{12}} \leq 1$ . Обозначим  $Est^{eq} = \frac{s(1 - e_{12})}{\eta - s + e_{21}s^2}$ . Заметим, что данная оценка не превосходит  $\frac{\eta}{s\zeta}$  при  $s^2(1 - e_{12}^2 - e_{21}) - s(1 - 2e_{12} - e_{21}) - 1 \leq 0$ .

б) Теперь рассмотрим ситуацию, когда  $SC(L) = \frac{w'}{v_i} + e_{ik}(W - w') < \frac{W}{v_k}$ . Заметим, что для любой величины  $\Delta \geq 0$  справедливо  $SC(L) = \frac{w'}{v_i} + e_{ik}(W - w') \leq \frac{w'+\Delta}{v_i} + e_{ik}(W - w' - \Delta)$ , так как  $\frac{1}{v_i} - e_{ik} > 0$ . Согласно (8.2.2)  $OPT \geq \frac{W\zeta}{\eta}$ .

Пусть сначала  $OPT = \frac{W\zeta}{\eta} = \frac{w'+\Delta}{v_k} + e_{ki}(W - w' - \Delta) = \frac{W-w'-\Delta}{v_i} + e_{ik}(w' + \Delta)$ , где  $\Delta \geq 0$  – некоторый объем задач, занимающих в оптимальном профиле узел  $i$  вместе с задачей  $w'$ . Отсюда  $w' + \Delta = \frac{Wv_k(1-v_ie_{ki})}{\eta}$  и  $W - w' - \Delta = \frac{Wv_i(1-e_{ik}v_k)}{\eta}$ . Тогда  $SC(L) \leq \frac{W}{\eta v_i}(v_k - se_{ki} + v_i^2 e_{ik}(1 - v_k e_{ik}))$ . Обозначим  $Est^i = \frac{W}{\eta v_i}(v_k - se_{ki} + v_i^2 e_{ik}(1 - v_k e_{ik}))$  и заметим, что  $Est^i \leq \frac{W}{\eta}(s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12}))$ , так как данное неравенство эквивалентно  $s^2(1 - e_{12})^2 \geq (1 - se_{12})^2$ , которое выполняется при  $1 + e_{12} \leq \frac{1}{s} + e_{21}$ .

Обозначим  $Est^s = \frac{W}{\eta}(s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12})) \geq \frac{W}{s\eta}(1 - se_{12} + s^2 e_{21}(1 - e_{21})) = Est^1$ .

В этом случае отношение  $\frac{SC(L)}{OPT} \leq \frac{s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12})}{\zeta}$ . Заметим, что данная оценка не превосходит  $\frac{\eta}{s\zeta}$  так же, как и предыдущая  $Est^{eq}$ , при  $s^2(1 - e_{12}^2 - e_{21}) - s(1 - 2e_{12} - e_{21}) - 1 \leq 0$ . Кроме того, данная оценка не менее  $Est^{eq}$  при  $(se_{21} - e_{12})(s^2(1 - e_{12}^2 - e_{21}) - s(1 - 2e_{12} - e_{21}) - 1) \geq 0$ . Отсюда необходимые условия для активности данной оценки:  $se_{21} - e_{12} \leq 0$  и  $s^2(1 - e_{12}^2 - e_{21}) - s(1 - 2e_{12} - e_{21}) - 1 \leq 0$ . Если же  $se_{21} - e_{12} \geq 0$  и  $s^2(1 - e_{12}^2 - e_{21}) - s(1 - 2e_{12} - e_{21}) - 1 \leq 0$ , то активной становится оценка  $Est^{eq}$ .

Пусть теперь  $\frac{W\zeta}{\eta} < OPT = \max\{\frac{w'+\Delta}{v_k} + e_{ki}(W - w' - \Delta), \frac{W-w'-\Delta}{v_i} + e_{ik}(w' + \Delta)\}$ .

Сначала рассмотрим случай, когда  $k = 1$ , а  $i = 2$ . Тогда  $\frac{W\zeta}{\eta} < OPT = \max\{w' + \Delta + e_{12}(W - w' - \Delta), \frac{W-w'-\Delta}{s} + e_{21}(w' + \Delta)\}$ . Тогда  $w' + \Delta = \frac{W(1-se_{12})}{\eta} + \gamma$ ,  $W - w' - \Delta = \frac{Ws(1-e_{21})}{\eta} - \gamma$  и  $SC(L) \leq Est^1 + \gamma(\frac{1}{s} - e_{21})$ . Если  $\gamma < 0$ , то  $Est^1 + (\frac{1}{s} - e_{21}) < Est^1 \leq Est^s$ , а  $OPT = \frac{W\zeta}{\eta} - \gamma(\frac{1}{s} - e_{21}) > \frac{W\zeta}{\eta}$ . В этом случае  $\frac{SC(L)}{OPT} \leq Est^s \frac{\eta}{W\zeta}$ . Если  $\gamma > 0$ , то  $OPT = \frac{W\zeta}{\eta} - \gamma(1 - e_{12})$ . Тогда отношение  $\frac{SC(L)}{OPT} \leq \frac{Est^1 + \gamma(\frac{1}{s} - e_{21})}{\frac{W\zeta}{\eta} + \gamma(1 - e_{12})} \leq Est^s \frac{\eta}{W\zeta}$ , так как  $Est^1 \leq Est^s$  и  $(\frac{1}{s} - e_{21})\zeta \leq (s - se_{21} + e_{12} - se_{12}^2)(1 - e_{12})$ , что эквивалентно  $\eta(1 - s + se_{12}(e_{21} - e_{12})) \leq 0$  и выполнено при  $e_{21} \leq e_{12}$  (предположение 8.3).

Теперь пусть  $k = 2$ ,  $i = 1$ . Тогда  $\frac{W\zeta}{\eta} < OPT = \max\{\frac{w'+\Delta}{s} + e_{21}(W - w' - \Delta), W - w' - \Delta + e_{12}(w' + \Delta)\}$ . Тогда  $w' + \Delta = \frac{Ws(1-e_{21})}{\eta} + \gamma$ ,  $W - w' - \Delta = \frac{W(1-se_{12})}{\eta} - \gamma$  и  $SC(L) \leq Est^s + \gamma(1 - e_{12})$ . Если  $\gamma < 0$ , то  $Est^s + \gamma(1 - e_{12}) < Est^s$ ,

а  $OPT = \frac{W\zeta}{\eta} - \gamma(1 - e_{12}) > \frac{W\zeta}{\eta}$ . В этом случае  $\frac{SC(L)}{OPT} \leq Est^s \frac{\eta}{W\zeta}$ . Если  $\gamma > 0$ , то  $OPT = \frac{W\zeta}{\eta} - \gamma(\frac{1}{s} - e_{21})$ . Тогда отношение  $\frac{SC(L)}{OPT} \leq \frac{Est^s + \gamma(1 - e_{12})}{\frac{W\zeta}{\eta} + \gamma(\frac{1}{s} - e_{21})} \leq Est^s \frac{\eta}{W\zeta}$ , при условии  $\eta(se_{21} - e_{12}) \leq 0$ , когда данная оценка не меньше  $Est^{eq}$ .

Если же  $se_{21} - e_{12} > 0$ , то становится активной оценка  $Est^{eq}$ . Проверим ее справедливость в этом случае. Напомним, что  $SC(L) = w' + e_{12}(W - w') < \frac{W}{s}$ , то есть  $w' = \frac{W(\frac{1}{s} - e_{12})}{1 - e_{12}} - \gamma$ , где  $\gamma > 0$ . Тогда  $SC(L) = \frac{W}{s} - \gamma(1 - e_{12})$ , а  $OPT \geq OPT^{eq} - \gamma(\frac{1}{v_k} - e_{ki}) = W \frac{\eta - s + e_{21}s^2}{s^2(1 - e_{12})} - \gamma(\frac{1}{s} - e_{21})$ . Тогда отношение  $\frac{SC(L)}{OPT} \leq \frac{\frac{W}{s} - \gamma(1 - e_{12})}{W \frac{\eta - s + e_{21}s^2}{s^2(1 - e_{12})} - \gamma(\frac{1}{s} - e_{21})} \leq \frac{\frac{W}{s}}{W \frac{\eta - s + e_{21}s^2}{s^2(1 - e_{12})}} = Est^{eq}$ , так как  $\frac{\eta - s + e_{21}s^2}{s} \geq \frac{1}{s} - e_{21}$  при  $se_{21} > e_{12}$ .  $\square$

На основе оценок (8.3.1) и (8.3.2) из лемм 8.1 и 8.2 получаем следующую обобщенную оценку сверху для цены анархии.

**Теорема 8.2.** *Для системы  $S$  двух вычислительных узлов с линейными экстерналиями цена анархии  $PoA(S) \leq Est(S)$ , где*

$$Est(S) = \min\{Est^{max}(S), \frac{\eta}{s\zeta}\}, \quad (8.3.5)$$

$$Est^{max}(S) = \max\left\{\frac{\eta(\zeta + 1 - se_{21})}{\zeta(\eta + 1 - se_{21})}, \frac{s(1 - e_{12})}{\eta - s + s^2e_{21}}, \frac{s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12})}{\zeta}\right\}.$$

Покажем, что для системы  $S$  двух вычислительных узлов с экстерналиями величина  $Est(S)$ , определенная формулой (8.3.5), является также нижней оценкой цены анархии, то есть  $PoA(S) \geq Est(S)$ .

**Теорема 8.3.** *Для системы  $S$  двух вычислительных узлов с линейными экстерналиями при предположениях 8.1, 8.2 и 8.3 цена анархии  $PoA(S) \geq Est(S)$ , где величина  $Est(S)$  определяется формулой (8.3.5).*

*Доказательство.* Цена анархии определяется для каждой системы  $S$ , как максимум отношения затрат системы в наихудшем чистом равновесии по Нэшу к оптимальным затратам. При этом максимум берется по всем возможным множествам игроков  $U$  с задачами, поступающими в систему. Если существует некоторое множество игроков  $U^*$ , для которого отношение затрат системы в наихудшем чистом равновесии к оптимальным равно некоторой заданной величине ( $S$ ), то максимум по всем возможным наборам  $U$  также будет не менее,

чем  $C(S)$ . Это означает, что для доказательства нижней оценки цены анархии достаточно привести примеры игр с системой  $S$ , в которых значение цены анархии совпадает со значением  $Est(S)$ .

1. Пример для  $PoA(S) \geq \frac{\eta(\zeta+1-se_{21})}{\zeta(\eta+1-se_{21})}$ .

В системе четыре игрока с задачами  $w = (\eta s(1 - e_{21}), \eta s(1 - e_{21}), s(1 - e_{21})(1 - se_{21}), (1 - se_{12})(\eta + 1 - se_{21}) - s\eta(1 - e_{21}))$ . Значение  $w_4 \geq 0$  при активной рассматриваемой в данном пункте оценке цены анархии, в частности, когда  $\frac{\eta(\zeta+1-se_{21})}{\zeta(\eta+1-se_{21})} \geq \frac{s-se_{21}+e_{12}(1-se_{12})}{\zeta}$ , так как оба неравенства выполняются, когда  $s^2(e_1^2 + e_{12}e_{21} - 1 - e_{21}^2 + 2e_{21}) - s(3e_{12} + e_{21}) + 2 \geq 0$ .

В равновесии  $L$  на втором узле с скоростью  $s$  находятся задачи  $w_1$  и  $w_2$ , а  $w_3$  и  $w_4$  – на первом узле со скоростью 1. Задержки  $\lambda_2(L) = \eta(\zeta + 1 - se_{21}) \geq \lambda_1(L) = \eta(2\zeta - s + se_{12})$ . При переводе  $w_1$  на узел 1 задержка на нем становится равной  $\lambda_2(L)$ . В оптимальном профиле на первом узле находится  $w_2$  и  $w_4$ , а на второй  $w_1$  и  $w_3$ . Задержки на обоих узлах равны  $\zeta(\eta + 1 - se_{21})$ .

2. Пример для  $PoA(S) \geq \frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+s^2e_{21}}$ .

В системе два игрока с задачами  $w = (s(1 - se_{12}), s(s - 1))$ . В равновесном профиле  $L$  задача  $w_1$  находится на первом узле со скоростью 1, а  $w_2$  на узле со скоростью  $s$ . Задержки  $\lambda_1(L) = s(1 - e_{12}) \geq \lambda_2(L) = s - 1 + se_{21}(1 - se_{12})$ . При переводе  $w_1$  на узел 2 задержка на нем становится равна  $\lambda_1(L)$ . В оптимальном профиле  $w_1$  и  $w_2$  меняются местами. На первом узле располагается  $w_2$ , на втором  $w_1$ . Покажем, что задержки  $\lambda_1(OPT) = s(s - 1) + se_{12}(1 - se_{12}) = s(1 - e_{12})(s - 1 + se_{12}) \leq \lambda_2(OPT) = \eta - s + s^2e_{21}$ , когда  $\frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+s^2e_{21}} \leq \frac{\eta}{s\zeta}$ , то есть активное рассматриваемое в данном пункте выражение оценки цены анархии. Первое неравенство преобразуется к виду  $s^2(e_{12}^2 + e_{21} - 1) + s(1 - 2e_{12} - e_{21}) + 1 \geq 0$ , а второе к виду  $(se_{21} - 1)(s^2(e_{12}^2 + e_{21} - 1) + s(1 - 2e_{12} - e_{21}) + 1) \leq 0$ . Оба неравенства выполняются одновременно, так как  $se_{21} - 1 < 0$  при  $e_{21} < \frac{1}{s}$ .

3. Пример для  $PoA(S) \geq \frac{s-se_{21}+e_{12}(1-se_{12})}{\zeta}$ .

В системе два игрока с задачами  $w = (s(1 - e_{21}), 1 - se_{12})$ . В равновесии  $L$  задача  $w_1$  находится на узле 1, а  $w_2$  на узле 2. Задержки  $\lambda_1(L) = s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12}) \geq \lambda_2(L) = \frac{1}{s} - e_{12} + se_{21}(1 - e_{21})$ , что эквивалентно неравенству  $s^2(1 - e_{21})^2 \geq (1 - se_{12})^2$ , которое выполняется при предположении 8.3. При

переводе  $w_1$  на узел 2 задержка на нем становится равна  $\frac{\eta}{s} \geq \lambda_1(L)$  при  $s^2(1 - e_{12}^2 - e_{21}) - s(1 - 2e_{12} - e_{21}) - 1 \leq 0$ , когда активна данная оценка.

В оптимальном профиле  $w_1$  и  $w_2$  меняются местами. На первом узле располагается  $w_2$ , на втором  $w_1$ . При этом на обоих узлах задержка равна  $\zeta$ .

4. Пример для  $PoA(S) \geq \frac{\eta}{s\zeta}$ .

В системе три игрока с задачами  $w = (\eta(1 - se_{12}), s(1 - se_{12})(1 - e_{12}), s^2(1 - e_{12})(1 - e_{21}) - \eta(1 - se_{12}))$ . Преобразуем  $w_3 = -(s^2(e_{12}^2 + e_{21} - 1) + s(1 - 2e_{12} - e_{21}) + 1)$ . Из доказательства в пункте 3. следует, что величина  $w_3$  неотрицательна при активной рассматриваемой в данном пункте оценке, в частности, когда  $\frac{s(1 - e_{12})}{\eta - s + s^2 e_{21}} \geq \frac{\eta}{s\zeta}$ . В равновесии  $L$  задача  $w_1$  находится на первом узле со скоростью 1, а  $w_2$  и  $w_3$  на втором со скоростью  $s$ . Задержки равны  $\lambda_1(L) = \eta(1 - e_{12}) \geq \lambda_2(L) = \frac{\eta}{s}(s - 1 + se_{21}(1 - se_{12}))$ . При переводе  $w_1$  на второй узел задержка на нем становится равна  $\lambda_1(L)$ . В оптимальном профиле  $w_2$  находится на узле со скоростью 1, а  $w_1$  и  $w_3$  на узле со скоростью  $s$ . Задержки на обоих узлах равны  $s\zeta(1 - e_{12})$ .

□

Из теорем 8.2 и 8.3 следует, что значение  $Est(s)$  определенное в формуле (8.3.5), является точным значением цены анархии в рассматриваемой модели.

**Теорема 8.4.** *Для системы  $S$  двух вычислительных узлов с линейными экстерналиями при предположениях 8.1, 8.2 и 8.3 цена анархии  $PoA(S) = Est(S)$ , где*

$$Est(S) = \min\{Est^{max}(S), \frac{\eta}{s\zeta}\},$$

$$Est^{max}(S) = \max\left\{\frac{\eta(\zeta + 1 - se_{21})}{\zeta(\eta + 1 - se_{21})}, \frac{s(1 - e_{12})}{\eta - s + s^2 e_{21}}, \frac{s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12})}{\zeta}\right\},$$

$$\eta = 1 + s - s(e_{12} + e_{21}), \zeta = 1 - se_{12}e_{21}.$$

Заметим, что при нулевых значениях экстерналий данное значение совпадает со значением  $PoA^0(S)$  цены анархии для системы без экстерналий.

## § 8.4 Численные примеры

Приведем численные примеры, позволяющие визуально продемонстрировать полученное значение цены анархии для рассматриваемой системы двух вычислительных узлов с экстерналиями. На графиках Рис. 8.1 и Рис. 8.2 пунктирными линиями показаны значения  $a$  – оценка  $\frac{\eta(\zeta+1-se_{21})}{\zeta(\eta+1-se_{21})}$ ,  $b$  – оценка  $\frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+s^2e_{21}}$ ,  $c$  – оценка  $\frac{s-se_{21}+e_{12}(1-se_{12})}{\zeta}$ ,  $d$  – оценка  $\frac{\eta}{s\zeta}$ . Сплошной толстой линией показано  $PoA(S)$  – значение цены анархии для рассматриваемой модели. Для сравнения дано  $PoA^0(S)$  – значение цены анархии для системы без экстерналий.

На Рис. 8.1 видно, что при  $se_{21} \geq e_{12}$  значение оценки  $b$  превышает  $c$ , а на Рис. 8.2 при  $se_{21} \leq e_{12}$  активной является оценка  $c$ .

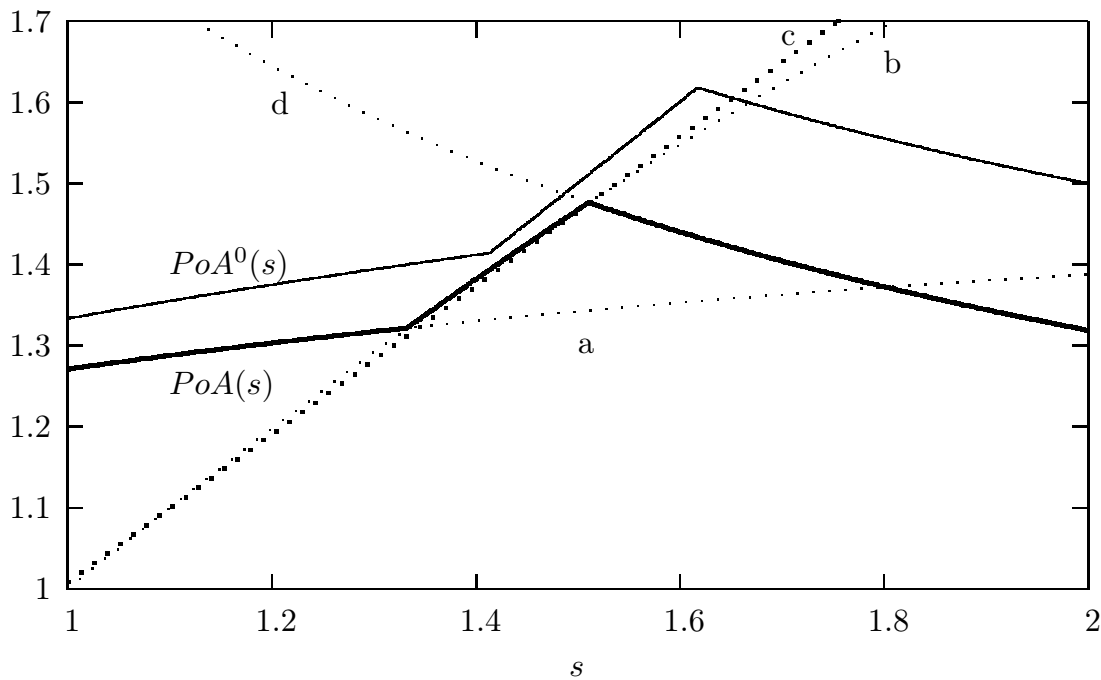


Рис. 8.1: Зависимость значения цены анархии от  $s$  для  $e_{12} = 0.11$ ,  $e_{21} = 0.1$ .

На обоих рисунках из-за введения экстерналий произошел сдвиг влево пикового значения цены анархии, на втором рисунке это вызвало пересечение графиков, однако в большинстве случаев график для системы с экстерналиями находится ниже графика для системы без экстерналий. Цена анархии принимает большие значения, когда в оптимуме затраты системы минимальны и задержки узлов принимают близкие значения, а в худшем равновесии один из узлов загружен значительно больше другого. Введение экстерналий снижает эту раз-

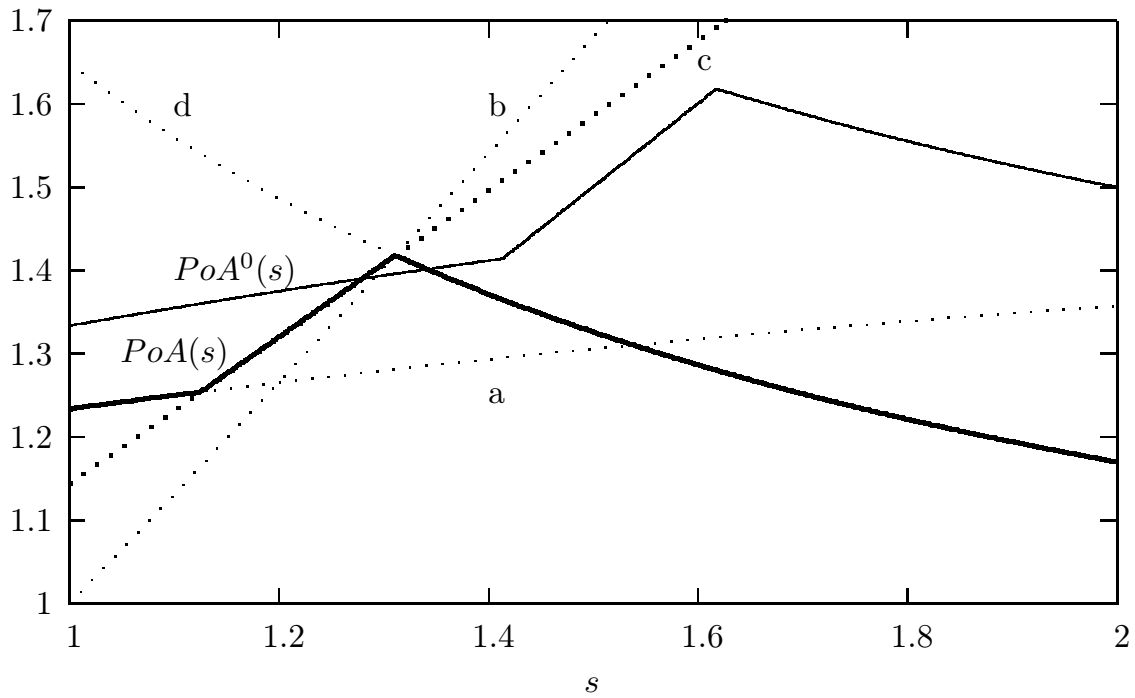


Рис. 8.2: Зависимость значения цены анархии от  $s$  для  $e_{12} = 0.3$ ,  $e_{21} = 0.1$ .

ницу по двум причинам. Во-первых, по сравнению с моделью без экстерналий, увеличивается значение оптимальных затрат системы (на долю загрузки менее загруженного узла пропорционально экстерналии). Во-вторых, уход задачи с более загруженного узла точно так же в меньшей степени, чем в случае без экстерналий, снижает задержки как для самой задачи, так и для узла, который она покидает. Это оказывает влияние на структуру наихудшего равновесия.

## § 8.5 Результаты

В главе рассмотрена игра баланса загрузки системы обслуживания на основе КР-модели с линейными экстерналиями. Определены предположения, обеспечивающие адекватное поведение системы. Показано, что в общем случае даже при сделанных предположениях чистое равновесие по Нэшу может не существовать. Для случая двух вычислительных узлов в данной модели доказано существование чистого равновесия по Нэшу и получено аналитическое выражение цены анархии. Приведены численные эксперименты, позволяющие визуально оценить зависимость цены анархии от параметров системы, а также сравнить данное значение с ценой анархии для модели без экстерналий.



## Глава 9

# Игра покрытия

Задача покрытия (cover) вычислительных узлов [20, 81, 181], как еще один вариант задачи составления расписания, рассматривается в виде игры, которая аналогична КР-модели с параллельными каналами различной пропускной способности, с тем отличием, что оптимизацией для системы считается максимизация минимальной задержки среди всех узлов, а не минимизация максимальной задержки, как в главе 7. Здесь также множество задач различных объемов должно быть распределено между вычислительными узлами с различными скоростями обслуживания, на которых задачи будут выполняться. Объемом задачи считается время ее обслуживания на свободном узле со скоростью 1. Загрузкой узла является суммарный объем выполняющихся на нем задач. Отношение загрузки к скорости узла определяет ее задержку, то есть время завершения работы данного узла. Игроки также действуют эгоистично и достигают равновесия по Нэшу. Здесь также рассматриваются только чистые равновесия, которые всегда существуют для задач такого типа. Выигрышем системы (или социальным выигрышем) для полученного распределения задач на узлах является минимальная задержка среди всех узлов. Цена анархии здесь – максимум отношения оптимального выигрыша системы к выигрышу системы в наихудшем равновесии по Нэшу.

Постановка задачи, где система стремится максимизировать минимальную задержку среди всех узлов, возникла из концепции справедливого разделения и эффективного использования ресурсов в сетях. В работе [81] впервые исследующих эффективность равновесия в данной модели, приводятся примеры мотивации выбора такого критерия оптимальности работы системы. Основная идея со-

стоит в том, что все компоненты системы должны быть по-возможности максимально нагружены и как можно меньше простаивать. Например, если каждый игрок платит системе за выполнение своей задачи сумму, равную его задержке, то, во-первых, не должно быть “привилегированных” игроков, платящих значительно меньше остальных благодаря удачному выбору узла, во-вторых, не должно быть узлов, приносящих мало или не приносящих прибыли.

## § 9.1 Модель игры

Рассмотрим систему  $S = S(N, v)$ , состоящую из  $N$  вычислительных узлов со скоростями обслуживания  $v_1 = 1 \leq \dots \leq v_N = s$ . Заметим, что такой выбор скоростей узлов в системе не нарушает общность, так как всегда можно пронормировать скорости, разделив их на скорость самого медленного узла. Система используется множеством игроков  $U = U(n, w)$ , где каждый из  $n$  игроков выбирает узел для обслуживания своей задачи. Объем задачи игрока  $j$  равен  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Суммарный объем всех задач обозначим как  $W = \sum_{j=1}^n w_j$ . Время выполнения задачи объемом  $w$  на свободном узле  $i$  со скоростью  $v_i$  равно  $w/v_i$ .

Рассмотрим следующую игру  $\Gamma = \langle S(N, v), U(n, w), \lambda \rangle$  в чистых стратегиях. Полагаем, что каждый игрок может выбирать любой из узлов. Стратегией игрока  $j$  является номер узла  $l_j$ , который он выбирает для выполнения своей задачи. Тогда профиль стратегий в игре  $\Gamma$  – это вектор  $L = (l_1, \dots, l_n)$ . Загрузку узла  $i$ , то есть суммарный объем задач на нем, обозначим как  $\delta_i(L) = \sum_{j=1, \dots, n: l_j=i} w_j$ .

Задержка на узле  $i$  обозначается как

$$\lambda_i(L) = \sum_{j=1, \dots, n: l_j=i} w_j / v_i = \frac{\delta_i(L)}{v_i},$$

заметим, что она одинакова для всех игроков, выбравших данный узел.

Предполагаем, что целью системы является минимизация простоя наименее занятого узла, то есть максимизация времени его работы или задержки на нем. Выигрыш системы определяется как минимальная среди всех узлов задержка

$$SC(L) = \min_{i=1, \dots, N} \lambda_i(L).$$

Обозначим

$$OPT = OPT(S, U) = \max_{L \text{ профиль в } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)$$

оптимальный выигрыш, или выигрыш системы в оптимальном случае, где максимум находится среди всех возможных профилей стратегий в игре  $\Gamma(S, U, \lambda)$ .

Профиль стратегий  $L$ , где ни одному игроку не выгодно единолично менять выбранный в  $L$  узел на другой для выполнения своей задачи, называется чистым равновесием по Нэшу. Для того, чтобы дать формальное определение, обозначим  $L(j \rightarrow i) = (l_1, \dots, l_{j-1}, i, l_{j+1}, \dots, l_n)$  профиль, получаемый из профиля  $L$ , если игрок  $j$  меняет выбранный им в  $L$  узел  $l_j$  на некоторый узел  $i$ , а все остальные игроки сохраняют свои стратегии неизменными.

**Определение 9.1.** Профиль стратегий  $L$  называется чистым равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда каждый игрок выбрал узел с минимальной задержкой, то есть для каждого игрока  $j = 1, \dots, n$  выполняется  $\lambda_j(L) \leq \lambda_j(L(j \rightarrow i))$  для всех узлов  $i = 1, \dots, N$ .

**Определение 9.2.** Ценой анархии для системы  $S$  называется максимум отношения оптимального выигрыша к выигрышу системы в наихудшем равновесии:

$$PoA(S) = \max_U \frac{OPT(S, U)}{\min_{L - \text{равновесие по Нэшу в } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)}.$$

## § 9.2 Цена анархии в общем случае $N$ узлов

Приведем в данном разделе предположения и результаты, которые будут использованы в дальнейшем анализе.

Пусть имеется  $N \geq 2$  узлов со скоростями  $v_1 = 1 \leq \dots \leq v_N = s$ . Если количество задач  $n$  меньше числа узлов  $N$ , то очевидно, что для любого профиля выигрыш системы будет нулевым. Для этого случая значение отношения оптимального выигрыша к равновесному по определению считаем равным 1. Далее полагаем, что  $n \geq N$ .

Если  $s \geq 2$ , то цена анархии не ограничена [81]. Это легко показать, рассмотрев пример, где  $N$  задач имеют одинаковый объем, равный  $s$ . Очевидно,

что оптимальным является профиль, в котором каждая задача выполняется на отдельном узле и выигрыш системы равен в этом случае 1. При этом наилучшим является равновесие с двумя задачами на самом быстром узле, задержка на котором  $\frac{2s}{s} = 2 \leq s$ , а в системе остается незанятый узел. В этом случае выигрыш системы равен 0, а цена анархии не ограничена. Далее везде будем полагать, что  $s < 2$ . Если количество задач  $n$  более или равно числу узлов  $N$ , то в оптимальном случае, очевидно, все узлы будут заняты. Более того, в любом равновесии в этом случае все узлы также будут заняты.

Очевидна следующая оценка для оптимального выигрыша системы:

$$OPT \leq \frac{W}{\sum_{i=1}^N v_i}, \quad (9.2.1)$$

так как минимальная задержка на узле не может быть больше, чем в случае, когда все задержки на узлах одинаковы.

Следующие леммы определяют оценки для равновесных задержек и объемов некоторых задач на узлах. Для полноты изложения леммы, заимствованные из внешних источников, также приведем с доказательствами.

**Лемма 9.1.** (Тан и др. [181]) *Если общее число задач  $n$  не менее, чем число узлов  $N$ , то для любого равновесного профиля загрузки всех узлов больше нуля.*

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный равновесный профиль  $L$ . Пусть на некотором узле  $i$  загрузка равна 0. Тогда найдется узел  $k$ , на котором находится не менее двух задач. Так как  $v_1 = 1 \leq \dots \leq v_N = s < 2$ , выполняется  $v_i > \frac{v_k}{2}$ . Пусть  $w_k$  – объем минимальной задачи на  $k$ . Если она перейдет на свободный узел  $i$ , то ее задержка станет равна  $\frac{w_k}{v_i} < \frac{2w_k}{v_k} \leq \lambda_k(L)$ , то есть уменьшится по сравнению с задержкой в профиле  $L$ .  $\square$

Для профиля  $L$  обозначим  $n_k$  число задач на узле  $k$ .

**Лемма 9.2.** (Тан и др. [181]) *Если  $L$  – равновесный профиль и  $SC(L) = \lambda_i(L)$ , то для любого узла  $k$  из  $n_k > \frac{v_k}{v_i}$  следует  $\lambda_k(L) \leq \frac{n_k v_i}{n_k v_i - v_k} \lambda_i(L)$ ;*

*Доказательство.* Пусть  $w$  – наименьшая по объему задача на узле  $k$ . Тогда  $w \leq \frac{v_k}{n_k} \lambda_k(L)$ .  $L$  – равновесие, тогда  $\lambda_k(L) \leq \lambda_i(L) + \frac{w}{v_i} \leq \lambda_i(L) + \frac{v_k}{n_k v_i}$ , откуда  $\lambda_k(L) \leq \frac{n_k v_i}{n_k v_i - v_k} \lambda_i(L)$ .  $\square$

**Лемма 9.3.** Если  $L$  – равновесный профиль и  $SC(L) = \lambda_i(L)$ , то для любого узла  $k$  из  $n_k \geq 2$  и  $1 \leq \frac{v_k}{v_i} < 2$  следует, что объем любой задачи  $w_j$  на узле  $k$  не более  $\frac{v_i v_k}{2v_i - v_k} \lambda_i(L)$ . Более того, суммарный объем остальных задач на  $k$  также не превосходит  $\frac{v_i v_k}{2v_i - v_k} \lambda_i(L)$ .

*Доказательство.* Пусть на узле  $k$  не менее двух задач. Пусть  $w$  – объем наименьшей на  $k$  задачи. Тогда объем остальных задач на  $k$  равен  $v_k \lambda_k(L) - w$ . Так как  $L$  – равновесие, то  $\lambda_k(L) = \frac{v_k \lambda_k(L)}{v_k} \leq \lambda_i(L) + \frac{w}{v_i}$ , откуда  $v_k \lambda_k(L) - w \leq v_k \lambda_i(L) + \left(\frac{v_k}{v_i} - 1\right) w \leq v_k \lambda_i(L) + \left(\frac{v_k}{v_i} - 1\right) w_{j:l_j=k} \leq v_k \lambda_i(L) + \left(\frac{v_k}{v_i} - 1\right) (v_k \lambda_k(L) - w)$ . Тогда  $w \leq w_{j:l_j=k} \leq v_k \lambda_k(L) - w \leq \frac{v_i v_k}{2v_i - v_k} \lambda_i(L)$ .  $\square$

Следующая теорема определяет нижнюю границу для цены анархии для системы с  $N \geq 3$  узлов. Данная граница определяется скоростями трех узлов в системе: первого и второго, которые являются самыми медленными, и последнего, самого быстрого.

**Теорема 9.1.** Для системы  $N \geq 3$  узлов со скоростями  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 \leq \dots \leq v_N = s < 2$  цена анархии не менее, чем

$$est(r, s) = \min\left\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\right\}. \quad (9.2.2)$$

*Доказательство.* Для доказательства верхней оценки цены анархии достаточно привести примеры систем, дающих указанные в условии теоремы значения отношения оптимального выигрыша к наихудшему равновесному. Пусть в системе каждый узел  $i$  имеет скорость  $v_i$  для всех  $i = 1, \dots, N$ .

1. Пусть сначала  $rs \leq 2$ . Тогда  $est(r, s) = \frac{2+s}{(1+r)(2-s)}$ . Рассмотрим набор задач:  $w_1 = w_2 = (1+r)s$ ,  $w_3^i = v_i(2+s)$ , где  $i = 3 \dots, N$ ,  $w_4 = 2r - s$ ,  $w_5 = 2 - rs$ . В равновесии  $L$  задачи  $w_1$  и  $w_2$  находятся на узле  $N$ , каждая задача  $w_3^i$ ,  $i = 3 \dots, N$ , на узле  $i - 1$ , задачи  $w_4$  и  $w_5$  на узле 1. Покажем, что это равновесие, и найдем выигрыш системы.

Загрузка на узле  $N$  равна  $2s(1+r)$ , на узле 1 она равна  $(1+r)(2-s)$ . На каждом из узлов  $i = 2, \dots, N - 1$  загрузка равна  $v_{i+1}(2+s)$ . Так как  $\lambda_N(L) = 2(1+r) > (1+r)(2-s) = \lambda_1(L)$  и  $\lambda_i(L) = \frac{v_{i+1}(2+s)}{v_i} \geq (1+r)(2-s) = \lambda_1(L)$ ,  $i = 2, \dots, N - 1$ , благодаря тому, что  $2+s > 1+r$ ,  $v_{i+1} \geq v_i$  и  $2-s \leq 1$ , на узле 1 задержка наименьшая и равна загрузке.

Обозначим  $\lambda_i^j(L) = \lambda_i(L) + \frac{w_j}{v_i}$  задержку на узле  $i$  в случае, если задача  $j$  отклонится от профиля  $L$  и перейдет на узел  $i$  с другого узла. Задача  $w_1$  или  $w_2$  не перейдет на узел  $i$ ,  $i = 2, \dots, N-1$ , так как  $\lambda_N(L) = 2(1+r) \leq 2+s+1+r \leq \frac{v_{i+1}(2+s)+s(1+r)}{v_i} = \lambda_i^1(L) = \lambda_i^2(L)$ . Также она не перейдет на узел 1, так как  $\lambda_N(L) = 2(1+r) = (1+r)(2-s)+s(1+r) = \lambda_1^1(L) = \lambda_1^2(L)$ . Каждая из задач  $w_3^i$ ,  $i = 3, \dots, N$ , не перейдет на узел  $N$ , так как  $\lambda_{i-1}(L) = \frac{v_i(2+s)}{v_{i-1}} \leq 2(1+r) + \frac{v_i(2+s)}{s} = \lambda_N^{i3}(L)$ , что равносильно неравенству  $(s-v_{i-1})v_i(2+s) \leq 2sv_{i-1}(1+r)$ , которое справедливо благодаря  $s-v_{i-1} < 1$ ,  $2+s < 4$  и  $2\frac{s}{v_i}v_{i-1}(1+r) \geq 4$ . Также никакая из задач  $w_3^i$ ,  $i = 3, \dots, N$ , не перейдет на узел  $j > i-1$ , так как  $\lambda_{i-1}(L) = \frac{v_i(2+s)}{v_{i-1}} < \frac{2v_i(2+s)}{v_j} \leq \frac{(v_i+v_j)(2+s)}{v_j} = \lambda_j^{i3}(L)$ . Кроме того,  $w_3^i$  не перейдет на более медленный узел 1 или  $j < i-1$  и ни одна задача с узла 1 не перейдет на другой узел, так как на узле 1 задержка минимальна. Поэтому данный профиль является равновесием с выигрышем  $(1+r)(2-s)$ .

Рассмотрим профиль, в котором каждая задача  $w_3^i$ ,  $i = 3, \dots, N$ , находится на узле  $i$ , задачи  $w_1$  и  $w_4$  – на узле 2 и задачи  $w_2$  и  $w_5$  – на узле 1. Для этого профиля выигрыш системы равен  $2+s$ , значит,  $OPT \geq 2+s$ .

2. Пусть теперь  $rs > 2$ . Тогда  $est(r, s) = \frac{2}{r(2-s)}$ . Рассмотрим набор задач:  $w_1 = w_2 = rs$ ,  $w_3^i = 2v_i$ ,  $i = 3, \dots, N$ ,  $w_4 = r(2-s)$ . В равновесии  $w_1$  и  $w_2$  находятся на узле  $N$ , каждая задача  $w_3^i$ ,  $i = 3, \dots, N$ , – на узле  $i-1$ , задача  $w_4$  – на узле 1. Покажем, что это равновесие, и найдем выигрыш системы.

Так как  $\lambda_N(L) = 2r > r(2-s) = \lambda_1(L)$  и  $\lambda_i(L) = \frac{2v_{i+1}}{v_i} \geq r(2-s) = \lambda_1(L)$ ,  $i = 2, \dots, N-1$ , благодаря  $\frac{2}{v_i} \geq 1$ ,  $v_{i+1} \geq r$  и  $2-s < 1$ , то на узле 1 задержка наименьшая и равна  $r(2-s)$ . Задача  $w_1$  или  $w_2$  не перейдет на узел  $i$ ,  $i = 2, \dots, N-1$ , так как  $\lambda_N(L) = 2r = r+r \leq \frac{2v_{i+1}+rs}{v_i} = \lambda_i^1(L) = \lambda_i^2(L)$ , а также на узел 1, так как  $\lambda_N(L) = 2r = r(2-s) + rs = \lambda_1^1(L) = \lambda_1^2(L)$ . Задача  $w_3^i$ ,  $i = 3, \dots, N$ , не перейдет на узел  $N$ , так как  $\lambda_{i-1}(L) = \frac{2v_i}{v_{i-1}} \leq 2r + \frac{2v_i}{s} = \lambda_N^{i3}(L)$  благодаря  $\frac{2v_i(s-v_{i-1})}{s} \leq 2rv_i$ . Также никакая из задач  $w_3^i$ ,  $i = 3, \dots, N$ , не перейдет на узел  $j > i-1$ , так как  $\lambda_{i-1}(L) = \frac{2v_i}{v_{i-1}} \leq \frac{4v_i}{v_j} \leq \frac{2(v_i+v_j)}{v_j} = \lambda_j^{i3}(L)$ . Кроме того,  $w_3^i$  не перейдет на более медленный узел 1 или  $j < i-1$ . Ни одна задача с узла 1 не перейдет на другие узлы с не меньшей задержкой. Поэтому данный профиль является равновесием с выигрышем  $r(2-s)$ .

Рассмотрим профиль, в котором каждая задача  $w_3^i$ ,  $i = 3, \dots, N$ , находится на узле  $i$ , задачи  $w_1$  и  $w_4$  – на узле 2 и задача  $w_2$  – на узле 1. Для этого профиля выигрыш системы равен 2, значит,  $OPT \geq 2$ .

В обоих рассмотренных случаях отношение оптимального выигрыша к равновесному равно  $est(r, s)$ , следовательно, цена анархии не меньше данного значения.  $\square$

Из полученной оценки (9.2.2) видно, что при увеличении скорости самого быстрого узла и приближении ее к значению 2 нижняя граница цены анархии неограниченно растет. Соответственно, получаем следствие из предыдущей теоремы.

**Следствие 9.1.** Для системы  $N \geq 3$  узлов со скоростями  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 \leq \dots \leq v_N = s < 2$  цена анархии стремится к бесконечности при  $s \rightarrow 2-0$ .

Следующая теорема показывает, что для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением только тех игр, для которых оптимальный выигрыш системы равен 1.

**Теорема 9.2.** Цена анархии для системы  $S$  равна

$$PoA(S) = \max_{U_1: OPT(S, U_1)=1} \frac{1}{\min_{L - \text{равновесие по Нэшу в } \Gamma(S, U_1, \lambda)} SC(L)}.$$

*Доказательство.* Покажем, что в любой игре  $\Gamma(S, U, \lambda)$  объемы задач можно пронормировать таким образом, что оптимальный выигрыш будет равен единице, а значение отношения оптимального выигрыша к выигрышу в наихудшем равновесии не изменится.

Пусть  $L$  – наихудшее равновесие в игре  $\Gamma(S, U, \lambda)$  с произвольным множеством игроков  $U(n, w)$ , где объем задачи каждого игрока  $j$  равен  $w_j$ , а  $L_{OPT}$  – оптимальный профиль в этой игре. Значение выигрыша системы в  $L$  равно  $SC$ , и выигрыш системы в оптимальном профиле равен  $OPT$ . Отношение оптимального выигрыша системы к наихудшему равновесному  $\frac{OPT}{SC}$ . Так как  $L$  – равновесие, то для любого игрока  $j$   $\frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l_j} w_k}{v_j} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k + w_j}{v_i}$  для любого узла  $i$ .

Рассмотрим теперь игру с тем же набором узлов и игроков, но где у каждого игрока  $j$  объем задачи равен  $\frac{w_j}{OPT}$ . Значение выигрыша системы в  $L$  равно  $\frac{SC}{OPT}$ , и выигрыш системы в  $L_{OPT}$  равен 1. Благодаря свойству линейной однородности задержек на узлах относительно их загрузок профили  $L$  и  $L_{OPT}$  являются соответственно наихудшим равновесием и оптимальным профилем в новой игре. В частности,  $L$  является равновесием в новой игре, так как для любого игрока  $j$  справедливо  $\frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k = l_j} w_k}{v_{l_j} OPT} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k = i} w_k + w_j}{v_i OPT}$  для любого узла  $i$ . Пусть  $L'$  – не наихудшее равновесие в новой игре. Тогда в ней существует равновесие  $L'$  с выигрышем системы  $\frac{SC'}{OPT}$  такое, что выигрыш системы в  $L'$  меньше выигрыша системы в  $L$ , то есть  $\frac{SC'}{OPT} < \frac{SC}{OPT}$ . Но тогда в исходной игре профилю  $L'$  соответствует выигрыш системы  $SC' < SC$  и равновесие  $L'$  хуже равновесия  $L$ . Аналогично,  $L_{OPT}$  является оптимальным профилем в новой игре. Тогда отношение оптимального выигрыша системы к выигрышу в наихудшем равновесии в новой игре также равно  $\frac{OPT}{SC}$ .

Следовательно, любой игре  $\Gamma(S, U, \lambda)$  соответствует игра  $\Gamma(S, U_1, \lambda)$  с объемами задач, нормированными таким образом, что  $OPT(S, U_1) = 1$ . При этом отношения оптимального выигрыша к выигрышу в наихудшем равновесии для обеих игр одинаковы. Значит, для нахождения цены анархии достаточно рассмотреть только те игры, в которых оптимальный выигрыш равен 1.  $\square$

### § 9.3 Цена анархии в случае трех узлов

Точное значение цены анархии для случая двух узлов со скоростями  $1 \leq s$  найдено в работе [181] и равно

$$\begin{cases} \frac{2+s}{(1+s)(2-s)} & \text{для } 1 \leq s \leq \sqrt{2}, \\ \frac{2}{s(2-s)} & \text{для } \sqrt{2} < s < 2, \end{cases}$$

и там же для частного случая трех узлов со скоростями  $1 = 1 \leq s$  цена анархии найдена равной

$$\frac{2+s}{2(2-s)} \text{ для } 1 \leq s < 2.$$

Рассмотрим теперь случай, когда система  $S$  состоит из трех различных узлов. В данном разделе без потери общности полагаем, что скорости узлов следующие:



$v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s$ , то есть узел 1 – самый медленный, узел 2 имеет среднюю скорость и узел 3 – самый быстрый.

**Лемма 9.4.** Для системы трех узлов со скоростями  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s$  для любой задачи объемом  $w_k$  справедливо  $OPT \leq \frac{W-w_k}{1+r}$ .

*Доказательство.* Пусть существует такая задача  $w_k$ , находящаяся на узле  $i$  в оптимальном профиле  $L$ , что  $OPT > \frac{W-w_k}{1+r}$ . Тогда оптимальные задержки на всех узлах больше  $\frac{W-w_k}{1+r}$ . Кроме того, понятно, что  $\lambda_i(L) \geq \frac{w_k}{v_i}$ . Отсюда  $W = v_i \lambda_i(L) + v_j \lambda_j(L) + v_l \lambda_l(L) > w_k + (v_j + v_l) \frac{W-w_k}{1+r} \geq w_k + (1+r) \frac{W-w_k}{1+r} = W$ .  $\square$

**Лемма 9.5.** Для системы трех узлов со скоростями  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s$ , если известно, что две задачи с объемами  $w_{k_1}$  и  $w_{k_2}$  в оптимальном профиле находятся на одном и том же узле, то справедливо  $OPT \leq \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r}$ .

*Доказательство.* Пусть  $OPT > \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r}$  и задачи с объемами  $w_{k_1}$  и  $w_{k_2}$  в оптимальном профиле находятся на узле  $i$ . Тогда оптимальные задержки на всех узлах больше  $\frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r}$  и  $\lambda_i(L) \geq \frac{w_{k_1}+w_{k_2}}{v_i}$ . Тогда  $W = v_i \lambda_i(L) + v_j \lambda_j(L) + v_l \lambda_l(L) > w_{k_1} + w_{k_2} + (v_j + v_l) \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r} \geq w_{k_1} + w_{k_2} + (1+r) \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r} = W$ .  $\square$

Для доказательства следующих теорем нам понадобится ряд лемм.

**Лемма 9.6.** Для любых вещественных  $1 \leq r \leq s < 2$  справедливо  $s \leq \min\left\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\right\}$ .

*Доказательство.*  $\frac{2}{r(2-s)} \geq \frac{2}{s(2-s)} \geq s$ , так как  $s^3 - 2s^2 + 2 = s(s-1)^2 + (2-s) > 0$ .  
 $\frac{2+s}{(1+r)(2-s)} \geq \frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \geq s$ , так как  $s^3 - s^2 - s + 2 > s^3 - 2s^2 + 2 = s(s-1)^2 + (2-s) > 0$ .  $\square$

**Лемма 9.7.** Для любых вещественных  $1 \leq r \leq s < 2$  справедливо  $\frac{3s}{1+r} \leq \min\left\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\right\}$ .

*Доказательство.* Во-первых,  $3s \leq \frac{2+s}{2-s}$ , так как  $3s^2 - 5s + 2 = (s-1)(3s-2) > 0$ . Во-вторых,  $\frac{3s}{1+r} \leq \frac{2}{r(2-s)}$ , поскольку  $6rs - 3rs^2 - 2 - 2r = r(6s - 3s^2 - 2) - 2 = r(1 - 3(s-1)^2) - 2 \leq r - 2 < 0$ .  $\square$

**Лемма 9.8.** Для  $v_i < v_j$ ,  $v_i, v_j \in \{1, r, s\}$ , где вещественные  $1 \leq r \leq s < 2$ , справедливо  $\frac{2v_i^2 + v_i v_j}{2v_i - v_j} \leq \frac{2+s}{2-s}$ .

*Доказательство.* Если  $v_i < v_j$ , то  $\frac{2v_i^2+v_iv_j}{2v_i-v_j}$  убывает по  $v_i$  и возрастает по  $v_j$ , так как  $4v_i^2 - 4v_iv_j - v_j^2 < 0$  и  $v_i(2v_i - v_j) + 2v_i^2 + v_iv_j > 0$ .  $\square$

**Лемма 9.9.** Для любых вещественных  $1 \leq r \leq s < 2$  справедливо  $\frac{2r^2+rs}{(1+r)(2r-s)} < \frac{2}{r(2-s)}$ .

*Доказательство.* Неравенство в условии равносильно  $f(r, s) = -r^2s^2 - 2s(r^3 - r^2 - r - 1) + 4(r^3 - r^2 - r) < 0$ , проверим его истинность. Покажем, что  $f'_r(r, s) = -2rs^2 + 2(2-s)(3r^2 - 2r - 1) < 0$ , тогда  $f(r, s) \leq f(1, s) = -s^2 + 4s - 4 = -(2-s)^2 < 0$ .

Для каждого фиксированного  $s$  функция  $f'_r(r, s)$  является параболой с ветвями, направленными вверх. Следовательно, наибольшее ее значение достигается на одном из концов отрезка  $r \in [1, s]$ . На левом конце  $f'_r(1, s) = -2s^2 < 0$ . На правом конце  $f'_r(s, s) = -8s^3 + 16s^2 - 6s - 4 = -8s(s-1)^2 - 2(2-s) < 0$ .  $\square$

**Лемма 9.10.** Для  $v_i \neq v_j \neq v_l$ ,  $v_i, v_j, v_l \in \{1, r, s\}$ , где вещественные  $1 \leq r \leq s < 2$ , справедливо  $f(v_i, v_j, v_l) = v_i + \frac{2v_iv_j}{2v_i-v_j} + \frac{3v_iv_l}{3v_i-v_l} \leq 1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s}$ .

*Доказательство.* Очевидно, что  $f(v_i, v_j, v_l)$  возрастает по  $v_j$  и  $v_l$ , поэтому  $f(v_i, v_j, v_l) \leq v_i + \frac{2sv_i}{2v_i-s} + \frac{3sv_i}{3v_i-s} = g(v_i)$ .

Покажем, что  $g(v_i)$  убывает по  $v_i$ . Производная  $g'_{v_i}(v_i) = 1 - \frac{2s^2}{(2v_i-s)^2} - \frac{3s^2}{(3v_i-s)^2}$  возрастает по  $v_i$  и, значит, не превосходит  $g'_{v_i}(s) = 1 - 2 - \frac{3}{4} < 0$ .

Тогда  $g(v_i) \leq g(1) = 1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s}$ .  $\square$

**Лемма 9.11.** Для любых вещественных  $1 \leq r \leq s < 2$  справедливо  $\frac{1+\frac{2s}{2-s}+\frac{3s}{3-s}}{1+r+s} \leq \min\left\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\right\}$ .

*Доказательство.* Покажем сначала, что  $1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s} \leq \frac{(1+r+s)(2+s)}{(1+r)(2-s)}$ . Правая часть неравенства убывает по  $r$ , поэтому достаточно показать, что  $1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s} \leq \frac{(1+2s)(2+s)}{(1+s)(2-s)}$ . Это равносильно  $s \leq s^2$ , что выполняется при  $s \geq 1$ .

Покажем теперь, что  $1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s} \leq \frac{2(1+r+s)}{r(2-s)}$ . Правая часть неравенства убывает по  $r$ , поэтому достаточно показать, что  $1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s} \leq \frac{2(1+2s)}{s(2-s)}$ . Это неравенство равносильно  $-4s^3 + 11s^2 - 4s - 6 = -s(2s-3)^2 - (2-s)(3-s) < 0$ .  $\square$

**Теорема 9.3.** Для системы трех узлов со скоростями  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s < 2$  цена анархии не более, чем  $est(r, s) = \min\left\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\right\}$ .

*Доказательство.* В ходе доказательства рассматриваются случаи с определенным количеством задач на каждом из двух узлов с наибольшей задержкой. Для каждого случая показывается справедливость указанной в условии теоремы оценки цены анархии. Пусть  $L$  – равновесный профиль и  $SC(L) = \lambda_i(L)$ , то есть узел  $i$  имеет наименьшую задержку. Рассмотрим различные случаи равновесия  $L$ .

1. На узлах  $j$  и  $l$  находится по одной задаче. В оптимальном профиле эти две задачи займут не более двух узлов. Тогда в оптимальном профиле будет узел  $k$ , на который попадет частично или полностью равновесная загрузка узла  $i$  и ничего больше. То есть  $OPT \leq \frac{v_i \lambda_i(L)}{v_k} \leq s \lambda_i(L)$ . По лемме 9.6  $s \leq est(r, s)$ .

2. На узле  $j$  находится  $n_j \geq 2$  задач, на узле  $l$  находится  $n_l = 1$  задача. По лемме 9.2  $\lambda_j(L) \leq \frac{2v_i}{2v_i - v_j} \lambda_i(L)$ . По лемме 9.4  $OPT \leq \frac{v_i \lambda_i(L) + \frac{2v_i v_j}{2v_i - v_j} \lambda_i(L)}{1+r} = \lambda_i(L) \frac{2v_i^2 + v_i v_j}{(1+r)(2v_i - v_j)}$ .

а) Пусть сначала  $v_i \geq v_j$ . Тогда  $2v_i^2 + v_i v_j \leq 3v_i^2$ , так как данное выражение возрастает по  $v_j$ . Также  $2v_i - v_j \geq v_i$ , так как данное выражение убывает по  $v_j$ . Тогда  $OPT \leq \lambda_i(L) \frac{3v_i}{1+r} \leq \lambda_i(L) \frac{3s}{1+r} \leq \lambda_i(L) est(r, s)$  по лемме 9.7.

б) Пусть теперь  $v_i < v_j$ . Тогда по лемме 9.8  $\frac{2v_i^2 + v_i v_j}{(1+r)(2v_i - v_j)} < \frac{2+s}{(1+r)(2-s)}$ .

Рассмотрим теперь два случая. Первый, когда  $v_i = r$  и  $v_j = s$ . В этом случае по лемме 9.9  $\frac{2r^2 + rs}{(1+r)(2r-s)} < \frac{2}{r(2-s)}$ .

Второй случай, когда  $v_i = 1$ . По лемме 9.3  $w_k \leq \frac{v_k}{2-v_k} \lambda_i(L) \leq \frac{s}{2-s} \lambda_i(L)$  и  $v_j \lambda_j(L) - w_k \leq \frac{s}{2-s} \lambda_i(L)$  для любой задачи объемом  $w_k$  из находящихся на узле  $j$ .

Если все задачи, находящиеся в профиле  $L$  на узле  $j$ , останутся там же и в оптимальном профиле, то возможны два варианта. Либо единственная в равновесии задача на узле  $l$  остается там же и в оптимальном профиле, тогда загрузка узла  $i$  может только уменьшиться при переходе к оптимальному профилю. Либо единственная задача уходит с узла  $l$ , тогда на узле  $l$  в оптимальном профиле может оказаться загрузка не более, чем  $\lambda_i(L)$ , которая придет с узла  $i$ . В обоих вариантах  $OPT \leq \lambda_i(L)$ .

Если при переходе к оптимальному профилю задачи с узла  $j$  уходят только на  $l$ , то возможны те же два варианта. Если единственная в равновесии

задача на узле  $l$  остается там же и в оптимальном профиле, то загрузка узла  $i$  может только уменьшиться при переходе к оптимальному профилю. Тогда  $OPT \leq \lambda_i(L)$ . Либо единственная задача уходит с узла  $l$ , тогда на узле  $l$  в оптимальном профиле может оказаться загрузка не более, чем  $\lambda_i(L) + \frac{s}{2-s}\lambda_i(L)$ , которая придет с узлов  $i$  и  $j$ . Тогда  $OPT \leq \lambda_i(L)\frac{1+\frac{s}{2-s}}{v_i} \leq \lambda_i(L)\frac{1+\frac{s}{2-s}}{r} = \lambda_i(L)\frac{2}{r(2-s)}$ .

Если при переходе к оптимальному профилю часть задач с узла  $j$  попадает на  $i$ , то возможны те же два варианта. Если единственная в равновесии задача на узле  $l$  остается там же и в оптимальном профиле, то на узле  $j$  загрузка станет не более, чем  $\lambda_i(L) + \frac{s}{2-s}\lambda_i(L)$ , которая складывается из того, что останется на  $j$  и может прийти с  $i$ . Тогда  $OPT \leq \lambda_i(L)\frac{1+\frac{s}{2-s}}{v_j} \leq \lambda_i(L)\frac{1+\frac{s}{2-s}}{r} = \lambda_i(L)\frac{2}{r(2-s)}$ . Если единственная задача уходит с узла  $l$ , тогда на узле  $l$  в оптимальном профиле может оказаться загрузка не более, чем  $\lambda_i(L) + \frac{s}{2-s}\lambda_i(L)$ , которая придет с узлов  $i$  и  $j$ .

3. На узлах  $j$  и  $l$  находятся ровно по две задачи:  $n_j = n_l = 2$ . Всего на узлах  $j$  и  $l$  четыре задачи, узлов всего три, поэтому в оптимальном профиле как минимум две из этих задач ( $w_{k_1}$  и  $w_{k_2}$ ) попадут на один узел. Тогда по лемме 9.5  $OPT \leq \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r} = \frac{v_i\lambda_i(L)+w_{k_3}+w_{k_4}}{1+r}$ , где  $w_{k_3}$  и  $w_{k_4}$  – остальные две задачи, находящиеся на узлах  $j$  и  $l$ .

Рассмотрим узел  $k \in \{j, l\}$ . Если  $v_i \leq v_k$ , то по лемме 9.3 объем любой из задач на узле  $k$  не превосходит  $\lambda_i(L)\frac{v_i v_k}{2v_i - v_k}$ .

Пусть теперь  $v_i > v_k$ .  $L$  – равновесие, поэтому  $\lambda_k(L) \leq \lambda_i(L) + \frac{w}{v_i}$ , где  $w$  – меньшая по объему задача на узле  $k$ . Отсюда  $w \geq v_i\lambda_k(L) - v_i\lambda_i(L)$ . По лемме 9.2  $\lambda_k(L) \leq \lambda_i(L)\frac{2v_i}{2v_i - v_k} \leq 2\lambda_i(L)$ , так как  $2v_i - v_k \geq v_i$ , откуда  $w \leq \lambda_i(L)$ . Вторая, большая по объему задача на узле  $k$  имеет объем  $v_k\lambda_k(L) - w \leq v_k\lambda_k(L) = v_i\lambda_i(L) - (v_i - v_k)\lambda_k(L) \leq v_i\lambda_i(L) - (v_i - v_k)\lambda_i(L) = v_k\lambda_i(L) \leq r\lambda_i(L) \leq \lambda_i(L)\frac{rs}{2r-s} \leq \lambda_i(L)\frac{s}{2-s}$ .

а) Пусть  $v_i = s$ , тогда  $OPT \leq \lambda_i(L)\frac{s+2r}{1+r} \leq \lambda_i(L)\frac{3s}{1+r} \leq \lambda_i(L)est(r, s)$  по лемме 9.7.

б) Пусть  $v_i = r$ , тогда  $OPT \leq \lambda_i(L)\frac{r+2\frac{rs}{2r-s}}{1+r} = \lambda_i(L)\frac{2r^2+rs}{(1+r)(2r-s)} \leq \lambda_i(L)est(r, s)$  по лемме 9.8.

в) Пусть  $v_i = 1$ , тогда  $OPT \leq \lambda_i(L)\frac{r+2\frac{s}{2-s}}{1+r} = \lambda_i(L)\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}$ . С другой сто-

роны, так как узлов три, то обязательно будут два узла  $\alpha$  и  $\beta$ , на которые попадет не более одной задачи из рассматриваемой четверки задач и, возможно, часть загрузки с узла  $i$ . Тогда  $OPT$  не больше, чем минимум задержки из этих узлов:  $OPT \leq \min_{\alpha \neq \beta} \{ \lambda_i(L) \frac{2}{v_\alpha(2-s)}, \lambda_i(L) \frac{2}{v_\beta(2-s)} \} \leq \min \{ \lambda_i(L) \frac{2}{1(2-s)}, \lambda_i(L) \frac{2}{r(2-s)} \} = \lambda_i(L) \frac{2}{r(2-s)}$ .

4. На узлах  $j$  и  $l$  следующее распределение задач:  $n_j \geq 2, n_l \geq 3$ . По лемме 9.2  $\lambda_j(L) \leq \lambda_i(L) \frac{2v_i}{2v_i - v_j}$  и  $\lambda_l(L) \leq \lambda_i(L) \frac{3v_i}{3v_i - v_l}$ . Тогда в соответствии с оценкой (9.2.1)  $OPT \leq \lambda_i(L) \frac{v_i + \frac{2v_i v_j}{2v_i - v_j} + \frac{3v_i v_l}{3v_i - v_l}}{1+r+s} \leq \lambda_i(L) est(r, s)$  по леммам 9.10 и 9.11.  $\square$

Следующая теорема является частным случаем теоремы 9.1 для системы трех узлов.

**Теорема 9.4.** *Для системы трех узлов со скоростями  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s < 2$  цена анархии не менее, чем  $est(r, s) = \min \{ \frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)} \}$ .*

Тогда из теорем 9.3 и 9.4 следует точное значение цены анархии для системы трех узлов.

**Теорема 9.5.** *Для системы трех узлов со скоростями  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s < 2$  цена анархии точно равна*

$$\begin{cases} \frac{2+s}{(1+r)(2-s)} & \text{для } rs \leq 2, \\ \frac{2}{r(2-s)} & \text{для } rs > 2. \end{cases}$$

Наличие точного значения цены анархии позволяет установить возможность роста цены анархии при добавлении в систему нового узла, то есть ситуации, качественно аналогичной парадоксу Браесса, когда при наращивании мощности системы ухудшаются ее характеристики. Следующая теорема доказывает, что при добавлении в систему нового узла цена анархии либо растет, либо не меняется.

**Теорема 9.6.** *Для системы  $S$ , состоящей из 2 узлов со скоростями  $1 \leq s$ , цена анархии не уменьшается при добавлении нового узла со скоростью  $1 \leq q < 2$ .*

*Доказательство.* 1. Пусть в систему добавляется новый узел со скоростью  $q \leq s$ . Если  $qs \leq s^2 < 2$ , то цена анархии не уменьшается, так как  $\frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \leq$

$\frac{2+s}{(1+q)(2-s)}$ . Если  $s^2 > 2$  и  $qs \leq 2$ , то цена анархии не уменьшается, так как  $\frac{2}{s(2-s)} \leq \frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \leq \frac{2+s}{(1+q)(2-s)}$ . Если  $s^2 > 2$  и  $qs > 2$ , то цена анархии не уменьшается, так как  $\frac{2}{s(2-s)} \leq \frac{2}{q(2-s)}$ .

2. Пусть в систему добавляется узел, который по скорости превосходит имеющиеся,  $s < q < 2$ . Если  $qs \leq 2$ , то  $s^2 \leq 2$  и цена анархии не уменьшается, так как  $\frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \leq \frac{2+q}{(1+s)(2-q)}$ . Если  $qs > 2$  и  $s^2 \leq 2$ , то цена анархии не уменьшается, так как  $\frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \leq \frac{2}{s(2-s)} \leq \frac{2}{s(2-q)}$ . Если  $qs > 2$  и  $s^2 > 2$ , то цена анархии не уменьшается, так как  $\frac{2}{s(2-s)} \leq \frac{2}{s(2-q)}$ .  $\square$

## § 9.4 Численный метод нахождения цены анархии

В предыдущем разделе получено аналитическое выражение для цены анархии для системы трех узлов. В данном разделе предлагается метод вычисления цены анархии на примере системы трех узлов, аналогичный вычислению цены анархии для игры баланса загрузки (глава 7). Данный метод может быть обобщен на системы с произвольным количеством узлов, при этом возрастает количество задач линейного программирования, которые необходимо решать, а также число переменных и ограничений в них. В частности, для системы  $N$  узлов необходимо решить  $N!$  задач линейного программирования с  $(2^N - 1)^{N-1}$  подзадачами в каждой на  $N^2$  неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений для компонент векторов  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $c = (c_1, c_2, c_3)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leq \frac{b_1+b_2+b_3 + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k}{v_j}; \\ \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leq \frac{c_1+c_2+c_3 + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k}{v_l}; \\ \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \leq \frac{c_1+c_2+c_3 + \min_{k=1,2,3:b_k>0} b_k}{v_l} \text{ или } \max_{k=1,2,3} b_k = 0; \\ \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \geq \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \geq \frac{c_1+c_2+c_3}{v_l}; \\ a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (9.4.1)$$

Данная система представляет собой набор гиперплоскостей в 9-мерном пространстве, проходящих через точку  $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ , и множество реше-

ний представляет собой область пространства, ограниченную данными гиперплоскостями. Система совместна, так как, например,  $a_1 = a_2 = a_3 = \alpha v_i$ ,  $b_1 = b_2 = b_3 = \alpha v_j$ ,  $c_1 = c_2 = c_3 = \alpha v_l$  является ее решением для всех  $\alpha > 0$ . При этом множество ее решений не ограничено, так как  $\alpha$  может быть сколь угодно большим.

Рассмотрим систему  $S$  с тремя вычислительными узлами со скоростями  $1 \leq r \leq s < 2$ . Пусть  $L$  – равновесие по Нэшу для системы  $S$  с тремя узлами и  $n$  игроками, такое что  $i$  – номер узла с наибольшей задержкой в данном профиле, узел  $j$  имеет среднюю по порядку задержку,  $l$  – наименьшую. Положим, что в равновесии  $L$  на узле  $i$  находится суммарный объем задач, равный  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k = a_1 + a_2 + a_3$ , на узле  $j$  – объем  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k = b_1 + b_2 + b_3$  и на узле  $l$  – объем  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k = c_1 + c_2 + c_3$ . Объем задач на каждом узле некоторым образом разделен на три части так, что каждая из компонент трехмерных векторов  $a$ ,  $b$  и  $c$  либо нулевая, либо положительная и включает в себя объем не менее чем одной задачи.

**Лемма 9.12.** Пусть  $L$  – такое равновесие по Нэшу для игры с тремя узлами  $i, j, l$  и  $n$  игроков, что

$$\begin{aligned} \lambda_i(L) &\geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L), \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k &= a_1 + a_2 + a_3, \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k &= b_1 + b_2 + b_3, \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k &= c_1 + c_2 + c_3, \end{aligned}$$

где для всех  $k = 1, 2, 3$  каждая компонента  $a_k$  равна либо нулю, либо объему не менее чем одной задачи на узле  $i$ ,  $b_k$  равна либо нулю, либо объему не менее чем одной задачи на узле  $j$ ,  $c_k$  равна либо нулю, либо объему не менее чем одной задачи на узле  $l$ . Тогда набор векторов  $a, b, c$  является решением системы (9.4.1).

*Доказательство.* Пусть  $L$  – равновесие по Нэшу и  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ . При этом по лемме 9.1 все  $\lambda_k(L) > 0$ ,  $k = i, j, l$ . Тогда выполняются следующие

неравенства

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k}{v_i} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k + \min_{k=1, \dots, n: l_k=i, w_k > 0} w_k}{v_j}; \\ \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k}{v_i} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k + \min_{k=1, \dots, n: l_k=i, w_k > 0} w_k}{v_l}; \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k}{v_j} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k + \min_{k=1, \dots, n: l_k=j, w_k > 0} w_k}{v_l} \\ \text{или} \quad \max_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k = 0; \end{array} \right. \\ \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k}{v_i} \geq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k}{v_j} \geq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k}{v_l}. \end{array} \right.$$

Поскольку каждое ненулевое значение  $a_k$ , где  $k = 1, 2, 3$ , равно объему не менее чем одной задачи на узле  $i$ , то  $\min_{k: a_k > 0} a_k \geq \min_{k: l_k=i, w_k > 0} w_k$ , что обеспечивает выполнение первых двух неравенств системы (9.4.1). Аналогично,  $\min_{k: b_k > 0} b_k \geq \min_{k: l_k=j, w_k > 0} w_k$ . Это означает выполнение системы (9.4.1).  $\square$

**Лемма 9.13.** Любое решение системы (9.4.1) определяет равновесие по Нэшу  $L$  в игре с системой  $S$  из 3 узлов  $i, j, l$  и игроками, задачи которых соответствуют ненулевым компонентам векторов  $a, b$  и  $c$ , а задержки упорядочены следующим образом:  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ .

*Доказательство.* Пусть набор векторов  $a, b$  и  $c$  является решением системы (9.4.1). Рассмотрим игру с тремя узлами  $i, j$  и  $l$ . Пусть каждая из ненулевых компонент векторов  $a, b$  и  $c$  является объемом задачи очередного игрока. Предположим, что профиль  $L$  такой, что задачи с объемами  $a_k > 0$  размещаются на узле  $i$ , задачи с объемами  $b_k > 0$  – на узле  $j$  и задачи с объемами  $c_k$  – на узле  $l$ . Поскольку выполняются все неравенства системы (9.4.1), профиль  $L$  является искомым равновесием по Нэшу.  $\square$

Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 9.7.** Любому равновесию по Нэшу  $L$  в игре с системой  $S$ , состоящей из 3 узлов  $i, j, l$  и с  $n$  игроками, соответствует равновесие по Нэшу  $L'$  в игре с той же системой  $S$  и не более чем с 9 игроками, в котором на каждом узле размещено не более 3 задач, а задержки на узлах в  $L$  и  $L'$  совпадают.



*Доказательство.* Рассмотрим равновесие по Нэшу  $L$  в игре с системой  $S$ , состоящей из 3 узлов с  $n$  игроками. Пронумеруем узлы так, что  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ . Согласно лемме 9.12, для любого равновесия по Нэшу в игре с системой  $S$  и любым количеством игроков есть соответствующее решение  $a, b, c$  системы (9.4.1). Согласно лемме 9.13, это решение определяет такое равновесие по Нэшу  $L'$  в игре с системой  $S$ , что ненулевые компоненты вектора  $a$  являются объемами задач на узле  $i$ , ненулевые компоненты  $b$  – объемами задач на узле  $j$  и ненулевые компоненты  $c$  – объемами задач на узле  $l$ . По определению сумма компонент  $a$  равна загрузке на узле  $i$  в профиле  $L$ . Следовательно, задержки на узле  $i$  совпадают в обоих равновесиях  $L$  и  $L'$ . Аналогично, для узлов  $j$  и  $l$  задержки на них в равновесии  $L$  совпадают с соответствующими задержками в равновесии  $L'$ .  $\square$

Из данной теоремы следует, что достаточно рассматривать только те игры, где в равновесии на каждом узле находятся не более трех задач и равновесие является решением системы (9.4.1). При этом область значений выигрыша системы совпадает с областью значений для игр с произвольным числом игроков.

Пусть компоненты векторов  $a, b, c$  выбираются таким образом, что в оптимальном профиле, дающем максимум выигрыша системы, на узле  $i$  находится суммарный объем задач, равный  $a_1 + b_1 + c_1$ , на  $j$  – объем  $a_2 + b_2 + c_2$ , на  $l$  – объем  $a_3 + b_3 + c_3$ . При этом в оптимальном профиле наименьшей может оказаться задержка на любом из трех узлов. Кроме того, согласно теореме 9.2, объемы задач можно считать пронормированными таким образом, чтобы в оптимальном профиле минимальная среди всех узлов задержка была строго равна 1. В нашем случае это означает, что справедливы следующие неравенства:

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq v_i,$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq v_j,$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq v_l,$$

причем как минимум одно из них выполняется как равенство.

**Лемма 9.14.** *Решение задачи линейного программирования  $LPP(v_i, v_j, v_l)$  от-*

носителем компонент векторов  $a, b, c$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_3 \rightarrow \min; \\ (r1) \quad \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leq \frac{b_1+b_2+b_3 + \min_{k:a_k>0} a_k}{v_j}; \\ (r2) \quad \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leq \frac{c_1+c_2+c_3 + \min_{k:a_k>0} a_k}{v_l}; \\ (r3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \leq \frac{c_1+c_2+c_3 + \min_{k:b_k>0} b_k}{v_l} \\ \text{или } \max_{k=1,2,3} b_k = 0; \end{array} \right. \\ (r4) \quad \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \geq \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \geq \frac{c_1+c_2+c_3}{v_l}; \\ (r5) \quad a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3; \\ (r6) \quad a_1 + b_1 + c_1 \geq v_i; \\ (r7) \quad a_2 + b_2 + c_2 \geq v_j; \\ (r8) \quad a_3 + b_3 + c_3 \geq v_l \end{array} \right. \quad (9.4.2)$$

дает минимальное значение выигрыша системы в равновесии по Нэшу среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач на каждом узле,  $i, j, l$  – номера узлов в порядке уменьшения задержки, а оптимальный выигрыш системы равен 1.

*Доказательство.* По лемме 9.13 любое решение неравенств (r1) – (r5) задачи  $LPP(v_i, v_j, v_l)$  определяет равновесие в игре с тремя узлами, где на каждом узле находится не более трех задач и  $i, j, l$  – номера узлов в порядке уменьшения задержки.

Целевая функция в данной задаче ограничена снизу гиперплоскостями, соответствующими неравенствам (r6) – (r8). Неравенства (r1) – (r5) допускают сколь угодно малые неотрицательные значения целевой функции, в том числе нулевое. Следовательно, минимум задачи достигается на одной из границ, соответствующих трем последним неравенствам, что гарантирует выполнение одного из них как равенства, а значит, оптимальный выигрыш для игры, соответствующей решению задачи  $LPP(v_i, v_j, v_l)$ , строго равен 1.  $\square$

Тогда для нахождения точного значения цены анархии для системы  $S$  с тремя узлами нужно решить ряд задач линейного программирования  $LPP(v_i, v_j, v_l)$  для всех перестановок  $(1, r, s)$ . Минимальное из этих решений соответствует значению  $\frac{1}{PoA(S)}$ . То есть справедлива следующая теорема.

**Теорема 9.8.** *Цена анархии для системы трех узлов  $S$  равна величине  $PoA(S)$ , обратной значению*

$$\frac{1}{PoA(S)} = \min_{(v_i, v_j, v_l) - \text{перестановки } (1, r, s)} \left\{ \frac{c_1 + c_2 + c_3}{v_i} \mid a, b, c - \text{решение } LPP(v_i, v_j, v_l) \right\},$$

где  $LPP(v_i, v_j, v_l)$  – задача линейного программирования (9.4.2).

*Доказательство.* Согласно лемме 9.14, решение задачи (9.4.2) дает минимальное значение выигрыша системы в равновесии по Нэшу, где  $i, j, l$  – номера узлов в порядке уменьшения задержки, среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач на каждом узле, а оптимальный выигрыш равен 1. Минимум решения среди задач для всех возможных перестановок  $(1, r, s)$  в качестве значений  $(v_i, v_j, v_l)$  даст минимальное значение выигрыша системы в равновесии по Нэшу среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач на каждом узле, а оптимальный выигрыш равен 1.

По теореме 9.7 для любого равновесия в игре с системой обслуживания трех узлов  $S$  и произвольным числом игроков можно найти соответствующее равновесие в игре с теми же узлами и множеством не более 9 игроков, где на каждом узле находится не более трех задач, причем выигрыши системы в обоих равновесиях совпадают. Значит, для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением игр, где в равновесии на каждом узле находится не более трех задач.

По теореме 9.2 для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением игр, где выигрыш системы в оптимальном профиле строго равен 1. □

## § 9.5 Численные примеры

Для нахождения оценок цены анархии в модели с тремя узлами разработано программное обеспечение, реализующее метод нахождения цены анархии, приведенный в предыдущем разделе. Данное программное обеспечение позволяет визуально сравнить на графике теоретические значения цены анархии и численно найденные путем решения ряда задач линейного программирования. Кроме

того, данная программа дает возможность увидеть изменение цены анархии для большего числа узлов, для которого еще не получены теоретические оценки. Параметры системы  $S$  задаются как опции программы, при этом скорость первого узла считается равной 1, для следующих задаются точные значения, при этом для скорости одного из узлов задается диапазон значений. Таким образом можно наблюдать, как изменяется значение цены анархии при изменении скорости одного из узлов.

На графиках рисунков 9.1 и 9.2 представлены примеры оценок цены анархии для различных значений скоростей второго и третьего узлов. На рисунке 9.1 скорость второго узла равна  $r = 1.1$ , а скорость третьего меняется в диапазоне  $s \in [r, 2)$ . На рисунке 9.2 скорость самого быстрого узла равна  $s = 1.7$ , а скорость второго меняется в диапазоне  $r \in [1, s]$ . Здесь теоретические и расчетные значения цены анархии совпадают.

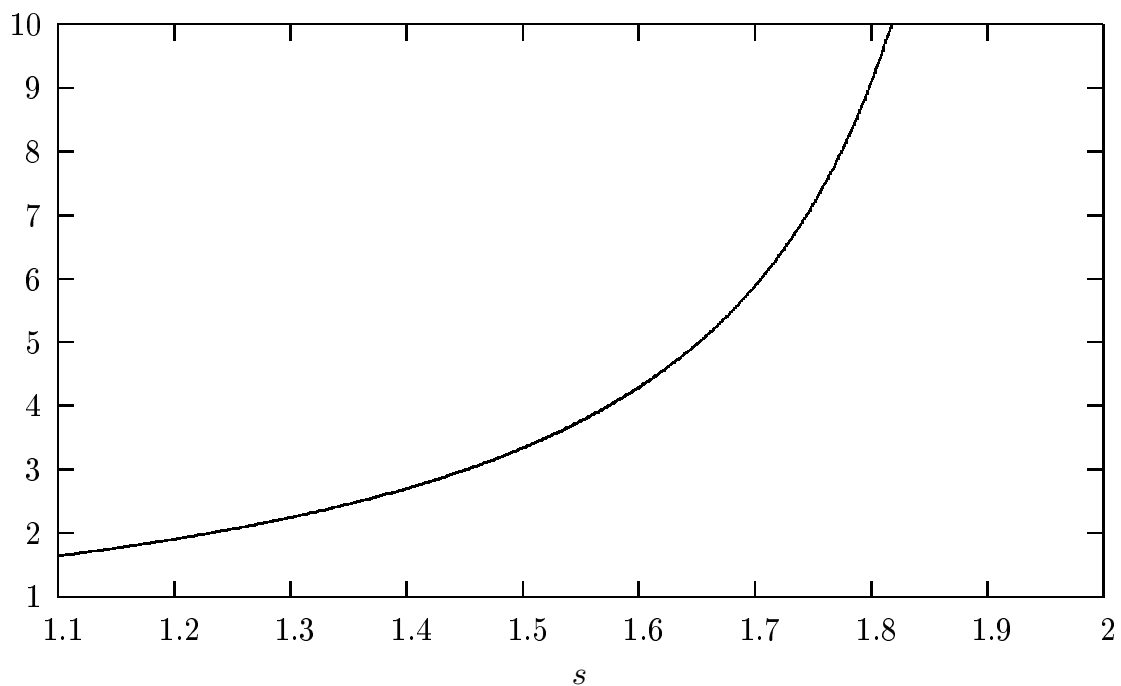


Рис. 9.1: Цена анархии для системы  $S$ , где  $r = 1.1$ ,  $s \in [r, 2)$

Более интересным является следующий пример. Рассматривается система четырех узлов со скоростями  $v_1 = 1 \leq v_2 = q \leq v_3 = r \leq v_4 = s < 2$ . На графиках рисунков 9.3 и 9.4 представлено изменение цены анархии в сравнении с нижней оценкой цены анархии (9.2.2), которая фактически является значением

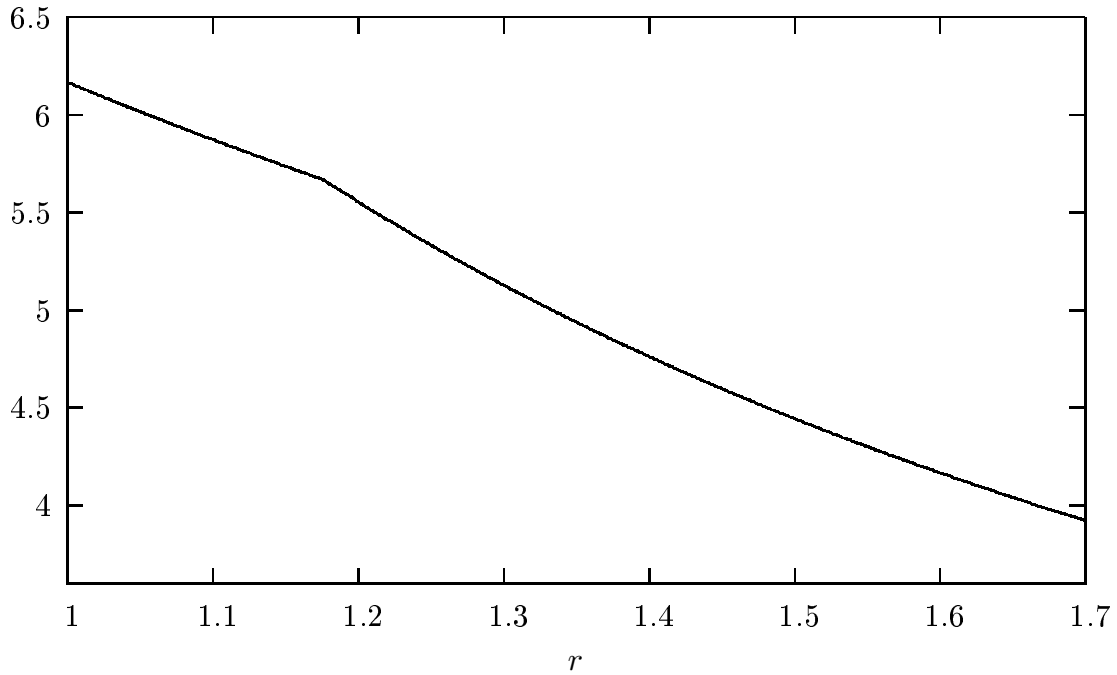
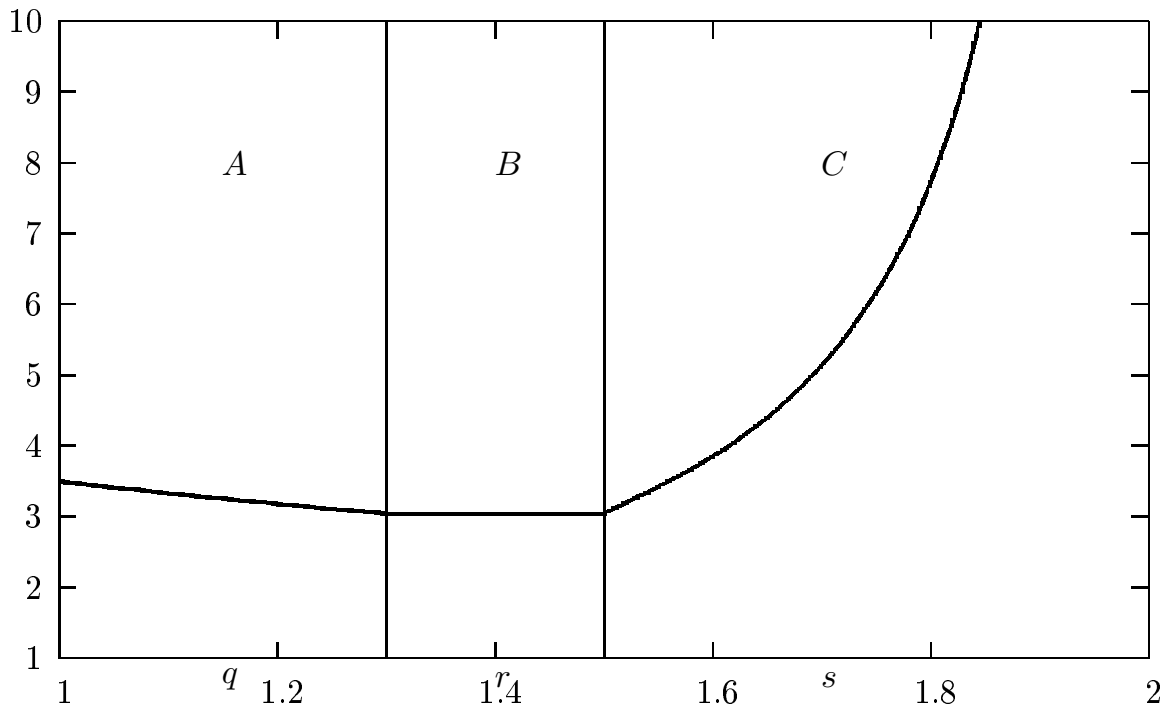
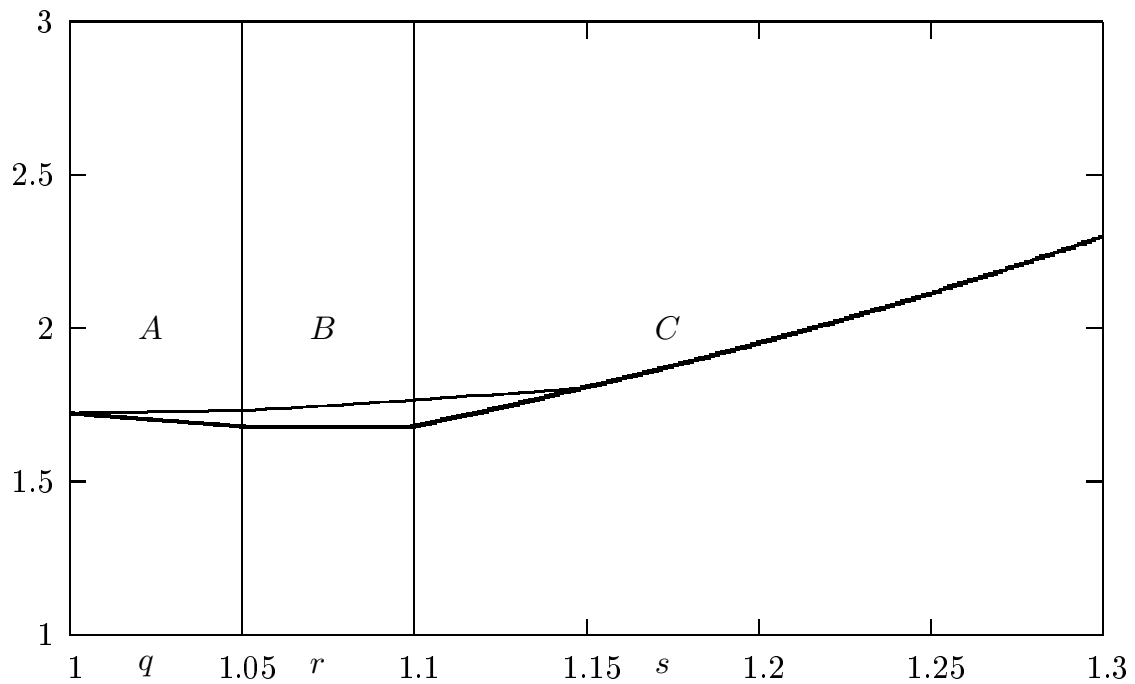


Рис. 9.2: Цена анархии для системы  $S$ , где  $s = 1.7, r \in [1, s]$

цены анархии для трех из этих четырех узлов со скоростями  $1 \leq r \leq s < 2$ . На рисунке 9.3 представлено изменение цены анархии для следующих случаев. В области  $A$  значение  $q$  изменяется в диапазоне  $[1, r]$ ,  $r = 1.3, s = 1.5$ . В области  $B$  значение  $q = 1.3$ , значение  $r$  изменяется в диапазоне  $[q, s]$ ,  $s = 1.5$ . В области  $C$   $q = 1.3, r = 1.5$ , значение  $s$  изменяется в диапазоне  $[r, 2)$ . Для этих случаев цена анархии для четырех узлов совпадает с ее нижней оценкой (9.2.2).

На рисунке 9.4 представлено изменение цены анархии для систем, где скорости узлов достаточно мало отличаются друг от друга, то есть в нормированном виде достаточно близки к единице. В этом случае наблюдается превышение значения цены анархии, представленной тонкой линией на рисунке 9.4, над значением ее оценки (9.2.2), представленной жирной линией. При росте скоростей узлов оба графика сливаются. В области  $A$  значение  $q$  изменяется в диапазоне  $[1, r]$ ,  $r = 1.05, s = 1.1$ . В области  $B$  значение  $q = 1.05$ , значение  $r$  изменяется в диапазоне  $[q, s]$ ,  $s = 1.1$ . В области  $C$   $q = 1.05, r = 1.1$ , значение  $s$  изменяется в диапазоне  $[r, 1.3)$ .

Рис. 9.3: Цена анархии для системы  $S$  четырех узловРис. 9.4: Цена анархии для системы  $S$  четырех узлов с малыми значениями скоростей

## § 9.6 Результаты

В данной главе рассмотрена система обслуживания с  $N$  узлами и  $n$  игроками, получена нижняя граница цены анархии. Более детально рассмотрена модель с

тремя узлами, для которой найдено точное значение цены анархии и доказано, что цена анархии не меняется или растет при добавлении нового узла в систему двух вычислительных узлов. Также разработана методика вычисления точного значения цены анархии на примере трех узлов. Данная методика может быть обобщена на системы с большим количеством узлов, при этом возрастает количество задач линейного программирования, которые необходимо решать, а также число переменных и ограничений в них. Разработана программная реализация алгоритма вычисления точного значения цены анархии, с помощью которой проведены численные эксперименты сравнения полученных оценок цены анархии с ее точным значением, показывающие корректность полученных оценок. Для случая четырех узлов в системе вычислительные эксперименты показывают частичное совпадение цены анархии для трех и четырех узлов в системе, аналитическое подтверждение данного факта требует дальнейшего исследования.

## Глава 10

# Игра покрытия с линейными экстерналиями

В данной главе рассматривается задача максимизации минимальной задержки вычислительных узлов или игра покрытия [81, 181, 189] с линейными экстерналиями [65]. Множество задач различных объемов от эгоистичных пользователей должно быть распределено между узлами с различными скоростями обслуживания, на которых задачи будут выполняться. Каждый игрок выбирает узел для обслуживания своей задачи, стараясь минимизировать свою задержку. Мы рассматриваем только чистое равновесие по Нэшу, для игр такого типа с двумя узлами оно всегда существует (см. теорему 8.1), в отличие от общего случая. Выигрышем системы (или социальным выигрышем) для полученного распределения задач на вычислительных узлах является минимальная задержка среди всех узлов.

### § 10.1 Модель игры

Рассмотрим систему  $S = S(N, v, e)$ , состоящую из множества  $N$  вычислительных узлов со скоростями  $v_1 = 1 \leq \dots \leq v_n = s$ , где  $n = |N|$ , и экстерналиями  $e_{ik}$ , где  $i, k \in N, i \neq k$ , и каждый коэффициент  $e_{ik} \geq 0$  отражает вклад загрузки на узле  $k \neq i$  в задержку узла  $i$ . Система используется множеством игроков с их задачами  $U = U(M, w)$ , где каждый из множества игроков  $M$  выбирает вычислительный узел для обслуживания своей задачи. Объем задачи игрока  $j$  равен  $w_j, j = 1, \dots, m$ , где  $m = |M|$ . Суммарный объем всех задач обозначим



как  $W = \sum_{j \in M} w_j$ . Время выполнения задачи объемом  $w$  в свободной от других задач системе на узле  $i$  со скоростью  $v_i$  равно  $\frac{w}{v_i}$ .

Полагаем, что каждый игрок может выбирать любой из вычислительных узлов. Стратегией игрока  $j$  является номер узла  $l_j$ , который он выбирает для выполнения своей задачи. Тогда профиль стратегий в игре – это вектор  $L = (l_1, \dots, l_m)$ . Загрузку узла  $i$ , т.е. суммарный объем задач на нем, обозначим как  $\delta_i(L) = \sum_{j \in M: l_j=i} w_j$ . Задержка узла  $i$  обозначается как

$$\lambda_i(L) = \sum_{j \in M: l_j=i} \frac{w_j}{v_i} + \sum_{k \neq i} e_{ik} \sum_{j \in M: l_j=k} w_j = \frac{\delta_i(L)}{v_i} + \sum_{k \neq i} e_{ik} \delta_k(L),$$

заметим, что она одинакова для всех игроков, выбравших данный узел.

Таким образом, определим игру в чистых стратегиях  $\Gamma = \langle S(N, v, e), U(M, w), \lambda \rangle$ . Здесь мы рассматриваем только чистые стратегии.

Предполагаем, что целью системы является минимизация простоя наименее занятого вычислительного узла, т.е. максимизация времени его работы или задержки на нем. Выигрыш системы определяется как минимальная среди всех узлов задержка

$$SC(L) = \min_{i \in N} \lambda_i(L).$$

Обозначим

$$OPT = OPT(S, U) = \max_{L \text{ профиль в } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)$$

– оптимальный выигрыш, или выигрыш системы в оптимальном случае, где максимум находится среди всех возможных профилей стратегий в игре  $\Gamma(S, U, \lambda)$ .

Профиль стратегий  $L$ , где ни одному игроку не выгодно единолично менять выбранный в  $L$  узел на другой для выполнения своей задачи, называется чистым равновесием по Нэшу. Для того чтобы дать формальное определение, обозначим через  $L(j \rightarrow i) = (l_1, \dots, l_{j-1}, i, l_{j+1}, \dots, l_m)$  профиль, получаемый из профиля  $L$ , если игрок  $j$  меняет выбранный им в  $L$  узел  $l_j$  на некоторый узел  $i$ , а все остальные игроки сохраняют свои стратегии неизменными.

**Определение 10.1.** Профиль стратегий  $L$  называется чистым равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда каждый игрок выбрал узел с мини-

мальной задержкой, т.е. для каждого игрока  $j \in M$  выполняется  $\lambda_j(L) \leq \lambda_i(L(j \rightarrow i))$  для всех узлов  $i \in N$ .

Заметим, что рассматриваемая в данной главе система с точки зрения поведения игроков полностью эквивалентна системе, определенной в главе 8. Поэтому предположения, обеспечивающие адекватное поведение системы, для данной модели будут такими же.

**Предположение 10.1.** Для всех пар вычислительных узлов  $i, k$  выполняется  $e_{ik} < \frac{1}{v_i}$ .

**Предположение 10.2.** Для всех пар узлов  $i, k$  выполняется  $e_{ki} < \frac{1}{v_i}$ .

**Предположение 10.3.** Для всех пар узлов  $i, k$ , таких, что  $v_i \geq v_k$ , выполняется  $\sum_{l \neq i} e_{il} \leq \sum_{l \neq k} e_{kl}$ .

Далее в данной главе мы считаем, что предположения 10.1, 10.2 и 10.3 выполнены.

Кроме того, так же, как в модели, описанной в главе 8, в данной модели с экстерналиями в общем случае чистое равновесие по Нэшу может не существовать (пример 20). Однако, для данной модели также справедлива теорема 8.1, то есть в модели с двумя вычислительными узлами чистое равновесие по Нэшу существует.

Пусть система и наборы задач игроков таковы, что чистое равновесие по Нэшу существует. Тогда можно говорить о цене анархии для данной системы.

**Определение 10.2.** *Ценой анархии для системы  $S$  называется максимум отношения оптимального выигрыша к выигрышу системы в наихудшем равновесии:*

$$PoA(S) = \max_U \frac{OPT(S, U)}{\min_{L - \text{равновесие по Нэшу в } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)}.$$

## § 10.2 Цена анархии для двух вычислительных узлов

В этом разделе мы оценим значение PoA для случая двух вычислительных узлов с экстерналиями и сравним его со значением PoA для исходной модели без экстерналий.

Рассмотрим модель с двумя узлами со скоростями  $v_1 = 1$  и  $v_2 = s \geq 1$ . Заметим, что такой выбор скоростей узлов в системе не нарушает общности: всегда можно нормализовать скорости, используя деление на скорость самого медленного узла. Заметим, что при делении скорости мы также должны умножать это же значение и экстерналии. Таким образом, мы сохраняем соотношение между задержками.

Заметим, что из предположений 10.1, 10.2 и 10.3 следует, что  $e_{12} \geq e_{21}$  и значения  $1 - v_i e_{ik}$  и  $1 - v_i e_{ki}$  строго положительны для любого  $i \neq k$ .

В предшествующих работах [20, 61, 81, 181, 189] получены точные значения и оценки цены анархии в играх покрытия в чистых стратегиях без экстерналий. Все они показывают, что значение цены анархии становится равным бесконечности при  $s \geq 2$ . В частности, для случая двух вычислительных узлов со скоростями  $1 \leq s$  [181] значение цены анархии равно

$$PoA^0(s) = \begin{cases} \frac{2+s}{(1+s)(2-s)} & \text{для } 1 \leq s \leq \sqrt{2}, \\ \frac{2}{s(2-s)} & \text{для } \sqrt{2} < s < 2, \\ \infty & \text{для } 2 \leq s. \end{cases} \quad (10.2.1)$$

Оценим значение цены анархии для рассматриваемой модели с экстерналиями для случая двух вычислительных узлов и сравним со значением цены анархии (10.2.1) в оригинальной модели без экстерналий. Напомним, что скорости вычислительных узлов равны  $v_1 = 1$  и  $v_2 = s \geq 1$ . Обозначим также для сокращения записи величины  $\eta(s) = 1 + s - s(e_{12} + e_{21})$ ,  $\zeta(s) = 1 - se_{12}e_{21}$ .

Приведем следующие оценки, справедливые для игры рассматриваемого типа при предположениях 10.1, 10.2 и 10.3. Они будут использованы в дальнейшем анализе.

**Лемма 10.1.** *Для оптимального выигрыша системы справедлива следующая оценка.*

$$OPT \leq \frac{W\zeta(s)}{\eta(s)} \quad (10.2.2)$$

*Доказательство.* Рассмотрим ситуацию, где задачи можно разделять произвольным образом. Тогда они могут быть поделены между двумя вычислительными узлами так, что их задержки станут одинаковыми:

$\lambda' = \frac{W-\Delta}{v_1} + e_{12}\Delta = \frac{\Delta}{v_2} + e_{21}(W - \Delta)$ , где  $\Delta$  – часть от общего объема задач  $W$ , выполняемая узлом 2. Отсюда получим  $\Delta = \frac{W(v_2 - e_{21}s)}{\eta(s)}$  и  $\lambda' = \frac{W\zeta(s)}{\eta(s)}$ . Оптимальный выигрыш системы  $OPT$  в нашей модели с неделимыми задачами не может быть больше, чем  $\lambda'$  в описанной ситуации с разделяемыми задачами.  $\square$

Пусть в профиле  $L$  выполнено  $\lambda_i(L) \geq \lambda_k(L)$ , то есть  $i$  – самый загруженный узел. Обозначим  $w' = \min_{j:l_j=i} w_j$  – минимальная по объему задача на узле  $i$ ,  $a = \sum_{j \neq k: l_j=i} w_j$  – объем всех остальных задач на узле  $i$ . Тогда объем задач на узле  $k$  равен  $W - a - w'$ .

**Лемма 10.2.** Пусть  $L$  – произвольное равновесие по Нэшу и  $\lambda_i(L) \geq \lambda_k(L)$ . Тогда, если на узле  $i$  более одной задачи, а их общий объем равен  $w' + a$ , где  $w'$  – минимальная по объему задача на  $i$ , то

$$a \leq \frac{W(v_i - se_{ik}) - w'(v_k - se_{ik})}{\eta(s)}. \quad (10.2.3)$$

*Доказательство.* Так как  $L$  – равновесие по Нэшу, то справедливо

$$\lambda_i(L) = \frac{w' + a}{v_i} + e_{ik}(W - a - w') \leq \frac{W - a}{v_k} + e_{ki}a.$$

Отсюда непосредственно выражается  $a$ .  $\square$

**Лемма 10.3.** Пусть  $L$  – произвольное равновесие по Нэшу и  $\lambda_i(L) \geq \lambda_k(L)$ . Тогда, если на узле  $i$  более одной задачи, и  $w'$  – минимальная по объему задача на  $i$ , то выигрыш системы не менее чем

$$\frac{W\zeta(s)}{\eta(s)} - \frac{w'(1 - v_k e_{ki})(\eta(s) + v_k - se_{ik})}{v_k \eta(s)}. \quad (10.2.4)$$

*Доказательство.* Выигрыш системы равен  $SC(L) = \lambda_k(L) = \frac{W - w' - a}{v_k} + e_{ki}(w' + a) = \frac{W}{v_k} - (w' + a)(\frac{1}{v_k} - e_{ki})$ , подставим сюда оценку (10.2.3) для  $a$  и получим требуемую оценку  $SC(L)$ .  $\square$

**Лемма 10.4.** Пусть  $L$  – произвольное равновесие по Нэшу и  $\lambda_i(L) \geq \lambda_k(L)$ . Тогда, если на узле  $i$  более одной задачи, то выигрыш системы не менее чем

$$W \frac{se_{ki} - v_i + 2v_k \zeta(s)}{v_k(\eta(s) + v_k - se_{ik})}. \quad (10.2.5)$$

*Доказательство.* Используем оценку для выигрыша системы (10.2.4) и оценку (10.2.3) для  $a$ . Так как на узле  $i$  более одной задачи и  $w'$  – минимальная, то  $w' \leq a \leq \frac{W(v_i - se_{ik}) - w'(v_k - se_{ik})}{\eta(s)}$ , откуда  $w' \leq \frac{W(v_i - se_{ik})}{\eta(s) + v_k - se_{ik}}$ . Тогда

$$SC \geq W \frac{se_{ki} - v_i + 2v_k \zeta(s)}{v_k(\eta(s) + v_k - se_{ik})}$$

□

Понятно, что лемму 10.4 имеет смысл применять только при  $se_{ki} - v_i + 2v_k \zeta(s) > 0$ .

**Лемма 10.5.** Пусть  $L$  – произвольное равновесие по Нэшу, не являющееся оптимальным профилем, и  $\lambda_i(L) \geq \lambda_k(L)$ , а  $w'$  – объем минимальной задачи на узле  $i$ . Тогда  $\lambda_i(L^{OPT}) \leq \frac{W-w'}{v_i} + e_{ik}w'$ .

*Доказательство.* Пусть  $a$  – суммарный объем остальных задач на узле  $i$ .

Пусть сначала  $a > 0$ , тогда  $a > w'$ . Тогда в профиле  $L$  на узле  $i$  загрузка равна  $w' + a$ . В оптимальном профиле  $L^{OPT}$  загрузка  $i$  не может быть больше  $w' + a$ , так как иначе тогда  $\lambda_i(L^{OPT}) > \lambda_i(L) > \lambda_k(L) > \lambda_k(L^{OPT})$ , что противоречит оптимальности  $L^{OPT}$ . Если в оптимальном профиле загрузка  $i$  равна  $w' + a$ , то оптимум совпадает с равновесным выигрышем. Тогда на узле  $i$  оптимальная загрузка строго меньше  $w' + a$ , а значит, она может быть равна либо  $a + \Delta_1 < a + w'$ , либо  $w' + \Delta_2 < a + w'$ , либо не более  $W - a - w'$ . Здесь  $\Delta_1 + \Delta_2 = W - a - w'$ ,  $\Delta_1, \Delta_2 \geq 0$ . Заметим, что  $a + \Delta_1 = W - w' - \Delta_2 \leq W - w'$ ,  $w' + \Delta_2 = W - a - \Delta_1 \leq W - a \leq W - w'$ ,  $W - a - w' < W - w'$ . Следовательно, оптимальная загрузка узла  $i$  не более  $W - w'$ .

Пусть теперь  $a = 0$ . Тогда в оптимальном профиле  $L^{OPT}$  загрузка  $i$  не может быть больше  $w'$ , так как иначе тогда  $\lambda_i(L^{OPT}) > \lambda_i(L) > \lambda_k(L) > \lambda_k(L^{OPT})$ , что противоречит оптимальности  $L^{OPT}$ . Если в оптимальном профиле загрузка  $i$  равна  $w'$ , то оптимум совпадает с равновесным выигрышем. Тогда на узле  $i$  оптимальная загрузка строго меньше  $w'$ , а значит, в оптимальном профиле задача  $w'$  находится на узле  $k$ , и тогда загрузка узла  $i$  не более  $W - w'$ . □

**Лемма 10.6.** Пусть  $L$  – произвольное равновесие по Нэшу, не являющееся оптимальным профилем, и  $\lambda_i(L) \geq \lambda_k(L)$ , а  $w'$  – объем минимальной задачи на узле  $i$ . Тогда  $OPT \leq \frac{W-w'}{v_i} + e_{ik}w'$ .

*Доказательство.* Используем лемму 10.5. Если  $\lambda_i(L^{OPT}) \leq \lambda_k(L^{OPT})$ , то  $OPT = \lambda_i(L^{OPT}) \leq \frac{W-w'}{v_i} + e_{ik}w'$ . Иначе,  $OPT = \lambda_k(L^{OPT}) \leq \lambda_i(L^{OPT}) \leq \frac{W-w'}{v_i} + e_{ik}w'$ .  $\square$

Обозначим для сокращения записи

$$\begin{aligned} f(s) &= s(1 - e_{12})^2 - \zeta(s)(1 - se_{21}), & h(s) &= se_{12} - s + 2\zeta(s), \\ g(s) &= (1 - se_{12})(1 + \eta(s) - se_{21}) - s(1 - e_{21}\eta(s)), \\ q(s) &= s^2(1 - e_{12})(1 - e_{21}) - \eta(s)(1 - se_{12}), \\ est_1(s) &= \frac{\zeta(s)(\eta(s)+1-se_{21})}{\eta(s)(se_{12}-s+2\zeta(s))}, & est_2(s) &= \frac{s-1+se_{21}(1-se_{12})}{s^2e_{12}(1-e_{12})}, \\ est_3(s) &= \frac{\eta(s)+1-s+s^2e_{21}(1-e_{21})}{s(2\zeta(s)-s+se_{12})}, \\ est_4(s) &= \frac{\eta(s)\zeta(s)}{\eta(s)^2-s(1-e_{12})^2(1-se_{12})-s\eta(s)(1-e_{21})(1-e_{12})}, \\ est_5(s) &= \frac{s^2\zeta(s)(1-e_{12})}{\eta(s)(s-1+se_{21}(1-se_{12}))}, & est_6(s) &= \frac{s(1-e_{12})(s-1+se_{12})}{s-1+se_{21}(1-se_{12})}, \\ est_7(s) &= \frac{s\zeta(s)}{1-se_{12}+s^2e_{21}(1-e_{21})}. \end{aligned}$$

Пусть  $A$  – множество некоторых функций  $\alpha_i(\cdot)$ , определим функцию  $\alpha(\cdot)$  как комбинацию операторов  $\min$  и  $\max$ , примененных к подмножествам  $\{\alpha_i(\cdot) \in A\} \subseteq A$ . Мы говорим, что компонента  $\alpha_*(s) \in A$  активна для данного  $s$ , если  $\alpha_*(s) \equiv \alpha(s)$ . Область определения  $s$ , где выполняется данное тождество, назовем областью активности для функции  $\alpha_*(s)$ .

**Лемма 10.7.** Пусть  $L$  – равновесие по Нэшу. Если  $\lambda_2(L) \geq \lambda_1(L)$ , то при  $h(s) > 0$

$$\frac{OPT}{SC(L)} \leq \min\{est_1(s), \max\{\min\{est_2(s), est_3(s)\}, est_4(s)\}\},$$

а при  $h(s) \leq 0$

$$\frac{OPT}{SC(L)} \leq \max\{est_2(s), est_4(s)\}.$$

*Доказательство.* Пусть  $w' = \min_{j:l_j=2} w_j$  – минимальная по объему задача на узле 2,  $a = \sum_{j \neq k:l_j=2} w_j$  – объем всех остальных задач на узле 2. Тогда объем задач на узле 1 равен  $W - a - w'$  и выигрыш системы равен

$$SC(L) = \lambda_1(L) = W - a - w' + e_{12}(w' + a). \quad (10.2.6)$$

Пусть сначала на узле 2 в равновесии  $L$  только одна задача, то есть  $a = 0$ . Покажем, что в этом случае  $L$  является оптимальным профилем. Пусть это не

так. Тогда возможны два варианта. В первом в оптимальном профиле  $L^{OPT}$  задача объема  $w'$  остается на узле 2, но тогда  $OPT = \lambda_1(L^{OPT}) \leq \lambda_1(L)$ , и значит профиль  $L^{OPT}$  не является оптимальным. Если же в  $L^{OPT}$  задача объема  $w'$  переходит на узел 1, то на узле 2 загрузка становится не более  $W - w'$ . Тогда  $OPT \leq \frac{W-w'}{s} + e_{21}w' \leq W - w' + e_{12}w' = \lambda_1(L)$  и  $L^{OPT}$  не является оптимальным.

Пусть теперь на узле 2 в равновесии  $L$  более одной задачи, то есть  $a \geq w'$ . Из лемм 10.1 и 10.4 получаем оценку

$$\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_1(s),$$

которая справедлива при  $h(s) \geq 0$ .

Для следующей оценки уточним значение  $OPT$ .

1. Пусть  $\lambda_2(L^{OPT}) \leq \lambda_1(L^{OPT})$ .

Из (10.2.6)  $a = \frac{W-w'(1-e_{12})-SC(L)}{1-e_{12}}$ . Подставим это выражение для  $a$  в неравенство (10.2.3) и, выразив  $w'$ , получим

$$w' \leq \frac{\zeta(s)W - \eta(s)SC(L)}{s(1 - e_{12})^2}.$$

По лемме 10.6  $OPT \leq \frac{W-w'}{s} + e_{21}w'$ .

Подставим оценку для  $w'$ , тогда

$$OPT \leq \frac{SC(L)\eta(s)(1 - se_{21}) + Wf(s)}{s^2(1 - e_{12})^2}.$$

Для справедливости следующих двух оценок необходимо  $f(s) \geq 0$ . Тогда цену анархии можно оценить следующим образом.

а) Выигрыш системы  $SC(L) = W - w' - a + e_{12}(w' + a) = W - (w' + a)(1 - e_{12}) \geq e_{12}W$ , тогда

$$\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_2(s).$$

б) Используем оценку (10.2.5) и получим оценку

$$\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_3(s),$$

для которой также необходимо  $h(s) > 0$ .

2. Далее рассмотрим случай, когда в оптимальном профиле  $\lambda_1(L^{OPT}) \leq \lambda_2(L^{OPT})$ , а тогда по лемме 10.5  $w' + e_{12}(W - w') \leq \lambda_1(L^{OPT}) \leq \lambda_2(L^{OPT}) \leq$

$\frac{W-w'}{s} + e_{21}w'$ . Отсюда выражаем  $w' \leq \frac{W(1-se_{21})}{\eta(s)}$ . Используем оценку (10.2.4) для выигрыша системы и подставим в нее полученную оценку  $w'$ .

Тогда выигрыш системы  $SC(L) \geq \frac{W((\eta(s)^2 - s(1-e_{12})^2(1-se_{12}) - s\eta(s)(1-e_{21})(1-e_{12})))}{\eta(s)^2}$ . Используя оценку (10.2.2) для  $OPT$  получаем  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_4(s)$ . Знаменатель  $est_4(s)$  равен  $(1-se_{21})(1-se_{12}) + e_{12}(\eta(s)(s-1) + s(1-se_{21})(1-e_{21}) + \eta(s)(1-se_{12})) > 0$ .

Объединяя полученные оценки, получаем верхнюю оценку  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq \min\{est_1(s), \max\{\min\{est_2(s), est_3(s)\}, est_4(s)\}\}$  при  $h(s) > 0$  и  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq \max\{est_3(s), est_4(s)\}$  иначе. Покажем теперь, что выражения, составляющие оценку, определены в области своей активности.

Сопоставим области определения и активности полученных оценок. Оценки  $est_1(s)$  и  $est_2(s)$  определены при  $h(s) > 0$ . Оценки  $est_2(s)$  и  $est_3(s)$  значимы при  $f(s) \geq 0$ . Области активности оценок зависят от выполнения следующих неравенств. Если  $h(s) > 0$ , то

$$est_1(s) \geq est_3(s) \text{ равносильно } g(s) \leq 0, \quad (10.2.7)$$

$$est_1(s) \geq est_4(s) \text{ равносильно } g(s) \leq 0, \quad (10.2.8)$$

$$est_2(s) \geq est_3(s) \text{ равносильно } \frac{(s-2+se_{12})f(s)}{h(s)} \geq 0, \quad (10.2.9)$$

$$est_3(s) \geq est_4(s) \text{ равносильно } f(s)g(s) \leq 0. \quad (10.2.10)$$

Кроме того, независимо от значения  $h(s)$

$$est_2(s) \geq est_4(s) \text{ равносильно } f(s) \geq 0. \quad (10.2.11)$$

Пусть сначала  $h(s) > 0$ .

Активность оценки  $est_*(s)$  для данного  $s$  означает, что при данном значении  $s$

$$est_*(s) \equiv \min\{est_1(s), \max\{\min\{est_2(s), est_3(s)\}, est_4(s)\}\}.$$

Для  $est_1(s)$  это означает, что  $est_1(s) \leq \max\{\min\{est_2(s), est_3(s)\}, est_4(s)\}$ . Выполнение данного неравенства возможно в четырех случаях:

а)  $est_1(s) \leq est_2(s)$  и  $est_4(s) \leq est_2(s)$  и  $est_3(s) \geq est_2(s)$ . Из первого и третьего неравенств следует  $est_1(s) \leq est_3(s)$ , откуда, согласно (10.2.7), следует  $g(s) \geq 0$ . Из второго, согласно (10.2.11),  $f(s) \geq 0$ . Из второго и третьего



неравенств следует  $est_4(s) \leq est_3(s)$ , откуда, согласно (10.2.10),  $f(s)g(s) \leq 0$ , а с учетом  $f(s) \geq 0$  получаем  $g(s) \leq 0$ . Следовательно, в наших условиях этот случай возможен только при выполнении неравенств как равенств.

b)  $est_1(s) \leq est_3(s)$  и  $est_4(s) \leq est_3(s)$  и  $est_3(s) \leq est_2(s)$ . Из первого неравенства, согласно (10.2.7), следует  $g(s) \geq 0$ . Отсюда и из второго неравенства, согласно (10.2.10), следует  $f(s) \leq 0$ , из второго и третьего следует  $est_4(s) \leq est_2(s)$ , откуда, согласно (10.2.11),  $f(s) \geq 0$ . Данный случай также возможен только в виде равенств.

c)  $est_1(s) \leq est_4(s)$  и  $est_4(s) \geq est_2(s)$ . Данный случай возможен при  $g(s) \geq 0$  и  $f(s) \leq 0$ , что следует из (10.2.8) и (10.2.11).

d)  $est_1(s) \leq est_4(s)$  и  $est_4(s) \geq est_3(s)$ . Данный случай возможен при  $g(s) \geq 0$  и  $f(s) \geq 0$ , что следует из (10.2.8) и (10.2.10).

Оценка  $est_2(s)$  активна при условии  $est_2(s) \leq est_3(s)$  и  $est_2(s) \geq est_4(s)$  и  $est_2(s) \leq est_1(s)$ . Из второго и третьего неравенства следует  $est_4(s) \leq est_1(s)$ , откуда  $g(s) \leq 0$ . Из второго  $f(s) \geq 0$ , что обеспечивает справедливость оценки  $est_2(s)$ . Отсюда и из первого  $s - 2 + se_{12} \geq 0$ .

Оценка  $est_3(s)$  активна при условии  $est_3(s) \leq est_2(s)$  и  $est_3(s) \geq est_4(s)$  и  $est_3(s) \leq est_1(s)$ . Из третьего неравенства следует  $g(s) \leq 0$ . Отсюда и из второго  $f(s) \geq 0$ , что обеспечивает справедливость оценки  $est_3(s)$ . Отсюда и из первого  $s - 2 + se_{12} \leq 0$ .

Активность оценки  $est_4(s)$  возможна в двух случаях:

a)  $est_4(s) \leq est_1(s)$  и  $est_4(s) \leq est_2(s)$ . Из первого неравенства  $g(s) \leq 0$ , из второго неравенства  $f(s) \leq 0$ .

b)  $est_4(s) \leq est_1(s)$  и  $est_4(s) \leq est_3(s)$ . Из первого неравенства  $g(s) \leq 0$ , отсюда и из второго  $f(s) \leq 0$ .

Заметим, что в обоих случаях а) и б)  $f(s) \leq 0$ , что означает, что оценка  $est_4(s)$  активна там, где нельзя использовать  $est_2(s)$  и  $est_3(s)$ .

Рассмотрим случай  $h(s) < 0$ , когда не определены оценки  $est_1(s)$  и  $est_3(s)$ . Оценка  $est_2(s)$  активна, когда  $est_2(s) \geq est_4(s)$ , то есть  $f(s) \geq 0$ . Иначе активна оценка  $est_4(s)$ .

Тогда активная верхняя оценка находится согласно схеме, изображенной для

Таблица 10.1: Случаи активной верхней оценки при  $\lambda_2(L) \geq \lambda_1(L)$  в равновесии  $L$ .

$h(s)$	$g(s)$	$f(s)$	$s - 2 + se_{12}$	Активная оценка
$> 0$	$> 0$	любое значение	любое значение	$est_1(s)$
$> 0$	$\leq 0$	$> 0$	$> 0$	$est_2(s)$
$> 0$	$\leq 0$	$> 0$	$\leq 0$	$est_3(s)$
$> 0$	$\leq 0$	$\leq 0$	любое значение	$est_4(s)$
$\leq 0$	любое значение	$> 0$	любое значение	$est_2(s)$
$\leq 0$	любое значение	$\leq 0$	любое значение	$est_4(s)$

наглядности в Таблице 10.1.

□

**Лемма 10.8.** Пусть  $L$  – равновесие по Нэшу. Если  $\lambda_1(L) \geq \lambda_2(L)$ , то

$$\frac{OPT}{SC(L)} \leq \min\{est_5(s), \max\{est_6(s), est_7(s)\}\}.$$

*Доказательство.* Пусть  $w' = \min_{j:l_j=1} w_j$  – минимальная по объему задача на узле 1,  $a = \sum_{j \neq k:l_j=1} w_j$  – объем всех остальных задач на узле 1. Тогда объем задач на узле 2 равен  $W - a - w'$  и выигрыш системы равен

$$SC(L) = \lambda_2(L) = \frac{W - a - w'}{s} + e_{21}(w' + a). \quad (10.2.12)$$

1. Пусть сначала  $a = 0$ , то есть на узле 1 находится только одна задача объемом  $w'$ . Тогда задержка на узле 1 равна  $\lambda_1(L) = w' + e_{12}(W - w') \leq \frac{W}{s} = \lambda_2(L)$ . Отсюда  $w' \leq \frac{W(1-se_{12})}{s(1-e_{12})}$  и, следовательно,

$$SC(L) \geq W \frac{s - 1 + se_{21}(1 - se_{12})}{s^2(1 - e_{12})}. \quad (10.2.13)$$

Используя оценку (10.2.2) для  $OPT$  получаем  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_5(s)$ .

Для получения следующей оценки уточним оценку для  $OPT$ .

а) Пусть  $\lambda_1(L^{OPT}) \leq \lambda_2(L^{OPT})$ .

По лемме 10.6  $OPT \leq W - w' + e_{12}w'$ . Из (10.2.12)  $w' = \frac{W - sSC(L)}{1 - se_{21}}$ . Тогда  $OPT \leq \frac{W(e_{12} - se_{21}) + sSC(L)(1 - e_{12})}{1 - se_{21}}$ .

Если  $e_{12} - se_{21} \geq 0$ , тогда можно использовать оценку (10.2.13) и  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_6(s)$ .

б) Далее рассмотрим случай, когда в оптимальном профиле  $\lambda_2(L^{OPT}) \leq \lambda_1(L^{OPT})$ , а тогда по лемме 10.5  $\frac{w'}{s} + e_{21}(W - w') \leq \lambda_2(L^{OPT}) \leq \lambda_1(L^{OPT}) \leq W - w' + e_{12}w'$ . Отсюда выражаем  $w' \leq \frac{sW(1-e_{21})}{\eta(s)}$ . В (10.2.12) подставим в нее полученную оценку  $w'$ , тогда  $SC(L) \geq \frac{W(1-se_{12}+s^2e_{21}(1-e_{21}))}{s\eta(s)}$ . Используя оценку (10.2.2) для  $OPT$  получаем  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_7(s)$ .

2. Пусть теперь  $a > 0$ . Из оценок (10.2.5) и (10.2.2) получаем  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq \frac{s\zeta(s)(\eta(s)+s-se_{12})}{\eta(s)(se_{21}-1+2s\zeta(s))} \leq est_5(s)$ . Заметим, что  $se_{21} - 1 + 2s\zeta(s) = s - 1 + s\zeta(s) + se_{21}(1 - se_{12}) > 0$ , так что оценка (10.2.5) здесь применяется без ограничений.

Объединяя полученные оценки, получаем верхнюю оценку  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq \min\{est_5(s), \max\{est_6(s), est_7(s)\}\}$ . Покажем теперь, что выражения, составляющие оценку, определены в области своей активности.

Сопоставим области определения и активности полученных оценок. Оценка  $est_6(s)$  значима при  $e_{12} - se_{21} \geq 0$ . Области активности оценок зависят от выполнения следующих неравенств.

$$est_5(s) \geq est_6(s) \text{ равносильно } q(s) \leq 0, \quad (10.2.14)$$

$$est_5(s) \geq est_7(s) \text{ равносильно } q(s) \leq 0, \quad (10.2.15)$$

$$est_6(s) \geq est_7(s) \text{ равносильно } (e_{12} - se_{21})q(s) \geq 0, \quad (10.2.16)$$

Активность оценки  $est_*(s)$  для данного  $s$  означает, что при данном значении  $s$

$$est_*(s) \equiv \min\{est_5(s), \max\{est_6(s), est_7(s)\}\}.$$

Для  $est_5(s)$  это означает, что  $est_5(s) \leq est_6(s)$  или  $est_5(s) \leq est_7(s)$ , что из (10.2.14) и (10.2.15) означает  $q(s) \geq 0$ .

Оценка  $est_6(s)$  активна, когда  $est_6(s) \geq est_7(s)$  и  $est_5(s) \geq est_6(s)$ . Из второго неравенства, согласно (10.2.14) следует  $q(s) \leq 0$ , откуда вместе с (10.2.16) следует  $e_{12} - se_{21} \geq 0$ , что необходимо для справедливости оценки  $est_6(s)$ .

Оценка  $est_7(s)$  активна, когда  $est_7(s) \geq est_6(s)$  и  $est_5(s) \geq est_7(s)$ . Из второго неравенства, согласно (10.2.15) следует  $q(s) \leq 0$ , откуда вместе с (10.2.16) следует  $e_{12} - se_{21} \leq 0$ , что означает, что оценка  $est_7(s)$  активна там, где неправомерно использовать  $est_6(s)$ .

Следовательно, при  $q(s) \geq 0$  отношение  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_5(s)$ , иначе при  $e_{12} - se_{21} \geq 0$  отношение  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_6(s)$ , иначе отношение  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_7(s)$ .

□

Из лемм 10.7 и 10.8 получаем следующую обобщенную верхнюю оценку цены анархии для системы  $S$ .

**Теорема 10.1.** *Для системы  $S$  двух вычислительных узлов с экстерналиями при предположениях 10.1, 10.2 и 10.3 значение цены анархии не более, чем*

$$est(s) = \begin{cases} \max\{\min\{est_1(s), \max\{\min\{est_2(s), est_3(s)\}, est_4(s)\}\}, \\ \min\{est_5(s), \max\{est_6(s), est_7(s)\}\}\} \text{ при } h(s) > 0, \\ \max\{est_3(s), est_4(s), \\ \min\{est_5(s), \max\{est_6(s), est_7(s)\}\}\} \text{ при } h(s) \leq 0. \end{cases} \quad (10.2.17)$$

**Лемма 10.9.** *Пусть  $L$  – равновесие по Нэшу. Если  $\lambda_2(L) \geq \lambda_1(L)$ , то при  $h(s) > 0$*

$$\frac{OPT}{SC(L)} \geq \min\{est_1(s), \max\{\min\{est_2(s), est_3(s)\}, est_4(s)\}\},$$

а при  $h(s) \leq 0$

$$\frac{OPT}{SC(L)} \geq \max\{est_2(s), est_4(s)\}.$$

*Доказательство.* Для доказательства нижней оценки достаточно привести примеры игр, дающих нужные значения отношения  $\frac{OPT}{SC(L)}$  и показать, что все их параметры допустимы и попадают в область определения активного значения оценки.

1. Пример игры, где  $\frac{OPT}{SC(L)} = est_1(s)$ .

Рассмотрим игру с 4 игроками, у которых задачи  $w_1 = w_2 = s\eta(s)(1 - e_{21})$ ,  $w_3 = s(1 - e_{21})(1 - se_{21})$ ,  $w_4 = g(s) \geq 0$  в области актуальности  $est_1(s)$ . В равновесии  $L$  задачи  $w_1$  и  $w_2$  находятся на узле 2, а задачи  $w_3$  и  $w_4$  на узле 1, обеспечивая выигрыш системы, равный  $\lambda_1(L) = \eta(s)(2\zeta(s) - s(1 - e_{12})) > 0$  при  $h(s) > 0$ . Если задача  $w_1$  переходит на узел 1, то  $\lambda_1(L(1 \rightarrow 1)) = \lambda_1(L) + w_1(1 - e_{12}) = \lambda_2(L)$ .

В оптимальном профиле  $L^{OPT}$  задачи  $w_1$  и  $w_3$  находятся на узле 2, а  $w_2$  и  $w_4$  на узле 1. Задержка на обоих узлах  $\zeta(s)(1 + \eta(s) - se_{21})$ .

2. Пример игры, где  $\frac{OPT}{SC(L)} = est_2(s)$ .

Рассмотрим игру с 2 игроками, у которых задачи  $w_1 = s(s - 1) \geq w_2 = s(1 - se_{12})$  при  $s - 2 + se_{12} \geq 0$ , что выполнено в области активности  $est_2(s)$ . В равновесии  $L$  обе задачи находятся на узле 2, тогда равновесный выигрыш равен  $\lambda_1(L) = s^2e_{12}(1 - e_{12})$ . Если задача  $w_2$  переходит на узел 1, то  $\lambda_1(L(2 \rightarrow 1)) = \lambda_1(L) + w_2(1 - e_{12}) = \lambda_2(L)$ . Однако, таким образом образовался бы оптимальный профиль  $L^{OPT}$ , в котором только  $w_1$  остается на узле 2. Оптимальная задержка на узле 2  $\lambda_2(L^{OPT}) = s - 1 + se_{21}(1 - se_{12}) \leq \lambda_1(L^{OPT}) = s(1 - e_{12})$ .

3. Пример игры, где  $\frac{OPT}{SC(L)} = est_3(s)$ .

Рассмотрим игру с тремя игроками с задачами  $w_1 = w_2 = s^2(1 - e_{21})$ ,  $w_3 = s(2 - s - se_{12}) \geq 0$  в области активности  $est_3(s)$ . В равновесии  $L$  задачи  $w_1$  и  $w_2$  находятся на узле 2, а задача  $w_3$  на узле 1, обеспечивая выигрыш, равный  $\lambda_1(L) = s(2\zeta(s) - s(1 - e_{12})) > 0$  при  $h(s) > 0$ , что выполнено в области активности  $est_3(s)$ . Если задача  $w_1$  переходит на узел 1, то  $\lambda_1(L(1 \rightarrow 1)) = \lambda_1(L) + w_1(1 - e_{12}) = \lambda_2(L)$ .

В оптимальном профиле  $L^{OPT}$  задачи  $w_1$  и  $w_3$  находятся на узле 2, а задача  $w_2$  на узле 1. Узел 2 имеет наименьшую задержку, равную  $\lambda_2(L^{OPT}) = \eta(s) + 1 - s + s^2e_{21}(1 - e_{21}) \leq \lambda_1(L^{OPT}) = s^2(1 - e_{21})(1 + e_{12}) + se_{12}(2 - s - se_{12})$  при  $g(s) \leq 0$ , что выполнено в области активности  $est_3(s)$ .

4. Пример игры, где  $\frac{OPT}{SC(L)} = est_4(s)$ .

Рассмотрим игру с тремя игроками с задачами  $w_1 = \eta(s)(s - 1) + s(1 - se_{21})(1 - e_{21}) \geq w_2 = 1 - se_{12}$  при  $g \leq 0$ , что выполнено в области активности  $est_4(s)$ , и  $w_3 = (1 - se_{12})(1 - se_{21})$ . В равновесии  $L$  задачи  $w_1$  и  $w_2$  находятся на узле 2, а  $w_3$  на узле 1. Выигрыш системы равен  $\lambda_1(L) = \eta(s)^2 - s(1 - e_{12})^2(1 - se_{12}) - s\eta(s)(1 - e_{21})(1 - e_{12})$ . Если задача  $w_2$  переходит на узел 1, то  $\lambda_1(L(2 \rightarrow 1)) = \lambda_1(L) + w_2(1 - e_{12}) = \lambda_2(L)$ .

В оптимальном профиле задачи  $w_1$  и  $w_3$  находятся на узле 2, а задача  $w_2$  на узле 1. Задержка на обоих узлах равна  $\eta(s)\zeta(s)$ .

□

**Лемма 10.10.** Пусть  $L$  – равновесие по Нэшу. Если  $\lambda_1(L) \geq \lambda_2(L)$ , то

$$\frac{OPT}{SC(L)} \geq \min\{est_5(s), \max\{est_6(s), est_7(s)\}\}.$$

*Доказательство.* Для данного случая также приведем примеры игр, дающих нужные значения отношения  $\frac{OPT}{SC(L)}$  и покажем, что все их параметры допустимы и попадают в область определения активного значения оценки.

1. Пример игры, где  $\frac{OPT}{SC(L)} = est_5(s)$ .

Рассмотрим игру с тремя игроками с задачами  $w_1 = s\eta(s)(1 - se_{12})$ ,  $w_2 = s^2(1 - e_{12})(1 - se_{12})$ ,  $w_3 = sq(s) \geq 0$  в области активности  $est_5(s)$ . В равновесии  $L$  задача  $w_1$  находится на узле 1, а задачи  $w_2$  и  $w_3$  на узле 2. Выигрыш системы равен  $\lambda_2(L) = \eta(s)(s - 1 + se_{21}(1 - se_{12}))$ . Если задача  $w_1$  перейдет на узел 2, то  $\lambda_2(L(1 \rightarrow 2)) = \lambda_2(L) + w_1(\frac{1}{s} - e_{21}) = \lambda_1(L)$ .

В оптимальном профиле  $L^{OPT}$  задачи  $w_1$  и  $w_3$  находятся на узле 2, а  $w_2$  на узле 1. На обоих узлах задержка равна  $s^2\eta(s)(1 - e_{12})$ .

2. Пример игры, где  $\frac{OPT}{SC(L)} = est_6(s)$ .

Рассмотрим игру с двумя игроками с задачами  $w_1 = s(1 - se_{12})$ ,  $w_2 = s(s - 1)$ . В равновесии  $L$  задача  $w_1$  находится на узле 1, а задача  $w_2$  на узле 2. Выигрыш системы равен  $\lambda_2(L) = s - 1 + se_{21}(1 - se_{12})$ . Если задача  $w_1$  перейдет на узел 2, то  $\lambda_2(L(1 \rightarrow 2)) = \lambda_2(L) + w_1(\frac{1}{s} - e_{21}) = \lambda_1(L)$ .

В оптимальном профиле  $L^{OPT}$  задачи меняются местами:  $w_1$  на узле 2,  $w_2$  на узле 1. Выигрыш системы равен  $\lambda_1(L^{OPT}) = s(s - 1 + e_{12}(1 - se_{12})) \leq \lambda_2(L^{OPT}) = 1 - se_{12} + se_{21}(s - 1)$  при  $q(s) \leq 0$ , что справедливо в области активности  $est_6(s)$ .

3. Пример игры, где  $\frac{OPT}{SC(L)} = est_7(s)$ .

Рассмотрим игру с двумя игроками с задачами  $w_1 = s^2(1 - e_{21})$ ,  $w_2 = s(1 - se_{12})$ . В равновесном профиле  $L$  задача  $w_1$  находится на узле 1, а  $w_2$  на узле 2. Выигрыш системы равен  $\lambda_2(L) = 1 - se_{12} + s^2e_{21}(1 - e_{21})$ . Если задача  $w_1$  переходит на узел 2, то  $\lambda_2(L(1 \rightarrow 2)) = \lambda_2(L) + w_1(\frac{1}{s} - e_{21}) = \eta(s) \geq \lambda_1(L) = s(s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12}))$  при  $q(s) \leq 0$ , что справедливо в области активности  $est_7(s)$ .

В оптимальном профиле  $L^{OPT}$  задача  $w_1$  находится на узле 1, а задача  $w_2$  на узле 2. На обоих узлах задержки равны  $s\zeta(s)$ .

□

Из лемм 10.9 и 10.10 получаем следующую обобщенную нижнюю оценку цены анархии для системы  $S$ .

**Теорема 10.2.** *Для системы  $S$  двух вычислительных узлов с линейными экстерналиями при предположениях 10.1, 10.2 и 10.3 значение цены анархии не менее  $est(s)$ , определенное формулой (10.2.17).*

Из теорем 10.1 и 10.2 следует, что верхняя и нижняя оценки цены анархии для системы  $S$  двух вычислительных узлов совпадают. Тогда полученная оценка является точным значением цены анархии для системы  $S$  двух вычислительных узлов.

**Теорема 10.3.** *Для системы  $S$  двух вычислительных узлов с линейными экстерналиями при предположениях 10.1, 10.2 и 10.3 значение цены анархии равно значению  $est(s)$ , определенному формулой (10.2.17).*

Основная проблема модели без экстерналий в том, что при значении скорости самого быстрого узла  $s \geq 2$  цена анархии равна бесконечности даже для случая двух узлов [81]. Это означает, что в такой системе может возникнуть какое угодно большое, ничем не ограниченное значение отношения  $\frac{OPT}{SC(L)}$ , когда в нее поступит подходящий для этого набор задач и распределится в равновесии по узлам так, что выигрыш системы будет нулевой или близок к нулю.

Введение экстерналий, даже очень небольших, со значениями, близкими к нулю, решает данную проблему. Из теоремы 10.3 следует, что, для любого значения  $s \geq 1$  можно выбрать такие значения экстерналий  $e_{12} < \frac{1}{s}$  и  $e_{21} < \frac{1}{s}$ ,  $e_{12} \geq e_{21}$ , что цена анархии будет ограничена значением  $est(s)$ , определенным формулой (10.2.17).

### § 10.3 Вычислительные эксперименты

На графиках рис. 10.1 и рис. 10.2 представлены примеры вычисленных значений цены анархии для различных значений скоростей второго узла. На рис. 10.1 значения экстерналий  $e_{12} = 0.1$ ,  $e_{21} = 0.01$ . На рис. 10.2 значения экстерналий  $e_{12} = 0.3$ ,  $e_{21} = 0.1$ . Кривая  $PoA(s)$  представляет значения цены анархии для

игры с экстерналиями, а для сравнения изображена кривая  $PoA^0(s)$ , представляющая значения цены анархии в модели без экстерналий.

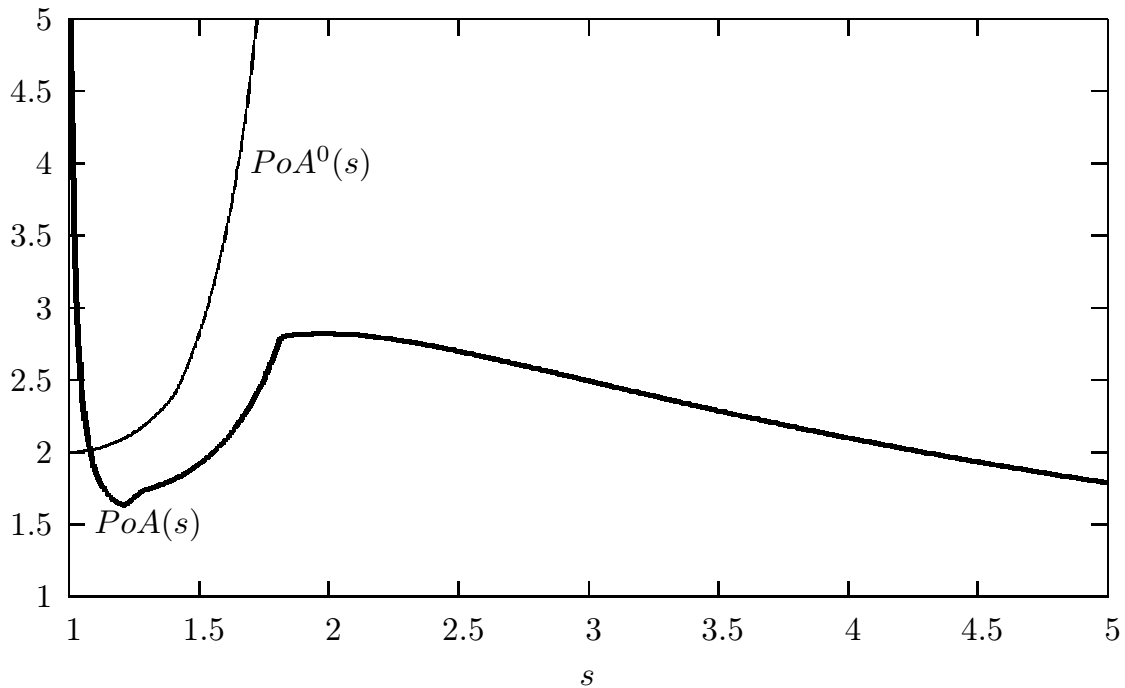


Рис. 10.1: Цена анархии для системы  $S$ , где  $e_{12} = 0.1$ ,  $e_{21} = 0.01$

## § 10.4 Результаты

В данной главе рассмотрена игра покрытия вычислительных узлов в системе обслуживания на основе КР-модели с линейными экстерналиями. Для случая двух вычислительных узлов в данной модели получено аналитическое выражение цены анархии. Приведены численные эксперименты, позволяющие визуально оценить зависимость цены анархии от параметров системы, а также сравнить данное значение с ценой анархии для модели без экстерналий. Показано также, что в отличие от модели без экстерналий, в которой цена анархии не ограничена, когда скорость самого быстрого узла не менее 2, в модели с экстерналиями цена анархии имеет конечное значение.



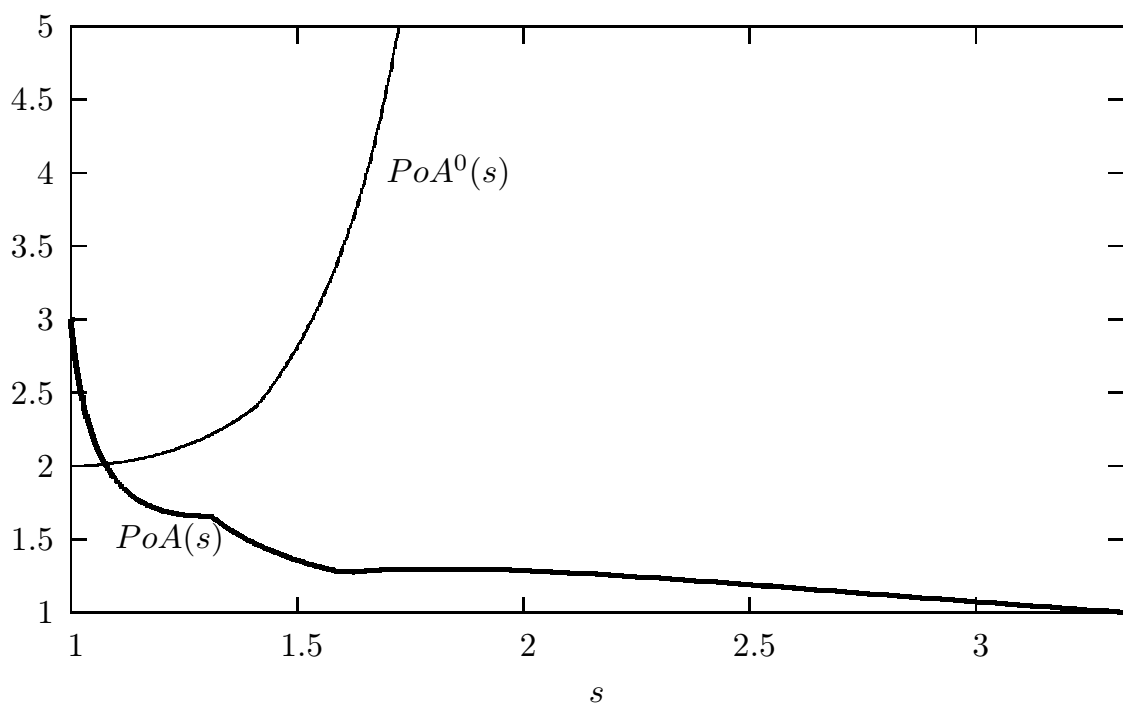


Рис. 10.2: Цена анархии для системы  $S$ , где  $e_{12} = 0.3$ ,  $e_{21} = 0.1$

## Глава 11

# Вычисление цены анархии в играх балансировки загрузки и покрытия с линейными задержками

В этой главе основное внимание уделяется обобщению игр на основе КР-модели (см. [132]) с параллельными вычислительными узлами разной мощности. Необходимо распределить набор задач разного объема между вычислительными узлами с различной скоростью обработки задач. Объем задачи — это время ее выполнения на свободном вычислительном узле с единичной скоростью, когда все остальные узлы простаивают. Загрузка узла — это общий объем заданий, выполняемых данным вычислительным узлом. Линейная задержка узла, то есть время выполнения всех заданий на этом узле, может зависеть не только от его загрузки, но и от загрузки других узлов. Каждый игрок выбирает вычислительный для своей задачи, стремясь минимизировать ее задержку. Игроки ведут себя эгоистично и достигают равновесия по Нэшу, то есть такого распределения задач по узлам, при котором ни одному из них не выгодно единолично менять выбранный узел на другой. Здесь мы рассматриваем только равновесия по Нэшу в чистых стратегиях; как известно ([94]) для исходной КР-модели такое равновесие всегда существует.

В зависимости от типа игры модель включает либо затраты системы для игры балансировки загрузки, либо выигрыш системы для игры покрытия. Затраты системы (социальные затраты) — это максимальная среди всех узлов задержка для данного профиля распределения задач по вычислительным узлам.

Выигрыш системы равен минимальному из этих значений. Для игры балансировки загрузки цена анархии ([132]) определяется как максимум отношения затрат системы в наихудшем случае равновесия по Нэшу и оптимальных затрат системы. Для игры покрытия это максимум отношения оптимального выигрыша системы и равновесного выигрыша системы в наихудшем случае.

Оценка цены анархии является важной задачей, так как эта величина является показателем качества системы. Она показывает, насколько некооперативное поведение игроков может быть хуже, чем кооперативное. Иногда в частных случаях удается найти точное аналитическое выражение для величины PoA или ее оценки, как в предыдущих главах. Однако в общем случае это может оказаться нетривиальной задачей.

Численное вычисление [64] значения цены анархии и его графическое представление позволяют визуально оценить цену анархии, если его точное аналитическое выражение еще не получено или вычислить его формулу достаточно сложно. Мы предлагаем алгоритм вычисления точного значения PoA. Это обобщение метода вычислений для случаев, когда линейная задержка каждого вычислительного узла может зависеть не только от его загрузки, но и от загрузки других узлов. К таким относятся модели с экстерналиями, рассмотренные в главах 8 и 10.

## § 11.1 Обобщенная КР-модель с линейными задержками

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  вычислительных узлов различной производительности. Система используется множеством игроков  $U = U(n, w)$ : каждый из  $n$  игроков выбирает вычислительный узел для выполнения своей задачи. Для каждого игрока  $j$  задан объем его задачи  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Обозначим  $W = \sum_{j=1}^n w_j$  общий объем всех задач.

Мы рассматриваем следующую игру в чистых стратегиях. Каждый игрок может выбирать любой вычислительный узел. Стратегия игрока  $j$  – номер узла  $l_j$ , выбранного игроком для выполнения своей задачи. Тогда профиль стратегий в игре  $\Gamma$  представляет вектор  $L = (l_1, \dots, l_n)$ . Загрузку узла  $i$ , т.е. общий объ-

ем выполняющихся на нем задач, обозначим  $\delta_i(L) = \sum_{j=1, \dots, n: l_j=i} w_j$ . Определим задержку узла  $i$  в форме линейного функционала

$$\lambda_i(L) = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{iN})(\delta_1(L), \dots, \delta_N(L))^T$$

для вектора загрузок узлов и вектора  $\alpha_i \in R^N$ . Заметим, что данная величина одинакова для всех игроков, выбравших данный вычислительный узел.

Обозначим  $S = S(N, \lambda)$  систему  $N$  вычислительных узлов с данными задержками  $\lambda$ . Тогда игра описывается как  $\Gamma(S, U) = \langle S(N, \lambda), U(n, w) \rangle$ .

Профиль стратегий  $L$ , где ни одному игроку не выгодно единолично менять выбранный в  $L$  узел на другой для выполнения своей задачи, называется чистым равновесием по Нэшу. Для того чтобы дать формальное определение, обозначим  $L(j \rightarrow i) = (l_1, \dots, l_{j-1}, i, l_{j+1}, \dots, l_n)$  профиль, получаемый из профиля  $L$ , если игрок  $j$  меняет выбранный им в  $L$  узел  $l_j$  на некоторый узел  $i$ , а все остальные игроки сохраняют свои стратегии неизменными.

**Определение 11.1.** *Профиль стратегий  $L$  называется чистым равновесием по Нэшу тогда и только тогда, если каждый игрок выбрал узел с минимальной задержкой, то есть для каждого игрока  $j = 1, \dots, n$  выполняется  $\lambda_{l_j}(L) \leq \lambda_i(L(j \rightarrow i))$  для всех узлов  $i = 1, \dots, N$ .*

Заметим, что хотя для оригинальной КР-модели всегда существует чистое равновесие по Нэшу ([94]), для обобщенного случая, который рассматривается в данной главе, можно привести примеры игр (см. пример 20), в которых нет чистого равновесия по Нэшу. Далее мы предполагаем, что система и набор задач таковы, что в игре есть равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.

Далее будет предложен метод вычисления цены анархии на примере системы трех узлов. Поэтому приведем используемые в методе свойства равновесия по Нэшу для системы трех вычислительных узлов.

## § 11.2 Равновесие по Нэшу в игре с тремя узлами

Рассмотрим систему линейных уравнений для компонент векторов  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $c = (c_1, c_2, c_3)$ . Обозначим  $A(a) = a_1 + a_2 + a_3$ ,

$B(b) = b_1 + b_2 + b_3$ ,  $C(c) = c_1 + c_2 + c_3$ ,  $\Delta(a, b, c) = (A(a), B(b), C(c))^T$ ,  $\alpha_k = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \alpha_{k3})$ . Номера  $i, j, l$  – различные номера узлов из множества  $1, 2, 3$ , такие что  $i \neq j \neq l \neq i$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \Delta(a, b, c) \leq \alpha_j \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k (\alpha_{jj} - \alpha_{ji}) \\ \alpha_i \Delta(a, b, c) \leq \alpha_l \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k (\alpha_{ll} - \alpha_{li}) \\ \alpha_j \Delta(a, b, c) \leq \alpha_l \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:b_k>0} b_k (\alpha_{ll} - \alpha_{lj}) \text{ or } \max_{k=1,2,3} b_k = 0 \\ \alpha_i \Delta(a, b, c) \geq \alpha_j \Delta(a, b, c) \geq \alpha_l \Delta(a, b, c) \\ a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (11.2.1)$$

Данная система представляет собой набор гиперплоскостей в 9-мерном пространстве, проходящих через точку  $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ , и множество решений представляет собой область пространства, ограниченную данными гиперплоскостями. Если система совместна и  $(a, b, c)$  – ее решение, то для любого вещественного числа  $\beta > 0$  набор  $(\beta a, \beta b, \beta c)$  тоже является решением. Более того, множество решений неограничено, так как  $\beta$  может быть сколь угодно большим.

Рассмотрим систему  $S$  с тремя вычислительными узлами со скоростями с номерами  $i, j, l$  и  $n$  игроками. Пусть  $L$  – равновесие по Нэшу для системы  $S$ , такое что  $i$  – номер узла с наибольшей задержкой в данном профиле, узел  $j$  имеет среднюю по порядку задержку,  $l$  – наименьшую (если это не так, то перенумеруем вычислительные узлы). Положим, что в равновесии  $L$  на узле  $i$  находится суммарный объем задач, равный  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k = a_1 + a_2 + a_3$ , на узле  $j$  – объем  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k = b_1 + b_2 + b_3$  и на узле  $l$  – объем  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k = c_1 + c_2 + c_3$ . Объем задач на каждом узле некоторым образом разделен на три части так, что каждая из компонент трехмерных векторов  $a, b$  и  $c$  либо нулевая, либо положительная и включает в себя объем не менее чем одной задачи.

**Лемма 11.1.** Пусть  $L$  – такое равновесие по Нэшу для игры с тремя узлами

$i, j, l$  и  $n$  игроков, что

$$\begin{aligned}\lambda_i(L) &\geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L), \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k &= a_1 + a_2 + a_3, \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k &= b_1 + b_2 + b_3, \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k &= c_1 + c_2 + c_3,\end{aligned}$$

где для всех  $k = 1, 2, 3$  каждая компонента  $a_k$  равна либо нулю, либо объему не менее чем одной задачи на узле  $i$ ,  $b_k$  равна либо нулю, либо объему не менее чем одной задачи на узле  $j$ ,  $c_k$  равна либо нулю, либо объему не менее чем одной задачи на узле  $l$ . Тогда набор векторов  $a, b, c$  является решением системы (11.2.1).

*Доказательство.* Пусть  $L$  – равновесие по Нэшу и  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ . Обозначим  $\delta(L) = (\delta_i(L), \delta_j(L), \delta_l(L))^T$  вектор-столбец загрузок вычислительных узлов. В этом случае справедливы неравенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \delta_i(L) \leq \alpha_j \delta_j(L) + \min_{k=1, \dots, n: l_k=i, w_k>0} w_k (\alpha_{jj} - \alpha_{ji}) \\ \alpha_i \delta_i(L) \leq \alpha_l \delta_l(L) + \min_{k=1, \dots, n: l_k=i, w_k>0} w_k (\alpha_{ll} - \alpha_{li}) \\ \alpha_j \delta_j(L) \leq \alpha_l \delta_l(L) + \min_{k=1, \dots, n: l_k=j, w_k>0} w_k (\alpha_{ll} - \alpha_{lj}) \text{ or } \max_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k = 0 \\ \alpha_i \delta_i(L) \geq \alpha_j \delta_j(L) \geq \alpha_l \delta_l(L). \end{array} \right.$$

Ясно, что  $\delta(L) = \Delta(a, b, c)$ . Поскольку каждое ненулевое значение  $a_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) равно объему не менее чем одной задачи на узле  $i$ , то  $\min_{k: a_k>0} a_k \geq \min_{k: l_k=i, w_k>0} w_k$ . Аналогично,  $\min_{k: a_k>0} a_k \geq \min_{k: l_k=i, w_k>0} w_k$  и  $\min_{k: b_k>0} b_k \geq \min_{k: l_k=j, w_k>0} w_k$ . Это означает выполнение системы (11.2.1).  $\square$

**Лемма 11.2.** Любое решение системы (11.2.1) определяет равновесие по Нэшу  $L$  в игре с системой  $S$  из 3 узлов  $i, j, l$  и игроками, задачи которых соответствуют ненулевым компонентам векторов  $a, b$  и  $c$ , а задержки упорядочены следующим образом:  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ .

*Доказательство.* Пусть набор векторов  $a, b$  и  $c$  является решением системы (11.2.1). Рассмотрим игру с тремя узлами  $i, j$  и  $l$ . Пусть каждая из ненулевых

компонент векторов  $a$ ,  $b$  и  $c$  является объемом задачи очередного игрока. Предположим, что профиль  $L$  такой, что задачи с объемами  $a_k > 0$  размещаются на узле  $i$ , задачи с объемами  $b_k > 0$  – на узле  $j$  и задачи с объемами  $c_k$  – на узле  $l$ . Поскольку выполняются все неравенства системы (11.2.1), профиль  $L$  является искомым равновесием по Нэшу.  $\square$

Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 11.1.** *Любому равновесию по Нэшу  $L$  в игре с системой  $S$ , состоящей из 3 узлов  $i, j, l$  и с  $n$  игроками, соответствует равновесие по Нэшу  $L'$  в игре с той же системой  $S$  и не более чем с 9 игроками, в котором на каждом узле размещено не более 3 задач, а задержки на узлах в  $L$  и  $L'$  совпадают.*

*Доказательство.* Рассмотрим равновесие по Нэшу  $L$  в игре с системой  $S$ , состоящей из 3 узлов с  $n$  игроками. Пронумеруем узлы так, что  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ . Согласно лемме 11.1, для любого равновесия по Нэшу в игре с системой  $S$  и любым количеством игроков есть соответствующее решение  $a, b, c$  системы (11.2.1). Согласно лемме 11.2, это решение определяет такое равновесие по Нэшу  $L'$  в игре с системой  $S$ , что ненулевые компоненты вектора  $a$  являются объемами задач на узле  $i$ , ненулевые компоненты  $b$  – объемами задач на узле  $j$  и ненулевые компоненты  $c$  – объемами задач на узле  $l$ . По определению, сумма компонент вектора  $a$  равна нагрузке на узле  $i$  в профиле  $L$ . Следовательно, задержки на узле  $i$  совпадают в обоих равновесиях  $L$  и  $L'$ . Аналогично, для узлов  $j$  и  $l$  задержки на них в равновесии  $L$  совпадают с соответствующими задержками в равновесии  $L'$ .  $\square$

Из данной теоремы следует, что достаточно рассматривать только те игры, где в равновесии на каждом узле находится не более трех задач и равновесие является решением системы (11.2.1). При этом область значений затрат системы совпадает с областью значений для игр с произвольным числом игроков.

### § 11.3 Игра балансировки загрузки

Рассмотрим модель балансировки загрузки, в которой затраты системы определяются как максимальная задержка среди всех узлов:

$$SC(L) = \max_{i=1, \dots, N} \lambda_i(L).$$

Обозначим

$$OPT = OPT(S, U) = \min_{L - \text{профиль в } \Gamma(S, U)} SC(L)$$

оптимальные затраты (затраты системы в оптимальном случае), где минимум выбирается по всем возможным профилям стратегий в игре  $\Gamma(S, U)$ .

Определим цену анархии для системы  $S$  следующим образом.

**Определение 11.2.** *Ценой анархии для системы  $S$  называется максимум отношения затрат системы в наихудшем равновесии по Нэшу к затратам системы в оптимальном случае:*

$$PoA(S) = \max_U \frac{\max_{L - \text{равновесие по Нэшу в } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)}{OPT(S, U)}.$$

Следующая теорема показывает, что для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением только тех игр, для которых оптимальные затраты системы равны 1.

**Теорема 11.2.** *Цена анархии для системы  $S$  равна  $PoA(S) =$*

$$= \max_{U_1: OPT(S, U_1)=1} \max_{L - \text{равновесие по Нэшу в } \Gamma(S, U_1, \lambda)} SC(L).$$

*Доказательство.* Пусть  $L$  – наихудшее равновесие в игре  $\Gamma(S, U, \lambda)$  с произвольным множеством игроков  $U(n, w)$ , где объем задачи каждого игрока  $j$  равен  $w_j$ , а  $L_{OPT}$  – оптимальный профиль в этой игре. Обозначим  $\delta'_i = \delta_i(L)$  загрузку каждого узла  $i$  в равновесии  $L$  в данной игре. Пусть  $SC$  и  $OPT$  – затраты системы в равновесии  $L$  и в оптимальном профиле, соответственно. Отношение затрат системы в наихудшем равновесии к оптимальным равно  $\frac{SC}{OPT}$ .



Так как  $L$  – равновесие, то для любого игрока  $j$  выполняется  $\sum_{k=1, \dots, N} \alpha_{l_j k} \delta'_k \leq \sum_{k=1, \dots, N} \alpha_{ik} \delta'_k + w_j(\alpha_{ii} - \alpha_{il_j})$  для любого узла  $i$ .

Рассмотрим теперь игру с тем же набором узлов и игроков, но где у каждого игрока  $j$  объем задачи равен  $\frac{w_j}{OPT}$ . Значение затрат системы в  $L$  равно  $\frac{SC}{OPT}$ , и затраты системы в  $L_{OPT}$  равны 1. Покажем теперь, что  $L$  и  $L_{OPT}$  в новой игре также являются наихудшим равновесием и оптимальным профилем, соответственно. В частности, профиль  $L$  является равновесием в новой игре, так как для любого игрока  $j$  неравенство  $\frac{\sum_{k=1, \dots, N} \alpha_{l_j k} \delta'_k}{OPT} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, N} \alpha_{ik} \delta'_k + w_j(\alpha_{ii} - \alpha_{il_j})}{OPT}$  выполняется на любом из узлов  $i$ . Пусть  $L$  – не наихудшее равновесие в новой игре. Тогда в ней существует равновесие  $L'$  с затратами системы  $\frac{SC'}{OPT}$  такое, что затраты системы в  $L'$  больше затрат системы в  $L$ , то есть  $\frac{SC'}{OPT} > \frac{SC}{OPT}$ . Но тогда в исходной игре профилю  $L'$  соответствуют затраты системы  $SC' > SC$  и равновесие  $L'$  хуже равновесия  $L$ . Аналогично,  $L_{OPT}$  является оптимальным профилем в новой игре. Тогда отношение наихудших равновесных затрат системы к оптимальным в новой игре также равно  $\frac{SC}{OPT}$ .

Следовательно, любой игре  $\Gamma(S, U)$  соответствует игра  $\Gamma(S, U_1)$  с объемами задач, нормированными таким образом, что  $OPT(S, U_1) = 1$ . При этом отношения затрат системы в наихудшем равновесии к оптимальным для обеих игр одинаковы. Значит, для нахождения цены анархии достаточно рассмотреть только те игры, в которых оптимальные затраты равны 1.  $\square$

### § 11.3.1 Вычисление цены анархии для модели трех узлов

Пусть компоненты векторов  $a, b, c$  выбираются таким образом, что в оптимальном профиле, дающем минимум затрат системы, на узле  $i$  находится суммарный объем задач, равный  $a_1 + b_1 + c_1$ , на  $j$  – объем  $a_2 + b_2 + c_2$ , на  $l$  – объем  $a_3 + b_3 + c_3$ . При этом в оптимальном профиле наибольшей может оказаться задержка на любом из трех узлов. Кроме того, согласно теореме 11.2, объемы задач можно считать пронормированными таким образом, чтобы в оптимальном профиле максимальная среди всех узлов задержка была строго равна 1. В

нашем случае это означает, что справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}\alpha_{ii}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{ij}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{il}(a_3 + b_3 + c_3) &\leq 1, \\ \alpha_{ji}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{jj}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{jl}(a_3 + b_3 + c_3) &\leq 1, \\ \alpha_{li}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{lj}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{ll}(a_3 + b_3 + c_3) &\leq 1,\end{aligned}$$

причем как минимум одно из них выполняется как равенство.

Определим теперь задачу линейного программирования  $LPP(i, j, l)$ , где  $i, j$  и  $l$  – номера узлов.

**Лемма 11.3.** *Ненулевое решение задачи линейного программирования  $LPP(i, j, l)$ :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \Delta(a, b, c) \rightarrow \max \\ (r1) \quad \alpha_i \Delta(a, b, c) \leq \alpha_j \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k (\alpha_{jj} - \alpha_{ji}) \\ (r2) \quad \alpha_i \Delta(a, b, c) \leq \alpha_l \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k (\alpha_{ll} - \alpha_{li}) \\ (r3) \quad \alpha_j \Delta(a, b, c) \leq \alpha_l \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:b_k>0} b_k (\alpha_{ll} - \alpha_{lj}) \text{ или } \max_{k=1,2,3} b_k = 0 \\ (r4) \quad \alpha_i \Delta(a, b, c) \geq \alpha_j \Delta(a, b, c) \geq \alpha_l \Delta(a, b, c) \\ (r5) \quad a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3 \\ (r6) \quad \alpha_{ii}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{ij}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{il}(a_3 + b_3 + c_3) \leq 1, \\ (r7) \quad \alpha_{ji}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{jj}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{jl}(a_3 + b_3 + c_3) \leq 1, \\ (r8) \quad \alpha_{li}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{lj}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{ll}(a_3 + b_3 + c_3) \leq 1, \end{array} \right. \quad (11.3.1)$$

для компонент векторов  $a, b$  и  $c$  дает максимальное значение затрат системы в равновесии по Нэшу среди всех игр, где в равновесии не более трех задач выполняются на каждом из узлов,  $i, j$  и  $l$  – номера узлов в порядке уменьшения задержки на них, а оптимальные затраты системы равны 1.

*Доказательство.* По лемме 11.2 любое решение неравенств (r1) – (r5) задачи  $LPP(i, j, l)$  определяет равновесие в игре с тремя узлами, где на каждом узле находится не более трех задач и  $i, j, l$  – номера узлов в порядке уменьшения задержки.

Целевая функция в данной задаче ограничена сверху только гиперплоскостями, соответствующими неравенствам (r6) – (r8). Неравенства (r1) – (r5) допускают сколь угодно большие значения целевой функции, так как если  $(a, b, c)$  яв-

ляется решением, то для любого вещественного числа  $\beta > 0$ , набор  $(\beta a, \beta b, \beta c)$  также является решением. Следовательно, максимум задачи достигается на одной из границ, соответствующих трем последним неравенствам, что гарантирует выполнение одного из них как равенства, а значит, оптимальные затраты для игры, соответствующей решению задачи  $LPP(i, j, l)$ , строго равны 1.  $\square$

Тогда для нахождения точного значения цены анархии для системы  $S$  с тремя узлами нужно решить ряд задач линейного программирования  $LPP(i, j, l)$  для всех перестановок номеров вычислительных узлов. Максимальное из этих решений даст значение  $PoA(S)$ . То есть справедлива следующая теорема.

**Теорема 11.3.** *Цена анархии для системы трех узлов  $S$  равна*

$$PoA(S) = \max_{(i,j,l) \text{ перестановки } (1,2,3)} \{ \alpha_i \Delta(a, b, c) \mid a, b, c \text{ решение } LPP(i, j, l) \},$$

где  $LPP(i, j, l)$  задача линейного программирования (11.3.1).

*Доказательство.* Согласно лемме 11.3, решение задачи (11.3.1) дает максимальное значение затрат системы в равновесии по Нэшу, где  $i, j, l$  – номера узлов в порядке уменьшения задержки, среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач на каждом узле, а оптимальные затраты равны 1. Максимум решения среди задач для всех возможных перестановок номеров узлов  $(1, 2, 3)$  даст максимальное значение затрат системы в равновесии по Нэшу среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач на каждом узле, а оптимальные затраты равны 1.

По теореме 11.1 для любого равновесия в игре с системой обслуживания трех узлов  $S$  и произвольным числом игроков можно найти соответствующее равновесие в игре с теми же узлами и множеством не более 9 игроков, где на каждом узле находится не более трех задач, причем затраты системы в обоих равновесиях совпадают. Значит, для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением игр, где в равновесии на каждом узле находится не более трех задач.

По теореме 11.2 для нахождения цены анархии достаточно ограничиться

рассмотрением игр, где затраты системы в оптимальном профиле строго равны 1. □

### § 11.3.2 Цена анархии для модели с линейными экстерналиями

Рассмотрим игру с линейными экстерналиями, определенную в главе 8 как частный случай данной модели. В такой игре задержка узла  $i$  определяется в виде

$$\lambda_i(L) = \sum_{j \in M: l_j = i} \frac{w_j}{v_i} + \sum_{k \neq i} e_{ik} \sum_{j \in M: l_j = k} w_j = \frac{\delta_i(L)}{v_i} + \sum_{k \neq i} e_{ik} \delta_k(L).$$

Здесь  $v_i$  – скорость вычислительного узла  $i$ , и каждый из коэффициентов экстерналий  $e_{ik}$  отражает влияние загрузки узла  $k$  на задержку узла  $i$ .

Также предполагаем следующее:

1. Для каждой пары узлов  $i \neq k$  справедливо неравенство  $e_{ik} < \frac{1}{v_i}$ .
2. Для каждой пары узлов  $i \neq k$  справедливо  $e_{ki} < \frac{1}{v_i}$ .
3. Для каждой пары процессоров  $i \neq k$ , таких что  $v_i \geq v_k$ , выполнено неравенство  $\sum_{l \neq i} e_{il} \leq \sum_{l \neq k} e_{kl}$ .

Теорема 8.1 доказывает, что в игре с двумя вычислительными узлами с линейными экстерналиями всегда есть равновесие по Нэшу в чистых стратегиях. Более того, получено точное выражение для значения цены анархии для системы двух узлов со скоростями  $1 \leq s$ , равное

$$Est(S) = \min\left\{Est^{max}(S), \frac{\eta}{s\zeta}\right\}, \quad (11.3.2)$$

где

$$Est^{max}(S) = \max\left\{\frac{\eta(\zeta+1-se_{21})}{\zeta(\eta+1-se_{21})}, \frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+s^2e_{21}}, \frac{s-se_{21}+e_{12}(1-se_{12})}{\zeta}\right\},$$

и  $\eta = 1 + s - s(e_{12} + e_{21})$ ,  $\zeta = 1 - se_{12}e_{21}$ .

Покажем, что значения цены анархии, которые дает точное выражение 11.3.2, совпадают с теми, которые дает численный метод, что подтвердит его корректность.

Так как рассматриваемая в данном разделе модель с линейными экстерналиями является случаем обобщенной модели с линейными задержками, построим аналогичным образом задачу линейного программирования  $LPP(i, j)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1+a_2}{v_i} + e_{ij}(b_1 + b_2) \rightarrow \max \\ \frac{a_1+a_2}{v_i} + e_{ij}(b_1 + b_2) \leq \frac{b_1+b_2}{v_j} + e_{ji}(a_1 + a_2) + \min_{k=1,2:a_k>0} a_k \left( \frac{1}{v_j} - e_{ji} \right) \\ \frac{a_1+a_2}{v_i} + e_{ij}(b_1 + b_2) \geq \frac{b_1+b_2}{v_j} + e_{ji}(a_1 + a_2) \\ a_k, b_k \geq 0, k = 1, 2 \\ \frac{a_1+b_1}{v_i} + e_{ij}(a_2 + b_2) \leq 1 \\ \frac{a_2+b_2}{v_j} + e_{ji}(a_1 + b_1) \leq 1. \end{array} \right. \quad (11.3.3)$$

Следующая теорема является частным случаем теоремы 11.3, сужая ее также на случай двух узлов.

**Теорема 11.4.** *Для системы  $S$  двух вычислительных узлов цена анархии равна*

$$PoA(S) = \max_{(i,j) \text{ перестановки } (1,2)} \left\{ \frac{a_1+a_2}{v_i} + e_{ij}(b_1 + b_2) \mid a, b \text{ решение } LPP(i, j) \right\},$$

где  $LPP(i, j)$  – задача линейного программирования (11.3.3).

### § 11.3.3 Численные примеры

Для оценки цены анархии в модели с двумя узлами с линейными экстерналиями разработана программа, позволяющая визуально изобразить значения цены анархии, получаемые путем решения набора задач линейного программирования. В программе задаются значения экстерналий, при этом скорость медленного узла равна 1, а скорость самого быстрого узла  $s$  меняется в заданном диапазоне. Таким образом пользователь может наблюдать динамику значения цены анархии относительно скорости быстрого узла.

На рис. 11.1 и 11.2 представлены примеры вычисленных значений цены анархии для различных значений  $s$ . Рис. 11.1 представляет значения цены анархии для значений экстерналий  $e_{12} = 0.11$  и  $e_{21} = 0.1$ . Рис. 11.2 представляет случай, когда экстерналии равны  $e_{12} = 0.3$  и  $e_{21} = 0.1$ .

Все найденные численным методом значения цены анархии совпадают с соответствующими значениями, получаемыми на основе аналитического выражения (11.3.2). Дополнительно, программа случайным образом генерирует набор задач  $U$ , находит для каждой полученной игры  $\Gamma(S, U)$  отношение затрат системы в наихудшем равновесии по Нэшу к оптимальным затратам и выводит на графике соответствующую точку. Все такие точки расположены не выше вычисленных значений цены анархии, что также подтверждает корректность найденных значений цены анархии.

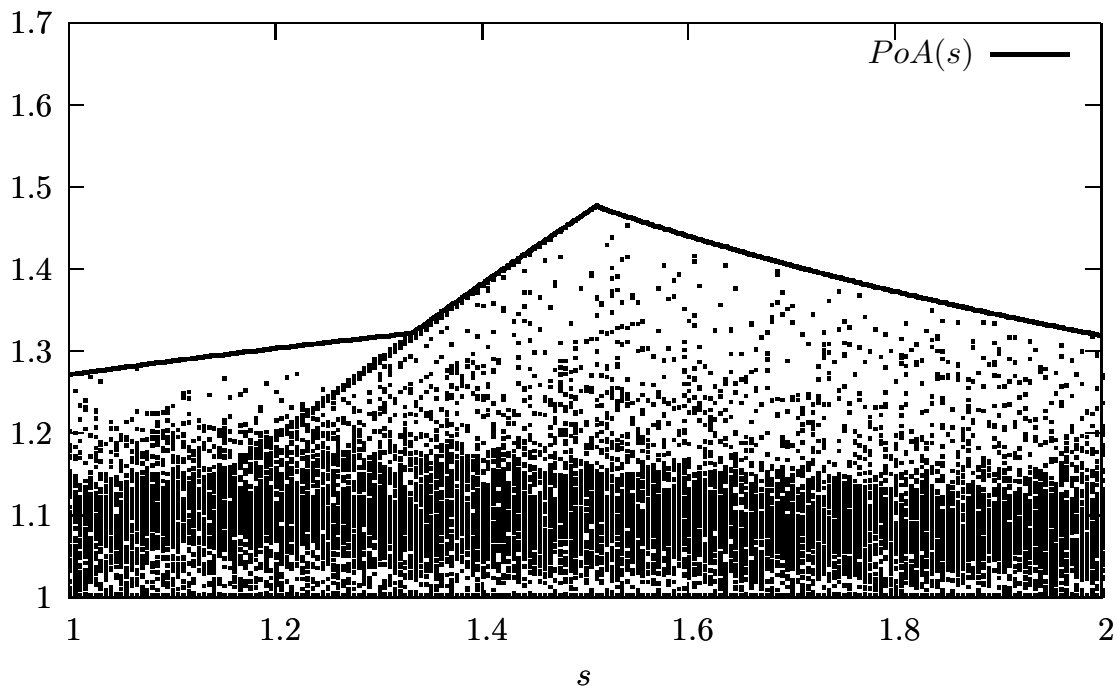


Рис. 11.1: Цена анархии для системы  $S$  с  $e_{12} = 0.11$ ,  $e_{21} = 0.1$ .

## § 11.4 Игра покрытия

Рассмотрим модель покрытия, в которой выигрыш системы определяется как минимальная задержка среди всех узлов:

$$SC(L) = \min_{i=1, \dots, N} \lambda_i(L).$$

Обозначим

$$OPT = OPT(S, U) = \max_{L - \text{профиль в } \Gamma(S, U)} SC(L)$$

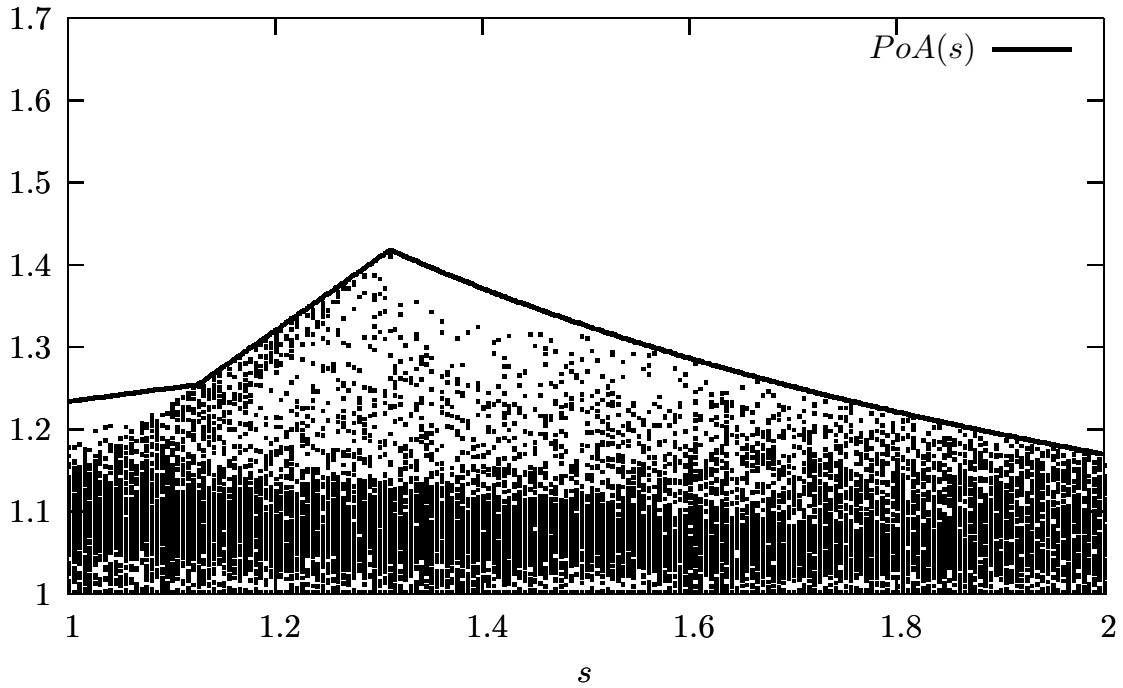


Рис. 11.2: Цена анархии для системы  $S$  с  $e_{12} = 0.3$ ,  $e_{21} = 0.1$ .

оптимальный выигрыш (выигрыш системы в оптимальном случае), где максимум выбирается по всем возможным профилям стратегий в игре  $\Gamma(S, U)$ .

Определим цену анархии для системы  $S$  следующим образом.

**Определение 11.3.** *Ценой анархии для системы  $S$  называется максимум отношения оптимального выигрыша системы к выигрышу в наихудшем равновесии по Нэшу:*

$$PoA(S) = \max_U \frac{OPT(S, U)}{\min_{L - \text{равновесие по Нэшу в } \Gamma(S, U)} SC(L)}.$$

Следующая теорема показывает, что для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением только тех игр, для которых оптимальный выигрыш системы равен 1.

**Теорема 11.5.** *Цена анархии для системы  $S$  равна*

$$PoA(S) = \max_{U_1: OPT(S, U_1)=1} \frac{1}{\min_{L - \text{равновесие по Нэшу в игре } \Gamma(S, U_1)} SC(L)}.$$

*Доказательство.* Пусть  $L$  – наихудшее равновесие в игре  $\Gamma(S, U, \lambda)$  с произвольным множеством игроков  $U(n, w)$ , где объем задачи каждого игрока  $j$  равен  $w_j$ , а  $L_{OPT}$  – оптимальный профиль в этой игре. Обозначим  $\delta'_i = \delta_i(L)$

загрузку каждого узла  $i$  в равновесии  $L$  в данной игре. Пусть  $SC$  и  $OPT$  – выигрыш системы в равновесии  $L$  и в оптимальном профиле, соответственно. Отношение оптимального выигрыша системы к выигрышу в наихудшем равновесии равно  $\frac{OPT}{SC}$ . Так как  $L$  – равновесие, то для любого игрока  $j$  выполняется

$$\sum_{k=1, \dots, N} \alpha_{l_j k} \delta'_k \leq \sum_{k=1, \dots, N} \alpha_{i k} \delta'_k + w_j (\alpha_{i i} - \alpha_{i l_j}) \text{ для любого узла } i.$$

Рассмотрим теперь игру с тем же набором узлов и игроков, но где у каждого игрока  $j$  объем задачи равен  $\frac{w_j}{OPT}$ . Значение выигрыша системы в  $L$  равно  $\frac{SC}{OPT}$ , и выигрыша системы в  $L_{OPT}$  равны 1. Покажем теперь, что  $L$  и  $L_{OPT}$  в новой игре также являются наихудшим равновесием и оптимальным профилем, соответственно. В частности, профиль  $L$  является равновесием в новой игре, так как для любого игрока  $j$  неравенство  $\frac{\sum_{k=1, \dots, N} \alpha_{l_j k} \delta'_k}{OPT} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, N} \alpha_{i k} \delta'_k + w_j (\alpha_{i i} - \alpha_{i l_j})}{OPT}$  выполняется на любом из узлов  $i$ . Пусть  $L$  – не наихудшее равновесие в новой игре. Тогда в ней существует равновесие  $L'$  с выигрышем системы  $\frac{SC'}{OPT}$  такое, что выигрыш системы в  $L'$  меньше выигрыша системы в  $L$ , то есть  $\frac{SC'}{OPT} < \frac{SC}{OPT}$ . Но тогда в исходной игре профилю  $L'$  соответствует выигрыш системы  $SC' < SC$  и равновесие  $L'$  хуже равновесия  $L$ . Аналогично,  $L_{OPT}$  является оптимальным профилем в новой игре. Тогда отношение оптимального выигрыша системы к наихудшему равновесному выигрышу системы в новой игре также равно  $\frac{OPT}{SC}$ .

Следовательно, любой игре  $\Gamma(S, U)$  соответствует игра  $\Gamma(S, U_1)$  с объемами задач, нормированными таким образом, что  $OPT(S, U_1) = 1$ . При этом отношения оптимального выигрыша к выигрышу системы в наихудшем равновесии для обеих игр одинаковы. Значит, для нахождения цены анархии достаточно рассмотреть только те игры, в которых оптимальный выигрыш равен 1.  $\square$

### § 11.4.1 Вычисление цены анархии для модели трех узлов

Пусть компоненты векторов  $a, b, c$  выбираются таким образом, что в оптимальном профиле, дающем максимальный выигрыш системы, на узле  $i$  находится суммарный объем задач, равный  $a_1 + b_1 + c_1$ , на  $j$  – объем  $a_2 + b_2 + c_2$ , на  $l$  – объем  $a_3 + b_3 + c_3$ . При этом в оптимальном профиле наибольшей может оказаться задержка на любом из трех узлов. Кроме того, согласно теореме 11.5, объемы задач можно считать пронормированными таким образом, чтобы в оптималь-



ном профиле минимальная среди всех узлов задержка была строго равна 1. В нашем случае это означает, что справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}\alpha_{ii}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{ij}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{il}(a_3 + b_3 + c_3) &\geq 1, \\ \alpha_{ji}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{jj}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{jl}(a_3 + b_3 + c_3) &\geq 1, \\ \alpha_{li}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{lj}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{ll}(a_3 + b_3 + c_3) &\geq 1,\end{aligned}$$

причем как минимум одно из них выполняется как равенство.

Определим теперь задачу линейного программирования  $LPP(i, j, l)$ , где  $i, j$  и  $l$  – номера узлов.

**Лемма 11.4.** *Ненулевое решение задачи линейного программирования  $LPP(i, j, l)$ :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_l \Delta(a, b, c) \rightarrow \min \\ (r1) \quad \alpha_i \Delta(a, b, c) \leq \alpha_j \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k (\alpha_{jj} - \alpha_{ji}) \\ (r2) \quad \alpha_i \Delta(a, b, c) \leq \alpha_l \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k (\alpha_{ll} - \alpha_{li}) \\ (r3) \quad \alpha_j \Delta(a, b, c) \leq \alpha_l \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:b_k>0} b_k (\alpha_{ll} - \alpha_{lj}) \text{ или } \max_{k=1,2,3} b_k = 0 \\ (r4) \quad \alpha_i \Delta(a, b, c) \geq \alpha_j \Delta(a, b, c) \geq \alpha_l \Delta(a, b, c) \\ (r5) \quad a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3 \\ (r6) \quad \alpha_{ii}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{ij}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{il}(a_3 + b_3 + c_3) \geq 1, \\ (r7) \quad \alpha_{ji}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{jj}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{jl}(a_3 + b_3 + c_3) \geq 1, \\ (r8) \quad \alpha_{li}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{lj}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{ll}(a_3 + b_3 + c_3) \geq 1,\end{array} \right. \quad (11.4.1)$$

для компонент векторов  $a, b$  и  $c$  дает минимальный выигрыш системы в равновесии по Нэшу среди всех игр, где в равновесии не более трех задач выполняются на каждом из узлов,  $i, j$  и  $l$  – номера узлов в порядке уменьшения задержки на них, а оптимальный выигрыш системы равен 1.

*Доказательство.* По лемме 11.2 любое решение неравенств (r1) – (r5) задачи  $LPP(i, j, l)$  определяет равновесие в игре с тремя узлами, где на каждом узле находится не более трех задач и  $i, j, l$  – номера узлов в порядке уменьшения задержки.

Целевая функция в данной задаче ограничена снизу только гиперплоскостями, соответствующими неравенствам (r6) – (r8). Неравенства (r1) – (r5)

допускают сколь угодно малые неотрицательные значения целевой функции. Следовательно, минимум задачи достигается на одной из границ, соответствующих трем последним неравенствам, что гарантирует выполнение одного из них как равенства, а значит, оптимальный выигрыш для игры, соответствующей решению задачи  $LPP(i, j, l)$ , строго равен 1.  $\square$

Тогда для нахождения точного значения цены анархии для системы  $S$  с тремя узлами нужно решить ряд задач линейного программирования  $LPP(i, j, l)$  для всех перестановок номеров вычислительных узлов. Минимальное из этих решений даст значение  $\frac{1}{PoA(S)}$ . То есть справедлива следующая теорема.

**Теорема 11.6.** *Цена анархии  $PoA(S)$  для системы трех узлов  $S$  равна величине, обратной*

$$\frac{1}{PoA(S)} = \min_{(i,j,l) \text{ перестановки } (1,2,3)} \{ \alpha_l \Delta(a, b, c) \mid a, b, c \text{ решение } LPP(i, j, l) \},$$

где  $LPP(i, j, l)$  – задача линейного программирования (11.3.1).

*Доказательство.* Согласно лемме 11.4, решение задачи (11.4.1) дает минимальное значение выигрыша системы в равновесии по Нэшу, где  $i, j, l$  – номера узлов в порядке уменьшения задержки, среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач на каждом узле, а оптимальный выигрыш равен 1. Минимум решения среди задач для всех возможных перестановок номеров узлов  $(1, 2, 3)$  даст минимальное значение выигрыша системы в равновесии по Нэшу среди всех игр, в которых в равновесии не более трех задач на каждом узле, а оптимальный выигрыш равен 1.

По теореме 11.1 для любого равновесия в игре с системой обслуживания трех узлов  $S$  и произвольным числом игроков можно найти соответствующее равновесие в игре с теми же узлами и множеством не более 9 игроков, где на каждом узле находится не более трех задач, причем затраты системы в обоих равновесиях совпадают. Значит, для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением игр, где в равновесии на каждом узле находится не более трех задач.

По теореме 11.5 для нахождения цены анархии достаточно ограничиться рассмотрением игр, где выигрыш системы в оптимальном профиле строго равен 1. □

## § 11.5 Результаты

В данной главе предложен численный метод нахождения точного значения цены анархии. Алгоритм может быть обобщен на систему с большим, чем три, числом вычислительных узлов, однако это увеличит число задач линейного программирования, которые нужно решить, и число переменных и ограничений в каждой из них. Предложенный алгоритм реализован программно и проведены вычислительные эксперименты для случая игры балансировки загрузки с экстерналиями с двумя узлами, в которой всегда есть равновесие по Нэшу в чистых стратегиях. Результаты эксперимента подтверждают корректность предложенного алгоритма.

## Глава 12

# Оптимальная маршрутизация с разделяемым трафиком

### § 12.1 Модель Вардропа с параллельными каналами

Рассматриваемая в данной главе модель маршрутизации [25, 71] основана на модели Вардропа [98, 145, 185]. Данная модель применяется для нахождения оптимального распределения трафика по маршрутам в телекоммуникационных или транспортных сетях. Критерием оптимальности является минимизация задержки пересылаемого трафика.

Задача оптимальной маршрутизации трафика рассматривается как игра  $\Gamma = \langle n, m, w, Z, f \rangle$ , в которой  $n$  пользователей передают трафик по параллельным каналам сети передачи данных. Сеть имеет топологию  $G = ((s, t), E)$ , где  $E = \{1, \dots, m\}$  каналов связывают источник  $s$  и приемник  $t$ . Любой маршрут из  $s$  в  $t$  состоит из одного канала  $e \in E$  пропускной способностью  $c_e$ . Каждому пользователю  $i$  нужно распределить для передачи по каналам свой трафик объема  $w_i$ .

Данная модель может быть интерпретирована в контексте многопользовательской многопутевой сетевой маршрутизации. Каждый пользователь имеет подключения к различным сетям передачи данных, что дает ему возможность доставлять свой трафик по нескольким путям одновременно. Глобальное окно TCP увеличивается и уменьшается в соответствии с политикой TCP New Reno AIMD (аддитивное увеличение, мультипликативное уменьшение). Момент изменения размера окна, которое происходит, когда новое подтверждающее сооб-

щение принимается источником  $s$  от приемника  $t$ , представляет собой очередной шаг в процессе принятия решения. На каждом шаге пользователь принимает идентичные решения, как распределить заданное количество  $w_i$  своего потока трафика ТСР между доступными путями.

В контексте маршрутизации транспорта параллельная сеть представляет собой множество параллельных путей между двумя пунктами, например, районами города. Пользователи – это суммарные транспортные потоки, различающиеся по типу, например, легковой транспорт, грузовой транспорт, автобусы, троллейбусы. В условиях пиковой нагрузки на маршруты становится актуальной проблема оптимального распределения таких потоков по доступным путям.

Для каждого из пользователей могут быть введены запреты на использование определенных каналов. При этом будем считать, что для каждого из каналов есть хотя бы один пользователь, у которого есть доступ к данному каналу. Тогда наборы маршрутов для каждого пользователя  $i$  являются подмножествами множества всех каналов:  $Z_i \subseteq E$ , такими что  $\cup_{i=1}^n Z_i = E$ .

Пользователи действуют в собственных интересах, выбирая маршруты – каналы для отправки трафика таким образом, чтобы минимизировалась максимальная задержка при пересылке их трафика из  $s$  в  $t$ . Каждый пользователь определяет для себя стратегию  $x_i = \{x_{ie} \geq 0\}_{e \in Z_i}$ . При этом  $x_{ie}$  – количество трафика, которое пользователь  $i$  отправляет по каналу  $e$ , и  $\sum_{e \in Z_i} x_{ie} = w_i$ . Тогда  $x = (x_1, \dots, x_n)$  – профиль стратегий пользователей. Для профиля стратегий  $x$  будем использовать обозначение  $(x_{-i}, x'_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ , которое означает, что пользователь  $i$  изменил свою стратегию с  $x_i$  на  $x'_i$ , а остальные пользователи сохранили свои стратегии неизменными.

Для каждого из каналов определяется его загрузка

$$\delta_e(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{e \in Z_i} x_{ie}.$$

Задержка при пересылке трафика по данному маршруту зависит от загрузки канала. Непрерывная функция задержки трафика  $f_{ie}(x) = f_{ie}(\delta_e(x))$  определяется для каждого пользователя  $i$  и используемого им канала  $e$  и является неубывающей по величине загрузки канала и, следовательно, по  $x_{ie}$ .

Величина, которую каждый пользователь  $i$  стремится минимизировать – максимальная по всем используемым им каналам задержка его трафика, которая составляет персональные затраты данного пользователя [98]

$$PC_i(x) = \max_{e \in Z_i: x_{ie} > 0} f_{ie}(x).$$

**Определение 12.1.** Профиль  $x$  называется равновесием по Вардропу, если для каждого  $i$  и любых  $e, l \in Z_i$  из  $x_{ie} > 0$  следует  $f_{ie}(x) \leq f_{il}(x)$ .

Данное определение можно переформулировать в следующем виде.

**Определение 12.2.** Профиль  $x$  называется равновесием по Вардропу, если для каждого  $i$  справедливо: из  $x_{ie} > 0$  следует  $f_{ie}(x) = \min_{l \in Z_i} f_{il}(x) = \lambda_i$  и из  $x_{ie} = 0$  следует  $f_{ie}(x) > \lambda_i$ .

Такое определение в явном виде дает систему уравнений и неравенств для нахождения ситуаций равновесия по Вардропу.

**Определение 12.3.** Пусть  $x$  – некоторый профиль стратегий. Назовем затратами системы величину суммарной задержки всех игроков при использовании данного профиля:

$$SC(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{e \in Z_i} x_{ie} f_{ie}(x).$$

Заметим, что если  $x$  – равновесие по Вардропу, то по определению для каждого игрока  $i$  задержки на всех используемых им маршрутах  $e$  равны  $\lambda_i(x)$ , поэтому затраты системы в равновесии можно представить в виде

$$SC(x) = \sum_{i=1}^n w_i \lambda_i(x).$$

Минимальное значение затрат системы обозначим  $OPT = \min_x SC(x)$ .

Для сравнения наихудшего равновесия по Вардропу с оптимальным распределением используется цена анархии [69, 70, 163].

**Определение 12.4.** Максимальное значение отношения  $SC(x)/OPT$ , где затраты системы вычисляются только в точках равновесия по Вардропу, будем называть ценой анархии.

Далее в данной главе исследуются свойства равновесий по Вардропу и цены анархии для моделей с функциями задержки определенного вида.

## § 12.2 Игра с функциями задержки $\frac{\delta}{c-\delta}$

Рассмотрим игру  $\Gamma = \langle n, m, w, Z, f \rangle$  с параллельной сетью каналов передачи данных.

Пусть задержка трафика на канале  $e$  для каждого пользователя одинакова и равна  $f_e(x) = \frac{\delta_e(x)}{c_e - \delta_e(x)}$ , где  $\delta_e(x) = \sum_{i:e \in Z_i} x_{ie}$ . Тогда затраты системы будут иметь вид

$$SC(x) = \sum_{e=1}^m \frac{\delta_e^2(x)}{c_e - \delta_e(x)}.$$

Профиль  $x$  будет являться равновесием по Вардропу, если для любого пользователя  $i = 1, \dots, n$  и любого канала  $e \in Z_i$ , такого что  $x_{ie} > 0$ , будет выполняться

$$f_{ie}(x) = \frac{\delta_e(x)}{c_e - \delta_e(x)} = \lambda_i.$$

Профиль  $x$  будет глобально оптимальным, если он обеспечивает минимум функции затрат системы по всем профилям. По теореме Куна-Таккера  $x$  – оптимальный профиль, если для любого пользователя  $i = 1, \dots, n$  и любого канала  $e \in Z_i$ , такого что  $x_{ie} > 0$ , справедливо

$$\frac{\partial}{\partial x_{ie}} \left( SC(x) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \sum_{e \in Z_i} x_{ie} - w_i \right) \right) = 0$$

или  $\frac{2\delta_e(x)c_e - \delta_e^2(x)}{(c_e - \delta_e(x))^2} = \alpha_i.$

Так как функция затрат системы выпуклая, то оптимум существует.

Покажем, что если профиль  $x$  – равновесие по Вардропу, то он глобально оптимален. Пусть для некоторых  $i$  и  $e$   $x_{ie} > 0$ . Тогда  $\delta_e(x) = \lambda_i c_e / (\lambda_i + 1)$  и

$$\frac{2\delta_e(x)c_e - \delta_e^2(x)}{(c_e - \delta_e(x))^2} = \lambda_i(\lambda_i + 2) = \alpha_i.$$

То есть любая ситуация равновесия по Вардропу дает глобальный оптимум функции затрат системы. Это означает, что для данной модели цена анархии равна 1.

Найдем явно вид равновесия по Вардропу в данной модели.

Рассмотрим модель, в которой пользователи могут использовать все каналы. Суммарная пропускная способность сети равна  $C = \sum_{e=1}^m c_e$ . Каждому пользователю  $i = 1, \dots, n$  необходимо распределить отправляемый трафик объема  $w_i$  по всем каналам  $e = 1, \dots, m$  так, чтобы минимизировать максимальную среди всех используемых им каналов задержку трафика на канале. Суммарный трафик всех пользователей равен  $W = \sum_{i=1}^n w_i$ . Положим  $C > W$ , то есть сеть позволяет отправить весь трафик за конечное время.

Задержка трафика на канале  $e$  для каждого пользователя одинакова и равна  $f_e(x) = \frac{\delta_e(x)}{c_e - \delta_e(x)}$ , где  $\delta_e(x) = \sum_{i=1}^n x_{ie}$ . Тогда затраты системы будут иметь вид

$$SC(x) = \sum_{e=1}^m \frac{\delta_e^2(x)}{c_e - \delta_e(x)}.$$

Рассмотрим случай с одним пользователем и найдем равновесие по Вардропу. Функция затрат системы в данной модели имеет вид  $SC(x) = \sum_{e=1}^m \frac{x_e^2}{c_e - x_e}$ . Глобальный оптимум – это минимум данной функции по всем профилям стратегий  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , который существует и единственный, так как функция выпуклая.

В равновесии по Вардропу для любого канала  $e = 1, \dots, m$  выполняется

$$\text{из } x_e > 0 \text{ следует } \frac{x_e}{c_e - x_e} = \lambda > 0.$$

Для неиспользуемых каналов задержка равна нулю, поэтому в ситуации равновесия по Вардропу все каналы должны использоваться. Значит, в равновесии по Вардропу задержка трафика на всех каналах равна  $\lambda$  и для всех  $e = 1, \dots, m$  выполняется  $x_e = \lambda(c_e - x_e)$ . Просуммировав данное соотношение по  $e$ , получим  $\lambda = W/(C - W)$ . Тогда равновесие по Вардропу единственно: равновесный профиль  $x = \{x_e = Wc_e/C\}_{e=1}^m$  и затраты системы равны  $W^2/(C - W)$ .

Рассмотрим ту же модель с  $n$  пользователями. В равновесии по Вардропу для любого пользователя  $i = 1, \dots, n$  и любого канала  $e = 1, \dots, m$  выполняется

$$\text{из } x_{ie} > 0 \text{ следует } \frac{\sum_{k=1}^n x_{ke}}{c_e - \sum_{k=1}^n x_{ke}} = \lambda_i > 0.$$

Но задержка трафика на канале  $e$  одинакова для всех пользователей, которые его используют, поэтому для всех  $i$ , таких что  $x_{ie} > 0$ ,  $\lambda_i = \lambda$ . Для неиспользуемых никем каналов задержка равна нулю, поэтому в ситуации равновесия



по Вардропу каждый канал должен использоваться как минимум одним пользователем. Более того, если для какого-то пользователя  $i$   $x_{ie} = 0$ , то задержка на данном неиспользуемом им канале должна быть не меньше, чем на тех, которые он использует, то есть  $\frac{\sum_{k=1}^n x_{ke}}{c_e - \sum_{k=1}^n x_{ke}} \geq \lambda > 0$ . А значит, найдется хотя бы один пользователь  $k$ , такой что  $x_{ke} > 0$ , откуда следует, что задержка на данном канале строго равна  $\lambda$ . Следовательно, в равновесии по Вардропу задержка трафика на всех каналах равна  $\lambda$  и для всех  $e = 1, \dots, m$  выполняется  $\sum_{k=1}^n x_{ke} = \lambda(c_e - \sum_{k=1}^n x_{ke})$ . Просуммировав данное соотношение по  $e$ , получим  $\lambda = W/(C - W)$ . Тогда равновесием по Вардропу будет любая ситуация, где нагрузка на каналы распределена как в предыдущей модели:  $\sum_{k=1}^n x_{ke} = Wc_e/C$  для всех каналов  $e = 1, \dots, m$  и затраты системы равны  $W^2/(C - W)$ . Примером такого равновесного по Вардропу профиля может быть  $x = \{\{x_{ie} = w_k c_e / C\}_{e=1}^m\}_{i=1}^n$ .

### § 12.3 Игра с функциями задержки $1 - e^{-\alpha\delta}$

Задача моделируется как игра  $\Gamma = \langle n, m, w, f \rangle$ , где  $n$  пользователей отправляют свой TCP-трафик по  $m$  параллельным маршрутам от источника  $s$  к приемнику  $t$ . Здесь все пути разрешены использования всеми пользователями.

Количество времени, необходимое для прохождения одного пути в сети, обычно зависит от нагрузки, то есть задержка трафика на пути увеличивается по мере того, как он становится более перегруженным. На основе ряда экспериментальных наблюдений была выбрана функция задержки трафика [72]  $f_{ie}(\delta) = 1 - e^{-\alpha_{ie}\delta}$  для аппроксимации зависимости между задержкой TCP-трафика, контролируемого New Reno loss-recovery [93], и суммарной загрузкой канала  $\delta$ . Протокол TCP регулирует нагрузку, исходя из числа потерянных пакетов и соответственно снижает скорость передачи данных. Когда загрузка канала велика, потери пакетов на пути также велики, поэтому это предотвращает бесконечный рост задержки. В этой модели нас интересует только быстрый прием пакетов, а не возможная потеря некоторого количества пакетов.

Здесь затраты системы определяются как  $SC(x) = W - \sum_{i=1}^n \sum_{e=1}^m x_{ie} e^{-\alpha_{ie}\delta_e(x)}$ ,

где  $W = \sum_{i=1}^n w_i$  – общий трафик в сети.

Теперь предположим, что задержка трафика на пути  $e$  одинакова для каждого пользователя и равна  $f_e(x) = 1 - e^{-\alpha_e \delta_e(x)}$ , что дает

$$SC(x) = W - \sum_{e=1}^m \delta_e(x) e^{-\alpha_e \delta_e(x)}.$$

Пусть профиль  $x$  – равновесный по Вардропу. По определению если  $x_{ie} > 0$  тогда  $f_e(x) = \min_l f_l(x) = \lambda_i$  а если  $x_{ie} = 0$ , то  $f_e(x) \geq \lambda_i$ . Поскольку задержка трафика на пути  $e$  одинакова для всех пользователей, для каждого  $i$  такого, что  $x_{ie} > 0$ , то  $\lambda_i = \lambda$ . Задержки на неиспользуемых маршрутах равны нулю, поэтому в равновесии Wardrop каждый путь должен использоваться хотя бы одним пользователем. Более того, если для некоторого пользователя  $i$  на пути  $e$  его собственный трафик равен  $x_{ie} = 0$ , то задержка трафика на этом пути должно быть не меньше задержек на путях, которыми он пользуется, то есть  $1 - e^{-\alpha_e \delta_e(x)} \geq \lambda > 0$ . Это означает, что существует хотя бы один пользователь  $k$ , такой что  $x_{ke} > 0$ , следовательно задержка трафика на этом пути в точности равна  $\lambda$ .

Это означает, что в равновесии по Вардропу задержки трафика на каждом маршруте равны  $\lambda$  и для всех  $e \in \{1, \dots, m\}$  выполняется  $\delta_e(x) = -\frac{\ln(1-\lambda)}{\alpha_e}$ .

Суммируя эти выражения по  $e$ , получаем

$$W = -\ln(1-\lambda) \sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e} \quad \text{и} \quad \lambda = 1 - e^{-\frac{W}{\sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}}}.$$

Подставляя  $\lambda$  в выражение для  $\delta_e(x)$  получаем, что в равновесии Вардропы нагрузки распределяются по маршрутам следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n x_{ie} = \delta_e(x) = \frac{W}{\alpha_e \sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}} \quad \text{для каждого} \quad e \in \{1, \dots, m\},$$

Равновесные затраты системы равны

$$SC(x) = W \left( 1 - e^{-\frac{W}{\sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}}} \right).$$

Значение одинаково для любого равновесия Вардропы, что означает, что значение цены анархии не может быть бесконечным.

Далее мы находим социально оптимальную ситуацию. Профиль стратегии  $x$  является социальным оптимумом, если он обеспечивает минимум затрат системы по всем профилям. Функция затрат системы не является выпуклой, поэтому нельзя гарантировать, что его локальный минимум также является глобальным. Но можно попытаться получить некоторые стационарные точки и проверить их оптимальность.

Согласно теореме Каруша-Куна-Таккера точка  $x$  является стационарной, если для каждого пользователя  $i$  и каждого канала  $e$ , такого, что  $x_{ie} > 0$ , выполняется

$$\frac{\partial}{\partial x_{ie}} \left( SC(x) - \sum_{i=1}^n \gamma_i \left( \sum_{e=1}^m x_{ie} - w_i \right) \right) = 0$$

или  $e^{-\alpha_e \delta_e(x)} (\alpha_e \delta_e(x) - 1) = \gamma_i$ .

В равновесии  $1 - e^{-\alpha_e \delta_e(x)} = \lambda_i$  для всех  $e$ , или  $\alpha_e \delta_e(x) = -\ln(1 - \lambda_i) = \text{const}$  на  $e$ , что удовлетворяет требованиям стационарной точки, но вопрос ее социальной оптимальности нуждается в дополнительном исследовании.

Однако, поскольку  $e^a \geq 1 + a$  при  $a > 0$ , мы можем дать нижнюю оценку  $LSC(x)$  для значений функции затрат системы:

$$SC(x) \geq LSC(x) = W - \sum_{e=1}^m \frac{\delta_e(x)}{1 + \alpha_e \delta_e(x)}.$$

Функция  $LSC(x)$  выпукла, поэтому имеет единственный минимум, то есть глобальный минимум. Стационарная точка для  $SC(x)$  является также стационарной точкой для его нижней оценки  $LSC(x)$ . Таким образом, минимумом для  $LSC(x)$  и нижней оценкой для  $SC(x)$  является равновесный по Вардропу про-

филь  $x^{WE}$ , такой что  $\delta_e(x^{WE}) = \frac{W}{\alpha_e \sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}}$ :

$$\begin{aligned}
 SC(x) \geq LSC(x^{WE}) &= W - \sum_{l=1}^m \left( \frac{1}{\alpha_l} \frac{W}{\left( \sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e} \right) \left( 1 + \alpha_l \frac{W}{\alpha_l \sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}} \right)} \right) = \\
 &= W - \sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e} \frac{W}{\left( \sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e} \right) \left( 1 + \frac{W}{\sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}} \right)} = \\
 &= W - \frac{W}{1 + \frac{W}{\sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}}} = W \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{W}{\sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}}} \right).
 \end{aligned}$$

Следующий пример демонстрирует, что стационарная точка равновесия по Вардропу может быть наихудшим и лучшим случаем для различных сетей в зависимости от их свойств.

**Пример 21.** Рассмотрим сеть с двумя путями. Общий объем трафика пользователей равен 1, характеристики каналов равны  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Загрузки каналов равны  $\delta(x)$  и  $1-\delta(x)$ . Пусть сначала  $\alpha_1 = 10$  и  $\alpha_2 = 20$ . В этом случае равновесие по Вардропу дает максимальное значение  $SC(x)$  (и минимальное значение  $LSC(x)$ ), как показано на рис. 12.1. Здесь равновесие по Вардропу является наихудшим профилем. Теперь пусть  $\alpha_1 = 1$  и  $\alpha_2 = 2$ . В этом случае равновесие по Вардропу дает минимальное значение  $SC(x)$ , а также минимальное значение  $LSC(x)$  (см. рис. 12.2). Это равновесие по Вардропу является оптимальным случаем.

Теперь мы можем оценить значение цены анархии для игры с параллельными путями. Очевидно, что ее нижняя оценка равна 1, поскольку оптимальным профилем может быть равновесие по Вардропу. Также мы можем дать верхнюю

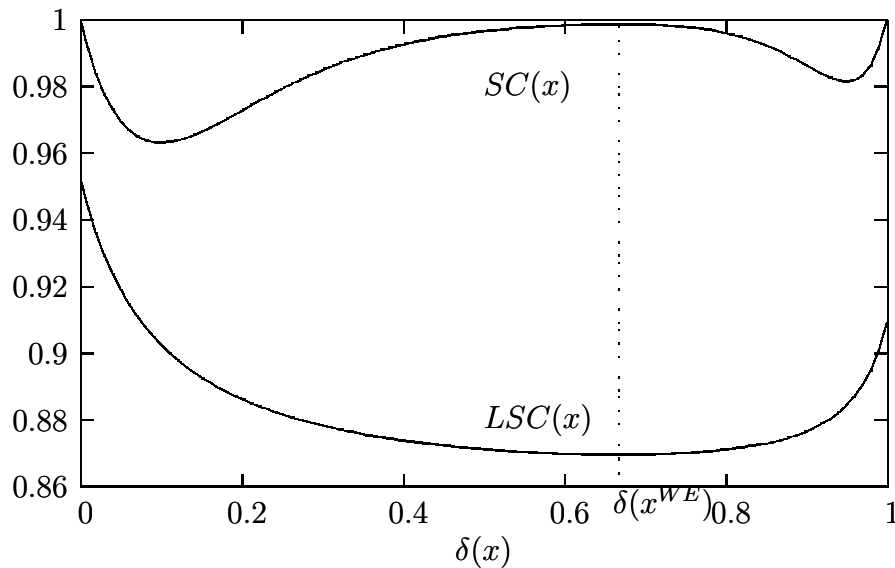


Рис. 12.1: Равновесие по Вардропу – максимум  $SC(x)$

оценку для цены анархии:

$$PoA(\Gamma) = \frac{SC(x^{WE})}{SC_{opt}} \leq \left( 1 - e^{-\frac{W}{\sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}}} \right) / \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{W}{\sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}}} \right).$$

Обозначим  $\frac{W}{\sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}}$  как  $C \geq 0$ . Итак,  $PoA \leq (1 - e^{-C})(1 + \frac{1}{C})$ . Эта функция имеет один максимум на интервале  $[0; +\infty)$ , а ее максимальное значение составляет около 1.3.

## § 12.4 Результаты

Построена игра на основе модели Вардропу с параллельными каналами с системой, в которой все пользователи придерживаются равновесных стратегий разделения потоков. Рассмотрены две модели с разными функциями задержки вида  $\frac{\delta}{c-\delta}$  и  $1 - e^{-\alpha\delta}$ . Для первой игры доказана глобальная оптимальность равновесных по Вардропу ситуаций и для случая общедоступных каналов найдено равновесие. Для второй игры найдено равновесие и верхняя граница цены анархии и показано, что она не может превышать 1.3.

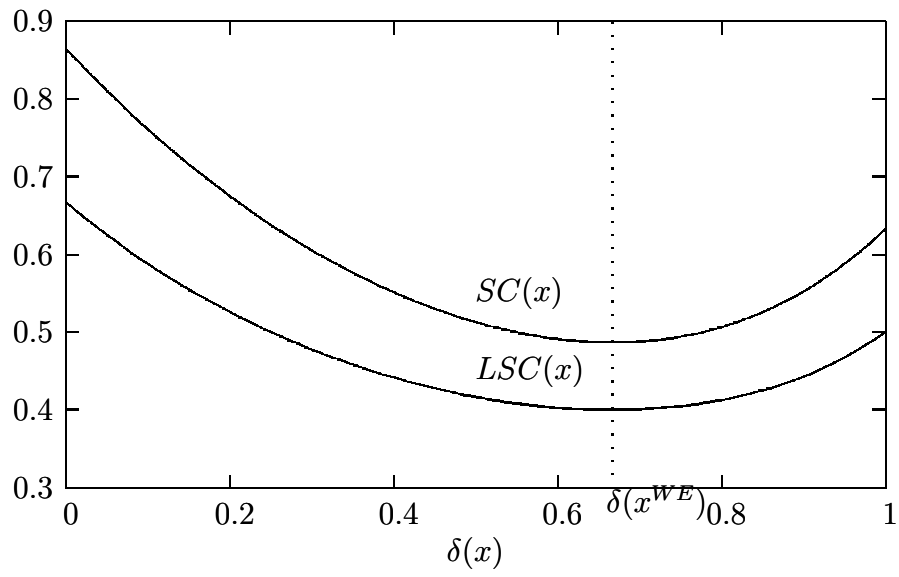


Рис. 12.2: Равновесие по Вардропу – оптимум  $SC(x)$

## Глава 13

# Модель Вардропа с параллельными каналами и неполной информацией

В данной главе рассматривается байесовская модель Вардропа с параллельными каналами, в которой игроки отправляют по каналам трафик разных типов, зная при этом тип только своего трафика [24]. Подобная схема для задачи с неделимым трафиком была представлена в работе Гейринга, Мони́на и др. [99], здесь предлагается ее модификация для модели сети параллельных каналов, где трафик произвольно разделяемый.

### § 13.1 Байесовская модель Вардропа с параллельными каналами

Рассмотрим игру  $\Gamma = \langle n, m, f, T, p, w \rangle$  с  $n$  игроками,  $m$  параллельными каналами, функциями задержки трафика  $f_{ie}(x) = a_{ie}x$ , зависящими от мощностей каналов, определенных для каждого игрока. Для каждого игрока определен набор типов отправляемого трафика  $T_i$  и задано совместное распределение  $p(t_1, \dots, t_n)$  этих типов. Трафик каждого типа  $t$  для игрока  $i$  характеризуется своим объемом  $w_i(t)$ . В данной модели каждый игрок  $i$  знает только тип  $t_i$  своего трафика, который он собирается отправить, и не знает, какой трафик посылают остальные игроки. Однако, используя известное ему совместное распределение типов трафика, он может найти условное распределение типов трафика, отправляемого остальными игроками, когда сам он посылает трафик типа  $t_i$ :  $p(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n | t_i = t) = \frac{p(t_1, \dots, t, \dots, t_n)}{p(i, t)}$ , где  $p(i, t) =$

$\sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T: t_i = t} p(t_1, \dots, t_n)$  – вероятность того, что игрок  $i$  отправляет трафик типа  $t$ .

Профилями стратегий в данной игре являются  $x = \{x_i^{te}\}_{i \in [n], t \in T_i, e \in [m]}$  где  $x_i^{te}$  – трафик типа  $t$  игрока  $i$ , который он отправляет по каналу  $e$ . Компоненты профиля стратегий должны быть неотрицательными и такими, что  $\sum_{e \in [m]} x_i^{te} = w_i(t)$ .  $X$  – множество допустимых профилей  $x$  в игре  $\Gamma$ .

Ожидаемая загрузка канала  $e$  может быть найдена как  $\delta_e(x, p) = \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T} p(t_1, \dots, t_n) \sum_{i \in [n]} x_i^{t_i e}$ , а ожидаемые затраты как  $PC_i(x, p) = \max_{e \in [m]: \exists t \in T_i: x_i^{te} > 0} f_{ie}(\delta_e(x, p))$ .

Каждый игрок  $i$  знает тип трафика, который он посылает. Его целью может быть оптимизация затрат для каждого посылаемого им типа трафика в отдельности. В этом случае рассматривается условная функция ожидаемых затрат, зависящая от условной ожидаемой загрузки каналов сети, которая для каждого канала  $e$  имеет вид  $\delta_e(x, (p|t_i = t)) = \delta_e^{-i}(x, (p|t_i = t)) + x_i^{te}$ , где  $\delta_e^{-i}(x, (p|t_i = t)) = \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T: t_i = t} p(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n | t_i = t) \sum_{i \in [n] \setminus \{i\}} x_i^{t_i e}$  – это условная ожидаемая загрузка канала трафиком всех игроков, кроме  $i$ .

Таким образом, условные ожидаемые затраты для игрока  $i$ , посылающего трафик типа  $t$ , имеют вид  $v_{(i,t)}(x, p) = \max_{e \in [m]: x_i^{te} > 0} f_{ie}(\delta_e(x, (p|t_i = t)))$ , и его байесовские ожидаемые затраты определим как  $BPC_i(x, p) = \sum_{t \in T_i} p(i, t) v_{(i,t)}(x, p)$ . Заметим, что каждое слагаемое в данной сумме не зависит от типов трафика других игроков, кроме  $i$ .

Найдем, как связаны между собой ожидаемая загрузка канала и условная



ожидаемая загрузка канала.

$$\begin{aligned}
\delta_e(x, p) &= \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T} p(t_1, \dots, t_n) \sum_{i \in [n]} x_i^{t_i e} = \\
&= \sum_{t \in T_k} \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T: t_k = t} p(t_1, \dots, t_n) \sum_{i \in [n]} x_i^{t_i e} = \\
&= \sum_{t \in T_k} p(k, t) \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T: t_k = t} p(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n | t_k = t) \cdot \\
&\quad \left( \sum_{i \in [n] \setminus \{k\}} x_i^{t_i e} + x_k^{t e} \right).
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
\sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T: t_k = t} p(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n | t_k = t) &= \\
&= \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T: t_k = t} \frac{p(t_1, \dots, t, \dots, t_n)}{p(k, t)} = \\
&= \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T: t_k = t} \frac{p(t_1, \dots, t_n)}{p(k, t)} = 1.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\delta_e(x, p) &= \sum_{t \in T_k} p(k, t) \cdot \\
&\quad \left( \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T: t_k = t} p(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n | t_k = t) \times \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{i \in [n] \setminus \{k\}} x_i^{t_i e} + x_k^{t e} \right) = \\
&= \sum_{t \in T_k} p(k, t) \delta_e(x, (p | t_k = t)).
\end{aligned}$$

Найдем общую ожидаемую загрузку сети как суммарную загрузку каналов

$\delta_e(x, p)$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in [m]} \delta_e(x, p) &= \sum_{e \in [m]} \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T} p(t_1, \dots, t_n) \sum_{i \in [n]} x_i^{t_i e} = \\
&= \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T} p(t_1, \dots, t_n) \sum_{i \in [n]} \sum_{e \in [m]} x_i^{t_i e} = \\
&= \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T} p(t_1, \dots, t_n) \sum_{i \in [n]} w_i(t_i) =: W.
\end{aligned}$$

То есть данная величина является постоянной, обозначим ее  $W$ .

Еще одно полезное свойство такого вида загрузки  $\delta_e(x, p)$  – вид ее частной производной.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k^{te}} \delta_e(x, p) &= \frac{\partial}{\partial x_k^{te}} \left( \sum_{t \in T_k} p(k, t) \delta_e(x, (p|t_k = t)) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k^{te}} \left( \sum_{t \in T_k} p(k, t) (\delta_e^{-k}(x, (p|t_k = t)) + x_k^{te}) \right) = p(k, t). \end{aligned}$$

## § 13.2 Равновесия двух типов

**Определение 13.1.** Профиль  $x$  в игре  $\Gamma$  называется равновесием по Вардропу, если для каждого игрока  $i \in [n]$  и любых каналов  $e, q \in [m]$ , таких что  $x_i^{te} > 0$ , выполнено  $f_{ie}(\delta_e(x, p)) \leq f_{iq}(\delta_q(x, p))$ .

Данная форма определения эквивалентна  $PC_i(x, p) \leq PC(x', p)$ , где  $x$  – равновесие по Вардропу и  $x'$  – профиль, получаемый из  $x$ , когда кто-то из игроков отклоняется от своей стратегии в  $x$ . Равновесие по Вардропу достигается, когда каждый игрок старается минимизировать свои ожидаемые затраты на всех каналах, которые он с ненулевой вероятностью будет использовать хотя бы для одного из возможных типов своего трафика.

**Определение 13.2.** Профиль  $x$  в игре  $\Gamma$  называется байесовским равновесием по Вардропу, если для каждого игрока  $i \in [n]$ , его трафика типа  $t \in T_i$  и каналов  $e, q \in [m]$ , таких что  $x_i^{te} > 0$ , выполняется  $f_{ie}(\delta_e(x, (p|t_i = t))) \leq f_{iq}(\delta_q(x, (p|t_i = t)))$ .

Данная форма определения эквивалентна  $BPC_i(x, p) \leq BPC(x', p)$ , где  $x$  – байесовское равновесие по Вардропу и  $x'$  – профиль, получаемый из  $x$ , когда кто-то из игроков отклоняется от своей стратегии в  $x$ . Байесовское равновесие по Вардропу достигается, когда игроки стараются минимизировать свои байесовские ожидаемые затраты, оптимизируя для себя отправку каждого конкретного типа трафика.

**Утверждение 13.1.** Если  $x$  – байесовское равновесие по Вардропу в игре  $\Gamma$ , то  $BPC_i(x, p) \leq PC_i(x, p)$ .

*Доказательство.* Пусть  $x$  – байесовское равновесие по Вардропу. Тогда для всех  $i \in [n]$ ,  $t \in T_i$ ,  $e \in [m]$ , таких что  $x_i^{te} > 0$ ,  $a_{ie}\delta_e(x, (p|t_k = t)) = \lambda_i^t$ , иначе  $a_{ie}\delta_e(x, (p|t_k = t)) \geq \lambda_i^t$ .

$$\begin{aligned}
BPC_i(x, p) &= \sum_{t \in T_i} p(i, t) \max_{e \in [m]: x_i^{te} > 0} a_{ie}\delta_e(x, (p|t_k = t)) = \\
&= \sum_{t \in T_i} p(i, t)\lambda_i^t. \\
PC_i(x, p) &= \max_{e \in [m]: \exists \tau \in T_i: x_i^{\tau e} > 0} \delta_e(x, p) = \\
&= \max_{e \in [m]: \exists \tau \in T_i: x_i^{\tau e} > 0} \sum_{t \in T_i} p(i, t)a_{ie}\delta_e(x, (p|t_k = t)) = \\
&= \max_{e \in [m]: \exists \tau \in T_i: x_i^{\tau e} > 0} \left( \sum_{t \in T_i: x_i^{te} > 0} p(i, t)\lambda_i^t + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{t \in T_i: x_i^{te} = 0} p(i, t) (\lambda_i^t + \Delta_i^{te}) \right) \geq \\
&\geq \max_{e \in [m]: \exists \tau \in T_i: x_i^{\tau e} > 0} \left( \sum_{t \in T_i} p(i, t)\lambda_i^t \right) = BPC_i(x, p).
\end{aligned}$$

□

**Определение 13.3.** Профиль  $x$  в игре  $\Gamma$  – нормальный, если для каждого игрока  $i \in [n]$  и каждого канала  $e \in [m]$  справедливо: если хотя бы для одного типа трафика  $t \in T_i$  выполняется  $x_i^{te} > 0$ , то  $x_i^{\tau e} > 0$  для всех  $\tau \in T_i$ .

Данное определение означает, что в нормальном профиле игрок использует один и тот же набор каналов для всех типов своего трафика.

**Определение 13.4.** Байесовское равновесие по Вардропу  $x$  в игре  $\Gamma$  называется нормальным байесовским равновесием по Вардропу, если  $x$  – нормальный профиль в игре  $\Gamma$ .

**Теорема 13.1.** В игре  $\Gamma$  любое нормальное байесовское равновесие по Вардропу является частным случаем равновесия по Вардропу, однако могут существовать равновесия по Вардропу, не являющиеся нормальными байесовскими.

*Доказательство.* Покажем, что нормальное байесовское равновесие по Вардропу является частным случаем равновесия по Вардропу. Если  $x$  – байесовское равновесие по Вардропу, то из  $x_i^{te} > 0$  следует  $a_{ie}\delta_e(x, (p|t_i = t)) \leq a_{iq}\delta_q(x, (p|t_i = t))$ , где  $e, q \in [m]$ . Если  $x$  – нормальное байесовское равновесие по Вардропу, то из  $x_i^{te} > 0$  следует  $x_i^{\tau e} > 0$  для всех  $\tau \in T_i$ . Таким образом, в нормальном байесовском равновесии по Вардропу из  $x_i^{te} > 0$  мы имеем  $a_{ie}\delta_e(x, (p|t_i = \tau)) \leq a_{iq}\delta_q(x, (p|t_i = \tau))$  для всех  $\tau \in T_i$  и, следовательно,  $a_{ie}\delta_e(x, p) \leq a_{iq}\delta_q(x, p)$ .

Пусть теперь  $x$  – некоторое равновесие по Вардропу и байесовское равновесие по Вардропу в игре с 2 каналами (быстрым и медленным), 2 игроками, у каждого из которых есть 2 типа трафика для отправки (большого объема и маленького).  $a_{11} = a_{21} = 1, a_{12} = a_{22} = 1000$ . У игроков следующие множества типов трафика:  $T_1 = \{1, 2\}, T_2 = \{3, 4\}$ , где их объемы  $w(1) = 1, w(2) = 1000, w(3) = 1, w(4) = 1000$ . Совместное распределение выбора типов трафика такое, что  $p(1, 4) + p(2, 3) = 1$ . Стратегией в равновесии по Вардропу является использование игроками различных каналов, причем для трафика большого объема выбирается наиболее быстрый канал. Очевидно, что такой профиль стратегий не является нормальным байесовским равновесием по Вардропу.  $\square$

**Теорема 13.2.** *В игре  $\Gamma$  с двумя игроками, у каждого из которых два типа трафика, и двумя каналами, где совместное распределение типов трафика такое, что  $p(1, 4) + p(2, 3) = 1$ , любое байесовское равновесие по Вардропу – случай равновесия по Вардропу.*

*Доказательство.* Пусть  $x$  – такое байесовское равновесие по Вардропу, которое не является нормальным (если оно нормальное, то, очевидно, удовлетворяет определению равновесия по Вардропу). Таким образом, хотя бы один из игроков использует разные наборы каналов для разных типов трафика. Пусть это первый игрок, использующий канал 1 для трафика типа 1 и канал 2 для трафика типа 2. Следовательно, для первого игрока

$$a_{11}\delta_1(x, (p|t_1 = 1)) = a_{11}(w_1(1) + x_2^{41}) \leq a_{12}\delta_2(x, (p|t_1 = 1)) = a_{12}x_2^{42},$$

$$a_{11}\delta_1(x, (p|t_1 = 2)) = a_{11}x_2^{31} \geq a_{12}\delta_2(x, (p|t_1 = 2)) = a_{12}(w_1(2) + x_2^{32}),$$

и для второго игрока

$$a_{21}\delta_1(x, (p|t_2 = 4)) = a_{21}(w_1(1) + x_2^{41}) \geq a_{22}\delta_2(x, (p|t_2 = 4)) = a_{22}x_2^{42},$$

$$a_{21}\delta_1(x, (p|t_2 = 3)) = a_{21}x_2^{31} \leq a_{22}\delta_2(x, (p|t_2 = 3)) = a_{22}(w_1(2) + x_2^{32}).$$

Заметим, что все части данных неравенств положительны. Обозначая  $A = a_{11}$ ,  $B = a_{12}$ ,  $C = a_{21}$ ,  $D = a_{22}$ ,  $a = w_1(1) + x_2^{41}$ ,  $b = x_2^{42}$ ,  $c = x_2^{31}$ ,  $d = w_1(2) + x_2^{32}$  и применяя лемму 13.1, получим, что данные неравенства выполняются как равенства.  $\square$

**Лемма 13.1.** *Для любых положительных  $A, B, C, D$  и  $a, b, c, d$  из*

$$Aa \leq Bb \quad Ca \geq Db$$

$$Ac \geq Bd \quad Cc \leq Dd$$

*следует*

$$Aa = Bb \quad Ca = Db$$

$$Ac = Bd \quad Cc = Dd.$$

*Доказательство.* Из первого и второго левых неравенств имеем  $\frac{a}{b} \leq \frac{B}{A} \leq \frac{c}{d}$ . Из оставшихся получаем  $\frac{a}{b} \geq \frac{D}{C} \geq \frac{c}{d}$ , что доказывает лемму.  $\square$

Более того, следующая теорема демонстрирует, что даже в общем случае игры  $\Gamma$  байесовское равновесие по Вардропу является равновесием по Вардропу.

**Теорема 13.3.** *Любое байесовское равновесие по Вардропу в игре  $\Gamma$  является случаем равновесия по Вардропу.*

*Доказательство.* Пусть  $x$  является байесовским равновесием по Вардропу. Тогда для всех  $i \in [n]$ ,  $t \in T_i$ ,  $e \in [m]$ , таких, что  $x_i^{te} > 0$ ,  $a_{ie}\delta_e(x, (p|t_k = t)) = \lambda_i^t$ , иначе  $a_{ie}\delta_e(x, (p|t_k = t)) \geq \lambda_i^t$ . Предположим, что  $x$  не является равновесием по Вардропу. Тогда существует хотя бы один игрок  $i$ , который может, отклонив-

шись от стратегии в  $x$ , уменьшить свои ожидаемые затраты  $PC_i(x, p)$ .

$$\begin{aligned}
 PC_i(x, p) &= \max_{e \in [m]: \exists \tau \in T_i: x_i^{\tau e} > 0} a_{ie} \delta_e(x, p) = \\
 &= \max_{e \in [m]: \exists \tau \in T_i: x_i^{\tau e} > 0} \sum_{t \in T_i} p(i, t) a_{ie} \delta_e(x, (p|t_k = t)) = \\
 &= \max_{e \in [m]: \exists \tau \in T_i: x_i^{\tau e} > 0} \left( \sum_{t \in T_i: x_i^{te} > 0} p(i, t) \lambda_i^t + \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{t \in T_i: x_i^{te} = 0} p(i, t) (\lambda_i^t + \Delta_i^{te}) \right).
 \end{aligned}$$

Игрок  $i$  не может уменьшить загрузку каналов с задержкой трафика, большей  $\lambda_i^t$ , так как он не использует данные каналы для трафика типа  $t$ . Добавление небольшой части трафика с канала  $e$  с задержкой  $\lambda_i^t$  на некоторый канал  $q$  в любом случае ведет к увеличению ожидаемых затрат за счет увеличения загрузки канала  $q$ . На нем либо уже есть загрузка  $\lambda_i^t$ , если он используется для трафика  $t$  в  $x$ , либо добавление на него трафика типа  $t$  вовлекает в ожидаемые затраты новый канал с загрузкой  $\geq \lambda_i^t$ . Таким образом, для игрока  $i$  нет возможности отклониться, уменьшив свои ожидаемые затраты, и, следовательно,  $x$  является равновесием по Вардропу.  $\square$

### § 13.3 Потенциал и существование равновесия по Вардропу

Рассмотрим функцию

$$\Psi(x) = \sum_{i \in [n]} \sum_{t \in T_i} \sum_{e \in [m]} p(i, t) x_i^{te} \ln(a_{ie}) + \sum_{e \in [m]} \delta_e(x, p) \ln(\delta_e(x, p)),$$

которая является вероятностной модификацией функции потенциала в работе [98]. Она выпуклая как сумма выпуклых функций, следовательно, для нее существует минимум на выпуклом множестве  $X$ .

**Теорема 13.4.** *Если в игре  $\Gamma$  существует равновесие по Вардропу  $x$ , то  $\Psi(x) =$*

$$\min_{y - \text{профиль стратегий в } \Gamma} \Psi(y).$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_i^{te}} &= p(i, t) \ln(a_{ie}) + p(i, t) \ln(\delta_e(x, p)) + p(i, t) = \\ &= p(i, t)(\ln(a_{ie}\delta_e(x, p)) + 1).\end{aligned}$$

В равновесии по Вардропу из  $x_i^{te} > 0$  следует  $a_{ie}\delta_e(x, p) \leq a_{iq}\delta_q(x, p)$  и тогда

$$p(i, t)(\ln(a_{ie}\delta_e(x, p)) + 1) \leq p(i, t)(\ln(a_{iq}\delta_q(x, p)) + 1),$$

следовательно,

$$\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_i^{te}} \leq \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_i^{tq}}.$$

Заметим при этом, что

$$\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_i^{te}} = \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_i^{tq}},$$

если  $x_i^{te} > 0$  и  $x_i^{tq} > 0$ .

Тогда, применяя теорему Каруша–Куна–Таккера, можно показать, что  $\Psi(x) = \min_{y \text{ — профиль стратегий в } \Gamma} \Psi(y)$ . Рассмотрим для этого функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = \Psi(x) - \sum_{i \in [n]} \sum_{t \in T_i} \lambda_i^t \left( \sum_{e \in [m]} x_i^{te} - w_i(t) \right)$$

и положим  $\lambda_i^t = \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_i^{te}}$ , выбрав любой  $x_i^{te'} > 0$ . Тогда  $\frac{\partial}{\partial x_i^{te}} L(x, \lambda) = \frac{\partial}{\partial x_i^{te}} \Psi(x) - \lambda_i^t = 0$  для всех  $x_i^{te} > 0$  и  $\frac{\partial}{\partial x_i^{tq}} L(x, \lambda) = \frac{\partial}{\partial x_i^{tq}} \Psi(x) - \lambda_i^t \geq 0$  для всех  $x_i^{tq} = 0$   $\square$

**Теорема 13.5.** *Если профиль  $x$  в игре  $\Gamma$  обеспечивает минимум функции  $\Psi(x)$ , то  $x$  является равновесием по Вардропу.*

*Доказательство.* Из условий Каруша–Куна–Таккера следует, что  $x$  обеспечивает минимум функции  $\Psi(x)$  тогда и только тогда, когда существует такое значение  $\lambda$ , что для  $i \in [n]$ ,  $t \in T_i$ ,  $e \in [m]$  и

$$L(x, \lambda) = \Psi(x) - \sum_{i \in [n]} \sum_{t \in T_i} \lambda_i^t \left( \sum_{e \in [m]} x_i^{te} - w_i(t) \right)$$

выполняется:

$$\begin{aligned}\text{если } x_i^{te} > 0, \text{ то } & \frac{\partial}{\partial x_i^{te}} L(x, \lambda) = 0, \\ \text{если } x_i^{te} = 0, \text{ то } & \frac{\partial}{\partial x_i^{te}} L(x, \lambda) \geq 0.\end{aligned}$$

Следовательно, обозначив  $\alpha_i^t = e^{\left(\frac{\lambda_i^t}{p^{(i,t)}} - 1\right)}$ , получаем  $a_{ie}\delta_e(x, p) = \alpha_i^t$ , если  $x_i^{te} > 0$ , и  $a_{ie}\delta_e(x, p) \geq \alpha_i^t$ , если  $x_i^{te} = 0$ .

Поскольку  $a_{ie}\delta_e(x, p)$  не зависит от типа трафика игрока, то  $\alpha_i^t$  равны для всех тех типов трафика игрока  $i$ , для которых существует хотя бы один канал, используемый для обоих типов; обозначим их как  $\alpha_i$ . Для остальных типов трафика  $\tau$  их  $\alpha_i^\tau \leq \alpha_i$ .

С другой стороны, трафик типа  $\tau$  отправляется по некоторому каналу  $q$ , где  $x_i^{\tau q} > 0$ . Если  $x_i^{tq} > 0$ , то  $a_{iq}\delta_q(x, p) = \alpha_i^\tau = \alpha_i^t = \alpha_i$ . Если  $x_i^{tq} = 0$ , то  $a_{iq}\delta_q(x, p) = \alpha_i^\tau \geq \alpha_i^t = \alpha_i$ . Таким образом,  $\alpha_i^\tau = \alpha_i^t = \alpha_i$ .

Следовательно, для всех  $i \in [n]$ ,  $e \in [m]$ , таких что каждый игрок  $i$  использует канал  $e$  для отправки хотя бы одного типа своего трафика, имеем  $a_{ie}\delta_e(x, p) = \alpha_i$ , где  $\alpha_i$  – некоторые константы.  $\square$

Заметим, что минимум функции  $\Psi(x)$  на  $X$  существует, отсюда следует справедливость следующей теоремы.

**Теорема 13.6.** *В игре  $\Gamma$  всегда существует равновесие по Вардропу.*

Заметим, что равновесие по Вардропу в игре  $\Gamma$  может быть не единственным и некоторые равновесия могут быть байесовскими. Это иллюстрируется следующими примерами.

**Пример 22.** *Данный пример демонстрирует ситуацию, когда равновесие по Вардропу также является байесовским. Рассмотрим игру с двумя игроками и двумя каналами с  $a_{11} = a_{21} = 1$ ,  $a_{12} = a_{22} = 2$ . Множества типов трафика игроков определены как  $T_1 = \{1, 2\}$ ,  $T_2 = \{3, 4\}$ , где  $w(1) = 1$ ,  $w(2) = 25$ ,  $w(3) = 1$ ,  $w(4) = 50$ . Совместное распределение типов трафика такое, что  $p(1, 4) = p(2, 3) = 1/2$ .*

*Стратегии в равновесии по Вардропу:*

$$\begin{aligned} x_1^{11} &= 0 & x_1^{12} &= 1 \\ x_1^{21} &= 16\frac{1}{3} & x_1^{22} &= 8\frac{2}{3} \\ x_2^{31} &= 1 & x_2^{32} &= 0 \\ x_2^{41} &= 34 & x_2^{42} &= 16. \end{aligned}$$



Условные ожидаемые загрузки и ожидаемые загрузки равны для обоих каналов, значение функции  $\Psi(x) \approx 124.939$ .

**Пример 23.** Данный пример демонстрирует равновесие по Вардропу, которое не является байесовским. Рассмотрим игру из предыдущего примера. Следующий профиль также является равновесием по Вардропу:

$$\begin{aligned}x_1^{11} &= 1 & x_1^{12} &= 0 \\x_1^{21} &= 25 & x_1^{22} &= 0 \\x_2^{31} &= 1 & x_2^{32} &= 0 \\x_2^{41} &= 24\frac{1}{3} & x_2^{42} &= 25\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Ожидаемые загрузки равны для обоих каналов, значение функции  $\Psi(x) \approx 124.939$ , но условные ожидаемые загрузки не соответствуют байесовскому равновесию по Вардропу. Например, для игрока 1:

$$\begin{aligned}a_{11}\delta_1(x, (p|t_1 = 1)) &= x_1^{11} + x_2^{41} = 25\frac{1}{3} \\a_{12}\delta_2(x, (p|t_1 = 1)) &= x_1^{12} + x_2^{42} = 51\frac{1}{3} \\a_{11}\delta_1(x, (p|t_1 = 2)) &= x_1^{21} + x_2^{31} = 26 \\a_{12}\delta_2(x, (p|t_1 = 2)) &= x_1^{22} + x_2^{32} = 0.\end{aligned}$$

## § 13.4 Результаты

В данной главе построена байесовская модель Вардропы с параллельными каналами, в которой игроки отправляют по каналам трафик разных типов, зная при этом тип только своего трафика. Для данной модели определены два вида равновесия: равновесие по Вардропу, которое, как здесь показано, всегда существует и может быть найдено с использованием потенциала, и его частный случай – байесовское равновесие по Вардропу, структура которого представляется более понятной игроку, однако его существование в данный момент является открытым вопросом.

## Глава 14

# Транспортная модель Вардропа с экстерналиями

В данной части рассматривается модель Вардропа с разделяемым трафиком и экстерналиями [66] применительно к параллельной транспортной сети. Эти экстерналии вводятся в функции задержки игроков как инструмент влияния системы на равновесное распределение потоков трафика, а также на значения цены анархии. В общем случае экстерналии можно интерпретировать как элементы централизованного управления, которые могут быть включены, например, в правила дорожного движения (знаки ограничения скорости, регулируемые светофоры), политику ценообразования на общественный транспорт, топливо и т.д. В разделе исследуется влияние правил дорожного движения на цену анархии. Показано, что для параллельной транспортной системы существуют такие значения внешних эффектов, что равновесный и оптимальный профили совпадут друг с другом, а значение цены анархии будет равно 1. Также предлагается процедура социализации поведения пользователей, для которой параллельная транспортная система обеспечивает оптимальный профиль пользовательского поведения и такое же значение социальных издержек, как и в оптимальном профиле с начальными значениями экстерналий.

### § 14.1 Модель транспортной системы

Рассмотрим транспортную систему с  $n$  параллельными каналами. Для каждого канала  $i = 1, \dots, n$  задано время прохождения единицы трафика по незагру-

женному каналу  $t_i$ . Обозначим  $t = (t_1, \dots, t_n)$ . Сначала будем предполагать, что каналы упорядочены по убыванию пропускной способности:  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ .

Транспортный поток размера  $X$  распределяется по  $n$  каналам так, что  $X = \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , образуя профиль  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Задержка трафика на канале  $i$  определяется как линейная BPR-функция [183]

$$f_i(x) = t_i(1 + a_i x_i + \sum_{j \neq i} b_{ij} x_j),$$

где коэффициенты  $a_i > 0$  отражают влияние величины собственного трафика канала  $i$  на его задержку, а  $b_{ij}$  – экстерналии, введенные в функцию задержки. Экстерналии отражают степень влияния на задержку каждого канала потоков на остальных каналах, каждая экстерналия  $b_{ij}$  показывает, насколько на задержку канала  $i$  влияет трафик на канале  $j$ . Причем влияние может быть как в сторону увеличения задержки при положительных экстерналиях, так и уменьшения при отрицательных. Интерпретировать это можно следующим образом. Пусть есть автодорога с несколькими полосами. Когда значение  $b_{ij}$  положительно, то на полосе  $i$  принудительно дополнительно задерживается поток на величину, пропорциональную трафику на полосе  $j$ . При отрицательных  $b_{ij}$  он, наоборот, ускоряется. Сделать это можно регулировкой светофоров на разных полосах, определением участков переезда между соседними полосами, в том числе для обгона, знаками ограничения скорости и т.п. доступными средствами управления потоками. Обозначим  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = \{b_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n|i \neq j}$ .

Затраты системы — это издержки системы в результате использования ее ресурсов игроками, т. е. потоками в нашей модели. В то время как участники потока пытаются распределяться по маршрутам, минимизируя свое время в пути, система заботится об оптимальном распределении потока, чтобы минимизировать общее время в пути, которое выражается в виде затрат системы. Таким образом, затраты системы определяются как

$$SC(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i(x).$$

Оптимальный для системы профиль минимизирует затраты системы

$$OPT = \min_x SC(x) \min_x \sum_{i=1}^n x_i t_i (1 + a_i x_i + \sum_{j \neq i} b_{ij} x_j)$$

при ограничениях

$$x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n; \quad X = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Оптимальный профиль можно найти с помощью метода множителей Лагранжа, который дает систему уравнений для требуемого профиля [139]. Для модели с экстерналиями такая система получается в [135] по аналогии. Как и в [135], мы обозначаем  $g_i(x) = t_i(1 + 2a_i x_i) + \sum_{j \neq i} (t_i b_{ij} + t_j b_{ji}) x_j$ . Для рассматриваемой модели оптимальный профиль удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^n x_i, \\ x_j = 0 \text{ для } j > k, \\ g_i(x) = g_k(x) \text{ для } i = 1, \dots, k-1, \end{cases} \quad (14.1.1)$$

где  $k$  обозначает число каналов с ненулевыми потоками трафика.

Равновесный профиль определяется как равновесие по Вардропу [139, 175, 185], в котором задержка трафика на всех используемых каналах минимальна. Профиль  $x$  является равновесием по Вардропу, если для всех каналов  $i$  из  $x_i > 0$  следует, что  $f_i(x) = \min_j f_j(x)$ , а из  $x_i = 0$  следует, что  $f_i(x) \geq \min_j f_j(x)$ .

Равновесный профиль также может быть найден с помощью метода множителей Лагранжа [135, 139]. Равновесие по Вардропу является решением системы уравнений

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^n x_i, \\ x_j = 0 \text{ для } j > k, \\ f_i(x) = f_k(x) \text{ для } i = 1, \dots, k-1, \end{cases} \quad (14.1.2)$$

где  $k$  – число каналов, на которых имеется ненулевой трафик.

Кроме того, должны выполняться следующие условия [135] для  $i, j = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned}
 AW : \quad & a_i \geq b_{ij}; \\
 AS : \quad & a_i \geq \sum_{j \neq i} b_{ij}; \\
 BS : \quad & a_i t_i \geq \sum_{j \neq i} t_j b_{ij}.
 \end{aligned} \tag{14.1.3}$$

Как показано в [135], условия (14.1.3) обеспечивают существование равновесия. Условие AW - это более слабая версия предельных ограничений на экстерналии, которая гарантирует, что в равновесии условие неотклонения игроков с экстерналиями по существу эквивалентно условию без экстерналий. Условия AS и BS представляют собой более сильную версию предельных ограничений на экстерналии, которая подразумевает выпуклость функции затрат системы по отношению к профилю потока, при котором всегда существует оптимальный для системы профиль.

Полагаем, что транспортный поток  $X$  достаточно большой настолько, что в оптимальном и равновесном профилях нет незанятых каналов, тогда в системах уравнений (14.1.1) и (14.1.2)  $k = n$ , а порядок каналов по величинам  $t_i$  может быть любым.

Цена анархии для данного транспортного потока  $X$  определяется как отношение равновесных затрат системы к оптимальным.

Основной вопрос, который рассматривается в данном разделе, заключается в том, существуют ли экстерналии, при которых затраты системы в равновесии совпадают с оптимальным для системы профилем, а цена анархии равна 1.

## § 14.2 Оптимальные экстерналии

Проверим, что для системы параллельных каналов можно найти такие значения  $b_{ij}$ , что равновесный и оптимальный профили системы совпадают и цена анархии равна 1.

Для того, чтобы цена анархии в данной системе была равна единице, достаточно, чтобы совпадали равновесный и оптимальные профили, а значит, должен существовать некоторый профиль  $x$ , являющийся решением обеих систем

(14.1.1) и (14.1.2). То есть такой профиль должен быть решением системы

$$\begin{cases} g_i(x) = g_n(x) \text{ для } i = 1, \dots, n-1, \\ f_i(x) = f_n(x) \text{ для } i = 1, \dots, n-1, \\ X = \sum_{i=1}^n x_i. \end{cases} \quad (14.2.1)$$

Система содержит  $2n - 1$  уравнений для  $n$  неизвестных  $x_i$  и  $n(n - 1)$  неизвестных  $b_{ij}$ . Будем искать решение, в котором на задержку трафика только на одном из каналов влияет трафик на всех остальных. Это ограничение интерпретируется следующим образом. Один из каналов объявляется вспомогательным и может частично использоваться потоками других каналов. Например, в случае 3-полосной дороги транспортные средства с левой и правой полос иногда могут занимать центральную полосу, например, для проезда при обгонном маневре. Это замедляет центральный поток, но при этом его можно искусственно ускорить с помощью светофоров, дополнительных правил и т. д.

В данном случае порядок каналов по пропускной способности не важен, так как заняты все каналы. Предполагаем, что на задержку на первом канале (не обязательно самом быстром) влияют все остальные. Иначе перенумеруем каналы. В этом случае  $b_{ij} = 0$  для всех  $i \neq 1$  и в системе остается  $2n - 1$  неизвестных.

### § 14.2.1 Система с двумя каналами

Для двух каналов необходимо, чтобы профиль  $x$  был решением системы

$$\begin{cases} t_1(1 + 2a_1x_1) + (t_1b_{12} + t_2b_{21})x_2 = t_2(1 + 2a_2x_2) + (t_2b_{21} + t_1b_{12})x_1, \\ t_1(1 + a_1x_1 + b_{12}x_2) = t_2(1 + a_2x_2 + b_{21}x_1), \\ X = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Пусть на задержку трафика первого из каналов влияет трафик на другом, то есть положим  $b_{21} = 0$ . Тогда решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \frac{X^2 a_2 t_2}{X(a_1 t_1 + a_2 t_2) + t_1 - t_2} \\ x_2 = \frac{X^2 a_1 t_1 + X(t_1 - t_2)}{X(a_1 t_1 + a_2 t_2) + t_1 - t_2} \\ b_{12} = \frac{t_2 - t_1}{X t_1}. \end{cases} \quad (14.2.2)$$

Пусть  $t_1 \geq t_2$ , то есть в качестве канала, на задержку которого будет влиять другой, мы выбрали самый медленный канал. Очевидно, что в этом случае

$b_{12} \leq 0$ , а решение допустимо и выполняются условия (14.1.3). То есть для двух каналов всегда можно найти такие экстерналии  $b$ , что равновесный и оптимальный профили системы совпадают и цена анархии равна 1. Здесь вводится экстерналия  $b_{12} \leq 0$ , которая с ростом загрузки самого быстрого канала создает все более комфортные условия на самом медленном. Это обеспечивает отток равновесного трафика с первого канала на второй, разгружая его. Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 14.1.** *Для системы двух параллельных каналов, где  $t_1 \geq t_2$ , существуют оптимальные значения экстерналий, обеспечивающие цену анархии, равную 1. Оптимальные экстерналии и оптимально-равновесный профиль определяются выражениями (14.2.2).*

Кроме того, при определенных условиях возможен и выбор самого быстрого канала, чтобы на его задержку влиял трафик на медленном канале. В этом случае  $t_2 \geq t_1$ , а  $b_{12} \geq 0$ . Решение допустимо при выполнении условий

$$\begin{cases} Xa_1t_1 \geq t_2 - t_1, \\ Xa_2t_1 \geq t_2 - t_1, \\ Xa_2t_2 \geq t_2 - t_1. \end{cases}$$

Тогда выполняются условия (14.1.3), а  $x_1$  и  $x_2$  неотрицательны. Очевидно, для достаточно большого входного потока  $X$  данные условия выполняются.

### § 14.2.2 Система с тремя каналами

Для трех каналов необходимо, чтобы профиль  $x$  был решением системы

$$\begin{cases} g_1(x) = g_2(x) = g_3(x), \\ f_1(x) = f_2(x) = f_3(x), \\ X = x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$$

Пусть только на задержку трафика первого из каналов влияют потоки на оставшихся двух каналах, то есть положим  $b_{21} = 0$ ,  $b_{31} = 0$ ,  $b_{23} = 0$  и  $b_{32} = 0$ . Тогда данная система после приведения подобных слагаемых будет выглядеть следующим образом.

$$\left\{ \begin{array}{llll} x_1(2a_1t_1 - t_1b_{13}) + & x_2t_1b_{12} & +x_3(t_1b_{13} - 2a_3t_3) & = t_3 - t_1 \\ x_1(t_1b_{12} - t_1b_{13}) + & x_2(2a_2t_2) & -x_3(2a_3t_3) & = t_3 - t_2 \\ x_1(a_1t_1) + & x_2t_1b_{12} & +x_3(t_1b_{13} - t_3a_3) & = t_3 - t_2 \\ & x_2a_2t_2 & -x_3a_3t_3 & = t_3 - t_2 \\ x_1 + & x_2 & +x_3 & = X. \end{array} \right. \quad (14.2.3)$$

Из последних двух уравнений системы (14.2.3) явным образом выражаются  $x_1$  и  $x_2$  через  $x_3$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{t_3 - t_2 + x_3 a_3 t_3}{a_2 t_2} \\ x_1 = X - x_3 - \frac{t_3 - t_2 + x_3 a_3 t_3}{a_2 t_2}. \end{array} \right. \quad (14.2.4)$$

Отнимем из первого уравнения системы (14.2.3) третье, а из второго – удвоенное четвертое. Получим

$$\begin{aligned} x_1(t_1a_1 - t_1b_{13}) - x_3(a_3t_3) &= 0, \\ x_1(t_1b_{12} - t_1b_{13}) &= t_2 - t_3, \end{aligned} \quad (14.2.5)$$

откуда явно выражаются неизвестные  $b_{12}$  и  $b_{13}$  через  $x_3$ :

$$\begin{aligned} b_{13} &= \frac{x_1 a_1 t_1 - x_3 a_3 t_3}{t_1 x_1} \\ b_{12} &= \frac{t_2 - t_3 + x_1 t_1 b_{13}}{t_1 x_1} = \frac{t_2 - t_3 + x_1 a_1 t_1 - x_3 a_3 t_3}{t_1 x_1}. \end{aligned} \quad (14.2.6)$$

Заметим также, что из второго выражения (14.2.6) и первого выражения (14.2.4) получается  $b_{12} = \frac{x_1 a_1 t_1 - x_2 a_2 t_2}{t_1 x_1}$ .

Таким образом из (14.2.4) и (14.2.6) видно, что все неизвестные явным образом выражаются через  $x_3$ . Используем третье уравнение системы (14.2.3), из которого после подстановки выражений  $b_{12}$ ,  $b_{13}$ ,  $x_1$  и  $x_2$  выразим  $x_3$

$$x_3 = \frac{(t_2 - t_3)(X a_1 t_1 + t_1 - t_2) + X a_2 t_2 (X a_1 t_1 + t_1 - t_3)}{X a_2 t_2 a_3 t_3 + a_2 t_2 (X a_1 t_1 + t_1 - t_3) + a_3 t_3 (X a_1 t_1 + t_1 - t_2)}.$$

Найдем теперь решение системы, подставив  $x_3$  в (14.2.4) и (14.2.6). В итоге получим явное решение (Лемма 14.1).

**Лемма 14.1.** *Для системы трех параллельных каналов, в которой на задержку трафика на первом канале влияет трафик на всех остальных каналах,*



экстерналии  $b_{12}$  и  $b_{13}$  обеспечивают оптимальность равновесного профиля  $x$ , где

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{X^2 a_2 t_2 a_3 t_3 + (t_2 - t_3)^2}{X a_2 t_2 a_3 t_3 + a_2 t_2 (X a_1 t_1 + t_1 - t_3) + a_3 t_3 (X a_1 t_1 + t_1 - t_2)}, \\ x_2 &= \frac{X a_3 t_3 (X a_1 t_1 + t_1 - t_2) - (t_2 - t_3) (X a_1 t_1 + t_1 - t_3)}{X a_2 t_2 a_3 t_3 + a_2 t_2 (X a_1 t_1 + t_1 - t_3) + a_3 t_3 (X a_1 t_1 + t_1 - t_2)}, \\ x_3 &= \frac{X a_2 t_2 (X a_1 t_1 + t_1 - t_3) + (t_2 - t_3) (X a_1 t_1 + t_1 - t_2)}{X a_2 t_2 a_3 t_3 + a_2 t_2 (X a_1 t_1 + t_1 - t_3) + a_3 t_3 (X a_1 t_1 + t_1 - t_2)}, \\ b_{12} &= \frac{a_1 t_1 (t_2 - t_3)^2 + a_2 t_2 (t_2 - t_3) (X a_1 t_1 + t_1 - t_3) - X a_2 t_2 a_3 t_3 (t_1 - t_2)}{t_1 (X^2 a_2 t_2 a_3 t_3 + (t_2 - t_3)^2)}, \\ b_{13} &= \frac{a_1 t_1 (t_2 - t_3)^2 - a_3 t_3 (t_2 - t_3) (X a_1 t_1 + t_1 - t_2) - X a_2 t_2 a_3 t_3 (t_1 - t_3)}{t_1 (X^2 a_2 t_2 a_3 t_3 + (t_2 - t_3)^2)}. \end{aligned} \quad (14.2.7)$$

Исследуем вопрос допустимости полученного решения. Пусть для определенности  $t_2 \geq t_3$ , иначе перенумеруем каналы.

Рассмотрим ситуацию, когда первый канал – самый медленный, то есть  $t_1 \geq t_2 \geq t_3$ . В этом случае значения  $x_1$  и  $x_3$  очевидно неотрицательны. Значение  $x_2$  неотрицательно, когда

$$X \geq \frac{(t_2 - t_3)(X a_1 t_1 + t_1 - t_3)}{a_3 t_3 (X a_1 t_1 + t_1 - t_2)}. \quad (14.2.8)$$

При росте  $X$  правая часть данного неравенства стремится к  $\frac{t_2 - t_3}{a_3 t_3}$ , следовательно, при достаточно больших значениях потока  $X$  данное неравенство выполняется и значение  $x_2$  будет неотрицательным.

Пусть первый канал – средний по скорости, либо самый быстрый. Для того, чтобы значения  $x_1$  и  $x_3$  были неотрицательны, необходимо и достаточно

$$\begin{aligned} X a_2 t_2 a_3 t_3 + a_2 t_2 (X a_1 t_1 + t_1 - t_3) + a_3 t_3 (X a_1 t_1 + t_1 - t_2) &\geq 0, \\ X a_2 t_2 (X a_1 t_1 + t_1 - t_3) + (t_2 - t_3) (X a_1 t_1 + t_1 - t_2) &\geq 0, \end{aligned}$$

что для достаточно больших  $X$  выполняется, в частности, для таких  $X$ , что  $X a_1 t_1 + t_1 - t_2 \geq 0$  и  $X a_1 t_1 + t_1 - t_3 \geq 0$ . В этом случае также при достаточно больших  $X$  выполняется (14.2.8).

Далее проверим выполнение условий (14.1.3). Пусть все  $x_i \geq 0$ . Тогда

$$b_{1i} = \frac{x_1 a_1 t_1 - x_i a_i t_i}{x_1 t_1} \leq a_1$$

для  $i = 1, 2$ , то есть выполнено условие AW. Условие AS выполняется при

$$\begin{aligned} X a_2 t_2 a_3 t_3 (X a_1 t_1 + 2t_1 - t_2 - t_3) &\geq \\ a_1 t_1 (t_2 - t_3)^2 + (t_2 - t_3) (a_2 t_2 (X a_1 t_1 + t_1 - t_3) - a_3 t_3 (X a_1 t_1 + t_1 - t_2)), & \end{aligned}$$

а условие BS при

$$a_1 t_1^2 (X^2 a_2 t_2 a_3 t_3 + (t_2 - t_3)^2) \geq \\ t_2 (a_1 t_1 (t_2 - t_3)^2 + a_2 t_2 (t_2 - t_3) (X a_1 t_1 + t_1 - t_3) - X a_2 t_2 a_3 t_3 (t_1 - t_2)) + \\ t_3 (a_1 t_1 (t_2 - t_3)^2 - a_3 t_3 (t_2 - t_3) (X a_1 t_1 + t_1 - t_2) - X a_2 t_2 a_3 t_3 (t_1 - t_3)),$$

которые выполняются при достаточно больших  $X$ , аналогично (14.2.8).

Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 14.2.** *Для системы трех параллельных каналов и достаточно большой величины входного потока  $X$  существуют оптимальные значения экстерналий, обеспечивающие цену анархии, равную 1. Оптимальные экстерналии и оптимально-равновесный профиль определяются выражениями (14.2.7).*

Из полученного решения и (14.2.6) видно, что  $b_{1i}$  могут быть отрицательными, например, когда  $t_i a_i$  близки по величине при значительно различных значениях  $t_i$ , что можно интерпретировать как случай каналов, примерно равных по соотношению “цена-качество”, когда за самый быстрый канал назначается соответствующая плата. Рассмотрим следующие примеры.

**Пример 24.** *В системе три канала.  $t = (1, 5, 100)$ ,  $a = (100, 20, 1)$ , в систему направляется поток  $X = 10$ . Пусть на задержку на самом быстром канале влияют все остальные. Полученное решение в соответствии с (14.2.7):  $x \approx (3.483, 3.734, 2.784)$ ,  $(b_{12}, b_{13}) \approx (-7.0192, 20.083)$ .*

Система (14.2.7) может также давать недопустимые решения, например, при неудачном выборе канала, на который влияют все остальные.

**Пример 25.** *В системе три канала.  $t = (1, 5, 100)$ ,  $a = (1, 20, 1)$ , в систему направляется поток  $X = 10$ . Пусть на задержку на самом быстром канале влияют все остальные. Полученное решение в соответствии с (14.2.7) является недопустимым:  $x \approx (11.004, -0.027, -0.977)$ ,  $(b_{12}, b_{13}) \approx (1.243, 9.877)$ . Однако, если предположить, что на задержку на самом медленном канале влияют все остальные, то есть перенумеровать каналы так, что  $t = (100, 5, 1)$ ,  $a = (1, 20, 1)$ , то получаем допустимое решение  $x \approx (0.089, 0.059, 9.852)$ ,  $(b_{12}, b_{13}) \approx (0.346, -0.102)$ .*

**Пример 26.** Будем наблюдать, как качественно меняется решение с изменением значений  $a_1$  и  $a_3$  для системы трех каналов  $t = (100, 5, 1)$ ,  $a_2 = 20$ . Результат моделирования показан на рисунках 1-4. Можно наблюдать, что при малых  $a_1$  с ростом  $a_3$  поток  $x_1$  быстро возрастает,  $x_3$  наоборот, резко убывает.

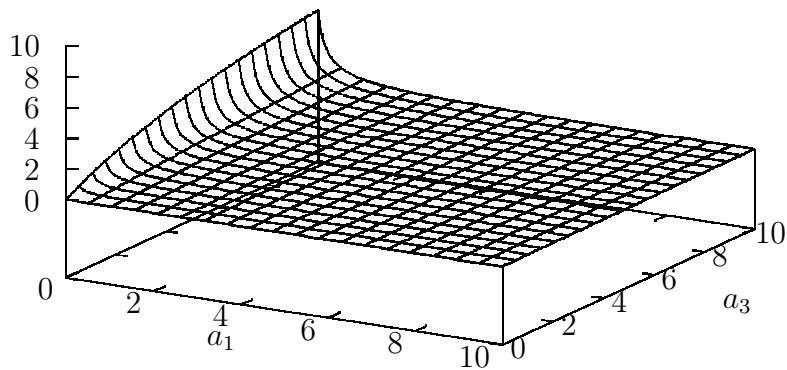


Рис. 14.1: Изменение решения  $x_1$  с изменением  $a_1$  и  $a_3$

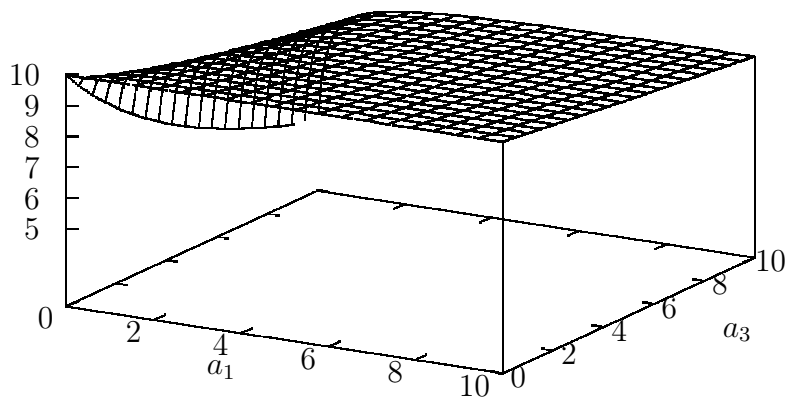


Рис. 14.2: Изменение решения  $x_3$  с изменением  $a_1$  и  $a_3$

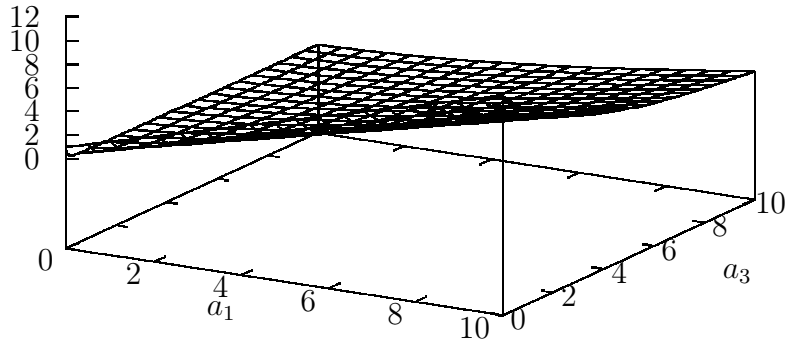


Рис. 14.3: Изменение решения  $b_{12}$  с изменением  $a_1$  и  $a_3$

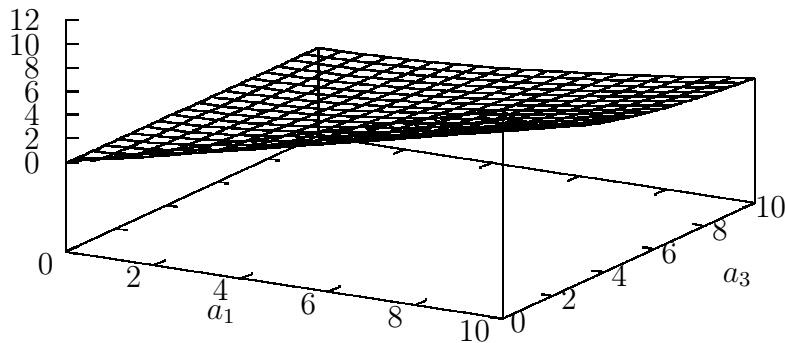


Рис. 14.4: Изменение решения  $b_{13}$  с изменением  $a_1$  и  $a_3$

### § 14.2.3 Система с $n$ каналами

Рассмотрим систему  $n$  параллельных каналов. Для этого случая

$$g_1(x) = t_1(1 + 2a_1x_1) + \sum_{j=2}^n x_j t_1 b_{1j}$$

$$g_i(x) = t_i(1 + 2a_i x_i) + x_1 t_1 b_{1i} \text{ для } i = 2, \dots, n$$

$$f_1(x) = t_1(1 + a_1 x_1) + \sum_{j=2}^n x_j t_1 b_{1j}$$

$$f_i(x) = t_i(1 + a_i x_i) \text{ для } i = 2, \dots, n.$$

Тогда система (14.2.1) выглядит следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1(1 + 2a_1x_1) + \sum_{j=2}^n x_j t_1 b_{1j} = t_n(1 + 2a_nx_n) + x_1 t_1 b_{1n} \\ t_i(1 + 2a_i x_i) + x_1 t_1 b_{1i} = t_n(1 + 2a_nx_n) + x_1 t_1 b_{1n} \text{ для } i = 2, \dots, n-1 \\ t_1(1 + a_1x_1) + \sum_{j=2}^n x_j t_1 b_{1j} = t_n(1 + a_nx_n) \\ t_i(1 + a_i x_i) = t_n(1 + a_nx_n) \text{ для } i = 2, \dots, n-1 \\ X = \sum_{i=1}^n x_i. \end{array} \right.$$

Перепишем систему относительно  $x_i$

$$\left\{ \begin{array}{l} (e1) \quad x_1(2t_1a_1 - t_1b_{1n}) + \sum_{j=2}^{n-1} x_j t_1 b_{1j} + x_n(t_1b_{1n} - 2a_n t_n) = t_n - t_1 \\ (e2) \quad x_1(t_1b_{1i} - t_1b_{1n}) + x_i(2a_i t_i) - x_n(2a_n t_n) = t_n - t_i \\ \quad \text{для } i = 2, \dots, n-1 \\ (e3) \quad x_1(t_1a_1) + \sum_{j=2}^{n-1} x_j b_{1j} t_1 + x_n(t_1b_{1n} - a_n t_n) = t_n - t_1 \\ (e4) \quad x_i(a_i t_i) - x_n(a_n t_n) = t_n - t_i \\ \quad \text{для } i = 2, \dots, n-1 \\ (e5) \quad X = \sum_{i=1}^n x_i. \end{array} \right. \quad (14.2.9)$$

Из группы уравнений (e3), (e4) и (e5) выразим  $x_1$  и  $x_i$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ , относительно  $x_n$

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{t_n - t_i + x_n a_n t_n}{a_i t_i}, \text{ для } i = 1, \dots, n-1, \\ x_1 &= X - \sum_{i=2}^{n-1} x_i - x_n = X - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{t_n - t_i + x_n a_n t_n}{a_i t_i} - x_n. \end{aligned} \quad (14.2.10)$$

В системе (14.2.9) из уравнения (e1) вычтем (e3), из уравнений группы (e2) вычтем удвоенные соответствующие уравнения группы (e4). Получим

$$\begin{aligned} x_1(t_1a_1 - t_1b_{1n}) - x_n(a_n t_n) &= 0, \\ x_1(t_1b_{1i} - t_1b_{1n}) &= t_i - t_n \text{ для } i = 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

откуда явно выражаются неизвестные  $b_{1i}$  и  $b_{1n}$  через  $x_i$ . В нашем случае удобнее запись в следующей форме

$$\begin{aligned} x_1 t_1 b_{1n} &= x_1 a_1 t_1 - x_n a_n t_n \\ x_1 t_1 b_{1i} &= t_i - t_n + x_1 t_1 b_{1n} = t_i - t_n + x_1 a_1 t_1 - x_n a_n t_n \\ &\text{для } i = 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (14.2.11)$$

Заметим также, что из второго выражения (14.2.11) и первого выражения (14.2.10) получается  $x_1 t_1 b_{1i} = x_1 a_1 t_1 - x_i a_i t_i$ .

Таким образом из (14.2.10) и (14.2.11) видно, что все неизвестные явным образом выражаются через  $x_n$ . Используем уравнение (е3) системы (14.2.9) для нахождения  $x_n$ .

$$x_1 t_1 a_1 + \sum_{j=2}^{n-1} x_j b_{1j} t_1 + x_n t_1 b_{1n} - x_n a_n t_n = t_n - t_1$$

Подставим в него выражения (14.2.11).

$$x_1 t_1 a_1 + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{x_j}{x_1} (t_j - t_n + x_1 a_1 t_1 - x_n a_n t_n) + \\ + \frac{x_n}{x_1} (x_1 a_1 t_1 - x_n a_n t_n) - x_n a_n t_n = t_n - t_1$$

Преобразуем далее уравнение, разбивая сумму на две части и заменяя  $\sum_{j=2}^{n-1} x_j = X - x_1 - x_n$ .

$$x_1^2 t_1 a_1 + \sum_{j=2}^{n-1} x_j (t_j - t_n) + (X - x_1 - x_n)(x_1 a_1 t_1 - x_n a_n t_n) + \\ + x_n (x_1 a_1 t_1 - x_n a_n t_n) - x_1 x_n a_n t_n = x_1 (t_n - t_1)$$

Далее, упростив выражение, получим

$$\sum_{j=2}^{n-1} x_j (t_j - t_n) + X(x_1 a_1 t_1 - x_n a_n t_n) = x_1 (t_n - t_1). \quad (14.2.12)$$

В уравнение подставим выражение для  $x_1 = X - \sum_{j=2}^{n-1} x_j - x_n$  и объединим суммы в левой и правой частях уравнения.

$$\sum_{j=2}^{n-1} x_j (t_j - t_1 - X a_1 t_1) + X^2 a_1 t_1 - X x_n a_1 t_1 - X x_n a_n t_n = \\ X(t_n - t_1) - x_n(t_n - t_1)$$

Подставим выражение  $x_j$  из (14.2.10).

$$\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_n - t_j + x_n a_n t_n)(t_j - t_1 - X a_1 t_1)}{a_j t_j} + \\ + X^2 a_1 t_1 - X x_n a_1 t_1 - X x_n a_n t_n = X(t_n - t_1) - x_n(t_n - t_1)$$

Выразим  $x_n$ .

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_n - t_j)(t_j - t_1 - Xa_1t_1)}{a_jt_j} + X(Xa_1t_1 - t_k + t_1) = \\
& \quad x_n(a_nt_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{Xa_1t_1 - t_j + t_1}{a_jt_j} + X(a_1t_1 + a_nt_n) + t_1 - t_n) \\
& \quad x_n = \frac{\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)(Xa_1t_1 + t_1 - t_j)}{a_jt_j} + X(Xa_1t_1 + t_1 - t_n)}{a_nt_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{Xa_1t_1 + t_1 - t_j}{a_jt_j} + X(a_1t_1 + a_nt_n) + t_1 - t_n} \tag{14.2.13}
\end{aligned}$$

Таким образом, объединив полученные выражения (14.2.10), (14.2.11) и (14.2.13), для системы (14.2.9) получим явное решение (Лемма 14.2).

**Лемма 14.2.** *Для системы  $n$  параллельных каналов, в которой на задержку трафика на первом канале влияет трафик на всех остальных каналах, экстерналии  $b_{12}, b_{13}, \dots, b_{1n}$ , обеспечиваюот оптимальность равновесного профиля  $x$ , где*

$$\begin{aligned}
x_1 &= X - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{t_n - t_i + x_n a_n t_n}{a_i t_i} - x_n, \\
x_i &= \frac{t_n - t_i + x_n a_n t_n}{a_i t_i}, \quad \text{для } i = 1, \dots, n-1, \\
x_n &= \frac{\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)(Xa_1t_1 + t_1 - t_j)}{a_jt_j} + X(Xa_1t_1 + t_1 - t_n)}{a_nt_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{Xa_1t_1 + t_1 - t_j}{a_jt_j} + X(a_1t_1 + a_nt_n) + t_1 - t_n} \\
b_{1i} &= \frac{x_1 a_1 t_1 - x_i a_i t_i}{x_1 t_1} \quad \text{для } i = 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{14.2.14}$$

Далее предположим, что каналы отсортированы по возрастанию пропускной способности, то есть  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$ . То есть на задержку самого медленного канала влияют остальные. В этом случае легко увидеть, что  $x_n \geq 0$  в системе (14.2.14).

Найдем выражение для  $x_1$ , используя уравнение (14.2.12), из которого

$$x_1(Xa_1t_1 + t_1 - t_n) = Xx_n a_n t_n - \sum_{j=2}^{n-1} x_j(t_j - t_n).$$

После подстановки выражения  $x_j$  из (14.2.14) правая часть преобразуется к

ВИДУ

$$\begin{aligned}
& X a_n a_n t_n - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{x_n a_n t_n - (t_j - t_n)}{a_j t_j} (t_j - t_n) = \\
& x_n a_n t_n \left( X - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{t_j - t_n}{a_j t_j} \right) + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)^2}{a_j t_j} = \\
& \left[ a_n t_n \left( X - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{t_j - t_n}{a_j t_j} \right) \left( \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)(X a_1 t_1 + t_1 - t_j)}{a_j t_j} + X(X a_1 t_1 + t_1 - t_n) \right) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)^2}{a_j t_j} \left( a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{X a_1 t_1 + t_1 - t_j}{a_j t_j} + X(a_1 t_1 + a_n t_n) + t_1 - t_n \right) \right] / \\
& \left( a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{X a_1 t_1 + t_1 - t_j}{a_j t_j} + X(a_1 t_1 + a_n t_n) + t_1 - t_n \right)
\end{aligned}$$

Числитель данного выражения равен

$$\begin{aligned}
& X a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)(X a_1 t_1 + t_1 - t_j)}{a_j t_j} - a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{t_j - t_n}{a_j t_j} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(t_i - t_n)(X a_1 t_1 + t_1 - t_i)}{a_i t_i} \\
& + X^2 a_n t_n (X a_1 t_1 + t_1 - t_n) - X a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{t_j - t_n}{a_j t_j} (X a_1 t_1 + t_1 - t_n) \\
& + a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)^2}{a_j t_j} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{X a_1 t_1 + t_1 - t_i}{a_i t_i} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)^2}{a_j t_j} (X a_1 t_1 + t_1 - t_n) \\
& + X a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)^2}{a_j t_j}.
\end{aligned}$$

Первое, четвертое и седьмое слагаемые в сумме дают 0. Тогда оставшаяся часть равна

$$\begin{aligned}
& \left( X^2 a_n t_n + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)^2}{a_j t_j} \right) (X a_1 t_1 + t_1 - t_n) \\
& + a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{t_j - t_n}{a_j t_j} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_i)(X a_1 t_1 + t_1 - t_i)}{a_i t_i}. \quad (14.2.15)
\end{aligned}$$

Тогда получаем выражение для  $x_1$

$$\begin{aligned}
x_1 = & \left[ \left( X^2 a_n t_n + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)^2}{a_j t_j} \right) (X a_1 t_1 + t_1 - t_n) + \right. \\
& \left. + a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{t_j - t_n}{a_j t_j} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_i)(X a_1 t_1 + t_1 - t_i)}{a_i t_i} \right] / \\
& \left[ \left( a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{X a_1 t_1 + t_1 - t_j}{a_j t_j} + X(a_1 t_1 + a_n t_n) + t_1 - t_n \right) (X a_1 t_1 + t_1 - t_n) \right],
\end{aligned}$$



которое неотрицательно, когда неотрицательно выражение (14.2.15).

Рассмотрим  $x_j$ , которое неотрицательно при  $t_n - t_j + x_n a_n t_n \geq 0$ . Подставив  $x_n$ , получаем, что  $x_j$  неотрицательно, когда неотрицательно

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_i)(X a_1 t_1 + t_1 - t_i)}{a_i t_i} + X(X a_1 t_1 + t_1 - t_n) - \frac{(t_j - t_n)(X(a_1 t_1 + a_n t_n) + t_1 - t_n)}{a_n t_n} = \\ & \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_i)(X a_1 t_1 + t_1 - t_i)}{a_i t_i} + \frac{X a_n t_n (X a_1 t_1 + t_1 - t_j) - (t_j - t_n)(X a_1 t_1 + t_1 - t_n)}{a_j t_j} \end{aligned} \quad (14.2.16)$$

Кроме неотрицательности для допустимости решения необходимо выполнение условий (14.1.3). Заметим, что выполнение условия AW очевидно при неотрицательных  $x_i$ , поэтому к полученным условиям неотрицательности необходимо добавить только условия AS и BS.

Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 14.3.** *Для системы  $n$  параллельных каналов, таких что  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$ , а значения выражений (14.2.15) и (14.2.16) для  $j = 2, \dots, n - 1$  неотрицательны, а также выполняются условия (14.1.3), существуют оптимальные значения экстерналий, обеспечивающие цену анархии, равную 1. Оптимальные экстерналии и оптимально-равновесный профиль определяются выражениями (14.2.14).*

### § 14.3 Социализация эгоистичного поведения

Как правило, в системах массового обслуживания действия пользователей не зависят от интересов системы. Пользователи действуют эгоистично в своих собственных интересах, создавая условия для возникновения ситуации равновесия, которая может значительно отличаться от ситуации, оптимальной для системы. В классических моделях Вардропа без применения экстерналий у системы отсутствуют механизмы для управления поведением пользователей с целью принуждения их выбирать стратегии, близкие к оптимальным. Однако в данной модели система может выбирать и изменять значения экстерналий. Исследуем вопрос, может ли система таким образом использовать и изменять равновесное поведение пользователей в своих интересах.

Рассмотрим следующий сценарий действий системы. В системе определены параметры  $t$ ,  $a$  и экстерналии  $b$ . В случае, если экстерналии изначально равны нулю, мы имеем дело с классической моделью, в которой путем введения экстерналий делается попытка социализировать эгоистичное поведение пользователей. Система видит размер входящего потока  $X$ . Здесь и далее предполагаем, что входящий поток  $X$  достаточно большой, чтобы в равновесии и в оптимальном профиле были заняты все каналы ненулевым трафиком.

Для входящего потока трафика  $X$  система определяет оптимальное для себя поведение пользователей путем решения системы уравнений (14.1.1). Это оптимальный профиль  $x^{opt}$ , выгодный системе, к соблюдению которого система будет стараться принудить пользователей. Для этого системе нужно найти такие значения экстерналий  $b'$ , которые вместе с найденным оптимальным профилем  $x^{opt}$  будет удовлетворять системе уравнений (14.2.1). В этом случае профиль  $x^{opt}$ , оптимальный для системы при экстерналиях  $b$  останется оптимальным для нее при новых экстерналиях  $b'$ , а также станет в новых условиях равновесным для пользователей.

Описанный сценарий назовем процедурой *социализации* эгоистичного поведения. Считаем, что параметры системы таковы, что сценарий выполним, то есть равновесие и оптимум существуют и могут быть найдены с помощью систем уравнений (14.1.1) и (14.2.1). Выбирая экстерналии таким образом, система способна обеспечить себе цену анархии, равную 1.

### § 14.3.1 Система с двумя каналами

Рассмотрим случай системы с двумя каналами. Из системы (14.1.1) находим оптимальный профиль  $x^{opt}$ , равный

$$\begin{aligned} x_1^{opt} &= \frac{t_1 - t_2 - X(2a_2t_2 - t_1b_{12} - t_2b_{21})}{2(t_1b_{12} + t_2b_{21} - a_1t_1 - a_2t_2)} \\ x_2^{opt} &= \frac{t_2 - t_1 - X(2a_1t_1 - t_1b_{12} - t_2b_{21})}{2(t_1b_{12} + t_2b_{21} - a_1t_1 - a_2t_2)}. \end{aligned} \quad (14.3.1)$$

Из системы (14.2.1) находим экстерналии  $b'$ , которые обеспечивают оптимальность и равновесность заданному профилю  $x$ .

$$\begin{aligned} b'_{12} &= \frac{t_2a_2x_2 - t_1a_1x_1}{t_1(x_2 - x_1)} + \frac{x_2(t_2 - t_1)}{t_1(x_2^2 - x_1^2)} \\ b'_{21} &= \frac{t_2a_2x_2 - t_1a_1x_1}{t_2(x_2 - x_1)} + \frac{x_1(t_2 - t_1)}{t_2(x_2^2 - x_1^2)}. \end{aligned} \quad (14.3.2)$$

Подставив  $x^{opt}$  из (14.3.1) в полученные выражения (14.3.2), получим значения экстерналий, обеспечивающие оптимальность равновесного поведения пользователей для системы.

**Пример 27.** Рассмотрим систему с параметрами  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 2$ ,  $X = 10$ . Пусть изначальные экстерналии равны нулю, то есть имеем классический вариант системы. Оптимальный профиль равен  $x^{opt} \approx (5.786, 4.214)$ . Вводимые экстерналии  $(b'_{12}, b'_{21}) \approx (0.05, -0.025)$  обеспечивают равновесность данного профиля  $x^{opt}$ , оставляя его оптимальным для системы. Если система имеет начальные экстерналии, например,  $b_{12} = b_{21} = 1$ , то оптимальный профиль равен  $x^{opt} \approx (6.375, 3.625)$ . Вводимые экстерналии  $(b'_{12}, b'_{21}) \approx (0.725, 1.55)$  обеспечивают равновесность данного профиля  $x^{opt}$ , оставляя его оптимальным для системы.

### § 14.3.2 Система с $n$ каналами

Как и в случае системы двух каналов из системы уравнений (14.1.1) находится оптимальный профиль  $x^{opt}$ . Найдем  $x^{opt}$  и запомним. Это тот самый профиль, который система стремится обеспечить путем изменения оригинальных значений экстерналий  $b$  на новые  $b'$ .

Из системы (14.2.1) находим экстерналии  $b'$ , которые обеспечивают оптимальность и равновесность заданному профилю  $x$ . В данном случае получается система  $2(n-1)$  линейных уравнений для  $n(n-1)$  неизвестных  $b'$ .

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} (t_i b'_{ij} + t_j b'_{ji}) x_j - \sum_{j \neq n} (t_k b'_{nj} + t_j b'_{jn}) x_j &= t_n - t_i + 2a_n t_n x_n - 2a_i t_i x_i \\ \sum_{j \neq i} t_i b'_{ij} x_j - \sum_{j \neq n} t_n b'_{nj} x_j &= t_n - t_i + a_n t_n x_n - a_i t_i x_i \\ i &= 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Выразим  $2(n-1)$  из них, например,  $b'_{1j}$  и  $b'_{j1}$  ( $j = 2, \dots, n$ ), через  $x$  и оставшиеся свободные компоненты  $b'$ , для которых положим значения такие же, как в соответствующих  $b$ . Подставив  $x^{opt}$  в полученные выражения для  $b'$ , получим значения экстерналий, обеспечивающие оптимальность равновесного поведения пользователей для системы.

### § 14.3.3 Стоимость социализации для системы

Введение новых значений экстерналий вызывает изменение функций задержки в системе. В общем случае это может повлиять на изменение значения социальных затрат системы, так в большую, так и в меньшую сторону. Проверим, насколько пострадает или выиграет система в рассматриваемой модели, обеспечивая себе оптимальное поведение пользователей.

Рассмотрим систему двух каналов и сравним оптимальные затраты системы до и после процедуры социализации. До социализации в системе были заданы экстерналии  $b = (b_{12}, b_{21})$ , для которых был найден желаемый для системы оптимальный профиль  $x^{opt}$ . В результате выполнения сценария социализации система назначила новые экстерналии  $b' = (b'_{12}, b'_{21})$ , обеспечивающий реализацию оптимального профиля  $x^{opt}$  в равновесии.

Система (14.1.1) выполняется как для профиля  $x^{opt}$  с экстерналиями  $b$ , так и для этого же профиля с новыми экстерналиями  $b'$ , что обусловлено построением  $b'$ . В частности, выполнено  $g_1(x^{opt}, b) = g_2(x^{opt}, b)$  и  $g_1(x^{opt}, b') = g_2(x^{opt}, b')$ , откуда

$$t_1 b_{12} + t_2 b_{21} = \frac{2(a_2 t_2 x_2^{opt} - a_1 t_1 x_1^{opt}) + t_2 - t_1}{x_2^{opt} - x_1^{opt}} = t_1 b'_{12} + t_2 b'_{21}.$$

Для системы двух каналов затраты системы в профиле  $x$  с экстерналиями  $b$  равны

$$SC(x, b) = x_1 t_1 (1 + a_1 x_1) + x_2 t_2 (1 + a_2 x_2) + x_1 x_2 (t_1 b_{12} + t_2 b_{21}).$$

Тогда  $SC(x^{opt}, b) = SC(x^{opt}, b')$ .

Рассмотрим систему с  $n$  каналами. Пусть  $x^{opt}$  – оптимальный профиль, найденный для данных значений экстерналий  $b$  с помощью системы (14.1.1). В частности, равенства

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} (t_i b_{ij} + t_j b_{ji}) x_j^{opt} - \sum_{j \neq n} (t_n b_{nj} + t_j b_{jn}) x_j^{opt} &= t_n - t_i + 2a_n t_n x_n^{opt} - 2a_i t_i x_i^{opt} \\ i &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \tag{14.3.3}$$

выполняются для исходных значений  $b$ .

Обозначим  $\beta_{ij}(b) := t_i b_{ij} + t_j b_{ji}$ ,  $i < j$ , запишем систему (14.3.3) из  $(n - 1)$  линейных уравнений для  $\frac{n(n-1)}{2}$  неизвестных  $\beta(b)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} \beta_{ij}(b) x_j^{opt} - \sum_{j \neq n} \beta_{jn}(b) x_j^{opt} &= t_n - t_i + 2a_n t_n x_n^{opt} - 2a_i t_i x_i^{opt} \\ i &= 1, \dots, n - 1 \end{aligned} \quad (14.3.4)$$

Из системы (14.3.4) можно выразить  $(n - 1)$  неизвестных  $\beta_{1j}(b)$ ,  $j = 2, \dots, n$ , через  $x^{opt}$  и свободные компоненты  $\beta_{ij}(b)$ , где  $i, j > 1$ .

При выполнении процедуры социализации система назначает новые значения экстерналий  $b'$ , гарантирующие, что оптимальный профиль  $x^{opt}$  будет реализован как равновесный. Вспомним, что по построению  $b'_{ij} = b_{ij}$  для  $i, j > 1$ .

Также по построению  $b'$  равенства

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} (t_i b'_{ij} + t_j b'_{ji}) x_j^{opt} - \sum_{j \neq n} (t_n b'_{nj} + t_j b'_{jn}) x_j^{opt} &= t_n - t_i + 2a_n t_n x_n^{opt} - 2a_i t_i x_i^{opt} \\ i &= 1, \dots, n - 1 \end{aligned} \quad (14.3.5)$$

выполняются для новых значений экстерналий  $b'$ .

Обозначим  $\beta_{ij}(b') := t_i b'_{ij} + t_j b'_{ji}$ ,  $i < j$ , запишем систему (14.3.5) из  $(n - 1)$  линейных уравнений для  $\frac{n(n-1)}{2}$  неизвестных  $\beta(b')$ .

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} \beta_{ij}(b') x_j^{opt} - \sum_{j \neq n} \beta_{jn}(b') x_j^{opt} &= t_n - t_i + 2a_n t_n x_n^{opt} - 2a_i t_i x_i^{opt} \\ i &= 1, \dots, n - 1 \end{aligned} \quad (14.3.6)$$

Из системы (14.3.6) выразим  $(n - 1)$  неизвестных,  $\beta_{1j}(b')$ ,  $j = 2, \dots, n$ , через  $x^{opt}$  и свободные компоненты  $\beta_{ij}(b')$ , где  $i, j > 1$ . Поскольку  $\beta_{ij}(b') = \beta_{ij}(b)$  для  $i, j > 1$  (так как  $b'_{ij} = b_{ij}$  для  $i, j > 1$ ), то все  $\beta_{ij}(b') = \beta_{ij}(b)$ .

Затраты системы в профиле  $x^{opt}$  равны

$$\begin{aligned}
 SC(x^{opt}, b) &= \sum_{i=1}^n x_i^{opt} t_i (1 + a_i x_i^{opt}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_i^{opt} x_j^{opt} t_i b_{ij} = \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^{opt} t_i (1 + a_i x_i^{opt}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j > i} x_i^{opt} x_j^{opt} (t_i b_{ij} + t_j b_{ji}) = \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^{opt} t_i (1 + a_i x_i^{opt}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j > i} x_i^{opt} x_j^{opt} \beta_{ij}(b) = \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^{opt} t_i (1 + a_i x_i^{opt}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j > i} x_i^{opt} x_j^{opt} \beta_{ij}(b') = SC(x^{opt}, b').
 \end{aligned}$$

Тогда для системы  $n \geq 2$  параллельных каналов справедлива теорема.

**Теорема 14.4.** *При применении процедуры социализации поведения пользователей система обеспечивает себе оптимальный профиль поведения пользователей и значение социальных затрат системы такое же, как в оптимальном профиле с оригинальными экстерналиями.*

## § 14.4 Результаты

В работе рассмотрена модель Вардропа с разделяемым трафиком применительно к транспортной системе с параллельными каналами и BPR-функциями задержки с линейными экстерналиями.

Предложено два возможных сценария применения экстерналий для систем двух, трех и  $n$  каналов. В первом случае находится оптимально-равновесный профиль и соответствующие значения экстерналий в условиях, когда на задержку только одного из каналов влияют потоки на всех остальных каналах. Для данного случая найден явный вид решения и условия его допустимости.

Второй сценарий представляет собой процедуру социализации равновесного поведения участников транспортного потока. Для него найдены значения экстерналий, обеспечивающих оптимальность равновесного поведения участников потока, а также доказано, что применение процедуры социализации не меняет значение затрат системы.

## Заключение

В работе представлены результаты исследования моделей поведения игроков в сетевых играх разделения совместно используемых ресурсов. В работе исследовано равновесное и оптимальное поведение игроков, а также возможность управления поведением эгоистичных игроков для оптимизации их поведения.

В диссертационной работе построена модель игры выбора моментов обращения к 2-серверной системе обслуживания со случайным доступом в двух постановках: рационально случайный и чисто случайный доступ, каждая из которых исследована для случая известного и случайного числа игроков, имеющего распределение Пуассона. Для всех рассмотренных вариантов игры доказано существование единственного симметричного равновесия, такого что с некоторой положительной вероятностью пользователи обращаются к системе в нулевой момент времени, и далее существует интервал времени  $[t_e, T]$ , на котором определена положительная плотность распределения моментов обращения в систему. Для случая двух игроков в системе с чисто случайным доступом равновесие найдено аналитически и показано, что равновесное распределение на интервале  $[t_e, T]$  имеет экспоненциальный вид. Для обеих постановок предложены алгоритмы для численного нахождения равновесий. Проведены численные эксперименты по сравнению равновесий при различных значениях параметров модели. Также предложено сравнение конкурентного и кооперативного поведения в системе обслуживания, основанное на применении цены анархии для фиксированного и случайного количества игроков.

Построена теоретико-игровая модель односерверной системы массового обслуживания с вытесняющим доступом для случаев, когда количество игроков фиксировано и является случайной величиной с Пуассоновским законом распределения. Для обоих случаев доказано, что существует единственное симмет-

ричное равновесие со следующими свойствами. Ненулевая функция плотности моментов поступления в систему определяется на временном интервале  $[0, t_e]$ . На интервале времени  $[t_e, T]$  поступлений нет. В момент  $T$  игроки отправляют свои запросы в систему с некоторой положительной вероятностью  $p$ . Был проведен ряд численных экспериментов для сравнения равновесия при различных значениях параметров модели. Также предложено сравнение конкурентного и кооперативного поведения в системе обслуживания, основанное на применении цены анархии для фиксированного и случайного количества игроков.

Построена теоретико-игровая модель односерверной системы массового обслуживания с повторными вызовами. Для случая двух и трех игроков доказано, что оптимальная стратегия такова, что игрок обращается к системе с ненулевой вероятностью в начальный момент времени, далее присутствует пауза в поступлениях в систему, далее существует интервал времени  $[t_e, T]$ , на котором определена положительная плотность распределения моментов обращения в систему. Предложены алгоритмы для численного нахождения равновесий и проведены численные эксперименты по нахождению равновесий для различных параметров системы.

Построена и исследована теоретико-игровая одномерная модель выбора базовой станции, учитывающая не только количество пользователей, подключенных к станции, но также расстояния каждого пользователя до станций и уровень шума. Для случая двух игроков найдены равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях в биматричных играх с известным и с неизвестным местонахождением оппонента, а также области существования равновесий. Для произвольного числа игроков предложена КР-подобная модель игры с полной информацией, когда известно расположение всех игроков. Проведены численные эксперименты по сравнению эффективности стратегии выбора ближайшей станции с равновесными в играх двух игроков с известным и неизвестным местонахождением оппонента для случаев низкого и высокого уровней шума.

Построена и исследована двухшаговая игра, моделирующая поведение двух облачных операторов на рынке телекоммуникационных услуг. Получены равновесные и стационарные решения для данной игры. Найдены оптимальные



стратегии операторов на первом и втором шаге и показаны условия существования равновесия в чистых стратегиях на первом шаге. Для случаев, когда предпочтения клиентов ориентированы на компании или операторов, показано, что при повторении игры система приходит в стационарное состояние не более чем за 3 повторения. Кроме того, показано, что в игре более двух операторов в случае, когда предпочтения клиентов ориентированы на компании, система также приходит в стационарное состояние не более чем за 3 повторения.

В КР-модели задачи оптимальной маршрутизации трафика в сети для случая одинаковых каналов найдены линейные и квадратичные затраты системы в полностью смешанном равновесии. В этой же модели для случаев различных каналов найдены линейные и квадратичные затраты системы в полностью смешанном равновесии, а также условия ухудшения такого равновесия при добавлении в систему нового канала.

В игре баланса загрузки с  $N$  вычислительными узлами и  $n$  игроками получена оценка верхней границы цены анархии. Найдены условия, при которых она является точной оценкой цены анархии. Найдены условия возрастания цены анархии при добавлении в систему нового узла. Для системы трех узлов получена верхняя оценка цены анархии, которая является точной при достаточно высокой скорости обслуживания на одном из узлов. Также найдены условия возрастания цены анархии при добавлении в систему двух узлов третьего узла. На примере системы трех узлов разработана методика вычисления точного значения цены анархии, которая может быть обобщена на системы с большим количеством машин. Разработана программная реализация алгоритма вычисления точного значения цены анархии, с помощью которой проведены численные эксперименты сравнения полученных оценок цены анархии с ее точным значением, показывающие корректность полученных оценок.

Для игры баланса загрузки с линейными экстерналиями определены предположения, обеспечивающие адекватное поведение системы. Показано, что в общем случае даже при сделанных предположениях чистое равновесие по Нэшу может не существовать. Для случая двух вычислительных узлов в данной модели доказано существование чистого равновесия по Нэшу и получено ана-

литическое выражение цены анархии.

В игре покрытия вычислительных узлов для системы обслуживания с  $N$  узлами и  $n$  игроками получена нижняя граница цены анархии. Для модели с тремя узлами найдено точное значение цены анархии и доказано, что цена анархии не меняется или растет при добавлении нового узла в систему двух вычислительных узлов. Также разработана методика вычисления точного значения цены анархии на примере трех узлов, которая может быть обобщена на системы с большим количеством узлов. Разработана программная реализация алгоритма вычисления точного значения цены анархии, с помощью которой проведены численные эксперименты сравнения полученных оценок цены анархии с ее точным значением, показывающие корректность полученных оценок. Для случая четырех узлов в системе вычислительные эксперименты показывают частичное совпадение цены анархии для трех и четырех узлов в системе.

В игре покрытия вычислительных узлов с линейными экстерналиями для случая двух вычислительных узлов получено аналитическое выражение цены анархии. Показано, также, что в отличие от модели без экстерналий, в которой цена анархии не ограничена, когда скорость самого быстрого узла не менее 2, в модели с экстерналиями цена анархии имеет конечное значение.

Предложен численный метод нахождения точного значения цены анархии для игр балансировки загрузки и покрытия вычислительных узлов с линейными функциями задержки, который может быть обобщен на систему с большим, числом вычислительных узлов. Предложенный алгоритм реализован программно и проведены вычислительные эксперименты для случая игры балансировки загрузки с экстерналиями с двумя узлами, в которой всегда есть равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

На основе модели Вардропа с параллельными каналами построены две игры с функциями задержки вида  $\frac{\delta}{c-\delta}$  и  $1 - e^{-\alpha\delta}$ . Для первой игры доказана глобальная оптимальность равновесных по Вардропу ситуаций и для случая общедоступных каналов найдено равновесие. Для второй игры найдено равновесие и верхняя граница цены анархии и показано, что она не может превышать 1.3.

Построена байесовская модель Вардропы с параллельными каналами, в которой игроки отправляют по каналам трафик разных типов, зная при этом тип только своего трафика. Для данной модели определены два вида равновесия: равновесие по Вардропу, которое, как здесь показано, всегда существует и может быть найдено с использованием потенциала, и его частный случай – байесовское равновесие по Вардропу.

В работе также изучена Вардропы с разделяемым трафиком применительно к транспортной системе с параллельными каналами и ВРР-функциями задержки с линейными экстерналиями. Предложено два возможных сценария применения экстерналий для систем двух, трех и  $n$  каналов. В первом случае находится оптимально-равновесный профиль и соответствующие значения экстерналий в условиях, когда на задержку только одного из каналов влияют потоки на всех остальных каналах. Для данного случая найден явный вид решения и условия его допустимости. Вторым сценарием представляет собой процедуру социализации равновесного поведения участников транспортного потока. Для него найдены значения экстерналий, обеспечивающих оптимальность равновесного поведения участников потока, а также доказано, что применение процедуры социализации не меняет значение затрат системы.

Полученные результаты носят как теоретический, так и прикладной характер, представляя методы проведения анализа и повышения производительности используемых на практике вычислительных, телекоммуникационных и транспортных сетей путем построения и оценки схем распределения ресурсов сетей между пользователями.

## Литература

- [1] Авраченко К., Сингх В.В., Стохастическая коалиционная динамика улучшенного ответа и устойчивое равновесие // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8. N 1. С. 4–26.; Avrachenkov K., Singh V.V., Stochastic coalitional better-response dynamics and stable equilibrium // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77. Iss. 12. P. 2227–2238.
- [2] Бурков В. Н., Кузнецов Н. А., Новиков Д. А. Механизмы управления в сетевых структурах, Автоматика и телемеханика. 2002. N 12. С. 96–115.; Burkov V. N., Kuznetsov N. A., Novikov D. A. Mechanisms of control in network structures // Automation and Remote Control. 2022. Vol. 63. Iss. 12. P. 1947–1965.
- [3] Дрешер, М. Стратегические игры / М. Дрешер. - М.: Издательство “Советское радио”, 1964. - 352 с.
- [4] Кульгин, М. Практика построения компьютерных сетей. Для профессионалов. / М. Кульгин. - СПб.: Питер, 2001. - 320 с.
- [5] Мазалов, В.В. Сетевые игры : учебное пособие / В.В. Мазалов, Ю.В. Чиркова. - Изд-во: Лань, 2018. 320 с.
- [6] Мазалов В.В., Чиркова Ю.В., Зенг Д., Лиен Д. Теоретико-игровая модель поведения конкурирующих виртуальных операторов на двухстороннем рынке телекоммуникаций // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2017. Т. 9, N 3. С. 36-63.; Mazalov V.V., Chirkova Yu.V., Zheng J., Lien J.W. A Game-Theoretic Model of Virtual Operators Competition in a Two-Sided Telecommunication Market // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79. Iss. 4. P. 737–756.

- [7] Мазалов В.В., Чуйко Ю.В. Некооперативное равновесие по Нэшу в задаче выбора оптимального момента обращения к системе обслуживания // Вычислительные технологии. 2006. Т.11. N 6. С. 60-71.
- [8] Мак-Кинси, Дж. Введение в теорию игр / Дж. Мак-Кинси. - М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. - 420 с.
- [9] Мазалов, В.В. Математическая теория игр и приложения (четвертое издание, исправленное и дополненное) / В.В. Мазалов. - Санкт-Петербург-Москва-Краснодар, Лань, 2021. - 500 с.
- [10] Муллен, Э. Теория игр с примерами из математической экономики. Пер. с франц. / Э. Муллен. - М.: Мир, 1985. - 200 с.
- [11] Новиков, Д.А. Сетевые структуры и организационные системы / Д.А. Новиков. - М.: ИПУ РАН. 2003.
- [12] Новиков Д.А., Игры и сети // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. N 1. С. 107–124.; Novikov D.A. Games and Networks // Automation and Remote Control. 2014. Vol. 75. Iss. 6. P. 1145–1154.
- [13] Парилина Е. М., Кооперативная игра передачи данных в беспроводной сети // Управление большими системами. 2010. Вып. 31.1. С. 191–209.
- [14] Петросян Л.А., Седаков А.А., Бочкарев А.О. Двухступенчатые сетевые игры // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. N 4. С. 84–104.; Petrosyan L. A., Sedakov A. A., Bochkarev A. O. Two-stage network games // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77. Iss. 10. P. 1855–1866.
- [15] Петросян, Л.А. Теория игр: учебное пособие для университетов / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. - М.: Высшая школа, 1998. - 300 с.
- [16] Чиркова Ю.В. Задача выбора и размещения базовых станций в беспроводной сети // Управление большими системами. 2020. Вып. 87. С. 26-46.
- [17] Чиркова Ю.В. Игра баланса загрузки с линейными экстерналиями // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2021. Т. 13. N 2. С. 62-79.;

Chirkova Yu. V. Machine Load Balancing Game with Linear Externalities // Automation and Remote Control. 2022. Vol. 83. Iss. 9. P. 1476–1490.

- [18] Чиркова Ю.В. Оптимальные обращения к 2-серверной системе с потерями и рациональным случайным доступом // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2016. Т. 8. Т. 3. С. 67-99.; Chirkova Yu.V. Optimal Arrivals in a Two-Server Rational Random-Access System with Loss // Automation and Remote Control. 2020. Vol. 81. N. 7. P. 1345-1365.
- [19] Чиркова Ю.В. Оптимальные обращения к 2-серверной системе с потерями и случайным доступом // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2015. Т. 7. N 3. С. 79-111.; Chirkova Yu. V. Optimal arrivals in a two-server random access system with loss // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78. Iss. 3. P. 557-580.
- [20] Чиркова Ю.В. Цена анархии в задаче максимизации минимальной задержки машин в системе обслуживания // Управление большими системами. 2016. Вып. 62. С. 30-59.; Chirkova Yu.V. Price of Anarchy for Maximizing the Minimum Machine Load // Advances in Systems Science and Applications. 2017. Vol. 17. Iss. 4. P. 61-77.
- [21] Чиркова Ю.В. Цена анархии в игре баланса загрузки системы обслуживания // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2012. Т. 4. N 4. С. 93-113; Chirkova Yu.V. Price of anarchy in machine load balancing game // Automation and Remote Control. 2015. Vol. 76. Iss. 10. P. 1849-1864.
- [22] Чиркова Ю.В. Цена анархии в игре баланса загрузки системы обслуживания с тремя машинами // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2014. Т. 6. N 4. С. 85-96.
- [23] Чуйко Ю.В. Задача выбора оптимального момента обращения к системе массового обслуживания для двух игроков // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ. 2005. Вып. 6. С. 243-252.

- [24] Чуйко Ю.В. Задача маршрутизации с разделяемым трафиком и неполной информацией // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1. N 3. С. 107-117.; Чуйко Ю.В. Задача маршрутизации с разделяемым трафиком и неполной информацией // Управление большими системами. 2009. Выпуск 26.1. С. 164-176.
- [25] Чуйко Ю.В. Равновесие по Нэшу в задаче оптимальной маршрутизации трафика в сети передачи данных // Системы управления и информационные технологии. 2006. N 4(26). С. 37-40.
- [26] Abusubaih M., Wolisz A. Interference-aware decentralized access point selection policy for multi-rate IEEE 802.11 wireless lans. // Personal, Indoor And Mobile Radio Communications. 2008. PIMRC 2008. IEEE 19th International Symposium On. P. 1-6.
- [27] Acemoglu D., Ozdaglar A. Flow control, routing, and performance from service provider viewpoint. LIDS report. 2004. 74.
- [28] Ali-Eldin A., Kihl M., Tordsson J., Elmroth E., Efficient provisioning of bursty scientific workloads on the cloud using adaptive elasticity control // Proceedings of the 3rd Workshop on Scientific Cloud Computing Date, ACM, New York, NY, USA. 2012. P. 31-40.
- [29] Altman E. A Markov game approach for optimal routing into a queueing network // INRIA report N 2178, 1994.
- [30] Altman E. Applications of dynamic games in queues // Advances in Dynamic Games. 2005. 7. P. 309-342.
- [31] Altman E., Boulogne T., El-Azouzi R., Jimenez T., Wynter L. A survey on networking games in telecommunications // Computers & OR. 2006. 33. P. 286-311.
- [32] Altman E., Hassin R. Non-Threshold Equilibrium for Customers Joining an M/G/1 Queue Non-Threshold Equilibrium for Customers Joining an M/G/1 Queue // Proceedings of 10th International Symposium on Dynamic Game and

Applications. 2002. URL: <http://www-sop.inria.fr/maestro/personnel/Eitan.Altman/PAPERS/hassin.ps>.

- [33] Altman E., Jimenez T., Nunez Queija R., Yechiali U. Optimal routing among  $M/1$  queues with partial information // *Stochastic Models*. 2004. Vol. 20. N 2. P. 149-172.
- [34] Altman E., Koole G. Stochastic scheduling games with Markov decision arrival processes // *Journal Computers and Mathematics with Appl.* 1993. Vol. 26. N 6. P. 141-148.
- [35] Altman E., Shimkin N. Individually Optimal Dynamic Routing in a Processor Sharing System // *Operations Research*. 1998. Vol. 46. N 6. P. 776-784.
- [36] Altman E., Wynter L. Equilibrium, games, and pricing in transportation and telecommunications networks // *Crossovers between Transportation Planning and Telecommunications*. 2004. Vol. 4, N. 1. P. 7-21.
- [37] Altman E., Borovkov A.A. On the stability of retrial queues // *Queueing Syst.* 1997. 26. P. 343-363.
- [38] Andelman N., Feldman M., Mansour Y. Strong price of anarchy // *Proc. of the 18th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*. 2007. - P. 189-198.
- [39] Ardagna D., Panicucci B., Passacantando M. A game theoretic formulation of the service provisioning problem in cloud systems // *Proceedings of the 20th International Conference on World Wide Web, ACM, New York, NY, USA*. 2011. P. 177-186.
- [40] Armstrong M. Competition in two-sided markets // *The RAND Journal of Economics*. 2006. Vol. 37. No. 3. P. 668-691.
- [41] Artalejo J.R. Gomez-Corral A. *Retrial Queueing Systems: A Computational Approach*. Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2008.



- [42] Avrachenkov K., Morozov E., Steyaert, B. Sufficient stability conditions for multi-class constant retrial rate systems // *Queueing Syst.* 2016. 82. P. 149-171.
- [43] Awerbuch B., Azar Y., Epstein A. The Price of Routing Unsplittable Flow // *Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'05)*. 2005. P. 57-66.
- [44] Awerbuch B., Azar Y., Epstein A. The price of routing unsplittable flow // *Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2005)*. 2005. P. 331-337.
- [45] Awerbuch B., Azar Y., Richter Y, Tsur D. Tradeoffs in worst-case equilibria // *Proceedings of 1st WAOA*. 2003. P. 41-52.
- [46] Azariadis C., Chen B.-L., Lu C.-H., Wang Y.-C. A two-sector model of endogenous growth with leisure externalities // *Journal of Economic Theory*. 2013. Vol. 148. P. 843-857.
- [47] Bala V., Goyal S. A non-cooperative model of network formation // *Econometrica*. 2000. Vol. 68. N. 5. P. 1181-1231.
- [48] Bean N.G., Kelly F.P., Taylor P.G. Braess' Paradox in a Loss Network, *Journal of Applied Probability*. 1997. 34. P. 155-159.
- [49] Belkovskii D.V., GarnaeV A.Y. A Competitive Prediction Number Game under Unsymmetrical Conditions // *Game Theory and Applications*. 2005. Vol. X. Nova Sci. Publ., Commack, NY. P. 27-36.
- [50] Boon M.A.A. A polling model with renegeing at polling instants // *Ann. Oper. Res.* 2012. 198. P. 5-23.
- [51] Braess D. Über ein Paradoxon der Verkehrsplanung // *Unternehmensforschung*. 1968. Vol. 12. P. 258-268.
- [52] Bramoullè Y., Kranton R. Public goods in networks // *Journal of Economic Theory*. 2007. V. 135. P. 478-494.

- [53] Breinbjerg J., Platz T.T., Østerdal L.P. Equilibrium Arrivals to a Last-come First-served Preemptive-resume Queue, Working Papers 17-2020. Copenhagen Business School, Department of Economics. (2020)
- [54] Brynjolfsson E., Hofmann P., Jordan J. Cloud computing and electricity: beyond the utility model // Commun. ACM. 2010. 53. P. 32-34.
- [55] Buyya R., Pandey S., Vecchiola C. Cloudbus Toolkit for Market-Oriented Cloud Computing // IEEE International Conference on Cloud Computing, Beijing, 1-4 December 2009. 2009. Vol. 5931. P. 24-44.
- [56] Cesana M., Gatti N., Malanchini I. Game theoretic analysis of wireless access network selection: models, inefficiency bounds, and algorithms. // Proceedings Of The 3rd International Conference On Performance Evaluation Methodologies And Tools. 2008. P. 6.
- [57] Cesana M., Malanchini I., Capone A. Modelling network selection and resource allocation in wireless access networks with non-cooperative games // 2008 5th IEEE International Conference on Mobile Ad Hoc and Sensor Systems. 2008. P. 404-409.
- [58] Chaisiri S., Lee B.-S., Niyato D. Optimization of Resource Provisioning Cost in Cloud Computing // IEEE Transactions on Services Computing. 2012. Vol. 5. N. 2. P. 164-177.
- [59] Chang F., Ren J., Viswanathan R. Optimal resource allocation in clouds // Proceedings of the 3rd International Conference on Cloud Computing, Cloud 2010, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA. 2010. P. 418-425.
- [60] Chen L. A distributed access point selection algorithm based on no-regret learning for wireless access networks // Vehicular Technology Conference (VTC 2010-Spring), 2010 IEEE 71st. 2010. P. 1-5.
- [61] Chen X., Epstein L., Kleiman E. et al. Maximizing the minimum load: The cost of selfishness // Theor. Comput. Sci. 2013. 482. P. 9-19.

- [62] Chirkova J., Mazalov V., Morozov E. Equilibrium in a Queueing System with Retrials // *Mathematics*. 2022. Vol. 10. N. 3. 428.
- [63] Chirkova J.V., Mazalov V.V. Optimal Arrivals to Preemptive Queueing System // *Mathematical Optimization Theory and Operations Research*. 21st International Conference, MOTOR 2022, Petrozavodsk, Russia, July 2–6, 2022, Proceedings. *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 13367. Springer, Cham. 2022. P. 169-181.
- [64] Chirkova J.V. Computing the Price of Anarchy in Processor Load Balancing Game with Linear Delays // *Contributions to Game Theory and Management*. 2021. Vol. 14. P. 72-81.
- [65] Chirkova J.V. Maximizing the Minimum Processor Load with Linear Externalities // *Stekalovsky A., Kochetov Y., Gruzdeva T., Orlov A. (eds). Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends. MOTOR 2021. Communications in Computer and Information Science*. 2021. Vol. 1476. Springer, Cham. P. 147-162.
- [66] Chirkova J.V., Mazalov V.V. Optimal externalities in a parallel transportation network // *Optimization Letters*. 2022. 16. P. 1971–1989.
- [67] Choi B.D., Rhee K.H., Park K.K. The M/G/1 retrial queue with retrial rate control policy // *Probability in the Engineering and Informational Sciences*; Cambridge University Press: Cambridge, UK. 1993. Vol. 7. P. 29-46.
- [68] Christodoulou G., Koutsoupias E., Nanavati A. Coordination mechanisms // *Theoretical Computer Science*. 2009. Vol. 410. P. 3327-3336.
- [69] Christodoulou G., Koutsoupias E. On the price of anarchy and stability of correlated equilibria of linear congestion games // *Lecture Notes in Computer Science*. 2005. Vol. 3669, P. 59-70.
- [70] Christodoulou G., Koutsoupias E. The price of anarchy of finite congestion games // *Proc. of 37th annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2005)*. 2005. P. 67-73.

- [71] Chuiko J.V., Mazalov V.V. Nash Equilibrium in Splittable Traffic Routing Problem // Proceedings of Kosen Workshop MTE2008 - Mathematics, Technology and Education - Ibaraki National College of Thechnology, Hitachinaka, Ibaraki, Japan, 2008. 2008. P. 13-18.
- [72] Chuyko J., Polishchuk T., Mazalov V., Gurtov A. Wardrop Equilibria and Price of Anarchy in Multipath Routing Games with Elastic Traffic // Game Theory and Applications. 2011. Vol. 15. P. 11-22.
- [73] Cole R., Dodis Y., Roughgarden T. Pricing network edges for heterogeneous selfish users // Proceedings of the 4th ACM conference on Electronic commerce. 2003. P. 98-107.
- [74] Cole R., Dodis Y., Roughgarden T. How much can taxes help selfish routing? // Journal of Computer and System Sciences. 2006. V. 72. P. 444-467.
- [75] Correa J.R., Stier-Moses N.E. Wardrop Equilibria. John Wiley & Sons, Inc., 2011.
- [76] Dimitriou I. A queueing system for modeling cooperative wireless networks with coupled relay nodes and synchronized packet arrivals // Perform. Eval. 2017. Vol. 114(C). P. 16-31.
- [77] Dumrauf D., Gairing M. Price of anarchy for polynomial Wardrop games // Internet and Network Economics, Second International Workshop, WINE 2006, Patras, Greece, December 15-17, 2006. 2006. P. 319-330.
- [78] Easley D., Kleinberg J. Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about Highly Connected World. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [79] El Azouzi R., Altman E. Constrained Traffic Equilibrium in Routing Networks // IEEE Trans. on Automatic Control. 2003. Vol. 48. N. 9. P. 1656-1660.
- [80] El Azouzi R., Altman E., Wynter L. Telecommunications Network Equilibrium with Price and Quality-of-Service Characteristics // Proc. of ITC, Berlin, Sept 2003. 2003. URL: <http://www-sop.inria.fr/mistral/personnel/Rachid.Elazouzi/R-ElazouziITC.ps>

- [81] Epstein L., Kleiman E., van Stee R. Maximizing the minimum load: the cost of selfishness // Proceedings of the 5th International Workshop on Internet and Network Economics, Lecture Notes in Computer Science. 2009. Vol. 5929. P. 232-243.
- [82] Epstein L. Equilibria for two parallel links: the strong price of anarchy versus the price of anarchy // Acta Informatica. 2010. Vol. 47. N. 7-8. P. 375-389.
- [83] Even-Dar E., Kesselman A., Mansour Y. Convergence time to Nash equilibria // Baeten, J.C.M. et al. (eds.) ICALP 2003, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin, Heidelberg. 2003. Vol. 2719, P. 502-513.
- [84] Fabrikant, A., Papadimitriou, C. & Talwar, K. The complexity of pure Nash equilibria. // Proceedings Of The Thirty-sixth Annual ACM Symposium On Theory Of Computing. P. 604-612 (2004)
- [85] Falin G.I., Templeton J.G.D. Retrial Queues, Chapman & Hall: London, UK, 1997.
- [86] Fakinos D. The G/G/1 queueing system with a particular queue discipline // Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological). 1981. Vol. 43.2. P. 190-196.
- [87] Fayolle G. A simple telephone exchange with delayed feedback // Boxma O.J., Cohen J.W., Tijms H.C. (eds.) Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation. Elsevier: North-Holland. 1986. Vol. 7. P. 245-253.
- [88] Feldman M., Snappir Y., Tamir T. The efficiency of best-response dynamics // International Symposium on Algorithmic Game Theory. Springer, Cham. 2017. P. 186-198.
- [89] Feldmann R., Gairing M., Lücking T., Monien B., Rode M., Nashification and the coordination ratio for a selfish routing game // Proc. of the 30th Int. Colloc. on Automata, Languages and Programming, LNCS 2719. 2003. P. 514-526.

- [90] Feldmann R., Gairing M., Lücking T., Monien B., Rode M., Selfish routing in non-cooperative networks: a survey // Proc. of 28th Int. Symp. on Mathematical Foundation of Computer Science, LNCS 2747. 2003. P. 21-45.
- [91] Fleischer L. Linear tolls suffice: New bounds and algorithms for tolls in single source networks // Theoretical Computer Science. 2005. V. 348. P. 217-225.
- [92] Fleischer L., Jain K., Mahdian M. Tolls for heterogeneous selfish users in multicommodity networks and generalized congestion games // Proceedings of the Fourty-Fifth Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 2004. P. 277-285.
- [93] Floyd S., Henderson T., Gurtov A., The NewReno Modification to TCP's Fast Recovery Algorithm, RFC 3782, IETF, Apr. 2004.
- [94] Fotakis D., Kontogiannis S.C., Koutsoupias E., Mavronicolas M., Spirakis P.G. The structure and complexity of nash equilibria for a selfish routing game // Proc. of the 29th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP2002). 2002. P. 123-134.
- [95] Gairing M., Lücking T., Mavronicolas M., Monien B. The price of anarchy for polynomial social cost // Proceedings of the 29th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2004). 2004. P. 574-585.
- [96] Gairing M., Lücking T., Mavronicolas M., Monien B., Rode M. Nash equilibria in discrete routing games with convex latency functions // Proceedings of the 31th Int. Colloc. on Automata, Languages and Programming, LNCS 2719. 2004. P. 645-657.
- [97] Gairing M., Lücking T., Mavronicolas M., Monien B., Spirakis P. Extreme Nash Equilibria // Proceedings of the 8th Italian Conference on Theoretical Computer Science (ICTCS'03), LNCS 2841. 2003. P. 1-20.
- [98] Gairing M., Monien B., Tiemann K. Routing (Un-) Splittable Flow in Games with Player-Specific Linear Latency Functions // Proceedings of the 33rd

International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2006), LNCS 4051. 2006. P. 501-512.

- [99] Gairing, M., Monien, B., Tiemann, K. Selfish routing with incomplete information. *Theory Comput. Syst.* 2008. P. 91-130.
- [100] Gao H., Mazalov V.V., Xue J. Optimal Parameters of Service in a Public Transportation Market with Pricing // *Journal of Advanced Transportation*. Vol. 2020. Article ID 6326953. 8 pages. 2020. URL: <https://www.hindawi.com/journals/jat/2020/6326953/>
- [101] Garrison G., Kim S.H., Wakefield R.L. Success factors for deploying cloud computing // *Commun. ACM*. 2012. Vol. 55. N. 9. P. 62-68.
- [102] Ge Y., Zhang Y., Qiu Q., Lu Y.-H. A game theoretic resource allocation for overall energy minimization in mobile cloud computing system // *Proceedings of the 2012 ACM/IEEE International Symposium on Low Power Electronics and Design*, ACM, New York, NY, USA. 2012. P. 279-284.
- [103] Glazer A., Hassin R.  $M/1$ : On the equilibrium distribution of customer arrivals // *Eur. J. Oper. Res.* 1983. Vol. 13. P. 146-150.
- [104] Glazer A., Hassin R. Equilibrium arrivals in queues with bulk service at scheduled times // *Transp. Sci.* 1987. Vol. 21. P. 273-278.
- [105] Gong H., Kim J. Dynamic Load Balancing Through Association Control of Mobile Users in WiFi Networks // *IEEE Transactions on Consumer Electronics*. 2008. Vol.54. Iss. 2. P 342-348.
- [106] Haddad M., Elayoubi S.E., Altman E.: A Hybrid Approach for Radio Resource Management in Heterogeneous Cognitive Networks // *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*. 2011. Vol. 29(4). P. 831–842.
- [107] Hagstrom J.N., Abrams R.A. Characterizing Braess's paradox for traffic networks // *Proceedings of IEEE 2001 Conference on Intelligent Transportation Systems*. 2001. P. 837-842.

- [108] Hassin R. On the optimality of first come last served queues // *Econometrica*. 1985. Vol. 53(1). P. 201–202.
- [109] Hassin R., Kleiner Y. Equilibrium and optimal arrival patterns to a server with opening and closing times // *IIE Trans.* 2011. Vol. 43. P. 164-175.
- [110] Haviv M. When to arrive at a queue with tardiness costs // *Perform. Eval.* 2013. Vol. 70. P. 387-399.
- [111] Haviv M., Kella O., Kerner, Y. Equilibrium strategies in queues based on time or index of arrival // *Prob. Eng. Inform. Sci.* 2010. Vol. 24. P. 13–25.
- [112] Haviv M., Ravner L. A survey of queueing systems with strategic timing of arrivals // *Queueing Syst.* 2021. Vol. 99 P. 163–198.
- [113] Holzman R., Monderer D. Strong equilibrium in network congestion games: Increasing versus decreasing costs // *Int. J. Game Theory.* 2015. Vol. 44. P. 647-666.
- [114] Hong M., Garcia A., Barrera J. Joint distributed access point selection and power allocation in cognitive radio networks // 2011 Proceedings IEEE INFOCOM. 2011. P. 2516-2524.
- [115] Irwin D., Urgaonkar B. Research challenges at the intersection of cloud computing and economics. – National Science Foundation, 2018.
- [116] Jacobs J. The economy of cities. Random House, New York, 1969.
- [117] Jahn O., Möhring R.H., Schulz A.S., Stier-Moses N.E. System-optimal routing of traffic flows with user constraints in networks with congestion // *Operations Research.* 2003. Vol. 53. P. 600-616.
- [118] Jain R., Juneja S., Shimkin N. The concert queueing game: To wait or to be late // *Discret. Event Dyn. Syst.* 2011. Vol. 21. P. 103-138.
- [119] Jiang L., Parekh S., Walrand J. Base station association game in multi-cell wireless networks (special paper). // *Wireless Communications And Networking Conference, 2008. WCNC 2008. IEEE.* 2008. P. 1616-1621.



- [120] Johnson O., Goldschmidt C. Preservation of log-concavity on summation // ESAIM: Probability and Statistics. 2006. Vol. 10. P. 206-215.
- [121] Judd G., Steenkiste P. Fixing 802.11 access point selection // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. 2002. Vol. 32. P. 31.
- [122] Karakitsiou A., Migdalas A. Locating facilities in a competitive environment // Optimization Letters. 2017. Vol. 11(5). P. 929-945.
- [123] Karakostas G., Kim T., Viglas A., Xia H. On the degradation of performance for traffic networks with oblivious users // J. Transportation Research. Part B. 2011. Vol. 45. P. 364-371.
- [124] Karakostas G., Kolliopoulos S.G. Edge pricing of multicommodity networks for heterogeneous selfish users // Proceedings of the Fourty-Fifth Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 2004. P. 268-276.
- [125] Kiiski A., Hämmäinen H. Mobile virtual network operator strategies: Case Finland //ITS 15th Biennial conference. – 2004. URL: [http://www.netlab.tkk.fi/tutkimus/lead/leaddocs/KiiskiHammainen\\_MVNO.pdf](http://www.netlab.tkk.fi/tutkimus/lead/leaddocs/KiiskiHammainen_MVNO.pdf)
- [126] Killelea P. Web Performance Tuning: Speeding Up the Web, O'Reilly Media, Inc., 2002.
- [127] Kim J., Kim B. A survey of retrial queueing systems // Ann. Oper. Res. 2016. Vol. 247. P. 3-36.
- [128] Kllapi H., Sitaridi E., Tsangaris M. M., Ioannidis Y. Schedule optimization for data processing flows on the cloud // Proceedings of the 2011 ACM SIGMOD International Conference on Management of data, SIGMOD '11, ACM, New York, NY, USA. 2011. P. 289-300.
- [129] Kopper K. The Linux Enterprise Cluster: Build a Highly Available Cluster with Commodity Hardware and Free Software, No Starch Press, 2005.
- [130] Korilis Y.A., Lazar A.A., Orda A. Architecting noncooperative networks // J. on Selected Areas in Communications. 1995. Vol. 13, N. 7. P. 1241-1251.

- [131] Korilis Y.A., Lazar A.A., Orda A. Avoiding the Braess's paradox for traffic networks // *J. Appl. Probability*. 1999. Vol. 36. P. 211-222.
- [132] Koutsoupias E., Papadimitriou C.H. Worst-case Equilibria // *Proceedings of STACS 1999*. 1999. Vol. 1563. P. 404-413.
- [133] Krylatov A.Y., Zakharov V.V., Malygin I.G. Competitive Traffic Assignment in Road Networks // *Transport and Telecommunication*. 2016. Vol. 17. N. 3. P. 212–221.
- [134] Kuang Z., Lian Z., Lien J.W., Zheng J. Serial and parallel duopoly competition in multi-segment transportation routes // *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. 2020. Vol. 133(6). 101821.
- [135] Kuang Z., Mazalov V.V., Tang X., Zheng J.: Transportation network with externalities // *J. Comput. Appl. Math*. 2021. Vol. 382. 113091.
- [136] Law L.M., Huang J., Liu M. Price of anarchy of wireless congestion games // *IEEE Trans. Wireless Commun*. 2012. Vol. 11. Iss. 10. P. 3778-3787.
- [137] Lücking T., Mavronicolas M., Monien B., Rode M. A New Model for Selfish Routing // *Proceedings of STACS 2004. Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 2996. 2004. P. 547-558.
- [138] Lücking T., Mavronicolas M., Monien B., Rode M., Spirakis P., Vrto I. Which is the Worst-case Nash Equilibrium? // *Proceedings of the 26th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science, 2003, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 2747. 2003. P. 551-561.
- [139] Lien J.W., Mazalov V.V., Melnik A.V., Zheng J. Wardrop equilibrium for networks with the BPR latency function // *Discrete Optimization and Operations Research. Lecture Notes in Computer Science*. 2016. V. 9869. P. 37-49.
- [140] Lin H., Roughgarden T., Tardos E. On Braess's paradox // *Proceedings of the 15th Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA04)*. 2004. P. 333–334.

- [141] Liyanage M., Chirkova J.V., Gurtov A. Access Point Selection Game for Mobile Wireless Users // A World of Wireless, Mobile and Multimedia Networks (WoWMoM), 2014 IEEE 15th International Symposium on Autonomic and Opportunistic Communications, Sydney, Australia; 06/2014. 2014. P. 1-6.
- [142] Mak V., Seale D.A., Gishces E.J. et al. The Braess Paradox and Coordination Failure in Directed Networks with Mixed Externalities // *Prod. Oper. Manag.* 2018. Vol. 27(4). P. 717-733.
- [143] Mavronicolas M., Spirakis P. The Price of Selfish Routing // *Proceedings of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing.* 2001. P. 510-519.
- [144] Mazalov V., Lukyanenko A., Luukkainen S. Equilibrium in cloud computing market // *Performance Evaluation.* 2015. Vol. 92. P. 40-50.
- [145] Mazalov V. et al. Wardrop equilibria and price of stability for bottleneck games with splittable traffic // *International Workshop on Internet and Network Economics.* – Springer, Berlin, Heidelberg. 2006. P. 331-342.
- [146] Mazalov V.V., Melnik A.V. Equilibrium Prices and Flows in the Passenger Traffic Problem // *International Game Theory Review.* 2016. Vol. 18. N. 1. 1650001.
- [147] Mazalov, V.; Chirkova, J. *Networking Games. Network Forming Games and Games on Networks*; Academic Press: Cambridge, MA, USA, 2019.
- [148] Mazhelis O., Tyrväinen P. Economic aspects of hybrid cloud infrastructure: User organization perspective // *Information Systems Frontiers.* 2012. Vol. 14. N. 4. – P. 845-869.
- [149] Mazzucco M., Dyachuk D., Deters R. Maximizing cloud providers' revenues via energy aware allocation policies // *Proceedings of the 3rd International Conference on Cloud Computing, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA.* 2010. P. 131-138.
- [150] Mercer A. A queueing problem in which the arrival times of the customers

are scheduled // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1960. P. 108-113.

- [151] Milchtaich I. Congestion games with player-specific payoff functions // Games and Economic Behavior. 1996. Vol. 13. P. 111-124.
- [152] Milchtaich I. Network topology and the efficiency of equilibrium // Games Econ. Behav. 2006. Vol.57(2). P. 321-346.
- [153] Mittal K., Belding E., Suri S. A game-theoretic analysis of wireless access point selection by mobile users. // Computer Communications. 2008. Vol. 31. P. 2049-2062.
- [154] Monderer D., Shapley L. Potential games // Games and Economic Behavior. 1996. Vol. 14. P. 124-143.
- [155] Morozov E. A multiserver retrial queue: Regenerative stability analysis // Queueing Syst. 2007. Vol. 56. P. 157-168.
- [156] Morozov E., Morozova T. On the stationary remaining service time in the queuing systems // CEUR Workshop Proc. 2020. Vol. 2792. P. 140-149.
- [157] Morozov E., Phung-Duc T. Stability analysis of a multiclass retrial system with classical retrial policy // Perform. Eval. 2017. Vol. 112. P. 15–26.
- [158] Morozov E., Steyaert B. Stability Analysis of Regenerative Queueing Models. – Springer International Publishing, 2021.
- [159] Morozov E., Zhukova K. The Overflow Probability Asymptotics in a Single-Class Retrial System with General Retrieve Time // Vishnevskiy, V.M., Samouylov, K.E., Kozyrev, D.V. (eds.), International Conference on Distributed Computer and Communication Networks. Springer, Cham. 2021. P. 55-66.
- [160] Murchland J.D. Braess's paradox of traffic flow // Transportation Research. 1970. Vol. 4. P. 391-394.

- [161] Owen G. Game Theory. Monterey, CA: Emerald Group Publishing Limited, 2013.
- [162] Pal R., Hui P. Economic models for cloud service markets: Pricing and capacity planning // Theoretical Computer Science. 2013. Vol. 496. P. 113-124.
- [163] Papadimitriou C.H. Algorithms, games, and the Internet // Proceedings of the 33th Annual ACM STOC. 2001. P. 749-753.
- [164] Pappas N., Kountouris M., Ephremides A., Traganitis A. Relay-assisted multiple access with full-duplex multi-packet reception // IEEE Trans. Wirel. Commun. 2015. Vol. 14. P. 3544-3558.
- [165] Perlaza S., Belmega E., Lasaulce S., Debbah M. On the Base Station Selection and Base Station Sharing in Self-Configuring Networks // 3rd ICST/ACM International Workshop on Game Theory in Communication Networks. 2009. P. 1-10.
- [166] Raivio Y., Mazhelis O., Annapureddy K., Mallavarapu R., Tyrväinen P. Hybrid cloud architecture for short message services // Proceedings of the 2nd International Conference on Cloud Computing and Services Science, Closer 2012, SciTePress. 2012. P. 489-500.
- [167] Raj G. An efficient broker cloud management system // Proceedings of the International Conference on Advances in Computing and Artificial Intelligence, ACM, New York, NY, USA. 2011. P. 72-76.
- [168] Rao N., Poole S., He F., Zhuang J., Ma C., Yau D. Cloud computing infrastructure robustness: A game theory approach // 2012 International Conference on Computing, Networking and Communications, ICNC. 2012. P. 34-38.
- [169] Ravner L., Haviv M. Equilibrium and socially optimal arrivals to a single server loss system // 2014 7th International Conference on NETwork Games, COntrol and OPTimization (NetGCoop). IEEE. 2014. P. 119-126.

- [170] Ravner L., Haviv M. Strategic timing of arrivals to a finite queue multi-server loss system // *Queueing Systems*. 2015. Vol. 81. N. 1. P. 71-96.
- [171] Rogers O., Cliff D. A financial brokerage model for cloud computing // *Journal of Cloud Computing: Advances, Systems and Applications*. 2012. Vol. 1. N. 1. P. 1-12.
- [172] Rosenthal R.W. A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria // *Int. Journal of Game Theory*. 1973. Vol. 2. P. 65-67.
- [173] Roughgarden T. On the severity of Braess's paradox: Designing networks for selfish users is hard // *J. of Computer and System Sciences*, 2006, 72, P. 922-953.
- [174] Roughgarden T. The price of anarchy is independent of the network topology // *Journal of Computer & System Sciences*. 2003. Vol. 67. N. 2. P. 341-364.
- [175] Roughgarden T., Tardos E. How bad is selfish routing? // *Journal of the ACM (JACM)*. 2002. Vol. 49. N. 2. P. 236-259.
- [176] Sakaguchi M., Szajowski K. Competitive prediction of a random variable // *Mathematica Japonica*. 1996. Vol. 43. N. 3. P. 461-472.
- [177] Shaked M., Shanthikumar J.G. *Stochastic Orders*. Springer Series In Statistics, Springer, 2007.
- [178] Sheffi Y. *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*. Prentice-Hall, 1984.
- [179] Singh C., Kumar A., Sundaresan R. Uplink power control and base station association in multichannel cellular networks // *2009 International Conference on Game Theory for Networks*. IEEE. 2009. P. 43-51.
- [180] Srivastava V., Neel J., Mackenzie A., Menon R., Dasilva L., Hicks J., Reed J., Gilles R. Using game theory to analyze wireless ad hoc networks. // *Communications Surveys Tutorials, IEEE*. 2005. Vol. 7. P. 46 - 56.

- [181] Tan Z., Wan L., Zhang Q., Ren W. Inefficiency of equilibria for the machine covering game on uniform machines // *Acta Informatica*. 2012. Vol. 49. N. 6. P. 361-379.
- [182] Teraoka Y., Hohjo H. N-person silent game on sale // *Scientiae Mathematicae Japonicae*. 2006. Vol. 63.2. P. 237-240.
- [183] U.S. Bureau of Public Roads. Traffic Assignment Manual, U.S. Department of Commerce, Washington, D.C., 1964.
- [184] Vecchiola C., Calheiros R.N., Karunamoorthy D., Buyya R. Deadline-driven provisioning of resources for scientific applications in hybrid clouds with Aneka // *Future Generation Computer Systems*. 2012. Vol. 28. N. 1. P. 58-65.
- [185] Wardrop J.G. Some theoretical Aspects of Road Traffic Research // *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*. 1952. Vol. II, 1. P. 325-278.
- [186] Wei G., Vasilakos A.V., Zheng Y., Xiong N. A game-theoretic method of fair resource allocation for cloud computing services // *J. Supercomput.* 2010. Vol. 54. P. 252-269.
- [187] Weinman J. Hybrid cloud economics // *IEEE Cloud Computing*. 2016. Vol. 3. N. 1. P. 18-22.
- [188] Wright P., Sun Y.L., Harmer V., Keenan A., Stewart A., Perrott R. A constraints-based resource discovery model for multi-provider cloud environments // *J. Cloud Comput. Adv. Syst. Appl.* 2012. Vol. 1. P. 1-6.
- [189] Wu Y., Cheng T.C.E., Ji M. Inefficiency of the Nash equilibrium for selfish machine covering on two hierarchical uniform machines // *Inf. Process. Lett.* 2015. Vol.115(11). P. 838-844.
- [190] Xu F., Tan C., Li Q., Yan G., Wu J. Designing a practical access point association protocol. // *INFOCOM, 2010 Proceedings IEEE*. 2010. P. 1-9.
- [191] Masuda Y., Whang S. Capacity management in decentralized networks // *Manage. Sci.* 2002. Vol. 48(12). P. 1628-1634.

- [192] Yamazaki G., The GI/G/1 queue with last-come-first-served // Ann. Inst. Statist. Math. 1982. Vol. 34.3. P. 599-604.
- [193] Yen L. H., Li J. J., Lin C. M. Stability and fairness of AP selection games in IEEE 802.11 access networks // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2011. Vol. 60. N. 3. P. 1150-1160.
- [194] Zakharov V., Krylatov A. Transist Network Design for Green Vehicles Routing, Advances in Intelligent Systems and Computing. 2015. Vol. 360. P. 449-458.



Karelian Research Centre of Russian Academy of Sciences  
Institute of Applied Mathematical Research

*Printed as a manuscript*

Chirkova Yulia Vasilevna

**NETWORKING GAMES:  
EQUILIBRIUM AND OPTIMAL BEHAVIOR**

Scientific specialization 1.2.3.

Theoretical computer science, cybernetics

Thesis submitted in conformity with the requirements  
for the degree of doctor of physico-mathematical sciences

Translation from Russian

Scientific consultant:

Doctor of physico-mathematical sciences,

Professor Mazalov Vladimir Viktorovich

Petrozavodsk

2022

# Contents

<b>Introduction</b> .....	7
<b>Chapter 1. Arrival Time Choice in a Random-Access Two-Server System</b> .....	31
§ 1.1 Two-server system .....	33
§ 1.2 Game with rational random-access scheme .....	34
§ 1.2.1 Deterministic number of players.....	40
§ 1.2.2 Random number of players.....	47
§ 1.2.3 The price of anarchy.....	56
§ 1.3 Game with pure random-access scheme .....	57
§ 1.3.1 Deterministic number of players.....	63
§ 1.3.2 Random number of players.....	73
§ 1.3.3 The price of anarchy.....	80
§ 1.4 Comparison of random-access schemes in terms of efficiency .....	82
§ 1.5 Results .....	85
<b>Chapter 2. Arrival Time Choice in the Preemptive Queueing System</b> .....	92
§ 2.1 Queue system.....	94
§ 2.2 The game model.....	94
§ 2.3 Deterministic number of players.....	99
§ 2.4 Random number of players .....	104
§ 2.5 Computing the equilibrium .....	107
§ 2.6 Numerical examples .....	108
§ 2.7 The price of anarchy.....	112
§ 2.8 Results .....	114

<b>Chapter 3. Arrival Time Choice in the Queueing System with Retrials</b> .....	117
§ 3.1 Queue system .....	118
§ 3.2 Two-player game .....	119
§ 3.3 Three-player game.....	122
§ 3.4 Computing the equilibrium in the three-player game.....	127
§ 3.5 Results .....	131
<b>Chapter 4. Base Station Selection Game</b> .....	132
§ 4.1 Optimality problem for one player .....	133
§ 4.2 Two players game.....	133
§ 4.2.1 Bimatrix game with full information.....	134
§ 4.2.2 Bimatrix model with incomplete information.....	138
§ 4.3 KP-like model for $n$ players.....	141
§ 4.4 Numerical examples .....	141
§ 4.4.1 Low noise situation .....	142
§ 4.4.2 High noise situation .....	144
§ 4.5 Results .....	145
<b>Chapter 5. Two-Sided Telecommunication Market</b> .....	147
§ 5.1 A model of the market.....	148
§ 5.2 Generalized Hotelling specification for two operators.....	149
§ 5.2.1 Two operators and company-dependent client preferences.....	153
§ 5.2.2 Two operators and operator-dependent client preferences.....	156
§ 5.2.3 Operator-dependent client preferences .....	160
§ 5.3 $M$ operators and company-dependent client preferences.....	163
§ 5.4 Results .....	171
<b>Chapter 6. Unsplittable Traffic Optimal Routing</b> .....	172
§ 6.1 KP-model of routing.....	172
§ 6.2 Pure strategy equilibrium.....	174
§ 6.3 Fully mixed Nash equilibrium in the problem with inhomogeneous users and homogeneous channels.....	175

§ 6.4 Fully mixed Nash equilibrium in the problem with homogeneous users and inhomogeneous channels.....	176
§ 6.5 Fully mixed Nash equilibrium in general case .....	180
§ 6.6 Results .....	182
<b>Chapter 7. Load Balancing Game</b> .....	184
§ 7.1 The game model.....	184
§ 7.2 The price of anarchy in the general case of $N$ processors .....	186
§ 7.3 The price of anarchy in the case of three processors .....	189
§ 7.4 A numerical method to calculate the price of anarchy .....	196
§ 7.5 Numerical examples .....	201
§ 7.6 Results .....	202
<b>Chapter 8. Load Balancing Game with Linear Externalities</b> .....	204
§ 8.1 The game model.....	205
§ 8.2 The case of two processors.....	207
§ 8.3 The price of anarchy.....	209
§ 8.4 Numerical examples .....	215
§ 8.5 Results .....	216
<b>Chapter 9. Cover Game</b> .....	218
§ 9.1 The game model.....	219
§ 9.2 The price of anarchy in the general case of $N$ processors .....	220
§ 9.3 The price of anarchy in the case of three processors .....	225
§ 9.4 A numerical method to calculate the price of anarchy .....	231
§ 9.5 Numerical examples .....	236
§ 9.6 Results .....	238
<b>Chapter 10. Cover Game with Linear Externalities</b> .....	241
§ 10.1 The game model.....	241
§ 10.2 The price of anarchy in the game with 2 processors .....	243
§ 10.3 Numerical examples .....	255
§ 10.4 Results .....	255

## Chapter 11. Computation of the Price of Anarchy in Load

<b>Balancing and Cover Games with Linear Delays</b> .....	257
§ 11.1 The generalized KP-model with linear delays .....	258
§ 11.2 Nash Equilibrium in the Game with 3 processors.....	259
§ 11.3 The Load Balancing Game .....	262
§ 11.3.1 Evaluating the PoA in the 3-processor model .....	264
§ 11.3.2 The PoA for the game with linear externalities.....	266
§ 11.3.3 Numerical examples .....	267
§ 11.4 Cover Game .....	268
§ 11.4.1 Evaluating the PoA in the 3-processor model .....	270
§ 11.5 Results .....	273
<b>Chapter 12. Splittable Traffic Optimal Routing</b> .....	274
§ 12.1 Wardrop model with parallel channels .....	274
§ 12.2 A game with delay functions $\frac{\delta}{c-\delta}$ .....	276
§ 12.3 A game with delay functions $1 - e^{-\alpha\delta}$ .....	278
§ 12.4 Results .....	282
<b>Chapter 13. The Wardrop Model with Parallel Channels and</b>	
<b>Incomplete Information</b> .....	283
§ 13.1 Bayesian Wardrop model with parallel channels.....	283
§ 13.2 Equilibria of two types .....	285
§ 13.3 Potential and existence of Wardrop equilibrium .....	289
§ 13.4 Results .....	292
<b>Chapter 14. Transportation Wardrop Model with Externalities</b> ...	293
§ 14.1 Model of transportation system.....	293
§ 14.2 Optimal externalities .....	296
§ 14.2.1 Two-channel system .....	297
§ 14.2.2 Three-channel system.....	298
§ 14.2.3 $n$ -channel system .....	301
§ 14.3 Socialization of selfish behavior .....	308
§ 14.3.1 Two-channel system .....	309
§ 14.3.2 $n$ -channel system .....	309

§ 14.3.3 Cost of socialization for transportation system.....	310
§ 14.4 Results.....	312
<b>Conclusions</b> .....	313
<b>Bibliography</b> .....	318

# Introduction

## Relevance of thesis topic

The dissertation work is devoted to the study of the players behavior in networking games of resource sharing. The paper investigates the equilibrium and optimal behavior of players, as well as the possibility of controlling the behavior of selfish players to optimize their behavior.

The emergence and rapid development of telecommunications, transport and information technologies with their introduction into everyday life has given rise to many actual problems. These are problems of optimizing systems with a network structure [31, 156, 157], including optimal routing, the choice between telecommunication operators and providers of “cloud” services, problems of increasing the performance of multiprocessor computers, queuing systems optimizing, and other problems related to the need to share resources among different users.

When solving problems of optimizing the operation of network systems, a number of challenges arise, both in practice and in the mathematical models construction and the solution methods development. These problems are related to the lack of the possibility of centralized management of the components of such systems. Traffic transfer protocols in different network nodes cannot interact with each other to maintain a certain level of overall flow. Moreover, in practice they behave “selfishly” with respect to free resources of communication channels. [124] Users also act in their own interests independently and inconsistently. Therefore, in problems of network resource allocation, the use of global optimization methods is often unacceptable, since usually there is no any possibility to ensure the implementation of the resulting optimal plans for network resources use (schedules for accessing servers, norms for the occupied bandwidth of communication channels, etc.). Similar problems can be solved by methods of non-cooperative game theory. In this case, each user of the

network or a node of the network is considered as a certain player, and the problem of network resource sharing is considered as a game where the players, acting optimally for themselves, can reach an equilibrium – a situation in which no one of players has reason to deviate from your strategy. Finding equilibria and studying their properties and structure allow to evaluate the efficiency of the analyzed system.

For a given control system, it is important to measure quantitatively the efficiency of its decentralized set-up in comparison with the case of optimal centralized control. Based on the results of such a comparative study, we may give recommendations on structural redesign of the system. A good characteristic is the so-called price of anarchy suggested in 1999 by E. Koutsoupias and C.H. Papadimitriou. In fact, the dissertation work pays much attention to calculation of the price of anarchy.

Another topical problem of the work is to study the possibility to control the behavior of selfish players in order to optimize (“socialize”) their equilibrium behavior. It is important to investigate not only the question of the influence of the structure of the system on the price of anarchy value, but also the possibility and cost of introducing such additional factors (externalities) into this system, that the management of them ensure an equilibrium players’ behavior which is beneficial to the system.

### **Overview of the results in this area**

Recently, in research related to the optimization of network systems, methods of non-cooperative game theory of  $n$  persons [64, 131, 154, 158, 182] have been applied. This direction is called Networking Games, Noncooperative Networks [6, 11, 31, 67, 68, 118, 137, 141, 156, 157]. In this context each user of the network or a node included in the network is treated as a certain player. The problem of network resource sharing is considered as a game, where selfish players, acting optimally, can reach an equilibrium - a situation where no any player can obtain benefits deviating from his strategy.

An important class of problems concerns load control for a set of servers considered as a queueing system that serves an incoming flow of user requests. Depending on its purpose and operating conditions, a system may simultaneously serve one or several requests, may have one or several queues or even reject (lose) the requests if



busy.

In conventional queueing theory, the structure of the input process is usually assumed to be predefined and specified by the input rate of the customers. However, there exists a different approach to the queueing which is based on the assumption that the customers logging into the system are strategic ([8, 46, 63, 91, 92, 97, 98, 99, 100, 106, 139, 141, 168, 169]). The authors of [7, 10] explored the models in which a user knows the queue length on a high-performance common-access server and seeks to minimize the time cost by choosing one of the following alternatives: (1) send his request to the queue or (2) complete his request on his workstation. Within the framework of the models described in [4, 5, 8, 9], the request discipline is defined from above, and the strategy is the choice scheme for one of the available queues.

A special group consists of investigations where user strategy is a probability distribution of his arrival instants on a time interval. Namely, it is assumed that the user strategy is to select the arrival instant to the system on a time interval  $[0, T]$ . In this setting, the queue in the system is determined after each player selects their random arrival instant in the system. Thus, each user spends some time in the system, and this time contributes into his personal cost function. As a result, a non-zero-sum game is obtained, in which we need to find the Nash equilibrium. The papers [91, 144] are early works considering the queue as a result of the user's behavior, where the purpose of the customers is to minimize their waiting time in the system. In [144] a method is discussed which enables the non-equilibrium and equilibrium distribution of the queue-length at any time. It is shown in [91] that the symmetric Nash equilibrium strategy is mixed. In particular, it was revealed that this strategy is the absolutely continuous distribution over time interval  $[0, T]$ , except a singularity at zero, and the density function decreases between zero and  $T$ . A similar model with  $m \geq 1$  identical exponential servers and the buffer size  $c \geq 0$  for the waiting customers is considered in the paper [98]. Note that the arrival times game with the batch service has been investigated in [92]. A single-server bufferless system in which the customers have a time-sensitivity probability of successful service they want to maximize, instead of their own waiting costs, has

been studied in [59, 139]. The paper [97] establishes conditions under which the customers cannot queue until an opening time, and shows that, in the equilibrium, there is a singularity at instant  $t = 0$ , and that the density is positive only since an instant  $t_e > 0$ . A model where the customers may incur tardiness costs in addition to the waiting costs is considered in [106]. The paper [100] considers a model combining the tardiness costs, waiting costs, and restrictions on the opening and closing times.

The papers [45, 46] introduced a probabilistic extension for the unbuffered configuration of the model considered in [168, 169]. On a given time interval, the requests are arriving in the system, being included in the queue if there exist vacancies. The system has two servers with identical functionality and, possibly, different performance. When a user request arrives in the system, it is randomly redirected to one of the servers and then served or rejected (lost). An example of random access in the Internet is the round robin algorithm [114, 117] in a DNS system, which distributes a load among several servers with a certain Web service. Different users have different IP addresses while accessing a domain. In the elementary case, the IP addresses are assigned sequentially (first, second, etc.); in the general case, each address is assigned with a given probability.

The papers [29, 40, 96] presents a queueing system where a single server opens and serves users according to the last-come first-served discipline with preemptive access, where each new request displaces the previous. Authors of [29, 96] in different settings show that service discipline can be socially optimal for general classes of user preferences and service time distributions. Authors of the papers [74, 192] consider systems with last-come first-served discipline assuming that the previous service is interrupted but no loss of service is involved, showing that equilibrium arrival distribution is geometric. The paper [29] presents investigation concerning an existing of symmetric and non-symmetric equilibria in the queue game where request owners choose arrival distributions minimizing their sojourn time. In the paper [40] we prove an existing of unique equilibrium in a similar game where players maximize the probability of successful service completion for their requests. The paper [181] presents a marker interpretation of such game, where each of farmers wants to decide the optimal time to put his product on the market until the next harvest season,

maximizing the price increasing with time but decreasing with number of sellers.

A recent paper [39] is devoted to finding an equilibrium in a single-server queueing system with retrievals and strategic timing of arrivals. The retrial queues [16, 63, 73, 115, 152, 161] have been attracting increasing interest because of their importance in modeling modern wireless telecommunication systems. The most traditional discipline is the so-called classical retrials [12, 149, 151], when the customers blocked in the orbits make retrial attempts independently, in which case the retrial rate increases (linearly) as the orbit size increases. Stability analysis of such systems are considered in the mentioned books. Another wide and important class of the retrial models is the queueing systems with the constant retrial rate [152]. These models play an important role in the analysis of modern wireless telecommunication systems. In this regard, we mention the paper [75] in which, to the best of our knowledge, such a model has been used for the first time to model a telephone exchange system. A retrial queueing system with a constant retrial rate is suitable to describe the behavior of the multiple access protocols [51]. Such queues have been applied to model TCP (Transmission Control Protocol) traffic related to short HTTP (HyperText Transfer Protocol) connections and to describe an optical-electrical hybrid contention resolution scheme [18]. There is also a modification of the retrial system in which, after each departure, the server seeks the customer in orbit (this is the above-mentioned retrieval time) to be served next. For instance, such a system has been considered in the paper [153], where a logarithmic asymptotic of a large deviation probability of the orbit size during the regeneration period is obtained. Among the most important results in the analysis of the retrial systems, we mention the explicit expression for the stationary remaining service time of the server, which has been obtained in [150].

Recent research efforts on wireless communication try to address the Base Station (BS) selection problem. Proper BS selection decisions support several goals: to increase the throughput of users [33, 37, 94, 102, 107, 190, 193], to minimize the interference among users [1, 34, 125], balance the network load among base stations [93, 147] and control the power usage [102, 178]. The paper [109] analyses disadvantages of current base station selection protocol (standard 802.11), where

users measure the received signal strength from each BS in its context and select the strongest one to associate, and evaluate alternative models via simulation. Xu et al. proposed a new access point (AP) association strategy protocol for Wireless Local Area Networks (WLAN) [190]. When a new user appears, it will make an irrevocable association with one of the visible AP so that the maximum load on all the access points within its transmission range will be minimized after its joining. Another AP selection policy proposed for 802.11 WLANs by deriving a new metric that consider both Inter-BSS and Intra-BSS interference [1]. Gong et al. proposed a distributed association algorithm to achieve load balancing among the APs in Wi-Fi networks[93].

In [33], authors modeled a non-cooperative game for BS selection, where mobile users selfishly compete to minimize their own cost. That paper analyzed the quality of the corresponding Nash Equilibria for the selection cost depending on the interference level and the nominal throughput. Yen et al. modeled a BS selection game, where each mobile user sole goal is to maximize its achievable throughput. The achievable throughput matrix depends on not only the number of mobile users that associate with the same AP but also the set of link rates of those mobile users [193]. The correlation between the efficiency of NE of the BS association game and the resource allocation strategies of the BSs has studied in [107]. Chen formulates the BS selection game as each user trying to maximize its utility function, defined as the throughput reward minus the fee charged by the BS [37]. Authors of [34] proposed a non-cooperative game theoretic framework to model the problems of network selection (user's side) and resource allocation (network's side), capturing the interdependencies of decisions taken by different players. In [125], the modeled congestion games directly account the interference relationship and spatial reuse in wireless networks. Mittal et al. introduced an AP selection game, where users may need to travel some distance to reach an AP. The cost of an AP selection is measured by the AP load and the traveling distance required by that selection [147]. A combined BS association and power control problem is studied for the cellular networks as a non-cooperative game in [178]. The authors showed that their distributed association and power update algorithm is converging to a NE. The game theory

concept has been used for BS selection in the cognitive radio networks (CRN) as well. A non-cooperative game is modeled to deal with joint AP selection and power allocation problem in a multi-channel multi-AP CRN [102]. In [94], authors studied a cooperative game in heterogeneous CRN where wireless users aim at maximizing their own throughput, guided by information broadcast by the network about the load of each system. An author of the paper [162] investigates a cooperative game of data transmission in a wireless network based on a Markov model with a system of penalties and rewards. Perlaza et al. compared self-configured and centralized base station selection methods [163]. A survey on applying game theory to model ad-hoc networks is also available [179]. In [130] we have modeled the game considering not only the number of users connected to the BS but also the distances from users to BSs influencing on received signals' strength and the interference. The paper [50] considers a similar model where players are distributed over a segment with a certain density.

Modern information transfer tools such as the Internet and mobile communication has led to a new-type market with virtual agents distributed in space. Cloud (or virtual) operators [30, 188] suggest various services using their own platforms and interfaces and also the ones leased from large companies. Owing to such a strategy, virtual operators manage without capital investments required for creating and maintaining a high-capacity infrastructure. At the same time, the reputation of companies and virtual operators depends on the quality of the services provided, which ultimately affects the distribution of customers [89]. In such conditions, problems of optimal organization and management of the market resource base become relevant. They include determining the optimal number and power of nodes for cloud service platforms [36], optimizing the scheme for tasks and data flows distributing between services taking into account the resource requirements [35, 103, 116, 142]. A number of works [3, 32, 35, 36, 116, 142, 143, 165, 184, 187] solve the problem of resource distribution balancing between the private and public sectors of a hybrid cloud service [165] with the criteria of scalability, adaptability and reliability [3], as well as compliance with the requirements of performance [35, 36, 116, 165], economy [32, 142, 184, 187] and environmental friendliness [143]. The [166, 170]

models also involve brokers to control the market. Recently, game theory has also gathered popularity in the context of cloud computing, where service providers try to maximize profits and users minimize their costs [14, 90], eventually reaching a Nash equilibrium. In [167, 186], in addition to profits and costs, a Service Level Agreement (SLA) is also taken into account. Models where several cloud operators offer one resource, competing in performance and cost are also considered [159]. The paper [138] explores a best-responses dynamics [17, 23, 76] convergence a two-step repeating game where, at the first step virtual operators choose partners with infrastructure resources, and at the second step, they announce prices for their services. Similar interaction mechanism was considered in [164], where a first stage of the game is a network formation stage, while on the second stage players choose their strategies according to the network structure. Virtual operators obtain profit from the sale of services to users who choose virtual operators according to personal preferences. One possible approach is based on the Wardrop principle is possible, when users minimize their costs [110, 140]. Another approach is based on the distribution of users as a logistic function [135]. In [138] we assume that users are distributed among services according to Hotelling's [15] idea, when users compare the benefits of using one or another firm.

Another class of problems in the considered direction consists of traffic routing, where users acting selfishly choose their routes to minimize traffic delays (latencies). Two base models are investigated here: KP-model (Koutsoupias, Papadimitriou) [19, 21, 77, 78, 83, 120, 126, 127, 133] with unsplittable traffic and Wardrop model with arbitrary splittable traffic [55, 56, 57, 78, 86, 121, 185, 194]. The KP-model is based on the Nash equilibrium and each user chooses a route to send the whole volume of his traffic. Another interpretations of the KP-model are load balancing [13, 20, 47, 70] and cover [38, 49, 69, 180, 189] problems, where a set of jobs is to be distributes among several processors. It is proven [71, 82] that the KP-model in a base setting has a pure Nash equilibrium. In the Wardrop model the solution determines a traffic amount being send throw each of routes. Transport flow equilibrium and social optimum have become solution concepts that are widely used in transport system theory [62, 121, 177, 194]. These concepts are based on Wardrop hypothesis

[86] the journey times on all existing routes is the same for all road users, and less than the journey time of any road user on any unused route. So, it is assumed that all users are rational. Another type of the user's behavior was investigated in [111]. More specifically, some users were supposed to be oblivious: while rational users seek to minimize their individual costs, oblivious users prefer a fixed route. For a parallel network, exact expressions for the PoA were obtained therein. In many setting based on the Wardrop model an equilibrium existing [58, 86, 141, 145] appears to be connected with presence of a potential function [148, 171], which possess a minimum corresponding to the equilibrium. Authors of works devoted to routing problems with given traffic delay functions (e.g. linear [19, 38, 47, 49, 69, 70, 86, 133, 174, 180, 189], quadratic [126], polynomial [19, 65, 83], arbitrary convex [84]), investigate the main question: how does centralized management cancel worse the system? That is, how much does an equilibrium social cost of the system exceed a social cost in the global optimum? They find exact expressions and estimations for the price of anarchy in models with different properties. Research in this field began with [120], where it was proved that the price of anarchy does not exceed  $4/3$  in the case of a parallel network with linear delay and non-splittable traffic. Later on, this upper bound was also established for an arbitrary-topology network with linear latency and splittable traffic [174]. For the polynomial delay functions the price of anarchy was estimated in [129]. The polynomial delay functions belong to the class of the Bureau of Public Roads (BPR) delay functions [183], which are widespread in applications.

In many models related to network optimization, the issue of a possible network quality decrease with a physical increase in the power of some its components, is worth to be investigated. This question is known in the literature as the Braess paradox [155]. In particular, in routing problems, adding a new channel may increase costs for users sending traffic [24, 118, 174]. A number of works [118, 119] are aimed at finding the characteristics of the added channel, such that it is guaranteed to avoid the occurrence of the Braess paradox. In papers [95, 129, 172] the issue of this paradox appearing and detection in equilibrium situations within the Wardrop model is investigated.

It is important to consider the coordination of social and individual costs taking

into account exogenous factors, the so-called externalities [22, 28, 104, 123], which are usually neglected in the analysis of transportation problems. Exogenous factors include traffic schedules, the speed and capacity of vehicles, the quality of service, passenger comfort, etc. The control of externalities also enables the Principal to coordinate equilibria for bringing them closer to the social optimum, thereby improving the PoA value. The book [104] was one of the first to introduce the concept of externalities as exogenous effects created by neighbor players in a network. With this approach, the agents in a network are assumed to act as rational decision-makers, who choose actions by solving some optimization problems; the resulting action profile of all agents in a network is a game equilibrium; the decision of each agent is assumed to depend on the behavior of his network neighbors. In the models of traffic routing in networks, externalities of various types are also introduced. A number of works are related to the introduction of tolls/taxes to improve the performance of the system. In papers [2, 60, 61, 79, 80, 112] the selfish behavior of heterogeneous users in a network can be regulated through economic disincentives, i.e., through the introduction of appropriate taxation. The objective is to impose taxes/tolls on the edges so that any traffic equilibrium reached by the selfish users who are conscious of both the travel latencies and the taxes will minimize the social cost, i.e., will minimize the total delay. Cole, et al. in [60] show that it takes place for a single origin-destination pair. Fleischer, et.al. [80] and Karakostas and Kolliopoulos [112] generalise this result for multicommodity, heterogeneous network users. They prove that in the discrete model, it is possible to find tolls that enforce the optimal congestion as a solution of a pair of linear problems. If in these works, the taxes were included in the model to bring flows to a social optimum in the sense that they minimize the total delay of all users, then in [61], the taxes themselves are included in the social costs. For the single commodity case (single origin-destination pair) they find the ratio between social costs in models with and without taxes. Another type of externality is a pricing game. In this case the delay function is formed by including not only travel time, but also the price of a service (e.g., the price of tickets [140]). After the system reaches the Wardrop equilibrium, the equilibrium prices are found on all paths. It was shown in [128] that in this case, the price of anarchy



can be infinitely large. Externality also can be considered as the constrains for the admissible paths of the users. In [105] a constrained system optimum is found in which no path carrying positive flow between a certain origin-destination pair is allowed to exceed the normal length of a shortest path between the same pair by more than a tolerable factor. By doing so, the solutions are derived that are fair and efficient at the same time.

The routing games with positive (cost-sharing) and negative (congestion) externalities were considered in [2, 66, 101, 122]. As was shown in [146], congestion externalities can be the cause of Pareto-inefficient equilibria, including the appearance of the well-known Braess paradox [27, 174]. The externalities of a mixed type, including negative and positive components and affecting the appearance and characteristics of the Braess paradox in a network, were taken into account in [132]. In a model of passenger transportation suggested in [88], the characteristics of service companies (carriers) were treated as externalities, and their choice was optimized.

Externalities can be interpreted as elements of centralized control, which can be included, e.g., in traffic rules (speed-limit signs, controlled traffic lights), pricing policy for public transport, fuel, etc. Externalities can be considered as a coordination mechanism for improving the performance in systems with independent selfish agents. In [52], it was proposed to change the form of the delay functions in order to bring the social costs of the system in equilibrium to the social optimum.

In the papers [43, 123] we use a new approach, in which the delay function depends not only on the flows on this edge, but also on the flows on other edges. These externalities are introduced into the players' delay functions as a tool of the system's influence on the equilibrium distribution of traffic flows and also on the price of anarchy values.

**The research object** of the thesis are systems with a network structure which simulate the distribution of resources of telecommunication, transport and information networks among users. **The subject of the research** are methods for finding equilibrium and optimal solutions in such systems, and comparing them, as well as methods for equilibrium solutions socializing.

## **The goal of thesis**

The goal of the thesis is to build and study mathematical models of player behavior in networking games of resource sharing, problems of estimating and improving the performance of network systems using methods of non-cooperative game theory, as well as developing mechanisms for controlling the behavior of selfish players to optimize their behavior. The models under study are based on the constructing and estimation of network resources distribution among users in conditions where users act independently in their own interests with respect to resources of working time of serving network nodes and communication channels' capacities.

## **Main tasks**

One of the directions of this work is the construction and study of models of user access to service systems with different characteristics that accept requests at a given time interval. The first of the models under study is the arrival time choice in a queuing system with random access. For a 2-server queuing system with loss, we study models with rational random access and purely random access. Each of them is considered for two cases: when the number of players is fixed and when it is a random variable with a Poisson distribution. The second model is the choice of the times of access to the preemptive queuing system, which is also considered for the cases of a known and random number of players. The third model is constructed for a queuing system with retries for the cases of two and three players. For such games, the problem is to construct and study the properties of a symmetric equilibrium in the form of a probabilistic distribution of the time instants of the user's access to the service system in the time interval when the system receives requests. Also for the first two models, the task of estimating the value of the price of anarchy is posed.

The next task of the thesis is a one-dimensional base station selection problem, which is formulated as a game where players are mobile users, which choose radio base stations to connect to the network. Strategies in the game are station numbers or probabilities, which players use to choose base stations. Each selfish user chooses a station trying to maximize its "signal to interference + noise" (SINR or just SNR) ratio, which depends on the distance between the player and the station, and the number of connections to the station. In this model, the signal is inverse to the

square of the distance to the chosen base station, and interference+noise is a sum of all signals at the station and some constant noise. Our goal is to determine the Nash equilibrium in this model where users know or don't know each other location.

Also we investigate a game-theoretic model of concurrent virtual operators' behavior on the two-side telecommunication market. We consider it in the form of the following repeated two-step game. At the first step, the players (virtual operators, i.e., the owners of cloud services) distribute themselves between the large companies (i.e., the owners of resources for communication, computations, etc.). Then the virtual operators assign the prices for their services. The clients are the users who choose a certain service according to their personal preferences comparing their utilities from choosing the services of certain virtual operators. For this model the aim is to construct and study equilibria and stationary solutions for different market settings, in which the users' preferences apply to the cloud firms (virtual operators) and also to the resource owners (large companies).

The next direction of this work includes the study of optimal routing problems. Within the framework of the KP-model of data transmission with parallel channels and unsplittable traffic, pure and fully mixed Nash equilibria are constructed and studied. For these equilibria we analyze the costs of the system are found and the cases of equilibrium worsening with adding when a new channel to the system.

Also in the dissertation work we pose the tasks of finding estimates and values of the price of anarchy analytically for models of processors' load balancing and cover, which are derived from the KP-model. The cases of three players and the conditions for the price of anarchy changing with adding a new processor to the system are analyzed in more detail. Also, the task is to develop a methodology for numerical evaluating of an exact value of the price of anarchy.

For models of processors' load balancing and cover we study the possibility of introducing linear externalities in the delay functions. For the case of two computing nodes we solve the problem of finding the cost of anarchy analytically. We analyze the question: how the introduction of externalities into the model affects the presence of Nash equilibria in pure strategies and the value of the price of anarchy. Also, the task is to generalize the methodology for numerical evaluating of an exact value of

the cost of anarchy for the case of arbitrary linear delay functions.

The work also presents the routing problem based on the Wardrop model with parallel channels. We study properties of equilibria and the price of anarchy for models with delay functions of the form  $\frac{\delta}{c-\delta}$  and  $1 - e^{-\alpha\delta}$ . A Bayesian Wardrop model with parallel channels is also built, in which players send different types of traffic through the channels, knowing the type of only their own traffic. For this model, the question of the existence of equilibria is investigated.

For the Wardrop model with parallel channels and BPR delay functions with linear externalities, we formulate the problem of finding the optimal-equilibrium profile and the corresponding values of externalities under conditions when the delay of only one of the channels is affected by flows on all other channels. We also investigate the possibility of developing a procedure for socialization of the equilibrium behavior of participants in the traffic flow by setting certain values of externalities. We estimate the influence of the socialization procedure application on the social cost value.

### **Scientific novelty**

In the thesis we have constructed game-theoretic models for a two-server random-access system with loss in two settings: rationally random and pure random access, each of which is studied for cases of deterministic and random number of players obeying the Poisson distribution. As it has been proven, for each of considered model variant there exists a unique symmetric equilibrium with the following features: at the zero time the players send their requests to the system with a certain positive probability, and then on a time interval  $[t_e, T]$  the density function of the arrival times in the system takes positive values. In the case of two players in the pure random access system the equilibrium has been constructed analytically; on the interval  $[t_e, T]$  the equilibrium distribution has the exponential form. For both settings, we have also suggested the equilibrium calculation algorithms. Finally, numerical experiments have been performed to compare the equilibria under different parameter values. Also we have offered a comparison between competitive and cooperative behavior in the service system based on the concept of price of anarchy for the fixed and random number of players.

We have offered a game-theoretic model for a single-server queueing system with

strategic users in which customers (players) enter the system with preemptive access on a time interval  $[0, T]$ . We considered cases when the number of players is fixed and is a random variable with a known distribution law. As it has been proven, there exists a unique symmetric equilibrium with the following features. The non-zero density function of the arrival times is defined at the time interval  $[0, t_e]$ . On a time interval  $[t_e, T]$  there are no arrivals. At the instant  $T$  the players send their requests to the system with a certain positive probability  $p$ . Some numerical experiments have been performed to compare the equilibria under different values of the model parameters. Also we have offered a comparison between competitive and cooperative behavior in the service system based on the concept of price of anarchy for the fixed and random number of players.

We have constructed a single-server retrial queueing system. For the cases of two and three players we have proved that the optimal strategy is such that a player enters the system with a non-zero probability at the initial moment of time, further there is a pause without arrivals, and then there is a non-zero density function of the arrival times is defined at the time interval  $[t_e, T]$ . We have also suggested the equilibrium calculation algorithm and numerical experiments have been performed to find the equilibria under different values of the model parameters.

We have modeled a one-dimensional base station selection game by considering not only the number of users connected to the BS but also the distances from each user to stations and the noise level. We have obtained pure and mixed Nash equilibria for two-players game with and without knowledge of opponent's location, and also areas of equilibria existence. For an arbitrary number of players we have offered a KP-like model with full information where all players' locations are known. We performed some numerical experiments to compare an efficiency of closest station selection strategies with equilibria in games of two players with known and unknown opponent's location for cases of low and high noise level.

The two-step game, modeling behavior of two virtual operator on telecommunication market. We have constructed the equilibrium and stationary solutions for this game, calculated the optimal strategies of virtual operators at each step and established the existence conditions of a pure strategy equilibrium at the first step.

For the cases in which the clients have company- or operator-dependent preferences, we have demonstrated that the system comes to a stationary state at most after three transitions. The same result has been obtained for the game involving three or more operators and clients with company-dependent preferences.

In the KP-model of the problem of optimal traffic routing in the network for the case of identical channels, we have found the linear and quadratic social costs in a fully mixed equilibrium. In the same model, for the cases of different channels, we have found the linear and quadratic costs of the system in a completely mixed equilibrium, as well as the conditions for the worsening of such an equilibrium with adding a new channel to the system.

In the load balancing game with the service system composed of  $N$  processors and  $n$  players we have obtained the upper estimate for the price of anarchy. Moreover, we have established the conditions when the upper estimate represents the exact PoA value. The sufficient conditions for PoA increase have been also obtained under new processor inclusion into the system. For the three-processor model we have constructed the upper estimate for the PoA and the conditions when it coincides with the exact PoA value, as well as have proposed a computing algorithm of the exact PoA value. The algorithm can be generalized to systems with more machines. And finally, we have implemented the algorithm as a program and conducted numerical experiments for comparing the obtained estimates of the PoA with its exact value. The results of these experiments have demonstrated the correctness of the derived estimates.

For the load balancing game with linear externalities we have determined the assumptions that ensure the adequate behavior of the system. It is shown that in the general case, even under the above assumptions, a pure Nash equilibrium may not exist. For the case of two processors, in this model, the existence of a pure Nash equilibrium is proved and an analytical expression for the price of anarchy is obtained. Numerical experiments are presented that make it possible to visually assess the dependence of the anarchy price on the system parameters, as well as compare this value with the anarchy price for a model without externalities.

In the cover game with the service system composed of  $N$  processors and  $n$  players

we have obtained the lower estimate for the price of anarchy. For the three-processor model we have determined the exact value of the price of anarchy and showed that the PoA increases or does not change under new processor inclusion into the system of two processors. Also we have proposed a computing algorithm of the exact PoA value. The algorithm can be generalized to systems with more processors. And finally, we have implemented the algorithm as a program and conducted numerical experiments for comparing the obtained estimates of the PoA with its exact value. The results of these experiments have demonstrated the correctness of the derived estimates. For the case of four-processor system computing experiments demonstrate partial PoA coinciding for three and four-processor systems.

For the cover game with linear externalities for the case of two processors we have obtained an exact analytical expression for the price of anarchy. We show that the price of anarchy is limited in contrast to the initial KP cover model without externalities.

We have proposed a computing algorithm of the exact PoA value. The algorithm can be generalized to systems with more than three processors. We have implemented the algorithm as a program and conducted numerical experiments for visual estimates of the PoA in the game with two processors and linear externalities, always possessing a pure Nash equilibrium.

We have constructed the game based on Wardrop model with parallel links with the system where all users adhere to the equilibrium flow splitting strategies. We have considered two models with different delay functions of form  $\frac{\delta}{c-\delta}$  and  $1 - e^{-\alpha\delta}$ . For the first one we have shown the social optimality of the Wardrop equilibrium in the network with parallel links and have found the equilibrium in the case where all users have right to use any link in the network. For the second model we have found an equilibrium and upper bound for the price of anarchy and have shown that it can be at most 1.3.

We have constructed a Bayesian routing game in network with parallel links where selfish users send traffic of different types and each knows only his own traffic type. For this model we have defined equilibria: Wardrop equilibrium, that always exists, as shown here, and can be found using potential function, and its special case

Bayesian Wardrop equilibrium.

In the thesis the Wardrop model with splittable traffic as applied to the  $n$ -channel parallel transportation system with BPR delay functions and linear externalities has been considered. We have suggested two possible scenarios of applying externalities for the systems with two, three, and  $n$  channels. The first scenario is to find an optimal equilibrium profile and the corresponding externalities in the case when the delay of only one channel depends on the traffic flows on all other channels. For this scenario, an explicit-form solution has been obtained, and its feasibility conditions have been established. The second scenario is to socialize the equilibrium behavior of all traffic participants (users of the system). For this scenario, the externalities ensuring the optimal equilibrium behavior of all users have been calculated, and it has been demonstrated that the socialization procedure does not change the value of social costs.

### **Research methods**

The dissertation work uses methods of non-cooperative game theory (construction of games in strategic form, construction of Nash equilibria in pure and mixed strategies, construction of Wardrop equilibria, sequential improvement procedures), mathematical analysis, optimization (Karush-Kuhn-Tucker theorem), probability theory, random processes and queuing (distributions of random variables, Markov processes, Kolmogorov systems), stochastic orders, linear algebra (systems of linear equations and inequalities), the theory of differential equations (Cauchy problem, difference solution schemes).

### **Theoretical and practical significance**

The theoretical results obtained in the work are related to the field of non-cooperative networking games. The theoretical significance of the dissertation is in the construction of game-theoretic models within the framework of the theory of non-cooperative network games and the determination of equilibria, as well as in the development of mechanisms for controlling the behavior of selfish players to optimize their behavior.

The practical significance of the work is determined by the scope of the studied applied models: in mathematical modeling of queuing systems, distributed com-



puting, communication systems, mobile networks, in solving problems of optimal routing in telecommunications and transport networks, as well as economic market models.

The research conducted in the thesis was supported by the following grants: RFBR N 13-01-00033\_a, Nash Equilibrium in Asymmetric Dynamic Models of Bioresource Management; RHSF N 15-02-00352\_a, Competitive service systems; RFBR N 16-51-55006 China\_a, Competitive Transportation Systems: Theories and Applications; RSF N 22-11-20015, “Research and development of mathematical models and software for finding equilibrium traffic flows and optimization of a transportation network on the case of Petrozavodsk city”, jointly with support of the authorities of the Republic of Karelia with funding from the Venture Investment Foundation of the Republic of Karelia.

Also results of the dissertation work were obtained within the framework of the fundamental research program “Algebraic and Combinatorial Methods of Mathematical Cybernetics and New-Generation Information Systems” at the Mathematical Sciences Branch of the Russian Academy of Sciences: the project “Optimal Resource Allocation and Data Protection Problems in High-Performance Computer Systems and Networks”, the project “Structural Study and Data Analysis in Information Networks Based on Probability Theory, Game Theory and Discrete Mathematics Methods Using Parallel Programming Technology for High-Performance Systems” and the project “Optimal Traffic Routing, Information Resources Distribution and Protection Problems”.

The results of the research can be used in in the educational process in courses on game theory and operations research for graduate students and students of the specialties “Applied Mathematics and Informatics” and “Economic Cybernetics”.

Veracity of the results obtained in the thesis is confirmed by the correct mathematical proofs.

### **Brief description**

The thesis consists of Introduction, 14 Chapters and Conclusion, includes 338

pages (in Russian version — 352 pages), 15 tables and 50 figures. The list of references contains 194 items.

The first three chapters of the dissertation work are devoted to solving problems of choosing the optimal arrival moments for queuing systems with different characteristics. The first chapter explores a 2-server queuing system with random access. The second chapter is devoted to a model with a choice of arrival moments in a preemptive queuing system, in the third chapter, a model of a queuing system with retrials is constructed and studied. In the fourth chapter, the one-dimensional problem of choosing a base station is solved. The fifth chapter is devoted to the game-theoretic model of competing virtual operators behavior in the two-sided telecommunications market. The sixth chapter presents the results of the analysis of the KP-model of data transmission with indivisible traffic. The seventh chapter is devoted to the analysis of the price of anarchy in the load balancing problem, and in the eighth chapter, linear externalities are introduced in the delay function in this model. The ninth and tenth chapters are devoted to the analysis of the price of anarchy in the cover game for a system of several processors without and with externalities, respectively. In the eleventh chapter, a generalization of the method of numerically finding the price of anarchy is generalized to the problems of load balancing and cover games with linear delays. The twelfth chapter is devoted to optimal routing based on the Wardrop model with splittable traffic and parallel channels, and in the thirteenth chapter, a Bayesian version of the Wardrop model with parallel channels is constructed. In the last chapter, we study the optimization of equilibrium behavior in the Wardrop transport model with externalities. Each chapter uses its own, independent of other chapters, notation system. The conclusion contains a brief description of the results obtained in the work.

### **Results submitted for defense**

1. Finding the Nash equilibrium in the game of arrival times choice for a 2-server queuing system with random access in two settings: rationally random and purely random access, each of which is studied for the case of a known and random number of players with a Poisson distribution. Uniqueness of equilibrium and its properties. Results of numerical simulation.

2. Finding the Nash equilibrium in the game of arrival times choice for a single-server queuing system with preemptive access for the cases when the number of players is fixed and is a random variable with the Poisson distribution law. Uniqueness of equilibrium and its properties. Results of numerical simulation.
3. Finding the Nash equilibrium in the game of choosing the moments of access to a single-server queuing system with retrials. Equilibrium properties and results of numerical simulation.
4. Finding Nash equilibria for a one-dimensional base station selection game for two players with known and unknown location of the opponent. KP-like game model with complete information for an arbitrary number of players.
5. Construction of equilibria in two-step games of cloud operators in the market of telecommunication services. Games convergence to a stationary state in no more than three repetitions.
6. Explicit expressions for estimates and exact values of the price of anarchy in the load balancing game. Conditions for the price of anarchy increasing with adding of the third processor to the two-processor system. Load balancing game with linear externalities. Existence of a pure Nash equilibrium for the case of two processors. An explicit expression for the price of anarchy for the case of two processors.
7. Explicit expressions for estimates and exact values of the price of anarchy in the cover game. Price of anarchy increase when with adding of the third processor to the two-processor system. Results of numerical simulation of the price of anarchy for three and four processors in the system. Cover game with linear externalities. An explicit expression for the price of anarchy for the case of two nodes in the cover game with linear externalities. Limitation of the price of anarchy in the model with linear externalities, in contrast to the model without externalities.

8. A numerical method for finding the exact price of anarchy for games of load balancing and processor cover with linear latency functions.
9. Global optimality of Wardrop equilibrium situations in a game based on the Wardrop model with parallel channels with delay functions of the form  $\frac{\delta}{c-\delta}$ . The upper bound of the price of anarchy in a game based on the Wardrop model with parallel channels with delay functions of the form  $1 - e^{-\alpha\delta}$ . Bayesian Wardrop model with parallel channels, equilibrium in this model. Existence of Wardrop equilibrium.
10. Finding the optimally equilibrium profile and corresponding values of externalities in the Wardrop transport model with linear externalities. The procedure for the socialization of the equilibrium behavior of participants in the traffic flow with the keeping of the social cost value.

### Verification of results

The main results of the thesis were presented at the International Conferences “Game Theory and Management” (Saint Petersburg, 2009, 2010, 2011, 2012, 2017, 2021); International meeting “Optimal stopping problems and stochastic control” (Petrozavodsk, 2005); the seminar of the Russian-Finnish school for postgraduate students “Dynamic games and multi-criteria optimization” (Petrozavodsk, 2006); the International Seminars “Networking Games and Management” (Petrozavodsk, 2009, 2012, 2015); V Moscow International Conference on Operations Research (Moscow, ORM2007); 13-th International Symposium on Dynamic Games and Applications (Wroclaw, 2008); Kosen Workshop MTE2008 - Mathematics, Technology and Education (Ibaraki, Japan, 2008); The IX International Petrozavodsk Conference "Probabilistic Methods in Discrete Mathematics" (Petrozavodsk, 2016); XXXVI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models (Petroza-

vodsk, 2020);

International Conferences Mathematical Optimization Theory and Operations Research (Irkutsk, 2021 and Petrozavodsk, 2022).

### **Publications**

The author has published 39 scientific works, 23 of them are the scientific publications on the topic of thesis research. Basic results of the dissertation has published in 19 works:

in 3 scientific papers [48, 57, 58] in peer-reviewed scientific journals from the List of Russian peer-reviewed scientific journals in which the main scientific results of dissertations for the degree of doctor and candidate of sciences should be published:

Mathematical Game Theory and its Applications, Large-Scale Systems Control, Control Systems and Information Technologies;

in 11 scientific papers [39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 138] in periodicals indexed in international abstract databases and citation systems Web of Science and Scopus: Mathematics, Lecture Notes in Computer Science, Optimization Letters, Contributions to Game Theory and Management, Communications in Computer and Information Science, Automation and Remote Control, Advances in Systems Science and Applications;

in 2 conference papers [55, 130] in proceedings of international conferences, and [130] is indexed in Scopus, and the paper [56] in peer-reviewed scientific journal Game Theory and Applications; also thesis results were included in the monograph [141] in co-authorship, indexed in Scopus, and the study guide [137] in co-authorship.

All main results submitted for defense are obtained by the author independently. The reliability of the results of the dissertation is confirmed by obtaining positive opinions from members of the editorial boards and program committees of the above-mentioned scientific publications and events by accepting the articles for publication and including the author's reports in the event programs.

### **Acknowledgments**

The author expresses her deep appreciation and thanks to Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Vladimir Viktorovich Mazalov for the topic proposed for scientific research, evolution of scientific interests in mathematical game

theory, long-term and fruitful collaboration, careful attention to the work and comprehensive assistance. The author also thanks her colleagues in IAMR KarRC RAS, Saint Petersburg State University and Aalto University for interesting discussions on the results of the dissertation and joint work. The author thanks the family for their patience to scientific work, help and support in all situations.

## Chapter 1

# Arrival Time Choice in a Random-Access Two-Server System

Consider the following service system  $M/m/0$ . On a given time interval  $[0, T]$ , the requests arrive in the system and are included in the queue if there exist vacancies. The system has servers with identical functionality and, possibly, different performance. When a user request arrives in the system, it is randomly redirected to one of the servers and then served or lost.

For the model studied in this section, we assume that the requests may arrive in the system one after another or in groups at the same time simultaneously. Such a situation occurs, for example, if the service is highly demanded at certain times. In real applications, access protocols for different services (particularly, Internet services) are implemented with a sequential access of users to the system. Whenever two or more requests arrive in the system, they form a queue with random serial numbers assigned by a uniform random draw. The system has no buffer, and hence it serves several first requests in the queue depending on the number of free servers at a current time (and the other requests of the queue are lost). Therefore, if  $k$  requests simultaneously arrive in the system with  $m$  free servers, then, for each request, the probability of service is  $\min\{1, \frac{m}{k}\}$ .

An example of random access in the Internet is the round robin algorithm in a DNS system, which distributes a load among several servers with a certain Web service. Different users have different IP addresses while accessing a domain. In the elementary case, the IP addresses are assigned sequentially (first, second, etc.); in the general case, each address is assigned with a given probability. Besides load dis-

tribution for Web resources, such random-access models can be applied to optimize cloud computing, call centers, and so on.

In what follows, we analyze two request redistribution models. In the first model (further referred to as the model with the pure random-access scheme [46]), the system has no information about the server states, and each request can be redirected to a busy server even given a free server. For example, a real DNS system assigns a sequential IP address of a requested domain for a user without any information about its availability. In the second model, the access to servers is random only if both are free (the model with the rational random-access scheme [45]).

We will associate the following noncooperative game with each of these random-access models. As his pure strategy, each player chooses the time to send his request to the system or, as his mixed strategy, the distribution of such times. The payoff is the probability of service for the player's request. The symmetric Nash equilibrium acts in the same selfish way.

A similar model  $M/1/0$  with one server was considered by Ravner and Haviv [168]. Formally speaking, it represents a particular case of the model with the pure random-access scheme in which the probability of redistribution to a server is 1. Later, the one-server model was extended to the case of several servers of identical performance [169]. The authors established the following qualitative properties of symmetric Nash equilibria in such models:

- the system possesses a unique symmetric Nash equilibrium;
- at the zero time, there is a strictly positive probability of request arrival in the system;
- on a time interval  $(0, t_e)$ , no requests arrive in the system;
- on the time interval  $[t_e, T]$ , there exists a strictly positive density function of request arrivals in the system.

The models examined further are probabilistic extensions of the Ravner–Haviv model with one server [168]. As it will be demonstrated in the forthcoming sections, these models also have the previously mentioned properties of symmetrical Nash equilibria. Our analysis is limited to the two-server systems only.



## § 1.1 Two-server system

Consider a two-server system that receives user requests on a time interval  $[0, T]$ . Each server of the system may simultaneously perform only one request. The service times of the requests are independent random variables obeying the Poisson distribution with rates  $\mu_1$  and  $\mu_2$  for the first and second servers, respectively.

For this model, we consider two access schemes, namely, pure random and rational random. In the former case, a user request that arrives in the system is redirected with probability  $r$  to the first server and probability  $\bar{r} = 1 - r$  to the second. It may happen that several users send their requests to the system at the same time. Then the system may redirect two or more requests to the same server. If the server is currently busy, then all requests arriving in it at this time are lost. Otherwise, the server chooses one of the currently arrived requests for further service by a uniform random draw.

The system with rational random access operates in the following way. If both servers are currently free, then a user request that arrives in the system is redirected with probability  $r$  to the first server and probability  $\bar{r} = 1 - r$  to the second. If only one server is free, then the request is redirected to it. If both servers are busy, then the request is rejected. The system has no queues, and a rejected request is lost (not served). Note that, for  $r \in \{0, 1\}$ , the model under consideration is a queueing system with priorities. If several users send their requests to the system at the same time, then the system chooses one or two of them (depending on the number of free servers) by a uniform random draw.

The requests' arrival discipline is not defined in the system. It is actually formed by the users who maximize the probability of service for their requests.

Consider the optimal request discipline problem in the two-server system as a noncooperative game. Here the players are the system users sending their requests for service. Denote by  $\mathbb{N}$  the player set. Each player chooses the time to send his request to the system, seeking to maximize the probability of service for his requests. The pure strategy of player  $i$  is the arrival time  $t_i$  of his request in the system. The mixed strategy of player  $i$  is the distribution function  $F_i(t)$  of the arrival times in

the system on the time interval  $[0, T]$ . Denote by  $F = \{F_i(t), i \in \mathbb{N}\}$  the strategy profile in this game. At time  $t$ , the player's payoff is the probability of service for the request that arrives in the system at this time.

All players are identical and independent and have selfish behavior without cooperation. Therefore, as the optimality criterion, we choose the symmetric Nash equilibrium. In this case, the strategies of all players coincide, that is,  $F_i(t) = F(t)$  for all  $i$ .

**Definition 1.1.** *A distribution function  $F(t)$  of the arrival times  $t$  in the system is a symmetric Nash equilibrium if there exists a constant  $C$  such that, at any time  $t \in [0, T]$ , the probability of service does not exceed  $C$  and is equal to  $C$  on the carrier of  $F(t)$ .*

For each of the two access schemes, we will consider two cases. In the first case, the number of players is deterministic and known to each player. In the second case, each player knows that the number of opponents obeys the Poisson distribution with given parameter.

In the forthcoming sections, we study in detail the properties of equilibria for both access schemes. Our analysis begins with the rational random-access model as a simpler one.

## § 1.2 Game with rational random-access scheme

Consider a certain player trying to send his request to the system at time  $t$  given the requests of other players arrive in the system at this time with probability  $p$ . Denote by  $X_p$  the random number of his opponents sending their requests to the system, possibly preventing him from being served at time  $t$ . The number of players can be deterministic (i.e., each player has a fixed number  $N$  of opponents). In an alternative setup,  $N$  is a random variable. Then, for each value of (random or deterministic)  $N$ , the random variable  $X_p = X_{N,p}$  obeys the binomial distribution  $Bin(N, p)$ . For convenience, we will omit the index  $N$  and accordingly specify the character of  $N$ .

Let  $p$  be the probability of request arrival at the zero time when the system is

initially free. Then the probability of service at this time makes up

$$C(p) = E \left( \min \left\{ 1, \frac{2}{X_p + 1} \right\} \right). \quad (1.2.1)$$

For deterministic  $N$ , this probability is

$$P(X_p < 2) + \sum_{i=2}^n \left( \frac{2}{i+1} P(X_p = i) \right);$$

for random  $N$ , it is

$$P(X_p < 2) + \sum_{n=2}^{\infty} P(N = n) \sum_{i=2}^N \left( \frac{2}{i+1} P(X_p = i) \right).$$

Suppose the system receives no requests on a certain interval  $(0, t)$  after the zero time. Hence, the probability of service at the time  $t > 0$  is

$$1 - P(X_p \geq 2)e^{-(\mu_1 + \mu_2)t} = P(X_p < 2) + P(X_p \geq 2)(1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}).$$

Note that this probability increases in  $t$ .

Imagine the player sends his request to the system at the time  $0+$ , that is, infinitesimally close to the zero time from the right so that the following conditions hold: (a) each of the requests that arrived at the zero time is being served or has left the system, and (b) the system has not received new requests and also not completed the service of the currently processed requests. The corresponding probability constitutes

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \left( P(X_p < 2) + P(X_p \geq 2)(1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}) \right) = P(X_p < 2),$$

which is smaller than  $C(p)$ . Consequently, it is better to send the request to the system at the zero time than immediately after this time. We have the following result.

**Lemma 1.1.** *In the game with the rational random-access scheme, the player's payoff at the zero time exceeds his payoff at the time  $0+$ , that is, infinitesimally close to it from the right. The player's payoff at the time  $t$  increases in  $t$  if there are no request arrivals in the system on the interval  $(0, t)$ .*

**Lemma 1.2.** *In the game with the rational random-access scheme, the carrier of the equilibrium strategy contains an atom at the point  $t = 0$ . In other words, the equilibrium probability  $p_e = F(0)$  of request arrivals at the initial (zero) time is strictly positive. There exists a subsequent time interval  $(0, t_e)$  without request arrivals in the system.*

*Proof.* Indeed, the probability of request arrivals in the system at the zero time is positive. Assume on the contrary that none of the players sends his requests to the system at this time; then any player deviating from the equilibrium and sending his request to the system at the zero time receives service with probability 1.

By Lemma 1.1 the player's payoff increases for some period after the zero time, yet remaining smaller than at this time (even if we know that none of the players has sent the requests to the system during this period). This explains the existence of the time interval without request arrivals after the zero time. On this interval the payoff rises to the equilibrium value at the time  $t_e$ , until which there are no requests in the system.  $\square$

Therefore the equilibrium strategy carrier contains the discontinuity interval  $(0, t_e)$ . This interval takes place as at the zero time (when the system is free) several requests may arrive simultaneously and the probability of winning vacancies for service in a tournament is higher at this time than the probability of service immediately after (when the system is more likely to be busy).

Suppose we know the equilibrium probability of request arrivals at the zero time, which is  $0 < p_e \leq 1$ . The probability of service at time  $t > 0$  without request arrivals on the interval  $(0, t)$  is an increasing function of  $t$  that tends to 1. At the time  $t = 0+$ , it is smaller than the probability of service at the zero time. Hence, there exists a time (perhaps, after the time  $T$ ) when these probabilities coincide. For a given equilibrium probability of request arrival at the zero time, the solution of the equation

$$E \left( \min \left\{ 1, \frac{2}{X_{p_e} + 1} \right\} \right) = 1 - P(X_{p_e} \geq 2) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e} \quad (1.2.2)$$

yields the corresponding time  $t_e > 0$  till which (since the zero time) there are no requests to the system.

For proving the next lemma, we will employ the framework of stochastic orders [176]. First, let us give the definitions from this source subject to our setup and formulate the theorems that are direct corollaries of the original general theorems. They will be repeatedly mentioned throughout our proof. Like in the cited book, by “increase” we actually mean “nondecrease,” also adopting the term “strict increase” to avoid confusion. In addition,  $[Z|A]$  denotes a random variable that has the conditional distribution of a random variable  $Z$  given  $A$ .

**Definition 1.2.** *The random variable  $X_p$  stochastically increases in  $p$  in the usual stochastic order if and only if the probability  $P(X_p \geq i)$  increases in  $p$  for all possible values  $i \in (-\infty, +\infty)$ .*

**Definition 1.3.** *The random variable  $X_p$  stochastically increases in  $p$  in the likelihood ratio order if and only if the ratio  $\frac{P(X_p=i)}{P(X_q=i)}$  increases in  $i \in (-\infty, +\infty)$  for all  $0 \leq p \leq q \leq 1$ .*

**Theorem 1.1** (Corollary of Theorem 1.C.1 [176]). *If the random variable  $X_p$  stochastically increases in  $p$  in the likelihood ratio order, then it also stochastically increases in  $p$  in the usual stochastic order.*

**Theorem 1.2** (Corollary of Theorem 1.C.6 [176]). *If the random variable  $X_p$  stochastically increases in  $p$  in the likelihood ratio order, then the random variable  $[X_p|X_p \geq i]$  also stochastically increases in  $p$  in the likelihood ratio order.*

**Theorem 1.3** (Corollary of Theorem 1.C.8 [176]). *If the random variable  $X_p$  stochastically increases in  $p$  in the likelihood ratio order and  $\psi$  is an increasing function, then the random variable  $\psi(X_p)$  also stochastically increases in  $p$  in the likelihood ratio order.*

**Theorem 1.4** (Corollary of Theorem 1.C.9 [176]). *If for all  $n = 1, 2, \dots$ , the random variables  $X_{n,p}$  stochastically increase in  $p$  in the likelihood ratio order and their density functions are log-concave, then the random variable  $\sum_n X_{n,p}$  also stochastically increases in  $p$  in the likelihood ratio order.*

**Lemma 1.3.** *For any real values  $0 < p_e \leq 1$  and  $\mu_1, \mu_2 > 0$ , Eq. (1.2.2) defines a function  $t_e(p_e)$  that strictly decreases in  $p_e$ .*

*Proof.* Transform Eq. (1.2.2) in the following way:

$$\frac{1 - E\left(\min\left\{1, \frac{2}{X_{p_e}+1}\right\}\right)}{P(X_{p_e} \geq 2)} = e^{-(\mu_1+\mu_2)t_e},$$

$$\frac{E\left(\max\left\{0, \frac{X_{p_e}-1}{X_{p_e}+1}\right\}\right)}{P(X_{p_e} \geq 2)} = e^{-(\mu_1+\mu_2)t_e},$$

which yields

$$E\left(\frac{X_{p_e}-1}{X_{p_e}+1} \mid X_{p_e} \geq 2\right) = e^{-(\mu_1+\mu_2)t_e}. \quad (1.2.3)$$

The right-hand side of Eq. (1.2.3) is independent of  $p_e$  and strictly increases in  $t_e$ . The left-hand side depends on  $p_e$  only, and we have to show its increase in  $p_e$ .

First, let  $N$  be deterministic. Check that, for any real values  $0 \leq q < p \leq 1$ , the ratio  $\frac{P(X_p=i)}{P(X_q=i)}$  increases in the natural index  $i$ . The ratio  $\frac{P(X_p=k+1)}{P(X_p=k)} = \frac{N-k}{k+1} \left(\frac{1}{1-p} - 1\right)$  increases in  $p$ . Then  $\frac{P(X_q=k+1)}{P(X_q=k)} < \frac{P(X_p=k+1)}{P(X_p=k)}$  and  $\frac{P(X_p=k)}{P(X_q=k)} < \frac{P(X_p=k+1)}{P(X_q=k+1)}$ . By Definition 1.3 this means that the random variable  $X_{p_e}$  stochastically increases in  $p_e$  in the likelihood ratio.

Now, let  $N$  be random. By Theorem 1.4 the random variable  $\sum_{n=1}^{\infty} P(N=n)X_{n,p_e}$  also stochastically increases in  $p_e$  in the likelihood ratio order, where  $X_{n,p_e}$  indicates  $X_{p_e}$  for each fixed value  $N=n$ , since the density function of the binomial distribution is log-concave [108]. Then the random variable  $X_{p_e}$  stochastically increases in  $p_e$  in the likelihood ratio order for random  $N$ .

By Theorem 1.2 the random variable  $[X_{p_e} \mid X_{p_e} \geq 2]$  also stochastically increases in  $p_e$  in the likelihood ratio order. Using Theorem 1.3, we establish that the random variable  $\left[\frac{X_{p_e}-1}{X_{p_e}+1} \mid X_{p_e} \geq 2\right]$  stochastically increases in  $p_e$  in the likelihood ratio.

By Theorem 1.1 the stochastic increase of a random variable in the likelihood ratio order implies its increase in the usual stochastic order and hence the increase of its expected value. Therefore  $E\left(\frac{X_{p_e}-1}{X_{p_e}+1} \mid X_{p_e} \geq 2\right)$  increases in  $p_e$ .  $\square$

**Corollary 1.1.** *The expected value  $E\left(\frac{1}{X_{p_e}+1}\right)$  decreases in  $p_e$ .*

*Proof.* Based on the proof of Lemma 1.3, the random variable  $\frac{1}{X_{p_e}+1}$  stochastically decreases in  $p_e$  in the usual stochastic order as a decreasing function of a random variable that stochastically increases in  $p_e$ . Consequently, its expected value also decreases in  $p_e$ .  $\square$

As follows from Lemma 1.3, the higher the probability  $p_e$  of request arrivals in the system at the zero time, the smaller the left bound of the interval  $[t_e, T]$  where the players again send their requests to the system with positive probability. Note that, for given  $p_e$ , the value  $t_e$  may even exceed  $T$ . In this case, for equilibrium search, we should increase the probability  $p_e$ . If  $t_e(1) \geq T$ , then the equilibrium strategy is pure, that is, sends the requests to the system at time  $t = 0$  with probability 1. In the sequel, we will assume  $t_e(1) < T$ .

**Lemma 1.4.** *If  $t_e < T$ , then on the time interval  $[t_e, T]$ , there exists a strictly positive density function  $f(t) > 0$  of the arrival times in the system. This interval has no atoms or discontinuities.*

*Proof.* Consider the interval  $[t_e, T]$  on which the requests are again sent to the system. We will show that the equilibrium density function of the arrival times in the system is strictly positive on the whole interval. Assume on the contrary that there exists a subinterval  $(s_1, s_2) \in [t_e, T]$  without request arrivals in the system. Denote by  $p_{ij}(t)$  the probability of the system state  $(i, j)$  at time  $t$ , where  $i, j \in \{0, 1\}$  are the states of the first and second servers, respectively (0 – free, 1 – busy). Then the probability of service at time  $s_1$  makes up

$$p_{00}(s_1) + p_{01}(s_1) + p_{10}(s_1).$$

Recall that there are no arrivals on  $(s_1, s_2)$ , and hence the payoff at time  $s_2$  has the form

$$\begin{aligned} & p_{00}(s_2) + p_{01}(s_2) + p_{10}(s_2) \\ &= p_{00}(s_1) + p_{10}(s_1)(1 - e^{-\mu_1(s_2-s_1)}) + p_{01}(s_1)(1 - e^{-\mu_2(s_2-s_1)}) \\ & \quad + p_{11}(s_1)(1 - e^{-\mu_1(s_2-s_1)})(1 - e^{-\mu_2(s_2-s_1)}) \\ & \quad + p_{01}(s_1) + p_{11}(s_1)(1 - e^{-\mu_1(s_2-s_1)}) \\ & \quad + p_{10}(s_1) + p_{11}(s_1)(1 - e^{-\mu_2(s_2-s_1)}), \end{aligned}$$

obviously exceeding the payoff at time  $s_1$ . This means that, after time  $t_e$ , the strategy carrier contains no such discontinuities.

Now, let us prove that, after time  $t_e$ , the strategy carrier has no atoms. Assume on the contrary that such an atom exists at a point  $t \in [t_e, T]$  and the probability of

request arrivals at time  $t$  is  $p > 0$ . Consider the time  $s = t-$ , that is, infinitesimally close to time  $t$  from the left so that with zero probability the served requests leave the system and new requests arrive in it. Take a certain player who tries to send his request to the system at time  $t$ , being aware of that the others send their requests at this time with probability  $p$ . Let the random variable  $X_p$  be the number of his opponents whose requests have arrived in the system at time  $t$ . Due to the strict positivity of the probability  $p$ , the expected value of this random variable must be positive too. The probability of service at time  $t$  constitutes

$$\begin{aligned} p_{00}(t)E\left(\min\left\{1, \frac{2}{X_p+1}\right\}\right) + (p_{01}(t) + p_{10}(t))E\left(\frac{1}{X_p+1}\right) \\ = p_{00}(s)E\left(\min\left\{1, \frac{2}{X_p+1}\right\}\right) + (p_{01}(s) + p_{10}(s))E\left(\frac{1}{X_p+1}\right), \end{aligned}$$

which is smaller than the payoff at time  $s$ , that is, than

$$p_{00}(s) + p_{01}(s) + p_{10}(s).$$

In other words, if the distribution of request arrivals after time  $t_e$  contains an atom, then it is better to send the request to the system immediately before this time. In contrast to the zero time (when the system is initially free and a player merely has to win vacancies for service), here the servers may be busy, and the vacancy tournament reduces the probability of service.  $\square$

### § 1.2.1 Deterministic number of players

Denote by  $N + 1$  the number of players sending their requests to the system. Each of them has  $N$  opponents, who may prevent from being served. Let  $N > 1$ ; otherwise, the requests of all players are served regardless of arrival times. Assume that at time  $t = 0$  each of  $N$  opponents sends his request to the system with probability  $p_e$ . The random variable  $X_{p_e}$  is the number of players who have sent their requests to a server at the zero time, which obeys the distribution  $Bin(N, p_e)$ . Both servers are initially free, and hence both requests are served if  $X_{p_e} \geq 2$  and merely one of



them otherwise. By (1.2.1) the probability of service at the zero time makes up

$$\begin{aligned}
C(p_e) &= (1 - p_e)^N + C_N^1 p_e (1 - p_e)^{N-1} + \sum_{i=2}^N C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \frac{2}{i+1} \\
&= (1 - p_e)^N + \sum_{i=1}^N C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \frac{2}{i+1} \\
&= (1 - p_e)^N + 2 \frac{1 - (1 - p_e)^{N+1}}{p_e(N+1)} - 2(1 - p_e)^N = 2 \frac{1 - (1 - p_e)^{N+1}}{p_e(N+1)} - (1 - p_e)^N.
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Let us find the probability of service at time  $t_e > 0$  under the zero probabilities of request arrivals on the interval  $(0, t_e)$ . The desired probability is defined by

$$\begin{aligned}
1 - P(X_{p_e} \geq 2) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e} \\
&= 1 - (1 - P(X_{p_e} = 0) - P(X_{p_e} = 1)) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e} \\
&= 1 - (1 - (1 - p_e)^N - N p_e (1 - p_e)^{N-1}) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e}.
\end{aligned}$$

For a deterministic number of players, Eq. (1.2.2) then takes the form

$$\begin{aligned}
\frac{2(1 - (1 - p_e)^{N+1})}{p_e(N+1)} - (1 - p_e)^N \\
= 1 - (1 - (1 - p_e)^N - N p_e (1 - p_e)^{N-1}) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t_e}. \tag{1.2.5}
\end{aligned}$$

By Lemma 1.3, if  $t_e(1) \geq T$ , then the equilibrium strategy is pure, that is, sends requests to the system at time  $t = 0$  with probability 1. Otherwise, on the interval  $[t_e, T]$ , there exists a strictly positive density function of the arrival times in the system. We further suppose that  $t_e(1) < T$ .

It is necessary to find the equilibrium density function  $f(t)$  of the arrival times in the system on the interval  $[t_e, T]$ . Define a Markov process with system states  $(i, j, k)$  at each time  $t \in [t_e, T]$ , where  $i, j \in \{0, 1\}$  are the states of the first and second servers, respectively (0 – free, 1 – busy), and  $k \in \{0, \dots, N\}$  indicates the number of players who have sent their requests to the system before time  $t$ . This process is inhomogeneous in time, since the request rate in the system decreases in jumps as soon as a new request is received from a successive player. In particular, the request rate has the form  $\lambda_k(t) = (N - k) \frac{f(t)}{1 - F(t)}$ . The Kolmogorov equations for

the system state probabilities  $p_{ijk}$  are given by

$$\begin{aligned}
p'_{000}(t) &= -\lambda_0(t)p_{000}(t), \\
p'_{101}(t) &= r\lambda_0(t)p_{000}(t) - (\lambda_1(t) + \mu_1)p_{101}(t), \\
p'_{011}(t) &= \bar{r}\lambda_0(t)p_{000}(t) - (\lambda_1(t) + \mu_2)p_{011}(t), \\
p'_{00i}(t) &= -\lambda_i(t)p_{00i}(t) + \mu_1p_{10i}(t) + \mu_2p_{01i}(t), \\
p'_{10i}(t) &= r\lambda_{i-1}(t)p_{00i-1}(t) - (\lambda_i(t) + \mu_1)p_{10i}(t) + \mu_2p_{11i}(t), \\
p'_{01i}(t) &= \bar{r}\lambda_{i-1}(t)p_{00i-1}(t) - (\lambda_i(t) + \mu_2)p_{01i}(t) + \mu_1p_{11i}(t), \\
p'_{11i}(t) &= \lambda_{i-1}(t)(p_{01i-1}(t) + p_{10i-1}(t) + p_{11i-1}(t)) - (\lambda_i(t) + \mu_1 + \mu_2)p_{11i}(t), \\
i &= 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

In the equilibrium the probability of service at any fixed time  $t \in [t_e, T]$  is constant:

$$\sum_{i=0}^N p_{00i}(t) + \sum_{i=1}^N p_{01i}(t) + \sum_{i=1}^N p_{10i}(t) = 1 - \sum_{i=2}^N p_{11i}(t) = C(p_e).$$

Then the sum of the corresponding derivatives must be zero. Substituting the derivatives of the system state probabilities from the Kolmogorov equations (1.2.6) into these sums, we obtain the differential equation of the equilibrium density function:

$$\frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(1 - C(p_e))}{\sum_{i=0}^{N-1} (N - i)(p_{01i}(t) + p_{10i}(t))} \tag{1.2.7}$$

for  $t \in [t_e, T]$ .

The carrier of the equilibrium distribution of the arrival times in the system belongs to the interval  $[0, T]$ , which means that  $F(T) = 1$ . This induces uncertainty in Eq. (1.2.7) at the point  $t = T$  of the interval, where the arrival times in the system are described by a positive density function. We will transform Eq. (1.2.7) to obtain the equilibrium distribution to eliminate the factor  $1 - F(t)$  from it.

Denote by  $T_i$  the times when the players  $i \in \{1, \dots, N\}$  send their requests to the system; they are independent and identically distributed with the function  $F$ . Let  $A(t)$  be the number of request arrivals in the system before time  $t$ , and let  $B_N(t) \in \{0, 1, 2\}$  be the number of busy servers at time  $t$ .

The denominator of the right-hand side in Eq. (1.2.7) can be rewritten as

$$\begin{aligned} N \sum_{i=0}^N (p_{01i}(t) + p_{10i}(t)) - \sum_{i=0}^N i(p_{01i}(t) + p_{10i}(t)) \\ = NP(B_N(t) = 1) - E(A(t)\mathbb{1}_{B_N(t)=1}). \end{aligned}$$

We transform the subtrahend as follows:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= E(A(t)\mathbb{1}_{B_N(t)=1}) = E \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{B_N(t)=1, T_i \leq t} \\ &= E \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{B_N(t)=1, T_1 \leq t} = NE \mathbb{1}_{B_N(t)=1, T_1 \leq t} \\ &= NP(B_N(t) = 1, T_1 \leq t). \end{aligned}$$

As  $t \rightarrow T$ , the probability  $P(B_N(t) = 1, T_1 \leq t)$  tends to  $P(B_N(t) = 1)$ , and the denominator vanishes accordingly, which induces uncertainty for the density function in Eq. (1.2.7). Next, assuming that  $t < T$ , we find the density function expression and redefine this function at the point  $T$  as the limit:

$$\phi(t) = N(P(B_N(t) = 1) - P(B_N(t) = 1, T_1 > t)).$$

Then the denominator of the right-hand side in Eq. (1.2.7) takes the form

$$\begin{aligned} NP(B_N(t) = 0, T_1 > t) &= NP(B_N(t) = 0 | T_1 > t)(1 - F(t)) \\ &= NP(B_{N-1}(t) = 0)(1 - F(t)), \end{aligned}$$

where  $B_{N-1}(t)$  is the number of busy servers at time  $t$  in the model with  $N - 1$  players (as before, the arrival times of the requests sent by  $N - 1$  players represent the independent identically distributed random variables with the function  $F$ ). Note that here the request rates  $\lambda_i(t)$  are the same as in the model with  $N$  players (up to constant factors  $\frac{N-1}{N}$ ) as the distribution is not changed; however, the system state probabilities differ.

Then, for  $t \in [t_e, T)$ , the density function of the arrival times in the system can be described by the following expression that does not depend on  $1 - F(t)$ :

$$f(t) = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(1 - C(p_e))}{NP(B_{N-1}(t) = 1)}. \quad (1.2.8)$$

The right-hand side of this formula is well defined at  $t = T$ . Using continuity, we may redefine the density function at the point  $t = T$  as

$$f(T) = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(1 - C(p_e))}{NP(B_{N-1}(T) = 1)}.$$

Consequently, expression (1.2.8) defines the density function of the request arrivals in the system on the whole interval  $[t_e, T]$ .

Using this expression, we may transform equations (1.2.6), eliminating the unknown density function  $f(t)$  to obtain a system of differential equations for the state probabilities.

Let us define the initial conditions for the system, that is, the state probabilities at time  $t_e$  given no request arrivals on the interval  $(0, t_e)$ :

$$\begin{aligned}
p_{00i}(t_e) &= C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} [\mathbb{1}_{i=0} + \mathbb{1}_{i=1} (r(1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}(1 - e^{-\mu_2 t_e})) \\
&\quad + \mathbb{1}_{i>1} (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})], \\
i &= 0, \dots, N; \\
p_{10i}(t_e) &= C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} [\mathbb{1}_{i=1} r e^{-\mu_1 t_e} + \mathbb{1}_{i>1} e^{-\mu_1 t_e} (1 - e^{-\mu_2 t_e})], \\
i &= 1, \dots, N; \\
p_{01i}(t_e) &= C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} [\mathbb{1}_{i=1} \bar{r} e^{-\mu_2 t_e} + \mathbb{1}_{i>1} (1 - e^{-\mu_1 t_e}) e^{-\mu_2 t_e}], \\
i &= 1, \dots, N; \\
p_{11i}(t_e) &= C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \mathbb{1}_{i>1} e^{-\mu_1 t_e} e^{-\mu_2 t_e}, \\
i &= 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Therefore, we have the Cauchy problem for differential equations (1.2.6) and initial conditions (1.2.9). The solution of this problem yields the state probabilities  $p_{ijk}(t)$  that depend on the parameter  $p_e$ . Expression (1.2.8) with known state probabilities defines the equilibrium density function  $f(t)$  on the interval  $[t_e, T]$ , which also depends on the parameter  $p_e$ . It is required that the density function of the arrival times takes its last positive value exactly at time  $T$ ; to this effect, the parameter  $p_e$  is chosen so that

$$p_e + \int_{t_e}^T f(t) dt = 1. \tag{1.2.10}$$

Our analysis naturally gives the following result.

**Theorem 1.5.** *Any symmetric Nash equilibrium distribution of the arrival times in the two-server random-access system with loss described by the distribution function  $F(t)$  on the interval  $[0, T]$  has the following properties.*

1. *There exists a strictly positive probability  $p_e = F(0) > 0$  of request arrival in the system at the zero time.*
2. *On the interval  $(0, t_e)$ , where*

$$t_e = \left( \ln \frac{1 - (1 - p_e)^N - Np_e(1 - p_e)^{N-1}}{1 - \frac{2(1 - (1 - p_e)^{N+1})}{p_e(N+1)} + (1 - p_e)^N} \right) / (\mu_1 + \mu_2),$$

*the players send their requests to the system with zero probability.*

3. *If for  $p_e = 1$ , Eq. (1.2.5) yields a solution  $t_e > T$ , then the equilibrium strategy is the pure strategy in which all players send their requests to the system at the zero time.*
4. *Otherwise, if  $p_e < 1$ , then on the interval  $[t_e, T]$ , there exists a continuous positive density function  $f(t)$  of the arrival times in the system that is defined by formula (1.2.8).*
5. *The equilibrium probability of request arrival at the zero time is found from Eq. (1.2.10).*
6. *The value  $C(p_e) = 2 \frac{1 - (1 - p_e)^{N+1}}{p_e(N+1)} - (1 - p_e)^N$  gives the probability of service on the whole strategy carrier.*

**Lemma 1.5.** *The distribution function  $F(t)$  representing the solution of (1.2.5) and (1.2.7) with the initial condition  $F(0) = p$  increases in  $p$  at any point of the interval  $[0, T]$ .*

*Proof.* Consider two given probabilities  $0 < p < q \leq 1$  of request arrival at the zero time that define the initial conditions for constructing two distribution functions  $F_p(t)$  and  $F_q(t)$  as the solutions of (1.2.5) and (1.2.7). The corresponding probabilities of service  $C(p)$  and  $C(q)$  are constant on the whole distribution carrier. By Corollary 1.1 the function  $C(\cdot)$  decreases. Then the probability of loss must be smaller for  $p$  than for  $q$  on the whole distribution carrier.

By Lemma 1.3 we have  $t_q = t(q) < t_p = t(p)$  for the corresponding starting points of the intervals where the requests again arrive in the system. That is, the function  $F_q(t)$  begins to increase from the value  $q$  at the time when  $F_p(t)$  still

remains the constant  $p < q$ . For  $t \in [0, t_p]$ , the lemma is true, since in this case  $F_p(t) = p < q \leq F_q(t)$ .

Suppose there exists a certain time  $s > t_p$  such that  $F_p(t) < F_q(t)$  for  $t < s$ , and  $F_p(s) = F_q(s)$ . Then  $f_p(s) > f_q(s)$ , as both functions do not decrease in  $t$ , and at the point  $s$  the function  $F_p(t)$  must cross  $F_q(t)$  upward. Hence, the slope of  $F_p(t)$  exceeds that of  $F_q(t)$ , and therefore  $\frac{f_p(s)}{1-F_p(s)} > \frac{f_q(s)}{1-F_q(s)}$ . This means that the request rate at time  $s$  is higher for the probability  $p$  than for  $q$ , whereas the service rates are the same in both cases. Then the probability of loss at time  $s$  must be greater for  $p$  than for  $q$ , which obviously contradicts the fact that the probability of loss is smaller for  $p$  than for  $q$  on the whole distribution carrier.  $\square$

**Theorem 1.6.** *The symmetric equilibrium distribution  $F$  of the arrival times that is defined by Theorem 1.5 exists and is unique.*

*Proof.* The uniqueness of the equilibrium follows from Lemma 1.5. The equilibrium condition (1.2.10) represents an equation whose left-hand side increases in  $p_e$ . For  $p_e \approx 0$ , the left-hand side equals the probability of request arrival on the interval  $[t_e, T]$ , which does not exceed 1. For  $p_e = 1$ , the left-hand side is not smaller than 1. Therefore there exists a unique solution  $p_e$  associated with the unique value  $t_e$  and density function  $f(t)$  on  $[t_e, T]$ .  $\square$

### Numerical examples

To find the equilibria in the problem with  $N > 1$ , we adopt a numerical algorithm that integrates the dichotomy methods for the equations in one unknown with the Euler method for the combined first-order ordinary differential equations. First, the algorithm verifies the inequality  $t_e(1) < T$  (otherwise, the equilibrium strategy represents the pure strategy in which all players send their requests to the system at the zero time). The next step is to choose a certain initial value  $p_e$  and find the corresponding time  $t_e$  as the solution of Eq. (1.2.5). Then at point  $t_e$  we calculate the initial values for systems (1.2.6) with  $N$  and  $N - 1$  players and also the value  $f(t_e)$ . For each successive point of division of the interval  $[t_e, T]$ , it is necessary to solve both systems by the Euler method, that is,  $p_{ijk}(t + \delta) \approx p_{ijk}(t) + \delta p'_{ijk}(t)$ , with calculation of  $\lambda_i(t) = \frac{(N-i)f(t)}{1-F(t)}$  using relationship (1.2.7); then formula (1.2.8) yields

Table 1.1: Equilibrium characteristics

$N$	$r = 0.1$			$r = 0.9$		
	$p_e$	$t_e$	$C(p_e)$	$p_e$	$t_e$	$C(p_e)$
2	0.236	0.999	0.981	0.397	0.099	0.947
5	0.275	0.085	0.836	0.319	0.082	0.794
10	0.255	0.067	0.632	0.267	0.065	0.613
100	0.169	0.011	0.117	0.169	0.011	0.117
200	0.161	0.006	0.061	0.162	0.006	0.061
300	0.159	0.004	0.042	0.159	0.004	0.042

the successive value of  $f(t)$ . Next, we calculate  $F(T)$  and compare this value with 1. If the equality  $F(T) = 1$  holds with a sufficiently small error  $\varepsilon$ , then the algorithm ends. If the above value exceeds 1, then  $p_e$  is reduced (otherwise, increased), and the algorithm continues to obtain the new value  $p_e$ .

Table 1.1 illustrates the resulting equilibria constructed by the algorithm under specific values of the system parameters. Here the system operates on the time interval  $[0, 1]$ . The first server has a considerably smaller performance than the second one,  $\mu_1 = 1$  versus  $\mu_2 = 10$ . We compare the equilibria for different numbers of the players under high ( $r = 0.1$ ) and low ( $r = 0.9$ ) probabilities of request arrival to the fast server. The graphs in Figs. 1.1 and 1.2 are the corresponding equilibrium density functions of the arrival times in the system. In these examples, the distribution of the arrival times in the system tends to the uniform distribution as we increase the number of players, and the limiting distribution is the same for different probabilities of request arrival to the fast server. In the last three cases ( $N = 100, 200, 300$ ), the equilibrium density function of the arrival times in the system is approximately 0.84 on the whole interval  $[t_e, T]$ . Finally, Fig. 1.3 shows how the equilibrium densities change their graphs as we vary the parameter  $r$  (the probability that the player's request is redirected to the first server).

### § 1.2.2 Random number of players

Now, assume that none of the players knows the number of his opponents  $N$ . The only available information is that  $N$  represents a random variable obeying the Pois-

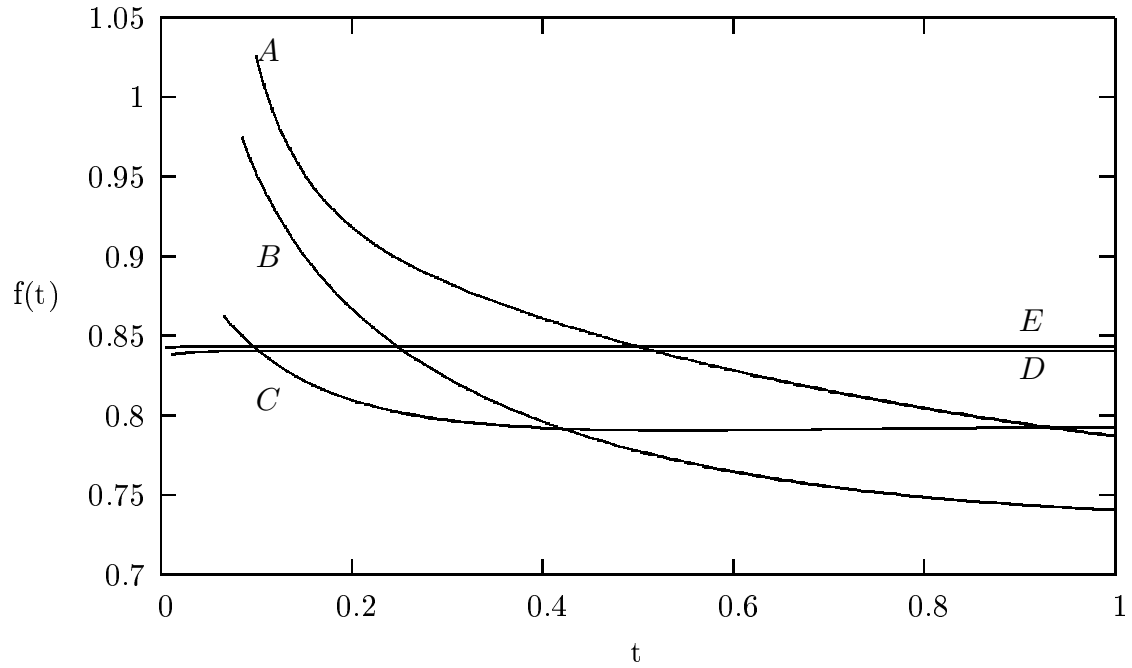


Figure 1.1: Equilibrium densities  $f(t)$  for  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.1$ , and (A)  $N = 2$ , (B)  $N = 5$ , (C)  $N = 10$ , (D)  $N = 100$ , (E)  $N = 200$

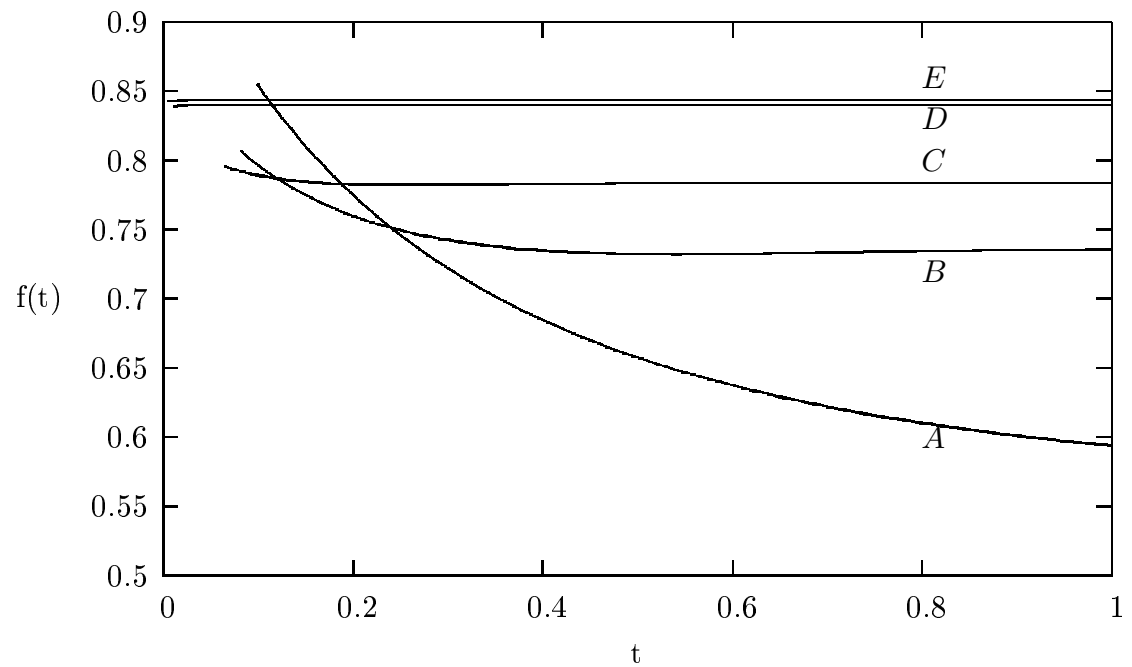


Figure 1.2: Equilibrium densities  $f(t)$  for  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.9$ , and (A)  $N = 2$ , (B)  $N = 5$ , (C)  $N = 10$ , (D)  $N = 100$ , (E)  $N = 200$



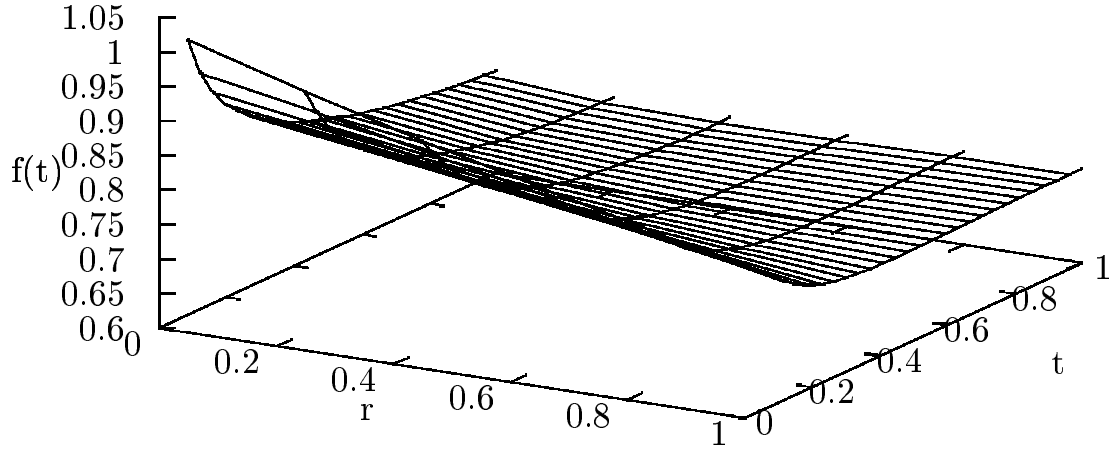


Figure 1.3: Equilibrium densities for  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, N = 5$  under variation of  $r$

son distribution with parameter  $\lambda$ . At the zero time, each of the opponents sends his request to the system with probability  $p_e$ . Denote by  $X_{p_e}$  the random number of the players whose requests have arrived in the system at the zero time. Note that, for each value of the random variable  $N$ , the random variable  $X_{p_e}$  has the binomial distribution  $Bin(N, p_e)$ . Then the probability of service at the zero time (see (1.2.1)) is given by

$$C(p) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \cdot \left( (1 - p_e)^N + C_N^1 p_e (1 - p_e)^{N-1} + \sum_{i=2}^N C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \frac{2}{i+1} \right).$$

The parenthesized sum in the right-hand side of this expression is equal to the right-hand side of formula (1.2.4), so

$$\begin{aligned} C(p_e) &= e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \left( 2 \frac{1 - (1 - p_e)^{N+1}}{p_e(N+1)} - (1 - p_e)^N \right) \\ &= 2 \frac{e^{-\lambda}}{p_e \lambda} \left( \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^{N+1}}{(N+1)!} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^{N+1} (1 - p_e)^{N+1}}{(N+1)!} \right) - e^{-\lambda} e^{\lambda(1 - p_e)} \\ &= 2 \frac{e^{-\lambda}}{p_e \lambda} (e^{\lambda} - e^{\lambda(1 - p_e)}) - e^{-\lambda p_e} = 2 \frac{1 - e^{-\lambda p_e}}{\lambda p_e} - e^{-\lambda p_e}. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Let us find the probability of service at time  $t_e > 0$  given that on the interval  $(0, t_e)$  the requests arrive in the system with zero probability. This probability is

defined by

$$\begin{aligned}
& 1 - P(X_{p_e} \geq 2)e^{-(\mu_1+\mu_2)t_e} \\
&= 1 - (1 - P(X_{p_e} = 0) - P(X_{p_e} = 1))e^{-(\mu_1+\mu_2)t_e} \\
&= 1 - (1 - e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!}(1 - p_e)^N - e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} N p_e (1 - p_e)^{N-1})e^{-(\mu_1+\mu_2)t_e} \\
&= 1 - (1 - e^{-\lambda p_e} - e^{-\lambda} \lambda p_e \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\lambda^{N-1}}{(N-1)!}(1 - p_e)^{N-1})e^{-(\mu_1+\mu_2)t_e} \\
&= 1 - (1 - e^{-\lambda p_e} - e^{-\lambda} \lambda p_e \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!}(1 - p_e)^N)e^{-(\mu_1+\mu_2)t_e} \\
&= 1 - (1 - e^{-\lambda p_e} - e^{-\lambda} \lambda p_e e^{\lambda(1-p_e)})e^{-(\mu_1+\mu_2)t_e} \\
&= 1 - (1 - e^{-\lambda p_e} - \lambda p_e e^{-\lambda p_e})e^{-(\mu_1+\mu_2)t_e}.
\end{aligned}$$

For the Poisson number of players, Eq. (1.2.2) takes the form

$$2 \frac{1 - e^{-\lambda p_e}}{\lambda p_e} - e^{-\lambda p_e} = 1 - (1 - e^{-\lambda p_e} - \lambda p_e e^{-\lambda p_e})e^{-(\mu_1+\mu_2)t_e}. \quad (1.2.12)$$

If  $t_e(1) \geq T$ , then the equilibrium strategy is pure, that is, sends the requests to the system at the time  $t = 0$  with probability 1. We further assume that  $t_e(1) < T$ .

It is necessary to find the equilibrium density function  $f(t)$  of the arrival times in the system on the interval  $[t_e, T]$ . Define a Markov process with system states  $(i, j)$  at each time  $t \in [t_e, T]$ , where  $i, j \in \{0, 1\}$  are the states of the first and second servers, respectively (0 – free, 1 – busy). At each time  $t$  the request rate in the system is  $\lambda f(t)$ . The Kolmogorov equations for the system state probabilities  $p_{ij}$  are given by

$$\begin{aligned}
p'_{00}(t) &= -\lambda f(t)p_{00}(t) + \mu_1 p_{10}(t) + \mu_2 p_{01}(t), \\
p'_{10}(t) &= r\lambda f(t)p_{00}(t) - (\bar{r}\lambda f(t) + \mu_1)p_{10}(t) + \mu_2 p_{11}(t), \\
p'_{01}(t) &= \bar{r}\lambda f(t)p_{00}(t) - (r\lambda f(t) + \mu_2)p_{01}(t) + \mu_1 p_{11}(t), \\
p'_{11}(t) &= \lambda f(t)(p_{01}(t) + p_{10}(t)) - (\mu_1 + \mu_2)p_{11}(t).
\end{aligned} \quad (1.2.13)$$

In the equilibrium the probability of service at any fixed time  $t \in [t_e, T]$  is constant and makes up  $p_{00}(t) + p_{01}(t) + p_{10}(t) = 1 - p_{11}(t) = C(p_e)$ . Then the sum of the corresponding derivatives must be zero. Substituting the derivatives of the system state probabilities from the Kolmogorov equations (1.2.13) into the above

sums, we obtain the equilibrium density function

$$f(t) = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(1 - C(p_e))}{\lambda(p_{01}(t) + p_{10}(t))}, \quad (1.2.14)$$

where  $t \in [t_e, T]$ .

Note that, for the one-server system, the equilibrium strategy on the interval  $[t_e, T]$  is the uniform distribution. Now, we will show that in the general case this is not true.

Let us define the initial conditions for the system, that is, the state probabilities at time  $t_e$  given that there are no request arrivals on the interval  $(0, t_e)$ . For each state  $(i, j)$ , the corresponding probability can be calculated by

$$p_{ij}(t_e) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \sum_{k=0}^N p_{ijk}^N(t_e),$$

where  $p_{ijk}^N(t_e)$  means the probability of state  $(i, j, k)$  at time  $t_e$  in the case of  $N$  players. Consequently,

$$\begin{aligned} p_{00}(t_e) &= e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \\ &\times \sum_{k=0}^N C_N^k p_e^k (1 - p_e)^{N-k} [\mathbb{1}_{k=0} + \mathbb{1}_{k=1} (r(1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}(1 - e^{-\mu_2 t_e})) \\ &+ \mathbb{1}_{k>1} (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})]. \end{aligned}$$

Transform the inner sum in the following way:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^N C_N^k p_e^k (1 - p_e)^{N-k} [\mathbb{1}_{k=0} + \mathbb{1}_{k=1} (r(1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}(1 - e^{-\mu_2 t_e})) \\ &+ \mathbb{1}_{k>1} (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})] \\ &= (1 - p_e)^N + N p_e (1 - p_e)^{N-1} (r(1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}(1 - e^{-\mu_2 t_e})) \\ &+ (1 - (1 - p_e)^N - N p_e (1 - p_e)^{N-1}) (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e}). \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} p_{00}(t_e) &= e^{-\lambda p_e} + \lambda p_e e^{-\lambda p_e} (r(1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}(1 - e^{-\mu_2 t_e})) \\ &+ (1 - e^{-\lambda p_e} - \lambda p_e e^{-\lambda p_e}) (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e}). \end{aligned}$$

Using the same transformation, we obtain the following expressions for all state

probabilities at time  $t_e$ :

$$\begin{aligned}
p_{00}(t_e) &= e^{-\lambda p_e} + \lambda p_e e^{-\lambda p_e} (r(1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}(1 - e^{-\mu_2 t_e})) \\
&\quad + (1 - e^{-\lambda p_e} - \lambda p_e e^{-\lambda p_e}) (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e}), \\
p_{10}(t_e) &= \lambda p_e e^{-\lambda p_e} r e^{-\mu_1 t_e} \\
&\quad + (1 - e^{-\lambda p_e} - \lambda p_e e^{-\lambda p_e}) e^{-\mu_1 t_e} (1 - e^{-\mu_2 t_e}), \\
p_{01}(t_e) &= \lambda p_e e^{-\lambda p_e} \bar{r} e^{-\mu_2 t_e} \\
&\quad + (1 - e^{-\lambda p_e} - \lambda p_e e^{-\lambda p_e}) (1 - e^{-\mu_1 t_e}) e^{-\mu_2 t_e}, \\
p_{11}(t_e) &= (1 - e^{-\lambda p_e} - \lambda p_e e^{-\lambda p_e}) e^{-\mu_1 t_e} e^{-\mu_2 t_e}.
\end{aligned} \tag{1.2.15}$$

Therefore, we have the Cauchy problem with the combined differential equations (1.2.13) and the initial conditions (1.2.15). The solution of this problem yields the state probabilities  $p_{ij}(t)$  that depend on the parameter  $p_e$ . Expression (1.2.14) with the known state probabilities defines the equilibrium density function  $f(t)$  on the interval  $[t_e, T]$ , which also depends on the parameter  $p_e$ . It is required that the density function of the arrival times takes its last positive value exactly at time  $T$ ; to this effect, the parameter  $p_e$  is chosen so that

$$p_e + \int_{t_e}^T f(t) dt = 1. \tag{1.2.16}$$

Our analysis naturally gives the following result.

**Theorem 1.7.** *Any symmetric Nash equilibrium distribution of the arrival times in the two-server random-access system with loss described by the distribution function  $F(t)$  on the interval  $[0, T]$  has the following properties.*

1. *There exists a probability  $p_e = F(0) > 0$  of request arrival in the system at the zero time.*
2. *The players send their requests to the system with zero probability on the interval  $(0, t_e)$ , where*

$$t_e = \left( \ln \frac{1 - e^{-\lambda p_e} - \lambda p_e e^{-\lambda p_e}}{1 - 2 \frac{1 - e^{-\lambda p_e}}{\lambda p_e} + e^{-\lambda p_e}} \right) / (\mu_1 + \mu_2).$$

3. If for  $p_e = 1$ , Eq. (1.2.12) yields a solution  $t_e > T$ , then the equilibrium strategy is the pure strategy in which all players send their requests to the system at the zero time.
4. Otherwise, if  $p_e < 1$ , then on the interval  $[t_e, T]$ , there exists a continuous positive density function  $f(t)$  of the arrival times in the system that is defined by formula (1.2.14).
5. The equilibrium probability of request arrival at the zero time is found from Eq. (1.2.16).
6. The value  $C(p_e) = 2\frac{1-e^{-\lambda p_e}}{\lambda p_e} - e^{-\lambda p_e}$  gives the probability of service on the whole strategy carrier.

**Lemma 1.6.** *The distribution function  $F(t)$  representing the solution of (1.2.12) and (1.2.14) with the initial condition  $F(0) = p$  increases in  $p$  at any point of the interval  $[0, T]$ .*

*Proof.* The proof is identical to that of Lemma 1.5 for the deterministic number of players. □

Then, just like in the case of the deterministic number of players, we obtain the following result.

**Theorem 1.8.** *The symmetric equilibrium distribution  $F$  of the arrival times that is defined by Theorem 1.7 exists and is unique.*

### Numerical examples

To find the equilibria in the problem with  $\lambda > 0$ , we adopt a numerical algorithm that integrates the dichotomy methods for the equations in one unknown with the Euler method for the combined first-order ordinary differential equations. First, the algorithm verifies the inequality  $t_e(1) < T$  (otherwise, the equilibrium strategy represents the pure strategy in which all players send their requests to the system at the zero time). The next step is to choose a certain initial value  $p_e$  and find the corresponding time  $t_e$  as the solution of Eq. (1.2.12). Then at point  $t_e$  we calculate the initial values for equations (1.2.13) and also the value  $f(t_e)$ . For each successive

Table 1.2: Equilibrium characteristics

$\lambda$	$r = 0.1$			$r = 0.9$		
	$p_e$	$t_e$	$C(p_e)$	$p_e$	$t_e$	$C(p_e)$
1	0.251	0.096	0.99	0.374	0.094	0.98
5	0.268	0.08	0.84	0.311	0.077	0.803
20	0.221	0.045	0.433	0.226	0.045	0.426
100	0.169	0.114	0.118	0.170	0.011	0.118
200	0.162	0.006	0.062	0.162	0.006	0.062
300	0.159	0.004	0.042	0.159	0.004	0.042

point of division of the interval  $[t_e, T]$ , it is necessary to solve both systems of equations by the Euler method, that is,  $p_{ij}(t + \delta) \approx p_{ij}(t) + \delta p'_{ij}(t)$ ; formula (1.2.14) yields the successive value of  $f(t)$ . Next, we calculate  $F(T)$  and compare this value with 1. If the equality  $F(T) = 1$  holds with a sufficiently small error  $\varepsilon$ , then the algorithm ends. If the above value exceeds 1, then  $p_e$  is reduced (otherwise, increased), and the algorithm continues to obtain the new value  $p_e$ .

Table 1.2 illustrates the resulting equilibria constructed by the algorithm under specific values of the system parameters. Here the system operates on the time interval  $[0, 1]$ . The first server has a considerably smaller performance than the second one,  $\mu_1 = 1$  versus  $\mu_2 = 10$ . We compare the equilibria for different numbers of the players under high ( $r = 0.1$ ) and low ( $r = 0.9$ ) probabilities of request arrival to the fast server. The graphs in Figs. 1.4 and 1.5 are the corresponding equilibrium density functions of the arrival times in the system. In these examples, like in the deterministic case, the distribution of the arrival times in the system tends to the uniform distribution as we increase  $\lambda$ , and the limiting distribution is the same for different probabilities of request arrival to the fast server. In the last three cases ( $N = 100, 200, 300$ ), the equilibrium density function of the arrival times in the system is approximately 0.84 on the whole interval  $[t_e, T]$ . We finally acknowledge the identity of these results for the deterministic and Poisson numbers of players. Fig. 1.6 shows how the equilibrium densities change their graphs as we vary the parameter  $r$  (the probability that the player's request is redirected to the first server).

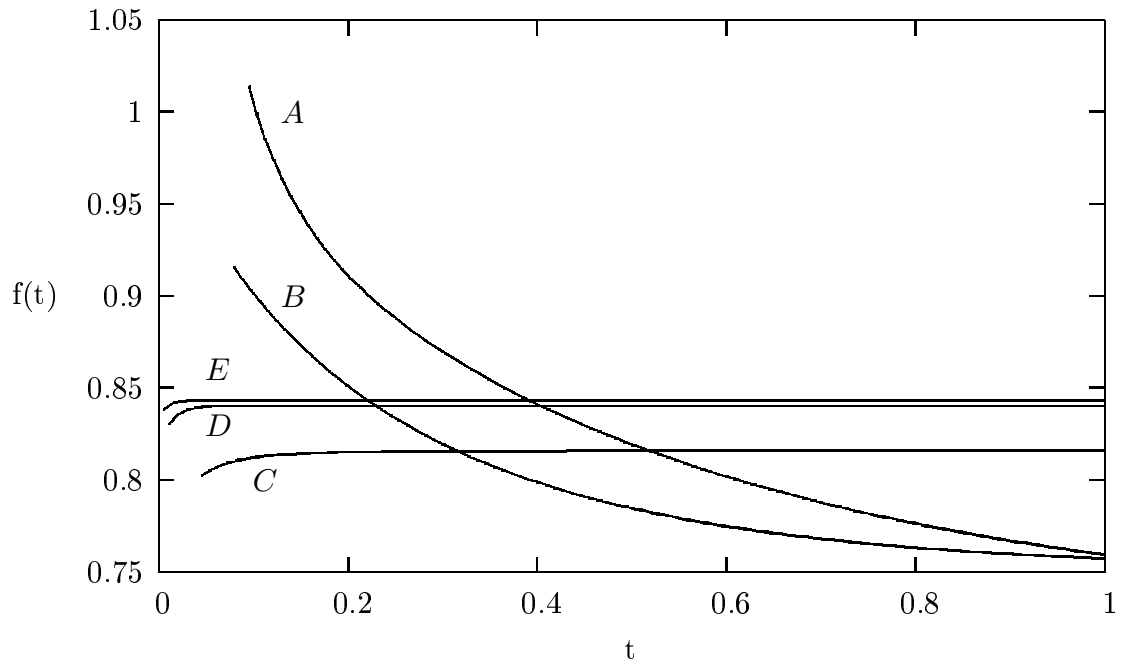


Figure 1.4: Equilibrium densities  $f(t)$  for  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.1$ , and (A)  $\lambda = 1$ , (B)  $\lambda = 5$ , (C)  $\lambda = 20$ , (D)  $\lambda = 100$ , (E)  $\lambda = 200$

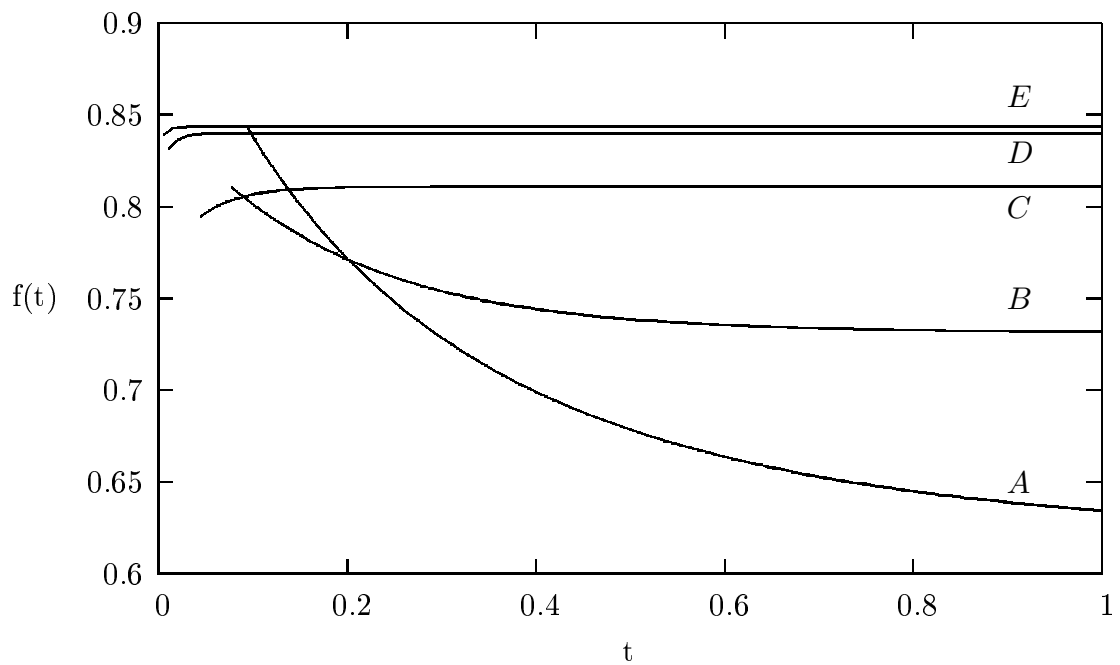


Figure 1.5: Equilibrium densities  $f(t)$  for  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.9$ , and (A)  $\lambda = 1$ , (B)  $\lambda = 5$ , (C)  $\lambda = 20$ , (D)  $\lambda = 100$ , (E)  $\lambda = 200$

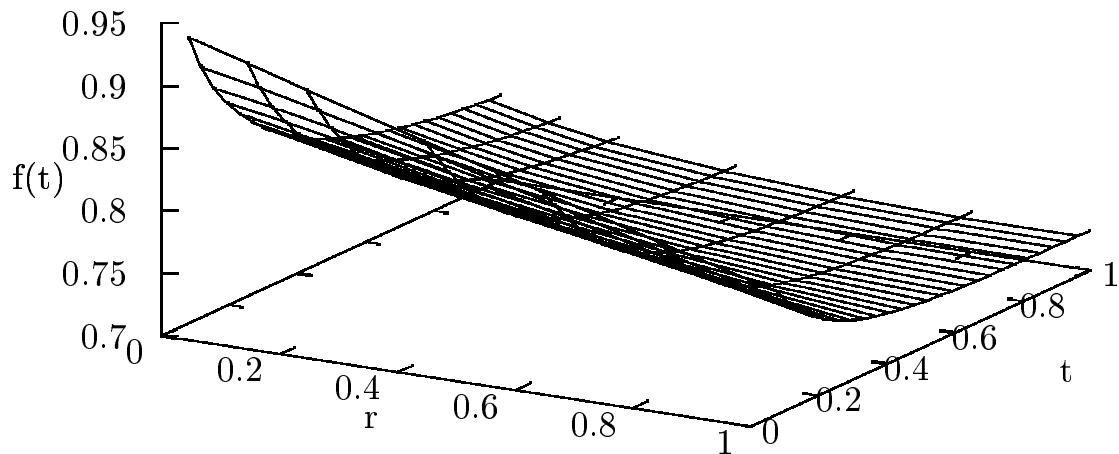


Figure 1.6: Equilibrium densities for  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, \lambda = 5$  under variation of  $r$

### § 1.2.3 The price of anarchy

The price of anarchy (PoA) is a quite powerful tool to characterize the efficiency loss of competition on a service system [168, 169]. First, consider the case of deterministic  $N$ . The utility of a customer was defined to be his probability of obtaining service given the arrival profile of all customers (including himself). Hence, the overall social utility is the expected number of customers obtaining service completely. It's obvious that in the social optimum some central planner observes service completions at any of two servers and immediately sends a new customer. Then the socially optimal utility is  $E(\min\{\text{number of requests being served in } [0, T) + 2, N + 1\})$ , i.e.  $(\mu_1 + \mu_2)T + 2$  for large  $N$  [168, 169]. Then the socially optimal utility equals to  $\min\{(\mu_1 + \mu_2)T + 2, N + 1\}$ . In the equilibrium the social utility is  $(N + 1)C(t)$ , where  $C(t)$  is the equilibrium probability to complete service for the customer.

The price of anarchy is defined as the ratio between the optimal overall social utility and that in the equilibrium. For the cases in the examples for deterministic  $N$  (Table 1.1 and Figures 1.1 and 1.2) we found the socially optimal and equilibrium payoffs and the values of the price of anarchy (see Table 1.3).

Now we assume that the number of players  $N$  is random variable obeying the Poisson distribution with parameter  $\lambda$ . Then the socially optimal utility is  $\min\{(\mu_1 + \mu_2)T + 2, \lambda + 1\}$ . In the equilibrium the social utility is  $(\lambda + 1)C(t)$ , where  $C(t)$  is the equilibrium probability to complete service for the customer.



Then we find the price of anarchy as a ratio of an socially optimal and equilibrium social utilities. For the cases in the examples for the random number of players (Table 1.1 and Figures 1.4 and 1.5 we found the socially optimal and equilibrium utilities and the values of the price of anarchy (see Table 1.4).

Calculation results in the Tables 1.3 and 1.4 for the both cases of deterministic and random number of players show that the value of the price of anarchy first increases and from some  $N$  or  $\lambda$  starts to decrease. This fact corresponds with the results in the paper [168] for the one-server system. The existence of such a maximim in price of anarchy is not trivial and can be used to recommend what the number of visitors should be in such a service system.

### § 1.3 Game with pure random-access scheme

Consider a certain player trying to send his request to the system at time  $t$  given that the requests of other players arrive in the system at this time with probability  $p$ . Denote by  $X_p$  the random number of his opponents sending their requests to the system, possibly preventing him from being served at the time  $t$ . For each value of (random or deterministic)  $N$ , the random variable  $X_p = X_{N,p}$  obeys the binomial distribution  $Bin(N, p)$ . For convenience, the index  $N$  will be omitted, and the character of  $N$  will be specified accordingly. Denote by  $X_{pr}$  the number of players from  $X_p$  that are redirected to the first server with probability  $r$ . For each value of  $X_p$ , the random variable  $X_{pr}$  has the binomial distribution  $Bin(X_p, r)$ . Then we

obtain the probability

$$\begin{aligned}
P(X_{pr} = j) &= \sum_{i=j}^N C_N^i p^i (1-p)^{N-i} C_i^j r^j (1-r)^{i-j} \\
&= \sum_{i=j}^N \frac{N!}{i!(N-i)!} \frac{i!}{j!(i-j)!} p^i (1-p)^{N-i} r^j (1-r)^{i-j} \\
&= C_N^j \sum_{i=j}^N \frac{(N-j)!}{(N-i)!(i-j)!} p^i (1-p)^{N-i} r^j (1-r)^{i-j} \\
&= C_N^j (pr)^j \sum_{k=0}^{N-j} \frac{(N-j)!}{(N-j-k)!k!} p^k (1-p)^{N-j-k} (1-r)^k \\
&= C_N^j (pr)^j (1-p)^{N-j} \sum_{k=0}^{N-j} C_{N-j}^k \left( \frac{p(1-r)}{1-p} \right)^k \\
&= C_N^j (pr)^j (1-p)^{N-j} \left( 1 + \frac{p(1-r)}{1-p} \right)^{N-j} = C_N^j (pr)^j (1-pr)^{N-j}.
\end{aligned}$$

As a result,  $X_{pr}$  obeys the distribution  $Bin(N, pr)$ . In the same way, we may demonstrate that  $X_{p\bar{r}}$ , the number of players from  $X_p$  that are redirected to the second server with probability  $\bar{r}$ , has the distribution  $Bin(N, p\bar{r})$  for each (deterministic or random)  $N$ .

Let  $p$  be the probability of request arrival at the zero time when the system is initially free. Then the probability of service at this time makes up

$$C(p) = E \left( \frac{r}{X_{pr} + 1} + \frac{\bar{r}}{X_{p\bar{r}} + 1} \right). \quad (1.3.1)$$

For deterministic  $N$ , this probability is

$$rP(X_{pr} = 0) + \bar{r}P(X_{p\bar{r}} = 0) + \sum_{i=1}^N \left( \frac{r}{i+1} P(X_{pr} = i) + \frac{\bar{r}}{i+1} P(X_{p\bar{r}} = i) \right),$$

and, for random  $N$ ,

$$\begin{aligned}
&rP(X_{pr} = 0) + \bar{r}P(X_{p\bar{r}} = 0) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \sum_{i=1}^n \left( \frac{r}{i+1} P(X_{pr} = i) + \frac{\bar{r}}{i+1} P(X_{p\bar{r}} = i) \right).
\end{aligned}$$

Assume that the system receives no requests on some interval  $(0, t)$  after the zero time. Hence, the probability of service at time  $t > 0$  is

$$\begin{aligned} & 1 - rP(X_{pr} \geq 1)e^{-\mu_1 t} - \bar{r}P(X_{p\bar{r}} \geq 1)e^{-\mu_2 t} \\ &= r(P(X_{pr} = 0) + P(X_{pr} \geq 1)(1 - e^{-\mu_1 t})) \\ & \quad + \bar{r}(P(X_{p\bar{r}} = 0) + P(X_{p\bar{r}} \geq 1)(1 - e^{-\mu_2 t})). \end{aligned}$$

Note that this probability increases in  $t$ .

Imagine that the player sends his request to the system at the time  $0+$ , that is, infinitesimally close to the zero time from the right so that the following conditions hold: (a) each of the requests that arrived at the zero time is being served or has left the system, and (b) the system has not received new requests and also not completed the service of the currently processed requests. The corresponding probability constitutes

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0+} r(P(X_{pr} = 0) + P(X_{pr} \geq 1)(1 - e^{-\mu_1 t})) \\ & \quad + \bar{r}(P(X_{p\bar{r}} = 0) + P(X_{p\bar{r}} \geq 1)(1 - e^{-\mu_2 t})) \\ & \quad = rP(X_{pr} = 0) + \bar{r}P(X_{p\bar{r}} = 0), \end{aligned}$$

which is smaller than  $C(p)$ . Consequently, it is better to send the request to the system at the zero time than immediately after this time. We have the following result.

**Lemma 1.7.** *In the game with the pure random-access scheme, the player's payoff at the zero time exceeds his payoff at the time  $0+$ , that is, infinitesimally close to it from the right. The player's payoff at time  $t$  increases in  $t$  if there are no request arrivals in the system on the interval  $(0, t)$ .*

**Lemma 1.8.** *In the game with the pure random-access scheme, the carrier of the equilibrium strategy contains an atom at the point  $t = 0$ . In other words, the equilibrium probability  $p_e = F(0)$  of request arrivals at the initial (zero) time is strictly positive. There exists a subsequent time interval  $(0, t_e)$  without request arrivals in the system.*

*Proof.* In fact, the proof is the same as that for Lemma 1.2 using Lemma 1.7.  $\square$

Therefore, in the game with the pure random-access scheme, the equilibrium strategy carrier also has the discontinuity interval  $(0, t_e)$ .

Suppose we know the equilibrium probability of request arrivals at the zero time, which is  $0 < p_e \leq 1$ . The probability of service at time  $t > 0$  without request arrivals on the interval  $(0, t)$  is an increasing function of  $t$  that tends to 1. At the time  $t = 0+$ , it is smaller than the probability of service at the zero time. Hence, there exists a time (perhaps, after time  $T$ ) when these probabilities coincide. For a given equilibrium probability of request arrival at the zero time, the solution of the equation

$$E \left( \frac{r}{X_{p_e r} + 1} + \frac{\bar{r}}{X_{p_e \bar{r}} + 1} \right) = 1 - rP(X_{p_e r} \geq 1)e^{-\mu_1 t_e} - \bar{r}P(X_{p_e \bar{r}} \geq 1)e^{-\mu_2 t_e} \quad (1.3.2)$$

yields the corresponding time  $t_e > 0$  till which (since the zero time) there are no requests to the system.

**Lemma 1.9.** *For the case of two players ( $N = 1$ ) and any real values  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 < p_e \leq 1$ , and  $\mu_1, \mu_2 > 0$ , Eq. (1.3.2) defines a constant  $t_e$  that is independent of  $p_e$ . For any other number of players and any real values  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 < p_e \leq 1$ , and  $\mu_1, \mu_2 > 0$ , Eq. (1.3.2) defines a function  $t_e(p_e)$  that strictly decreases in  $p_e$ .*

*Proof.* In the case of two players, Eq. (1.3.2) takes the form

$$r^2 + \bar{r}^2 = 2(r^2 e^{-\mu_1 t_e} + \bar{r}^2 e^{-\mu_2 t_e}).$$

Let  $N > 1$  or  $N$  be random. Transform Eq. (1.3.2) in the following way:

$$E \left( \frac{rX_{p_e r}}{X_{p_e r} + 1} + \frac{\bar{r}X_{p_e \bar{r}}}{X_{p_e \bar{r}} + 1} \right) = rP(X_{p_e r} \geq 1)e^{-\mu_1 t_e} + \bar{r}P(X_{p_e \bar{r}} \geq 1)e^{-\mu_2 t_e},$$

which gives

$$\begin{aligned} rP(X_{p_e r} \geq 1)E \left( \frac{X_{p_e r}}{X_{p_e r} + 1} \middle| X_{p_e r} \geq 1 \right) \\ + \bar{r}P(X_{p_e \bar{r}} \geq 1)E \left( \frac{X_{p_e \bar{r}}}{X_{p_e \bar{r}} + 1} \middle| X_{p_e \bar{r}} \geq 1 \right) \\ = rP(X_{p_e r} \geq 1)e^{-\mu_1 t_e} + \bar{r}P(X_{p_e \bar{r}} \geq 1)e^{-\mu_2 t_e}. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Now, it is necessary to demonstrate that the factors containing  $p_e$  in Eq. (1.2.3) increase in  $p_e$ . Like for the rational random-access scheme, we will use the theory of stochastic orders for proving the increase of  $P(X_{p_e r} \geq i)$  and  $E\left(\frac{X_{p_e r}}{X_{p_e r}+1} | X_{p_e r} \geq 1\right)$  in  $p_e$ . Obviously, the same holds for the corresponding factors with  $r$  replaced by  $\bar{r}$ .

First, let the number  $N$  be deterministic. Verify that, for any real numbers  $0 \leq q < p \leq 1$ , the ratio  $\frac{P(X_{pr}=i)}{P(X_{qr}=i)}$  increases in natural index  $i$ . The ratio  $\frac{P(X_{pr}=k+1)}{P(X_{pr}=k)} = \frac{N-k}{k+1} \left(\frac{1}{1-pr} - 1\right)$  increases in  $p$ . Then we have  $\frac{P(X_{qr}=k+1)}{P(X_{qr}=k)} < \frac{P(X_{pr}=k+1)}{P(X_{pr}=k)}$  and  $\frac{P(X_{pr}=k)}{P(X_{qr}=k)} < \frac{P(X_p=k+1)}{P(X_q=k+1)}$ . By Definition 1.3 this means that the random variable  $X_{p_e r}$  stochastically increases in  $p_e$  in the likelihood ratio order.

Second, let the number  $N$  be random. By Theorem 1.4 the random variable  $\sum_{n=1}^{\infty} P(N=n)X_{n,p_e r}$  also stochastically increases in  $p_e$  in the likelihood ratio order, where  $X_{n,p_e r}$  denotes  $X_{p_e r}$  for each fixed  $N=n$  (the density function of the binomial distribution has logarithmic concavity). Consequently, for random  $N$  the random variable  $X_{p_e r}$  stochastically increases in  $p_e$  in the likelihood ratio order.

By Theorem 1.1 the stochastic increase of a random variable in the likelihood ratio order implies its increase in the usual stochastic order, that is,  $P(X_{p_e r} \geq i)$  increases in  $p_e$  for any natural index  $i$ .

By Theorem 1.2 the random variable  $[X_{p_e r} | X_{p_e r} \geq 1]$  also stochastically increases in  $p_e$  in the likelihood ratio order. Then by Theorem 1.3 the random variable  $\left[\frac{X_{p_e r}}{X_{p_e r}+1} | X_{p_e r} \geq 1\right]$  stochastically increases in  $p_e$  in the likelihood ratio order too.

The stochastic increase of a random variable in the likelihood ratio order implies its increase in the usual stochastic order and hence the increase of its expected value. Therefore  $E\left(\frac{X_{p_e r}}{X_{p_e r}+1} | X_{p_e r} \geq 1\right)$  increases in  $p_e$ .

Now, consider two pairs  $(p_1, t_1)$  and  $(p_2, t_2)$  satisfying Eq. (1.3.3) and the inequality  $p_1 < p_2$ . Let  $t_1 \leq t_2$ . For  $p_e = p_1$  and  $t_e = t_1$ , the left- and right-hand sides of (1.3.3) have the same value. If  $p_e$  and  $t_e$  grow from  $p_1$  to  $p_2$  and from  $t_1$  to  $t_2$ , respectively, then the probabilities in the right- and left-hand sides have the same increase. The expected values in the left-hand side also grow, but the exponents in the right-hand side either decrease or remain invariable, which violates the equality. Hence,  $t_1 > t_2$ .  $\square$

**Corollary 1.2.** *The expected values  $E\left(\frac{1}{X_{p_e r}+1}\right)$  and  $E\left(\frac{1}{X_{p_e \bar{r}}+1}\right)$  decrease in  $p_e$ .*

*Proof.* In accordance with the proof of Lemma 1.9, the random variable  $\frac{1}{X_{p_e r+1}}$  stochastically decreases in  $p_e$  in the usual stochastic order as a decreasing function of a random variable that stochastically increases in  $p_e$ . Hence, its expected value also decreases in  $p_e$ .  $\square$

As follows from Lemma 1.9, the higher the probability  $p_e$  of request arrivals in the system at the zero time, the smaller the left bound of the interval  $[t_e, T]$  where the players again send their requests to the system with positive probability. Note that, for given  $p_e$ , the value  $t_e$  may even exceed  $T$ . In this case, for equilibrium search, we should increase the probability  $p_e$ . If  $t_e(1) \geq T$ , then the equilibrium strategy is pure, that is, sends the requests to the system at the time  $t = 0$  with probability 1. We further assume that  $t_e(1) < T$ .

**Lemma 1.10.** *If  $t_e < T$ , then on the time interval  $[t_e, T]$ , there exists a strictly positive density function  $f(t) > 0$  of the arrival times in the system. This interval has no atoms or discontinuities.*

*Proof.* Consider the interval  $[t_e, T]$  on which the requests are again sent to the system. We will show that the equilibrium density function of the arrival times in the system is strictly positive on the whole interval. Assume on the contrary that there exists a subinterval  $(s_1, s_2) \in [t_e, T]$  without request arrivals in the system. Denote by  $p_{ij}(t)$  the probability of the system state  $(i, j)$  at time  $t$ , where  $i, j \in \{0, 1\}$  are the states of the first and second servers, respectively (0 – free, 1 – busy). Then the probability of service at time  $s_1$  makes up

$$p_{00}(s_1) + rp_{01}(s_1) + \bar{r}p_{10}(s_1).$$

Recall that there are no arrivals on  $(s_1, s_2)$ , and hence the payoff at time  $s_2$  has the form

$$\begin{aligned} & p_{00}(s_2) + rp_{01}(s_2) + \bar{r}p_{10}(s_2) \\ &= p_{00}(s_1) + p_{10}(s_1)(1 - e^{-\mu_1(s_2-s_1)}) + p_{01}(s_1)(1 - e^{-\mu_2(s_2-s_1)}) \\ & \quad + p_{11}(s_1)(1 - e^{-\mu_1(s_2-s_1)})(1 - e^{-\mu_2(s_2-s_1)}) \\ & \quad + r(p_{01}(s_1) + p_{11}(s_1)(1 - e^{-\mu_1(s_2-s_1)})) \\ & \quad + \bar{r}(p_{10}(s_1) + p_{11}(s_1)(1 - e^{-\mu_2(s_2-s_1)})), \end{aligned}$$

obviously exceeding the payoff at the time  $s_1$ . This means that, after time  $t_e$ , the strategy carrier contains no such discontinuities.

Now, let us prove that, after time  $t_e$ , the strategy carrier has no atoms. Assume on the contrary that such an atom exists at  $t \in [t_e, T]$  and the probability of request arrivals at time  $t$  is  $p > 0$ . Consider the time  $s = t-$ , that is, infinitesimally close from the left to time  $t$  so that with zero probability the served requests leave the system and the new requests arrive in it. Take a player who tries to send his request to the system at time  $t$ , being aware of that the others send their requests at this time with probability  $p$ . Let the random variable  $X_p$  be the number of his opponents whose requests have arrived in the system at time  $t$ . In addition, denote by  $X_{pr}$  and  $X_{p\bar{r}}$  the random numbers of players among  $X_p$  whose requests have been redirected to the first and second servers, respectively. Due to the strict positivity of the probability  $p$ , the expected values of these random variables must be positive too. The probability of service at time  $t$  equals

$$\begin{aligned} & E \left( \frac{r(p_{00}(t)+p_{01}(t))}{X_{pr}+1} + \frac{\bar{r}(p_{00}(t)+p_{10}(t))}{X_{p\bar{r}}+1} \right) \\ &= r(p_{00}(s) + p_{01}(s))E \frac{1}{X_{pr}+1} + \bar{r}(p_{00}(s) + p_{10}(s))E \frac{1}{X_{p\bar{r}}+1}, \end{aligned}$$

which is smaller than the payoff at time  $s$ , that is,

$$r(p_{00}(s) + p_{01}(s)) + \bar{r}(p_{00}(s) + p_{10}(s)).$$

In other words, if the distribution of request arrivals after time  $t_e$  contains an atom, then it is better to send the request to the system immediately before this time. In contrast to the zero time (when the system is initially free and a player merely has to win vacancies for service), here the servers may be busy, and the vacancy tournament reduces the probability of service.  $\square$

### § 1.3.1 Deterministic number of players

Denote by  $N+1$  the number of players sending their requests to the system. Each of them has  $N$  opponents, who may prevent from being served. The random variable  $X_{p_e r}$  is the number of players who have sent their requests to the first server with distribution  $Bin(N, p_e r)$ . Similarly, the random variable  $X_{p_e \bar{r}}$  is the number of players who have sent their requests to the second server with distribution  $Bin(N, p_e \bar{r})$ .

The probability of service at the zero time has form (1.3.1).

The first summand in (1.3.1) is

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{r}{X_{p_e r} + 1}\right) &= r \sum_{i=0}^N C_N^i (p_e r)^i (1 - p_e r)^{N-i} \frac{1}{i+1} \\
&= r \frac{(1-p_e r)^N}{N+1} \sum_{i=0}^N C_{N+1}^{i+1} \left(\frac{p_e r}{1-p_e r}\right)^i = r \frac{(1-p_e r)^{N+1}}{p_e r (N+1)} \sum_{i=1}^{N+1} C_{N+1}^i \left(\frac{p_e r}{1-p_e r}\right)^i \\
&= r \frac{(1-p_e r)^{N+1}}{p_e r (N+1)} \left( \left(1 + \frac{p_e r}{1-p_e r}\right)^{N+1} - 1 \right) = \frac{1 - (1-p_e r)^{N+1}}{p_e (N+1)}.
\end{aligned}$$

In the same way, the second summand can be written as

$$E\left(\frac{\bar{r}}{X_{p_e \bar{r}} + 1}\right) = \frac{1 - (1 - p_e \bar{r})^{N+1}}{p_e (N + 1)}.$$

Then the payoff at the time  $t = 0$  makes up

$$C(p) = \frac{2 - (1 - p_e r)^{N+1} - (1 - p_e \bar{r})^{N+1}}{p_e (N + 1)}. \quad (1.3.4)$$

Find the probability of service at time  $t_e > 0$  under the zero probabilities of request arrivals on the interval  $(0, t_e)$ . The desired probability is defined by

$$\begin{aligned}
&1 - rP(X_{p_e r} \geq 1)e^{-\mu_1 t} - \bar{r}P(X_{p_e \bar{r}} \geq 1)e^{-\mu_2 t} \\
&= 1 - r(1 - P(X_{p_e r} = 0))e^{-\mu_1 t} - \bar{r}(1 - P(X_{p_e \bar{r}} = 0))e^{-\mu_2 t} \\
&= 1 - r(1 - (1 - p_e r)^N)e^{-\mu_1 t} - \bar{r}(1 - (1 - p_e \bar{r})^N)e^{-\mu_2 t}.
\end{aligned}$$

For a deterministic number of players, Eq. (1.3.2) then takes the form

$$\begin{aligned}
&\frac{2 - (1 - p_e r)^{N+1} - (1 - p_e \bar{r})^{N+1}}{p_e (N + 1)} \\
&= 1 - r(1 - (1 - p_e r)^N)e^{-\mu_1 t_e} - \bar{r}(1 - (1 - p_e \bar{r})^N)e^{-\mu_2 t_e}. \quad (1.3.5)
\end{aligned}$$

By Lemma 1.9, if  $t_e(1) \geq T$ , then the equilibrium strategy is pure, that is, sends the requests to the system at the time  $t = 0$  with probability 1. Otherwise, on the interval  $[t_e, T]$ , there exists a strictly positive density function of the arrival times in the system. We further suppose that  $t_e(1) < T$ .

It is necessary to find the equilibrium density function  $f(t)$  of the arrival times in the system on the interval  $[t_e, T]$ . Define a Markov process with system states  $(i, j, k)$  at each time  $t \in [t_e, T]$ , where  $i, j \in \{0, 1\}$  are the states of the first and second servers, respectively (0 – free, 1 – busy), and  $k \in \{0, \dots, N\}$  indicates the



number of players who have sent their requests to the system before time  $t$ . This process is inhomogeneous in time, since the request rate in the system decreases in jumps as soon as a new request is received from a successive player. In particular, the request rate has the form  $\lambda_k(t) = (N - k) \frac{f(t)}{1 - F(t)}$ . The Kolmogorov equations for the system state probabilities  $p_{ijk}$  are given by

$$\begin{aligned}
p'_{000}(t) &= -\lambda_0(t)p_{000}(t), \\
p'_{101}(t) &= r\lambda_0(t)p_{000}(t) - (\lambda_1(t) + \mu_1)p_{101}(t), \\
p'_{011}(t) &= \bar{r}\lambda_0(t)p_{000}(t) - (\lambda_1(t) + \mu_2)p_{011}(t), \\
p'_{00i}(t) &= -\lambda_i(t)p_{00i}(t) + \mu_1p_{10i}(t) + \mu_2p_{01i}(t), \\
p'_{10i}(t) &= r\lambda_{i-1}(t)(p_{00i-1}(t) + p_{10i-1}(t)) - (\lambda_i(t) + \mu_1)p_{10i}(t) + \mu_2p_{11i}(t), \\
p'_{01i}(t) &= \bar{r}\lambda_{i-1}(t)(p_{00i-1}(t) + p_{01i-1}(t)) - (\lambda_i(t) + \mu_2)p_{01i}(t) + \mu_1p_{11i}(t), \\
p'_{11i}(t) &= \lambda_{i-1}(t)(rp_{01i-1}(t) + \bar{r}p_{10i-1}(t) + p_{11i-1}(t)) - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda_i(t))p_{11i}(t), \\
i &= 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

In the equilibrium the probability of service at any fixed time  $t \in [t_e, T]$  is constant:

$$\sum_{i=0}^N p_{00i}(t) + r \sum_{i=1}^N p_{01i}(t) + \bar{r} \sum_{i=1}^N p_{10i}(t) = C(p_e).$$

Then the sum of the corresponding derivatives must be zero. Substituting the derivatives of the system state probabilities from the Kolmogorov equations (1.3.6) into the above sums, we obtain the differential equation of the equilibrium density function:

$$\frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{r\mu_1 \left( \sum_{i=1}^N p_{10i}(t) + \sum_{i=2}^N p_{11i}(t) \right) + \bar{r}\mu_2 \left( \sum_{i=1}^N p_{01i}(t) + \sum_{i=2}^N p_{11i}(t) \right)}{\sum_{i=0}^{N-1} (N - i)(r^2(p_{00i}(t) + p_{01i}(t)) + \bar{r}^2(p_{00i}(t) + p_{10i}(t)))} \tag{1.3.7}$$

for  $t \in [t_e, T]$ .

The carrier of the equilibrium distribution of the arrival times in the system belongs to the interval  $[0, T]$ , which means that  $F(T) = 1$ . This induces uncertainty in Eq. (1.3.7) at the point  $t = T$  of the interval where the arrival times in the system

are described by the positive density function. We will transform Eq. (1.3.7) to obtain the equilibrium distribution to eliminate the factor  $1 - F(t)$  from it.

Denote by  $T_i$  the times when the players  $i \in \{1, \dots, N\}$  send their requests to the system; they are independent and identically distributed with the function  $F$ . Let  $A(t)$  be the number of request arrivals in the system before time  $t$ , and let  $B_N^s(t) \in \{0, 1\}$  be the state of server  $s$  at time  $t$  (0 – free, 1 – busy).

The denominator of the right-hand side in Eq. (1.3.7) can be rewritten as

$$\begin{aligned} & N \sum_{i=0}^N (r^2(p_{00i}(t) + p_{01i}(t)) + \bar{r}^2(p_{00i}(t) + p_{10i}(t))) \\ & \quad - \sum_{i=0}^N i(r^2(p_{00i}(t) + p_{01i}(t)) + \bar{r}^2(p_{00i}(t) + p_{10i}(t))) \\ & = N(r^2 P(B_N^1(t) = 0) + \bar{r}^2 P(B_N^2(t) = 0)) \\ & \quad - (r^2 E(A(t) \mathbb{1}_{B_N^1(t)=0}) + \bar{r}^2 E(A(t) \mathbb{1}_{B_N^2(t)=0})). \end{aligned}$$

We transform the subtrahend as follows:

$$\begin{aligned} \phi(t) & = r^2 E(A(t) \mathbb{1}_{B_N^1(t)=0}) + \bar{r}^2 E(A(t) \mathbb{1}_{B_N^2(t)=0}) \\ & = r^2 E \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{B_N^1(t)=0, T_i \leq t} + \bar{r}^2 E \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{B_N^2(t)=0, T_i \leq t} \\ & = r^2 E \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{B_N^1(t)=0, T_1 \leq t} + \bar{r}^2 E \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{B_N^2(t)=0, T_1 \leq t} \\ & = N (r^2 E \mathbb{1}_{B_N^1(t)=0, T_1 \leq t} + \bar{r}^2 E \mathbb{1}_{B_N^2(t)=0, T_1 \leq t}) \\ & = N (r^2 P(B_N^1(t) = 0, T_1 \leq t) + \bar{r}^2 P(B_N^2(t) = 0, T_1 \leq t)). \end{aligned}$$

As  $t \rightarrow T$ , the probability  $P(B_N^s(t) = 0, T_1 \leq t)$  tends to  $P(B_N^s(t) = 0)$ , and the denominator vanishes accordingly, which induces uncertainty for the density function in Eq. (1.3.7). Next, assuming that  $t < T$ , we find the density function expression and redefine this function at the point  $T$  as the limit:

$$\begin{aligned} \phi(t) & = N(r^2(P(B_N^1(t) = 0) - P(B_N^1(t) = 0, T_1 > t)) \\ & \quad + \bar{r}^2(P(B_N^2(t) = 0) - P(B_N^2(t) = 0, T_1 > t))). \end{aligned}$$

Then the denominator of the right-hand side in Eq. (1.3.7) takes the form

$$\begin{aligned}
& N(r^2 P(B_N^1(t) = 0, T_1 > t) + \bar{r}^2 P(B_N^2(t) = 0, T_1 > t)) \\
&= N(r^2 P(B_N^1(t) = 0 | T_1 > t)(1 - F(t)) \\
&\quad + \bar{r}^2 P(B_N^2(t) = 0 | T_1 > t)(1 - F(t))) \\
&= N(r^2 P(B_{N-1}^1(t) = 0)(1 - F(t)) + \bar{r}^2 P(B_{N-1}^2(t) = 0)(1 - F(t))),
\end{aligned}$$

where  $B_{N-1}^s(t)$  is the state of server  $s$  at time  $t$  in the model with  $N - 1$  players (as before, the arrival times of the requests sent by  $N - 1$  players represent the independent identically distributed random variables with the function  $F$ ). Note that here the request rates  $\lambda_i(t)$  are the same as in the model with  $N$  players; however, the system state probabilities differ.

Then, for  $t \in [t_e, T)$ , the density function of the arrival times in the system can be described by the following expression that does not depend on  $1 - F(t)$ :

$$f(t) = \frac{r\mu_1 P(B_N^1(t) = 1) + \bar{r}\mu_2 P(B_N^2(t) = 1)}{N(r^2 P(B_{N-1}^1(t) = 0) + \bar{r}^2 P(B_{N-1}^2(t) = 0))}. \quad (1.3.8)$$

The right-hand side of this formula is well defined at  $t = T$ . Using continuity, we may redefine the density function at the point  $t = T$  as

$$f(T) = \frac{r\mu_1 P(B_N^1(T) = 1) + \bar{r}\mu_2 P(B_N^2(T) = 1)}{N(r^2 P(B_{N-1}^1(T) = 0) + \bar{r}^2 P(B_{N-1}^2(T) = 0))}.$$

Consequently, expression (1.3.8) defines the density function of the request arrivals in the system on the whole interval  $[t_e, T]$ .

Using this expression, we may transform equations (1.3.6) by eliminating the unknown density function  $f(t)$  to obtain a system of differential equations for the state probabilities.

Let us define the initial conditions for the system, that is, the state probabilities

at time  $t_e$  given no request arrivals on the interval  $(0, t_e)$ :

$$\begin{aligned}
p_{00i}(t_e) &= C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \left[ \mathbb{1}_{i=0} + \mathbb{1}_{i>0} \left( r^i (1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}^i (1 - e^{-\mu_2 t_e}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{1}_{i>1} (1 - r^i - \bar{r}^i) (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e}) \right], \\
i &= 0, \dots, N, \\
p_{10i}(t_e) &= C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \left[ r^i e^{-\mu_1 t_e} + \mathbb{1}_{i>1} (1 - r^i - \bar{r}^i) e^{-\mu_1 t_e} (1 - e^{-\mu_2 t_e}) \right], \\
i &= 1, \dots, N, \\
p_{01i}(t_e) &= C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} \left[ \bar{r}^i e^{-\mu_2 t_e} + \mathbb{1}_{i>1} (1 - r^i - \bar{r}^i) (1 - e^{-\mu_1 t_e}) e^{-\mu_2 t_e} \right], \\
i &= 1, \dots, N, \\
p_{11i}(t_e) &= C_N^i p_e^i (1 - p_e)^{N-i} (1 - r^i - \bar{r}^i) e^{-\mu_1 t_e} e^{-\mu_2 t_e}, \\
i &= 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Therefore, we have the Cauchy problem for the differential equations (1.3.6) and the initial conditions (1.3.9). The solution of this problem yields the state probabilities  $p_{ijk}(t)$  that depend on the parameter  $p_e$ . Expression (1.3.8) with the known state probabilities defines the equilibrium density function  $f(t)$  on the interval  $[t_e, T]$ , which also depends on the parameter  $p_e$ . It is required that the density function of the arrival times takes its last positive value exactly at time  $T$ ; to this effect, the parameter  $p_e$  is chosen so that

$$p_e + \int_{t_e}^T f(t) dt = 1. \tag{1.3.10}$$

Like for the rational random-access scheme, we have established the following:

**Theorem 1.9.** *Any symmetric Nash equilibrium distribution of the arrival times in the two-server random-access system with loss described by the distribution function  $F(t)$  on the interval  $[0, T]$  has the following properties.*

1. *There exists a probability  $p_e = F(0) > 0$  of request arrival in the system at the zero time.*
2. *On the interval  $(0, t_e)$ , where  $t_e$  satisfies Eq. (1.3.5), the players send their requests to the system with zero probability.*

3. If for  $p_e = 1$ , Eq. (1.3.5) yields a solution  $t_e > T$ , then the equilibrium strategy is the pure strategy in which all players send their requests to the system at the zero time.
4. Otherwise, if  $p_e < 1$ , then on the interval  $[t_e, T]$ , there exists a continuous positive density function  $f(t)$  of the arrival times in the system that is defined by formula (1.3.8).
5. The equilibrium probability of request arrival at the zero time is found from Eq. (1.3.10).
6. The value  $C(p_e) = \frac{2-(1-p_e r)^{N+1}-(1-p_e \bar{r})^{N+1}}{p_e(N+1)}$  gives the probability of service on the whole strategy carrier.

**Lemma 1.11.** *The distribution function  $F(t)$  representing the solution of (1.3.5) and (1.3.7) with the initial condition  $F(0) = p$  increases in  $p$  at any point of the interval  $[0, T]$ .*

*Proof.* Consider two given probabilities  $0 < p < q \leq 1$  of request arrival at the zero time that define the initial conditions for constructing two distribution functions  $F_p(t)$  and  $F_q(t)$  as the solutions of (1.3.5) and (1.3.7). The corresponding probabilities of service  $C(p)$  and  $C(q)$  are constant on the whole distribution carrier. By Corollary 1.2 the function  $C(\cdot)$  decreases. Then the probability of loss must be smaller for  $p$  than for  $q$  on the whole distribution carrier.

By Lemma 1.9 we have  $t_q = t(q) < t_p = t(p)$  for the corresponding starting points of the intervals where the requests again arrive in the system. That is, the function  $F_q(t)$  begins to increase from the value  $q$  at the time when  $F_p(t)$  still remains the constant  $p < q$ . For  $t \in [0, t_p]$ , the lemma is true, since, in this case,  $F_p(t) = p < q \leq F_q(t)$ .

Assume that there exists a time  $s > t_p$  such that  $F_p(t) < F_q(t)$  for  $t < s$ , and  $F_p(s) = F_q(s)$ . Then  $f_p(s) > f_q(s)$ , as both functions do not decrease in  $t$ , and at point  $s$ , the function  $F_p(t)$  must cross  $F_q(t)$  upward. Hence the slope of  $F_p(t)$  exceeds that of  $F_q(t)$ , and therefore  $\frac{f_p(s)}{1-F_p(s)} > \frac{f_q(s)}{1-F_q(s)}$ . This means that the request rate at time  $s$  is higher for the probability  $p$  than for  $q$ , whereas the service rates are the same in both cases. Then the probability of loss at time  $s$  must be greater

for  $p$  than for  $q$ , which obviously contradicts the fact that the probability of loss is smaller for  $p$  than for  $q$  on the whole distribution carrier.  $\square$

**Theorem 1.10.** *The symmetric equilibrium distribution  $F$  of the arrival times that is defined by Theorem 1.9 exists and is unique.*

*Proof.* The uniqueness of the equilibrium follows from Lemma 1.11. The equilibrium condition (1.3.10) represents an equation whose left-hand side increases in  $p_e$ . For  $p_e \approx 0$ , the left-hand side equals the probability of request arrival on the interval  $[t_e, T]$ , which does not exceed 1. For  $p_e = 1$ , the left-hand side is not smaller than 1. Therefore, there exists a unique solution  $p_e$  that is associated with the unique value  $t_e$  and density function  $f(t)$  on  $[t_e, T]$ .  $\square$

### Case of two players

Consider the system with two players only. In this case,  $N = 1$  (each player has one opponent).

The equilibrium time  $t_e$  when the requests again arrive in the system is independent of the probability of request arrival  $p_e$  at the zero time and can be found from the equation

$$r^2 + \bar{r}^2 = 2(r^2 e^{-\mu_1 t_e} + \bar{r}^2 e^{-\mu_2 t_e}).$$

For the one-server system, the equilibrium strategy on the interval  $[t_e, T]$  is the uniform distribution. Now, we show that in the general case this is not true.

According to (1.3.8), the density function of the arrival times in the system has the form

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{r\mu_1 P(B_1^1(t)=1) + \bar{r}\mu_2 P(B_1^2(t)=1)}{N(r^2 P(B_0^1(t)=0) + \bar{r}^2 P(B_0^2(t)=0))} \\ &= \frac{r\mu_1 p_{101}(t) + \bar{r}\mu_2 p_{011}(t)}{r^2 + \bar{r}^2}. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Express the density through  $C(p_e)$ , the equilibrium probability of service, which is constant with respect to  $t$ :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{r\mu_1 p_{101}(t) + \bar{r}\mu_1 p_{011}(t) - \bar{r}\mu_1 p_{011}(t) + \bar{r}\mu_2 p_{011}(t)}{r^2 + \bar{r}^2} \\ &= \frac{\mu_1(1 - C(p_e)) + (\mu_2 - \mu_1)\bar{r}p_{011}}{r^2 + \bar{r}^2}. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Take the differential equation for  $p_{011}$  from system (1.3.6):

$$p'_{011}(t) = \lambda_0(t)\bar{r}p_{000}(t) - \mu_2 p_{011}(t). \quad (1.3.13)$$

By Eq. (1.3.7),

$$\frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{r\mu_1 p_{101}(t) + \bar{r}\mu_2 p_{011}(t)}{(r^2 + \bar{r}^2)p_{000}(t)},$$

and by (1.3.11) we get  $\lambda_0(t) = \frac{f(t)}{p_{000}(t)}$ . Then Eq. (1.3.13) leads to

$$p'_{011}(t) = \bar{r} \frac{\mu_1(1 - C(p_e)) + (\mu_2 - \mu_1)\bar{r}p_{011}}{r^2 + \bar{r}^2} - \mu_2 p_{011}(t). \quad (1.3.14)$$

This equation is considered subject to the initial condition  $p_{011}(t_e) = \bar{r}p_e e^{-\mu_2 t_e}$  and constraint (1.3.10).

The solution of the obtained problem has the form

$$p_e = \frac{1}{1 + \frac{\mu_1 \mu_2 (T - t_e)}{2A} + \frac{\mu_2 - A}{A^2} \left( \frac{\mu_1}{2} - A e^{-\mu_2 t_e} \right) (e^{-A(T - t_e)} - 1)},$$

$$f(t) = \frac{\mu_1 \mu_2 p_e}{2A} + \frac{(A - \mu_2)(B - A\bar{r}p_e e^{-\mu_2 t_e})e^{-A(t - t_e)}}{\bar{r}A}, \quad t \in [t_e, T],$$

where  $A = \frac{r^2 \mu_2 + \bar{r}^2 \mu_1}{r^2 + \bar{r}^2}$  and  $B = \frac{\bar{r} \mu_1 p_e}{2}$ . The equilibrium payoff is

$$C(p_e) = 1 - \frac{p_e(r^2 + \bar{r}^2)}{2}.$$

Now, let both servers have the same performance, that is,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . In this case, the equilibrium strategy coincides with its counterpart for the one-server system and does not depend on  $r$ :  $t_e = \frac{\log 2}{\mu}$ ,  $p_e = \frac{2}{2 + \mu T - \log 2}$ ,  $f(t) = \frac{\mu}{2 + \mu T - \log 2}$ ,  $t \in [t_e, T]$ . The equilibrium payoff makes up  $C(p_e) = \frac{1 + \mu T - \log 2 + 2r\bar{r}}{2 + \mu T - \log 2}$ . For comparison, note that, for the one-server system, the equilibrium payoff is  $\frac{1 + \mu T - \log 2}{2 + \mu T - \log 2}$ ; see [168] for details. We further call the expected number of served players the social utility of the system. In the equilibrium the social utility has the value  $SU_{NE} = 2C(p_e)$ . Accordingly, the socially optimal profile is a strategy profile that maximizes the social utility. The socially optimal profile is not necessarily symmetrical or equilibrium. In the case under consideration, the socially optimal profile is the pure strategy profile in which one player sends his request at the zero time and the other at time  $T$ . The optimal social utility constitutes  $SU_{OPT} = 2 - (r^2 + \bar{r}^2)e^{-\mu T}$ . The price of anarchy is the ratio of the equilibrium social utility and the optimal one. Here the price of anarchy is  $POA = \frac{(2 - (r^2 + \bar{r}^2)e^{-\mu T})(2 + \mu T - \log 2)}{2(1 + \mu T - \log 2 + 2r\bar{r})}$ .

## Numerical examples

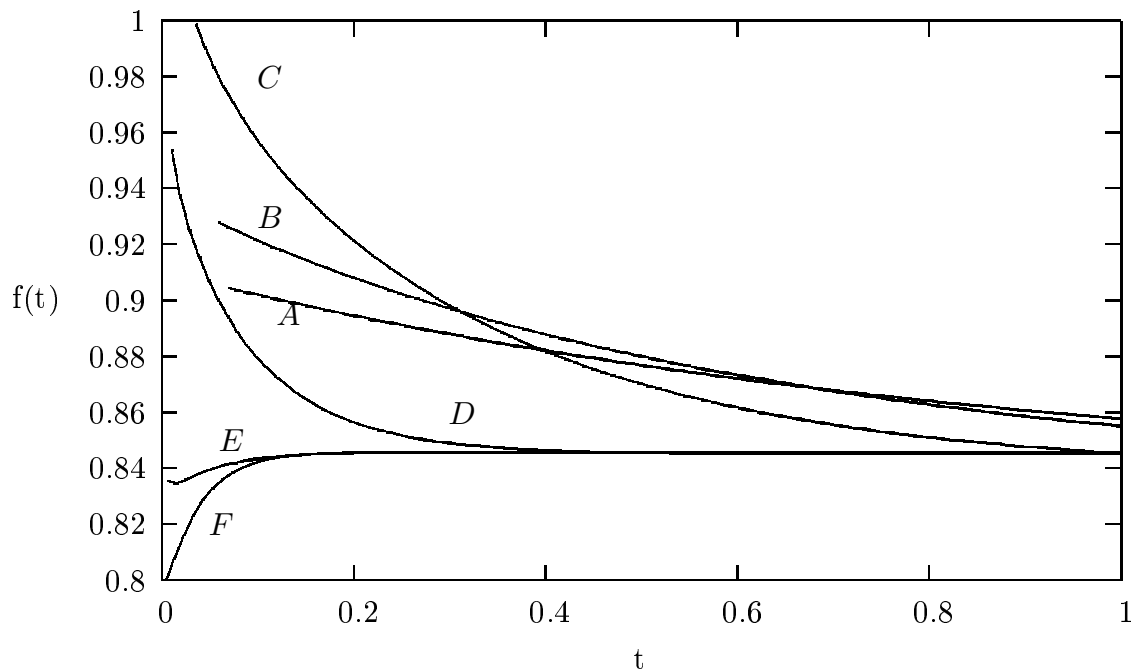


Figure 1.7: Equilibrium densities  $f(t)$  for  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.1$ , and (A)  $N = 1$ , (B)  $N = 5$ , (C)  $N = 20$ , (D)  $N = 100$ , (E)  $N = 200$ , (F)  $N = 300$

To find the equilibria in the problem with  $N > 1$ , we adopt a numerical algorithm that integrates the dichotomy methods for the equations in one unknown with the Euler method for the combined first-order ordinary differential equations. First, the algorithm verifies the inequality  $t_e(1) < T$  (otherwise, the equilibrium strategy represents the pure strategy in which all players send their requests to the system at the zero time). The next step is to choose an initial value  $p_e$  and find the corresponding time  $t_e$  as the solution of Eq. (1.3.5). Then, at point  $t_e$ , we calculate the initial values for systems (1.3.6) with  $N$  and  $N - 1$  players and also the value  $f(t_e)$ . For each successive point of division of the interval  $[t_e, T]$ , it is necessary to solve both systems by the Euler method, that is,  $p_{ijk}(t + \delta) \approx p_{ijk}(t) + \delta p'_{ijk}(t)$ , with calculation of  $\lambda_i(t) = \frac{(N-i)f(t)}{1-F(t)}$  using relationship (1.3.7); then formula (1.3.8) yields the successive value of  $f(t)$ . Next, we calculate  $F(T)$  and compare this value with 1. If the equality  $F(T) = 1$  holds with a sufficiently small error  $\varepsilon$ , then the algorithm ends. If the above value exceeds 1, then  $p_e$  is reduced (otherwise, increased), and the algorithm continues to obtain the new value  $p_e$ .

Table 1.5 illustrates the resulting equilibria constructed by the algorithm under specific values of the system parameters. Here the system operates on the time



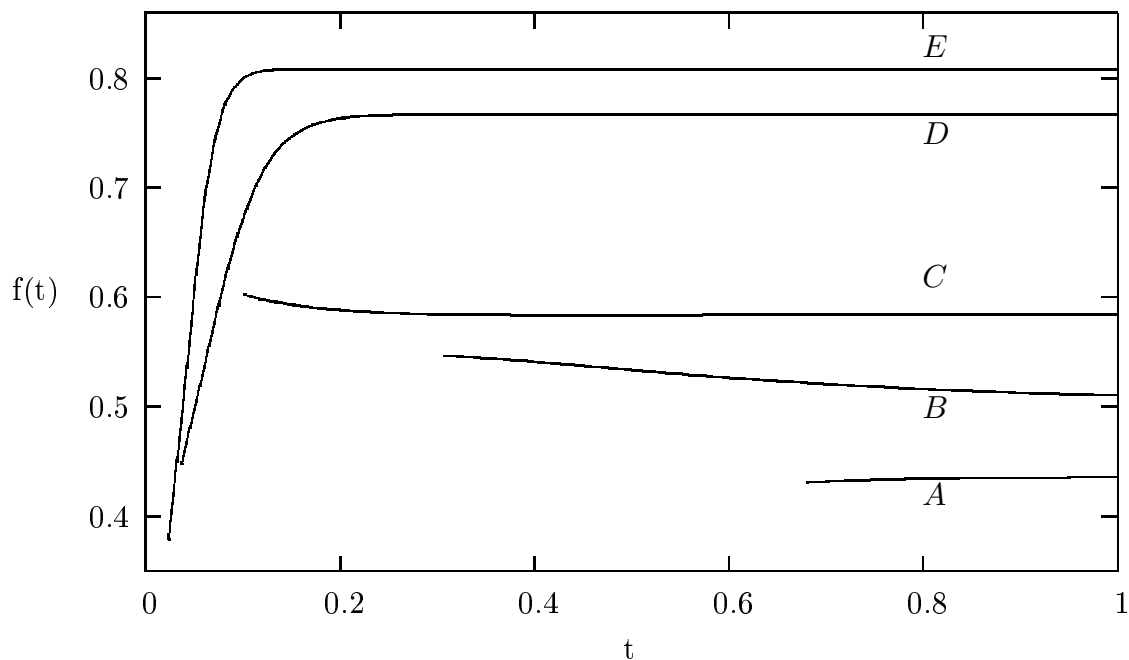


Figure 1.8: Equilibrium densities  $f(t)$  for  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.9$ , and (A)  $N = 1$ , (B)  $N = 5$ , (C)  $N = 20$ , (D)  $N = 100$ , (E)  $N = 200$

interval  $[0, 1]$ . The first server has a considerably smaller performance than the second one,  $\mu_1 = 1$  versus  $\mu_2 = 10$ . We compare the equilibria for different numbers of the players under high ( $r = 0.1$ ) and low ( $r = 0.9$ ) probabilities of request arrival to the fast server. The graphs in Figs. 1.7 and 1.8 are the corresponding equilibrium density functions of the arrival times in the system. Finally, Fig. 1.9 shows how the equilibrium densities change their graphs as we vary the parameter  $r$  (the probability that the player's request is redirected to the first server).

### § 1.3.2 Random number of players

Now, assume that none of the players knows the number of his opponents  $N$ . The only available information is that  $N$  represents a random variable obeying the Poisson distribution with parameter  $\lambda$ . At the zero time, each of the opponents sends his request to the system with probability  $p_e$ . Denote by  $X_{p_e r}$  the random number of the players whose requests have arrived in the first server at the zero time. Note that, for each value of the random variable  $N$ , the random variable  $X_{p_e r}$  has the binomial distribution  $Bin(N, p_e r)$ . Similarly, denote by  $X_{p_e \bar{r}}$  the random number of the players whose requests have arrived in the second server at the zero time, which

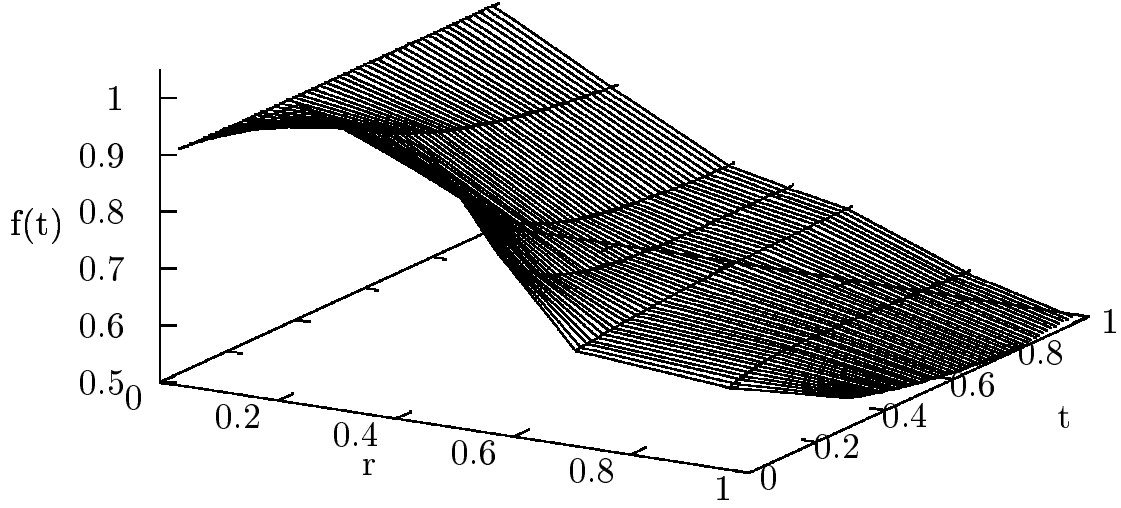


Figure 1.9: Equilibrium densities for  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, N = 5$  under variation of  $r$

has the binomial distribution  $Bin(N, p_e \bar{r})$  for each value of  $N$ . Then the probability of service at the zero time (see (1.3.1)) is given by

$$C(p) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \times \left( r \sum_{i=0}^N C_N^i (p_e r)^i (1 - p_e r)^{N-i} \frac{1}{i+1} + \bar{r} \sum_{i=0}^N C_N^i (p_e \bar{r})^i (1 - p_e \bar{r})^{N-i} \frac{1}{i+1} \right).$$

The parenthesized sum is equal to the right-hand side of formula (1.3.4), and so

$$\begin{aligned} C(p) &= e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \frac{2 - (1-pr)^{N+1} - (1-p\bar{r})^{N+1}}{p(N+1)} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{p\lambda} \left( 2 \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^{N+1}}{(N+1)!} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^{N+1}(1-pr)^{N+1}}{(N+1)!} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^{N+1}(1-p\bar{r})^{N+1}}{(N+1)!} \right) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{p\lambda} (2e^\lambda - e^{\lambda(1-pr)} - e^{\lambda(1-p\bar{r})}) = \frac{2 - e^{-\lambda pr} - e^{-\lambda p\bar{r}}}{\lambda p}. \end{aligned}$$

Let us find the probability of service at time  $t_e > 0$  given that on the interval  $(0, t_e)$  the requests arrive in the system with zero probability. This probability is

defined by

$$\begin{aligned}
& 1 - rP(X_{pr} \geq 1)e^{-\mu_1 t} - \bar{r}P(X_{p\bar{r}} \geq 1)e^{-\mu_2 t} \\
&= 1 - r(1 - P(X_{pr} = 0))e^{-\mu_1 t} - \bar{r}(1 - P(X_{p\bar{r}} = 0))e^{-\mu_2 t} \\
&= 1 - r \left( 1 - e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} (1 - pr)^N \right) e^{-\mu_1 t} \\
&\quad - \bar{r} \left( 1 - e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} (1 - p\bar{r})^N \right) e^{-\mu_2 t} \\
&= 1 - r(1 - e^{-\lambda pr})e^{-\mu_1 t} - \bar{r}(1 - e^{-\lambda p\bar{r}})e^{-\mu_2 t}.
\end{aligned}$$

For the Poisson number of players, Eq. (1.3.2) takes the form

$$\frac{2 - e^{-\lambda p_e r} - e^{-\lambda p_e \bar{r}}}{\lambda p_e} = 1 - r(1 - e^{-\lambda p_e r})e^{-\mu_1 t_e} - \bar{r}(1 - e^{-\lambda p_e \bar{r}})e^{-\mu_2 t_e}. \quad (1.3.15)$$

If  $t_e(1) \geq T$ , then the equilibrium strategy is pure, that is, sends the requests to the system at the time  $t = 0$  with probability 1. We further assume that  $t_e(1) < T$ .

It is necessary to find the equilibrium density function  $f(t)$  of the arrival times in the system on the interval  $[t_e, T]$ . Define a Markov process with system states  $(i, j)$  at each time  $t \in [t_e, T]$ , where  $i, j \in \{0, 1\}$  are the states of the first and second servers, respectively (0 – free, 1 – busy). At each time  $t$ , the request rate in the system is  $\lambda f(t)$ . The Kolmogorov equations for the system state probabilities  $p_{ij}$  are given by

$$\begin{aligned}
p'_{00}(t) &= -\lambda f(t)p_{00}(t) + \mu_1 p_{10}(t) + \mu_2 p_{01}(t), \\
p'_{10}(t) &= r\lambda f(t)p_{00}(t) - (\bar{r}\lambda f(t) + \mu_1)p_{10}(t) + \mu_2 p_{11}(t), \\
p'_{01}(t) &= \bar{r}\lambda f(t)p_{00}(t) - (r\lambda f(t) + \mu_2)p_{01}(t) + \mu_1 p_{11}(t), \\
p'_{11}(t) &= \lambda f(t)(rp_{01}(t) + \bar{r}p_{10}(t)) - (\mu_1 + \mu_2)p_{11}(t).
\end{aligned} \quad (1.3.16)$$

In the equilibrium the probability of service at any fixed time  $t \in [t_e, T]$  is constant and makes up  $p_{00}(t) + rp_{01}(t) + \bar{r}p_{10}(t) = C(p_e)$ . Then the sum of the corresponding derivatives must be zero. Substituting the derivatives of the system state probabilities from the Kolmogorov equations (1.3.16) into the above sums, we obtain the equilibrium density function

$$f(t) = \frac{r\mu_1(p_{10}(t) + p_{11}(t)) + \bar{r}\mu_2(p_{01}(t) + p_{11}(t))}{\lambda(r^2(p_{00}(t) + p_{01}(t)) + \bar{r}^2(p_{00}(t) + p_{10}(t)))} \quad (1.3.17)$$

for  $t \in [t_e, T]$ .

Note that, for the one-server system, the equilibrium strategy on the interval  $[t_e, T]$  is the uniform distribution. Now, we will show that in the general case this is not true, even in the case of identical servers, due to the terms  $r^2$  and  $\bar{r}^2$  in the denominator.

Let us define the initial conditions for the system, that is, the state probabilities at time  $t_e$  given that there are no request arrivals on the interval  $(0, t_e)$ . For each state  $(i, j)$ , the corresponding probability can be calculated by

$$p_{ij}(t_e) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \sum_{k=0}^N p_{ijk}^N(t_e),$$

where  $p_{ijk}^N(t_e)$  means the probability of state  $(i, j, k)$  at time  $t_e$  in the case of  $N$  players. Consequently,

$$\begin{aligned} p_{00}(t_e) &= e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \\ &\times \sum_{k=0}^N C_N^k p_e^k (1 - p_e)^{N-k} [\mathbb{1}_{k=0} + \mathbb{1}_{k>0} (r^k (1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}^k (1 - e^{-\mu_2 t_e})) \\ &+ \mathbb{1}_{k>1} (1 - r^k - \bar{r}^k) (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e})]. \end{aligned}$$

Transform the inner sum in the following way:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^N C_N^k p_e^k (1-p_e)^{N-k} [\mathbb{1}_{k=0} + \mathbb{1}_{k>0} (r^k (1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}^k (1 - e^{-\mu_2 t_e})) \\
& + \mathbb{1}_{k>1} (1 - r^k - \bar{r}^k) (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e})] \\
& = \sum_{k=0}^N C_N^k p_e^k (1-p_e)^{N-k} [(r^k (1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \bar{r}^k (1 - e^{-\mu_2 t_e})) \\
& + (1 - r^k - \bar{r}^k) (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e})] \\
& + (1-p_e)^N (1 - (1 - e^{-\mu_1 t_e}) - (1 - e^{-\mu_2 t_e}) - (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})) \\
& = (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1-p_e)^N \sum_{k=0}^N C_N^k \left( \frac{p_e r}{1-p_e} \right)^k \\
& + (1 - e^{-\mu_2 t_e}) (1-p_e)^N \sum_{k=0}^N C_N^k \left( \frac{p_e \bar{r}}{1-p_e} \right)^k \\
& + (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e}) (1-p_e)^N \\
& \quad \times \sum_{k=0}^N C_N^k \left[ \left( \frac{p_e}{1-p_e} \right)^k - \left( \frac{p_e r}{1-p_e} \right)^k - \left( \frac{p_e \bar{r}}{1-p_e} \right)^k \right] \\
& + (1-p_e)^N (1 - (1 - e^{-\mu_1 t_e}) - (1 - e^{-\mu_2 t_e}) - (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})) \\
& = (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - p_e \bar{r})^N + (1 - e^{-\mu_2 t_e}) (1 - p_e r)^N \\
& + (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e}) [1 - (1 - p_e \bar{r})^N - (1 - p_e r)^N] \\
& + (1-p_e)^N (1 - (1 - e^{-\mu_1 t_e}) - (1 - e^{-\mu_2 t_e}) - (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})) \\
& = (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e}) \\
& + (1 - p_e r)^N ((1 - e^{-\mu_2 t_e}) - (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})) \\
& + (1 - p_e \bar{r})^N ((1 - e^{-\mu_1 t_e}) - (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})) \\
& + (1-p_e)^N (1 - (1 - e^{-\mu_1 t_e}) - (1 - e^{-\mu_2 t_e}) - (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})).
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
p_{00}(t_e) & = (1 - e^{-\mu_1 t_e}) (1 - e^{-\mu_2 t_e}) \\
& + e^{-\lambda p_e r} ((1 - e^{-\mu_2 t_e}) - (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})) \\
& + e^{-\lambda p_e \bar{r}} ((1 - e^{-\mu_1 t_e}) - (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})) \\
& + e^{-\lambda p_e} (1 - (1 - e^{-\mu_1 t_e}) - (1 - e^{-\mu_2 t_e}) - (1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})).
\end{aligned}$$

Using the same transformation, we obtain the following expressions for all state

probabilities at time  $t_e$ :

$$\begin{aligned}
p_{00}(t_e) &= (1 - e^{-r\lambda p_e})(1 - e^{-\mu_1 t_e})e^{-\bar{r}\lambda p_e} + e^{-r\lambda p_e}(1 - e^{-\bar{r}\lambda p_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e}) \\
&\quad + (1 - e^{-r\lambda p_e})(1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\bar{r}\lambda p_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e}) + e^{-\lambda p_e}, \\
p_{10}(t_e) &= (1 - e^{-r\lambda p_e})e^{-\mu_1 t_e}(e^{-\bar{r}\lambda p_e} + (1 - e^{-\bar{r}\lambda p_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})), \\
p_{01}(t_e) &= (1 - e^{-\bar{r}\lambda p_e})e^{-\mu_2 t_e}(e^{-r\lambda p_e} + (1 - e^{-r\lambda p_e})(1 - e^{-\mu_1 t_e})), \\
p_{11}(t_e) &= (1 - e^{-r\lambda p_e})e^{-\mu_1 t_e}(1 - e^{-\bar{r}\lambda p_e})e^{-\mu_2 t_e}.
\end{aligned} \tag{1.3.18}$$

Therefore, we have the Cauchy problem for the combined differential equations (1.3.16) and the initial conditions (1.3.18). The solution of this problem yields the state probabilities  $p_{ij}(t)$  that depend on the parameter  $p_e$ . Expression (1.3.17) with the known state probabilities defines the equilibrium density function  $f(t)$  on the interval  $[t_e, T]$ , which also depends on the parameter  $p_e$ . It is required that the density function of the arrival times takes its last positive value exactly at time  $T$ ; to this effect, the parameter  $p_e$  is chosen so that

$$p_e + \int_{t_e}^T f(t)dt = 1. \tag{1.3.19}$$

Our analysis naturally leads to the following result.

**Theorem 1.11.** *Any symmetric Nash equilibrium distribution of the arrival times in the two-server random-access system with loss described by the distribution function  $F(t)$  on the interval  $[0, T]$  has the following properties.*

1. *There exists a strictly positive probability  $p_e = F(0) > 0$  of request arrival in the system at the zero time.*
2. *The players send their requests to the system with zero probability on the interval  $(0, t_e)$ , where  $t_e$  satisfies Eq. (1.3.15).*
3. *If for  $p_e = 1$ , Eq. (1.3.15) yields a solution  $t_e > T$ , then the equilibrium strategy is the pure strategy in which all players send their requests to the system at the zero time.*
4. *Otherwise, if  $p_e < 1$ , then on the interval  $[t_e, T]$ , there exists a continuous positive density function  $f(t)$  of the arrival times in the system that is defined by formula (1.3.17).*

5. The equilibrium probability of request arrival at the zero time is found from Eq. (1.3.19).
6. The value  $C(p_e) = \frac{2 - e^{-\lambda p_e r} - e^{-\lambda p_e \bar{r}}}{\lambda p_e}$  gives the probability of service on the whole strategy carrier.

**Lemma 1.12.** *The distribution function  $F(t)$  representing the solution of (1.3.15) and (1.3.17) with the initial condition  $F(0) = p$  increases in  $p$  at any point of the interval  $[0, T]$ .*

*Proof.* The proof coincides with that of Lemma 1.11 for the deterministic number of players. □

Then, just like in the case of the deterministic number of players, we obtain the following result.

**Theorem 1.12.** *The symmetric equilibrium distribution  $F$  of the arrival times that is defined by Theorem 1.11 actually exists and is unique.*

### Numerical examples

To find the equilibria in the problem with  $\lambda > 0$ , we adopt a numerical algorithm that integrates the dichotomy methods for the equations in one unknown with the Euler method for the combined first-order ordinary differential equations. First, the algorithm verifies the inequality  $t_e(1) < T$  (otherwise, the equilibrium strategy represents the pure strategy in which all players send their requests to the system at the zero time). The next step is to choose an initial value  $p_e$  and find the corresponding time  $t_e$  as the solution of Eq. (1.3.15). Then at point  $t_e$  we calculate the initial values for system (1.3.16) and also the value  $f(t_e)$ . For each successive point of division of the interval  $[t_e, T]$ , it is necessary to solve both systems by the Euler method, that is,  $p_{ij}(t + \delta) \approx p_{ij}(t) + \delta p'_{ij}(t)$ , and then formula (1.3.17) yields the successive value of  $f(t)$ . Next, we calculate  $F(T)$  and compare this value with 1. If the equality  $F(T) = 1$  holds with a sufficiently small error  $\varepsilon$ , then the algorithm ends. If the above value exceeds 1, then  $p_e$  is reduced (otherwise, increased), and the algorithm continues to obtain the new value  $p_e$ .

Table 1.6 illustrates the resulting equilibria constructed by the algorithm under specific values of the system parameters. Here the system operates on the time

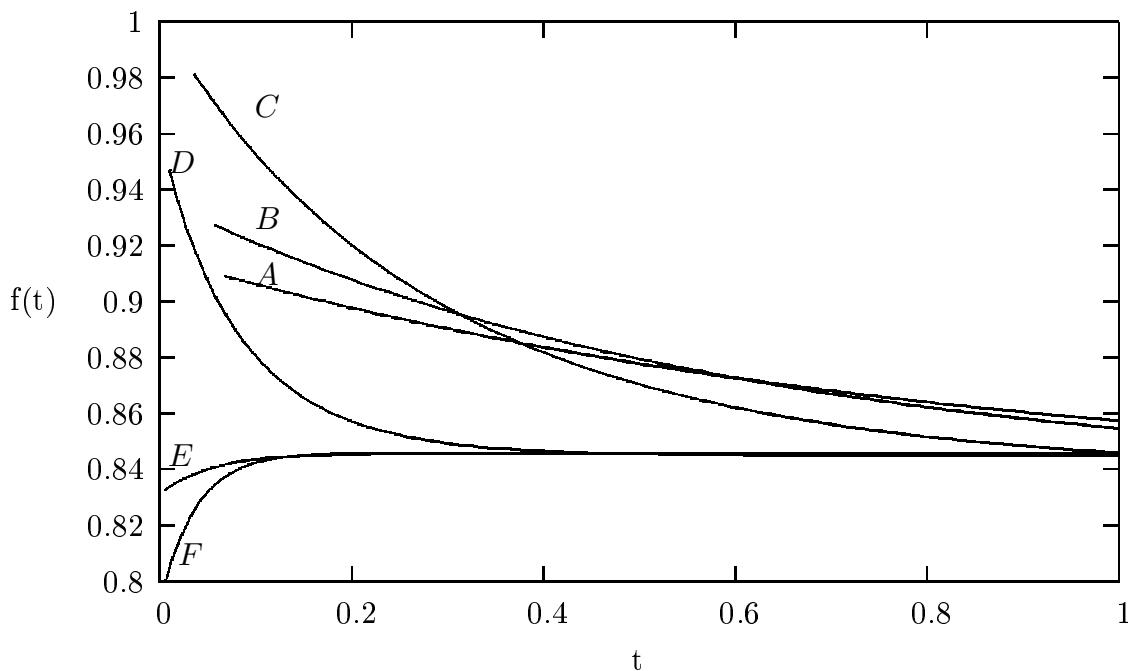


Figure 1.10: Equilibrium densities  $f(t)$  for  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.1$ , and (A)  $\lambda = 1$ , (B)  $\lambda = 5$ , (C)  $\lambda = 20$ , (D)  $\lambda = 100$ , (E)  $\lambda = 200$ , (F)  $\lambda = 300$

interval  $[0, 1]$ . The first server has a considerably smaller performance than the second one,  $\mu_1 = 1$  versus  $\mu_2 = 10$ . We compare the equilibria for different numbers of the players under high ( $r = 0.1$ ) and low ( $r = 0.9$ ) probabilities of request arrival to the fast server. The graphs in Figs. 1.10 and 1.11 are the corresponding equilibrium density functions of the arrival times in the system. In addition, Fig. 1.12 shows how the equilibrium densities change their graphs as we vary the parameter  $r$  (the probability that the player's request is redirected to the first server).

### § 1.3.3 The price of anarchy

For the current pure random access scheme we can find an upper estimation for the price of anarchy. First, consider the case of deterministic  $N$ . The utility of a customer was defined to be his probability of obtaining service given the arrival profile of all customers (including himself). Hence, the overall social utility is the expected number of customers obtaining service completely. It's clear that the social optimum cannot be better than in the case of an optimum for a rationally random access scheme (see section § 1.2.3), when both servers continuously execute requests, and each of the servers receives the current request immediately after the completion



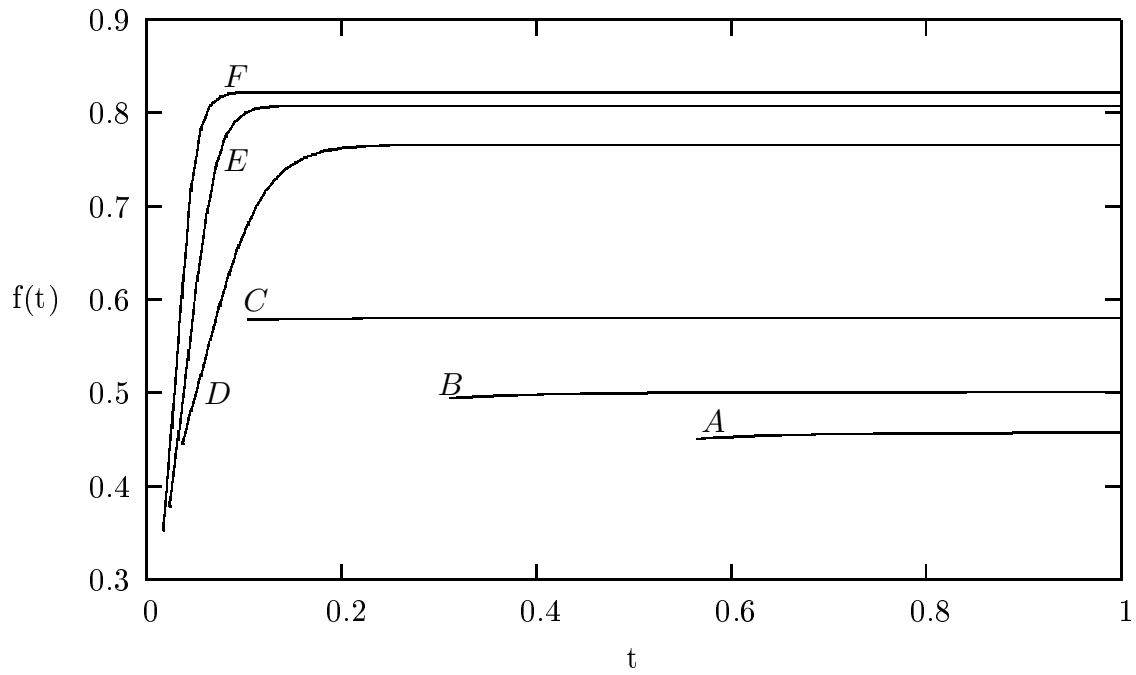


Figure 1.11: Equilibrium densities  $f(t)$  for  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.9$ , and (A)  $\lambda = 1$ , (B)  $\lambda = 5$ , (C)  $\lambda = 20$ , (D)  $\lambda = 100$ , (E)  $\lambda = 200$ , (F)  $\lambda = 300$

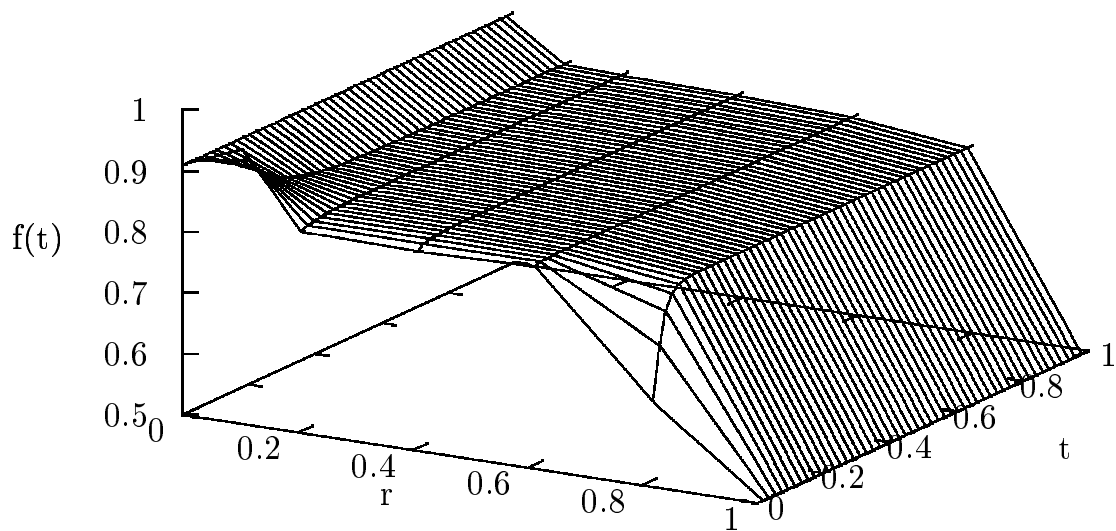


Figure 1.12: Equilibrium densities for  $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, \lambda = 100$  under variation of  $r$

of the previous one. The reason is the possibility of lost requests when only one of the servers is free, as opposed to rationally random access scheme. Then the socially optimal utility is at most  $\min\{(\mu_1 + \mu_2)T + 2, N + 1\}$ . In the equilibrium the social utility is  $(N + 1)C(t)$ , where  $C(t)$  is the equilibrium probability to complete service for the customer.

The price of anarchy is defined as the ratio between the optimal overall social utility and that in the equilibrium. For the cases in the examples for deterministic  $N$  (Table 1.5 and Figures 1.7 and 1.9) we found the upper estimation for the socially optimal payoff, the equilibrium payoffs and the values of upper estimations for the price of anarchy (see Table 1.7).

Now we assume that the number of players  $N$  is random variable obeying the Poisson distribution with parameter  $\lambda$ . Then the socially optimal utility is at most  $\min\{(\mu_1 + \mu_2)T + 2, \lambda + 1\}$ . In the equilibrium the social utility is  $(\lambda + 1)C(t)$ , where  $C(t)$  is the equilibrium probability to complete service for the customer.

Then we find the price of anarchy as a ratio of an socially optimal and equilibrium social utilities. For the cases in the examples for the random number of players (Table 1.6 and Figures 1.10 and 1.11) we found the upper estimations for the socially optimal utility, the equilibrium utilities and the upper estimations for the price of anarchy (see Table 1.8).

Calculation results in the Tables 1.7 and 1.8 for the both cases of deterministic and random number of players show that the value of upper estimations for the price of anarchy first increases and from some  $N$  or  $\lambda$  starts to decrease. This fact corresponds with the results in the paper [168] for the one-server system.

## § 1.4 Comparison of random-access schemes in terms of efficiency

### Deterministic number of players

In this subsection, we compare the efficiency of different random-access schemes for (1) the one-server system and (2) the random-access two-server system that redirects user requests to servers without any information about their states (free or busy). Our aim is to answer the following question: which option is better, using

two servers or one server with the same performance as the two servers have in total. Consider the two-server model with service rates  $\mu_1 = 1$  and  $\mu_2 = 10$ . The service rate of the one-server model is  $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 11$ . Both systems operate on the time interval  $[0, 1]$ . As an efficiency criterion, we choose the equilibrium payoff of a player, that is, the equilibrium probability of service in the system, which is directly proportional to the expected number of requests served by the system. The graphs in Fig. 1.13 show the efficiency of both systems under different numbers of players  $N$ . The graphs are arranged one above the other without intersections and correspond to the following cases in the descending order of efficiency:

1. the two-server system with the rational random-access scheme and high probability of request arrival to the fast server ( $r = 0.1$ );
2. the two-server system with the rational random-access scheme and low probability of request arrival to the fast server ( $r = 0.9$ );
3. the two-server system with the pure random-access scheme and high probability of request arrival to the fast server ( $r = 0.1$ );
4. the one-server system;
5. the two-server system with the pure random-access scheme and low probability of request arrival to the fast server ( $r = 0.9$ ).

### **Poisson number of players**

By analogy with the deterministic number of players, here we compare the efficiency of different random-access schemes for the same systems as before. Again, the problem is to find a better option, using two servers or one server with the same performance as the two servers have in total. Consider the two-server model with service rates  $\mu_1 = 1$  and  $\mu_2 = 10$ . The service rate of the one-server model is  $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 11$ . Both systems operate on the time interval  $[0, 1]$ . As an efficiency criterion, we also choose the equilibrium probability of service in the system, which is directly proportional to the expected number of requests served by the system. The graphs in Fig. 1.14 demonstrate the efficiency of both systems under different request rates  $\lambda$ . Like in the previous case, the graphs are arranged one above the

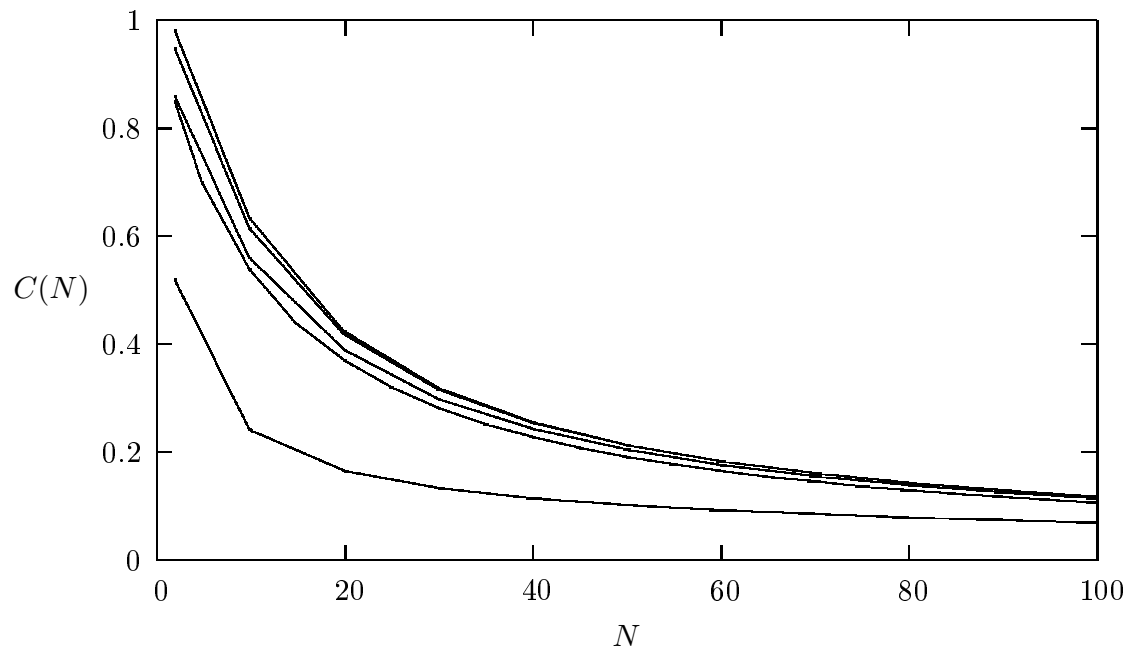


Figure 1.13: Efficiencies of different systems depending on the number of players

other without intersections and correspond to the following cases in the descending order of efficiency:

1. the two-server system with the rational random-access scheme and high probability of request arrival to the fast server ( $r = 0.1$ );
2. the two-server system with the rational random-access scheme and high probability of request arrival to the fast server ( $r = 0.1$ );
3. the two-server system with the rational random-access scheme and low probability of request arrival to the fast server ( $r = 0.9$ );
4. the two-server system with the pure random-access scheme and high probability of request arrival to the fast server ( $r = 0.1$ );
5. the one-server system;
6. the two-server system with the pure random-access scheme and low probability of request arrival to the fast server ( $r = 0.9$ ).

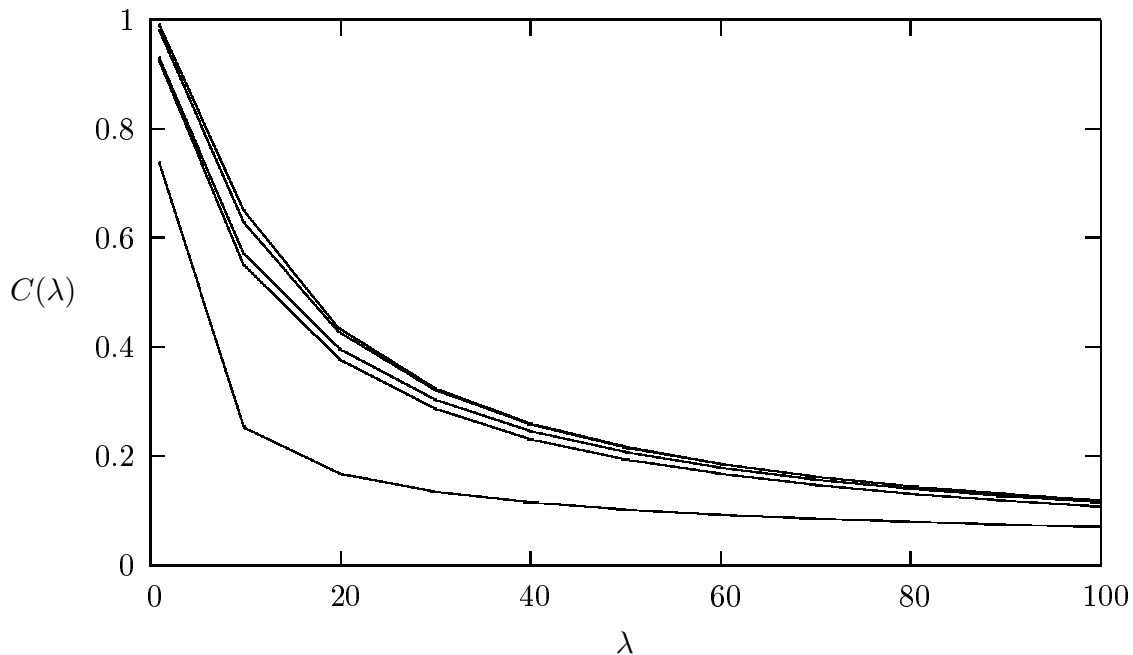


Figure 1.14: Efficiencies of different systems depending on request rate  $\lambda$

## § 1.5 Results

In the thesis we have constructed game-theoretic models for a two-server random-access system with loss in two settings: rationally random and pure random access, each of which is studied for cases of deterministic and random number of players obeying the Poisson distribution. As it has been proven, for each of considered model variant there exists a unique symmetric equilibrium with the following features: at the zero time the players send their requests to the system with a certain positive probability  $p_e$ , and then on a time interval  $[t_e, T]$  the density function of the arrival times in the system takes positive values. In the case of two players in the pure random access system the equilibrium has been constructed analytically; on the interval  $[t_e, T]$  the equilibrium distribution has the exponential form. For both settings, we have also suggested the equilibrium calculation algorithms. These algorithms are the basic components of the software system that visualizes the equilibrium strategies under different values of the model parameters for their comparison. Finally, numerical experiments have been performed to compare the equilibria under different parameter values. Also we have offered a comparison between competitive and cooperative behavior in the service system based on the concept of price of anarchy

for the deterministic and random number of players.

Possible directions of further research are as follows. First, this model can be easily generalized to the case of an arbitrary number of servers. The qualitative results will remain the same, but the number of associated variables and equations will increase accordingly. Computing experiments for the models with three and more servers are expected to give interesting results. Such an analysis can be fruitful in applications, e.g., for an optimal choice of the server access probability  $r$  that maximizes system performance (i.e., the expected number of served requests). Another line of investigations is to incorporate the comfort function [139] into both models in order to analyze its influence on the equilibria.

Table 1.3: Socially optimal and equilibrium utilities and PoA for  $T = 1$  for deterministic numbers of players

$N$	Socially optimal utility	Equilibrium utility	Price of anarchy
$r = 0.1$			
2	3	2,94421	1,01895
10	11	6,95698	1,58115
20	13	8,89018	1,46229
30	13	9,8753	1,31642
40	13	10,47866	1,24062
50	13	10,88274	1,19455
60	13	11,17517	1,16329
70	13	11,40015	1,14034
80	13	11,57158	1,12344
90	13	11,70887	1,11027
100	13	11,82533	1,09933
$r = 0.9$			
2	3	2,84227	1,0555
10	11	6,74274	1,63138
20	13	8,76762	1,48273
30	13	9,79837	1,32675
40	13	10,424	1,24712
50	13	10,84449	1,19876
60	13	11,14637	1,1663
70	13	11,37151	1,14321
80	13	11,55063	1,12548
90	13	11,6941	1,11167
100	13	11,81145	1,10063

Table 1.4: Socially optimal and equilibrium utilities and PoA for  $T = 1$  for deterministic numbers of players

$\lambda$	Socially optimal utility	Equilibrium utility	Price of anarchy
$r = 0.1$			
2	3	1,98137	1,0094
10	11	7,12686	1,54346
20	13	9,09643	1,42913
30	13	10,06418	1,29171
40	13	10,64564	1,22116
50	13	11,03571	1,17799
60	13	11,31444	1,14897
70	13	11,52394	1,12809
80	13	11,68628	1,11242
90	13	11,81599	1,1002
100	13	11,92207	1,09041
$r = 0.9$			
2	3	1,96119	1,01979
10	11	6,88529	1,59761
20	13	8,9555	1,45162
30	13	9,97871	1,30277
40	13	10,58603	1,22803
50	13	10,99233	1,18264
60	13	11,28	1,15248
70	13	11,49605	1,13082
80	13	11,66574	1,11437
90	13	11,79916	1,10177
100	13	11,9092	1,09159



Table 1.5: Equilibrium characteristics

$N$	$r = 0.1$			$r = 0.9$		
	$p_e$	$t_e$	$C(p_e)$	$p_e$	$t_e$	$C(p_e)$
1	0.185	0.070	0.924	0.861	0.681	0.647
5	0.171	0.060	0.713	0.636	0.307	0.346
10	0.160	0.050	0.557	0.555	0.178	0.240
20	0.150	0.037	0.389	0.474	0.101	0.164
100	0.155	0.011	0.114	0.278	0.038	0.0069
200	0.160	0.006	0.061	0.223	0.024	0.044

Table 1.6: Equilibrium characteristics

$\lambda$	$r = 0.1$			$r = 0.9$		
	$p_e$	$t_e$	$C(p_e)$	$p_e$	$t_e$	$C(p_e)$
1	0.181	0.068	0.929	0.802	0.566	0.737
5	0.17	0.059	0.725	0.656	0.312	0.374
20	0.15	0.037	0.396	0.48	0.105	0.168
100	0.155	0.011	0.115	0.279	0.039	0.069
200	0.16	0.066	0.061	0.224	0.024	0.044
300	0.1598	0.004	0.042	0.202	0.018	0.033

Table 1.7: Estimations for utilities and PoA for  $T = 1$  for deterministic numbers of players

$N$	Socially optimal utility	Equilibrium utility	Price of anarchy
$r = 0.1$			
2	3	2,57975	1,1629
10	11	6,12829	1,79496
20	13	8,16145	1,59286
30	13	9,25851	1,40411
40	13	9,94402	1,30732
50	13	10,41608	1,24807
60	13	10,76155	1,208
70	13	11,02663	1,17896
80	13	11,23436	1,15716
90	13	11,40101	1,14025
100	13	11,54226	1,1263
$r = 0.9$			
2	3	1,55616	1,92783
10	11	2,63993	4,16677
20	13	3,45573	3,76187
30	13	4,11016	3,1629
40	13	4,67584	2,78025
50	13	5,17494	2,51211
60	13	5,61932	2,31345
70	13	6,01642	2,16075
80	13	6,37461	2,03934
90	13	6,69621	1,9414
100	13	6,98997	1,85981

Table 1.8: Socially optimal and equilibrium utilities and PoA for  $T = 1$  for deterministic numbers of players

$\lambda$	Socially optimal utility	Equilibrium utility	Price of anarchy
$r = 0.1$			
2	3	1,98137	1,0094
10	11	7,12686	1,54346
20	13	9,09643	1,42913
30	13	10,06418	1,29171
40	13	10,64564	1,22116
50	13	11,03571	1,17799
60	13	11,31444	1,14897
70	13	11,52394	1,12809
80	13	11,68628	1,11242
90	13	11,81599	1,1002
100	13	11,92207	1,09041
$r = 0.9$			
2	3	1,96119	1,01979
10	11	6,88529	1,59761
20	13	8,9555	1,45162
30	13	9,97871	1,30277
40	13	10,58603	1,22803
50	13	10,99233	1,18264
60	13	11,28	1,15248
70	13	11,49605	1,13082
80	13	11,66574	1,11437
90	13	11,79916	1,10177
100	13	11,9092	1,09159

## Chapter 2

# Arrival Time Choice in the Preemptive Queueing System

We consider a single-server queueing system with strategic users. The customers (players) log into the system with preemptive access [40] during a fixed time interval  $[0, T]$ . As soon as a customer arrives in the system, the server immediately starts his service. But when the next customer arrives in the system, the current one leaves the system even it has not finished its service yet, unlike the model in [29] where the current request is moved to a queue to resume its service later.

Such service discipline looks strange and unfair, but it is often found in real life in systems without any access management. In nature, animals mark their territory and exchange tags during the mating season - the last one is the owner until the next one leaves his mark. The next example is an advertising board. A customer attaches his advertisement on the board and it works until a new customer attaches his advertisement covering the previous one. The situation is similar with graffiti on the walls. Another example is an access to social shared objects. For example, observing some kind of an art object the user leaves it to make room for the next visitor. Or we can consider an open access webcam (such as i.g. <http://webcam.anw.at/>) which can change its angle of view according to user's commands. When one user interact with such service, another user can take a control.

One more interpretation is given in the paper [181], where each of farmers wants to decide the optimal time to put his product on the market until the next harvest season, maximizing the price increasing with time but decreasing with number of sellers. If we assume that buyers choose only last seller with a fresh product and

ignore all previous sellers, we obtain the model closed to considered in the current chapter.

There are data transmission systems in which it is important not the integrity of the information, but its relevance. Such are audio and video streaming applications. Data exchange in such applications is implemented on the basis of the UDP protocol (User Datagram Protocol). The transmitted data stream is divided into fragments – data packets, possibly of different sizes. They are sent over the network asynchronously and without delivery confirmation. In the process of transmission, packets may be delayed, and the next packet may not be fully delivered when the next packet is received. When analysing such systems, it is important to understand that high outgoing losses are the norm, since UDP traffic does not require acknowledgement. The use of reliable protocols, such as TCP, would inevitably lead to large delays in data exchange, which is unacceptable when it is necessary to exchange video and audio information in real time. Therefore, UDP is used, which is an unreliable data transfer protocol. This means that the party sending the packets can send as much traffic as the network system can receive without worrying about losses due to network delays. The addressee processes that part of the information that was received in a timely manner. Since there are many packets, successfully delivered packets are sufficient for continuous video playback at the receiving point. Video quality depends on the percentage of delivery losses. UDP loss determines the degree of user comfort when working with such applications. A high percentage of losses leads to severe jitter and delays in audio and video. If there are several devices (cameras, sensors etc.) sending streaming information, they may to compete to provide their packets delivering. This data transmission system can also be considered as a system with preemptive access.

In this chapter, we apply a game-theoretic approach to a preemptive single-server queueing system. The queue is formed by the strategic players. The player's strategy is to choose a moment to enter the system. We assume that each player tries to maximize the probability to perform his request completely.

## § 2.1 Queue system

Now we describe our model in more details in a general setting. We assume that there exists a single server which serves  $N + 1$  customers presented in the system at the initial instant  $t = 0$ . Unlike the conventional queueing theory setting, these customers use some strategy to choose an instant on a time interval  $[0, T]$  to enter the server. By a symmetry, this strategy is the same for each user. This strategy is determined by a distribution function which is the main purpose of the analysis, and it determines the instant of the attempt to enter the server.

When some customer arrives then he captures server for the exponentially distributed time with parameter  $\mu$ . But when the next customer arrives in the system the current one must leave the system even it has not finished its service yet. The system has no queues. The server may simultaneously perform only one request. It may happen that several customers arrive to the system at the same time. Then the server chooses with equal probability one of the currently arrived requests for further servicing.

In the queueing theory, the structure of the input process and the service process are usually assumed to be predefined and specified by the input rate and service times of the customers. Here the input process is actually formed by the strategic customers who try to maximize the probability to be served in the system.

## § 2.2 The game model

Consider the optimal request discipline problem in the system as a non-cooperative game. Here the players are the system users sending their requests for servicing. Denote by  $S$  the player set. The number of players is  $N + 1 = |S|$ , which can be a deterministic or a random value. Each player chooses the time to send his request to the system, seeking to maximize the probability of servicing for his requests. The pure strategy of player  $i$  is the arrival time  $t_i$  of his request in the system. The mixed strategy of player  $i$  is the distribution function  $F_i(t)$  (having density  $f_i(t)$ ) of the arrival times in the system on the time interval  $[0, T]$ . Let  $F = \{F_i(t), i \in S\}$  be the strategy profile.

All players are identical, independent and demonstrate the selfish behavior without cooperation. As the optimality criterion we choose the symmetric Nash equilibrium. In this case, the strategies of all players coincide, i.e.,  $F_i(t) = F(t)$  for all  $i$ .

**Definition 2.1.** *A distribution function  $F(t)$  of the arrival times  $t$  in the system is a symmetric Nash equilibrium if there exists a constant  $C$  such that at any time  $t \in [0, T]$  the probability of service does not exceed  $C$  and is equal to  $C$  on the support of  $F(t)$ .*

To find the Nash equilibrium in this game we use the following approach. Assume that all players  $\{1, 2, \dots, N\}$  use the same mixed strategy  $F(t), t \in [0, T]$ . Then we find the best response of player  $N + 1$  to the described strategy  $F(t)$ . As a payoff function of player  $N + 1$ , we will consider the probability of servicing of his request. Thus, the objective of player  $N + 1$  is to choose a strategy that will maximize his payoff function. Due to the symmetry of the problem, in equilibrium the optimal strategy of player  $N + 1$  must coincide with the chosen strategy of his opponents. To do this, it is sufficient that the strategy of player  $N + 1$  is chosen in such a way that the payoff function of player  $N + 1$  takes a constant value over the support of the distribution function  $F(t)$  (see [141]). It yields that the best response of player  $N + 1$  for the mixed strategies of his opponents  $F_i(t) = F(t), i = 1, \dots, N$  coincides with  $F(t)$ . Thus,  $F(t)$  is the Nash equilibrium in this game.

We will solve the problem in two cases as follows. In the first case, the number of players is deterministic and known to each player. In the second case, each player knows that the number of opponents has the Poisson distribution with a given parameter.

The following lemma determines the structure of players' strategy in the Nash equilibrium.

**Lemma 2.1.** *The support of the equilibrium strategy contains an atom at the point  $t = T$ , i.e., the equilibrium probability  $p$  of request arrivals at the instant  $T$  is strictly positive. In addition, there exists a time interval  $(t_e, T)$  without receiving requests in the system.*

*Proof.* Really, the probability of request arrivals in the system at the instant  $t = T$  has a positive value. Assume that it is not true, i.e., no one sends his requests to the system at this time. Then any player deviating from the equilibrium and sending his request to the system at the instant  $T$  receives servicing with probability 1. Consequently, there is a positive probability to arrive at the instant  $T$  in the equilibrium.

Assume that  $X_p$  be a random variable that represents the number of requests received at the instant  $T$ . The probability that a request arriving at the instant  $T$  receives service is

$$E \left[ \frac{1}{X_p + 1} \right] = P(X_p = 0) + E \left[ \frac{1}{X_p + 1} | X_p > 0 \right].$$

Consider the instant  $t$  such that there are no arrivals at the interval  $(t, T)$ . The probability that a request arriving at the instant  $t$  receives service is

$$P(X_p = 0) + P(X_p > 0)(1 - e^{-\mu(T-t)}) = 1 - P(X_p > 0)e^{-\mu(T-t)},$$

it obviously decreases by  $t$ .

Consider the instant  $t = T-$ . The probability that a request arriving at the instant  $T-$  receives service is

$$\lim_{t \rightarrow T-} P(X_p = 0) + P(X_p > 0)(1 - e^{-\mu(T-t)}) = P(X_p = 0),$$

which is less than if the request had arrived at instant  $T$ .

Thus, the player's payoff decreases up to the moment  $T-$ , and remain less than at the moment  $T$ , provided that no one sent requests to the system during the period  $(t, T)$ . This explains the existence of the time interval  $[t_e, T)$  without requests coming before the instant  $T$ .  $\square$

Suppose we know the equilibrium probability  $p$  of a request arrival at the instant  $T$ , where  $0 < p \leq 1$ . We show that the player's payoff is a decreasing function on the interval  $(t_e, T)$ . Hence, there exists an instant  $t_e$  (perhaps, negative) when the payoffs at the instants  $t_e$  and  $T$  coincide. It yields

$$E \left[ \frac{1}{X_p + 1} \right] = 1 - P(X_p > 0)e^{-\mu(T-t)}. \quad (2.2.1)$$



**Lemma 2.2.** *In the queueing game with two players the equation (2.2.1) defines  $t_e$  that is independent of  $p$ . In game with  $N + 1 \geq 3$  players the equation (2.2.1) defines a function  $t_e(p)$  that strictly increases in  $p$ .*

*Proof.* Consider the game with two players, so  $N = 1$ . The equation (2.2.1) is

$$(1 - p) \cdot 1 + p \frac{1}{2} = 1 - p \left(1 - e^{-\mu(T-t_e)}\right).$$

It yields

$$t_e = T - \frac{1}{\mu} \log 2.$$

We see that  $t_e$  doesn't depend on  $p$ .

Let  $N = n \geq 2$ . The equation (2.2.1) can be presented as

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 - (1 - (1-p)^n) e^{-\mu(T-t_e)}. \quad (2.2.2)$$

Rewrite (2.2.2) as

$$e^{-\mu(T-t_e)} = \frac{1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{1 - (1-p)^n}. \quad (2.2.3)$$

Differentiating (2.2.3) in  $p$  we obtain

$$\mu e^{-\mu(T-t_e)} \frac{dt_e}{dp} = \frac{(1 - (1-p)^n)^2 - n^2 p^2 (1-p)^{n-1}}{(n+1)(1 - (1-p)^n)^2 p^2}. \quad (2.2.4)$$

From the Cauchy inequality

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} (1-p)^i}{n} \geq \left( \prod_{i=0}^n (1-p)^i \right)^{\frac{1}{n}} = (1-p)^{\frac{n-1}{2}}$$

we obtain

$$(1 - (1-p)^n)^2 = p^2 \left( \sum_{i=0}^{n-1} (1-p)^i \right)^2 \geq n^2 p^2 (1-p)^{n-1}.$$

Consequently, the right side of (2.2.4) is non-negative (in fact it is positive for all  $p \in [0, 1)$ ). It yields that  $dt_e/dp > 0$ ,  $\forall p \in [0, 1)$ . It means that function  $t_e(p)$  strictly increases in  $p$ .  $\square$

As follows from the lemma 2.2, the higher the probability  $p$  of requests entering the system at the instant  $T$ , the larger the interval  $[0, t_e]$  where players send their requests to the system with a positive density. Also, note that for a given  $p$ , the value of  $t_e$  may even be less than 0. In this case the probability of  $p$  should be increased. Even if  $t_e(0) \leq 0$ , then the equilibrium strategy is pure, i.e. sending requests to the system at instant  $t = T$  with probability 1. Further, we assume that  $t_e(0) > 0$ .

**Remark 2.1.** *The expected value  $E \left[ \frac{1}{X_p+1} \right]$  decreases in  $p$  (see Corollary 1.1).*

The Remark 2.1 means that with increasing the arrival probability at the instant  $T$ , the probability of loss at this moment increases. It can be explained by the fact that if more requests arrive in the system at the instant  $T$  with increasing of  $p$ , then more requests are lost because only one of them is served.

**Lemma 2.3.** *If  $t_e > 0$ , then at the interval  $[0, t_e]$  there exists a strictly positive density function  $f(t) > 0$  of the arrival times in the system. This interval has no atoms or discontinuities.*

*Proof.* Consider the interval  $[0, t_e]$  where the players enter to the system. We show that in equilibrium, the distribution density function is strictly positive over the entire interval. Let's assume the opposite, i.e. on the interval  $[0, t_e]$  there is some interval  $(t_1, t_2)$  where none of the players arrives in the system. Then, if one of the players decides to come to the system at the instant  $t_1$ , he will receive service with probability

$$1 - e^{-\mu(t_2-t_1)} + \int_{t_2}^T (1 - e^{-\mu(\theta-t_1)}) dP(\theta),$$

where  $dP(\theta)$  is a probability that another request arrives to the system at the instant  $\theta$ . But if this player arrives in the system at the instant  $t_2$ , he will receive service with probability

$$\int_{t_2}^T (1 - e^{-\mu(\theta-t_2)}) dP(\theta),$$

which is less than probability to receive service at the instant  $t_1$ . This means that the strategy support  $[0, t_e]$  does not contain such discontinuities.

Now, show that the strategy support  $[0, t_e]$  has no atoms. Suppose such an atom exists at a point  $t \in [0, t_e]$  and the probability that a request arrives at the instant  $t$  is  $p > 0$ . Consider the instant  $t+$ , which is infinitesimally close on the right to the instant  $t$ . Let's take a certain player who is trying to send his request to the system at the instant  $t$ . Let the random variable  $X_p$  represent the number of his opponents whose requests entered the system at the instant  $t$ . Due to the strict positivity of the probability  $p$ , this random variable must also be positive. The probability that this player receives service at the instant  $t$  is

$$E \frac{1}{X_p + 1} \int_{t+}^T (1 - e^{-\mu(\theta-t+)}) dP(\theta),$$

which is smaller than such probability at the instant  $t+$ :

$$\int_{t+}^T (1 - e^{-\mu(\theta-t+)}) dP(\theta).$$

In other words, if the distribution of request arrivals before the instant  $t_e$  contains an atom at some point, it is better to send the request to the system immediately after this instant. Unlike the instant  $T$  (when the system is closed for arrivals and the player just needs to get a service opportunity), the service of a request arriving at the instant  $t$  may be interrupted by another request, and the chance of not being selected reduces the likelihood of service.

□

### § 2.3 Deterministic number of players

Assume that the number of players sending their requests to the system is equal to  $N + 1$ . Each of them has  $N$  opponents that can prevent them from receiving service. For the sake of certainty, let's consider player  $N + 1$ . Let's assume that at time  $t = T$  each of his  $N$  opponents sends his request to the system with probability  $p$ . Denote  $X_p$  the number of players who sent their requests to the server at time  $T$ . Then, for player  $N + 1$ , the probability of receiving service in the system at time  $T$  is defined as

$$C(T) = E \left[ \frac{1}{X_p + 1} \right].$$

Note that if the number of players is deterministic, the random variable  $X_p$  obeys the binomial distribution  $Bin(N, p)$ . So, the payoff function of player  $N + 1$  at the instant  $T$  is

$$C(T) = \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} \frac{1}{i+1} = \frac{1 - (1-p)^{N+1}}{p(N+1)}. \quad (2.3.1)$$

The probability that player  $N + 1$  receives a service at the instant  $t_e < T$  in case there is no customers arriving at the interval  $(t_e, T)$  is defined by

$$C(t_e) = 1 - (1 - (1-p)^N) e^{-\mu(T-t_e)}. \quad (2.3.2)$$

So, in the equilibrium  $p$  and  $t_e$  must satisfy the equation

$$\frac{1 - (1-p)^{N+1}}{p(N+1)} = 1 - (1 - (1-p)^N) e^{-\mu(T-t_e)},$$

implying

$$t_e = T - \frac{1}{\mu} \log \frac{p(N+1)(1 - (1-p)^N)}{p(N+1) - 1 + (1-p)^{N+1}}. \quad (2.3.3)$$

Our objective now is to find the equilibrium density function  $f(t)$  for the arrival time in the system on the interval  $[0, t_e]$ . Define a Markov process with system states  $(i)$  at each instant  $t \in [0, t_e]$ , where  $i \in \{0, \dots, N\}$  indicates the number of players who have sent their requests to the system before the time  $t$ . This process is inhomogeneous in time, since the request rate in the system decreases in jumps as soon as a new request is received from a successive player. The arrival rate at instant  $t$  depends on the chosen strategy and the number  $k$  of customers who have already entered the system up to instant  $t$ . These rates has the following form  $\lambda_k(t) = (N - k) \frac{f(t)}{1 - F(t)}$ . Now we can write down the corresponding Kolmogorov backward equations for state probabilities  $p_i(t)$

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= -\lambda_0(t)p_0(t), \\ p'_i(t) &= -\lambda_i(t)p_i(t) + \lambda_{i-1}(t)p_{i-1}(t) \text{ for } i = 1, \dots, N-1, \\ p'_N(t) &= \lambda_{N-1}(t)p_{N-1}(t), \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

which can be resolved to

$$p_i(t) = \binom{N}{i} F(t)^i (1 - F(t))^{N-i} \text{ for } i = 0, \dots, N. \quad (2.3.5)$$

The initial state probabilities are  $p_0(0) = 1$  and  $p_i(0) = 0$  for  $i = 1, \dots, N$ .

Then the payoff function of player  $N + 1$  at the instant  $t \in [0, t_e]$  is

$$C(t) = \sum_{i=0}^{N-1} p_i(t) C_{N-i}(t) + p_N(t),$$

where  $C_j(t)$  is a probability that player  $N + 1$  arriving at the instant  $t \in [0, t_e]$  will be served, provided that  $j$  customers have not arrived into the system yet before the instant  $t$ .

For  $j = 1$  let  $\tau_1$  is an instant of the opponent's request arriving to the system. Then

$$\begin{aligned} C_1(t) &= E(1 - e^{-\mu(\tau_1-t)} | t \leq \tau_1 \leq t_e) + P(\tau_1 = T)(1 - e^{-\mu(T-t)}) = \\ &= \frac{1}{1 - F(t)} \left( \int_t^{t_e} dF(\tau)(1 - e^{-\mu(\tau-t)}) + p(1 - e^{-\mu(T-t)}) \right). \end{aligned}$$

For  $j = 2$  let  $\tau_1, \tau_2$  are the instants of the two arriving requests to the system. We obtain

$$\begin{aligned} C_2(t) &= 2E(1 - e^{-\mu(\tau_1-t)} | t \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq t_e) + 2E(1 - e^{-\mu(\tau_1-t)} | t \leq \tau_1 \leq t_e, \tau_2 = T) + \\ &\quad + P(\tau_1 = T, \tau_2 = T)(1 - e^{-\mu(T-t)}) = \\ &= \frac{1}{(1 - F(t))^2} \left( 2 \int_t^{t_e} dF(t_1) \int_{t_1}^{t_e} dF(t_2)(1 - e^{-\mu(t_1-t)}) + 2p \int_t^{t_e} dF(t_1)(1 - e^{-\mu(t_1-t)}) + \right. \\ &\quad \left. + p^2(1 - e^{-\mu(T-t)}) \right) = \\ &= \frac{1}{(1 - F(t))^2} \left( 2 \int_t^{t_e} dF(t_1)(1 - F(t_1))(1 - e^{-\mu(t_1-t)}) + p^2(1 - e^{-\mu(T-t)}) \right). \end{aligned}$$

Arguing the same way we obtain for  $k = 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} C_k(t) &= kE(1 - e^{-\mu(\tau_1-t)} | t \leq \tau_1 \leq t_e, \tau_1 \leq \tau_j, j = 2, \dots, N) + \\ &\quad P(\tau_j = T, j = 1, \dots, N)(1 - e^{-\mu(T-t)}) = \\ &\quad \frac{1}{(1 - F(t))^k} \left( k \int_t^{t_e} dF(t_1)(1 - F(t_1))^{k-1}(1 - e^{-\mu(t_1-t)}) + p^k(1 - e^{-\mu(T-t)}) \right). \end{aligned}$$

Substituting  $C_j(t)$  into  $C(t)$  we obtain

$$C(t) = F(t)^N + \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N}{i} F(t)^i p^{N-i} (1 - e^{-\mu(T-t)}) + \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N}{i} F(t)^i (N-i) \int_t^{t_e} (1 - e^{-\mu(s-t)}) (1 - F(s))^{N-i-1} dF(s).$$

The first sum equals to

$$(F(t) + p)^N (1 - e^{-\mu(T-t)}) - F(t)^N (1 - e^{-\mu(T-t)}).$$

Simplifying the second sum

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N}{i} F(t)^i (N-i) \int_t^{t_e} (1 - e^{-\mu(s-t)}) (1 - F(s))^{N-i-1} dF(s) = \\ & N \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N-1}{i} F(t)^i \int_t^{t_e} (1 - e^{-\mu(s-t)}) (1 - F(s))^{N-i-1} dF(s) = \\ & N \int_t^{t_e} (1 - e^{-\mu(s-t)}) (F(t) + 1 - F(s))^{N-1} dF(s). \end{aligned}$$

Hence, we obtain

$$\begin{aligned} C(t) &= (F(t) + p)^N (1 - e^{-\mu(T-t)}) + F(t)^N e^{-\mu(T-t)} + \\ & N \int_t^{t_e} (1 - e^{-\mu(s-t)}) (F(t) + 1 - F(s))^{N-1} dF(s). \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

The equilibrium payoff function must be constant on the interval  $[0, t_e]$ , so the distribution  $F(t)$  must satisfy the equation  $C(t) = C(t_e)$  for  $t \in [0, t_e]$ , that is

$$\begin{aligned} & (F(t) + p)^N (1 - e^{-\mu(T-t)}) + \\ & N \int_t^{t_e} (1 - e^{-\mu(s-t)}) (F(t) + 1 - F(s))^{N-1} dF(s) + F(t)^N e^{-\mu(T-t)} = \\ & 1 - (1 - (1 - p)^N) e^{-\mu(T-t_e)}. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

The probability of arrival at the instant  $t = T$  can be found from the normalization condition

$$\int_0^{t_e} dF(t) + p = 1. \quad (2.3.8)$$

So, we have established the following:

**Theorem 2.1.** *The symmetric Nash equilibrium in the  $N+1$ -person queueing game with preemptive access is described by the distribution function  $F(t)$  on the interval  $[0, T]$ , which has the following properties.*

1. *There is a non-zero probability  $p$  of a request entering the system at the instant  $T$ .*
2. *At the interval  $[t_e, T)$ , where  $t_e$  is determined by (2.3.3), the players do not enter the service system.*
3. *Let the solution of equation (2.3.3) be negative for  $p = 1$ , then in equilibrium all players send their requests to the system at instant  $T$ . Otherwise,  $p < 1$ , and  $t_e$  is greater than 0; in addition, the PDF  $f(t)$  on the support  $[0, t_e]$  is determined from equations (2.3.7).*
4. *The probability  $p$  of a request entering the system at the instant  $T$  is determined from equation (2.3.8).*
5. *In equilibrium, the probability that a player receives service is equal to  $C(T) = \frac{1-(1-p)^{N+1}}{p(N+1)}$ .*

**Lemma 2.4.** *The distribution function  $F(t)$  representing the solution of (2.3.7) with the boundary condition  $F(t_e) = 1 - p$ , where  $t_e$  is defined by (2.3.3), increases in  $p$  at any point of the interval  $[0, T]$ .*

*Proof.* Consider two given probabilities  $0 < p < q \leq 1$  of request arrival at the instant  $T$  that define the initial conditions for constructing the two distribution functions  $F_p(t)$  and  $F_q(t)$  as the solutions of (2.3.7). The corresponding probabilities of service  $C_p(t)$  and  $C_q(t)$  are constant on the whole distribution support. By Remark 2.1 the function  $C(\cdot)$  decreases by the probability to arrive at the instant  $T$ . Then the probability of loss must be smaller for  $p$  than for  $q$  on the whole distribution support.

By Lemma 2.2, we have  $t_q = t(q) > t_p = t(p)$  for the corresponding end points of the intervals where the requests arrive in the system. That is, the function  $F_q(t)$  continues to increase to the value  $1 - q$  at the time when  $F_p(t)$  becomes the constant  $1 - p > 1 - q$ . For  $t \in [t_p, T]$  the lemma is true, since in this case  $F_p(t) = 1 - p > 1 - q \geq F_q(t)$ .

Assume there exists a certain time  $s < t_p$  such that  $F_p(t) < F_q(t)$  for  $t < s$  and  $F_p(s) = F_q(s)$ . Then  $f_p(s) > f_q(s)$ , as both distribution functions do not decrease

in  $t$ , and at the point  $s$  the function  $F_p(t)$  must cross  $F_q(t)$  upwards. Hence, the slope of  $F_p(t)$  exceeds that of  $F_q(t)$  and therefore  $\frac{f_p(s)}{1-F_p(s)} > \frac{f_q(s)}{1-F_q(s)}$ . This means that the request rate at the time  $s$  is higher for the probability  $p$  than for  $q$ , while the service rates are the same in both cases. Then the probability of loss at the time  $s$  must be greater for  $p$  than for  $q$ , which obviously contradicts the fact that the probability of loss is smaller for  $p$  than for  $q$  on the whole distribution support.  $\square$

**Theorem 2.2.** *The symmetric equilibrium distribution  $F$  of the arrival times that is defined by Theorem 2.1 actually exists and is unique.*

*Proof.* The uniqueness of the equilibrium follows from Lemma 2.4. The equilibrium condition (2.3.8) represents an equation whose left-hand side increases monotonically in  $p$ . For  $p \approx 0$ , the left-hand side equals the probability of request arrival on the interval  $[0, t_e]$ , which does not exceed 1. For  $p = 1$ , the left-hand side is not smaller than 1. Therefore, there exists the unique solution  $p$  that is associated with the unique value  $t_e$  and density function  $f(t)$  on  $[0, t_e]$ .  $\square$

## § 2.4 Random number of players

Now, assume that the number of opponents for each player  $N$  is unknown and represents a random variable obeying the Poisson distribution with parameter  $\lambda$ . At the instant  $T$ , each of the opponents sends his request to the system with probability  $p$ . Denote by  $X_p$  the random number of the players whose requests have arrived in the system at the instant  $T$ . Note that, for each value of the random variable  $N$ , the random variable  $X_p$  has the binomial distribution  $Bin(N, p)$ . Then the probability that a player receives the service at the instant  $T$  is given by

$$C(T) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} C^{(N)}(T),$$

where  $C^{(N)}(T)$  is the corresponding probability for the deterministic number of opponents  $N$ , defined by (2.3.1). Simplifying we obtain

$$C(T) = \frac{1 - e^{-\lambda p}}{\lambda p}. \quad (2.4.1)$$



Similarly,

$$C(t_e) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} C^{(N)}(t_e),$$

where  $C^{(N)}(t_e)$  is the corresponding probability for the deterministic number of opponents  $N$ , defined by (2.3.2), yields

$$C(t_e) = 1 - (1 - e^{-\lambda p}) e^{-\mu(T-t_e)}. \quad (2.4.2)$$

Consequently, in the equilibrium  $p$  and  $t_e$  must satisfy the equation

$$\frac{1 - e^{-\lambda p}}{\lambda p} = 1 - (1 - e^{-\lambda p}) e^{-\mu(T-t_e)},$$

implying

$$t_e = T - \frac{1}{\mu} \log \frac{\lambda p (1 - e^{\lambda p})}{\lambda p - 1 + e^{-\lambda p}}. \quad (2.4.3)$$

**Lemma 2.5.** *In game where a number of opponents for each players is a random variable obeying the Poisson distribution with parameter  $\lambda$ , the equation (2.4.3) defines a function  $t_e(p)$  that strictly increases in  $p$ .*

*Proof.* Differentiating (2.4.3) we obtain

$$e^{-\mu(T-t_e)} \frac{dt_e}{dp} = \lambda \frac{1 - e^{\lambda p} - \lambda p e^{-\lambda p}}{(1 - e^{-\lambda p})^2}.$$

The expression on the right side of the equality

$$\lambda e^{-\lambda p} (e^{\lambda p} - 1 - \lambda p) = \lambda e^{-\lambda p} \left( 1 + \lambda p + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(\lambda p)^i}{i!} - 1 - \lambda p \right)$$

is strictly positive if  $p \in (0, 1]$ . It yields that  $\frac{dt_e}{dp} > 0$  if  $p \in (0, 1]$  and function  $t_e(p)$  strictly increases in  $p$ .  $\square$

The probability of being served at the instant  $t \in [0, t_e]$  is given by

$$C(t) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} C^{(N)}(t),$$

where  $C^{(N)}(t)$  is the corresponding probability for the deterministic number of opponents  $N$ , defined by (2.3.6). Calculating sum we obtain

$$C(t) = e^{-\lambda(1-p-F(t))} (1 - e^{\mu(T-t)}) + \lambda \int_t^{t_e} e^{-\lambda(F(s)-F(t))} (1 - e^{-\mu(s-t)}) dF(s) + e^{-\lambda(1-F(t))} e^{-\mu(T-t)}. \quad (2.4.4)$$

As in case of deterministic  $N$  the equilibrium payoff must be constant on the interval  $[0, t_e]$ , so the distribution  $F(t)$  must satisfy the equation  $C(t) = C(t_e)$  for  $t \in [0, t_e]$ , that is

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda(1-p-F(t))}(1 - e^{\mu(T-t)}) + \\ & \lambda \int_t^{t_e} e^{-\lambda(F(s)-F(t))}(1 - e^{-\mu(s-t)})dF(s) + e^{-\lambda(1-F(t))}e^{-\mu(T-t)} = \\ & 1 - (1 - e^{-\lambda p}) e^{-\mu(T-t_e)}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Also the probability of arrival at the instant  $t = T$  can be found from the normalization condition

$$\int_0^{t_e} dF(t) + p = 1. \quad (2.4.6)$$

So, as in case of deterministic  $N$  we have established the following for the random  $N$ :

**Theorem 2.3.** *Any symmetric Nash equilibrium distribution of the arrival times in the preemptive queueing system with Poisson number of players described by the distribution function  $F(t)$  on the interval  $[0, T]$  has the following properties.*

1. *There exists a non-zero probability  $p > 0$  of request entering the system at the instant  $T$ .*
2. *At the interval  $(t_e, T)$ , where  $t_e$  is determined by (2.4.3), the players do not enter the service system.*
3. *Let the solution of equation (2.4.3) be negative for  $p = 1$ , then in equilibrium all players send their requests to the system at instant  $T$ . Otherwise,  $p < 1$ , and  $t_e$  is greater than 0; in addition, the PDF  $f(t)$  on the support  $[0, t_e]$  is determined from equations (2.4.5).*
4. *The probability  $p$  of a request entering the system at the instant  $T$  is determined from equation (2.4.6).*
5. *In equilibrium, the probability that a player receives service is equal to  $C(T) = \frac{1-e^{-\lambda p}}{\lambda p}$ .*

Also the following lemma holds and its proof uses Lemma 2.5 and coincides with the proof of Lemma 2.4 for deterministic  $N$ .

**Lemma 2.6.** *The distribution function  $F(t)$  representing the solution of (2.4.5) with the boundary condition  $F(t_e) = 1 - p$ , where  $t_e$  is defined by (2.4.3), increases in  $p$  at any point of the interval  $[0, T]$ .*

It similarly yields the following theorem for the random  $N$ .

**Theorem 2.4.** *The symmetric equilibrium distribution  $F$  of the arrival times that is defined by Theorem 2.3 actually exists and is unique.*

## § 2.5 Computing the equilibrium

In this section, we describe in detail the numerical solution of the above obtained equations. Let us fix  $p$  and  $T$ . We find  $t_e$  immediately from (2.3.3) in case of the deterministic number of players and from (2.4.3) for the random number of players. We divide the interval  $[0, t_e]$  into  $k$  equal segments. Then we find an approximate solution in the nodes of the grid  $K = \{t_1 = 0, t_2 = \Delta, \dots, t_k = t_{k-1} + \Delta = t_e - \Delta\}$ , where  $\Delta = t_e/k$ . We represent the values of the unknown function  $f(t)$  at the nodes of the grid as the arguments of our problem:

$$\{x_1 = f(t_1) = f(0), x_2 = f(t_2), \dots, x_k = f(t_k)\}.$$

Then the derived conditions for the equilibrium can be represented as the difference equations. More precisely, for deterministic number of players the condition (2.3.7) becomes:

$$\begin{aligned} & (F_i + p)^N (1 - e^{-\mu(T-t_i)}) + \\ & N \sum_{j=i}^k (1 - e^{-\mu(t_j-t_i)}) (F_i + 1 - F_j)^{N-1} x_j \Delta + F_i^N e^{-\mu(T-t_i)} = \\ & 1 - (1 - (1 - p)^N) e^{-\mu(T-t_e)}, \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

where  $F_i = 1 - p - \Delta \sum_{j=i}^k x_j$  approximates an exact value  $F(t_i) = \int_0^{t_i} f(t) dt = 1 - p - \int_{t_i}^{t_e} f(t) dt$ . Note that we approximate integrals by left Riemann sums.

For random number of players the similar condition (2.4.5) takes the form:

$$\begin{aligned}
& e^{-\lambda(1-p-F_i)}(1 - e^{\mu(T-t_i)}) + \\
& \lambda \sum_{j=i}^k e^{-\lambda(F_j-F_i)}(1 - e^{-\mu(t_j-t_i)})x_j\Delta + e^{-\lambda(1-F_i)}e^{-\mu(T-t_i)} = \\
& 1 - (1 - e^{-\lambda p}) e^{-\mu(T-t_e)}, \quad i = 1, \dots, k,
\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

where similarly  $F_i = 1 - p - \Delta \sum_{j=i}^k x_j$ .

The normalization condition takes the form:

$$\Delta \sum_{i=1}^k x_i + p - 1 = 0, \tag{2.5.3}$$

where the left part increases on  $p$  as the CDF increases in  $p$  at any point of the interval  $[0, T]$ .

Now we find a solution as follows. We iterate over the values of  $p$  on the interval  $[0, 1]$ . For each  $p$  we calculate its corresponding  $t_e$  belonging to interval  $[0, T]$ . For each given  $p$  and  $t_e$ , we solve the system of the difference Equations (2.5.1) for the model with deterministic number of players or (2.5.2) for the random one. We are looking for a value of  $p$ , in such a way that the normalization condition (2.5.3) is satisfied. More precisely, the solution  $(p, t_e, x)$  is found with Algorithm 1.

## § 2.6 Numerical examples

Let us find the equilibrium in the queueing game for deterministic and random number of players and compare the results of simulations. First two examples are for deterministic number of players.

**Example 1.** *Let  $T = 12$  (e.g. hours or months, dependently on problem context),  $\mu = 0.1$ . Here the average service time is  $1/\mu = 10$  which is large compared to the entire working time period  $T$ . The computations give the optimal values in the equilibrium for different  $N$  which are given in Table 2.1. The PDFs for the optimal arrival time at the interval  $[0, t_e]$  are presented at Fig. 2.1.*

**Example 2.** *Let  $T = 12$ ,  $\mu = 1$ . Here the average time to serve request is small comparing with  $T$ . The values of parameters for optimal strategies for different  $N$*

---

**Algorithm 1** Finding the solution  $(p, t_e, x)$ .

---

$p_l \leftarrow 0, p_r \leftarrow 1$

$\epsilon \leftarrow$  small positive value near 0 (given precision)

**do**

$p \leftarrow \frac{p_l + p_r}{2}$

Calculate  $t_e$  from (2.3.3) for deterministic player number or (2.4.3) for random player number.

$\Delta \leftarrow \frac{t_e}{k}$

**for**  $i = k$  to 1 **do**

Find  $x_i$  satisfying (2.5.1) for deterministic player number or (2.5.2) for random player number.

**end for**

$continue \leftarrow true$

**if** left part of (2.5.3) less than  $-\epsilon$  **then**

$p_l \leftarrow p$

**else if** left part of (2.5.3) more than  $\epsilon$  **then**

$p_r \leftarrow p$

**else**

$(p, t_e, x)$  is a solution

$continue \leftarrow false$

**end if**

**while**  $continue$

---

are presented in Table 2.1. The PDFs for the optimal arrival time at the interval  $[0, t_e]$  are presented at Fig. 2.2.

Table 2.1: Optimal  $p$ ,  $t_e$  and payoff for  $T = 12$  for deterministic numbers of players

$N$	$\mu = 0.1$			$\mu = 1$		
	$p$	$t_e$	Payoff $C(t)$	$p$	$t_e$	Payoff $C(t)$
2	0.69318	6.69662	0.46698	0.15074	11.33367	0.85683
5	0.59352	8.83290	0.27954	0.13923	11.40124	0.71017
10	0.53734	10.15144	0.16915	0.12760	11.48802	0.55373
20	0.50081	11.00088	0.09508	0.11402	11.60724	0.38477
100	0.47181	11.78791	0.02099	0.09365	11.88832	0.10572

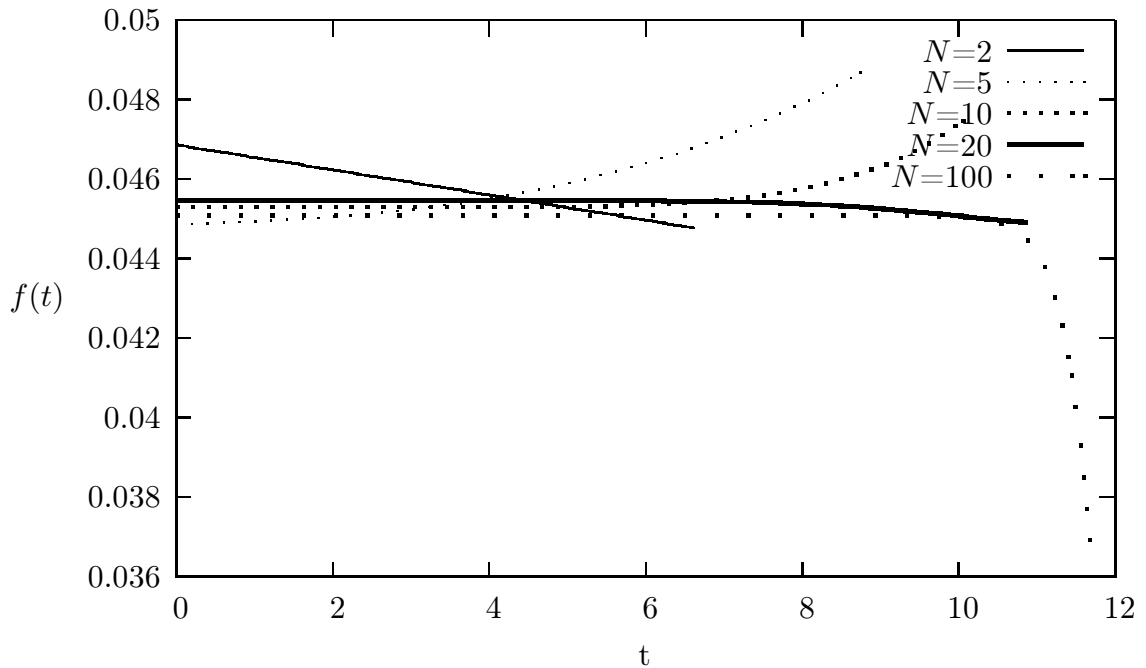


Figure 2.1: Equilibrium PDF  $f(t)$  for  $T = 12$ ,  $\mu = 0.1$  for deterministic number of players

In the next two examples we assume that number of players is random variable obeying the Poisson distribution with parameter  $\lambda$ .

**Example 3.** Let  $T = 12$ ,  $\mu = 0.1$ . The computations give the optimal values in the equilibrium for different  $\lambda$  which are given in Table 2.2. The PDFs for the optimal arrival time at the interval  $[0, t_e]$  are presented at Fig. 2.3.

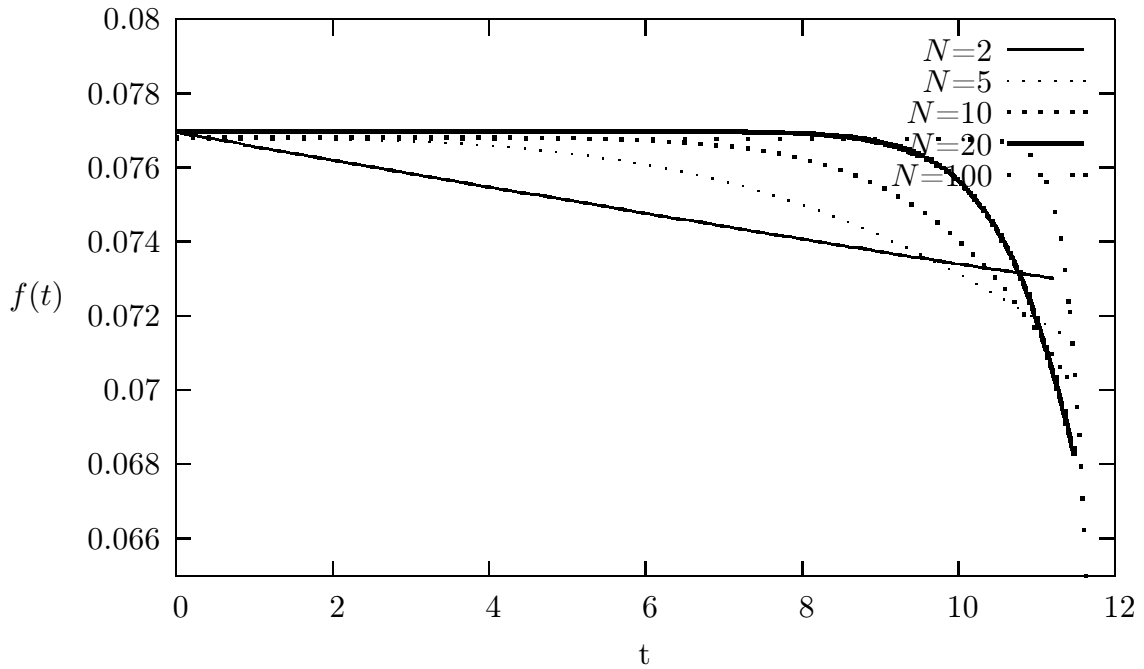


Figure 2.2: Equilibrium PDF  $f(t)$  for  $T = 12$ ,  $\mu = 1$  for deterministic number of players

**Example 4.** Let  $T = 12$ ,  $\mu = 1$ . The numerical values for the parameters of optimal strategies for different  $\lambda$  are given in Table 2.2. The PDFs for the optimal arrival time at the interval  $[0, t_e]$  are presented at Fig. 2.4.

Table 2.2: Optimal  $p$ ,  $t_e$  and payoff for  $T = 12$  for random numbers of players

$\lambda$	$\mu = 0.1$			$\mu = 1$		
	$p$	$t_e$	Payoff $C(t)$	$p$	$t_e$	Payoff $C(t)$
2	0.69786	7.10122	0.53903	0.14784	11.35489	0.86572
5	0.61389	8.75541	0.31066	0.13831	11.41513	0.72185
10	0.54939	10.04117	0.18127	0.12770	11.49521	0.56470
20	0.50490	10.95763	0.09903	0.11464	11.60870	0.39210
100	0.47194	11.78583	0.02119	0.09378	11.88734	0.10662

Note that in most numerical experiments, the density function  $f(t)$  in the equilibrium decreases on the support  $[0, t_e]$  (Examples 2, 3, 4). However, in the case when the number of players is deterministic and the time horizon  $T$  is comparable to the average service time (Example 1), the optimal strategies behave unusually. For small values  $N$ , the density function  $f(t)$  increases on the support of distribution, but with an increase in the number of players  $N$ , the density function becomes a decreasing function.

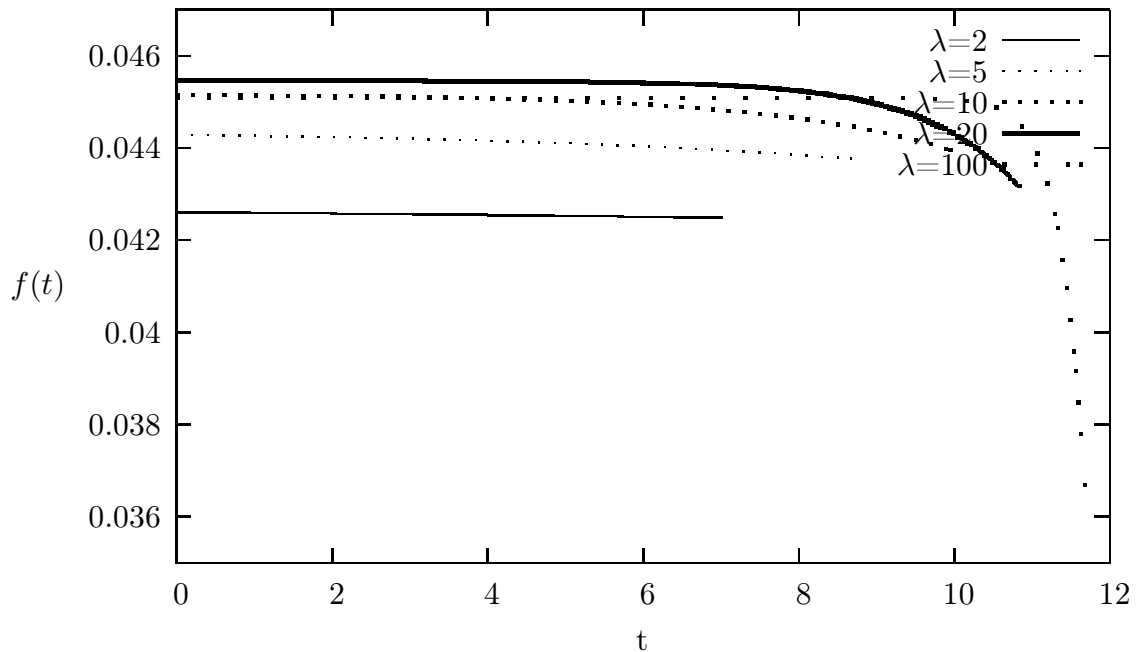


Figure 2.3: Equilibrium PDF  $f(t)$  for  $T = 12$ ,  $\mu = 0.1$  for random numbers of players

## § 2.7 The price of anarchy

The price of anarchy (PoA) is a quite powerful tool to characterize the efficiency loss of competition on a service system [168, 169]. First, consider the case of deterministic  $N$ . The utility of a customer was defined to be his probability of obtaining service given the arrival profile of all customers (including himself). Hence, the overall social utility is the expected number of customers obtaining service completely. It's obvious that in the social optimum some central planner observes service completions and immediately sends a new customer. Then the socially optimal utility is  $E(\min\{\text{number of requests being served in } [0, T) + \text{one request arriving in } T, N + 1\})$ , i.e.  $\mu T + 1$  for large  $N$  [168, 169]. Then the socially optimal utility equals to  $\min\{\mu T + 1, N + 1\}$ . In the equilibrium the social utility is  $(N + 1)C(t)$ , where  $C(t)$  is the equilibrium probability to complete service for the customer.

The price of anarchy is defined as the ratio between the optimal overall social utility and that in the equilibrium. For the cases in the Examples 1 and 2 we found the socially optimal and equilibrium payoffs and the values of the price of anarchy (see Table 2.3).

Now we assume that the number of players  $N$  is random variable obeying the Poisson distribution with parameter  $\lambda$ . Then the socially optimal utility is  $\min\{\mu T +$



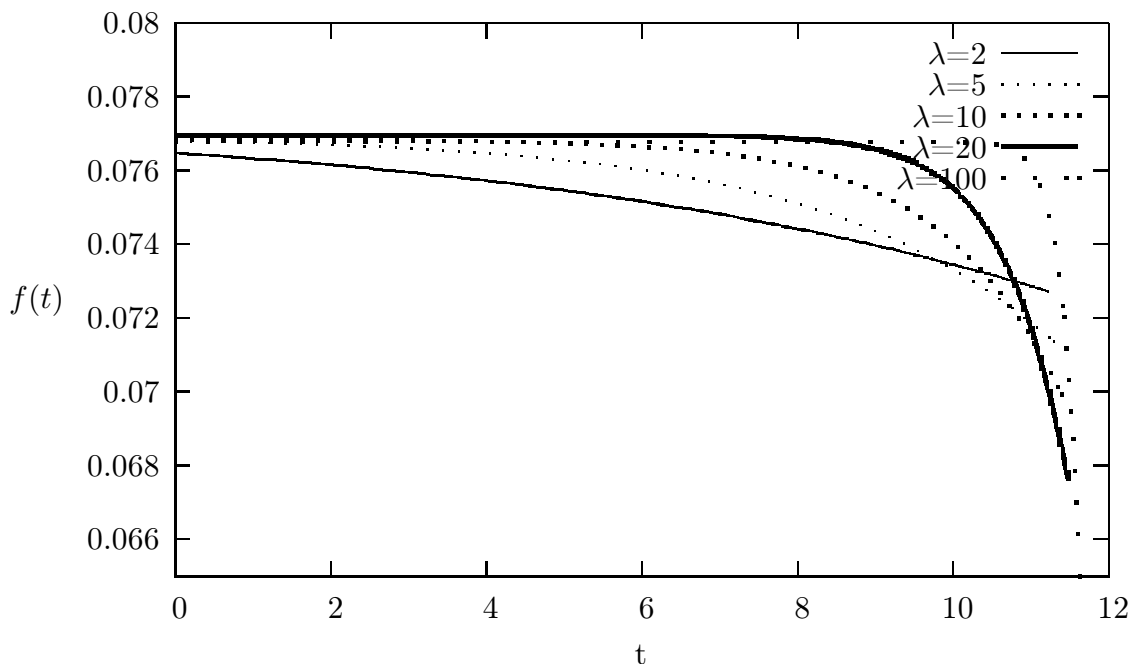


Figure 2.4: Equilibrium PDF  $f(t)$  for  $T = 12$ ,  $\mu = 1$  for random numbers of players

$1, \lambda + 1\}$ . In the equilibrium the social utility is  $(\lambda + 1)C(t)$ , where  $C(t)$  is the equilibrium probability to complete service for the customer.

Then we find the price of anarchy as a ratio of a socially optimal and equilibrium social utilities. For the cases in the Examples 3 and 4 we found the socially optimal and equilibrium utilities and the values of the price of anarchy (see Table 2.4).

One can see that with growing  $n$  or  $\lambda$  the price of anarchy first decreases and from some  $N$  or  $\lambda$  depending on the average service time starts to increase. It is connected with the growing number of competitive users which interfere with each other preventing service completion. The existence of such a minimum in price of anarchy is not trivial and can be used to recommend what the number of visitors should be in such a service system. In the Tables 2.3 and 2.4, the number of visitors with the minimum value of the price of anarchy is highlighted in bold. For a deterministic number of players  $N$  it is 92 (for  $\mu = 0.1$ ) and 93 (for  $\mu = 1$ ). For a random number of players the intensity  $\lambda$  with minimum value of the price of anarchy is 75 (for  $\mu = 0.1$ ) and 91 (for  $\mu = 1$ ).

## § 2.8 Results

This chapter has studied a game-theoretic model for a single-server queueing system with strategic users in which customers (players) enter the system with preemptive access on a time interval  $[0, T]$ . We considered cases when the number of players is deterministic and is a random variable with a known distribution law. As it has been demonstrated, there exists a unique symmetric equilibrium with the following features. The non-zero density function of the arrival times is defined at the time interval  $[0, t_e]$ . On a time interval  $[t_e, T]$  there are no arrivals. At the instant  $T$  the players send their requests to the system with a certain positive probability  $p$ . Some numerical experiments have been performed to compare the equilibria under different values of the model parameters. Also we have offered a comparison between competitive and cooperative behavior in the service system based on the concept of price of anarchy for the deterministic and random number of players.

Table 2.3: Socially optimal and equilibrium utilities and PoA for  $T = 12$  for deterministic numbers of players

$N$	Socially optimal utility	Equilibrium utility	Price of anarchy
$\mu = 0.1$			
2	2.2	1.40095	1.57036
5	2.2	1.67725	1.31167
10	2.2	1.86065	1.18238
20	2.2	1.99677	1.10178
<b>92</b>	2.2	2.11994	1.03777
100	2.2	2.11951	1.03798
150	2.2	2.10152	1.04686
200	2.2	2.06755	1.06406
250	2.2	2.02500	1.08642
300	2.2	1.97818	1.11213
1000	2.2	1.49987	1.46679
$\mu = 1$			
2	3.0	2.57050	1.16709
5	6.0	4.26100	1.40812
10	11.0	6.09105	1.80593
20	13.0	8.08026	1.60887
<b>93</b>	13.0	10.68613	1.21654
100	13.0	10.67722	1.21756
150	13.0	10.23158	1.27059
200	13.0	9.406694	1.38199
250	13.0	8.437086	1.54083
300	13.0	7.460338	1.74255
1000	13.0	2.277287	5.70855

Table 2.4: Socially optimal and equilibrium utilities and PoA for  $T = 12$  for random numbers of players

$\lambda$	Socially optimal utility	Equilibrium utility	Price of anarchy
$\mu = 0.1$			
2.0	2.2	1.61710	1.36045
5.0	2.2	1.86395	1.18029
10.0	2.2	1.99399	1.10332
20.0	2.2	2.07953	1.05793
50.0	2.2	2.13733	1.02932
<b>75.0</b>	2.2	2.14416	1.02604
100.0	2.2	2.14010	1.02799
150.0	2.2	2.11555	1.03992
200.0	2.2	2.07820	1.05861
250.0	2.2	2.03360	1.08183
300.0	2.2	1.98539	1.10809
1000.0	2.2	1.50193	1.46479
$\mu = 1$			
2.0	3.0	2.59715	1.15511
5.0	6.0	4.33111	1.38533
10.0	11.0	6.21171	1.77085
20.0	13.0	8.23416	1.57879
50.0	13.0	10.28210	1.26433
<b>91.0</b>	13.0	10.78224	1.20569
100.0	13.0	10.76862	1.20721
150.0	13.0	10.30158	1.26194
200.0	13.0	9.46474	1.37352
250.0	13.0	8.48753	1.53166
300.0	13.0	7.50503	1.73217
1000.0	13.0	2.28423	5.69119

## Chapter 3

# Arrival Time Choice in the Queueing System with Retrials

The retrial queues have been attracting increasing interest because of their importance in modeling modern wireless telecommunication systems. Many papers have been devoted to steady-state performance analysis of such queues with the most important sources mentioned here [16, 73, 115]. Firstly, we outline the main settings that describe the dynamics of a wide class of the retrial queueing systems.

There are many practical situation that can be modeled as a queueing system in which customers are allowed to have a few attempts to be served. For instance, in call centers with a callback option, as well as customers who cannot connect immediately with the operator, thus register their numbers and go back at a later time. These customers can be called *orbital* because it seems natural that registered customers are waiting for service in a so-called *orbit-queue* (*orbit*). As these customers cannot be picked up immediately when the operator becomes available, some seeking time (called *retrieval time*) is needed to access a registered customer. We note that sometimes the operator may make an *outgoing call*, not being aware of the presence of the registered customers in the orbit. A similar situation (with retrial attempts) arises in many service systems where a ticket is issued upon the arrival of a customer who will be served in a later time when the server is available.

In this chapter, we apply a game-theoretic approach to a callback queueing system with one server [39]. The queue is formed by the strategic players. The player's strategy is to choose a moment to enter the system. If the server is busy, then the user is blocked and joins a *orbit queue*. Otherwise, if the server is free, it seeks a

blocked user from the orbit during an exponential retrieval time. In this setting, we will find the optimal strategies of the players. First, we consider the case of two users, then consider in detail the case of three players.

### § 3.1 Queue system

Now we describe our model in more details in a general setting. We assume that there exists a single server that serves  $N$  customers presented in the system at the initial instant  $t = 0$ . Unlike the conventional queueing theory setting, these customers use some strategy to choose an instant to enter the server. By a symmetry, this strategy is the same for each user. This strategy is determined by a distribution function, which is the main purpose of the analysis, and it determines the instant of the attempt to enter the server. This is an important difference with the standard queueing theory setting where customers are not allowed to have their own decisions but follow the predefined rules describing the dynamics of the system. After the departure of a served customer, the server starts to seek the customer blocked in orbit (if any) to be served next. As mentioned above, this seeking time is exponential with parameter  $\gamma$  and mean  $\tau$ , and it is called retrieve time in the retrial queueing terminology [153]. If an exogenous customer finds a server busy, then they join a (virtual) orbit, and such orbital customers constitute a virtual orbit queue (see [63]), which is served in FIFO (First-In-First-Out) order. If, during a retrieval time (when the server waits for a customer from the orbit), some customer arrives then they capture server for the exponentially distributed time with parameter  $\mu$ . Recall that the arrival time is selected in according to strategy distribution. Thus, the present setting combines some features of both the classic retrial system and a gated queue, in which the input gate remains closed until all  $N$  customers leave the system. In addition, a similar situation arises in a polling system (see, for instance, [26]), in which different queues are served in an order, and server, returning to a fixed queue, as a rule finds there a few new customers to be served.

### § 3.2 Two-player game

Consider the case of two players. To find an equilibrium in this two-person game, we will use the following approach. Suppose that one of the players (for the sake of definiteness, the second player) uses, as a strategy, a random arrival time with the distribution function  $F(t)$  (having density  $f(t)$ ) of the following form:

$$F(t) = \begin{cases} p, & 0 \leq t < t_e, \\ p + \int_{t_e}^t f(x)dx, & t_e \leq t \leq T. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

That is, the second player enters the system at the initial moment  $t = 0$  with probability  $p \in (0, 1)$ , otherwise, they arrive at instant  $t \in [t_e, T]$  following distribution  $F(t)$ , where  $t_e > 0$  and  $T < \infty$  are predefined constants.

Now, we find the best response of the first player to the described strategy used by the second player. As a cost function of the first player, we will consider their average sojourn time (the average time the player spends in the system). Thus, the objective of the first player is to choose a strategy that minimizes the average sojourn time, that is the total time the player spends in the system. Due to the symmetry of the problem, in the equilibrium, the optimal strategy of the first player must coincide with the chosen strategy of their opponent. To do this, it is sufficient that the strategy of the second player is chosen in such a way that the cost function of the first player takes a constant value over the interval  $[t_e, T]$  and at the initial instant  $t = 0$  (see [141]). Then the cost of the first player will not depend on their own strategy.

Next, we find the best response of the first player to the strategy of the second player defined by the relation (3.2.1). First, we find its cost function. The average sojourn time, provided the first player enters the system at the instant  $t = 0$ , is:

$$C(0) = (1 - p)\frac{1}{\mu} + p\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2}\left(\tau + \frac{2}{\mu}\right)\right) = (1 - p)\frac{1}{\mu} + p\left(\frac{3}{2\mu} + \frac{\tau}{2}\right).$$

In this expression, we take into account that, with the probability  $1 - p$ , the second player does not arrive in the system at the instant  $t = 0$ . Then the first player will be served first, and the average sojourn time equals the average service time  $1/\mu$ . If the second player arrives at the instant  $t = 0$  (with the probability

$p$ ), then, with probability  $1/2$ , the first player can be selected for service, and their average service time equals  $1/\mu$ . However, with probability  $1/2$ , the server chooses the second player, and then the first player joins the orbit and waits until the second player ends service.

If  $0 < t < t_e$ , then the average sojourn time of a customer that arrives at instant  $t$  satisfies:

$$\begin{aligned} C(t) &= (1-p)\frac{1}{\mu} + p \left( (1 - e^{-\mu t})\frac{1}{\mu} + e^{-\mu t} \left( \frac{1}{\mu} + \tau + \frac{1}{\mu} \right) \right) \\ &= (1-p)\frac{1}{\mu} + p \left( \frac{1}{\mu} + e^{-\mu t} \left( \tau + \frac{1}{\mu} \right) \right). \end{aligned}$$

To obtain this expression, we take into account that, with the probability  $1-p$ , the second player does not arrive at instant  $t=0$ . In this case, the first player is served first, and the average (sojourn) service time equals  $1/\mu$ . If the second player arrives at  $t=0$  (with the probability  $p$ ), then with probability  $1 - \exp\{-\mu t\}$ , it will be served in the time interval  $[0, t]$ , and then the first player will be served immediately. However, with the probability  $\exp\{-\mu t\}$ , the second player is still in the server at instant  $t$ , and then the first player joins the orbit. This player will wait until the second player leaves the server, and then they occupy server after time  $\tau$ . We note that function  $C(t)$  decreases in  $t$  and then, in the limit as  $t \rightarrow 0+$ , we obtain:

$$C(0+) = (1-p)\frac{1}{\mu} + p \left( \tau + \frac{2}{\mu} \right) > C(0).$$

We require the fulfillment of the following condition on  $t_e$ :  $C(0) = C(t_e)$ , that is:

$$\frac{1}{\mu} + e^{-\mu t_e} \left( \tau + \frac{1}{\mu} \right) = \frac{3}{2\mu} + \frac{\tau}{2},$$

which yields:

$$t_e = \frac{\log 2}{\mu}. \quad (3.2.2)$$

Similarly, for  $t \geq t_e$ , we obtain the average sojourn time in the form:

$$\begin{aligned} C(t) &= p \left( (1 - e^{-\mu t})\frac{1}{\mu} + e^{-\mu t} \left( \frac{1}{\mu} + \tau + \frac{1}{\mu} \right) \right) \\ &\quad + \left( \int_{t_e}^t dF(\theta) \left( (1 - e^{-\mu(t-\theta)})\frac{1}{\mu} + e^{-\mu(t-\theta)} \left( \frac{1}{\mu} + \tau + \frac{1}{\mu} \right) \right) + \int_t^T \frac{1}{\mu} dF(\theta) \right), \end{aligned}$$



implying,

$$C(t) = p \left( \frac{1}{\mu} + e^{-\mu t} \left( \tau + \frac{1}{\mu} \right) \right) + \left( \frac{1-p}{\mu} + \int_{t_e}^t e^{-\mu(t-\theta)} \left( \tau + \frac{1}{\mu} \right) dF(\theta) \right). \quad (3.2.3)$$

Now, we find the exact shape of the target distribution function  $F(t)$  using condition  $C'(t) = 0$ . Differentiating, we obtain:

$$-\mu p \left( \tau + \frac{1}{\mu} \right) e^{-\mu t} - \mu \left( \tau + \frac{1}{\mu} \right) \int_{t_e}^t e^{-\mu(t-\theta)} dF(\theta) + \left( \tau + \frac{1}{\mu} \right) f(t) = 0,$$

implying,

$$\int_{t_e}^t e^{\mu\theta} f(\theta) d\theta = \frac{1}{\mu} f(t) e^{\mu t} - p.$$

Denoting:

$$g(t) = f(t) e^{\mu t},$$

we can write the equation for function  $g(t)$  in the following form:

$$\int_{t_e}^t g(\theta) d\theta = \frac{1}{\mu} g(t) - p. \quad (3.2.4)$$

In addition, we have the following relation:

$$g'(t) = \mu g(t),$$

implying,

$$g(t) = \text{const} \cdot e^{\mu t} \quad \text{and} \quad f(t) = K = \text{const}.$$

Substituting  $g(t)$  to (3.2.4) we obtain:

$$K = \mu p e^{-\mu t_e} = \frac{\mu p}{2}. \quad (3.2.5)$$

On the other hand, condition:

$$1 - p = \int_{t_e}^T K dt,$$

yields,

$$p = 1 - K(T - t_e),$$

and then, using expression (3.2.5), we finally obtain the probability  $p$ :

$$p = \frac{1}{1 + \mu(T - t_e) e^{-\mu t_e}} = \frac{2}{2\mu + \mu T - \log 2}. \quad (3.2.6)$$

Now it follows from (3.2.3) that:

$$C(t) = C(t_e) = pe^{-\mu t_e} \left( \tau + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2\mu + \mu T - \log 2} \left( \tau + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{1}{\mu}.$$

The previous analysis can be summarized as the following statement.

**Proposition 3.1.** *An equilibrium in the two-person queueing game with retrials satisfies relation (3.2.1), where  $f(t) = K = \text{const}$  for  $t \in [t_e, T]$ , and parameters  $p, t_e, K$  satisfy conditions (3.2.2), (3.2.5), and (3.2.6).*

**Example 5.** *Consider a system which accepts the customers within interval  $[0, 2]$ , and assume that the service rate  $\mu = 2$  and the retrieval rate  $\gamma = \frac{1}{\tau} = 1$ . Then it is easy to calculate that:*

$$t_e \approx 0.347, \quad f(t) \approx 0.377 \text{ for } t \geq t_e,$$

the probability (to arrival at instant 0)  $p \approx 0.377$  and the average sojourn time is:

$$C(0) = C(t) \approx 0.783 \text{ for } t \geq t_e.$$

### § 3.3 Three-player game

Consider the case of three players. Suppose that two of the players (for definiteness, the second and third players) use, as a strategy, a random arrival time with the distribution  $F(t)$  satisfying (3.2.1). We assume that customers are taken from the orbit by the server in the order they entered the orbit, i.e., using FIFO discipline. If two customers entered the orbit simultaneously, then the order is assigned at random (that is, each one is selected with probability 1/2).

Now we find the best response of the first player provided they arrive at instant  $t = 0$ . In this case, the cost is:

$$C(0) = (1 - p)^2 \frac{1}{\mu} + 2p(1 - p) \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2} W_1^1(0) \right) + p^2 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{2}{3} W_2^0(0) \right),$$

where,

$$W_1^0(0) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma},$$

$$W_2^0(0) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) = \frac{3}{2\mu} + \frac{3}{2\gamma},$$

$$W_1^1(0) = \frac{1}{1-p} \int_{t_e}^T \int_0^\theta \mu e^{-\mu s} ds \int_0^{\theta-s} \gamma e^{-\gamma u} (s+u) du + \int_0^\theta \mu e^{-\mu s} ds \int_{\theta-s}^\infty \gamma e^{-\gamma u} (s+u + \frac{1}{\mu}) du + \int_\theta^\infty \mu e^{-\mu s} s ds dF(\theta) = \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma(\mu-\gamma)(1-p)} \int_{t_e}^T (\gamma e^{-\gamma \theta} - \mu e^{-\mu \theta}) dF(\theta),$$

and by  $W_i^j(t)$  we denote the average time spent in the orbit by a customer arriving at instant  $t$ , provided that there are  $i$  customers in the orbit, and  $j$  (exogenous) customers remains outside the system.

Now we find the value  $C(0+)$  for a customer who arrives in the system at instant  $t = 0+$ . Then he occupies the server if both remaining players arrive after  $t_e$ . If one player arrives at instant  $t = 0$ , then the customer arriving at  $t = 0+$ , evidently, joins the orbit. Finally, if both other customers arrive at  $t = 0$ , then the customer arriving at  $t = 0+$  joins the end of the orbit queue. This results in:

$$C(0+) = (1-p)^2 \frac{1}{\mu} + p(1-p) \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{1-p} W_1^1(0) \right) + p^2 \left( \frac{1}{\mu} + W_2^0(0+) \right) > \\ > C(0), \quad (3.3.1)$$

where,

$$W_2^0(0+) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\mu} + \frac{2}{\gamma} > W_2^0(0).$$

The cost of a customer arriving at instant  $t_e$ , provided that no customers arrive in the time interval  $(0, t_e)$ , satisfies:

$$C(t_e) = \\ (1-p)^2 \frac{1}{\mu} + 2p(1-p) \left( \frac{1}{\mu} + \int_{t_e}^T \frac{dF(\theta)}{1-F(t_e)} \left( \int_{t_e}^{\theta} \mu e^{-\mu s} ds \int_0^{\theta-s} \gamma e^{-\gamma \tau} (s-t_e+\tau) d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. \int_{t_e}^{\theta} \mu e^{-\mu s} ds \int_{\theta-s}^{\infty} \gamma e^{-\gamma \tau} \left( \theta-t_e + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) d\tau + \int_{\theta}^{\infty} \mu e^{-\mu s} \left( s-t_e + \frac{1}{\gamma} \right) ds \right) \right) + \\ p^2 \left( \frac{1}{\mu} + \int_0^{t_e} \mu e^{-\mu s} ds \int_0^{t_e-s} \gamma e^{-\gamma \tau} d\tau \int_{t_e-s-\tau}^{\infty} \mu e^{-\mu v} \left( s+\tau+v-t_e + \frac{1}{\gamma} \right) dv + \right. \\ \left. \int_{t_e}^{\infty} \mu e^{-\mu s} ds \left( s + \frac{1}{\mu} + \frac{2}{\gamma} - t_e \right) \right) = (1-p)^2 \frac{1}{\mu} + \\ 2p(1-p) \left( \frac{1}{\mu} + \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) e^{-\mu t_e} + \frac{e^{-\mu t_e}}{(1-p)(\mu-\gamma)} \int_{t_e}^T (e^{-\gamma(\theta-t_e)} - e^{-\mu(\theta-t_e)}) dF(\theta) \right) + \\ p^2 \left( \frac{1}{\mu} + 2 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) e^{-\mu t_e} + \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\gamma}{(\mu-\gamma)^2} (e^{-\gamma t_e} - e^{-\mu t_e}) - \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\gamma}{\mu-\gamma} t_e e^{-\mu t_e} \right).$$

We assume that:

$$\mu > \gamma. \quad (3.3.2)$$

Then the cost value  $C(t_e)$  decreases by  $t_e$ , provided that there are no customers arriving into the system at the interval  $(0, t_e)$ . This fact together with the inequality  $C(0+) > C(0)$  (see (3.3.1)) confirm that it is more profitable for a customer to arrive with a delay following the instant  $t = 0$  (but not at the instant  $0+$ ). Since, in the equilibrium, the cost should be the same on the strategy support, then the instant when a new customer decides to arrive in the system satisfies the equation:

$$C(0) = C(t_e).$$

Now we show that an arrival at the instant  $t \in (0, t_e)$  is unprofitable even for one player, when other players make an attempt to occupy the server since instant  $t_e$ . For such  $t$  we obtain:

$$\begin{aligned} C(t) = & (1-p)^2 \frac{1}{\mu} + 2p(1-p) \left( \frac{1}{\mu} + \int_{t_e}^T dF(\theta) \left( \frac{1}{\mu} + \int_t^\theta \mu e^{-\mu s} ds \int_0^{\theta-s} \gamma e^{-\gamma \tau} (s-t+\tau) d\tau + \right. \right. \\ & \left. \left. \int_t^\theta \mu e^{-\mu s} ds \int_{\theta-s}^\infty \gamma e^{-\gamma \tau} (\theta-t + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}) d\tau + \int_\theta^\infty \mu e^{-\mu s} (s-t + \frac{1}{\gamma}) ds \right) + \right. \\ & \left. p^2 \left( \frac{1}{\mu} + \int_0^t \mu e^{-\mu s} ds \int_0^{t-s} \gamma e^{-\gamma \tau} d\tau \int_{t-s-\tau}^\infty \mu e^{-\mu v} (s+\tau+v-t + \frac{1}{\gamma}) dv + \right. \right. \\ & \left. \left. \int_t^\infty \mu e^{-\mu s} ds (s + \frac{1}{\mu} + \frac{2}{\gamma} - t) \right) = \right. \\ & (1-p)^2 \frac{1}{\mu} + p^2 \left( \frac{1}{\mu} + 2 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) e^{-\mu t} + \frac{1}{\mu - \gamma} (e^{-\gamma t} - e^{-\mu t}) - t e^{-\mu t} \right) + \\ & \left. 2p(1-p) \left( \frac{1}{\mu} + \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) e^{-\mu t} + \frac{e^{-\mu t}}{(1-p)(\mu - \gamma)} \int_{t_e}^T (e^{-\gamma(\theta-t)} - e^{-\mu(\theta-t)}) dF(\theta) \right). \right. \end{aligned}$$

Then it is easy to check that function  $C(t)$  decreases in  $t < t_e$ , confirming that, even for one player, it is better to avoid an attempt to enter the server earlier the instant  $t_e$ .

Now we consider the situation when the first player enters the system in the interval  $t \in [t_e, T]$ . To study it, we define, for instant  $t$ , the (time-dependent) state probabilities, denoted by  $p_{ijk}(t)$ , that  $i \in \{0, 1, 2\}$  customers arrived in the system, in the interval  $[t_e, t]$ ,  $j \in \{0, 1\}$  customers are in the server, and  $k \in \{0, 1\}$  customers are in the orbit, at instant  $t$ . The arrival rate at instant  $t$  (that is the rate of exogenous customers) depends on the chosen strategy and the number  $k$  of customers who have already entered the system up to instant  $t$ . In an evident notation, these rates are equal to:

$$\lambda_0(t) = 2 \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad \lambda_1(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

respectively. Now we can write down the corresponding Kolmogorov backward equations for the state probabilities:

$$\begin{aligned} p'_{000}(t) &= -\lambda_0(t)p_{000}(t), \\ p'_{100}(t) &= -\lambda_1(t)p_{100}(t) + \mu p_{110}(t), \\ p'_{110}(t) &= -(\mu + \lambda_1(t))p_{110}(t) + \lambda_0(t)p_{000}(t), \\ p'_{201}(t) &= -\gamma p_{201}(t) + \mu p_{211}(t), \\ p'_{210}(t) &= -\mu p_{210}(t) + \gamma p_{201}(t) + \lambda_1(t)p_{100}(t), \\ p'_{211}(t) &= -\mu p_{211}(t) + \lambda_1(t)p_{110}(t), \\ p'_{200}(t) &= \mu p_{210}(t). \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Now we find the state probabilities for  $t = t_e$  as follows:

$$\begin{aligned} p_{000}(t_e) &= (1 - p)^2 \\ p_{100}(t_e) &= 2p(1 - p)(1 - e^{-\mu t_e}) \\ p_{110}(t_e) &= 2p(1 - p)e^{-\mu t_e} \\ p_{201}(t_e) &= p^2 \int_0^{t_e} \mu e^{-\mu\theta} e^{-\gamma(t_e - \theta)} d\theta = p^2 \mu \frac{e^{-\gamma t_e} - e^{-\mu t_e}}{\mu - \gamma} \\ p_{210}(t_e) &= p^2 \int_0^{t_e} \mu e^{-\mu\theta} \int_0^{t_e - \theta} \gamma e^{-\gamma\tau} e^{-\mu(t_e - (\theta + \tau))} d\tau d\theta = p^2 \gamma \frac{e^{-\gamma t_e} - e^{-\mu t_e} (\mu t_e - \gamma t_e + 1)}{(\mu - \gamma)^2} \\ p_{211}(t_e) &= p^2 e^{-\mu t_e} \\ p_{200}(t_e) &= p^2 \int_0^{t_e} \mu e^{-\mu\theta} \int_0^{t_e - \theta} \gamma e^{-\gamma\tau} (1 - e^{-\mu(t_e - (\theta + \tau))}) d\tau d\theta = \\ &= p^2 (1 - e^{-\mu t_e} - \gamma \frac{e^{-\gamma t_e} - e^{-\mu t_e} (\mu t_e - \gamma t_e + 1)}{(\mu - \gamma)^2} - \mu \frac{e^{-\gamma t_e} - e^{-\mu t_e}}{\mu - \gamma}). \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Expressions (3.3.4) indeed are the initial boundary conditions for the Cauchy problem for differential Equations (3.3.3). The probability  $p$  of an arrival at instant  $t = 0$  can be found from the normalization condition:

$$p + \int_{t_e}^T f(t)dt = 1.$$

Then the average sojourn time of a player entering the system at instant  $t$  is:

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{1}{\mu} \left( p_{000}(t) + p_{100}(t) + p_{201}(t) + p_{200}(t) \right) \\ &\quad + p_{110}(t) \left( \frac{1}{\mu} + W_1^1(t) \right) + p_{210}(t) \left( \frac{1}{\mu} + W_1^0(t) \right) + p_{211}(t) \left( \frac{1}{\mu} + W_2^0(t) \right) \\ &= \frac{1}{\mu} + p_{110}(t)W_1^1(t) + p_{210}(t)W_1^0(t) + p_{211}(t)W_2^0(t), \end{aligned}$$

where,

$$\begin{aligned} W_1^0(t) &= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}, \\ W_2^0(t) &= \frac{2}{\mu} + \frac{2}{\gamma}, \\ W_1^1(t) &= \frac{1}{1-F(t)} \int_t^T dF(\theta) \left( \int_0^{\theta-t} \mu e^{-\mu s} ds \int_0^{\theta-t-s} \gamma e^{-\gamma \tau} (s + \tau) d\tau + \right. \\ &\quad \left. \int_0^{\theta-t} \mu e^{-\mu s} \int_{\theta-t-s}^{\infty} \gamma e^{-\gamma \tau} \left( \theta - t + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) d\tau + \int_{\theta-t}^{\infty} \mu e^{-\mu s} \left( \frac{1}{\gamma} + s \right) ds \right) \\ &= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{(1-F(t))(\mu-\gamma)} \int_t^T e^{-\gamma(\theta-t)} - e^{-\mu(\theta-t)} dF(\theta). \end{aligned}$$

In the equilibrium, the equality  $C(t) = C(t_e) = \text{const}$ ,  $t \in [t_e, T]$  is satisfied, implying:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) \left( p_{110}(t) - p_{110}(t_e) + p_{210}(t) - p_{210}(t_e) + 2(p_{211}(t) - p_{211}(t_e)) \right) + \\ &\frac{1}{\mu - \gamma} \left( \frac{p_{110}(t)}{1 - F(t)} \int_t^T (e^{-\gamma(\theta-t)} - e^{-\mu(\theta-t)}) dF(\theta) - \right. \\ &\left. \frac{p_{110}(t_e)}{1 - p} \int_{t_e}^T (e^{-\gamma(\theta-t_e)} - e^{-\mu(\theta-t_e)}) dF(\theta) \right) = 0. \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

If condition (3.3.5) is met, then the function  $C(t)$  must be a constant on the time interval  $[t_e, T]$ . It remains now to require that the condition  $C(t_e) = C(0)$  is

satisfied. In other words,

$$\begin{aligned}
& (1-p)^2 \frac{1}{\mu} + p^2 \left( \frac{2}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) \\
& 2p(1-p) \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) \right) + \frac{1}{2\gamma(\mu-\gamma)(1-p)} \int_{t_e}^T (\gamma e^{-\gamma\theta} - \mu e^{-\mu\theta}) dF(\theta) = \\
& (1-p)^2 \frac{1}{\mu} + \\
& 2p(1-p) \left( \frac{1}{\mu} + \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) e^{-\mu t_e} + \frac{e^{-\mu t_e}}{(1-p)(\mu-\gamma)} \int_{t_e}^T (e^{-\gamma(\theta-t_e)} - e^{-\mu(\theta-t_e)}) dF(\theta) \right) + \\
& p^2 \left( \frac{1}{\mu} + 2 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) e^{-\mu t_e} + \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\gamma}{(\mu-\gamma)^2} (e^{-\gamma t_e} - e^{-\mu t_e}) - \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\gamma}{\mu-\gamma} t_e e^{-\mu t_e} \right) \\
& \text{or:} \\
& \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) (1 - 2e^{-\mu t_e}) + \\
& \frac{1}{(\mu-\gamma)} \left( \frac{1}{\gamma} \int_{t_e}^T (\gamma e^{-\gamma\theta} - \mu e^{-\mu\theta}) dF(\theta) - 2e^{-\mu t_e} \int_{t_e}^T (e^{-\gamma(\theta-t_e)} - e^{-\mu(\theta-t_e)}) dF(\theta) \right) + \\
& p \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) \left( \frac{\gamma}{\mu-\gamma} t_e e^{-\mu t_e} - \frac{\gamma}{(\mu-\gamma)^2} (e^{-\gamma t_e} - e^{-\mu t_e}) \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

The analysis performed above is summarized in the following statement.

**Proposition 3.2.** *An equilibrium in the three-person queueing game with retrievals has the form (3.2.1), where  $f(t)$  for  $t \in [t_e, T]$  is determined as a solution of Equations (3.3.3), (3.3.5), and (3.3.6).*

### § 3.4 Computing the equilibrium in the three-player game

In this section, we describe in detail the numerical solution of the above obtained equations. Let us fix  $t_e$  and  $T$ . We divide the interval  $[t_e, T]$  into  $k-1$  equal segments. Then we find an approximate solution in the nodes of the grid  $K = \{t_1 = t_e, t_2 = t_1 + \Delta, \dots, t_k = t_{k-1} + \Delta\}$ , where  $\Delta = (T - t_e)/(k-1)$ . We represent the values of the unknown function  $f(t)$  at the initial moment and at the nodes of the grid as the arguments of the problem:

$$\{x_0 = f(0) = p, x_1 = f(t_1), \dots, x_k = f(t_k) = f(T)\}.$$

Then the derived conditions for the equilibrium can be represented as the difference equations. More precisely, condition (3.3.5) becomes:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}\right)(p_{110}(t_i) - p_{110}(t_e) + p_{210}(t_i) - p_{210}(t_e)) + \\ & + 2(p_{211}(t_i) - p_{211}(t_e)) + \frac{p_{110}(t_i)}{(\mu-\gamma)(1-p-\sum_{j=1}^{i-1} x_j \Delta)} \sum_{j=i}^{k-1} (e^{-\gamma(t_j-t_i)} - e^{-\mu(t_j-t_i)}) x_j \Delta - \\ & - \frac{p_{110}(t_e)}{(\mu-\gamma)(1-p)} \sum_{j=1}^{k-1} (e^{-\gamma(t_j-t_e)} - e^{-\mu(t_j-t_e)}) x_j \Delta = 0, \quad i = 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Condition (3.3.6) takes the form:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}\right)(1 - 2e^{-\mu t_e}) + \\ & \frac{1}{(\mu-\gamma)} \left(\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{k-1} (\gamma e^{-\gamma t_j} - \mu e^{-\mu t_j}) x_j \Delta - 2e^{-\mu t_e} \sum_{j=1}^{k-1} (e^{-\gamma(t_j-t_e)} - e^{-\mu(t_j-t_e)}) x_j \Delta\right) + \\ & p \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}\right) \left(\frac{\gamma}{\mu-\gamma} t_e e^{-\mu t_e} - \frac{\gamma}{(\mu-\gamma)^2} (e^{-\gamma t_e} - e^{-\mu t_e})\right) = 0. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

The Kolmogorov backward (difference) equations become:

$$\begin{aligned} p_{000}(t_{i+1}) &= p_{000}(t_i) \left( 1 - \Delta \frac{2x_i}{1-p-\Delta \sum_{j=1}^{i-1} x_j} \right), \\ p_{100}(t_{i+1}) &= p_{100}(t_i) \left( 1 - \Delta \frac{x_i}{1-p-\Delta \sum_{j=1}^{i-1} x_j} \right) + \Delta \mu p_{110}(t_i), \\ p_{110}(t_{i+1}) &= p_{110}(t_i) \left( 1 - \Delta \left( \mu + \frac{x_i}{1-p-\Delta \sum_{j=1}^{i-1} x_j} \right) \right) + \Delta \frac{2x_i}{1-p-\Delta \sum_{j=1}^{i-1} x_j} p_{000}(t_i), \\ p_{201}(t_{i+1}) &= (1 - \Delta \gamma) p_{201}(t_i) + \Delta \mu p_{211}(t_i), \\ p_{210}(t_{i+1}) &= (1 - \Delta \mu) p_{210}(t_i) + \Delta \gamma p_{201}(t_i) + \Delta \frac{x_i}{1-p-\Delta \sum_{j=1}^{i-1} x_j} p_{100}(t_i), \\ p_{211}(t_{i+1}) &= (1 - \Delta \mu) p_{211}(t_i) + \Delta \frac{x_i}{1-p-\Delta \sum_{j=1}^{i-1} x_j} p_{110}(t_i), \\ p_{200}(t_{i+1}) &= p_{200}(t_i) + \Delta \mu p_{210}(t_i), \\ i &= 1, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Finally, the normalization condition takes the form:

$$p + \Delta \sum_{i=1}^{k-1} x_i - 1 = 0. \quad (3.4.4)$$



Now we find a solution as follows. We iterate over the values of  $p$  on the interval  $[0, 1]$ . For each  $p$ , we iterate over the values of  $t_e$  belonging to interval  $[0, T]$ . For each given  $p$  and  $t_e$ , we solve the system of the difference Equations (3.4.1), where the state probabilities satisfy system (3.4.3). We are looking for a pair  $p, t_e$ , in such a way that conditions (3.4.2) and (3.4.4) are satisfied.

To find  $p$  and  $t_e$ , we first use a partition of  $[0, 1] \times [0, T]$  into a grid with a small rank and look for a node, passing through which the left sides of Equations (3.4.2) and (3.4.4) change sign. We seek for a solution in a neighborhood of this node. More precisely, for each given  $p$  and  $t_e$ , the solution  $x$  is found with Algorithm 2. First we specify the uniform distribution over the interval  $[t_e, T]$  as the initial approximation of the solution  $x$ , taking into account that there is an atom at the point  $t = 0$  with a given probability  $p$ . Then we search for a solution  $x$  that satisfies (3.4.1). Step 1 of Algorithm 2 is repeated until the solution is stabilized with a given accuracy  $\epsilon$ . In practice, the algorithm converges in 2–3 runs.

---

**Algorithm 2** Finding the solution  $x$  for  $p$  and  $t_e$ .

---

Step 0. Initialization.

**for**  $i = 1$  to  $k$  **do**

$$x_i \leftarrow \frac{1-p}{T-t_e}$$

**end for**

Calculate  $p000(t_1), \dots, p200(t_1)$  from (3.3.4).

Step 1. Next approximations.

**do**

$$x^{prev} \leftarrow x$$

**for**  $i = 2$  to  $k$  **do**

Find  $x_{i-1}$  from (3.4.1) with new  $p000(t_i), \dots, p200(t_i)$  re-calculated with (3.4.3).

**end for**

**while**  $(|x - x^{prev}| > \epsilon)$

---

At each iteration  $i = 2, \dots, k$  at the beginning of the execution, we have  $x_j$ , where  $j = 1, \dots, i-2$ , and state probabilities for all steps from 1 to  $i-1$ , found on previous iterations. On iteration  $i$ , we solve Equation (3.4.1) for  $x_{i-1}$ , each time calculating the probabilities of states at step  $i$  using an approximation of  $x_{i-1}$  according to (3.4.3). In this case, the sum in the two last terms on the left-hand side of Equation (3.4.1) is partially calculated from the old values  $x^{prev}$  from the solution at the

previous iteration, and all other components of the equation are calculated by new ones, according to the solution  $x$  at the current iteration. However, as calculation experiments confirm, with each pass of the algorithm, the difference between the solutions decreases.

After completing the algorithm, we get a set of values  $x_i$ , where  $i = 1, \dots, k-1$ , which is enough to find  $F(T) \approx p + \sum_{i=1}^{k-1} x_i \Delta$ . If conditions (3.4.2) and (3.4.4) are satisfied with a given accuracy  $\epsilon$ , the current  $p$ ,  $t_e$  and  $x$  give a solution, otherwise we change  $t_e$  and  $p$ .

**Example 6.** Let  $T = 2$ ,  $\mu = 2$ ,  $\gamma = 1$ . The computations give the optimal values in the equilibrium:  $p \approx 0.412$ ,  $t_e \approx 0.380$ . The density of the optimal arrival time at the interval  $[t_e, T]$  is presented at Figure 3.1. In the figure, the function  $f(t)$  first decreases in the interval  $[t_e, 0.833]$ , then increases in the interval  $[0.833, 1.676]$ , then decreases again in the interval  $[1.676, 2]$ . The value of cost at the equilibrium is equal to  $C(t) \approx 1.133$ .

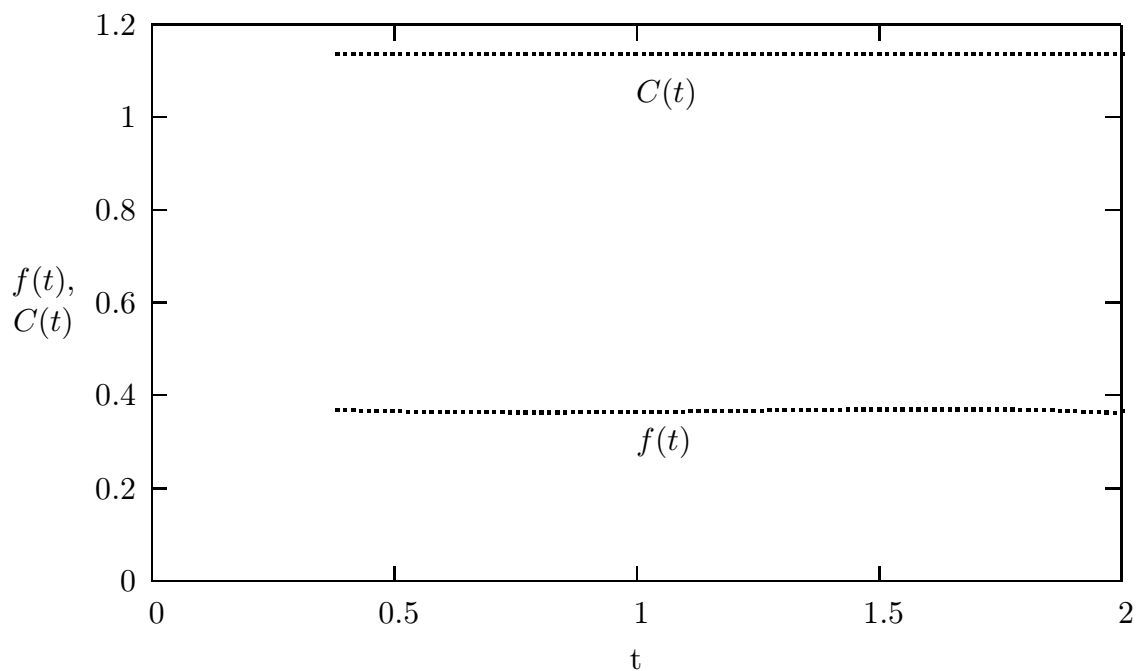


Figure 3.1: The equilibrium density  $f(t)$  and cost  $C(t)$  for  $T = 2, \mu = 2, \gamma = 1$ .

**Example 7.** If  $T = 4, \mu = 2, \gamma = 1$  then  $p \approx 0.232$  and  $t_e \approx 0.369$ . The shape of the equilibrium density is similar to that presented in Figure 3.1, and  $C(t) \approx 0.857$ .

**Example 8.** If  $T = 4$ ,  $\mu = 4$ ,  $\gamma = 1$  then the shape of the equilibrium density is similar to that as given on Figure 3.1, and  $p \approx 0.121$ ,  $t_e \approx 0.179$ , and  $C(t) \approx 0.404$ .

**Example 9.** If  $T = 1$ ,  $\mu = 2$ ,  $\gamma = 1$  then  $p \approx 0.661$ ,  $t_e \approx 0.381$ , and  $C(t) \approx 1.485$ . The density of the optimal arrival time at the interval  $[t_e, T]$  is presented on Figure 3.2. In the figure, the function  $f(t)$  decreases in the interval  $[0.381, 1]$ .

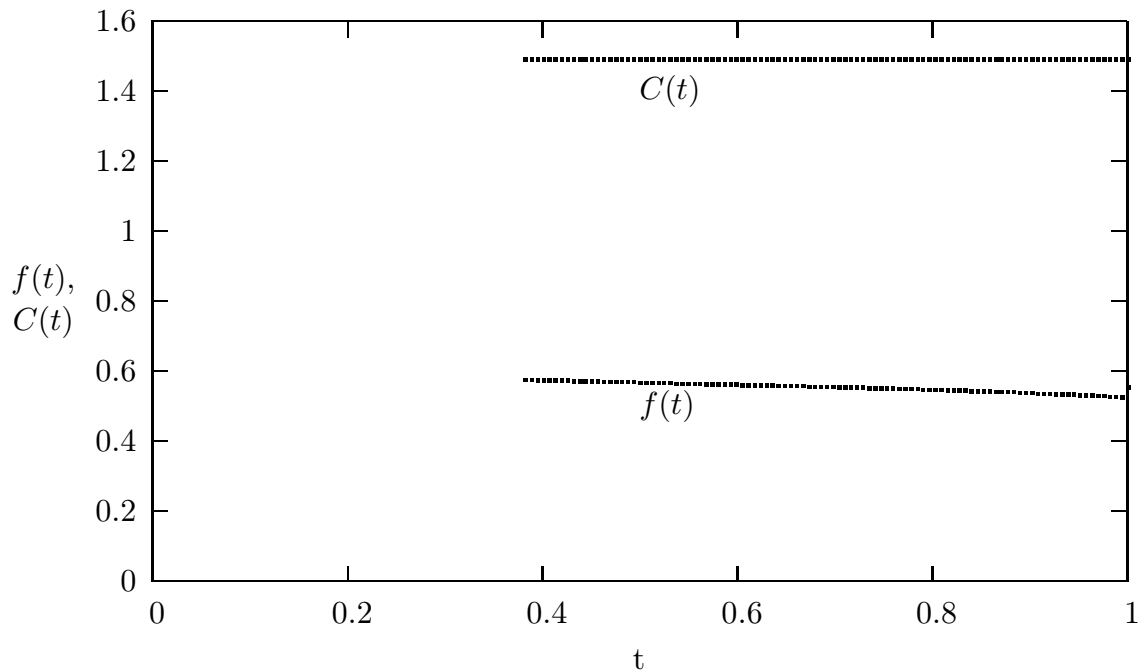


Figure 3.2: Equilibrium density  $f(t)$  and cost  $C(t)$  for  $T = 1$ ,  $\mu = 2$ ,  $\gamma = 1$ .

### § 3.5 Results

We have constructed a single-server retrial queueing system. For the cases of two and three players we have proved that the optimal strategy is such that a player enters the system with a non-zero probability at the initial moment of time, further there is a pause without arrivals, and then and then there is a non-zero density function of the arrival times is defined at the time interval  $[t_e, T]$ . We have also suggested the equilibrium calculation algorithm and numerical experiments have been performed to find the equilibria under different values of the model parameters.

## Chapter 4

# Base Station Selection Game

We formulate the problem as a game [130] where players are mobile users, which choose radio base stations to connect to the network. Strategies in the game are station numbers or probabilities, which players use to choose base stations. Each selfish user chooses a station trying to maximize its "signal to interference + noise" (SINR or just SNR) ratio, which depends on: 1) the distance between the player and the station, 2) number of connections to the station. In this model, the signal is inverse to the square of the distance to the chosen base station, and interference+noise is a sum of all signals at the station and some constant noise. Our goal is to determine the Nash equilibrium in this model where users know or don't know each other location.

The strongest signal first is a common selection mechanism in existing BS selection architectures. Users measure the received signal strength from each BS in its context and select the strongest one to associate. However, due to the uneven distribution of user load, this method suffers from bandwidth deficiency and unbalanced load among BSs, thus degrading the overall system throughput [109].

A key assumption underlying most of BS selection congestion games in above literature is that all users have an equal impact on the congestion. Therefore all that matters is the total number of users associated with particular BS. This however is not always true in wireless communication. The impact of a particular user to other users in same BS depends on user profile. One such a factor is the distance to the BS, as received signal strength and the interference for other users depend on the distance to the BS. We have modeled a congestion game by considering not

only the number of users connected to the BS but also the profile of each user.

## § 4.1 Optimality problem for one player

Consider a one-dimensional model with one player moving on interval  $[0, 1]$ . Two identical base stations (“0” and “1”) with noise levels  $c$  are situated at the corresponding ends of the interval. At each time moment player’s coordinate is  $x \in [0, 1]$ . Its SINR is  $\frac{1/x^2}{1/x^2+c} = \frac{1}{cx^2+1}$  if it connects to the station 0 and  $\frac{1}{1+c(1-x)^2}$  to the station 1.

An obvious solution is choosing station 0 if  $x \leq \frac{1}{2}$  and 1 otherwise, since  $\frac{1}{cx^2+1} \geq \frac{1}{1+c(1-x)^2}$  if  $x \leq \frac{1}{2}$ .

## § 4.2 Two players game

Consider a one-dimensional game with two players (0 and 1) moving on interval  $[0, 1]$ . Two identical radio base stations (“0” and “1”) with noise levels  $c$  are situated at the corresponding ends of the interval. At each time moment player’s 0 coordinate is some  $x \in [0, 1]$  and player’s 1 is some  $y \in [0, 1]$ . Each player  $i$  in each situation  $(x, y)$  must determine which of two stations is better to connect to.

Pure strategy for each player  $i$  is a number  $l_i$  of radio station, which it chooses to connect to. Then  $(l_0, l_1)$  is a pure strategy profile. Also following mixed strategies are defined:  $p$  is a probability that player 0 chooses the station 0,  $q$  is a probability that player 1 chooses the station 0. For station 1 probabilities are correspondingly  $1 - p$  and  $1 - q$ .  $(p, q)$  defines a mixed strategy profile. Each pure strategy profile corresponds to a mixed profile, since  $p = P(l_0 = 0)$ ,  $q = P(l_1 = 0)$ . The payoff function for each player is an expectation of its SINR.

Pure SINR for the  $i$ -th player connecting to  $j$ -th station is

$$SINR_i^j = \begin{cases} \frac{\frac{1}{(\rho_i^j)^2}}{\frac{1}{(\rho_i^j)^2} + \frac{1}{(\rho_{1-i}^j)^2} + c} & \text{if } l_{1-i} = j, \\ \frac{1}{(\rho_i^j)^2 + c} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where  $\rho_i^j$  is a distance between player  $i$  and base station  $j$ . Simplify it and define in

areas of ambiguity:

$$SINR_i^j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } l_{1-i} = j \text{ and } \rho_i^j = \rho_{1-i}^j = 0, \\ \frac{1}{\frac{(\rho_i^j)^2}{(\rho_{1-i}^j)^2} + 1 + c(\rho_i^j)^2} & \text{if } l_{1-i} = j \text{ and } \rho_i^j + \rho_{1-i}^j > 0, \\ \frac{1}{1 + c(\rho_i^j)^2} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then we omit writing  $\frac{1}{2}$  for SINR assuming, that for values  $u, v \in [0, 1]$   $\frac{u}{v}|_{u=v=0} \stackrel{def}{=} 1$  and  $\frac{1}{\frac{u^2}{v^2} + 1 + cu^2}|_{u=v=0} = \frac{1}{2}$ . Also denote  $\bar{u} \stackrel{def}{=} 1 - u$ .

### § 4.2.1 Bimatrix game with full information

Here we consider the model with full information, where each player knows where its opponent is situated. Consider the game as a bimatrix model. The payoff matrix is following:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2} + cx^2}, \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2} + cy^2} & \frac{1}{1 + cx^2}, \frac{1}{1 + c\bar{y}^2} \\ \frac{1}{1 + c\bar{x}^2}, \frac{1}{1 + cy^2} & \frac{1}{1 + \frac{\bar{x}^2}{y^2} + c\bar{x}^2}, \frac{1}{1 + \frac{y^2}{\bar{x}^2} + c\bar{y}^2} \end{pmatrix}$$

and payoff functions for each player are:

$$H_{x,y}^1(p, q) = \frac{pq}{1 + \frac{x^2}{y^2} + cx^2} + \frac{p(1-q)}{1 + cx^2} + \frac{(1-p)q}{1 + c\bar{x}^2} + \frac{(1-p)(1-q)}{1 + \frac{\bar{x}^2}{y^2} + c\bar{x}^2},$$

$$H_{x,y}^2(p, q) = \frac{pq}{1 + \frac{y^2}{x^2} + cy^2} + \frac{p(1-q)}{1 + c\bar{y}^2} + \frac{(1-p)q}{1 + cy^2} + \frac{(1-p)(1-q)}{1 + \frac{y^2}{\bar{x}^2} + c\bar{y}^2}.$$

For each players' position  $(x, y)$  pure equilibrium is such choice of stations' numbers  $(l_0^*, l_1^*)$  that  $a_{il_1^*} \leq a_{l_0^*l_1^*}$  and  $b_{l_0^*j} \leq b_{l_0^*l_1^*}$ . Each position on a square  $[0, 1] \times [0, 1]$  has some pure equilibria (PE):

$(l_0^*, l_1^*)$	is equilibrium at $(x, y)$ such that
$(0, 0)$	$c(1 - 2x) \geq \frac{x^2}{y^2}$ and $c(1 - 2y) \geq \frac{y^2}{x^2}$
$(0, 1)$	$c(2x - 1) \leq \frac{\bar{x}^2}{y^2}$ and $c(1 - 2y) \leq \frac{y^2}{x^2}$
$(1, 0)$	$c(1 - 2x) \leq \frac{x^2}{y^2}$ and $c(2y - 1) \leq \frac{y^2}{\bar{x}^2}$
$(1, 1)$	$c(2x - 1) \geq \frac{\bar{x}^2}{y^2}$ and $c(2y - 1) \geq \frac{y^2}{\bar{x}^2}$

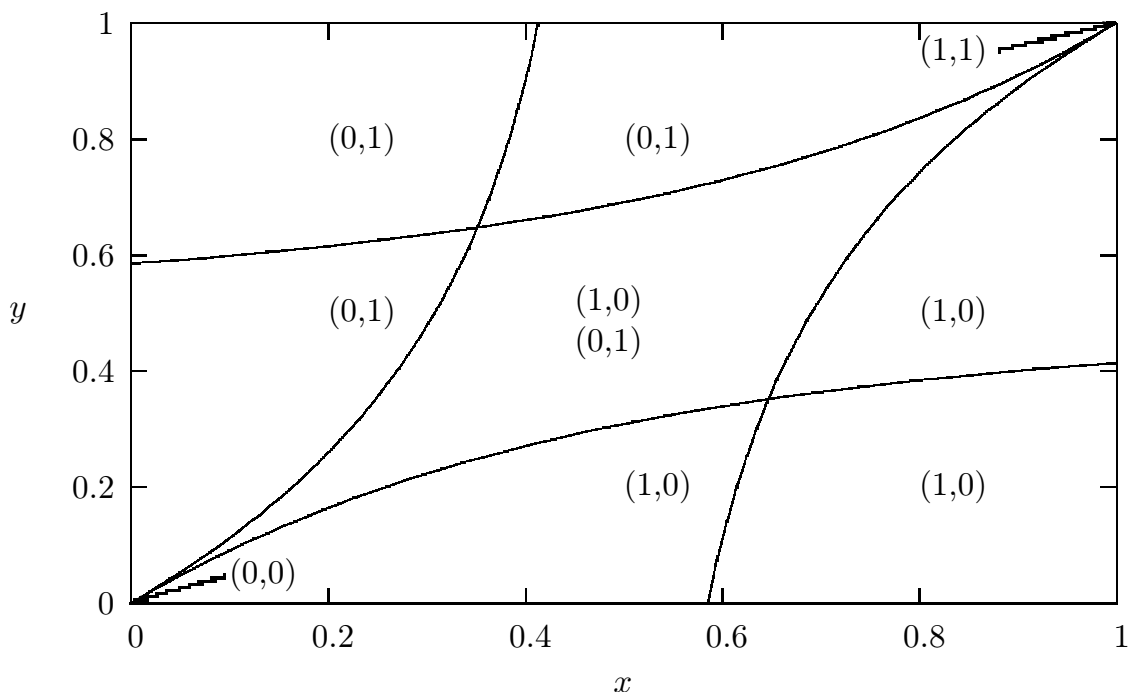


Figure 4.1: Pure equilibria in bimatrix game with full info for  $c = 1$ .

Note, that when  $c \leq 1$ , the couple of conditions for equilibrium  $(0,0)$  provides only one-point feasible position  $x = y = 0$  where this pure equilibrium exists. Indeed, for  $c \leq 1$  curves  $c(1 - 2x) = \frac{x^2}{y^2}$  and  $c(1 - 2y) = \frac{y^2}{x^2}$  have only one contact point on  $[0, 1] \times [0, 1]$ . But they cross at two points on  $[0, 1] \times [0, 1]$  when  $c > 1$ , so in this case a position set for this equilibrium is some area. It is also right for curves bounding  $(1,1)$ -equilibrium existing area. For  $c \leq 1$  this equilibrium exists only at position  $x = y = 1$ . Figure 4.1 and 4.2 illustrate this fact. With increasing of  $c$  areas of  $(0,0)$  and  $(1,1)$  where equilibria exists grow, and equilibrium solution for each player tends to one player's optimal problem solution.

Mixed strategies are  $p = \frac{b_{11}-b_{10}}{b_{00}+b_{11}-b_{01}-b_{10}}$  and  $q = \frac{a_{11}-a_{01}}{a_{00}+a_{11}-a_{01}-a_{10}}$ . They are feasible only if  $0 \leq p, q \leq 1$ , that is exactly where pure equilibria  $(0,1)$  and  $(1,0)$  to use different stations both exist.

Figures 4.3,4.4, 4.5 demonstrate mixed players' strategies depending on player's 0 position  $x$  when  $y = y_0$ , i.e. a position of player 1 is fixed. Ends of arrow at each figure show bounds of interval  $[x_l, x_r]$  for  $x$  where mixed equilibria exist. An interesting observation is that each player in mixed equilibrium uses the most distant station and lets its opponent mainly use the nearest station.

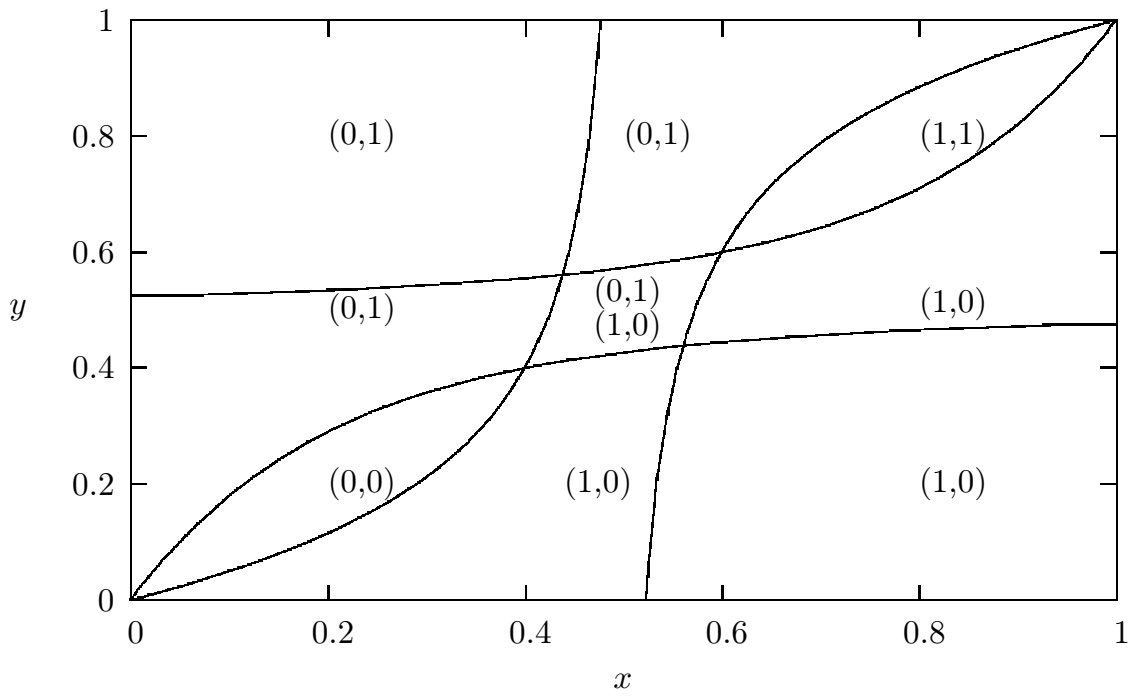


Figure 4.2: Pure equilibria in bimatrix game with full info for  $c = 5$ .

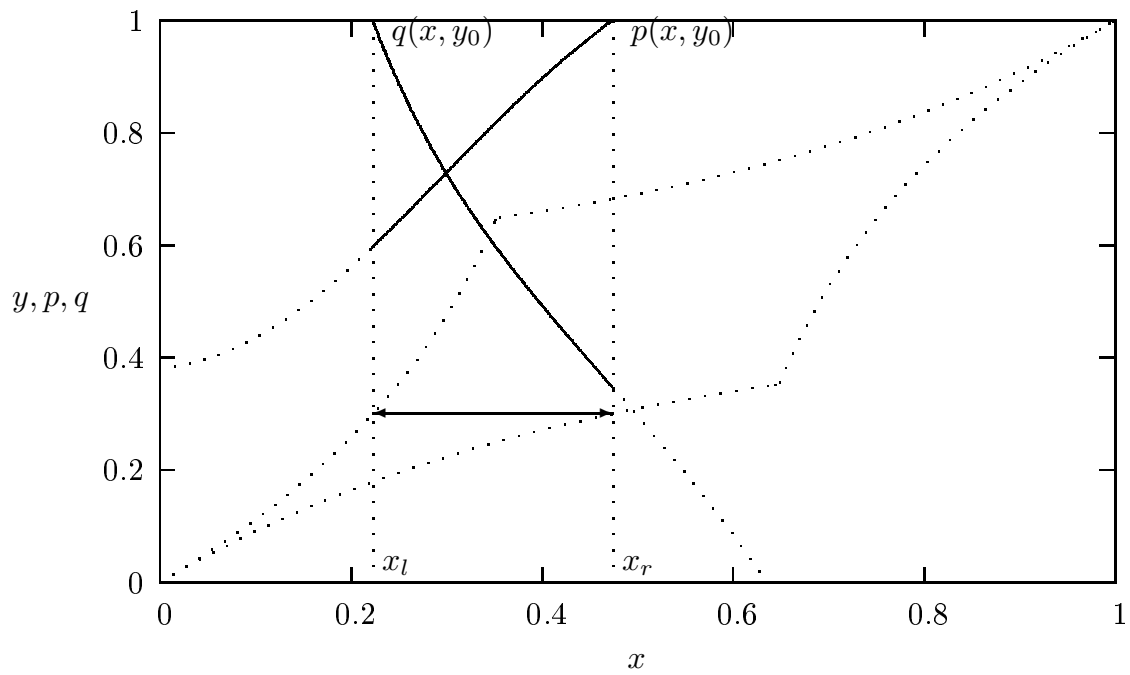


Figure 4.3: Mixed equilibria in bimatrix game with full info for  $c = 1$  and  $y_0 = 0.3$ .



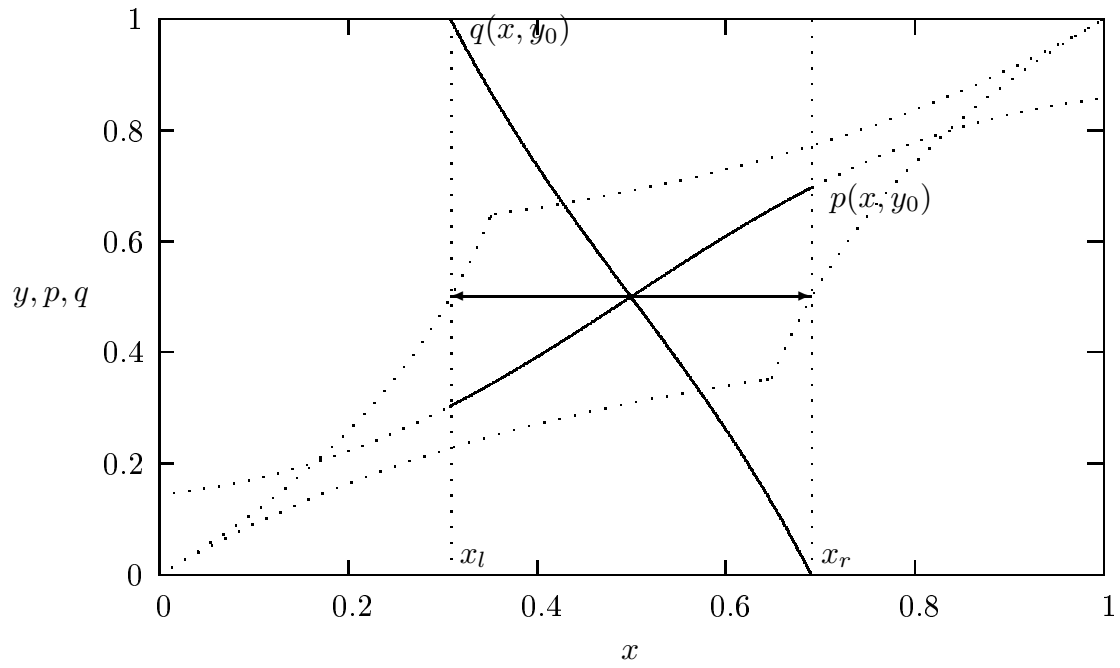


Figure 4.4: Mixed equilibria in bimatrix game with full info for  $c = 1$  and  $y_0 = 0.5$ .

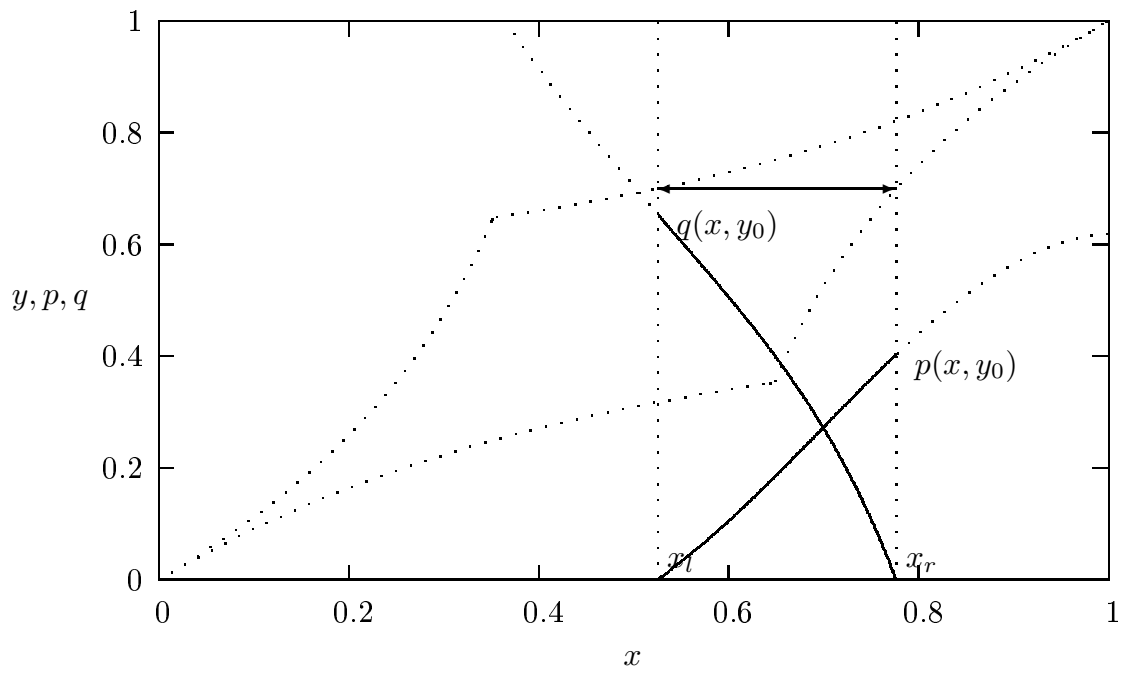


Figure 4.5: Mixed equilibria in bimatrix game with full info for  $c = 1$  and  $y_0 = 0.7$ .

### § 4.2.2 Bimatrix model with incomplete information

Now suppose that the player doesn't know where its opponent is situated and thinks that it is uniformly distributed on  $[0, 1]$ . Then player 0 looks for its solution using a matrix of expected payoffs specified by players' choice:

$$(A', B') = \begin{pmatrix} \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}+cx^2} dy, \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}+cy^2} dy & \int_0^1 \frac{1}{1+c\bar{x}^2} dy, \int_0^1 \frac{1}{1+c\bar{y}^2} dy \\ \int_0^1 \frac{1}{1+c\bar{x}^2} dy, \int_0^1 \frac{1}{1+c\bar{y}^2} dy & \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{\bar{x}^2}{\bar{y}^2}+c\bar{x}^2} dy, \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{\bar{y}^2}{\bar{x}^2}+c\bar{y}^2} dy \end{pmatrix}$$

or in simplified form:

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{cx^2+1}-x \arctan \frac{\sqrt{cx^2+1}}{x}}{\sqrt{cx^2+1}(1+cx^2)} & \frac{1}{1+cx^2} \\ \frac{1}{1+c\bar{x}^2} & \frac{\sqrt{c\bar{x}^2+1}-\bar{x} \arctan \frac{\sqrt{c\bar{x}^2+1}}{\bar{x}}}{\sqrt{c\bar{x}^2+1}(c\bar{x}^2+1)} \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} \frac{x \arctan \frac{\sqrt{cx^2+1}}{x}}{\sqrt{cx^2+1}} & \frac{\arctan \sqrt{c}}{\sqrt{c}} \\ \frac{\arctan \sqrt{c}}{\sqrt{c}} & \frac{\bar{x} \arctan \frac{\sqrt{c\bar{x}^2+1}}{\bar{x}}}{\sqrt{c\bar{x}^2+1}} \end{pmatrix}.$$

Similar matrix  $(A'', B'')$  can be obtained for the player 1 integrating  $(A, B)$  elements by  $x$ .

Player 0 obtains expected equilibrium profile  $(l'_0, l'_1)$  such that  $a'_{i'l'_i} \leq a'_{i'_0 l'_1}$  and  $b'_{l'_0 j} \leq b'_{l'_0 l'_1}$ .

Consider a function  $\frac{\arctan x}{x}$ . It is monotonically decreasing for  $x \geq 0$ . Since  $\frac{\sqrt{cx^2+1}}{x} = \sqrt{c + \frac{1}{x^2}} > \sqrt{c}$ , then  $b'_{01} = b'_{10} = a''_{01} = a''_{10}$  are maximal elements in  $B'$  and  $A''$ . So, each player's mind is that choosing the different station is the best opponent's answer on any its choice. Each expects two possible types of equilibria: player 0 expects  $(0, 1)$  for  $x$  such that  $a'_{01} \geq a'_{11}$  and  $(1, 0)$  for  $a'_{10} \geq a'_{00}$ , player 1 expects  $(0, 1)$  for  $y$  such that  $b''_{01} \geq b''_{00}$  and  $(1, 0)$  for  $b''_{10} \geq b''_{11}$ .

Let  $x_l$  be such that  $a'_{01}(x_l) = a'_{11}(x_l)$ ,  $x_r$  such that  $a'_{10}(x_r) = a'_{00}(x_r)$ ,  $y_l$  such that  $b''_{10}(y_l) = b''_{11}(y_l)$  and  $y_h$  such that  $b''_{01}(y_h) = b''_{00}(y_h)$ . Numeric results show that for player 0 the first equilibria exist at  $0 \leq x \leq x_r$  and second at  $x_l \leq x \leq 1$  where  $x_l < \frac{1}{2} < x_r$  are symmetric with respect to  $\frac{1}{2}$  and tend to it with increasing of  $c$ .

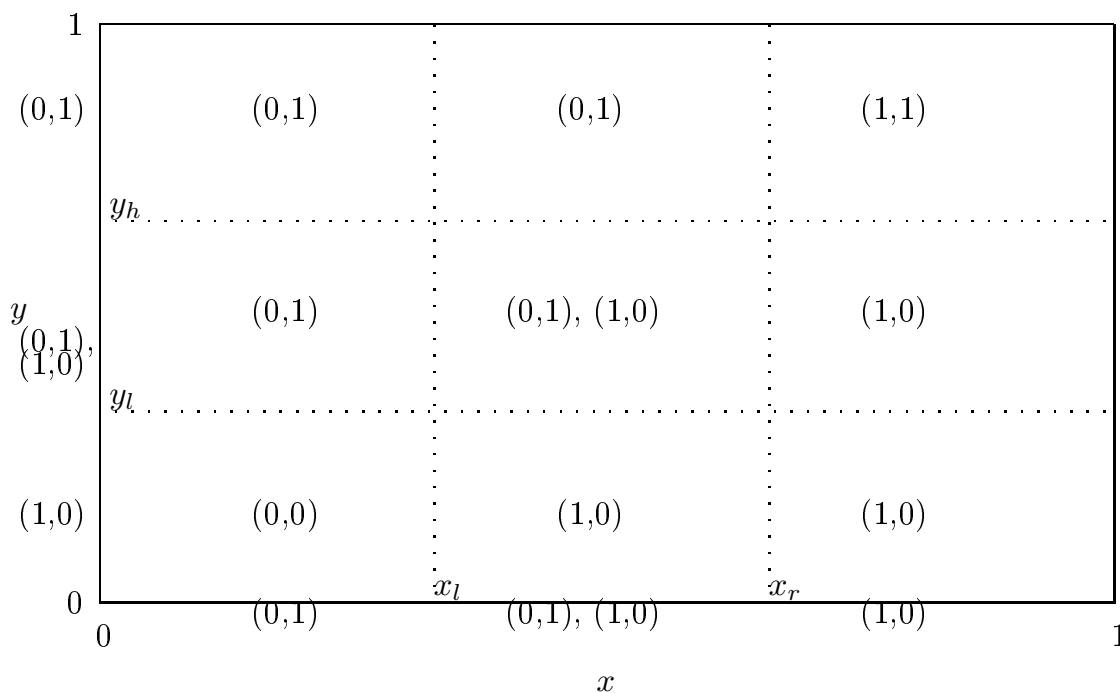


Figure 4.6: Pure equilibria in bimatrix game with incomplete info.

For player 1 first equilibria exist at  $y_l \leq y \leq 1$  and second at  $0 \leq y \leq y_h$  where  $y_l < \frac{1}{2} < y_h$  are symmetric with respect to  $\frac{1}{2}$  and tend to it with increasing of  $c$ .

Each player acts according to its mind about expected equilibrium and so all achieve real equilibrium situation. Equilibria for different squares are presented in Figure 4.6. Let's show that it is so indeed.

Consider  $[0, x_l] \times [0, y_l]$  square. Here  $a'_{01} \geq a'_{11}$ ,  $a'_{10} \leq a'_{00}$ ,  $b''_{10} \geq b''_{11}$ ,  $b''_{01} \leq b''_{00}$ . Player 0 expects (0, 1), so it chooses station 0. Player 1 expects (1, 0) and chooses station 0. Why is (0, 0) equilibrium? Player 0 expects  $a'_{01}$  but obtains  $a'_{00} > a'_{10}$ , so it has no reason to switch on station 1. Player 1 expects  $b''_{10}$ , but obtains  $b''_{00} \geq b''_{01}$ , so it has no reason to switch to station 1.

Consider now  $[x_l, x_r] \times [0, y_l]$  square. Here  $a'_{01} \geq a'_{11}$ ,  $a'_{10} \geq a'_{00}$ ,  $b''_{10} \geq b''_{11}$ ,  $b''_{01} \leq b''_{00}$ . Player 0 expects (0, 1) or (1, 0). Player 1 expects (1, 0), so it chooses station 0. If player 0 chooses station 1 according to (1, 0) players achieve equilibrium. If player 0 chooses station 0 according to (0, 1) it obtains  $a'_{00} \leq a'_{10}$  instead of  $a'_{01}$ , so it switches to station 1.

Similarly we can define equilibria for remaining squares.

Mixed strategies players define also according to their expectations. Player's

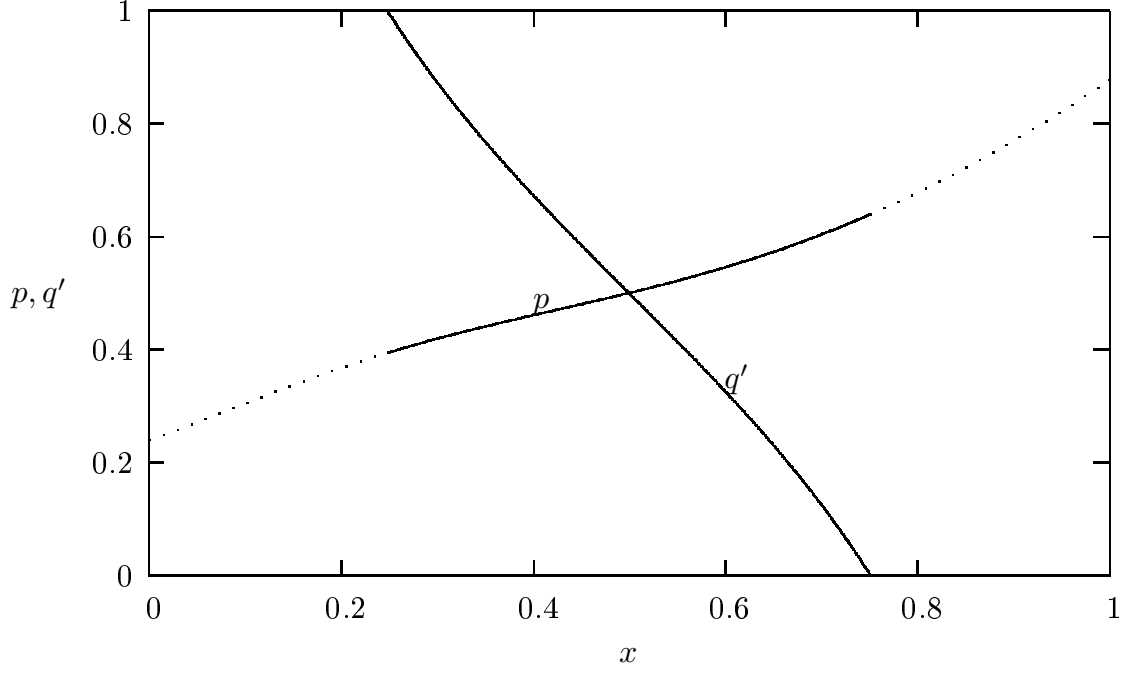


Figure 4.7: Mixed equilibria in bimatrix game with incomplete info for  $c = 1$ .

0 strategy is  $p = \frac{b'_{11} - b'_{10}}{b'_{00} + b'_{11} - b'_{01} - b'_{10}}$ . It depends only on owner's position and not on opponent's position. Note that  $0 < p < 1$  for all  $x$  on  $[0, 1]$  since  $b'_{11} < b'_{10}$  and  $b'_{00} < b'_{01}$ . But  $p$  is connected with expected player's 1 strategy  $q' = \frac{a'_{11} - a'_{01}}{a'_{00} + a'_{11} - a'_{01} - a'_{10}}$  that exists when  $0 \leq q' \leq 1$ , and it is feasibility condition for mixed strategy of player 0.

Since  $a'_{00} = a'_{01}(1 - b'_{00})$  and  $a'_{11} = a'_{10}(1 - b'_{11})$ ,  $q' = \frac{a'_{10}(1 - b'_{11}) - a'_{01}}{-a'_{10}b'_{11} - a'_{01}b'_{00}}$ . So, it is non-negative when  $a'_{10}(1 - b'_{11}) - a'_{01} = a'_{11} - a'_{01} \leq 0$  and not greater than 1 when  $a'_{10}(1 - b'_{11}) - a'_{01} + a'_{10}b'_{11} + a'_{01}b'_{00} = a'_{10} - a'_{01} + a'_{01}b'_{00} = a'_{10} - a'_{00} \geq 0$ .

Figure 4.7 demonstrates player's 0 perception about expected opponent's strategy  $q'$  and its own mixed strategy  $p$ .

For player 1 its mixed strategy is  $q = \frac{a''_{11} - a''_{01}}{a''_{00} + a''_{11} - a''_{01} - a''_{10}}$ . It is the same function as for player 0 depending on  $y$ . It is feasible when  $b''_{01} \geq b''_{00}$  and  $b''_{10} \geq b''_{11}$ . Note, that mixed strategies are feasible exactly in a square  $[x_l, x_r] \times [y_l, y_h]$  where two types of pure equilibria exist both.

### § 4.3 KP-like model for $n$ players

The problem can be presented as KP-like (Koutsoupias and Papadimitriou) model [120] with  $n$  players and two parallel links. Each player is situated at a position  $x_i$ . Pure players' strategy profile is  $(l_1, \dots, l_n)$  where  $l_i$  is number of station that is chosen by player  $i$  and mixed profile is  $(p_1, \dots, p_n)$  where  $p_i$  is a probability that  $i$  chooses station 0. Pure SINR for the  $i$ -th player connecting to  $j$ -th station is

$$SINR_i^j = \frac{1}{\sum_{k \neq i: l_k = j} \frac{(\rho_k^j)^2}{(\rho_i^j)^2} + 1 + c(\rho_i^j)^2}.$$

We also suppose here that  $SINR_i^j = \frac{1}{n}$  if  $l_k = j$  and  $\rho_k^j = 0$  for  $k = 1, \dots, n$ .

In case of pure strategies personal  $i$ -th player's payoff is  $\Lambda_i = SINR_i^{l_i}$ . Pure strategy profile  $(l_1, \dots, l_n)$  is a Nash equilibrium if for each player  $i = 1, \dots, n$  its  $\Lambda_i = \max_{j=0,1} SINR_i^j$ .

Mixed personal  $i$ -th player's payoff on station  $j$  is

$$\Lambda_i^j = \frac{1}{\sum_{k \neq i} \frac{p_k^j (\rho_k^j)^2}{(\rho_i^j)^2} + 1 + c(\rho_i^j)^2},$$

where  $p_k^0 = p_k$  and  $p_k^1 = 1 - p_k$ .  $\Lambda_i = \max_{j=0,1} \Lambda_i^j$ . Mixed strategy profile  $(p_1, \dots, p_n)$  is Nash equilibrium iff for each player  $i$  and each station  $j$ :  $\Lambda_i^l = \Lambda_i$  if  $p_i^j > 0$  and  $\Lambda_i^l < \Lambda_i$  if  $p_i^j = 0$ .

One can check that pure equilibria in two-players KP-like model with players' coordinates  $x$  and  $y$  fully coincide with pure equilibria in the bimatrix model with full information. Mixed equilibrium probabilities are:  $p = \frac{\bar{y}^2 x^2 - c \bar{x}^2 x^2 (2y-1)}{\bar{x}^2 y^2 + x^2 \bar{y}^2}$  and  $q = \frac{\bar{x}^2 y^2 - c \bar{y}^2 y^2 (2x-1)}{\bar{x}^2 y^2 + x^2 \bar{y}^2}$ . They are feasible at the same area as in the bimatrix model with full information and have the same property, that each player in mixed equilibrium uses the most distant station (see Figure 4.8).

### § 4.4 Numerical examples

We conducted simulations on Matlab to study the performance of the proposed game models. The used simulation setting is follows: we considered two BSs (BS0 and

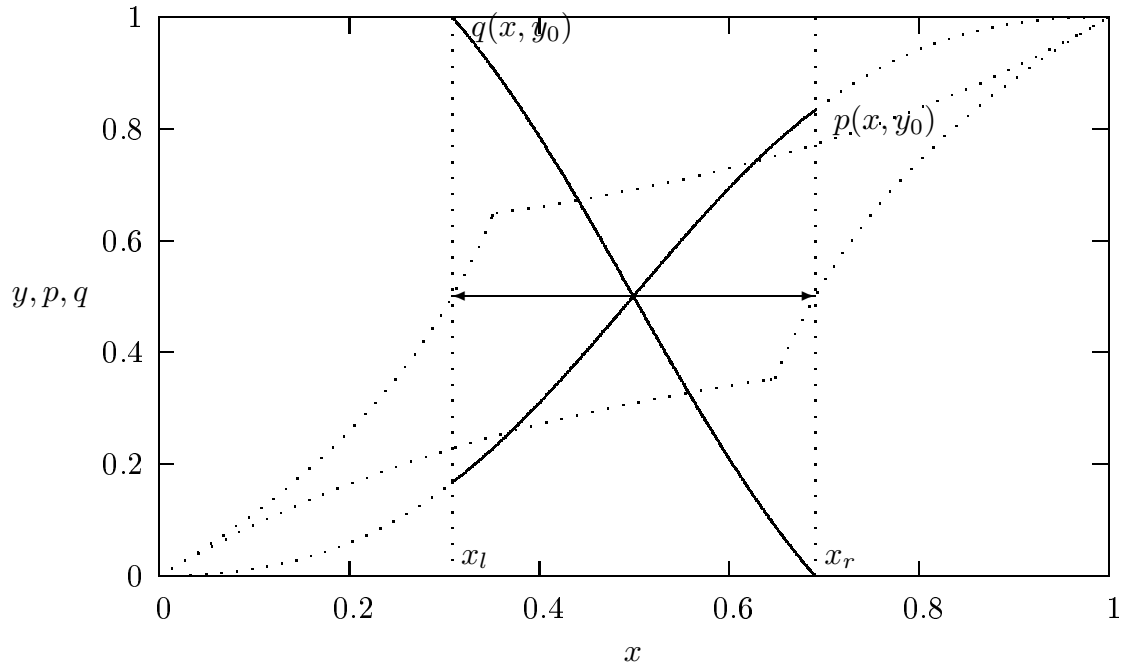


Figure 4.8: Mixed equilibria in KP-like model for  $c = 1$  and  $y_0 = 0.5$ .

BS1) which have identical transmitting power. The distance between two BSs is unit 1. We considered one-dimensional model with two players (player 0 and player 1) who are moving between two BSs independently. We compared the payoff (SINR) of the proposed two players game models and KP-like model against the closest attachment strategy where each player associates with the closest access point for him. The simulations are conducted for both low noise ( $c=1$ ) case and high noise ( $c=5$ ) situations.

#### § 4.4.1 Low noise situation

Fig. 4.9 shows the SINR values of player 0 under different strategies for low noise situation ( $c=1$ ). The game is symmetric, thus we consider the payoff of only one player, namely player 0. We change the position of each player independently between the BSs and measure the SINR value for each setting under different BSs selection strategy. We observed that closest attachment (Fig. 4.9a) strategy gives the worst payoff. For some cases, expected SINR is dropping up to zero. The two player model with incomplete info is a more realistic scenario for real world mobile network. Notably, this case also has better payoff (Fig. 4.9b) than the closest at-

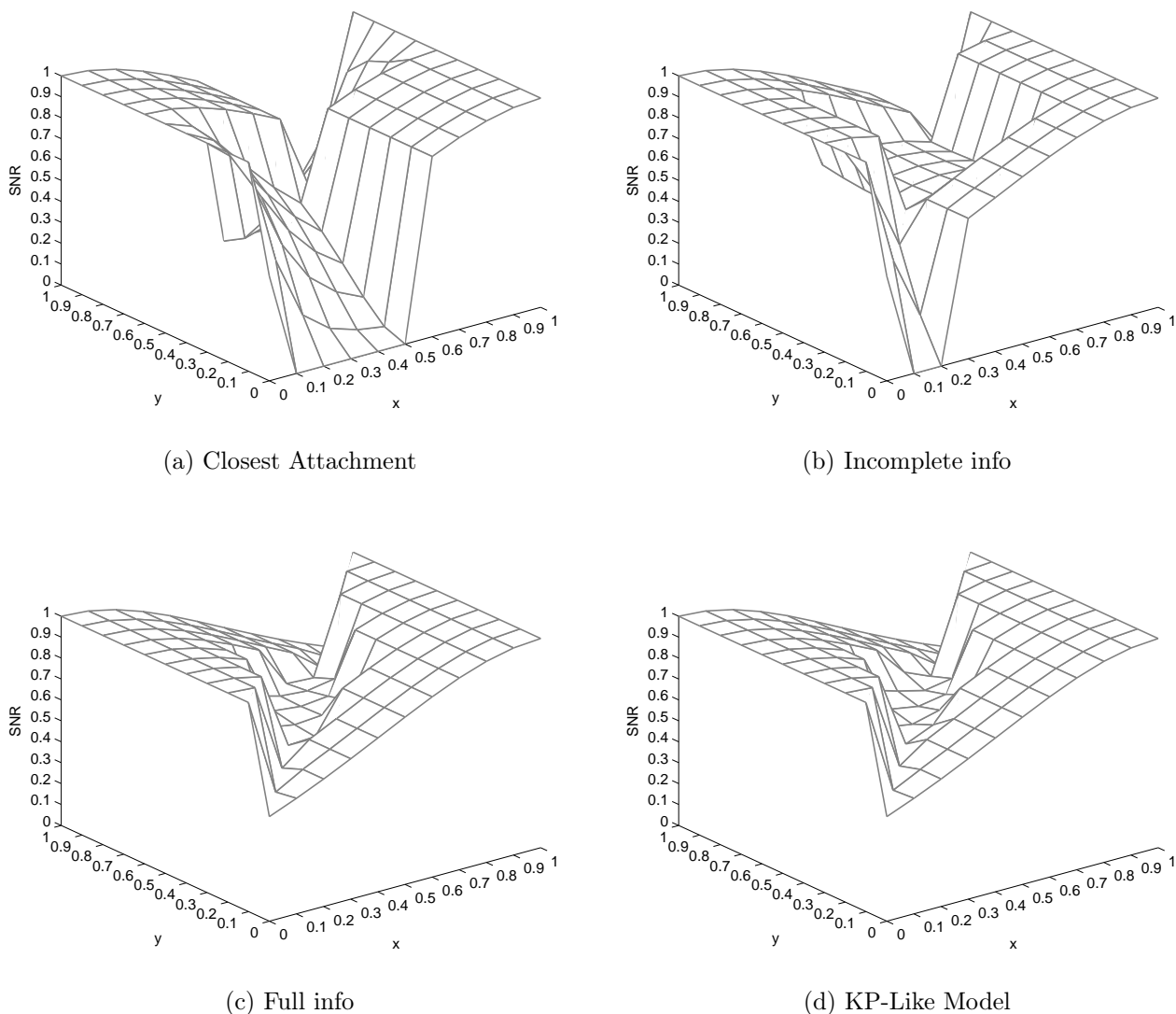


Figure 4.9: The SINR values of player 0 for Low Noise Situation ( $c=1$ ).

tachment. Even though the expected SINR is dropping up to zero, the region with such payoff is comparably smaller than closest attach strategy.

An average SINR for each strategy is presented in Table 4.1, including also the situation when the players' positions are uniformly distributed between the two base stations. The result indicates that the proposed two player game can achieve 11% increment over closest attach strategy, even without having any information about other player.

The advantage of using a game model is further increased with availability of the full information about players. Statistically, the increment is over 18%. When the players have full information about players, they can choose accordingly. Both two player model with info (Fig. 4.10c) and KP-like model with info (Fig. 4.9d) give

Table 4.1: Average SINR values for player 0.

	<b>c=1</b>	<b>c=5</b>
Closest Attached	0.7097	0.6140
Full info	0.8380	0.6634
Incomplete info	0.7874	0.6140
KP-Like Model	0.8461	0.6775

similar payoff. For both models, SINR did not reduce beyond 0.5 for any setting.

There is an explanation for lower payoff under closest attachment strategy. One player can be dominated by suppressing the payoff of the other player. Generally, if first player is very close to the BS than second player and both connects to the same BS, second players SINR will be very low. Meanwhile, second player may get better SINR by connecting to other BS even though it is much far than the first BS. Furthermore, it increases the utilization of network resources. However, it is not possible with closest attachment strategy.

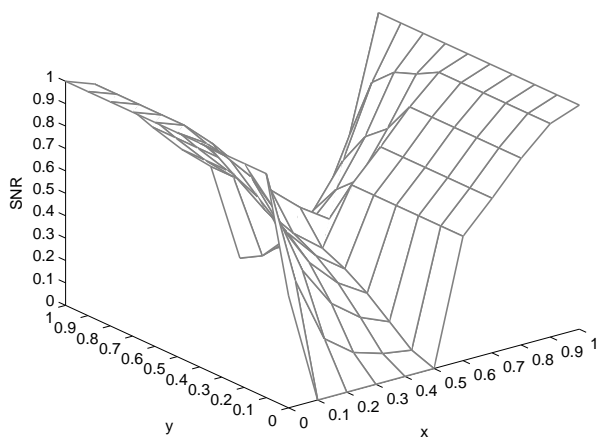
We observe a common high payoff region in all four graphs when players are apart from each other and they are close to different BS. In such cases, the attachment to the closest BS is the most effective choice. Thus, game models also propose the closest BS selection in such situations.

#### § 4.4.2 High noise situation

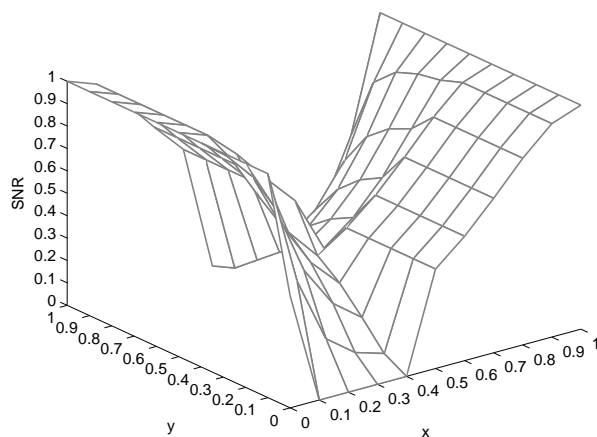
Fig. 4.10 shows the SINR values of player 0 under different strategies for high noise situation ( $c=5$ ). Here, we observed that closest attachment (Fig. 4.10a) strategy and the two player model without info also have almost similar payoff (Fig. 4.10b). The higher noise is dominating here. Therefore, the advantage that can be achieved by connecting to different BS was suppressed. As both strategies have similar SINR graphs, it is concluded that in the worst case our two player game model achieves at least the closest attachment payoff at the absent of the players information.

However, the model with full information and KP-like model are still able to enhance the payoff with full information about players. Both two player model with info (Fig. 4.10c) and KP-like model (Fig. 4.10d) have almost same payoff and in

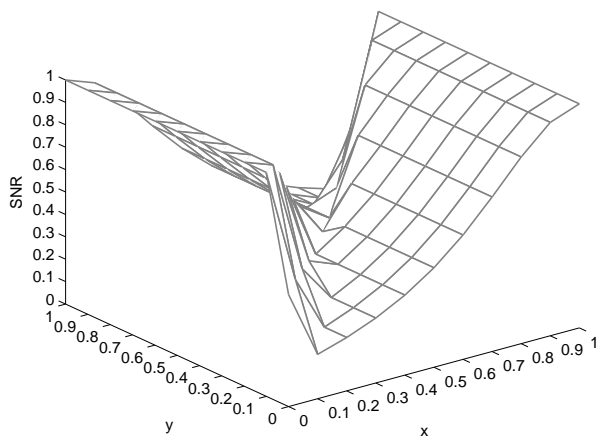




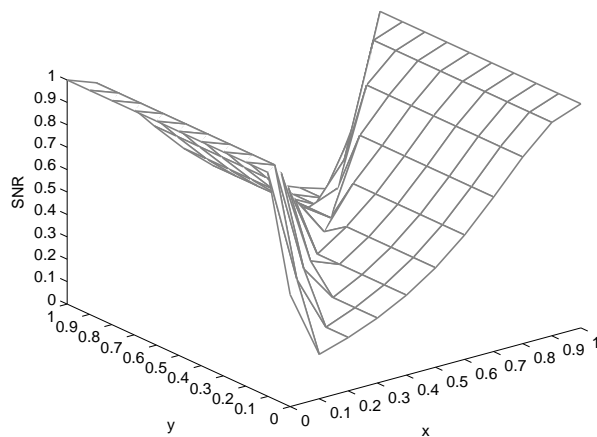
(a) Closest Attachment



(b) Two player game (No info)



(c) Two player game (Full info)



(d) KP-Like Model (Full info)

Figure 4.10: The SINR values of player 0 for High Noise Situation ( $c=5$ ).

this case SINR increment is 9%. Dominant noise has decreased the advantage here.

We can see that all four graphs have more common payoff region than low noise situation. When the channel conditions are getting worse, game models are converging towards the closest attachment strategy.

## § 4.5 Results

We have modeled a one-dimensional base station selection game by considering not only the number of users connected to the BS but also the distances from each user to stations and the noise level. We have obtained pure and mixed Nash equilibria for two-players game with and without knowledge of opponent's location, and also

areas of equilibria existence. For an arbitrary number of players we have offered a KP-like model with full information where all players' locations are known. We performed some numerical experiments to compare an efficiency of closest station selection strategies with equilibria in games of two players with known and unknown opponent's location for cases of low and high noise level. Our main conclusions are follows:

- The player can improve its SINR up to 18% by using game strategy (compared to just connecting to closest base station).
- In more noisy environments, the difference between strategies in different models is smaller.
- Unsurprisingly, knowing other player's location allows obtaining better SINR.
- KP-model with full info for two players is very close to bimatrix two-player game with full info, that illustrates its adequacy.

## Chapter 5

# Two-Sided Telecommunication Market

Modern information transfer tools such as the Internet and mobile communication has led to a new-type market with virtual agents distributed in space. We are observing the formation of new market structures differing in the scale of their resources and tasks, the price and quality of services and other parameters. With the course of years, the separation of network and services has increased the competition among the past monopolies of communication technologies. The markets in these industries are now more efficient due to the growing functional compatibility and decreasing reconfiguration cost. As a result, cloud technologies have been developed and cloud (or virtual) operators have appeared, which suggest various services using their own platforms and interfaces and also the ones leased from large companies. Owing to such a strategy, virtual operators manage without capital investments required for creating and maintaining a high-capacity infrastructure (e.g., a mobile communication network, computing clusters and networks, etc.).

Therefore, as a rule cloud services lease computational resources from large companies and gain income from a comfortable provision of their resources. For example, the cloud firms solving large-scale computational problems may contract for the resources of Google or Amazon. Federal-level communication operators (Rostelecom, Transtelecom) grant their trunk lines on lease to the providers. On a commercial basis, large mobile operators (MTS, Megafon, Beeline) grant access to the infrastructure of their communication networks to virtual mobile operators (NetbyNet, Svyaznoi Mobile, etc.) selling services under their trademark. In addition, mobile communication networks can be used to transfer data in different cloud services,

e.g., the operation of cloud short messaging centers [165].

We present a game-theoretic model of concurrent virtual operator's behavior in the form of the following repeated two-step game [138]. At the first step, the players (virtual operators, i.e., the owners of cloud services) distribute themselves between the large companies (i.e., the owners of resources for communication, computations, etc.). Then the virtual operators assign the prices for their services. The clients are the users (target population) who choose a certain service via the Internet or mobile devices according to their personal preferences. By our assumption, the clients are partitioned in accordance with the Hotelling specification [15], i.e., the clients compare their utilities from choosing the services of certain virtual operators.

After defining the clients partition, we calculate the payoffs of all cloud operators and find a Nash equilibrium [134] for this model of competition. Nash equilibrium is constructed as a result of sequence of the best responses [17, 23, 76] of the players to the opponents' strategies. Section § 5.2 deals with the market model with two virtual operators. We consider two modifications of the model in which the users preferences apply to the cloud firms (virtual operators) and also to the resource owners (large companies). Section § 5.3 is dedicated to the model of symmetrical operators in which the users preferences apply to the resource owners only. Such a hypothesis simplifies equilibrium calculation, since the operators buying a resource from some large company have the same behavior. The analytical results are illustrated by numerical examples.

## § 5.1 A model of the market

Consider a market where several large companies provide services to the population through smaller "cloud" virtual operators buying companies' services and reselling them to clients. Here and further, the term operator means a virtual operator, whereas the term companies applies to large real operators whose resources are resold by virtual operators to clients.

Each company  $i$  allocates some resource  $r_i > 0$  and grants access to it for operators with a wholesale rate  $p_i > 0$  per unit of the resource. Company  $i$  has its own client base (subscribers) of size  $n_i$ . The resource  $r_i > 0$  characterizes the amount

and quality of services provided by this company (and hence its attractiveness for the clients).

Each operator needs to choose a company whose services he is going to sell and also to define a price for the services to be sold to clients. Operator  $j$  enters into a business agreement with company  $i$  with probability  $x_{ij}$ . In particular,  $x_{ij} = 1$  means that operator  $j$  contracts with company  $i$  and  $x_{ij} = 0$  otherwise. Then each operator  $j$  establishes a price  $q_j$  for his services.

Depending on these characteristics, the clients choose a virtual operator for their services. While making his choice, a client is interested in the minimum price for the services of a given operator and also in the maximum attractiveness of the services and the highest probability that this operator provides the services of the contracted company. Denote by  $h_{ij} = S + r_i x_{ij} - q_j$  the utility of the clients of company  $i$  from choosing operator  $j$ . Buying a unit of service of utility  $S$  from an operator, a client pays  $q_j$  for it and obtains a resource  $r_i$  (e.g., an improved quality of services, an additional functionality, a discount) if this operator contracts with his company. Choosing between operators  $j$  and  $l$ , a client compares their utility.

Each operator  $j$  seeks to maximize his total profit  $u_j(x, q) + C_j$ , where the payoff  $u_j(x, q)$  [113] depends on the strategies  $x$  and  $q$  and is defined by *revenue\_per\_client* \* *clients\_count* - *leasing\_costs* (possibly, negative);  $C_j$  is a utility from leased resources, a large enough quantity to guarantee a nonnegativity of the total profit of operator  $j$ . Note that  $C_j$  may also include additional funds of operator  $j$  (e.g., a grant for business setup). We further consider only the payoff  $u_j(x, q)$  of operator  $j$  instead of his total profit, assuming that the total profit is positive.

## § 5.2 Generalized Hotelling specification for two operators

Let two operators ( $j = 1, 2$ ) compete in the market. Then the partition of company  $i$  clients choosing operator  $j$  is given by  $\frac{1}{2} + \frac{h_{ij} - h_{i(3-j)}}{2k_{ij}}$ . The coefficient  $k_{ij}$  describes their preferences, measuring the degree of dissatisfaction that the clients of company  $i$  feel toward operator  $j$ . This coefficient can be related to the difficult-to-access maintenance points and transport cost, low-level service, and so on. Unlike the standard Hotelling specification with  $k_{ij} = k_i$  for all  $j$ , where the whole set of

clients is strictly partitioned into two groups by the operators, in the generalized case, these groups may intersect (i.e., a certain part of clients can be served by both operators), and their union may include not all the clients (i.e., some clients can be served directly by companies without intermediary of operators). By assumption the problem parameters are adjusted so that the partition of company  $i$  clients choosing operator  $j$  does not exceed 1 for all  $i, j$ . This can be achieved, for example, by specifying sufficiently large values  $k_{ij}$ . In addition, we suppose that  $(k_{ij} - ki(3 - j))(h_{ij} - h_{i(3-j)}) \geq 0$  to ensure that the number of clients of company  $i$  using the services of operator 1 or operator 2 is not greater than  $n_i$ .

The payoff function of each operator  $j = 1, 2$  under the known strategies  $x$  and  $q$  has the form

$$u_j(x, q) = q_j \sum_i n_i \left( \frac{1}{2} + \frac{h_{ij} - h_{i(3-j)}}{2k_{ij}} \right) - \sum_i \frac{x_{ij}}{x_{i1} + x_{i2}} p_i r_i.$$

At the beginning of the game, the initial prices  $q$  used by the operators for selling their services to clients are given. The system moves to a new state through a repetition of two steps as follows. At the first step, each operator  $j$  chooses his strategy  $x$  under fixed prices  $q$ , that is, the companies to contract with. At the second step, each operator  $j$  assigns an optimal price  $q$  for his service under fixed  $x$ . Then the game repeats: the distributions of the operators between the companies are corrected under the new prices  $q$ , and the optimal prices are calculated for the new distributions. After several iterations, the system may reach a stationary state, which is a Nash equilibrium for the game in which the operators choose companies to contract with and simultaneously a Nash equilibrium in the optimal pricing game of the services sold. Note that, at any step, there may exist two or more equilibria, and we will discriminate between the notions of “stationary” and “equilibrium” states.

Suppose that there are two large companies in the market and the operators choose between them. Denote by  $x_j$  the probability to contract with the first company for operator  $j$ . Then the opposite probability  $1 - x_j$  is the probability that operator  $j$  chooses the second company. With such notations, the payoff functions

are written as

$$u_1(x, q) = \frac{q_1}{2} \left( (n_1 + n_2) - (q_1 - q_2) \left( \frac{n_1}{k_{11}} + \frac{n_2}{k_{21}} \right) + \left( \frac{n_1 r_1}{k_{11}} - \frac{n_2 r_2}{k_{21}} \right) (x_1 - x_2) \right) - \frac{x_1}{x_1 + x_2} p_1 r_1 - \frac{1 - x_1}{2 - x_1 - x_2} p_2 r_2,$$

$$u_2(x, q) = \frac{q_2}{2} \left( (n_1 + n_2) + (q_1 - q_2) \left( \frac{n_1}{k_{12}} + \frac{n_2}{k_{22}} \right) - \left( \frac{n_1 r_1}{k_{12}} - \frac{n_2 r_2}{k_{22}} \right) (x_1 - x_2) \right) - \frac{x_2}{x_1 + x_2} p_1 r_1 - \frac{1 - x_2}{2 - x_1 - x_2} p_2 r_2.$$

The payoff functions  $u_j(x, q)$  are convex in  $x_j$ . Hence the optimal values  $x_j$  lie at one of the limits of the interval  $[0, 1]$ , which means that the optimal strategies at this step are pure strategies.

Consider the first step of the game where the operators choose their distribution between the companies. Find the best response of the first player to the opponent's strategy  $x_2 = 1$ , that is, the choice of the first company. In this case, the payoff of the first player is given by

$$u_1(x_1 | x_2 = 1, q) = \frac{q_1}{2} \left( (n_1 + n_2) - (q_1 - q_2) \left( \frac{n_1}{k_{11}} + \frac{n_2}{k_{21}} \right) + \left( \frac{n_1 r_1}{k_{11}} - \frac{n_2 r_2}{k_{21}} \right) (x_1 - 1) \right) - \frac{x_1}{x_1 + 1} p_1 r_1 - \frac{1 - x_1}{1 - x_1} p_2 r_2$$

$$= \alpha(q) + \frac{q_1 x_1}{2} \left( \frac{n_1 r_1}{k_{11}} - \frac{n_2 r_2}{k_{21}} \right) - \frac{x_1}{x_1 + 1} p_1 r_1,$$

where  $\alpha(q)$  indicates a term independent of  $x_1$ . The payoff function is convex in  $x_1$  and thus achieves the maximum at one of the limits of the interval  $[0, 1]$ .

For compactness, introduce the notation  $R_j = \frac{n_1 r_1}{k_{1j}} - \frac{n_2 r_2}{k_{2j}}$ ,  $j = 1, 2$ . Then the best response of the first player to the opponent's strategy  $x_2 = 1$  is  $x_1 = \begin{cases} 1 & \text{if } \frac{q_1}{2} R_1 - \frac{p_1 r_1}{2} \geq 0, \\ 0 & \text{if } \frac{q_1}{2} R_1 - \frac{p_1 r_1}{2} \leq 0. \end{cases}$  Note that the best response belongs to the two-element set  $\{0, 1\}$  in the case  $\frac{q_1}{2} R_1 - \frac{p_1 r_1}{2} = 0$ . Similarly, the best response of the first player to

the opponent's strategy  $x_2 = 0$  is  $x_1 = \begin{cases} 1 & \text{if } \frac{q_1}{2} R_1 + \frac{p_2 r_2}{2} \geq 0, \\ 0 & \text{if } \frac{q_1}{2} R_1 + \frac{p_2 r_2}{2} \leq 0. \end{cases}$

By analogy we calculate the best response of the second player to the opponent's strategy  $x_1 = 0$  as  $x_2 = \begin{cases} 1 & \text{if } \frac{q_2}{2} R_2 + \frac{p_2 r_2}{2} \geq 0, \\ 0 & \text{if } \frac{q_2}{2} R_2 + \frac{p_2 r_2}{2} \leq 0, \end{cases}$  and the best response of the second

player to the opponent's strategy  $x_1 = 1$  as  $x_2 = \begin{cases} 1 & \text{if } \frac{q_2}{2}R_2 - \frac{p_1r_1}{2} \geq 0, \\ 0 & \text{if } \frac{q_2}{2}R_2 - \frac{p_1r_1}{2} \leq 0. \end{cases}$

Consequently, we obtain the following equilibria under the current prices  $q$ :

$$x^*(q) = (x_1^*(q), x_2^*(q)) = \begin{cases} (0, 0) & \text{if } \begin{cases} q_1R_1 \leq -p_2r_2, \\ q_2R_2 \leq -p_2r_2, \end{cases} \\ (0, 1) & \text{if } \begin{cases} q_1R_1 \leq p_1r_1, \\ q_2R_2 \geq -p_2r_2, \end{cases} \\ (1, 0) & \text{if } \begin{cases} q_1R_1 \geq -p_2r_2, \\ q_2R_2 \leq p_1r_1, \end{cases} \\ (1, 1) & \text{if } \begin{cases} q_1R_1 \geq p_1r_1, \\ q_2R_2 \geq p_1r_1. \end{cases} \end{cases} \quad (5.2.1)$$

In these cases, each strategy of a player is the best response to the opponent's strategy, and hence nobody benefits by a unilateral deviation. In fact, if any of the players unilaterally deviates from his strategy, then the opponent changes his strategy accordingly by choosing the best response to the new strategy of the former. Note also that at the first step a pure strategy equilibrium does not always exist. If  $R_1$  and  $R_2$  are both greater or smaller than zero simultaneously, then a pure strategy equilibrium exists (in some cases, even two or three equilibria). If they have different signs, then for  $q$ , there are ranges without pure strategy equilibria. For example, under  $R_1 < 0$  and  $R_2 > 0$ , no pure strategy equilibria can be found within the ranges  $\frac{p_1r_1}{R_1} < q_1 < -\frac{p_2r_2}{R_1}$  and  $-\frac{p_2r_2}{R_2} < q_2 < \frac{p_1r_1}{R_2}$ .

Consider the second step at which the players assign their prices for services under a given distribution  $x$ . Let negative prices  $q$  be also admissible and interpret this scenario as operator's investments in some promotion actions for costs minimization. Each of the functions  $u_j$  is concave in  $q_j$ , representing a parabola with descending branches. This means that the optimal strategy to assign the price  $q_j$  is the maximum of  $u_j$  in  $q_j$ .

The best response of the first player to the opponent's strategy  $q_2$  makes up

$$q_1 = \frac{n_1 + n_2 + q_2 \left( \frac{n_1}{k_{11}} + \frac{n_2}{k_{21}} \right) + R_1(x_1 - x_2)}{2 \left( \frac{n_1}{k_{11}} + \frac{n_2}{k_{21}} \right)},$$



and the best response of the second player to the strategy  $q_1$  is given by

$$q_2 = \frac{n_1 + n_2 + q_1 \left( \frac{n_1}{k_{12}} + \frac{n_2}{k_{22}} \right) - R_2(x_1 - x_2)}{2 \left( \frac{n_1}{k_{12}} + \frac{n_2}{k_{22}} \right)}.$$

Hence the equilibrium prices are

$$\begin{aligned} q^*(x) &= (q_1^*(x), q_2^*(x)) = \left( \frac{n_1 + n_2}{3} \left( \frac{2}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) + \frac{x_1 - x_2}{3} \left( \frac{2R_1}{K_1} - \frac{R_2}{K_2} \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{n_1 + n_2}{3} \left( \frac{2}{K_2} + \frac{1}{K_1} \right) - \frac{x_1 - x_2}{3} \left( \frac{2R_2}{K_2} - \frac{R_1}{K_1} \right) \right) \\ &= \left( \frac{(n_1 + n_2)(K_1 + 2K_2) + (x_1 - x_2)(2R_1K_2 - R_2K_1)}{3K_1K_2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{(n_1 + n_2)(2K_1 + K_2) - (x_1 - x_2)(2R_2K_1 - R_1K_2)}{3K_1K_2} \right), \quad (5.2.2) \end{aligned}$$

where  $K_j = \frac{n_1}{k_{1j}} + \frac{n_2}{k_{2j}}$ ,  $j = 1, 2$ .

Consequently, evolving optimally, the system changes its states in the following way. Denote by  $x^{(s)} = (x_1^{(s)}, x_2^{(s)})$  the system state before the first transition step  $s$  when the players distribute themselves between the companies. This state corresponds to the optimal prices  $q^{(s)} = (q_1^*(x^{(s)}), q_2^*(x^{(s)}))$  defined by (5.2.2). Then the next state (see (5.2.1)) is calculated as  $(x_1^*(q^{(s)}), x_2^*(q^{(s)}))$ .

Before the transition  $s > 1$ , when the equilibrium distribution of the operators and the prices for services were defined at least once, we have four possible states of the system, namely:

1)  $(0, 0)$  with the prices  $\left( \frac{(n_1+n_2)(K_1+2K_2)}{3K_1K_2}, \frac{(n_1+n_2)(2K_1+K_2)}{3K_1K_2} \right)$ ,

2)  $(0, 1)$  with the prices

$$\left( \frac{(n_1+n_2)(K_1+2K_2)-(2R_1K_2-R_2K_1)}{3K_1K_2}, \frac{(n_1+n_2)(2K_1+K_2)+(2R_2K_1-R_1K_2)}{3K_1K_2} \right),$$

3)  $(1, 0)$  with the prices

$$\left( \frac{(n_1+n_2)(K_1+2K_2)+(2R_1K_2-R_2K_1)}{3K_1K_2}, \frac{(n_1+n_2)(2K_1+K_2)-(2R_2K_1-R_1K_2)}{3K_1K_2} \right),$$

4)  $(1, 1)$  with the prices  $\left( \frac{(n_1+n_2)(K_1+2K_2)}{3K_1K_2}, \frac{(n_1+n_2)(2K_1+K_2)}{3K_1K_2} \right)$ .

### § 5.2.1 Two operators and company-dependent client preferences

As before, consider the market with two operators ( $j = 1, 2$ ) competing with each other. Let the partition of company  $i$  clients choosing operator  $j$  makes up  $\frac{1}{2} +$

$\frac{h_{ij}-h_{i(3-j)}}{2k_i}$ , in accordance with the Hotelling specification; for the clients of company  $i$ , the coefficient  $k_i$  measures their conservatism, inconveniences of changing operators, and unwillingness to do it. In this case, the total number of clients of company  $i$  who choose the first or second operator is  $n_i$ .

The payoff functions take the form

$$u_1(x, q) = \frac{q_1}{2} \left( (n_1 + n_2) - (q_1 - q_2) \left( \frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2} \right) + (x_1 - x_2) \left( \frac{n_1 r_1}{k_1} - \frac{n_2 r_2}{k_2} \right) \right) - \frac{x_1}{x_1 + x_2} p_1 r_1 - \frac{(1 - x_1)}{2 - x_1 - x_2} p_2 r_2,$$

$$u_2(x, q) = \frac{q_2}{2} \left( (n_1 + n_2) + (q_1 - q_2) \left( \frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2} \right) - (x_1 - x_2) \left( \frac{n_1 r_1}{k_1} - \frac{n_2 r_2}{k_2} \right) \right) - \frac{x_2}{x_1 + x_2} p_1 r_1 - \frac{(1 - x_2)}{2 - x_1 - x_2} p_2 r_2.$$

For definiteness, assume without loss of generality that  $\frac{n_1 r_1}{k_1} - \frac{n_2 r_2}{k_2} \geq 0$  (otherwise, simply renumber the companies). Denote this difference by  $R = \frac{n_1 r_1}{k_1} - \frac{n_2 r_2}{k_2}$ .

The following equilibria are then possible for the distributions of the operators between the companies:

$$x^*(q) = (x_1^*(q), x_2^*(q)) = \begin{cases} (0, 0) & \text{if } \begin{cases} q_1 R \leq -p_2 r_2, \\ q_2 R \leq -p_2 r_2, \end{cases} \\ (0, 1) & \text{if } \begin{cases} q_1 R \leq p_1 r_1, \\ q_2 R \geq -p_2 r_2, \end{cases} \\ (1, 0) & \text{if } \begin{cases} q_1 R \geq -p_2 r_2, \\ q_2 R \leq p_1 r_1, \end{cases} \\ (1, 1) & \text{if } \begin{cases} q_1 R \geq p_1 r_1, \\ q_2 R \geq p_1 r_1. \end{cases} \end{cases} \quad (5.2.3)$$

In these cases, the strategy of each player is the best response to the opponent's strategy, and hence nobody benefits by a unilateral deviation.

The equilibrium prices for services are

$$q^*(x) = (q_1^*(x), q_2^*(x)) = \left( \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} + \frac{(x_1 - x_2)(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)}, \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} - \frac{(x_1 - x_2)(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)} \right). \quad (5.2.4)$$

Now, there is an important question: Does the system come to a stationary state or to a cycle of states under a multiple repetition of the two-step game?

Before the transition  $s > 1$ , when the equilibrium distribution of the operators between the companies and the prices for services were defined at least once, we have four possible states of the system:

1)  $(0, 0)$  with the prices  $\left( \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1}, \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} \right)$ ,

2)  $(0, 1)$  with the prices

$$\left( \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} - \frac{(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)}, \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} + \frac{(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)} \right),$$

3)  $(1, 0)$  with the prices

$$\left( \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} + \frac{(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)}, \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} - \frac{(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)} \right),$$

4)  $(1, 1)$  with the prices  $\left( \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1}, \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} \right)$ .

a) The state  $(0, 0)$  cannot be stationary, since the equilibrium conditions (5.2.3) fail for it. As a result, from this state the system moves to one of the three remaining states.

b) Consider the fourth state  $(1, 1)$  of the system. Here we have the equality  $q_1^{(s)} = q_2^{(s)}$ . If the equilibrium conditions (5.2.3) hold for  $(1, 1)$ , then the system comes to a stationary state. Otherwise, both conditions fail, and the system moves to  $(0, 1)$  or  $(1, 0)$ . Note that the operator choosing the first company increases his price, whereas the one choosing the second company decreases his price, which guarantees satisfaction of the equilibrium conditions and the stationarity of the new state.

c) Let the system be in the second state  $(0, 1)$ . The second condition of (5.2.3) holds for this state since  $q_2^{(s)} > 0$ . If this also applies to the first condition, then the system is in a stationary state. Otherwise, the system moves to the stationary state  $(1, 1)$ , since  $q_1^{(s+1)} = q_2^{(s+1)}$  increases in comparison with  $q_1^{(s)}$  and both conditions are valid in it.

d) Suppose the system is the third state  $(1, 0)$ . The first condition of (5.2.3) holds for this state because  $q_1^{(s)} > 0$ . If the second condition is also valid, then the system is in a stationary state. Otherwise, by analogy with item c), the system moves to the stationary state  $(1, 1)$ .

Summarizing the results of this analysis, we draw a series of conclusions for the system with  $\frac{n_1 r_1}{k_1} \geq \frac{n_2 r_2}{k_2}$ .

1. The system comes to a stationary state at most after three transitions. After the first transition, the system moves to one of the four states described. Then the longest path to a stationary state (two transitions) is possible if after the first transition the system moves to the state  $(0, 0)$ .

2. The admissible stationary states of the system are defined by the model parameters. The system can come to the stationary states  $(0, 1)$  and  $(1, 0)$  if

$$\left( \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} - \frac{(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)} \right) R \leq p_1 r_1$$

and to the state  $(1, 1)$  if

$$\frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} R \geq p_1 r_1.$$

Note that when the second condition fails, the first one is valid. However, under

$$\frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1} - \frac{(n_1 r_1 k_2 - n_2 r_2 k_1)}{3(n_1 k_2 + n_2 k_1)} \leq \frac{p_1 r_1}{R} \leq \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{n_1 k_2 + n_2 k_1},$$

both conditions hold, and any of the three states is stationary.

3. The equilibrium and stationary states of the system are independent of the price for services of the second company.

**Example 10.** *The companies have the same number of clients  $n_1 = n_2 = 10$ . The first company provides a larger resource ( $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 0.5$ ) than the second but with higher prices ( $p_1 = 5$ ,  $p_2 = 1$ ). In addition, the degree of dissatisfaction with the former is smaller in comparison with the latter ( $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ ). The initial prices for services assigned by the operators are  $q_1 = 1$  and  $q_2 = 0.5$ . For these prices, formula (5.2.3) yields the equilibrium distribution  $x^{(1)} = (1, 0)$  in the market. Using (5.2.4), we easily calculate the new prices  $q^{(1)} \approx (1.5, 1.667)$ . For the new prices, the distribution is  $x^{(2)} = (1, 1)$ ; see (5.2.3). For the distribution  $x^{(2)}$ , the new prices are  $q^{(2)} = (1.333, 1.333)$ , which lead to  $x^{(3)} = x^{(2)} = (1, 1)$ . In other words, the system comes to a stationary state after two transitions.*

## § 5.2.2 Two operators and operator-dependent client preferences

Now, suppose that the partition of company  $i$  clients choosing operator  $j$  makes up  $\frac{1}{2} + \frac{h_{ij} - h_{i(3-j)}}{2k_j}$  and the coefficient  $k_j$  measures the degree of dissatisfaction of the

clients served by operator  $j$ , for example, due to the difficult-to-access maintenance points and transport cost, low-level service, and so on.

The payoff functions take the form

$$\begin{aligned}
 u_1(x, q) &= \frac{q_1}{2k_1} ((n_1 + n_2)(k_1 - q_1 + q_2) + (n_1r_1 - n_2r_2)(x_1 - x_2)) \\
 &\quad - \frac{x_1}{x_1 + x_2} p_1 r_1 - \frac{(1 - x_1)}{2 - x_1 - x_2} p_2 r_2, \\
 u_2(x, q) &= \frac{q_2}{2k_2} ((n_1 + n_2)(k_2 + q_1 - q_2) - (n_1r_1 - n_2r_2)(x_1 - x_2)) \\
 &\quad - \frac{x_2}{x_1 + x_2} p_1 r_1 - \frac{(1 - x_2)}{2 - x_1 - x_2} p_2 r_2.
 \end{aligned}$$

The following equilibria are then possible for the distributions of the operators between the companies:

$$x^*(q) = (x_1^*(q), x_2^*(q)) = \begin{cases} (0, 0) & \text{if } \begin{cases} q_1(n_1r_1 - n_2r_2) \leq -p_2r_2k_1, \\ q_2(n_1r_1 - n_2r_2) \leq -p_2r_2k_2, \end{cases} \\ (0, 1) & \text{if } \begin{cases} q_1(n_1r_1 - n_2r_2) \leq p_1r_1k_1, \\ q_2(n_1r_1 - n_2r_2) \geq -p_2r_2k_2, \end{cases} \\ (1, 0) & \text{if } \begin{cases} q_1(n_1r_1 - n_2r_2) \geq -p_2r_2k_1, \\ q_2(n_1r_1 - n_2r_2) \leq p_1r_1k_2, \end{cases} \\ (1, 1) & \text{if } \begin{cases} q_1(n_1r_1 - n_2r_2) \geq p_1r_1k_1, \\ q_2(n_1r_1 - n_2r_2) \geq p_1r_1k_2. \end{cases} \end{cases} \quad (5.2.5)$$

The equilibrium prices for services are

$$q^*(x) = (q_1^*(x), q_2^*(x)) = \left( \frac{2k_1 + k_2}{3} + \frac{(x_1 - x_2)(n_1r_1 - n_2r_2)}{3(n_1 + n_2)}, \frac{2k_2 + k_1}{3} - \frac{(x_1 - x_2)(n_1r_1 - n_2r_2)}{3(n_1 + n_2)} \right). \quad (5.2.6)$$

Like in the previous case, let us find out whether the system comes to a stationary state or to a cycle of states under a multiple repetition of the two-step game. For definiteness, assume that  $n_1r_1 \geq n_2r_2$  (otherwise, simply renumber the companies).

Before the transition  $s > 1$ , when the equilibrium distribution of the operators between the companies and the prices for services were defined at least once, we have four possible states of the system:

- 1)  $(0, 0)$  with the prices  $(\frac{2k_1+k_2}{3}, \frac{2k_2+k_1}{3})$ ,
- 2)  $(0, 1)$  with the prices  $(\frac{2k_1+k_2}{3} - \frac{(n_1r_1-n_2r_2)}{3(n_1+n_2)}, \frac{2k_2+k_1}{3} + \frac{(n_1r_1-n_2r_2)}{3(n_1+n_2)})$ ,
- 3)  $(1, 0)$  with the prices  $(\frac{2k_1+k_2}{3} + \frac{(n_1r_1-n_2r_2)}{3(n_1+n_2)}, \frac{2k_2+k_1}{3} - \frac{(n_1r_1-n_2r_2)}{3(n_1+n_2)})$ ,
- 4)  $(1, 1)$  with the prices  $(\frac{2k_1+k_2}{3}, \frac{2k_2+k_1}{3})$ .

a) For the first state, the system moves to one of the three other states  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ , or  $(1, 1)$ .

b) Consider the fourth state  $(1, 1)$  of the system. If the equilibrium conditions (5.2.5) hold for  $(1, 1)$ , then the system comes to a stationary state. If the first condition fails, then the system moves to  $(0, 1)$ . In addition,  $q_1^{(s+1)}$  decreases in comparison with  $q_1^{(s)}$ , whereas  $q_2^{(s+1)}$  increases in comparison with  $q_2^{(s)}$ , that is, the equilibrium conditions hold for this state at the next transition  $s + 1$ , and the state under consideration becomes stationary for the system. By analogy, if the second condition is not valid, then the system moves to  $(1, 0)$ , which also leads to a stationary state. Finally, whenever both conditions take no place, the system moves to  $(0, 1)$  or  $(1, 0)$ , which becomes stationary.

c) Let the system be in the second state  $(0, 1)$ . The second condition of (5.2.5) holds for this state since  $q_2^{(s)} > 0$ . If this also applies to the first condition, then the system is in a stationary state. Otherwise, the system moves to the state  $(1, 1)$  or  $(1, 0)$ . If both conditions are valid for the state  $(1, 1)$ , then the system moves to this state, new prices are assigned for it, and, in accordance with item b), the system comes to a stationary state at most after one transition. If the second condition fails for  $(1, 1)$ , then the system moves to the state  $(1, 0)$ . In this state,  $q_1^{(s+1)}$  increases in comparison with  $q_1^{(s)}$ , whereas  $q_2^{(s+1)}$  decreases in comparison with  $q_2^{(s)}$ , that is, the equilibrium conditions hold for this state at the next transition  $s + 1$ , and the state under consideration becomes stationary for the system.

d) Suppose the system is in the third state  $(1, 0)$ . The first condition of (5.2.5) holds for this state because  $q_1^{(s)} > 0$ . If the second condition is also valid, then the system is in a stationary state. Otherwise, by analogy with item c), the system moves to the state  $(1, 1)$  or  $(0, 1)$ . If both conditions are valid for the state  $(1, 1)$ , then the system moves to this state, new prices are assigned for it, and, in accordance with item b), the system comes to a stationary state at most after one transition. If the

first condition fails for  $(1, 1)$ , then the system moves to the state  $(0, 1)$ . In this state,  $q_1^{(s+1)}$  decreases in comparison with  $q_1^{(s)}$ , whereas  $q_2^{(s+1)}$  increases in comparison with  $q_2^{(s)}$ , that is, the equilibrium conditions hold for this state at the next transition  $s + 1$ , and the state under consideration becomes stationary for the system.

Summarizing the results of this analysis, we draw a series of conclusions for the system with  $n_1 r_1 \geq n_2 r_2$ .

1. Like in the previous case, the system comes to a stationary state at most after three transitions.

2. The system comes to the following stationary states  $(x_1, x_2)$  only under the following conditions imposed on its parameters:

$$(x_1, x_2) = \begin{cases} (0, 1) & \text{if } \left( \frac{2k_1+k_2}{3} - \frac{(n_1 r_1 - n_2 r_2)}{3(n_1+n_2)} \right) (n_1 r_1 - n_2 r_2) \leq p_1 r_1 k_1, \\ (1, 0) & \text{if } \left( \frac{2k_2+k_1}{3} - \frac{(n_1 r_1 - n_2 r_2)}{3(n_1+n_2)} \right) (n_1 r_1 - n_2 r_2) \leq p_1 r_1 k_2, \\ (1, 1) & \text{if } \begin{cases} \frac{2k_1+k_2}{3} (n_1 r_1 - n_2 r_2) \geq p_1 r_1 k_1, \\ \frac{2k_2+k_1}{3} (n_1 r_1 - n_2 r_2) \geq p_1 r_1 k_2. \end{cases} \end{cases}$$

3. The equilibrium and stationary states of the system are independent of the price for services of the second company.

**Example 11.** *The companies have the same number of clients  $n_1 = n_2 = 10$ . The first company provides a larger resource ( $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 0.5$ ) than the second but with higher prices ( $p_1 = 5$ ,  $p_2 = 1$ ). In addition, the degree of dissatisfaction with the first operator is greater in comparison with the second ( $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 2$ ). The initial prices for services assigned by the operators are  $q_1 = 1$  and  $q_2 = 2$ . For these prices, formula (5.2.5) yields the equilibrium distribution  $x^{(1)} = (0, 1)$  in the market. Using (5.2.6), we easily calculate the new prices  $q^{(1)} = (3.25, 2.75)$ . For the new prices, the distribution is  $x^{(2)} = x^{(1)} = (0, 1)$ ; see (5.2.5). In other words, the system comes to a stationary state after one transition.*

**Example 12.** *The companies have the same number of clients  $n_1 = n_2 = 10$ . The first company provides a larger resource ( $r_1 = 0.5$ ,  $r_2 = 0.25$ ) than the second but with higher prices ( $p_1 = 5$ ,  $p_2 = 1$ ). In addition, the degree of dissatisfaction with the first operator is smaller in comparison with the second ( $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 4$ ). The initial prices for services assigned by the operators are  $q_1 = 1$  and  $q_2 = 2$ . For*

these prices, formula (5.2.5) yields the equilibrium distribution  $x^{(1)} = (0, 1)$  in the market. Using (5.2.6), we easily calculate the new prices  $q^{(1)} = (2.625, 3.375)$ . For the new prices, the distribution is  $x^{(2)} = (1, 0)$ ; see (5.2.5). For the distribution  $x^{(2)}$ , the new prices are  $q^{(2)} \approx (2.708, 3.292)$ , which give  $x^{(3)} = x^{(2)} = (1, 0)$ . In other words, the system comes to a stationary state after two transitions.

### § 5.2.3 Operator-dependent client preferences

Now, let the partition of company  $i$ 's clients choosing operator  $j$  makes up  $\frac{1}{2} + \frac{h_{ij} - h_{i(3-j)}}{2k_j}$ , the coefficient  $k_j$  measures the degree of dissatisfaction of the clients served by operator  $j$ , e.g., due to the difficult-to-access maintenance points and transport cost, low-level service, and so on.

The payoff functions take the form

$$\begin{aligned}
 u_1(x, q) &= \frac{q_1}{2k_1} ((n_1 + n_2)(k_1 - q_1 + q_2) + (n_1r_1 - n_2r_2)(x_1 - x_2)) \\
 &\quad - \frac{x_1}{x_1 + x_2} p_1 r_1 - \frac{(1 - x_1)}{2 - x_1 - x_2} p_2 r_2, \\
 u_2(x, q) &= \frac{q_2}{2k_2} ((n_1 + n_2)(k_2 + q_1 - q_2) - (n_1r_1 - n_2r_2)(x_1 - x_2)) \\
 &\quad - \frac{x_2}{x_1 + x_2} p_1 r_1 - \frac{(1 - x_2)}{2 - x_1 - x_2} p_2 r_2.
 \end{aligned}$$

The following equilibria are then possible for the distributions of the operators between the companies:

$$x^*(q) = (x_1^*(q), x_2^*(q)) = \begin{cases} (0, 0), & \text{if } \begin{cases} q_1(n_1r_1 - n_2r_2) \leq -p_2r_2k_1, \\ q_2(n_1r_1 - n_2r_2) \leq -p_2r_2k_2, \end{cases} \\ (0, 1), & \text{if } \begin{cases} q_1(n_1r_1 - n_2r_2) \leq p_1r_1k_1, \\ q_2(n_1r_1 - n_2r_2) \geq -p_2r_2k_2, \end{cases} \\ (1, 0), & \text{if } \begin{cases} q_1(n_1r_1 - n_2r_2) \geq -p_2r_2k_1, \\ q_2(n_1r_1 - n_2r_2) \leq p_1r_1k_2, \end{cases} \\ (1, 1), & \text{if } \begin{cases} q_1(n_1r_1 - n_2r_2) \geq p_1r_1k_1, \\ q_2(n_1r_1 - n_2r_2) \geq p_1r_1k_2. \end{cases} \end{cases} \quad (5.2.7)$$



The equilibrium prices for services are

$$q^*(x) = (q_1^*(x), q_2^*(x)) = \left( \frac{2k_1 + k_2}{3} + \frac{(x_1 - x_2)(n_1r_1 - n_2r_2)}{3(n_1 + n_2)}, \frac{2k_2 + k_1}{3} - \frac{(x_1 - x_2)(n_1r_1 - n_2r_2)}{3(n_1 + n_2)} \right). \quad (5.2.8)$$

Like in the previous case, find out whether the system comes to a stationary state or to a cycle of states under a multiple repetition of the two-step game. For the sake of definiteness, assume  $n_1r_1 \geq n_2r_2$  (otherwise, simply renumber the companies).

Before the transition  $s > 1$  when the equilibrium distribution of the operators between the companies and the prices for services were defined at least once, we have four possible states of the system as follows: 1)  $(0, 0)$  with the prices  $(\frac{2k_1+k_2}{3}, \frac{2k_2+k_1}{3})$ , 2)  $(0, 1)$  with the prices  $(\frac{2k_1+k_2}{3} - \frac{(n_1r_1-n_2r_2)}{3(n_1+n_2)}, \frac{2k_2+k_1}{3} + \frac{(n_1r_1-n_2r_2)}{3(n_1+n_2)})$ , 3)  $(1, 0)$  with the prices  $(\frac{2k_1+k_2}{3} + \frac{(n_1r_1-n_2r_2)}{3(n_1+n_2)}, \frac{2k_2+k_1}{3} - \frac{(n_1r_1-n_2r_2)}{3(n_1+n_2)})$ , 4)  $(1, 1)$  with the prices  $(\frac{2k_1+k_2}{3}, \frac{2k_2+k_1}{3})$ .

a) For the first state the system moves to one of the three other states  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  or  $(1, 1)$ .

b) Consider the fourth state  $(1, 1)$  of the system. If the equilibrium conditions (5.2.7) hold for  $(1, 1)$ , then the system comes to a stationary state. If the first condition fails, the system moves to  $(0, 1)$ . In addition,  $q_1^{(s+1)}$  decreases in comparison with  $q_1^{(s)}$  while  $q_2^{(s+1)}$  increases in comparison with  $q_2^{(s)}$ , i.e., the equilibrium conditions hold for this state at the next transition  $s+1$  and the state under consideration becomes stationary for the system. By analogy, if the second condition is not valid, the system moves to  $(1, 0)$ , which also leads to a stationary state. Finally, whenever both conditions take no place, the system moves to  $(0, 1)$  or  $(1, 0)$ , which becomes stationary.

c) Let the system be in the second state  $(0, 1)$ . The second condition of (5.2.7) holds for this state on the strength of  $q_2^{(s)} > 0$ . If this also applies to the first condition, then the system is in a stationary state. Otherwise, the system moves to the state  $(1, 1)$  or  $(1, 0)$ . If both conditions are valid for the state  $(1, 1)$ , the system moves to this state, new prices are assigned for it and, in accordance with item (b), the system comes to a stationary state at most after one transition. If the second

condition fails for  $(1, 1)$ , the system moves to the state  $(1, 0)$ . In this state,  $q_1^{(s+1)}$  increases in comparison with  $q_1^{(s)}$  while  $q_2^{(s+1)}$  decreases in comparison with  $q_2^{(s)}$ , i.e., the equilibrium conditions hold for this state at the next transition  $s + 1$  and the state under consideration becomes stationary for the system.

d) Assume the system is the third state  $(1, 0)$ . The first condition of (5.2.7) holds for this state because  $q_1^{(s)} > 0$ . If the second condition is also valid, then the system is in a stationary state. Otherwise, by analogy with item (c), the system moves to the state  $(1, 1)$  or  $(0, 1)$ . If both conditions are valid for the state  $(1, 1)$ , the system moves to this state, new prices are assigned for it and, in accordance with item (b), the system comes to a stationary state at most after one transition. If the first condition fails for  $(1, 1)$ , the system moves to the state  $(0, 1)$ . In this state,  $q_1^{(s+1)}$  decreases in comparison with  $q_1^{(s)}$  while  $q_2^{(s+1)}$  increases in comparison with  $q_2^{(s)}$ , i.e., the equilibrium conditions hold for this state at the next transition  $s + 1$  and the state under consideration becomes stationary for the system.

Summarizing the results of this analysis, we draw a series of conclusions for the system with  $n_1 r_1 \geq n_2 r_2$ .

1. Like in the previous case, the system comes to a stationary state at most after three transitions.

2. The system comes to the following stationary states  $(x_1, x_2)$  only under the following conditions imposed on its parameters:

$$(x_1, x_2) = \begin{cases} (0, 1), & \text{if } \left( \frac{2k_1+k_2}{3} - \frac{(n_1 r_1 - n_2 r_2)}{3(n_1+n_2)} \right) (n_1 r_1 - n_2 r_2) \leq p_1 r_1 k_1, \\ (1, 0), & \text{if } \left( \frac{2k_2+k_1}{3} - \frac{(n_1 r_1 - n_2 r_2)}{3(n_1+n_2)} \right) (n_1 r_1 - n_2 r_2) \leq p_1 r_1 k_2, \\ (1, 1), & \text{if } \begin{cases} \frac{2k_1+k_2}{3} (n_1 r_1 - n_2 r_2) \geq p_1 r_1 k_1, \\ \frac{2k_2+k_1}{3} (n_1 r_1 - n_2 r_2) \geq p_1 r_1 k_2. \end{cases} \end{cases}$$

3. The equilibrium and stationary states of the system are independent of the price for services of the second company.

**Example 13.** *The companies have the same number of clients,  $n_1 = n_2 = 10$ . The first company provides a larger resource ( $r_1 = 1, r_2 = 0.5$ ) than the second but with higher prices ( $p_1 = 5, p_2 = 1$ ) In addition, the degree of dissatisfaction with the first operator is greater in comparison with the second ( $k_1 = 4, k_2 = 2$ ).*

The initial prices for services assigned by the operators are  $q_1 = 1, q_2 = 2$ . For these prices, formula (5.2.7) yields the equilibrium distribution  $x^{(1)} = (0, 1)$  in the market. Using (5.2.8), we easily calculate the new prices  $q^{(1)} = (3.25, 2.75)$ . For the new prices, the distribution is  $x^{(2)} = x^{(1)} = (0, 1)$ , see (5.2.7). In other words, the system comes to a stationary state after one transition.

**Example 14.** The companies have the same number of clients,  $n_1 = n_2 = 10$ . The first company provides a larger resource ( $r_1 = 0.5, r_2 = 0.25$ ) than the second but with higher prices ( $p_1 = 5, p_2 = 1$ ). In addition, the degree of dissatisfaction with the first operator is smaller in comparison with the second ( $k_1 = 2, k_2 = 4$ ). The initial prices for services assigned by the operators are  $q_1 = 1, q_2 = 2$ . For these prices, formula (5.2.7) yields the equilibrium distribution  $x^{(1)} = (0, 1)$  in the market. Using (5.2.8), we easily calculate the new prices  $q^{(1)} = (2.625, 3.375)$ . For the new prices, the distribution is  $x^{(2)} = (1, 0)$ , see (5.2.7). For the distribution  $x^{(2)}$ , the new prices are  $q^{(2)} \approx (2.708, 3.292)$ , which give  $x^{(3)} = x^{(2)} = (1, 0)$ . In other words, the system comes to a stationary state after two transitions.

### § 5.3 M operators and company-dependent client preferences

Now, consider the market where  $M \geq 3$  operators distribute themselves between two companies. In this case, the partition of company  $i$  clients choosing operator  $j$  is defined as  $\frac{1}{M} + \sum_{l \neq j} \frac{h_{ij} - h_{il}}{Mk_i}$ .

The payoff function of each operator  $j$  under the known strategies  $x$  and  $q$  has the form

$$u_j(x, q) = q_j \sum_i n_i \left( \frac{1}{M} + \sum_{l \neq j} \frac{h_{ij} - h_{il}}{Mk_i} \right) - \sum_i \frac{x_{ij}}{\sum_l x_{il}} p_i r_i.$$

The operators choose between two large companies operating in the market. As in the case of two operators, we use the notation  $x_j$  to represent the probability that operator  $j$  contracts with the first company. Then  $1 - x_j$  is the probability that operator  $j$  contracts with the second company. With this notation, the payoff

function of operator  $j = 1, \dots, M$  can be written as

$$\begin{aligned}
u_j(x, q) &= \frac{q_j}{M} \left( (n_1 + n_2) - ((M-1)q_j - \sum_{l \neq j} q_l) \left( \frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2} \right) \right. \\
&\quad \left. + ((M-1)x_j - \sum_{l \neq j} x_l) \left( \frac{n_1 r_1}{k_1} - \frac{n_2 r_2}{k_2} \right) \right) \\
&\quad - \frac{x_j}{\sum_l x_l} p_1 r_1 - \frac{(1-x_j)}{M - \sum_l x_l} p_2 r_2 \\
&= \alpha_j(q) + \frac{\left( \frac{n_1 r_1}{k_1} - \frac{n_2 r_2}{k_2} \right) q_j}{M} \left( (M-1)x_j - \sum_{l \neq j} x_l \right) \\
&\quad - \frac{x_j}{\sum_l x_l} p_1 r_1 - \frac{(1-x_j)}{M - \sum_l x_l} p_2 r_2,
\end{aligned}$$

where  $\alpha_j(q)$  is a value independent of  $x$ . Here we let  $\frac{0}{0} = 1$ .

The payoff functions  $u_j(x, q)$  are convex in  $x_j$ . Hence the optimal values  $x_j$  lie at one of the limits of the interval  $[0, 1]$ , which means that the optimal strategies are pure strategies.

For definiteness, assume that  $\frac{n_1 r_1}{k_1} \geq \frac{n_2 r_2}{k_2}$  (if this inequality fails, just renumber the companies). Denote this difference by  $R = \frac{n_1 r_1}{k_1} - \frac{n_2 r_2}{k_2} \geq 0$ .

For the given prices  $q$ , the equilibrium distribution of the operators between the companies is a distribution  $x^*(q) = \{x_j^*(q)\}_{j=1}^M$ , where all  $x_j^*(q) \in \{0, 1\}$ , so that the inequality  $u_j(x, q)|_{x=x^*(q)} \geq u_j(x, q)|_{x_j=1-x_j^*(q), x_{l \neq j}=x_l^*(q)}$  holds for all  $j = 1, \dots, M$ . In other words, the choice  $x_j^*(q)$  of each operator  $j$  is the best response to the choice of all other operators. Denote by  $K^{-j} = \sum_{l \neq j} x_l^*(q)$  the number of operators choosing the first company minus operator  $j$ .

Consider a scenario in which all operators except operator  $j$  chose the second company, that is,  $K^{-j} = 0$  for any  $j$ . Then the choice  $x_j = 0$  of each operator  $j$  is the best response if  $-\frac{0}{0} p_1 r_1 - \frac{1}{M} p_2 r_2 \geq \frac{R q_j}{M} (M-1) - \frac{1}{1} p_1 r_1$  or  $\frac{(M-1) R q_j}{M} \leq -\frac{p_2 r_2}{M}$ . Conversely, under the condition  $\frac{(M-1) R q_j}{M} \geq -\frac{p_2 r_2}{M}$ , the best choice is  $x_j = 1$ .

Consider a scenario in which all operators except operator  $j$  chose the first company, that is,  $K^{-j} = M-1$  for any  $j$ . Then the choice  $x_j = 1$  of each operator  $j$

is the best response if  $\frac{1}{M}p_1r_1 - \frac{0}{0}p_2r_2 \geq -\frac{Rq_j}{M}(M-1) - \frac{1}{1}p_2r_2$  or  $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \geq \frac{p_1r_1}{M}$ . Conversely, under the condition  $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \leq \frac{p_1r_1}{M}$ , the best choice is  $x_j = 0$ .

For the scenarios  $0 < K^{-j} < M-1$ , the choice  $x_j = 1$  of each operator  $j$  is the best if  $\frac{Rq_j}{M}(M-1-K^{-j}) - \frac{1}{K^{-j+1}}p_1r_1 \geq -\frac{Rq_j}{M}K^{-j} - \frac{1}{M-K^{-j}}p_2r_2$  or  $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \geq \frac{p_1r_1}{K^{-j+1}} - \frac{p_2r_2}{M-K^{-j}}$ . Conversely, under the condition  $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \leq \frac{p_1r_1}{K^{-j+1}} - \frac{p_2r_2}{M-K^{-j}}$ , the best choice is  $x_j = 0$ .

In the general case, the best response of operator  $j$  to the choice of the first company by the group of  $K^{-j}$  operators is  $x_j = 0$  if  $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \leq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K^{-j}>0}}{K^{-j+1}} - \frac{p_2r_2\mathbb{I}_{K^{-j}<M-1}}{M-K^{-j}}$  and  $x_j = 1$  if  $\frac{(M-1)Rq_j}{M} \geq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K^{-j}>0}}{K^{-j+1}} - \frac{p_2r_2\mathbb{I}_{K^{-j}<M-1}}{M-K^{-j}}$ .

Hence we obtain the following equilibria  $x^*(q) = \{x_j^*(q)\}_{j=1}^M$ , where all  $x_j^*(q) \in \{0, 1\}$  and  $K = \sum_l x_l^*(q)$ , under the following conditions:

$$\begin{cases} \frac{(M-1)Rq_j}{M} \geq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K>1}}{K} - \frac{p_2r_2\mathbb{I}_{K<M}}{M-K+1} \text{ for } x_j^*(q) = 1, \\ \frac{(M-1)Rq_j}{M} \leq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K>0}}{K+1} - \frac{p_2r_2\mathbb{I}_{K<M-1}}{M-K} \text{ for } x_j^*(q) = 0. \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Consider the second step at which the operators assign their prices for services. Each of the functions  $u_j$  is concave in  $q_j$ , representing a parabola with descending branches. This means that the optimal strategy to assign the price  $q_j$  is the maximum of  $u_j$  in  $q_j$ .

The best response of each player  $j$  to the strategies of the other players is  $q_j$  that satisfies the equation

$$2(M-1) \left( \frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2} \right) q_j = n_1 + n_2 + \left( \sum_l q_l - q_j \right) \left( \frac{n_1}{k_1} + \frac{n_2}{k_2} \right) + R \left( Mx_j - \sum_l x_l \right).$$

Summing up the equations and expressing  $q_j$ , we calculate the equilibrium  $q^*(x) = \{q_j^*(x)\}_{j=1}^M$ , where

$$q_j^*(x) = \frac{k_1k_2(n_1+n_2)}{(M-1)(n_1k_2+n_2k_1)} + \frac{k_1k_2R \left( Mx_j - \sum_l x_l \right)}{(2M-1)(n_1k_2+n_2k_1)}. \quad (5.3.2)$$

Consequently, evolving optimally, the system changes its states in the following way. Denote by  $x^{(s)} = (x_j^{(s)}, j = 1, \dots, M)$  the system state before the first transition step  $s$  when the companies are redistributed among the players. This state

corresponds to the optimal prices  $q^{(s)} = (q_j^*(x^{(s)}), j = 1, \dots, M)$  defined by (5.3.2). Then the next state (see (5.3.1)) is calculated as  $x^*(q^{(s)})$ .

Consider the system state before the transition  $s > 1$  when the equilibrium distribution of the companies and the prices for services were defined at least once. Denote by  $x^{(s)}$  the current state of the system before the transition  $s$ . Note that the operators are symmetric and can vary only in their strategies. Hence it is possible to simplify the notations by dividing operators into two groups as follows.

The group  $A$  consists of the operators  $j$  contracting with the first company, that is,  $x_j = 1$ , and the group  $B$  contains the remaining operators who choose the second company. Note that the prices  $q_j^{(s)}$  defined by (5.3.2) are identical for all players from the same group. Hence, the equilibrium conditions hold or do not hold for all of them simultaneously. Denote by  $q_A(K)$  and  $q_B(K)$  the prices of operators that belong to the groups  $A$  and  $B$ , respectively. Then the equilibrium condition (5.3.1) in the case where the group  $A$  contains  $K$  operators can be written as

$$\begin{cases} \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \geq \frac{p_1 r_1 \mathbb{I}_{K>1}}{K} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K<M}}{M-K+1}, \\ \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1 \mathbb{I}_{K>0}}{K+1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K<M-1}}{M-K}. \end{cases} \quad (5.3.3)$$

Clearly, if  $K = 0$ , then the first condition disappears, and if  $K = M$ , then the second.

Before any iteration  $s > 1$  of the game, the system state can be described as the number of players in the group  $A$ . The states are the following:

0) all the players chose the second company and have the same prices  $q_B(0) = Q = \frac{k_1 k_2 (n_1 + n_2)}{(M-1)(n_1 k_2 + n_2 k_1)}$ ,  $1 \leq K \leq M - 1$  players chose the first company, and their prices are  $q_A(K) = Q + \frac{k_1 k_2 R(M-K)}{(2M-1)(n_1 k_2 + n_2 k_1)}$ , whereas the other players have the prices  $q_B(K) = Q - \frac{k_1 k_2 R K}{(2M-1)(n_1 k_2 + n_2 k_1)}$ , all  $M$  players chose the first company and have the same prices  $q_A(M) = Q$ .

1) Consider the system states 0 and  $M$ . All the prices are identical and equal  $Q$ . The state 0 cannot be stationary, since the second condition of (5.3.3) fails,  $(M - 1)Rq_B(0) \leq -p_2 r_2$  due to  $Rq_B(0) = Q > 0$ , and so the system moves to one of the remaining states. The system is in the stationary state  $M$  only if the first equilibrium condition of (5.3.3)  $(M - 1)RQ \geq p_1 r_1$  holds in this state and the system was in the state  $M$  before or moved there from the state 0. Otherwise, from the state 0 or

$M$  the system moves to the state  $K < M$ , in which it is required that

$$\begin{cases} \frac{(M-1)RQ}{M} \geq \frac{p_1 r_1 \mathbb{I}_{K>1}}{K} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K<M}}{M-K+1}, \\ \frac{(M-1)RQ}{M} \leq \frac{p_1 r_1 \mathbb{I}_{K>0}}{K+1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K<M-1}}{M-K}. \end{cases}$$

These conditions take place only for  $K \in \{1, M-1\}$ . The value  $K$  can be 1 under both conditions, that is,

$$\begin{cases} \frac{(M-1)RQ}{M} \geq -\frac{p_2 r_2}{M}, \\ \frac{(M-1)RQ}{M} \leq \frac{p_1 r_1}{2} - \frac{p_2 r_2}{M-1}. \end{cases}$$

The first condition obviously holds. If the second condition is also valid, then in this state, we have  $q_A(1) > Q > 0$ ,  $q_B(1) < Q$ ; after assignment of the new prices, the equilibrium conditions remain valid, and the state  $K = 1$  becomes stationary.

If the second condition fails, that is,  $\frac{(M-1)RQ}{M} < \frac{p_1 r_1}{2} - \frac{p_2 r_2}{M-1}$ , then the only option is  $K = M-1$ . Check the conditions

$$\begin{cases} \frac{(M-1)RQ}{M} \geq \frac{p_1 r_1}{M-1} - \frac{p_2 r_2}{2}, \\ \frac{(M-1)RQ}{M} \leq \frac{p_1 r_1}{M}. \end{cases}$$

The second condition holds because of the nonstationary state  $K = M$ . The first condition is valid, since  $\frac{(M-1)RQ}{M} > \frac{p_1 r_1}{2} - \frac{p_2 r_2}{M-1} \geq \frac{p_1 r_1}{M-1} - \frac{p_2 r_2}{2}$  under  $M \geq 3$ . For the new prices  $q_A(M-1) > Q$  and  $q_B(M-1) < Q$ , the conditions still hold, and the state  $K = M-1$  becomes stationary.

In other words, from the state 0 the system comes to a stationary state from the set  $\{1, M-1, M\}$ . Then either state  $M$  is stationary, or from this state the system moves to a stationary state from the set  $\{1, M-1\}$ .

2) Let the system be in the state  $K$ , where  $1 \leq K \leq M-1$ . If the equilibrium conditions (5.3.3) hold, then the system arrives at a stationary state. Otherwise, a new state  $K'$  is formed. If  $K' = M$  and this state is not stationary, then in accordance with item 1), the system moves from this state to a stationary state from the set  $\{1, M-1\}$ . In the case  $K' = 0$  (which applies to the negative prices  $q_B(K)$ ), by item 1) the system moves from this state to a stationary state from the set  $\{1, M-1, M\}$ .

Otherwise, the state  $K'$  is such that  $1 \leq K' \leq M - 1$  and

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \geq \frac{p_1 r_1 \mathbb{I}_{K' > 1}}{K'} - \frac{p_2 r_2}{M-K'+1} \text{ for the players staying in the group } A, \\ \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1}{K'+1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K' < M-1}}{M-K'} \text{ for the players staying in the group } B, \\ \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \geq \frac{p_1 r_1 \mathbb{I}_{K' > 1}}{K'} - \frac{p_2 r_2}{M-K'+1} \text{ for the players moving from} \\ \text{the group } B \text{ to } A, \\ \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1}{K'+1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K' < M-1}}{M-K'} \text{ for the players moving from} \\ \text{the group } A \text{ to } B. \end{array} \right.$$

Next, new prices  $q_A(K')$  and  $q_B(K')$  are assigned for the state  $K'$ . Note that the prices increase for the players moving from the group  $B$  to  $A$  and decrease for the players moving from the group  $A$  to  $B$  regardless of  $K'$ , since  $q_A(K) > Q \geq q_B(K')$  and  $q_B(K) < Q \leq q_A(K')$  under  $1 \leq K \leq M - 1$ . Subsequently, the equilibrium conditions (5.3.3) hold for them given the new prices. Therefore, in the case where all operators changed their group, the new state is stationary.

a) If  $1 \leq K < K' \leq M - 1$ , then there exist operators who moved from the group  $B$  to  $A$ , that is,

$$\frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \geq \frac{p_1 r_1}{K'} - \frac{p_2 r_2}{M-K'+1}.$$

Since  $K' \leq M - 1$ , some player either stayed in the group  $B$  or joined it by moving from the group  $A$ . In the former case, we have

$$\frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1}{K'+1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K' < M-1}}{M-K'};$$

in the latter,

$$\frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} < \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1}{K'+1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K' < M-1}}{M-K'},$$

and then

$$\frac{p_1 r_1}{K'} - \frac{p_2 r_2}{M-K'+1} \leq \frac{p_1 r_1}{K'+1} - \frac{p_2 r_2 \mathbb{I}_{K' < M-1}}{M-K'},$$

which is possible only if  $K' = M - 1$ .

As a result, for  $K' = M - 1$  and hence for  $K < M$ , we have

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} > \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \geq \frac{p_1 r_1}{M-1} - \frac{p_2 r_2}{2}, \\ \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \leq \frac{p_1 r_1}{M}. \end{array} \right.$$



After assignment of the new prices, the second condition of (5.3.3) remains valid, since  $q_B(M-1) < q_B(K)$  for  $K < M-1$ . The first inequality holds, since

$$\frac{(M-1)Rq_A(M-1)}{M} > \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \geq \frac{p_1r_1}{M-1} - \frac{p_2r_2}{2}$$

under  $1 < K < M-2$ . In other words, the state  $K' = M-1$  is stationary.

b) If  $1 \leq K' < K \leq M-1$ , then there exist operators who moved from the group  $A$  to  $B$ , that is,

$$\frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \leq \frac{p_1r_1}{K'+1} - \frac{p_2r_2}{M-K'}.$$

Since  $K' \geq 1$ , some player either stayed in the group  $A$  or joined it by moving from the group  $B$ . In the former case, we have

$$\frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \geq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K'>1}}{K'} - \frac{p_2r_2}{M-K'+1};$$

in the latter,

$$\frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} > \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} \geq \frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K'>1}}{K'} - \frac{p_2r_2}{M-K'+1},$$

and then

$$\frac{p_1r_1\mathbb{I}_{K'>1}}{K'} - \frac{p_2r_2}{M-K'+1} \leq \frac{p_1r_1}{K'+1} - \frac{p_2r_2}{M-K'},$$

which is possible only if  $K' = 1$ .

As a result, for  $K' = 1$  and hence for  $K > 1$ , we have

$$\begin{cases} \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \geq -\frac{p_2r_2}{M}, \\ \frac{(M-1)Rq_B(K)}{M} < \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \leq \frac{p_1r_1}{2} - \frac{p_2r_2}{M-1}. \end{cases}$$

After assignment of the new prices, the first condition of (5.3.3) remains valid, since  $q_A(1) > q_A(K)$  for  $K > 1$ . The second inequality holds, since

$$\frac{(M-1)Rq_B(1)}{M} < \frac{(M-1)Rq_A(K)}{M} \leq \frac{p_1r_1}{2} - \frac{p_2r_2}{M-1}$$

under  $2 < K < M-1$ . In other words, the state  $K' = 1$  is stationary.

Consequently, we obtain the following results for the system with stepwise choice of optimal states: the system comes to a stationary state at most after three transitions, which is one of the states  $\{1, M-1, M\}$ ; other stationary states from the residual set  $\{2, \dots, M-2\}$  are not excluded but can be achieved after one transition if the system by chance has suitable initial prices  $q$ .

Table 5.1: Transitions between system states

State $K$	$q_A$	$q_B$	Possible transitions
0	–	0.13	1, 10
<b>1</b>	0.28	0.112	
<b>2</b>	0.26	0.096	
<b>3</b>	0.246	0.08	
4	0.23	0.063	1, 10
5	0.213	0.046	1, 9
6	0.196	0.03	1, 9
7	0.18	0.013	1, 9
8	0.163	–0.004	1, 9
<b>9</b>	0.146	–0.02	
<b>10</b>	0.13	–	

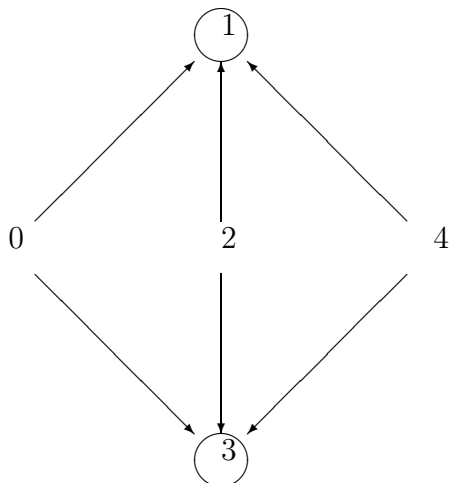


Figure 5.1: Transitions between states

**Example 15.** Consider the system with two companies as follows. The first company has been in the market for a long time and has more subscribers ( $n_1 = 25$ ,  $n_2 = 10$ ), but its resources are more expensive ( $p_1 = 10$ ,  $p_2 = 5$ ). To catch the market opportunities, the second company assigns low prices, implements an aggressive advertising policy ( $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ ), and allocates more resources for accessibility ( $r_1 = 0.5$ ,  $r_2 = 0.6$ ). There are  $M = 10$  virtual operators reselling the services of these companies. Depending on initial prices  $q$ , the system arrives at one of the states presented in Table 5.1 and then changes its state until coming to one of the stationary states (typed in boldface). Clearly, in the states  $K = 8$  and  $K = 9$ , the operators choosing the second company have negative prices, but this does not

*interfere with the fact that the state  $K = 9$  is stationary. Besides, note that the stationary states  $K = 2, 3$  are isolated and the system can arrive at them only by chance with suitable initial prices.*

**Example 16.** *Consider the previous example with a smaller number of clients and operators ( $n_1 = 10$ ,  $n_2 = 4$ ,  $M = 4$ ). Depending on the initial prices  $q$ , the system moves to one of the states illustrated in Fig. 5.1, in the final analysis arriving at one of the stationary states 1 or 3.*

## § 5.4 Results

In this chapter, we have considered a market in which two virtual operators lease wholesale resources from two possible companies and set prices for the companies' clients. The strategic interaction between virtual operators is modeled as a two-step repeated game. At the first step, virtual operators jointly choose the probability distribution of contracting with each company under given prices. At the second step, virtual operators jointly determine the retail prices under a given probability distribution of contracting with each company. We have constructed the equilibrium and stationary solutions for this game, calculated the optimal strategies of virtual operators at each step and established the existence conditions of a pure strategy equilibrium at the first step. For the cases in which the clients have company- or operator-dependent preferences, we have demonstrated that the system comes to a stationary state at most after three transitions. The same result has been obtained for the game involving three or more operators and clients with company-dependent preferences.

## Chapter 6

# Unsplittable Traffic Optimal Routing

Routing games [77, 82] form a modern branch of game theory. Their onrush development is connected with the expansion of the global information network (the Internet) and with the importance and complexity of cargo and passenger traffic problems in transportation networks. Such games are characterized by a large number of players acting independently (still, their individual payoffs depend on the behavior of all network participants).

The cost function of each player is defined as the execution time of his task or the transmission time of his data packet over a network. The payoff function of each agent is defined as the volume of information transmitted by him or the capacity of his channel.

In this chapter we investigate the problem of an optimal traffic routing when selfish users choose their routes through network channels. The considered routing scheme is based on a KP-model (Koutsoupias, Papadimitriou) [19, 21, 77, 78, 83, 120, 126, 127, 133] with un-splittable traffic.

### § 6.1 KP-model of routing

Consider a system of  $n$  users (players) and  $m$  parallel channels. Player  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) intends to send traffic of some volume  $w_i$  through a channel. Each channel  $l = 1, \dots, m$  has a given capacity  $c_l$ . When traffic of a volume  $w$  is transmitted through a channel of a capacity  $c$ , the channel delay makes up  $w/c$ .

Each user pursues individual interests, endeavoring to occupy the minimal-delay channel. The pure strategy of player  $i$  is the choice of channel  $l$  for his traffic.

Consequently, the vector  $L = (l_1, \dots, l_n)$  forms the pure strategy profile of all users, where  $l_i$  denotes the number of the channel chosen by user  $i$ . His mixed strategy represents a probabilistic distribution  $p_i = (p_i^1, \dots, p_i^m)$ , where  $p_i^l$  is the probability of choosing channel  $l$  by user  $i$ . The matrix  $P$  composed of the vectors  $p_i$  is the mixed strategy profile of the users.

In the case of pure strategies, the traffic delay for user  $i$  on channel  $l_i$  makes up 
$$\lambda_i = \frac{\sum_{k:l_k=l_i} w_k}{c_{l_i}}.$$

**Definition 6.1.** A pure strategy profile  $(l_1, \dots, l_n)$  is called a Nash equilibrium if 
$$\lambda_i = \min_{j=1, \dots, m} \frac{w_i + \sum_{k \neq i: l_k=j} w_k}{c_j}$$
 for each user  $i$ .

In the case of mixed strategies, it is necessary to introduce the expected traffic delay of user  $i$  on channel  $l$ . This characteristic is defined by 
$$\lambda_i^l = \frac{w_i + \sum_{k=1, k \neq i}^n p_k^l w_k}{c_l}.$$
 The minimal expected delay of user  $i$  equals 
$$\lambda_i = \min_{l=1, \dots, m} \lambda_i^l.$$

**Definition 6.2.** A strategy profile  $P$  is called a Nash equilibrium if, for each user  $i$  and any channel chosen by him, we have  $\lambda_i^l = \lambda_i$  if  $p_i^l > 0$  and  $\lambda_i^l > \lambda_i$  if  $p_i^l = 0$ .

**Definition 6.3.** A mixed strategy equilibrium  $P$  is called a fully mixed Nash equilibrium (FMNE) if each user chooses each channel with a positive probability, that is,  $p_i^l > 0$  for any  $i = 1, \dots, n$  and any  $l = 1, \dots, m$ .

The value  $\lambda_i$  determines the minimum possible individual cost of user  $i$  to send his traffic. Pursuing personal goals, each user chooses the strategies that ensure this value of the expected delay. characterizes the total cost of the system incurred by the operation of all its channels. It is possible to consider the following types of the social cost  $SC(w, c, L)$  for a pure strategy profile:

1. the linear social cost 
$$LSC(w, c, L) = \sum_{l=1}^m \frac{\sum_{k:l_k=l} w_k}{c_l};$$
2. the quadratic social cost 
$$QSC(w, c, L) = \sum_{l=1}^m \frac{\left( \sum_{k:l_k=l} w_k \right)^2}{c_l};$$
3. the maximal social cost 
$$MSC(w, c, L) = \max_{l=1, \dots, m} \frac{\sum_{k:l_k=l} w_k}{c_l}.$$

**Definition 6.4.** *The social cost for a mixed strategy profile  $P$  is the expected social cost  $SC(w, c, L)$  for a random pure strategy profile  $L$ , that is,*

$$SC(w, c, P) = E(SC(w, c, L)) = \sum_{L=(l_1, \dots, l_n)} \left( \prod_{k=1}^n p_k^{l_k} \cdot SC(w, c, L) \right).$$

Denote by  $opt = \min_P SC(w, P)$  the optimal social cost. The global optimum in our model is yielded by social cost minimization. The global optimum is calculated through the exhaustive search of all admissible pure strategy profiles. However, in general case, it can represent the solution of a constrained social cost minimization problem in the continuous setup, with the mixed strategies of all users (the vector  $P$ ) acting as the variables.

## § 6.2 Pure strategy equilibrium

Consider several examples of the systems in which the behavior of users is restricted to the pure strategy profiles only. Choose the maximal social cost. Denote by  $(w_{i_1}, \dots, w_{i_k}) \rightarrow c_l$  a strategy profile in which traffic segments  $w_{i_1}, \dots, w_{i_k}$  belonging to users  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$  are transmitted through the channel of capacity  $c_l$ .

**Example 17.** *This example illustrates Braess's paradox occurring as one channel is eliminated from the system. Consider the following set of users and channels:  $n = 5$ ,  $m = 3$ ,  $w = (20, 10, 10, 10, 5)$ ,  $c = (20, 10, 8)$  In this case, there exist several Nash equilibria. One of them is the strategy profile*

$$\{(10, 10, 10) \rightarrow 20, 5 \rightarrow 10, 20 \rightarrow 8\}.$$

*As easily verified, any deviation of a player from this profile increases his delay. However, the equilibrium in question maximizes the social cost:*

$$MSC(w; c; (10, 10, 10) \rightarrow 20, 5 \rightarrow 10, 20 \rightarrow 8) = 2.5.$$

*We will call this equilibrium the **worst-case equilibrium**.*

*Interestingly, the global optimum of the social cost is achieved in the strategy profile  $(20, 10) \rightarrow 20, (10, 5) \rightarrow 10, 10 \rightarrow 8$ , making up 1.5. Exactly this value*

represents the best-case pure strategy Nash equilibrium. If we remove channel 8, then the worst-case social cost becomes

$$MSC(w; c; (20, 10, 10) \rightarrow 20, (10, 5) \rightarrow 10) = 2.$$

This strategy profile also forms the best-case pure strategy equilibrium and the global optimum.

**Example 18.** Set  $n = 4$ ,  $m = 3$ ,  $w = (15, 5, 4, 3)$ ,  $c = (15, 10, 8)$ . The social cost in the worst-case equilibrium constitutes

$$MSC(w; c; (5, 4) \rightarrow 15, 15 \rightarrow 10, 3 \rightarrow 8) = 1.5.$$

Under the best-case equilibrium, the global optimum of 1 gets attained in the strategy profile  $15 \rightarrow 15, (5, 3) \rightarrow 10, 4 \rightarrow 8$ . The non-equilibrium strategy profile  $15 \rightarrow 15, (5, 4) \rightarrow 10, 3 \rightarrow 8$  is globally optimal, either. As the result of channel 10 removal, the worst-case equilibrium becomes  $(15, 5) \rightarrow 15, (4, 3) \rightarrow 8$  with a social cost 1.333. The global optimum and the best-case equilibrium are achieved in  $(15, 3) \rightarrow 15, (5, 4) \rightarrow 8$ , and the social cost makes up 1.2.

**Example 19.** Set  $n = 4$ ,  $m = 3$ ,  $w = (15, 8, 4, 3)$ ,  $c = (15, 8, 3)$ . The social cost in the worst-case equilibrium constitutes

$$MSC(w; c; (8, 4, 3) \rightarrow 15, 15 \rightarrow 8) = 1.875.$$

Under the best-case equilibrium, the global optimum of 1.2666 gets attained in the strategy profile  $(15, 4) \rightarrow 15, 8 \rightarrow 8, 4 \rightarrow 3$ . By eliminating channel 8, we obtain the worst-case equilibrium  $(15, 8, 4) \rightarrow 15, 3 \rightarrow 3$  with the social cost of 1.8. Finally, the global optimum and the best-case equilibrium are observed in  $(15, 8, 3) \rightarrow 15, 4 \rightarrow 3$ , and the corresponding social cost equals 1.733.

### § 6.3 Fully mixed Nash equilibrium in the problem with inhomogeneous users and homogeneous channels

In the current section, we study the system with identical-capacity channels. Assume that the capacity of each channel  $l$  is  $c_l = 1$ . Let us choose the linear social cost.

**Lemma 6.1. (Mavronikolas, Spirakis) [133]** *For a system with  $n$  users and  $m$  parallel channels of the same capacity, there exists a unique completely mixed Nash equilibrium such that, for any user  $i$  and channel  $l$ , the equilibrium probabilities are  $p_i^l = 1/m$ .*

Denote by  $F$  the FMNE in this model and find the corresponding social cost:

$$\begin{aligned}
LSC(w, F) &= E \left( \sum_{l=1}^m \sum_{k:l_k=l} w_k \right) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n E(w_k \cdot I_{l_k=l}) = \\
&= \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n w_k p_l^k = \sum_{k=1}^n w_k. \\
QSC(w, F) &= E \left( \sum_{l=1}^m \left( \sum_{k:l_k=l} w_k \right)^2 \right) = \sum_{l=1}^m E \left( \sum_{k:l_k=l} w_k \right)^2 = \\
&= \sum_{l=1}^m E \left( \sum_{k:l_k=l} w_k^2 + 2 \sum_{k,j:l_k=l, l_j=l, k \neq j} w_k w_j \right) = \\
&= \sum_{l=1}^m \left( \sum_{k=1}^n E(w_k^2 \cdot I_{l_k=l}) + 2 \sum_{k,j=1, k \neq j}^n E(w_k w_j I_{l_k=l} I_{l_j=l}) \right) = \\
&= \sum_{l=1}^m \left( \sum_{k=1}^n w_k^2 p_k^l + 2 \sum_{k,j=1, k \neq j}^n w_k w_j p_k^l p_j^l \right) = \\
&= \sum_{k=1}^n w_k^2 + \frac{2}{m} \sum_{k \neq j} w_k w_j.
\end{aligned}$$

## § 6.4 Fully mixed Nash equilibrium in the problem with homogeneous users and inhomogeneous channels

Consider a system where the traffic sent by users does not differ in volume. Let's consider for any user  $i$  his traffic is  $w_i = 1$ . Let us define the total capacity of the channel system as  $C = \sum_{l=1}^m c_l$ . As the costs of the system, we will consider the functions of linear and quadratic cost of the system. Without loss of generality, we suppose that the channels are sorted in order of increasing throughput:  $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_m$ .



**Lemma 6.2.** *Consider the model with  $n$  homogeneous users and  $m$  parallel channels. A unique Fully Mixed Nash equilibrium exists iff  $c_1(m + n - 1) > C$ . Furthermore, for each channel  $l = 1, \dots, m$  and any user  $i = 1, \dots, n$  the equilibrium probabilities take the form  $p_i^l = p^l = \frac{c_l(m+n-1)-C}{C(n-1)}$ , and the individual equilibrium delays do coincide, being equal to  $\frac{m+n-1}{C}$ .*

*Proof.* Suppose that a completely mixed equilibrium exists. Then the expected traffic delay of each user  $i$  on any channel must be the same:

$$\frac{1 + \sum_{k \neq i} p_k^l}{c_l} = \frac{1 + \sum_{k \neq i} p_k^j}{c_j} \text{ for } i = 1, \dots, n \text{ and } l, j = 1, \dots, m.$$

Multiply both sides of each identity by  $c_l$ . Next, perform summation over  $l$  for each group of identities with the same indexes  $i$  and  $j$ . Bearing in mind that  $\sum_{l=1}^m p_k^l = 1$  for  $k = 1, \dots, n$ , we obtain

$$m + (n - 1) = C \frac{1 + \sum_{k \neq i} p_k^j}{c_j} \text{ for } i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

$$\frac{m + n - 1}{C} = \frac{1 + \sum_{k \neq i} p_k^j}{c_j} = \lambda_i^j \text{ for } i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

Since the left-hand side of the identity takes the same value for any missed term  $\frac{p_i^j}{c_j}$ , all quantities  $p_i^j = p^j$  for any  $i$ . The identity can be transformed to

$$\frac{m + n - 1}{C} = \frac{1 + (n - 1)p^j}{c_j} \text{ for } j = 1, \dots, m,$$

$$\text{откуда } p^j = \frac{c_j(m + n - 1) - C}{C(n - 1)} \text{ for } j = 1, \dots, m.$$

Clearly, the sum of the equilibrium probabilities over all channels constitutes 1. Thus, a necessary and sufficient admissibility condition of the derived solution lies in the inequality  $p^l > 0$  valid for all  $l = 1, \dots, m$ . In other words, the condition  $c_1(m + n - 1) > C$  must hold true.  $\square$

There is a lemma in [133] which claims the FMNE existing iff for each channel  $l = 1, \dots, m$  the condition  $\frac{c_l}{C} \in (\frac{1}{m+n-1}, \frac{n}{m+n-1})$  holds, and all equilibrium probabilities for all  $i = 1, \dots, n$  and for all  $l = 1, \dots, m$  equal to  $p_i^l = \frac{c_l(m+n-1)-C}{C(n-1)}$ . The proof of the lemma 6.2, also gives the values of FMNE individual users' delays.

Social costs evaluation in a completely mixed equilibrium involves a series of identities below.

**Lemma 6.3.** *For any real  $x$  and integer  $n$ , we have the expressions:*

$$\sum_{k=1}^n C_n^k k x^k (1-x)^{n-k} = nx;$$

$$\sum_{k=1}^n C_n^k k^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(nx - x + 1).$$

*Proof.* In a general case of arbitrary real  $x$  the given identities can be proven by double differentiating the following identity by  $x$ . It is known as binomial theorem.

$$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n.$$

For the case of  $0 \leq x \leq 1$  we can use some properties of the binomial distribution. Let each independent random variable  $\xi_i$ , where  $i = 1, \dots, n$ , possess values 0, 1 and  $E\xi_i = x$ . In this case

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n C_n^k k x^k (1-x)^{n-k} &= E \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \right) = \sum_{i=1}^n E\xi_i = nx. \\ \sum_{k=1}^n C_n^k k^2 x^k (1-x)^{n-k} &= E \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \right)^2 = E \left( \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \xi_i \xi_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n E\xi_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} E\xi_i E\xi_j = \sum_{i=1}^n x + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} x^2 = \\ &= nx + 2x^2 \sum_{i=1}^n (i-1) = nx + 2x^2 \frac{n(n-1)}{2} = nx(nx - x + 1). \end{aligned}$$

□

Now, find the social costs for the fully mixed Nash equilibrium.

$$\begin{aligned} LSC(c, F) &= E \left( \sum_{l=1}^m \frac{\text{the number of users on } l}{c_l} \right) = \\ &= \sum_{l=1}^m \frac{1}{c_l} \sum_{k=1}^n C_n^k k (1-p^l)^{n-k} (p^l)^k = n \sum_{l=1}^m \frac{p^l}{c_l} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{mn(m+n-1)}{C(n-1)} - \frac{n}{n-1} \sum_{l=1}^m \frac{1}{c_l} \\
QSC(c, F) &= E \left( \sum_{l=1}^m \frac{(\text{the number of users on } l)^2}{c_l} \right) = \\
&= \sum_{l=1}^m \frac{1}{c_l} \sum_{k=1}^n C_n^k k^2 (1-p^l)^{n-k} (p^l)^k = \sum_{l=1}^m \frac{np^l(np^l - p^l + 1)}{c_l} = \\
&= n \sum_{l=1}^m p^l \frac{1 + (n-1)p^l}{c_l} = \frac{n(m+n-1)}{C}.
\end{aligned}$$

Analyze the possible appearance of Braess's paradox in this model, i.e., when adding a new channel worsens the completely mixed equilibrium (increases the social costs for the completely mixed equilibrium). We believe that the completely mixed equilibrium exists in the original system, that is the condition  $c_1(m+n-1) > C$  takes place. Adding a new channel must not violate the existence of a completely mixed equilibrium. Notably, we add a channel  $c_0$ , such that  $c_0(m+n) > C + c_0$  and  $c_1(m+n) > C + c_0$ .

**Theorem 6.1.** *Consider the model with  $n$  homogeneous users and  $m$  inhomogeneous parallel channels. The social cost in a fully mixed Nash equilibrium increases as the result of adding a new channel with the capacity  $\frac{C}{m+n-1} < c_0 < \frac{C}{m}$  such that  $c_0(m+n) > C + c_0$  and  $c_1(m+n) > C + c_0$ .*

*Proof.* Let  $F$  be the fully mixed equilibrium strategy profile in the model with  $n$  homogeneous users and  $m$  inhomogeneous parallel channels. Assume that we have added a channel with some capacity  $c_0$ , and  $F_0$  indicates the fully mixed equilibrium in the resulting system.

Then the variation of the linear social cost becomes

$$\begin{aligned}
LSC(w, F_0) - LSC(w, F) &= \\
&= -\frac{n}{(n-1)c_0} + \frac{(m+1)n(m+n)}{(C+c_0)(n-1)} - \frac{mn(m+n-1)}{C(n-1)} = \\
&= \frac{n}{(n-1)C c_0 (C+c_0)} (C c_0 (2m+n-1) - C^2 - m c_0^2 (m+n-1)).
\end{aligned}$$

The above difference appears positive, if  $C c_0 (2m+n-1) - C^2 - m c_0^2 (m+n-1) > 0$ . The left-hand side of this inequality represents a parabolic function in  $c_0$  with a

negative coefficient near  $c_0^2$ . Therefore, all positive values of the function lie between its roots  $\frac{C}{m+n-1}$  and  $\frac{C}{m}$ . Adding a new channel with some capacity  $\frac{C}{m+n-1} < c_0 < \frac{C}{m}$  increase the linear social cost.  $\square$

**Example 20.** *Choose a system with four users and two parallel channels of capacity 1. Here the completely mixed equilibrium is the strategy profile, where all equilibrium strategies equal 0.5. The linear social costs in the equilibrium make up 4. If we add a new channel with any capacity  $\frac{2}{5} < c_0 < 1$  the fully mixed equilibrium exists; the equilibrium probabilities are  $\frac{5c_0-2}{3(c_0+2)}$  on new channel and  $\frac{4-c_0}{3(c_0+2)}$  on the two former channels. The linear social cost in the equilibrium equal  $\frac{52c_0-8c_0^2-8}{3c_0(c_0+2)} > 4$ .*

**Theorem 6.2.** *Consider the model with  $n$  homogeneous users and  $m$  inhomogeneous parallel channels. The adding a new channel either increases the quadratic social cost in a fully mixed Nash equilibrium, or creates the system without existing any fully mixed Nash equilibria.*

*Proof.* Let  $F$  be the fully mixed equilibrium strategy profile in the model with  $n$  homogeneous users and  $m$  inhomogeneous parallel channels. Assume that we have added a channel with some capacity  $c_0$ , and  $F_0$  indicates the fully mixed equilibrium in the resulting system.

Then the variation of the quadratic social cost becomes

$$\begin{aligned} QSC(w, F_0) - QSC(w, F) &= \frac{n(m+n)}{C+c_0} - \frac{n(m+n-1)}{C} = \\ &= \frac{Cn - c_0n(m+n-1)}{(C+c_0)C}. \end{aligned}$$

The above difference appears positive, if  $c_0 < \frac{C}{m+n-1}$ .

In this case the FMNE  $F_0$  is feasible iff  $c_0(m+n) > C+c_0$  and  $c_1(m+n) > C+c_0$ . But Braess paradox appearing needs the inequality  $c_0(m+n-1) < C$  for the capacity of new channel, which yields  $c_0(m+n) < C+c_0 < c_0(m+n)$  and leads to contradiction.  $\square$

## § 6.5 Fully mixed Nash equilibrium in general case

We concentrate on the general case model, where users send traffic of different volumes through channels with different capacities. Again, select the linear social

costs and let  $W = \sum_{i=1}^n w_i$  be the total volume of user traffic,  $C = \sum_{l=1}^m c_l$  represent the total capacity of all channels.

The following theorem provides the existence condition of a fully mixed equilibrium and the corresponding values of equilibrium probabilities.

**Theorem 6.3. (Mavronikolas, Spirakis) [133]** *A unique fully mixed equilibrium exists iff the condition*

$$\left(1 - \frac{mc_l}{C}\right) \left(1 - \frac{W}{(n-1)w_i}\right) + \frac{c_l}{C} \in (0, 1).$$

holds true for all users  $i = 1, \dots, n$  and all channels  $l = 1, \dots, m$ . The corresponding equilibrium probabilities make up

$$p_i^l = \left(1 - \frac{mc_l}{C}\right) \left(1 - \frac{W}{(n-1)w_i}\right) + \frac{c_l}{C}.$$

Obviously, for any user the sum of the equilibrium probabilities over all channels equals 1. Therefore, we should verify the above inequality only in one side, i.e., for all users  $i = 1, \dots, n$  and all channels  $l = 1, \dots, m$ :

$$\left(1 - \frac{mc_l}{C}\right) \left(1 - \frac{W}{(n-1)w_i}\right) + \frac{c_l}{C} > 0. \quad (6.5.1)$$

Evaluate the linear social costs for the fully mixed equilibrium  $F$ .

$$\begin{aligned} LSC(w, c, F) &= E \left( \sum_{l=1}^m \frac{\sum_{k:l_k=l} w_k}{c_l} \right) = \sum_{l=1}^m \frac{\sum_{k=1}^n E(w_k \cdot I_{l_k=l})}{c_l} = \\ &= \sum_{l=1}^m \frac{\sum_{k=1}^n w_k p_l^k}{c_l} = \frac{mW(n+m-1)}{C(n-1)} - \frac{W}{n-1} \sum_{l=1}^m \frac{1}{c_l}. \end{aligned}$$

Study the possible revelation of Braess's paradox in this model. Suppose that the fully mixed equilibrium exists in the original system, that is the condition (6.5.1) takes place. Adding a new channel must preserve the existence of a fully mixed equilibrium. In other words, we add a certain channel  $c_0$ , meeting the analog of the condition (6.5.1), in the new system of  $m+1$  channels.

**Theorem 6.4.** *Consider the model with  $n$  inhomogeneous users and  $m$  inhomogeneous parallel channels. The linear social cost in the fully mixed equilibrium*

increases as the result of adding a new channel with some capacity  $\frac{C}{m+n-1} < c_0 < \frac{C}{m}$  such that for all users  $i = 1, \dots, n$  and all channels  $l = 0, \dots, m$ :

$$\left(1 - \frac{(m+1)c_l}{C+c_0}\right) \left(1 - \frac{W}{(n-1)w_i}\right) + \frac{c_l}{C+c_0} > 0.$$

*Proof.* Let  $F$  be the fully mixed equilibrium strategy profile in the model with  $n$  inhomogeneous users and  $m$  inhomogeneous parallel channels. Assume that we have added a channel with some capacity  $c_0$ , and  $F_0$  indicates the fully mixed equilibrium in the resulting system.

Then the variation of the linear social cost becomes

$$\begin{aligned} LSC(w, c, F_0) - LSC(w, c, F) &= \\ &= -\frac{W}{(n-1)c_0} + \frac{(m+1)W(m+n)}{(C+c_0)(n-1)} - \frac{mW(m+n-1)}{C(n-1)} = \\ &= \frac{W}{(n-1)C c_0 (C+c_0)} (C c_0 (2m+n-1) - C^2 - m c_0^2 (m+n-1)). \end{aligned}$$

The remaining part of the proof coincides with that of the Theorem 6.1 for the system with homogeneous users and inhomogeneous parallel channels.  $\square$

**Example 21.** Choose a system with two users sending their traffic of the volumes  $w_1 = 1$  and  $w_2 = 3$ , respectively, through two parallel channels of the capacities  $c_1 = c_2 = 1$ . The fully mixed equilibrium is the strategy profile, where all equilibrium probabilities equal 0.5. The linear social costs in the equilibrium constitute 4. If we add a new channel with some capacity  $\frac{6}{7} < c_0 < 1$  a fully mixed equilibrium exists and the equilibrium probabilities make up

$$p_1^0 = \frac{7c_0-6}{2+c_0}; \quad p_2^0 = \frac{5c_0-2}{3(2+c_0)}; \quad p_1^1 = p_1^2 = \frac{4-3c_0}{2+c_0}; \quad p_2^1 = p_2^2 = \frac{4-c_0}{3(2+c_0)}.$$

The FMNE social cost in the new system is  $\frac{28c_0-8c_0^2-8}{c_0(c_0+2)} > 4$ .

## § 6.6 Results

In this chapter we have considered an optimal traffic routing game in the parallel network with unsplittable traffic, based on KP-model. In the KP-model of the problem of optimal traffic routing in the network for the case of identical channels, we have found the linear and quadratic social costs in a fully mixed equilibrium.

In the same model, for the cases of different channels, we have found the linear and quadratic costs of the system in a completely mixed equilibrium, as well as the conditions for the worsening of such an equilibrium with adding a new channel to the system.

## Chapter 7

# Load Balancing Game

The load balancing game [20, 47, 48, 70] is also known as the scheduling problem [13] for computing network nodes or processors in the form of a game equivalent to the KP-model with parallel different-capacity channels [133]. It is necessary to distribute several jobs of various volumes among processors of nonidentical speeds. The volume of a job is its completion time on a free unit-speed processor. Processor load is the total volume of jobs executed by a given processor. The ratio of processor load and speed defines its delay, that is, the job completion time by this processor. Within the game-theoretic approach to the load balancing problem, each player chooses a processor for his job striving to minimize job's delay. Players have egoistic behavior and reach a Nash equilibrium, viz., a job distribution such that none of them benefits from a unilateral change of the chosen processor. We further study pure strategy Nash equilibria only; as is well known [82], such an equilibrium always exists in the described class of games. The system cost (also called the social cost) is the maximal delay over all processors for an obtained job distribution. The price of anarchy (PoA) is defined as the maximal ratio of the social cost in the worst-case Nash equilibrium and the optimal social cost. The price of anarchy is a measure pioneered in [120] which allows to compare the system payoff under cooperation and competition [137].

### § 7.1 The game model

Consider a system  $S = S(N, v)$  composed of  $N$  processors operating with speeds  $v_1, \dots, v_N$ . The system is used by a set of players  $U = U(n, w)$ : each of  $n$  players



chooses an appropriate processor for his job execution. For player  $j$ , the volume of job is  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Denote by  $W = \sum_{j=1}^n w_j$  the total volume of all jobs. Free processor  $i$  with speed  $v_i$  executes a job of volume  $w$  during the time  $w/v_i$ .

We study the following pure strategy game  $\Gamma = \langle S(N, v), U(n, w), \lambda \rangle$ . Each player can choose any processor. The strategy of player  $j$  is processor  $l_j$  selected by him for his job execution. Then the strategy profile in the game  $\Gamma$  represents the vector  $L = (l_1, \dots, l_n)$ . The load of processor  $i$ , that is, the total volume of all jobs assigned to the processor is defined by  $\delta_i(L) = \sum_{j=1, \dots, n: l_j=i} w_j$ . The delay of processor  $i$  takes the form

$$\lambda_i(L) = \sum_{j=1, \dots, n: l_j=i} w_j/v_i = \frac{\delta_i(L)}{v_i}.$$

In fact, this value is the same for all players selecting a given processor.

The social cost is described by the maximal delay over all processors:

$$SC(L) = \max_{i=1, \dots, N} \lambda_i(L).$$

Denote by

$$OPT = OPT(S, U) = \min_{L \text{ is a profile in } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)$$

the optimal cost (the social cost in the optimal case), where minimization runs over all admissible strategy profiles in the game  $\Gamma(S, U, \lambda)$ .

A strategy profile  $L$  such that none player benefits from a unilateral deviation (change of the processor chosen in  $L$  for his job execution) is a pure strategy Nash equilibrium. To provide a formal definition, let  $L(j \rightarrow i) = (l_1, \dots, l_{j-1}, i, l_{j+1}, \dots, l_n)$  be the profile obtained from a profile  $L$  if player  $j$  replaces processor  $l_j$  chosen by him in the profile  $L$  for another processor  $i$ , whereas the remaining players use the same strategies as before (remain invariable).

**Definition 7.1.** *A strategy profile  $L$  is said to be a pure strategy Nash equilibrium if each player chooses a processor with the minimum delay, that is, for each player  $j = 1, \dots, n$ , we have the inequality  $\lambda_{l_j}(L) \leq \lambda_i(L(j \rightarrow i))$  for all processors  $i = 1, \dots, N$ .*

**Definition 7.2.** *The price of anarchy in the system  $S$  is the maximal ratio of the social cost in the worst-case Nash equilibrium and the social cost in the optimal*

case:

$$PoA(S) = \max_U \frac{\max_{L \text{ is a Nash equilibrium in } \Gamma(S,U,\lambda)} SC(L)}{OPT(S,U)}.$$

## § 7.2 The price of anarchy in the general case of $N$ processors

We give the following obvious estimates for any game of the above type. They will be employed in further analysis.

- The equilibrium social cost is not higher than the social cost in the case where all jobs are executed by the fastest processor only:

$$SC(L) \leq \frac{W}{\max_{i=1,\dots,N} v_i}. \quad (7.2.1)$$

- The optimal social cost is not smaller than the social cost in the case where the whole volume of jobs is distributed among processors proportionally to their speeds so that all processors have an identical delay:

$$OPT \geq \frac{W}{\sum_{i=1}^N v_i}. \quad (7.2.2)$$

Estimates (7.2.1) and (7.2.2) directly yield the main upper estimate for the price of anarchy:

$$PoA(S) \leq \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{\max_{i=1,\dots,N} v_i}. \quad (7.2.3)$$

According to the following theorem, this upper estimate coincides with the exact PoA value under certain conditions imposed on processor speeds.

**Theorem 7.1.** *For the system  $S$  composed of  $N \geq 3$  processors with speeds  $v_1 = 1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_{N-1} = r \leq v_N = s$  such that*

$$(1) (s - r) \sum_{i=1}^N v_i \leq \frac{s}{v_{N-2}} \left( s^2 - r \sum_{i=1}^N v_i \right) \text{ and}$$

$$(2) (s - r) \sum_{i=1}^N v_i \leq \frac{s^2}{v_{N-2}},$$

*the price of anarchy makes up  $PoA(S) = \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{s}$ .*

*Proof.* The upper estimate of the PoA defined by (7.2.3) holds for the system  $S$ . Now, we demonstrate that this estimate becomes the exact PoA value under conditions (1) and (2) of the theorem.

Consider an example of a system where  $N + 1$  players have jobs of volumes  $w_1 = r \sum_i v_i$ ,  $w_2 = s^2 - r \sum_i v_i$ , and  $w_{2+i} = sv_i$  for all  $i = 1, \dots, N - 1$ . Condition (1) guarantees the nonnegativity of  $w_2$ .

In the optimal case, the jobs are distributed among processors so that all processors have an identical delay  $s$ : the jobs of volumes  $w_1$  and  $w_2$  are assigned to processor  $N$ , and each job of volume  $w_{2+i}$  is assigned to processor  $i$  for all  $i = 1, \dots, N - 1$ .

In a Nash equilibrium, the job of volume  $w_1$  moves to processor  $N - 1$ , which shows the highest delay  $\sum_{i=1}^N v_i$ . The remaining jobs are assigned to processor  $N$ ; its

delay constitutes  $\frac{(s-r) \sum_{i=1}^N v_i}{s}$ . Player 1 benefits nothing from moving his job of volume  $w_1$  to another processor, since its delay on processor  $N$  becomes the same as on processor  $N - 1$  of speed  $r$ , whereas its delay on any other processor  $k$  of speed  $v_k \leq r$  is  $\frac{r \sum_{i=1}^N v_i}{v_k} \geq \sum_{i=1}^N v_i$ . Conditions (1) and (2) ensure that it is also nonbeneficial to move the jobs of volumes  $w_i$ ,  $i \geq 2$ , from processor  $N$  to any other processor  $k$  of speed  $v_k \leq r$ .

In the example considered, the ratio of the equilibrium and optimal social cost makes up  $\frac{\sum_{i=1}^N v_i}{s}$ . Since this is the upper estimate of the PoA, this is in fact the maximal ratio.  $\square$

The exact PoA value allows us to derive sufficient conditions for PoA increase under new processor inclusion into the system, that is, in a situation resembling Braess's paradox [27, 119, 129, 174]. The next theorem shows the speed of the new processor that causes this situation.

**Theorem 7.2.** *For the system  $S$  composed of  $N \geq 2$  processors with speeds  $v_1 = 1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_N = s$ , the price of anarchy strictly increases as the result of adding a new processor of speed  $s'$  such that*

(1) *the new system with  $N + 1$  processors satisfies conditions (1) and (2) of Theo-*

rem 7.1 and

$$(2) \ s' < s \left( 1 + \frac{s}{\sum_{i=1}^{N-1} v_i} \right).$$

*Proof.* For the system  $S$ , the price of anarchy obeys the estimate  $PoA(S) \leq \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{s}$ . Suppose the new system meets conditions (1) and (2) of Theorem 7.1. If  $s' \leq s$ , then, for the new system, the price of anarchy becomes equal to  $\frac{\sum_{i=1}^N v_i + s'}{s} > \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{s}$ . On the other hand, in the case  $s' > s$ , for the new system, the price of anarchy is  $\frac{\sum_{i=1}^N v_i + s'}{s'} > \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{s}$  under  $s' < s \left( 1 + \frac{s}{\sum_{i=1}^{N-1} v_i} \right)$ .  $\square$

According to the following result, for PoA evaluation, it suffices to consider only the games in which the optimal social cost is 1.

**Theorem 7.3.** *For the system  $S$ , the price of anarchy constitutes*

$$PoA(S) = \max_{U_1: OPT(S, U_1) = 1} \max_{L \text{ is a Nash equilibrium in } \Gamma(S, U_1, \lambda)} SC(L).$$

*Proof.* Let  $L$  be the worst-case equilibrium in the game  $\Gamma(S, U, \lambda)$  with an arbitrary set of players  $U(n, w)$ . For each player  $j$ , the volume of his job is  $w_j$ , and the vector  $L_{OPT}$  gives the optimal strategy profile in this game. Let  $SC$  and  $OPT$  be the social cost in the profile  $L$  and the optimal social cost, respectively. The ratio of the worst-case equilibrium and optimal social cost is defined by  $\frac{SC}{OPT}$ . Since  $L$  represents an equilibrium, for any player  $j$ , we obtain  $\frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k = l_j} w_k}{v_j} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k = i} w_k + w_j}{v_i}$  for any processor  $i$ .

Now, explore the game with the same set of processors and players, where each player  $j$  has the job of volume  $\frac{w_j}{OPT}$ . The social costs in the profiles  $L$  and  $L_{OPT}$  are  $\frac{SC}{OPT}$  and 1, respectively. Owing to the linear homogeneity of processor delays in their loads, the profiles  $L$  and  $L_{OPT}$  form the worst-case equilibrium and optimal profiles, respectively, in the new game. Particularly, the profile  $L$  is an equilibrium in the new game, since for any player  $j$ , the inequality  $\frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k = l_j} w_k}{v_j OPT} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k = i} w_k + w_j}{v_i OPT}$  holds for any processor  $i$ . Let  $L'$  be any non-worst-case equilibrium in the new game. Then the game admits an equilibrium  $L'$  with a social cost  $\frac{SC'}{OPT}$  such that the social

cost in the profile  $L'$  exceeds that in the profile  $L$ , that is,  $\frac{SC'}{OPT} > \frac{SC}{OPT}$ . However, in the initial game the profile  $L'$  corresponds to the social cost  $SC' > SC$ , and the equilibrium  $L'$  is worse than its counterpart  $L$ . Similarly,  $L_{OPT}$  gives the optimal profile in the new game. Then the ratio of the worst-case equilibrium and optimal social cost in the new game also equals  $\frac{SC}{OPT}$ .

Consequently, any game  $\Gamma(S, U, \lambda)$  corresponds to a game  $\Gamma(S, U_1, \lambda)$  with normalized job volumes such that  $OPT(S, U_1) = 1$ . Moreover, the ratio of the worst-case equilibrium and optimal social cost is the same in both games. Hence, for PoA evaluation, it suffices to consider only the games with the unit optimal social cost.  $\square$

### § 7.3 The price of anarchy in the case of three processors

As a matter of fact, the exact PoA value in the two-processor model with speeds  $1 \leq s$  was found in [70]:

$$PoA(S) = \begin{cases} 1 + \frac{s}{s+2} & \text{if } 1 \leq s \leq \sqrt{2}, \\ s & \text{if } \sqrt{2} \leq s \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ 1 + \frac{1}{s} & \text{if } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq s. \end{cases}$$

Consider the case of three processors in the system  $S$ . Without loss of generality, throughout this section, we believe that the processors have speeds  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s$ , that is, processor 1 is the slowest one, processor 2 has medium speed, and processor 3 is the fastest one.

For three processors, the PoA estimate (7.2.3) acquires the following form:

$$PoA(S) \leq \frac{s + r + 1}{s}. \quad (7.3.1)$$

Construct a system of inequalities to-be-satisfied in a Nash equilibrium. Let  $L$  be an arbitrary Nash equilibrium. Denote by  $a$  the total volume of jobs on processor 2 with speed  $r$  and by  $b + c$  the volume of jobs on processor 3 with speed  $s$ , where  $c$  indicates the volume of the smallest job on this processor. Then  $W - a - b - c$  gives the volume of jobs on the slowest processor 1 of speed 1. In an equilibrium, an attempt to move any job  $j$  from processor  $l_j$  to another processor increases its

completion time. Obviously, this is the case where several jobs are moved from one processor to another, and the following system of inequalities holds in a Nash equilibrium:

$$\frac{a}{r} \leq \frac{b+c+a}{s}, \quad (7.3.2a)$$

$$\frac{a}{r} \leq W - b - c, \quad (7.3.2b)$$

$$\frac{b+c}{s} \leq \frac{a+c}{r}, \quad (7.3.2c)$$

$$\frac{b+c}{s} \leq W - a - b, \quad (7.3.2d)$$

$$W - a - b - c \leq \frac{W - b - c}{r}, \quad (7.3.2e)$$

$$W - a - b - c \leq \frac{W - a}{s}. \quad (7.3.2f)$$

**Lemma 7.1.** *For the system  $S$  composed of three processors with speeds  $1 \leq r \leq s$ , in any Nash equilibrium  $L$  the social cost does not exceed  $\frac{W+c}{s+1-\frac{r}{s}}$ , where  $c$  is the smallest job on the processor of speed  $s$ .*

*Proof.* Consider an arbitrary Nash equilibrium  $L$ . We have to show that on all processors the delay is not greater than  $\frac{W+c}{s+1-\frac{r}{s}}$ .

Take the delay on processor 2, which equals  $\frac{a}{r}$ . By inequality (7.3.2a) it is clear that  $\frac{a}{r} \leq \frac{b+c}{s-r}$  and  $b \geq \frac{s-r}{r}a - c$ . Condition (7.3.2d) leads to  $b+c \leq s(W-a-b)$ , whence it appears that

$$\frac{a}{r}(s-r+rs) \leq s(W-b) \leq s\left(W - \frac{s-r}{r}a + c\right),$$

$$\text{and then } \frac{a}{r}(s^2 + s - r) \leq (W+c)s.$$

Next, take the delay on processor 3, that is, the value  $\frac{b+c}{s}$ . Inequality (7.3.2c) yields  $\frac{a}{r} \geq \frac{b+c}{s} - \frac{c}{r}$ , and using (7.3.2b), we establish that

$$\begin{aligned} b+c &\leq W - \frac{a}{r} \leq W - \frac{b+c}{s} + \frac{c}{r}, \\ \text{and so } \frac{b+c}{s} &\leq \frac{W + \frac{c}{r}}{s+1} < \frac{W+c}{s+1-\frac{r}{s}}. \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

Finally, take the delay  $W - a - b - c$  on the slowest processor. In combination with the obvious identity  $a = W - b - c - (W - a - b - c)$ , inequality (7.3.2f) leads to

$$b + c \geq (s - 1)(W - a - b - c), \quad (7.3.4)$$

$$b \geq (s - 1)(W - a - b - c) - c. \quad (7.3.5)$$

It follows from inequality (7.3.2c) that

$$\frac{b + c}{s} \leq \frac{W - b - c - (W - a - b - c) + c}{r} = \frac{W - b - (W - a - b - c)}{r}.$$

Applying inequalities (7.3.4) and (7.3.5) to the left- and right-hand sides, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{s - 1}{s}(W - a - b - c) &\leq \frac{W + c - s(W - a - b - c)}{r}, \\ \text{and so } W - a - b - c &\leq \frac{W + c}{s + r - \frac{r}{s}} \leq \frac{W + c}{s + 1 - \frac{r}{s}}. \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

□

**Lemma 7.2.** *For the system  $S$  composed of three processors with speeds  $1 \leq r \leq s$ , the social cost does not exceed  $OPT \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$  in any Nash equilibrium  $L$  such that the total volume of jobs on the processor of speed  $s$  is not higher than  $s \cdot OPT$ .*

*Proof.* Consider an arbitrary Nash equilibrium  $L$ . If  $s \leq r^2 + r$ , then estimates (7.2.1) and (7.2.2) lead to

$$SC(L) \leq \frac{W}{s} \leq OPT \cdot \frac{s + r + 1}{s} \leq OPT \cdot \frac{s + r + 2}{s + 1 - \frac{r}{s}}.$$

Now, let  $s > r^2 + r$ . Take the delay on processor 2, which equals  $\frac{a}{r}$ . By inequality (7.3.2a) we obtain

$$\frac{a}{r} \leq \frac{b + c}{s - r} \leq OPT \cdot \frac{s}{s - r} < OPT \cdot \frac{s + r + 2}{s + 1 - \frac{r}{s}}.$$

Processor 3 satisfies the condition

$$\frac{b + c}{s} \leq OPT < OPT \cdot \frac{s + r + 2}{s + 1 - \frac{r}{s}}.$$

Again, inequality (7.3.2f) in combination with the identity  $a = W - b - c - (W - a - b - c)$  yields the following chain of inequalities for the slowest processor:

$$W - a - b - c \leq \frac{b+c}{s-1} \leq OPT \cdot \frac{s}{s-1} \leq OPT \cdot \frac{s}{s-r} < OPT \cdot \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}.$$

□

**Lemma 7.3.** *For the system  $S$  composed of three processors with speeds  $1 \leq r \leq s$ , the social cost does not exceed  $OPT \cdot \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$  in any Nash equilibrium  $L$  such that the smallest job on the processor of speed  $s$  has the volume  $c > r \cdot OPT$ .*

*Proof.* Consider an arbitrary Nash equilibrium  $L$ . If on processor 3 each job has a volume greater than  $r \cdot OPT$ , then in the optimal profile, all these jobs also move to this processor. In other words, their total volume is not greater than  $s \cdot OPT$ , that is, the condition of Lemma 7.2 holds. □

**Lemma 7.4.** *For the system  $S$  composed of three processors with speeds  $1 \leq r \leq s$ , the social cost does not exceed  $OPT \cdot \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$  in any Nash equilibrium such that on the processor of speed  $s$  the smallest job has a volume  $OPT < c \leq r \cdot OPT$  and the total volume of jobs on this processor is greater than  $s \cdot OPT$ .*

*Proof.* Consider an arbitrary Nash equilibrium  $L$ . For all values  $c \leq r \cdot OPT$ , using estimate (7.2.2), we have from (7.3.3) that

$$\frac{b+c}{s} \leq \frac{W + \frac{c}{r}}{s+1} \leq OPT \cdot \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}.$$

On the other hand, it appears from (7.3.3) that

$$W - a - b - c \leq \frac{W+c}{s+r-\frac{r}{s}} \leq OPT \cdot \frac{s+2r+2}{s+r-\frac{r}{s}} \leq OPT \cdot \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}.$$

If  $a \leq r \cdot OPT$ , then  $\frac{a}{r} \leq OPT \leq OPT \cdot \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$ .

Now, let  $a > r \cdot OPT$ . Since  $b+c > s \cdot OPT$  and the volume of each job on processor 3 is greater than  $OPT$  and does not exceed  $r \cdot OPT$ , in the optimal profile all these jobs are assigned to processors 2 and 3 only. Their total volume makes up  $b+c$ . Suppose the volume of each job on processor 2 in the Nash equilibrium  $L$  is also greater than  $OPT$ . In this case, in the optimal profile all these jobs are distributed between processors 2 and 3 only, and their total volume equals  $a$ . However, then we obtain  $OPT \geq \frac{a+b+c}{s+r}$ , which contradicts the inequalities  $a > r \cdot OPT$  and



$b + c > s \cdot OPT$ . Consequently, in the Nash equilibrium  $L$ , processor 2 receives at least one job of volume not greater than  $OPT$ .

Then  $\frac{a}{r} \leq \frac{b+c+OPT}{s}$ , whence it follows that  $\frac{b+c}{s} \geq \frac{a}{r} - \frac{OPT}{s}$  and  $b \geq \frac{as}{r} - OPT - c$ . Using estimate (7.2.2) and inequality (7.3.2d), we immediately derive

$$\begin{aligned} \frac{a}{r} - \frac{OPT}{s} &\leq \frac{b+c}{s} \leq W - b - a \leq \\ &\leq W - \frac{as}{r} + OPT + c - a \leq \\ &\leq OPT \cdot (r + s + 1) - \frac{as}{r} + OPT + r \cdot OPT - a, \\ \text{and } \frac{a}{r} &\leq OPT \cdot \frac{s + 2r + 2 + \frac{1}{s}}{s + r + 1} \leq OPT \cdot \frac{s + r + 2}{s + 1 - \frac{r}{s}}. \end{aligned}$$

□

The above lemmas lead to the generalized upper estimate of the PoA value in the three-processor model as follows.

**Theorem 7.4.** *For the system  $S$  composed of three processors with speeds  $1 \leq r \leq s$ , the price of anarchy can be estimated by*

$$PoA(S) \leq \begin{cases} \frac{s+r+1}{s} & \text{if } s \leq r^2 + r, \\ \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

*Proof.* Consider an arbitrary Nash equilibrium  $L$ . Lemmas 7.2, 7.3, and 7.4 dictate that  $SC(L) \leq OPT \cdot \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$  in all cases where the volume of each job on processor 3 of speed  $s$  exceeds  $OPT$ . In the case where processor 3 receives at least one job of volume  $c \leq OPT$ , this estimate follows directly from Lemma 7.1.

In addition, we have estimate (7.3.1). Since  $\frac{s+r+1}{s} \leq \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$  for  $s \leq r^2 + r$ , the desired upper estimate holds. □

To proceed, demonstrate that, for speeds  $s$  and  $r$ , there exist domains where the derived upper estimates give the exact PoA value. The following statement is a particular case of Theorem 7.1.

**Theorem 7.5.** *For the system  $S$  composed of three processors with speeds  $1 \leq r \leq s$  such that  $(s - r)(s + r + 1) \leq s(s^2 - r(s + r + 1))$  and  $s \leq r^2 + r$ , the price of anarchy constitutes  $PoA(S) = \frac{s+r+1}{s}$ .*

The next theorem determines the domains of  $s$  and  $r$  where  $\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$  is the exact PoA value.

**Theorem 7.6.** *For the system  $S$  composed of three processors with speeds  $1 \leq r \leq s$  such that  $s > r^2 + r$  and  $s(s^2 - r(s + r + 1)) \geq 2(rs + s - r)$ , the price of anarchy makes up  $PoA(S) = \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$ .*

*Proof.* As the value  $\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$  is the upper estimate of the PoA, it suffices to show the following. For the system  $S$ , there exist games such that the ratio of the equilibrium and optimal social cost coincides with the given estimate.

Consider a game in which five players have the jobs of volumes

$$\begin{aligned} w_1 &= rs(s + r + 2), \\ w_2 &= s^2 + s - r, \\ w_3 &= s - r - r^2 > 0 \text{ if } s > r + r^2, \\ w_4 &= r(s^2 + s - r) \geq w_2, \\ w_5 &= s^3 + s^2 + r^2 - rs^2 - sr^2 - 3sr - s + r \geq w_2 \\ &\quad \text{if } s(s^2 - r(s + r + 1)) \geq 2(rs + s - r). \end{aligned}$$

In a Nash equilibrium, processor 2 receives the job of volume  $w_1$ , thereby becoming the processor with the largest delay  $\lambda_2 = s(s+r+2)$ . Processor 3 is assigned the jobs of volumes  $w_2$ ,  $w_4$ , and  $w_5$ , which results in its delay  $\lambda_3 = (s-r)(s+r+2) < \lambda_2$ . The slowest processor 1 deals with the job of volume  $w_3$  and therefore has the delay  $\lambda_1 = s - r - r^2 < s^2 + (2s - r) - r - r^2 = \lambda_3$ . In fact, this is the smallest load among all the processors.

Let us demonstrate that this profile is a Nash equilibrium. If the job of volume  $w_1$  moves from the most loaded processor 2 to the less loaded processor 3, then its delay remains invariable. On the other hand, as this job moves to processor 1, the delay of the latter makes up  $s - r - r^2 + s^2r + sr^2 + 2rs > \lambda_2$ , and if the smallest job of volume  $w_2$  moves from processor 3 to processor 1, then its delay is also the same.

In the optimal case, processor 2 executes the job of volume  $w_4$ ; processor 3 executes the jobs of volumes  $w_1$ ,  $w_3$ , and  $w_5$ ; and processor 1 executes the job of volume  $w_2$ . All processors have the identical delay  $s^2 + s - r$ .

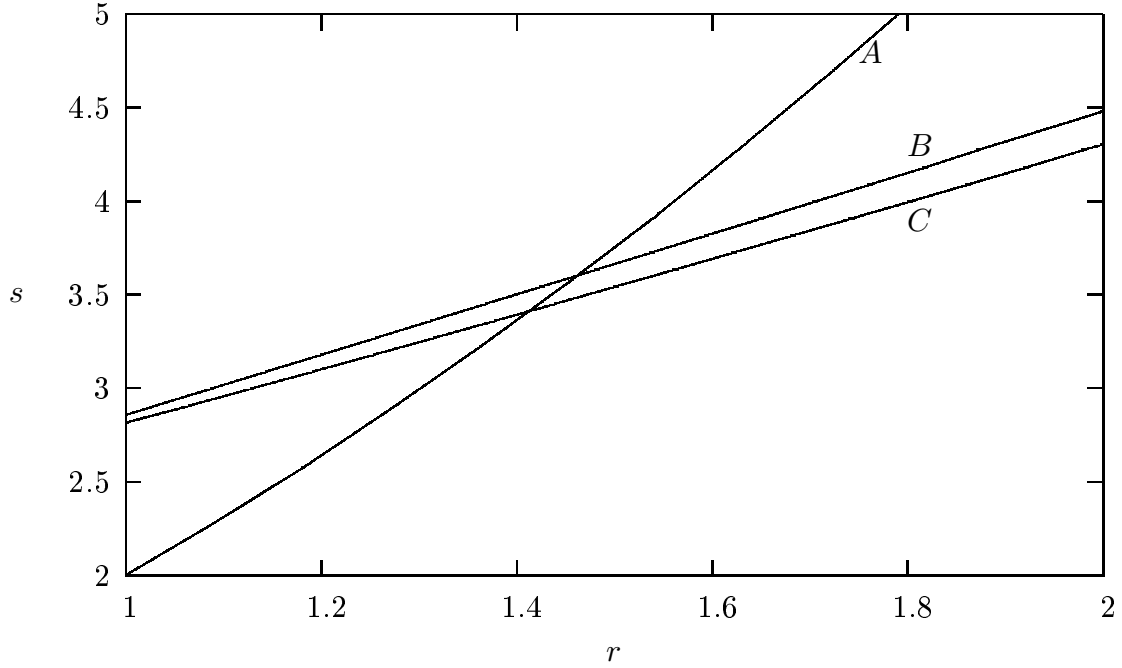


Figure 7.1: Estimation domains for  $PoA(S)$ : (A) curve  $s = r^2 + r$ , (B) curve  $2(rs + s - r) = s(s^2 - r(s + r + 1))$ , and (C) curve  $(s - r)(s + r + 1) = s(s^2 - r(s + r + 1))$

Hence, the ratio of the equilibrium and optimal social cost is  $\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$ .  $\square$

In Fig. 7.1, the domain of  $s$  and  $r$  where the price of anarchy equals  $\frac{s+r+1}{s}$  is bounded by the curves  $s = r^2 + r$  (from the left) and  $(s - r)(s + r + 1) = s(s^2 - r(s + r + 1))$  (from the right). The domain bounded by the curves  $s = r^2 + r$  and  $2(rs + s - r) = s(s^2 - r(s + r + 1))$  from the right and below, respectively, corresponds to the price of anarchy  $\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$ .

The following theorem gives sufficient conditions for PoA increase under new processor inclusion into the system.

**Theorem 7.7.** *For the system  $S$  composed of two processors with speeds  $1 \leq s$ , the price of anarchy strictly increases as the result of adding a new processor of speed  $q$  that satisfies at least one of the following conditions:*

- 1)  $1 \leq q \leq s$ ,  $s \leq q^2 + q$ , and  $(s - q)(s + q + 1) \leq s(s^2 - q(s + q + 1))$ ;
- 2)  $1 \leq q \leq s$ ,  $s > q^2 + q$ ,  $s(s^2 - q(s + q + 1)) \geq 2(qs + s - q)$ , and  $q > \frac{s+1}{s(s-1)}$ ;
- 3)  $s < q < s^2 + s$  and  $(q - s)(q + s + 1) \leq q(q^2 - s(q + s + 1))$ .

*Proof.* By estimate (7.2.3) the price of anarchy does not exceed  $\frac{s+1}{s}$  in the system  $S$  containing two processors of speeds  $1 < s$ .

If  $s \leq q^2 + q$  and  $(s - q)(s + q + 1) \leq s(s^2 - q(s + q + 1))$ , then by Theorem 7.5 the price of anarchy in the new system with three processors of speeds 1,  $q$ , and  $s$  constitutes  $\frac{s+q+1}{s}$ , that is, is higher than  $\frac{s+1}{s}$ .

Under  $s > q^2 + q$  and  $s(s^2 - r(s + q + 1)) \geq 2(qs + s - q)$ , Theorem 7.6 claims that the price of anarchy in the new system equals  $\frac{s+q+2}{s+1-\frac{q}{s}}$ , thereby exceeding the value  $\frac{s+1}{s}$  for  $q > \frac{s+1}{s(s-1)}$ .

Finally, in the case  $s < q < s^2 + s$  and  $(q - s)(q + s + 1) \leq q(q^2 - s(q + s + 1))$ , using Theorem 7.5, we obtain that the price of anarchy in the new system is  $\frac{q+s+1}{q}$ , which is greater than  $\frac{s+1}{s}$  for  $q < s^2 + s$ .  $\square$

## § 7.4 A numerical method to calculate the price of anarchy

In the previous section, we have derived an analytical expression for the price of anarchy in the three-processor model with a rather high speed of the fastest processor. However, if the speeds of two fast processors are sufficiently close, the expression becomes cumbersome. In what follows, we suggest a computing method for the price of anarchy in the system of three processors. This method can be generalized to the systems composed of more processors. However, such a generalization increases the number of associated linear programming problems and the number of their variables and constraints.

Consider the following system of linear equations in the components of the vectors  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $c = (c_1, c_2, c_3)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leq \frac{b_1+b_2+b_3 + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k}{v_j}, \\ \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leq \frac{c_1+c_2+c_3 + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k}{v_l}, \\ \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \leq \frac{c_1+c_2+c_3 + \min_{k=1,2,3:b_k>0} b_k}{v_l} \text{ or } \max_{k=1,2,3} b_k = 0, \\ \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \geq \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \geq \frac{c_1+c_2+c_3}{v_l}, \\ a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (7.4.1)$$

This system describes a set of hyperplanes passing through the point  $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  in the 9D space, and the solution set is a domain in the space bounded by the hyperplanes. The system is feasible: for example, the triplet

$a_1 = a_2 = a_3 = \alpha v_i$ ,  $b_1 = b_2 = b_3 = \alpha v_j$ , and  $c_1 = c_2 = c_3 = \alpha v_l$  is a solution for all  $\alpha > 0$ . Furthermore, the solution set is unbounded, since  $\alpha$  can be arbitrarily large.

Consider the system  $S$  composed of three processors with speeds  $1 \leq r \leq s$  and  $n$  players. Let  $L$  be a Nash equilibrium in the system  $S$  such that processor  $i$  is slowest in this profile, processor  $j$  has a medium delay, and processor  $l$  is fastest. Suppose that, in the equilibrium  $L$ , processor  $i$  receives the total volume of jobs defined by

$\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k = a_1 + a_2 + a_3$  and the corresponding volumes for processors  $j$  and  $l$  are  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k = b_1 + b_2 + b_3$  and  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k = c_1 + c_2 + c_3$ , respectively. The volume of jobs on each processor is somehow divided into three parts so that each component of the 3D vectors  $a$ ,  $b$ , and  $c$  is either zero or positive and includes at least one job.

**Lemma 7.5.** *Let  $L$  be a Nash equilibrium in the game involving three processors  $i$ ,  $j$  and  $l$  and  $n$  players such that*

$$\begin{aligned} \lambda_i(L) &\geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L), \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k &= a_1 + a_2 + a_3, \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k &= b_1 + b_2 + b_3, \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k &= c_1 + c_2 + c_3. \end{aligned}$$

Here, for all  $k = 1, 2, 3$ , the component  $a_k$  is zero or the volume of at least one job on processor  $i$ , the component  $b_k$  is zero or the volume of at least one job on processor  $j$ , and the component  $c_k$  is zero or the volume of at least one job on processor  $l$ . Then the set of the vectors  $a$ ,  $b$ , and  $c$  is a solution of system (7.4.1).

*Proof.* Suppose  $L$  forms a Nash equilibrium and  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ . In this

case, the following inequalities hold:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k}{v_i} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k + \min_{k=1, \dots, n: l_k=i, w_k>0} w_k}{v_j}, \\ \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k}{v_i} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k + \min_{k=1, \dots, n: l_k=i, w_k>0} w_k}{v_l}, \\ \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k}{v_j} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k + \min_{k=1, \dots, n: l_k=j, w_k>0} w_k}{v_l}, \text{ or } \max_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k = 0, \\ \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k}{v_i} \geq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k}{v_j} \geq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k}{v_l}. \end{array} \right.$$

Since each nonzero value  $a_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) equals the volume of at least one job on processor  $i$ , we naturally have  $\min_{k: a_k > 0} a_k \geq \min_{k: l_k=i, w_k > 0} w_k$ . In a similar manner,  $\min_{k: a_k > 0} a_k \geq \min_{k: l_k=i, w_k > 0} w_k$  and  $\min_{k: b_k > 0} b_k \geq \min_{k: l_k=j, w_k > 0} w_k$ . This means satisfaction of system (7.4.1).  $\square$

**Lemma 7.6.** *Any solution of system (7.4.1) defines a Nash equilibrium  $L$  in the game involving the system  $S$  composed of three processors  $i$ ,  $j$ , and  $l$  and the players whose jobs correspond to the nonzero components of the vectors  $a$ ,  $b$ , and  $c$  and delays are sorted in the order  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ .*

*Proof.* Let the set of the vectors  $a$ ,  $b$ , and  $c$  give a solution of system (7.4.1). Consider the game with three processors  $i$ ,  $j$ , and  $l$ . Let each nonzero component of the vectors  $a$ ,  $b$ , and  $c$  specify the job volume of a successive player. Consider a profile  $L$  such that the jobs of volumes  $a_k > 0$ ,  $b_k > 0$ , and  $c_k$  are assigned to processors  $i$ ,  $j$ , and  $l$ , respectively. As all inequalities (7.4.1) hold, the profile  $L$  gives the desired Nash equilibrium.  $\square$

The following result is immediate.

**Theorem 7.8.** *Any Nash equilibrium  $L$  in the game involving the system  $S$  composed of three processors  $i$ ,  $j$ , and  $l$  and  $n$  players corresponds to a Nash equilibrium  $L'$  in the game involving the same system  $S$  and at most nine players in which each processor receives no more than three jobs and the delays on all processors in  $L$  and  $L'$  coincide.*

*Proof.* Consider a Nash equilibrium  $L$  in the game with the system  $S$  of three processors and  $n$  players. Number the processors so that  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ .

By Lemma 7.5, for any Nash equilibrium in the game involving the system  $S$  and any number of players, there exists a corresponding solution  $a, b, c$  of system (7.4.1). By Lemma 7.6 this solution determines a Nash equilibrium  $L'$  in the game with the system  $S$  such that the nonzero components of the vectors  $a, b$ , and  $c$  specify the job volumes on processors  $i, j$ , and  $l$ , respectively. By definition the element sum of the vector  $a$  is the load of processor  $i$  in a profile  $L$ . Hence the delays on processor  $i$  coincide in the equilibria  $L$  and  $L'$ . Similarly, for processors  $j$  and  $l$ , the delays in the equilibrium  $L$  coincide with the corresponding delays in the equilibrium  $L'$ .  $\square$

This theorem claims that it is sufficient to consider only the games where each processor receives at most three jobs in an equilibrium and the equilibrium is the solution of system (7.4.1). In addition, the domain of the social cost coincides with the value domain of the games with an arbitrary number of players.

Let the components of the vectors  $a, b$ , and  $c$  be chosen as follows. In the optimal profile yielding the minimum social cost, processors  $i, j$ , and  $l$  receive the total volumes of jobs  $a_1 + b_1 + c_1$ ,  $a_2 + b_2 + c_2$ , and  $a_3 + b_3 + c_3$ , respectively, and the highest delay can be on each of them. Furthermore, by Theorem 7.3 the volumes of jobs are assumed to be normalized so that in the optimal profile the maximal delay among all processors is 1. In our case, this means that

$$a_1 + b_1 + c_1 \leq v_i,$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \leq v_j,$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \leq v_l,$$

and at least one of these inequalities holds as an equality.

**Lemma 7.7.** *A solution of the linear programming problem*

$$LPP(v_i, v_j, v_l) : \left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 \rightarrow \max \\ (r1) \quad \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leq \frac{b_1+b_2+b_3 + \min_{k:a_k>0} a_k}{v_j}, \\ (r2) \quad \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leq \frac{c_1+c_2+c_3 + \min_{k:a_k>0} a_k}{v_l}, \\ (r3) \quad \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \leq \frac{c_1+c_2+c_3 + \min_{k:b_k>0} b_k}{v_l} \text{ or } \max_{k=1,2,3} b_k = 0, \\ (r4) \quad \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \geq \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \geq \frac{c_1+c_2+c_3}{v_l}, \\ (r5) \quad a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3, \\ (r6) \quad a_1 + b_1 + c_1 \leq v_i, \\ (r7) \quad a_2 + b_2 + c_2 \leq v_j, \\ (r8) \quad a_3 + b_3 + c_3 \leq v_l \end{array} \right. \quad (7.4.2)$$

with respect to the components of the vectors  $a, b$ , and  $c$  gives the maximal social cost in a Nash equilibrium among all games where in an equilibrium at most three jobs are assigned to each processor,  $i, j$ , and  $l$  indicate the numbers of the processors in the descending order of their delays, and the optimal social cost makes up 1.

*Proof.* By Lemma 7.6, any solution of inequalities (r1)–(r5) in the problem  $LPP(v_i, v_j, v_l)$  defines an equilibrium in the game with three processors where each processor receives at most three jobs and  $i, j$ , and  $l$  are the numbers of the processors in the descending order of their delays.

The goal function in this problem is bounded above only by the hyperplanes corresponding to inequalities (r6)–(r8). Actually, inequalities (r1)–(r5) admit arbitrarily large values of the goal function, for example, for the solution  $a_1 = a_2 = a_3 = \alpha v_i$  with any value  $\alpha > 0$ ,  $b_1 = b_2 = b_3 = \alpha v_j$ , and  $c_1 = c_2 = c_3 = \alpha v_l$ . Therefore, the maximum is reached on one of the boundaries related to the last three inequalities. Hence, one of them holds as equality, and the optimal cost in the game corresponding to the solution of the problem  $LPP(v_i, v_j, v_l)$  is 1.  $\square$

Consequently, for exact PoA evaluation in the system  $S$  composed of three processors, it is necessary to solve a series of the linear programming problems  $LPP(v_i, v_j, v_l)$  for all permutations  $(1, r, s)$ , and the maximal solution among them yields the value  $PoA(S)$ . In other words, we may establish the following fact.



**Theorem 7.9.** *For the system  $S$  composed of three processors, the price of anarchy constitutes*

$$PoA(S) = \max_{\substack{(v_i, v_j, v_l) \text{ are permutations } (1, r, s) \\ \left\{ \frac{a_1 + a_2 + a_3}{v_i} \mid a, b, c \text{ is a solution of } LPP(v_i, v_j, v_l) \right\}}},$$

where  $LPP(v_i, v_j, v_l)$  is the linear programming problem (7.4.2).

*Proof.* By Lemma 7.7 the solution of problem (7.4.2) gives the maximal social cost in a Nash equilibrium, where  $i, j$ , and  $l$  are the numbers of the processors in the descending order of their delays, among all the games such that in an equilibrium each processor receives at most three jobs and the optimal cost is 1. The maximal solution among the problems for all admissible permutations  $(1, r, s)$  as the values of  $(v_i, v_j, v_l)$  gives the maximal social cost in a Nash equilibrium among all the games where in an equilibrium at most three jobs are assigned to each processor and the optimal cost is 1.

By Theorem 7.8, for any equilibrium in the game involving the system  $S$  of three processors and an arbitrary number of players, it is possible to construct a corresponding equilibrium in the game with the same processors and a set of at most nine players, where each processor receives no more than three jobs, and the social cost coincides in both equilibria. Thus, for PoA evaluation, it suffices to consider only the games where each processor has at most three jobs in an equilibrium.

Using Theorem 7.3, we finally establish that, for PoA evaluation, it suffices to consider only the games where the social cost in the optimal profile is 1.  $\square$

## § 7.5 Numerical examples

To estimate the price of anarchy in the three-processor model, we have developed a program for a visual comparison of the upper PoA estimates and its exact value constructed by solving a series of the linear programming problems. The parameters of the system  $S$  are adjusted in the program; by assumption the speed of processor 1 is 1, whereas an exact value and a certain range are specified for the speeds of processors 2 and 3, respectively. This approach allows us to study the PoA dynamics under a varying speed of one processor.

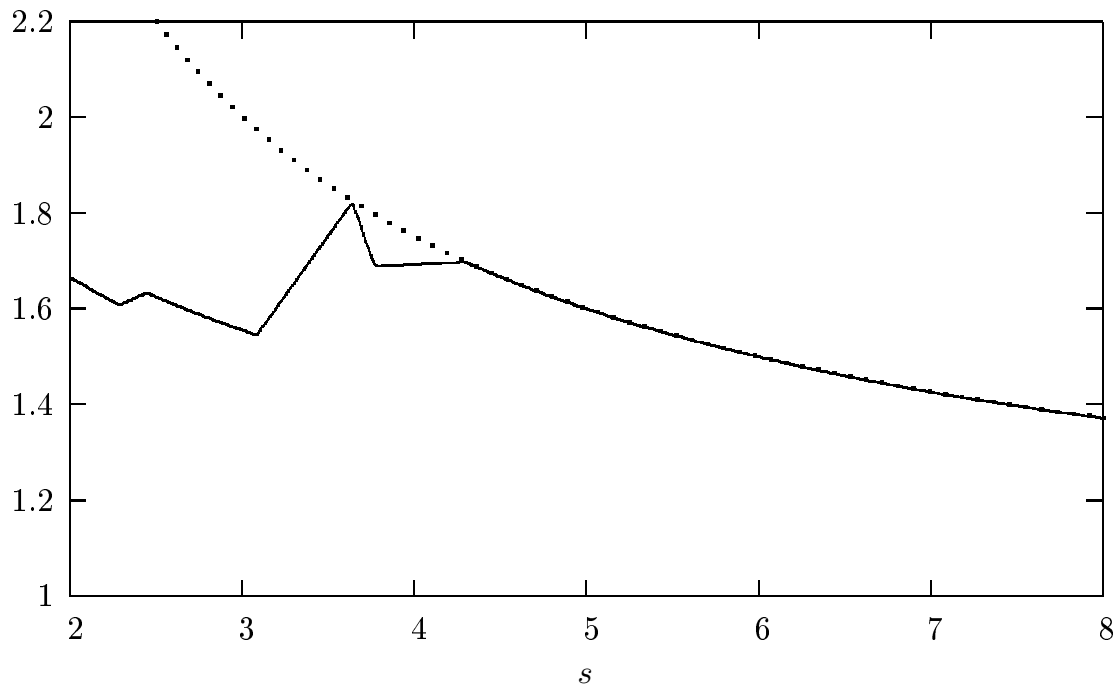


Figure 7.2: PoA estimate for system  $S$  with  $r = 2$ ,  $s \in [2, 8]$

The graphs in Figs. 7.2 and 7.3 illustrate the PoA estimates under the speeds  $r = 2$  and  $r = 5$  of processor 2, respectively. The speed of processor 1 is 1, and the speed of processor 3 (the parameter  $s$ ) increases from  $r$ . The dotted line indicates the generalized upper estimate for the price of anarchy, and the solid line indicates its exact value.

## § 7.6 Results

This chapter has explored the service system composed of  $N$  processors and  $n$  players and derived the upper estimate for the price of anarchy in the load balancing game. Moreover, we have established the conditions when the upper estimate represents the exact PoA value. The sufficient conditions for PoA increase have been also obtained under new processor inclusion into the system.

The three-processor model has been analyzed in detail. Here we have constructed the upper estimate for the PoA and the conditions when it coincides with the exact PoA value, as well as have proposed a computing algorithm of the exact PoA value. The algorithm can be generalized to systems with more processors, but this increases the number of linear programming problems to-be-solved and the number

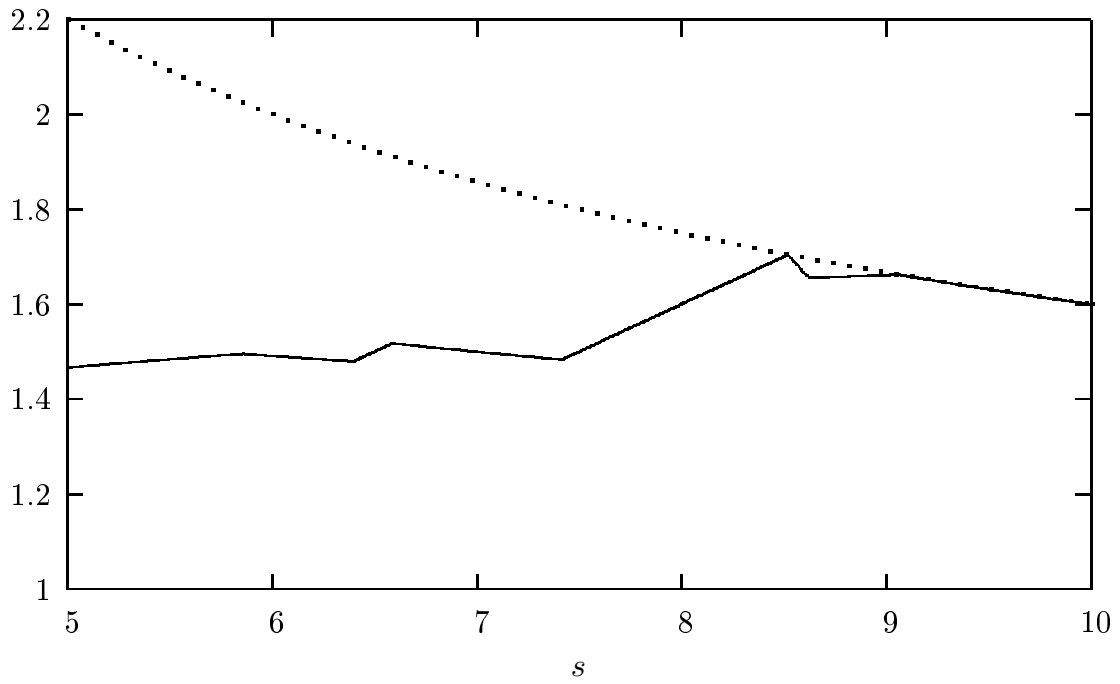


Figure 7.3: PoA estimate for system  $S$  with  $r = 5, s \in [5, 10]$

of associated variables and imposed constraints. And finally, we have implemented the algorithm as a program and conducted numerical experiments for comparing the obtained estimates of the PoA with its exact value. The results of these experiments have demonstrated the correctness of the derived estimates.

## Chapter 8

# Load Balancing Game with Linear Externalities

This chapter is devoted to the load balancing game with linear externalities where several egoistic players distribute their jobs of various volumes among processors of nonidentical speeds with delays depending on their own loads and on loads of other processors. Each player tries to minimize a completion time (delay) for his own job. Social cost is the maximal completion time among all processors.

We demonstrate the possibility to add linear externalities into delay functions of KP-model [44] similarly to papers [88, 123] which investigate externalities in the Wardrop model of a transportation system with parallel links. In our model we add linear externalities into the delay functions depending on processor loads and speeds. Externalities allow taking into account the influence of all loaded processors on each processor performance, unlike the model without externalities this problem has not been considered before. A processor load (its own load) is the total volume of jobs executed by a given processor. The ratio of a processor load and speed defines its delay, i.e., the job completion time at this processor. We suppose that for each processor its delay depends on not only its own load but also other processor's load contributes to the delay through the externalities. We can interpret that fact as follows. Each processor shares some part of its resources to the execution of some control operations together with other processors. It takes part in organizing, control, and support of the job execution process, as well as a data exchange associated with these operations. Therefore, even if a processor is not loaded with jobs it has some delay because it is involved in organizing the work of loaded processors.

In this chapter we study pure strategies Nash equilibria only; we show that similarly to initial KP-models [71, 82], the pure equilibrium always exists in the described class of games with 2 processors, in contrast to the general case.

## § 8.1 The game model

Consider a system  $S = S(N, v, e)$  composed of a set  $N$  of processors operating with speeds  $v_1 \leq \dots \leq v_n$ , where  $n = |N|$ , and externalities  $e_{ik}$ , where  $i, k \in N, i \neq k$ , and each coefficient  $e_{ik} \geq 0$  reflects a contribution of load on the processor  $k \neq i$  to the delay of the processor  $i$ . The system is used by a set of players with their jobs  $U = U(M, w)$ : each player from the set  $M$  chooses an appropriate processor for his job execution. For player  $j$ , the volume of job is  $w_j, j = 1, \dots, m$ , where  $m = |M|$ . Denote by  $W = \sum_{j=1}^m w_j$  the total volume of all jobs. Free processor  $i$  with speed  $v_i$  executes a job of volume  $w_j$  for  $w_j/v_i$  time, when all other processors are idle.

Each player can choose any processor. The strategy of player  $j$  is to select a processor  $l_j$  for his job execution. Then the strategy profile in the game  $\Gamma$  represents the vector  $L = (l_1, \dots, l_m)$ . The load of processor  $i$  is defined by  $\delta_i(L) = \sum_{j \in M: l_j = i} w_j$ .

The delay of processor  $i$  takes the form

$$\lambda_i(L) = \sum_{j \in M: l_j = i} \frac{w_j}{v_i} + \sum_{k \neq i} e_{ik} \sum_{j \in M: l_j = k} w_j = \frac{\delta_i(L)}{v_i} + \sum_{k \neq i} e_{ik} \delta_k(L).$$

In fact, this value is the same for all players selecting a given processor.

So, we define the pure strategy game  $\Gamma = \langle S(N, v, e), U(M, w), \lambda \rangle$ . In the present paper we consider only pure strategies.

Suppose that the system objective is to minimize the delay of the most delayed processor, that is, to minimize its job completion time. The social cost  $SC(L) = \max_{i \in N} \lambda_i(L)$  is described by the maximal delay over all processors. Define the optimal payoff (the social payoff in the optimal case) as

$$OPT = OPT(S, U) = \min_{L \text{ profile in } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L) \quad (8.1.1)$$

where minimization runs over all admissible strategy profiles in the game  $\Gamma(S, U, \lambda)$ .

A strategy profile  $L$  such that none of the players benefits from a unilateral deviation (change of the processor chosen in  $L$  for his job execution) is a pure

strategy Nash equilibrium (NE). To provide a formal definition, let  $L(j \rightarrow i) = (l_1, \dots, l_{j-1}, i, l_{j+1}, \dots, l_m)$  be the profile where the job  $j$  migrates from a processor  $l_j$  chosen in the profile  $L$  to some another processor  $i$ , whereas the remaining players keep their strategies the same as in  $L$ .

**Definition 8.1.** *A strategy profile  $L$  is said to be a pure strategy Nash equilibrium if and only if each player chooses a processor with the minimum delay, that is, for each player  $j \in M$ , we have the inequality  $\lambda_{l_j}(L) \leq \lambda_i(L(j \rightarrow i))$  for all processors  $i \in N$ .*

Lets introduce the assumptions to provide an adequate system behavior. Consider an arbitrary profile  $L$ . First, we suppose that the externalities are such that a migration of any job  $w_j$  from a processor  $l_j$  to another processor  $k \neq l_j$  strictly decreases a delay of the processor  $l_j$  and strictly increases a delay of the processor  $k$ . It means the following.

**Assumption 8.1.** *For each processor pairs  $i \neq k$  the inequality  $e_{ik} < \frac{1}{v_i}$  holds.*

Then  $\lambda_{l_j}(L(j \rightarrow k)) = \lambda_{l_j}(L) - w_j(\frac{1}{v_{l_j}} - e_{l_j k}) < \lambda_{l_j}(L)$  and  $\lambda_k(L(j \rightarrow k)) = \lambda_k(L) + w_j(\frac{1}{v_k} - e_{kl_j}) > \lambda_k(L)$ .

Second, it is naturally to assume the load of a processor  $i$  contributes to its delay  $\lambda_i(L)$  more than to delays of other processors. When a job  $w_j$  chooses some processor  $i$  it increases its delay on a value  $\frac{w_j}{v_i}$  which is more than the value  $e_{ki}w_j$  which is added to delays of others processors  $k$ . It means the following.

**Assumption 8.2.** *For each processor pairs  $i \neq k$  it holds that  $e_{ki} < \frac{1}{v_i}$ .*

Third, suppose that the contribution of the externalities is inversely proportional to processor speeds. This means that other processors loads contribute to fast processor delay less then to slow processor delay.

**Assumption 8.3.** *For each processor pair  $i \neq k$ , such that  $v_i \geq v_k$ , we have the inequality  $\sum_{l \neq i} e_{il} \leq \sum_{l \neq k} e_{kl}$ .*

Further in the chapter we suppose that the assumptions 8.1, 8.2 and 8.3 are fulfilled.

Note that in the model with externalities some job migration from a processor  $i$  to a processor  $k$  may lead to delay increasing or decreasing on other processors  $l \neq i, k$ . Therefore in contrast to the initial KP-model, the presented game may not possess any pure Nash equilibrium for the general case as we will show in the following example. In particular, we show in the next section that the game with two processors always has a pure Nash equilibrium.

**Example 22.** *Here is an example of simple game which does not have any pure NE. Consider the game with two jobs of volumes 1 and three processors of speeds 1. The following externalities are given:  $e_{12} = e_{23} = e_{31} = \epsilon$ ,  $e_{13} = e_{21} = e_{32} = 0$ ,  $0 < \epsilon < 1$ . Consider an arbitrary profile, e.g.  $L = (1, 2)$ . The first job obtains a delay  $1 + \epsilon$ , the second one obtains 1. The first job migrates to the free processor 3 and obtains a delay 1. Then the second job delay increases to  $1 + \epsilon$  and forces it to migrate to the first processor which becomes idle. It increases the first job delay, which needs to migrate to the processor 2. Repeating the process we obtain an infinite profile loop  $(1, 2) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (1, 2) \rightarrow \dots$*

Suppose that the system and job sets are such that the game possesses a pure Nash equilibrium. We define Price of Anarchy of the corresponding system as follows.

**Definition 8.2.** *The price of anarchy in the system  $S$  is the maximal ratio of the social cost in the worst-case Nash equilibrium and the social cost in the optimal case:*

$$PoA(S) = \max_U \frac{\max_{L \text{ is a Nash equilibrium in } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)}{OPT(S, U)}.$$

## § 8.2 The case of two processors

In this section we try to estimate the PoA value for the case of two processors with externalities and compare it with the PoA value for the initial model without externalities.

Consider now the model with 2 processors with speeds  $v_1 = 1$  and  $v_2 = s \geq 1$ . Note that such a choice of processor speeds in the system does not violate generality:

it is always possible to normalize the speeds using division by the speed of the slowest processor. Note that dividing speeds we also must multiply externalities by the same value. So we keep a ratio between delays.

Authors of [71, 82] show that the KP-model game always has the pure Nash equilibrium. Similarly we prove that the same is true for the presented model in case of two processors.

Note that assumptions 8.1, 8.2 and 8.3 imply that  $e_{12} \geq e_{21}$  and the values  $1 - v_i e_{ik}$  and  $1 - v_i e_{ki}$  are strictly positive for any  $i \neq k$ .

**Theorem 8.1.** *The game with two processors based on KP-model with linear externalities always possess the pure NE.*

*Proof.* Each pure profile  $L$  corresponds to a vector of processor delays  $\lambda(L) = (\lambda_1(L), \lambda_2(L))$ . Determine a vector  $\lambda'(L) = (\lambda'_1(L), \lambda'_2(L))$  consisting of all the components of  $\lambda(L)$ , sorted in descending order. Let  $\lambda^0$  be a lexicographic minimum from the set of vectors  $\lambda'(L)$  for all possible pure profiles  $L$ , and  $L^0$  is a profile corresponding to  $\lambda^0$ . Now we show that  $L^0$  is a pure NE.

Suppose the opposite. Suppose that  $L^0$  is not NE. Then there exists some job  $j$ , which may migrate from the processor  $l_j$  to some processor  $k \neq l_j$  to reduce its delay. This means that  $\lambda_{l_j}(L^0) > \lambda_k(L^0)$ , that is the processor  $l_j$  is the most delayed. Also moving a job  $j$  makes delays of both processors less than  $\lambda_{l_j}(L^0)$ , since  $\lambda_{l_j}(L^0(j \rightarrow k)) = \lambda_{l_j}(L^0) - w_j(\frac{1}{v_{l_j}} - e_{l_j k}) < \lambda_{l_j}(L^0)$ , and  $\lambda_k(L^0(j \rightarrow k)) < \lambda_{l_j}(L^0)$ . That is  $\lambda^0$  is not a lexicographic minimum.  $\square$

Denote the following expressions as  $\eta = \eta(s) = 1 + s - s(e_{12} + e_{21})$ ,  $\zeta = \zeta(s) = 1 - s e_{12} e_{21}$  for convenience and to make entries shorter.

Here we present the following estimations which are satisfied in our model with assumptions 8.1, 8.2 and 8.3. We use them for the further analysis.

**Proposition 8.1.** *The equilibrium social cost is not higher than the social cost in the case where all jobs are executed by the fastest processor only:*

$$SC(L) \leq \frac{W}{s}. \quad (8.2.1)$$

*Proof.* Consider an equilibrium profile  $L$  such that  $SC(L) > \frac{W}{s}$ . Let  $SC(L) = \lambda_2(L) = \frac{W-\Delta}{s} + e_{21}\Delta = \frac{W}{s} - \Delta(\frac{1}{s} - e_{21}) < \frac{W}{s}$ , where  $\Delta$  is a sum of volumes of jobs



which are executed on the processor 2,  $\Delta$  is a part of the total volume  $W$ . Then let  $SC(L) = \lambda_1(L) = W - \Delta + e_{12}\Delta \leq \frac{\Delta+w_j}{s} + e_{21}(W - \Delta - w_j)$ , where  $w_j$  – the volume of any job on the processor 1. Then  $\frac{W}{s} < \frac{\Delta+w_j}{s} + e_{21}(W - \Delta - w_j)$ , which yields  $\frac{1}{s} < e_{21}$ . But it contradicts with Assumption 8.1.  $\square$

**Proposition 8.2.** *The following estimation holds for the optimal social cost.*

$$OPT \geq \frac{W\zeta}{\eta} \quad (8.2.2)$$

*Proof.* Consider the situation where jobs are arbitrarily splittable. Then they could be shared between two processors so that their delays are the same:  $\lambda' = \frac{W-\Delta}{v_1} + e_{12}\Delta = \frac{\Delta}{v_2} + e_{21}(W - \Delta)$ , where  $\Delta$  is a part of total jobs volume  $W$  processed on the processor 2. From the equation we obtain  $\Delta = \frac{W(v_2 - e_{21}s)}{\eta(s)}$  and  $\lambda' = \frac{W\zeta(s)}{\eta(s)}$ . The optimal system cost  $OPT$  in our model with unsplitable jobs is not less than  $\lambda'$  in the described situation.  $\square$

### § 8.3 The price of anarchy

The paper [70] presents an exact value for the price of anarchy for the system of two processors without externalities:

$$PoA^0(S) = \begin{cases} 1 + \frac{s}{s+2}, & \text{if } 1 \leq s \leq \sqrt{2}, \\ s, & \text{if } \sqrt{2} \leq s \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ 1 + \frac{1}{s}, & \text{if } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq s. \end{cases}$$

We find similar estimation for the system with externalities.

Estimates (8.2.1) and (8.2.2) directly yield the following upper estimate for the price of anarchy.

**Lemma 8.1.** *For the system  $S$  composed of two processors with linear externalities*

$$PoA(S) \leq \frac{\eta}{s\zeta}. \quad (8.3.1)$$

Let's find other estimations to precise the given estimation in some areas depending on problem parameters' values.

Suppose that  $A$  is a set of some functions  $\alpha_i(\cdot)$  and define a function  $\alpha(\cdot)$  which is a combination of min and max operators applied to subsets

$\{\alpha_i(\cdot) \in A\} \subseteq A$ . We say that the component  $\alpha_*(s) \in A$  is active for given  $s$  if  $\alpha_*(s) \equiv \alpha(s)$ . The domain of  $s$  where this identity is true we call an active area for the function  $\alpha_*(s)$ .

**Lemma 8.2.** *For the system  $S$  composed of two processors with linear externalities under the assumptions 8.1, 8.2 and 8.3 the price of anarchy has the following upper estimation:*

$$PoA(S) \leq \max\left\{\frac{\eta(\zeta + 1 - se_{21})}{\zeta(\eta + 1 - se_{21})}, \frac{s(1 - e_{12})}{\eta - s + s^2e_{21}}, \frac{s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12})}{\zeta}\right\}. \quad (8.3.2)$$

*Proof.* Consider some Nash equilibrium  $L$ . Let  $i$  to be the number of processor with the largest delay, such that  $\lambda_i(L) = SC(L)$ . Its speed equals to  $v_i$ . We denote  $k$  and  $v_k$  a number and speed of another processor correspondingly. Denote also  $w' = \min_{j:l_j=i} w_j$  the minimal job's volume on the processor  $i$  and  $a = \sum_{j \neq k:l_j=i} w_j$  the total volume of all remaining jobs on the processor  $i$ . Then the total volume of jobs on the processor  $k$  equals to  $W - a - w'$ .

$$\lambda_i(L) = \frac{w' + a}{v_i} + e_{ik}(W - a - w') \leq \frac{W - a}{v_k} + e_{ki}a. \quad (8.3.3)$$

We express  $a$  from (8.3.3)

$$a \leq \frac{W(v_i - se_{ik}) - w'(v_k - se_{ik})}{\eta}$$

and estimate the left part of (8.3.3), which is equal to  $SC(L)$ , substituting the estimation for  $a$ .

$$\frac{w' + a}{v_i} + e_{ik}(W - a - w') \leq \frac{w'(1 - e_{ik}v_i)(1 - e_{ki}v_k) + W\zeta}{\eta}. \quad (8.3.4)$$

Consider two cases: in the first one there are more than one job on the processor  $i$ , in the second the processor  $i$  executes only one job.

1.  $a > 0$ . Then  $w' \leq a \leq \frac{W(v_i - se_{ik}) - w'(v_k - se_{ik})}{\eta}$ , which yields  $w' \leq \frac{W(v_i - se_{ik})}{\eta + v_k - se_{ik}}$  and from (8.3.4) we obtain  $SC(L) \leq \frac{W(\zeta + 1 - v_i e_{ik})}{\eta + v_k - se_{ik}}$ . Use the estimation (8.2.2), and then  $PoA \leq \frac{\eta(\zeta + 1 - v_i e_{ik})}{\zeta(\eta + v_k - se_{ik})}$ . That is  $PoA \leq \max\left\{\frac{\eta(\zeta + 1 - e_{12})}{\zeta(\eta + s - se_{12})}, \frac{\eta(\zeta + 1 - se_{21})}{\zeta(\eta + 1 - se_{21})}\right\} = \frac{\eta(\zeta + 1 - se_{21})}{\zeta(\eta + 1 - se_{21})}$  under condition  $s \geq \frac{2}{e + e_{12} - e_{21}}$  (that is  $e_{12} \geq e_{21}$ , since  $s \geq 1$ ) and  $s < \frac{1}{e_{21}}$ .

2.  $a = 0$ . Then  $SC(L) = \frac{w'}{v_i} + e_{ik}(W - w') \leq \frac{W}{v_k}$ . Assume that  $w'$  also remains on the processor  $i$  in the optimal profile. Then  $OPT \geq \frac{w' + \Delta}{v_i} + e_{ik}(W - w' - \Delta) \geq \frac{w'}{v_i} + e_{ik}(W - w')$ . Therefore  $\frac{SC(L)}{OPT} = 1$ .

Suppose now that  $w'$  migrates to the processor  $k$  in the optimal profile. In this case  $OPT \geq \frac{w'+\Delta}{v_k} + e_{ki}(W - w' - \Delta) \geq \frac{w'}{v_k} + e_{ki}(W - w')$ .

a) Assume first that  $SC(L) = \frac{w'}{v_i} + e_{ik}(W - w') = \frac{W}{v_k}$ . Expressing  $w' = \frac{W(\frac{1}{v_k} - e_{ik})}{\frac{1}{v_i} - e_{ik}}$  and substituting it into  $OPT$  we obtain  $OPT \geq \frac{w'}{v_k} + e_{ki}(W - w') = W \frac{v_i - s(e_{ik} + e_{ki}) + e_{ki}v_k^2}{v_k^2(1 - v_i e_{ik})}$ . Denote  $OPT^{eq} = W \frac{v_i - s(e_{ik} + e_{ki}) + e_{ki}v_k^2}{v_k^2(1 - v_i e_{ik})}$ . Then  $\frac{SC(L)}{OPT} \leq \frac{W}{v_j OPT^{eq}} = \frac{s(\frac{1}{v_i} - e_{ik})}{v_i - s(e_{ik} + e_{ki}) + e_{ki}v_k^2}$ . That is  $PoA \leq \max\{\frac{s(1 - e_{12})}{1 - s(e_{12} + e_{21}) + e_{21}s^2}, \frac{1 - se_{21}}{s - s(e_{12} + e_{21}) + e_{12}}\} = \max\{\frac{s(1 - e_{12})}{\eta - s + e_{21}s^2}, \frac{1 - se_{21}}{\eta - 1 + e_{12}}\} = \frac{s(1 - e_{12})}{\eta - s + e_{21}s^2}$ , since  $\frac{s(1 - e_{12})}{\eta - s + e_{21}s^2} \geq 1$ , and  $\frac{1 - se_{21}}{\eta - 1 + e_{12}} \leq 1$ . Denote  $Est^{eq} = \frac{s(1 - e_{12})}{\eta - s + e_{21}s^2}$ . Note that this estimation does not exceed  $\frac{\eta}{s\zeta}$  when  $s^2(1 - e_{12}^2 - e_{21}) - s(1 - 2e_{12} - e_{21}) - 1 \leq 0$ .

b) Now consider the situation when  $SC(L) = \frac{w'}{v_i} + e_{ik}(W - w') < \frac{W}{v_k}$ . Note that  $SC(L) = \frac{w'}{v_i} + e_{ik}(W - w') \leq \frac{w'+\Delta}{v_i} + e_{ik}(W - w' - \Delta)$  for any value  $\Delta \geq 0$ , as  $\frac{1}{v_i} - e_{ik} > 0$ . According to (8.2.2)  $OPT \geq \frac{W\zeta}{\eta}$ .

Suppose first that  $OPT = \frac{W\zeta}{\eta} = \frac{w'+\Delta}{v_k} + e_{ki}(W - w' - \Delta) = \frac{W - w' - \Delta}{v_i} + e_{ik}(w' + \Delta)$ , where  $\Delta \geq 0$  is a total volume of jobs including the job  $w'$  which are executed on the processor  $i$  in the optimal profile. Therefore  $w' + \Delta = \frac{Wv_k(1 - v_i e_{ki})}{\eta}$  and  $W - w' - \Delta = \frac{Wv_i(1 - e_{ik}v_k)}{\eta}$ . Then  $SC(L) \leq \frac{W}{\eta v_i}(v_k - se_{ki} + v_i^2 e_{ik}(1 - v_k e_{ik}))$ . Denote  $Est^i = \frac{W}{\eta v_i}(v_k - se_{ki} + v_i^2 e_{ik}(1 - v_k e_{ik}))$  and note that  $Est^i \leq \frac{W}{\eta}(s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12}))$ , since this inequality is equivalent to  $s^2(1 - e_{12})^2 \geq (1 - se_{12})^2$ , which is true when  $1 + e_{12} \leq \frac{1}{s} + e_{21}$ .

Denote  $Est^s = \frac{W}{\eta}(s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12})) \geq \frac{W}{s\eta}(1 - se_{12} + s^2 e_{21}(1 - e_{21})) = Est^1$ .

In this case the ratio  $\frac{SC(L)}{OPT} \leq \frac{s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12})}{\zeta}$ . Note that this estimation does not exceed  $\frac{\eta}{s\zeta}$  as the previous  $Est^{eq}$ , when  $s^2(1 - e_{12}^2 - e_{21}) - s(1 - 2e_{12} - e_{21}) - 1 \leq 0$ . Also, this estimation is at least  $Est^{eq}$  when  $(se_{21} - e_{12})(s^2(1 - e_{12}^2 - e_{21}) - s(1 - 2e_{12} - e_{21}) - 1) \geq 0$ . Therefore we obtain the following necessary conditions for an activity of the given estimation:  $se_{21} - e_{12} \leq 0$  and  $s^2(1 - e_{12}^2 - e_{21}) - s(1 - 2e_{12} - e_{21}) - 1 \leq 0$ . But if  $se_{21} - e_{12} \geq 0$  and  $s^2(1 - e_{12}^2 - e_{21}) - s(1 - 2e_{12} - e_{21}) - 1 \leq 0$ , then the estimation  $Est^{eq}$  is more actual and becomes active.

Let now  $\frac{W\zeta}{\eta} < OPT = \max\{\frac{w'+\Delta}{v_k} + e_{ki}(W - w' - \Delta), \frac{W - w' - \Delta}{v_i} + e_{ik}(w' + \Delta)\}$ .

First we consider the case when  $k = 1$ , and  $i = 2$ . Then  $\frac{W\zeta}{\eta} < OPT = \max\{w' + \Delta + e_{12}(W - w' - \Delta), \frac{W - w' - \Delta}{s} + e_{21}(w' + \Delta)\}$ . Therefore  $w' + \Delta = \frac{W(1 - se_{12})}{\eta} + \gamma$ ,  $W - w' - \Delta = \frac{Ws(1 - e_{21})}{\eta} - \gamma$  and  $SC(L) \leq Est^1 + \gamma(\frac{1}{s} - e_{21})$ . If

$\gamma < 0$ , then  $Est^1 + (\frac{1}{s} - e_{21}) < Est^1 \leq Est^s$ , and  $OPT = \frac{W\zeta}{\eta} - \gamma(\frac{1}{s} - e_{21}) > \frac{W\zeta}{\eta}$ . In this case  $\frac{SC(L)}{OPT} \leq Est^s \frac{\eta}{W\zeta}$ . If  $\gamma > 0$ , then  $OPT = \frac{W\zeta}{\eta} - \gamma(1 - e_{12})$ . Then the ratio  $\frac{SC(L)}{OPT} \leq \frac{Est^1 + \gamma(\frac{1}{s} - e_{21})}{\frac{W\zeta}{\eta} + \gamma(1 - e_{12})} \leq Est^s \frac{\eta}{W\zeta}$ , as  $Est^1 \leq Est^s$  and  $(\frac{1}{s} - e_{21})\zeta \leq (s - se_{21} + e_{12} - se_{12}^2)(1 - e_{12})$ , which is equivalent to  $\eta(1 - s + se_{12}(e_{21} - e_{12})) \leq 0$  and holds when  $e_{21} \leq e_{12}$  (assumption 8.3).

Now let  $k = 2, i = 1$ . Then  $\frac{W\zeta}{\eta} < OPT = \max\{\frac{w'+\Delta}{s} + e_{21}(W - w' - \Delta), W - w' - \Delta + e_{12}(w' + \Delta)\}$ . Therefore  $w' + \Delta = \frac{Ws(1-e_{21})}{\eta} + \gamma$ ,  $W - w' - \Delta = \frac{W(1-se_{12})}{\eta} - \gamma$  and  $SC(L) \leq Est^s + \gamma(1 - e_{12})$ . If  $\gamma < 0$ , then  $Est^s + \gamma(1 - e_{12}) < Est^s$ , and  $OPT = \frac{W\zeta}{\eta} - \gamma(1 - e_{12}) > \frac{W\zeta}{\eta}$ . In this case  $\frac{SC(L)}{OPT} \leq Est^s \frac{\eta}{W\zeta}$ . If  $\gamma > 0$ , then  $OPT = \frac{W\zeta}{\eta} - \gamma(\frac{1}{s} - e_{21})$ . Then the ratio  $\frac{SC(L)}{OPT} \leq \frac{Est^s + \gamma(1 - e_{12})}{\frac{W\zeta}{\eta} + \gamma(\frac{1}{s} - e_{21})} \leq Est^s \frac{\eta}{W\zeta}$ , with the condition  $\eta(se_{21} - e_{12}) \leq 0$ , when the given estimation is at least  $Est^{eq}$ .

But if  $se_{21} - e_{12} > 0$ , then the estimation  $Est^{eq}$  becomes active. Check it for this case. Remember that  $SC(L) = w' + e_{12}(W - w') < \frac{W}{s}$ , that is  $w' = \frac{W(\frac{1}{s} - e_{12})}{1 - e_{12}} - \gamma$ , where  $\gamma > 0$ . Then  $SC(L) = \frac{W}{s} - \gamma(1 - e_{12})$ , and  $OPT \geq OPT^{eq} - \gamma(\frac{1}{v_k} - e_{ki}) = W \frac{\eta - s + e_{21}s^2}{s^2(1 - e_{12})} - \gamma(\frac{1}{s} - e_{21})$ . Then the ratio  $\frac{SC(L)}{OPT} \leq \frac{\frac{W}{s} - \gamma(1 - e_{12})}{W \frac{\eta - s + e_{21}s^2}{s^2(1 - e_{12})} - \gamma(\frac{1}{s} - e_{21})} \leq \frac{\frac{W}{s}}{W \frac{\eta - s + e_{21}s^2}{s^2(1 - e_{12})}} = Est^{eq}$ , as  $\frac{\eta - s + e_{21}s^2}{s} \geq \frac{1}{s} - e_{21}$  when  $se_{21} > e_{12}$ .  $\square$

Based on the estimations (8.3.1) and (8.3.2) from Lemma 8.1 and Lemma 8.2 we obtain the following generalized upper estimation for the price of anarchy.

**Theorem 8.2.** *For the system  $S$  composed of two processors with linear externalities the price of anarchy  $PoA(S) \leq Est(S)$ , where*

$$Est(S) = \min\{Est^{max}(S), \frac{\eta}{s\zeta}\}, \quad (8.3.5)$$

$$Est^{max}(S) = \max\left\{\frac{\eta(\zeta + 1 - se_{21})}{\zeta(\eta + 1 - se_{21})}, \frac{s(1 - e_{12})}{\eta - s + s^2e_{21}}, \frac{s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12})}{\zeta}\right\}.$$

We show that for the system  $S$  composed of two processors with externalities the value  $Est(S)$ , defined by (8.3.5), is also the lower estimation of the price of anarchy, that is  $PoA(S) \geq Est(s)$ .

**Theorem 8.3.** *For the system  $S$  with two processors and linear externalities under the assumptions 8.1, 8.2 and 8.3 the  $PoA$  value is at least  $Est(s)$ , defined by (8.3.5).*

*Proof.* The price of anarchy is defined for each system  $S$  as a maximum of a ratio of a social cost in the worst-case pure Nash equilibrium and an optimal social cost. The maximum chooses among all possible sets of players  $U$  with their jobs. If there is some set of players  $U^*$ , such that the ratio of the social cost in the worst-case Nash equilibrium and the optimal social cost equals to some given value  $C(S)$ , then the maximum on all possible sets  $U$  is also at least  $C(S)$ . This means that it suffices to give examples of games with the system  $S$  where the price of anarchy value is exactly  $Est(S)$ .

1. Example for  $PoA(S) \geq \frac{\eta(\zeta+1-se_{21})}{\zeta(\eta+1-se_{21})}$ .

Consider the system of four players with jobs  $w = (\eta s(1 - e_{21}), \eta s(1 - e_{21}), s(1 - e_{21})(1 - se_{21}), (1 - se_{12})(\eta + 1 - se_{21}) - s\eta(1 - e_{21}))$ . The value  $w_4 \geq 0$  when the PoA estimation of the current item is active, particularly when  $\frac{\eta(\zeta+1-se_{21})}{\zeta(\eta+1-se_{21})} \geq \frac{s-se_{21}+e_{12}(1-se_{12})}{\zeta}$ , because both inequalities hold when  $s^2(e_{12}^2 + e_{12}e_{21} - 1 - e_{21}^2 + 2e_{21}) - s(3e_{12} + e_{21}) + 2 \geq 0$ .

In the equilibrium  $L$  the second processor with a speed  $s$  executes jobs  $w_1$  and  $w_2$ , while jobs  $w_3$  and  $w_4$  are on the first processor with a speed 1. Delays on processors are  $\lambda_2(L) = \eta(\zeta + 1 - se_{21}) \geq \lambda_1(L) = \eta(2\zeta - s + se_{12})$ . If the job  $w_1$  migrates to the processor 1, there it meets a delay which becomes equal to  $\lambda_2(L)$ . In the optimal profile the first processor executes  $w_2$  and  $w_4$ , and the second executes  $w_1$  and  $w_3$ . Both delays are equal to  $\zeta(\eta + 1 - se_{21})$ .

2. Example for  $PoA(S) \geq \frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+s^2e_{21}}$ .

There are two players with jobs  $w = (s(1 - se_{12}), s(s - 1))$ . In the equilibrium profile  $L$  the job  $w_1$  is executed on the first processor with a speed 1, and the job  $w_2$  is on the processor with a speed  $s$ . Delays are  $\lambda_1(L) = s(1 - e_{12}) \geq \lambda_2(L) = s - 1 + se_{21}(1 - se_{12})$ . If the job  $w_1$  moves to the processor 2, its delay becomes equal to  $\lambda_1(L)$ . In the optimal profile  $w_1$  and  $w_2$  change their processors. The job  $w_2$  is executed on the first processor, and the job  $w_1$  is on the second. We show that delays  $\lambda_1(OPT) = s(s - 1) + se_{12}(1 - se_{12}) = s(1 - e_{12})(s - 1 + se_{12}) \leq \lambda_2(OPT) = \eta - s + s^2e_{21}$ , when  $\frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+s^2e_{21}} \leq \frac{\eta}{s\zeta}$ , that is PoA estimation in the current item is active. First inequality is transformed to  $s^2(e_{12}^2 + e_{21} - 1) + s(1 - 2e_{12} - e_{21}) + 1 \geq 0$ , and second is transformed to  $(se_{21} - 1)(s^2(e_{12}^2 + e_{21} - 1) + s(1 - 2e_{12} - e_{21}) + 1) \leq 0$ .

Both inequalities hold simultaneously since  $se_{21} - 1 < 0$  when  $e_{21} < \frac{1}{s}$ .

3. Example for  $PoA(S) \geq \frac{s-se_{21}+e_{12}(1-se_{12})}{\zeta}$ .

There are two players with jobs  $w = (s(1 - e_{21}), 1 - se_{12})$ . In the equilibrium  $L$  the job  $w_1$  is executed on the processor 1, and  $w_2$  is on the processor 2. Delays are  $\lambda_1(L) = s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12}) \geq \lambda_2(L) = \frac{1}{s} - e_{12} + se_{21}(1 - e_{21})$ , that is equivalent to the inequality  $s^2(1 - e_{21})^2 \geq (1 - se_{12})^2$ , which is true under Assumption 8.3. When  $w_1$  migrates to the processor 2 it meets a delay  $\frac{\eta}{s} \geq \lambda_1(L)$  if  $s^2(1 - e_{12}^2 - e_{21}) - s(1 - 2e_{12} - e_{21}) - 1 \leq 0$ , when the current estimation is active.

In the optimal profile  $w_1$  and  $w_2$  change their positions. The first processor executes the job  $w_2$ , and the second executes the job  $w_1$ . Both delays are equal to  $\zeta$ .

4. Example for  $PoA(S) \geq \frac{\eta}{s\zeta}$ .

There are three players with jobs  $w = (\eta(1 - se_{12}), s(1 - se_{12})(1 - e_{12}), s^2(1 - e_{12})(1 - e_{21}) - \eta(1 - se_{12}))$ . Transforming  $w_3$  we obtain  $w_3 = -(s^2(e_{12}^2 + e_{21} - 1) + s(1 - 2e_{12} - e_{21}) + 1)$ . The item 3 yields that the value  $w_3$  is non-negative if the current PoA estimation is active, partially, when  $\frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+s^2e_{21}} \geq \frac{\eta}{s\zeta}$ . In the equilibrium  $L$  the job  $w_1$  is executed on the first processor with a speed 1, and  $w_2$  and  $w_3$  are on the second processor with a speed  $s$ . Delays are equal to  $\lambda_1(L) = \eta(1 - e_{12}) \geq \lambda_2(L) = \frac{\eta}{s}(s - 1 + se_{21}(1 - se_{12}))$ . If the job  $w_1$  migrates to the second processor, it meets a delay  $\lambda_1(L)$ . In the optimal profile the job  $w_2$  is executed on the processor with a speed 1, and the jobs  $w_1$  and  $w_3$  are on the processor with a speed  $s$ . Both delays are equal to  $s\zeta(1 - e_{12})$ . □

Theorem 8.2 and Theorem 8.3 yield that the value  $Est(s)$  defined by (8.3.5) is an exact value for the price of anarchy in the considered model.

**Theorem 8.4.** *For the system  $S$  with two processors and linear externalities under the assumptions 8.1, 8.2 and 8.3 the PoA value  $PoA(S) = Est(S)$ , where*

$$Est(S) = \min\left\{Est^{max}(S), \frac{\eta}{s\zeta}\right\},$$

$$Est^{max}(S) = \max\left\{\frac{\eta(\zeta + 1 - se_{21})}{\zeta(\eta + 1 - se_{21})}, \frac{s(1 - e_{12})}{\eta - s + s^2e_{21}}, \frac{s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12})}{\zeta}\right\},$$

$$\eta = 1 + s - s(e_{12} + e_{21}), \zeta = 1 - se_{12}e_{21}.$$

Note that if values of externalities are zero, the obtained value  $Est(S)$  for PoA coincides with the value  $PoA^0(S)$  for the system without externalities.

## § 8.4 Numerical examples

We present here numerical examples which allow to demonstrate visually obtained PoA values for the considered model of the system composed of two processors with externalities. The figures Fig. 8.1 and Fig. 8.2 present the curves (dashed lines) for following estimations:  $a$  for  $\frac{\eta(\zeta+1-se_{21})}{\zeta(\eta+1-se_{21})}$ ,  $b$  for  $\frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+s^2e_{21}}$ ,  $c$  for  $\frac{s-se_{21}+e_{12}(1-se_{12})}{\zeta}$ ,  $d$  for  $\frac{\eta}{s\zeta}$ . A curve for the value  $PoA(S)$  is given by full lines. Also there is a curve  $PoA^0(S)$  that show a value for PoA without externalities.

One can see on Fig. 8.1 that if  $se_{21} \geq e_{12}$  then the value presented by the curve  $b$  exceeds the value showed by the curve  $c$ , and on Fig. 8.2 the estimation  $c$  becomes active when  $se_{21} \leq e_{12}$ .

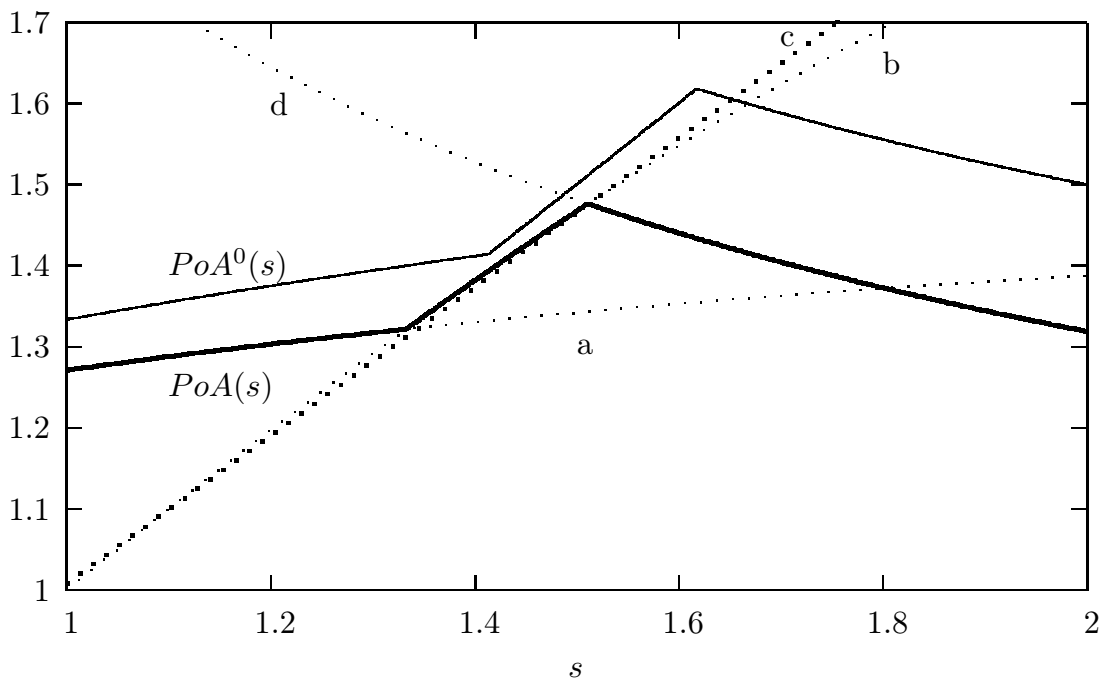


Figure 8.1: The PoA for the system  $S$  with  $e_{12} = 0.11$ ,  $e_{21} = 0.1$ .

At both figures, due to adding of externalities, the peak value of the PoA shifts to the left. Moreover, at the second figure this caused the intersection of the curves of PoA with and without externalities. However, in most cases, the PoA curve for a

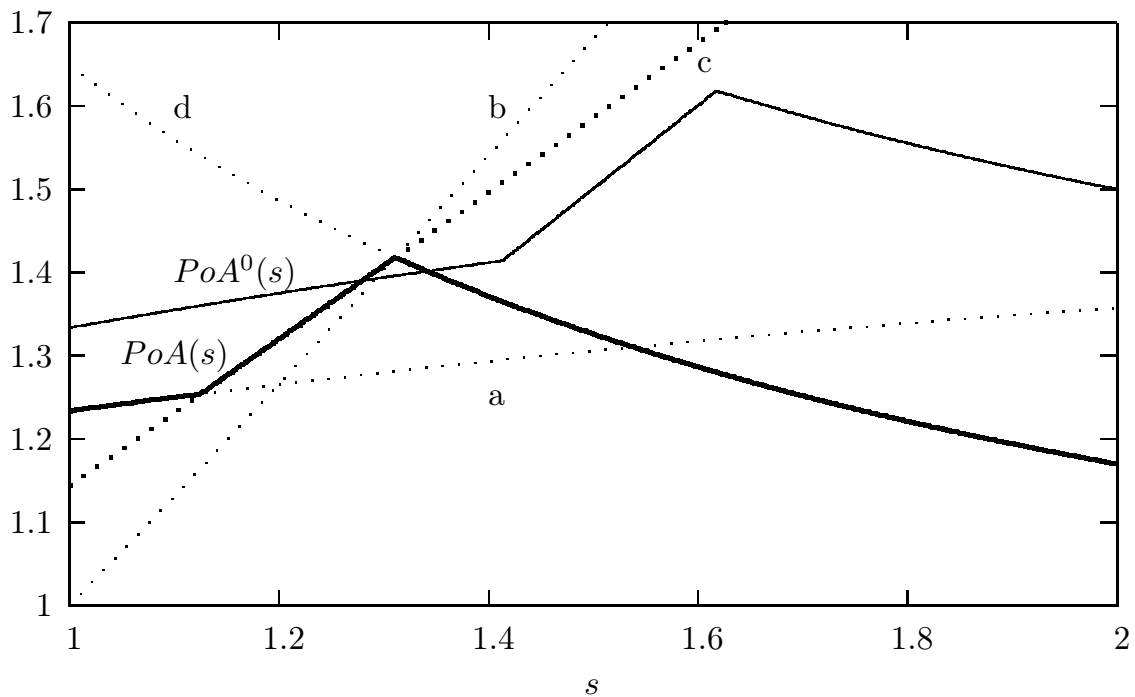


Figure 8.2: The PoA for the system  $S$  with  $e_{12} = 0.3$ ,  $e_{21} = 0.1$ .

system with externalities is lower than the curve for a system without externalities. The price of anarchy takes large values when the optimal social cost is minimal and the processor delays take close values, while in the worst equilibrium, one of the processors is loaded much more than the other. The adding of externalities reduces this difference for two reasons. First, compared to the model without externalities, the value of the optimal social cost increases (per share of the load of a less loaded machine in proportion to the externality). Secondly, if a job leaves the most loaded processor in the system with externalities, it reduces its delay but less than in the system without externalities. This affects the structure of the worst equilibrium.

## § 8.5 Results

The chapter considers the queuing system load balancing game based on the KP-model with linear externalities. The assumptions that ensure the adequate behavior of the system are determined. It is shown that in the general case, even under the above assumptions, a pure Nash equilibrium may not exist. For the case of two processors, in this model, the existence of a pure Nash equilibrium is proved and an analytical expression for the price of anarchy is obtained. Numerical experiments



are presented that make it possible to visually assess the dependence of the anarchy price on the system parameters, as well as compare this value with the anarchy price for a model without externalities.

## Chapter 9

### Cover Game

The cover problem of computing network nodes or processors [49, 69, 180] represents another modification of the scheduling problem and is also considered in the form of a game equivalent to the KP-model with parallel different-capacity channels but with the following distinctive feature. Unlike the setup studied in the chapter 7 (maximal delay minimization), here the system objective is to maximize the minimal delay among all processors. Again, it is necessary to distribute several jobs of various volumes among processors of nonidentical speeds. The volume of a job is its completion time on a free unit-speed processor. Processor load is the total volume of jobs executed by a given processor. The ratio of processor load and speed defines its delay, that is, the job completion time by this processor. The players also have egoistic behavior and reach a Nash equilibrium. Only pure strategies are considered in the cover game, which always exist for these problems. The system payoff (also called the social payoff) is the minimal delay over all processors for an obtained job distribution. The price of anarchy (PoA) is defined as the maximal ratio of the optimal social payoff and the social payoff in the worst-case Nash equilibrium.

The problem setup where a system seeks to maximize the minimal delay among all nodes originated from the concept of fair sharing and efficient utilization of network resources. Epstein et al. [69] were the first who analyzed the efficiency of equilibria in this model and also illustrated the motivation for such optimality criteria using several examples. The main idea is that all elements of the system must be loaded as much as possible with minimum possible downtime. For example, if each player pays the amount of his delay to the system for execution of his job, then (1) there

must be no “privileged” players paying considerably smaller than the other owing to a successful choice of processor, and (2) there must be no processors with small profit or without any profit at all.

## § 9.1 The game model

Consider a system  $S = S(N, v)$  composed of  $N$  processors operating with speeds  $v_1 = 1 \leq \dots \leq v_N = s$ . Note that such a choice of processor speeds in the system does not violate generality: it is always possible to normalize the speeds using division by the speed of the slowest processor. The system is used by a set of players  $U = U(n, w)$ : each of  $n$  players chooses an appropriate processor for his job execution. For player  $j$ , the volume of job is  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Denote by  $W = \sum_{j=1}^n w_j$  the total volume of all jobs. Free processor  $i$  with speed  $v_i$  executes a job of volume  $w$  during the time  $w/v_i$ .

We study the following pure strategy game  $\Gamma = \langle S(N, v), U(n, w), \lambda \rangle$ . Each player can choose any processor. The strategy of player  $j$  is processor  $l_j$  selected by him for his job execution. Then the strategy profile in the game  $\Gamma$  represents the vector  $L = (l_1, \dots, l_n)$ . The load of processor  $i$ , that is, the total volume of all jobs assigned to the processor is defined by  $\delta_i(L) = \sum_{j=1, \dots, n: l_j=i} w_j$ . The delay of processor  $i$  takes the form

$$\lambda_i(L) = \sum_{j=1, \dots, n: l_j=i} w_j/v_i = \frac{\delta_i(L)}{v_i}.$$

In fact, this value is the same for all players selecting a given processor.

Suppose that the system objective is to minimize the delay of the least loaded processor, that is, to maximize its job completion time or delay. The social payoff is described by the minimal delay over all processors:

$$SC(L) = \min_{i=1, \dots, N} \lambda_i(L).$$

Define the optimal payoff (the social payoff in the optimal case) as

$$OPT = OPT(S, U) = \max_{L \text{ is a profile in } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L),$$

where maximization runs over all admissible strategy profiles in the game  $\Gamma(S, U, \lambda)$ .

A strategy profile  $L$  such that none of the players benefits from a unilateral deviation (change of the processor chosen in  $L$  for his job execution) is a pure strategy Nash equilibrium. To provide a formal definition, let  $L(j \rightarrow i) = (l_1, \dots, l_{j-1}, i, l_{j+1}, \dots, l_n)$  be the profile obtained from a profile  $L$  if player  $j$  replaces processor  $l_j$  chosen by him in the profile  $L$  for another processor  $i$ , whereas the remaining players use the same strategies as before (remain invariable).

**Definition 9.1.** *A strategy profile  $L$  is said to be a pure strategy Nash equilibrium if and only if each player chooses a processor with the minimum delay, that is, for each player  $j = 1, \dots, n$ , we have the inequality  $\lambda_{l_j}(L) \leq \lambda_i(L(j \rightarrow i))$  for all processors  $i = 1, \dots, N$ .*

**Definition 9.2.** *The price of anarchy in the system  $S$  is the maximal ratio of the optimal social payoff and the social payoff in the worst-case Nash equilibrium:*

$$PoA(S) = \max_U \frac{OPT(S, U)}{\min_{L \text{ is a Nash equilibrium in } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)}.$$

## § 9.2 The price of anarchy in the general case of $N$ processors

In this section, we present some assumptions and auxiliary results that will be fruitful for further analysis.

Consider  $N \geq 2$  processors with speeds  $v_1 = 1 \leq \dots \leq v_N = s$ . If the number of jobs  $n$  is smaller than the number of processors  $N$ , then obviously the system has zero payoff in any strategy profile. In this case, the ratio of the optimal social payoff and the social payoff in the worst-case Nash equilibrium is assumed to be 1. We further let  $n \geq N$ .

If  $s \geq 2$ , then the price of anarchy is infinite [69]. This can be easily demonstrated by studying an example of  $N$  jobs with the same volume  $s$ . Clearly, in the optimal strategy profile, each job is executed by a separate processor, and the social payoff equals 1. Note that the worst-case Nash equilibrium is the strategy profile in which two jobs are executed by the fastest processor with delay  $\frac{2s}{s} = 2 \leq s$  and there is a free processor in the system. In this case, the social payoff equals 0, whereas the

price of anarchy becomes infinite. From this point onwards, we make the assumption  $s < 2$ . If the number of jobs  $n$  coincides with or exceeds the number of processors  $N$ , then all processors are naturally busy in the optimal case. Furthermore, then all processors remain busy in any equilibrium.

The optimal social payoff can be obviously estimated as

$$OPT \leq \frac{W}{\sum_{i=1}^N v_i}, \quad (9.2.1)$$

since the minimal delay on a processor is not greater than in the case of the same delay on all processors.

The following lemmas gives estimates for the equilibrium delays and volumes of some jobs on processors. For a complete exposition, we will also provide proofs for the lemmas imported from other publications.

**Lemma 9.1.** *(Tan et al. [180].) If the total number of jobs  $n$  is not smaller than the number of processors  $N$ , then, for any equilibrium, the loads of all processors exceed zero.*

*Proof.* Consider an arbitrary equilibrium  $L$ . Let some processor  $i$  have zero load. Then there exists a processor  $k$  that executes at least two jobs. As  $v_1 = 1 \leq \dots \leq v_N = s < 2$ , we obtain  $v_i > \frac{v_k}{2}$ . Let  $w_k$  be the volume of the smallest job on processor  $k$ . If it moves to a free processor  $i$ , then its delay becomes  $\frac{w_k}{v_i} < \frac{2w_k}{v_k} \leq \lambda_k(L)$ , thereby decreasing in comparison with the delay in the strategy profile  $L$ .  $\square$

For a strategy profile  $L$ , denote by  $n_k$  the number of jobs on processor  $k$ .

**Lemma 9.2.** *(Tan et al. [180].) If  $L$  is an equilibrium and  $SC(L) = \lambda_i(L)$ , then, for any processor  $k$ , the inequality  $n_k > \frac{v_k}{v_i}$  implies the inequality  $\lambda_k(L) \leq \frac{n_k v_i}{n_k v_i - v_k} \lambda_i(L)$ .*

*Proof.* Let  $w$  be the volume of the smallest job on processor  $k$ . Then  $w \leq \frac{v_k}{n_k} \lambda_k(L)$ . Since  $L$  represents an equilibrium, we have  $\lambda_k(L) \leq \lambda_i(L) + \frac{w}{v_i} \leq \lambda_i(L) + \frac{v_k}{n_k v_i}$ , whence it follows that  $\lambda_k(L) \leq \frac{n_k v_i}{n_k v_i - v_k} \lambda_i(L)$ .  $\square$

**Lemma 9.3.** *If  $L$  is an equilibrium and  $SC(L) = \lambda_i(L)$ , then, for any processor  $k$ , the inequalities  $n_k \geq 2$  and  $1 \leq \frac{v_k}{v_i} < 2$  imply that the volume of any job  $w_j$  on*

processor  $k$  does not exceed  $\frac{v_i v_k}{2v_i - v_k} \lambda_i(L)$ . Furthermore, the total volume of the other jobs on processor  $k$  is also not greater than  $\frac{v_i v_k}{2v_i - v_k} \lambda_i(L)$ .

*Proof.* Suppose processor  $k$  executes at least two jobs. Let  $w$  be the volume of the smallest job on processor  $k$ . Then the volume of the other jobs on processor  $k$  makes up  $v_k \lambda_k(L) - w$ . Since  $L$  is an equilibrium,  $\lambda_k(L) = \frac{v_k \lambda_k(L)}{v_k} \leq \lambda_i(L) + \frac{w}{v_i}$ , which yields  $v_k \lambda_k(L) - w \leq v_k \lambda_i(L) + \left(\frac{v_k}{v_i} - 1\right) w \leq v_k \lambda_i(L) + \left(\frac{v_k}{v_i} - 1\right) w_{j:l_j=k} \leq v_k \lambda_i(L) + \left(\frac{v_k}{v_i} - 1\right) (v_k \lambda_k(L) - w)$ . Then  $w \leq w_{j:l_j=k} \leq v_k \lambda_k(L) - w \leq \frac{v_i v_k}{2v_i - v_k} \lambda_i(L)$ .  $\square$

The next theorem establishes a lower estimate for the price of anarchy in the system with  $N \geq 3$  processors. This estimate is defined by the speeds of three processors in the system, namely, the first and second ones (in fact, the slowest processors) and the last processor, which has the highest speed.

**Theorem 9.1.** *For the system  $S$  composed of  $N \geq 3$  processors with speeds  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 \leq \dots \leq v_N = s < 2$ , the price of anarchy is not smaller than*

$$est(r, s) = \min \left\{ \frac{2 + s}{(1 + r)(2 - s)}, \frac{2}{r(2 - s)} \right\}. \quad (9.2.2)$$

*Proof.* To obtain this upper estimate for the price of anarchy, it suffices to give examples of systems  $S$  yielding the ratios of the optimal and worst-case equilibrium payoffs stated by the theorem. Suppose each processor  $i$  in the system  $S$  has a speed  $v_i$  for all  $i = 1, \dots, N$ .

1. First, let  $rs \leq 2$ . Then  $est(r, s) = \frac{2+s}{(1+r)(2-s)}$ . Consider a set of jobs  $w_1 = w_2 = (1 + r)s$ ,  $w_3^i = v_i(2 + s)$ , where  $i = 3 \dots, N$ ,  $w_4 = 2r - s$ , and  $w_5 = 2 - rs$ . In a strategy profile  $L$ , the jobs of volumes  $w_1$  and  $w_2$  are assigned to processor  $N$ , each job of volume  $w_3^i$ ,  $i = 3 \dots, N$ , to processor  $i - 1$ , and the jobs of volumes  $w_4$  and  $w_5$  to processor 1. We demonstrate that this is an equilibrium and calculate the social payoff.

The loads on processors  $N$  and 1 are  $2s(1 + r)$  and  $(1 + r)(2 - s)$ , respectively. For each of processors  $i = 2, \dots, N - 1$ , the load makes up  $v_{i+1}(2 + s)$ . Since  $\lambda_N(L) = 2(1 + r) > (1 + r)(2 - s) = \lambda_1(L)$  and  $\lambda_i(L) = \frac{v_{i+1}(2+s)}{v_i} \geq (1 + r)(2 - s) = \lambda_1(L)$ ,  $i = 2, \dots, N - 1$ , in view of  $2 + s > 1 + r$ ,  $v_{i+1} \geq v_i$ , and  $2 - s \leq 1$ , we find that processor 1 has the smallest delay coinciding with its load.

Denote by  $\lambda_i^j(L) = \lambda_i(L) + \frac{w_j}{v_i}$  the delay on processor  $i$  in the case where job  $j$  deviates from the strategy profile  $L$ , moving to processor  $i$  from another processor. The job of volume  $w_1$  or  $w_2$  does not move to processor  $i$ ,  $i = 2, \dots, N-1$ , due to the inequality  $\lambda_N(L) = 2(1+r) \leq (2+s) + (1+r) \leq \frac{v_{i+1}(2+s) + s(1+r)}{v_i} = \lambda_i^1(L) = \lambda_i^2(L)$ . In addition, this job does not move to processor 1, since  $\lambda_N(L) = 2(1+r) = (1+r)(2-s) + s(1+r) = \lambda_1^1(L) = \lambda_1^2(L)$ . Each of the jobs of volumes  $w_3^i$ ,  $i = 3, \dots, N$ , does not move to processor  $N$  because of  $\lambda_{i-1}(L) = \frac{v_i(2+s)}{v_{i-1}} \leq 2(1+r) + \frac{v_i(2+s)}{s} = \lambda_N^{i3}(L)$ , which is equivalent to the inequality  $(s - v_{i-1})v_i(2+s) \leq 2sv_{i-1}(1+r)$ ; the latter follows from  $s - v_{i-1} < 1$ ,  $2+s < 4$ , and  $2\frac{s}{v_i}v_{i-1}(1+r) \geq 4$ . Besides, none of the jobs of volumes  $w_3^i$ ,  $i = 3, \dots, N$ , moves to processor  $j > i-1$ , as follows from the conditions  $\lambda_{i-1}(L) = \frac{v_i(2+s)}{v_{i-1}} < \frac{2v_i(2+s)}{v_j} \leq \frac{(v_i+v_j)(2+s)}{v_j} = \lambda_j^{i3}(L)$ . Finally, the job of volume  $w_3^i$  does not move to the slower processor 1 or  $j < i-1$ , and none of the jobs executed by processor 1 moves to another processor because this processor has the minimal delay. Therefore, the strategy profile under consideration is an equilibrium with the social payoff  $(1+r)(2-s)$ .

Consider a strategy profile in which each job of volume  $w_3^i$ ,  $i = 3, \dots, N$ , is assigned to processor  $i$ , the jobs of volumes  $w_1$  and  $w_4$  to processor 2, and the jobs of volumes  $w_2$  and  $w_5$  to processor 1. In this strategy profile, the social payoff is  $2+s$ , and hence  $OPT \geq 2+s$ .

2. Now, let  $rs > 2$ . Then  $est(r, s) = \frac{2}{r(2-s)}$ . Consider the set of jobs of volumes  $w_1 = w_2 = rs$ ,  $w_3^i = 2v_i$ ,  $i = 3, \dots, N$ , and  $w_4 = r(2-s)$ . In a strategy profile  $L$ , the jobs of volumes  $w_1$  and  $w_2$  are assigned to processor  $N$ , each job of volume  $w_3^i$ ,  $i = 3, \dots, N$ , to processor  $i-1$ , and the job of volume  $w_4$  to processor 1. Let us show that this is an equilibrium and find the social payoff.

Since  $\lambda_N(L) = 2r > r(2-s) = \lambda_1(L)$  and  $\lambda_i(L) = \frac{2v_{i+1}}{v_i} \geq r(2-s) = \lambda_1(L)$ ,  $i = 2, \dots, N-1$ , owing to  $\frac{2}{v_i} \geq 1$ ,  $v_{i+1} \geq r$ , and  $2-s < 1$ , processor 1 has the minimal delay equal to  $r(2-s)$ . The job of volume  $w_1$  or  $w_2$  does not move to processor  $i$ ,  $i = 2, \dots, N-1$ , due to the inequality  $\lambda_N(L) = 2r = r + r \leq \frac{2v_{i+1} + rs}{v_i} = \lambda_i^1(L) = \lambda_i^2(L)$ . In addition, this job does not move to processor 1, since  $\lambda_N(L) = 2r = r(2-s) + rs = \lambda_1^1(L) = \lambda_1^2(L)$ . Each of the jobs of volumes  $w_3^i$ ,  $i = 3, \dots, N$ , does not move to processor  $N$  because of  $\lambda_{i-1}(L) = \frac{2v_i}{v_{i-1}} \leq$

$2r + \frac{2v_i}{s} = \lambda_N^{i3}(L)$ , which holds by  $\frac{2v_i(s-v_{i-1})}{s} \leq 2rv_i$ . Besides, none of the jobs of volumes  $w_3^i$ ,  $i = 3, \dots, N$ , moves to processor  $j > i - 1$ , as follows from the conditions  $\lambda_{i-1}(L) = \frac{2v_i}{v_{i-1}} \leq \frac{4v_i}{v_j} \leq \frac{2(v_i+v_j)}{v_j} = \lambda_j^{i3}(L)$ . Finally, the job of volume  $w_3^i$  does not move to the slower processor 1 or  $j < i - 1$ , and none of the jobs executed by processor 1 moves to another processor with the same or greater delay. Therefore, the strategy profile under consideration is an equilibrium with the social payoff  $r(2 - s)$ .

Consider a strategy profile in which each job of volume  $w_3^i$ ,  $i = 3, \dots, N$ , is assigned to processor  $i$ , the jobs of volumes  $w_1$  and  $w_4$  to processor 2, and the job of volumes  $w_2$  to processor 1. In this strategy profile, the social payoff is 2, and hence  $OPT \geq 2$ .

In both cases under study, the ratio of the optimal and worst-case equilibrium payoffs takes the value  $est(r, s)$ , and consequently the price of anarchy is not smaller than this value.  $\square$

In accordance with estimate (9.2.2), as the speed of the fastest processor increases and tends to 2, the lower estimate of the PoA has infinite growth. Thus, we may formulate the following corollary of Theorem 9.1.

**Corollary 9.1.** *For the system  $S$  composed of  $N \geq 3$  processors with speeds  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 \leq \dots \leq v_N = s < 2$ , the price of anarchy goes to infinity as  $s \rightarrow 2 - 0$ .*

As shown by the next result, for PoA calculation it suffices to consider only the games in which the optimal social payoff is 1.

**Theorem 9.2.** *For the system  $S$ , the price of anarchy makes up*

$$PoA(S) = \max_{U_1: OPT(S, U_1)=1} \frac{1}{\min_{L \text{ is a Nash equilibrium in } \Gamma(S, U_1, \lambda)} SC(L)}.$$

*Proof.* For proving this theorem, we will demonstrate that in any game  $\Gamma(S, U, \lambda)$  the volumes of jobs can be normalized so that the optimal payoff is 1 whereas the ratio of the optimal and worst-case equilibrium payoffs remains invariable.

Let  $L$  be the worst-case equilibrium in the game  $\Gamma(S, U, \lambda)$  with an arbitrary set of players  $U(n, w)$ , where the volume of job of each player  $j$  is  $w_j$ , and  $L_{OPT}$



denotes the optimal strategy profile in this game. The social payoffs in the strategy profile  $L$  and in the optimal strategy profile are  $SC$  and  $OPT$ , respectively. The ratio of the optimal and worst-case equilibrium payoffs is  $\frac{OPT}{SC}$ . Since  $L$  represents an equilibrium, for any player  $j$ , we have  $\frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l_j} w_k}{v_{l_j}} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k+w_j}{v_i}$  for any processor  $i$ .

Now, consider the game with the same set of processors and players in which the volume of job assigned to each player  $j$  is  $\frac{w_j}{OPT}$ . The social payoffs in the strategy profiles  $L$  and  $L_{OPT}$  are  $\frac{SC}{OPT}$  and 1, respectively. Owing to the linear homogeneity of delays on processors with respect to their loads, the strategy profiles  $L$  and  $L_{OPT}$  form the worst-case equilibrium and the optimal strategy profile, respectively, in the new game. Particularly,  $L$  is an equilibrium in the new game, since for any player  $j$ , the inequality  $\frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l_j} w_k}{v_{l_j} OPT} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k+w_j}{v_i OPT}$  holds for any processor  $i$ . Let  $L$  be not the worst-case equilibrium in the new game. Then this game possesses an equilibrium  $L'$  with the social payoff  $\frac{SC'}{OPT}$  such that  $\frac{SC'}{OPT} < \frac{SC}{OPT}$  (i.e., the social payoff in  $L'$  is smaller than in  $L$ ). Then in the original game the strategy profile  $L'$  yields the social payoff  $SC' < SC$ , and hence the equilibrium  $L'$  is worse than the equilibrium  $L$ . Similarly,  $L_{OPT}$  is the optimal strategy profile in the new game. As a result, in the new game the ratio of the optimal and worst-case equilibrium payoffs also constitutes  $\frac{OPT}{SC}$ .

Consequently, any game  $\Gamma(S, U, \lambda)$  is associated with a game  $\Gamma(S, U_1, \lambda)$  in which the volumes of jobs are normalized so that  $OPT(S, U_1) = 1$ . Yet, both games have the same ratio of the optimal and worst-case equilibrium payoffs. This means that, for PoA calculation, we may consider only the games in which the optimal payoff is 1.  $\square$

### § 9.3 The price of anarchy in the case of three processors

Note that, in the case of two processors with speeds  $1 \leq s$ , the exact PoA value was found in [180]:

$$\begin{cases} \frac{2+s}{(1+s)(2-s)} & \text{for } 1 \leq s \leq \sqrt{2}, \\ \frac{2}{s(2-s)} & \text{for } \sqrt{2} < s < 2. \end{cases}$$

For a particular case of three processors with speeds  $1 = 1 \leq s$ , the cited authors also calculated the price of anarchy

$$\frac{2+s}{2(2-s)} \text{ for } 1 \leq s < 2.$$

Now, analyze the case where the system  $S$  consists of three heterogeneous processors. Without loss of generality, in this section, we consider the systems  $S$  in which  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s$ , that is, processor 1 is the slowest one, processor 2 has medium speed, and processor 3 is the fastest one.

**Lemma 9.4.** *For the system  $S$  composed of three processors with speeds  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s$ , the inequality  $OPT \leq \frac{W-w_k}{1+r}$  holds for any job of volume  $w_k$ .*

*Proof.* Suppose there exists a job of volume  $w_k$  assigned to processor  $i$  in the optimal strategy profile  $L$  and  $OPT > \frac{W-w_k}{1+r}$ . Then the optimal delays on all processors exceed  $\frac{W-w_k}{1+r}$ . In addition, it is clear that  $\lambda_i(L) \geq \frac{w_k}{v_i}$ , and hence  $W = v_i \lambda_i(L) + v_j \lambda_j(L) + v_l \lambda_l(L) > w_k + (v_j + v_l) \frac{W-w_k}{1+r} \geq w_k + (1+r) \times \frac{W-w_k}{1+r} = W$ .  $\square$

**Lemma 9.5.** *For the system  $S$  composed of three processors with speeds  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s$ , let two jobs of volumes  $w_{k_1}$  and  $w_{k_2}$  be assigned to the same processor in the optimal strategy profile. Then  $OPT \leq \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r}$ .*

*Proof.* Suppose  $OPT > \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r}$  and the jobs of volumes  $w_{k_1}$  and  $w_{k_2}$  are assigned to processor  $i$  in the optimal strategy profile. In this case, the optimal delays on all processors are greater than  $\frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r}$ , and  $\lambda_i(L) \geq \frac{w_{k_1}+w_{k_2}}{v_i}$ . As a result,  $W = v_i \lambda_i(L) + v_j \lambda_j(L) + v_l \lambda_l(L) > w_{k_1} + w_{k_2} + (v_j + v_l) \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r} \geq w_{k_1} + w_{k_2} + (1+r) \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r} = W$ .  $\square$

We will need a series of auxiliary lemmas to prove the forthcoming theorems.

**Lemma 9.6.** *For any real values  $1 \leq r \leq s < 2$ , we have  $s \leq \min\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\}$ .*

*Proof.* The inequality  $\frac{2}{r(2-s)} \geq \frac{2}{s(2-s)} \geq s$  holds, since  $s^3 - 2s^2 + 2 = s(s-1)^2 + (2-s) > 0$ .

On the other hand, we have  $\frac{2+s}{(1+r)(2-s)} \geq \frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \geq s$  by  $s^3 - s^2 - s + 2 > s^3 - 2s^2 + 2 = s(s-1)^2 + (2-s) > 0$ .  $\square$

**Lemma 9.7.** For any real values  $1 \leq r \leq s < 2$ , we have  $\frac{3s}{1+r} \leq \min\left\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\right\}$ .

*Proof.* First, observe that  $3s \leq \frac{2+s}{2-s}$  since  $3s^2 - 5s + 2 = (s-1)(3s-2) > 0$ . Second, the inequality  $\frac{3s}{1+r} \leq \frac{2}{r(2-s)}$  is valid because  $6rs - 3rs^2 - 2 - 2r = r(6s - 3s^2 - 2) - 2 = r(1 - 3(s-1)^2) - 2 \leq r - 2 < 0$ .  $\square$

**Lemma 9.8.** For  $v_i < v_j$ , where  $v_i, v_j \in \{1, r, s\}$  with real values  $r, s$  such that  $1 \leq r \leq s < 2$ , we have  $\frac{2v_i^2 + v_i v_j}{2v_i - v_j} \leq \frac{2+s}{2-s}$ .

*Proof.* If  $v_i < v_j$ , then the expression  $\frac{2v_i^2 + v_i v_j}{2v_i - v_j}$  is decreasing in  $v_i$  and increasing in  $v_j$ , since  $4v_i^2 - 4v_i v_j - v_j^2 < 0$  and  $v_i(2v_i - v_j) + 2v_i^2 + v_i v_j > 0$ .  $\square$

**Lemma 9.9.** For any real values  $1 \leq r \leq s < 2$ , we have  $\frac{2r^2 + rs}{(1+r)(2r-s)} < \frac{2}{r(2-s)}$ .

*Proof.* The desired inequality is equivalent to  $f(r, s) = -r^2 s^2 - 2s(r^3 - r^2 - r - 1) + 4(r^3 - r^2 - r) < 0$ . We will verify this condition by showing that  $f'_r(r, s) = -2rs^2 + 2(2-s)(3r^2 - 2r - 1) < 0$ , which yields  $f(r, s) \leq f(1, s) = -s^2 + 4s - 4 = -(2-s)^2 < 0$ .

For each fixed  $s$ , the function  $f'_r(r, s)$  represents a parabola with ascending branches. Hence, the maximal value is achieved at one of the limits of the interval  $r \in [1, s]$ . At the left limit, we have  $f'_r(1, s) = -2s^2 < 0$ ; at the right limit,  $f'_r(s, s) = -8s^3 + 16s^2 - 6s - 4 = -8s(s-1)^2 - 2(2-s) < 0$ .  $\square$

**Lemma 9.10.** For  $v_i \neq v_j \neq v_l$ , where  $v_i, v_j, v_l \in \{1, r, s\}$  with real values  $r, s$  such that  $1 \leq r \leq s < 2$ , we have  $f(v_i, v_j, v_l) = v_i + \frac{2v_i v_j}{2v_i - v_j} + \frac{3v_i v_l}{3v_i - v_l} \leq 1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s}$ .

*Proof.* Obviously,  $f(v_i, v_j, v_l)$  is increasing in  $v_j$  and  $v_l$ ; hence,  $f(v_i, v_j, v_l) \leq v_i + \frac{2sv_i}{2v_i - s} + \frac{3sv_i}{3v_i - s} = g(v_i)$ .

Now, let us show that  $g(v_i)$  is decreasing in  $v_i$ . The derivative  $g'_{v_i}(v_i) = 1 - \frac{2s^2}{(2v_i - s)^2} - \frac{3s^2}{(3v_i - s)^2}$  is increasing in  $v_i$ , thereby not exceeding  $g'_{v_i}(s) = 1 - 2 - \frac{3}{4} < 0$ .

Thus  $g(v_i) \leq g(1) = 1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s}$ .  $\square$

**Lemma 9.11.** For any real values  $1 \leq r \leq s < 2$ , we have  $\frac{1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s}}{1+r+s} \leq \min\left\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\right\}$ .

*Proof.* At the beginning, we will obtain the inequality  $1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s} \leq \frac{(1+r+s)(2+s)}{(1+r)(2-s)}$ . The right-hand side is decreasing in  $r$ , and therefore it suffices to demonstrate that  $1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s} \leq \frac{(1+2s)(2+s)}{(1+s)(2-s)}$ . This is equivalent to  $s \leq s^2$ , which holds for  $s \geq 1$ .

Next, let us show that  $1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s} \leq \frac{2(1+r+s)}{r(2-s)}$ . The right-hand side is decreasing in  $r$ , and therefore it suffices to demonstrate that  $1 + \frac{2s}{2-s} + \frac{3s}{3-s} \leq \frac{2(1+2s)}{s(2-s)}$ . The last inequality is equivalent to  $-4s^3 + 11s^2 - 4s - 6 = -s(2s-3)^2 - (2-s)(3-s) < 0$ .  $\square$

**Theorem 9.3.** *For the system  $S$  composed of three processors with speeds  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s < 2$ , the price of anarchy does not exceed  $est(r, s) = \min\{\frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)}\}$ .*

*Proof.* To prove this result, we consider different cases with certain numbers of jobs assigned to each of the two most loaded processors. In each case, we will derive the required estimate for the price of anarchy. Let  $L$  be an equilibrium such that  $SC(L) = \lambda_i(L)$ , that is, processor  $i$  has the smallest delay. Let us analyze different cases of the equilibrium  $L$ .

1. Each of processors  $j$  and  $l$  executes one job. In the optimal strategy profile, these two jobs occupy at most two processors. Then this profile includes processor  $k$  carrying the equilibrium load of processor  $i$  only (in part or in full), that is,  $OPT \leq \frac{v_i \lambda_i(L)}{v_k} \leq s \lambda_i(L)$ . By Lemma 9.6,  $s \leq est(r, s)$ .

2. Processor  $j$  executes  $n_j \geq 2$  jobs, and processor  $l$  executes  $n_l = 1$  job. By Lemma 9.2,  $\lambda_j(L) \leq \frac{2v_i}{2v_i - v_j} \lambda_i(L)$ . At the same time, by Lemma 9.4,  $OPT \leq \frac{v_i \lambda_i(L) + \frac{2v_i v_j}{2v_i - v_j} \lambda_i(L)}{1+r} = \lambda_i(L) \frac{2v_i^2 + v_i v_j}{(1+r)(2v_i - v_j)}$ .

a) First, let  $v_i \geq v_j$ . Then  $2v_i^2 + v_i v_j \leq 3v_i^2$ , since this expression is increasing in  $v_j$ . In addition,  $2v_i - v_j \geq v_i$ , as this expression is also decreasing in  $v_j$ . As a result,  $OPT \leq \lambda_i(L) \frac{3v_i}{1+r} \leq \lambda_i(L) \frac{3s}{1+r} \leq \lambda_i(L) est(r, s)$  by Lemma 9.7.

b) Now, let  $v_i < v_j$ . Then, by Lemma 9.8,  $\frac{2v_i^2 + v_i v_j}{(1+r)(2v_i - v_j)} < \frac{2+s}{(1+r)(2-s)}$ .

To proceed, consider two cases as follows. The first case corresponds to  $v_i = r$  and  $v_j = s$ . Using Lemma 9.9, here we obtain  $\frac{2r^2 + rs}{(1+r)(2r-s)} < \frac{2}{r(2-s)}$ .

The second case corresponds to  $v_i = 1$ . By Lemma 9.3,  $w_k \leq \frac{v_k}{2-v_k} \lambda_i(L) \leq \frac{s}{2-s} \lambda_i(L)$  and  $v_j \lambda_j(L) - w_k \leq \frac{s}{2-s} \lambda_i(L)$  for any job of volume  $w_k$  from the ones assigned to processor  $j$ .

If all the jobs assigned to processor  $j$  in the strategy profile  $L$  also stay on this processor in the optimal strategy profile, then we have to consider two possible situations as follows: (1) the unique job on processor  $l$  in the equilibrium also stays there in the optimal strategy profile (hence the load of processor  $i$  may only decrease as the result of passing to the optimal strategy profile), and (2) the unique job leaves processor  $l$  (hence, in the optimal strategy profile, processor  $l$  has a load not exceeding  $\lambda_i(L)$ , which moves from processor  $i$ ). In both situations,  $OPT \leq \lambda_i(L)$ .

If during transition to the optimal strategy profile the jobs of processor  $j$  move to processor  $l$  only, then we have to consider the same two situations. If the unique job on processor  $l$  in the equilibrium also stays there in the optimal strategy profile, then the load of processor  $i$  may only decrease as the result of passing to the optimal strategy profile. Consequently,  $OPT \leq \lambda_i(L)$ . Otherwise, the unique job leaves processor  $l$ , and then in the optimal strategy profile processor  $l$  has a load not exceeding  $\lambda_i(L) + \frac{s}{2-s}\lambda_i(L)$ , which moves from processors  $i$  and  $j$ . In this situation,  $OPT \leq \lambda_i(L)\frac{1+\frac{s}{2-s}}{v_l} \leq \lambda_i(L)\frac{1+\frac{s}{2-s}}{r} = \lambda_i(L)\frac{2}{r(2-s)}$ .

If during transition to the optimal strategy profile, some jobs of processor  $j$  move to processor  $i$ , then we have to consider the same two situations. If the unique job on processor  $l$  in the equilibrium also stays there in the optimal strategy profile, then the load of processor  $j$  becomes not higher than  $\lambda_i(L) + \frac{s}{2-s}\lambda_i(L)$ , which comprises the remaining jobs of processor  $j$  and the jobs from processor  $i$ . So,  $OPT \leq \lambda_i(L)\frac{1+\frac{s}{2-s}}{v_j} \leq \lambda_i(L)\frac{1+\frac{s}{2-s}}{r} = \lambda_i(L)\frac{2}{r(2-s)}$ . Otherwise, the unique job leaves processor  $l$ , and then in the optimal strategy profile, processor  $l$  has a load not exceeding  $\lambda_i(L) + \frac{s}{2-s}\lambda_i(L)$ , which moves from processors  $i$  and  $j$ .

3. Each of processors  $j$  and  $l$  executes two jobs, i.e.,  $n_j = n_l = 2$ . In total, processors  $j$  and  $l$  have four jobs and there are three processors in the system  $S$ . Therefore, in the optimal strategy profile, at least two of these jobs (of volumes  $w_{k_1}$  and  $w_{k_2}$ ) move to the same processor. By Lemma 9.5,  $OPT \leq \frac{W-w_{k_1}-w_{k_2}}{1+r} = \frac{v_i\lambda_i(L)+w_{k_3}+w_{k_4}}{1+r}$ , where  $w_{k_3}$  and  $w_{k_4}$  are the volumes of the two other jobs assigned to processors  $j$  and  $l$ .

Consider processor  $k \in \{j, l\}$ . If  $v_i \leq v_k$ , then by Lemma 9.3 the volume of any job on processor  $k$  does not exceed  $\lambda_i(L)\frac{v_i v_k}{2v_i - v_k}$ .

Now, let  $v_i > v_k$ . Recall that  $L$  forms an equilibrium, and hence  $\lambda_k(L) \leq \lambda_i(L) + \frac{w}{v_i}$ , where  $w$  is the volume of the smallest job on processor  $k$ . Consequently,  $w \geq v_i \lambda_k(L) - v_i \lambda_i(L)$ . By Lemma 9.2,  $\lambda_k(L) \leq \lambda_i(L) \frac{2v_i}{2v_i - v_k} \leq 2\lambda_i(L)$ , since  $2v_i - v_k \geq v_i$ , which gives  $w \leq \lambda_i(L)$ . The second (larger) job on processor  $k$  has a volume  $v_k \lambda_k(L) - w \leq v_k \lambda_k(L) = v_i \lambda_i(L) - (v_i - v_k) \lambda_k(L) \leq v_i \lambda_i(L) - (v_i - v_k) \lambda_i(L) = v_k \lambda_i(L) \leq r \lambda_i(L) \leq \lambda_i(L) \frac{rs}{2r-s} \leq \lambda_i(L) \frac{s}{2-s}$ .

a) Let  $v_i = s$ ; then  $OPT \leq \lambda_i(L) \frac{s+2r}{1+r} \leq \lambda_l(L) \frac{3s}{1+r} \leq \lambda_i(L) est(r, s)$  by Lemma 9.7.

b) Let  $v_i = r$ ; then  $OPT \leq \lambda_i(L) \frac{r+2\frac{rs}{2r-s}}{1+r} = \lambda_i(L) \frac{2r^2+rs}{(1+r)(2r-s)} \leq \lambda_i(L) est(r, s)$  by Lemma 9.8.

c) Let  $v_i = 1$ ; then  $OPT \leq \lambda_i(L) \frac{r+2\frac{s}{2-s}}{1+r} = \lambda_i(L) \frac{2+s}{(1+r)(2-s)}$ . On the other hand, as the system  $S$  consists of three processors, there exist two processors  $\alpha$  and  $\beta$  executing at most one job of the four mentioned ones and, possibly, some load of processor  $i$ . In this case,  $OPT$  is not greater than the minimal load on these processors, that is,  $OPT \leq \min_{\alpha \neq \beta} \{ \lambda_i(L) \frac{2}{v_\alpha(2-s)}, \lambda_i(L) \frac{2}{v_\beta(2-s)} \} \leq \min \{ \lambda_i(L) \frac{2}{1(2-s)}, \lambda_i(L) \frac{2}{r(2-s)} \} = \lambda_i(L) \frac{2}{r(2-s)}$ .

4. Processors  $j$  and  $l$  has the following allocation of jobs:  $n_j \geq 2$ ,  $n_l \geq 3$ . By Lemma 9.2,  $\lambda_j(L) \leq \lambda_i(L) \frac{2v_i}{2v_i - v_j}$  and  $\lambda_l(L) \leq \lambda_i(L) \frac{3v_i}{3v_i - v_l}$ . Then, in accordance with estimate (9.2.1),  $OPT \leq \lambda_i(L) \frac{v_i + \frac{2v_i v_j}{2v_i - v_j} + \frac{3v_i v_l}{3v_i - v_l}}{1+r+s} \leq \lambda_i(L) est(r, s)$  by Lemmas 9.10 and 9.11.  $\square$

The next theorem is a particular case of Theorem 9.1 for the three-processor system.

**Theorem 9.4.** *For the system  $S$  composed of three processors with speeds  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s < 2$ , the price of anarchy is not smaller than  $est(r, s) = \min \{ \frac{2+s}{(1+r)(2-s)}, \frac{2}{r(2-s)} \}$ .*

Then Theorems 9.3 and 9.4 give the exact PoA value for the three-processor system.

**Theorem 9.5.** *For the system  $S$  composed of three processors with speeds  $v_1 = 1 \leq v_2 = r \leq v_3 = s < 2$ , the exact PoA value is*

$$\begin{cases} \frac{2+s}{(1+r)(2-s)} & \text{if } rs \leq 2, \\ \frac{2}{r(2-s)} & \text{if } rs > 2. \end{cases}$$

The exact PoA value allows us to analyze a possible growth of this characteristic as a new processor is included into the system (i.e., a situation resembling Braess's paradox in qualitative terms when the system of higher capacity demonstrates worse performance). According with the next result, the price of anarchy increases or remains invariable as a new processor is included into the system.

**Theorem 9.6.** *For the system  $S$  composed of two processors with speeds  $1 \leq s$ , the price of anarchy does not decrease as the result of adding a new processor of speed  $1 \leq q < 2$ .*

*Proof.* 1. Let a new processor of speed  $q \leq s$  be included into the system. If  $qs \leq s^2 < 2$ , then the price of anarchy does not decrease, since  $\frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \leq \frac{2+s}{(1+q)(2-s)}$ . In the case  $s^2 > 2$  and  $qs \leq 2$ , the price of anarchy does not decrease because  $\frac{2}{s(2-s)} \leq \frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \leq \frac{2+s}{(1+q)(2-s)}$ . Finally, under  $s^2 > 2$  and  $qs > 2$ , the price of anarchy does not decrease owing to  $\frac{2}{s(2-s)} \leq \frac{2}{q(2-s)}$ .

2. Let a new processor of speed  $s < q < 2$  be included into the system, that is, the new processor is faster than the other ones. If  $qs \leq 2$ , then  $s^2 \leq 2$ , and the price of anarchy does not decrease, since  $\frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \leq \frac{2+q}{(1+s)(2-q)}$ . In the case  $qs > 2$  and  $s^2 \leq 2$ , the price of anarchy does not decrease because  $\frac{2+s}{(1+s)(2-s)} \leq \frac{2}{s(2-s)} \leq \frac{2}{s(2-q)}$ . Finally, under  $qs > 2$  and  $s^2 > 2$ , the price of anarchy does not decrease owing to  $\frac{2}{s(2-s)} \leq \frac{2}{s(2-q)}$ .  $\square$

## § 9.4 A numerical method to calculate the price of anarchy

In the previous section, we have derived an analytical expression for the price of anarchy in the three-processor model. In what follows, we suggest a computing method for the price of anarchy in the system of three processors, which is similar to the method developed earlier for the load balancing game (see Chapter 7). This method can be generalized to the systems composed of more processors. But such a generalization increases the number of associated linear programming problems and the number of their variables and constraints. Particularly, for the system  $S$  composed of  $N$  processors, it is necessary solve  $N!$  linear programming problems with  $(2^N - 1)^{N-1}$  subproblems, each containing  $N^2$  variables.

Consider the following system of linear equations in the components of the vectors  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $c = (c_1, c_2, c_3)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leq \frac{b_1+b_2+b_3 + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k}{v_j}, \\ \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leq \frac{c_1+c_2+c_3 + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k}{v_l}, \\ \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \leq \frac{c_1+c_2+c_3 + \min_{k=1,2,3:b_k>0} b_k}{v_l} \text{ or } \max_{k=1,2,3} b_k = 0, \\ \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \geq \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \geq \frac{c_1+c_2+c_3}{v_l}, \\ a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (9.4.1)$$

This system describes a set of hyperplanes passing through the point  $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  in the 9D space, and the solution set is a domain in the space bounded by the hyperplanes. The system is feasible: for example, the triplet  $a_1 = a_2 = a_3 = \alpha v_i$ ,  $b_1 = b_2 = b_3 = \alpha v_j$ , and  $c_1 = c_2 = c_3 = \alpha v_l$  is a solution for all  $\alpha > 0$ . Furthermore, the solution set is unbounded, since  $\alpha$  can be arbitrarily large.

Consider the system  $S$  composed of three processors with speeds  $1 \leq r \leq s < 2$  and  $n$  players. Let  $L$  be a Nash equilibrium in the system  $S$  such that processor  $i$  is slowest in this profile, processor  $j$  has a medium delay, and processor  $l$  is fastest. Assume that, in the equilibrium  $L$ , processor  $i$  receives the total volume of jobs defined by  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k = a_1 + a_2 + a_3$  and the corresponding volumes for processors  $j$  and  $l$  are  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k = b_1 + b_2 + b_3$  and  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k = c_1 + c_2 + c_3$ , respectively. The volume of jobs on each processor is somehow divided into three parts so that each component of the 3D vectors  $a$ ,  $b$ , and  $c$  is either zero or positive and includes at least one job.

**Lemma 9.12.** *Let  $L$  be a Nash equilibrium in the game involving three processors  $i$ ,  $j$ , and  $l$  and  $n$  players such that*

$$\begin{aligned} \lambda_i(L) &\geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L), \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k &= a_1 + a_2 + a_3, \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k &= b_1 + b_2 + b_3, \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k &= c_1 + c_2 + c_3. \end{aligned}$$



Here, for all  $k = 1, 2, 3$ , the component  $a_k$  is zero or the volume of at least one job on processor  $i$ , the component  $b_k$  is zero or the volume of at least one job on processor  $j$ , and the component  $c_k$  is zero or the volume of at least one job on processor  $l$ . Then the set of the vectors  $a$ ,  $b$ , and  $c$  is the solution of system (9.4.1).

*Proof.* Suppose  $L$  forms a Nash equilibrium and  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ . In this case, by Lemma 9.1 all  $\lambda_k(L) > 0$ ,  $k = i, j, l$ . Then the following inequalities hold:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k}{v_i} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k + \min_{k=1, \dots, n: l_k=i, w_k>0} w_k}{v_j}, \\ \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k}{v_i} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k + \min_{k=1, \dots, n: l_k=i, w_k>0} w_k}{v_l}, \\ \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k}{v_j} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k + \min_{k=1, \dots, n: l_k=j, w_k>0} w_k}{v_l}, \\ \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k}{v_i} \geq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k}{v_j} \geq \frac{\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k}{v_l}. \end{array} \right.$$

Since each nonzero value  $a_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) equals the volume of at least one job on processor  $i$ , we naturally have  $\min_{k:a_k>0} a_k \geq \min_{k:l_k=i, w_k>0} w_k$ , which yields the first two inequalities of system (9.4.1). In a similar manner,  $\min_{k:b_k>0} b_k \geq \min_{k:l_k=j, w_k>0} w_k$ . This means satisfaction of system (9.4.1).  $\square$

**Lemma 9.13.** *Any solution of system (9.4.1) defines a Nash equilibrium  $L$  in the game involving the system  $S$  composed of three processors  $i$ ,  $j$ , and  $l$  and the players whose jobs correspond to the nonzero components of the vectors  $a$ ,  $b$ , and  $c$  and delays are sorted in the order  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ .*

*Proof.* Let the set of the vectors  $a$ ,  $b$ , and  $c$  give a solution of system (9.4.1). Consider the game with three processors  $i$ ,  $j$ , and  $l$ . Let each nonzero component of the vectors  $a$ ,  $b$ , and  $c$  specify the job volume of a successive player. Consider a profile  $L$  such that the jobs of volumes  $a_k > 0$ ,  $b_k > 0$ , and  $c_k$  are assigned to processors  $i$ ,  $j$ , and  $l$ , respectively. As all inequalities (9.4.1) hold, the profile  $L$  is the desired Nash equilibrium.  $\square$

The following result is immediate.

**Theorem 9.7.** *Any Nash equilibrium  $L$  in the game involving the system  $S$  composed of three processors  $i$ ,  $j$ , and  $l$  and  $n$  players corresponds to a Nash equilibrium*

$L'$  in the game involving the same system  $S$  and at most nine players in which each processor receives no more than three jobs and the delays on all processors in  $L$  and  $L'$  coincide.

*Proof.* Consider a Nash equilibrium  $L$  in the game with the system  $S$  of three processors and  $n$  players. Number the processors so that  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ . By Lemma 9.12, for any Nash equilibrium in the game involving the system  $S$  and any number of players, there exists a corresponding solution  $a, b, c$  of system (9.4.1). By Lemma 9.13 this solution determines a Nash equilibrium  $L'$  in the game with the system  $S$  such that the nonzero components of the vectors  $a, b$ , and  $c$  specify the job volumes on processors  $i, j$ , and  $l$ , respectively. By definition the element sum of the vector  $a$  is the load of processor  $i$  in the profile  $L$ . Hence the delays on processor  $i$  coincide in the equilibria  $L$  and  $L'$ . Similarly, for processors  $j$  and  $l$ , the delays in the equilibrium  $L$  coincide with the corresponding delays in the equilibrium  $L'$ .  $\square$

This theorem claims that it is sufficient to consider only the games where each processor receives at most three jobs in an equilibrium and the equilibrium is the solution of system (9.4.1). In addition, the domain of the social payoff coincides with the value domain of the games with an arbitrary number of players.

Let the components of the vectors  $a, b$ , and  $c$  be chosen as follows. In the optimal profile yielding the maximal social payoff, processors  $i, j$ , and  $l$  receive the total volumes of jobs  $a_1 + b_1 + c_1$ ,  $a_2 + b_2 + c_2$ , and  $a_3 + b_3 + c_3$ , respectively, and the smallest delay can be on each of them. Furthermore, by Theorem 9.2 the volumes of jobs are assumed to be normalized so that in the optimal profile the minimal delay among all processors is 1. In our case, this means that

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + c_1 &\geq v_i, \\ a_2 + b_2 + c_2 &\geq v_j, \\ a_3 + b_3 + c_3 &\geq v_l, \end{aligned}$$

and at least one of these inequalities holds as an equality.

**Lemma 9.14.** *A solution of the linear programming problem*

$$LPP(v_i, v_j, v_l) : \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_3 \rightarrow \min \\ (r1) \quad \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leq \frac{b_1+b_2+b_3 + \min_{k:a_k>0} a_k}{v_j}, \\ (r2) \quad \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \leq \frac{c_1+c_2+c_3 + \min_{k:a_k>0} a_k}{v_l}, \\ (r3) \quad \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \leq \frac{c_1+c_2+c_3 + \min_{k:b_k>0} b_k}{v_l} \text{ or } \max_{k=1,2,3} b_k = 0, \\ (r4) \quad \frac{a_1+a_2+a_3}{v_i} \geq \frac{b_1+b_2+b_3}{v_j} \geq \frac{c_1+c_2+c_3}{v_l}, \\ (r5) \quad a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3, \\ (r6) \quad a_1 + b_1 + c_1 \geq v_i, \\ (r7) \quad a_2 + b_2 + c_2 \geq v_j, \\ (r8) \quad a_3 + b_3 + c_3 \geq v_l, \end{array} \right. \quad (9.4.2)$$

with respect to the components of the vectors  $a, b$ , and  $c$  gives the minimal social payoff in a Nash equilibrium among all games where in an equilibrium at most three jobs are assigned to each processor,  $i, j$ , and  $l$  indicate the numbers of the processors in the descending order of their delays and the optimal social payoff makes up 1.

*Proof.* By Lemma 9.13 any solution of inequalities (r1)–(r6) in the problem  $LPP(v_i, v_j, v_l)$  defines an equilibrium in the game with three processors where each processor receives at most tree jobs and  $i, j$ , and  $l$  are the numbers of the processors in the descending order of their delays.

The goal function in this problem is bounded below only by the hyperplanes corresponding to inequalities (r6)–(r8). In fact, inequalities (r1)–(r5) admit arbitrarily small nonnegative values of the goal function, including the zero value. Therefore the minimum is reached on one of the boundaries related to the last three inequalities. Hence, one of them holds as equality, and the optimal payoff in the game corresponding to the solution of the problem  $LPP(v_i, v_j, v_l)$  is 1.  $\square$

Consequently, for exact PoA evaluation in the system  $S$  composed of three processors, it is necessary to solve a series of the linear programming problems  $LPP(v_i, v_j, v_l)$  for all permutations  $(1, r, s)$ , and the minimal solution among them yields the value  $\frac{1}{PoA(S)}$ . In other words, we may establish the following fact.

**Theorem 9.8.** *For the system  $S$  composed of three processors, the inverse value of the price of anarchy  $PoA(S)$  is*

$$\frac{1}{PoA(S)} = \min_{\substack{(v_i, v_j, v_l) \text{ are permutations } (1, r, s) \\ \left\{ \frac{c_1 + c_2 + c_3}{v_l} \mid a, b, c \text{ is solution of } LPP(v_i, v_j, v_l) \right\}}},$$

where  $LPP(v_i, v_j, v_l)$  is the linear programming problem (9.4.2).

*Proof.* By Lemma 9.14 the solution of problem (9.4.2) gives the minimal social payoff in a Nash equilibrium, where  $i, j$ , and  $l$  are the numbers of the processors in the descending order of their delays, among all the games such that in an equilibrium each processor receives at most three jobs and the optimal payoff is 1. The minimal solution among the problems for all admissible permutations  $(1, r, s)$  as the values of  $(v_i, v_j, v_l)$  gives the minimal social payoff in a Nash equilibrium among all the games where in an equilibrium at most three jobs are assigned to each processor and the optimal payoff is 1.

By Theorem 9.7, for any equilibrium in the game involving the system  $S$  of three processors and an arbitrary number of players, it is possible to construct a corresponding equilibrium in the game with the same processors and a set of at most nine players, where each processor receives no more than three jobs and the social payoff coincides in both equilibria. Thus, for PoA evaluation, it suffices to consider only the games where each processor has at most three jobs in an equilibrium.

Using Theorem 9.2, we finally establish that, for PoA evaluation, it suffices to consider only the games where the social payoff in the optimal profile is 1.  $\square$

## § 9.5 Numerical examples

To estimate the price of anarchy in the three-processor model, we have developed a program for a visual comparison of the lower PoA estimates and its exact value constructed by solving a series of the linear programming problems. In addition, the program allows us to track the PoA variations in the system  $S$  with a greater number of processors that have not been theoretically estimated so far. The parameters of the system  $S$  are adjusted in the program; by assumption the speed of processor 1 is 1, whereas exact values are specified for the speeds of other processors and a range

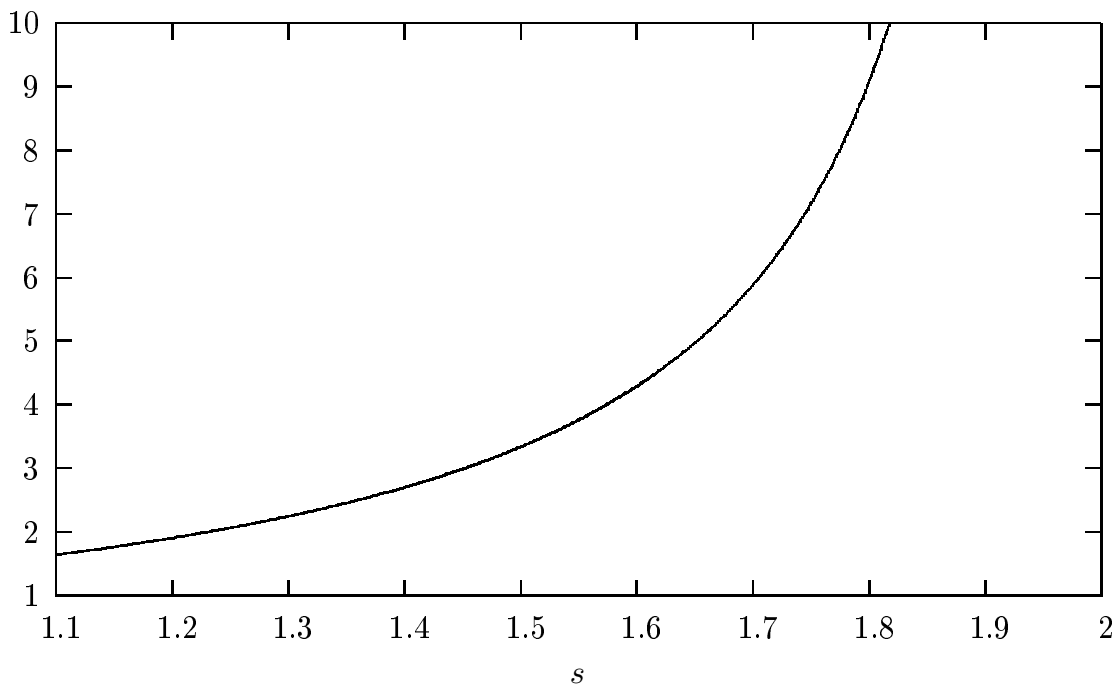


Figure 9.1: Price of anarchy for system  $S$  with  $r = 1.1, s \in [r, 2)$

of values for one of them. This approach allows us to study the PoA dynamics under varying speed of one processor.

The graphs in Figs. 9.1 and 9.2 illustrate the PoA estimates under different speeds of processors 2 and 3, respectively. In Fig. 9.1, the speed of processor 2 is  $r = 1.1$ , whereas the speed of processor 3 varies within the range  $s \in [r, 2)$ . In Fig. 9.2, the speed of the fastest processor is  $s = 1.7$ , whereas the speed of processor 2 varies within the range  $r \in [1, s]$ . Note that the theoretical estimates coincide with the calculated values of the price of anarchy.

As a matter of fact, the following example is more interesting. Consider the system  $S$  composed of four processors with speeds  $v_1 = 1 \leq v_2 = q \leq v_3 = r \leq v_4 = s < 2$ . The graphs in Figs. 9.3 and 9.4 show the PoA variations in comparison with the lower estimate (9.2.2), which is in fact the PoA value for the three of these four processors with speeds  $1 \leq r \leq s < 2$ . In Fig. 9.3, we present the PoA dynamics in several cases as follows. In the domain  $A$ ,  $r = 1.3$  and  $s = 1.5$ , whereas the value  $q$  varies within the range  $[1, r]$ . Next, in the domain  $B$ ,  $q = 1.3$  and  $s = 1.5$ , whereas the value  $r$  varies within the range  $[q, s]$ . Finally, in the domain  $C$ ,  $q = 1.3$  and  $r = 1.5$ , whereas the value  $s$  varies within the range  $[r, 2)$ . In all these cases, the

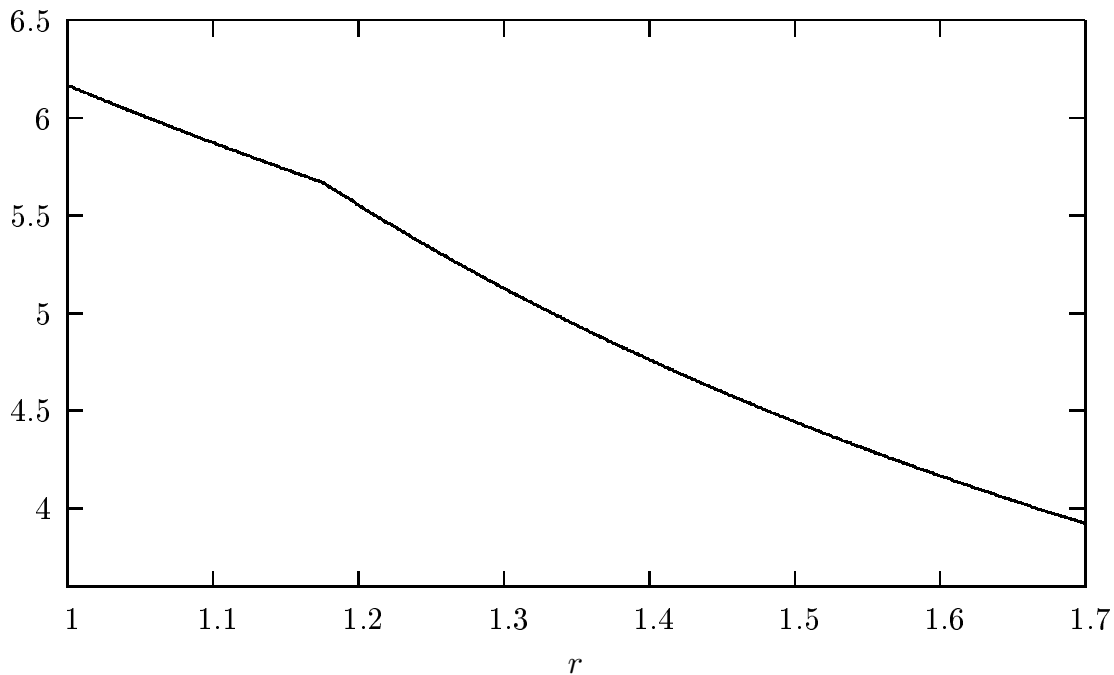


Figure 9.2: Price of anarchy for system  $S$  with  $s = 1.7, r \in [1, s]$

price of anarchy for the four processors coincides with its lower estimate (9.2.2).

The graphs in Fig. 9.4 illustrate the PoA variations for the systems  $S$  with almost the same speeds of processors, that is, in the normalized form they are very close to 1. In this case, the PoA value (light line) exceeds its estimate (9.2.2) (heavy line). As the speeds grow, the graphs meet each other. In the domain  $A$ ,  $r = 1.05$  and  $s = 1.1$ , whereas the value  $q$  varies within the range  $[1, r]$ . Next, in the domain  $B$ ,  $q = 1.05$  and  $s = 1.1$ , whereas the value  $r$  varies within the range  $[q, s]$ . Finally, in the domain  $C$ ,  $q = 1.05$  and  $r = 1.1$ , whereas the value  $s$  varies within the range  $[r, 1.3]$ .

## § 9.6 Results

This chapter has explored the service system composed of  $N$  processors and  $n$  players and derived the lower estimate for the price of anarchy in the maximizing the minimum processor delay game (or cover game). The three-processor model has been analyzed in detail. Here we have determined the exact value of the price of anarchy and showed that the PoA increases or does not change under new processor inclusion into the system of two processors. Also we have proposed a computing algorithm of

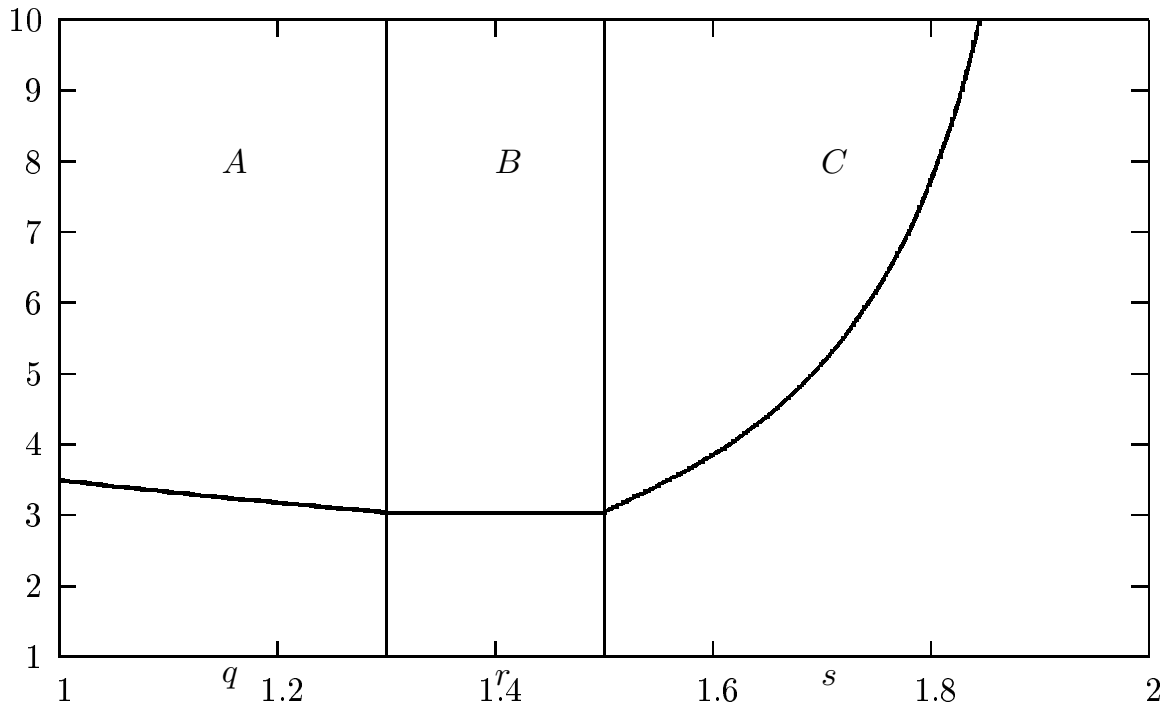


Figure 9.3: Price of anarchy for four-processor system  $S$

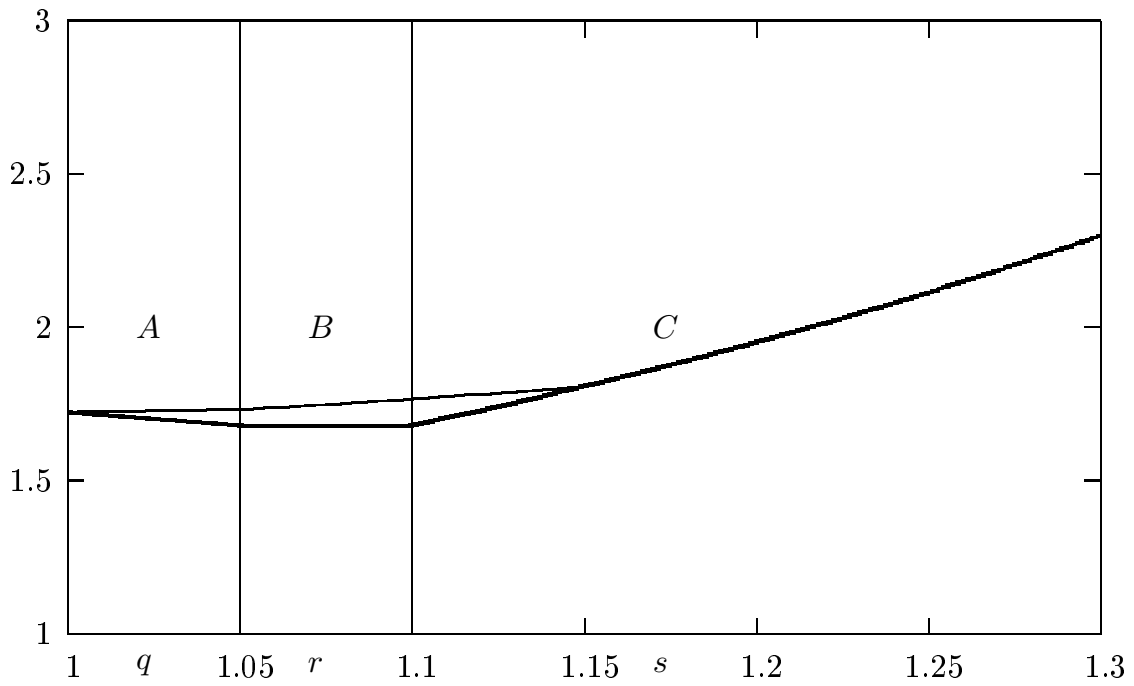


Figure 9.4: Price of anarchy for four-processor system  $S$  with low speeds

the exact PoA value. The algorithm can be generalized to systems with more processors, but this increases the number of linear programming problems to-be-solved and the number of associated variables and imposed constraints. And finally, we have implemented the algorithm as a program and conducted numerical experiments for comparing the obtained estimates of the PoA with its exact value. The results of these experiments have demonstrated the correctness of the derived estimates. For the case of four-processor system computing experiments demonstrate partial PoA coinciding for three and four-processor systems, the analytic confirmation of this fact needs further investigations.



## Chapter 10

# Cover Game with Linear Externalities

This chapter is devoted to the scheduling problem as the maximizing the minimum processor delay game (or cover game) [69, 180, 189] with linear externalities [42]. Here several egoistic players distribute their jobs of various volumes among processors of nonidentical speeds with delays depending on their own loads and on loads of other processors. Each player tries to minimize a completion time (delay) for his own job. We consider only pure Nash equilibria, which are always exist in such games with two processors (see Theorem 8.1), in contrast to the general case. The social payoff is the minimal delay over all processors for an obtained job distribution.

### § 10.1 The game model

Consider a system  $S = S(N, v, e)$  composed of a set  $N$  of processors operating with speeds  $v_1 \leq \dots \leq v_n$ , where  $n = |N|$ , and externalities  $e_{ik}$ , where  $i, k \in N, i \neq k$ , and each coefficient  $e_{ik} \geq 0$  reflects a contribution of load on the processor  $k \neq i$  to the delay of the processor  $i$ . The system is used by a set of players with their jobs  $U = U(M, w)$ : each player from the set  $M$  chooses an appropriate processor for his job execution. For player  $j$ , the volume of job is  $w_j, j = 1, \dots, m$ , where  $m = |M|$ . Denote by  $W = \sum_{j=1}^m w_j$  the total volume of all jobs. Free processor  $i$  with speed  $v_i$  executes a job of volume  $w_j$  for  $w_j/v_i$  time, when all other processors are idle.

Each player can choose any processor. The strategy of player  $j$  is to select a processor  $l_j$  for his job execution. Then the strategy profile in the game represents the vector  $L = (l_1, \dots, l_m)$ . The load of processor  $i$  is defined by  $\delta_i(L) = \sum_{j \in M: l_j=i} w_j$ .

The delay of processor  $i$  takes the form

$$\lambda_i(L) = \sum_{j \in M: l_j = i} \frac{w_j}{v_i} + \sum_{k \neq i} e_{ik} \sum_{j \in M: l_j = k} w_j = \frac{\delta_i(L)}{v_i} + \sum_{k \neq i} e_{ik} \delta_k(L).$$

In fact, this value is the same for all players selecting a given processor.

So, we define the pure strategy game  $\Gamma = \langle S(N, v, e), U(M, w), \lambda \rangle$ . In the present chapter we consider only pure strategies.

Suppose that the system objective is to maximize the delay of the least delayed processor, that is, to maximize its job completion time. The social payoff  $SC(L) = \min_{i \in N} \lambda_i(L)$  is described by the minimal delay over all processors. Define the optimal payoff (the social payoff in the optimal case) as

$$OPT = OPT(S, U) = \max_{L \text{ is a profile in } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L) \quad (10.1.1)$$

where maximization runs over all admissible strategy profiles in the game  $\Gamma(S, U, \lambda)$ .

A strategy profile  $L$  such that none of the players benefits from a unilateral deviation (change of the processor chosen in  $L$  for his job execution) is a pure strategy Nash equilibrium (NE). To provide a formal definition, let  $L(j \rightarrow i) = (l_1, \dots, l_{j-1}, i, l_{j+1}, \dots, l_m)$  be the profile where the job  $j$  migrates from a processor  $l_j$  chosen in the profile  $L$  to some another processor  $i$ , whereas the remaining players keep their strategies the same as in  $L$ .

**Definition 10.1.** *A strategy profile  $L$  is said to be a pure strategy Nash equilibrium if and only if each player chooses a processor with the minimum delay, that is, for each player  $j \in M$ , we have the inequality  $\lambda_{l_j}(L) \leq \lambda_i(L(j \rightarrow i))$  for all processors  $i \in N$ .*

Note that the system, considered in the current chapter is equivalent to the system in the chapter8 from the point of players' view. That's why we introduce the same as in the chapter8 assumptions to provide an adequate system behavior.

**Assumption 10.1.** *For each processor pairs  $i \neq k$  the inequality  $e_{ik} < \frac{1}{v_i}$  holds.*

**Assumption 10.2.** *For each processor pairs  $i \neq k$  it holds that  $e_{ki} < \frac{1}{v_i}$ .*

**Assumption 10.3.** *For each processor pair  $i \neq k$ , such that  $v_i \geq v_k$ , we have the inequality  $\sum_{l \neq i} e_{il} \leq \sum_{l \neq k} e_{kl}$ .*

Further in the chapter we suppose that the assumptions 10.1, 10.2 and 10.3 are fulfilled.

Also, as well as in the model described in the chapter 8, the presented game may not to possess any pure Nash equilibrium for the general case (see example 22). However the theorem 8.1 also holds in this model, that is the game with two processors always has a pure Nash equilibrium.

Suppose that the system and job sets are such that the game possesses a pure Nash equilibrium. We define price of anarchy of the corresponding system as follows.

**Definition 10.2.** *The price of anarchy (PoA) in the system  $S$  is the maximal ratio of the optimal social payoff (10.1.1) and the social payoff in the worst-case pure Nash equilibrium:*

$$PoA(S) = \max_U \frac{OPT(S, U)}{\min_{L \text{ is NE in } \Gamma(S, U, \lambda)} SC(L)}.$$

## § 10.2 The price of anarchy in the game with 2 processors

In this section we try to estimate the PoA value for the case of two processors with externalities and compare it with the PoA value for the initial model without externalities.

Consider now the model with 2 processors with speeds  $v_1 = 1$  and  $v_2 = s \geq 1$ . Note that such a choice of processor speeds in the system does not violate generality: it is always possible to normalize the speeds using division by the speed of the slowest processor. Note that dividing speeds we also must multiply externalities by the same value. So we keep a ratio between delays.

Note that assumptions 10.1, 10.2 and 10.3 imply that  $e_{12} \geq e_{21}$  and the values  $1 - v_i e_{ik}$  and  $1 - v_i e_{ki}$  are strictly positive for any  $i \neq k$ .

A set of related papers [38, 49, 69, 180, 189] present exact values and estimations for the price of anarchy for KP-model based covering games without externalities. All of them show that the price of anarchy is infinite if the  $s \geq 2$ . Partially in case

of two uniformly related processors with speeds  $1 \leq s$  [180] the PoA value equals to

$$PoA^0(s) = \begin{cases} \frac{2+s}{(1+s)(2-s)} & \text{for } 1 \leq s \leq \sqrt{2}, \\ \frac{2}{s(2-s)} & \text{for } \sqrt{2} < s < 2, \\ \infty & \text{for } 2 \leq s. \end{cases} \quad (10.2.1)$$

We try to estimate the PoA value for the presented model with externalities and compare it with (10.2.1). Recall that processor speeds are  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = s \geq 1$ . We also denote  $\eta(s) = 1 + s - s(e_{12} + e_{21})$ ,  $\zeta(s) = 1 - se_{12}e_{21}$  for convenience and to make entries shorter.

Here we present the following estimations which are satisfied in our model with assumptions 10.1, 10.2 and 10.3. We use them for the further analysis.

**Lemma 10.1.** *The optimal system payoff value has the following upper bound:*

$$OPT \leq \frac{W\zeta(s)}{\eta(s)} \quad (10.2.2)$$

*Proof.* Consider the situation where jobs are arbitrarily splittable. Then they could be shared between two processors so that their delays are the same:  $\lambda' = \frac{W-\Delta}{v_1} + e_{12}\Delta = \frac{\Delta}{v_2} + e_{21}(W - \Delta)$ , where  $\Delta$  is a part of total jobs volume  $W$  processed on the processor 2. From the equation we obtain  $\Delta = \frac{W(v_2 - e_{21}s)}{\eta(s)}$  and  $\lambda' = \frac{W\zeta(s)}{\eta(s)}$ . The optimal system payoff  $OPT$  in our model with unsplittable jobs is not greater than  $\lambda'$  in the described situation.  $\square$

Suppose that  $\lambda_i(L) \geq \lambda_k(L)$  for some profile  $L$ , that is a processor  $i$  is the most delayed in  $L$ . Denote  $w' = \min_{j:l_j=i} w_j$  is a minimal volume job on the processor  $i$ ,  $a = \sum_{j \neq k: l_j=i} w_j$  is the total volume of remaining jobs on the processor  $i$ . Then the total volume of jobs on the processor  $k$  equals to  $W - a - w'$ .

**Lemma 10.2.** *Let  $L$  be an arbitrary NE and  $\lambda_i(L) \geq \lambda_k(L)$ . Then if the processor  $i$  executes more than one job and the total volume of jobs on  $i$  equals to  $w' + a$ , where  $w'$  is a minimal volume job on the processor  $i$ , then*

$$a \leq \frac{W(v_i - se_{ik}) - w'(v_k - se_{ik})}{\eta(s)}. \quad (10.2.3)$$

*Proof.* Since  $L$  is the NE, we have  $\lambda_i(L) = \frac{w'+a}{v_i} + e_{ik}(W - a - w') \leq \frac{W-a}{v_k} + e_{ki}a$ . It immediately implies the inequality for  $a$ .  $\square$

**Lemma 10.3.** *Let  $L$  be an arbitrary NE and  $\lambda_i(L) \geq \lambda_k(L)$ . Then if the processor  $i$  executes more than one job and the total volume of jobs on  $i$  equals to  $w' + a$ , where  $w'$  is a minimal volume job on the processor  $i$ , then the system payoff  $SC(L)$  is at least*

$$\frac{W\zeta(s)}{\eta(s)} - \frac{w'(1 - v_k e_{ki})(\eta(s) + v_k - se_{ik})}{v_k \eta(s)}. \quad (10.2.4)$$

*Proof.* The system payoff equals to  $SC(L) = \lambda_k(L) = \frac{W-w'-a}{v_k} + e_{ki}(w' + a) = \frac{W}{v_k} - (w' + a)(\frac{1}{v_k} - e_{ki})$ . Substitute here an estimation (10.2.3) for  $a$  and obtain the estimation for  $SC(L)$ .  $\square$

**Lemma 10.4.** *Let  $L$  be an arbitrary NE and  $\lambda_i(L) \geq \lambda_k(L)$ . Then if the processor  $i$  executes more than one job, then the system payoff  $SC(L)$  is at least*

$$W \frac{se_{ki} - v_i + 2v_k \zeta(s)}{v_k(\eta(s) + v_k - se_{ik})}. \quad (10.2.5)$$

*Proof.* We use system payoff estimation (10.2.4) the estimation (10.2.3) for  $a$ . Since the processor  $i$  executes more than one job and  $w'$  is a minimal, then  $w' \leq a \leq \frac{W(v_i - se_{ik}) - w'(v_k - se_{ik})}{\eta(s)}$ , which implies  $w' \leq \frac{W(v_i - se_{ik})}{\eta(s) + v_k - se_{ik}}$ . Then  $SC \geq W \frac{se_{ki} - v_i + 2v_k \zeta(s)}{v_k(\eta(s) + v_k - se_{ik})}$ .  $\square$

It is clear that the lemma 10.4 is applicable only if  $se_{ki} - v_i + 2v_k \zeta(s) > 0$ .

**Lemma 10.5.** *Let  $L$  be an arbitrary NE which is not an optimal profile, and  $\lambda_i(L) \geq \lambda_k(L)$ , and  $w'$  is a minimal volume job on the processor  $i$ . Then  $\lambda_i(L^{OPT}) \leq \frac{W-w'}{v_i} + e_{ik}w'$ .*

*Proof.* Let  $a$  be the total volume of all jobs excluding the job of the volume  $w'$  on the processor  $i$ .

Suppose first that  $a > 0$ , then  $a > w'$ . Then in the profile  $L$  the load of the processor  $i$  equals to  $w' + a$ . In the optimal profile  $L^{OPT}$  the load of  $i$  cannot exceed  $w' + a$ , because otherwise  $\lambda_i(L^{OPT}) > \lambda_i(L) > \lambda_k(L) > \lambda_k(L^{OPT})$ , that contradicts with the optimality of  $L^{OPT}$ . If in the optimal profile the load of  $i$  is equal to  $w' + a$ , then the optimal payoff OPT coincides with the equilibrium  $SC(L)$ . Therefore the optimal load on the processor  $i$  is strictly less than  $w' + a$ , and it means that it can be equal either  $a + \Delta_1 < a + w'$ , either  $w' + \Delta_2 < a + w'$ , or not more than  $W - a - w'$ .

Here  $\Delta_1 + \Delta_2 = W - a - w'$ ,  $\Delta_1, \Delta_2 \geq 0$ . Note that  $a + \Delta_1 = W - w' - \Delta_2 \leq W - w'$ ,  $w' + \Delta_2 = W - a - \Delta_1 \leq W - a \leq W - w'$ ,  $W - a - w' < W - w'$ . So, the optimal load of the processor  $i$  does not exceed  $W - w'$ .

Consider now the case where  $a = 0$ . Then in the optimal profile  $L^{OPT}$  the load of  $i$  cannot exceed  $w'$ , because otherwise  $\lambda_i(L^{OPT}) > \lambda_i(L) > \lambda_k(L) > \lambda_k(L^{OPT})$ , that contradicts with the optimality of  $L^{OPT}$ . If in the optimal profile the load of  $i$  equals to  $w'$ , then the optimal payoff  $OPT$  coincides with the equilibrium  $SC(L)$ . Then the optimal load of the processor  $i$  is strictly less than  $w'$ , and it means that the job  $w'$  is executed on the processor  $k$  in the optimal profile, and therefore the load of the processor  $i$  does not exceed  $W - w'$ .  $\square$

**Lemma 10.6.** *Let  $L$  be an arbitrary NE which is not an optimal profile, and  $\lambda_i(L) \geq \lambda_k(L)$ , and  $w'$  is a minimal volume job on the processor  $i$ . Then  $OPT \leq \frac{W-w'}{v_i} + e_{ik}w'$ .*

*Proof.* We use lemma 10.5. If  $\lambda_i(L^{OPT}) \leq \lambda_k(L^{OPT})$ , then  $OPT = \lambda_i(L^{OPT}) \leq \frac{W-w'}{v_i} + e_{ik}w'$ . Otherwise  $OPT = \lambda_k(L^{OPT}) \leq \lambda_i(L^{OPT}) \leq \frac{W-w'}{v_i} + e_{ik}w'$ .  $\square$

We use the following denotations to make entries shorter:

$$\begin{aligned} f(s) &= s(1 - e_{12})^2 - \zeta(s)(1 - se_{21}), & h(s) &= se_{12} - s + 2\zeta(s), \\ g(s) &= (1 - se_{12})(1 + \eta(s) - se_{21}) - s(1 - e_{21}\eta(s)), \\ q(s) &= s^2(1 - e_{12})(1 - e_{21}) - \eta(s)(1 - se_{12}), \\ est_1(s) &= \frac{\zeta(s)(\eta(s)+1-se_{21})}{\eta(s)(se_{12}-s+2\zeta(s))}, & est_2(s) &= \frac{s-1+se_{21}(1-se_{12})}{s^2e_{12}(1-e_{12})}, \\ est_3(s) &= \frac{\eta(s)+1-s+s^2e_{21}(1-e_{21})}{s(2\zeta(s)-s+se_{12})}, \\ est_4(s) &= \frac{\eta(s)\zeta(s)}{\eta(s)^2-s(1-e_{12})^2(1-se_{12})-s\eta(s)(1-e_{21})(1-e_{12})}, \\ est_5(s) &= \frac{s^2\zeta(s)(1-e_{12})}{\eta(s)(s-1+se_{21}(1-se_{12}))}, & est_6(s) &= \frac{s(1-e_{12})(s-1+se_{12})}{s-1+se_{21}(1-se_{12})}, \\ est_7(s) &= \frac{s\zeta(s)}{1-se_{12}+s^2e_{21}(1-e_{21})}. \end{aligned}$$

Suppose that  $A$  is a set of some functions  $\alpha_i(\cdot)$  and define a function  $\alpha(\cdot)$  which is a combination of min and max operators applied to subsets  $\{\alpha_i(\cdot) \in A\} \subseteq A$ . We say that the component  $\alpha_*(s) \in A$  is active for given  $s$  if  $\alpha_*(s) \equiv \alpha(s)$ . The domain of  $s$  where this identity is true we call an active area for the function  $\alpha_*(s)$ .

**Lemma 10.7.** *Let  $L$  is a Nash equilibrium. If  $\lambda_2(L) \geq \lambda_1(L)$ , then*

$$\frac{OPT}{SC(L)} \leq \min\{est_1(s), \max\{\min\{est_2(s), est_3(s)\}, est_4(s)\}\},$$

when  $h(s) > 0$ , and

$$\frac{OPT}{SC(L)} \leq \max\{est_2(s), est_4(s)\},$$

when  $h(s) \leq 0$ .

*Proof.* Let  $w'$  be a minimal volume job on the processor 2,  $a$  is the total volume of remaining jobs on the processor 2. Then the total volume of jobs on the processor 1 equals to  $W - a - w'$  and the system payoff is

$$SC(L) = \lambda_1(L) = W - a - w' + e_{12}(w' + a). \quad (10.2.6)$$

Suppose first that only one job is executed on the processor 2 in the NE  $L$ , that is  $a = 0$ . We show that it implies that  $L$  is an optimal profile. Suppose the opposite. Then two cases are possible. The first case is when the job with volume  $w'$  remains on the processor 2 in the optimal profile  $L^{OPT}$ . But it yields that  $OPT = \lambda_1(L^{OPT}) \leq \lambda_1(L)$ , and so the profile  $L^{OPT}$  is not optimal. If in  $L^{OPT}$  the job  $w'$  moves to the processor 1, then the processor 2 obtains the load at most  $W - w'$ . Then  $OPT \leq \frac{W-w'}{s} + e_{21}w' \leq W - w' + e_{12}w' = \lambda_1(L)$  and  $L^{OPT}$  is not optimal.

Suppose now that the processor 2 executes more than one job in NE  $L$ , that is  $a \geq w'$ . From lemmas 10.1 and 10.4 we obtain the estimation  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_1(s)$ , which is applicable when  $h(s) \geq 0$ .

To obtain the further estimations we need more precise estimation of  $OPT$ .

1. Let  $\lambda_2(L^{OPT}) \leq \lambda_1(L^{OPT})$ . By (10.2.6) we get  $a = \frac{W-w'(1-e_{12})-SC(L)}{1-e_{12}}$ . Substitute this expression for  $a$  to the inequality (10.2.3) and expressing  $w'$  we obtain  $w' \leq \frac{\zeta(s)W-\eta(s)SC(L)}{s(1-e_{12})^2}$ . From lemma 10.6 we have  $OPT \leq \frac{W-w'}{s} + e_{21}w'$ . Substitute here the estimation for  $w'$  and obtain  $OPT \leq \frac{SC(L)\eta(s)(1-se_{21})+Wf(s)}{s^2(1-e_{12})^2}$ . The two further estimations can be applied only if  $f(s) \geq 0$ . If it holds, we can obtain the following estimations.

a) The system payoff is  $SC(L) = W - w' - a + e_{12}(w' + a) = W - (w' + a)(1 - e_{12}) \geq e_{12}W$ , then  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_2(s)$ .

b) By the estimation (10.2.5) we obtain the estimation  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_3(s)$ , which also needs  $h(s) > 0$ .

2. Now consider the case when in the optimal profile we have  $\lambda_1(L^{OPT}) \leq \lambda_2(L^{OPT})$ , then by lemma 10.5 we get  $w' + e_{12}(W - w') \leq \lambda_1(L^{OPT}) \leq \lambda_2(L^{OPT}) \leq \frac{W-w'}{s} + e_{21}w'$ . We can express  $w' \leq \frac{W(1-se_{21})}{\eta(s)}$  and substitute it to the system payoff estimation (10.2.4). Then the system payoff  $SC(L) \geq \frac{W((\eta(s)^2 - s(1-e_{12})^2(1-se_{12}) - s\eta(s)(1-e_{21})(1-e_{12}))}{\eta(s)^2}$ . By (10.2.2) for  $OPT$  we obtain  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_4(s)$ . The denominator of  $est_4(s)$  equals to  $(1 - se_{21})(1 - se_{12}) + e_{12}(\eta(s)(s - 1) + s(1 - se_{21})(1 - e_{21}) + \eta(s)(1 - se_{12})) > 0$ .

Joining the obtained estimations we get the upper bound  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq upper_1(s)$ .

We show now that the components of the obtained upper bound are defined and feasible in their active areas. We verify domains and active areas for the obtained estimations. The estimations  $est_1(s)$  and  $est_2(s)$  are defined if  $h(s) > 0$ . The estimations  $est_2(s)$  and  $est_3(s)$  are applicable if  $f(s) \geq 0$ . Active areas for the estimations depend on the following inequalities. If  $h(s) > 0$ , then

$$est_1(s) \geq est_3(s) \text{ is equivalent to } g(s) \leq 0, \quad (10.2.7)$$

$$est_1(s) \geq est_4(s) \text{ is equivalent to } g(s) \leq 0, \quad (10.2.8)$$

$$est_2(s) \geq est_3(s) \text{ is equivalent to } \frac{(s - 2 + se_{12})f(s)}{h(s)} \geq 0, \quad (10.2.9)$$

$$est_3(s) \geq est_4(s) \text{ is equivalent to } f(s)g(s) \leq 0. \quad (10.2.10)$$

Also

$$est_2(s) \geq est_4(s) \text{ is equivalent to } f(s) \geq 0 \quad (10.2.11)$$

without paying attention to the value of  $h(s)$ .

Suppose first that  $h(s) > 0$ . The estimation  $est_*(s)$  is active for given  $s$  if  $est_*(s) \equiv upper_1(s)$ . The domain of  $s$  where this identity is true is an active area for the estimation  $est_*(s)$ . This means for  $est_1(s)$  that  $est_1(s) \leq \max\{\min\{est_2(s), est_3(s)\}, est_4(s)\}$ . This inequality can be satisfied in four cases:

a)  $est_1(s) \leq est_2(s)$  and  $est_4(s) \leq est_2(s)$  and  $est_3(s) \geq est_2(s)$ . From the first and third inequalities we have  $est_1(s) \leq est_3(s)$ , which with (10.2.7) yields



$g(s) \geq 0$ . The second inequality and (10.2.11) imply  $f(s) \geq 0$ . The second and third inequalities imply  $est_4(s) \leq est_3(s)$ , which with (10.2.10) yields  $f(s)g(s) \leq 0$ , and with  $f(s) \geq 0$  we obtain  $g(s) \leq 0$ . So, in our conditions this case is possible only if inequalities are equalities.

b)  $est_1(s) \leq est_3(s)$  and  $est_4(s) \leq est_3(s)$  and  $est_3(s) \leq est_2(s)$ . From the first inequality with (10.2.7) we have  $g(s) \geq 0$ . This together with the second inequality and (10.2.10) implies  $f(s) \leq 0$ . The second and third inequalities provide  $est_4(s) \leq est_2(s)$  which with (10.2.11) yields  $f(s) \geq 0$ . So, this case is possible only with equalities.

c)  $est_1(s) \leq est_4(s)$  and  $est_4(s) \geq est_2(s)$ . It is possible if  $g(s) \geq 0$  and  $f(s) \leq 0$  which follows from (10.2.8) and (10.2.11).

d)  $est_1(s) \leq est_4(s)$  and  $est_4(s) \geq est_3(s)$ . It is possible if  $g(s) \geq 0$  and  $f(s) \geq 0$  which follows from (10.2.8) and (10.2.10).

Similarly, the estimation  $est_2(s)$  is active when  $est_2(s) \leq est_3(s)$  and  $est_2(s) \geq est_4(s)$  and  $est_2(s) \leq est_1(s)$ . The second and third inequalities yield  $est_4(s) \leq est_1(s)$ , which with (10.2.11) implies  $g(s) \leq 0$ . The second inequality with (10.2.11) yields  $f(s) \geq 0$ , which provides an applicability for the estimation  $est_2(s)$ . This and the first inequality with (10.2.9) imply  $s - 2 + se_{12} \geq 0$ .

The estimation  $est_3(s)$  is active when  $est_3(s) \leq est_2(s)$  and  $est_3(s) \geq est_4(s)$  and  $est_3(s) \leq est_1(s)$ . The third inequality with (10.2.9) provides  $g(s) \leq 0$ . This and the second inequality with (10.2.10) imply  $f(s) \geq 0$ , which provides an applicability for the estimation  $est_3(s)$ . This and the first inequality with (10.2.9) imply  $s - 2 + se_{12} \leq 0$ .

The estimation  $est_4(s)$  can be active in two cases:

a)  $est_4(s) \leq est_1(s)$  and  $est_4(s) \leq est_2(s)$ . The first inequality with (10.2.8) yields  $g(s) \leq 0$ , from the second inequality with (10.2.11) we have  $f(s) \leq 0$ .

b)  $est_4(s) \leq est_1(s)$  and  $est_4(s) \leq est_3(s)$ . The first inequality with (10.2.8) implies  $g(s) \leq 0$ , this together with the second inequality with (10.2.10) yields  $f(s) \leq 0$ .

Note that in both cases a) and b) the inequality  $f(s) \leq 0$  means that the estimation  $est_4(s)$  is active in domains where the estimations  $est_2(s)$  and  $est_3(s)$  are

Table 10.1: Active upper estimation cases if  $\lambda_2(L) \geq \lambda_1(L)$  in the NE  $L$ .

$h(s)$	$g(s)$	$f(s)$	$s - 2 + se_{12}$	Active estimation
$> 0$	$> 0$	any value	any value	$est_1(s)$
$> 0$	$\leq 0$	$> 0$	$> 0$	$est_2(s)$
$> 0$	$\leq 0$	$> 0$	$\leq 0$	$est_3(s)$
$> 0$	$\leq 0$	$\leq 0$	any value	$est_4(s)$
$\leq 0$	any value	$> 0$	any value	$est_2(s)$
$\leq 0$	any value	$\leq 0$	any value	$est_4(s)$

not applicable.

Consider the case where  $h(s) < 0$ , that is the estimations  $est_1(s)$  and  $est_3(s)$  are not defined. The estimation  $est_2(s)$  is active, when  $est_2(s) \geq est_4(s)$ , that is  $f(s) \geq 0$  since (10.2.11). Otherwise the estimation  $est_4(s)$  is active.

So, an active upper estimation cases can be clearly presented in the Table 10.1. □

**Lemma 10.8.** *Let  $L$  is a Nash equilibrium. If  $\lambda_1(L) \geq \lambda_2(L)$ , then*

$$\frac{OPT}{SC(L)} \leq \min\{est_5(s), \max\{est_6(s), est_7(s)\}\}.$$

*Proof.* Let  $w'$  be a minimal volume job on the processor 1,  $a$  is the total volume of remaining jobs on the processor 1. Then the total volume of jobs on the processor 2 equals to  $W - a - w'$  and the system payoff is

$$SC(L) = \lambda_2(L) = \frac{W - a - w'}{s} + e_{21}(w' + a). \quad (10.2.12)$$

1. Suppose first that  $a = 0$ , that is the processor 1 executes only one job with the volume  $w'$ . Then the delay on the processor 1 equals to  $\lambda_1(L) = w' + e_{12}(W - w') \leq \frac{W}{s} = \lambda_2(L)$ . Expressing  $w'$  we obtain  $w' \leq \frac{W(1-se_{12})}{s(1-e_{12})}$  and, so,

$$SC(L) \geq W \frac{s - 1 + se_{21}(1 - se_{12})}{s^2(1 - e_{12})}. \quad (10.2.13)$$

With the estimation (10.2.2) for  $OPT$  we get  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_5(s)$ . Now we need more precise estimation for  $OPT$  to obtain the further estimations.

a) Let first  $\lambda_1(L^{OPT}) \leq \lambda_2(L^{OPT})$ . By lemma 10.6  $OPT \leq W - w' + e_{12}w'$ . From (10.2.12) we have  $w' = \frac{W - sSC(L)}{1 - se_{21}}$ . Then  $OPT \leq \frac{W(e_{12} - se_{21}) + sSC(L)(1 - e_{12})}{1 - se_{21}}$ . If  $e_{12} - se_{21} \geq 0$ , then we can use (10.2.13) and  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_6(s)$ .

b) Next consider the case where in the optimal profile  $\lambda_2(L^{OPT}) \leq \lambda_1(L^{OPT})$ , which with lemma 10.5 implies  $\frac{w'}{s} + e_{21}(W - w') \leq \lambda_2(L^{OPT}) \leq \lambda_1(L^{OPT}) \leq W - w' + e_{12}w'$ . Express  $w' \leq \frac{sW(1-e_{21})}{\eta(s)}$  and substitute this to (10.2.12). Then  $SC(L) \geq \frac{W(1-se_{12}+s^2e_{21}(1-e_{21}))}{s\eta(s)}$ . Using the estimation (10.2.2) for  $OPT$  we obtain  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_7(s)$ .

2. Let now  $a > 0$ . From the estimations (10.2.5) and (10.2.2) we obtain  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq \frac{s\zeta(s)(\eta(s)+s-se_{12})}{\eta(s)(se_{21}-1+2s\zeta(s))} \leq est_5(s)$ . Note that  $se_{21} - 1 + 2s\zeta(s) = s - 1 + s\zeta(s) + se_{21}(1 - se_{12}) > 0$ , therefore the estimation (10.2.5) is applied without restrictions.

Joining the obtained estimations we get the upper estimation  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq upper_2(s)$ .

We show now that the components of the obtained upper bound are defined and feasible in their active areas. We verify domains and active areas for the obtained estimations. The estimation  $est_6(s)$  is applicable when  $e_{12} - se_{21} \geq 0$ . An active areas of the estimations depend on the following inequalities.

$$est_5(s) \geq est_6(s) \text{ is equivalent to } q(s) \leq 0, \quad (10.2.14)$$

$$est_5(s) \geq est_7(s) \text{ is equivalent to } q(s) \leq 0, \quad (10.2.15)$$

$$est_6(s) \geq est_7(s) \text{ is equivalent to } (e_{12} - se_{21})q(s) \geq 0, \quad (10.2.16)$$

We say that the estimation  $est_*(s)$  for given  $s$  is active if  $est_*(s) \equiv upper_2(s)$ . This means for  $est_5(s)$  that  $est_5(s) \leq est_6(s)$  or  $est_5(s) \leq est_7(s)$ , which implies with (10.2.14) and (10.2.15) that  $q(s) \geq 0$ .

The estimation  $est_6(s)$  is active when  $est_6(s) \geq est_7(s)$  and  $est_5(s) \geq est_6(s)$ . From the second inequality with (10.2.14) we have  $q(s) \leq 0$ , which together with (10.2.16) implies  $e_{12} - se_{21} \geq 0$ , which provides an applicability of the estimation  $est_6(s)$ .

The estimation  $est_7(s)$  is active when  $est_7(s) \geq est_6(s)$  and  $est_5(s) \geq est_7(s)$ . From the second inequality with (10.2.15) we have  $q(s) \leq 0$ , which together with (10.2.16) implies  $e_{12} - se_{21} \leq 0$ , that means that the estimation  $est_7(s)$  is active in the area where the estimation  $est_6(s)$  is not applicable.

So, if  $q(s) \geq 0$  then the ratio  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_5(s)$ , otherwise when  $e_{12} - se_{21} \geq 0$  the ratio  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_6(s)$ , otherwise the ratio  $\frac{OPT}{SC(L)} \leq est_7(s)$ .  $\square$

Lemmas 10.7 and 10.8 give the following generalized upper estimation of the price of anarchy for the system  $S$ .

**Theorem 10.1.** *For the system  $S$  with two processors and linear externalities under the assumptions 10.1, 10.2 and 10.3 the PoA value is at most*

$$est(s) = \begin{cases} \max\{\min\{est_1(s), \max\{\min\{est_2(s), est_3(s)\}, est_4(s)\}\}, \\ \min\{est_5(s), \max\{est_6(s), est_7(s)\}\}\} \text{ if } h(s) > 0, \\ \max\{est_3(s), est_4(s), \\ \min\{est_5(s), \max\{est_6(s), est_7(s)\}\}\} \text{ if } h(s) \leq 0. \end{cases} \quad (10.2.17)$$

**Lemma 10.9.** *Let  $L$  is a Nash equilibrium. If  $\lambda_2(L) \geq \lambda_1(L)$ , then*

$$\frac{OPT}{SC(L)} \geq \min\{est_1(s), \max\{\min\{est_2(s), est_3(s)\}, est_4(s)\}\},$$

if  $h(s) > 0$ , and

$$\frac{OPT}{SC(L)} \geq \max\{est_2(s), est_4(s)\},$$

if  $h(s) \leq 0$ .

*Proof.* To obtain this lower estimate for the price of anarchy, it suffices to give examples of player sets  $U$  yielding the ratios of the optimal and the equilibrium payoffs stated by the theorem and show that their properties are feasible and fall into active estimation domains.

1. Consider an example for  $\frac{OPT}{SC(L)} = est_1(s)$  as a game with 4 jobs  $w_1 = w_2 = s\eta(s)(1 - e_{21})$ ,  $w_3 = s(1 - e_{21})(1 - se_{21})$  and  $w_4 = g(s) \geq 0$  in the active area of  $est_1(s)$ . In the NE  $L$  the jobs  $w_1$  and  $w_2$  are executed on the processor 2, and the jobs  $w_3$  and  $w_4$  on the processor 1, providing the system payoff to be equal to  $\lambda_1(L) = \eta(s)(2\zeta(s) - s(1 - e_{12})) > 0$  when  $h(s) > 0$ . If the job  $w_1$  migrates to the processor 1, then  $\lambda_1(L(1 \rightarrow 1)) = \lambda_1(L) + w_1(1 - e_{12}) = \lambda_2(L)$ . In the optimal profile  $L^{OPT}$  two jobs  $w_1$  and  $w_3$  are executed on the processor 2, and two jobs  $w_2$  and  $w_4$  are on the processor 1. The delay on both processors equals to  $\zeta(s)(1 + \eta(s) - se_{21})$ .

2. For  $\frac{OPT}{SC(L)} = est_2(s)$  we consider the game with 2 jobs  $w_1 = s(s - 1) \geq w_2 = s(1 - se_{12})$  if  $s - 2 + se_{12} \geq 0$ , which yields from the activity of  $est_2(s)$ . In the

NE  $L$  both jobs are executed on the processor 2, then the equilibrium system payoff is equal to  $\lambda_1(L) = s^2 e_{12}(1 - e_{12})$ . If the job  $w_2$  moves to the processor 1, then  $\lambda_1(L(2 \rightarrow 1)) = \lambda_1(L) + w_2(1 - e_{12}) = \lambda_2(L)$ . However such new profile coincides with an optimal profile  $L^{OPT}$ , where the job  $w_1$  is the only which remains on the processor 2. The optimal delay on the processor 2 is  $\lambda_2(L^{OPT}) = s - 1 + s e_{21}(1 - s e_{12}) \leq \lambda_1(L^{OPT}) = s(1 - e_{12})$ .

3. For  $\frac{OPT}{SC(L)} = est_3(s)$  we present the game with 3 jobs  $w_1 = w_2 = s^2(1 - e_{21})$ ,  $w_3 = s(2 - s - s e_{12}) \geq 0$  in the active area of  $est_3(s)$ . In the NE  $L$  the jobs  $w_1$  and  $w_2$  are executed on the processor 2, and one job  $w_3$  is on the processor 1, providing the system payoff to be equal to  $\lambda_1(L) = s(2\zeta(s) - s(1 - e_{12})) > 0$  if  $h(s) > 0$ , which is true in the active area of  $est_3(s)$ . If the job  $w_1$  migrates to the processor 1, then  $\lambda_1(L(1 \rightarrow 1)) = \lambda_1(L) + w_1(1 - e_{12}) = \lambda_2(L)$ . In the optimal profile  $L^{OPT}$  two jobs  $w_1$  and  $w_3$  are executed on the processor 2, and one job  $w_2$  is on the processor 1. The processor 2 has the smallest delay which is equal to  $\lambda_2(L^{OPT}) = \eta(s) + 1 - s + s^2 e_{21}(1 - e_{21}) \leq \lambda_1(L^{OPT}) = s^2(1 - e_{21})(1 + e_{12}) + s e_{12}(2 - s - s e_{12})$  if  $g(s) \leq 0$ , which is true in the active area of  $est_3(s)$ .

4. An example for  $\frac{OPT}{SC(L)} = est_4(s)$  is the game with 3 jobs  $w_1 = \eta(s)(s - 1) + s(1 - s e_{21})(1 - e_{21}) \geq w_2 = 1 - s e_{12}$  if  $g \leq 0$ , which holds in the active area of  $est_4(s)$ , and  $w_3 = (1 - s e_{12})(1 - s e_{21})$ . In the NE  $L$  two jobs  $w_1$  and  $w_2$  are executed on the processor 2, and the job  $w_3$  is on the processor 1. The system payoff is  $\lambda_1(L) = \eta(s)^2 - s(1 - e_{12})^2(1 - s e_{12}) - s\eta(s)(1 - e_{21})(1 - e_{12})$ . If the job  $w_2$  moves to the processor 1, then  $\lambda_1(L(2 \rightarrow 1)) = \lambda_1(L) + w_2(1 - e_{12}) = \lambda_2(L)$ . In the optimal profile the jobs  $w_1$  and  $w_3$  are executed on the processor 2, and the job  $w_2$  is on the processor 1. Both processors have the same delay which equals to  $\eta(s)\zeta(s)$ .

□

**Lemma 10.10.** *Let  $L$  is a Nash equilibrium. If  $\lambda_1(L) \geq \lambda_2(L)$ , then*

$$\frac{OPT}{SC(L)} \geq \min\{est_5(s), \max\{est_6(s), est_7(s)\}\}.$$

*Proof.* In this case we also give examples of player sets  $U$  yielding the ratios of the optimal and the equilibrium payoffs stated by the theorem and show that their properties are feasible and fall into active estimation domains.

1. An example for  $\frac{OPT}{SC(L)} = est_5(s)$  is the with 3 jobs  $w_1 = s\eta(s)(1 - se_{12})$ ,  $w_2 = s^2(1 - e_{12})(1 - se_{12})$ , where  $w_3 = sq(s) \geq 0$  in the active area of  $est_5(s)$ . In the NE  $L$  the job  $w_1$  is executed on the processor 1, and two jobs  $w_2$  and  $w_3$  are on the processor 2. The system payoff is  $\lambda_2(L) = \eta(s)(s - 1 + se_{21}(1 - se_{12}))$ . If the job  $w_1$  moves to the processor 2, then  $\lambda_2(L(1 \rightarrow 2)) = \lambda_2(L) + w_1(\frac{1}{s} - e_{21}) = \lambda_1(L)$ . In the optimal profile  $L^{OPT}$  two jobs  $w_1$  and  $w_3$  are executed on the processor 2, and  $w_2$  is on the processor 1. Both processors have the same delay which is equal to  $s^2\zeta(s)(1 - e_{12})$ .

2. An example for  $\frac{OPT}{SC(L)} = est_6(s)$  is the game with 2 jobs  $w_1 = s(1 - se_{12})$  and  $w_2 = s(s - 1)$ . In the NE  $L$  the job  $w_1$  is executed on the processor 1, and the job  $w_2$  is on the processor 2. The system payoff is  $\lambda_2(L) = s - 1 + se_{21}(1 - se_{12})$ . If the job  $w_1$  moves to the processor 2, then  $\lambda_2(L(1 \rightarrow 2)) = \lambda_2(L) + w_1(\frac{1}{s} - e_{21}) = \lambda_1(L)$ . In the optimal profile  $L^{OPT}$  both jobs change their positions: the job  $w_1$  moves to the processor 2 and the job  $w_2$  moves to the processor 1. The system payoff equals to  $\lambda_1(L^{OPT}) = s(s - 1 + e_{12}(1 - se_{12})) \leq \lambda_2(L^{OPT}) = 1 - se_{12} + se_{21}(s - 1)$  when  $q(s) \leq 0$ , which holds in the active area of  $est_6(s)$ .

3. An example for  $\frac{OPT}{SC(L)} = est_7(s)$  is the game with 2 jobs  $w_1 = s^2(1 - e_{21})$  and  $w_2 = s(1 - se_{12})$ . In the NE  $L$  the job  $w_1$  is executed on the processor 1, and the job  $w_2$  is on the processor 2. The system payoff is  $\lambda_2(L) = 1 - se_{12} + s^2e_{21}(1 - e_{21})$ . If the job  $w_1$  migrates to the processor 2, then  $\lambda_2(L(1 \rightarrow 2)) = \lambda_2(L) + w_1(\frac{1}{s} - e_{21}) = \eta(s) \geq \lambda_1(L) = s(s - se_{21} + e_{12}(1 - se_{12}))$  if  $q(s) \leq 0$ , which is true in the active area of  $est_7(s)$ . In the optimal profile  $L^{OPT}$  the job  $w_1$  is executed on the processor 2, and the job  $w_2$  is on the processor 1. Both processors have the same delay  $s\zeta(s)$ . □

We immediately obtain the following generalized lower estimation for the price of anarchy from lemmas 10.9 and 10.10.

**Theorem 10.2.** *For the system  $S$  with two processors and linear externalities under the assumptions 10.1, 10.2 and 10.3 the PoA value is at least  $est(s)$ , defined by (10.2.17).*

The theorems 10.1 and 10.2 imply that the lower and the upper bounds for the

PoA value for a system  $S$  with two processors coincide. Therefore the obtained estimation is the exact value for the PoA.

**Theorem 10.3.** *For the system  $S$  with two processors and linear externalities under the assumptions 10.1, 10.2 and 10.3 the PoA value exactly equals to  $est(s)$ , defined by (10.2.17).*

The model without externalities concerns with the fact that the PoA value is infinite even in case of two processors [69] when  $s \geq 2$ . As we can see adding the externalities close to zero value solves this problem. The theorem 10.3 implies that the system can set such externalities  $e_{12} < \frac{1}{s}$  and  $e_{21} < \frac{1}{s}$  and  $e_{12} \geq e_{21}$  for any  $s \geq 1$ , that the value of PoA equals to  $est(s) < \infty$ .

### § 10.3 Numerical examples

The Figure 10.1 and Figure 10.2 present examples of evaluated PoA values in the model with two processors for different values of  $s$ . The Fig. 10.1 shows the PoA for the externality values  $e_{12} = 0.1$  and  $e_{21} = 0.01$ . The Fig. 10.2 presents the case when externalities are  $e_{12} = 0.3$  and  $e_{21} = 0.1$ . The curves  $PoA(s)$  (full lines) are given for the model with externalities, and the curves  $PoA^0(s)$  (dashed lines) show the PoA values for the initial game without externalities. One can see that in the initial game the PoA increases rapidly in contrast to the game with externalities.

### § 10.4 Results

This chapter has explored the cover game with uniformly related processors and linear externalities. For the case of two processors we obtained an analytical expression for the upper bound of the PoA, which is also the lower bound and, hence, expresses the PoA value exactly. We show that the price of anarchy is limited in contrast to the initial KP cover model without externalities. The numerical results demonstrate visually the PoA value dependency on  $s$  and externalities.

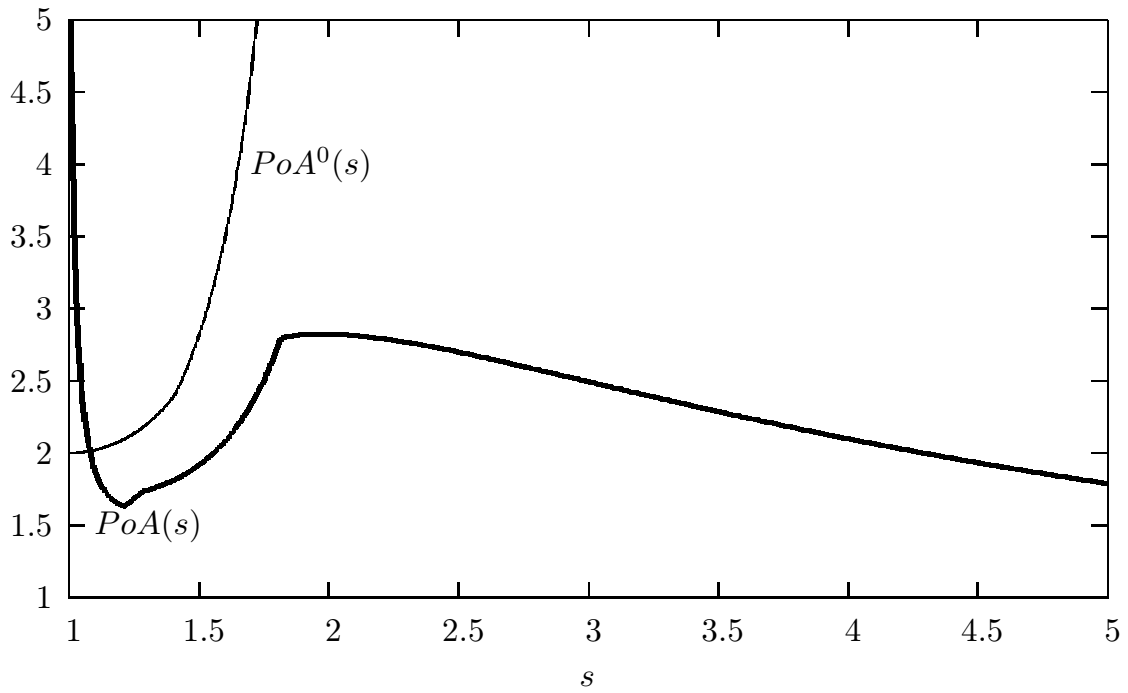


Figure 10.1: The PoA for the system  $S$  with  $e_{12} = 0.1$ ,  $e_{21} = 0.01$

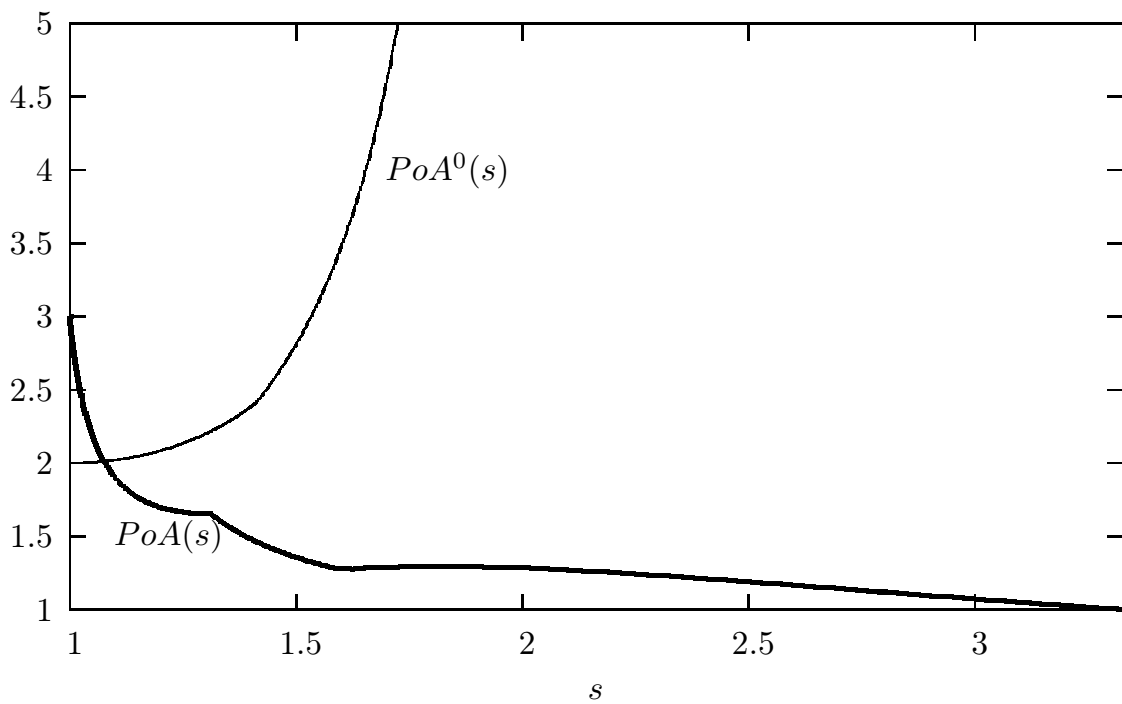


Figure 10.2: The PoA for the system  $S$  with  $e_{12} = 0.3$ ,  $e_{21} = 0.1$



## Chapter 11

# Computation of the Price of Anarchy in Load Balancing and Cover Games with Linear Delays

This chapter focuses on a generalization of the KP-model based games (see [120]) with parallel different-capacity processors. It is necessary to distribute several jobs of various volumes among processors of nonidentical speeds. The volume of a job is its completion time on a free unit-speed processor when all other processors are idle. Processor load is the total volume of jobs executed by a given processor. A linear delay of a processor, i.e. completion time for all jobs on this processor, may depend on not only its load but on loads of other processors. Each player chooses a processor for its job striving to minimize job's delay. Players have egoistic behavior and reach a Nash equilibrium, *viz.*, a job distribution such that none of them benefits from unilateral change of a chosen processor. In the sequel, we study pure strategies Nash equilibria only; as is well-known ([82]) for the original KP-model such an equilibrium always exists.

Depending on game type the model includes either the system cost for the load balancing game or the system payoff for the cover game. The system cost (also called the social cost) is the maximum delay over all processors for an obtained job distribution. The system payoff is the minimum of those values. For the load balancing game the price of anarchy ([120]) (PoA) is defined as the maximum ratio of the social cost in the worst-case Nash equilibrium and the optimal social cost. For the cover game PoA is the maximum ratio of the optimal social payoff and the

worst-case equilibrium social payoff.

The PoA evaluating is an important problem, since this value is an indicator of the system quality. It shows how a non-cooperative players behavior could be worse than cooperative. Sometimes in special cases it is possible to find an exact analytical expression for the PoA value or some its estimation, as in previous chapters, but generally it is not a trivial problem.

Numerical computing [41] of the PoA value and its graphical presentation allow to estimate the PoA visually if its exact analytical expression is not obtained yet or it is rather complicated to figure out its formula. We propose a computing algorithm of the exact PoA value. This is a generalization of the computing method for the case, when a linear delay of a processor may depend on not only its load but on loads of other processors. Partially, models with externalities, considered in the chapter 8 and 10, are such cases.

## § 11.1 The generalized KP-model with linear delays

Consider a system of  $N$  processors of different performances. The system is used by a set of players  $U = U(n, w)$ : each of  $n$  players chooses an appropriate processor for its job execution. For player  $j$ , the volume of job equals  $w_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Denote by  $W = \sum_{j=1}^n w_j$  the total volume of all jobs.

We study the following pure strategies game. Each player can choose any processor. The strategy of player  $j$  is processor  $l_j$  selected by this player for its job execution. Then the strategy profile in the game  $\Gamma$  is represented by the vector  $L = (l_1, \dots, l_n)$ . The load of processor  $i$ , i.e., the total volume of all jobs assigned to the processor is defined by  $\delta_i(L) = \sum_{j=1, \dots, n: l_j=i} w_j$ . The delay of processor  $i$  takes the form of a linear functional

$$\lambda_i(L) = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{iN})(\delta_1(L), \dots, \delta_N(L))^T$$

for the vector of processor loads and a vector  $\alpha_i \in R^N$ . Actually, this quantity is the same for all players selecting a given processor. Denote  $S = S(N, \lambda)$  the system of  $N$  processors with given delays  $\lambda$ . Therefore the game is described by  $\Gamma(S, U) = \langle S(N, \lambda), U(n, w) \rangle$ .

A strategy profile  $L$  such that none player benefits from unilateral deviation (change of the processor chosen in  $L$  for its job execution) is a pure strategies Nash equilibrium. To provide a formal definition, let  $L(j \rightarrow i) = (l_1, \dots, l_{j-1}, i, l_{j+1}, \dots, l_n)$  signify the profile obtained from a profile  $L$  if player  $j$  replaces processor  $l_j$  chosen by it in the profile  $L$  for another processor  $i$ , whereas the rest players keep the same strategies as before.

**Definition 11.1.** *A strategy profile  $L$  is said to be a pure strategies Nash equilibrium iff each player chooses a processor with the minimum delay, i.e., for each player  $j = 1, \dots, n$  we have the inequality  $\lambda_{l_j}(L) \leq \lambda_i(L(j \rightarrow i))$  for all processors  $i = 1, \dots, N$ .*

Note that while the original KP-model always has a pure Nash equilibrium ([82]), in our generalized case there are examples of games without any pure Nash equilibrium (see Example 22). Further we assume that the system and job sets are such that the game possesses a pure Nash equilibrium.

Further we'll suggest a computing method for the price of anarchy in the system of 3 processors. Therefore we present properties of Nash Equilibrium for KP-models with 3 processors, which are used in the computing method.

## § 11.2 Nash Equilibrium in the Game with 3 processors

Consider the following system of linear equations in the components of the vectors  $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3)$ . Denote  $A(a) = a_1 + a_2 + a_3, B(b) = b_1 + b_2 + b_3, C(c) = c_1 + c_2 + c_3, \Delta(a, b, c) = (A(a), B(b), C(c))^T, \alpha_k = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \alpha_{k3})$ . Numbers  $i, j, l$  are components of the set of processor numbers 1, 2, 3 so that  $i \neq j \neq l \neq i$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \Delta(a, b, c) \leq \alpha_j \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k (\alpha_{jj} - \alpha_{ji}) \\ \alpha_i \Delta(a, b, c) \leq \alpha_l \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k (\alpha_{ll} - \alpha_{li}) \\ \alpha_j \Delta(a, b, c) \leq \alpha_l \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:b_k>0} b_k (\alpha_{ll} - \alpha_{lj}) \text{ or } \max_{k=1,2,3} b_k = 0 \\ \alpha_i \Delta(a, b, c) \geq \alpha_j \Delta(a, b, c) \geq \alpha_l \Delta(a, b, c) \\ a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (11.2.1)$$

This system describes a set of hyperplanes passing through the point  $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  in the 9-dimensional space, and the solution set represents a domain in the space bounded by the hyperplanes. If the above system is feasible and  $(a, b, c)$  is its solution, then for any real number  $\beta > 0$ , a set  $(\beta a, \beta b, \beta c)$  is a solution too. Furthermore, the solution set is unbounded, since  $\beta$  can be arbitrarily large.

Study the system  $S$  composed of 3 processors with numbers  $i, j, l$  and  $n$  players. Let  $L$  indicate a Nash equilibrium in the system  $S$  such that processor  $i$  has a maximal delay in this profile, processor  $j$  has a medium delay and processor  $l$  has a minimal, otherwise we may re-enumerate processors. Suppose that in the equilibrium  $L$  processor  $i$  receives the total volume of jobs defined by  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k = a_1 + a_2 + a_3$  and the corresponding volumes for processors  $j$  and  $l$  equal  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k = b_1 + b_2 + b_3$  and  $\sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k = c_1 + c_2 + c_3$ , respectively. The volume of jobs on each processor is somehow divided into three parts so that each component of the three-dimensional vectors  $a, b$  and  $c$  is either zero or positive and includes at least one job.

**Lemma 11.1.** *Let  $L$  be a Nash equilibrium in the game involving three processors  $i, j$  and  $l$ , and  $n$  players such that*

$$\begin{aligned} \lambda_i(L) &\geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L), \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=i} w_k &= a_1 + a_2 + a_3, \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k &= b_1 + b_2 + b_3, \\ \sum_{k=1, \dots, n: l_k=l} w_k &= c_1 + c_2 + c_3. \end{aligned}$$

*Here for all  $k = 1, 2, 3$  component  $a_k$  equals zero or the volume of at least one job on processor  $i$ , component  $b_k$  equals zero or the volume of at least one job on processor  $j$ , and component  $c_k$  equals zero or the volume of at least one job on processor  $l$ . Then the set of the vectors  $a, b$  and  $c$  is the solution of the system (11.2.1).*

*Proof.* Suppose that  $L$  represents a Nash equilibrium and  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ . Denote  $\delta(L) = (\delta_i(L), \delta_j(L), \delta_l(L))^T$  a vector-column of the processors loads. In

this case, the following inequalities take place:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \delta_i(L) \leq \alpha_j \delta_j(L) + \min_{k=1, \dots, n: l_k=i, w_k>0} w_k (\alpha_{jj} - \alpha_{ji}) \\ \alpha_i \delta_i(L) \leq \alpha_l \delta_l(L) + \min_{k=1, \dots, n: l_k=i, w_k>0} w_k (\alpha_{ll} - \alpha_{li}) \\ \alpha_j \delta_j(L) \leq \alpha_l \delta_l(L) + \min_{k=1, \dots, n: l_k=j, w_k>0} w_k (\alpha_{ll} - \alpha_{lj}) \text{ or } \max_{k=1, \dots, n: l_k=j} w_k = 0 \\ \alpha_i \delta_i(L) \geq \alpha_j \delta_j(L) \geq \alpha_l \delta_l(L). \end{array} \right.$$

It's clear that  $\delta(L) = \Delta(a, b, c)$ . Since each nonzero quantity  $a_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) equals the volume of at least one job on processor  $i$ , then we naturally have that

$$\min_{k:a_k>0} a_k \geq \min_{k:l_k=i, w_k>0} w_k. \quad \text{Similarly, } \min_{k:a_k>0} a_k \geq \min_{k:l_k=i, w_k>0} w_k \quad \text{and} \\ \min_{k:b_k>0} b_k \geq \min_{k:l_k=j, w_k>0} w_k. \quad \text{This means satisfaction of the system (11.2.1).} \quad \square$$

**Lemma 11.2.** *Any nonzero solution of the system (11.2.1) defines a Nash equilibrium  $L$  in the game involving the system  $S$  composed of 3 processors  $i, j$  and  $l$  and players whose jobs correspond to the nonzero components of the vectors  $a, b$  and  $c$  and the delays are sorted in the order  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ .*

*Proof.* Assume that the set of the vectors  $a, b$  and  $c$  gives the solution of the system (11.2.1). Consider the game with 3 processors  $i, j$  and  $l$ . Let each nonzero component of the vectors  $a, b$  and  $c$  specify the job volume of a regular player. Consider a profile  $L$  such that the jobs of volumes  $a_k > 0, b_k > 0$  and  $c_k > 0$  are assigned to processors  $i, j$  and  $l$ , respectively. So long as all inequalities (11.2.1) hold true, the profile  $L$  gives the desired Nash equilibrium.  $\square$

The following result is immediate.

**Theorem 11.1.** *Any Nash equilibrium  $L$  in the game involving the system  $S$  composed of 3 processors  $i, j$  and  $l$  and  $n$  players corresponds to a Nash equilibrium  $L'$  in the game involving the same system  $S$  and at most 9 players, where each processor receives no more than 3 jobs and the delays on all processors in  $L$  and  $L'$  do coincide.*

*Proof.* Consider a Nash equilibrium  $L$  in the game with the system  $S$  of 3 processors and  $n$  players. Number the processors so that  $\lambda_i(L) \geq \lambda_j(L) \geq \lambda_l(L)$ . According to Lemma 11.1, for any Nash equilibrium in the game involving the system  $S$  and any

number of players there exist a corresponding solution  $a, b, c$  of the system (11.2.1). By virtue of Lemma 11.2, this solution determines a Nash equilibrium  $L'$  in the game with the system  $S$  such that the nonzero components of the vectors  $a, b$  and  $c$  specify the job volumes on processors  $i, j$  and  $l$ , respectively. By definition, the element sum of the vector  $a$  represents the load of processor  $i$  in a profile  $L$ . Hence, delays on processor  $i$  coincide in both equilibria  $L$  and  $L'$ . Similarly, for processors  $j$  and  $l$  the delays in the equilibrium  $L$  coincide with the corresponding delays in the equilibrium  $L'$ .  $\square$

This theorem claims that it is sufficient to consider only games, where in an equilibrium each processor receives at most three jobs and the equilibrium solves the system (11.2.1). And the domain of the social cost coincides with the value domain of games with an arbitrary number of players.

### § 11.3 The Load Balancing Game

Consider the model of the load balancing game. That is the social cost is described by the maximum delay over all processors:

$$SC(L) = \max_{i=1, \dots, N} \lambda_i(L).$$

Designate by

$$OPT = OPT(S, U) = \min_{L \text{ is a profile in } \Gamma(S, U)} SC(L)$$

the optimal cost (the social cost in the optimal case), where minimization runs over all admissible strategy profiles in the game  $\Gamma(S, U)$ .

We define price of anarchy of the corresponding system as follows.

**Definition 11.2.** *The price of anarchy in the system  $S$  is the maximum ratio of the social cost in the worst-case Nash equilibrium and the social cost in the optimal case:*

$$PoA(S) = \max_U \frac{\max_{L \text{ is a Nash equilibrium in } \Gamma(S, U)} SC(L)}{OPT(S, U)}.$$

According to the following result, for PoA evaluation it suffices to consider only games, where the optimal social cost equals 1.

**Theorem 11.2.** *For the system  $S$ , the price of anarchy constitutes*

$$PoA(S) = \max_{U_1: OPT(S, U_1)=1} \max_{L \text{ is a Nash equilibrium in the game } \Gamma(S, U_1)} SC(L).$$

*Proof.* Assume that  $L$  is the worst-case equilibrium in the game  $\Gamma(S, U)$  with an arbitrary set of players  $U(n, w)$ . For each player  $j$ , the volume of its job equals  $w_j$ , and the vector  $L_{OPT}$  gives the optimal strategy profile in this game. Denote a load  $\delta'_i = \delta_i(L)$  for each processor  $i$  in the equilibrium  $L$  in this game. Let  $SC$  and  $OPT$  be the social cost in the profile  $L$  and the optimal social cost, respectively. The ratio of the worst-case and optimal social cost is defined by  $\frac{SC}{OPT}$ . So long as  $L$  represents an equilibrium, then for any player  $j$  we obtain that  $\sum_{k=1, \dots, N} \alpha_{l_j k} \delta'_k \leq \sum_{k=1, \dots, N} \alpha_{ik} \delta'_k + w_j(\alpha_{ii} - \alpha_{il_j})$  for any processor  $i$ .

Now, explore the game with the same set of processors and players, where each player  $j$  has the job of volume  $\frac{w_j}{OPT}$ . Then for any processor  $i$  its load is  $\frac{\delta'_i}{OPT}$ . The social costs in the profiles  $L$  and  $L_{OPT}$  constitute  $\frac{SC}{OPT}$  and 1, respectively. Now let's show that  $L$  and  $L_{OPT}$  form the worst-case equilibrium and optimal profiles, respectively, in the new game. Particularly, the profile  $L$  is an equilibrium in the new game, since for any player  $j$  the inequality  $\frac{\sum_{k=1, \dots, N} \alpha_{l_j k} \delta'_k}{OPT} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, N} \alpha_{ik} \delta'_k + w_j(\alpha_{ii} - \alpha_{il_j})}{OPT}$  holds true for any processor  $i$ . Imagine that  $L$  is any non-worst-case equilibrium in the new game. Then the game admits an equilibrium  $L'$  with social cost  $\frac{SC'}{OPT}$  such that the social cost in the profile  $L'$  exceeds that in the profile  $L$ , i.e.,  $\frac{SC'}{OPT} > \frac{SC}{OPT}$ . However, in the initial game the profile  $L'$  corresponds to the social cost  $SC' > SC$ , and the equilibrium  $L'$  is worse than its counterpart  $L$ . Similarly,  $L_{OPT}$  gives the optimal profile in the new game. Then the ratio of the worst-case equilibrium and optimal social cost in the new game also equals  $\frac{SC}{OPT}$ .

Consequently, any game  $\Gamma(S, U)$  corresponds to a game  $\Gamma(S, U_1)$  with normalized job volumes such that  $OPT(S, U_1) = 1$ . Moreover, the ratio of the worst-case and optimal social cost is same in both games. Hence, for PoA evaluation it suffices to consider only games with unit optimal social cost.  $\square$

### § 11.3.1 Evaluating the PoA in the 3-processor model

We suggest a computing method for the price of anarchy in the system of 3 processors. This method can be generalized to systems composed of more processors. But such generalization increases the number of linear programming problems to be solved and the number of associated variables and imposed constraints.

Imagine that the components of the vectors  $a$ ,  $b$  and  $c$  are chosen as follows. In the optimal profile yielding the minimum social cost, processors  $i$ ,  $j$  and  $l$  receive the total volumes of jobs  $a_1 + b_1 + c_1$ ,  $a_2 + b_2 + c_2$  and  $a_3 + b_3 + c_3$ , respectively, and the highest delay can be on any of them. Furthermore, by Theorem 11.2, the volumes of jobs are assumed to be normalized so that in the optimal profile the maximum delay among all processors equals 1. In our case, this means that

$$\begin{aligned}\alpha_{ii}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{ij}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{il}(a_3 + b_3 + c_3) &\leq 1, \\ \alpha_{ji}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{jj}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{jl}(a_3 + b_3 + c_3) &\leq 1, \\ \alpha_{li}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{lj}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{ll}(a_3 + b_3 + c_3) &\leq 1,\end{aligned}$$

and at least one of these inequalities holds as an equality.

Denote now the linear programming problem  $LPP(i, j, l)$  where  $i$ ,  $j$  and  $l$  are numbers assigned with processors.

**Lemma 11.3.** *A nonzero solution of the linear programming problem  $LPP(i, j, l)$ :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \Delta(a, b, c) \rightarrow \max \\ (r1) \quad \alpha_i \Delta(a, b, c) \leq \alpha_j \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k (\alpha_{jj} - \alpha_{ji}) \\ (r2) \quad \alpha_i \Delta(a, b, c) \leq \alpha_l \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k (\alpha_{ll} - \alpha_{li}) \\ (r3) \quad \alpha_j \Delta(a, b, c) \leq \alpha_l \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:b_k>0} b_k (\alpha_{ll} - \alpha_{lj}) \text{ or } \max_{k=1,2,3} b_k = 0 \\ (r4) \quad \alpha_i \Delta(a, b, c) \geq \alpha_j \Delta(a, b, c) \geq \alpha_l \Delta(a, b, c) \\ (r5) \quad a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3 \\ (r6) \quad \alpha_{ii}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{ij}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{il}(a_3 + b_3 + c_3) \leq 1, \\ (r7) \quad \alpha_{ji}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{jj}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{jl}(a_3 + b_3 + c_3) \leq 1, \\ (r8) \quad \alpha_{li}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{lj}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{ll}(a_3 + b_3 + c_3) \leq 1, \end{array} \right. \quad (11.3.1)$$

with respect to the components of the vectors  $a$ ,  $b$  and  $c$  provides the maximum social cost in a Nash equilibrium among all games, where in an equilibrium at most 3 jobs



are assigned to each processor,  $i, j$  and  $l$  indicate the numbers of the processors in the descending order of their delays and the optimal social cost makes up 1.

*Proof.* Due to Lemma 11.2, any solution of inequalities (r1) – (r5) in the problem  $LPP(i, j, l)$  defines an equilibrium in the game with 3 processors, where each processor receives at most 3 jobs and  $i, j$ , and  $l$  are the numbers of processors in the descending order of their delays.

The goal function in this game is bounded above only by the hyperplanes corresponding to inequalities (r6) – (r8). Actually, inequalities (r1) – (r5) admit arbitrarily large values of the goal function, since if  $(a, b, c)$  is their solution, then for any real number  $\beta > 0$ , a set  $(\beta a, \beta b, \beta c)$  is a solution too. Therefore, the maximum is reached on one of the boundaries answering to the last three inequalities. This guarantees that one of them is satisfied as an equality, *ergo* the optimal cost in the game corresponding to the solution of the problem  $LPP(i, j, l)$  equals 1.  $\square$

Consequently, exact PoA evaluation for the system  $S$  composed of 3 processors calls for solving a series of linear programming methods  $LPP(i, j, l)$  for all permutations of processors. And the maximum solution among them yields the value of  $PoA(S)$ . In other words, it is possible to establish the following fact.

**Theorem 11.3.** *For the system  $S$  composed of 3 processors, the price of anarchy constitutes*

$$PoA(S) = \max_{(i,j,l) \text{ are permutations of } (1,2,3)} \{ \alpha_i \Delta(a, b, c) \mid a, b, c \text{ is a solution of } LPP(i, j, l) \},$$

where  $LPP(i, j, l)$  is the linear programming problem (11.3.1).

*Proof.* According to Lemma 11.3, the solution of the problem (11.3.1) gives the maximum social cost in a Nash equilibrium, where  $i, j$  and  $l$  are the numbers of the processors in the descending order of their delays, among all games such that in an equilibrium each processor receives at most 3 jobs and the optimal cost equals 1. The maximum solution among the problems for all admissible permutations of processors  $(1, 2, 3)$  provides the maximum social cost in a Nash equilibrium among all games, where in an equilibrium at most 3 jobs are assigned to each processor and the optimal cost equal 1.

By Theorem 11.1, for any equilibrium in the game involving the system  $S$  of 3 processors and an arbitrary number of players, it is possible to construct a corresponding equilibrium in the game with the same processors and a set of at most 9 players, where each processor receives no more than 3 jobs and the social cost coincides for both equilibria. Thus, for PoA evaluation it suffices to consider only games, where in an equilibrium each processor has at most 3 jobs.

Using Theorem 11.2, we finally obtain that for PoA evaluation it suffices to consider only games, where the social cost in the optimal profile equal 1.  $\square$

### § 11.3.2 The PoA for the game with linear externalities

Consider the game with linear externalities, introduced in the chapter 8 as a special case of our model. In such game the delay of processor  $i$  takes the form

$$\lambda_i(L) = \sum_{j \in M: l_j=i} \frac{w_j}{v_i} + \sum_{k \neq i} e_{ik} \sum_{j \in M: l_j=k} w_j = \frac{\delta_i(L)}{v_i} + \sum_{k \neq i} e_{ik} \delta_k(L).$$

Here  $v_i$  is the speed of the processor  $i$ , and each externality coefficient  $e_{ik}$  reflects the impact of the load of the processor  $k$  into the delay of the processor  $i$ .

Also we assume the following:

1. For each processor pairs  $i \neq k$  the inequality  $e_{ik} < \frac{1}{v_i}$  holds.
2. For each processor pairs  $i \neq k$  it holds that  $e_{ki} < \frac{1}{v_i}$ .
3. For each processor pair  $i \neq k$ , such that  $v_i \geq v_k$ , we have the inequality

$$\sum_{l \neq i} e_{il} \leq \sum_{l \neq k} e_{kl}.$$

It is established (Theorem 8.1) that there is at least one a pure Nash equilibrium in the game with linear externalities for the system of two processors. Moreover an expression for an exact value of the PoA for the system of two processors with speeds  $1 \leq s$  is found ([44]). It equals to

$$Est(S) = \min\left\{Est^{max}(S), \frac{\eta}{s\zeta}\right\}, \quad (11.3.2)$$

where

$$Est^{max}(S) = \max\left\{\frac{\eta(\zeta+1-se_{21})}{\zeta(\eta+1-se_{21})}, \frac{s(1-e_{12})}{\eta-s+s^2e_{21}}, \frac{s-se_{21}+e_{12}(1-se_{12})}{\zeta}\right\},$$

and  $\eta = 1 + s - s(e_{12} + e_{21})$ ,  $\zeta = 1 - se_{12}e_{21}$ .

But first the values of the PoA for this model were found numerically to provide a visual estimation of the possibility to obtain an analytical expression and confirm its correctness. We will show that the values of the PoA given by an exact expression (11.3.2) coincide with values given by the computational method. It confirms its correctness.

As the considered model is a special case of the generalized model with linear delays, similarly we obtain the linear programming problem  $LPP(i, j)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1+a_2}{v_i} + e_{ij}(b_1 + b_2) \rightarrow \max \\ \frac{a_1+a_2}{v_i} + e_{ij}(b_1 + b_2) \leq \frac{b_1+b_2}{v_j} + e_{ji}(a_1 + a_2) + \min_{k=1,2:a_k>0} a_k \left( \frac{1}{v_j} - e_{ji} \right) \\ \frac{a_1+a_2}{v_i} + e_{ij}(b_1 + b_2) \geq \frac{b_1+b_2}{v_j} + e_{ji}(a_1 + a_2) \\ a_k, b_k \geq 0, k = 1, 2 \\ \frac{a_1+b_1}{v_i} + e_{ij}(a_2 + b_2) \leq 1 \\ \frac{a_2+b_2}{v_j} + e_{ji}(a_1 + b_1) \leq 1. \end{array} \right. \quad (11.3.3)$$

The following theorem is a special case of the Theorem 11.3 reduced to two processors.

**Theorem 11.4.** *For the system  $S$  composed of 2 processors, the price of anarchy constitutes*

$$PoA(S) = \max_{(i,j) \text{ are permutations of } (1,2)} \left\{ \frac{a_1+a_2}{v_i} + e_{ij}(b_1 + b_2) \mid a, b \text{ is a solution of } LPP(i, j) \right\},$$

where  $LPP(i, j)$  is the linear programming problem (11.3.3).

### § 11.3.3 Numerical examples

To estimate the price of anarchy in the two-processor model with linear externalities, we have developed a program providing a visual demo of the PoA value constructed by solving a series of linear programming problems. The parameters of the system  $S$  act as the options in the program; by assumption, the speed of processor 1 equals 1, whereas a certain range is for the speed  $s$  of a processor 2. In this case, users can study the PoA dynamics under variations in the speed of one processor.

The Figures 11.1 and 11.2 present examples of evaluated PoA values in the model with two processors for different values of  $s$ . The Fig. 11.1 shows the PoA for the externality values  $e_{12} = 0.11$  and  $e_{21} = 0.1$ . The Fig. 11.2 presents the case when externalities are  $e_{12} = 0.3$  and  $e_{21} = 0.1$ .

All numerically evaluated PoA values coincide with corresponding values given by the analytical expression (11.3.2). In addition, the program randomly generates various sets of jobs  $U$ , finds for each resulting game  $\Gamma(S, U)$  the ratio of the social costs in the worst case Nash equilibrium to the optimal costs and displays the corresponding points on the figure. All these points are located below the obtained PoA values, that confirms the correctness of calculated PoA values.

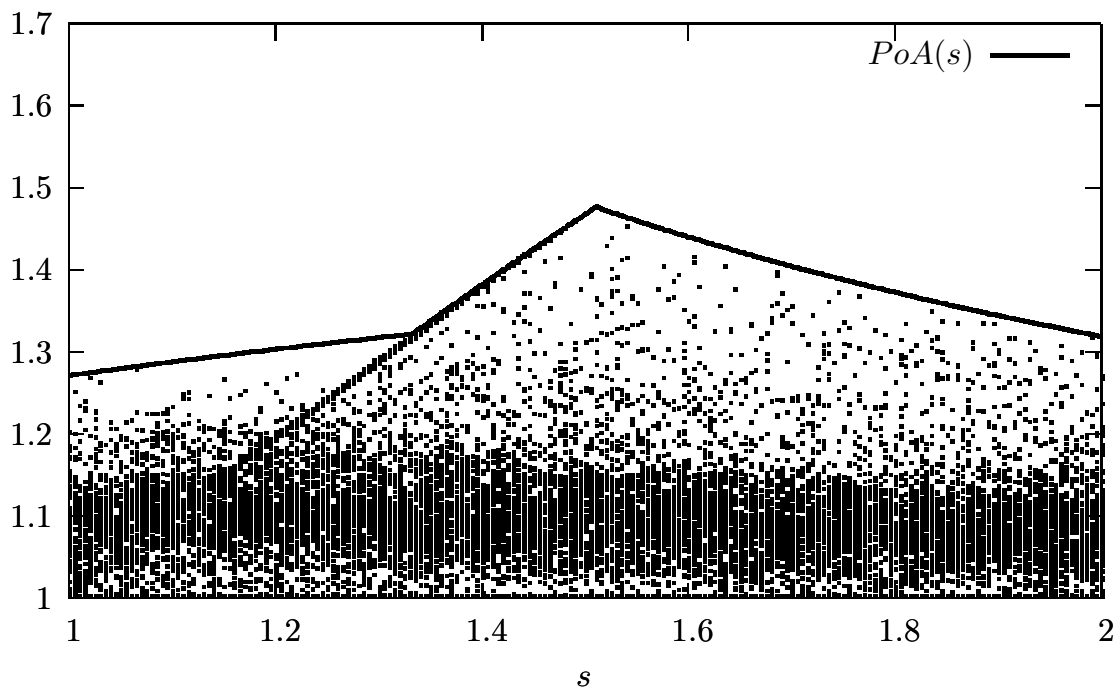


Figure 11.1: The PoA for the system  $S$  with  $e_{12} = 0.11$ ,  $e_{21} = 0.1$ .

## § 11.4 Cover Game

Consider the model of the cover game. That is the social payoff is described by the minimum delay over all processors:

$$SC(L) = \min_{i=1, \dots, N} \lambda_i(L).$$

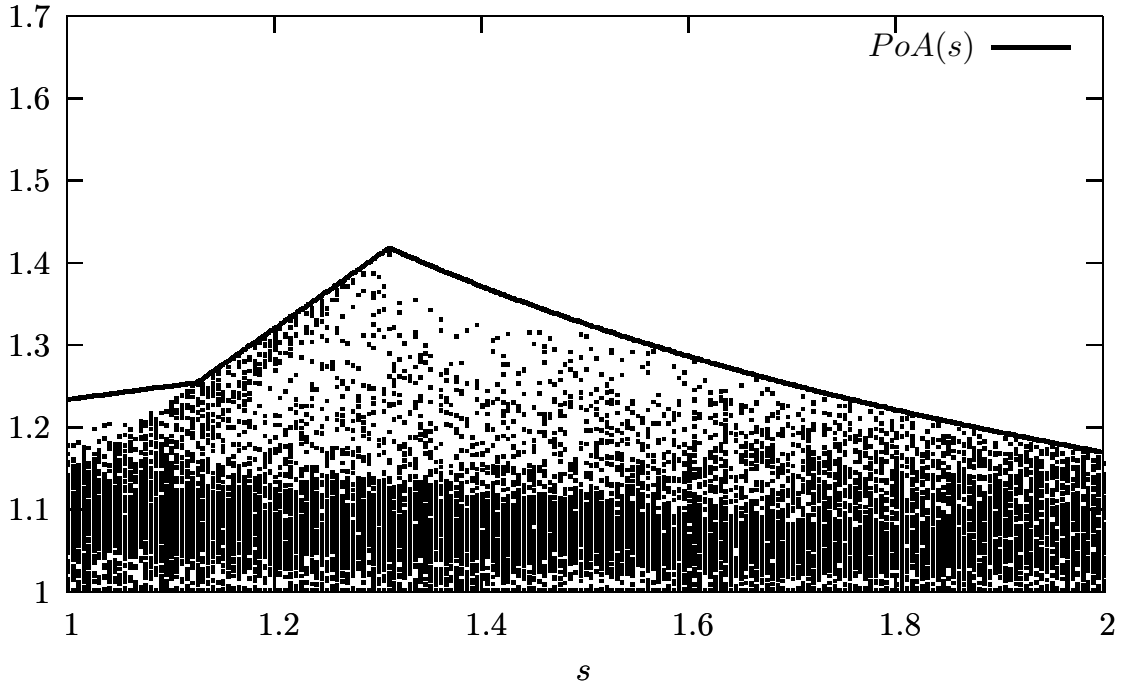


Figure 11.2: The PoA for the system  $S$  with  $e_{12} = 0.3$ ,  $e_{21} = 0.1$ .

Designate by

$$OPT = OPT(S, U) = \max_{L \text{ is a profile in } \Gamma(S, U)} SC(L)$$

the optimal payoff (the social cost in the optimal case), where maximization runs over all admissible strategy profiles in the game  $\Gamma(S, U)$ .

We define price of anarchy of the corresponding system as follows.

**Definition 11.3.** *The price of anarchy in the system  $S$  is the maximum ratio of the social payoff in the optimal case and the social payoff in the in the worst-case Nash equilibrium:*

$$PoA(S) = \max_U \frac{OPT(S, U)}{\min_{L \text{ is a Nash equilibrium in } \Gamma(S, U)} SC(L)}.$$

According to the following result, for PoA evaluation it suffices to consider only games, where the optimal social cost equals 1.

**Theorem 11.5.** *For the system  $S$ , the price of anarchy constitutes*

$$PoA(S) = \max_{U_1: OPT(S, U_1)=1} \frac{1}{\min_{L \text{ is a Nash equilibrium in the game } \Gamma(S, U_1)} SC(L)}.$$

*Proof.* Assume that  $L$  is the worst-case equilibrium in the game  $\Gamma(S, U)$  with an arbitrary set of players  $U(n, w)$ . For each player  $j$ , the volume of its job equals  $w_j$ , and the vector  $L_{OPT}$  denotes the optimal strategy profile in this game. Denote a load  $\delta'_i = \delta_i(L)$  for each processor  $i$  in the equilibrium  $L$  in this game. Let  $SC$  and  $OPT$  be the social payoff in the profile  $L$  and the optimal social payoff, respectively. The ratio of the optimal and worst-case social payoff is defined by  $\frac{OPT}{SC}$ . So long as  $L$  represents an equilibrium, then for any player  $j$  we obtain that

$$\sum_{k=1, \dots, N} \alpha_{l_j k} \delta'_k \leq \sum_{k=1, \dots, N} \alpha_{ik} \delta'_k + w_j (\alpha_{ii} - \alpha_{il_j}) \text{ for any processor } i.$$

Now, explore the game with the same set of processors and players, where each player  $j$  has the job of volume  $\frac{w_j}{OPT}$ . Then for any processor  $i$  its load is  $\frac{\delta'_i}{OPT}$ . The social payoffs in the profiles  $L$  and  $L_{OPT}$  constitute  $\frac{SC}{OPT}$  and 1, respectively. Now let's show that  $L$  and  $L_{OPT}$  form the worst-case and optimal profiles, respectively, in the new game. Particularly, the profile  $L$  is an equilibrium in the new game, since for any player  $j$  the inequality  $\frac{\sum_{k=1, \dots, N} \alpha_{l_j k} \delta'_k}{OPT} \leq \frac{\sum_{k=1, \dots, N} \alpha_{ik} \delta'_k + w_j (\alpha_{ii} - \alpha_{il_j})}{OPT}$  holds true for any processor  $i$ . Imagine that  $L$  is any non-worst-case equilibrium in the new game. Then the game admits an equilibrium  $L'$  with social payoff  $\frac{SC'}{OPT}$  such that the social payoff in the profile  $L'$  is less than that in the profile  $L$ , i.e.,  $\frac{SC'}{OPT} < \frac{SC}{OPT}$ . However, in the initial game the profile  $L'$  corresponds to the social payoff  $SC' < SC$ , and the equilibrium  $L'$  is worse than its counterpart  $L$ . Similarly,  $L_{OPT}$  gives the optimal profile in the new game. Then the ratio of the optimal and worst-case social payoff in the new game also equals  $\frac{OPT}{SC}$ .

Consequently, any game  $\Gamma(S, U)$  corresponds to a game  $\Gamma(S, U_1)$  with normalized job volumes such that  $OPT(S, U_1) = 1$ . Moreover, the ratio of the optimal and worst-case social payoff is same in both games. Hence, for PoA evaluation it suffices to consider only games with unit optimal social payoff.  $\square$

### § 11.4.1 Evaluating the PoA in the 3-processor model

We suggest a computing method for the price of anarchy in the system of 3 processors. This method can be generalized to systems composed of more processors. But such generalization increases the number of linear programming problems to be solved and the number of associated variables and imposed constraints.

Imagine that the components of the vectors  $a, b$  and  $c$  are chosen as follows. In the optimal profile yielding the maximum social payoff, processors  $i, j$  and  $l$  receive the total volumes of jobs  $a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2$  and  $a_3 + b_3 + c_3$ , respectively, and the lowest delay can be on any of them. Furthermore, by Theorem 11.5, the volumes of jobs are assumed to be normalized so that in the optimal profile the minimum delay among all processors equals 1. In our case, this means that

$$\begin{aligned}\alpha_{ii}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{ij}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{il}(a_3 + b_3 + c_3) &\geq 1, \\ \alpha_{ji}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{jj}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{jl}(a_3 + b_3 + c_3) &\geq 1, \\ \alpha_{li}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{lj}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{ll}(a_3 + b_3 + c_3) &\geq 1,\end{aligned}$$

and at least one of these inequalities holds as an equality.

Denote now the linear programming problem  $LPP(i, j, l)$  where  $i, j$  and  $l$  are numbers assigned with processors.

**Lemma 11.4.** *A nonzero solution of the linear programming problem  $LPP(i, j, l)$ :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_l \Delta(a, b, c) \rightarrow \min \\ (r1) \quad \alpha_i \Delta(a, b, c) \leq \alpha_j \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k (\alpha_{jj} - \alpha_{ji}) \\ (r2) \quad \alpha_i \Delta(a, b, c) \leq \alpha_l \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:a_k>0} a_k (\alpha_{ll} - \alpha_{li}) \\ (r3) \quad \alpha_j \Delta(a, b, c) \leq \alpha_l \Delta(a, b, c) + \min_{k=1,2,3:b_k>0} b_k (\alpha_{ll} - \alpha_{lj}) \text{ or } \max_{k=1,2,3} b_k = 0 \\ (r4) \quad \alpha_i \Delta(a, b, c) \geq \alpha_j \Delta(a, b, c) \geq \alpha_l \Delta(a, b, c) \\ (r5) \quad a_k, b_k, c_k \geq 0, k = 1, 2, 3 \\ (r6) \quad \alpha_{ii}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{ij}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{il}(a_3 + b_3 + c_3) \geq 1, \\ (r7) \quad \alpha_{ji}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{jj}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{jl}(a_3 + b_3 + c_3) \geq 1, \\ (r8) \quad \alpha_{li}(a_1 + b_1 + c_1) + \alpha_{lj}(a_2 + b_2 + c_2) + \alpha_{ll}(a_3 + b_3 + c_3) \geq 1, \end{array} \right. \quad (11.4.1)$$

with respect to the components of the vectors  $a, b$  and  $c$  provides the minimum social payoff in a Nash equilibrium among all games, where in an equilibrium at most 3 jobs are assigned to each processor,  $i, j$  and  $l$  indicate the numbers of the processors in the descending order of their delays and the optimal social payoff makes up 1.

*Proof.* Due to Lemma 11.2, any solution of inequalities (r1) – (r5) in the problem  $LPP(i, j, l)$  defines an equilibrium in the game with 3 processors, where each pro-

cessor receives at most 3 jobs and  $i, j$ , and  $l$  are the numbers of processors in the descending order of their delays.

The goal function in this game is bounded below only by the hyperplanes corresponding to inequalities (r6) – (r8). Actually, inequalities (r1) – (r5) admit arbitrarily small non-negative values of the goal function, including zero. Therefore, the minimum is reached on one of the boundaries answering to the last three inequalities. This guarantees that one of them is satisfied as an equality, *ergo* the optimal payoff in the game corresponding to the solution of the problem  $LPP(i, j, l)$  equals 1.  $\square$

Consequently, exact PoA evaluation for the system  $S$  composed of 3 processors calls for solving a series of linear programming methods  $LPP(i, j, l)$  for all permutations of processors. And the minimal solution among them yields the value of  $\frac{1}{PoA(S)}$ . In other words, it is possible to establish the following fact.

**Theorem 11.6.** *For the system  $S$  composed of 3 processors, the inverse value of the price of anarchy  $PoA(S)$  is*

$$\frac{1}{PoA(S)} = \min_{(i,j,l) \text{ are permutations of } (1,2,3)} \{ \alpha_l \Delta(a, b, c) \mid a, b, c \text{ is a solution of } LPP(i, j, l) \},$$

where  $LPP(i, j, l)$  is the linear programming problem (11.4.1).

*Proof.* According to Lemma 11.4, the solution of the problem (11.4.1) gives the minimal social payoff in a Nash equilibrium, where  $i, j$  and  $l$  are the numbers of the processors in the descending order of their delays, among all games such that in an equilibrium each processor receives at most 3 jobs and the optimal payoff equals 1. The minimal solution among the problems for all admissible permutations of processors (1, 2, 3) provides the minimal social payoff in a Nash equilibrium among all games, where in an equilibrium at most 3 jobs are assigned to each processor and the optimal payoff equals to 1.

By Theorem 11.1, for any equilibrium in the game involving the system  $S$  of 3 processors and an arbitrary number of players, it is possible to construct a corresponding equilibrium in the game with the same processors and a set of at most



9 players, where each processor receives no more than 3 jobs and the social cost coincides for both equilibria. Thus, for PoA evaluation it suffices to consider only games, where in an equilibrium each processor has at most 3 jobs.

Using Theorem 11.5, we finally obtain that for PoA evaluation it suffices to consider only games, where the social payoff in the optimal profile equal 1.  $\square$

## § 11.5 Results

In this chapter we have proposed a computing algorithm of the exact PoA value. The algorithm can be generalized to systems with more than three processors, but this increases the number of linear programming problems to-be-solved and the number of associated variables and imposed constraints. Finally, we have implemented the algorithm as a program and conducted numerical experiments for visual estimates of the PoA in the game with two processors and linear externalities, always possessing a pure Nash equilibrium. The results of these experiments have confirmed the correctness of the derived algorithm.

## Chapter 12

# Splittable Traffic Optimal Routing

### § 12.1 Wardrop model with parallel channels

The routing model [55, 57] studied in this part bases on the Wardrop model [86, 136, 185] with splittable traffic. This model is used to find an optimal traffic allocation in telecommunication or transport networks. Minimization of the end-to-end traffic delay for each user is the criterion of optimality.

The optimal traffic routing problem is treated as a game  $\Gamma = \langle n, m, w, Z, f \rangle$ , where  $n$  users send their traffic through parallel network channels. The network has the topology described by a graph  $G = ((s, t), E)$ , where  $E = \{1, \dots, m\}$  is a set of channels connecting a source  $s$  and a destination  $t$ . Any route from  $s$  to  $t$  consists of only one link  $e \in E$  with a capacity  $c_e$ . Each user  $i$  needs to split his traffic amount  $w_i$  among the links.

We can interpret the model in the context multiuser multipath network routing game. Each user of the network is multihomed, which gives him the ability to deliver his traffic along multiple paths simultaneously. The global TCP congestion window grows and shrinks according to the TCP New Reno AIMD (additive increase multiplicative decrease) policy. The change in the window size, which occurs when a new acknowledgement message is received by the source  $s$  from the receiver  $t$ , represents a step in the decision-making process. On each step a user makes identical decisions how to distribute the given amount  $w_i$  of his TCP traffic flow among the available paths.

In the context of transport routing, a parallel network is a set of parallel paths

between two points, such as city districts. Users are total traffic flows that differ by type, for example, cars, trucks, buses, trolleybuses. Under conditions of peak load on routes, the problem of optimal distribution of such flows over available routes becomes relevant.

It can be forbidden to use some links for some users. At the same time we suppose that for each link there is a user who has an access to it. Then for the user  $i$  his route set is a subset of the link set:  $Z_i \subseteq E$ , such that  $\cup_{i=1}^n Z_i = E$ .

All users pursue individual interests and choose routes for their traffic to minimize the maximal delay during traffic transmission from  $s$  to  $t$ . Each user adopts a specific strategy  $x_i = \{x_{ie} \geq 0\}_{e \in Z_i}$ . The value  $x_{ie}$  determines the volume of the traffic sent by user  $i$  on route  $e$ , and  $\sum_{e \in Z_i} x_{ie} = w_i$ . Then  $x = (x_1, \dots, x_n)$  is a strategy profile of all users. For a strategy profile  $x$ , again denote by  $(x_{-i}, x'_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  a new strategy profile in which user  $i$  modified his strategy from  $x_i$  to  $x'_i$  whereas the other users keep their strategies invariable.

Define the load of each channel  $e \in E$  (i.e., the total traffic sent through this channel) by

$$\delta_e(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{e \in Z_i} x_{ie}.$$

The traffic delay on a given route depends on the loads of the channels included in this route. For each user  $i$  and each route  $e$  chosen by him, we specify a continuous traffic delay function  $f_{ie}(x) = f_{ie}(\delta_e(x))$  as a nondecreasing function in the loads of the channels on a route (*ergo*, in the variable  $x_{ie}$ ).

Each user  $i$  seeks to minimize the maximal traffic delay over all channels on his route:

$$PC_i(x) = \max_{e \in Z_i: x_{ie} > 0} f_{ie}(x).$$

This function describes the individual cost of user  $i$  [86].

**Definition 12.1.** *A strategy profile  $x$  is called a Wardrop equilibrium if, for each  $i$  and any  $e, l \in Z_i$ , the condition  $x_{ie} > 0$  implies  $f_{ie}(x) \leq f_{il}(x)$ .*

This definition can be reformulated in a following form.

**Definition 12.2.** A strategy profile  $x$  is a Wardrop equilibrium if the following condition holds for each  $i$ : the inequality  $x_{ie} > 0$  implies  $f_{ie}(x) = \min_{l \in Z_i} f_{il}(x) = \lambda_i$  and the equality  $x_{ie} = 0$  implies  $f_{ie}(x) \geq \lambda_i$ .

Such a definition yields an explicit system of equations and inequalities to calculate the Wardrop equilibria.

**Definition 12.3.** Let  $x$  be a strategy profile. The social cost is the total delay of all players in this strategy profile, that is,

$$SC(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{e \in Z_i} x_{ie} f_{ie}(x).$$

Note that if  $x$  forms a Wardrop equilibrium, then by definition the delays on all routes  $e$  used by a player  $i$  are equal to  $\lambda_i(x)$ . Therefore, the social cost in the equilibrium can be written as

$$SC(x) = \sum_{i=1}^n w_i \lambda_i(x).$$

Denote by  $OPT = \min_x SC(x)$  the minimal social cost.

The price of anarchy [53, 54, 160] is a measure that compares the worst case performance Wardrop equilibrium to that of the optimal allocation.

**Definition 12.4.** The price of anarchy is the maximal value of the ratio  $SC(x)/OPT$ , where the social cost is calculated in the Wardrop equilibria only.

Further we investigate properties of Wardrop equilibria and the price of anarchy for models with delay functions in certain form.

## § 12.2 A game with delay functions $\frac{\delta}{c-\delta}$ .

Consider the game  $\Gamma = \langle n, m, w, Z, f \rangle$  with parallel channels.

Suppose that the traffic delay on a link  $e$  is the same for each user and equals to  $f_e(x) = \frac{\delta_e(x)}{c_e - \delta_e(x)}$ , where  $\delta_e(x) = \sum_{i:e \in Z_i} x_{ie}$ . Then social costs are

$$SC(x) = \sum_{e=1}^m \frac{\delta_e^2(x)}{c_e - \delta_e(x)}.$$

A strategy profile  $x$  is a Wardrop equilibrium if for each user  $i$  and each link  $e \in Z_i$ , such that  $x_{ie} > 0$ , holds

$$f_{ie}(x) = \frac{\delta_e(x)}{c_e - \delta_e(x)} = \lambda_i.$$

A strategy profile  $x$  is a social optimum if it provides a minimum of social costs by all the profiles. According with Kuhn-Takker theorem,  $x$  is an optimal profile if for each user  $i$  and each link  $e \in Z_i$ , such that  $x_{ie} > 0$ , holds

$$\frac{\partial}{\partial x_{ie}} \left( SC(x) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \sum_{e \in Z_i} x_{ie} - w_i \right) \right) = 0$$

or  $\frac{2\delta_e(x)c_e - \delta_e^2(x)}{(c_e - \delta_e(x))^2} = \alpha_i.$

The social costs function is convex, so the optimum exists.

Let's show that if the strategy profile  $x$  is a Wardrop equilibrium then it is socially optimal. Suppose that for some  $i$  and  $e$   $x_{ie} > 0$ . Then  $\delta_e(x) = \lambda_i c_e / (\lambda_i + 1)$  and

$$\frac{2\delta_e(x)c_e - \delta_e^2(x)}{(c_e - \delta_e(x))^2} = \lambda_i(\lambda_i + 2) = \alpha_i.$$

That is any Wardrop equilibrium provides an optimum to social costs function. Thus, the price of anarchy is exactly 1 for this model.

Now we find an explicit form of the Wardrop equilibrium in the current model.

Consider the network where each user is allowed to access to any link, here we can find an equilibrium explicitly. A total network capacity is  $C = \sum_{e=1}^m c_e$ . Each user  $i$  has to distribute his traffic  $w_i$  on links  $e \in \{1, \dots, m\}$ . A total traffic is  $W = \sum_{i=1}^n w_i$ . Suppose that  $C > W$ , i.e. the network allows to send all the traffic for the limited time.

The traffic delay on the link  $e$  is the same for each user and equals to  $f_e(x) = \frac{\delta_e(x)}{c_e - \delta_e(x)}$ , where  $\delta_e(x) = \sum_{i=1}^n x_{ie}$ . Then social costs are

$$SC(x) = \sum_{e=1}^m \frac{\delta_e^2(x)}{c_e - \delta_e(x)}.$$

In the Wardrop equilibrium for each user  $i$  and each link  $e$  holds:

$$\text{if } x_{ie} > 0 \text{ then } \frac{\sum_{k=1}^n x_{ke}}{c_e - \sum_{k=1}^n x_{ke}} = \lambda_i > 0.$$

But the traffic delay on the link  $e$  is the same for users which use it, so, for each  $i$ , such that  $x_{ie} > 0$ ,  $\lambda_i = \lambda$ . Delays on unused links are equal to zero, that's why in a Wardrop equilibrium each link must be used at least by one user. Moreover, if for some user  $i$  on the link  $e$  his traffic is  $x_{ie} = 0$ , then traffic delay on this link, which he doesn't use, must be not less than on links which he uses, i.e.  $\frac{\sum_{k=1}^n x_{ke}}{c_e - \sum_{k=1}^n x_{ke}} \geq \lambda > 0$ . It means that there is at least one user  $k$ , such that  $x_{ke} > 0$ , hence the traffic delay on this link exactly equals to  $\lambda$ . So, we have: in Wardrop equilibrium traffic delays on each link equal to  $\lambda$  and for all  $e \in \{1, \dots, m\}$  holds  $\sum_{k=1}^n x_{ke} = \lambda(c_e - \sum_{k=1}^n x_{ke})$ . Summing these expressions by  $e$  we get  $\lambda = W/(C - W)$ . Then a Wardrop equilibrium is any situation where loads are distributed by links as follows:  $\sum_{k=1}^n x_{ke} = Wc_e/C$  for each  $e \in \{1, \dots, m\}$ , and social costs are  $W^2/(C - W)$ . An example of such Wardrop equilibrium is  $x = \{\{x_{ie} = w_k c_e / C\}_{e=1}^m\}_{i=1}^n$ .

### § 12.3 A game with delay functions $1 - e^{-\alpha\delta}$

The problem is modeled as the game  $\Gamma = \langle n, m, w, f \rangle$ , where  $n$  users send their TCP traffic through  $m$  parallel routes from the source  $s$  to destination  $t$ . Here all paths are allowed for users.

The amount of time needed to traverse a single path of a network is typically load-dependent, that is, the traffic delay in a path increases as it becomes more congested. Basing on a set of experimental observations we choose a traffic delay function [56]  $f_{ie}(\delta) = 1 - e^{-\alpha_{ie}\delta}$  to approximate the dependency between the end-to-end delay of the TCP traffic controlled by New Reno loss-recovery [81] in combination with drop-tail queue management, and the total path load  $\delta$ . TCP regulates the load by relying on the packet loss and reduces the rate in response to that. When path load is large, the packet loss on the path is large too, so it prevents an infinite grow of the delay. In this model we care of packet fast receiving only, and not about the possible loss of some amount of packets.

Here social costs are  $SC(x) = W - \sum_{i=1}^n \sum_{e=1}^m x_{ie} e^{-\alpha_{ie}\delta_e(x)}$ , where  $W = \sum_{i=1}^n w_i$  – is a total traffic in the network.

Now we suppose that traffic delay on a path  $e$  is the same for each user and

equals  $f_e(x) = 1 - e^{-\alpha_e \delta_e(x)}$ , resulting in

$$SC(x) = W - \sum_{e=1}^m \delta_e(x) e^{-\alpha_e \delta_e(x)}.$$

Let a profile  $x$  be a user's profile in a Wardrop equilibrium. By the definition if  $x_{ie} > 0$  then  $f_e(x) = \min_l f_l(x) = \lambda_i$  and if  $x_{ie} = 0$  then  $f_e(x) \geq \lambda_i$ . Since traffic delay on the path  $e$  is equal for all users, for each  $i$ , such that  $x_{ie} > 0$ ,  $\lambda_i = \lambda$ . Delays on the unused routes are equal to zero, that is why in the Wardrop equilibrium each path must be used by at least one user. Moreover, if for some user  $i$  on the path  $e$  his traffic load is  $x_{ie} = 0$ , then traffic delay on this path must not be less than delays on the paths which he uses, i.e.  $1 - e^{-\alpha_e \delta_e(x)} \geq \lambda > 0$ . It means that there is at least one user  $k$ , such that  $x_{ke} > 0$ , hence the traffic delay on this path is exactly equal to  $\lambda$ . So, we have: in the Wardrop equilibrium traffic delays on each route equal to  $\lambda$  and for all  $e \in \{1, \dots, m\}$  holds  $\delta_e(x) = -\frac{\ln(1-\lambda)}{\alpha_e}$ .

Summing these expressions by  $e$  we get

$$W = -\ln(1 - \lambda) \sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e} \quad \text{and} \quad \lambda = 1 - e^{-\frac{W}{\sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}}}.$$

Substituting  $\lambda$  into the expression for  $\delta_e(x)$  we obtain that in a Wardrop equilibrium loads are distributed by routes as follows:

$$\sum_{i=1}^n x_{ie} = \delta_e(x) = \frac{W}{\alpha_e \sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}} \quad \text{for each } e \in \{1, \dots, m\},$$

The equilibrium social costs are

$$SC(x) = W \left( 1 - e^{-\frac{W}{\sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}}} \right).$$

The value is the same for any Wardrop equilibrium providing the price of anarchy cannot be infinite.

Next we find a socially optimal situation. A strategy profile  $x$  is a social optimum if it provides a minimum of social costs by all the profiles. Social costs function is not convex, so, we can not say that its local minimum is also global. But we can try to obtain some stationary points and check their optimality.

According to the Karush-Kuhn-Tucker theorem,  $x$  is a stationary point if for each user  $i$  and each link  $e$ , such that  $x_{ie} > 0$ , holds

$$\frac{\partial}{\partial x_{ie}} \left( SC(x) - \sum_{i=1}^n \gamma_i \left( \sum_{e=1}^m x_{ie} - w_i \right) \right) = 0$$

or  $e^{-\alpha_e \delta_e(x)} (\alpha_e \delta_e(x) - 1) = \gamma_i$ .

In equilibrium  $1 - e^{-\alpha_e \delta_e(x)} = \lambda_i$  for all  $e$ , or  $\alpha_e \delta_e(x) = -\ln(1 - \lambda_i) = \text{const}$  by  $e$ , which satisfies the requirement to be a stationary point, but the question of its social optimality needs to be investigated more.

However, since  $e^a \geq 1 + a$  for  $a > 0$ , we can give a lower estimation  $LSC(x)$  for our social costs function:

$$SC(x) \geq LSC(x) = W - \sum_{e=1}^m \frac{\delta_e(x)}{1 + \alpha_e \delta_e(x)}.$$

The function  $LSC(x)$  is convex, so it has unique minimum, that is a global minimum. The stationary point for  $SC(x)$  is also a stationary point for its lower estimation  $LSC(x)$ . Thus, minimum for  $LSC(x)$  and a lower estimation for  $SC(x)$  is Wardrop equilibrium profile  $x^{WE}$ , such that  $\delta_e(x^{WE}) = \frac{W}{\alpha_e \sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}}$ :

$$\begin{aligned} SC(x) \geq LSC(x^{WE}) &= W - \sum_{l=1}^m \left( \frac{1}{\alpha_l} \frac{W}{\left( \sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e} \right) \left( 1 + \alpha_l \frac{W}{\alpha_l \sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}} \right)} \right) = \\ &= W - \sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e} \frac{W}{\left( \sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e} \right) \left( 1 + \frac{W}{\sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}} \right)} = \\ &= W - \frac{W}{1 + \frac{W}{\sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}}} = W \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{W}{\sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}}} \right). \end{aligned}$$

The following example demonstrates that Wardrop equilibrium stationary point can be the worst and the best case for different networks depending on their properties.



**Example 23.** Consider a network with two paths. Total users' traffic is 1, path characteristics are  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$ . Loads of links are  $\delta(x)$  and  $1-\delta(x)$ . Let first  $\alpha_1 = 10$  and  $\alpha_2 = 20$ . In this case Wardrop equilibrium gives a maximum value of  $SC(x)$  (and a minimal value of  $LSC(x)$ ) as shown in Fig. 12.1. Here Wardrop equilibrium is the worst profile. Now let  $\alpha_1 = 1$  and  $\alpha_2 = 2$ . In this case Wardrop equilib-

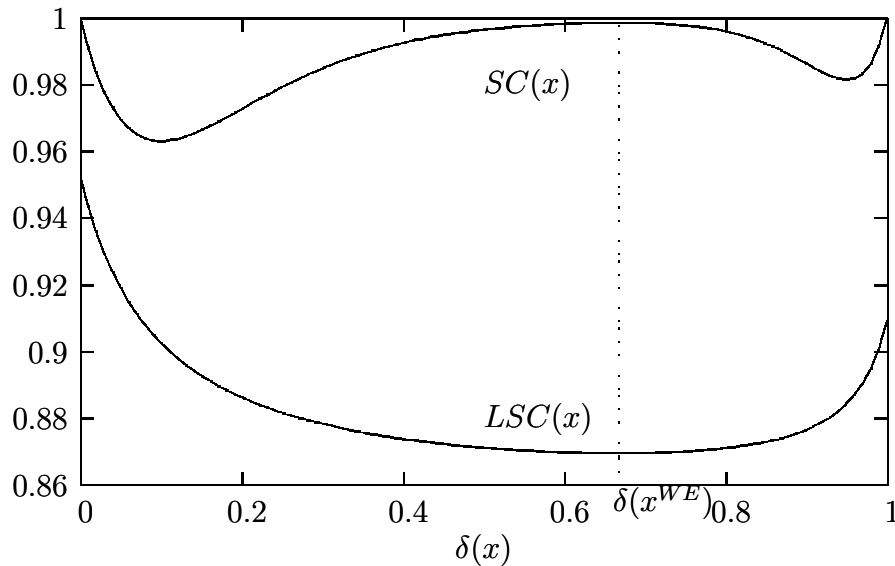


Figure 12.1: WE is a maximum of  $SC(x)$

rium gives a minimum value of  $SC(x)$  and also a minimal value of  $LSC(x)$  (see Fig. 12.2). This Wardrop equilibrium is an optimal case.

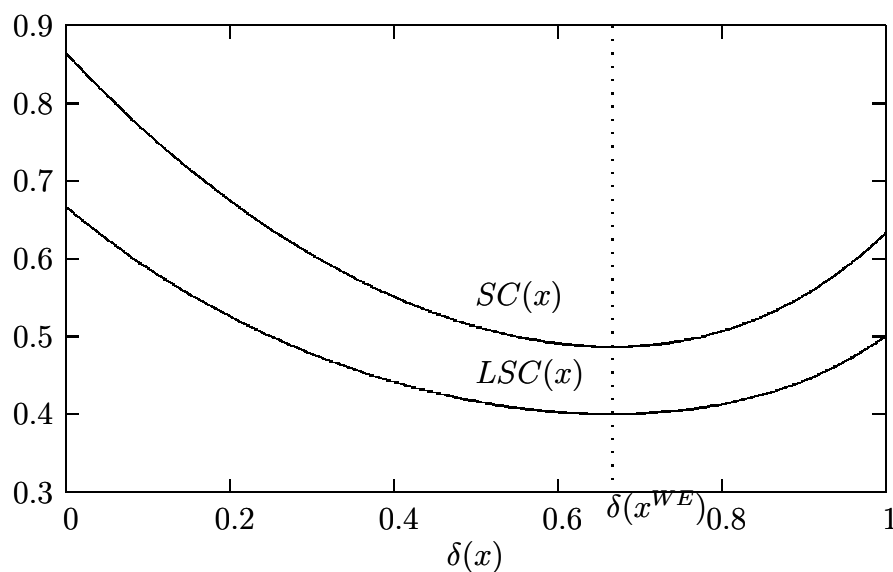


Figure 12.2: WE is an optimum of  $SC(x)$

Now we can estimate the price of anarchy for the game with parallel paths, that is a ratio of equilibrium social costs and the optimal social costs. Obviously its lower estimation is 1, since Wardrop equilibrium can be optimal profile. Also we can give an upper estimation for price of anarchy:

$$PoA(\Gamma) = \frac{SC(x^{WE})}{SC_{opt}} \leq \left(1 - e^{-\frac{W}{\sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}}}\right) / \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{W}{\sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}}}\right).$$

Denote  $\frac{W}{\sum_{e=1}^m \frac{1}{\alpha_e}}$  as  $C \geq 0$ . So,  $PoA \leq (1 - e^{-C})(1 + \frac{1}{C})$ . This function has one maximum on interval  $[0; +\infty)$  and its maximal value is about 1.3.

## § 12.4 Results

We have constructed the game based on Wardrop model with parallel links with the system where all users adhere to the equilibrium flow splitting strategies. We have considered two model with different delay functions of form  $\frac{\delta}{c-\delta}$  and  $1 - e^{-\alpha\delta}$ . For the first one we have shown the social optimality of the Wardrop equilibrium in the network with parallel links and have found the equilibrium in the case where all users have right to use any link in the network. For the second model we have found an equilibrium and upper bound for the price of anarchy and have shown that it can be as most 1.3.

## Chapter 13

# The Wardrop Model with Parallel Channels and Incomplete Information

In this chapter, we study the Bayesian setup of the Wardrop model with parallel channels, in which the players send heterogeneous traffic and each player knows only the type of his traffic [58]. A similar scheme of the problem with unsplittable traffic was presented in [87]. In what follows, we suggest a modification of this scheme for the network model with parallel channels and arbitrarily splittable traffic.

### § 13.1 Bayesian Wardrop model with parallel channels

Consider a game  $\Gamma = \langle n, m, f, T, p, w \rangle$  with  $n$  players (users),  $m$  parallel channels, and delay functions  $f_{ie}(x) = a_{ie}x$  that depend on the capacities of the channels defined for each player. For each player  $i$ , there is a given set of traffic types  $T_i$  sent by him and also a given joint distribution  $p(t_1, \dots, t_n)$  of these types. For player  $i$ , the traffic of each type  $t$  has a volume  $w_i(t)$ . Within the framework of our model, each player  $i$  knows only the type  $t_i$  of his traffic to be sent and has no information about the types of traffic sent by the other players. However, using the available joint distribution of traffic types, he can find the conditional distribution of the traffic types of the other players given his traffic type  $t_i$ , that is,  $p(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n | t_i = t) = \frac{p(t_1, \dots, t, \dots, t_n)}{p(i, t)}$ , where  $p(i, t) = \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T: t_i = t} p(t_1, \dots, t_n)$  is the probability that player  $i$  sends traffic of type  $t$ .

In this game, strategy profiles have the form  $x = \{x_i^{te}\}_{i \in [n], t \in T_i, e \in [m]}$ , where  $x_i^{te}$  is the traffic of type  $t$  sent by player  $i$  through channel  $e$ . The components of a strategy

profile must be nonnegative and satisfy the condition  $\sum_{e \in [m]} x_i^{te} = w_i(t)$ . Denote by  $X$  the set of admissible strategy profiles  $x$  in the game  $\Gamma$ .

The expected load of channel  $e$  can be calculated by  $\delta_e(x, p) = \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T} p(t_1, \dots, t_n) \sum_{i \in [n]} x_i^{t_i e}$ , and the expected cost is  $PC_i(x, p) = \max_{e \in [m]: \exists t \in T_i: x_i^{te} > 0} f_{ie}(\delta_e(x, p))$ .

Each player  $i$  knows the type of his traffic. The goal of each player  $i$  can be the optimal cost for each type of his traffic considered separately. In this case, we introduce the conditional expected cost function that depends on the conditional expected load of the network channels. For each channel  $e$ , this function has the form  $\delta_e(x, (p|t_i = t)) = \delta_e^{-i}(x, (p|t_i = t)) + x_i^{te}$ , where  $\delta_e^{-i}(x, (p|t_i = t)) = \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T: t_i = t} p(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n | t_i = t) \sum_{i \in [n] \setminus \{i\}} x_i^{t_i e}$  is the conditional expected load of this channel by the traffic of all players except  $i$ .

Therefore, for player  $i$  sending traffic of type  $t$ , the conditional expected cost has the form  $v_{(i,t)}(x, p) = \max_{e \in [m]: x_i^{te} > 0} f_{ie}(\delta_e(x, (p|t_i = t)))$ . In addition, define his Bayesian expected cost as  $BPC_i(x, p) = \sum_{t \in T_i} p(i, t) v_{(i,t)}(x, p)$ . Note that each term in this sum is independent of the traffic types of all players except  $i$ .

Now, find the relationship between the expected and conditional expected loads of channel  $e$ :

$$\begin{aligned} \delta_e(x, p) &= \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T} p(t_1, \dots, t_n) \sum_{i \in [n]} x_i^{t_i e} \\ &= \sum_{t \in T_k} \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T: t_k = t} p(t_1, \dots, t_n) \sum_{i \in [n]} x_i^{t_i e} \\ &= \sum_{t \in T_k} p(k, t) \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T: t_k = t} p(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n | t_k = t) \left( \sum_{i \in [n] \setminus \{k\}} x_i^{t_i e} + x_k^{te} \right). \end{aligned}$$

For the time being, observe that

$$\begin{aligned} \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T: t_k = t} p(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n | t_k = t) &= \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T: t_k = t} \frac{p(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n)}{p(k, t)} \\ &= \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T: t_k = t} \frac{p(t_1, \dots, t_n)}{p(k, t)} = 1. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} \delta_e(x, p) &= \\ &= \sum_{t \in T_k} p(k, t) \left( \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T: t_k = t} p(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n | t_k = t) \sum_{i \in [n] \setminus \{k\}} x_i^{t_i e} + x_k^{t e} \right) \\ &= \sum_{t \in T_k} p(k, t) \delta_e(x, (p | t_k = t)). \end{aligned}$$

Calculate the total expected load of the network as the sum of the loads  $\delta_e(x, p)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in [m]} \delta_e(x, p) &= \sum_{e \in [m]} \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T} p(t_1, \dots, t_n) \sum_{i \in [n]} x_i^{t_i e} \\ &= \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T} p(t_1, \dots, t_n) \sum_{i \in [n]} \sum_{e \in [m]} x_i^{t_i e} \\ &= \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in T} p(t_1, \dots, t_n) \sum_{i \in [n]} w_i(t_i) =: W. \end{aligned}$$

In other words, this value is constant.

Another fruitful property of the load  $\delta_e(x, p)$  consists in the form of its partial derivative:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k^{t e}} \delta_e(x, p) &= \frac{\partial}{\partial x_k^{t e}} \left( \sum_{t \in T_k} p(k, t) \delta_e(x, (p | t_k = t)) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k^{t e}} \left( \sum_{t \in T_k} p(k, t) (\delta_e^{-k}(x, (p | t_k = t)) + x_k^{t e}) \right) = p(k, t). \end{aligned}$$

## § 13.2 Equilibria of two types

**Definition 13.1.** A strategy profile  $x$  in the game  $\Gamma$  is called a Wardrop equilibrium if, for each player  $i \in [n]$  and any channels  $e, q \in [m]$  such that  $x_i^{t e} > 0$ , we have  $f_{ie}(\delta_e(x, p)) \leq f_{iq}(\delta_q(x, p))$ .

This definition is equivalent to that involving the inequality  $PC_i(x, p) \leq PC(x', p)$ , where  $x$  denotes a Wardrop equilibrium, and  $x'$  is the strategy profile obtained from  $x$  as the result of a unilateral deviation of some player. A Wardrop equilibrium is achieved when each player seeks to minimize his expected cost on all channels adopted by him with a nonzero probability at least for one of his traffic types.

**Definition 13.2.** A strategy profile  $x$  in the game  $\Gamma$  is called a Bayesian Wardrop equilibrium if, for each player  $i \in [n]$ , his traffic type  $t \in T_i$ , and channels  $e, q \in [m]$  such that  $x_i^{te} > 0$ , we have  $f_{ie}(\delta_e(x, (p|t_i = t))) \leq f_{iq}(\delta_q(x, (p|t_i = t)))$ .

This definition is equivalent to that involving the inequality  $BPC_i(x, p) \leq BPC(x', p)$ , where  $x$  denotes a Bayesian Wardrop equilibrium, and  $x'$  is the strategy profile obtained from  $x$  as the result of a unilateral deviation of some player. A Bayesian Wardrop equilibrium is achieved when each player seeks to minimize his Bayesian expected cost by optimizing the transmission of his traffic of each type.

**Proposition 13.1.** If  $x$  is a Bayesian Wardrop equilibrium in the game  $\Gamma$ , then  $BPC_i(x, p) \leq PC_i(x, p)$ .

*Proof.* Let  $x$  be a Bayesian Wardrop equilibrium. In this case, for all  $i \in [n]$ ,  $t \in T_i$ , and  $e \in [m]$  such that  $x_i^{te} > 0$ , we obtain  $a_{ie}\delta_e(x, (p|t_k = t)) = \lambda_i^t$ ; otherwise,  $a_{ie}\delta_e(x, (p|t_k = t)) \geq \lambda_i^t$ . Consequently,

$$\begin{aligned}
& BPC_i(x, p) \\
&= \sum_{t \in T_i} p(i, t) \max_{e \in [m]: x_i^{te} > 0} a_{ie}\delta_e(x, (p|t_k = t)) = \sum_{t \in T_i} p(i, t)\lambda_i^t; \\
& PC_i(x, p) \\
&= \max_{e \in [m]: \exists \tau \in T_i: x_i^{\tau e} > 0} \delta_e(x, p) \\
&= \max_{e \in [m]: \exists \tau \in T_i: x_i^{\tau e} > 0} \sum_{t \in T_i} p(i, t)a_{ie}\delta_e(x, (p|t_k = t)) \\
&= \max_{e \in [m]: \exists \tau \in T_i: x_i^{\tau e} > 0} \left( \sum_{t \in T_i: x_i^{te} > 0} p(i, t)\lambda_i^t + \sum_{t \in T_i: x_i^{te} = 0} p(i, t) (\lambda_i^t + \Delta_i^{te}) \right) \\
&\geq \max_{e \in [m]: \exists \tau \in T_i: x_i^{\tau e} > 0} \left( \sum_{t \in T_i} p(i, t)\lambda_i^t \right) = BPC_i(x, p).
\end{aligned}$$

□

**Definition 13.3.** A strategy profile  $x$  in the game  $\Gamma$  is normal if, for each player  $i \in [n]$  and each channel  $e \in [m]$ , we have the following property: if  $x_i^{te} > 0$  at least for one traffic type  $t \in T_i$ , then  $x_i^{\tau e} > 0$  for all  $\tau \in T_i$ .

According to this definition, in a normal strategy profile a player uses the same collection of channels for all types of his traffic.

**Definition 13.4.** *A Bayesian Wardrop equilibrium  $x$  in the game  $\Gamma$  is called normal if  $x$  forms a normal strategy profile in this game.*

**Theorem 13.1.** *Any normal Bayesian Wardrop equilibrium in the game  $\Gamma$  is a particular case of a Wardrop equilibrium, but there may exist Wardrop equilibria that are not normal Bayesian ones.*

*Proof.* We show that a normal Bayesian Wardrop equilibrium represents a particular case of a Wardrop equilibrium. If  $x$  is a Bayesian Wardrop equilibrium, then the inequality  $x_i^{te} > 0$  implies the inequality  $a_{ie}\delta_e(x, (p|t_i = t)) \leq a_{iq}\delta_q(x, (p|t_i = t))$ , where  $e, q \in [m]$ . On the other hand, if  $x$  is a normal Bayesian Wardrop equilibrium, then  $x_i^{\tau e} > 0$  follows from  $x_i^{te} > 0$  for all  $\tau \in T_i$ . Therefore, in a normal Bayesian Wardrop equilibrium, from  $x_i^{te} > 0$  we have  $a_{ie}\delta_e(x, (p|t_i = \tau)) \leq a_{iq}\delta_q(x, (p|t_i = \tau))$  for all  $\tau \in T_i$ , and hence  $a_{ie}\delta_e(x, p) \leq a_{iq}\delta_q(x, p)$ .

Now, let  $x$  be a certain Wardrop equilibrium and Bayesian Wardrop equilibrium in the game with  $m = 2$  channels (fast and slow) and  $n = 2$  players, each having  $t = 2$  types of traffic (of large and small volumes). Choose the coefficients  $a_{11} = a_{21} = 1$  and  $a_{12} = a_{22} = 1000$ . The players have the following sets of traffic types:  $T_1 = \{1, 2\}$ ,  $T_2 = \{3, 4\}$ , with the volumes given by  $w(1) = 1, w(2) = 1000, w(3) = 1, w(4) = 1000$ . The joint distribution of the traffic types is such that  $p(1, 4) + p(2, 3) = 1$ . The Wardrop equilibrium strategy of each player consists in using different channels, the faster one for the traffic of large volume. Obviously, this strategy profile is not a normal Bayesian Wardrop equilibrium.  $\square$

**Theorem 13.2.** *In the game  $\Gamma$  with  $n = 2$  players, each having  $t = 2$  types of traffic, and  $m = 2$  channels, where the joint distribution of the traffic types satisfies  $p(1, 4) + p(2, 3) = 1$ , any Bayesian Wardrop equilibrium is a particular case of a Wardrop equilibrium.*

*Proof.* Let  $x$  be a Bayesian Wardrop equilibrium that is not normal (otherwise, this equilibrium clearly satisfies the definition of a Wardrop equilibrium). Thus, at least one of the players uses different collections of channels for different traffic types. Suppose this is player 1, who chooses channel 1 for traffic type 1 and channel 2 for

traffic type 2. Hence, for player 1, we obtain the inequalities

$$\begin{aligned} a_{11}\delta_1(x, (p|t_1 = 1)) &= a_{11}(w_1(1) + x_2^{41}) \leq a_{12}\delta_2(x, (p|t_1 = 1)) = a_{12}x_2^{42}, \\ a_{11}\delta_1(x, (p|t_1 = 2)) &= a_{11}x_2^{31} \geq a_{12}\delta_2(x, (p|t_1 = 2)) = a_{12}(w_1(2) + x_2^{32}); \end{aligned}$$

and for player 2, we obtain the inequalities

$$\begin{aligned} a_{21}\delta_1(x, (p|t_2 = 4)) &= a_{21}(w_1(1) + x_2^{41}) \geq a_{22}\delta_2(x, (p|t_2 = 4)) = a_{22}x_2^{42}, \\ a_{21}\delta_1(x, (p|t_2 = 3)) &= a_{21}x_2^{31} \leq a_{22}\delta_2(x, (p|t_2 = 3)) = a_{22}(w_1(2) + x_2^{32}). \end{aligned}$$

Note that all parts of these inequalities are positive. Denoting  $A = a_{11}$ ,  $B = a_{12}$ ,  $C = a_{21}$ ,  $D = a_{22}$ ,  $a = w_1(1) + x_2^{41}$ ,  $b = x_2^{42}$ ,  $c = x_2^{31}$ ,  $d = w_1(2) + x_2^{32}$  and using Lemma 13.1, we establish that these inequalities hold as equalities.  $\square$

**Lemma 13.1.** *For any positive numbers  $A, B, C, D$  and  $a, b, c, d$ , the inequalities*

$$\begin{aligned} Aa \leq Bb, & \quad Ca \geq Db, \\ Ac \geq Bd, & \quad Cc \leq Dd \end{aligned}$$

*imply the equalities*

$$\begin{aligned} Aa = Bb, & \quad Ca = Db, \\ Ac = Bd, & \quad Cc = Dd. \end{aligned}$$

*Proof.* The first and second left inequalities yield  $\frac{a}{b} \leq \frac{B}{A} \leq \frac{c}{d}$ . The residual inequalities lead to  $\frac{a}{b} \geq \frac{D}{C} \geq \frac{c}{d}$ , and the conclusion follows.  $\square$

Moreover, the next theorem states that a Bayesian Wardrop equilibrium is a Wardrop equilibrium even in the general setup of the game  $\Gamma$ .

**Theorem 13.3.** *Any Bayesian Wardrop equilibrium in the game  $\Gamma$  is a Wardrop equilibrium.*

*Proof.* Let  $x$  be a Bayesian Wardrop equilibrium. Then, for all  $i \in [n]$ ,  $t \in T_i$ , and  $e \in [m]$  such that  $x_i^{te} > 0$ , we have  $a_{ie}\delta_e(x, (p|t_k = t)) = \lambda_i^t$ ; otherwise,  $a_{ie}\delta_e(x, (p|t_k = t)) \geq \lambda_i^t$ . Suppose  $x$  is not a Wardrop equilibrium. In this case, there exists at least one player  $i$  who can reduce his expected cost  $PC_i(x, p)$  by a



unilateral deviation from  $x$ , that is,

$$\begin{aligned}
& PC_i(x, p) \\
&= \max_{e \in [m]: \exists \tau \in T_i: x_i^{\tau e} > 0} a_{ie} \delta_e(x, p) = \\
&= \max_{e \in [m]: \exists \tau \in T_i: x_i^{\tau e} > 0} \sum_{t \in T_i} p(i, t) a_{ie} \delta_e(x, (p|t_k = t)) \\
&= \max_{e \in [m]: \exists \tau \in T_i: x_i^{\tau e} > 0} \left( \sum_{t \in T_i: x_i^{te} > 0} p(i, t) \lambda_i^t + \sum_{t \in T_i: x_i^{te} = 0} p(i, t) (\lambda_i^t + \Delta_i^{te}) \right).
\end{aligned}$$

Player  $i$  cannot decrease the load of the channels with the traffic delay exceeding  $\lambda_i^t$ , since he does not use these channels for traffic type  $t$ . Moving a certain part of traffic from channel  $e$  with delay  $\lambda_i^t$  to another channel  $q$  anyway increases the expected cost of the player due to a higher load of channel  $q$ . Indeed, one of the following situations takes place: (1) channel  $q$  has load  $\lambda_i^t$  initially (if used for traffic type  $t$  in the strategy profile  $x$ ), or (2) the channel  $q$  receives a load higher than  $\lambda_i^t$  as the result of adding traffic of type  $t$ . In other words, player  $i$  cannot deviate with reducing his expected cost, and hence  $x$  is a Wardrop equilibrium.  $\square$

### § 13.3 Potential and existence of Wardrop equilibrium

Consider the function

$$\Psi(x) = \sum_{i \in [n]} \sum_{t \in T_i} \sum_{e \in [m]} p(i, t) x_i^{te} \ln(a_{ie}) + \sum_{e \in [m]} \delta_e(x, p) \ln(\delta_e(x, p)),$$

which represents a probabilistic modification of the potential adopted in [86]. This function is convex as the sum of convex functions and has a minimum on a convex set  $X$ .

**Theorem 13.4.** *If the game  $\Gamma$  possesses a Wardrop equilibrium  $x$ , then  $\Psi(x) =$*

$$\min_{y \text{ is strategy profile in } \Gamma} \Psi(y).$$

*Proof.*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_i^{te}} &= p(i, t) \ln(a_{ie}) + p(i, t) \ln(\delta_e(x, p)) + p(i, t) \\
&= p(i, t) (\ln(a_{ie} \delta_e(x, p)) + 1).
\end{aligned}$$

In a Wardrop equilibrium, the inequality  $x_i^{te} > 0$  implies  $a_{ie} \delta_e(x, p) \leq a_{iq} \delta_q(x, p)$ , and hence

$$p(i, t) (\ln(a_{ie} \delta_e(x, p)) + 1) \leq p(i, t) (\ln(a_{iq} \delta_q(x, p)) + 1).$$

Consequently,

$$\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_i^{te}} \leq \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_i^{tq}}.$$

Note that

$$\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_i^{te}} = \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_i^{tq}}$$

if  $x_i^{te} > 0$  and  $x_i^{tq} > 0$ .

Using the Karush–Kuhn–Tucker conditions, it is possible to show that  $\Psi(x) = \min_{y \text{ is a strategy profile in } \Gamma} \Psi(y)$ . To this end, consider the Lagrange function

$$L(x, \lambda) = \Psi(x) - \sum_{i \in [n]} \sum_{t \in T_i} \lambda_i^t \left( \sum_{e \in [m]} x_i^{te} - w_i(t) \right)$$

and let  $\lambda_i^t = \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_i^{te}}$  with any  $x_i^{te'} > 0$ . Then  $\frac{\partial}{\partial x_i^{te}} L(x, \lambda) = \frac{\partial}{\partial x_i^{te}} \Psi(x) - \lambda_i^t = 0$  for all  $x_i^{te} > 0$  and  $\frac{\partial}{\partial x_i^{tq}} L(x, \lambda) = \frac{\partial}{\partial x_i^{tq}} \Psi(x) - \lambda_i^t \geq 0$  for all  $x_i^{tq} = 0$ .  $\square$

**Theorem 13.5.** *If a strategy profile  $x$  in the game  $\Gamma$  minimizes the function  $\Psi(x)$ , then  $x$  is a Wardrop equilibrium.*

*Proof.* By the Karush–Kuhn–Tucker conditions,  $x$  minimizes the function  $\Psi(x)$  if and only if there exists a value  $\lambda$  such that, for  $i \in [n]$ ,  $t \in T_i$ ,  $e \in [m]$ , and

$$L(x, \lambda) = \Psi(x) - \sum_{i \in [n]} \sum_{t \in T_i} \lambda_i^t \left( \sum_{e \in [m]} x_i^{te} - w_i(t) \right),$$

we have the following:

$$\begin{aligned} \text{if } x_i^{te} > 0, \text{ then } & \frac{\partial}{\partial x_i^{te}} L(x, \lambda) = 0; \\ \text{if } x_i^{te} = 0, \text{ then } & \frac{\partial}{\partial x_i^{te}} L(x, \lambda) \geq 0. \end{aligned}$$

Denoting  $\alpha_i^t = e^{\left(\frac{\lambda_i^t}{p(i,t)} - 1\right)}$ , we obtain

$$a_{ie} \delta_e(x, p) = \alpha_i^t \text{ if } x_i^{te} > 0 \text{ and } a_{ie} \delta_e(x, p) \geq \alpha_i^t \text{ if } x_i^{te} = 0.$$

Since  $a_{ie} \delta_e(x, p)$  is independent of the player's traffic type,  $\alpha_i^t$  are the same for all traffic types of player  $i$  among which each pair shares at least one channel. Denote them as  $\alpha_i$ . For the other traffic types  $\tau$ , we have  $\alpha_i^\tau \leq \alpha_i$ .

On the other hand, traffic of type  $\tau$  is sent through some channel  $q$ , where  $x_i^{\tau q} > 0$ . If  $x_i^{tq} > 0$ , then  $a_{iq}\delta_q(x, p) = \alpha_i^\tau = \alpha_i^t = \alpha_i$ . In the case  $x_i^{tq} = 0$ ,  $a_{iq}\delta_q(x, p) = \alpha_i^\tau \geq \alpha_i^t = \alpha_i$ . Thus,  $\alpha_i^\tau = \alpha_i^t = \alpha_i$ .

Hence, for all  $i \in [n]$  and  $e \in [m]$  such that each player  $i$  uses channel  $e$  for sending at least one type of his traffic, we have  $a_{ie}\delta_e(x, p) = \alpha_i$ , where  $\alpha_i$  are constants.  $\square$

Note that the function  $\Psi(x)$  has a minimum on the set  $X$ . This fact leads to the following result.

**Theorem 13.6.** *The game  $\Gamma$  always possesses a Wardrop equilibrium.*

Note that the game  $\Gamma$  may have several Wardrop equilibria and some of them can be Bayesian. This is illustrated by the following two examples.

**Example 24.** *Here we describe a situation in which a Wardrop equilibrium is also Bayesian. Consider the game with  $n = 2$  players,  $m = 2$  channels, and  $a_{11} = a_{21} = 1$ ,  $a_{12} = a_{22} = 2$ . The sets of traffic types of the players are defined as  $T_1 = \{1, 2\}$  and  $T_2 = \{3, 4\}$ , where  $w(1) = 1$ ,  $w(2) = 25$ ,  $w(3) = 1$ , and  $w(4) = 50$ . The joint distribution of the traffic types is such that  $p(1, 4) = p(2, 3) = 1/2$ .*

*The strategies in a Wardrop equilibrium have the form*

$$\begin{aligned} x_1^{11} &= 0, & x_1^{12} &= 1, \\ x_1^{21} &= 16\frac{1}{3}, & x_1^{22} &= 8\frac{2}{3}, \\ x_2^{31} &= 1, & x_2^{32} &= 0, \\ x_2^{41} &= 34, & x_2^{42} &= 16. \end{aligned}$$

*For both channels, the conditional expected load coincides with the expected load  $\Psi(x) \approx 124.939$ .*

**Example 25.** *In this example, a Wardrop equilibrium is not Bayesian. Consider the game of the previous example. Another Wardrop equilibrium is the strategy profile*

$$\begin{aligned} x_1^{11} &= 1, & x_1^{12} &= 0, \\ x_1^{21} &= 25, & x_1^{22} &= 0, \\ x_2^{31} &= 1, & x_2^{32} &= 0, \\ x_2^{41} &= 24\frac{1}{3}, & x_2^{42} &= 25\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

The expected load is the same for both channels,  $\Psi(x) \approx 124.939$ . However, the conditional expected load does not match a Bayesian Wardrop equilibrium. For example, for player 1,

$$a_{11}\delta_1(x, (p|t_1 = 1)) = x_1^{11} + x_2^{41} = 25\frac{1}{3},$$

$$a_{12}\delta_2(x, (p|t_1 = 1)) = x_1^{12} + x_2^{42} = 51\frac{1}{3},$$

$$a_{11}\delta_1(x, (p|t_1 = 2)) = x_1^{21} + x_2^{31} = 26,$$

$$a_{12}\delta_2(x, (p|t_1 = 2)) = x_1^{22} + x_2^{32} = 0.$$

## § 13.4 Results

In this chapter we have constructed a Bayesian routing game in network with parallel links where selfish users send traffic of different types and each knows only his own traffic type. For this model we have defined equilibria: Wardrop equilibrium, that always exists, as shown here, and can be found using potential function, and its special case Bayesian Wardrop equilibrium, that can be more easily understood by users, but its existence is an open question.

## Chapter 14

# Transportation Wardrop Model with Externalities

We consider the Wardrop model with splittable traffic and externalities [43] applied to the parallel transportation network. These externalities are introduced into the players' latency functions as a tool of the system's influence on the equilibrium distribution of traffic flows and also on the Price of Anarchy values. In the general case, the externalities can be interpreted as elements of centralized control, which can be included, e.g., in traffic rules (speed-limit signs, controlled traffic lights), pricing policy for public transport, fuel, etc. This paper investigates the influence of traffic lane rules on the Price of Anarchy. We show that for the parallel transportation system there exist externality values such that the equilibrium and optimal profiles will coincide with one another and the Price of Anarchy will be equal to 1. Also we propose the socialization procedure of user behavior for which the parallel transportation system ensures an optimal profile of user behavior and the same value of the social costs as in the optimal profile with initial externalities.

### § 14.1 Model of transportation system

Consider a transportation system with  $n$  parallel channels. The transit time of unit traffic through a free channel  $i = 1, \dots, n$  is given by  $t_i$ . Construct the vector  $t = (t_1, \dots, t_n)$ . First, assume that the channels are arranged in the ascending order of their transit times:  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ .

The traffic flow of a size  $X$  is distributed among  $n$  channels so that  $X = \sum_{i=1}^n x_i$ ,

$x_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , thereby forming a profile  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . The traffic delay on channel  $i$  is defined as the linear BPR function [183]

$$f_i(x) = t_i(1 + a_i x_i + \sum_{j \neq i} b_{ij} x_j),$$

where each coefficient  $a_i > 0$  reflects the influence of the internal traffic of channel  $i$  on its delay and  $b_{ij}$  are the externalities introduced into the delay function. Each externality  $b_{ij}$  is the degree with which the traffic flow on channel  $j$  influences the delay of channel  $i$ . Due to this influence, the delay increases (positive externalities) or decreases (negative externalities). A possible interpretation is a multilane road: if  $b_{ij}$  is positive, then the traffic flow on lane  $i$  is forcedly delayed by a value proportional to the traffic flow on lane  $j$ ; otherwise (negative  $b_{ij}$ ), the traffic flow is accelerated. Such a strategy can be implemented using available traffic flow management tools, e.g., through adjusting traffic lights for different lanes, determining road sections to change lanes (in particular, to overtake), posting speed-limit signs, etc. Construct the vector  $a = (a_1, \dots, a_n)$  and also the matrix  $b = \{b_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n|i \neq j}$ .

Social costs are the costs of the system as a result of using its resources by players, i.e. flows in our model. As flow participants try to allocate minimizing their own travel times, the system takes care into the optimal flow allocation in order to minimize the total travel time, which is expressed as social costs. Therefore, the social costs are defined as

$$SC(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i(x).$$

The optimal profile minimizes the social costs:

$$OPT = \min_x SC(x) = \min_x \sum_{i=1}^n x_i t_i (1 + a_i x_i + \sum_{j \neq i} b_{ij} x_j)$$

under the constraints:

$$x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n; \quad X = \sum_{i=1}^n x_i.$$

The optimal profile can be found using the Lagrange's method of multipliers, which yields the system of equations for the requisite profile [128]. For the model with externalities, such system is obtained in [123] by analogy. As in [123] we denote

$g_i(x) = t_i(1 + 2a_ix_i) + \sum_{j \neq i} (t_ib_{ij} + t_jb_{ji})x_j$ . In the case under study, the optimal profile satisfies the system of equations

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^n x_i, \\ x_j = 0 \text{ for } j > k, \\ g_i(x) = g_k(x) \text{ for } i = 1, \dots, k-1, \end{cases} \quad (14.1.1)$$

where  $k$  denotes the number of channels with nonzero traffic flows.

An equilibrium profile is defined as the Wardrop equilibrium [128, 174, 185], in which the traffic delay on all channels achieves minimum. A profile  $x$  is a Wardrop equilibrium if, for all channels  $i$ , the inequality  $x_i > 0$  implies  $f_i(x) = \min_j f_j(x)$  and the equality  $x_i = 0$  implies  $f_i(x) \geq \min_j f_j(x)$ .

The equilibrium profile also can be found using the Lagrange's method of multipliers [123, 128]. The Wardrop equilibrium is the solution of the system of equations

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^n x_i, \\ x_j = 0 \text{ for } j > k, \\ f_i(x) = f_k(x) \text{ for } i = 1, \dots, k-1, \end{cases} \quad (14.1.2)$$

where  $k$  denotes the number of channels with nonzero traffic flows.

In addition, the following conditions [123] must be satisfied for  $i, j = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} AW : & \quad a_i \geq b_{ij}; \\ AS : & \quad a_i \geq \sum_{j \neq i} b_{ij}; \\ BS : & \quad a_it_i \geq \sum_{j \neq i} t_jb_{ij}. \end{aligned} \quad (14.1.3)$$

As shown in [123], the conditions (14.1.3) ensure the existence an equilibrium. The AW condition is the weaker version of externality limit constraints which guarantees that in equilibrium the no-deviation condition of commuters with externalities is essentially equivalent to that without externalities. The AS and BS conditions are the stronger version of externality limit constraints which implies the convexity of the social cost function with respect to the flow profile, under which social optimum always exists.

Assume that the traffic flow  $X$  is sufficiently great so that there will be no free channels in the optimal and equilibrium profiles. Then,  $k = n$  in the systems of equations (14.1.1) and (14.1.2), and the order of all channels by their transit times  $t_i$  can be arbitrary.

The price of anarchy for the traffic flow  $X$  is defined as the ratio of the equilibrium social costs to the optimal ones. The main question that is considered in the article is whether there are external factors in which social costs in equilibrium coincide with the social optimum, and the price of anarchy is equal to 1.

## § 14.2 Optimal externalities

Check that for the parallel transportation system under study, there exist values  $b_{ij}$  such that the equilibrium and optimal profiles will coincide with one another and the price of anarchy will be equal to 1.

Actually, for this system the price of anarchy is equal to 1 if the equilibrium and optimal profiles coincide with one another. Hence, there must exist some profile  $x$  that is a solution of both systems (14.1.1) and (14.1.2) simultaneously. In other words, such a profile (if any) satisfies the system of equations

$$\begin{cases} g_i(x) = g_n(x) \text{ for } i = 1, \dots, n-1, \\ f_i(x) = f_n(x) \text{ for } i = 1, \dots, n-1, \\ X = \sum_{i=1}^n x_i. \end{cases} \quad (14.2.1)$$

This system contains  $(2n - 1)$  equations for the  $n$  unknowns  $x_i$  and  $n(n - 1)$  unknowns  $b_{ij}$ . Find a solution in which the delay of only one channel depends on the traffic flows on all other channels. This limitation is interpreted as follows. One of channels is called an auxiliary and is allowed to be partially used by flows of other channels. For example in case of 3-lane road, vehicles from the left and right lanes can sometimes occupy the central lane for e.g. overtaking manoeuvre. It slows the central flow down. But the flow of the central line can be artificially accelerated using traffic lights, additional rules, etc. In this case, the order of all channels by their transit times is not important, because all of them are busy. Assume that the delay of the first channel depends on the traffic flows on all other channels. (Note



that the first channel is not necessarily the fastest one.) Otherwise simply renumber the channels in an appropriate way. In this case,  $b_{ij} = 0$  for all  $i \neq 1$ , and the system of equations has precisely  $(2n - 1)$  unknowns.

### § 14.2.1 Two-channel system

In the case of two channels, the requisite profile  $x$  satisfies the system of equations

$$\begin{cases} t_1(1 + 2a_1x_1) + (t_1b_{12} + t_2b_{21})x_2 = t_2(1 + 2a_2x_2) + (t_2b_{21} + t_1b_{12})x_1, \\ t_1(1 + a_1x_1 + b_{12}x_2) = t_2(1 + a_2x_2 + b_{21}x_1), \\ X = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Assume that the delay of the first channel depends on the traffic flow on the other channel, i.e.,  $b_{21} = 0$ . Then the solution of the system takes the form

$$\begin{cases} x_1 = \frac{X^2 a_2 t_2}{X(a_1 t_1 + a_2 t_2) + t_1 - t_2} \\ x_2 = \frac{X^2 a_1 t_1 + X(t_1 - t_2)}{X(a_1 t_1 + a_2 t_2) + t_1 - t_2} \\ b_{12} = \frac{t_2 - t_1}{X t_1}. \end{cases} \quad (14.2.2)$$

Let  $t_1 \geq t_2$ , meaning that the first channel is slower than the second one. Obviously, in this case  $b_{12} \leq 0$ , the solution is feasible, and conditions (14.1.3) hold. In other words, for the two-channel system, there always exist externalities  $b$  such that the equilibrium and optimal profiles will coincide with one another and the price of anarchy will be equal to 1. Here an externality  $b_{12} \leq 0$  is introduced, which creates more and more comfortable conditions on the slow channel with increasing the load of the fast one. As a result, the equilibrium traffic outflow from the first channel to the second one is observed, and the former channel becomes less loaded. Thus, the following fact has been established.

**Theorem 14.1.** *In the two-channel parallel transportation system with  $t_1 \geq t_2$ , there exist optimal values of the externalities under which the price of anarchy is equal to 1. The optimal externalities and the optimal equilibrium profile are given by (14.2.2).*

Moreover, under definite conditions, the delay of the fast channel can be chosen dependent on the traffic flow on the slow channel. In this case,  $t_2 \geq t_1$  and  $b_{12} \geq 0$ .

The solution is feasible under the conditions

$$\begin{cases} Xa_1t_1 \geq t_2 - t_1, \\ Xa_2t_1 \geq t_2 - t_1, \\ Xa_2t_2 \geq t_2 - t_1. \end{cases}$$

Consequently, conditions (14.1.3) hold and the values  $x_1$  and  $x_2$  are nonnegative. As is easily seen, these conditions are satisfied for a sufficiently great incoming traffic flow  $X$ .

### § 14.2.2 Three-channel system

In the case of three channels, the requisite profile  $x$  satisfies the system

$$\begin{cases} g_1(x) = g_2(x) = g_3(x), \\ f_1(x) = f_2(x) = f_3(x), \\ X = x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$$

Assume that only the delay of the first channel depends on the traffic flows on the other two channels, i.e.,  $b_{21} = 0$ ,  $b_{31} = 0$ ,  $b_{23} = 0$ , and  $b_{32} = 0$ . Collecting like terms in this system yields

$$\begin{cases} x_1(2a_1t_1 - t_1b_{13}) + x_2t_1b_{12} + x_3(t_1b_{13} - 2a_3t_3) = t_3 - t_1 \\ x_1(t_1b_{12} - t_1b_{13}) + x_2(2a_2t_2) - x_3(2a_3t_3) = t_3 - t_2 \\ x_1(a_1t_1) + x_2t_1b_{12} + x_3(t_1b_{13} - t_3a_3) = t_3 - t_2 \\ x_2a_2t_2 - x_3a_3t_3 = t_3 - t_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = X. \end{cases} \quad (14.2.3)$$

Using the last two equations of (14.2.3), explicitly express  $x_1$  and  $x_2$  through  $x_3$  :

$$\begin{cases} x_2 = \frac{t_3 - t_2 + x_3a_3t_3}{a_2t_2} \\ x_1 = X - x_3 - \frac{t_3 - t_2 + x_3a_3t_3}{a_2t_2}. \end{cases} \quad (14.2.4)$$

Next, subtracting the third equation of system (14.2.3) from the first one and the fourth equation multiplied by 2 from the second one, obtain

$$\begin{cases} x_1(t_1a_1 - t_1b_{13}) - x_3(a_3t_3) = 0, \\ x_1(t_1b_{12} - t_1b_{13}) = t_2 - t_3. \end{cases} \quad (14.2.5)$$

Hence, the unknowns  $b_{12}$  and  $b_{13}$  can be explicitly expressed through  $x_3$  :

$$\begin{aligned} b_{13} &= \frac{x_1 a_1 t_1 - x_3 a_3 t_3}{t_1 x_1} \\ b_{12} &= \frac{t_2 - t_3 + x_1 t_1 b_{13}}{t_1 x_1} = \frac{t_2 - t_3 + x_1 a_1 t_1 - x_3 a_3 t_3}{t_1 x_1}. \end{aligned} \quad (14.2.6)$$

Also, note that the second formula in (14.2.6) and the first formula in (14.2.4) yield  $b_{12} = \frac{x_1 a_1 t_1 - x_2 a_2 t_2}{t_1 x_1}$ .

Thus, in accordance with (14.2.4) and (14.2.6), all unknowns are explicitly expressed through  $x_3$ . Consider the third equation of system (14.2.3); substituting the expressions for  $b_{12}$ ,  $b_{13}$ ,  $x_1$ , and  $x_2$  into this equation, find

$$x_3 = \frac{(t_2 - t_3)(X a_1 t_1 + t_1 - t_2) + X a_2 t_2 (X a_1 t_1 + t_1 - t_3)}{X a_2 t_2 a_3 t_3 + a_2 t_2 (X a_1 t_1 + t_1 - t_3) + a_3 t_3 (X a_1 t_1 + t_1 - t_2)}.$$

Finally solve the system, substituting  $x_3$  into (14.2.4) and (14.2.6). The resulting explicit-form solution is described by Lemma 14.1.

**Lemma 14.1.** *Consider the three-channel parallel transportation system in which only the delay of the first channel depends on the traffic flows on the other two channels. In this system, the externalities  $b_{12}$  and  $b_{13}$  ensure the optimality of the equilibrium profile  $x$ , where*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{X^2 a_2 t_2 a_3 t_3 + (t_2 - t_3)^2}{X a_2 t_2 a_3 t_3 + a_2 t_2 (X a_1 t_1 + t_1 - t_3) + a_3 t_3 (X a_1 t_1 + t_1 - t_2)}, \\ x_2 &= \frac{X a_3 t_3 (X a_1 t_1 + t_1 - t_2) - (t_2 - t_3)(X a_1 t_1 + t_1 - t_3)}{X a_2 t_2 a_3 t_3 + a_2 t_2 (X a_1 t_1 + t_1 - t_3) + a_3 t_3 (X a_1 t_1 + t_1 - t_2)}, \\ x_3 &= \frac{X a_2 t_2 (X a_1 t_1 + t_1 - t_3) + (t_2 - t_3)(X a_1 t_1 + t_1 - t_2)}{X a_2 t_2 a_3 t_3 + a_2 t_2 (X a_1 t_1 + t_1 - t_3) + a_3 t_3 (X a_1 t_1 + t_1 - t_2)}, \\ b_{12} &= \frac{a_1 t_1 (t_2 - t_3)^2 + a_2 t_2 (t_2 - t_3)(X a_1 t_1 + t_1 - t_3) - X a_2 t_2 a_3 t_3 (t_1 - t_2)}{t_1 (X^2 a_2 t_2 a_3 t_3 + (t_2 - t_3)^2)}, \\ b_{13} &= \frac{a_1 t_1 (t_2 - t_3)^2 - a_3 t_3 (t_2 - t_3)(X a_1 t_1 + t_1 - t_2) - X a_2 t_2 a_3 t_3 (t_1 - t_3)}{t_1 (X^2 a_2 t_2 a_3 t_3 + (t_2 - t_3)^2)}. \end{aligned} \quad (14.2.7)$$

Now study the feasibility of this solution. For the sake of definiteness, let  $t_2 \geq t_3$ ; otherwise simply renumber the channels.

Consider a situation in which the first channel is the slowest one, i.e.,  $t_1 \geq t_2 \geq t_3$ . In this case, the values  $x_1$  and  $x_3$  are obviously nonnegative. The value  $x_2$  is nonnegative if

$$X \geq \frac{(t_2 - t_3)(X a_1 t_1 + t_1 - t_3)}{a_3 t_3 (X a_1 t_1 + t_1 - t_2)}. \quad (14.2.8)$$

As  $X$  increases the right-hand side of this inequality tends to  $\frac{t_2 - t_3}{a_3 t_3}$ . Hence, for sufficiently great traffic flows  $X$  the inequality holds and the value  $x_2$  will be nonnegative.

Assume that the first channel is medium by its transit time or the fastest one. The values  $x_1$  and  $x_3$  are nonnegative if and only if

$$\begin{aligned} Xa_2t_2a_3t_3 + a_2t_2(Xa_1t_1 + t_1 - t_3) + a_3t_3(Xa_1t_1 + t_1 - t_2) &\geq 0, \\ Xa_2t_2(Xa_1t_1 + t_1 - t_3) + (t_2 - t_3)(Xa_1t_1 + t_1 - t_2) &\geq 0, \end{aligned}$$

which hold for sufficiently great traffic flows  $X$ , in particular, for  $X$  such that  $Xa_1t_1 + t_1 - t_2 \geq 0$  and  $Xa_1t_1 + t_1 - t_3 \geq 0$ . In this case, condition (14.2.8) is also satisfied for sufficiently great traffic flows  $X$ .

Next, check conditions (14.1.3). Let all  $x_i \geq 0$ . Then

$$b_{1i} = \frac{x_1a_1t_1 - x_ia_it_i}{x_1t_1} \leq a_1$$

for  $i = 1, 2$ , i.e., condition AW holds. Condition AS is satisfied if

$$\begin{aligned} Xa_2t_2a_3t_3(Xa_1t_1 + 2t_1 - t_2 - t_3) &\geq \\ a_1t_1(t_2 - t_3)^2 + (t_2 - t_3)(a_2t_2(Xa_1t_1 + t_1 - t_3) - a_3t_3(Xa_1t_1 + t_1 - t_2)), & \end{aligned}$$

and condition BS if

$$\begin{aligned} a_1t_1^2(X^2a_2t_2a_3t_3 + (t_2 - t_3)^2) &\geq \\ t_2(a_1t_1(t_2 - t_3)^2 + a_2t_2(t_2 - t_3)(Xa_1t_1 + t_1 - t_3) - Xa_2t_2a_3t_3(t_1 - t_2)) + & \\ t_3(a_1t_1(t_2 - t_3)^2 - a_3t_3(t_2 - t_3)(Xa_1t_1 + t_1 - t_2) - Xa_2t_2a_3t_3(t_1 - t_3)). & \end{aligned}$$

All of these inequalities hold for sufficiently great traffic flows  $X$ , by analogy with (14.2.8).

Thus, the following fact has been established.

**Theorem 14.2.** *In the three-channel parallel transportation system with a sufficiently great traffic flow  $X$ , there exist optimal externalities under which the price of anarchy is equal to 1. The optimal externalities and the optimal equilibrium profile are given by (14.2.7).*

From the structure of the resulting solution and (14.2.6) it follows that  $b_{1i}$  can be negative, e.g., when  $t_ia_i$  are close to each other but the values  $t_i$  considerably differ from each other. This phenomenon can be interpreted as the situation of channels with almost the same price-performance characteristics, in which the fastest channel is assigned a corresponding fee. Here are some illustrative examples.

**Example 26.** Consider a three-channel parallel transportation system described by  $t = (1, 5, 100)$  and  $a = (100, 20, 1)$ . The incoming traffic flow is  $X = 10$ . The delay of the first channel depends on the traffic flows on all other channels. In accordance with (14.2.7), the solution is given by  $x \approx (3.483, 3.734, 2.784)$ ,  $(b_{12}, b_{13}) \approx (-7.0192, 20.083)$ .

System (14.2.7) may lead to infeasible solutions, e.g., under an ill choice of the channel influenced by all other channels.

**Example 27.** Consider a three-channel parallel transportation system described by  $t = (1, 5, 100)$  and  $a = (1, 20, 1)$ . The incoming traffic flow is  $X = 10$ . The delay of the fastest channel depends on the traffic flows on all other channels. The solution yielded by (14.2.7) is infeasible:  $x \approx (11.004, -0.027, -0.977)$  and  $(b_{12}, b_{13}) \approx (1.243, 9.877)$ . At the same time, if the delay of the slowest channel depends on the traffic flows on all other channels (i.e., the channels are renumbers so that  $t = (100, 5, 1)$  and  $a = (1, 20, 1)$ ), then the resulting solution becomes feasible:  $x \approx (0.089, 0.059, 9.852)$  and  $(b_{12}, b_{13}) \approx (0.346, -0.102)$ .

**Example 28.** Consider a three-channel parallel transportation system described by  $t = (100, 5, 1)$  and  $a = (a_1, a_2, a_3)$ , where  $a_2 = 20$  and  $a_1$  and  $a_3$  are varying within given limits. Analyze the qualitative changes in the solution under such variations of the system parameters. The simulation results are presented in Figs. 14.1–14.4. For small values of  $a_1$ , with the growth of  $a_3$  the flow  $x_1$  quickly increases whereas the flow  $x_3$  quickly decreases.

### § 14.2.3 $n$ -channel system

In the case of  $n$  channels,

$$\begin{aligned}
 g_1(x) &= t_1(1 + 2a_1x_1) + \sum_{j=2}^n x_j t_1 b_{1j} \\
 g_i(x) &= t_i(1 + 2a_i x_i) + x_1 t_1 b_{1i} \text{ for } i = 2, \dots, n \\
 f_1(x) &= t_1(1 + a_1 x_1) + \sum_{j=2}^n x_j t_1 b_{1j} \\
 f_i(x) &= t_i(1 + a_i x_i) \text{ for } i = 2, \dots, n.
 \end{aligned}$$

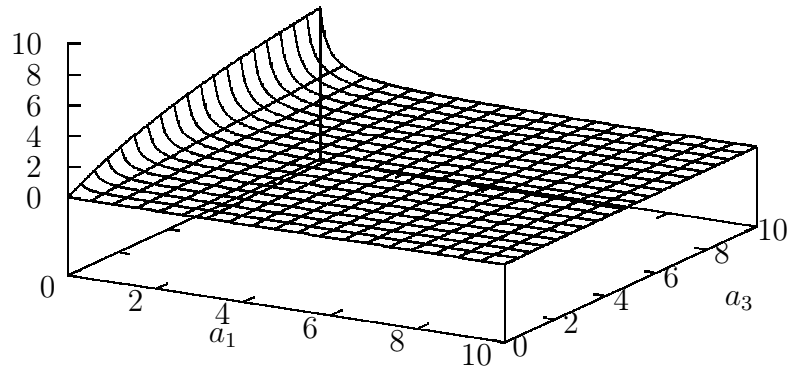


Figure 14.1: Dynamics of flow  $x_1$  under variations of  $a_1$  and  $a_3$ .

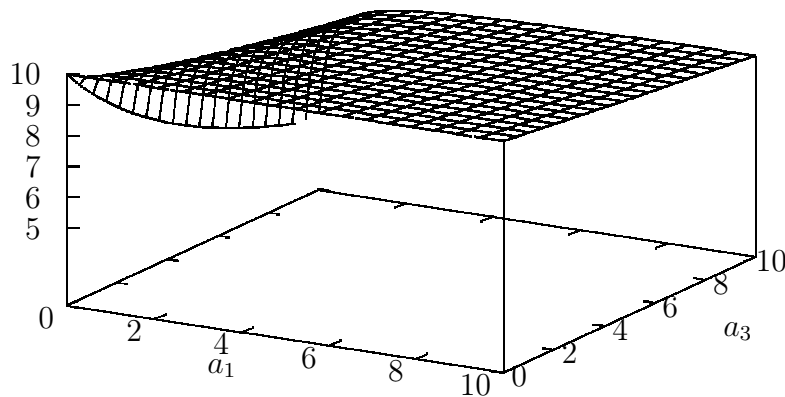


Figure 14.2: Dynamics of flow  $x_3$  under variations of  $a_1$  and  $a_3$ .

Consequently, system (14.2.1) takes the form

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1(1 + 2a_1x_1) + \sum_{j=2}^n x_j t_1 b_{1j} = t_n(1 + 2a_nx_n) + x_1 t_1 b_{1n} \\ t_i(1 + 2a_i x_i) + x_1 t_1 b_{1i} = t_n(1 + 2a_nx_n) + x_1 t_1 b_{1n} \text{ for } i = 2, \dots, n-1 \\ t_1(1 + a_1x_1) + \sum_{j=2}^n x_j t_1 b_{1j} = t_n(1 + a_nx_n) \\ t_i(1 + a_i x_i) = t_n(1 + a_nx_n) \text{ for } i = 2, \dots, n-1 \\ X = \sum_{i=1}^n x_i. \end{array} \right.$$

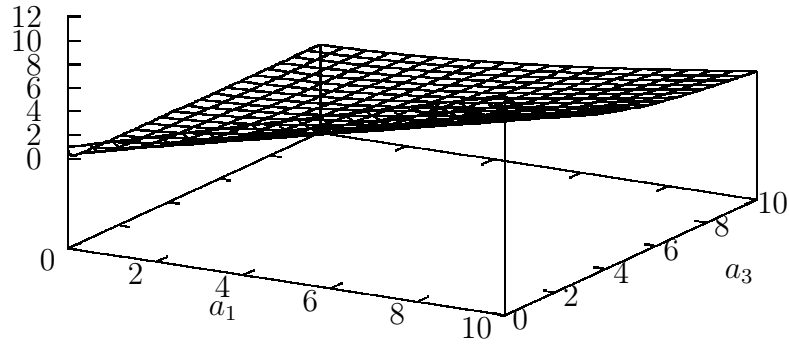


Figure 14.3: Dynamics of externality  $b_{12}$  under variations of  $a_1$  and  $a_3$ .

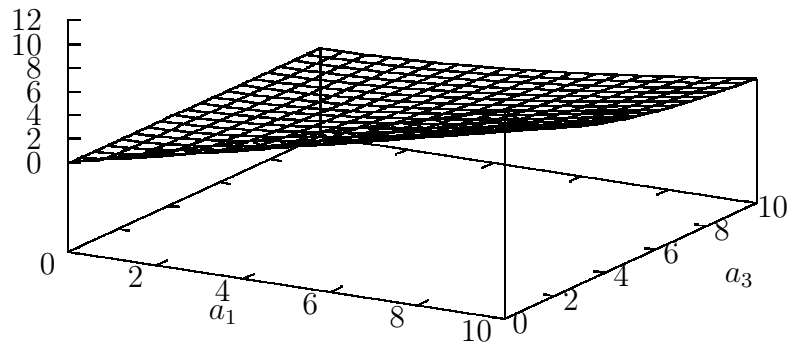


Figure 14.4: Dynamics of externality  $b_{13}$  under variations of  $a_1$  and  $a_3$ .

Write the system in the variable  $x_i$  :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (e1) \quad x_1(2t_1a_1 - t_1b_{1n}) + \sum_{j=2}^{n-1} x_j t_1 b_{1j} + x_n(t_1b_{1n} - 2a_n t_n) = t_n - t_1 \\
 (e2) \quad x_1(t_1b_{1i} - t_1b_{1n}) + x_i(2a_i t_i) - x_n(2a_n t_n) = t_n - t_i \\
 \quad \text{for } i = 2, \dots, n-1 \\
 (e3) \quad x_1(t_1a_1) + \sum_{j=2}^{n-1} x_j b_{1j} t_1 + x_n(t_1b_{1n} - a_n t_n) = t_n - t_1 \\
 (e4) \quad x_i(a_i t_i) - x_n(a_n t_n) = t_n - t_i \\
 \quad \text{for } i = 2, \dots, n-1 \\
 (e5) \quad X = \sum_{i=1}^n x_i.
 \end{array} \right. \quad (14.2.9)$$

Using the group of equations (e3), (e4), and (e5), express  $x_1$  and  $x_i$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ , through  $x_n$  :

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{t_n - t_i + x_n a_n t_n}{a_i t_i}, \text{ for } i = 1, \dots, n-1, \\ x_1 &= X - \sum_{i=2}^{n-1} x_i - x_n = X - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{t_n - t_i + x_n a_n t_n}{a_i t_i} - x_n. \end{aligned} \quad (14.2.10)$$

Consider system (14.2.9); subtracting equation (e3) from (e1) and all equations of (e2) multiplied by 2 from the corresponding equations of (e4), obtain

$$\begin{aligned} x_1(t_1 a_1 - t_1 b_{1n}) - x_n(a_n t_n) &= 0, \\ x_1(t_1 b_{1i} - t_1 b_{1n}) &= t_i - t_n \text{ for } i = 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Hence, the unknowns  $b_{1i}$  and  $b_{1n}$  can be explicitly expressed through  $x_i$ . In the case under study, the convenient form is

$$\begin{aligned} x_1 t_1 b_{1n} &= x_1 a_1 t_1 - x_n a_n t_n \\ x_1 t_1 b_{1i} &= t_i - t_n + x_1 t_1 b_{1n} = t_i - t_n + x_1 a_1 t_1 - x_n a_n t_n \\ &\text{for } i = 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (14.2.11)$$

Also, note that the second formula in (14.2.11) and the first formula in (14.2.10) yield  $x_1 t_1 b_{1i} = x_1 a_1 t_1 - x_i a_i t_i$ .

Thus, in accordance with (14.2.10) and (14.2.11), all unknowns are explicitly expressed through  $x_n$ . Now use equation (e3) of system (14.2.9) to find  $x_n$  :

$$x_1 t_1 a_1 + \sum_{j=2}^{n-1} x_j b_{1j} t_1 + x_n t_1 b_{1n} - x_n a_n t_n = t_n - t_1.$$

Substituting formulas (14.2.11) gives

$$\begin{aligned} x_1 t_1 a_1 + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{x_j}{x_1} (t_j - t_n + x_1 a_1 t_1 - x_n a_n t_n) + \\ + \frac{x_n}{x_1} (x_1 a_1 t_1 - x_n a_n t_n) - x_n a_n t_n = t_n - t_1. \end{aligned}$$

Transform the equation, dividing the sum into two parts and using the identity

$$\sum_{j=2}^{n-1} x_j = X - x_1 - x_n :$$

$$\begin{aligned} x_1^2 t_1 a_1 + \sum_{j=2}^{n-1} x_j (t_j - t_n) + (X - x_1 - x_n)(x_1 a_1 t_1 - x_n a_n t_n) + \\ + x_n (x_1 a_1 t_1 - x_n a_n t_n) - x_1 x_n a_n t_n = x_1 (t_n - t_1). \end{aligned}$$



Performing a series of trivial simplifications, write

$$\sum_{j=2}^{n-1} x_j(t_j - t_n) + X(x_1 a_1 t_1 - x_n a_n t_n) = x_1(t_n - t_1). \quad (14.2.12)$$

Substitute  $x_1 = X - \sum_{j=2}^{n-1} x_j - x_n$  and combine the sums in the left- and right-hand sides to obtain

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{n-1} x_j(t_j - t_1 - X a_1 t_1) + X^2 a_1 t_1 - X x_n a_1 t_1 - X x_n a_n t_n = \\ X(t_n - t_1) - x_n(t_n - t_1). \end{aligned}$$

Using the expression for  $x_j$  from system (14.2.10), write

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_n - t_j + x_n a_n t_n)(t_j - t_1 - X a_1 t_1)}{a_j t_j} + \\ + X^2 a_1 t_1 - X x_n a_1 t_1 - X x_n a_n t_n = X(t_n - t_1) - x_n(t_n - t_1). \end{aligned}$$

Finally derive an explicit formula of  $x_n$  :

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_n - t_j)(t_j - t_1 - X a_1 t_1)}{a_j t_j} + X(X a_1 t_1 - t_k + t_1) = \\ x_n(a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{X a_1 t_1 - t_j + t_1}{a_j t_j} + X(a_1 t_1 + a_n t_n) + t_1 - t_n), \\ x_n = \frac{\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)(X a_1 t_1 + t_1 - t_j)}{a_j t_j} + X(X a_1 t_1 + t_1 - t_n)}{a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{X a_1 t_1 + t_1 - t_j}{a_j t_j} + X(a_1 t_1 + a_n t_n) + t_1 - t_n}. \end{aligned} \quad (14.2.13)$$

Thus, the explicit-form solution for system (14.2.9) is given by expressions (14.2.10), (14.2.11), and (14.2.13); see Lemma 14.2.

**Lemma 14.2.** *Consider the  $n$ -channel parallel transportation system in which only the delay of the first channel depends on the traffic flows on the other two channels. In this system, the externalities  $b_{12}, b_{13}, \dots$ , and  $b_{1n}$  ensure the optimality of the*

equilibrium profile  $x$ , where

$$\begin{aligned}
x_1 &= X - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{t_n - t_i + x_n a_n t_n}{a_i t_i} - x_n, \\
x_i &= \frac{t_n - t_i + x_n a_n t_n}{a_i t_i}, \text{ for } i = 1, \dots, n-1, \\
x_n &= \frac{\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)(X a_1 t_1 + t_1 - t_j)}{a_j t_j} + X(X a_1 t_1 + t_1 - t_n)}{a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{X a_1 t_1 + t_1 - t_j}{a_j t_j} + X(a_1 t_1 + a_n t_n) + t_1 - t_n} \\
b_{1i} &= \frac{x_1 a_1 t_1 - x_i a_i t_i}{x_1 t_1} \text{ for } i = 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{14.2.14}$$

Now assume that the channels are arranged in the descending order of their transit times, i.e.,  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$ . In other words, the delay of the slowest channel depends on the traffic flows on all other channels. In this case, obviously  $x_n \geq 0$  in system (14.2.14).

Find an expression for  $x_1$  using equation (14.2.12), which yields

$$x_1(X a_1 t_1 + t_1 - t_n) = X x_n a_n t_n - \sum_{j=2}^{n-1} x_j(t_j - t_n).$$

Substituting the formula of  $x_j$  from (14.2.14) into the right-hand side, write

$$\begin{aligned}
& X a_n a_n t_n - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{x_n a_n t_n - (t_j - t_n)}{a_j t_j} (t_j - t_n) = \\
& x_n a_n t_n \left( X - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{t_j - t_n}{a_j t_j} \right) + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)^2}{a_j t_j} = \\
& \left[ a_n t_n \left( X - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{t_j - t_n}{a_j t_j} \right) \left( \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)(X a_1 t_1 + t_1 - t_j)}{a_j t_j} + X(X a_1 t_1 + t_1 - t_n) \right) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)^2}{a_j t_j} \left( a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{X a_1 t_1 + t_1 - t_j}{a_j t_j} + X(a_1 t_1 + a_n t_n) + t_1 - t_n \right) \right] / \\
& \left( a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{X a_1 t_1 + t_1 - t_j}{a_j t_j} + X(a_1 t_1 + a_n t_n) + t_1 - t_n \right).
\end{aligned}$$

The numerator of this expression is equal to

$$\begin{aligned}
& X a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)(X a_1 t_1 + t_1 - t_j)}{a_j t_j} - a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{t_j - t_n}{a_j t_j} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(t_i - t_n)(X a_1 t_1 + t_1 - t_i)}{a_i t_i} \\
& + X^2 a_n t_n (X a_1 t_1 + t_1 - t_n) - X a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{t_j - t_n}{a_j t_j} (X a_1 t_1 + t_1 - t_n) \\
& + a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)^2}{a_j t_j} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{X a_1 t_1 + t_1 - t_i}{a_i t_i} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)^2}{a_j t_j} (X a_1 t_1 + t_1 - t_n) \\
& + X a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)^2}{a_j t_j}.
\end{aligned}$$

The first, fourth, and seventh terms add up to 0. Hence, the residual part takes the form

$$\begin{aligned} & \left( X^2 a_n t_n + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)^2}{a_j t_j} \right) (X a_1 t_1 + t_1 - t_n) \\ & + a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{t_j - t_n}{a_j t_j} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_i)(X a_1 t_1 + t_1 - t_i)}{a_i t_i}. \end{aligned} \quad (14.2.15)$$

As a result,

$$\begin{aligned} x_1 = & \left[ \left( X^2 a_n t_n + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_n)^2}{a_j t_j} \right) (X a_1 t_1 + t_1 - t_n) + \right. \\ & \left. + a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{t_j - t_n}{a_j t_j} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_i)(X a_1 t_1 + t_1 - t_i)}{a_i t_i} \right] / \\ & \left[ \left( a_n t_n \sum_{j=2}^{n-1} \frac{X a_1 t_1 + t_1 - t_j}{a_j t_j} + X(a_1 t_1 + a_n t_n) + t_1 - t_n \right) (X a_1 t_1 + t_1 - t_n) \right], \end{aligned}$$

and this value is negative if expression (14.2.15) is negative.

Consider  $x_j$ , which is nonnegative for  $t_n - t_j + x_n a_n t_n \geq 0$ . Substitute  $x_n$  for observing that  $x_j$  is nonnegative if the expression

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_i)(X a_1 t_1 + t_1 - t_i)}{a_i t_i} + X(X a_1 t_1 + t_1 - t_n) - \frac{(t_j - t_n)(X(a_1 t_1 + a_n t_n) + t_1 - t_n)}{a_n t_n} = \\ & \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(t_j - t_i)(X a_1 t_1 + t_1 - t_i)}{a_i t_i} + \frac{X a_n t_n (X a_1 t_1 + t_1 - t_j) - (t_j - t_n)(X a_1 t_1 + t_1 - t_n)}{a_j t_j} \end{aligned} \quad (14.2.16)$$

is nonnegative.

Besides nonnegativity, a feasible solution must satisfy conditions (14.1.3). Note that condition AW obviously holds for nonnegative  $x_i$ . Therefore, the nonnegativity conditions derived above should be supplemented by conditions AS and BS only.

Actually, the following fact has been established.

**Theorem 14.3.** *Consider the  $n$ -channel parallel transportation system in which  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$ , the values of expressions (14.2.15) and (14.2.16) for  $j = 2, \dots, n-1$  are nonnegative, and conditions (14.1.3) hold. In this system, there exist optimal values of the externalities under which the price of anarchy is equal to 1. The optimal externalities and the optimal equilibrium profile are given by (14.2.14).*

### § 14.3 Socialization of selfish behavior

As a rule, in queuing systems, the actions of users do not depend on the system's interests. Users act selfishly in their own interests, creating conditions for an equilibrium that can significantly differ from the optimal profile for the entire system. In classical Wardrop models without externalities, the system has no mechanisms to control the behavior of different users in order to force their choice of almost optimal strategies. However, in the model constructed in this part, the system can choose and change the values of externalities. With such capabilities, can the system utilize or change the behavior of users in its own interests? This question will be addressed below.

Consider the following scenario for system's actions. Let the system parameters  $t$  and  $a$ , as well as the externalities  $b$ , be given. If the externalities are initially equal to 0, the model turns into the classical one, with an attempt to socialize the selfish behavior of users by introducing externalities. The system observes the size  $X$  of the incoming traffic flow. From this point onwards, assume that the incoming traffic flow  $X$  is great enough so that all channels have nonzero traffic in the equilibrium and also in the optimal profile.

For the incoming traffic flow  $X$ , the system determines the optimal user behavior for itself by solving the system of equations (14.1.1). This is the optimal profile  $x^{opt}$ , beneficial to the system, and the system will force users to choose it. For this purpose, the system needs to find some values  $b'$  of the externalities that will satisfy the system of equations (14.2.1), jointly with the optimal profile  $x^{opt}$ . In this case, the profile  $x^{opt}$ , optimal for the system with the externalities  $b$ , will remain optimal for it with the new externalities  $b'$ , and will also become an equilibrium for all users under the new exogenous conditions.

The scenario described above will be called the *socialization* procedure of selfish behavior. Suppose that the system parameters are such that the scenario is feasible, i.e., an equilibrium and optimum both exist and can be found using the systems of equations (14.1.1) and (14.2.1). By choosing externalities in this way, the system ensures that the price of anarchy will be equal to 1.

### § 14.3.1 Two-channel system

In the case of two channels, the optimal profile  $x^{opt}$  (see system (14.1.1)) is given by

$$\begin{aligned} x_1^{opt} &= \frac{t_1 - t_2 - X(2a_2t_2 - t_1b_{12} - t_2b_{21})}{2(t_1b_{12} + t_2b_{21} - a_1t_1 - a_2t_2)} \\ x_2^{opt} &= \frac{t_2 - t_1 - X(2a_1t_1 - t_1b_{12} - t_2b_{21})}{2(t_1b_{12} + t_2b_{21} - a_1t_1 - a_2t_2)}. \end{aligned} \quad (14.3.1)$$

Using system (14.2.1), find the externalities  $b'$  under which the profile  $x$  is an optimum and also an equilibrium:

$$\begin{aligned} b'_{12} &= \frac{t_2a_2x_2 - t_1a_1x_1}{t_1(x_2 - x_1)} + \frac{x_2(t_2 - t_1)}{t_1(x_2^2 - x_1^2)} \\ b'_{21} &= \frac{t_2a_2x_2 - t_1a_1x_1}{t_2(x_2 - x_1)} + \frac{x_1(t_2 - t_1)}{t_2(x_2^2 - x_1^2)}. \end{aligned} \quad (14.3.2)$$

Substituting the value  $x^{opt}$  (14.3.1) into the resulting expressions (14.3.2), finally calculate the externalities that ensure the optimal equilibrium behavior of all users for the system.

**Example 29.** Consider a two-channel parallel transportation system described by  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $a_1 = 3$ , and  $a_2 = 2$ . The incoming traffic flow is  $X = 10$ . Let the initial externalities be equal to 0, which corresponds to the classical model. Then the optimal profile is  $x^{opt} \approx (5.786, 4.214)$ . The externalities  $(b'_{12}, b'_{21}) \approx (0.05, -0.025)$  introduced into the system will make this profile  $x^{opt}$  an equilibrium, however not affecting its optimality for the entire system. For example, if the system has the initial externalities  $b_{12} = b_{21} = 1$ , then the optimal profile will be  $x^{opt} \approx (6.375, 3.625)$ . The externalities  $(b'_{12}, b'_{21}) \approx (0.725, 1.55)$  introduced into the system will make this profile  $x^{opt}$  an equilibrium, not affecting its optimality as well.

### § 14.3.2 $n$ -channel system

Like in the case of two channels, the system of equations (14.1.1) yields the optimal profile  $x^{opt}$ . Find  $x^{opt}$  and remember. These is an optimal profile that the system wants to provide changing the original externalities  $b$  to new  $b'$ .

The externalities  $b'$  under which a given profile  $x$  is an optimum and also an equilibrium can be found from system (14.2.1). In the case under consideration, this approach leads to the system of  $2(n - 1)$  linear equations for the  $n(n - 1)$

unknowns  $b'$  :

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} (t_i b'_{ij} + t_j b'_{ji}) x_j - \sum_{j \neq n} (t_k b'_{nj} + t_j b'_{jn}) x_j &= t_n - t_i + 2a_n t_n x_n - 2a_i t_i x_i \\ \sum_{j \neq i} t_i b'_{ij} x_j - \sum_{j \neq n} t_n b'_{nj} x_j &= t_n - t_i + a_n t_n x_n - a_i t_i x_i \\ i &= 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Express  $2(n-1)$  unknowns, partially,  $b'_{1j}$  and  $b'_{j1}$  ( $j = 2, \dots, n$ ), through  $x$  and the free components  $b'_{ij}$ ,  $i, j > 1$ . Assume that  $b'_{ij} := b_{ij}$  for  $i, j > 1$ .

Substituting  $x^{opt}$  into the resulting expressions for  $b'$ , calculate the externalities ensuring the optimal equilibrium behavior of all users for the system.

### § 14.3.3 Cost of socialization for transportation system

The new values of externalities change the delay functions in the system. In the general case, this may affect (increase or reduce) the social costs. Analyze how much the system will suffer or win in the model under consideration while ensuring optimal behavior of all users.

Consider the two-channel system and compare the optimal social costs before and after the socialization procedure. Let  $x^{opt}$  be an optimal profile calculated under given externalities  $b = (b_{12}, b_{21})$  before socialization. During the socialization procedure the system assigns new externalities  $b' = (b'_{12}, b'_{21})$ , ensuring that the optimal profile  $x^{opt}$  will be implemented in the equilibrium as well.

System (14.1.1) holds for the profile  $x^{opt}$  with the externalities  $b$  as well as for the same profile with the new externalities  $b'$ , by construction of  $b'$ . In particular,  $g_1(x^{opt}, b) = g_2(x^{opt}, b)$  and  $g_1(x^{opt}, b') = g_2(x^{opt}, b')$ , and consequently

$$t_1 b_{12} + t_2 b_{21} = \frac{2(a_2 t_2 x_2^{opt} - a_1 t_1 x_1^{opt}) + t_2 - t_1}{x_2^{opt} - x_1^{opt}} = t_1 b'_{12} + t_2 b'_{21}.$$

For the two-channel system, the social costs in a profile  $x$  with externalities  $b$  are given by

$$SC(x, b) = x_1 t_1 (1 + a_1 x_1) + x_2 t_2 (1 + a_2 x_2) + x_1 x_2 (t_1 b_{12} + t_2 b_{21}).$$

Then  $SC(x^{opt}, b) = SC(x^{opt}, b')$ .

Consider the  $n$ -channel system. Let  $x^{opt}$  be an optimal profile calculated under given externalities  $b$  using the system (14.1.1). In particular, the equations

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} (t_i b_{ij} + t_j b_{ji}) x_j^{opt} - \sum_{j \neq n} (t_n b_{nj} + t_j b_{jn}) x_j^{opt} &= t_n - t_i + 2a_n t_n x_n^{opt} - 2a_i t_i x_i^{opt} \\ i &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (14.3.3)$$

are satisfied with the initial externalities  $b$ .

Denote  $\beta_{ij}(b) := t_i b_{ij} + t_j b_{ji}$ ,  $i < j$ , write the system (14.3.3) of  $(n-1)$  linear equations for the  $\frac{n(n-1)}{2}$  unknowns  $\beta(b)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} \beta_{ij}(b) x_j^{opt} - \sum_{j \neq n} \beta_{jn}(b) x_j^{opt} &= t_n - t_i + 2a_n t_n x_n^{opt} - 2a_i t_i x_i^{opt} \\ i &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (14.3.4)$$

From the system (14.3.4) we can express  $(n-1)$  unknowns,  $\beta_{1j}(b)$ ,  $j = 2, \dots, n$ , through  $x^{opt}$  and the free components  $\beta_{ij}(b)$  where  $i, j > 1$ .

During the socialization procedure the system assigns new externalities  $b'$  ensuring that the optimal profile  $x^{opt}$  will be implemented in the equilibrium as well. Remember that by construction  $b'_{ij} = b_{ij}$  for  $i, j > 1$ .

Also by construction of  $b'$  the equations

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} (t_i b'_{ij} + t_j b'_{ji}) x_j^{opt} - \sum_{j \neq n} (t_n b'_{nj} + t_j b'_{jn}) x_j^{opt} &= t_n - t_i + 2a_n t_n x_n^{opt} - 2a_i t_i x_i^{opt} \\ i &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (14.3.5)$$

are satisfied with the new externalities  $b'$ .

Denote  $\beta_{ij}(b') := t_i b'_{ij} + t_j b'_{ji}$ ,  $i < j$ , write the system (14.3.5) of  $(n-1)$  linear equations for the  $\frac{n(n-1)}{2}$  unknowns  $\beta(b')$ .

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} \beta_{ij}(b') x_j^{opt} - \sum_{j \neq n} \beta_{jn}(b') x_j^{opt} &= t_n - t_i + 2a_n t_n x_n^{opt} - 2a_i t_i x_i^{opt} \\ i &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (14.3.6)$$

From the system (14.3.6) we can express  $(n-1)$  unknowns,  $\beta_{1j}(b')$ ,  $j = 2, \dots, n$ , through  $x^{opt}$  and the free components  $\beta_{ij}(b')$  where  $i, j > 1$ . Note that since  $\beta_{ij}(b') = \beta_{ij}(b)$  for  $i, j > 1$  (as  $b'_{ij} = b_{ij}$  for  $i, j > 1$ ), it yields that all  $\beta_{ij}(b') = \beta_{ij}(b)$ .

The social costs in a profile  $x^{opt}$  are given by

$$\begin{aligned}
SC(x^{opt}, b) &= \sum_{i=1}^n x_i^{opt} t_i (1 + a_i x_i^{opt}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} x_i^{opt} x_j^{opt} t_i b_{ij} = \\
&\sum_{i=1}^n x_i^{opt} t_i (1 + a_i x_i^{opt}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j > i} x_i^{opt} x_j^{opt} (t_i b_{ij} + t_j b_{ji}) = \\
&\sum_{i=1}^n x_i^{opt} t_i (1 + a_i x_i^{opt}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j > i} x_i^{opt} x_j^{opt} \beta_{ij}(b) = \\
&\sum_{i=1}^n x_i^{opt} t_i (1 + a_i x_i^{opt}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j > i} x_i^{opt} x_j^{opt} \beta_{ij}(b') = SC(x^{opt}, b').
\end{aligned}$$

In other words, the transportation system with  $n \geq 2$  parallel channels has the following property.

**Theorem 14.4.** *When applying the socialization procedure of user behavior, the  $n$ -channel parallel transportation system ensures an optimal profile of user behavior and the same value of the social costs as in the optimal profile with initial externalities.*

## § 14.4 Results

In this part the Wardrop model with splittable traffic as applied to the  $n$ -channel parallel transportation system with BPR delay functions and linear externalities has been considered.

Two possible scenarios of applying externalities for the systems with two, three, and  $n$  channels have been suggested. The first scenario is to find an optimal equilibrium profile and the corresponding externalities in the case when the delay of only one channel depends on the traffic flows on all other channels. For this scenario, an explicit-form solution has been obtained, and its feasibility conditions have been established.

The second scenario is to socialize the equilibrium behavior of all traffic participants (users of the system). For this scenario, the externalities ensuring the optimal equilibrium behavior of all users have been calculated, and it has been demonstrated that the socialization procedure does not change the value of social costs.



## Conclusions

The thesis presents the results of the study of the players behavior in networking games of resource sharing. The paper investigates the equilibrium and optimal behavior of players, as well as the possibility of controlling the behavior of selfish players to optimize their behavior.

In the thesis we have constructed game-theoretic models for a two-server random-access system with loss in two settings: rationally random and pure random access, each of which is studied for cases of deterministic and random number of players obeying the Poisson distribution. As it has been proven, for each of considered model variant there exists a unique symmetric equilibrium with the following features: at the zero time the players send their requests to the system with a certain positive probability, and then on a time interval  $[t_e, T]$  the density function of the arrival times in the system takes positive values. In the case of two players in the pure random access system the equilibrium has been constructed analytically; on the interval  $[t_e, T]$  the equilibrium distribution has the exponential form. For both settings, we have also suggested the equilibrium calculation algorithms. Finally, numerical experiments have been performed to compare the equilibria under different parameter values. Also we have offered a comparison between competitive and cooperative behavior in the service system based on the concept of price of anarchy for the fixed and random number of players.

We have offered a game-theoretic model for a single-server queueing system with strategic users in which customers (players) enter the system with preemptive access on a time interval  $[0, T]$ . We considered cases when the number of players is fixed and is a random variable with a known distribution law. As it has been proven, there exists a unique symmetric equilibrium with the following features. The non-zero density function of the arrival times is defined at the time interval  $[0, t_e]$ . On a time

interval  $[t_e, T]$  there are no arrivals. At the instant  $T$  the players send their requests to the system with a certain positive probability  $p$ . Some numerical experiments have been performed to compare the equilibria under different values of the model parameters. Also we have offered a comparison between competitive and cooperative behavior in the service system based on the concept of price of anarchy for the fixed and random number of players.

We have constructed a single-server retrial queueing system. For the cases of two and three players we have proved that the optimal strategy is such that a player enters the system with a non-zero probability at the initial moment of time, further there is a pause without arrivals, and then there is a non-zero density function of the arrival times is defined at the time interval  $[t_e, T]$ . We have also suggested the equilibrium calculation algorithm and numerical experiments have been performed to find the equilibria under different values of the model parameters.

We have modeled a one-dimensional base station selection game by considering not only the number of users connected to the BS but also the distances from each user to stations and the noise level. We have obtained pure and mixed Nash equilibria for two-players game with and without knowledge of opponent's location, and also areas of equilibria existence. For an arbitrary number of players we have offered a KP-like model with full information where all players' locations are known. We performed some numerical experiments to compare an efficiency of closest station selection strategies with equilibria in games of two players with known and unknown opponent's location for cases of low and high noise level.

The two-step game, modeling behavior of two virtual operator on telecommunication market. We have constructed the equilibrium and stationary solutions for this game, calculated the optimal strategies of virtual operators at each step and established the existence conditions of a pure strategy equilibrium at the first step. For the cases in which the clients have company- or operator-dependent preferences, we have demonstrated that the system comes to a stationary state at most after three transitions. The same result has been obtained for the game involving three or more operators and clients with company-dependent preferences.

In the KP-model of the problem of optimal traffic routing in the network for the

case of identical channels, we have found the linear and quadratic social costs in a fully mixed equilibrium. In the same model, for the cases of different channels, we have found the linear and quadratic costs of the system in a completely mixed equilibrium, as well as the conditions for the worsening of such an equilibrium with adding a new channel to the system.

In the load balancing game with the service system composed of  $N$  processors and  $n$  players we have obtained the upper estimate for the price of anarchy. Moreover, we have established the conditions when the upper estimate represents the exact PoA value. The sufficient conditions for PoA increase have been also obtained under new processor inclusion into the system. For the three-processor model we have constructed the upper estimate for the PoA and the conditions when it coincides with the exact PoA value, as well as have proposed a computing algorithm of the exact PoA value. The algorithm can be generalized to systems with more machines. And finally, we have implemented the algorithm as a program and conducted numerical experiments for comparing the obtained estimates of the PoA with its exact value. The results of these experiments have demonstrated the correctness of the derived estimates.

For the load balancing game with linear externalities we have determined the assumptions that ensure the adequate behavior of the system. It is shown that in the general case, even under the above assumptions, a pure Nash equilibrium may not exist. For the case of two processors, in this model, the existence of a pure Nash equilibrium is proved and an analytical expression for the price of anarchy is obtained. Numerical experiments are presented that make it possible to visually assess the dependence of the anarchy price on the system parameters, as well as compare this value with the anarchy price for a model without externalities.

In the cover game with the service system composed of  $N$  processors and  $n$  players we have obtained the lower estimate for the price of anarchy. For the three-processor model we have determined the exact value of the price of anarchy and showed that the PoA increases or does not change under new processor inclusion into the system of two processors. Also we have proposed a computing algorithm of the exact PoA value. The algorithm can be generalized to systems with more processors. And

finally, we have implemented the algorithm as a program and conducted numerical experiments for comparing the obtained estimates of the PoA with its exact value. The results of these experiments have demonstrated the correctness of the derived estimates. For the case of four-processor system computing experiments demonstrate partial PoA coinciding for three and four-processor systems.

For the cover game with linear externalities for the case of two processors we have obtained an exact analytical expression for the price of anarchy. We show that the price of anarchy is limited in contrast to the initial KP cover model without externalities.

We have proposed a computing algorithm of the exact PoA value. The algorithm can be generalized to systems with more than three processors. We have implemented the algorithm as a program and conducted numerical experiments for visual estimates of the PoA in the game with two processors and linear externalities, always possessing a pure Nash equilibrium.

We have constructed the game based on Wardrop model with parallel links with the system where all users adhere to the equilibrium flow splitting strategies. We have considered two models with different delay functions of form  $\frac{\delta}{c-\delta}$  and  $1 - e^{-\alpha\delta}$ . For the first one we have shown the social optimality of the Wardrop equilibrium in the network with parallel links and have found the equilibrium in the case where all users have right to use any link in the network. For the second model we have found an equilibrium and upper bound for the price of anarchy and have shown that it can be at most 1.3.

We have constructed a Bayesian routing game in network with parallel links where selfish users send traffic of different types and each knows only his own traffic type. For this model we have defined equilibria: Wardrop equilibrium, that always exists, as shown here, and can be found using potential function, and its special case Bayesian Wardrop equilibrium.

In the thesis the Wardrop model with splittable traffic as applied to the  $n$ -channel parallel transportation system with BPR delay functions and linear externalities has been considered. We have suggested two possible scenarios of applying externalities for the systems with two, three, and  $n$  channels. The first scenario is to find an

optimal equilibrium profile and the corresponding externalities in the case when the delay of only one channel depends on the traffic flows on all other channels. For this scenario, an explicit-form solution has been obtained, and its feasibility conditions have been established. The second scenario is to socialize the equilibrium behavior of all traffic participants (users of the system). For this scenario, the externalities ensuring the optimal equilibrium behavior of all users have been calculated, and it has been demonstrated that the socialization procedure does not change the value of social costs.

The results obtained are both theoretical and applicable, presenting methods for analyzing and improving the performance of computer, telecommunications and transport networks used in practice by constructing and evaluating schemes for distributing network resources among users.

# Bibliography

- [1] Abusubaih, M. & Wolisz, A. Interference-aware decentralized access point selection policy for multi-rate IEEE 802.11 wireless lans. // Personal, Indoor And Mobile Radio Communications, 2008. PIMRC 2008. IEEE 19th International Symposium On. P. 1-6 (2008)
- [2] Acemoglu, D., Ozdaglar, A. Flow control, routing, and performance from service provider viewpoint. LIDS report, 2004. 74.
- [3] Ali-Eldin A., Kihl M., Tordsson J., Elmroth E., Efficient provisioning of bursty scientific workloads on the cloud using adaptive elasticity control, in: Proceedings of the 3rd Workshop on Scientific Cloud Computing Date, ACM, New York, NY, USA, 2012, P. 31-40.
- [4] Altman E. A Markov game approach for optimal routing into a queueing network // INRIA report N 2178, 1994.
- [5] Altman E. Applications of dynamic games in queues // Advances in Dynamic Games, 2005, 7, P. 309-342.
- [6] Altman E., Boulogne T., El-Azouzi R., Jimenez T., Wynter L. A survey on networking games in telecommunications // Computers & OR. 2006. 33. P. 286-311.
- [7] Altman E., Hassin R. Non-Threshold Equilibrium for Customers Joining an M/G/1 Queue Non-Threshold Equilibrium for Customers Joining an M/G/1 Queue // Proceedings of 10th International Symposium on Dynamic Game and Applications. 2002. URL: <http://www-sop.inria.fr/maestro/personnel/Eitan.Altman/PAPERS/hassin.ps>.

- [8] Altman E., Jimenez T., Nunez Queija R. and Yechiali U. Optimal routing among  $M/1$  queues with partial information // *Stochastic Models*, 2004, 20, N 2, P. 149-172.
- [9] Altman E., Koole G. Stochastic scheduling games with Markov decision arrival processes // *Journal Computers and Mathematics with Appl.*, 1993, 26, N 6, P. 141-148.
- [10] Altman E., Shimkin N. Individually Optimal Dynamic Routing in a Processor Sharing System // *Operations Research*, 1998, P. 776-784.
- [11] Altman E., Wynter L. Equilibrium, games, and pricing in transportation and telecommunications networks // *Crossovers between Transportation Planning and Telecommunications*, 2004, 4, N 1, P. 7-21.
- [12] Altman, E.; Borovkov, A.A. On the stability of retrial queues. *Queueing Syst.* 1997, 26, 343-363.
- [13] Andelman N., Feldman M., Mansour Y. Strong price of anarchy // *Proc. of the 18th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, 2007. - P. 189-198.
- [14] Ardagna D., Panicucci B., Passacantando M. A game theoretic formulation of the service provisioning problem in cloud systems, in: *Proceedings of the 20th International Conference on World Wide Web*, ACM, New York, NY, USA, 2011, P. 177-186.
- [15] Armstrong M. Competition in two-sided markets // *The RAND Journal of Economics*. 2006. Vol. 37. No. 3. P. 668-691.
- [16] Artalejo J.R., Gomez-Corral A. *Retrial Queueing Systems: A Computational Approach*. Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2008.
- [17] Avrachenkov K., Singh V.V., Stokhasticheskaya koalitsionnaya dinamika uluchshennogo otveta i ustoychivoye ravnovesiye // *Matematicheskaja teorija igr i ee prilozhenija*. 2016. Vol. 8 N. 1. P. 4–26.; Avrachenkov K., Singh V.V.,

Stochastic coalitional better-response dynamics and stable equilibrium // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77. N. 12. P. 2227–2238.

- [18] Avrachenkov K., Morozov E., Steyaert, B. Sufficient stability conditions for multi-class constant retrial rate systems // Queueing Syst. 2016. 82. P. 149-171.
- [19] Awerbuch B., Azar Y., Epstein A. The Price of Routing Unsplittable Flow // Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'05), 2005, P. 57-66.
- [20] Awerbuch B., Azar Y., Epstein A. The price of routing unsplittable flow // Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2005). 2005. P. 331-337.
- [21] Awerbuch B., Azar Y., Richter Y, Tsur D. Tradeoffs in worst-case equilibria // Proceedings of 1st WAOA. 2003. P. 41-52.
- [22] Azariadis C., Chen B.-L., Lu C.-H., Wang Y.-C. A two-sector model of endogenous growth with leisure externalities // Journal of Economic Theory. 2013. Vol. 148. P. 843-857.
- [23] Bala V., Goyal S. A non-cooperative model of network formation // Econometrica. 2000. Vol. 68. N. 5. P. 1181–1231.
- [24] Bean N.G., Kelly F.P., Taylor P.G. Braess' Paradox in a Loss Network, Journal of Applied Probability. 1997. 34. P. 155-159.
- [25] Belkovskii D.V., Garnaev A.Y. A Competitive Prediction Number Game under Unsymmetrical Conditions // Game Theory and Applications. 2005. Vol. X. Nova Sci. Publ., Commack, NY. P. 27-36.
- [26] Boon M.A.A. A polling model with renegeing at polling instants // Ann. Oper. Res. 2012. 198. P. 5–23.
- [27] Braess D. Über ein Paradoxon der Verkehrsplanung // Unternehmensforschung. 1968. Vol. 12. P. 258-268.



- [28] Bramoullè Y., Kranton R. Public goods in networks // *Journal of Economic Theory*. 2007. V. 135. P. 478-494.
- [29] Breinbjerg J., Platz T. T., Østerdal L. P. Equilibrium Arrivals to a Last-come First-served Preemptive-resume Queue, Working Papers 17-2020, Copenhagen Business School, Department of Economics. (2020)
- [30] Brynjolfsson E., Hofmann P., Jordan J. Cloud computing and electricity: beyond the utility model // *Commun. ACM*. 2010. 53. P. 32-34.
- [31] Burkov V. N., Kuznetsov N. A., Novikov D. A. Mekhanizmy upravleniya v setevykh strukturakh [Mechanisms of control in network structures] // *Avtomatika i telemekhanika*. 2002. N. 12. P. 96–115. (in Russian)
- [32] Buyya R., Pandey S., Vecchiola C. Cloudbus Toolkit for Market-Oriented Cloud Computing // *IEEE International Conference on Cloud Computing, Beijing, 1-4 December 2009*. 2009. Vol. 5931. P. 24-44.
- [33] Cesana M., Gatti N., Malanchini I. Game theoretic analysis of wireless access network selection: models, inefficiency bounds, and algorithms. // *Proceedings Of The 3rd International Conference On Performance Evaluation Methodologies And Tools*. 2008. P. 6.
- [34] Cesana M., Malanchini I., Capone A. Modelling network selection and resource allocation in wireless access networks with non-cooperative games // *2008 5th IEEE International Conference on Mobile Ad Hoc and Sensor Systems*. 2008. P. 404-409.
- [35] Chaisiri S., Lee B.-S., Niyato D. Optimization of Resource Provisioning Cost in Cloud Computing // *IEEE Transactions on Services Computing*. 2012. Vol. 5. N. 2. P. 164-177.
- [36] Chang F., Ren J., Viswanathan R. Optimal resource allocation in clouds // *Proceedings of the 3rd International Conference on Cloud Computing, Cloud 2010, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA*. 2010. P. 418-425.

- [37] Chen L. A distributed access point selection algorithm based on no-regret learning for wireless access networks // Vehicular Technology Conference (VTC 2010-Spring), 2010 IEEE 71st. 2010. P. 1-5. Maximizing the minimum load: The cost of selfishness // Theor. Comput. Sci. 2013. 482. P. 9-19.
- [38] Chen X., Epstein L., Kleiman E. et al. Maximizing the minimum load: The cost of selfishness // Theor. Comput. Sci. 2013. 482. P. 9-19.
- [39] Chirkova J., Mazalov V., Morozov E. Equilibrium in a Queueing System with Retrials // Mathematics. 2022. Vol. 10. N. 3. 428.
- [40] Chirkova J.V., Mazalov V.V. Optimal Arrivals to Preemptive Queueing System // Mathematical Optimization Theory and Operations Research. 21st International Conference, MOTOR 2022, Petrozavodsk, Russia, July 2–6, 2022, Proceedings. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 13367. Springer, Cham. 2022. P. 169-181.
- [41] Chirkova J.V. Computing the Price of Anarchy in Processor Load Balancing Game with Linear Delays // Contributions to Game Theory and Management. 2021. Vol. 14. P. 72-81.
- [42] Chirkova J.V. Maximizing the Minimum Processor Load with Linear Externalities // Strelakovsky A., Kochetov Y., Gruzdeva T., Orlov A. (eds). Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends. MOTOR 2021. Communications in Computer and Information Science. 2021. Vol. 1476. Springer, Cham. P. 147-162.
- [43] Chirkova J.V., Mazalov V.V. Optimal externalities in a parallel transportation network // Optimization Letters. 2022. 16. P. 1971–1989.
- [44] Chirkova Yu.V. Igra balansirovaniya zagruzki s lineynymi eksternaliyami [Load Balancing Game with Linear Externalities] // Matematicheskaya Teoriya Igr i ee Prilozheniya. 2021. Vol. 13. N. 2. P. 62-79. (in Russian); Chirkova Yu. V. Machine Load Balancing Game with Linear Externalities // Automation and Remote Control. 2022. Vol. 83. N. 9. P. 1476–1490.

- [45] Chirkova Yu.V. Optimal'nyye obrashcheniya k 2-servernoy sisteme s poteryami i ratsional'nym sluchaynym dostupom [Optimal Arrivals in a Two-Server Rational Random-Access System with Loss] // Matematicheskaya Teoriya Igr i ee Prilozheniya. 2016. Vol. 8. N. 3. 2016. P. 67-99. (in Russian); Chirkova Yu.V. Optimal Arrivals in a Two-Server Rational Random-Access System with Loss // Automation and Remote Control. Vol. 81. N. 7. 2020. P. 1345–1365.
- [46] Chirkova Yu.V. Optimal'nyye obrashcheniya k 2-servernoy sisteme s poteryami i sluchaynym dostupom [Optimal arrivals in a two-server random access system with loss] // Matematicheskaya Teoriya Igr i ee Prilozheniya. 2015. Vol. 7, N. 3. P. 79-111. (in Russian); Chirkova Yu.V. Optimal arrivals in a two-server random access system with loss // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78. Iss. 3. P. 557-580.
- [47] Chirkova Yu.V. Tsena anarkhii v igre balansa zagruzki sistemy obsluzhivaniya [Price of anarchy in machine load balancing game] // Matematicheskaya Teoriya Igr i ee Prilozheniya. 2012. Vol. 4. N. 4. P. 93-113. (in Russian); Chirkova Yu.V. Price of anarchy in machine load balancing game // Automation and Remote Control. 2015. Vol. 76. N. 10. P. 1849-1864.
- [48] Chirkova Yu.V. Tsena anarkhii v igre balansa zagruzki sistemy obsluzhivaniya s tremya mashinami [Price of anarchy in machine load balancing game with 3 machines] // Matematicheskaya Teoriya Igr i ee Prilozheniya. 2014. Vol. 6. N. 4. P. 85-96. (in Russian)
- [49] Chirkova Yu.V. Tsena anarkhii v zadache maksimizatsii minimal'noy zaderzhki mashin v sisteme obsluzhivaniya [Price of Anarchy for Maximizing the Minimum Machine Load] // Upravleniye bol'shimi sistemami. 2016. Iss. 62. P. 30-59. (in Russian); Chirkova Yu.V. Price of Anarchy for Maximizing the Minimum Machine Load // Advances in Systems Science and Applications. 2017. Vol. 17. N. 4. P. 61-77.
- [50] Chirkova Yu.V. Zadacha vybora i razmeshcheniya bazovykh stantsiy v besprovodnoy seti [Base Stations Selection and Placement in Wireless Network] // Upravleniye bol'shimi sistemami. 2020. Iss. 87. P. 26-46. (in Russian)

- [51] Choi B.D., Rhee K.H., Park K.K. The M/G/1 retrial queue with retrial rate control policy // Probability in the Engineering and Informational Sciences; Cambridge University Press: Cambridge, UK. 1993. Vol. 7. P. 29-46.
- [52] Christodoulou G., Koutsoupias E., Nanavati A. Coordination mechanisms // Theoretical Computer Science. 2009. Vol. 410. P. 3327-3336.
- [53] Christodoulou G., Koutsoupias E. On the price of anarchy and stability of correlated equilibria of linear congestion games // Lecture Notes in Computer Science. 2005. Vol. 3669, P. 59-70.
- [54] Christodoulou G., Koutsoupias E. The price of anarchy of finite congestion games // Proc. of 37th annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2005). 2005. P. 67-73.
- [55] Chuiko J.V., Mazalov V.V. Nash Equilibrium in Splittable Traffic Routing Problem // Proceedings of Kosen Workshop MTE2008 - Mathematics, Technology and Education - Ibaraki National College of Thechnology, Hitachinaka, Ibaraki, Japan, 2008. 2008. P. 13-18.
- [56] Chuyko J., Polishchuk T., Mazalov V., Gurtov A. Wardrop Equilibria and Price of Anarchy in Multipath Routing Games with Elastic Traffic // Game Theory and Applications. 2011. Vol. 15. P. 11-22.
- [57] Chuyko Yu.V. Ravnovesiye po Neshu v zadache optimal'noy marshrutizatsii trafika v seti peredachi dannykh [Nash equilibrium in traffic optimal routing problem in data network] // Sistemy upravleniya i informatsionnyye tekhnologii. 2006. N 4(26). P. 37-40. (in Russian)
- [58] Chuyko Yu.V. Zadacha marshrutizatsii s razdelyayemym trafikom i nepolnoy informatsiyey [Splittable traffic routing problem with incomplete information] // Matematicheskaya Teoriya Igr i ee Prilozheniya. 2009. Vol. 1. N. 3. P. 107-117. (in Russian); Chuyko Yu.V. Zadacha marshrutizatsii s razdelyayemym trafikom i nepolnoy informatsiyey [Splittable traffic routing problem with incomplete information] // Upravleniye bol'shimi sistemami. 2009. Vol. 26.1. P. 164-176. (in Russian)

- [59] Chuyko Yu.V. Zadacha vybora optimal'nogo momenta obrashcheniya k sisteme massovogo obsluzhivaniya dlya dvukh igrokov [The problem of optimal arrival moment choosing in the queuing system for two players] // Metody matematicheskogo modelirovaniya i informatsionnyye tekhnologii. 2005. Trudy IPMI. Iss. 6. P. 243-252. (in Russian)
- [60] Cole R., Dodis Y., Roughgarden T. Pricing network edges for heterogeneous selfish users // Proceedings of the 4th ACM conference on Electronic commerce. 2003. P. 98-107.
- [61] Cole R., Dodis Y., Roughgarden T. How much can taxes help selfish routing? // Journal of Computer and System Sciences. 2006. V. 72. P. 444-467.
- [62] Correa J.R., Stier-Moses N.E. Wardrop Equilibria. John Wiley & Sons, Inc., 2011.
- [63] Dimitriou I. A queueing system for modeling cooperative wireless networks with coupled relay nodes and synchronized packet arrivals // Perform. Eval. 2017. Vol. 114(C). P. 16-31.
- [64] Dresher, M. Strategicheskiye igry / M. Dresher. - M.: Izdatel'stvo "Sovetskoye radio", 1964. (in Russian)
- [65] Dumrauf D., Gairing M. Price of anarchy for polynomial Wardrop games // Internet and Network Economics, Second International Workshop, WINE 2006, Patras, Greece, December 15-17, 2006. 2006. P. 319-330.
- [66] Easley D., Kleinberg J. Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about Highly Connected World. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [67] El Azouzi R., Altman E. Constrained Traffic Equilibrium in Routing Networks // IEEE Trans. on Automatic Control. 2003. Vol. 48. N. 9. P. 1656-1660.
- [68] El Azouzi R., Altman E., Wynter L. Telecommunications Network Equilibrium with Price and Quality-of-Service Characteristics // Proc. of ITC, Berlin, Sept 2003. 2003. URL: <http://www-sop.inria.fr/mistral/personnel/Rachid.Elazouzi/R-ElazouziITC.ps>

- [69] Epstein L., Kleiman E., van Stee R. Maximizing the minimum load: the cost of selfishness // Proceedings of the 5th International Workshop on Internet and Network Economics, Lecture Notes in Computer Science. 2009. Vol. 5929. P. 232-243.
- [70] Epstein L. Equilibria for two parallel links: the strong price of anarchy versus the price of anarchy // Acta Informatica. 2010. Vol. 47. N. 7-8. P. 375-389.
- [71] Even-Dar E., Kesselman A., Mansour Y. Convergence time to Nash equilibria // Baeten, J.C.M. et al. (eds.) ICALP 2003, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin, Heidelberg. 2003. Vol. 2719, P. 502-513.
- [72] Fabrikant, A., Papadimitriou, C. & Talwar, K. The complexity of pure Nash equilibria. // Proceedings Of The Thirty-sixth Annual ACM Symposium On Theory Of Computing. P. 604-612 (2004)
- [73] Falin G.I., Templeton J.G.D. Retrial Queues, Chapman & Hall: London, UK, 1997.
- [74] Fakinos D. The G/G/1 queueing system with a particular queue discipline // Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological). 1981. Vol. 43.2. P. 190-196.
- [75] Fayolle G. A simple telephone exchange with delayed feedback // Boxma O.J., Cohen J.W., Tijms H.C. (eds.) Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation. Elsevier: North-Holland. 1986. Vol. 7. P. 245-253.
- [76] Feldman M., Snappir Y., Tamir T. The efficiency of best-response dynamics // International Symposium on Algorithmic Game Theory. Springer, Cham. 2017. P. 186-198.
- [77] Feldmann R., Gairing M., Lücking T., Monien B., Rode M., Nashification and the coordination ratio for a selfish routing game // Proc. of the 30th Int. Colloc. on Automata, Languages and Programming, LNCS 2719. 2003. P. 514-526.

- [78] Feldmann R., Gairing M., Lücking T., Monien B., Rode M., Selfish routing in non-cooperative networks: a survey // Proc. of 28th Int. Symp. on Mathematical Foundation of Computer Science, LNCS 2747. 2003. P. 21-45.
- [79] Fleischer L. Linear tolls suffice: New bounds and algorithms for tolls in single source networks // Theoretical Computer Science. 2005. V. 348. P. 217-225.
- [80] Fleischer L., Jain K., Mahdian M. Tolls for heterogeneous selfish users in multicommodity networks and generalized congestion games // Proceedings of the Fourty-Fifth Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 2004. P. 277-285.
- [81] Floyd S., Henderson T., Gurtov A., The NewReno Modification to TCP's Fast Recovery Algorithm, RFC 3782, IETF, Apr. 2004.
- [82] Fotakis D., Kontogiannis S.C., Koutsoupias E., Mavronicolas M., Spirakis P.G. The structure and complexity of nash equilibria for a selfish routing game // Proc. of the 29th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP2002). 2002. P. 123-134.
- [83] Gairing M., Lücking T., Mavronicolas M., Monien B. The price of anarchy for polynomial social cost // Proceedings of the 29th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2004). 2004. P. 574-585.
- [84] Gairing M., Lücking T., Mavronicolas M., Monien B., Rode M. Nash equilibria in discrete routing games with convex latency functions // Proceedings of the 31th Int. Colloc. on Automata, Languages and Programming, LNCS 2719. 2004. P. 645-657.
- [85] Gairing M., Lücking T., Mavronicolas M., Monien B., Spirakis P. Extreme Nash Equilibria // Proceedings of the 8th Italian Conference on Theoretical Computer Science (ICTCS'03), LNCS 2841. 2003. P. 1-20.
- [86] Gairing M., Monien B., Tiemann K. Routing (Un-) Splittable Flow in Games with Player-Specific Linear Latency Functions // Proceedings of the 33rd In-

ternational Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2006), LNCS 4051. 2006. P. 501-512.

- [87] Gairing, M., Monien, B., Tiemann, K. Selfish routing with incomplete information. *Theory Comput. Syst.* 2008. P. 91-130.
- [88] Gao H., Mazalov V.V., Xue J. Optimal Parameters of Service in a Public Transportation Market with Pricing // *Journal of Advanced Transportation*. Vol. 2020. Article ID 6326953. 8 pages. 2020. URL: <https://www.hindawi.com/journals/jat/2020/6326953/>
- [89] Garrison G., Kim S.H., Wakefield R.L. Success factors for deploying cloud computing // *Commun. ACM*. 2012. Vol. 55. N. 9. P. 62-68.
- [90] Ge Y., Zhang Y., Qiu Q., Lu Y.-H. A game theoretic resource allocation for overall energy minimization in mobile cloud computing system // *Proceedings of the 2012 ACM/IEEE International Symposium on Low Power Electronics and Design*, ACM, New York, NY, USA. 2012. P. 279-284.
- [91] Glazer A., Hassin R.  $M/1$ : On the equilibrium distribution of customer arrivals // *Eur. J. Oper. Res.* 1983. Vol. 13. P. 146-150.
- [92] Glazer A., Hassin R. Equilibrium arrivals in queues with bulk service at scheduled times // *Transp. Sci.* 1987. Vol. 21. P. 273-278.
- [93] Gong H., Kim J. Dynamic Load Balancing Through Association Control of Mobile Users in WiFi Networks // *IEEE Transactions on Consumer Electronics*. 2008. Vol.54. Iss. 2. P 342-348.
- [94] Haddad M., Elayoubi S.E., Altman E.: A Hybrid Approach for Radio Resource Management in Heterogeneous Cognitive Networks // *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*. 2011. Vol. 29(4). P. 831–842.
- [95] Hagstrom J.N., Abrams R.A. Characterizing Braess's paradox for traffic networks // *Proceedings of IEEE 2001 Conference on Intelligent Transportation Systems*. 2001. P. 837-842.



- [96] Hassin R. On the optimality of first come last served queues // *Econometrica*. 1985. Vol. 53(1). P. 201–202.
- [97] Hassin R., Kleiner Y. Equilibrium and optimal arrival patterns to a server with opening and closing times // *IIE Trans.* 2011. Vol. 43. P. 164-175.
- [98] Haviv M. When to arrive at a queue with tardiness costs // *Perform. Eval.* 2013. Vol. 70. P. 387-399.
- [99] Haviv M., Kella O., Kerner, Y. Equilibrium strategies in queues based on time or index of arrival // *Prob. Eng. Inform. Sci.* 2010. Vol. 24. P. 13–25.
- [100] Haviv M., Ravner L. A survey of queueing systems with strategic timing of arrivals // *Queueing Syst.* 2021. Vol. 99 P. 163–198.
- [101] Holzman R., Monderer D. Strong equilibrium in network congestion games: Increasing versus decreasing costs // *Int. J. Game Theory.* 2015. Vol. 44. P. 647-666.
- [102] M. Hong, A. Garcia and J. Barrera, Joint distributed access point selection and power allocation in cognitive radio networks, 2011 Proceedings IEEE INFOCOM, 2011, pp. 2516-2524, doi: 10.1109/INFOCOM.2011.5935075.
- [103] Irwin D., Urgaonkar B. Research challenges at the intersection of cloud computing and economics. – National Science Foundation, 2018.
- [104] Jacobs J. *The economy of cities*. Random House, New York, 1969.
- [105] Jahn O., Möhring R.H., Schulz A.S., Stier-Moses N.E. System-optimal routing of traffic flows with user constraints in networks with congestion // *Operations Research.* 2003. Vol. 53. P. 600-616.
- [106] Jain R., Juneja S., Shimkin N. The concert queueing game: To wait or to be late // *Discret. Event Dyn. Syst.* 2011. Vol. 21. P. 103-138.
- [107] Jiang L., Parekh S., Walrand J. Base station association game in multi-cell wireless networks (special paper). // *Wireless Communications And Networking Conference, 2008. WCNC 2008. IEEE.* 2008. P. 1616-1621.

- [108] Johnson O., Goldschmidt C. Preservation of log-concavity on summation // ESAIM: Probability and Statistics. 2006. Vol. 10. P. 206-215.
- [109] Judd G., Steenkiste P. Fixing 802.11 access point selection // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. 2002. Vol. 32. P. 31.
- [110] Karakitsiou A., Migdalas A. Locating facilities in a competitive environment // Optimization Letters. 2017. Vol. 11(5). P. 929-945.
- [111] Karakostas G., Kim T., Viglas A., Xia H. On the degradation of performance for traffic networks with oblivious users // J. Transportation Research. Part B. 2011. Vol. 45. P. 364-371.
- [112] Karakostas G., Kolliopoulos S.G. Edge pricing of multicommodity networks for heterogeneous selfish users // Proceedings of the Fourty-Fifth Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 2004. P. 268-276.
- [113] Kiiski A., Hämmäinen H. Mobile virtual network operator strategies: Case Finland //ITS 15th Biennial conference. – 2004. URL: [http://www.netlab.tkk.fi/tutkimus/lead/leaddocs/KiiskiHammainen\\_MVNO.pdf](http://www.netlab.tkk.fi/tutkimus/lead/leaddocs/KiiskiHammainen_MVNO.pdf)
- [114] Killelea P. Web Performance Tuning: Speeding Up the Web, O'Reilly Media, Inc., 2002.
- [115] Kim J., Kim B. A survey of retrial queueing systems // Ann. Oper. Res. 2016. Vol. 247. P. 3-36.
- [116] Kllapi H., Sitaridi E., Tsangaris M. M., Ioannidis Y. Schedule optimization for data processing flows on the cloud // Proceedings of the 2011 ACM SIGMOD International Conference on Management of data, SIGMOD '11, ACM, New York, NY, USA. 2011. P. 289-300.
- [117] Kopper K. The Linux Enterprise Cluster: Build a Highly Available Cluster with Commodity Hardware and Free Software, No Starch Press, 2005.
- [118] Korilis Y.A., Lazar A.A., Orda A. Architecting noncooperative networks // J. on Selected Areas in Communications. 1995. Vol. 13, N. 7. P. 1241-1251.

- [119] Korilis Y.A., Lazar A.A., Orda A. Avoiding the Braess's paradox for traffic networks // J. Appl. Probability. 1999. Vol. 36. P. 211-222.
- [120] Koutsoupias E., Papadimitriou C.H. Worst-case Equilibria // Proceedings of STACS 1999. 1999. Vol. 1563. P. 404-413.
- [121] Krylatov A.Y., Zakharov V.V., Malygin I.G. Competitive Traffic Assignment in Road Networks // Transport and Telecommunication. 2016. Vol. 17. N. 3. P. 212-221.
- [122] Kuang Z., Lian Z., Lien J.W., Zheng J. Serial and parallel duopoly competition in multi-segment transportation routes // Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review. 2020. Vol. 133(6). 101821.
- [123] Kuang Z., Mazalov V.V., Tang X., Zheng J.: Transportation network with externalities // J. Comput. Appl. Math. 2021. Vol. 382. 113091.
- [124] Kul'gin M. Praktika postroyeniya komp'yuternykh setey. Dlya professionalov. - SPb.: Piter, 2001. (in Russian)
- [125] Law, L.M., Huang, J. and Liu, M., 2012. Price of anarchy of wireless congestion games. IEEE Trans. Wireless Commun., 11(10), pp.3778-3787.
- [126] Lücking T., Mavronicolas M., Monien B., Rode M. A New Model for Selfish Routing // Proceedings of STACS 2004. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2996. 2004. P. 547-558.
- [127] Lücking T., Mavronicolas M., Monien B., Rode M., Spirakis P., Vrto I. Which is the Worst-case Nash Equilibrium? // Proceedings of the 26th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science, 2003, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2747. 2003. P. 551-561.
- [128] Lien J.W., Mazalov V.V., Melnik A.V., Zheng J. Wardrop equilibrium for networks with the BPR latency function // Discrete Optimization and Operations Research. Lecture Notes in Computer Science. 2016. V. 9869. P. 37-49.

- [129] Lin H., Roughgarden T., Tardos E. On Braess's paradox // Proceedings of the 15th Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA04). 2004. P. 333–334.
- [130] Liyanage M., Chirkova J.V., Gurtov A. Access Point Selection Game for Mobile Wireless Users // A World of Wireless, Mobile and Multimedia Networks (WoWMoM), 2014 IEEE 15th International Symposium on Autonomic and Opportunistic Communications, Sydney, Australia; 06/2014. 2014. P. 1-6.
- [131] Mak-Kinsi Dzh. Vvedeniye v teoriyu igr. - M.: Gosudarstvennoye izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1960. (in Russian)
- [132] Mak V., Seale D.A., Gishces E.J. et al. The Braess Paradox and Coordination Failure in Directed Networks with Mixed Externalities // Prod. Oper. Manag. 2018. Vol. 27(4). P. 717-733.
- [133] Mavronicolas M., Spirakis P. The Price of Selfish Routing // Proceedings of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing. 2001. P. 510-519.
- [134] Mazalov V. Mathematical Game Theory and Applications. John Wiley & Sons, 2014. 414 p.
- [135] Mazalov V., Lukyanenko A., Luukkainen S. Equilibrium in cloud computing market // Performance Evaluation. 2015. Vol. 92. P. 40-50.
- [136] Mazalov V. et al. Wardrop equilibria and price of stability for bottleneck games with splittable traffic // International Workshop on Internet and Network Economics. – Springer, Berlin, Heidelberg. 2006. P. 331-342.
- [137] Mazalov V.V., Chirkova Yu.V. Setevyye igry. Izd-vo: Lan', 2018. (in Russian)
- [138] Mazalov V.V., Chirkova Yu.V., Zeng D., Liyen D. Teoretiko-igrovaya model' povedeniya konkuriruyushchikh virtual'nykh operatorov na dvukhstoronnem rynke telekommunikatsiy [A Game-Theoretic Model of Virtual Operators Competition in a Two-Sided Telecommunication Market] // Matematicheskaya Teoriya Igr i ee Prilozheniya. 2017. Vol. 9. Iss. 3. P. 36-63. (in Russian); Mazalov V.V., Chirkova Yu.V., Zheng J., Lien J.W. A Game-Theoretic Model

of Virtual Operators Competition in a Two-Sided Telecommunication Market // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79. Iss. 4. P. 737–756.

- [139] Mazalov V.V., Chuyko Yu.V. Nekooperativnoye ravnovesiye po Neshu v zadache vybora optimal'nogo momenta obrashcheniya k sisteme ob-sluzhivaniya [Non-cooperative Nash equilibrium in optimal arrival time choice in queue system] // Vychislitel'nyye tekhnologii. 2006. Vol.11. N.6. P. 60-71. (in Russian)
- [140] Mazalov V.V., Melnik A.V. Equilibrium Prices and Flows in the Passenger Traffic Problem // International Game Theory Review. 2016. Vol. 18. N. 1. 1650001.
- [141] Mazalov V., Chirkova J. Networking Games. Network Forming Games and Games on Networks. Academic Press: Cambridge, MA, USA, 2019.
- [142] Mazhelis O., Tyrväinen P. Economic aspects of hybrid cloud infrastructure: User organization perspective // Information Systems Frontiers. 2012. Vol. 14. N. 4. – P. 845-869.
- [143] Mazzucco M., Dyachuk D., Deters R. Maximizing cloud providers' revenues via energy aware allocation policies // Proceedings of the 3rd International Conference on Cloud Computing, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA. 2010. P. 131-138.
- [144] Mercer A. A queueing problem in which the arrival times of the customers are scheduled // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1960. P. 108-113.
- [145] Milchtaich I. Congestion games with player-specific payoff functions // Games and Economic Behavior. 1996. Vol. 13. P. 111-124.
- [146] Milchtaich I. Network topology and the efficiency of equilibrium // Games Econ. Behav. 2006. Vol.57(2). P. 321-346.
- [147] Mittal K., Belding E., Suri S. A game-theoretic analysis of wireless access

- point selection by mobile users. // Computer Communications. 2008. Vol. 31. P. 2049-2062.
- [148] Monderer D., Shapley L. Potential games // Games and Economic Behavior. 1996. Vol. 14. P. 124-143.
- [149] Morozov E. A multiserver retrial queue: Regenerative stability analysis // Queueing Syst. 2007. Vol. 56. P. 157-168.
- [150] Morozov E., Morozova T. On the stationary remaining service time in the queueing systems // CEUR Workshop Proc. 2020. Vol. 2792. P. 140-149.
- [151] Morozov E., Phung-Duc T. Stability analysis of a multiclass retrial system with classical retrial policy // Perform. Eval. 2017. Vol. 112. P. 15–26.
- [152] Morozov E., Steyaert B. Stability Analysis of Regenerative Queueing Models. – Springer International Publishing, 2021.
- [153] Morozov E., Zhukova K. The Overflow Probability Asymptotics in a Single-Class Retrial System with General Retrieve Time // Vishnevskiy, V.M., Samouylov, K.E., Kozyrev, D.V. (eds.), International Conference on Distributed Computer and Communication Networks. Springer, Cham. 2021. P. 55-66.
- [154] Mullen E. Teoriya igr s primerami iz matematicheskoy ekonomiki. Per. s frants. - M.: Mir, 1985. (in Russian)
- [155] Murchland J.D. Braess's paradox of traffic flow // Transportation Research. 1970. Vol. 4. P. 391-394.
- [156] Novikov D.A. Setevyye struktury i organizatsionnyye sistemy. M.: IPU RAN. 2003. (in Russian)
- [157] Novikov D.A., Iгры i seti // Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya. 2010. Vol. 2. N.1. P. 107–124. (in Russian) ; Novikov D.A. Games and Networks // Automation and Remote Control. 2014. Vol. 75. Iss. 6. P. 1145–1154.

- [158] Owen G. Game Theory. Monterey, CA: Emerald Group Publishing Limited, 2013.
- [159] Pal R., Hui P. Economic models for cloud service markets: Pricing and capacity planning // Theoretical Computer Science. 2013. Vol. 496. P. 113-124.
- [160] Papadimitriou C.H. Algorithms, games, and the Internet // Proceedings of the 33th Annual ACM STOC. 2001. P. 749-753.
- [161] Pappas N., Kountouris M., Ephremides A., Traganitis A. Relay-assisted multiple access with full-duplex multi-packet reception // IEEE Trans. Wirel. Commun. 2015. Vol. 14. P. 3544-3558.
- [162] Parilina Ye. M., Kooperativnaya igra peredachi dannykh v besprovodnoy seti // Upravlenie bol'shimi sistemami. 2010. Vol. 31.1. P. 191–209. (in Russian)
- [163] Perlaza S., Belmega E., Lasaulce S., Debbah M. On the Base Station Selection and Base Station Sharing in Self-Configuring Networks // 3rd ICST/ACM International Workshop on Game Theory in Communication Networks. 2009. P. 1-10.
- [164] Petrosyan L. A., Sedakov A. A., Bochkarev A. O. Dvukhstupenchatye setevye igry [Twostage network games] // Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya. 2013. Vol. 5. N. 4. P. 84–104. (in Russian); Petrosyan L. A., Sedakov A. A., Bochkarev A. O. Two-stage network games // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77. N. 10. P. 1855–1866.
- [165] Raivio Y., Mazhelis O., Annapureddy K., Mallavarapu R., Tyrväinen P. Hybrid cloud architecture for short message services // Proceedings of the 2nd International Conference on Cloud Computing and Services Science, Closer 2012, SciTePress. 2012. P. 489-500.
- [166] Raj G. An efficient broker cloud management system // Proceedings of the International Conference on Advances in Computing and Artificial Intelligence, ACM, New York, NY, USA. 2011. P. 72-76.

- [167] Rao N., Poole S., He F., Zhuang J., Ma C., Yau D. Cloud computing infrastructure robustness: A game theory approach // 2012 International Conference on Computing, Networking and Communications, ICNC. 2012. P. 34-38.
- [168] Ravner L., Haviv M. Equilibrium and socially optimal arrivals to a single server loss system //2014 7th International Conference on NETwork Games, CONTROL and OPTimization (NetGCoop). IEEE. 2014. P. 119-126.
- [169] Ravner L., Haviv M. Strategic timing of arrivals to a finite queue multi-server loss system // Queueing Systems. 2015. Vol. 81. N. 1. P. 71-96.
- [170] Rogers O., Cliff D. A financial brokerage model for cloud computing //Journal of Cloud Computing: Advances, Systems and Applications. 2012. Vol. 1. N. 1. P. 1-12.
- [171] Rosenthal R.W. A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria // Int. Journal of Game Theory. 1973. Vol. 2. P. 65-67.
- [172] Roughgarden T. On the severity of Braess's paradox: Designing networks for selfish users is hard // J. of Computer and System Sciences, 2006, 72, P. 922-953.
- [173] Roughgarden T. The price of anarchy is independent of the network topology // Journal of Computer & System Sciences. 2003. Vol. 67. N. 2. P. 341-364.
- [174] Roughgarden T., Tardos E. How bad is selfish routing? //Journal of the ACM (JACM). 2002. Vol. 49. N. 2. P. 236-259.
- [175] Sakaguchi M., Szajowski K. Competitive prediction of a random variable // Mathematica Japonica. 1996. Vol. 43. N. 3. P. 461-472.
- [176] Shaked M., Shanthikumar J.G. Stochastic Orders. Springer Series In Statistics, Springer, 2007.
- [177] Sheffi Y. Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods. Prentice-Hall, 1984.



- [178] Singh C., Kumar A., Sundaresan R. Uplink power control and base station association in multichannel cellular networks // 2009 International Conference on Game Theory for Networks. IEEE. 2009. P. 43-51.
- [179] Srivastava V., Neel J., Mackenzie A., Menon R., Dasilva L., Hicks J., Reed J., Gilles R. Using game theory to analyze wireless ad hoc networks. // Communications Surveys Tutorials, IEEE. 2005. Vol. 7. P. 46 - 56.
- [180] Tan Z., Wan L., Zhang Q., Ren W. Inefficiency of equilibria for the machine covering game on uniform machines // Acta Informatica. 2012. Vol. 49. N. 6. P. 361-379.
- [181] Teraoka Y., Hohjo H. N-person silent game on sale // Scientiae Mathematicae Japonicae. 2006. Vol. 63.2. P. 237-240.
- [182] Teoriya igr: uchebnoye posobiye dlya universitetov / Petrosyan L.A., Zenkevich N.A., Semina Ye.A. - M.: Vysshaya shkola, 1998. (in Russian)
- [183] U.S. Bureau of Public Roads. Traffic Assignment Manual, U.S. Department of Commerce, Washington, D.C., 1964.
- [184] Vecchiola C., Calheiros R.N., Karunamoorthy D., Buyya R. Deadline-driven provisioning of resources for scientific applications in hybrid clouds with Aneka // Future Generation Computer Systems. 2012. Vol. 28. N. 1. P. 58-65.
- [185] Wardrop J.G. Some theoretical Aspects of Road Traffic Research // Proceedings of the Institute of Civil Engineers. 1952. Vol. II, 1. P. 325-278.
- [186] Wei G., Vasilakos A.V., Zheng Y., Xiong N. A game-theoretic method of fair resource allocation for cloud computing services // J. Supercomput. 2010. Vol. 54. P. 252-269.
- [187] Weinman J. Hybrid cloud economics // IEEE Cloud Computing. 2016. Vol. 3. N. 1. P. 18-22.
- [188] Wright P., Sun Y.L., Harmer V., Keenan A., Stewart A., Perrott R. A constraints-based resource discovery model for multi-provider cloud environments // J. Cloud Comput. Adv. Syst. Appl. 2012. Vol. 1. P. 1-6.

- [189] Wu Y., Cheng T.C.E., Ji M. Inefficiency of the Nash equilibrium for selfish machine covering on two hierarchical uniform machines // *Inf. Process. Lett.* 2015. Vol.115(11). P. 838-844.
- [190] Xu F., Tan C., Li Q., Yan G., Wu J. Designing a practical access point association protocol. // *INFOCOM, 2010 Proceedings IEEE.* 2010. P. 1-9.
- [191] Masuda Y., Whang S. Capacity management in decentralized networks // *Manage. Sci.* 2002. Vol. 48(12). P. 1628-1634.
- [192] Yamazaki G., The GI/G/1 queue with last-come-first-served // *Ann. Inst. Statist. Math.* 1982. Vol. 34.3. P. 599-604.
- [193] Yen L. H., Li J. J., Lin C. M. Stability and fairness of AP selection games in IEEE 802.11 access networks // *IEEE Transactions on Vehicular Technology.* 2011. Vol. 60. N. 3. P. 1150-1160.
- [194] Zakharov V., Krylatov A. Transist Network Design for Green Vehicles Routing, *Advances in Intelligent Systems and Computing.* 2015. Vol. 360. P. 449-458.