

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

**БУЛГАКОВА Мария Александровна**

**ДИНАМИЧЕСКИЕ СЕТЕВЫЕ ИГРЫ С ПОПАРНЫМ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ**

**1.2.3. Теоретическая информатика, кибернетика**

**ДИ С С Е Р Т А Ц И Я**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор Л. А. Петросян**

Санкт-Петербург  
2022

# Содержание

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1: Двухшаговые биматричные игры с попарным взаимодействием</b>	<b>13</b>
1.1 Постановка задачи . . . . .	13
1.2 Построение характеристической функции . . . . .	15
1.3 Вышуклость игры . . . . .	19
1.4 Вектор Шепли . . . . .	20
1.5 Вектор $\tau$ . . . . .	23
1.6 Случай особой сети: сеть - звезда . . . . .	27
1.6.1 Вектор Шепли . . . . .	27
1.6.2 Динамическая устойчивость вектора Шепли в сети-звезда . . . . .	34
1.6.3 С-ядро . . . . .	42
1.7 С-ядро в двухшаговой игре трех лиц . . . . .	47
<b>Глава 2: Многошаговые биматричные игры с попарным взаимодействием</b>	<b>54</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	54
2.2 Случай равных значений $v(z; N)$ . . . . .	58
2.2.1 Построение приближения С-ядра по функции $w(S)$ . . . . .	59
2.2.2 Сильная динамическая устойчивость $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$ . . . . .	61
2.3 Случай произвольных значений $v(z_t, N)$ . . . . .	63
<b>Глава 3: Альтернативные способы построения характеристической функции</b>	<b>71</b>
3.1 Построение характеристической функции как максимума математического ожидания выигрыша . . . . .	71
3.2 Приближение характеристической функции многошаговой игры . . . . .	75
3.3 О способе оценки ядра . . . . .	78
<b>Глава 4: Игры общего вида на основе попарного взаимодействия</b>	<b>86</b>
4.1 Модель игры . . . . .	86
4.2 Супермодулярность $v(z; S)$ . . . . .	91
4.3 Вектор Шепли . . . . .	93
4.4 ПРД-ядро и его сильная динамическая устойчивость . . . . .	94
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	<b>103</b>



## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** История зарождения теории игр берет начало в XIX веке и толчком к этому послужило развитие экономической теории. Первые математические модели, имеющие непосредственное отношение к теории игр касались только тех экономических процессов, которым возможно дать количественную оценку. Это был анализ спроса и цен в зависимости от конкуренции на рынке, который проводили А. Курно и позднее Ж. Бертран.

В середине XX века интерес ученых к теории игр значительно вырос, расширились области применения ее методов. Теория игр нашла практическое применение в экономике, биологии, кибернетике, технике, антропологии и военном деле. Особую роль в теории игр занимает такой раздел как кооперативные игры. Его задачей является нахождение множества решений конфликтной ситуации, которые были бы выгодны как отдельным игрокам, так и группам игроков, называемых коалициями. Также методы теории кооперативных игр помогают разрабатывать критерии оптимальности, по которым из множества полученных решений можно было бы выбрать одно наилучшее и способы обеспечения выполнения договоренностей (кооперативных соглашений) между игроками в динамических играх (развивающихся во времени).

Фундаментальной концепцией решения неантагонистических игр является равновесие по Нэшу [37, 38], согласно которой игроки выбирают оптимальное поведение (стратегию), отклонение от которого не выгодно никому из участников конфликта.

При рассмотрении динамических кооперативных игр остро встает вопрос о динамической и сильно-динамической устойчивости (состоятельности во вре-

мени) полученных решений, то есть вопрос о поддержании кооперативного соглашения в течении всего игрового процесса. Значительные результаты в этом направлении были получены представителями отечественной научной школы [9, 10, 12, 13] и др. Однако, поиск решений кооперативных динамических игр часто бывает затруднен в следствие их высокой вычислительной сложности, что мешает получению решений в явном аналитическом виде. Поэтому вопрос о рассмотрении игрового процесса в таком виде, который бы позволили получить решение в явном виде, является чрезвычайно актуальным.

С началом XXI века набирает популярность решение различных задач с применением теории графов. Бурно развиваются сети всевозможных видов, транспортные сети, сети средств связи, топливные, энергетические сети, наконец, сети торговых взаимоотношений и социальные сети. Агенты таких сетей связаны друг с другом, а значит, оказывают на других агентов влияние и подвергаются ему [31, 32, 47]. Отдельно следует отметить социальные сети, как мощный инструмент влияния на широкий круг лиц. Распространению информации и дезинформации в социальных сетях посвящены работы [17, 19, 30].

Большое количество процессов и явлений, описываемых при помощи сети, можно рассмотреть как совокупность отдельных процессов, происходящих между агентами, обладающих связью друг с другом, с точки зрения одна связь — один процесс. Тогда глобальный сложный игровой процесс разбивается на семейство простых игр. Эта концепция носит название попарного взаимодействия и впервые упомянута в работах [25, 27]. Поиску равновесия по Нэшу в такого типа задачах посвящены работы [20, 21].

В диссертационной работе концепция попарного взаимодействия впервые применена к кооперативным динамическим играм. Построена характеристическая функция, которая, при рассмотрении игры в формате попарного взаимодействия, обладает значительно более низкой вычислительной сложностью, по сравнению с играми, где игра не разбивается на совокупность игр, поскольку требует решения только подыгр с множеством игроков не более двух. Подобное

разбиение позволяет получить аналитические выражения для основных видов решений неантагонистических игр, таких как вектор Шепли [45], вектор  $\tau$  [46] и другие.

В диссертационной работе введено понятие кооперативной сетевой игры с попарным взаимодействием. Основным подход к определению характеристической функции рассмотрен с использованием двухшаговой игровой модели, где на первом шаге происходит процесс формирования связей между игроками (сети), а на втором — непосредственно игра, представляющая собой семейство одновременных биматричных игр между парами игроков, занимающих на сети позиции в концевых вершинах одного ребра. Далее на примере этой модели рассмотрены основные решения и способы их упрощенного вычисления, учитывающие особую конструкцию характеристической функции. Исследованы некоторые типы частных сетей, имеющие наиболее широкое применение на практике, а также влияние геометрии сети на построение решения.

Следующим этапом диссертационной работы стало распространение полученных результатов на более общие случаи, а именно случай многошаговых игр и применение концепции попарного взаимодействия в многошаговых неантагонистических сетевых играх общего вида. Также удалось доказать некоторые полезные свойства характеристической функции, значительно упрощающие ее применение к решению кооперативных игр, а именно супермодулярность характеристической функции. Для решения многошаговых сетевых игр с попарным взаимодействием рассмотрен вопрос о динамической и сильно-динамической устойчивости, выделены сильно-динамически устойчивые подмножества  $S$ -ядра, так называемое ПРД-ядро, предложенное в работах Д. А. Вольфа [7], О. Л. Петросяна [39].

**Цели и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является формализация и исследование сетевых кооперативных игр с попарным взаимодействием. Для достижения поставленной цели ставятся и решаются следующие задачи:

- Постановка задачи. Рассмотрение двухшаговой сетевой игры с попарным взаимодействием.
- Построение характеристической функции и исследование ее свойств.
- Исследование решений двухшаговой игры.
- Исследование свойств характеристической функции и решений для игр с попарным взаимодействием на частных сетях.
- Обобщение полученных результатов на случай многошаговых игр.
- Исследование альтернативных подходов к построению характеристической функции в рассматриваемой игровой модели. Описание их достоинств и недостатков.
- Обобщение полученных результатов на играх общего вида с использованием принципа попарного взаимодействия.
- Апробация полученных результатов на теоретико-игровых моделях.

### **Научная новизна работы.**

1. Впервые описана кооперативная форма сетевых игр с попарным взаимодействием, определена характеристическая функция, исследованы ее свойства и получены кооперативные решения для данного класса игр:  $S$ -ядро, вектор Шепли, вектор  $\tau$ . Доказана выпуклость двухшаговой игры с попарным взаимодействием.
2. Для особого класса симметричных сетей — сеть-звезда — получена упрощенная формула вычисления компонент вектора Шепли, получены условия для сильной динамической устойчивости  $S$ -ядра.
3. Впервые рассмотрены многошаговые кооперативные игры с попарным взаимодействием. Предложен подход к определению характеристической функ-

ции и исследованы ее свойства. Для данного класса игр построен аналог С-ядра и доказана его сильная динамическая устойчивость.

4. Рассмотрены альтернативные подходы к построению характеристической функции для игр с попарным взаимодействием. Описаны их достоинства и недостатки.
5. Для неантагонистических сетевых игр на основе игр с попарным взаимодействием построена новая характеристическая функция, обладающая меньшей вычислительной сложностью по отношению к классической и доказана ее супермодулярность. Построено ПРД-ядро и доказана его сильная динамическая устойчивость.

**Практическая ценность работы.** Полученные в диссертации результаты представляют практический интерес. Кооперативные сетевые игры с попарным взаимодействием, а также их различные вариации являются удобным математическим инструментом для описания процессов, происходящих в экономике, логистике, маркетинге, сфере массовых коммуникаций и прочих отраслях человеческой деятельности.

**Апробация работы:** Основные результаты диссертационной работы были представлены на следующих научных конференциях: международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция им. Пятницкого), Москва, 2016, 2018 гг.; международная конференция «Теория игр и менеджмент» («Game theory and management»), Санкт-Петербург, 2016, 2017 гг.; международный семинар по сетевым играм игр «Networking Games and Management», Петрозаводск, 2016 г.; международная конференция «Процессы управления и устойчивость», Санкт-Петербург, 2015 г.; международная конференция «Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics», Санкт-Петербург, 2017 г.; международная конференция «GameNets 2018 - 8th EAI International Conference on Game Theory for Networks», 2018 г., Сеул, Южная Корея; международная научной конференции студентов



и аспирантов «Процессы управления и устойчивость», 2018, 2021 гг., Санкт-Петербург.

По результатам диссертации опубликованы следующие работы: [1]-[6], [22]-[23], [41]- [42]. Из них [1]-[4], [22]-[23], [41]-[42] опубликованы в рецензируемых журналах из списка ВАК.

**Методология и методы исследования.** В процессе проведения исследования автор опирался на научную методологию проведения исследования, общепризнанные правила и подходы к исследовательской деятельности в области прикладной математики, методы теории оптимизации, теории управления, теории графов и теории игр. Ко всем утверждениям, леммам и теоремам, выдвинутым в процессе исследования, приведены строгие математические доказательства.

**Структура и основное содержание работы.** Диссертационная работа включает в себя введение, четыре главы, разбитые на разделы, заключение и список использованной литературы, включающего 49 наименований. Объем составляет 108 страниц машинописного текста. Работа содержит 12 рисунков и 8 таблиц.

В **первой главе** приводится постановка задачи попарного взаимодействия на примере двухшаговой сетевой игры, где на первом шаге формируется сеть, вершинами которой являются игроки, а ребрами — связи между игроками. На втором шаге происходят одновременные биматричные игры между соседями по сети, т.е. между концевыми вершинами одного ребра. Во втором параграфе строится характеристическая функция для кооперативной формы двухшаговой игры с попарным взаимодействием и исследуются ее свойства. В третьем параграфе показывается, что характеристическая функция для подыгры, начинающейся со второго шага, обладает свойством супермодулярности, что гарантирует принадлежность  $S$ -ядру вектора Шепли, а соответствующая игра в таком случае является выпуклой. В связи с этим, значительно повышается ценность вектора Шепли как решения для данного класса игр. В четвертом параграфе

рассматривается вектор Шепли и приводится некоторое упрощение формулы вычисления его компонент. В пятом параграфе рассматривается альтернативное решение, вектор  $\tau$ . Удалось вычислить явное значение весового коэффициента  $\lambda$ , а также доказать, что этот коэффициент не зависит от структуры сети, количества игроков и количества их взаимодействий между друг другом. В шестом параграфе рассматриваются некоторые частные типы сетей и особенности влияния геометрии сети на построение характеристической функции. Строятся решения для таких сетей и исследуются их свойства. В седьмом параграфе рассматривается двухшаговая игра трех лиц, для которой выводятся условия сильной динамической устойчивости  $C$ -ядра.

Во **второй главе** диссертационной работы приводится обобщение результатов, полученных в первой главе для случая двухшаговых игр на многошаговые игры. Строится новая характеристическая функция, обладающая свойством супермодулярности и более удобная в решении многошаговых игр с попарным взаимодействием. Новый принцип оптимальности, полученный в работе [8], адаптируется для случая попарного взаимодействия и доказывается его сильная динамическая устойчивость. Построение характеристической функции и принципа оптимальности (подмножества  $C$ -ядра) наглядно демонстрируется на численном примере.

В **третьей главе** рассматриваются альтернативные способы построения характеристической функции и приводится их сравнительный анализ с классическим способом построения характеристической функции. Также строится подмножество  $C$ -ядра с использованием одной из предложенных характеристических функций и доказывается его сильная динамическая устойчивость. Различия в подходах к построению характеристических функций и преимущества каждого из них иллюстрируется на примере.

В **четвертой главе** результаты, полученные для многошаговых сетевых игр с попарным взаимодействием обобщаются на случай неантагонистических игр. На основе принципов попарного взаимодействия строится характеристиче-

ская функция способом, имеющим более низкую вычислительную сложность по отношению к классическому, и исследуются ее свойства. В качестве принципа оптимальности рассмотрено подмножество  $S$ -ядра, так называемое ПРД-ядро, определенное в работах [7], [39] и доказана его сильная динамическая устойчивость.

В **заключении** подводятся итоги проведенного исследования и приводятся основные результаты, полученные в работе.

В диссертационной работе использована двойная нумерация формул. Первая цифра означает номер главы, в которой впервые определяется формула, вторая — номер формулы в главе. Для теорем, лемм, утверждений, замечаний и следствий так же используется двойная нумерация, где первая цифра означает номер главы, а вторая — номер формулы в главе. Разделы имеют двойную нумерацию, где первая цифра означает номер главы, вторая — номер раздела в главе. Некоторые разделы имеют смысловые подпункты и не нумеруются. Некоторые подразделы имеют тройную нумерацию, где первая цифра означает номер главы, вторая — номер раздела, а третья — номер пункта в разделе. Примеры приводятся в конце главы и также не имеют нумерации. Список литературы содержит 49 наименований и приведен в алфавитном порядке.

**Основные результаты, выносимые на защиту.** В ходе диссертационного исследования были получены следующие результаты, которые выносятся на защиту:

1. Описана кооперативная форма сетевых игр с попарным взаимодействием, определена характеристическая функция, исследованы ее свойства и получены кооперативные решения для данного класса игр:  $S$ -ядро, вектор Шепли, вектор  $\tau$ . Доказана выпуклость двухшаговой игры с попарным взаимодействием.
2. Для особого класса симметричных сетей — сеть-звезда — получена упро-

щенная формула вычисления компонент вектора Шепли, а также условия для сильной динамической устойчивости  $C$ -ядра.

3. Рассмотрены многошаговые кооперативные игры с попарным взаимодействием. Предложен подход к определению характеристической функции и исследованы ее свойства. Для данного класса игр в качестве принципа оптимальности построен аналог  $C$ -ядра и доказана его сильная динамическая устойчивость.
4. Рассмотрены альтернативные подходы к построению характеристической функции для игр с попарным взаимодействием. Описаны их достоинства и недостатки.
5. Для неантагонистических сетевых игр на основе игр с попарным взаимодействием построена характеристическая функция, обладающая меньшей вычислительной сложностью по отношению к классической и доказана ее супермодулярность. Построено ПРД-ядро и доказана его сильная динамическая устойчивость.

# Глава 1:

## Двухшаговые биматричные игры с попарным взаимодействием

В данной главе будут рассмотрены кооперативные двухшаговые сетевые игры с попарным взаимодействием. Главной особенностью этих игр является способ взаимодействия между игроками в ходе игрового процесса. Сеть может быть задана, либо сформироваться на первом шаге игры (например, в предположении максимизации суммарного выигрыша игроков). На втором шаге (первом игровом) происходят одновременные биматричные игры между соседями по сети. Игроки могут кооперироваться друг с другом, и получать в результате такой кооперации ненулевой выигрыш в случае, если они связаны ребрами сети. Данную модель с некоторыми изменениями возможно обобщить до случая многошаговых игр с конечным числом шагов, что и будет сделано в главе 2.

### 1.1 Постановка задачи

Пусть  $N$  — конечное множество игроков, которые принимают решения в двух состояниях,  $|N| = n \geq 2$ . Через  $z$  обозначено состояние игры. Игра начинается в состоянии  $z_1$ , в котором каждый игрок  $i \in N$  выбирает свое поведение  $b_i^1 = (b_{i1}^1, \dots, b_{in}^1)$  —  $n$ -мерный вектор предложений связи другим игрокам [14].

Будут использованы следующие обозначения:  $M_i \subseteq N \setminus \{i\}$  — те игроки, которым игрок  $i \in N$  может предложить создать связь, при этом значение

$a_i \in \{0, \dots, n-1\}$  равно максимальному числу связей, которые он может поддерживать одновременно. Если  $M_i = N \setminus \{i\}$ , то это означает, что игрок  $i$  может предложить связь всем игрокам. В случае, если  $a_i = n-1$ , игрок  $i$  может поддерживать любое число связей.

Для каждого поведения  $b_i^1$  существует такое подмножество реализованных предложений связи  $Q_i \subset M_i$ , для которого выполняется следующее условие

$$b_{ij}^1 = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in Q_i, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (1.1)$$

при дополнительном ограничении

$$\sum_{j \in N} b_{ij}^1 \leq a_i. \quad (1.2)$$

Условие (1.2) означает, что число возможных связей ограничено для каждого игрока. Также, очевидно, что  $|Q_i| \leq a_i$ .

Связь  $ij$  реализуется тогда и только тогда, когда  $b_{ij}^1 = b_{ji}^1 = 1$ . Сформированные связи  $ij$  образуют ребра сети  $g$ , вершинами которой являются игроки, т.е., если  $b_{ij}^1 = b_{ji}^1 = 1$ , то в сети  $g$  появляется ребро с концевыми вершинами  $i$  и  $j$ .

Через  $N_i(g)$  обозначено множество соседей игрока  $i$  в сети  $g$ , т.е.  $N_i(g) = \{j \in N \setminus \{i\} : ij \in g\}$ . Далее для краткости иногда вместо  $N_i(g)$  будет написано  $N_i$ . Результатом выбора игроков в первом состоянии является сеть  $g(b_1^1, \dots, b_n^1)$ . После ее формирования игроки переходят в состояние  $z_2(g)$ , которое обуславливается сетью (от сети зависит множество соседей  $N_i$  а следовательно, и правило взаимодействия между игроками). Во втором состоянии  $z_2(g)$ , соседи по сети играют друг с другом в одновременные биматричные игры, после чего игроки получают выигрыши, и игра заканчивается. Другими словами, имеет место двухшаговая игра  $\Gamma_{z_1}(g)$ , которая является частным случаем многошаговых неантагонистических игр. Адаптируя к данному случаю определение страте-

гий, будет принято, что в рассматриваемом случае стратегия — это правило, которое для каждого игрока определяет множество его "желаемых" соседей в первом состоянии, а именно, вектор  $b_i^1$ , и поведение в каждой биматричной игре во втором состоянии в соответствии с сетью, которая сформирована в первом состоянии, —  $b_i^2$ . Через  $u_i = (b_i^1, b_i^2)$ ,  $i \in N$  обозначена стратегия игрока  $i$  в двухшаговой игре  $\Gamma_{z_1}(g)$ . Выигрыш игрока  $i$  обозначается как  $h_i(z_2)$ , где  $(z_1, z_2)$  — траектория, реализованная в ситуации  $u = (u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot))$  в игре  $\Gamma_{z_1}(g)$ . Так как в первом состоянии игроки не получают выигрыши, то функция выигрыша в игре  $\Gamma_{z_1}(g)$  с начальной позицией  $z_1$  определяется следующим образом:

$$K_i(z_1; u) = K_i(z_1; u_i(\cdot), \dots, u_n(\cdot)) = h_i(z_2).$$

## 1.2 Построение характеристической функции

Во втором состоянии игра представляет собой семейство попарных одновременных биматричных игр  $\{\gamma_{ij}\}$  между соседями по сети. А именно, пусть  $i \in N$ ,  $j \in N_i$ . Тогда  $i$  играет с  $j$  в биматричную игру  $\gamma_{ij}$  с матрицами выигрышей  $A_{ij}$  и  $C_{ij}$  игроков  $i$  и  $j$  соответственно [1].

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij} & a_{12}^{ij} & \cdots & a_{1k}^{ij} \\ a_{21}^{ij} & a_{22}^{ij} & \cdots & a_{2k}^{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{ij} & a_{m2}^{ij} & \cdots & a_{mk}^{ij} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11}^{ij} & c_{12}^{ij} & \cdots & c_{1k}^{ij} \\ c_{21}^{ij} & c_{22}^{ij} & \cdots & c_{2k}^{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}^{ij} & c_{m2}^{ij} & \cdots & c_{mk}^{ij} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

$$a_{pl} \geq 0, \quad c_{pl} \geq 0, \quad p = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, k.$$

Константы  $m$  и  $k$  одинаковы для всех  $i$  и  $j$ . Когда имеет место игра  $\gamma_{ji}$ , т. е. когда игрок  $i$  является вторым игроком, то он играет в биматричную игру  $\gamma_{ji}$  с матрицей  $C_{ji}$ , которая равна  $A_{ij}^T$ , а игрок  $j$ , который теперь является первым игроком, играет в игру  $\gamma_{ji}$  с матрицей выигрышей  $A_{ji}$ , или, что то же самое,  $C_{ij}^T$ . Через  $\Gamma_{z_2}^S(g)$  будет обозначена подыгра игры  $\Gamma$ , которая происходит в состоянии  $z_2$ . Такая игра может быть рассмотрена в кооперативной форме. Характеристическая функция для каждого подмножества (коалиции)  $S \subset N$  находится как нижнее (максиминное) значение антагонистической игры двух лиц коалиции  $S$  и дополнительной коалиции  $N \setminus S$ , построенной на основе игры  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ . При этом выигрыш коалиции  $S$  рассматривается как сумма выигрышей игроков, входящих в  $S$ . Супераддитивность характеристической функции следует из ее определения. Принимаются следующие обозначения

$$w_{ij}^i = \max_p \min_\ell a_{p\ell}^{ij}, \quad p = 1, \dots, m; \quad \ell = 1, \dots, k, \quad (1.5)$$

$$w_{ij}^j = \max_\ell \min_p c_{p\ell}^{ji}, \quad p = 1, \dots, m; \quad \ell = 1, \dots, k. \quad (1.6)$$

Обозначим так же через  $v(z_2; S)$ ,  $S \subset N$ , — нижнее значение антагонистической игры  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ .

**Лемма 1.1** *Функция  $v(z_2; S)$  определяется по следующим формулам:*

$$v(z_2; \{\emptyset\}) = 0, \quad (1.7)$$

$$v(z_2; \{i\}) = \sum_{j \in N_i} w_{ij}^i, \quad (1.8)$$

$$v(z_2; S) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i \cap S} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ij}) + \sum_{i \in S} \sum_{k \in N_i \setminus S} w_{ik}^i, \quad S \subset N, \quad (1.9)$$

$$v(z_2; N) = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ij}). \quad (1.10)$$

**Доказательство.** Формула (1.7) очевидна. Формула (1.8) обосновывается



следующим образом. Поскольку игрок  $i$ , действуя против коалиции  $N \setminus \{i\}$ , играет с игроками  $j$  из  $N \cap N_i$  в независимые биматричные игры, то в каждой из этих биматричных игр он может себе гарантировать наибольший выигрыш  $w_{ij}$ , следовательно наибольший выигрыш, который игрок  $i$  может гарантировать себе во всей игре, есть сумма  $\sum_{j \in N_i} w_{ij}^i$ . Это и есть в данном случае максиминный выигрыш  $i$  против  $N \setminus \{i\}$ . Формула (1.8) доказана.

Чтобы показать справедливость формулы (1.9), ее следует рассмотреть для произвольной коалиции  $S$ . Каждый из игроков, входящих в  $S$  играет в независимые попарные биматричные игры как с игроками, входящими в  $N_i \cap S$ , так и с игроками  $N_i \cap \{N \setminus S\}$ . В первом случае игроки, взаимодействующие внутри  $S$ , всегда могут выбрать стратегию, максимизирующую их суммарный выигрыш, т. е.  $\sum_{j \in N_i \cap S} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji})$ . Во втором случае игроки, взаимодействующие с игроками из  $N \setminus S$  могут гарантировать себе лишь нижнее значение игры, т. е. величину  $\sum_{k \in N_i \setminus S} w_{ik}^i$ . Таким образом, максимальный суммарный выигрыш, который может обеспечить себе коалиция  $S$ , будет равен

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i \cap S} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}) + \sum_{i \in S} \sum_{k \in N_i \setminus S} w_{ik}^i.$$

Формула (1.10) следует из определения максимального суммарного выигрыша игроков.

В формулах (1.9) и (1.10) коэффициент  $\frac{1}{2}$  исключает повторного суммирования выигрышей по одним и тем же ребрам. Лемма доказана.

Далее будет рассмотрена кооперативная форма двухшаговой игры  $\Gamma_{z_1}(g)$ . Пусть предполагается, что игроки выбирают стратегии  $\bar{u}_i, i \in N$ , которые максимизируют их суммарный выигрыш в игре  $\Gamma_{z_1}(g)$ , т. е.

$$\sum_{i \in N} K_i(z_1; \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) = \max_u \sum_{i \in N} K_i(z_1; u_1, \dots, u_n)$$

Ситуация  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$  называется кооперативным поведением, а соответ-

ствующая траектория  $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  — кооперативной траекторией, в данном случае состоящая из двух состояний.

Как и раньше, для коалиции  $S \subseteq N$  будет определена характеристическая функция  $v(\bar{z}_1; S)$  как нижнее значение в антагонистической игре двух лиц между коалицией  $S$ , играющей как первый (максимизирующий) игрок и дополнительной коалицией  $N \setminus S$ , играющей как второй (минимизирующий) игрок. В этом случае, наилучшим поведением на первом шаге для минимизирующего игрока будет не создавать связи с игроками из коалиции  $S$ , тем самым уменьшая выигрыш коалиции  $S$  на величину  $\sum_{i \in S} \sum_{k \in N_i \setminus S} w_{ik}^i$ . Стоит заметить, что здесь выигрыш коалиции  $S$  также равен сумме выигрышей ее участников и стратегия  $S$  — элемент декартова произведения множеств стратегий игроков, входящих в  $S$ .

Через  $v(z_1; S)$ ,  $S \subset N$  будет обозначаться нижнее значение антагонистической игры  $\Gamma_{z_1}(g)$ .

**Теорема 1.1** *Функция  $v(z_1; S)$  определяется по следующим формулам:*

$$v(z_1; \{i\}) = 0,$$

$$v(z_1; \emptyset) = 0, \quad (1.11)$$

$$v(z_1; S) = \max_g \left( \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g) \cap S} \max_{p, \ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}) \right), \quad S \subset N, \quad (1.12)$$

$$v(z_1; N) = v(\bar{z}_2; N) = \max_g \left( \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} \max_{p, \ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}) \right). \quad (1.13)$$

**Доказательство.** Доказательство аналогично доказательству леммы 1.1, однако здесь в (1.12), в отличие от (1.9) отсутствует второе слагаемое. Оно равно нулю, поскольку минимизирующая стратегия  $b_i^1$  игроков из  $N \setminus S$  в первом

состоянии состоит в отказе от связей с игроками из  $S$ . Это следует из неотрицательности выигрышей во всех играх. Теорема доказана.

### 1.3 Выпуклость игры

Необходимо привести определение выпуклой игры и супермодулярной характеристической функции [44].

**Определение 1.1** *Характеристическая функция называется супермодулярной, а соответствующая ей игра выпуклой, если для любых произвольных коалиций  $X \subset N$  и  $Y \subset N$  выполняется неравенство*

$$v(X \cup Y) \geq v(X) + v(Y) - v(X \cap Y). \quad (1.14)$$

**Теорема 1.2** *Подыгра  $\Gamma_{z_2}^S(g)$  является выпуклой, а соответствующая ей характеристическая функция (1.8)-(1.10) супермодулярной.*

**Доказательство.** Для доказательства теоремы необходимо проверить неравенство (1.14) для характеристической функции (1.8)-(1.10). Для сокращения записи вместо  $\max_{p,\ell}(a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji})$  будет использоваться обозначение  $m_{ij}$ . Имеют место следующие выражения

$$v(X \cup Y) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in X \cup Y \\ j \in N_i \\ i \neq j}} m_{ij} + \sum_{\substack{i \in X \cup Y \\ k \in N_i \setminus X \cup Y}} w_{ik}^i, \quad (1.15)$$

$$v(X) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in X \\ j \in N_i \\ i \neq j}} m_{ij} + \sum_{\substack{i \in X \\ k \in N_i \setminus X}} w_{ik}^i, \quad (1.16)$$

$$v(Y) = \sum_{\substack{i \in Y \\ k \in N_i \setminus Y}} w_{ik}^i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in Y \\ j \in N_i \\ i \neq j}} m_{ij}, \quad (1.17)$$

$$v(X \cap Y) = \sum_{\substack{i \in X \cap Y \\ j \in X \cap Y \\ i \neq j \\ j \in N_i}} m_{ij} + \sum_{\substack{i \in X \cap Y \\ k \in N_i \setminus X \cap Y}} w_{ik}^i, \quad (1.18)$$

После вычитания из (1.15) выражения (1.16), (1.17) и прибавляя (1.18), получается неравенство

$$\sum_{\substack{i \in X \setminus Y \\ j \in N_i \setminus X}} m_{ij} \geq 0,$$

которое следует из неотрицательности выигрышей, и, следовательно, выполняется в игре  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ . Теорема доказана.

**Теорема 1.3** *Двухшаговая игра с попарным взаимодействием  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  является выпуклой, а соответствующая ей характеристическая функция (1.12)-(1.13) супермодулярной.*

**Доказательство.** Доказательство данной теоремы полностью аналогично доказательству супермодулярности характеристической функции для подыгры. В силу отсутствия в характеристической функции (1.12)-(1.13) дополнительных слагаемых  $w_{ij}^i$ , в приведенных выше выкладках их можно заменить на ноль и получить такой же результат. Теорема доказана.

Таким образом, построенная характеристическая функция  $v(z_1; S)$  в двухшаговой игре  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  супермодулярна. Это гарантирует непустоту  $S$ -ядра в игре  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  и принадлежность вектора Шепли  $S$ -ядру. Аналогичным свойствам удовлетворяет характеристическая функция  $v(z_2; S)$  в подыгре  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ , начинающейся со второго шага.

## 1.4 Вектор Шепли

В силу описанных выше свойств, в данном классе игр существенно повышается важность вектора Шепли как решения кооперативной игры. Поэтому далее в качестве решения двухшаговой кооперативной сетевой игры с попарным

взаимодействием  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  будет рассматриваться вектор Шепли. Способ вычисления характеристической функции (1.12) позволяет предположить, что формула вычисления компонент вектора Шепли может быть упрощена [2]. Рассуждения будут разделены на три случая:

- а) полная сеть, когда каждый игрок имеет связь с каждым (то есть у каждого игрока  $n-1$  связь);
- б) неполная сеть с произвольным числом связей у каждого игрока;
- в) случай подыгры  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ .

**а) Полная сеть.** В этом случае,  $M_i = N \setminus \{i\}$  для всех  $i \in N$ . При этом, при вычислении значения  $v(S)$  будет использоваться формула (1.12). Компонента вектора Шепли для  $i$ -го игрока вычисляется следующим образом [45]:

$$\varphi_i[v] = \sum_{T|i \in T \subset N} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} [v(T) - v(T \setminus i)]. \quad (1.19)$$

Следует заметить, что в (1.19), в слагаемом с фиксированной величиной коалиции  $(t)$ , слагаемое  $\max_{p,\ell} (a_{pl}^{ij} + c_{pl}^{ji})$  будет встречаться ровно  $C_{n-2}^{t-2}$  раза. Кроме того, слагаемое  $v(T) - v(T \setminus i)$  можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} v(T) - v(T \setminus i) &= \frac{1}{2} \sum_{k \in T, j \in T} \frac{1}{2} \max_{p,\ell} (a_{pl}^{kj} + c_{pl}^{jk}) - \frac{1}{2} \sum_{j \in T \setminus \{i\}, k \in T \setminus \{i\}} \max_{p,\ell} (a_{pl}^{kj} + c_{pl}^{jk}) = \\ &= \sum_{j \in T} \max_{p,\ell} (a_{pl}^{ij} + c_{pl}^{ji}). \end{aligned}$$

В результате получается выражение:

$$\varphi_i[v] = \sum_{T|i \in T \subset N} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \cdot C_{n-2}^{t-2} \cdot \sum_{j \in T} \max_{p,\ell} (a_{pl}^{ij} + c_{pl}^{ji}).$$

И, после упрощения, получается:

$$\varphi_i[v] = \sum_{j \in N} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}) \cdot \sum_{t=2}^n \frac{t-1}{n \cdot (n-1)}, \quad (1.20)$$

$$\varphi_i[v] = \sum_{j \in N} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}) \cdot \left( \frac{1}{n \cdot (n-1)} + \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{(n-1)}{2}.$$

Итоговый вид формулы компонент вектора Шепли для  $i$ -го игрока:

$$\varphi_i[v] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j \in N} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}). \quad (1.21)$$

**б) Неполная сеть.** Пусть теперь игроки не обязательно все связаны друг с другом, и множества  $M_i$  для различных игроков  $i$  в общем случае не совпадают. Тогда число соседей для каждого игрока (множество  $N_i(g)$ ) зависит от  $i$ .

Вектор Шепли в этом случае примет вид:

$$\varphi_i[v] = \sum_{t=2}^n \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \cdot \sum_{T \ni i, j \in N_i \cap T} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}), \quad T \subset N, \quad |T| = t. \quad (1.22)$$

Несмотря на необходимость вычислять коэффициент  $\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}$ , данная формула является более простой в смысле операционной и временной сложности по сравнению с (1.19), поскольку не требует вычислять значения характеристической функции, а только лишь значения  $\max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji})$ .

**в) Случай подыгры  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ .** Упрощение формулы компонент вектора Шепли для случая подыгры  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ , начинающейся со второго шага игры также возможно посредством вычисления разности  $v(T) - v(T \setminus i)$ . Используя формулы для вычисления характеристической функции подыгры  $\Gamma_{z_2}^S(g)$  (1.9)-(1.10),

можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned}
v(z_2; T) - v(z_2; T \setminus i) &= \frac{1}{2} \sum_{j \in T} \sum_{k \in N_j \cap T \setminus \{i\}} \max_{p,l} (a_{pl}^{jk} + c_{p,l}^{kj}) + \sum_{r \in N_i \cap T} \max_{p,l} (a_{pl}^{ir} + c_{p,l}^{ri}) + \\
&+ \sum_{j \in T} \sum_{k \in N_j \setminus T} \omega_{jk}^j + \sum_{r \in N_i \setminus T} \omega_{it}^i - \left( \frac{1}{2} \sum_{j \in T} \sum_{k \in N_i \cap T \setminus \{i\}} \max_{p,l} (a_{pl}^{jk} + c_{p,l}^{kj}) + \sum_{j \in T} \sum_{k \in N_j \setminus T} \omega_{jk}^j + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j \in T} \omega_{ji}^j \right).
\end{aligned}$$

После раскрытия скобок и сокращения одинаковых слагаемых с противоположным знаком, получается следующее:

$$v(z_2; T) - v(z_2; T \setminus i) = \sum_{r \in N_i \cap T} \max_{p,l} (a_{pl}^{ir} + c_{p,l}^{ri}) + \sum_{r \in N_i \setminus T} \omega_{it}^i - \sum_{j \in T} \omega_{ji}^j.$$

В этой формуле в правой части первые два слагаемых характеризуют вклад игрока  $i$ , когда он является участником коалиции  $T$ , а слагаемое с отрицательным знаком — это величина, которую получает коалиция  $T$ , когда игрок  $i$  находится в  $T \setminus \{i\}$  и играет против  $T$ .

Тогда итоговая формула компонент вектора Шепли для случая подыгры выглядит следующим образом:

$$\varphi_i[v] = \sum_{t=2}^n \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \cdot \sum_{T \ni i} \left[ \sum_{r \in N_i \cap T} \max_{p,l} (a_{pl}^{ir} + c_{p,l}^{ri}) + \sum_{r \in N_i \setminus T} \omega_{it}^i - \sum_{j \in T} \omega_{ji}^j \right],$$

$$|T| = t, T \subset N.$$

## 1.5 Вектор $\tau$

Теперь в качестве решения двухшаговой игры  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  будет рассматриваться вектор  $\tau$  [46], [48]. Учитывая особую конструкцию характеристической функции в игре  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ , можно предположить, что коэффициент  $\lambda$  в формуле компонент

вектора  $\tau$  может быть вычислен, что значительно упростило бы поиск данного решения в рассматриваемом классе игр.

**Утверждение 1.1** *Для двухшаговой сетевой игры с попарным взаимодействием  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ , коэффициент  $\lambda$  для вычисления компонент вектора  $\tau$  равен  $\frac{1}{2}$ :*

$$\tau_i(N, v(z_1, N)) = \frac{1}{2} [v(z_1, N) - v(z_1, N \setminus \{i\})]$$

**Доказательство.** Значение характеристической функции для произвольной коалиции  $S$  в случае двухшаговой сетевой игры с попарным взаимодействием вычисляется следующим образом:

$$v(z_1; \{i\}) = 0, \quad v(z_1; \emptyset) = 0, \quad (1.23)$$

$$v(z_1; S) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i \cap S} \max_{p, \ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}), \quad S \subset N, \quad (1.24)$$

Для упрощения записи выражений далее будет принято аналогичное пункту 1.3 обозначение — вместо  $\max_{p, \ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji})$  будет написано просто  $m_{ij}$ . С учетом принятого обозначения, получается следующее значение характеристической функции для произвольной коалиции  $S$ :

$$v(z_1; S) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i \cap S} m_{ij}, \quad S \subset N,$$

Формула вычисления компонент вектора  $\tau$  для выпуклой игры:

$$\tau_i(N, v) = \lambda(v(N) - v(N \setminus \{i\})) + (1 - \lambda)v(\{i\}),$$

где коэффициент  $\lambda$  определяется из уравнения

$$\sum_{j \in N} (\lambda(v(N) - v(N \setminus \{j\})) + (1 - \lambda)v(\{j\})) = v(N).$$

Согласно значениям характеристической функции (1.23)-(1.24), слагаемое



$(1 - \lambda)v(\{j\})$  равно нулю.

Таким образом, для двухшаговой сетевой игры с попарным взаимодействием  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  получается следующая формула вычисления компонент вектора  $\tau$ :

$$\tau_i(N, v(z_1, N)) = \lambda(v(z_1, N) - v(z_1, N \setminus \{i\})) \quad (1.25)$$

где коэффициент  $\lambda$  определяется из уравнения

$$\sum_{j \in N} \lambda(v(z_1, N) - v(z_1, N \setminus \{j\})) = v(z_1, N) \quad (1.26)$$

Далее необходимо вычислить значение разности  $v(z_1, N) - v(z_1, N \setminus \{j\})$ . Как уже упоминалось ранее, в случае двухшаговой сетевой игры с попарным взаимодействием в силу способа определения характеристической функции игрокам из коалиции  $S$  выгодно не создавать связи с коалицией  $N \setminus S$ . Поэтому, разница между коалицией  $N$  и  $N \setminus \{j\}$  будет лишь в связях, образуемых игроком  $j$  и его соседями из  $N$ . Из этого следует, что

$$v(z_1, N) - v(z_1, N \setminus \{j\}) = \sum_{i \in N_j} m_{ji}$$

Возвращаясь к уравнению (1.26), и подставляя в него значения характеристической функции для коалиции  $v(z_1, N)$  и вычисленную выше разность, можно получить

$$\sum_{j \in N} \lambda \left( \sum_{i \in N_j} m_{ji} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} m_{ij}. \quad (1.27)$$

Так же можно вынести  $\lambda$  за знак суммы, поскольку  $\lambda$  не зависит от действий игроков и их выигрышей.

$$\lambda \sum_{j \in N} \left( \sum_{i \in N_j} m_{ji} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} m_{ij}. \quad (1.28)$$

Сокращая одинаковые множители в правой и левой частях уравнения, полу-

чается:

$$\lambda = \frac{1}{2}. \quad (1.29)$$

Таким образом, в двухшаговой кооперативной сетевой игре с попарным взаимодействием  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ , коэффициент  $\lambda$  в векторе  $\tau$  равен  $\frac{1}{2}$ , и не зависит ни от числа игроков, ни от количества связей между ними, ни от структуры сети. Утверждение доказано.

**Утверждение 1.2** *В двухшаговой сетевой игре с попарным взаимодействием  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  на полной сети значение вектора  $\tau$  совпадает с вектором Шепли.*

**Доказательство.** Ранее была получена упрощенная формула компонент вектора Шепли для двухшаговой кооперативной игры с попарным взаимодействием  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  на полной сети:

$$\varphi_i[v] = \frac{1}{2} \sum_{j \in N} m_{ij}.$$

Можно получить выражение для вектора  $\tau$  на аналогичной сети. В пункте 1 было доказано, что коэффициент  $\lambda = \frac{1}{2}$  для такого вида сети. Подставляя найденный коэффициент в формулу вычисления компонент вектора  $\tau$ , получается:

$$\tau_i(N, v) = \frac{1}{2}(v(N) - v(N \setminus \{i\})) + (1 - \frac{1}{2})v(\{i\}).$$

Ранее было показано, что в двухшаговой игре  $v(z_1; \{i\}) = 0$ . С учетом этого, получается:

$$\tau_i(N, v) = \frac{1}{2}(v(N) - v(N \setminus \{i\})).$$

В предыдущем пункте уже было вычислено значение разности, упомянутой в формуле:

$$v(N) - v(N \setminus \{j\}) = \sum_{i \in N_j} m_{ji}.$$

Так как в этом случае рассматривается полная сеть, то  $N_j$  — множество соседей

$j$ -го игрока совпадает со всем множеством игроков, за исключением самого  $j$ . Так как  $m_{ii} = 0$ , без потери точности можем написать:

$$\tau_i(N, v) = \frac{1}{2} \sum_{j \in N} m_{ji},$$

что совпадает с вектором Шепли. Утверждение доказано.

## 1.6 Случай особой сети: сеть - звезда

В данном параграфе будет исследоваться специфическая структура сети, а так же решение двухшаговой кооперативной игры с попарным взаимодействием  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  на этой сети. Рассматривается сеть [41], состоящая из  $n$  игроков, среди которых игрок 1 — центральный игрок, имеющий  $n - 1$  связь, а все остальные  $n - 1$  игроков соединены единственным ребром с центральным игроком и не имеют связей с другими игроками.

### 1.6.1 Вектор Шепли

Следует отметить, что кооперативная форма игры  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  была рассмотрена для общего случая попарных взаимодействий, когда на первом этапе игры может быть сформирована любая сеть. Для этого общего случая, были найдены аналитические выражения для характеристической функции (1.8)-(1.10), (1.12), которые используются для расчета компонент вектора Шепли по формуле (1.19). Поскольку вычисление значения Шепли является сложной задачей для большого количества игроков и произвольной сети, далее будет показано, как упростить формулу (1.19) для сети особого вида — сети-звезда, причем как для игры  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ , так и для подыгры  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ , начинающейся со второго шага. Удалось получить аналитическое выражение для значения вектора Шепли, которое намного легче интерпретировать и анализировать. Следует отметить, что

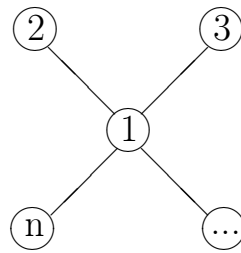
для вычисления компонент вектора Шепли по формуле (1.19) необходимо перечислить значения характеристической функции для  $2^n$  подмножеств множества игроков  $N$ ; кроме того, для больших сетей вычисление весового коэффициента представляет собой крайне трудную задачу, т. к. число  $n!$  может быть очень большим. Однако, для сети типа звезда нам понадобится только  $O(n)$  вычислений и нет необходимости вычислять все подмножества множества  $N$ , а только лишь подмножества мощностью не более чем 2.

Следует так же отметить, что, в следствие супермодулярности характеристической функции вектор Шепли в игре  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  всегда принадлежит  $S$ -ядру (как и в подыгре  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ ), и его значимость в данном классе задач значительно возрастает.

Далее описывается формализация построения сети-звезда на первом шаге игры. Принимаются следующие предположения. Пусть  $M_1 = N \setminus \{1\}$ ,  $a_1 = n - 1$  и  $M_i = \{1\}$ ,  $a_i = 1$  для  $i \neq 1$ . Тогда в первом состоянии игры, следуя кооперативной траектории  $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ , в целях максимизации суммарного выигрыша игроки должны выбрать следующие поведения:

$$b_i^1 = \begin{cases} (0, 1, \dots, 1), & i = 1, \\ (1, 0, \dots, 0), & i \neq 1. \end{cases} \quad (1.30)$$

Поведение (1.30) формирует сеть-звезду в первом состоянии с центральным игроком 1 (см. рис. 1), в которой  $|N_1| = n - 1$  и  $|N_i| = 1$ ,  $i \neq 1$ .



**Рисунок 1.** Сеть-звезда с центральным игроком 1.

Для сети-звезда характеристическая функция на втором шаге игры, т. е. в

подыгре  $\Gamma_{\bar{z}_2}^S(g)$  вычисляется с учетом специфической структуры сети. Преобразованные выражения (1.8)-(1.9) с учетом полученной сети:

$$v(\bar{z}_2; \{\emptyset\}) = 0, \quad (1.31)$$

$$v(\bar{z}_2; \{i\}) = \begin{cases} \sum_{j \neq i} w_{1j}, & i = 1, \\ w_{i1}, & i \neq 1. \end{cases} \quad (1.32)$$

$$v(\bar{z}_2; S) = \begin{cases} \sum_{j \in N_1 \cap S} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{1j} + c_{p\ell}^{j1}) + \sum_{k \in N_1 \setminus S} w_{1k}, & S \subset N, \quad i \in S, \\ 0, & i \notin S. \end{cases} \quad (1.33)$$

Аналогично можно провести преобразование выражений для вычисления характеристической функции в двухшаговой игре  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$  (1.11)-(1.12), с учетом ограничений, в силу которых получается данная сеть:  $M_1 = N \setminus \{1\}$ ,  $a_1 = n - 1$  и  $M_i = \{1\}$ ,  $a_i = 1$  для  $i \neq 1$ .

$$v(\bar{z}_1; \{i\}) = 0, \quad v(\bar{z}_1; \emptyset) = 0, \quad (1.34)$$

$$v(\bar{z}_1; S) = \begin{cases} \sum_{j \in N_1 \cap S} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{1j} + c_{p\ell}^{j1}), & S \subset N, \quad i \in S, \\ 0, & i \notin S. \end{cases} \quad (1.35)$$

Сеть имеет центральную симметрию, которая позволяет предположить, что формула (1.19) может быть упрощена.

**Теорема 1.4** [41] *Для сети-звезда с центральным игроком 1, в игре  $\Gamma_{\bar{z}_t}^S(g)$  компоненты вектора Шепли  $\varphi[v(\bar{z}_t)]$ ,  $t = 1, 2$ , представимы в виде:*

$$\varphi_i[v(\bar{z}_t)] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ v(\bar{z}_t; \{1\}) + \sum_{j \neq 1} (m_{1j} - v(\bar{z}_t; \{j\})) \right], & i = 1, \\ \frac{1}{2} [v(\bar{z}_t; \{i\}) + m_{1i} - w_{1i}], & i \neq 1. \end{cases} \quad (1.36)$$

**Доказательство.** Сначала приводится доказательство выражения (1.36)

для подыгры  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ . Пусть игрок  $i \in S$ ,  $i \neq 1$  зафиксирован и рассматривается его предельный вклад  $v(\bar{z}_2; S) - v(\bar{z}_2; S \setminus \{i\})$  в коалицию  $S$ . Принимая во внимания формулы (1.31)-(1.33) для характеристической функции  $v(\bar{z}_2; \cdot)$ , получаем, что

$$v(\bar{z}_2; S) - v(\bar{z}_2; S \setminus \{i\}) = \begin{cases} m_{1i} - w_{1i}, & 1 \in S, \\ w_{i1}, & 1 \notin S. \end{cases}$$

Подставляя значения характеристической функции  $v(\bar{z}_2; S)$ , а так же вычисленную выше разность в формулу компонент вектора Шепли (1.19), для игрока  $i \neq 1$  получаются следующие выражения

$$\begin{aligned} \varphi_i[v(\bar{z}_2)] &= \sum_{S \subseteq N; i \in S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} \times [v(\bar{z}_2; S) - v(\bar{z}_2; S \setminus \{i\})] = \\ &= (m_{1i} - w_1^{1i}) \sum_{S \subseteq N; 1, i \in S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} + w_i^{i1} \sum_{S \subseteq N; i \in S; 1 \notin S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} = \\ &= (m_{1i} - w_1^{1i}) \sum_{|S|=2}^n \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} \binom{n-2}{|S|-2} + \\ &\quad + w_i^{i1} \sum_{|S|=1}^{n-1} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} \binom{n-2}{|S|-1} = \\ &= (m_{1i} - w_1^{1i}) \sum_{|S|=2}^n \frac{|S| - 1}{n(n-1)} + w_i^{i1} \sum_{|S|=1}^{n-1} \frac{n - |S|}{n(n-1)} = \frac{1}{2} [w_i^{i1} + m_{1i} - w_1^{1i}]. \end{aligned}$$

Следуя свойству эффективности вектора Шепли, сразу находим, что

$$\begin{aligned} \varphi_1[v(\bar{z}_2)] &= v(\bar{z}_2; N) - \sum_{i \neq 1} \varphi_i[v(\bar{z}_2)] = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} m_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} [w_i^{i1} + m_{1i} - w_1^{1i}] = \\ &= \sum_{i \neq 1} m_{1i} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} [w_i^{i1} + m_{1i} - w_1^{1i}] = \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} [w_1^{1i} + m_{1i} - w_i^{i1}]. \end{aligned}$$

С учетом того, что  $v(\bar{z}_2; \{1\}) = \sum_{j \in N_1} w_1^{1j} = \sum_{i \neq 1} w_1^{1i}$  и  $v(\bar{z}_2; \{i\}) = \sum_{j \in N_i} w_j^{ij} =$

$w_i^{i1}$ ,  $i \neq 1$ , выражения (1.36) справедливы для подыгры  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ .

Теперь будет приведено доказательство формулы (1.36) для игры  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ . Аналогично предполагается, что игрок  $i \in S$ ,  $i \neq 1$  зафиксирован и рассматривается его максимальный вклад  $v(\bar{z}_1; S) - v(\bar{z}_1; S \setminus \{i\})$  в коалицию  $S$ . Используя выражения (1.34)-(1.35) для характеристической функции  $v(\bar{z}_1; S)$ , получается

$$v(\bar{z}_1; S) - v(\bar{z}_1; S \setminus \{i\}) = \begin{cases} m_{1i}, & 1 \in S, \\ 0, & 1 \notin S. \end{cases}$$

Подставляя их в формулу для компонент вектора Шепли (1.19), для игрока  $i \neq 1$  имеет место следующее выражение

$$\begin{aligned} \varphi_i[v(\bar{z}_1)] &= \sum_{S \subseteq N; i \in S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} [v(\bar{z}_1; S) - v(\bar{z}_1; S \setminus \{i\})] = \\ &= m_{1i} \sum_{S \subseteq N; 1, i \in S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} = m_{1i} \sum_{|S|=2}^n \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} \binom{n-2}{|S|-2} = \\ &= m_{1i} \sum_{|S|=2}^n \frac{|S| - 1}{n(n-1)} = \frac{m_{1i}}{2}. \end{aligned}$$

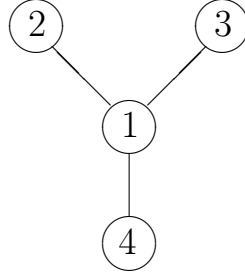
Снова, следуя свойству эффективности вектора Шепли, можно легко найти компоненту вектора Шепли для центрального игрока 1:

$$\begin{aligned} \varphi_1[v(\bar{z}_1)] &= v(\bar{z}_1; N) - \sum_{i \neq 1} \varphi_i[v(\bar{z}_1)] = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} m_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} m_{1i} = \\ &= \sum_{i \neq 1} m_{1i} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} m_{1i} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} m_{1i}. \end{aligned}$$

Следует напомнить, что по (1.11)-(1.13),  $v(\bar{z}_1; \{i\}) = 0$  для любого игрока  $i \in N$ , следовательно выражение (1.36) справедливо для двухшаговой игры  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ . Теорема доказана.

## Пример

Рассматривается игра четырех лиц,  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ . С учетом принятых выше предположений, игрокам в первом состоянии с целью максимизации прибыли выгодно выбрать поведения  $b_1^1 = (0, 1, 1, 1)$ ,  $b_2^1 = b_3^1 = b_4^1 = (1, 0, 0, 0)$ . Получается сеть-звезда, приведенная на рисунке 2:



**Рисунок 2.** Сеть-звезда для четырех игроков с центральным игроком 1.

Заданы следующие матрицы:

$$A_{12}C_{21} = \begin{pmatrix} (3; 2) & (1; 4) \\ (2; 0) & (3; 1) \end{pmatrix}, \quad A_{13}C_{31} = \begin{pmatrix} (2; 4) & (1; 3) \\ (2; 3) & (3; 0) \end{pmatrix},$$

$$A_{14}C_{41} = \begin{pmatrix} (3; 2) & (1; 4) \\ (5; 0) & (2; 2) \end{pmatrix},$$

Значения  $w_{ij}$  и  $m_{ij}$ :

$$m_{12} = 5, \quad m_{13} = 6, \quad m_{14} = 5, \quad w_{12} = 2, \quad w_{21} = 1,$$

$$w_{13} = 2, \quad w_{31} = 3, \quad w_{14} = 2, \quad w_{41} = 2.$$

Вычисление характеристической функции для подыгры  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ , с использованием выражений (1.8)-(1.10):

$$v(z_2; \{\emptyset\}) = 0, \quad v(z_2; \{1\}) = 6, \quad v(z_2; \{2\}) = 1, \quad v(z_2; \{3\}) = 3,$$

$$v(z_2; \{4\}) = 2, \quad v(z_2; \{12\}) = 9, \quad v(z_2; \{13\}) = 10, \quad v(z_2; \{14\}) = 9,$$

$$v(z_2; \{23\}) = 4, \quad v(z_2; \{34\}) = 5, \quad v(z_2; \{24\}) = 3, \quad v(z_2; \{234\}) = 6,$$

$$v(z_2; \{123\}) = 13, \quad v(z_2; \{124\}) = 12, \quad v(z_2; \{134\}) = 13,$$

$$v(z_2; \{1234\}) = 16.$$



Далее определяется характеристическая функция для двухшаговой игры  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ , с применением выражений (1.11)-(1.13):

$$v(z_1; \{\emptyset\}) = 0, \quad v(z_1; \{1\}) = v(z_1; \{2\}) = v(z_1; \{3\}) = v(z_2; \{4\}) = 0,$$

$$v(z_1; \{12\}) = 5, \quad v(z_1; \{13\}) = 6, \quad v(z_1; \{14\}) = 5,$$

$$v(z_1; \{23\}) = v(z_1; \{24\}) = v(z_1; \{34\}) = 0,$$

$$v(z_1; \{234\}) = 0, \quad v(z_1; \{123\}) = 11, \quad v(z_1; \{124\}) = 10, \quad v(z_1; \{134\}) = 11,$$

$$v(z_1; \{1234\}) = 16.$$

Теперь можно вычислить значение вектора Шепли для подыгры  $\Gamma_{z_2}^S(g)$  и двухшаговой игры  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ :

$$\varphi[v(\bar{z}_2)] = (8; 2; 3.5; 2.5),$$

$$\varphi[v(\bar{z}_1)] = (8; 2.5; 3; 2.5).$$

Для игры  $\Gamma_{z_t}^S(g)$ ,  $t = 1, 2$  доказана супермодулярность характеристической функции, из чего следует, что вектор Шепли принадлежит С-ядру. В самом деле, согласно определению, С-ядро в игре  $\Gamma_{z_t}^S(g)$  — это множество дележей  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , которые удовлетворяют условиям:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(\bar{z}_t; S), \quad \text{для всех } S \subset N, \quad (1.37)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = v(\bar{z}_t; N). \quad (1.38)$$

Подставляя значения характеристической функции (1.9)-(1.10), (1.11)-(1.13) и значения вектора Шепли  $\varphi[v(\bar{z}_2)]$  и  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$  соответственно в условия (1.37)-(1.38), получаются верные неравенства и вектор Шепли  $\varphi[v(\bar{z}_t)]$  действительно принадлежит С-ядру в игре  $\Gamma_{z_t}^S(g)$ .

### 1.6.2 Динамическая устойчивость вектора Шепли в сети-звезда

Множество дележей в игре  $\Gamma_{z_t}^S(g)$  будет обозначено через

$$\mathcal{M}[v(\bar{z}_t)] = \{x = (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i = v(\bar{z}_t; N), x_i \geq v(\bar{z}_t; \{i\}), i \in N\}.$$

В качестве решения на указанной сети рассматривается *вектор Шепли* (1.19)  $\varphi[v(\bar{z}_t)] = (\varphi_1[v(\bar{z}_t)], \dots, \varphi_n[v(\bar{z}_t)])$ ,  $t = 1, 2$ .

Следуя кооперативной теории игр, максимальный суммарный выигрыш всех игроков  $v(\bar{z}_1; N)$  при кооперации должен быть разделен между всеми игроками после окончания игры. Чтобы это сделать, используется характеристическая функция  $v(\bar{z}_1; S)$ , по которой определяется дележ как вектор  $\xi[v(\bar{z}_1)] = (\xi_1[v(\bar{z}_1)], \dots, \xi_n[v(\bar{z}_1)])$  который, во-первых, удовлетворяет условию эффективности, т. е.,  $\sum_{i \in N} \xi_i[v(\bar{z}_1)] = v(\bar{z}_1; N)$  и, во-вторых, условию индивидуальной рациональности, т. е.,  $\xi_i[v(\bar{z}_1)] \geq v(\bar{z}_1; \{i\})$  для каждого  $i \in N$ . Обозначим множество всех дележей в игре  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  как  $\mathcal{M}[v(\bar{z}_1)]$ . Кооперативное решение  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$ , это правило, которое сопоставляет множество  $\mathcal{M}[v(\bar{z}_1)]$  кооперативной игре  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ .

Перед началом игры  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ , игроки заключают соглашение о кооперативной траектории  $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ , т. е., такой траектории, которая приводит к максимальному суммарному выигрышу  $v(\bar{z}_1; N)$ , и предполагается, что игроки разделяют этот выигрыш в соответствии с выбранным дележом  $\xi[v(\bar{z}_1)]$  из принятого кооперативного решения  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$ . Это означает, что в игре  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  каждый игрок  $i \in N$  ожидает, что его выигрыш будет равен  $\xi_i[v(\bar{z}_1)]$ . Если игроки пересчитают решение после шага формирования сети (на втором шаге), это приведет к тому, что пересчитанное множество  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_2)]$  будет отличаться от предыдущего  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$ . Это происходит потому, что характеристическая функция в подыгре  $\Gamma_{\bar{z}_2}^S(g)$  отличается. Таким образом, это изменение может привести к тому, что часть игроков выйдет из кооперативного соглашения и отклонится от кооперативных

стратегий. Далее будет использован механизм, который обеспечивает *устойчивость* против отклонения от кооперативного решения  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$ . Кооперативное решение  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$  в двухшаговой игре является *динамически устойчивым* [9], если для *любого* дележа  $\xi[v(\bar{z}_1)] \in \mathcal{M}[v(\bar{z}_1)]$  существует дележ  $\xi[v(\bar{z}_2)] \in \mathcal{I}[v(\bar{z}_2)]$  такой, что

$$\xi[v(\bar{z}_1)] = \xi[v(\bar{z}_2)], \quad (1.39)$$

поскольку игроки не получают свои выигрыши на шаге формирования сети. В противном случае кооперативное решение является *динамически неустойчивым*. В первом случае, игроки следуют кооперативному соглашению, не ожидая, что кто-то из них отклонится. Во втором случае, чтобы предупредить отклонение игроков от кооперативного соглашения, будет использоваться *процедура распределения дележа* (ПРД),  $\beta = \{\beta_i^1, \beta_i^2\}_{i \in N}$  (впервые предложена в [13]) для дележа  $\xi[v(\bar{z}_1)] \in \mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$ , позволяющая разбить его на два шага игры  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$ , т. е.,  $\xi_i[v(\bar{z}_1)] = \beta_i^1 + \beta_i^2$  для каждого  $i \in N$ . Здесь  $\beta_i^1$  может быть интерпретирована как выплата игроку  $i$  на шаге формирования сети, и  $\beta_i^2$  — выплата на втором шаге игры, исходя из кооперативного соглашения. Таким образом, эти выплаты (ПРД) стимулируют игроков осознанно придерживаться их кооперативных стратегий в течении всей игры. Далее будет считаться, что ПРД  $\beta$  для дележа  $\xi[v(\bar{z}_1)]$  обладает свойством *динамической устойчивости*, когда она задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_i^1 &= \xi_i[v(\bar{z}_1)] - \xi_i[v(\bar{z}_2)], \\ \beta_i^2 &= \xi_i[v(\bar{z}_2)], \quad i \in N, \end{aligned} \quad (1.40)$$

для некоторого дележа  $\xi[v(\bar{z}_2)] \in \mathcal{I}[v(\bar{z}_2)]$ .

После введения динамически устойчивой ПРД  $\beta$  (1.40) для дележа  $\xi[v(\bar{z}_1)] \in \mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$ , игроки могут быть уверены, что никто из них не отклонится от кооперативной траектории, следовательно она будет реализована в игре и каждый

игрок  $i \in N$  получит  $\xi_i[v(\bar{z}_1)]$ , т. е. свой ожидаемый от кооперативного соглашения выигрыш.

В этом параграфе будет рассматриваться вопрос о динамической устойчивости вектора Шепли в описанной выше конкретной сети-звезда [42]. Исходя из упомянутых выше определений, можно заключить, что Вектор Шепли  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$  является динамически устойчивым кооперативным решением, если

$$\varphi[v(\bar{z}_1)] = \varphi[v(\bar{z}_2)], \quad (1.41)$$

**Утверждение 1.3** *Для сети-звезда с центральным игроком 1, вектор Шепли динамически устойчив, когда  $w_1^{1i} = w_i^{i1}$  для любого игрока  $i \neq 1$ .*

**Доказательство.** По определению, свойство динамической устойчивости вектора Шепли подразумевает, что  $\varphi[v(\bar{z}_1)] = \varphi[v(\bar{z}_2)]$  (см. 1.41). Задано выражение для компонент вектора Шепли (1.36) для игры  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$  и ее подыгры  $\Gamma_{\bar{z}_2}^S(g)$ , начинающейся со второго шага. Требуется рассмотреть различия в значениях вектора Шепли для некоторого произвольного игрока  $i \neq 1$  в одношаговой и двухшаговой игре:

$$\varphi_i[v(\bar{z}_1)] - \varphi_i[v(\bar{z}_2)] = \frac{m_{1i}}{2} - \frac{w_{i1}^i + m_{1i} - w_{1i}^1}{2} = \frac{w_{1i}^1 - w_{i1}^i}{2}.$$

Таким образом, если  $w_{1i}^1 = w_{i1}^i$  для любого игрока  $i \neq 1$ , тогда условие (1.41) будет удовлетворяться, что означает динамическую устойчивость вектора Шепли. Утверждение доказано.

Условия динамической устойчивости  $w_{1i}^1 = w_{i1}^i$ ,  $i \neq 1$ , приведенные в Утверждении 1.4 для сети-звезда могут быть интерпретированы следующим образом: игрок 1, центральный для сети, и любой другой игрок  $i \neq 1$  должны иметь одинаковый минимальный гарантированный выигрыш (максимальное значение) в биматричной игре  $\gamma_{1i}$  в которую они играют, так как являются соседями по сети. Если по крайней мере для одного игрока  $j$  имеет место  $w_1^{1j} \neq w_j^{j1}$ , тогда

вектор Шепли будет динамически неустойчивым. Однако в последнем случае кооперативное соглашение может достигаться за счет ПРД (1.40) — процедуры распределения дележа. Согласно определению,

**Определение 1.2** Функция  $\beta^i$ ,  $i \in N$  называется процедурой распределения дележа (ПРД)  $x \in \mathcal{M}[v(\bar{z}_1)]$  (см. [13]), если

$$x_i = \beta_i^1 + \beta_i^2, \quad i \in N. \quad (1.42)$$

Теперь можно сформулировать следующий результат.

**Утверждение 1.4** Для сети звезда с центральным игроком 1, динамически устойчивая ПРД  $\beta = \{\beta_i^1, \beta_i^2\}_{i \in N}$  для вектора Шепли имеет вид:

$$\beta_i^1 = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} [w_i^{i1} - w_1^{1i}], & i = 1, \\ \frac{1}{2} [w_1^{1i} - w_i^{i1}], & i \neq 1, \end{cases} \quad (1.43)$$

и

$$\beta_i^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} [w_1^{1i} + m_{1i} - w_i^{i1}], & i = 1, \\ \frac{1}{2} [w_i^{i1} + m_{1i} - w_1^{1i}], & i \neq 1. \end{cases} \quad (1.44)$$

**Доказательство.** Утверждение немедленно следует из прямой подстановки выражений выше в (1.40), и дополнительном использовании формулы (1.36) для сети звезда. Утверждение доказано.

С экономической точки зрения, для игроков предпочтительно иметь неотрицательные ПРД, такие что в результате разложения вектора Шепли на два шага игры, каждый игрок получает свои неотрицательные платежи на любом из двух шагов игры. Однако процедура распределения дележа для вектора Шепли, упомянутая в последнем предположении, может быть неотрицательной только в случае, когда  $w_1^{1i} = w_i^{i1}$  для каждого  $i \neq 1$ . Это равенство приводит к

динамической устойчивости вектора Шепли, которая уже обсуждалась.

## Пример

Ниже будут приведены три примера, которые демонстрируют, что вектор Шепли, выбранный в качестве дележа в кооперативной двухшаговой игре с парным взаимодействием  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  может быть как динамически устойчивым так и динамически неустойчивым. Первые два примера показывают динамическую устойчивость вектора Шепли в двух важнейших классах биматричных игр, а третий пример — динамическую неустойчивость.

**[Дилемма заключенного]** Рассматривается случай, когда  $n$  игроков играют в одинаковую биматричную игру  $\gamma_{ij}$  со своими соседями по сети, т. е.,  $A_{ij} = A$ ,  $B_{ij} = B$  для всех  $i \in N$ ,  $j \in N_i$ , где

$$A = B^T = \begin{pmatrix} b & 0 \\ a + b & a \end{pmatrix}, \quad 0 < a < b.$$

Здесь  $b$  — выигрыш каждого из связанных игроков, если они оба выбрали стратегию “сотрудничать”, в то время как при одновременном выборе стратегии “отклониться” каждый получает  $a$ . В качестве примера, можно рассмотреть проблему передачи данных в сети, узлы которой должны “координировать” свои действия и пытаться добиться определенной производительности (например, количество отправленных пакетов, прибыль от отправки пакетов).

Для данной игры используется выражение для максимина и минимакса, из которых получается, что  $w_i^{ij} = w_j^{ij} = a$  и

$$m_{ij} = \begin{cases} 2b, & \text{если } i \text{ и } j \text{ являются соседями,} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

для любых двух игроков  $i, j \in N$ .

Чтобы найти вектор Шепли  $\varphi[v(\bar{z}_2)]$ , для начала будет определена характеристическая функция  $v(\bar{z}_2; S)$  для всех  $S \subseteq N$ . Следуя (1.9), можно получить:

$$v(\bar{z}_2; S) = \begin{cases} 2b(n-1), & S = N, \\ 2b(|S|-1) + (n-|S|)a, & S \subset N, 1 \in S, \\ |S|a, & S \subset N, 1 \notin S, \\ 0, & S = \emptyset. \end{cases}$$

Используя формулу для вектора Шепли (1.36), преобразованную для вида сети-звезда, можно получить:

$$\begin{aligned} \varphi_1[v(\bar{z}_2)] &= \frac{n-1}{2} [a + 2b - a] = b(n-1), \\ \varphi_i[v(\bar{z}_2)] &= \frac{1}{2} [a + 2b - a] = b, \quad i \neq 1. \end{aligned}$$

Аналогично, чтобы найти значение вектора Шепли  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$ , определяется характеристическая функция  $v(\bar{z}_1; S)$  для всех  $S \subseteq N$ . Следуя (1.12), можно установить:

$$v(\bar{z}_1; S) = \begin{cases} 2b(n-1), & S = N, \\ 2b(|S|-1), & S \subset N, 1 \in S, \\ 0, & S \subset N, 1 \notin S \quad \text{или} \quad S = \emptyset. \end{cases}$$

Снова, используя формулу для вектора Шепли (1.36), преобразованную для вида сети-звезда, получаются следующие выражения для  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1[v(\bar{z}_1)] &= \frac{2b(n-1)}{2} = b(n-1), \\ \varphi_i[v(\bar{z}_1)] &= \frac{2b}{2} = b, \quad i \neq 1. \end{aligned}$$

Сравнивая  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$  и  $\varphi[v(\bar{z}_2)]$ , можно заметить, что они совпадают и из этого следует свойство динамической устойчивости для вектора Шепли. Интересным

представляется тот факт, что этот результат не зависит от конкретных значений  $a$  и  $b$ . Единственное ограничение, которое должно выполняться, это  $0 < a < b$ , и оно естественным образом следует из определения игры "дилемма заключенного".

Динамическая устойчивость вектора Шепли так же может быть показана с использованием утверждения 1.2 вместо применения прямых вычислений. В самом деле, было отмечено, что  $w_i^{i1} = w_1^{1i} = a$  для каждого  $i \neq 1$ , что подразумевает его динамическую устойчивость.

**[Координационная игра]** Как и раньше, предполагается, что  $n$  игроков играют в одинаковую игру  $\gamma_{ij}$  со своими соседями по сети, но теперь они играют в координационную игру, т. е.,  $A_{ij} = A$ ,  $B_{ij} = B$  для всех  $i \in N$ ,  $j \in N_i$  где

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (a, b) & (0, 0) \\ (0, 0) & (c, d) \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d > 0, \quad a + b \geq c + d.$$

Для данной игры используем выражения (2.3), (2.3), откуда получается, что  $w_i^{ij} = w_j^{ij} = 0$  и

$$m_{ij} = \begin{cases} a + b, & \text{если } i \text{ и } j \text{ соседи,} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

для любых двух игроков  $i, j \in N$ . Подставляя эти значения в (1.36), можно получить следующие выражения для компонент вектора Шепли

$$\varphi_i[v(\bar{z}_1)] = \varphi_i[v(\bar{z}_2)] = \begin{cases} \frac{(n-1)(a+b)}{2}, & i = 1, \\ \frac{a+b}{2}, & i \neq 1, \end{cases}$$

что в свою очередь подразумевает динамическую устойчивость вектора Шепли в координационной игре.

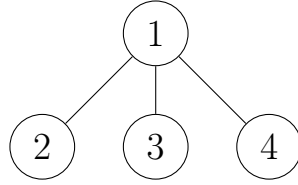
**[Пример неустойчивости]** В следующем примере будет продемонстрирована динамическая неустойчивость вектора Шепли.

Рассматривается игра четырех лиц с  $N = \{1, 2, 3, 4\}$  в которой игроки фор-



мируют сеть-звезду при кооперативном соглашении (см. рис. 3). Пусть одно-  
временные биматричные игры  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{13}$  и  $\gamma_{14}$  будут заданы путем определения  
следующих матриц выигрыша:

$$\begin{aligned} (A_{12}, B_{12}) &= \begin{pmatrix} (2, 2) & (3, 0) \\ (5, 1) & (1, 2) \end{pmatrix}, & (A_{13}, B_{13}) &= \begin{pmatrix} (3, 1) & (4, 2) \\ (6, 2) & (2, 3) \end{pmatrix}, \\ (A_{14}, B_{14}) &= \begin{pmatrix} (1, 3) & (3, 2) \\ (6, 6) & (4, 1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



**Рисунок 3.** Сеть-звезда для четырех игроков.

Чтобы вычислить значение компонент вектора Шепли  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$  и  $\varphi[v(\bar{z}_2)]$ ,  
используются соответствующие формулы (1.8)-(1.10) для характеристической  
функции  $v(\bar{z}_2; S)$  и  $v(\bar{z}_1; S)$ , соответственно, и упрощенная формула (1.36). От-  
сюда получается:

$$\begin{aligned} w_1^{12} &= 2, & w_1^{13} &= 3, & w_1^{14} &= 4, \\ w_2^{21} &= 1, & w_3^{31} &= 2, & w_4^{41} &= 3, \\ m_{12} &= 6, & m_{13} &= 8, & m_{14} &= 12, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} v(\bar{z}_1; \{1\}) &= 0, & v(\bar{z}_2; \{1\}) &= 9, \\ v(\bar{z}_1; \{2\}) &= 0, & v(\bar{z}_2; \{2\}) &= 1, \\ v(\bar{z}_1; \{3\}) &= 0, & v(\bar{z}_2; \{3\}) &= 2, \\ v(\bar{z}_1; \{4\}) &= 0, & v(\bar{z}_2; \{4\}) &= 3, \\ v(\bar{z}_1; N) &= 26, & v(\bar{z}_2; N) &= 26. \end{aligned}$$

Таким образом, получаются следующие значения вектора Шепли

$$\varphi[v(\bar{z}_1)] = (13, 3, 4, 6),$$

$$\varphi[v(\bar{z}_2)] = (29/2, 5/2, 7/2, 11/2).$$

Можно заметить, что вектор Шепли  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$  в двухшаговой игре отличается от вектора Шепли  $\varphi[v(\bar{z}_2)]$  в одношаговой игре, начинающейся со второго шага. Это означает динамическую неустойчивость вектора Шепли. Поскольку  $\varphi_2[v(\bar{z}_2)] = 5/2 < \varphi_2[v(\bar{z}_1)] = 3$ , игрок 2 может разорвать кооперативные соглашения, поскольку получает меньше (следует напомнить, что игроки не получают выигрышей на шаге формирования сети). Аналогично, это верно для игрока 3:  $\varphi_3[v(\bar{z}_2)] = 7/2 < \varphi_3[v(\bar{z}_1)] = 4$  и игрока 4:  $\varphi_4[v(\bar{z}_2)] = 11/2 < \varphi_4[v(\bar{z}_1)] = 6$ . Однако введение динамически устойчивой ПРД вектора Шепли  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$  определенной по формулам (1.43), (1.44), позволяет получить:

$$\begin{aligned} \beta_1^1 &= -3/2, & \beta_2^1 &= 1/2, & \beta_3^1 &= 1/2, & \beta_4^1 &= 1/2, \\ \beta_1^2 &= 29/2, & \beta_2^2 &= 5/2, & \beta_3^2 &= 7/2, & \beta_4^2 &= 11/2, \end{aligned}$$

и следовательно, реализуя ее, кооперация игроков будет устойчивой. Таким образом, получая  $\beta_i^1$  на первом шаге и  $\beta_i^2$  на втором шаге, игрок  $i \in N$  будет получать  $\varphi_i[v(\bar{z}_1)]$  в двух шагах. То есть именно тот выигрыш, который предписывает игроку кооперативное решение, определенное через вектор Шепли  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$ .

### 1.6.3 С-ядро

В этом параграфе будет рассмотрено *С-ядро*  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$  в качестве кооперативного решения  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$ , а так же вопрос о нахождении явного вида условий для его динамической устойчивости. С-ядро  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$  игры  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$  определяется как

множество таких дележей  $\xi[v(\bar{z}_1)] \in \mathcal{M}[v(\bar{z}_1)]$ , которые удовлетворяют условию коллективной рациональности, т. е.,  $\sum_{i \in S} \xi_i[v(\bar{z}_1)] \geq v(\bar{z}_1; S)$  для всех  $S \subset N$ .

В этом параграфе будут выведены соответствующие условия динамической устойчивости для сети-звезда. Пусть снова  $M_1 = N \setminus \{1\}$ ,  $a_1 = n - 1$  и  $M_i = \{1\}$ ,  $a_i = 1$  для  $i \neq 1$ . Как сказано ранее, в целях максимизации общего выигрыша, игрокам следует выбирать поведение (1.30) и формировать сеть-звезду на первом шаге с центральным игроком 1.

**Утверждение 1.5** *Для сети-звезда, вектор Шепли, определенный как (1.36) принадлежит C-ядру в обеих играх —  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$  и в подыгре  $\Gamma_{\bar{z}_2}^S(g)$ , таким образом, C-ядра  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$  и  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  не пусты.*

**Доказательство.** Утверждение немедленно следует из супермодулярности характеристических функций  $v(\bar{z}_1; S)$  и  $v(\bar{z}_2; S)$ , что гарантирует принадлежность вектора Шепли C-ядру. Утверждение доказано.

Ниже будут сформулированы условия динамической устойчивости C-ядра для двухшаговой игры с попарным взаимодействием  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$ .

**Утверждение 1.6** *C-ядро  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$  двухшаговой игры  $\Gamma_{\bar{z}_2}^S(g)$  обладает свойством динамической устойчивости, если  $w_i^{ij} = 0$  для всех игроков  $i$  и  $j$ .*

**Доказательство.** Для начала следует отметить, что для любой коалиции  $S \subseteq N$  выполняется  $v(\bar{z}_1; S) \leq v(\bar{z}_2; S)$ . Это сразу подразумевает включение

$$\mathcal{C}[v(\bar{z}_2)] \subseteq \mathcal{C}[v(\bar{z}_1)].$$

Данное условие означает, что C-ядро игры будет динамически устойчивым когда две характеристические функции совпадают, т. е., когда  $v(\bar{z}_1; S) = v(\bar{z}_2; S)$  для любых  $S$  что в свою очередь подразумевает, что  $w_i^{ij} = 0$  для всех игроков  $i$  и  $j$ . Утверждение доказано.

Когда условие, упомянутое в утверждении 1.6, не выполняется, C-ядро игры может быть динамически неустойчиво. Однако игра допускает другое решение в

виде аналога С-ядра, которое всегда обладает свойством динамической устойчивости. Пусть  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)] = \mathcal{C}[v(\bar{z}_1)] \cap \mathcal{C}[v(\bar{z}_2)] \equiv \mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  в игре и  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_2)] = \mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  в подыгре, и  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_2)] \neq \emptyset$ . Тогда можно получить следующий результат.

**Утверждение 1.7** *Решение в форме аналога С-ядра  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$  является динамически устойчивым.*

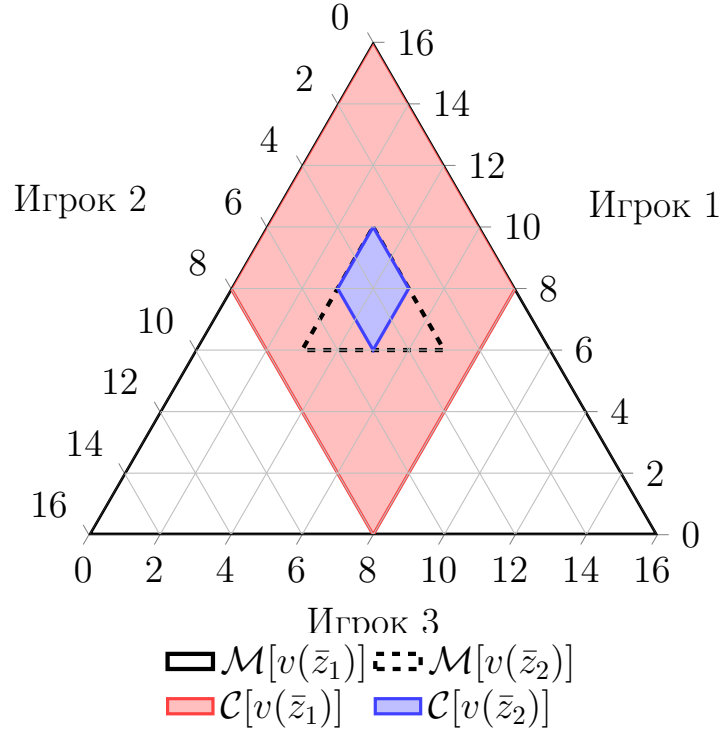
**Доказательство.** Если  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)] = \mathcal{I}[v(\bar{z}_2)]$ , тогда для каждого дележа  $\xi[v(\bar{z}_1)] \in \mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$  условия динамической устойчивости (1.39) выполняются. Утверждение доказано.

## Пример

**[Дилемма заключенного]** Для иллюстрации приведенных выше рассуждений будет рассмотрена игра из примера "Дилемма заключенного". Игра имеет динамически неустойчивое С-ядро так как существует дележ  $\xi[v(\bar{z}_1)] = (0, 2b, \dots, 2b) \in \mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$  который не принадлежит С-ядру  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  подыгры, что противоречит (1.39). В самом деле, для коалиции  $S \subset N$  и  $1 \in S$  справедливо

$$\sum_{i \in S} \xi_i[v(\bar{z}_1)] = 2b(|S| - 1) < v(\bar{z}_2; S) = 2b(|S| - 1) + (n - |S|)a,$$

где  $a > 0$ . Динамическая неустойчивость С-ядра так же показана на рисунке 4, где изображено множество дележей и С-ядро для игры трех лиц. Можно заметить, что для некоторых дележей  $\xi[v(\bar{z}_1)] \in \mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$  (красная область) невозможно найти дележ  $\xi[v(\bar{z}_2)] \in \mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  (синяя область) так, чтобы они совпадали.



**Рисунок 4.** Множества дележей  $\mathcal{M}[v(\bar{z}_1)]$ ,  $\mathcal{M}[v(\bar{z}_2)]$  и  $\mathcal{C}$ -ядра  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$ ,  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  в игре трех лиц ”дилемма заключенного”, где  $a = 3$ ,  $b = 4$ .

Можно отметить, что в этом случае  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_2)] \neq \emptyset$  по утверждению 1.5, значит, можно обеспечить динамически устойчивую ПРД  $\beta$  для дележа, например,  $\xi[v(\bar{z}_1)] = (0, 2b, \dots, 2b)$ . Пусть выбран дележ  $\xi[v(\bar{z}_2)] = ((2b - a)(n - 1), a, \dots, a) \in \mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$ , используя (1.42) получается:

$$\beta_i^1 = \begin{cases} (a - 2b)(n - 1), & i = 1, \\ 2b - a, & i \neq 1, \end{cases}$$

$$\beta_i^2 = \begin{cases} (2b - a)(n - 1), & i = 1, \\ a, & i \neq 1. \end{cases}$$

ПРД  $\beta$  не является неотрицательной, поскольку  $b > a$ . Однако, можно показать, что для другого дележа из ядра  $\bar{\xi}[v(\bar{z}_1)] = ((2b - a)(n - 1), a, \dots, a) \in \mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$

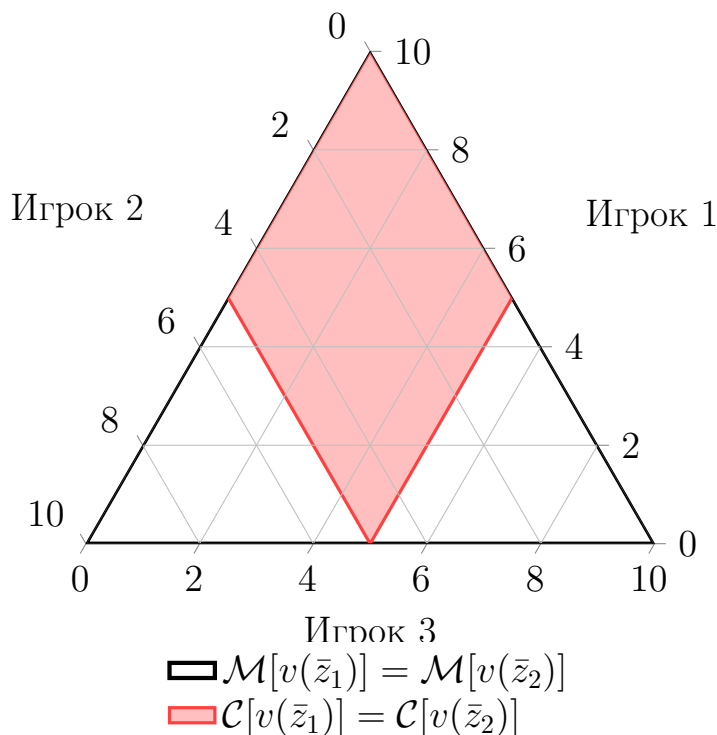
существует неотрицательная ПРД  $\bar{\beta}$ , заданная следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_i^1 &= 0, \quad i \in N, \\ \bar{\beta}_i^2 &= \begin{cases} (2b - a)(n - 1), & i = 1, \\ a, & i \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

**[Координационная игра]** Ранее утверждалось, что эта игра имеет динамически устойчивое ядро. В самом деле, вычислив значения характеристической функции  $v(\bar{z}_1; S)$  и  $v(\bar{z}_2; S)$ , и используя выражения (1.9), (1.12) и переобозначения  $w_i^{ij} = w_j^{ij} = 0$  для любых двух игроков  $i, j \in N$ , можно заключить, что

$$v(\bar{z}_1; S) = v(\bar{z}_2; S) = \begin{cases} (n - 1)(a + b), & S = N, \\ (|S| - 1)(a + b), & S \subset N, 1 \in S, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поскольку  $v(\bar{z}_1; S) = v(\bar{z}_2; S)$  для любых  $S \subseteq N$ , тогда  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_1)] = \mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  означает динамическую устойчивость  $S$ -ядра. Это показано на рисунке 5. Динамическая устойчивость  $S$ -ядра так же следует из Утверждения 1.5.



**Рисунок 5.** Множества дележей  $\mathcal{M}[v(\bar{z}_1)]$ ,  $\mathcal{M}[v(\bar{z}_2)]$  и С-ядра  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$ ,  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  в координационной игре трех лиц с  $a = 4$ ,  $b = 1$ .

## 1.7 С-ядро в двухшаговой игре трех лиц

В данном параграфе будет рассмотрена двухшаговая игра трех лиц с попарным взаимодействием  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  на произвольной сети  $g$  [22]. В качестве решения будет рассматриваться С-ядро.

Как упоминалось ранее, С-ядро  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_t)] \subset \mathcal{M}[v(\bar{z}_t)]$  в игре  $\Gamma_{z_t}^S(g)$  в силу супермодулярности характеристической функции  $v(z_t; S)$ ,  $t = 1, 2$  не является пустым.

С-ядро  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_t)]$  в игре  $\Gamma_{z_t}^S(g)$  — это множество таких дележей  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}[v(\bar{z}_t)]$ , которые удовлетворяют следующим условиям

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(\bar{z}_t; S), \quad S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = v(\bar{z}_t; N). \quad (1.45)$$

В данном параграфе будут выведены условия сильной динамической устойчивости С-ядра в указанной игре. Согласно [10]:

**Определение 1.3** *С-ядро  $C[v(\bar{z}_1)]$  является сильно-динамически устойчивым в игре  $\Gamma_{z_t}^S(g)$ , если*

1.  $C[v(\bar{z}_1)] \neq \emptyset, C[v(\bar{z}_2)] \neq \emptyset$

2. Для каждого дележа  $x \in C[v(\bar{z}_1)]$  существует такая ПРД (1.42)  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ , что  $x = \beta_1 + \beta_2$  и

$$C[v(\bar{z}_1)] \supset \beta_1 \oplus C[v(\bar{z}_2)].$$

Здесь символ  $\oplus$  определяется как  $a \in R^n, B \subset R^n$ , тогда  $a \oplus B = \{a+b : b \in B\}$ .

Для подыгры  $\Gamma_{z_2}^S(g)$  получаются следующие значения характеристической функции с учетом (1.9)-(1.10). Следует отметить, что формулы приведены для случая полной сети. В случае, если какие-то из ребер отсутствуют в сети  $g$ , соответствующие этому ребру компоненты будут равны нулю.

$$v(\bar{z}_2; \emptyset) = 0, \quad v(\bar{z}_2; \{1\}) = w_{13}^1 + w_{12}^1, \quad v(\bar{z}_2; \{2\}) = w_{21}^2 + w_{23}^2,$$

$$v(\bar{z}_2; \{3\}) = w_{31}^3 + w_{32}^3,$$

$$v(\bar{z}_2; \{12\}) = \max_{p,l} (a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) + w_{13}^1 + w_{23}^2,$$

$$v(\bar{z}_2; \{13\}) = \max_{p,l} (a_{pl}^{13} + b_{pl}^{31}) + w_{12}^1 + w_{32}^3,$$

$$v(\bar{z}_2; \{23\}) = \max_{p,l} (a_{pl}^{23} + b_{pl}^{32}) + w_{21}^2 + w_{31}^3,$$

$$v(\bar{z}_2; N) = \max_{p,l} (a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) + \max_{p,l} (a_{pl}^{13} + b_{pl}^{31}) + \max_{p,l} (a_{pl}^{23} + b_{pl}^{32}).$$

Дележ  $x$  принадлежит С-ядру  $C[v(\bar{z}_2)]$ , когда следующие условия выполняются



ся:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq v(\bar{z}_2; \{12\}) \\ x_1 + x_3 \geq v(\bar{z}_2; \{13\}) \\ x_2 + x_3 \geq v(\bar{z}_2; \{23\}) \\ x_1 \geq v(\bar{z}_2; \{1\}) \\ x_2 \geq v(\bar{z}_2; \{2\}) \\ x_3 \geq v(\bar{z}_2; \{3\}) \\ x_1 + x_2 + x_3 = v(\bar{z}_2; N) \end{array} \right. \quad (1.46)$$

Принимая во внимание выражения (1.46) и указанные выше значения характеристической функции, получается:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq \max_{pl} (a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) + w_{23}^2 + w_{13}^1 \\ x_1 + x_3 \geq \max_{pl} (a_{pl}^{13} + b_{pl}^{31}) + w_{12}^1 + w_{23}^2 \\ x_2 + x_3 \geq \max_{pl} (a_{pl}^{23} + b_{pl}^{32}) + w_{12}^2 + w_{13}^3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = v(\bar{z}_2; N) \end{array} \right. \quad (1.47)$$

Введены следующие обозначения для сокращения записи:

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= \max_{pl} (a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}), \quad D_1 = w_{23}^2 + w_{13}^1, \\ \Delta_{13} &= \max_{pl} (a_{pl}^{13} + b_{pl}^{31}), \quad D_2 = w_{12}^1 + w_{23}^3, \\ \Delta_{23} &= \max_{pl} (a_{pl}^{23} + b_{pl}^{32}), \quad D_3 = w_{12}^2 + w_{13}^3. \end{aligned}$$

Тогда система (1.47), которая определяет структуру С-ядра  $C[v(\bar{z}_2)]$  может быть переписана в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq \Delta_{12} + D_1 \\ x_1 + x_3 \geq \Delta_{13} + D_2 \\ x_2 + x_3 \geq \Delta_{23} + D_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = v(\bar{z}_2; N) \end{array} \right. \quad (1.48)$$

Неравенства, определяющие вид С-ядра  $C[v(\bar{z}_1)]$  двухшаговой игры  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$

имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 \geq v(\bar{z}_1; \{12\}) \\ x'_1 + x'_3 \geq v(\bar{z}_1; \{13\}) \\ x'_2 + x'_3 \geq v(\bar{z}_1; \{23\}) \\ x'_1 + x'_2 + x'_3 = v(\bar{z}_1; N) \end{cases} \quad (1.49)$$

С учетом выражений (1.49) и значений характеристической функции, получается:

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 \geq \max_{pl} (a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) \\ x'_1 + x'_3 \geq \max_{pl} (a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) \\ x'_2 + x'_3 \geq \max_{pl} (a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) \\ x'_1 + x'_2 + x'_3 = v(\bar{z}_1; N) \end{cases} \quad (1.50)$$

После подстановки указанных выше переобозначений, система примет следующий вид:

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 \geq \Delta_{12} \\ x'_1 + x'_3 \geq \Delta_{13} \\ x'_2 + x'_3 \geq \Delta_{23} \\ x'_1 + x'_2 + x'_3 = v(\bar{z}_1; N) \end{cases} \quad (1.51)$$

### **Сильная динамическая устойчивость С-ядра $C[v(\bar{z}_1)]$**

Учитывая указанное выше определение сильной динамической устойчивости и в соответствии с выражением (1.51) можно написать, что:

$$\begin{cases} \beta_1^1 + \beta_2^1 + \beta_1^2 + \beta_2^2 \geq \Delta_{12} \\ \beta_1^1 + \beta_2^1 + \beta_1^3 + \beta_2^3 \geq \Delta_{13} \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_1^3 + \beta_2^3 \geq \Delta_{23} \end{cases} \quad (1.52)$$

Для сильной динамической устойчивости эти неравенства должны удовлетво-

ряться с учетом следующих дополнительных условий:

$$\begin{cases} \beta_2^1 + \beta_2^2 \geq \Delta_{12} + D_1 \\ \beta_2^1 + \beta_2^3 \geq \Delta_{13} + D_2 \\ \beta_2^2 + \beta_2^3 \geq \Delta_{23} + D_3 \end{cases} \quad (1.53)$$

Пусть  $\beta_1$  зафиксировано, тогда для сильной динамической устойчивости должны выполняться условия (1.53) для  $\beta_2$ . При этом  $\beta_2$  должна дополнительно удовлетворять условиям (1.52). Так же, из  $v(\bar{z}_2; N) = v(\bar{z}_1; N)$ , следует, что  $\beta_1^1 + \beta_1^2 + \beta_1^3 = 0$ . Если выражения (1.52) удовлетворяются для минимальных значений  $\beta_2^1, \beta_2^2, \beta_2^3$  из условий (1.53), тогда они очевидно удовлетворяются и для всех остальных значений. Получаются следующие неравенства:

$$\begin{cases} -\beta_1^3 + \Delta_{12} + D_1 \geq \Delta_{12} \\ -\beta_1^2 + \Delta_{13} + D_2 \geq \Delta_{13} \\ -\beta_1^1 + \Delta_{23} + D_3 \geq \Delta_{23} \end{cases} \quad (1.54)$$

Таким образом, были получены условия для сильной динамической устойчивости  $C$ -ядра  $C[v(\bar{z}_1)]$  в игре  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$ .

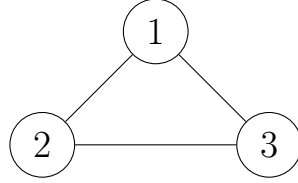
**Теорема 1.5** Пусть следующие условия выполняются:

$$\begin{cases} \beta_1^3 \leq D_1 \\ \beta_1^2 \leq D_2 \\ \beta_1^1 \leq D_3 \end{cases} \quad (1.55)$$

(то есть существует  $\beta_1$  которая удовлетворяет условию (1.55)), тогда  $C$ -ядро  $C[v(\bar{z}_1)]$  обладает свойством сильной динамической устойчивости.

## Пример

Чтобы проиллюстрировать результат, будет рассмотрен следующий пример игры трех лиц, когда  $N_i = N \setminus \{i\}$  для всех  $i \in N$ . Для максимизации суммарного выигрыша игрокам следует составить полный граф путем выбора следующих поведений в первом состоянии игры:  $b_1^1 = (0; 1; 1)$ ,  $b_2^1 = (1; 0; 1)$ ,  $b_3^1 = (1; 1; 0)$ . Получается сеть следующего вида:



**Рисунок 6.** Сеть во втором состоянии игры.

Далее будут вычислены значения характеристической функции и построено С-ядро. Следующие матрицы являются заданными.

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad C_{12} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad C_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad C_{23} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

По данным матрицам вычисляются следующие значения характеристической функции

$$\begin{aligned} w_{13}^1 &= 3, \quad w_{23}^2 = 4, \quad w_{12}^1 = 5, \\ w_{23}^3 &= 6, \quad w_{12}^2 = 4, \quad w_{13}^3 = 2 \\ D_1 &= 6, \quad D_2 = 11, \quad D_3 = 6 \\ \Delta_{12} &= \max_{p,l} (a^{12} + b^{21}) = 15 \\ \Delta_{13} &= \max_{p,l} (a^{13} + b^{31}) = 11 \\ \Delta_{23} &= \max_{p,l} (a^{23} + b^{32}) = 9 \\ v(\bar{z}_1; \{123\}) &= v(\bar{z}_2; \{123\}) = 35 \end{aligned}$$

Тогда С-ядро  $C[v(\bar{z}_1)]$  в игре  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$  определяется следующей системой нера-

венств:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 + x'_2 \geq 15 \\ x'_1 + x'_3 \geq 11 \\ x'_2 + x'_3 \geq 9 \\ x'_1 + x'_2 + x'_3 = 35 \end{array} \right. \quad (1.56)$$

C-ядро  $C[v(\bar{z}_2)]$  для подыгры  $\Gamma_{\bar{z}_2}^S(g)$ , в свою очередь, определяется системой неравенств вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 21 \\ x_1 + x_3 \geq 22 \\ x_2 + x_3 \geq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 35 \end{array} \right. \quad (1.57)$$

Необходимо взять вектор  $\beta_1$  который удовлетворяет условиям (1.55), например  $\beta_1=(5; -10; 5)$ . Отсюда получается система (1.56) в соответствии с условиями (1.57):

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 - 10 + 21 \geq 15 \\ 5 + 5 + 22 \geq 11 \\ -10 + 5 + 15 \geq 9 \end{array} \right. \quad (1.58)$$

Данные неравенства являются верными, и это означает, что с-ядро  $C[v(\bar{z}_1)]$  обладает свойством сильной динамической устойчивости.

## Глава 2:

# Многошаговые биматричные игры с попарным взаимодействием

В данной главе будут рассматриваться многошаговые игры с попарным взаимодействием с конечным числом шагов. Результаты, полученные в предыдущей главе будут распространены на случай многошаговых игр, а так же рассмотрен вопрос о сильной динамической устойчивости решений в условиях многошаговой модели. Для определенности в этом параграфе будет рассматриваться заданная сеть в виде полного графа. То есть на первом шаге не происходит формирование сети, а сразу начинается игровой процесс.

### 2.1 Постановка задачи

Модель формализуется следующим образом [3]. Пусть задано абстрактное пространство  $\mathbb{Z}$ , которое называется пространством состояний. В каждом состоянии  $z \in \mathbb{Z}$  задана неантагонистическая игра  $n$ -лиц  $\Gamma(z)$  на полной сети  $g$  (то есть  $N_i = N$  для всех  $i \in N$ ), вершинами которой являются игроки, а ребрами — связи между игроками. Игра  $\Gamma(z)$  аналогична игре на втором шаге в двухшаговом случае (см. глава 1) и представляет собой семейство попарных одновременных биматричных игр  $\{\gamma_{ij}(z)\}$  между соседями по сети,  $i \in N, j \in N, i \neq j$ .

Пусть  $i \in N, j \in N, i \neq j$ . Тогда  $i$  играет с  $j$  в биматричную игру  $\gamma_{ij}(z)$  с

матрицами выигрышей  $A_{ij}(z)$  и  $C_{ij}(z)$ , игроков  $i$  и  $j$ , соответственно.

$$A_{ij}(z) = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij}(z) & a_{12}^{ij}(z) & \cdots & a_{1r}^{ij}(z) \\ a_{21}^{ij}(z) & a_{22}^{ij}(z) & \cdots & a_{2r}^{ij}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{ij}(z) & a_{m2}^{ij}(z) & \cdots & a_{mr}^{ij}(z) \end{pmatrix}; \quad (2.1)$$

$$C_{ij}(z) = \begin{pmatrix} c_{11}^{ij}(z) & c_{12}^{ij}(z) & \cdots & c_{1r}^{ij}(z) \\ c_{21}^{ij}(z) & c_{22}^{ij}(z) & \cdots & c_{2r}^{ij}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}^{ij}(z) & c_{m2}^{ij}(z) & \cdots & c_{mr}^{ij}(z) \end{pmatrix}; \quad (2.2)$$

$$a_{pq}^{ij}(z) \geq 0, c_{pq}^{ij}(z) \geq 0, \quad p = 1, \dots, m, \quad q = 1, \dots, r, \quad i, j \in N.$$

Для простоты дальнейших выкладок предполагается, что константы  $m$  и  $r$  одинаковы для всех игроков  $i$  и  $j$  и всех состояний  $z$ . Когда имеет место игра  $\gamma_{ji}(z)$ , т. е. игрок  $i$  является вторым игроком, то он играет с матрицей  $C_{ji}(z)$  которая равна  $A_{ij}^T(z)$ , а игрок  $j$ , который теперь является первым игроком играет с матрицей выигрышей  $A_{ji}(z)$ , или, что то же самое,  $C_{ij}^T(z)$ .

Стратегией игрока  $i$  в игре  $\Gamma(z)$  является вектор  $u_i(z) = (u_i^1(z), \dots, u_i^j(z), \dots, u_i^n(z))$ , где  $u_i^j$  — поведение игрока  $i$  в биматричной игре  $\gamma_{ij}(z)$ . То есть стратегия игрока  $i$  — это набор номеров выбранных им строк (чистых стратегий) в биматричных играх  $\gamma_{ij}(z)$ . Через  $u(z) = (u_1(z), \dots, u_n(z))$  обозначается ситуация в игре  $\Gamma(z)$ . Стратегия игрока  $j$  — это набор номеров выбранных им столбцов в соответствующих биматричных играх  $\gamma_{ij}(z)$ . Выигрыш игрока  $i$  в игре  $\Gamma(z)$  определяется следующим образом:

$$K_i(z) = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{u_i^j(z) u_j^i(z)}^{ij}(z)$$

Далее игра  $\Gamma(z)$  рассматривается в кооперативной форме. С этой целью опреде-

ляется характеристическая функция  $v(z; S)$ ,  $S \subset N$  для каждого подмножества (коалиции)  $S \subset N$  как нижнее (максиминное) значение антагонистической игры двух лиц коалиции  $S$  и дополнительной коалиции  $N \setminus S$ , построенной на основе игры  $\Gamma(z)$ , при этом выигрыш коалиции  $S$  определяется как сумма выигрышей игроков, входящих в  $S$ . Супераддитивность характеристической функции следует из ее определения. Вводятся следующие обозначения, аналогичные упомянутым в главе 1:

$$\begin{aligned}\omega_{ij}^i(z) &= \max_p \min_q a_{pq}^{ij}(z), \quad p = 1, \dots, m; \quad q = 1, \dots, r, \\ \omega_{ij}^j(z) &= \max_q \min_p a_{pq}^{ji}(z), \quad p = 1, \dots, m; \quad q = 1, \dots, r.\end{aligned}$$

**Лемма 2.1** *Функция  $v(z; S)$  определяется по следующим формулам:*

$$v(\{z; \emptyset\}) = 0, \quad (2.3)$$

$$v(z; \{i\}) = \sum_{j \in N, j \neq i} \omega_{ij}(z), \quad (2.4)$$

$$v(z; S) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in S, j \neq i} \max_{p,q} (a_{pq}^{ij}(z) + a_{pq}^{ji}(z)) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N \setminus S} \omega_{ij}^i(z), \quad S \subset N, \quad (2.5)$$

$$v(z; N) = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N, j \neq i} \max_{p,q} (a_{pq}^{ij}(z) + a_{pq}^{ji}(z)). \quad (2.6)$$

**Доказательство.** Формула (2.3) очевидна.

Сначала будет доказана формула (2.4). Поскольку игрок  $i$ , действуя против коалиции  $N \setminus \{i\}$ , играет с игроками  $j$  из  $N$  в независимые биматричные игры, то в каждой из этих биматричных игр он может себе гарантировать наибольший выигрыш  $w_{ij}^i(z)$ , следовательно наибольший выигрыш, который игрок  $i$  может гарантировать себе во всей игре, есть сумма  $\sum_{j \in N} w_{ij}^i(z)$ . Это и есть в данном случае максиминный выигрыш  $i$  против дополнительной коалиции  $N \setminus \{i\}$ . Это означает, что формула (2.4) справедлива.

Теперь будет доказана формула (2.5) для произвольной коалиции  $S$ . Каж-



дый из игроков, входящих в  $S$  играет в независимые попарные биматричные игры как с игроками, входящими в  $N \cap S$ , так и с игроками  $N \setminus S$ . В первом случае игроки, взаимодействующие внутри коалиции  $S$  и действуя в ее интересах, всегда могут выбрать стратегию, максимизирующую их суммарный выигрыш, т.е.,  $\sum_{j \in N \cap S} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij}(z) + c_{p\ell}^{ji}(z))$ . Во втором случае игроки, взаимодействующие с игроками из дополнительной коалиции  $N \setminus S$  могут гарантировать себе лишь нижнее значение игры, т.е. минимальный гарантированный выигрыш  $\sum_{k \in N \setminus S} w_{ik}^i(z)$ . Таким образом, максимальный суммарный выигрыш, который может обеспечить себе коалиция  $S$ , будет складываться из двух частей и равняться:

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N \cap S} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij}(z) + c_{p\ell}^{ji}(z)) + \sum_{i \in S} \sum_{k \in N \setminus S} w_{ik}^i(z).$$

Формула (2.6) следует из определения максимального суммарного выигрыша игроков.

В формулах (2.5) и (2.6) коэффициент  $\frac{1}{2}$  использован для того, чтобы исключить повторное суммирование выигрышей игроков по одним и тем же ребрам. Лемма доказана.

Следует определить порядок перехода от состояния к состоянию в данной многошаговой игре. Пусть в состоянии  $z \in Z$  в игре  $\Gamma(z)$  игроками были выбраны следующие стратегии:  $u_i(z) = (u_i^1(z), \dots, u_i^n(z))$ . В результате выбора этих стратегий осуществляется переход в новое состояние  $z'$ , где происходит игра  $\Gamma(z')$ , состоящая из одновременных биматричных игр между соседями по сети, с матрицами выигрышей, зависящими от стратегий, выбранных в предыдущем состоянии  $z$ . То есть состояние на следующем шаге игры зависит от состояния на текущем шаге, и от стратегий, выбранных на данном шаге. Тогда можно определить отображение  $T : Z \rightarrow Z$  по формуле:

$$z' = T(z; u_1(z), u_2(z), \dots, u_n(z)).$$

Таким образом, многошаговая игра, которая будет обозначаться  $G(z)$  происходит по следующим правилам. Игра  $G(z_1)$  начинается в состоянии  $z_1$ , на первом шаге. В состоянии  $z_1$  происходит игра  $\Gamma(z_1)$ , игроки выбирают свои стратегии  $u_1(z_1), u_2(z_1), \dots, u_n(z_1)$ , затем, на шаге 2, переходят в новое состояние  $z_2 = T(z_1; u_1(z_1), u_2(z_1), \dots, u_n(z_1))$ . В состоянии  $z_k$  на шаге  $k$  игроки играют в игру  $\Gamma(z_k)$ , снова выбирают стратегии  $u_1(z_k), u_2(z_k), \dots, u_n(z_k)$  и переходят в следующее состояние  $z_{k+1} = T(z_k; u_1(z_k), u_2(z_k), \dots, u_n(z_k))$  на шаге  $k+1$ . Игра заканчивается на последнем шаге  $\ell$  в состоянии  $z_\ell$ . Таким образом, в результате выбора стратегий на каждом шаге игры реализуется путь  $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_\ell$ . Естественным образом определяется понятие стратегии в получившейся многошаговой игре  $u(\cdot) = u\{z\}$ , как набор стратегий всех игроков, определенных в каждом состоянии  $z \in \mathbb{Z}$ . Из приведенного выше описания следует, что любая ситуация  $u(\cdot) = \{u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot)\}$  однозначно определяет путь в игре, а следовательно и выигрыш каждого игрока, как сумму его выигрышей во всех играх, реализованных вдоль получившегося пути.

$$K_i(u(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{u_i^j(z_k)u_j^i(z_k)}^{ij}(z_k).$$

Следует отметить, что множество всевозможных путей в многошаговой игре  $G(z)$  конечно. А, следовательно, конечно и множество всех возможных состояний в игре. Это множество будет обозначаться через  $\bar{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$ .

## 2.2 Случай равных значений $v(z; N)$

Для упрощения рассуждений, в начале рассматривается частный случай, когда значение  $v(z; N)$  одинаково для всех  $z \in \bar{\mathbb{Z}}$ . В рассмотрение вводится дополнительная функция  $w(S)$ ,  $S \subset N$ :

$$w(S) = \max_z v(S; z).$$

Характеристическая функция многошаговой игры  $G(z_k)$ , начинающейся в состоянии  $z_k$ , будет обозначаться через  $V(z_k; S)$ . Функция  $V(z_k; S)$  вычисляется с помощью следующего аналога уравнения Беллмана:

$$\begin{aligned} V(z_{k-1}; S) &= \max_{u_i, i \in S} \left[ \min_{u_j, j \in N \setminus S} \left( \sum_{i \in S} K_i^{z_{k-1}}(u_1, \dots, u_n) + V(S; z_k) \right) \right] = \\ &= \max_{u_i, i \in S} \left[ \min_{u_j, j \in N \setminus S} \left( \sum_{i \in S} K_i^{z_{k-1}}(u_1, \dots, u_n) + V(S; T(z_{k-1}; u(z_{k-1}))) \right) \right]; \\ V(z_\ell; S) &= v(z_\ell; S). \end{aligned}$$

Дополнительная функция для многошаговой игры  $G(z_1)$  определяется следующим образом,

$$W(z_k; S) = (l - k + 1)w(S),$$

где  $l$  — число шагов в игре  $G(z_1)$ .

Дальнейшие рассуждения используют доказанный факт о том (см. [8]), что:

$$W(S, z_k) \geq V(S, z_k), \quad S \subset N.$$

### 2.2.1 Построение приближения $C$ -ядра по функции $w(S)$

Определим множество дележей  $\mathcal{M}[W(z_1)]$  в игре  $G(z_1)$  как

$$\mathcal{M}[W(z_1)] = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i = W(z_1; N), \quad x_i \geq W(z_1; \{i\}), \quad i \in N \right\}.$$

Под принципом оптимальности будет пониматься любое подмножество  $\mathcal{I}[\cdot]$  множества  $\mathcal{M}[W(z_1)]$ .

В одношаговой игре  $\Gamma(z)$  в качестве принципа оптимальности будет выбран аналог  $C$ -ядра, множество  $\mathcal{I}[w(S)]$ , состоящее из всех дележей  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,

удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i \in S} x_i \geq w(S), \quad S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = w(N).$$

Аналогичным образом определяется множество  $\mathcal{I}[W(z; S)]$  в многошаговой игре  $G(z)$ , как множество дележей, удовлетворяющих условиям:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq W(z; S), \quad S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = W(z; N).$$

**Теорема 2.1** *Для любого  $x \in \mathcal{I}[W(z_k; S)]$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и любого  $k = \overline{1, l}$ , справедливо равенство:*

$$x_i = (\ell - k + 1)x'_i, \quad \text{где } x'_i \in \mathcal{I}(w(S)), \quad i = \overline{1, n}$$

**Доказательство.** Для произвольного  $k = \overline{1, l}$  следующие неравенства определяют множество  $\mathcal{I}[W(z_k; S)]$ .

$$\sum_{i \in S} x_i \geq W(z_k; S), \quad S \subset N$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = W(z_k; N)$$

Однако по определению  $W(z_k; S) = (\ell - k + 1)w(S)$ . Поэтому, можно записать, что

$$\sum_{i \in S} x_i \geq (\ell - k + 1)w(S), \quad S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = (\ell - k + 1)w(N).$$

После деления на  $(\ell - k + 1)$  обоих выражений и выполняя замену переменных  $x'_i = \frac{x_i}{(\ell - k + 1)}$ , получаются следующие неравенства:

$$\sum_{i \in S} x'_i \geq w(S), \quad S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^N x'_i = w(N).$$

То есть  $x'_i \in \mathcal{I}[w(S)]$ . Таким образом, удалось представить компоненты вектора  $x \in \mathcal{I}[W(z_k); S]$  в виде  $x_i = (\ell - k + 1)x'_i$ , где  $x'_i \in \mathcal{I}[w(S)]$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Теорема доказана.

### 2.2.2 Сильная динамическая устойчивость $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$

Пусть предполагается, что игроки выбрали стратегии  $\bar{u}(\cdot) = (\bar{u}_1(\cdot), \dots, \bar{u}_n(\cdot))$ , которые максимизируют суммарный выигрыш в игре  $G(z_1)$ :

$$\sum_{i \in N} K_i(z_1; \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) = \max_u \sum_{i \in N} K_i(z_1; u_1, \dots, u_n)$$

Соответствующая этим стратегиям траектория  $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_\ell)$  называется кооперативной траекторией (здесь и далее  $z_1 = \bar{z}_1$ ).

**Определение 2.1** Функция  $\beta^i$ ,  $i \in N$  называется процедурой распределения дележа (ПРД) для  $x \in \mathcal{M}[W(z_1; S)]$  (см. [13]), если

$$x_i = \sum_{k=1}^{\ell} \beta_k^i, \quad i \in N.$$

**Определение 2.2** Принцип оптимальности  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1; S)]$  является сильно

динамически устойчивым в игре  $G(\bar{z}_1)$  (см. [10]), если

$$1. \mathcal{I}[W(\bar{z}_k; S)] \neq \emptyset, \quad k = \overline{1, \ell}$$

2. Для каждого дележа  $x \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1; S)]$  существует такая ПРД  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\ell)$ , что

$$\sum_{j=1}^k \beta^j \oplus \mathcal{I}[W(\bar{z}_{k+1}; S)] \subset \mathcal{I}[W(\bar{z}_1; S)], \quad k = \overline{1, \ell - 1}.$$

Здесь символ  $\oplus$  означает, что если  $a \in R^n$ ,  $B \subset R^n$ , тогда  $a \oplus B = \{a + b : b \in B\}$ .

**Утверждение 2.1** Принцип оптимальности  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1; S)]$  в игре  $G(\bar{z}_1)$  сильно динамически устойчив.

**Доказательство.** Пусть некоторый дележ  $\xi^1 = (\xi_1^1, \dots, \xi_i^1, \dots, \xi_n^1) \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1; S)]$ , тогда справедливо:

$$\sum_{i \in S} \xi_i^1 \geq W(\bar{z}_1; S), \quad S \subset N$$

$$\sum_{i=1}^N \xi_i^1 = W(\bar{z}_1; N), \quad n = |N|.$$

Согласно теореме 2.1, дележ  $\xi^1 \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1; S)]$  можно представить в следующем виде:

$$\xi^1 = \ell \bar{\beta}, \quad \text{где } \bar{\beta} \in \mathcal{I}[w(S)].$$

Аналогичным образом представим произвольный дележ  $\xi^{k+1} \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_{k+1}; S)]$  в виде:

$$\xi^{k+1} = (\ell - (k + 1) + 1) \bar{\beta} = (\ell - k) \bar{\beta}, \quad \text{где } \bar{\beta} \in \mathcal{I}[w(S)].$$

В качестве ПРД выбирается  $\beta = (\bar{\beta}^1, \dots, \bar{\beta}^k, \bar{\beta}^{k+1}, \dots, \bar{\beta}^\ell)$  и строится вектор:

$$\hat{\xi}^1 = \sum_{j=1}^k \bar{\beta}^j + \xi^{k+1} = k\bar{\beta} + (\ell - k)\bar{\beta} \geq kw(S) + (\ell - k)w(S) = \ell w(S).$$

Таким образом, вектор  $\hat{\xi}^1$  представляет собой сумму компонент ПРД  $\beta$  и произвольного дележа  $\xi^{k+1} \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_{k+1}; S)]$ . Вектор  $\hat{\xi}^1 \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1; S)]$ , что доказывает сильную динамическую устойчивость принципа оптимальности  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1; S)]$ . Утверждение доказано.

### 2.3 Случай произвольных значений $v(z_t, N)$

Теперь будет рассматриваться общий случай, когда значения  $v(z; N)$  не обязательно совпадают для различных  $z$ . Вводится в рассмотрение величина  $L(\bar{z}_k)$  — суммарный выигрыш коалиции  $N$  в состоянии  $\bar{z}_k \in \bar{z}$ , где  $\bar{z}$  — кооперативная траектория в игре  $G(\bar{z}_1)$ .

$$L(\bar{z}_k) = \sum_{\substack{i \in N, j \in N \\ i \neq j}} (a^{ij}(\bar{z}_k) + a^{ji}(\bar{z}_k)). \quad (2.7)$$

Пусть предполагается, что  $w(S) < \min_{\bar{z}_k} L(\bar{z}_k)$ ,  $S \neq N$ . Также вводится дополнительная функция  $w(\bar{z}_k; S)$ ,  $w(\bar{z}_k; S) = w(S)$ ,  $w(\bar{z}_k; N) = L(\bar{z}_k)$ . Пусть  $x$  — некоторый дележ в игре  $G(\bar{z}_1)$ . Рассмотрим в качестве принципа оптимальности аналог С-ядра  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_k); S]$  для игры  $G(\bar{z}_k)$  следующего вида:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq (\ell - k + 1)w(S) = W(\bar{z}_k; S), \quad S \subset N, \quad S \neq N$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = \sum_{t=k}^{\ell} L(\bar{z}_k) = \hat{W}(\bar{z}_k; N)$$

Пусть предполагается, что  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_k); S] \neq \emptyset$  для любых  $k = \overline{1, \ell}$ .

**Определение 2.3** Принцип оптимальности  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$  сильно динамически устойчив в игре  $G(\bar{z}_1)$ , если

$$1). \mathcal{I}[W(\bar{z}_k); S] \neq \emptyset, \quad k = \overline{1, \ell}$$

2). Для каждого дележа  $x \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$  существует такая процедура распределения дележа  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_\ell)$ ,  $x = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j$ , что

$$\sum_{j=1}^k \beta_j \oplus \mathcal{I}[W(\bar{z}_{K+1}); S] \subset \mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S], \quad k = \overline{1, \ell}.$$

**Утверждение 2.2** Принцип оптимальности  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$  сильно динамически устойчив.

**Доказательство.** Доказательство данного утверждения аналогично доказательству утверждения 1.

Пусть дележ  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$ , тогда выполняется:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq W(\bar{z}_1; S) = \ell w(S), \quad S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = W(\bar{z}_1; N) = \sum_{t=1}^{\ell} L(\bar{z}_t).$$

Для произвольного дележа  $\xi_{k+1} = (\xi_{k+1,1}, \dots, \xi_{k+1,n}) \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_{k+1}); S]$  справедливы следующие неравенства:

$$\sum_{i \in S} \xi_{k+1,i} \geq W(\bar{z}_{k+1}; S) = (\ell - k)w(S), \quad S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^N \xi_{k+1,i} = W(\bar{z}_{k+1}; N) = \sum_{t=k+1}^{\ell} L(\bar{z}_t).$$

Для дележа  $x \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$  в качестве ПРД выбирается



$$\beta^k = \alpha^k = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_i^k, \dots, \alpha_n^k) \in \mathcal{I}[w(\bar{z}_k); S], \quad k = \overline{1, \ell}.$$

$$\sum_{i \in S} \alpha_i^k \geq w(S, \bar{z}_k) = w(S), \quad S \subset N \quad (2.8)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^k = w(N, \bar{z}_k) = L(\bar{z}_k) \quad (2.9)$$

И строится вектор  $\hat{x}$  следующего вида:

$$\hat{x} = \sum_{j=1}^k \beta^j + \xi^{k+1} = \sum_{j=1}^k \alpha_i^j + \xi^{k+1} \geq kw(S) + (\ell - k)w(S) = \ell w(S).$$

Вектор  $\hat{x}$  представляет собой сумму ПРД  $\beta$  и произвольного дележа из  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_{k+1}); S]$ . Из (2.8)-(2.9) следует, что вектор  $\hat{x} \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$ , что доказывает сильную динамическую устойчивость принципа оптимальности  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$ . Утверждение доказано.

## Пример

В качестве примера рассматривается трехшаговая ( $k = 3$ ) игра трех лиц ( $N = 3$ ), которая начинается в состоянии  $z_1$ . В состоянии  $z_1$  задано 6 матриц, 3 из них условно будут называться матрицами первого типа, и три — второго типа. В состоянии  $z_1$  все биматричные игры происходят с матрицами первого типа. В состоянии  $z_1$  каждый игрок  $i \in N$  выбирает свою стратегию  $u_i(z_1)$ , если все  $u_i^j(z_1) = 1$ ,  $i \in N$ ,  $j \in N \setminus \{i\}$ , тогда игроки переходят в состояние  $z_2$ , в котором играют в биматричные игры с теми же матрицами первого типа. Если хотя бы одна из компонент  $u_i^j(z_1) = 2$ ,  $i \in N$ ,  $j \in N \setminus \{i\}$ , тогда в состоянии  $z_2$  игроки играют в биматричные игры с матрицами второго типа. Аналогичным образом осуществляется переход в состояние  $z_3$ : если все  $u_i^j(z_2) = 1$ ,  $i \in N$ ,  $j \in N \setminus \{i\}$ , тогда в игроки в состоянии  $z_3$  используют матрицы первого типа. Если хотя бы одна из компонент  $u_i^j(z_2) = 2$ ,  $i \in N$ ,  $j \in N \setminus \{i\}$ , тогда в состоянии  $z_3$

игроки используют матрицы второго типа. Матрицы первого типа имеют вид:

$$A_{12}(z) = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{12}(z) = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{13}(z) = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},$$

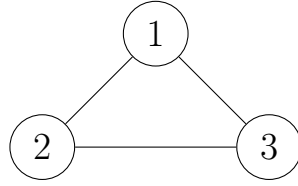
$$C_{13}(z) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_{23}(z) = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{23}(z) = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы второго типа:

$$\tilde{A}_{12}(z) = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_{12}(z) = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{13}(z) = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 9 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C}_{13}(z) = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{23}(z) = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_{23}(z) = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

В состоянии  $z_1$  задана сеть, представляющая собой полный граф:



**Рисунок 7.** Сеть на первом шаге игры.

Оптимальные стратегии игроков:

$$\bar{u}_1(\bar{z}_1) = (0, 2, 1), \quad \bar{u}_2(\bar{z}_1) = (1, 0, 2), \quad \bar{u}_3(\bar{z}_1) = (2, 2, 0),$$

$$\bar{u}_1(\bar{z}_2) = (0, 2, 1), \quad \bar{u}_2(\bar{z}_2) = (2, 0, 1), \quad \bar{u}_3(\bar{z}_2) = (2, 1, 0),$$

$$\bar{u}_1(\bar{z}_3) = (0, 2, 1), \quad \bar{u}_2(\bar{z}_3) = (2, 0, 1), \quad \bar{u}_3(\bar{z}_3) = (2, 1, 0).$$

Значения  $\omega_{ij}(z)$ :

$$\omega_{12}^1(\bar{z}_1) = 1, \quad \omega_{21}^2(\bar{z}_1) = 1, \quad \omega_{13}^1(\bar{z}_1) = 1, \quad \omega_{31}^3(\bar{z}_1) = 0, \quad \omega_{23}^2(\bar{z}_1) = 2,$$

$$\omega_{32}^3(\bar{z}_1) = 1, \quad \omega_{12}^1(\bar{z}_2) = 10, \quad \omega_{21}^2(\bar{z}_2) = 6, \quad \omega_{13}^1(\bar{z}_2) = 9, \quad \omega_{31}^3(\bar{z}_2) = 10,$$

$$\omega_{23}^2(\bar{z}_2) = 9, \quad \omega_{32}^3(\bar{z}_2) = 6.$$

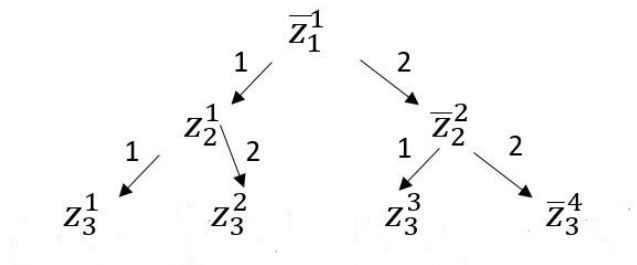
Значения  $\omega_{ij}^i(\bar{z}_3)$  будут совпадать либо с  $\omega_{ij}^i(\bar{z}_2)$ , либо с  $\omega_{ij}(\bar{z}_1)$ , так как матрицы в игре всего двух типов.

Значения характеристической функции  $v(z; S)$ ,  $w(z_k; S)$ , вычисленные по формулам (2.5)-(2.6):

$S$	{1}	{2}	{3}	{12}	{13}	{23}	{123}
$v(\bar{z}_1; S)$	2	3	1	21	20	27	62
$v(\bar{z}_2; S)$	19	15	16	40	40	36	66
$v(\bar{z}_3; S)$	19	15	16	40	40	36	66
$w(\bar{z}_1; S)$	19	15	16	40	40	36	58
$w(\bar{z}_2; S)$	19	15	16	40	40	36	66
$w(\bar{z}_3; S)$	19	15	16	40	40	36	66

**Таблица 1.** Значения характеристических функций  $v(z; S)$ ,  $w(z_k; S)$

Игра начинается в состоянии  $z_1$ , в котором игроки выбирают свои стратегии и, в зависимости от этого, переходят в новое состояние. В каждом состоянии у игроков всего две альтернативы: либо в результате выбора стратегий они будут играть матрицами I типа в следующем состоянии, либо перейдут в состояние, где биматричные игры будут происходить с матрицами II типа.



**Рисунок 8.** Дерево всех возможных состояний игры.

Цифры 1 и 2 над стрелками указывают, матрицами какого типа будут играть игроки в следующем состоянии.

Значения функции  $L$  в узлах  $z_k$ :

$$L(z_1^1) = 58, \quad L(z_2^1) = 58, \quad L(z_3^1) = 62, \quad L(z_2^2) = 66, \quad L(z_3^2) = 66,$$

$$L(z_3^3) = 62, \quad L(z_3^4) = 66.$$

Оптимальная траектория в игре  $G(z_1)$ :  $\bar{z} = (z_1^1, z_2^2, z_3^4) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$ . Характеристическая функция многошаговой игры  $G(z_1)$  вычисляется как:

$S$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
$V(\bar{z}_3; S)$	19	15	16	40	40	36	66
$V(\bar{z}_2; S)$	38	30	32	80	80	72	132
$V(\bar{z}_1; S)$	40	33	33	101	100	99	190
$W(\bar{z}_3; S)$	19	15	16	40	40	36	66
$W(\bar{z}_2; S)$	38	30	32	80	80	72	132
$W(\bar{z}_1; S)$	57	45	48	120	120	108	190

**Таблица 2.** Значения характеристических функций многошаговой игры  $G(z_1)$

Условие  $w(S, z_k) < \min_{\bar{z}_k} L(z_k)$ ,  $S \neq N$  выполняется:

$$\max_S w(S, z_k) = 40 < \min_{\bar{z}_k} L(z_k) = 58.$$

Рассматривается дележ  $x \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 57 \\ x_2 \geq 45 \\ x_3 \geq 48 \\ x_1 + x_2 \geq 120 \\ x_1 + x_3 \geq 120 \\ x_2 + x_3 \geq 108 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 190 \end{array} \right.$$

А так же произвольный дележ  $\xi \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_2); S]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 \geq 38 \\ \xi_2 \geq 30 \\ \xi_3 \geq 32 \\ \xi_1 + \xi_2 \geq 80 \\ \xi_1 + \xi_3 \geq 80 \\ \xi_2 + \xi_3 \geq 72 \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 132 \end{array} \right.$$

В качестве ПРД  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  выбирается дележ  $\alpha \in \mathcal{I}[w(\bar{z}_1); S]$ ,  $\beta_k = \alpha$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \geq 19 \\ \alpha_2 \geq 15 \\ \alpha_3 \geq 16 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq 40 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 40 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 36 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 58 \end{array} \right.$$

И строится дележ  $\hat{x} = \alpha + \xi$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_1 \geq 57 \\ \hat{x}_2 \geq 45 \\ \hat{x}_3 \geq 48 \\ \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \geq 120 \\ \hat{x}_1 + \hat{x}_3 \geq 120 \\ \hat{x}_2 + \hat{x}_3 \geq 108 \\ \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 = 190 \end{array} \right.$$

Из последнего неравенства следует, что  $\hat{x} \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$ , что доказывает сильную динамическую устойчивость принципа оптимальности  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$ .

# Глава 3:

## Альтернативные способы построения характеристической функции

В этой главе будут рассмотрены альтернативные подходы к построению характеристической функции для многошаговой игры с попарным взаимодействием, а так же исследованы возможности и преимущества, которые дают такие подходы.

### 3.1 Построение характеристической функции как максимума математического ожидания выигрыша

Рассматривается одношаговая игра  $\Gamma$ , на произвольной сети  $g$  с множеством вершин (игроков)  $N$ . Взаимодействие между игроками осуществляется аналогично предыдущим главам: между двумя игроками, соединенных ребром, происходит биматричная игра с заданными матрицами выигрыша.

Пусть  $i \in N, j \in N, i \neq j$ . Тогда  $i$  играет с  $j$  в биматричную игру  $\gamma_{ij}$  с матрицами выигрышей  $A_{ij}$  и  $C_{ij}$ , игроков  $i$  и  $j$ , соответственно.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij} & a_{12}^{ij} & \cdots & a_{1r}^{ij} \\ a_{21}^{ij} & a_{22}^{ij} & \cdots & a_{2r}^{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{ij} & a_{m2}^{ij} & \cdots & a_{mr}^{ij} \end{pmatrix}; \quad (3.1)$$

$$C_{ij}(z) = \begin{pmatrix} c_{11}^{ij}(z) & c_{12}^{ij}(z) & \cdots & c_{1r}^{ij}(z) \\ c_{21}^{ij}(z) & c_{22}^{ij}(z) & \cdots & c_{2r}^{ij}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}^{ij}(z) & c_{m2}^{ij}(z) & \cdots & c_{mr}^{ij}(z) \end{pmatrix}; \quad (3.2)$$

$$a_{pq}^{ij}(z) \geq 0, c_{pq}^{ij}(z) \geq 0, \quad p = 1, \dots, m, \quad q = 1, \dots, r, \quad i, j \in N.$$

Игра  $\Gamma$  будет рассматриваться в форме семейства антагонистических игр  $\{\gamma_{N \setminus i, i}\}$ , между коалицией  $N \setminus i$ , действующей как первый (максимизирующий) игрок, и коалицией, состоящей из одного игрока  $\{i\}$ , действующей как второй (минимизирующий) игрок. Выигрыш коалиции  $N \setminus i$  в таком случае равен сумме выигрышей игроков из этой коалиции. Пусть  $(\bar{\mu}_{N \setminus i}, \bar{\mu}_i)$  — ситуация равновесия в смешанных стратегиях в игре  $\gamma_{N \setminus i, i}$ . Рассматривается ситуация  $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n)$  и определяется следующая величина

$$\bar{W}(S) = \max_{\mu_S} \sum_{i \in S} E_i(\mu_S; \bar{\mu}_{N \setminus S}), \quad (3.3)$$

где  $\mu_S = \{\mu_i, i \in S\}$ ,  $\bar{\mu}_{N \setminus S} = \{\bar{\mu}_i, i \in N \setminus S\}$  и  $E_i(\mu_S; \bar{\mu}_{N \setminus S})$  — математическое ожидание выигрыша игрока  $i$  в ситуации  $(\mu_S, \bar{\mu}_{N \setminus S})$ .  $\bar{W}(S)$  — это максимальный выигрыш, который может обеспечить себе коалиция  $S$ , если остальные игроки используют стратегии второго, минимизирующего игрока в антагонистических играх  $\{\gamma_{N \setminus i, i}\}$ . Вид функции  $\bar{W}(S)$  можно описать следующим образом. Учитывая особенность попарного взаимодействия, можно выделить два типа ребер, по которым осуществляются игры с участием игроков из  $S$ :

- такие ребра, у которых обе концевые вершины заняты игроками из коалиции  $S$ , т. е. ребра  $(i, j), i \in S, j \in S$ . Так как цель игроков в  $S$  — максимизация суммарного выигрыша, игроки  $i$  и  $j$  всегда могут это обеспечить, выбрав стратегии таким образом, чтобы получить максимальный суммарный выигрыш на данном ребре. Эта величина есть  $\max_{p,l}(a_{pl}^{ij} + c_{pl}^{ji})$ . Коалиция  $N \setminus S$  при этом никак не влияет на игру  $i$  с  $j$ ;



- такие ребра, у которых одна концевая вершина лежит в  $S$ , а другая принадлежит игрокам из коалиции  $N \setminus S$ , т. е. ребра  $(i, j), i \in S, j \in N \setminus S$ . Максимальный выигрыш, который может себе гарантировать игрок  $i$ , когда игрок  $j$  использует стратегию  $\bar{\mu}_j$  — это выигрыш в ситуации равновесия, т. е. значение игры  $w_{ij}$ .

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 3.1** *В сетевой игре с попарным взаимодействием выполняется равенство:*

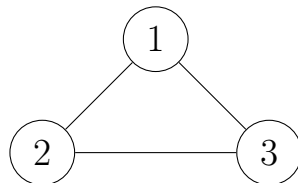
$$\bar{W}(S) = v(S), \quad S \subset N,$$

где характеристическая функция  $v(S)$  вычисляется по формулам (1.9)-(1.10).

Процесс построения характеристической функции классическим способом имеет высокую вычислительную сложность, поскольку для вычисления всех значений характеристической функции необходимо решить  $2^N$  антагонистических игр ( $N$  — количество игроков). Подход, предложенный в данном пункте в вычислительном смысле является более простым, так как вместо решения антагонистической игры используется только операция максимизации.

## Пример

Пусть  $n = 3$  и сеть  $g$  имеет вид, как показано на рисунке 9.



**Рисунок 9.** Сеть для трех игроков.

Заданы матрицы:

$$\begin{array}{ccc} A_{12}B_{21} & A_{13}B_{31} & A_{23}B_{32} \\ \left( \begin{array}{cc} (4; 8) & (3; 6) \\ (3; 3) & (4; 4) \end{array} \right); & \left( \begin{array}{cc} (4; 6) & (2; 3) \\ (2; 2) & (3; 5) \end{array} \right); & \left( \begin{array}{cc} (3; 5) & (2; 3) \\ (1; 4) & (4; 6) \end{array} \right). \end{array}$$

Ситуации равновесия в каждой биматричной игре:

$$\bar{\mu}_{12} = (0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}), \quad \bar{\mu}_{13} = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}), \quad \bar{\mu}_{23} = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}),$$

где  $\bar{\mu}_{ij} = \{\bar{\mu}_{ij}^i, \bar{\mu}_{ji}^j\}$ , и  $\bar{\mu}_{ij}^i$  — равновесная стратегия  $i$ -го игрока в биматричной игре  $\gamma_{ij}$ , а  $\bar{\mu}_{ji}^j$  — равновесная стратегия  $j$ -го игрока в той же биматричной игре  $\gamma_{ij}$ .

Значения индивидуальных выигрышей игроков в ситуациях равновесия

$$\begin{aligned} w_{12}^1 &= 3,5, & w_{13}^1 &= 3,75, & w_{12}^2 &= 4, \\ w_{23}^2 &= 2,75, & w_{13}^3 &= 4, & w_{23}^3 &= 4,5. \end{aligned}$$

Значения характеристической функции, вычисленные классическим способом по формулам (1.9)-(1.10), имеют вид

$$v(12) = \max_{p,l} (a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) + w_{13}^1 + w_{23}^2 = 12 + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} = 17\frac{5}{12};$$

$$v(13) = \max_{p,l} (a_{pl}^{13} + b_{pl}^{31}) + w_{12}^1 + w_{23}^3 = 10 + 3,5 + 4,5 = 18;$$

$$v(23) = \max_{p,l} (a_{pl}^{23} + b_{pl}^{32}) + w_{12}^2 + w_{13}^3 = 10 + 4 + 4 = 18;$$

$$v(1) = w_{12}^1 + w_{13}^1 = 3,5 + 3,75 = 7,25;$$

$$v(2) = w_{12}^2 + w_{23}^2 = 4 + 2,75 = 6,75;$$

$$v(3) = w_{13}^3 + w_{23}^3 = 4 + 4,5 = 8,5;$$

$$v(123) = \max_{p,l} (a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) + \max_{p,l} (a_{pl}^{13} + b_{pl}^{31}) + \max_{p,l} (a_{pl}^{23} + b_{pl}^{32}) = 32.$$

Теперь будут вычислены значения характеристической функции  $\bar{W}(S)$  с

применением подхода, описанного в пункте 3.1. Стратегии каждого игрока  $i = 1, 2, 3$  в игре  $\gamma_{N \setminus i, i}$ :

$$\mu_1 = (\mu_{12}; \mu_{13}), \quad \mu_2 = (\mu_{21}; \mu_{23}), \quad \mu_3 = (\mu_{31}; \mu_{32}),$$

где  $\mu_{12}$  — стратегия игрока 1 в игре с игроком 2,  $\mu_{13}$  — игрока 1 в игре с игроком 3 и т. д. Для нахождения этих стратегий необходимо решить соответствующие игры:

$$\mu_1 = \left(0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad \mu_2 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad \mu_3 = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

Таким образом, получаются следующие значения функции  $\bar{W}(S)$ :

$$\bar{W}(12) = \max_{p,l} (a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) + w_{13}^1 + w_{23}^2 = 12 + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} = 17\frac{5}{12};$$

$$\bar{W}(13) = \max_{p,l} (a_{pl}^{13} + b_{pl}^{31}) + w_{12}^1 + w_{23}^3 = 10 + 3,5 + 4,5 = 18;$$

$$\bar{W}(23) = \max_{p,l} (a_{pl}^{23} + b_{pl}^{32}) + w_{12}^2 + w_{13}^3 = 10 + 4 + 4 = 18;$$

$$\bar{W}(1) = w_{12}^1 + w_{13}^1 = 3,5 + 3,75 = 7,25;$$

$$\bar{W}(2) = w_{12}^2 + w_{23}^2 = 4 + 2,75 = 6,75;$$

$$\bar{W}(3) = w_{13}^3 + w_{23}^3 = 4 + 4,5 = 8,5;$$

$$\bar{W}(123) = \max_{p,l} (a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) + \max_{p,l} (a_{pl}^{13} + b_{pl}^{31}) + \max_{p,l} (a_{pl}^{23} + b_{pl}^{32}) = 32.$$

Сравнивая их со значениями  $v(S)$ , можно заключить, что  $v(S) = \bar{W}(S)$  для всех  $S \subset N$ .

## 3.2 Приближение характеристической функции многошаговой игры

Пусть теперь рассматривается неантагонитическая игра общего вида [23]. Предполагается, что  $G$  это  $\ell$ -шаговая игра  $n$  лиц, которая происходит сле-

дующим образом. Игра  $G(z_1)$  начинается в позиции  $z_1$  в которой происходит игра

$$\Gamma(z_1) = \langle N; X_1^{z_1}, X_2^{z_1}, \dots, X_n^{z_1}; K_1^{z_1}, \dots, K_n^{z_1} \rangle .$$

Здесь  $N$  это множество игроков,  $X_i^{z_1}$  множество стратегий и  $K_1^{z_1}$  это функция выигрыша игрока  $i \in N$  в состоянии  $z_1$ .

Переход от состояния к состоянию в данной многошаговой игре будет осуществляться следующим образом. Пусть в состоянии  $z \in Z$  в игре  $\Gamma(z)$  игроками были выбраны следующие стратегии:  $x_i(z) = (x_i^1(z), \dots, x_i^n(z))$ . В результате выбора этих стратегий осуществляется переход в новое состояние  $z'$ , где происходит игра  $\Gamma(z')$ . То есть состояние на следующем шаге игры зависит от состояния на текущем шаге, и от стратегий, выбранных на данном шаге. Тогда можно определить отображение  $T : Z \rightarrow Z$  по формуле:

$$z' = T(z; x_1(z), x_2(z), \dots, x_n(z)).$$

На первом шаге, в состоянии  $z_1$ , в игре  $\Gamma(z_1)$  игроки выбирают свои стратегии  $x_1(z_1) \in X_1^{z_1}, \dots, x_i(z_1) \in X_i^{z_1}, \dots, x_n(z_1) \in X_n^{z_1}$  и игра переходит на второй шаг в следующее состояние  $z_2 = T(z_1; x_1(z_1), \dots, x_n(z_1)) = T(z_1; x(z_1))$ , где происходит игра  $\Gamma(z_2)$ . На шаге  $\ell$  в состоянии  $z_\ell = T(z_\ell; x(z_{\ell-1}))$  происходит игра  $\Gamma(z_\ell)$ , после чего игра  $G(z_1)$  заканчивается. В результате получается следующая последовательность игр:  $\Gamma(z_1), \Gamma(z_2), \dots, \Gamma(z_\ell)$ .

Стратегия игрока  $i \in N$   $u_i(\cdot)$ ,  $i \in N$  в игре  $G(z_1)$  — это функция, которая в каждой текущей одновременной игре  $\Gamma(z)$  выбирает управление (стратегию) игрока  $i$  в этой игре, т. е.  $u_i(z) = x_i^z \in X_i^z$ .

Функция выигрыша  $H_i$ ,  $i \in N$  в игре  $G(z_1)$  определяется следующим образом

$$H_i(u_1(\cdot), \dots, u_i(\cdot), \dots, u_n(\cdot)) = \sum_{t=1}^{\ell} K_i(u_1(z_t), \dots, u_i(z_t), \dots, u_n(z_t)) =$$

$$= \sum_{t=1}^{\ell} K_i(x_1^{z_t}, \dots, x_i^{z_t}, \dots, x_n^{z_t}).$$

Далее игра  $G(z_1)$  будет рассматриваться в кооперативной форме. Пусть предполагается, что существует такой набор стратегий  $\bar{u}(\cdot)$ , максимизирующий суммарный выигрыш, т. е.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n H_i(\bar{u}_1(\cdot), \dots, \bar{u}_n(\cdot)) &= \max_{u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot)} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^{\ell} K_i(u_1(z_t), \dots, u_n(z_t)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^{\ell} K_i(\bar{u}_1(z_t), \dots, \bar{u}_n(z_t)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Последовательность  $\bar{z}_1, \bar{z}_2 = T(\bar{u}(z_1)), \dots, \bar{z}_t = T(\bar{u}(z_t)), \dots, \bar{z}_m = T(\bar{u}(z_m))$  — будет называться *кооперативной траекторией* и обозначаться как  $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_t, \dots, \bar{z}_m)$ .

Характеристическая функция  $v(\bar{z}_1; S)$ ,  $S \subset N$  определяется классическим образом. Значение характеристической функции  $v(\bar{z}_1; S)$  вычисляется как значение антагонистической игры, основанной на игре  $G(z_1)$ , между коалицией  $S$ , играющей как первый (максимизирующий) игрок и коалицией  $N \setminus S$ , играющей как второй (минимизирующий) игрок. Здесь выигрыш коалиции  $S$  это сумма выигрышей игроков, входящих в коалицию. Аналогичным образом определяется характеристическая функция  $v(\bar{z}_t, S)$  в подыгре  $G(\bar{z}_t)$  с начальной позицией на кооперативной траектории ( $\bar{z}_t \in \bar{z}$ ).

Вводится новая функция:  $\bar{v}(\bar{z}_1; S)$ ,  $S \subset N$ . Следуя [8], это преобразование характеристической функции  $v(\bar{z}_1; S)$ , определенной классическим образом:

$$\bar{v}(\bar{z}_1; S) = \sum_{t=1}^m \frac{v(\bar{z}_t; S) \cdot \sum_{i=1}^n K_i(\bar{u}_1(\bar{z}_t), \dots, \bar{u}_n(\bar{z}_t))}{v(\bar{z}_1; N)}.$$

И аналогично будет проведено преобразование для характеристической функции подыгры  $G(z_t)$  на произвольном шаге  $t$ , в состоянии  $\bar{z}_t \in \bar{z}$ :

$$\bar{v}(\bar{z}_t; S) = \sum_{t=l}^m \frac{v(\bar{z}_t; S) \cdot \sum_{i=1}^n K_i(\bar{u}_1(\bar{z}_t), \dots, \bar{u}_n(\bar{z}_t))}{v(\bar{z}_t; N)}. \quad (3.5)$$

Можно показать, что функция  $\bar{v}(S; \bar{z}_1)$  обладает всеми свойствами характеристической функции в игре  $G(z_1)$ , а именно:

$$\bar{v}(\bar{z}_1; N) = v(\bar{z}_1; N) = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m K_i(\bar{u}_1(z_t), \dots, \bar{u}_n(z_t)),$$

$$\bar{v}(\bar{z}_1; S_1 \cup S_2) \geq \bar{v}(\bar{z}_1; S_1) + \bar{v}(\bar{z}_1; S_2),$$

для произвольных  $S_1, S_2 \subset N$ ,  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  (здесь используется супераддитивность характеристической функции  $v(\bar{z}_1; S)$ ).

### 3.3 О способе оценки ядра

В качестве кооперативного решения игры  $G(z_1)$ , будет рассматриваться С-ядро.

Множество дележей  $\mathcal{M}[v(z_1; S)]$  в игре  $G(z_1)$  определяется следующим образом

$$\mathcal{M}[v(z_1; S)] = \{x = (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i = v(z_1; N), x_i \geq v(z_1; \{i\}), i \in N\}.$$

С-ядро  $\mathcal{C}[v(z_1; S)] \subset \mathcal{M}[v(z_1; S)]$  в игре  $G(z_1)$  определяется как множество таких дележей  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , которые удовлетворяют системе неравенств

$$\sum_{i \in S} \xi_i \geq v(\bar{z}_1; S),$$

$$\sum_{i \in N} \xi_i = v(\bar{z}_1; S).$$

Предполагается, что  $\mathcal{C}[v(z_t; S)] \neq \emptyset$ , для произвольного  $t = \overline{1, \ell}$ .

Будут введены следующие обозначения

$$\lambda(S) = \max_t \frac{v(\bar{z}_t; S)}{v(\bar{z}_t; N)},$$

и дополнительная функция:

$$\bar{v}(S; \bar{z}_1) = \sum_{t=1}^{\ell} \lambda(S) \sum_{i=1}^n K_i(\bar{u}_1(z_t), \dots, \bar{u}_n(z_t)).$$

Тогда

$$\bar{v}(\bar{z}_1; S) = \lambda(S)v(\bar{z}_1; N).$$

Аналогично для подыгры  $G(z_t)$ :

$$\bar{v}(\bar{z}_t; S) = \lambda(t; S)v(\bar{z}_t; N) \quad (3.6)$$

Здесь  $\lambda(t, S) = \max_{t \leq p \leq \ell} \frac{v(\bar{z}_p; S)}{v(\bar{z}_p; N)}$ . Легко заметить, что:

$$\bar{v}(\bar{z}_t; S) \geq v(\bar{z}_t; S), \quad t = 1, \dots, \ell$$

Так же, справедливо следующее равенство

$$\bar{v}(\bar{z}_t; N) = v(\bar{z}_t; N), \quad t = 1, \dots, \ell$$

Тогда, для всех  $S_1, S_2$ , таких, что  $S_1 \subset S_2$  из монотонности характеристической функции  $v(\bar{z}_t; S)$  следует монотонность характеристической функции  $\bar{v}(\bar{z}_t; S)$ :

$$\bar{v}(\bar{z}_t; S_1) \geq \bar{v}(\bar{z}_t; S_2)$$

Свойство супераддитивности характеристической функции  $\bar{v}(S; \bar{z}_t)$ ,  $t = 1, \dots, m$  в общем случае не выполняется. Однако можно доказать другой полезный результат.

**Лемма 3.1** Следующее неравенство выполняется:

$$\bar{v}(\bar{z}_t; S) \geq v(\bar{z}_t; S) \quad (3.7)$$

**Доказательство.** По определению характеристической функции  $\bar{v}(\cdot)$ , можно показать, что следующие неравенства верны:

$$\bar{v}(\bar{z}_t; S) = \lambda(t, S)v(\bar{z}_t; N) = \max_{t \leq p \leq \ell} \frac{v(\bar{z}_p; S)}{v(\bar{z}_p; N)} v(\bar{z}_t; N) \geq v(\bar{z}_t; N) \frac{v(\bar{z}_t; S)}{v(\bar{z}_t; N)} \geq v(\bar{z}_t; S). \quad (3.8)$$

Лемма доказана.

Через  $\mathcal{C}[v(z_t; S)]$  будет обозначено  $S$ -ядро подыгры  $G(z_t)$ . Принцип оптимальности  $\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_t; S)]$  является аналогом  $S$ -ядра и определяется как множество решений системы

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} \xi_i &\geq \bar{v}(z_t; S), \quad S \subset N, \\ \sum_{i \in N} \xi_i &= \bar{v}(z_t; N). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Пусть предполагается, что множество  $\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_t; S)] \neq \emptyset$ , для всех  $t = 1, \dots, \ell$ .

Аналогичным образом определяется множество  $\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_t; S)]$ , как решения системы

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} \xi_i &\geq \bar{v}(z_t; S), \quad S \subset N, \\ \sum_{i \in N} \xi_i &= \bar{v}(z_t; N). \end{aligned} \quad (3.10)$$

**Теорема 3.1** Следующее включение выполняется:

$$\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_t; S)] \subset \mathcal{C}[v(z_t; S)] \cap \bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_t; S)]. \quad (3.11)$$

**Доказательство.** Формула (3.11) следует из леммы (3.1) и из выражения (3.8), т. е. из неравенств  $\bar{v}(\bar{z}_1; S) \leq \bar{v}(\bar{z}_1; S)$  и  $v(\bar{z}_1; S) \leq \bar{v}(\bar{z}_1; S)$ ,  $S \subset N$ . Теорема доказана.

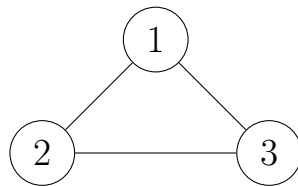


Поскольку справедливо включение  $\bar{\bar{C}}[\bar{v}(z_t; S)] \subset \bar{C}[\bar{v}(z_t; S)]$ , то принцип оптимальности  $\bar{\bar{C}}[\bar{v}(z_t; S)]$  обладает свойством сильной динамической устойчивости, так как  $\bar{C}[\bar{v}(z_t; S)]$  обладает таким же свойством (см. [8]). Из теоремы так же следует, что дележи из множества  $\bar{\bar{C}}[\bar{v}(z_t; S)]$  для всех  $t = 1, \dots, \ell$  принадлежат классическому С-ядру игры  $G(z_t)$ . Таким образом, было построено сильно динамически устойчивое подмножество С-ядра  $\mathcal{C}[v(z_t; S)]$  для каждой подыгры  $G(z_t)$ .

## Пример

Чтобы проиллюстрировать результат, рассмотрим следующий пример сетевой трехшаговой игры трех лиц с попарным взаимодействием. На первом шаге  $z_1$  каждый игрок  $i \in N = \{1, 2, 3\}$  выбирает свое поведение  $b_i^1$ , а именно,  $n$ -мерный вектор предложений связи с другими игроками. Результатом первого шага является сеть  $g(z_1)$ . На втором шаге в состоянии  $z_2(g(z_1))$ , которое зависит от сети, выбранной на первом шаге, соседи по сети играют в одновременные независимые биматричные игры друг с другом. На третьем шаге игроки играют в биматричные игры, зависящие от стратегий, выбранных на предыдущем шаге игры в состоянии  $z_2$ . После этого игроки получают свои выигрыши и игра заканчивается.

Для максимизации суммарного выигрыша игрокам следует составить полный граф путем выбора следующих поведений на первом шаге:  $b_1^1 = (0; 1; 1)$ ,  $b_2^1 = (1; 0; 1)$ ,  $b_3^1 = (1; 1; 0)$ . Получается сеть следующего вида:



**Рисунок 10.** Сеть на втором шаге игры.

Далее вычисляются значения характеристической функции и строится  $S$ -ядро. Следующие матрицы выигрышей являются заданными. Матрицы на третьем шаге зависят от стратегий, выбранных игроками на шаге 2. Если игроки выбирают пару стратегий  $(1, 1)$  они переходят на шаг 3 с матрицами выигрышей (1). В противном случае они играют на шаге 3 в биматричные игры с платежными матрицами типа (2).

S	Второй шаг	Третий шаг (1)	Третий шаг (2)
{1, 2}	$\begin{pmatrix} (3; 5) & (8; 7) \\ (6; 4) & (5; 3) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (6; 2) & (1; 3) \\ (2; 2) & (0; 3) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (7; 1) & (3; 10) \\ (8; 3) & (4; 7) \end{pmatrix}$
{1, 3}	$\begin{pmatrix} (3; 3) & (5; 4) \\ (6; 1) & (2; 2) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (1; 4) & (1; 1) \\ (5; 2) & (2; 3) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (3; 4) & (1; 5) \\ (8; 7) & (6; 2) \end{pmatrix}$
{2, 3}	$\begin{pmatrix} (4; 7) & (5; 1) \\ (2; 6) & (3; 5) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (1; 1) & (3; 2) \\ (1; 2) & (2; 4) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (3; 9) & (4; 4) \\ (11; 0) & (5; 3) \end{pmatrix}$

**Таблица 3.** Возможные матрицы выигрыша на втором и третьем шагах в зависимости от стратегий, выбранных игроками. В первом столбце указана пара игроков, между которыми происходит биматричная игра.

Получаются следующие значения характеристической функции, где  $v(S; z_t, k)$  — это значение характеристической функции в подыгре, начинающейся с позиции  $z_t$ , на шаге  $k$ :

S	$v(S; z_1, 2)$	$v(S; z_1, 3)$ (1)	$v(S; z_1, 3)$ (2)
{1, 2}	15	8	13
{1, 3}	9	7	15
{2, 3}	11	6	12
{1, 2, 3}	35	21	40

**Таблица 4.** Значения характеристической функции для подыгры, начинающейся в состоянии  $z_1$  и заканчивающейся на шаге  $k$ .

S	$v(S; z_2, 2)$	$v(S; z_2, 3)$ (1)	$v(S; z_2, 3)$ (2)
{1, 2}	22	12	24
{1, 3}	20	11	22
{2, 3}	17	11	23
{1, 2, 3}	35	21	40

**Таблица 5.** Значения характеристической функции для подыгры, начинающейся в состоянии  $z_2$

Значения классической характеристической функции вычисляются по формуле:

$$v(S; z_1) = \max_{u_i, i \in S} \min_{u_j, j \in N \setminus S} \left[ \sum_{i=1}^S K_i(u_S(z_1), u_{N \setminus S}(z_1)) + v(S; z_2) \right],$$

где  $z_2 = T(z_1; u_S(z_1), u_{N \setminus S}(z_1))$ ,  $u_S = \{u_i | i \in S\}$ ,  $u_{N \setminus S} = \{u_i | i \in N \setminus S\}$ .

S	$v(S; z_1)$	$v(S; z_2)$
{1, 2}	28	46
{1, 3}	24	42
{2, 3}	23	40
{1, 2, 3}	75	75

**Таблица 6.** Значения характеристической функции в многошаговой игре.

Далее вычисляются значения характеристической функции  $\bar{v}(S; \bar{z}_1)$  с использованием формулы (3.5):

$$\bar{v}(\{12\}; \bar{z}_1) = \frac{28}{75} \cdot 0 + \frac{46}{75} \cdot 35 + \frac{24}{40} \cdot 40 = 45 \frac{7}{15},$$

$$\bar{v}(\{13\}; \bar{z}_1) = \frac{24}{75} \cdot 0 + \frac{42}{75} \cdot 35 + \frac{22}{40} \cdot 40 = 41 \frac{3}{5},$$

$$\bar{v}(\{23\}; \bar{z}_1) = \frac{23}{75} \cdot 0 + \frac{40}{75} \cdot 35 + \frac{23}{40} \cdot 40 = 41 \frac{2}{3}.$$

Наконец, значения характеристической функции  $\bar{v}(S; \bar{z}_1)$  вычисленные с помощью формулы (3.6):

$$\bar{v}(\{12\}; \bar{z}_1) = \frac{46}{75}75 = 46,$$

$$\bar{v}(\{13\}; \bar{z}_1) = \frac{42}{75}75 = 42,$$

$$\bar{v}(\{12\}; \bar{z}_1) = \frac{23}{40}75 = 43\frac{1}{8}.$$

Теперь необходимо построить аналоги С-ядра  $\bar{C}[\bar{v}(z_1; S)]$ ,  $\bar{C}[\bar{v}(z_2; S)]$  и  $\bar{C}[\bar{v}(z_3; S)]$  используя характеристические функции  $\bar{v}(\bar{z}_1; S)$ ,  $\bar{v}(\bar{z}_2; S)$  и  $\bar{v}(\bar{z}_3; S)$ .

Легко показать, что множества  $\bar{C}[\bar{v}(z_1; S)]$ ,  $\bar{C}[\bar{v}(z_2; S)]$  совпадают. Получаются следующие системы:

$$\begin{aligned} & \bar{C}[\bar{v}(z_1; S)] \\ & \left\{ \begin{array}{l} x'_1 + x'_2 \geq 46 \\ x'_1 + x'_3 \geq 42 \\ x'_2 + x'_3 \geq 43\frac{1}{8} \\ x'_1 + x'_2 + x'_3 = 75 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{C}[\bar{v}(z_3; S)] \\ & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 24 \\ x_1 + x_3 \geq 22 \\ x_2 + x_3 \geq 23 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 40 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Пусть выбран дележ  $x = (30; 20; 25)$  из  $\bar{C}[\bar{v}(z_1; S)]$ . В качестве процедуры распределения дележа взята  $\beta^1 = (7; 7; 17)$ ,  $\beta^2 = (5; 6; 10)$ ,  $\beta^3 = (5; 5; 13)$ . И так же будет выбран дележ  $x'$  из  $\bar{C}[\bar{v}(z_3; S)]$ , например  $x' = (15; 15; 10)$ . Получаются следующие верные неравенства:

$$\begin{cases} 14 + 11 + 15 + 15 \geq 46 \\ 14 + 10 + 15 + 10 \geq 42 \\ 11 + 10 + 15 + 10 \geq 43\frac{1}{8} \end{cases}$$

Что и доказывает сильную динамическую устойчивость аналога С-ядра  $\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_1; S)]$ .

Еще один не классический подход к определению характеристической функции в сетевых играх с попарным взаимодействием будет рассмотрен в следующей главе.

## Глава 4:

# Игры общего вида на основе попарного взаимодействия

Рассматривается многошаговая неантагонистическая игра, в основе которой лежит попарное взаимодействие, т. е. взаимодействие по ребрам сети между парами игроков [4]. Игра имеет конечное число шагов. На первом шаге формируется сеть путем одновременного выбора векторов связи, а на последующих шагах происходят одновременные неантагонистические игры, выигрыши в которых зависят от управлений, выбранных на предыдущем шаге, а также от поведения на текущем шаге. Игроки, на всех шагах, кроме первого, имеют возможность видоизменять сеть, удалив какую-либо из своих связей. Для модели построена характеристическая функция не классическим способом, основанным на вычислении оптимальных управлений. Для случая одношаговой подыгры доказана супермодулярность характеристической функции. В качестве решения рассмотрен вектор Шепли, приведено упрощение формулы вычисления компонент вектора Шепли для данной характеристической функции. Так же в качестве решения рассмотрено подмножество  $S$ -ядра (ПРД-ядро) [7, 38]. Для такого решения доказана сильная динамическая устойчивость.

### 4.1 Модель игры

Пусть задано абстрактное пространство  $\mathbb{Z}$ , называемое пространством состояний. На первом шаге, в начальном состоянии  $z_0 \in \mathbb{Z}$ , игроки формируют

сеть  $g(z_0)$ , вершинами которой являются игроки, а ребрами — связи между игроками. В каждом последующем состоянии  $z_k \in \mathbb{Z}$  игроки могут изменить сеть удалением каких-либо связей, после чего происходит неантагонистическая игра  $n$ -лиц  $\Gamma(z_k)$  на сети  $g(z_k)$ .

Правило формирования сети  $g(z_0)$  на первом шаге будет определено следующим образом. Подобно тому, как было сделано в главе 1, в начальном состоянии  $z_0$  каждый игрок  $i \in N$  выбирает свое поведение  $b_i(z_0) = (b_{i1}(z_0), \dots, b_{in}(z_0))$  —  $n$ -мерный вектор предложений связи другим игрокам, компоненты которого могут принимать значения 0 или 1. Вводятся следующие обозначения:  $M_i \subseteq N \setminus i$  — те игроки, которым игрок  $i \in N$  может предложить связь, значение  $a_i \in \{0, \dots, n-1\}$  равно максимальному числу связей игрока  $i$ . Если  $M_i = N \setminus \{i\}$ , игрок  $i$  может предложить связь всем игрокам, а если  $a_i = n-1$ , то игрок  $i$  может поддерживать любое число возможных связей. Таким образом, каждый игрок ограничен числом связей  $a_i$ , которые он может предложить, и множеством  $M_i$  игроков, доступных для создания связи с данным игроком. Таким образом, на первом шаге управлением  $y_i(z_0)$  является вектор предложений связей  $b_i(z_0)$ .

Игрок  $i$  выбирает подмножество игроков  $Q_i \subset M_i$ , с которыми собирается образовать связь.

Тогда компоненты вектора  $b_i(z_0)$  определяются следующим образом:

$$b_{ij}(z_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in Q_i, \\ 0, & \text{если } j \notin Q_i \text{ или } i = j, \end{cases}$$

при условии

$$\sum_{j \in N} b_{ij}(z_0) \leq a_i. \quad (4.1)$$

Условие (4.1) означает, что число возможных связей ограничено для каждого игрока. Следует отметить, что  $|Q_i| \leq a_i$ . Очевидно, что связь также может быть реализована лишь с игроком из подмножества  $Q_i$ .

Далее предполагается, что связь  $ij$  установлена тогда и только тогда, когда  $b_{ij}(z_0) = b_{ji}(z_0) = 1$ , т. е.  $i \in Q_j$ ,  $j \in Q_i$ . Сформированные связи  $ij$  образуют ребра сети  $g(z_0)$ , вершинами которой являются игроки, т. е., если  $b_{ij} = b_{ji} = 1$ , то в сети  $g$  появляется ребро с концевыми вершинами  $i$  и  $j$ .

Множество соседей игрока  $i$  в сети  $g(z_0)$  обозначается через  $N_i(g(z_0))$ , т. е.  $N_i(g(z_0)) = \{j \in N \setminus \{i\} : ij \in g(z_0)\}$ .

После формирования сети  $g(z_0)$  игроки переходят в состояние  $z_1(g(z_0))$ , которое определяется сетью  $g(z_0)$ . В состоянии  $z_1(g(z_0))$  игрокам предоставляется возможность удалять некоторые из ранее установленных связей, перестраивая таким образом сеть  $g(z_0)$  в  $g(z_1)$  и формируя новые множества соседей  $N_i(g(z_1))$ . На сети  $g(z_1)$  игроки играют в игру  $\Gamma(z_1)$ , которая представляет собой одновременную неантагонистическую игру между соседями по сети.

Итак, на втором шаге в состоянии  $z_1$  игрок  $i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , выбирает управление  $y_i(z_1) = (b_i(z_1), x_i(z_1))$  из множества  $Y_i$ , и это управление в отличие от первого шага содержит дополнительную компоненту  $x_i(z_1)$  поведения в игре  $\Gamma(z_1)$ . Здесь  $b_i(z_1)$  — это вектор с компонентами 0 или 1, полученный по следующему правилу:

$$b_{ij}(z_1) = \begin{cases} 1, & \text{сохранить связь } ij, \\ 0, & \text{удалить связь } ij, \end{cases}$$

т. е. игрок на втором шаге имеет возможность удалять существующие связи, однако не обладает возможностью создавать новые. Компонента  $x_i(z_1)$  управления  $y_i(z_1) = (b_i(z_1), x_i(z_1))$  представляет собой поведение игрока  $i$  в игре  $\Gamma(z_1)$  и выбирается из множества  $X_i(z_1)$ , определенного в состоянии  $z_1$ .

Пусть  $y(z_1) = (y_1(z_1), \dots, y_n(z_1))$  — ситуация в игре  $\Gamma(z_1)$ . Выигрыш игрока  $i$  в игре  $\Gamma(z_1)$  расписывается таким образом:

$$H_i(z_1) = \sum_{j \in N_i(g(z_1))} h_i(y_i(z_1), y_j(z_1)),$$

где  $g(z_1)$  — сеть, возникшая в результате ситуации  $y(z_1)$ , которая предусматри-



вает возможность удаления некоторых ребер из сети  $g(z_0)$ , а функции  $h_i(x_i(z_1), x_j(z_1)) \geq 0$  заданы для всех  $i \in N$  и всех пар  $ij$ , т. е. всех ребер сети  $g(z_1)$  и всех возможных состояний  $z \in Z$ .

Пусть в состоянии  $z_{k-1} \in Z$  в игре  $\Gamma(z_{k-1})$  игроками  $i \in N$  были выбраны управления  $(y_1(z_{k-1}), \dots, y_n(z_{k-1}))$ . В результате выбора этих управлений осуществляется переход в состояние  $z_k$ , где происходит игра  $\Gamma(z_k)$ , с выигрышами  $h_i(x_j(z_k), x_i(z_k))$ , зависящими от управлений, выбранных в состоянии  $z_{k-1}$ . То есть состояние на следующем шаге игры зависит от состояния на текущем шаге и от управлений, выбранных на данном шаге. Можно получить отображение  $T : Z \times Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n \rightarrow Z$  по формуле

$$z_k = T(z_{k-1}; y_1(z_{k-1}), y_2(z_{k-1}), \dots, y_n(z_{k-1})), \quad k = \overline{1, \ell} \quad (4.2)$$

Таким образом, отображение  $T$  однозначным образом определяет состояние  $z_k$ , которое следует за состоянием  $z_{k-1}$ , при условии, что были выбраны управления  $y_1(z_{k-1}), y_2(z_{k-1}), \dots, y_n(z_{k-1})$ .

Далее рассматривается многошаговая игра  $G(z)$ , которая происходит следующим образом. Игра  $G(z_0)$  начинается в состоянии  $z_0$ . В состоянии  $z_0$  происходит формирование сети  $g(z_0)$ , после чего игроки попадают в состояние  $z_1$ . В состоянии  $z_{k-1}$ ,  $k = \overline{1, \ell - 1}$  игроки выбирают управления  $y_1(z_{k-1}), y_2(z_{k-1}), \dots, y_n(z_{k-1})$ , играют в игру  $\Gamma(z_{k-1})$  и переходят в состояние  $z_k = T(z_{k-1}; y_1(z_{k-1}), y_2(z_{k-1}), \dots, y_n(z_{k-1}))$ . Игра заканчивается на шаге  $\ell + 1$  в состоянии  $z_\ell$ . Таким образом, в результате выбора управлений на каждом шаге игры, реализуется путь  $z_0, z_1, \dots, z_k, \dots, z_\ell$ .

Состояние  $z$  называется *допустимым*, если существует последовательность управлений и порожденная ею последовательность состояний  $z_0, z_1, \dots, z_k$ ,  $k \leq \ell$ , определяемая по формуле (4.2), такая, что  $z_k = z$ .

Естественным образом вводится понятие стратегии в полученной многошаговой игре:  $y_i(\cdot)$ ,  $i \in N$ , — как правило, которое каждому допустимому со-

стоянию  $z$  игры ставит в соответствие компоненты  $(b_i(z), x_i(z))$  управления в этом состоянии, т. е. выбор связей, подлежащих удалению, и выбор поведения  $x_i(z)$  в игре  $\Gamma(z)$ . Из приведенного выше описания следует, что любая ситуация  $y(\cdot) = \{y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)\}$  однозначно определяет путь в игре, а следовательно, и выигрыш каждого игрока как сумму его выигрышей в играх, реализованных вдоль пути:

$$H_i(y(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j \in N_i(g(z))} h_i(y_i(z_k), y_j(z_k)).$$

Следует отметить, что множество всевозможных путей в многошаговой игре  $G(z)$  конечно, и, таким образом, конечно и множество всех допустимых состояний в игре. Это множество будет обозначаться через  $\bar{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$ .

Пусть предполагается, что игроки выбирают управления  $\bar{y}_i(z)$ ,  $i \in N$ , которые максимизируют их суммарный выигрыш в игре  $G(z)$ , т. е.

$$\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i \in N} H_i(\bar{y}_1(z_k), \dots, \bar{y}_n(z_k)) = \max_y \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i \in N} H_i(y_1(z_k), \dots, y_n(z_k)). \quad (4.3)$$

Ситуация  $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  будет называться *кооперативным поведением* в игре  $G(z)$ , а соответствующая управлениям  $\bar{y}_i(z)$ ,  $i \in N$ , траектория  $(\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_\ell)$  — *кооперативной траекторией* ( $z_0 = \bar{z}_0$ ).

Рассматривается одношаговая игра  $\Gamma(z)$  в произвольном состоянии  $z \in \mathbb{Z}$  в кооперативной форме и определяется ее характеристическая функция  $v(z; S)$ ,  $S \subset N$ , для каждого подмножества (коалиции)  $S \subset N$  по следующему правилу:

$$\begin{aligned} v(\emptyset; z) &= 0, \\ v(\{i\}; z) &= 0, \\ v(z; \{ij\}) &= \begin{cases} h_i(\bar{x}_i(z); \bar{x}_j(z)) + h_j(\bar{x}_j(z); \bar{x}_i(z)), & \text{если } j \in N_i(g(z)), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$v(z; S) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g(z)) \cap S} h_i(\bar{x}_i(z); \bar{x}_j(z)),$$

$$v(z; N) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i(g(z))} h_i(\bar{x}_i(z); \bar{x}_j(z)),$$

где  $\bar{x}_i(z), \bar{x}_j(z)$  получаются согласно равенству (4.3).

Здесь, в отличие от работ [9, 10] и первой главы, в которых характеристическая функция строилась как максиминное (нижнее) значение игры между коалицией  $S$  и дополнительной коалицией  $N \setminus S$ , процесс построения этой функции осуществляется иначе. Чтобы вычислить значение характеристической функции, необходимо определить кооперативное поведение в игре  $G(z_0)$ , зафиксировать оптимальные стратегии и затем рассчитать  $v(z_k; S)$ ,  $k = \overline{1, \ell}$ , в предположении, что игроки из коалиции  $S$  выбирают в качестве компонент управления кооперативное поведение.

Далее следует найти характеристическую функцию  $V(z_k; S)$  многошаговой игры  $G(z_k)$ , начинающейся в состоянии  $z_k$ , как сумму выигрышей коалиций  $S$  вдоль кооперативной траектории  $(\bar{y}(z_0), \bar{y}(z_1), \dots, \bar{y}(z_\ell))$  за  $\ell - k + 1$  шагов, начиная с  $k$ :

$$V(z_k; S) = \sum_{r=k}^{\ell} v(z_r; S) = \sum_{r=k}^{\ell} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g(z_r)) \cap S} h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r)),$$

$$V(S; z_\ell) = v(z_\ell; S).$$

## 4.2 Супермодулярность $v(z; S)$

Рассматривается вопрос о супермодулярности функции  $v(z; S)$  (см. (1.14)). Можно сформулировать следующий результат.

**Теорема 4.1** *Характеристическая функция  $v(z; S)$  в игре  $\Gamma(z)$  супермодулярна.*

**Доказательство.** Для доказательства теоремы необходимо проверить спра-

ведливость неравенства (1.14) для характеристической функции  $v(z; S)$  (4.4). Для сокращения записи вместо  $h_i(\bar{x}_i(z), \bar{x}_j(z))$  будет использоваться обозначение  $h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ , а вместо  $N_i(g(z)) - N_i$ . В данном случае это не противоречит логике, поскольку рассматривается только один шаг игры, и поведения, как и множества соседей, не меняются в течение шага. Имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in X \setminus Y} \left( \sum_{j \in N_i \cap (X \setminus Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) + \\
& + \sum_{i \in X \cap Y} \left( \sum_{j \in N_i \cap (X \setminus Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) + \\
& + \sum_{i \in Y \setminus X} \left( \sum_{j \in N_i \cap (X \setminus Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) \geq \\
& \geq \sum_{i \in X} \sum_{j \in N_i \cap X} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{i \in Y} \sum_{j \in N_i \cap Y} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) - \sum_{i \in X \cap Y} \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j). \quad (4.5)
\end{aligned}$$

В левой и правой части неравенства (4.5) можно заметить подобные слагаемые, а именно

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in X \setminus Y} \left( \sum_{j \in N_i \cap (X \setminus Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) + \\
& + \sum_{i \in X \cap Y} \left( \sum_{j \in N_i \cap (X \setminus Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) = \sum_{i \in X} \sum_{j \in N_i \cap X} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j).
\end{aligned}$$

После их сокращения получается выражение

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in X \setminus Y} \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{i \in X \cap Y} \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \\
& + \sum_{i \in Y \setminus X} \left( \sum_{j \in N_i \cap (X \setminus Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) \geq \\
& \geq \sum_{i \in Y} \sum_{j \in N_i \cap Y} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) - \sum_{i \in X \cap Y} \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j).
\end{aligned}$$

После переноса отрицательного слагаемого из правой части неравенства в

левую получается:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in X \setminus Y} \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{i \in X \cap Y} \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{i \in X \cap Y} \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \\
& + \sum_{i \in Y \setminus X} \left( \sum_{j \in N_i \cap (X \setminus Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \right. \\
& \left. + \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) \geq \sum_{i \in Y} \sum_{j \in N_i \cap Y} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j).
\end{aligned}$$

Можно выделить вторую группу подобных слагаемых:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in X \cap Y} \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{i \in X \cap Y} \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \\
& + \sum_{i \in Y \setminus X} \left( \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) = \sum_{i \in Y} \sum_{j \in N_i \cap Y} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j).
\end{aligned}$$

После их сокращения итоговое неравенство выглядит так

$$\sum_{i \in X \setminus Y} \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{i \in Y \setminus X} \sum_{j \in N_i \cap (X \setminus Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \geq 0. \quad (4.6)$$

В силу неотрицательности выигрышей  $h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ , последнее неравенство верное. Таким образом, доказана справедливость неравенства (1.14), и построенная характеристическая функция  $v(S; z)$  в игре  $\Gamma(z)$  супермодулярна.

### 4.3 Вектор Шепли

В качестве решения игры  $\Gamma(z)$  будет рассматриваться вектор Шепли (1.19). В силу того, что сеть может быть сформирована произвольным образом, получить явный упрощенный вид формулы компонент вектора Шепли не представляется возможным. Однако можно сделать упрощение следующего вида: вычислить разность  $v(z; S) - v(z; S \setminus \{i\})$ . Это возможно в силу структуры характеристической функции (4.4).

Значение характеристической функции  $v(z; S)$ , когда  $i \in S$ :

$$v(z; S) = \sum_{q \in S} \sum_{r \in N_q(g(z)) \cap S} h_q(\bar{x}_q(z), \bar{x}_r(z)) + \sum_{p \in S \cap N_i(g(z))} [h_i(\bar{x}_i(z), \bar{x}_p(z)) + h_p(\bar{x}_p(z), \bar{x}_i(z))] \quad (4.7)$$

Здесь первое слагаемое — это выигрыши игроков из коалиции  $S$  без учета игрока  $i$ , а второе слагаемое — то, что получает коалиция (и игрок  $i$  в том числе), от кооперации с игроком  $i$ .

Значение характеристической функции  $v(z; S \setminus \{i\})$ :

$$v(z; S) = \sum_{q \in S} \sum_{r \in N_q(g(z)) \cap S} h_q(\bar{x}_q(z), \bar{x}_r(z)) \quad (4.8)$$

Вычитая из (4.7) выражение (4.8), получается итоговое значение разности

$$v(z; S) - v(z; S \setminus \{i\}) = \sum_{j \in N_i(g(z)) \cap S} (h_i(\bar{x}_i(z), \bar{x}_j(z)) + h_j(\bar{x}_j(z), \bar{x}_i(z))).$$

Подставляя полученное значение разности в формулу компонент вектора Шепли (1.19), получается ее упрощенный вид

$$\varphi_i[v] = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} \sum_{j \in N_i(g(z)) \cap S} (h_i(\bar{x}_i(z), \bar{x}_j(z)) + h_j(\bar{x}_j(z), \bar{x}_i(z))) \quad i \in N. \quad (4.9)$$

Несмотря на необходимость вычислять весовой коэффициент для каждой коалиции, такой вид формулы не требует определения характеристической функции для всех коалиций  $S \subset N$ . Чтобы вычислить значение компоненты вектора Шепли, достаточно знать структуру сети  $g(z)$  и стратегии игроков.

#### 4.4 ПРД-ядро и его сильная динамическая устойчивость

Через  $\mathcal{M}[V(z_k; S)]$  будет обозначаться множество всех дележей в игре  $G(z_0)$ .

**Определение 4.1** Функция  $\beta_i = (\beta_i^0, \dots, \beta_i^\ell)$ ,  $i \in N$ , называется процедурой распределения дележа (ПРД) для  $\xi \in \mathcal{M}[V(z_k; S)]$  (см. [9, 13]), если

$$\xi_i = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_i^r, \quad i \in N.$$

В качестве принципа оптимальности рассматривается подмножество  $S$ -ядра для игры  $G(\bar{z}_k)$  — ПРД-ядро (см. [7, 38])  $\mathcal{I}[V(\bar{z}_k; S)]$ , т. е. множество ПРД, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i \in S} \beta_i \geq V(\bar{z}_k; S) = \sum_{r=k}^{\ell} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g(z_r)) \cap S} h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r)), \quad S \subset N, \quad S \neq N,$$

$$\sum_{i=1}^N \beta_i = V(\bar{z}_k; N) = \sum_{r=k}^{\ell} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i(g(z_r)) \cap N} h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r)),$$

где  $\beta_i = (\beta_1^i, \dots, \beta_k^i, \dots, \beta_\ell^i)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{i \in S} \beta_i^k \geq v(\bar{z}_k; S) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g(z_k)) \cap S} h_i(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k)), \quad S \subset N, \quad (4.10)$$

$$\sum_{i=1}^N \beta_i^k = v(\bar{z}_k; N) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i(g(z_k)) \cap N} h_i(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k)). \quad (4.11)$$

Предположим, что все  $\mathcal{I}[V(\bar{z}_k; S)] \neq \emptyset$ .

**Определение 4.2** Принцип оптимальности  $\mathcal{I}[V(\bar{z}_0; S)] \neq \emptyset$  сильно динамически устойчив в игре  $G(\bar{z}_0)$  [10], если

$$1) \mathcal{I}[V(\bar{z}_k; S)] \neq \emptyset, \quad k = \overline{0, \ell};$$

2) Для каждого дележа  $x \in \mathcal{I}[V(\bar{z}_0; S)]$  существует такая процедура распре-

деления дележа  $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_\ell)$ ,  $\xi = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r$ , что

$$\sum_{r=0}^k \beta_r \oplus \mathcal{I}[V(\bar{z}_{k+1}; S) \subset \mathcal{I}[V(\bar{z}_0; S)]], \quad k = \overline{0, \ell}.$$

Здесь символ  $\oplus$  означает, что если  $a \in R^n$ ,  $B \subset R^n$ , тогда  $a \oplus B = \{a + b : b \in B\}$ .

**Утверждение 4.1** Принцип оптимальности  $\mathcal{I}[V(\bar{z}_0; S)]$  сильно динамически устойчив.

**Доказательство.** Пусть некоторый дележ  $\xi_0 \in \mathcal{I}[V(\bar{z}_0; S)]$ . Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{i \in S} \xi_{i0} \geq \sum_{r=0}^{\ell} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g(z_r)) \cap S} h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r)), \quad S \subset N, \quad S \neq N,$$

$$\sum_{i=1}^N \xi_{i0} = \sum_{r=0}^{\ell} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i(g(z_r)) \cap N} h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r)).$$

По определению, можно записать дележ  $\xi_0$  в виде суммы ПРД:

$$\xi_0 = \sum_{k=0}^{\ell} \bar{\beta}_k, \quad \bar{\beta}_k \in \mathcal{C}(v(\bar{z}_k); S), \quad (4.12)$$

где  $\mathcal{C}(v(\bar{z}_k); S)$  —  $S$ -ядро одношаговой игры  $\Gamma(\bar{z}_k)$ , построенное по характеристической функции  $v(\bar{z}_k; S)$ .

Аналогичным образом можно представить произвольный дележ  $\xi_{k+1} \in \mathcal{I}[V(\bar{z}_{k+1}; S)]$  как сумму:

$$\xi_{k+1} = \sum_{r=k+1}^{\ell} \bar{\beta}_r, \quad \bar{\beta}_r \in \mathcal{C}(v(\bar{z}_r; S)). \quad (4.13)$$

В качестве ПРД выбирается вектор  $\beta = (\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_k, \bar{\beta}_{k+1}, \dots, \bar{\beta}_\ell)$  и строится



новый вектор:

$$\hat{\xi}_0 = \sum_{r=0}^k \bar{\beta}_r + \xi_{k+1} = \sum_{r=0}^k \bar{\beta}_r + \sum_{r=k+1}^{\ell} \bar{\bar{\beta}}_r \geq \sum_{r=0}^{\ell} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g(z_r)) \cap S} h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r)).$$

Таким образом, вектор  $\hat{\xi}_0$  является суммой компонент ПРД  $\beta$  и произвольного дележа  $\xi_{k+1} \in \mathcal{I}[V(\bar{z}_{k+1}; S)]$ . Вектор  $\hat{\xi}_0 \in \mathcal{I}[V(\bar{z}_0; S)]$ , что доказывает сильную динамическую устойчивость принципа оптимальности  $\mathcal{I}[V(\bar{z}_0; S)]$ . Утверждение доказано.

## Пример

Рассматривается случай, в котором  $N = 3$ ,  $\ell = 3$ , т. е. игра  $G(z)$  состоит из четырех шагов и начинается в состоянии  $z_0$ . В этом состоянии заданы множества  $M_i$  игроков, которым игрок  $i$  может предложить связь

$$M_1 = \{2, 3\}, \quad M_2 = \{1, 3\}, \quad M_3 = \{1, 2\},$$

а также ограничения на количество связей, которое может поддерживать каждый игрок:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2.$$

В состоянии  $z_0$  игроки выбирают вектора  $b_i(z_0)$ , формируют сеть  $g(z_0)$  и переходят в состояние  $z_1$ . В каждом из состояний  $z_k$ ,  $k \geq 1$  игроки выбирают управления  $y_i(z_k) = (b_i(z_k), x_i(z_k))$ , где компонента  $b_i(z_k)$  — вектор регулирования связей игрока (с возможными значениями 1 и 0), а компонента  $x_i(z_k)$  равна

$$x_1(z_k) = x_1(z) \in X_1 = \{x_1^1(z), x_1^2(z)\},$$

$$x_2(z_k) = x_2(z) \in X_2 = \{x_2^1(z), x_2^2(z)\}, \quad x_3(z_k) = x_3(z) \in X_3 = \{x_3^1(z), x_3^2(z)\}$$

Таким образом каждый игрок  $i$  имеет одинаковое множество компонент управления  $X_i$  во всех состояниях  $z_k$ .

Для всех допустимых состояний  $z_k$ ,  $k \geq 1$ , и всех возможных стратегий заданы выигрыши  $h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r))$  следующих видов:  $h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r))$  и  $h'_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r))$ .

В состоянии  $z_1$  игра  $\Gamma(z_1)$  происходит с выигрышами  $h(\bar{x}_i(z_1), \bar{x}_j(z_1))$ . В состоянии  $z_1$  каждый игрок  $i \in N$  выбирает свою компоненту управления  $x_i(z_1)$ , и если все  $x_i(z_1) = x_i^1(z_1)$ ,  $i \in N$ , тогда игроки переходят в состояние  $z_2$ , в котором играют в игру  $\Gamma(z_2)$  с теми же выигрышами  $h_i(\bar{x}_i(z_2), \bar{x}_j(z_2))$ . Если хотя бы одна из компонент  $x_i(z_1) = x_i^2(z_1)$ ,  $i \in N$ , тогда в состоянии  $z_2$  игроки играют в игру  $\Gamma(z_2)$  с выигрышами  $h'_i(\bar{x}_i(z_2), \bar{x}_j(z_2))$ . Аналогичным образом осуществляется переход в состояние  $z_3$ : если все  $x_i(z_1) = x_i^1(z_1)$ ,  $i \in N$ , тогда игроки в состоянии  $z_3$  используют выигрыши  $h_i(\bar{x}_i(z_3), \bar{x}_j(z_3))$ , если хотя бы одна из компонент  $x_i(z_1) = x_i^2(z_1)$ ,  $i \in N$ , — выигрыши  $h'_i(\bar{x}_i(z_3), \bar{x}_j(z_3))$ .

Выигрыши  $h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r))$  заданы:

$$\begin{aligned}
h_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1) &= 4, & h_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_3^1) &= 5, & h_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_3^1) &= 5, \\
h_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^1) &= 3, & h_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_3^1) &= 3, & h_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_3^1) &= 1, \\
h_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^2) &= 5, & h_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_3^2) &= 1, & h_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_3^2) &= 4, \\
h_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2) &= 5, & h_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_3^2) &= 2, & h_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_3^2) &= 1, \\
h_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_1^1) &= 4, & h_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_1^1) &= 5, & h_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_2^1) &= 5, \\
h_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_1^2) &= 3, & h_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_1^2) &= 3, & h_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_2^2) &= 1, \\
h_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_1^1) &= 5, & h_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_1^1) &= 1, & h_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_2^1) &= 4, \\
h_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_1^2) &= 5, & h_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_1^2) &= 2, & h_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_2^2) &= 1;
\end{aligned}$$

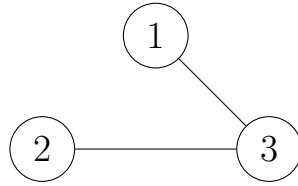
выигрыши  $h'_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r))$ :

$$\begin{aligned}
h'_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1) &= 8, & h'_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_3^1) &= 6, & h'_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_3^1) &= 12, \\
h'_2(\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^1) &= 3, & h'_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_3^1) &= 5, & h'_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_3^1) &= 10, \\
h'_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^2) &= 7, & h'_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_3^2) &= 4, & h'_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_3^2) &= 5, \\
h'_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2) &= 4, & h'_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_3^2) &= 3, & h'_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_3^2) &= 4, \\
h'_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_1^1) &= 8, & h'_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_1^1) &= 6, & h'_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_2^1) &= 12, \\
h'_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_1^2) &= 3, & h'_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_1^2) &= 5, & h'_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_2^2) &= 10, \\
h'_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_1^1) &= 7, & h'_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_1^1) &= 4, & h'_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_2^1) &= 5, \\
h'_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_1^2) &= 4, & h'_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_1^2) &= 3, & h'_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_2^2) &= 4.
\end{aligned}$$

В состоянии  $z_0$  игроки выбирают свои поведения с целью максимизировать суммарный выигрыш всех игроков:

$$b_1(z_0) = (0, 0, 1), \quad b_2(z_0) = (0, 0, 1), \quad b_3(z_0) = (1, 1, 0).$$

В результате образуется сеть вида, которую иллюстрирует рисунок 11.



**Рисунок 11.** Сеть на первом шаге игры.

Для максимизации общего выигрыша игрокам выгодно поддерживать связи со всеми соседями в течение всей игры, т. е.  $b_i(z_0) = b_i(z_1) = b_i(z_2) = b_i(z_3)$ , для всех  $i \in N$ . Компоненты управлений  $\bar{y}_i(z)$  игроков имеют вид:

$$\bar{x}_1(z_1) = x_1^2, \quad \bar{x}_2(z_1) = x_2^1, \quad \bar{x}_3(z_1) = x_3^1,$$

$$\bar{x}_1(z_2) = x_1^1, \quad \bar{x}_2(z_2) = x_2^2, \quad \bar{x}_3(z_2) = x_3^1,$$

$$\bar{x}_1(z_3) = x_1^1, \quad \bar{x}_2(z_3) = x_2^2, \quad \bar{x}_3(z_3) = x_3^1.$$

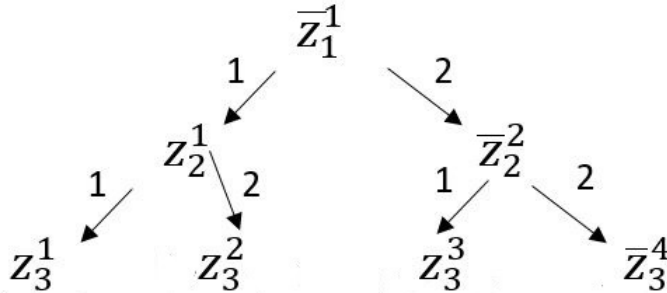
Значения характеристической функции  $v(z; S)$  вычисляются во всех состояниях на кооперативной траектории, кроме  $z_0$ , поскольку на первом шаге про-

исходит только формирование сети и игроки не получают никаких выигрышей:

$S$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
$v(S; \bar{z}_1)$	0	0	0	6	6	10	16
$v(S; \bar{z}_2)$	0	0	0	14	12	20	32
$v(S; \bar{z}_3)$	0	0	0	14	12	20	32

**Таблица 7.** Значения характеристической функции в  $v(z; S)$ .

В состоянии  $z_1$  игроки выбирают свои управления и в зависимости от этого переходят в новое состояние. В каждом состоянии у игроков всего две альтернативы: либо в результате выбора управлений они будут играть в игру  $\Gamma(z_k)$  с выигрышами  $h_i(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k))$  в следующем состоянии, либо перейдут в состояние, где игра  $\Gamma(z_k)$  будет происходить с выигрышами  $h'_i(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k))$ .



**Рисунок 12.** Дерево всех возможных состояний игры.

Цифры 1 и 2 над стрелками (рис. 2) указывают, какие выигрыши будут использованы игроками в следующем состоянии: цифра 1 означает  $h_i(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k))$ , цифра 2 —  $h'_i(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k))$ .

Оптимальная траектория в игре  $G(z_0)$ :  $\bar{z} = (z_0, z_1^1, z_2^2, z_3^4) = (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$ .  
 Результат вычисления характеристической функции многошаговой игры  $G(z_0)$ :

$S$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
$V(S; \bar{z}_3)$	0	0	0	14	12	20	32
$V(S; \bar{z}_2)$	0	0	0	28	24	40	64
$V(S; \bar{z}_1)$	0	0	0	34	30	50	80

**Таблица 8.** Значения характеристической функции многошаговой игры  $G(z_0)$ .

Далее рассматривается дележ  $q \in \mathcal{I}[V(\bar{z}_1); S]$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \geq 34, \\ x_1 + x_3 \geq 30, \\ x_2 + x_3 \geq 50, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 80. \end{array} \right.$$

В качестве ПРД  $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$  используется дележ  $\alpha^k \in \mathcal{I}[v(\bar{z}_k); S]$ , удовлетворяющий неравенствам (4.12), (4.13),  $\beta_k = \alpha$ ,  $k = 1, 2, 3$ ;

Компоненту  $\beta_0$  следует положить равной нулю (поскольку игроки не получают выигрышей на первом шаге — шаге формирования сети), а  $\beta_1$  будет удовлетворять системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^1 \geq 0, \\ \alpha_2^1 \geq 0, \\ \alpha_3 \geq 0, \\ \alpha_1^1 + \alpha_2^1 \geq 6, \\ \alpha_1^1 + \alpha_3^1 \geq 6, \\ \alpha_2^1 + \alpha_3^1 \geq 10, \\ \alpha_1^1 + \alpha_2^1 + \alpha_3^1 = 16, \end{array} \right.$$

$\beta_2$  и  $\beta_3$  в свою очередь будут удовлетворять неравенствам, где  $k = 2, 3$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^k \geq 0, \\ \alpha_2^k \geq 0, \\ \alpha_3^k \geq 0, \\ \alpha_1^k + \alpha_2^k \geq 14, \\ \alpha_1^k + \alpha_3^k \geq 12, \\ \alpha_2^k + \alpha_3^k \geq 20, \\ \alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k = 32. \end{array} \right.$$

После суммирования левой и правой части неравенств последних двух систем по  $k = 1, 2, 3$  получается следующая система:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{q}_1 \geq 0, \\ \hat{q}_2 \geq 0, \\ \hat{q}_3 \geq 0, \\ \hat{q}_1 + \hat{q}_2 \geq 34, \\ \hat{q}_1 + \hat{q}_3 \geq 30, \\ \hat{q}_2 + \hat{q}_3 \geq 50, \\ \hat{q}_1 + \hat{q}_2 + \hat{q}_3 = 80. \end{array} \right.$$

Из последнего неравенства следует, что  $\hat{q} \in \mathcal{I}[V(\bar{z}_0); S]$ . То есть дележ, принадлежащий множеству  $\mathcal{I}[V(\bar{z}_0); S]$ , удалось разложить на сумму дележей из множеств  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_k); S]$ ,  $k = 1, 2, 3$ , что доказывает сильную динамическую устойчивость принципа оптимальности  $\mathcal{I}[V(\bar{z}_0); S]$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследования были получены следующие научные результаты, выносимые на защиту:

1. Описана кооперативная форма сетевых игр с попарным взаимодействием, определена характеристическая функция и получены кооперативные решения для данного класса игр:  $S$ -ядро, вектор Шепли, вектор  $\tau$ . Доказана выпуклость двухшаговой игры с попарным взаимодействием, а так же одношаговой подыгры.
2. Для особого класса симметричных сетей — сеть-звезда — получена упрощенная формула вычисления компонент вектора Шепли, получены условия для сильной динамической устойчивости  $S$ -ядра.
3. Рассмотрены многошаговые кооперативные игры с попарным взаимодействием. Для данного класса игр построен аналог  $S$ -ядра и доказана его сильная динамическая устойчивость.
4. Рассмотрены альтернативные подходы к построению характеристической функции для игр с попарным взаимодействием. Описаны их достоинства и недостатки.
5. Для неантагонистических сетевых игр на основе игр с попарным взаимодействием построена характеристическая функция и доказана ее супермодулярность. Построено ПРД-ядро и доказана его сильная динамическая устойчивость.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булгакова, М. А. Кооперативные сетевые игры с попарным взаимодействием / М. А. Булгакова, Л. А. Петросян // Математическая теория игр и ее приложения. – 2015. – Т. 4, № 7. – С. 7-18.
2. Булгакова, М. А. Решения сетевых игр с попарным взаимодействием / М. А. Булгакова // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2019. – Т. 15, Вып. 1. – С. 147-156.
3. Булгакова, М. А. Многошаговые игры с попарным взаимодействием на полном графе / М. А. Булгакова, Л. А. Петросян // Математическая теория игр и ее приложения. – 2019. – Т. 11, Вып. 1. – С. 3-20.
4. Булгакова, М. А. Об одной многошаговой неантагонистической игре на сети. / М. А. Булгакова, Л. А. Петросян // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2019. – Т. 15, Вып. 4. – С. 603-615.
5. Булгакова, М. А. Вектор Шепли для сетевых игр с попарным взаимодействием. / М. А. Булгакова, Л. А. Петросян // Устойчивость и процессы управления. Материалы III международной конференции. – 2015. – С. 227-228.
6. Булгакова, М. А. Об одном способе построения характеристической функции в игре с попарным взаимодействием / М. А. Булгакова, Л. А. Петросян // Процессы управления и устойчивость. – 2018. – С. 53-58.
7. Вольф, Д. А. О существование ПРД-ядра в кооперативных дифференциальных играх / Д. А. Вольф, В. В. Захаров, О. Л. Петросян // Математическая теория игр и ее приложения. – 2017. – Т. 9, Вып. 4. – С. 18-38.



8. Панкратова, Я. Б. Новая характеристическая функция для многошаговых динамических игр / Я. Б. Панкратова, Л. А. Петросян // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2018. – Т. 14, Вып. 4. – С. 316–324.
9. Петросян, Л. А. Устойчивость решений дифференциальных игр со многими участниками / Л. А. Петросян // Вестник Ленинградского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 1977. – № 19. – С. 46–52.
10. Петросян, Л. А. Сильно динамически устойчивые дифференциальные принципы оптимальности / Л. А. Петросян // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 1993. – № 4. – С. 40–46.
11. Петросян, Л. А. Многошаговые сетевые игры с полной информацией / Л. А. Петросян, А. А. Седаков // Математическая теория игр и ее приложения. – 2009. – Т. 1, Вып. 2. – С. 66–81.
12. Петросян, Л. А. Теория игр: учебник / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. В. Шевкопляс. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.
13. Петросян, Л. А. Устойчивость решений неантагонистических дифференциальных игр с трансферабельными выигрышами / Л. А. Петросян, Н. Н. Данилов // Вестник Ленинградского Университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 1979. – Вып. 1. – С. 52–59.
14. Петросян, Л. А. Двухшаговые сетевые игры / Л. А. Петросян, А. А. Седаков, А. О. Бочкарев // Математическая теория игр и ее приложения. – 2013. – Т. 5, Вып. 4. – С. 84–104.
15. Печерский, С. Л. Кооперативные игры: аксиомы и решения / С. Л. Печерский, Е. Б. Яновская. – СПб.: Изд-во Европейского университета в СПб, 2004. – 459 с.
16. Писарук, Н. Н. Введение в теория игр / Н. Н. Писарук. – Минск: Изд-во БГУ, 2015. – 256 с.

17. Acemoglu, D. Spread of (mis)information in social networks / D. Acemoglu, A. Ozdaglar, A. ParandehGheibib // Games and Economic Behavior. – 2010. – Vol. 70, № 2. – P. 194–227.
18. Aumann, R. Endogenous Formation of Links Between Players and Coalitions: An Application of the Shapley Value/ R. Aumann, R. Myerson // The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley / ed. by A. Roth. – Cambridge, 1988. – P. 175-191.
19. Bala, V. A noncooperative model of network formation / V. Bala, S. Goyal // Econometrica. – 2000. – Vol. 65, № 5. – P. 1181-1229.
20. Blume, L. Evolutionary Equilibrium with Forward-Looking Players / L. Blume // Game Theory and Information. – 1995.
21. Boncinelli, L. Stochastic stability in best shot network games / L. Boncinelli, P. Pin // Games and Economic Behavior. – 2012. – Vol. 75, № 2. – P. 538–554.
22. Bulgakova, M. A. About strongly time-consistency of core in the network game with pairwise interactions / M. A. Bulgakova, L. A. Petrosyan // Proceedings of 2016 International Conference «Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems». – 2016. – P. 157-160.
23. Bulgakova, M. A. Strongly time-consistent core in multistage games / M. A. Bulgakova, L. A. Petrosyan // Proceedings of 2017 Constructive nonsmooth analysis and related topics. – 2017. – P. 337-342.
24. Challita, U. Network Formation in the Sky: Unmanned Aerial Vehicles for Multi-hop Wireless Backhauling / U. Challita, W. Saad // Proceedings of the IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM), Singapore. – 2017.
25. Corbae, D. Experiments with network formation / D. Corbae, J. Duffy // Games and Economic Behavior. – 2008. – Vol. 64, № 1. – P. 81-120.
26. Davis, M. The kernel of a cooperative game / M. Davis, M. Maschler // Naval Research Logistics Quarterly. – 1965. – Vol. 12, № 3. – P. 223-259.
27. Dyer, M. Pairwise-Interaction Games / M. Dyer, V. Mohanaraj // ICALP: Automata, Languages and Programming. – 2011. – P. 159-170.

28. Dziubińska, M. Network design and defence / M. Dziubińska, S. Goyal // Games and Economic Behavior. – 2013. – Vol. 79. – P. 30–43.
29. Goyal, S. Non-Exclusive Conventions and Social Coordination / S. Goyal, M. Janssen // Journal of Economic Theory. – 1997. – Vol. 77, № 1. – P. 34–57.
30. Goyal, S. Network formation and social coordination / S. Goyal, F. Vega-Redondo // Games and Economic Behavior. – 2005. – Vol. 50, № 2. – P. 178–207.
31. Hernández, P. Heterogeneous network games: Conflicting preference / P. Hernández, M. Muñoz-Herrerab, Á. Sánchez // Games and Economic Behavior. – 2013. Vol. 79. – P. 56–66.
32. Jackson, M. O. Social and Economic Networks / M. O. Jackson. – Princeton : Princeton University Press, 2008. – 520 p.
33. Jackson, M. O. On the formation of interaction networks in social coordination games / M. O. Jackson, A. Watts // Games and Economic Behavior. – 2002. – Vol. 41, № 2. – P. 265–291.
34. The efficiency and stability of R&D networks / M. D. König [and others] // Games and Economic Behavior. – 2012. – Vol. 75, № 2. – P. 694–713.
35. Kuzyutin, D. Time consistent cooperative solutions for multistage games with vector payoffs / D. Kuzyutin, M. Nikitina // Operations Research Letters. – 2017. – Vol. 45, № 3. – P. 269–274.
36. Unmanned Aerial Vehicle With Underlaid Device-to-Device Communications: Performance and Tradeoffs / M. Mozaffari [and others] // IEEE Transactions on Wireless Communications. – 2016. – Vol. 15, № 6. – P. 3949–3963.
37. Von Neumann, J. Theory of Games and Economic Behavior / J. Von Neumann, O. Morgenstern. – Princeton: Princeton University press, 1944. – 625 p.
38. Nash, J. Non-cooperative games // The Annals of Mathematics. – 1951. – Vol. 54. – P. 286–295.
39. Petrosian, O. L. Strong time-consistent subset of core in cooperative differential games with finite time horizon / O. L. Petrosian, E. V. Gromova, S. V. Pogoshev

- // Automation and Remote Control. – 2018. – Vol. 79, № 10. – P. 1912-1928.
40. Petrosyan, L. A. The Subgame-Consistent Shapley Value for Dynamic Network Games with Shock / L. A. Petrosyan, A. A. Sedakov // Dynamic Games and Applications. – 2016. Vol. 6, № 4. – P. 520-537.
41. Petrosyan L. A. Time-Consistent Solutions for Two-Stage Network Games with Pairwise Interactions / L. A. Petrosyan, M. A. Bulgakova, A. A. Sedakov // Mobile Networks and Applications. – 2018.
42. Petrosyan L. A. The time-consistent Shapley value for two-stage network games with pairwise Interactions / L. A. Petrosyan, M. A. Bulgakova, A. A. Sedakov // Game Theory for Networking Applications. – 2019. – P. 15-23.
43. Network Formation Games Among Relay Stations in Next Generation Wireless Networks / W. Saad [and others] // IEEE Transactions on Communications. – 2011. – Vol. 59, № 9. – P. 2528-2542.
44. Shapley, L. S. Cores of Convex Games / L. S. Shapley // International Journal of Game Theory. – 1971. – Vol. 1. – P. 11-26.
45. Shapley, L. S. A value for  $n$ -person games / L. S. Shapley // Contributions to the theory of games II / ed. by H. W. Kuhn, A. W. Tucker. – Princeton, 1953. – P. 307–317.
46. Tijs, S. H. An axiomatization of the  $\hat{o}$ -value / S. H. Tijs // Mathematical Social Sciences. – 1987. – Vol. 13. – P. 177-181.
47. Xie, F. Prisoners dilemma game on adaptive networks under limited foresight / F. Xie, W. Cui, J. Lin // Complexity. – 2013. – Vol. 18. – P.38–47.
48. Yanovskaya, E. The Nucleolus and the  $\tau$ -value of Interval Games / E. B. Yanovskaya // Contributions to Game Theory and Management. – (2010). – Vol. 3. – P. 421–430.
49. Zakharov, V. Linear programming approach in cooperative games / V. Zakharov, O-Hun Kwon // Journal of Korean Mathematical Society. – 1977. – Vol. 34, № 2. – P. 423-435.

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Published in manuscript form

**BULGAKOVA Mariia Aleksandrovna**

**DYNAMIC NETWORK GAMES WITH PAIRWISE  
INTERACTIONS**

**1.2.3. Theoretical informatics, cybernetics**

**D I S S E R T A T I O N**

candidate of sciences degree seeking applicant  
of physics and mathematical sciences

Translation from Russian

**Scientist advisor:  
Doctor of Physical and Mathematical sciences,  
professor L. A. Petrosyan**

Saint-Petersburg  
2022

# Table of contents

INTRODUCTION	112
<b>Chapter 1: Two-stage bimatrix games with pairwise interactions</b>	<b>120</b>
1.1 The model . . . . .	120
1.2 Construction of characteristic function . . . . .	122
1.3 Convexity of game . . . . .	125
1.4 The Shapley value . . . . .	127
1.5 The $\tau$ -value $\tau$ . . . . .	130
1.6 The case of special network: star-network . . . . .	133
1.6.1 The Shapley value . . . . .	133
1.6.2 Time-consistency of the Shapley value in star-network . . . . .	140
1.6.3 The core . . . . .	148
1.7 The core in two-stage three person game . . . . .	152
<b>Chapter 2: Multistage bimatrix games with pairwise interactions</b>	<b>159</b>
2.1 The model . . . . .	159
2.2 The case of equal values $v(z; N)$ . . . . .	163
2.2.1 Construction of approximation for the core by function $w(S)$ . . . . .	164
2.2.2 Strongly time consistency of $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$ . . . . .	166
2.3 The case of arbitrary values $v(z_t, N)$ . . . . .	167
<b>Chapter 3: Alternative ways of constructing the characteristic function</b>	<b>175</b>
3.1 Construction of the characteristic function as the maximum of the expected payoff . . . . .	175
3.2 Approximation of characteristic function for multistage game . . . . .	179
3.3 On the method of evaluating the core . . . . .	182
<b>Chapter 4: General form of network games with pairwise interactions</b>	<b>189</b>
4.1 The model . . . . .	189
4.2 Supermodularity $v(z; S)$ . . . . .	194
4.3 The Shapley value . . . . .	196
4.4 IDP-core and its strongly time consistency . . . . .	197
CONCLUSION	206

**REFERENCES**

## INTRODUCTION

**Relevance of the research topic.** The history of the emergence of game theory dates back to the XIX century and the impetus for this was the development of economic theory. The first mathematical models directly related to game theory concerned only those economic processes that can be quantified. It was an analysis of demand and prices depending on competition in the market, which was carried out by A. Cournot and later J. Bertrand.

In the middle of the XX century, the interest of scientists in game theory has grown significantly, the fields of application of this science as an applied discipline have expanded. Game theory has found practical applications in economics, biology, cybernetics, engineering, anthropology, and military science. A special role in game theory is played by such a section as cooperative games. Its task is to find a set of solutions to a conflict situation that would be beneficial to both individual players and groups of players, called coalitions. Also, cooperative games are engaged in the development of optimality principles, according to which from the set of obtained solutions one could choose the best one and ways to ensure the fulfillment of agreements (cooperative agreements) between players in dynamic games (developing in time).

The fundamental concept of solving non-zero sum games is the Nash equilibrium [37, 38], according to which the players choose the optimal strategy of behavior, deviation from which is not beneficial to any of the participants in the conflict.

When considering dynamic cooperative games, the question of time consistency and strongly time consistency of the solutions obtained, that is, the question of maintaining a cooperative agreement throughout the entire game process, arises.



Significant results in this direction were obtained by representatives of the Russian scientific school [9, 10, 12, 13]. However, the search for solutions to cooperative dynamic games is often difficult due to their high computational complexity, which interferes with obtaining solutions in an explicit analytical form. Therefore, the question of considering the game process in such a way that would make it possible to obtain an explicit solution is extremely relevant.

Since the beginning of the XXI century, solving various problems using graph theory is gaining popularity. Networks of all kinds, transport networks, communication networks, fuel, energy networks, and finally, networks of trade relations and social networks are developing rapidly. Agents of such networks have an connection with each other, which means that they influence and are exposed to other agents [31, 32, 47]. Social networks should be separately noted as a powerful tool for influencing a wide range of people. The dissemination of information and misinformation on social networks is described in detail in [17, 19, 30].

A large number of processes and phenomena described using a network can be considered as a set of separate processes occurring between agents that have a connection with each other, from the point of view of one connection is one process. Then the global complex gameplay is broken down into a family of simple games. This concept is called pairwise interaction and was first proposed in [25, 27]. The works [20, 21] are devoted to the search for Nash equilibrium in problems of this type.

In the dissertation work, the concept of pairwise interaction was first applied to cooperative dynamic games. A characteristic function is constructed, which, when considering a game in the format of pairwise interaction, has a significantly lower computational complexity compared to games where the game is not split into a set of games, since it requires solving only sub-games with a set of no more than two players. Such a partition allows one to obtain analytical expressions for the main types of solutions of non-zero sum games, such as the Shapley value [45], the  $\tau$ -value [46], and others.

In the thesis, the concept of a cooperative network game with pairwise interaction is introduced. The main approach to defining the characteristic function is considered using a two-stage game model, where, at the first stage, the process of forming connections between players (the network) takes place, and at the second, the game itself, which is a family of simultaneous bimatrix games between pairs of players occupying positions on the network at the end vertices of one edge. Further, using this model as an example, we consider the main solutions and ways to optimize their calculation, taking into account the special design of the characteristic function. Some types of private networks, which are most widely used in practice, are investigated, as well as the influence of the network geometry on the construction of the solution.

The next stage of the dissertation work was the extension of the results obtained to more general cases, namely, the case of multistage games and the application of the concept of pairwise interaction in multistage non-zero sum games on networks of a general form. We also succeeded in proving some useful properties of the characteristic function that greatly simplify its application to solving cooperative games, namely, the supermodularity of the characteristic function. To solve multistage network games with pairwise interaction, the issue of time-consistency and strongly time-consistency is considered, strongly time-consistent subsets of the C-core, the so-called IDP-core [7, 39], are distinguished.

**Goal and targets of the thesis research.** The goal of the thesis research is to formalize and to study dynamic cooperative network games with pairwise interactions. To achieve this goal, there were determined the following handling of the targets:

- Formalize the model. Considering pairwise interactions on the two-stage network game.
- Construct the characteristic function and investigate its properties.
- Study solutions of two-stage network game with pairwise interactions.

- Investigation of the properties of the characteristic function and solutions for games with pairwise interaction on specific networks.
- Generalization of the results obtained for the case of multistage games.
- Investigation of alternative approaches to the construction of the characteristic function in the considered game model. Description of their merits and demerits.
- Generalization of the results obtained for non-zero sum games of a general type using the principle of pairwise interaction.
- Testing the results obtained on game-theoretic models.

**Scientific novelty.**

1. For the first time, a cooperative form of network games with pairwise interaction, a defined characteristic function is described, its properties are investigated, and cooperative solutions for this class of games are obtained: the core, the Shapley value,  $\tau$ -value. The convexity of a two-stage game with pairwise interaction is proved.
2. For a special class of symmetric networks (for a star-network) - a simplified formula for calculating the components of the Shapley value is obtained, and conditions for strongly time consistency of the core are obtained.
3. For the first time multistage cooperative games with pairwise interaction are considered. An approach to the definition of the characteristic function is proposed and its properties are investigated. For this class of games, an analogue of the core is constructed and its strongly time consistency is proved.
4. Alternative approaches to the construction of the characteristic function for games with pairwise interaction are considered. Their advantages and disadvantages are described.

5. For non-zero sum games on networks based on games with pairwise interaction, a new characteristic function is constructed, which has a lower computational complexity in relation to the classical one, and its supermodularity is proved. The IDP-core is constructed and its strongly time consistency is proved.

**Practical relevance of the study.** The results obtained in the dissertation are of practical interest. Cooperative network games with pairwise interaction, as well as their various variations, are a convenient mathematical tool for describing the processes taking place in the economy, logistics, and other spheres of human activity.

**Approbation of work:** The main results of the dissertation work were presented at the following scientific conferences: international conference «Stability and oscillations of nonlinear control systems» (Pyatnickii' conference), Moscow, 2016, 2018; international conference «Game theory and management», Saint-Petersburg, 2016, 2017; international workshop on network games «Networking Games and Management», Petrozavodsk, 2016; international conference «Stability and control processes», Saint-Petersburg, 2015; international conference «Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics», Saint-Petersburg, 2017; international conference «GameNets 2018 - 8th EAI International Conference on Game Theory for Networks», 2018, Seoul, South Korea; international scientific conference of undergraduate and graduate students «Stability and control processes», 2018, 2021, Saint-Petersburg.

Based on the results of the dissertation, the following works were published: [1]-[6], [22]-[23], [41]-[42]. Of them [1]-[4], [22]-[23], [41]-[42] published in peer-reviewed journals from the list of the Higher Attestation Commission.

**Scientific and information base of the thesis research.** In the course of the research, the author relied on the scientific research methodology, generally accepted rules and approaches to research activities in the field of applied mathematics, methods of optimization theory, graph theory and game theory. All statements, lemmas and theorems put forward in the course of the research are provided with

rigorous mathematical proofs.

**Contents of the thesis.** The dissertation consists of an introduction, four chapters, divided into sections, conclusions and a list of used literature, including 49 titles. The volume is 103 typewritten pages. The work contains 12 figures and 8 tables.

In the **first chapter** the formulation of the problem of pairwise interaction is given on the example of a two-stage network game, where at the first stage a network is formed whose vertices are the players, and the edges are the connections between the players. At the second stage, simultaneous bimatrix games take place between neighbors on the network, i.e. between the end vertices of one edge. In the second section, a characteristic function is constructed for the cooperative form of a two-stage game with pairwise interaction and its properties are investigated. In the third section, it is shown that the characteristic function for the subgame starting from the second step possesses the supermodularity property, which guarantees that the Shapley value belongs to the core, and the corresponding game is convex. In this regard, the worth of the Shapley value as a solution for this class of games is significantly increased. In the fourth section, the Shapley value is considered and some simplification of the formula for calculating its components is given. The fifth paragraph discusses an alternative solution,  $\tau$ -value and the coefficient at the his components is calculated. The paper proves that this coefficient does not depend on the structure of the network and the number of interactions of players between each other. In the sixth section, some particular types of networks and the peculiarities of the influence of the geometry of the network on the construction of the characteristic function are considered. Solutions for such networks are built and their properties are investigated. In the seventh section, a two-stage three-person game is considered, for which conditions for the strongly time consistency of the core are derived.

In **second chapter** of the thesis, a generalization of the results obtained in the first chapter for the case of two-stage games for multistage games is given. A new characteristic function is presented that has the supermodularity property

and is more convenient for solving multistage games with pairwise interaction. New optimality principle obtained in work [8], is adapted for the case of pairwise interaction and its strongly time consistency is proved. The construction of the characteristic function and the optimality principle (a subset of the core) is clearly demonstrated by a numerical example.

In **third chapter** alternative methods of constructing the characteristic function are considered and their comparative analysis with the classical method of constructing the characteristic function is presented. A subset of the core is also constructed using one of the proposed characteristic functions and its strongly time consistency is proved. The difference in approaches to the construction of characteristic functions and the advantages of each of them are illustrated with an example.

In **fourth chapter** the results obtained for multi-stage network games with pairwise interaction are generalized to the case of non-zero sum games. On the basis of the principles of trampled interaction, the characteristic function is constructed in a way that has a lower computational complexity in relation to the classical one, and its properties are investigated. As an optimality principle, we consider the subset of the core, so-called IDP-core [7], [39] and its strongly time-consistency is proved.

In **conclusion** summarizes the results of the study and presents the main results obtained in the work.

In the dissertation work, double numbering of formulas is used. The first digit means the number of the chapter in which the formula is defined, the second - the number of the formula in the chapter. For theorems, lemmas, propositions, remarks and corollaries, double numbering is also used, where the first digit denotes the chapter number, and the second denotes the number of the formula in the chapter. Sections are numbered double, where the first digit is the chapter number, the second is the chapter number in the chapter. Some sections have semantic sub-clauses and are not numbered. Examples are provided at the end of the chapter and are also not numbered. The list of references contains 47 titles and is given in alphabetical order.

**Main results, submitted to the defense.** In the course of the study, the following scientific results were obtained, submitted to the defense:

1. For the first time, a cooperative form of network games with pairwise interaction, a defined characteristic function is described, its properties are investigated, and cooperative solutions for this class of games are obtained: the core, the Shapley value,  $\tau$ -value. The convexity of a two-stage game with pairwise interaction is proved.
2. For a special class of symmetric networks (for a star-network) - a simplified formula for calculating the components of the Shapley value is obtained, and conditions for strongly time consistency of the core are obtained.
3. For the first time multistage cooperative games with pairwise interaction are considered. An approach to the definition of the characteristic function is proposed and its properties are investigated. For this class of games, an analogue of the core is constructed and its strongly time consistency is proved.
4. Alternative approaches to the construction of the characteristic function for games with pairwise interaction are considered. Their advantages and disadvantages are described.
5. For non-zero sum games on networks based on games with pairwise interaction, a new characteristic function is constructed, which has a lower computational complexity in relation to the classical one, and its supermodularity is proved. The IDP-core is constructed and its strongly time consistency is proved.

# Глава 1

## Two-stage bimatrix games with pairwise interactions

In this chapter cooperative two-stage games with pairwise interactions will be considered. The main point of these games is way of interaction between players during gameplay. The network may be given, or formed on the first stage of game (for example, under the assumption that the total payoff of the players is maximized). On the second stage (first stage with games) simultaneous bimatrix games between neighbours by network take places. Players can cooperate with each other, and as a result of such cooperation receive a non-zero payoff if they are connected by the edges of the network. This model is easy to generalize later to multistage games, which will be done in Chapter 2.

### 1.1 The model

Let  $N$  be a finite set of players, which make decisions in two stages,  $|N| = n \geq 2$ . Denote state of game by  $z$ . The game starts in state  $z_1$ , where every player  $i \in N$  choose his behavior  $b_i^1 = (b_{i1}^1, \dots, b_{in}^1)$  —  $n$ -dimensional vector of communication offers to other players [14].

The following notations will be used:  $M_i \subseteq N \setminus \{i\}$  — those players, whom player  $i \in N$  can offer a link, while the value  $a_i \in \{0, \dots, n - 1\}$  is maximal number of connections, which he can support at the same time. If  $M_i = N \setminus \{i\}$ , then it means,



that player  $i$  can offer links to all players. In the case, when  $a_i = n - 1$ , player  $i$  can support any number of connections.

For every behavior  $b_i^1$  there exist such subset of realized link offers  $Q_i \subset M_i$ , which satisfy following conditions

$$b_{ij}^1 = \begin{cases} 1, & \text{if } j \in Q_i, \\ 0, & \text{in other case,} \end{cases} \quad (1.1)$$

under this additional restriction

$$\sum_{j \in N} b_{ij}^1 \leq a_i. \quad (1.2)$$

Condition (1.2) means, that the number of possible links is restricted for every player. Also, obviously, that  $|Q_i| \leq a_i$ .

Link  $ij$  will be realized if and only if when  $b_{ij}^1 = b_{ji}^1 = 1$ . Formed links  $ij$  will create edges of network  $g$ , which has players as vertices, i.e., if  $b_{ij}^1 = b_{ji}^1 = 1$ , then network  $g$  will has an edge with vertices  $i$  и  $j$ .

Denote as  $N_i(g)$  neighbours of player  $i$  in network  $g$ , i.e.  $N_i(g) = \{j \in N \setminus \{i\} : ij \in g\}$ . Further, for brevity, sometimes instead of  $N_i(g)$  will be wrote  $N_i$ . The result of the choice of players in the first state is the network  $g(b_1^1, \dots, b_n^1)$ . After its formation, the players go to the state  $z_2(g)$ , which is determined by the network (the set of neighbors depends on the network  $N_i$  and hence the rule of interaction between players). In second state  $z_2(g)$ , neighbors on the network play in pairs in simultaneous bimatrix games, after which the players receive payoffs and the game ends. In other words, a two-stage game  $\Gamma_{z_1}(g)$  is takes place, which is a special case of multi-stage non-zero sum games. Adapting the definition of strategies to this case, it is assumed that in the case under consideration, the strategy is a rule that for each player determines the set of his “desired” neighbors in the first state, namely, the vector  $b_i^1$ , and behavior in each bimatrix game in the second state in accordance with

the network that is formed in the first state, —  $b_i^2$ . Denote as  $u_i = (b_i^1, b_i^2)$ ,  $i \in N$ , strategy of player  $i$  in two-stage game  $\Gamma_{z_1}(g)$ . Let's calculate the player's payoff  $i$  as  $h_i(z_2)$ , where  $(z_1, z_2)$  — trajectory realized by strategy profile  $u = (u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot))$  in game  $\Gamma_{z_1}(g)$ . Since in the first state the players do not receive winnings, the payoff function in the game  $\Gamma_{z_1}(g)$  with starting position  $z_1$  is defined as follows:

$$K_i(z_1; u) = K_i(z_1; u_i(\cdot), \dots, u_n(\cdot)) = h_i(z_2).$$

## 1.2 Construction of characteristic function

In the second state, the game is a family of pairwise simultaneous bimatrix games  $\{\gamma_{ij}\}$  between neighbours by network. Namely, let  $i \in N$ ,  $j \in N_i$ . Then player  $i$  play with  $j$  in bimatrix game  $\gamma_{ij}$  with payoff matrices  $A_{ij}$  and  $C_{ij}$  of players  $i$  and  $j$  correspondingly.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij} & a_{12}^{ij} & \cdots & a_{1k}^{ij} \\ a_{21}^{ij} & a_{22}^{ij} & \cdots & a_{2k}^{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{ij} & a_{m2}^{ij} & \cdots & a_{mk}^{ij} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11}^{ij} & c_{12}^{ij} & \cdots & c_{1k}^{ij} \\ c_{21}^{ij} & c_{22}^{ij} & \cdots & c_{2k}^{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}^{ij} & c_{m2}^{ij} & \cdots & c_{mk}^{ij} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

$$a_{pl} \geq 0, \quad c_{pl} \geq 0, \quad p = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, k.$$

Constants  $m$  and  $k$  are similar for all  $i$  and  $j$ . When the game  $\gamma_{ji}$  is take place, i.e. player  $i$  is the second player, then he plays with the matrix  $C_{ji}$  which is equal to  $A_{ij}^T$ , and player  $j$ , who is now the first player to play with the payoff matrix  $A_{ji}$ ,

or, equivalently,  $C_{ij}^T$ . Denote as  $\Gamma_{z_2}^S(g)$  subgame of game  $\Gamma$ , which happens in the state  $z_2$ . Consider such game in a cooperative form. Let us find the characteristic function for each subset (coalition)  $S \subset N$  as the lower (maximin) value of the antagonistic of two persons game in the coalition  $S$  and additional coalition  $N \setminus S$ , game-based  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ , in this case, the gain of the coalition  $S$  is considered as the sum of the payoffs of the players included in  $S$ . The superadditivity of the characteristic function follows from its definition. Following notations are assumed

$$w_{ij}^i = \max_p \min_\ell a_{p\ell}^{ij}, \quad p = 1, \dots, m; \quad \ell = 1, \dots, k, \quad (1.5)$$

$$w_{ij}^j = \max_\ell \min_p c_{p\ell}^{ji}, \quad p = 1, \dots, m; \quad \ell = 1, \dots, k, \quad (1.6)$$

and  $v(z_2; S)$ ,  $S \subset N$ , — lower value of zero-sum game  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ .

**Lemma 1.1** *Function  $v(z_2; S)$  calculated by following formulas:*

$$v(z_2; \{\emptyset\}) = 0, \quad (1.7)$$

$$v(z_2; \{i\}) = \sum_{j \in N_i} w_{ij}^i, \quad (1.8)$$

$$v(z_2; S) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i \cap S} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}) + \sum_{i \in S} \sum_{k \in N_i \setminus S} w_{ik}^i, \quad S \subset N, \quad (1.9)$$

$$v(z_2; N) = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}). \quad (1.10)$$

**Proof.** Formula (1.7) is obvious. Prove (1.8). Since the player  $i$ , acting against the coalition  $N \setminus \{i\}$ , play with players  $j$  from  $N \cap N_i$  into independent bimatrix games, then in each of these bimatrix games he can guarantee himself the greatest payoff  $w_{ij}^i$ , hence the greatest payoff that the player  $i$  can guarantee itself in the whole game, there is an amount  $\sum_{j \in N_i} w_{ij}^i$ . In this case, this is the maximin value  $i$  against  $N \setminus \{i\}$ . The formula (1.8) is correct.

Prove the formula (1.9) for any coalition  $S$ . Every player from coalition  $S$  plays independent pairwise bimatrix games as with players entering in  $N_i \cap S$ , so with the players  $N_i \cap \{N \setminus S\}$ . In the first case, the players interacting inside  $S$ , can always choose a strategy, which maximize their total payoff, i.e.,  $\sum_{j \in N_i \cap S} \max_{p,\ell} (a_{pl}^{ij} + c_{pl}^{ji})$ . In the second case players, who interacting with players from  $N \setminus S$  can guarantee themselves only the lower value of the game, i.e. the value  $\sum_{k \in N_i \setminus S} w_{ik}^i$ . Hence, maximal total payoff, which can get coalition  $S$ , will be equal to

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i \cap S} \max_{p,\ell} (a_{pl}^{ij} + c_{pl}^{ji}) + \sum_{i \in S} \sum_{k \in N_i \setminus S} w_{ik}^i.$$

Formula (1.10) follows from definition of maximal total payoff of players.

In formulas (1.9) and (1.10) coefficient  $\frac{1}{2}$  need to exclude repeated summing of payoffs over the same edges. Lemma is proved.

Consider the cooperative form of two-stage game  $\Gamma_{z_1}(g)$ . Let it be supposed, that players choose strategies  $\bar{u}_i, i \in N$ , which maximize their total payoff in game  $\Gamma_{z_1}(g)$ , i. e.

$$\sum_{i \in N} K_i(z_1; \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) = \max_u \sum_{i \in N} K_i(z_1; u_1, \dots, u_n)$$

Situation  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$  we will call cooperative behavior, corresponding trajectory  $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  — cooperative trajectory, which content two states in this case.

As previous, for coalition  $S \subseteq N$  define characteristic function  $v(\bar{z}_1; S)$  as a lower value in two player zero-sum game between coalition  $S$ , which plays as first (maximizing) player and additional coalition  $N \setminus S$ , which plays as (minimizing) player. In this case, the best behavior on the first stage for minimizing player is to do not create connections with players from coalition  $S$ . This will reduce the payoff of coalition  $S$  on a value  $\sum_{i \in S} \sum_{k \in N_i \setminus S} w_{ik}^i$ . Let's keep in mind that here the coalition  $S$  payoff also equal to summarized payoff of its members and the strategy of  $S$  — element of the Cartesian product of the sets of strategies of the players included in  $S$ .

Denote as  $v(z_1; S)$ ,  $S \subset N$ , lower value of zero-sum game  $\Gamma_{z_1}(g)$ .

**Theorem 1.1** *Function  $v(z_1; S)$  defines by following expressions:*

$$v(z_1; \{i\}) = 0, \quad v(z_1; \emptyset) = 0, \quad (1.11)$$

$$v(z_1; S) = \max_g \left( \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g) \cap S} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}) \right), \quad S \subset N, \quad (1.12)$$

$$v(z_1; N) = v(\bar{z}_2; N) = \max_g \left( \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}) \right). \quad (1.13)$$

**Proof.** The proof is similar to that of the lemma 1.1, but here in (1.12), in a difference from (1.9) the second term is missing. It is equal to zero, because of minimizing strategy  $b_i^1$  of players from  $N \setminus S$  in the first stage is to do not connections with players from  $S$ . It follows from non-negativity of payoffs in all games. The theorem is proved.

### 1.3 Convexity of game

It is needed to give the definition of a convex game and a supermodular characteristic function [44].

**Definition 1.1** *Characteristic function is called supermodular, and corresponding game is called convex, if for any coalitions  $X \subset N$  and  $Y \subset N$  holds the inequality*

$$v(X \cup Y) \geq v(X) + v(Y) - v(X \cap Y). \quad (1.14)$$

**Theorem 1.2** *The subgame  $\Gamma_{z_2}^S(g)$  is convex, and corresponding characteristic function (1.8)-(1.10) is supermodular.*

**Proof.** To prove the theorem inequality (1.14) should be checked for characteristic function (1.8)-(1.10). To shorten the notation, instead of  $\max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji})$  will be

written  $m_{ij}$ . Following expressions are take places

$$v(X \cup Y) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in X \cup Y \\ j \in N_i \\ i \neq j}} m_{ij} + \sum_{\substack{i \in X \cup Y \\ k \in N_i \setminus X \cup Y}} w_{ik}^i, \quad (1.15)$$

$$v(X) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in X \\ j \in N_i \\ i \neq j}} m_{ij} + \sum_{\substack{i \in X \\ k \in N_i \setminus X}} w_{ik}^i, \quad (1.16)$$

$$v(Y) = \sum_{\substack{i \in Y \\ k \in N_i \setminus Y}} w_{ik}^i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in Y \\ j \in N_i \\ i \neq j}} m_{ij}, \quad (1.17)$$

$$v(X \cap Y) = \sum_{\substack{i \in X \cap Y \\ j \in X \cap Y \\ i \neq j \\ j \in N_i}} m_{ij} + \sum_{\substack{i \in X \cap Y \\ k \in N_i \setminus X \cap Y}} w_{ik}^i, \quad (1.18)$$

Subtracting from (1.15) expression (1.16),(1.17) and adding (1.18), we will get an inequality

$$\sum_{\substack{i \in X \setminus Y \\ j \in N_i \setminus X}} m_{ij} \geq 0,$$

which follows from the non-negativity of the payoffs, and, therefore, holds in the game  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ . The theorem is proved.

**Theorem 1.3** *Two-stage game with pairwise interaction  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  is convex, and corresponding characteristic function (1.12)-(1.13) is supermodular.*

**Proof.** Proof of this theorem is completely similar to the proof of supermodularity characteristic function for subgame. Due to the absence in the characteristic function (1.12)-(1.13) additional terms  $w_{ij}^i$ , in the above calculations, they can be replaced by zero and get the same result. Theorem is proved.

Thus, constructed characteristic function  $v(z_1; S)$  in two-stage game  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  is supermodular. This guarantees that the core in game  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  is nonempty that the Shapley value belongs to the core. Similar properties are satisfied by the characteristic

function  $v(z_2; S)$  in subgame  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ , which starts from the second stage.

## 1.4 The Shapley value

Due to the properties described above, in this class of games the importance of the Shapley value as a solution to a cooperative game is significantly increases. Therefore, further as a solution of two-stage cooperative network game with pairwise interaction  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  the Shapley value will be considered. Method for calculating the characteristic function (1.12) suggests that the formula for calculating the components of the Shapley value can be simplified.

The reasoning will be split into three cases:

- a) complete network, when every player has a connection with all other players (every player has  $n-1$  connections);
- b) incomplete network with any number of connections for every player;
- c) the case of subgame  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ .

**a) Complete network.** In this case,  $M_i = N \setminus \{i\}$  for every  $i \in N$ . Moreover, when calculating the value  $v(S)$  will be used formula (1.12). Component of the Shapley value for player  $i$  calculated as follows [45]:

$$\varphi_i[v] = \sum_{T|i \in T \subset N} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} [v(T) - v(T \setminus i)]. \quad (1.19)$$

It should be noted, that in (1.19), in term with fixed number of members in coalition ( $t$ ), the term  $\max_{p,\ell}(a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji})$  will meet exactly  $C_{n-2}^{t-2}$  times. Furthermore, difference  $v(T) - v(T \setminus i)$  can be transformed as this:

$$v(T) - v(T \setminus i) = \frac{1}{2} \sum_{k \in T, j \in T} \frac{1}{2} \max_{p,\ell}(a_{p\ell}^{kj} + c_{p\ell}^{jk}) - \frac{1}{2} \sum_{j \in T \setminus \{i\}, k \in T \setminus \{i\}} \max_{p,\ell}(a_{p\ell}^{kj} + c_{p\ell}^{jk}) =$$

$$= \sum_{j \in T} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}).$$

The following expression will be occurred as a result:

$$\varphi_i[v] = \sum_{T|i \in T \subset N} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \cdot C_{n-2}^{t-2} \cdot \sum_{j \in T} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}).$$

And, after simplification, it turns out:

$$\varphi_i[v] = \sum_{j \in N} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}) \cdot \sum_{t=2}^n \frac{t-1}{n \cdot (n-1)}, \quad (1.20)$$

$$\varphi_i[v] = \sum_{j \in N} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}) \cdot \left( \frac{1}{n \cdot (n-1)} + \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{(n-1)}{2}.$$

The final form of the formula for the Shapley value components for player  $i$ :

$$\varphi_i[v] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j \in N} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}). \quad (1.21)$$

**b) incomplete network.** Now the players are not necessarily all connected to each other, and sets  $M_i$  for different players  $i$  in general case is not coincide. Then number of neighbours fro every player (set  $N_i(g)$ ) depend from  $i$ .

Formula of components for the Shapley value in this case takes form:

$$\varphi_i[v] = \sum_{t=2}^n \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \cdot \sum_{T \ni i, j \in N_i \cap T} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}), \quad T \subset N, \quad |T| = t. \quad (1.22)$$

Despite the need to calculate the coefficient  $\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}$ , this formula is more simple in terms of operational and time complexity compared to (1.19), because of does not require calculating values of characteristic function, but only values  $\max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji})$ .

**c) The case of subgame  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ .** Simplification of the formula for the components



of the Shapley vector for the case of subgame  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ , starting from the second stage of the game is also possible by calculating the difference  $v(T) - v(T \setminus i)$ . Using formulas for calculating the characteristic function of the subgame  $\Gamma_{z_2}^S(g)$  (1.9)-(1.10), you can get the following expression:

$$\begin{aligned} v(z_2; T) - v(z_2; T \setminus i) &= \frac{1}{2} \sum_{j \in T} \sum_{k \in N_j \cap T \setminus \{i\}} \max_{p,l} (a_{pl}^{jk} + c_{p,l}^{kj}) + \sum_{r \in N_i \cap T} \max_{p,l} (a_{pl}^{ir} + c_{p,l}^{ri}) + \\ &+ \sum_{j \in T} \sum_{k \in N_j \setminus T} \omega_{jk}^j + \sum_{r \in N_i \setminus T} \omega_{it}^i - \left( \frac{1}{2} \sum_{j \in T} \sum_{k \in N_i \cap T \setminus \{i\}} \max_{p,l} (a_{pl}^{jk} + c_{p,l}^{kj}) + \sum_{j \in T} \sum_{k \in N_j \setminus T} \omega_{jk}^j + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \in T} \omega_{ji}^j \right). \end{aligned}$$

After expanding the brackets and cancelling identical terms with the opposite sign, the following is obtained:

$$v(z_2; T) - v(z_2; T \setminus i) = \sum_{r \in N_i \cap T} \max_{p,l} (a_{pl}^{ir} + c_{p,l}^{ri}) + \sum_{r \in N_i \setminus T} \omega_{it}^i - \sum_{j \in T} \omega_{ji}^j.$$

In this formula, on the right-hand side, the first two terms characterize the contribution of player  $i$ , when he is a member of coalition  $T$ , and the term with negative sign  $-$  is a value, received by the coalition  $T$ , when player  $i$  is a member of coalition  $T \setminus \{i\}$  and acted against  $T$ .

Then the final formula for the components of the Shapley value for the case of subgame is as follows:

$$\varphi_i[v] = \sum_{t=2}^n \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \cdot \sum_{T \ni i} \left[ \sum_{r \in N_i \cap T} \max_{p,l} (a_{pl}^{ir} + c_{p,l}^{ri}) + \sum_{r \in N_i \setminus T} \omega_{it}^i - \sum_{j \in T} \omega_{ji}^j \right],$$

$$|T| = t, T \subset N.$$

## 1.5 The $\tau$ -value

Now consider as a solution of two-stage game  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  the  $\tau$  value [46], [48]. Taking into account the special form of the characteristic function in the game  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ , it can be assumed that the coefficient  $\lambda$  in the formula of components of  $\tau$  value can be calculated, which would greatly simplify the search for this solution in the considered class of games.

**Proposition 1.1** *For two-stage network game with pairwise interactions  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ , coefficient  $\lambda$  for calculation components of  $\tau$  value is equal to  $\frac{1}{2}$ :*

$$\tau_i(N, v(z_1, N)) = \frac{1}{2} [v(z_1, N) - v(z_1, N \setminus \{i\})]$$

**Proof.** The value of characteristic function for any coalition  $S$  in case of two-stage network game with pairwise interactions calculate in following way:

$$v(z_1; \{i\}) = 0, \quad v(z_1; \emptyset) = 0, \quad (1.23)$$

$$v(z_1; S) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i \cap S} \max_{p, \ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji}), \quad S \subset N, \quad (1.24)$$

To shorten the writing of expressions, further will be adopted a similar to the paragraph 1.3 notation — instead of  $\max_{p, \ell} (a_{p\ell}^{ij} + c_{p\ell}^{ji})$  will be written just  $m_{ij}$ . Taking into account this notation, following value of characteristic function for any arbitrary coalition  $S$  can be obtained:

$$v(z_1; S) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i \cap S} m_{ij}, \quad S \subset N,$$

The formula of calculating components of  $\tau$  value for convex game:

$$\tau_i(N, v) = \lambda(v(N) - v(N \setminus \{i\})) + (1 - \lambda)v(\{i\}),$$

when coefficients  $\lambda$  are determined from the equation

$$\sum_{j \in N} (\lambda((v(N) - v(N \setminus \{j\})) + (1 - \lambda)v(\{j\}))) = v(N).$$

According to the values of characteristic function (1.23)-(1.24), term  $(1 - \lambda)v(\{j\})$  is equal to zero.

Thus, for two-stage game with pairwise interactions  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  we obtain the following formula for calculating components of  $\tau$  value:

$$\tau_i(N, v(z_1, N)) = \lambda(v(z_1, N) - v(z_1, N \setminus \{i\})), \quad (1.25)$$

when coefficients  $\lambda$  are determined from the equation

$$\sum_{j \in N} \lambda(v(z_1, N) - v(z_1, N \setminus \{j\})) = v(z_1, N). \quad (1.26)$$

Next, it is needed to calculate the value of the difference  $v(z_1, N) - v(z_1, N \setminus \{j\})$ . As mentioned earlier, in the case of a two-stage network game with pairwise interaction, due to the method of defining the characteristic function for the players from the coalition  $S$  it is beneficial not to create connections with the coalition  $N \setminus S$ . Therefore, the difference between the coalition  $N$  and  $N \setminus \{j\}$  will be only in connections, created by player  $j$  and his neighbours from coalition  $N$ . It is follow from this that

$$v(z_1, N) - v(z_1, N \setminus \{j\}) = \sum_{i \in N_j} m_{ji}.$$

Returning to the equation (1.26), and substituting into it the values of the characteristic function for the coalition  $v(z_1, N)$  and the differs calculated above, it can be obtained that

$$\sum_{j \in N} \lambda \left( \sum_{i \in N_j} m_{ji} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} m_{ij}. \quad (1.27)$$

Also coefficient  $\lambda$  can be take out for a sign of sum, because coefficient  $\lambda$  does not

depend from players' actions and their payoffs.

$$\lambda \sum_{j \in N} \left( \sum_{i \in N_j} m_{ji} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} m_{ij}. \quad (1.28)$$

Canceling the same factors on the right and left sides of the equation, it turns out:

$$\lambda = \frac{1}{2}. \quad (1.29)$$

Thus, in a two-stage cooperative network game with pairwise interaction  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ , coefficient  $\lambda$  in solution  $\tau$  value is equal to  $\frac{1}{2}$ , and does not depend on the number of players, or on the number of connections between them, or on the structure of the network. The statement is proved.

**Proposition 1.2** *In two-stage game with pairwise interactions  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  on complete network the  $\tau$  value and the Shapley value are coincide.*

**Proof.** Earlier, a simplified formula for the components of the Shapley value was obtained for a two-stage cooperative game with pairwise interaction  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  on complete network:

$$\varphi_i[v] = \frac{1}{2} \sum_{j \in N} m_{ij}.$$

An expression can be obtained for  $\tau$  value on similar network. It was proved above, that coefficient  $\lambda = \frac{1}{2}$  for all type of networks. Substituting the found coefficient into the formula for calculating the  $\tau$  value, it can be received:

$$\tau_i(N, v) = \frac{1}{2}(v(N) - v(N \setminus \{i\})) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)v(\{i\}).$$

It was shown earlier, that in two-stage game value of characteristic function for single player  $v(z_1; \{i\}) = 0$ . Taking this into account it turns out the following:

$$\tau_i(N, v) = \frac{1}{2}(v(N) - v(N \setminus \{i\})).$$

In the previous paragraph, the value of the difference mentioned in the formula has already been calculated:

$$v(N) - v(N \setminus \{j\}) = \sum_{i \in N_j} m_{ji}.$$

Since in this case a complete network is considered, then  $N_j$  — set of neighbours of player  $j$  is similar to set of all players, except  $j$ . Because of  $m_{ii} = 0$ , without loss of accuracy, one can write:

$$\tau_i(N, v) = \frac{1}{2} \sum_{j \in N} m_{ji},$$

which coincide with the Shapley value. Proposition is proved.

## 1.6 The case of special network: star-network

In this section, the specific structure of the network will be explored, as well as the solution of a two-stage cooperative game with pairwise interactions  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  on this network. Let consider the network, consist from  $n$  players, where player 1 is a hub, with  $n - 1$  connections, and all others  $n - 1$  players are satellites, which have only one connection with a hub, and have no connections between them.

### 1.6.1 The Shapley value

It should be noted, that cooperative form of game  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  was considered for the general case of pairwise interactions, when at the first stage of the game any arbitrary network can be formed. For this general case, analytical expressions were found for the characteristic function (1.8)-(1.10), (1.12) which are used to calculate the components of the Shapley value by the formula 1.19. Since calculating the Shapley value is a difficult task for a large number of players and an arbitrary

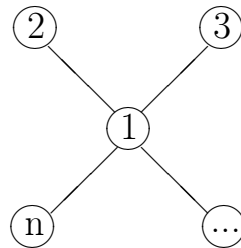
network, it will be shown below how to simplify the formula 1.19 for special type of network — star-network, and as for the game  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ , as for subgame  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ , started from the second stage. It was possible to obtain an analytical expression for the value of the Shapley value, which is much easier to interpret and analyse. It should be noted that to calculate the components of the Shapley value by the formula (1.19) it is necessary to list the values of the characteristic function for  $2^n$  subsets of set of players  $N$ ; in addition, for large networks, calculating the weighting coefficient is an extremely difficult task, because of number  $n!$  can be very big. However, for a star-network needs only  $O(n)$  calculations and there is no need to calculate all subsets of the set  $N$ , but only subsets of cardinality no more than 2.

It should also be noted that, since the Shapley value in the game  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  always belongs to the core (also as in subgame  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ ), because of convexity of games then its importance in this class of problems increases significantly.

Next, we describe the formalization of constructing a star-network at the first stage of the game. The following assumptions are made. Let  $M_1 = N \setminus \{1\}$ ,  $a_1 = n-1$  and  $M_i = \{1\}$ ,  $a_i = 1$  for  $i \neq 1$ . Then in the first stage of game, following the cooperative trajectory  $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ , in order to maximize the total payoff, players should choose the following behaviors:

$$b_i^1 = \begin{cases} (0, 1, \dots, 1), & i = 1, \\ (1, 0, \dots, 0), & i \neq 1. \end{cases} \quad (1.30)$$

Behavior (1.30) formed star-network on the first stage with player 1 as a hub (fig. 1), where  $|N_1| = n - 1$  и  $|N_i| = 1, i \neq 1$ .



**Figure 1.** Star-network with player 1 as a hub.

For star-network characteristic function on the second stage of game, i.e. in subgame  $\Gamma_{\bar{z}_2}^S(g)$  calculated taking into account the specific structure of the network. Transformed expressions (1.8)-(1.9) taking into account the received network:

$$v(\bar{z}_2; \{\emptyset\}) = 0, \quad (1.31)$$

$$v(\bar{z}_2; \{i\}) = \begin{cases} \sum_{j \neq i} w_{1j}, & i = 1, \\ w_{i1}, & i \neq 1. \end{cases} \quad (1.32)$$

$$v(\bar{z}_2; S) = \begin{cases} \sum_{j \in N_1 \cap S} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{1j} + c_{p\ell}^{j1}) + \sum_{k \in N_1 \setminus S} w_{1k}, & S \subset N, \quad i \in S, \\ 0, & i \notin S. \end{cases} \quad (1.33)$$

Similarly, one can transform the expressions for calculating the characteristic function in the two-stage game  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$  (1.11)-(1.12), taking into account the restrictions due to which this network is obtained:  $M_1 = N \setminus \{1\}$ ,  $a_1 = n - 1$  и  $M_i = \{1\}$ ,  $a_i = 1$  for  $i \neq 1$ .

$$v(\bar{z}_1; \{i\}) = 0, \quad v(\bar{z}_1; \emptyset) = 0, \quad (1.34)$$

$$v(\bar{z}_1; S) = \begin{cases} \sum_{j \in N_1 \cap S} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{1j} + c_{p\ell}^{j1}), & S \subset N, \quad i \in S, \\ 0, & i \notin S. \end{cases} \quad (1.35)$$

The network has a central symmetry, which suggests that the formula (1.19) can be simplify.

**Theorem 1.4** [41] *For star-network with player 1 as a hub in game  $\Gamma_{\bar{z}_t}^S(g)$  components of the Shapley value  $\varphi[v(\bar{z}_t)]$ ,  $t = 1, 2$ , representable in the form:*

$$\varphi_i[v(\bar{z}_t)] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ v(\bar{z}_t; \{1\}) + \sum_{j \neq 1} (m_{1j} - v(\bar{z}_t; \{j\})) \right], & i = 1, \\ \frac{1}{2} [v(\bar{z}_t; \{i\}) + m_{1i} - w_{1i}], & i \neq 1. \end{cases} \quad (1.36)$$

**Proof.** First, a proof of the expression (1.36) for subgame  $\Gamma_{\bar{z}_2}^S(g)$ . Let player  $i \in$

$S$ ,  $i \neq 1$  is fixed and his marginal contribution in coalition  $S$   $v(\bar{z}_2; S) - v(\bar{z}_2; S \setminus \{i\})$  is considered. Taking into account formulas (1.31)-(1.33) for characteristic function  $v(\bar{z}_2; \cdot)$ , we get that

$$v(\bar{z}_2; S) - v(\bar{z}_2; S \setminus \{i\}) = \begin{cases} m_{1i} - w_{1i}, & 1 \in S, \\ w_{i1}, & 1 \notin S. \end{cases}$$

Substituting the values of the characteristic function  $v(\bar{z}_2; S)$ , as well as the difference calculated above in the formula of the components of the Shapley value (1.19), for player  $i \neq 1$  the following expressions are obtained

$$\begin{aligned} \varphi_i[v(\bar{z}_2)] &= \sum_{S \subseteq N; i \in S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} \times [v(\bar{z}_2; S) - v(\bar{z}_2; S \setminus \{i\})] = \\ &= (m_{1i} - w_1^{1i}) \sum_{S \subseteq N; 1, i \in S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} + w_i^{i1} \sum_{S \subseteq N; i \in S; 1 \notin S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} = \\ &= (m_{1i} - w_1^{1i}) \sum_{|S|=2}^n \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} \binom{n-2}{|S|-2} + \\ &\quad + w_i^{i1} \sum_{|S|=1}^{n-1} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} \binom{n-2}{|S|-1} = \\ &= (m_{1i} - w_1^{1i}) \sum_{|S|=2}^n \frac{|S| - 1}{n(n-1)} + w_i^{i1} \sum_{|S|=1}^{n-1} \frac{n - |S|}{n(n-1)} = \frac{1}{2} [w_i^{i1} + m_{1i} - w_1^{1i}]. \end{aligned}$$

Following the efficiency property of the Shapley value, we immediately find that

$$\begin{aligned} \varphi_1[v(\bar{z}_2)] &= v(\bar{z}_2; N) - \sum_{i \neq 1} \varphi_i[v(\bar{z}_2)] = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} m_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} [w_i^{i1} + m_{1i} - w_1^{1i}] = \\ &= \sum_{i \neq 1} m_{1i} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} [w_i^{i1} + m_{1i} - w_1^{1i}] = \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} [w_1^{1i} + m_{1i} - w_i^{i1}]. \end{aligned}$$

Considering that  $v(\bar{z}_2; \{1\}) = \sum_{j \in N_1} w_1^{1j} = \sum_{i \neq 1} w_1^{1i}$  и  $v(\bar{z}_2; \{i\}) = \sum_{j \in N_i} w_j^{ij} = w_i^{i1}$ ,  $i \neq 1$ , expressions (1.36) fair to subgame  $\Gamma_{\bar{z}_2}^S(g)$ .



Now a proof of the formula (1.36) for game  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  will be given. Similarly, it is assumed that the player  $i \in S$ ,  $i \neq 1$  is fixed and his maximum contribution is considering  $v(\bar{z}_1; S) - v(\bar{z}_1; S \setminus \{i\})$  into coalition  $S$ . Using expressions (1.34)-(1.35) for characteristic function  $v(\bar{z}_1; S)$ , it turns out

$$v(\bar{z}_1; S) - v(\bar{z}_1; S \setminus \{i\}) = \begin{cases} m_{1i}, & 1 \in S, \\ 0, & 1 \notin S. \end{cases}$$

Substituting them into the formula for the components of the Shapley value (1.19), for player  $i \neq 1$  the following expression holds

$$\begin{aligned} \varphi_i[v(\bar{z}_1)] &= \sum_{S \subseteq N; i \in S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} [v(\bar{z}_1; S) - v(\bar{z}_1; S \setminus \{i\})] = \\ &= m_{1i} \sum_{S \subseteq N; 1, i \in S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} = m_{1i} \sum_{|S|=2}^n \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} \binom{n-2}{|S|-2} = \\ &= m_{1i} \sum_{|S|=2}^n \frac{|S| - 1}{n(n-1)} = \frac{m_{1i}}{2}. \end{aligned}$$

Again, following the efficiency property of the Shapley value, one can easily find the component of the Shapley value for hub:

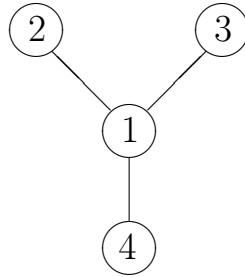
$$\begin{aligned} \varphi_1[v(\bar{z}_1)] &= v(\bar{z}_1; N) - \sum_{i \neq 1} \varphi_i[v(\bar{z}_1)] = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i} m_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} m_{1i} = \\ &= \sum_{i \neq 1} m_{1i} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} m_{1i} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} m_{1i}. \end{aligned}$$

It should be noted, that taking into account (1.11)-(1.13),  $v(\bar{z}_1; \{i\}) = 0$  for any player  $i \in N$ , hence the expression (1.36) holds for two-stage game  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ . Theorem is proved.

## Example

The game with four players,  $N = \{1, 2, 3, 4\}$  is considering. Taking into account the above assumptions, it is advantageous for the players in the first state to choose the behavior  $b_1^1 = (0, 1, 1, 1)$ ,  $b_2^1 = b_3^1 = b_4^1 = (1, 0, 0, 0)$ .

It turns out the star-network shown in the figure 2:



**Figure 2.** Star-network for four players with player 1 as a hub.

The following matrices are given:

$$A_{12}C_{21} = \begin{pmatrix} (3; 2) & (1; 4) \\ (2; 0) & (3; 1) \end{pmatrix}, \quad A_{13}C_{31} = \begin{pmatrix} (2; 4) & (1; 3) \\ (2; 3) & (3; 0) \end{pmatrix},$$

$$A_{14}C_{41} = \begin{pmatrix} (3; 2) & (1; 4) \\ (5; 0) & (2; 2) \end{pmatrix},$$

Values  $w_{ij}$  and  $m_{ij}$ :  $m_{12} = 5$ ,  $m_{13} = 6$ ,  $m_{14} = 5$ ,  $w_{12} = 2$ ,  $w_{21} = 1$ ,  $w_{13} = 2$ ,  $w_{31} = 3$ ,  $w_{14} = 2$ ,  $w_{41} = 2$ .

Calculation of the characteristic function for the subgame  $\Gamma_{z_2}^S(g)$ , using expressions (1.8)-(1.10):

$$\begin{aligned} v(z_2; \{\emptyset\}) &= 0, & v(z_2; \{1\}) &= 6, & v(z_2; \{2\}) &= 1, & v(z_2; \{3\}) &= 3, \\ v(z_2; \{4\}) &= 2, & v(z_2; \{12\}) &= 9, & v(z_2; \{13\}) &= 10, & v(z_2; \{14\}) &= 9, \\ v(z_2; \{23\}) &= 4, & v(z_2; \{34\}) &= 5, & v(z_2; \{24\}) &= 3, & v(z_2; \{234\}) &= 6, \\ v(z_2; \{123\}) &= 13, & v(z_2; \{124\}) &= 12, & v(z_2; \{134\}) &= 13, \\ v(z_2; \{1234\}) &= 16. \end{aligned}$$

Next, the characteristic function for the two-stage game is determined  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ , using expressions (1.11)-(1.13):

$$v(z_1; \{\emptyset\}) = 0, \quad v(z_1; \{1\}) = v(z_1; \{2\}) = v(z_1; \{3\}) = v(z_2; \{4\}) = 0,$$

$$v(z_1; \{12\}) = 5, \quad v(z_1; \{13\}) = 6, \quad v(z_1; \{14\}) = 5,$$

$$v(z_1; \{23\}) = v(z_1; \{24\}) = v(z_1; \{34\}) = 0,$$

$$v(z_1; \{234\}) = 0, \quad v(z_1; \{123\}) = 11, \quad v(z_1; \{124\}) = 10, \quad v(z_1; \{134\}) = 11,$$

$$v(z_1; \{1234\}) = 16.$$

Now one can calculate the value of the Shapley value for the subgame  $\Gamma_{z_2}^S(g)$  and two-stage game  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ :

$$\varphi[v(\bar{z}_2)] = (8; 2; 3.5; 2.5),$$

$$\varphi[v(\bar{z}_1)] = (8; 2.5; 3; 2.5).$$

For game  $\Gamma_{z_t}^S(g)$ ,  $t = 1, 2$  proved supermodularity property of characteristic function, from which it follows, that the Shapley value belongs to the core. Indeed, by the definition, the core in game  $\Gamma_{z_t}^S(g)$  — is a set of imputations  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , which satisfy conditions:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(\bar{z}_t; S), \quad \text{для всех } S \subset N, \quad (1.37)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = v(\bar{z}_t; N). \quad (1.38)$$

Substituting values of characteristic function (1.9)-(1.10), (1.11)-(1.13) and components of the Shapley value  $\varphi[v(\bar{z}_2)]$  and  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$  corresponding in conditions (1.37)-(1.38), we obtain the correct inequalities and the Shapley value  $\varphi[v(\bar{z}_t)]$  really belongs to the core in game  $\Gamma_{z_t}^S(g)$ .

### 1.6.2 Time-consistency of the Shapley value in star-network

Denote the set of all imputations in game  $\Gamma_{z_t}^S(g)$  as

$$\mathcal{M}[v(\bar{z}_t)] = \{x = (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i = v(\bar{z}_t; N), x_i \geq v(\bar{z}_t; \{i\}), i \in N\}$$

As a solution on the specified network, will be considered *the Shapley value* (1.19)  $\varphi[v(\bar{z}_t)] = (\varphi_1[v(\bar{z}_t)], \dots, \varphi_n[v(\bar{z}_t)])$ ,  $t = 1, 2$ ,

Following cooperative game theory, the maximum total payoff of all players  $v(\bar{z}_1; N)$  in case of cooperation, it must be divided among all players after the end of the game. To do this, the characteristic function  $v(\bar{z}_1; S)$  is used, according to which the imputation is determined as a vector  $\xi[v(\bar{z}_1)] = (\xi_1[v(\bar{z}_1)], \dots, \xi_n[v(\bar{z}_1)])$  which, firstly, it satisfies the efficiency condition, i.e.,  $\sum_{i \in N} \xi_i[v(\bar{z}_1)] = v(\bar{z}_1; N)$  and, secondly, the condition of individual rationality, i.e.,  $\xi_i[v(\bar{z}_1)] \geq v(\bar{z}_1; \{i\})$  for every  $i \in N$ . Let us denote the set of all divisions in the game  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  as  $\mathcal{M}[v(\bar{z}_1)]$ . Cooperative solution  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$ , is a rule, which maps the set  $\mathcal{M}[v(\bar{z}_1)]$  cooperative game  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ .

Before starting the game  $\Gamma_{z_1}^S(g)$ , players enter into a cooperative trajectory agreement  $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ , i.e., such trajectory, which leads to the maximum total payoff  $v(\bar{z}_1; N)$ , and it is assumed that the players share this payoff in accordance with the chosen imputation  $\xi[v(\bar{z}_1)]$  from the adopted cooperative solution  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$ . It means that in game  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  every player  $i \in N$  expects his payoff will be equal to  $\xi_i[v(\bar{z}_1)]$ . If the players recalculate the solution after network formation stage (at the second stage), this will lead to the fact that the recalculated set  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_2)]$  will differ from the previous  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$ . It happens because the characteristic function in the subgame  $\Gamma_{z_2}^S(g)$  is different. Thus, this change may lead to the fact that some of the players will leave the cooperative agreement and deviate from cooperative strategies. Next, a mechanism will be used that provides *consistency* against deviation from cooperative solution  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$ . Cooperative solution  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$  in two-stage game is

*time consistent* [9], if for any imputation  $\xi[v(\bar{z}_1)] \in \mathcal{M}[v(\bar{z}_1)]$  there exists imputation  $\xi[v(\bar{z}_2)] \in \mathcal{I}[v(\bar{z}_2)]$  such, that

$$\xi[v(\bar{z}_1)] = \xi[v(\bar{z}_2)], \quad (1.39)$$

since the players do not receive their payoffs at the network formation stage. Otherwise, the cooperative solution is time inconsistency. In the first case, the players follow the cooperative agreement without expecting any of them to deviate. In the second case, to prevent players from deviating from the cooperative agreement, we will use *imputation distribution procedure* (IDP),  $\beta = \{\beta_i^1, \beta_i^2\}_{i \in N}$  (introduced firstly in [13]) for imputation  $\xi[v(\bar{z}_1)] \in \mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$ , allowing to break it down into two game stages  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$ , i.e.,  $\xi_i[v(\bar{z}_1)] = \beta_i^1 + \beta_i^2$  for every  $i \in N$ . Here  $\beta_i^1$  can be interpreted as a payout to the player  $i$  on the network formation stage, and  $\beta_i^2$  — payment at the second stage of the game, based on a cooperative agreement. Thus, these payments (IDP) stimulate players to consciously adhere to their cooperative strategies throughout the game. IDP  $\beta$  for imputation  $\xi[v(\bar{z}_1)]$  will be called *time consistent*, when it is given as follows:

$$\begin{aligned} \beta_i^1 &= \xi_i[v(\bar{z}_1)] - \xi_i[v(\bar{z}_2)], \\ \beta_i^2 &= \xi_i[v(\bar{z}_2)], \quad i \in N, \end{aligned} \quad (1.40)$$

for any arbitrary imputation  $\xi[v(\bar{z}_2)] \in \mathcal{I}[v(\bar{z}_2)]$ .

After the introduction of time consistent IDP  $\beta$  (1.40) for imputation  $\xi[v(\bar{z}_1)] \in \mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$ , players can be sure that none of them deviates from the cooperative trajectory, therefore it will be implemented in the game and every player  $i \in N$  will receive  $\xi_i[v(\bar{z}_1)]$ , i.e. its expected payoff from the cooperative agreement.

In this section, we will consider the question of time consistency of the Shapley value in the particular star-network described above.

Based on the above definitions, we can conclude that the Shapley value  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$

is time consistent cooperative solution, if

$$\varphi[v(\bar{z}_1)] = \varphi[v(\bar{z}_2)], \quad (1.41)$$

**Proposition 1.3** *For star-network with player 1 as a hub the Shapley value is time consistent, when  $w_1^{1i} = w_i^{i1}$  for any player  $i \neq 1$ .*

**Proof.** By definition, the time consistency property of the Shapley value implies that  $\varphi[v(\bar{z}_1)] = \varphi[v(\bar{z}_2)]$  (see (1.41)). An expression for the components of the Shapley value is given (1.36) for game  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$  and its subgame  $\Gamma_{\bar{z}_2}^S(g)$ , started from the second stage. It is required to consider the differences in the Shapley value for some arbitrary player  $i \neq 1$  in single-stage and two-stage game:

$$\varphi_i[v(\bar{z}_1)] - \varphi_i[v(\bar{z}_2)] = \frac{m_{1i}}{2} - \frac{w_{i1}^i + m_{1i} - w_{1i}^1}{2} = \frac{w_{1i}^1 - w_{i1}^i}{2}.$$

Thus, if  $w_{1i}^1 = w_{i1}^i$  for any player  $i \neq 1$ , then condition (1.41) will be satisfied, what means time consistency of the Shapley value. Proposition is proved.

Conditions of time consistency  $w_{1i}^1 = w_{i1}^i$ ,  $i \neq 1$ , given in proposition 1.4 for star network can be interpret in following way: player 1, who is a hub, and any another player  $i \neq 1$  must have the same minimum guaranteed payoff (maxmin value) in bimatrix game  $\gamma_{1i}$  which they play, because of they are neighbours by network. If at least for one player  $j$  holds  $w_1^{1j} \neq w_j^{j1}$ , then the Shapley value will be time inconsistent. However, in the latter case, the cooperative agreement can be achieved at the expense of IDP (1.40) — imputation distribution procedure. By the definition,

**Definition 1.2** *Function  $\beta^i$ ,  $i \in N$  is called imputation distribution procedure (IDP)  $x \in \mathcal{M}[v(\bar{z}_1)]$  (see [13]), if*

$$x_i = \beta_i^1 + \beta_i^2, \quad i \in N. \quad (1.42)$$

Now the following result can formulated.

**Proposition 1.4** *For star-network with player 1 as a hub, time consistent IDP  $\beta = \{\beta_i^1, \beta_i^2\}_{i \in N}$  for Shapley value has form:*

$$\beta_i^1 = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} [w_i^{i1} - w_1^{1i}], & i = 1, \\ \frac{1}{2} [w_1^{1i} - w_i^{i1}], & i \neq 1, \end{cases} \quad (1.43)$$

*u*

$$\beta_i^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1} [w_1^{1i} + m_{1i} - w_i^{i1}], & i = 1, \\ \frac{1}{2} [w_i^{i1} + m_{1i} - w_1^{1i}], & i \neq 1. \end{cases} \quad (1.44)$$

**Proof.** This proposition immediately follows from direct substitution of the expressions above in (1.40), and additional using formula (1.36) for star-network. Proposition is proof.

From an economic point of view, it is preferable for players to have non-negative IDP, such that as a result of the expansion of the Shapley value into two stages of the game, each player receives his non-negative payments at any of two stages of the game. However, the imputation distribution procedure for the Shapley value mentioned in the last assumption can be non-negative only in the case when  $w_1^{1i} = w_i^{i1}$  for every  $i \neq 1$ . This equality leads to the time consistency of the Shapley value, which has already been discussed.

## Example

Below are three examples that demonstrate that the Shapley value chosen as an imputation in a cooperative two-stage game with pairwise interaction  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  can be both time consistent and time inconsistent. The first two examples show the time consistency of the Shapley value in the two most important classes of bimatrix games, and the third example shows the time inconsistency.

**[Prisoner's dilemma]** The case is considered when  $n$  players play the same bimatrix game  $\gamma_{ij}$  with their network neighbours, i.e.,  $A_{ij} = A$ ,  $B_{ij} = B$  for all

$i \in N, j \in N_i$  where

$$A = B^T = \begin{pmatrix} b & 0 \\ a+b & a \end{pmatrix}, \quad 0 < a < b.$$

Here  $b$  – the payoff of each of the connected players if they both choose the strategy “cooperate”, while while choosing a strategy “deviate” every player get  $a$ . As an example, consider the problem of data transmission in the network, the nodes of which must “coordinate” their actions and try to achieve a certain performance (for example, the number of packets sent, the profit from sending packets).

For this game, the expression for the maximin and minimax is used, from which it turns out that  $w_i^{ij} = w_j^{ij} = a$  and

$$m_{ij} = \begin{cases} 2b, & \text{if } i \text{ and } j \text{ are neighbours,} \\ 0, & \text{other,} \end{cases}$$

for any two players  $i, j \in N$ .

To find the Shapley value  $\varphi[v(\bar{z}_2)]$ , first, we define the characteristic function  $v(\bar{z}_2; S)$  for all  $S \subseteq N$ . Following (1.9), one can get it:

$$v(\bar{z}_2; S) = \begin{cases} 2b(n-1), & S = N, \\ 2b(|S|-1) + (n-|S|)a, & S \subset N, 1 \in S, \\ |S|a, & S \subset N, 1 \notin S, \\ 0, & S = \emptyset. \end{cases}$$

Using formula for the Shapley value (1.36) transformed for the star-network type, you can get:

$$\begin{aligned} \varphi_1[v(\bar{z}_2)] &= \frac{n-1}{2} [a + 2b - a] = b(n-1), \\ \varphi_i[v(\bar{z}_2)] &= \frac{1}{2} [a + 2b - a] = b, \quad i \neq 1. \end{aligned}$$



Similarly, to find the Shapley value  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$ , characteristic function  $v(\bar{z}_1; S)$  should be defined for all  $S \subseteq N$ . Following (1.12), can be establish:

$$v(\bar{z}_1; S) = \begin{cases} 2b(n-1), & S = N, \\ 2b(|S|-1), & S \subset N, 1 \in S, \\ 0, & S \subset N, 1 \notin S \text{ or } S = \emptyset. \end{cases}$$

Again, using formula for the Shapley value (1.36) converted to a star network, the following expressions are obtained for  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1[v(\bar{z}_1)] &= \frac{2b(n-1)}{2} = b(n-1), \\ \varphi_i[v(\bar{z}_1)] &= \frac{2b}{2} = b, \quad i \neq 1. \end{aligned}$$

By comparing  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$  and  $\varphi[v(\bar{z}_2)]$ , it can be seen that they coincide and this implies the property of time consistency for the Shapley value. It seems interesting that this result does not depend on the specific values  $a$  and  $b$ . The only limitation that must be met is  $0 < a < b$ , and it naturally follows from the definition of the game "prisoner's dilemma".

The time-consistency of the Shapley value can also be shown using the statement 1.2 instead of using straight calculations. Indeed, it was noted, that  $w_i^{i1} = w_1^{1i} = a$  for every  $i \neq 1$ , what means its time consistency.

**[Coordination game]** As previously, it is assumed that  $n$  plyers play a similar game  $\gamma_{ij}$  with its neighbours by network, but now they play coordination game, i.e.,  $A_{ij} = A, B_{ij} = B$  for all  $i \in N, j \in N_i$  where

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (a, b) & (0, 0) \\ (0, 0) & (c, d) \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d > 0, \quad a + b \geq c + d.$$

For this game, we use the expressions (2.3), (2.3), where does it come from, that

$w_i^{ij} = w_j^{ij} = 0$  and

$$m_{ij} = \begin{cases} a + b, & \text{если } i \text{ и } j \text{ соседи,} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

for two any players  $i, j \in N$ . Substituting these values into formula of components for the Shapley value (1.36), one can obtain the following expressions for the components of the Shapley value

$$\varphi_i[v(\bar{z}_1)] = \varphi_i[v(\bar{z}_2)] = \begin{cases} \frac{(n-1)(a+b)}{2}, & i = 1, \\ \frac{a+b}{2}, & i \neq 1, \end{cases}$$

which in turn implies the time consistency of the Shapley value in the coordination game.

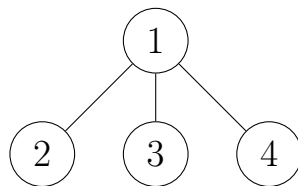
### [Example of inconsistency]

The following example will demonstrate the time inconsistency of the Shapley value.

Consider four person game  $N = \{1, 2, 3, 4\}$  in which players formed a star network under cooperative agreement (see fig. 3). Let simultaneous bimatrix games  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{13}$  and  $\gamma_{14}$  will be given by following payoff matrices:

$$(A_{12}, B_{12}) = \begin{pmatrix} (2, 2) & (3, 0) \\ (5, 1) & (1, 2) \end{pmatrix}, \quad (A_{13}, B_{13}) = \begin{pmatrix} (3, 1) & (4, 2) \\ (6, 2) & (2, 3) \end{pmatrix},$$

$$(A_{14}, B_{14}) = \begin{pmatrix} (1, 3) & (3, 2) \\ (6, 6) & (4, 1) \end{pmatrix}.$$



**Figure 3.** Star-network for four players.

To calculate components of the Shapley value  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$  и  $\varphi[v(\bar{z}_2)]$ , use corresponding formulas(1.8)- (1.10) for characteristic functions  $v(\bar{z}_2; S)$  and  $v(\bar{z}_1; S)$ , and simplified formula (1.36). We will get from here:

$$\begin{aligned} w_1^{12} &= 2, & w_1^{13} &= 3, & w_1^{14} &= 4, \\ w_2^{21} &= 1, & w_3^{31} &= 2, & w_4^{41} &= 3, \\ m_{12} &= 6, & m_{13} &= 8, & m_{14} &= 12, \end{aligned}$$

and therefore

$$\begin{aligned} v(\bar{z}_1; \{1\}) &= 0, & v(\bar{z}_2; \{1\}) &= 9, \\ v(\bar{z}_1; \{2\}) &= 0, & v(\bar{z}_2; \{2\}) &= 1, \\ v(\bar{z}_1; \{3\}) &= 0, & v(\bar{z}_2; \{3\}) &= 2, \\ v(\bar{z}_1; \{4\}) &= 0, & v(\bar{z}_2; \{4\}) &= 3, \\ v(\bar{z}_1; N) &= 26, & v(\bar{z}_2; N) &= 26. \end{aligned}$$

Thus, the following values of the Shapley value are obtained

$$\begin{aligned} \varphi[v(\bar{z}_1)] &= (13, 3, 4, 6), \\ \varphi[v(\bar{z}_2)] &= (29/2, 5/2, 7/2, 11/2). \end{aligned}$$

One can see that the Shapley value  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$  in two-stage game differs from the Shapley value  $\varphi[v(\bar{z}_2)]$  in one-stage game, started from the second stage. This means the time inconsistency of the Shapley value. Because  $\varphi_2[v(\bar{z}_2)] = 5/2 < \varphi_2[v(\bar{z}_1)] = 3$ , player 2 can break cooperative agreements because they receive less (it should be recalled that players do not receive payoffs at the stage of forming a network). Analogously it is true for player 3:  $\varphi_3[v(\bar{z}_2)] = 7/2 < \varphi_3[v(\bar{z}_1)] = 4$  and player 4:  $\varphi_4[v(\bar{z}_2)] = 11/2 < \varphi_4[v(\bar{z}_1)] = 6$ . However, the introduction of a time consistent IDP for the Shapley value  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$  defined by formulas (1.43), (1.44), allows to get:

$$\begin{aligned} \beta_1^1 &= -3/2, & \beta_2^1 &= 1/2, & \beta_3^1 &= 1/2, & \beta_4^1 &= 1/2, \\ \beta_1^2 &= 29/2, & \beta_2^2 &= 5/2, & \beta_3^2 &= 7/2, & \beta_4^2 &= 11/2, \end{aligned}$$

and therefore, realizing it, the cooperation of the players will be stable. Thus, getting  $\beta_i^1$  on the first stage and  $\beta_i^2$  on second stage, player  $i \in N$  will get  $\varphi_i[v(\bar{z}_1)]$  in two stages. That is, it is precisely the payoff that prescribes to the player a cooperative solution defined through the Shapley value  $\varphi[v(\bar{z}_1)]$ .

### 1.6.3 The core

In this paragraph will be considered *the core*  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$  as a cooperative solution  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$ , as well as the question of finding an explicit form of conditions for its time-consistency. The core  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$  of game  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$  defines as a set of such imputations  $\xi[v(\bar{z}_1)] \in \mathcal{M}[v(\bar{z}_1)]$ , which satisfy condition of collective rationality, i.e.,  $\sum_{i \in S} \xi_i[v(\bar{z}_1)] \geq v(\bar{z}_1; S)$  for all  $S \subset N$ .

In this section, the corresponding time consistency conditions for the star network will be derived. Let again  $M_1 = N \setminus \{1\}$ ,  $a_1 = n - 1$  and  $M_i = \{1\}$ ,  $a_i = 1$  for  $i \neq 1$ . As stated earlier, in order to maximize the overall payoff, players should choose their behavior (1.30) and form a star network at the first step with player 1 as a hub.

**Proposition 1.5** *For star network, the Shapley value, defined as (1.36) belongs to the core in both games – in game  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$  and in subgame  $\Gamma_{\bar{z}_2}^S(g)$ , thus, cores  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$  and  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  is not empty.*

**Proof.** The assertion immediately follows from the supermodularity of the characteristic functions  $v(\bar{z}_1; S)$  и  $v(\bar{z}_2; S)$ , which guarantees that the Shapley value belongs to the core. Proposition is proved.

Below we will formulate conditions for the time consistency of the core for a two-stage game with pairwise interaction  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$ .

**Proposition 1.6** *The core  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$  of two stage game  $\Gamma_{\bar{z}_2}^S(g)$  has the property of time consistency, if  $w_i^{ij} = 0$  for all players  $i$  and  $j$ .*

**Proof.** To begin with, it should be noted that for any coalition  $S \subseteq N$  holds  $v(\bar{z}_1; S) \leq v(\bar{z}_2; S)$ . This immediately implies the inclusion

$$\mathcal{C}[v(\bar{z}_2)] \subseteq \mathcal{C}[v(\bar{z}_1)].$$

This condition means that the C-core of the game will be time consistent when two characteristic functions coincide, i.e., when  $v(\bar{z}_1; S) = v(\bar{z}_2; S)$  for any  $S$  which in turn implies that  $w_i^{ij} = 0$  for all players  $i$  and  $j$ . Proposition is proved.

When the condition mentioned in the proposition 1.6, is not executed, the core of the game may be time inconsistent. However, the game allows another solution in the form of an analogue of the core, which always has the property of time consistency. Let  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)] = \mathcal{C}[v(\bar{z}_1)] \cap \mathcal{C}[v(\bar{z}_2)] \equiv \mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  in game and  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_2)] = \mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  in subgame and  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_2)] \neq \emptyset$ . Then one can get the following result.

**Proposition 1.7** *Solution in the form of an analogue of the core  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$  is strongly time consistent.*

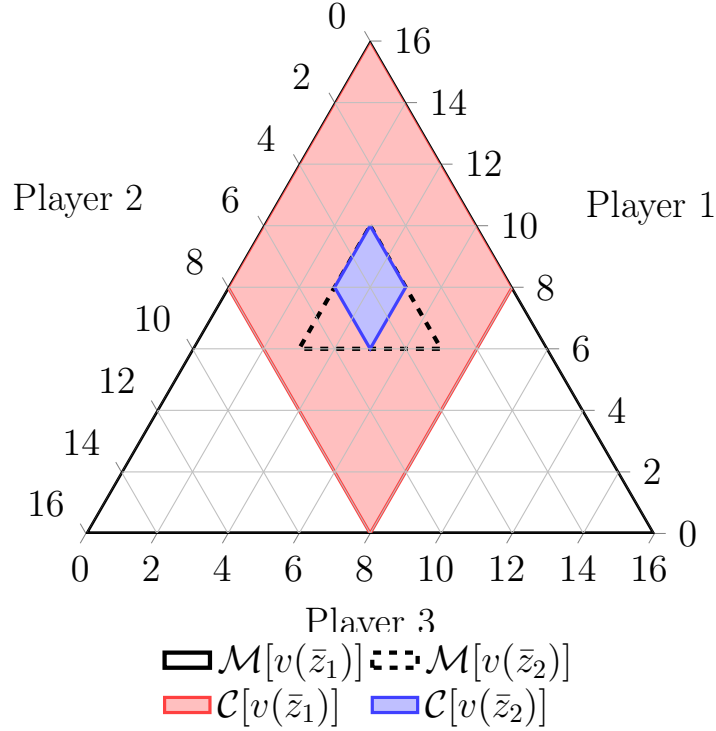
**Proof.** If  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_1)] = \mathcal{I}[v(\bar{z}_2)]$ , then for every imputation  $\xi[v(\bar{z}_1)] \in \mathcal{I}[v(\bar{z}_1)]$  conditions for time consistency (1.39) are hold. Proposition is proved.

## Example

**Prisoner's dilemma.** To illustrate the above reasoning, we will consider the game from the example "Prisoner's dilemma". The game has time inconsistent core since there is an imputation  $\xi[v(\bar{z}_1)] = (0, 2b, \dots, 2b) \in \mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$  which is not belongs to the core  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  of subgame, which is contradict with (1.39). Indeed for coalition  $S \subset N$  и  $1 \in S$  holds

$$\sum_{i \in S} \xi_i[v(\bar{z}_1)] = 2b(|S| - 1) < v(\bar{z}_2; S) = 2b(|S| - 1) + (n - |S|)a,$$

where  $a > 0$ . Time inconsistency of the core also shown on figure 4, where the set of imputations and the core are depicted for three person game. In can be noted, that for some imputations  $\xi[v(\bar{z}_1)] \in \mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$  (red area) it is impossible to find an imputation  $\xi[v(\bar{z}_2)] \in \mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  (blue area) so that they match.



**Figure 4.** Set of imputations  $\mathcal{M}[v(\bar{z}_1)]$ ,  $\mathcal{M}[v(\bar{z}_2)]$  and the core  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$ ,  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  in three players game "prisoner's dilemma where  $a = 3$ ,  $b = 4$

It can be noted that in this case  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_2)] \neq \emptyset$  by proposition 1.5, means you can provide time consistent IDP  $\beta$  for imputation for example,  $\xi[v(\bar{z}_1)] = (0, 2b, \dots, 2b)$ . Let an imputation  $\xi[v(\bar{z}_2)] = ((2b - a)(n - 1), a, \dots, a) \in \mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  will be chosen, using (1.42) we get:

$$\beta_i^1 = \begin{cases} (a - 2b)(n - 1), & i = 1, \\ 2b - a, & i \neq 1, \end{cases}$$

$$\beta_i^2 = \begin{cases} (2b - a)(n - 1), & i = 1, \\ a, & i \neq 1. \end{cases}$$

IDP  $\beta$  is not non-negative because  $b > a$ . However, it can be shown that for another imputation from the core  $\bar{\xi}[v(\bar{z}_1)] = ((2b - a)(n - 1), a, \dots, a) \in \mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$  there

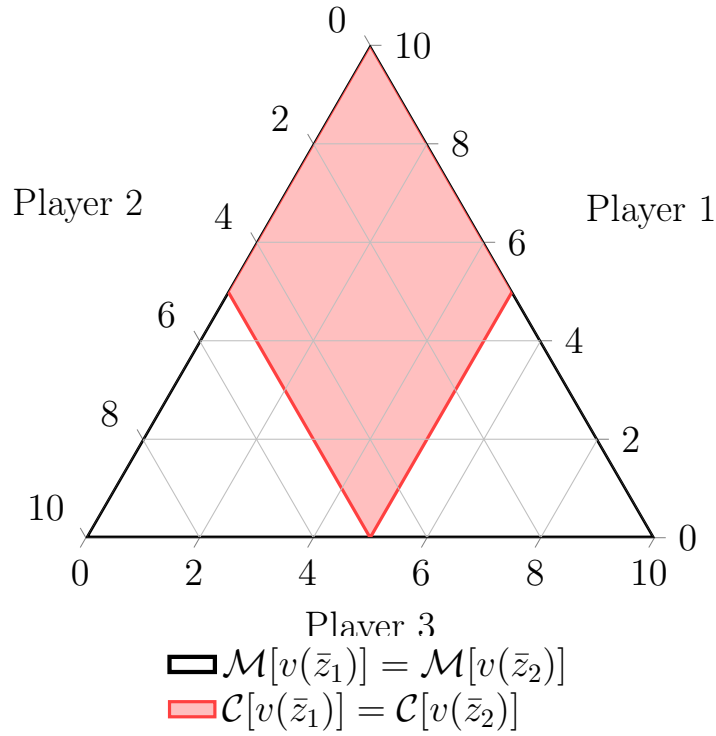
exists non-negative IDP  $\bar{\beta}$  given as follows:

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_i^1 &= 0, \quad i \in N, \\ \bar{\beta}_i^2 &= \begin{cases} (2b - a)(n - 1), & i = 1, \\ a, & i \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

**[Coordination game]** It was previously claimed that this game has a time consistent core. Indeed, calculating the values of the characteristic function  $v(\bar{z}_1; S)$  and  $v(\bar{z}_2; S)$ , and using expressions (1.9), (1.12) and denotations  $w_i^{ij} = w_j^{ij} = 0$  for two any arbitrary players  $i, j \in N$ , we can conclude that

$$v(\bar{z}_1; S) = v(\bar{z}_2; S) = \begin{cases} (n - 1)(a + b), & S = N, \\ (|S| - 1)(a + b), & S \subset N, 1 \in S, \\ 0, & \text{other.} \end{cases}$$

Because of  $v(\bar{z}_1; S) = v(\bar{z}_2; S)$  for any  $S \subseteq N$ , than  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_1)] = \mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  means time consistency of the core. It is shown on figure 5. Time consistency of the core also follows from Proposition 1.6.



**Figure 5.** Set of imputations  $\mathcal{M}[v(\bar{z}_1)]$ ,  $\mathcal{M}[v(\bar{z}_2)]$  and the core  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_1)]$ ,  $\mathcal{C}[v(\bar{z}_2)]$  in three players coordination game with  $a = 4$ ,  $b = 1$ .

## 1.7 The core in two-stage three person game

In this section, we will consider a two-stage game of three persons with pairwise interaction  $\Gamma_{z_1}^S(g)$  on arbitrary network  $g$ . As a solution the core will be considered

As was mentioned earlier, the core  $C[v(\bar{z}_t)] \subset \mathcal{M}[v(\bar{z}_t)]$  in game  $\Gamma_{z_t}^S(g)$  is not empty due to the supermodularity of the characteristic function  $v(z_t; S)$ ,  $t = 1, 2$ .

The core  $C[v(\bar{z}_t)]$  in game  $\Gamma_{z_t}^S(g)$  — is a set of such imputations  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}[v(\bar{z}_t)]$ , which satisfy following conditions

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(\bar{z}_t; S), \quad S \subset N$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = v(\bar{z}_t; N) \tag{1.45}$$

In this paragraph conditions for the strongly time consistency of the core in the indicated game will be derived. Due to [10]:



**Definition 1.3** *The core  $C[v(\bar{z}_1)]$  is strongly time-consistent in game  $\Gamma_{z_t}^S(g)$ , if*

1.  $C[v(\bar{z}_1)] \neq \emptyset, C[v(\bar{z}_2)] \neq \emptyset$

2. *For every imputation  $x \in C[v(\bar{z}_1)]$  there exists such IDP (1.42)  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ , that  $x = \beta_1 + \beta_2$  and*

$$C[v(\bar{z}_1)] \supset \beta_1 \oplus C[v(\bar{z}_2)].$$

Here symbol  $\oplus$  defines as  $a \in R^n, B \subset R^n$ , than  $a \oplus B = \{a + b : b \in B\}$ .

For subgame  $\Gamma_{z_2}^S(g)$  the following values of the characteristic function are obtained taking into account (1.9)-(1.10). It should be noted that the formulas are given for the case of a complete network. If some of the edges are missing in the network  $g$ , the components corresponding to this edge will be equal to zero.

$$v(\bar{z}_2; \emptyset) = 0, \quad v(\bar{z}_2; \{1\}) = w_{13}^1 + w_{12}^1, \quad v(\bar{z}_2; \{2\}) = w_{21}^2 + w_{23}^2,$$

$$v(\bar{z}_2; \{3\}) = w_{31}^3 + w_{32}^3,$$

$$v(\bar{z}_2; \{12\}) = \max_{p,l} (a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) + w_{13}^1 + w_{23}^2,$$

$$v(\bar{z}_2; \{13\}) = \max_{p,l} (a_{pl}^{13} + b_{pl}^{31}) + w_{12}^1 + w_{32}^3,$$

$$v(\bar{z}_2; \{23\}) = \max_{p,l} (a_{pl}^{23} + b_{pl}^{32}) + w_{21}^2 + w_{31}^3,$$

$$v(\bar{z}_2; N) = \max_{p,l} (a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) + \max_{p,l} (a_{pl}^{13} + b_{pl}^{31}) + \max_{p,l} (a_{pl}^{23} + b_{pl}^{32}).$$

An imputation  $x$  belongs to the core  $C[v(\bar{z}_2)]$ , when following conditions hold:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq v(\bar{z}_2; \{12\}) \\ x_1 + x_3 \geq v(\bar{z}_2; \{13\}) \\ x_2 + x_3 \geq v(\bar{z}_2; \{23\}) \\ x_1 \geq v(\bar{z}_2; \{1\}) \\ x_2 \geq v(\bar{z}_2; \{2\}) \\ x_3 \geq v(\bar{z}_2; \{3\}) \\ x_1 + x_2 + x_3 = v(\bar{z}_2; N) \end{array} \right. \quad (1.46)$$

Taking into account expressions (1.46) and mentioned above values of characteristic function, will be get:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq \max_{pl}(a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) + w_{23}^2 + w_{13}^1 \\ x_1 + x_3 \geq \max_{pl}(a_{pl}^{13} + b_{pl}^{31}) + w_{12}^1 + w_{23}^2 \\ x_2 + x_3 \geq \max_{pl}(a_{pl}^{23} + b_{pl}^{32}) + w_{12}^2 + w_{13}^3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = v(\bar{z}_2; N) \end{cases} \quad (1.47)$$

The following denotations have been introduced to shorten the writing of expressions:

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= \max_{pl}(a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}), \quad D_1 = w_{23}^2 + w_{13}^1, \\ \Delta_{13} &= \max_{pl}(a_{pl}^{13} + b_{pl}^{31}), \quad D_2 = w_{12}^1 + w_{23}^3, \\ \Delta_{23} &= \max_{pl}(a_{pl}^{23} + b_{pl}^{32}), \quad D_3 = w_{12}^2 + w_{13}^3. \end{aligned}$$

Then system (1.47), which defines the structure of the core  $C[v(\bar{z}_2)]$  can be rewritten in form:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq \Delta_{12} + D_1 \\ x_1 + x_3 \geq \Delta_{13} + D_2 \\ x_2 + x_3 \geq \Delta_{23} + D_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = v(\bar{z}_2; N) \end{cases} \quad (1.48)$$

Inequalities, which defines the core  $C[v(\bar{z}_1)]$  of two-stage game  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$  have following view:

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 \geq v(\bar{z}_1; \{12\}) \\ x'_1 + x'_3 \geq v(\bar{z}_1; \{13\}) \\ x'_2 + x'_3 \geq v(\bar{z}_1; \{23\}) \\ x'_1 + x'_2 + x'_3 = v(\bar{z}_1; N) \end{cases} \quad (1.49)$$

Taking into account expressions(1.49) and values of characteristic functions, we will

get:

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 \geq \max_{pl}(a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) \\ x'_1 + x'_3 \geq \max_{pl}(a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) \\ x'_2 + x'_3 \geq \max_{pl}(a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) \\ x'_1 + x'_2 + x'_3 = v(\bar{z}_1; N) \end{cases} \quad (1.50)$$

After substitution of the above denotations, the system will take the following form:

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 \geq \Delta_{12} \\ x'_1 + x'_3 \geq \Delta_{13} \\ x'_2 + x'_3 \geq \Delta_{23} \\ x'_1 + x'_2 + x'_3 = v(\bar{z}_1; N) \end{cases} \quad (1.51)$$

### Strongly time consistency of the core $C[v(\bar{z}_1)]$

Considering the above definition of strongly time consistency and in accordance with the expression (1.51) we can write that:

$$\begin{cases} \beta_1^1 + \beta_2^1 + \beta_1^2 + \beta_2^2 \geq \Delta_{12} \\ \beta_1^1 + \beta_2^1 + \beta_1^3 + \beta_2^3 \geq \Delta_{13} \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_1^3 + \beta_2^3 \geq \Delta_{23} \end{cases} \quad (1.52)$$

For strongly time consistency, these inequalities must be satisfied subject to the following additional conditions:

$$\begin{cases} \beta_2^1 + \beta_2^2 \geq \Delta_{12} + D_1 \\ \beta_2^1 + \beta_2^3 \geq \Delta_{13} + D_2 \\ \beta_2^2 + \beta_2^3 \geq \Delta_{23} + D_3 \end{cases} \quad (1.53)$$

Let  $\beta_1$  was fixed, then for strongly time consistency must satisfy conditions (1.53) for  $\beta_2$ . Wherein  $\beta_2$  must additionally satisfy the conditions(1.52). Also from  $v(\bar{z}_2; N) =$

$v(\bar{z}_1; N)$ , following that  $\beta_1^1 + \beta_1^2 + \beta_1^3 = 0$ . If expressions (1.52) satisfied for minimum values  $\beta_2^1, \beta_2^2, \beta_2^3$  from conditions (1.53), then they are obviously satisfied for all other values. The following inequalities are obtained:

$$\begin{cases} -\beta_1^3 + \Delta_{12} + D_1 \geq \Delta_{12} \\ -\beta_1^2 + \Delta_{13} + D_2 \geq \Delta_{13} \\ -\beta_1^1 + \Delta_{23} + D_3 \geq \Delta_{23} \end{cases} \quad (1.54)$$

Thus, conditions for strongly time consistency of the core  $C[v(\bar{z}_1)]$  were obtained in game  $\Gamma_{\bar{z}_1}^S(g)$ .

**Theorem 1.5** *Let following conditions are hold:*

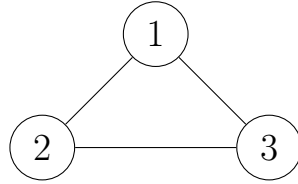
$$\begin{cases} \beta_1^3 \leq D_1 \\ \beta_1^2 \leq D_2 \\ \beta_1^1 \leq D_3 \end{cases} \quad (1.55)$$

(i.e. there exists such IDP  $\beta_1$  which satisfy condition (1.55)), the the core  $C[v(\bar{z}_1)]$  is strongly time consistent.

## Example

To illustrate the result, the following example will be considered. It will be three-person game, when  $N_i = N \setminus \{i\}$  for all  $i \in N$ . In a goal of maximizing total payoff players should make a complete graph by choosing following behaviors in the first state of game:  $b_1^1 = (0; 1; 1)$ ,  $b_2^1 = (1; 0; 1)$ ,  $b_3^1 = (1; 1; 0)$

It turns out a network of the following type:



**Figure 6.** Network on the second stage of game.

Next, the values of the characteristic function will be calculated and the core will be constructed. The following matrices are given.

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad C_{12} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad C_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad C_{23} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

The following values of the characteristic function are obtained

$$\begin{aligned} w_{13}^1 &= 3, \quad w_{23}^2 = 4, \quad w_{12}^1 = 5, \\ w_{23}^3 &= 6, \quad w_{12}^2 = 4, \quad w_{13}^3 = 2 \\ D_1 &= 6, \quad D_2 = 11, \quad D_3 = 6 \\ \Delta_{12} &= \max_{p,l}(a^{12} + b^{21}) = 15 \\ \Delta_{13} &= \max_{p,l}(a^{13} + b^{31}) = 11 \\ \Delta_{23} &= \max_{p,l}(a^{23} + b^{32}) = 9 \\ v(\bar{z}_1; \{123\}) &= v(\bar{z}_2; \{123\}) = 35 \end{aligned}$$

Then the core  $C[v(\bar{z}_1)]$  defines by following system of inequalities:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 + x'_2 \geq 15 \\ x'_1 + x'_3 \geq 11 \\ x'_2 + x'_3 \geq 9 \\ x'_1 + x'_2 + x'_3 = 35 \end{array} \right. \quad (1.56)$$

The core  $C[v(\bar{z}_2)]$ , in turn, is determined by a system of inequalities of the form:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 21 \\ x_1 + x_3 \geq 22 \\ x_2 + x_3 \geq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 35 \end{array} \right. \quad (1.57)$$

It is necessary to take a vector  $\beta_1$  which satisfy conditions (1.55), for example vector  $\beta_1=(5; -10; 5)$ . The system (1.56) from this in accordance to conditions (1.57):

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 - 10 + 21 \geq 15 \\ 5 + 5 + 22 \geq 11 \\ -10 + 5 + 15 \geq 9 \end{array} \right. \quad (1.58)$$

These inequalities are true, and it means, that the core  $C[v(\bar{z}_1)]$  is strongly time-consistent.

## Chapter 2

# Multistage bimatrix games with pairwise interactions

This chapter will consider multi-stage games with pairwise interaction with a finite number of stages. The results obtained in the previous chapter will be extended to the case of multi-stage games, as well as the issue of strong time consistency of solutions under the conditions of a multistage model is considered. For definiteness, this section will consider a given network in the form of a complete graph. That is, at the first stage, the formation of the network does not occur, but the game process begins immediately.

### 2.1 The model

The model is formalized as follows. Let an abstract space be given  $\mathbb{Z}$ , which is called the space of states. In every state  $z \in \mathbb{Z}$  given a non-zero sum game of  $n$  players  $\Gamma(z)$  on complete network  $g$  (in other words  $N_i = N$  for all  $i \in N$ ), the vertices of which are the players, and the edges are the connections between the players. Game  $\Gamma(z)$  is similar to the game at the second stage in the two-stage case (see chapter 1) and is a family of pairwise simultaneous bimatrix games  $\{\gamma_{ij}(z)\}$  between neighbours by network,  $i \in N, j \in N, i \neq j$ .

Let  $i \in N, j \in N, i \neq j$ . Then  $i$  play with  $j$  bimatrix game  $\gamma_{ij}(z)$  with payoff

matrices  $A_{ij}(z)$  and  $C_{ij}(z)$ , for players  $i$  and  $j$ , correspondingly.

$$A_{ij}(z) = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij}(z) & a_{12}^{ij}(z) & \cdots & a_{1r}^{ij}(z) \\ a_{21}^{ij}(z) & a_{22}^{ij}(z) & \cdots & a_{2r}^{ij}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{ij}(z) & a_{m2}^{ij}(z) & \cdots & a_{mr}^{ij}(z) \end{pmatrix}; \quad (2.1)$$

$$C_{ij}(z) = \begin{pmatrix} c_{11}^{ij}(z) & c_{12}^{ij}(z) & \cdots & c_{1r}^{ij}(z) \\ c_{21}^{ij}(z) & c_{22}^{ij}(z) & \cdots & c_{2r}^{ij}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}^{ij}(z) & c_{m2}^{ij}(z) & \cdots & c_{mr}^{ij}(z) \end{pmatrix}; \quad (2.2)$$

$$a_{pq}^{ij}(z) \geq 0, c_{pq}^{ij}(z) \geq 0, \quad p = 1, \dots, m, \quad q = 1, \dots, r, \quad i, j \in N.$$

For simplicity of further calculations, it is assumed that the constants  $m$  and  $r$  similar for all players  $i$  and  $j$  and all states  $z$ . When the game  $\gamma_{ji}(z)$  is takes place, i.e. player  $i$  is the second player, then it plays with the matrix  $C_{ji}(z)$  which is equal  $A_{ij}^T(z)$ , while the player  $j$ , who is now the first player to play with the payoff matrix  $A_{ji}(z)$ , or, similar,  $C_{ij}^T(z)$ .

Strategy of player  $i$  in game  $\Gamma(z)$  is a vector  $u_i(z) = (u_i^1(z), \dots, u_i^j(z), \dots, u_i^n(z))$ , where  $u_i^j$  — behaviour of player  $i$  in bimatrix game  $\gamma_{ij}(z)$ . That is, the player's strategy  $i$  — it is a set of numbers of lines chosen by him (pure strategies) in bimatrix games  $\gamma_{ij}(z)$ . As  $u(z) = (u_1(z), \dots, u_n(z))$  the situation in the game is indicated  $\Gamma(z)$ . Strategy of player  $j$  — this is a set of numbers of the columns chosen by him in the corresponding bimatrix games  $\gamma_{ij}(z)$ . Payoff of player  $i$  in game  $\Gamma(z)$  is defined as follows:

$$K_i(z) = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{u_i^j(z) u_j^i(z)}^{ij}(z)$$

Next game  $\Gamma(z)$  viewed in a cooperative manner. For this purpose, the characteris-



tic function is determined  $v(z; S)$ ,  $S \subset N$  for each subset (coalition)  $S \subset N$  as the lower (maximin) value of the zero-sum game of two persons in the coalition  $S$  and additional coalition  $N \setminus S$ , game-based  $\Gamma(z)$ , while the coalition payoff  $S$  is defined as the sum of the payoffs of the players included in  $S$ . The superadditivity of the characteristic function follows from its definition. The following designations are introduced, similar to those mentioned in Chapter 1:

$$\begin{aligned}\omega_{ij}^i(z) &= \max_p \min_q a_{pq}^{ij}(z), \quad p = 1, \dots, m; \quad q = 1, \dots, r, \\ \omega_{ij}^j(z) &= \max_q \min_p a_{pq}^{ji}(z), \quad p = 1, \dots, m; \quad q = 1, \dots, r.\end{aligned}$$

**Lemma 2.1** *Function  $v(z; S)$  defined by following formulas:*

$$v(\{z; \emptyset\}) = 0, \quad (2.3)$$

$$v(z; \{i\}) = \sum_{j \in N, j \neq i} \omega_{ij}^i(z), \quad (2.4)$$

$$v(z; S) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in S, j \neq i} \max_{p,q} (a_{pq}^{ij}(z) + a_{pq}^{ji}(z)) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N \setminus S} \omega_{ij}^i(z), \quad S \subset N, \quad (2.5)$$

$$v(z; N) = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N, j \neq i} \max_{p,q} (a_{pq}^{ij}(z) + a_{pq}^{ji}(z)). \quad (2.6)$$

**Proof.** Formula (2.3) is obvious.

First, we will prove the formula (2.4). Because of player  $i$ , acting against the coalition  $N \setminus \{i\}$ , play with players  $j$  from  $N$  into independent bimatrix games, then in each of these bimatrix games he can guarantee himself the greatest payoff  $w_{ij}^i(z)$ , hence the greatest payoff that the player  $i$  can guarantee itself in the whole game, there is an amount  $\sum_{j \in N} w_{ij}^i(z)$ . In this case, this is the maximin payoff  $i$  against additional coalition  $N \setminus \{i\}$ . It means that the formula (2.4) is true.

Now the formula will be proved (2.5) for an arbitrary coalition  $S$ . Each of the players included in  $S$  plays independent pairwise bimatrix games as with the players in  $N \cap S$ , so with the players  $N \setminus S$ . In the first case, the players interacting within

the coalition  $S$  and acting in its interests, they can always choose a strategy that maximizes their total payoff, i.e.,  $\sum_{j \in N \cap S} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij}(z) + c_{p\ell}^{ji}(z))$ . In the second case, the players interacting with the players from the additional coalition  $N \setminus S$  can guarantee themselves only the lower value of the game, i.e. minimum guaranteed payoff  $\sum_{k \in N \setminus S} w_{ik}^i(z)$ . Thus, the maximum total payoff that the coalition can provide for itself is  $S$ , will consist of two parts and equal:

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N \cap S} \max_{p,\ell} (a_{p\ell}^{ij}(z) + c_{p\ell}^{ji}(z)) + \sum_{i \in S} \sum_{k \in N \setminus S} w_{ik}^i(z).$$

Formula (2.6) follows from the definition of the maximum total payoff of the players.

In formulas (2.5) and (2.6) coefficient  $\frac{1}{2}$  is used to exclude the repeated summation of the players' payoffs over the same edges. The lemma is proved.

The order of transition from state to state in a given multi-stage game should be determined. Let in state  $z \in Z$  in game  $\Gamma(z)$  the players chose the following strategies:  $u_i(z) = (u_i^1(z), \dots, u_i^n(z))$ . As a result of the choice of these strategies, a transition is made to a new state  $z'$ , where is the game  $\Gamma(z')$ , consisting of simultaneous bimatrix games between neighbors on the network, with payoff matrices depending on the strategies chosen in the previous state  $z$ . That is, the state at the next stage of the game depends on the state at the current stage, and on the strategies chosen at this stage. Then one can define the mapping  $T : Z \rightarrow Z$  by formula:

$$z' = T(z; u_1(z), u_2(z), \dots, u_n(z))$$

Thus, a multi-stage game that will be denoted  $G(z)$  occurs according to the following rules. The game  $G(z_1)$  starts in state  $z_1$ , on the first stage. In state  $z_1$  game going on  $\Gamma(z_1)$ , players choose their strategies  $u_1(z_1), u_2(z_1), \dots, u_n(z_1)$ , then, at stage 2, they move to a new state  $z_2 = T(z_1; u_1(z_1), u_2(z_1), \dots, u_n(z_1))$ . In state  $z_k$  on stage  $k$  players play game  $\Gamma(z_k)$ , then again choose strategies

$u_1(z_k), u_2(z_k), \dots, u_n(z_k)$  and pass to the next state  $z_{k+1} = T(z_k; u_1(z_k), u_2(z_k), \dots, u_n(z_k))$  on stage  $k+1$ . Game ends on the last stage  $\ell$  in state  $z_\ell$ . Thus, as a result of the choice of strategies at each stage of the game, the path  $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_\ell$ . The concept of strategy in the resulting multi-stage game is defined in a natural way, namely, strategy  $u(\cdot) = u\{z\}$ , is a set of strategies of all players, defined in every state  $z \in \mathbb{Z}$ . From the above description it follows that any situation  $u(\cdot) = \{u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot)\}$  uniquely defines the path in the game, and hence the payoff of each player, as the sum of his payoffs in all games realized along the resulting path.

$$K_i(u(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{u_i^j(z_k)u_j^i(z_k)}^{ij}(z_k).$$

It should be noted that there are many different ways in a multi-stage game  $G(z)$  is finite. And, consequently, the set of all possible states in the game is finite. This set will be denoted by  $\bar{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$ .

## 2.2 The case of equal values $v(z; N)$

To simplify the reasoning, at the beginning we consider a special case when the value  $v(z; N)$  is equal for all  $z \in \bar{\mathbb{Z}}$ . An additional function  $w(S)$ ,  $S \subset N$  is introduced into consideration:

$$w(S) = \max_z v(S; z).$$

Characteristic function of multi stage game  $G(z_k)$  denote as  $V(z_k; S)$ , started in state  $z_k$ . Function  $V(z_k; S)$  is calculated using the following analogue of the Bellman equation:

$$V(z_{k-1}; S) = \max_{u_i, i \in S} \left[ \min_{u_j, j \in N \setminus S} \left( \sum_{i \in S} K_i^{z_{k-1}}(u_1, \dots, u_n) + V(S; z_k) \right) \right] =$$

$$= \max_{u_i, i \in S} \left[ \min_{u_j, j \in N \setminus S} \left( \sum_{i \in S} K_i^{z_{k-1}}(u_1, \dots, u_n) + V(S; T(z_{k-1}; u(z_{k-1}))) \right) \right];$$

$$V(z_\ell; S) = v(z_\ell; S).$$

Additional function for multi stage game  $G(z_1)$  defined in following way,

$$W(z_k; S) = (l - k + 1)w(S),$$

where  $l$  is number of stages in game  $G(z_1)$ .

Further reasoning uses the proven fact that (see [8]):

$$W(S, z_k) \geq V(S, z_k), \quad S \subset N.$$

### 2.2.1 Construction of approximation for the core by function $w(S)$

Define the set of imputations  $\mathcal{M}[W(z_1)]$  in game  $G(z_1)$  as

$$\mathcal{M}[W(z_1)] = \{x = (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i = W(z_1; N), \quad x_i \geq W(z_1; \{i\}), \quad i \in N\}.$$

The optimality principle will be understood as any subset  $\mathcal{I}[\cdot]$  of set  $\mathcal{M}[W(z_1)]$ .

In single stage game  $\Gamma(z)$  as the principle of optimality will be chosen, an analogue of the core, namely the set  $\mathcal{I}[w(S)]$ , consists of all imputations  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , which satisfy conditions

$$\sum_{i \in S} x_i \geq w(S), \quad S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = w(N).$$

In the same way will be defined the set  $\mathcal{I}[W(z; S)]$  in multi stage game  $G(z)$ , as

a set of imputations satisfying the conditions:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq W(z; S), \quad S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = W(z; N).$$

**Theorem 2.1** For any  $x \in \mathcal{I}[W(z_k; S)]$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  and arbitrary  $k = \overline{1, l}$ , the following equality holds:

$$x_i = (\ell - k + 1)x'_i, \quad \text{zde } x'_i \in \mathcal{I}(w(S)), \quad i = \overline{1, n}$$

**Proof.** For arbitrary  $k = \overline{1, l}$  the following inequalities define the set  $\mathcal{I}[W(z_k; S)]$ .

$$\sum_{i \in S} x_i \geq W(z_k; S), \quad S \subset N$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = W(z_k; N)$$

By the definition it is true that  $W(z_k; S) = (\ell - k + 1)w(S)$ . Therefore, we can write that

$$\sum_{i \in S} x_i \geq (\ell - k + 1)w(S), \quad S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = (\ell - k + 1)w(N).$$

After dividing by  $(\ell - k + 1)$  of both expressions and performing the change of variables  $x'_i = \frac{x_i}{(\ell - k + 1)}$ , the following inequalities are obtained:

$$\sum_{i \in S} x'_i \geq w(S), \quad S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^N x'_i = w(N).$$

That is  $x'_i \in \mathcal{I}[w(S)]$ . Thus, it was possible to represent the components of the vector  $x \in \mathcal{I}[W(z_k); S]$  in form  $x_i = (\ell - k + 1)x'_i$ , где  $x'_i \in \mathcal{I}[w(S)]$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Theorem is proved.

### 2.2.2 Strongly time consistency of $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$

Let it be assumed that the players have chosen strategies  $\bar{u}(\cdot) = (\bar{u}_1(\cdot), \dots, \bar{u}_n(\cdot))$ , which maximize the total payoff in the game  $G(z_1)$ :

$$\sum_{i \in N} K_i(z_1; \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) = \max_u \sum_{i \in N} K_i(z_1; u_1, \dots, u_n)$$

The trajectory corresponding to these strategies  $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_\ell)$  called the cooperative trajectory (hereinafter  $z_1 = \bar{z}_1$ ).

**Definition 2.1** Function  $\beta^i$ ,  $i \in N$  is called imputation distribution procedure (IDP) for  $x \in \mathcal{M}[W(z_1; S)]$  (see [13]), if

$$x_i = \sum_{k=1}^{\ell} \beta_k^i, \quad i \in N.$$

**Definition 2.2** Optimality principle  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1; S)]$  is strongly time consistent in game  $G(\bar{z}_1)$  (see [10]), if

1.  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_k; S)] \neq \emptyset$ ,  $k = \overline{1, \ell}$
2. For every imputation  $x \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1; S)]$  there exists such IDP  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\ell)$ , that

$$\sum_{j=1}^k \beta^j \oplus \mathcal{I}[W(\bar{z}_{k+1}; S)] \subset \mathcal{I}[W(\bar{z}_1; S)], \quad k = \overline{1, \ell - 1}.$$

Here symbol  $\oplus$  means, that if  $a \in R^n$ ,  $B \subset R^n$ , then  $a \oplus B = \{a + b : b \in B\}$ .

**Proposition 2.1** *The optimality principle  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1; S)]$  in game  $G(\bar{z}_1)$  is strongly time consistent.*

**Proof.** Let some imputation  $\xi^1 = (\xi_1^1, \dots, \xi_i^1, \dots, \xi_n^1) \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1; S)]$ , then it is true that:

$$\sum_{i \in S} \xi_i^1 \geq W(\bar{z}_1; S), \quad S \subset N$$

$$\sum_{i=1}^N \xi_i^1 = W(\bar{z}_1; N), \quad n = |N|.$$

According to the theorem 2.1, an imputation  $\xi^1 \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1; S)]$  can be represented as follows:

$$\xi^1 = \ell \bar{\beta}, \quad \text{где } \bar{\beta} \in \mathcal{I}[w(S)].$$

Similarly, we represent an arbitrary imputation  $\xi^{k+1} \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_{k+1}; S)]$  in form:

$$\xi^{k+1} = (\ell - (k + 1) + 1) \bar{\beta} = (\ell - k) \bar{\beta}, \quad \text{где } \bar{\beta} \in \mathcal{I}[w(S)].$$

As IDP choose  $\beta = (\bar{\beta}^1, \dots, \bar{\beta}^k, \bar{\beta}^{k+1}, \dots, \bar{\beta}^\ell)$  and construct vector:

$$\hat{\xi}^1 = \sum_{j=1}^k \bar{\beta}^j + \xi^{k+1} = k \bar{\beta} + (\ell - k) \bar{\beta} \geq k w(S) + (\ell - k) w(S) = \ell w(S).$$

Thus vector  $\hat{\xi}^1$  is sum of IDP components  $\beta$  and arbitrary imputation  $\xi^{k+1} \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_{k+1}; S)]$ . Vector  $\hat{\xi}^1 \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1; S)]$ , which proves the strongly time consistency of the optimality principle  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1; S)]$ . Proposition is proved.

### 2.3 The case of arbitrary values $v(z_t, N)$

Now we will consider the general case when the values  $v(z; N)$  not necessarily

the same for different states  $z$ . The value  $L(\bar{z}_k)$  is introduced into consideration and it means total payoff of the coalition  $N$  in state  $\bar{z}_k \in \bar{z}$ , where  $\bar{z}$  — cooperative trajectory in game  $G(\bar{z}_1)$ .

$$L(\bar{z}_k) = \sum_{\substack{i \in N, j \in N \\ i \neq j}} (a^{ij}(\bar{z}_k) + a^{ji}(\bar{z}_k)). \quad (2.7)$$

Let assumed that  $w(S) < \min_{\bar{z}_k} L(\bar{z}_k)$ ,  $S \neq N$ . An additional function is also introduced  $w(\bar{z}_k; S)$ ,  $w(\bar{z}_k; S) = w(S)$ ,  $w(\bar{z}_k; N) = L(\bar{z}_k)$ . Let  $x$  is an arbitrary imputation in game  $G(\bar{z}_1)$ . Consider as optimality principle an analogous of the core  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_k); S]$  for game  $G(\bar{z}_k)$  of the following type:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq (\ell - k + 1)w(S) = W(\bar{z}_k; S), \quad S \subset N, \quad S \neq N$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = \sum_{t=k}^{\ell} L(\bar{z}_k) = \hat{W}(\bar{z}_k; N)$$

Let assumed that  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_k); S] \neq \emptyset$  for any  $k = \overline{1, \ell}$ .

**Definition 2.3 (10)** *the optimality principle  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$  is strongly time consistent in game  $G(\bar{z}_1)$ , if*

1).  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_k); S] \neq \emptyset$ ,  $k = \overline{1, \ell}$

2). *For every imputation  $x \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$  there exists such imputation distribution procedure  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_\ell)$ ,  $x = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j$  that*

$$\sum_{j=1}^k \beta_j \oplus \mathcal{I}[W(\bar{z}_{K+1}); S] \subset \mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S], \quad k = \overline{1, \ell}.$$

**Proposition 2.2** *Optimality principle  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$  is strongly time consistent.*

**Proof.** The proof of this statement is similar to the proof of Statement 1.



Let an imputation  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$ , then it runs:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq W(\bar{z}_1; S) = \ell w(S), \quad S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = W(\bar{z}_1; N) = \sum_{t=1}^{\ell} L(\bar{z}_k).$$

For arbitrary imputation  $\xi_{k+1} = (\xi_{k+1,1}, \dots, \xi_{k+1,n}) \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_{k+1}); S]$  the following inequalities are true:

$$\sum_{i \in S} \xi_{k+1,i} \geq W(\bar{z}_{k+1}; S) = (\ell - k)w(S), \quad S \subset N,$$

$$\sum_{i=1}^N \xi_{k+1,i} = W(\bar{z}_{k+1}; N) = \sum_{t=k+1}^{\ell} L(\bar{z}_k).$$

For imputation  $x \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$  as IDP will be chosen  $\beta^k = \alpha^k = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_i^k, \dots, \alpha_n^k) \in \mathcal{I}[w(\bar{z}_k); S]$ ,  $k = \overline{1, \ell}$ .

$$\sum_{i \in S} \alpha_i^k \geq w(S, \bar{z}_k) = w(S), \quad S \subset N \quad (2.8)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^k = w(N, \bar{z}_k) = L(\bar{z}_k) \quad (2.9)$$

And construct vector  $\hat{x}$  of the following type:

$$\hat{x} = \sum_{j=1}^k \beta^j + \xi^{k+1} = \sum_{j=1}^k \alpha_i^j + \xi^{k+1} \geq kw(S) + (\ell - k)w(S) = \ell w(S).$$

Vector  $\hat{x}$  represents the amount IDP  $\beta$  and arbitrary imputation from  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_{k+1}); S]$ . It is follows from (2.8)-(2.9) that vector  $\hat{x} \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$ , which is proved the strongly time consistency of optimality principle  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$ . Proposition is proved.

## Example

As an example, a three-stages ( $k = 3$ ) game of three persons ( $N = 3$ ), which starts in position  $z_1$ . In state  $z_1$  six payoff matrices are given, three of them conditionally will be called matrices of the first type, and three - of the second type. In state  $z_1$  all bimatrix games are played with matrices of the first type. Capable of  $z_1$  every player  $i \in N$  chose his strategy  $u_i(z_1)$ , and if all  $u_i^j(z_1) = 1, i \in N, j \in N \setminus \{i\}$ , then players pass to a state  $z_2$ , in which bimatrix games are played with the same matrices of the first type. If at least one of the components  $u_i^j(z_1) = 2, i \in N, j \in N \setminus \{i\}$ , then in state  $z_2$  players play bimatrix games with matrices of the second type. The transition to the state is carried out in a similar way  $z_3$ : if all  $u_i^j(z_2) = 1, i \in N, j \in N \setminus \{i\}$ , then the players are able to  $z_3$  use matrices of the first type. If at least one of the components  $u_i^j(z_2) = 2, i \in N, j \in N \setminus \{i\}$ , then in state  $z_3$  players use matrices of the second type. Matrices of the first type are as follows:

$$A_{12}(z) = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{12}(z) = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{13}(z) = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},$$

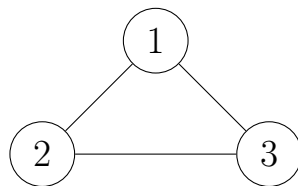
$$C_{13}(z) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_{23}(z) = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{23}(z) = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrices of the second type:

$$\tilde{A}_{12}(z) = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_{12}(z) = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{13}(z) = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 9 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C}_{13}(z) = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{23}(z) = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_{23}(z) = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Capable of  $z_1$  a network is given that is a complete graph:



**Figure 7.** Network on the first stage of game.

Optimal strategies of players:

$$\bar{u}_1(\bar{z}_1) = (0, 2, 1), \quad \bar{u}_2(\bar{z}_1) = (1, 0, 2), \quad \bar{u}_3(\bar{z}_1) = (2, 2, 0)$$

$$\bar{u}_1(\bar{z}_2) = (0, 2, 1), \quad \bar{u}_2(\bar{z}_2) = (2, 0, 1), \quad \bar{u}_3(\bar{z}_2) = (2, 1, 0)$$

$$\bar{u}_1(\bar{z}_3) = (0, 2, 1), \quad \bar{u}_2(\bar{z}_3) = (2, 0, 1), \quad \bar{u}_3(\bar{z}_3) = (2, 1, 0)$$

Values  $\omega_{ij}(z)$ :

$$\omega_{12}^1(\bar{z}_1) = 1, \quad \omega_{21}^2(\bar{z}_1) = 1, \quad \omega_{13}^1(\bar{z}_1) = 1, \quad \omega_{31}^3(\bar{z}_1) = 0, \quad \omega_{23}^2(\bar{z}_1) = 2,$$

$$\omega_{32}^3(\bar{z}_1) = 1, \quad \omega_{12}^1(\bar{z}_2) = 10, \quad \omega_{21}^2(\bar{z}_2) = 6, \quad \omega_{13}^1(\bar{z}_2) = 9, \quad \omega_{31}^3(\bar{z}_2) = 10,$$

$$\omega_{23}^2(\bar{z}_2) = 9, \quad \omega_{32}^3(\bar{z}_2) = 6$$

Values  $\omega_{ij}^i(\bar{z}_3)$  will be coincide or with  $\omega_{ij}^i(\bar{z}_2)$  or  $\omega_{ij}^i(\bar{z}_1)$ , because of payoff matrices in our game have only two types.

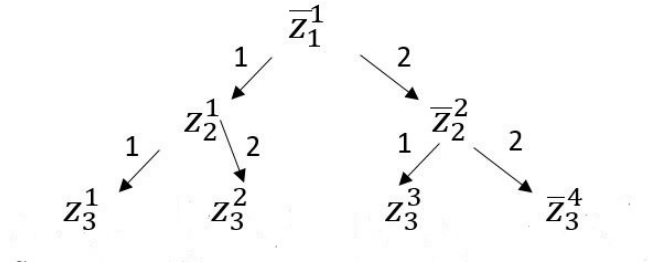
Characteristic function values  $v(z; S)$ ,  $w(z_k; S)$ , calculated by formulas (2.5)-(2.6):

$S$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
$v(\bar{z}_1; S)$	2	3	1	21	20	27	62
$v(\bar{z}_2; S)$	19	15	16	40	40	36	66
$v(\bar{z}_3; S)$	19	15	16	40	40	36	66
$w(\bar{z}_1; S)$	19	15	16	40	40	36	58
$w(\bar{z}_2; S)$	19	15	16	40	40	36	66
$w(\bar{z}_3; S)$	19	15	16	40	40	36	66

**Tabular 1.** Values of characteristic functions  $v(z; S)$ ,  $w(z_k; S)$

The game starts in the state  $z_1$ , in which the players choose their strategies and, depending on this, move to a new state. In each state, the players have only two

alternatives: either, as a result of the choice of strategies, they will play with type I matrices in the next state, or they will move to a state where bimatrix games will take place with type II matrices.



**Figure 8.** Tree of all possible states in game.

The numbers 1 and 2 above the arrows indicate which type of matrices the players will play in the next state.

Values of function  $L$  in nodes  $z_k$ :

$$L(z_1^1) = 58, \quad L(z_2^1) = 58, \quad L(z_3^1) = 62, \quad L(z_2^2) = 66, \quad L(z_3^2) = 66,$$

$$L(z_3^3) = 62, \quad L(z_3^4) = 66.$$

Optimal trajectory in game  $G(z_1)$ :  $\bar{z} = (z_1^1, z_2^2, z_3^4) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$ .

Characteristic function of multi-stage game  $G(z_1)$  calculates as:

$S$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
$V(\bar{z}_3; S)$	19	15	16	40	40	36	66
$V(\bar{z}_2; S)$	38	30	32	80	80	72	132
$V(\bar{z}_1; S)$	40	33	33	101	100	99	190
$W(\bar{z}_3; S)$	19	15	16	40	40	36	66
$W(\bar{z}_2; S)$	38	30	32	80	80	72	132
$W(\bar{z}_1; S)$	57	45	48	120	120	108	190

**Tabular 2.** Values of characteristic functions of a multistage game  $G(z_1)$

Condition  $w(S, z_k) < \min_{\bar{z}_k} L(z_k)$ ,  $S \neq N$  is hold:

$$\max_S w(S, z_k) = 40 < \min_{\bar{z}_k} L(z_k) = 58$$

Consider an imputation  $x \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 57 \\ x_2 \geq 45 \\ x_3 \geq 48 \\ x_1 + x_2 \geq 120 \\ x_1 + x_3 \geq 120 \\ x_2 + x_3 \geq 108 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 190 \end{array} \right.$$

As well as arbitrary imputation  $\xi \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_2); S]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 \geq 38 \\ \xi_2 \geq 30 \\ \xi_3 \geq 32 \\ \xi_1 + \xi_2 \geq 80 \\ \xi_1 + \xi_3 \geq 80 \\ \xi_2 + \xi_3 \geq 72 \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 132 \end{array} \right.$$

As IDP  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  choose imputation  $\alpha \in \mathcal{I}[w(\bar{z}_1); S]$ ,  $\beta_k = \alpha$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \geq 19 \\ \alpha_2 \geq 15 \\ \alpha_3 \geq 16 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq 40 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 40 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 36 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 58 \end{array} \right.$$

And construct an imputation  $\hat{x} = \alpha + \xi$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_1 \geq 57 \\ \hat{x}_2 \geq 45 \\ \hat{x}_3 \geq 48 \\ \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \geq 120 \\ \hat{x}_1 + \hat{x}_3 \geq 120 \\ \hat{x}_2 + \hat{x}_3 \geq 108 \\ \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 = 190 \end{array} \right.$$

It follows from the last inequality that  $\hat{x} \in \mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$ , which proves strongly time-consistency of optimality principle  $\mathcal{I}[W(\bar{z}_1); S]$ .

## Chapter 3

# Alternative ways of constructing the characteristic function

This chapter will consider alternative approaches to constructing a characteristic function for a multi-stage game with pairwise interaction, as well as explore the possibilities and advantages that such approaches provide.

### 3.1 Construction of the characteristic function as the maximum of the expected payoff

Consider one stage game  $\Gamma$ , on arbitrary network  $g$  with set of vertices (players)  $N$ . The interaction between the players is carried out in the same way as in the previous chapters: between two players connected by an edge, a bimatrix game with given payoff matrices takes place.

Let  $i \in N, j \in N, i \neq j$ . Then  $i$  play with  $j$  bimatrix game  $\gamma_{ij}$  with payoff matrices  $A_{ij}$  and  $C_{ij}$ , for players  $i$  and  $j$ , correspondingly.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij} & a_{12}^{ij} & \cdots & a_{1r}^{ij} \\ a_{21}^{ij} & a_{22}^{ij} & \cdots & a_{2r}^{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{ij} & a_{m2}^{ij} & \cdots & a_{mr}^{ij} \end{pmatrix}; \quad (3.1)$$

$$C_{ij}(z) = \begin{pmatrix} c_{11}^{ij}(z) & c_{12}^{ij}(z) & \cdots & c_{1r}^{ij}(z) \\ c_{21}^{ij}(z) & c_{22}^{ij}(z) & \cdots & c_{2r}^{ij}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}^{ij}(z) & c_{m2}^{ij}(z) & \cdots & c_{mr}^{ij}(z) \end{pmatrix}; \quad (3.2)$$

$$a_{pq}^{ij}(z) \geq 0, c_{pq}^{ij}(z) \geq 0, \quad p = 1, \dots, m, \quad q = 1, \dots, r, \quad i, j \in N.$$

Game  $\Gamma$  will be considered in the form of a family of zero-sum games  $\{\gamma_{N \setminus i, i}\}$ , between coalition  $N \setminus i$ , acting as the first (maximizing) player, and coalition, consist of one player  $\{i\}$ , acting as second (minimizing) player. Payoff for coalition  $N \setminus i$  set equal to the sum of the payoffs of the players from this coalition. Let  $(\bar{\mu}_{N \setminus i}, \bar{\mu}_i)$  — equilibrium situation in mixed strategies in a game  $\gamma_{N \setminus i, i}$ . Consider situation  $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n)$  and the following value is determined

$$\bar{W}(S) = \max_{\mu_s} \sum_{i \in S} E_i(\mu_s; \bar{\mu}_{N \setminus S}), \quad (3.3)$$

where  $\mu_s = \{\mu_i, i \in S\}$ ,  $\bar{\mu}_{N \setminus S} = \{\bar{\mu}_i, i \in N \setminus S\}$  и  $E_i(\mu_s; \bar{\mu}_{N \setminus S})$  — expected payoff of the player  $i$  in situation  $(\mu_s, \bar{\mu}_{N \setminus S})$ .  $\bar{W}(S)$  — this is the maximum payoff that the coalition can secure  $S$ , if the rest of the players use the strategies of the second minimizing player in zero-sum games  $\{\gamma_{N \setminus i, i}\}$ . Function type  $\bar{W}(S)$  can be described as follows. Taking into account the peculiarity of pairwise interaction, two types of edges can be distinguished along which games with the participation of players from  $S$ :

- such edges where both end vertices are occupied by players from the coalition  $S$ , i.e. edges  $(i, j), i \in S, j \in S$ . Since the goal of the players in  $S$  — maximization of the total payoff, players  $i$  и  $j$  can always ensure this by choosing strategies in such a way as to obtain the maximum total payoff on a given edge. This value is  $\max_{p,l}(a_{pl}^{ij} + c_{pl}^{ji})$ . Coalition  $N \setminus S$  it does not affect the game in any way  $i$  with  $j$ ;
- such edges, in which one end vertex lies in  $S$ , and the other belongs to the



players from the coalition  $N \setminus S$ , i.e. edges  $(i, j), i \in S, j \in N \setminus S$ . Maximal payoff, which player  $i$  can guarantee to itself, when player  $j$  use strategy  $\bar{\mu}_j$  — this is payoff in equilibrium situation, i. e. value of game  $w_{ij}$ .

Thus, the following statement holds.

**Proposition 3.1** *In a network game with pairwise interaction, the following equality holds:*

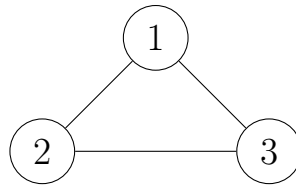
$$\bar{W}(S) = v(S), \quad S \subset N,$$

where characteristic function  $v(S)$  calculated by formulas (1.9)-(1.10).

The process of constructing the characteristic function in the classical way has a high computational complexity, since to calculate all values of the characteristic function it is necessary to solve  $2^N$  zero-sum games ( $N$  — number of players). The approach proposed in this paragraph is computationally simpler, since instead of solving the zero-sum game, only the maximization operation is used.

### Example

Let  $n = 3$  and network  $g$  has form, as depicted on figure 9.



**Figure 9.** The network for three players.

The following matrices are given:

$$\begin{matrix} A_{12}B_{21} & A_{13}B_{31} & A_{23}B_{32} \\ \left( \begin{array}{cc} (4; 8) & (3; 6) \\ (3; 3) & (4; 4) \end{array} \right); & \left( \begin{array}{cc} (4; 6) & (2; 3) \\ (2; 2) & (3; 5) \end{array} \right); & \left( \begin{array}{cc} (3; 5) & (2; 3) \\ (1; 4) & (4; 6) \end{array} \right). \end{matrix}$$

Equilibrium situations in each bimatrix game:

$$\bar{\mu}_{12} = (0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}), \quad \bar{\mu}_{13} = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}), \quad \bar{\mu}_{23} = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}),$$

where  $\bar{\mu}_{ij} = \{\bar{\mu}_{ij}^i, \bar{\mu}_{ji}^j\}$ , и  $\bar{\mu}_{ij}^i$  — equilibrium strategy of player  $i$  in bimatrix game  $\gamma_{ij}$ , and  $\bar{\mu}_{ji}^j$  — equilibrium strategy player  $j$  in the same bimatrix game  $\gamma_{ij}$ .

Values of individual payoffs of players in equilibrium situations

$$w_{12}^1 = 3,5, \quad w_{13}^1 = 3,75, \quad w_{12}^2 = 4, \\ w_{23}^2 = 2,75, \quad w_{13}^3 = 4, \quad w_{23}^3 = 4,5.$$

The values of the characteristic function, calculated in the classical way by the formulas(1.9)-(1.10), have the form

$$v(12) = \max_{p,l} (a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) + w_{13}^1 + w_{23}^2 = 12 + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} = 17\frac{5}{12},$$

$$v(13) = \max_{p,l} (a_{pl}^{13} + b_{pl}^{31}) + w_{12}^1 + w_{23}^3 = 10 + 3,5 + 4,5 = 18,$$

$$v(23) = \max_{p,l} (a_{pl}^{23} + b_{pl}^{32}) + w_{12}^2 + w_{13}^3 = 10 + 4 + 4 = 18,$$

$$v(1) = w_{12}^1 + w_{13}^1 = 3,5 + 3,75 = 7,25,$$

$$v(2) = w_{12}^2 + w_{23}^2 = 4 + 2,75 = 6,75,$$

$$v(3) = w_{13}^3 + w_{23}^3 = 4 + 4,5 = 8,5,$$

$$v(123) = \max_{p,l} (a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) + \max_{p,l} (a_{pl}^{13} + b_{pl}^{31}) + \max_{p,l} (a_{pl}^{23} + b_{pl}^{32}) = 32.$$

Now the values of the characteristic function will be calculated  $\overline{W}(S)$  using the approach described in paragraph 3.1. Strategies of every player  $i = 1, 2, 3$  in game  $\gamma_{N \setminus i, i}$ :

$$\mu_1 = (\mu_{12}; \mu_{13}), \quad \mu_2 = (\mu_{21}; \mu_{23}), \quad \mu_3 = (\mu_{31}; \mu_{32}),$$

where  $\mu_{12}$  — strategy of player 1 in game with player 2,  $\mu_{13}$  — strategy of player 1

in game with player 3, etc.

To find these strategies, it is needed to solve the corresponding games:

$$\mu_1 = \left(0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad \mu_2 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad \mu_3 = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

Thus, the following values of the function are obtained  $\overline{W}(S)$ :

$$\overline{W}(12) = \max_{p,l}(a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) + w_{13}^1 + w_{23}^2 = 12 + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} = 17\frac{5}{12},$$

$$\overline{W}(13) = \max_{p,l}(a_{pl}^{13} + b_{pl}^{31}) + w_{12}^1 + w_{23}^3 = 10 + 3,5 + 4,5 = 18,$$

$$\overline{W}(23) = \max_{p,l}(a_{pl}^{23} + b_{pl}^{32}) + w_{12}^2 + w_{13}^3 = 10 + 4 + 4 = 18,$$

$$\overline{W}(1) = w_{12}^1 + w_{13}^1 = 3,5 + 3,75 = 7,25,$$

$$\overline{W}(2) = w_{12}^2 + w_{23}^2 = 4 + 2,75 = 6,75,$$

$$\overline{W}(3) = w_{13}^3 + w_{23}^3 = 4 + 4,5 = 8,5,$$

$$\overline{W}(123) = \max_{p,l}(a_{pl}^{12} + b_{pl}^{21}) + \max_{p,l}(a_{pl}^{13} + b_{pl}^{31}) + \max_{p,l}(a_{pl}^{23} + b_{pl}^{32}) = 32.$$

Comparing them with values  $v(S)$ , we can conclude that  $v(S) = \overline{W}(S)$  for all  $S \subset N$ .

### 3.2 Approximation of characteristic function for multistage game

Let us now consider a general non-zero sum game.

Let  $G$  is  $\ell$ -stages game for  $n$  person, which happens as follows. Game  $G(z_1)$  starts in position  $z_1$  in which the game

$$\Gamma(z_1) = \langle N; X_1^{z_1}, X_2^{z_1}, \dots, X_n^{z_1}; K_1^{z_1}, \dots, K_n^{z_1} \rangle$$

takes place. Here  $N$  is a set of players,  $X_i^{z_1}$  is set of strategies and  $K_1^{z_1}$  is payoff function  $i \in N$  in  $z_1$ .

The transition from state to state in this multi-stage game will be carried out as follows. Let in a state  $z \in Z$  in game  $\Gamma(z)$  players choose following strategies:  $x_i(z) = (x_i^1(z), \dots, x_i^n(z))$ . As a result of the choice of these strategies, a transition is made to a new state  $z'$ , where is the game  $\Gamma(z')$ . That is, the state at the next stage of the game depends on the state at the current stage, and on the strategies chosen at this stage. Then one can define the mapping  $T : Z \rightarrow Z$  by formula:

$$z' = T(z; x_1(z), x_2(z), \dots, x_n(z)).$$

On the first stage in state  $z_1$ , in game  $\Gamma(z_1)$  players choose their strategies  $x_1(z_1) \in X_1^{z_1}, \dots, x_i(z_1) \in X_i^{z_1}, \dots, x_n(z_1) \in X_n^{z_1}$  and the game passes on the second stage in state  $z_2 = T(z_1; x_1(z_1), \dots, x_n(z_1)) = T(z_1; x(z_1))$ , where game  $\Gamma(z_2)$  is appears. On stage  $\ell$  in state  $z_\ell = T(z_\ell; x(z_{\ell-1}))$  game  $\Gamma(z_\ell)$  going on, after that game  $G(z_1)$  ends. The result is the following sequence of games:  $\Gamma(z_1), \Gamma(z_2), \dots, \Gamma(z_\ell)$ .

Strategy of player  $i \in N$   $u(\cdot), i \in N$  in game  $G(z_1)$  is function, which in every continuous simultaneous game  $\Gamma(z)$  choose control (strategy) of player  $i$  in this game, i.e.  $u_i(z) = x_i^z \in X_i^z$ .

Payoff function  $H_i, i \in N$  in game  $G(z_1)$  defines in following way

$$\begin{aligned} H_i(u_1(\cdot), \dots, u_i(\cdot), \dots, u_n(\cdot)) &= \sum_{t=1}^{\ell} K_i(u_1(z_t), \dots, u_i(z_t), \dots, u_n(z_t)) = \\ &= \sum_{t=1}^{\ell} K_i(x_1^{z_t}, \dots, x_i^{z_t}, \dots, x_n^{z_t}). \end{aligned}$$

The game  $G(z_1)$  will be considered in a cooperative form. Let it be assumed that

there is such a set of strategies  $\bar{u}(\cdot)$ , that

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n H_i(\bar{u}_1(\cdot), \dots, \bar{u}_n(\cdot)) &= \max_{u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot)} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^{\ell} K_i(u_1(z_t), \dots, u_n(z_t)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^{\ell} K_i(\bar{u}_1(z_t), \dots, \bar{u}_n(z_t)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Consequence  $\bar{z}_1, \bar{z}_2 = T(\bar{u}(z_1)), \dots, \bar{z}_t = T(\bar{u}(z_t)), \dots, \bar{z}_m = T(\bar{u}(z_m))$  — will called *cooperative trajectory* and denoted as  $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_t, \dots, \bar{z}_m)$ .

Characteristic function  $v(\bar{z}_1; S)$ ,  $S \subset N$  defined by classical way. Values of characteristic function  $v(\bar{z}_1; S)$  calculated as value of zero-sum game, based on a game  $G(z_1)$ , between coalition  $S$ , plays as first (maximizing) player and coalition  $N \setminus S$ , plays as second (minimizing) player. Here payoff of coalition  $S$  is a sum of payoffs of coalition members. The characteristic function  $v(\bar{z}_t, S)$  in subgame  $G(\bar{z}_t)$  with starting position on cooperative trajectory ( $\bar{z}_t \in \bar{z}$ ) is determined in a similar way .

Introduce new function:  $\bar{v}(\bar{z}_1; S)$ ,  $S \subset N$ . Following [8], this is the transformation of the characteristic function  $v(\bar{z}_1; S)$ , defined by classical way:

$$\bar{v}(\bar{z}_1; S) = \sum_{t=1}^m \frac{v(\bar{z}_t; S) \cdot \sum_{i=1}^n K_i(\bar{u}_1(\bar{z}_t), \dots, \bar{u}_n(\bar{z}_t))}{v(\bar{z}_1; N)}.$$

And analogously for characteristic function of subgame  $G(z_t)$  in arbitrary stage  $t$ , in state  $\bar{z}_t \in \bar{z}$ :

$$\bar{v}(\bar{z}_t; S) = \sum_{t=l}^m \frac{v(\bar{z}_t; S) \cdot \sum_{i=1}^n K_i(\bar{u}_1(\bar{z}_t), \dots, \bar{u}_n(\bar{z}_t))}{v(\bar{z}_t; N)}. \quad (3.5)$$

It can be shown, that function  $\bar{v}(S; \bar{z}_1)$  has all the properties of the characteristic

function in the game  $G(z_1)$ , namely:

$$\bar{v}(\bar{z}_1; N) = v(\bar{z}_1; N) = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m K_i(\bar{u}_1(z_t), \dots, \bar{u}_n(z_t)),$$

$$\bar{v}(\bar{z}_1; S_1 \cup S_2) \geq \bar{v}(\bar{z}_1; S_1) + \bar{v}(\bar{z}_1; S_2),$$

for any  $S_1, S_2 \subset N$ ,  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  (the superadditivity of the characteristic function is used here  $v(\bar{z}_1; S)$ ).

### 3.3 On the method of evaluating the core

As a cooperative solution of game  $G(z_1)$ , will be considered the core

Set of imputations  $\mathcal{M}[v(z_1; S)]$  in game  $G(z_1)$  defines in following way

$$\mathcal{M}[v(z_1; S)] = \{x = (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i = v(z_1; N), x_i \geq v(z_1; \{i\}), i \in N\}.$$

The core  $\mathcal{C}[v(z_1; S)] \subset \mathcal{M}[v(z_1; S)]$  in game  $G(z_1)$  defines as a set of such imputations  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , which satisfy following system of inequalities

$$\sum_{i \in S} \xi_i \geq v(\bar{z}_1; S),$$

$$\sum_{i \in N} \xi_i = v(\bar{z}_1; N).$$

Suppose that  $\mathcal{C}[v(z_t; S)] \neq \emptyset$ , for any  $t = \overline{1, \ell}$ .

Introduce following notations

$$\lambda(S) = \max_t \frac{v(\bar{z}_t; S)}{v(\bar{z}_t; N)},$$

and additional function:

$$\bar{v}(S; \bar{z}_1) = \sum_{t=1}^{\ell} \lambda(S) \sum_{i=1}^n K_i(\bar{u}_1(z_t), \dots, \bar{u}_n(z_t)).$$

Then

$$\bar{v}(\bar{z}_1; S) = \lambda(S)v(\bar{z}_1; N).$$

Similar for subgame  $G(z_t)$ :

$$\bar{v}(\bar{z}_t; S) = \lambda(t; S)v(\bar{z}_t; N) \quad (3.6)$$

Here  $\lambda(t, S) = \max_{t \leq p \leq \ell} \frac{v(\bar{z}_p; S)}{v(\bar{z}_p; N)}$ . It is easy to notice that:

$$\bar{v}(\bar{z}_t; S) \geq v(\bar{z}_t; S), \quad t = 1, \dots, \ell$$

It is also clear that

$$\bar{v}(\bar{z}_t; N) = v(\bar{z}_t; N), \quad t = 1, \dots, \ell$$

Then for all  $S_1, S_2$ ,  $S_1 \subset S_2$  from monotonicity of characteristic function  $v(\bar{z}_t; S)$  follows monotonicity of characteristic function  $\bar{v}(\bar{z}_t; S)$ :

$$\bar{v}(\bar{z}_t; S_1) \geq \bar{v}(\bar{z}_t; S_2)$$

Superadditivity property of characteristic function  $\bar{v}(S; \bar{z}_t)$ ,  $t = 1, \dots, m$  in general is not holds. However, the following result can be proved.

**Lemma 3.1** *Following inequality is hold:*

$$\bar{v}(\bar{z}_t; S) \geq v(\bar{z}_t; S) \quad (3.7)$$

**Proof.** Following inequalities are true

$$\bar{v}(\bar{z}_t; S) = \lambda(t, S)v(\bar{z}_t; N) = \max_{t \leq p \leq \ell} \frac{v(\bar{z}_p; S)}{v(\bar{z}_p; N)} v(\bar{z}_t; N) \geq v(\bar{z}_t; N) \frac{v(\bar{z}_t; S)}{v(\bar{z}_t; N)} \geq v(\bar{z}_t; S). \quad (3.8)$$

Lemma is proved.

Denote as  $\mathcal{C}[v(z_t; S)]$  subset of the core for game  $G(z_t)$ . Optimality principle  $\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_t; S)]$  is an analogue of the core and defined as the set of solutions of the system

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} \xi_i &\geq \bar{v}(z_t; S), \quad S \subset N, \\ \sum_{i \in N} \xi_i &= \bar{v}(z_t; N). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Suppose that set  $\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_t; S)] \neq \emptyset$ , for all  $t = 1, \dots, \ell$ .

In similar way set  $\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_t; S)]$  defines as a solution on system

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} \xi_i &\geq \bar{v}(z_t; S), \quad S \subset N, \\ \sum_{i \in N} \xi_i &= \bar{v}(z_t; N). \end{aligned} \quad (3.10)$$

**Theorem 3.1** *The following inclusion is hold:*

$$\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_t; S)] \subset \mathcal{C}[v(z_t; S)] \cap \bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_t; S)]. \quad (3.11)$$

**Proof.** Formula (3.11) follows from lemma (3.1) and from expression (3.8), i.e. from inequality  $\bar{v}(\bar{z}_1; S) \leq \bar{v}(\bar{z}_1; S)$  и  $v(\bar{z}_1; S) \leq \bar{v}(\bar{z}_1; S)$ ,  $S \subset N$ . Theorem is proved.

Because of  $\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_t; S)] \subset \bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_t; S)]$ ,  $\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_t; S)]$  is strongly time consistent, since  $\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_t; S)]$  is also time consistent (see [8]). It is also follow from theorem, that imputations from  $\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_t; S)]$  for all  $t = 1, \dots, \ell$  belong to the classical core of game  $G(z_t)$ . Thus, we construct strongly time-consistent subset of the core  $\mathcal{C}[v(z_t; S)]$  for

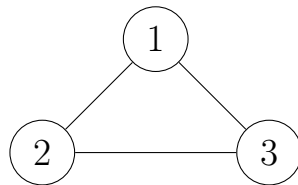


every subgame  $G(z_t)$ .

## Example

To illustrate the result, consider the following example of three stage three person network game with pairwise interactions. On the first stage  $z_1$  every player  $i \in N = \{1, 2, 3\}$  choose his behavior  $b_i^1$ , namely,  $n$ -dimensional vector with offers of connections with other players. The result of the first stage is a network  $g(z_1)$ . On the second stage in state  $z_2(g(z_1))$  which depend from network, chosen on the first stage, neighbours by network play simultaneously independent bimatrix games to each other. At the third stage, the players play bimatrix games depending on the strategies chosen at the previous stage of the game in the state  $z_2$ . After that, the players receive their payoffs and the game ends.

To maximize the total payoff, players should compose a complete graph by choosing the following behaviors at the first stage:  $b_1^1 = (0; 1; 1)$ ,  $b_2^1 = (1; 0; 1)$ ,  $b_3^1 = (1; 1; 0)$ . The following network will be got:



**Figure 10.** Network on the second stage.

Next, the values of the characteristic function are calculated and the core is constructed. The following matrices are given. The matrices in the third stage depend on the strategies chosen by the players in stage 2. If players choose pair of strategies  $(1, 1)$  then they pass to the stage 3 with matrices (1). In other case the play in stage 3 in bimatrix games with payoff matrices (2).

S	Second stage	Third stage (1)	Third stage (2)
{1, 2}	$\begin{pmatrix} (3; 5) & (8; 7) \\ (6; 4) & (5; 3) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (6; 2) & (1; 3) \\ (2; 2) & (0; 3) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (7; 1) & (3; 10) \\ (8; 3) & (4; 7) \end{pmatrix}$
{1, 3}	$\begin{pmatrix} (3; 3) & (5; 4) \\ (6; 1) & (2; 2) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (1; 4) & (1; 1) \\ (5; 2) & (2; 3) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (3; 4) & (1; 5) \\ (8; 7) & (6; 2) \end{pmatrix}$
{2, 3}	$\begin{pmatrix} (4; 7) & (5; 1) \\ (2; 6) & (3; 5) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (1; 1) & (3; 2) \\ (1; 2) & (2; 4) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (3; 9) & (4; 4) \\ (11; 0) & (5; 3) \end{pmatrix}$

**Tabular 3.** Possible payoff matrices at the second and third stages, depending on the strategies chosen by the players. The first column shows the pair of players between whom the bimatrix game is taking place.

The following values of the characteristic function are obtained, where  $v(S; z_t, k)$  is the value of the characteristic function in the subgame, starting in state  $z_t$ , on stage  $k$ :

S	$v(S; z_1, 2)$	$v(S; z_1, 3)$ (1)	$v(S; z_1, 3)$ (2)
{1, 2}	15	8	13
{1, 3}	9	7	15
{2, 3}	11	6	12
{1, 2, 3}	35	21	40

**Tabular 4.** The values of the characteristic function for the subgame starting at the position  $z_1$  and ends on stage  $k$ .

S	$v(S; z_2, 2)$	$v(S; z_2, 3)$ (1)	$v(S; z_2, 3)$ (2)
{1, 2}	22	12	24
{1, 3}	20	11	22
{2, 3}	17	11	23
{1, 2, 3}	35	21	40

**Tabular 5.** The values of the characteristic function for the subgame starting at the position  $z_2$ .

The values of the classical characteristic function are calculated by the formula:

$$v(S; z_1) = \max_{u_i, i \in S} \min_{u_j, j \in N \setminus S} \left[ \sum_{i=1}^S K_i(u_S(z_1), u_{N \setminus S}(z_1)) + v(S; z_2) \right],$$

where  $z_2 = T(z_1; u_S(z_1), u_{N \setminus S}(z_1))$ ,  $u_S = \{u_i | i \in S\}$ ,  $u_{N \setminus S} = \{u_i | i \in N \setminus S\}$ .

S	$v(S; z_1)$	$v(S; z_2)$
{1, 2}	28	46
{1, 3}	24	42
{2, 3}	23	40
{1, 2, 3}	75	75

**Tabular 6.** Values of characteristic function in multistage game.

Next, the values of the characteristic function are calculated  $\bar{v}(S; \bar{z}_1)$  with using formula (3.5):

$$\bar{v}(\{12\}; \bar{z}_1) = \frac{28}{75}0 + \frac{46}{75}35 + \frac{24}{40}40 = 45\frac{7}{15},$$

$$\bar{v}(\{13\}; \bar{z}_1) = \frac{24}{75}0 + \frac{42}{75}35 + \frac{22}{40}40 = 41\frac{3}{5},$$

$$\bar{v}(\{23\}; \bar{z}_1) = \frac{23}{75}0 + \frac{40}{75}35 + \frac{23}{40}40 = 41\frac{2}{3}.$$

Finally, write values of characteristic functions  $\bar{\bar{v}}(S; \bar{z}_1)$  calculated by formula (3.6):

$$\bar{\bar{v}}(\{12\}; \bar{z}_1) = \frac{46}{75}75 = 46,$$

$$\bar{\bar{v}}(\{13\}; \bar{z}_1) = \frac{42}{75}75 = 42,$$

$$\bar{\bar{v}}(\{23\}; \bar{z}_1) = \frac{23}{40}75 = 43\frac{1}{8}.$$

Now construct analogues of the core  $\bar{\bar{C}}[\bar{v}(z_1; S)]$ ,  $\bar{\bar{C}}[\bar{v}(z_2; S)]$  and  $\bar{\bar{C}}[\bar{v}(z_3; S)]$  using characteristic functions  $\bar{v}(\bar{z}_1; S)$ ,  $\bar{v}(\bar{z}_2; S)$  и  $\bar{v}(\bar{z}_3; S)$ .

It is easy to show, that sets  $\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_1; S)]$ ,  $\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_2; S)]$  are coincide. The following systems are obtained:

$$\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_1; S)]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 + x'_2 \geq 46 \\ x'_1 + x'_3 \geq 42 \\ x'_2 + x'_3 \geq 43\frac{1}{8} \\ x'_1 + x'_2 + x'_3 = 75 \end{array} \right.$$

$$\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_3; S)]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 24 \\ x_1 + x_3 \geq 22 \\ x_2 + x_3 \geq 23 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 40 \end{array} \right.$$

Let the imputation be chosen  $x = (30; 20; 25)$  from set  $\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_1; S)]$ . As imputation distribution procedure took  $\beta^1 = (7; 7; 17)$ ,  $\beta^2 = (5; 6; 10)$ ,  $\beta^3 = (5; 5; 13)$ . And also the imputation  $x'$  will be chosen from set  $\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_3; S)]$ , for example  $x' = (15; 15; 10)$ . One can get following true inequalities:

$$\left\{ \begin{array}{l} 14 + 11 + 15 + 15 \geq 46 \\ 14 + 10 + 15 + 10 \geq 42 \\ 11 + 10 + 15 + 10 \geq 43\frac{1}{8} \end{array} \right.$$

Which proves the strongly time consistency of the core  $\bar{\mathcal{C}}[\bar{v}(z_1; S)]$ .

Another non-classical approach to defining the characteristic function in network games with pairwise interaction will be considered in the next chapter.

## Chapter 4

# General form of network games with pairwise interactions

A multistage non-zero-sum game is considered, which is based on pairwise interaction, i.e. interaction along the edges of the network. The game has a finite number of stages. At the first stage, a network is formed by the simultaneous choice of communication vectors, and at subsequent stages, simultaneous non-zero-sum games take place, the payoffs in which depend on the controls selected at the previous stage, as well as on the behavior at the current stage. Players, at all stages, except the first, have the opportunity to modify the network by removing any of their connections. For the model, the characteristic function is constructed in a non-classical way based on the calculation of optimal controls. For the case of a single-stage subgame, the supermodularity of the characteristic function is proved. As a solution, the Shapley value is considered, a simplification of the formula for calculating the components of the Shapley value for a given characteristic function is given. Also considered as a solution is a subset of the core (IDP-core) [7, 38]. Strongly time consistency has been proven for such a solution.

### 4.1 The model

Let an abstract space be given  $\mathbb{Z}$ , and called space of states. On the first stage in starting state  $z_0 \in \mathbb{Z}$ , players formed a network  $g(z_0)$ , where players are vertices, and connections between players are edges. In every following state  $z_k \in \mathbb{Z}$  players

can change the network by removing any connections, after which a non-zero-sum game  $\Gamma(z_k)$  with  $n$  players takes place on network  $g(z_k)$ .

The rule of network formation  $g(z_0)$  in the first stage will be determined as follows. Similar to how it was done in chapter 1, in the initial state  $z_0$  every player  $i \in N$  choose his behavior  $b_i(z_0) = (b_{i1}(z_0), \dots, b_{in}(z_0))$  —  $n$ -dimensional vector with connection offers to other players, with components 0 or 1. Introduce following notations:  $M_i \subseteq N \setminus i$  — those players, whom player  $i \in N$  can offer a connection, value  $a_i \in \{0, \dots, n - 1\}$  is equal to maximal number of connections for player  $i$ . If  $M_i = N \setminus \{i\}$ , player  $i$  can offer a connection to all players, and if  $a_i = n - 1$ , than player  $i$  can support any number of possible connections. Thus, each player is limited by the number of connections  $a_i$ , which he can offer, and by set  $M_i$  of players, available to create a connection with this player. Thus, at the first stage, the control  $y_i(z_0)$  is a vector with connection offers  $b_i(z_0)$ .

Player  $i$  chose subset of players  $Q_i \subset M_i$ , with whom he want to crate a connection.

Than the components of vector  $b_i(z_0)$  defines in following way:

$$b_{ij}(z_0) = \begin{cases} 1, & \text{if } j \in Q_i, \\ 0, & \text{if } j \notin Q_i \text{ or } i = j, \end{cases}$$

under condition

$$\sum_{j \in N} b_{ij}(z_0) \leq a_i. \quad (4.1)$$

Condition (4.1) means that the number of possible connections is limited for each player. It should be noted that  $|Q_i| \leq a_i$ . Obviously, the connection can also be realized only with a player from the subset  $Q_i$ .

Further, it is assumed that the connection  $ij$  created if and only if  $b_{ij}(z_0) = b_{ji}(z_0) = 1$ , i. e.  $i \in Q_j$ ,  $j \in Q_i$ . Formed connections  $ij$  form the edges of the network  $g(z_0)$ , when players are vertices, i. e., if  $b_{ij} = b_{ji} = 1$ , than in network  $g$  an edge with end vertices  $i$  and  $j$  appears.

The set of neighbours for player  $i$  in network  $g(z_0)$  notes as  $N_i(g(z_0))$ , i. e.  $N_i(g(z_0)) = \{j \in N \setminus \{i\} : ij \in g(z_0)\}$ .

After network formation  $g(z_0)$  players pass to a state  $z_1(g(z_0))$ , which defines by network  $g(z_0)$ . In state  $z_1(g(z_0))$  players are given the opportunity to remove some of the previously established connections, thus rebuilding the network  $g(z_0)$  in  $g(z_1)$  and forming new sets of neighbors  $N_i(g(z_1))$ . On network  $g(z_1)$  plyers play game  $\Gamma(z_1)$ , which is a simultaneous non-antagonistic game between neighbors on the network.

So, on the second stage, in the state  $z_1$  payer  $i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , choose control  $y_i(z_1) = (b_i(z_1), x_i(z_1))$  from set  $Y_i$ , and this control, unlike the first stage, contains an additional component  $x_i(z_1)$  of behavior in game  $\Gamma(z_1)$ . Here  $b_i(z_1)$  — is a vector with components 0 or 1, obtained by the following rule:

$$b_{ij}(z_1) = \begin{cases} 1, & \text{save connection } ij, \\ 0, & \text{delete connection } ij, \end{cases}$$

i. e. the player in the second stage has the ability to remove the existing connection, but does not have the ability to create new ones. Component  $x_i(z_1)$  of control  $y_i(z_1) = (b_i(z_1), x_i(z_1))$  represents player behavior  $i$  in game  $\Gamma(z_1)$  and is selected from the set  $X_i(z_1)$ , determined in a state  $z_1$ .

Let  $y(z_1) = (y_1(z_1), \dots, y_n(z_1))$  — is strategy profile in game  $\Gamma(z_1)$ . Payoff of player  $i$  in game  $\Gamma(z_1)$  signs in this way:

$$H_i(z_1) = \sum_{j \in N_i(g(z_1))} h_i(y_i(z_1), y_j(z_1)),$$

where  $g(z_1)$  — network which has arisen as a result of the strategy profile  $y(z_1)$ , which provides the ability to remove some edges from the network  $g(z_0)$ , and functions  $h_i(x_i(z_1), x_j(z_1)) \geq 0$  given for all players  $i \in N$  and all pairs  $ij$ , i. e. all edges of network  $g(z_1)$  and all possible states  $z \in \mathbb{Z}$ .

Let in state  $z_{k-1} \in Z$  in game  $\Gamma(z_{k-1})$  controls  $(y_1(z_{k-1}), \dots, y_n(z_{k-1}))$  was chosen by players  $i \in N$ . As a result of the choice of these controls, a pass is made to the state  $z_k$ , where game  $\Gamma(z_k)$  appears, with payoffs  $h_i(x_j(z_k), x_i(z_k))$ , depending on the controls selected in the state  $z_{k-1}$ . That is, the state at the next stage of the game depends on the state at the current stage and on the controls selected at this stage. Can get mapping  $T : Z \times Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n \rightarrow Z$  by formula

$$z_k = T(z_{k-1}; y_1(z_{k-1}), y_2(z_{k-1}), \dots, y_n(z_{k-1})), \quad k = \overline{1, \ell} \quad (4.2)$$

Thus, mapping  $T$  uniquely identifies the state  $z_k$ , which follows the state  $z_{k-1}$ , provided that the controls  $y_1(z_{k-1}), y_2(z_{k-1}), \dots, y_n(z_{k-1})$  have been selected.

Next, a multi-stage game is considered  $G(z)$ , which happens as follows. Game  $G(z_0)$  starts in state  $z_0$ . In state  $z_0$  a network is being formed  $g(z_0)$ , after which the players enter the state  $z_1$ . In state  $z_{k-1}$ ,  $k = \overline{1, \ell - 1}$  players choose controls  $y_1(z_{k-1}), y_2(z_{k-1}), \dots, y_n(z_{k-1})$ , play game  $\Gamma(z_{k-1})$  and pass to a state  $z_k = T(z_{k-1}; y_1(z_{k-1}), y_2(z_{k-1}), \dots, y_n(z_{k-1}))$ . Game ends on stage  $\ell + 1$  in state  $z_\ell$ . Thus, as a result of the choice of controls at each stage of the game, the path is realized  $z_0, z_1, \dots, z_k, \dots, z_\ell$ .

State  $z$  is called *admissible*, if there is a sequence of controls and a sequence of states generated by it  $z_0, z_1, \dots, z_k$ ,  $k \leq \ell$ , which defines by formula(4.2), such that  $z_k = z$ .

The concept of a strategy in the resulting multistage game is introduced in a natural way:  $y_i(\cdot)$ ,  $i \in N$ , — as a rule, which to each valid state  $z$  of game matches components  $b_i(z), x_i(z)$  of controls in this state, i. e. choice of connections to be removed and choice of behavior  $x_i(z)$  in game  $\Gamma(z)$ . From the above description it follows that any strategy profile  $y(\cdot) = \{y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)\}$  uniquely determines the path in the game, and, consequently, the payoff of each player as the sum of his



payoffs in games realized along the path:

$$H_i(y(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j \in N_i(g(z))} h_i(y_i(z_k), y_j(z_k)).$$

Note that the set of all possible paths in a multistage game  $G(z)$  is finite, and, therefore, the set of all admissible state in game is also finite. Denote this set as  $\bar{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$ .

Let it be assumed that the players choose controls  $\bar{y}_i(z)$ ,  $i \in N$ , which maximize their total payoff in game  $G(z)$ , i. e.

$$\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i \in N} H_i(\bar{y}_1(z_k), \dots, \bar{y}_n(z_k)) = \max_y \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i \in N} H_i(y_1(z_k), \dots, y_n(z_k)). \quad (4.3)$$

Strategy profile  $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  will be called *cooperative behavior* in game  $G(z)$ , and corresponding to controls  $\bar{y}_i(z)$ ,  $i \in N$ , trajectory  $(\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_\ell)$  – will be called *cooperative trajectory* ( $z_0 = \bar{z}_0$ ).

Single stage game  $\Gamma(z)$  is considered in arbitrary state  $z \in \mathbb{Z}$  in cooperative form and its characteristic function is determined  $v(z; S)$ ,  $S \subset N$ , for every subset (coalition)  $S \subset N$  by following rule:

$$\begin{aligned} v(\emptyset; z) &= 0, \\ v(\{i\}; z) &= 0, \\ v(z; \{ij\}) &= \begin{cases} h_i(\bar{x}_i(z); \bar{x}_j(z)) + h_j(\bar{x}_j(z); \bar{x}_i(z)), & \text{if } j \in N_i(g(z)), \\ 0, & \text{other,} \end{cases} \quad (4.4) \\ v(z; S) &= \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g(z)) \cap S} h_i(\bar{x}_i(z); \bar{x}_j(z)), \\ v(z; N) &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i(g(z))} h_i(\bar{x}_i(z); \bar{x}_j(z)), \end{aligned}$$

where  $\bar{x}_i(z), \bar{x}_j(z)$  are obtained according to the equality (4.3).

Here, unlike works [9, 10], in which the characteristic function was constructed as the maximin (lower) value of the game between the coalition  $S$  and additional coalition  $N \setminus S$ , the process of constructing this function is carried out differently. To calculate the value of the characteristic function, it is necessary to determine the cooperative behavior in the game  $G(z_0)$ , fix the optimal strategies and then calculate values of characteristic function  $v(z_k; S)$ ,  $k = \overline{1, \ell}$ , in assumption, that players from coalition  $S$  choose cooperative behavior as a control components.

Next, you should find the characteristic function  $V(z_k; S)$  of multistage game  $G(z_k)$ , which starts in state  $z_k$ , as the sum of the payoffs of the coalitions  $S$  along the cooperative trajectory  $(\bar{y}(z_0), \bar{y}(z_1), \dots, \bar{y}(z_\ell))$  in  $\ell - k + 1$  stages, starts from  $k$ :

$$V(z_k; S) = \sum_{r=k}^{\ell} v(z_r; S) = \sum_{r=k}^{\ell} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g(z_r)) \cap S} h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r)),$$

$$V(S; z_\ell) = v(z_\ell; S).$$

## 4.2 Supermodularity $v(S; z)$

Here the question about supermodularity of characteristic function  $v(z; S)$  will be considered (see (1.14)).

**Theorem 4.1** *Characteristic function  $v(z; S)$  in game  $\Gamma(z)$  is supermodular.*

**Proof.** To prove the theorem, it is necessary to verify the inequality (1.14) for characteristic function  $v(z; S)$  (4.4). To shorten notation instead of  $h_i(\bar{x}_i(z), \bar{x}_j(z))$  will be used notation  $h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ , and instead of  $N_i(g(z))$  — notation  $N_i$ . In this case, this does not contradict logic, since only one stage of the game is considered, and the behavior, like the set of neighbors, does not change during the stage. The following inequality holds:

$$\sum_{i \in X \setminus Y} \left( \sum_{j \in N_i \cap (X \setminus Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i \in X \cap Y} \left( \sum_{j \in N_i \cap (X \setminus Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) + \\
& + \sum_{i \in Y \setminus X} \left( \sum_{j \in N_i \cap (X \setminus Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) \geq \\
& \geq \sum_{i \in X} \sum_{j \in N_i \cap X} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{i \in Y} \sum_{j \in N_i \cap Y} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) - \sum_{i \in X \cap Y} \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j). \quad (4.5)
\end{aligned}$$

On the left and right sides of the inequality (4.5) one can see similar terms, namely

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in X \setminus Y} \left( \sum_{j \in N_i \cap (X \setminus Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) + \\
& + \sum_{i \in X \cap Y} \left( \sum_{j \in N_i \cap (X \setminus Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) = \sum_{i \in X} \sum_{j \in N_i \cap X} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j).
\end{aligned}$$

After reducing them, we get the expression

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in X \setminus Y} \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{i \in X \cap Y} \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \\
& + \sum_{i \in Y \setminus X} \left( \sum_{j \in N_i \cap (X \setminus Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) \geq \\
& \geq \sum_{i \in Y} \sum_{j \in N_i \cap Y} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) - \sum_{i \in X \cap Y} \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j).
\end{aligned}$$

After transferring the negative term from the right side of the inequality to the left side, we get:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in X \setminus Y} \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{i \in X \cap Y} \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{i \in X \cap Y} \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \\
& + \sum_{i \in Y \setminus X} \left( \sum_{j \in N_i \cap (X \setminus Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \right. \\
& \left. + \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) \geq \sum_{i \in Y} \sum_{j \in N_i \cap Y} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j).
\end{aligned}$$

There is a second group of similar terms:

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in X \cap Y} \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{i \in X \cap Y} \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \\ & + \sum_{i \in Y \setminus X} \left( \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{j \in N_i \cap (X \cap Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) = \sum_{i \in Y} \sum_{j \in N_i \cap Y} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j). \end{aligned}$$

After reducing them, the final inequality looks like this

$$\sum_{i \in X \setminus Y} \sum_{j \in N_i \cap (Y \setminus X)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \sum_{i \in Y \setminus X} \sum_{j \in N_i \cap (X \setminus Y)} h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \geq 0. \quad (4.6)$$

Due to the non-negativity of the payoffs  $h_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ , the last inequality is true. Thus, we have proved the inequality (1.14), and constructed characteristic function  $v(S; z)$  in game  $\Gamma(z)$  is supermodular.

### 4.3 The Shapley value

As a cooperative solution of game  $\Gamma(z)$  the Shapley value (1.19) will be considered. Due to the fact that the network can be formed in an arbitrary way, it is not possible to obtain an explicit simplified form of the formula for the Shapley value components. However, a simplification of the following form can be made: calculate the difference  $v(z; S) - v(z; S \setminus \{i\})$ . This is possible due to the structure of the characteristic function (4.4).

Values of characteristic function  $v(z; S)$ , when  $i \in S$ :

$$v(z; S) = \sum_{q \in S} \sum_{r \in N_q(g(z)) \cap S} h_q(\bar{x}_q(z), \bar{x}_r(z)) + \sum_{p \in S \cap N_i(g(z))} [h_i(\bar{x}_i(z), \bar{x}_p(z)) + h_p(\bar{x}_p(z), \bar{x}_i(z))] \quad (4.7)$$

Here the first term — these are the payoffs of the players from the coalition  $S$  excluding player  $i$ , and the second term is what the coalition gets (and player  $i$  including), from cooperation with player  $i$ .

Values of characteristic function  $v(z; S \setminus \{i\})$ :

$$v(z; S) = \sum_{q \in S} \sum_{r \in N_q(g(z)) \cap S} h_q(\bar{x}_q(z), \bar{x}_r(z)) \quad (4.8)$$

Subtracting from (4.7) expression (4.8), the final value of the difference is obtained

$$v(z; S) - v(z; S \setminus \{i\}) = \sum_{j \in N_i(g(z)) \cap S} (h_i(\bar{x}_i(z), \bar{x}_j(z)) + h_j(\bar{x}_j(z), \bar{x}_i(z))).$$

Substituting the obtained value of the difference into the formula for the components of the Shapley value (1.19), its simplified form is obtained

$$\varphi_i[v] = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} \sum_{j \in N_i(g(z)) \cap S} (h_i(\bar{x}_i(z), \bar{x}_j(z)) + h_j(\bar{x}_j(z), \bar{x}_i(z))) \quad i \in N. \quad (4.9)$$

Despite the need to calculate the weight coefficient for each coalition, this type of formula does not require the determination of the characteristic function for all coalitions  $S \subset N$ . To calculate the value of the component of the Shapley value, it is enough to know the structure of the network  $g(z)$  and strategies of players.

#### 4.4 IDP-core and its strongly time consistency

Denote as  $\mathcal{M}[V(z_k; S)]$  set of all imputations in game  $G(z_0)$ .

**Definition 4.1** Function  $\beta_i = (\beta_i^0, \dots, \beta_i^\ell)$ ,  $i \in N$ , is called imputation distribution procedure (IDP) for  $\xi \in \mathcal{M}[V(z_k; S)]$  (see [9, 13]), if

$$\xi_i = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_i^r, \quad i \in N.$$

As optimality principle will be considered a subset of the core for game  $G(\bar{z}_k)$  — an

IDP-core (see [7, 38])  $\mathcal{I}[V(\bar{z}_k; S)]$ , i. e. such set of IDP, which satisfy conditions

$$\sum_{i \in S} \beta_i \geq V(\bar{z}_k; S) = \sum_{r=k}^{\ell} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g(z_r)) \cap S} h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r)), \quad S \subset N, \quad S \neq N,$$

$$\sum_{i=1}^N \beta_i = V(\bar{z}_k; N) = \sum_{r=k}^{\ell} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i(g(z_r)) \cap N} h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r)),$$

where  $\beta_i = (\beta_1^i, \dots, \beta_k^i, \dots, \beta_\ell^i)$  satisfy following conditions:

$$\sum_{i \in S} \beta_i^k \geq v(\bar{z}_k; S) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g(z_k)) \cap S} h_i(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k)), \quad S \subset N, \quad (4.10)$$

$$\sum_{i=1}^N \beta_i^k = v(\bar{z}_k; N) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i(g(z_k)) \cap N} h_i(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k)). \quad (4.11)$$

Let be supposed that all  $\mathcal{I}[V(\bar{z}_k; S)] \neq \emptyset$ .

**Definition 4.2** *Optimality principle [10]  $\mathcal{I}[V(\bar{z}_0; S)] \neq \emptyset$  is strongly time consistent in game  $G(\bar{z}_0)$ , if*

$$1) \mathcal{I}[V(\bar{z}_k; S)] \neq \emptyset, \quad k = \overline{0, \ell};$$

2) *For every imputation  $x \in \mathcal{I}[V(\bar{z}_0; S)]$  there exists such imputation distribution procedure  $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_\ell)$ ,  $\xi = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_j$ , that*

$$\sum_{r=0}^k \beta_r \oplus \mathcal{I}[V(\bar{z}_{k+1}; S)] \subset \mathcal{I}[V(\bar{z}_0; S)], \quad k = \overline{0, \ell}.$$

Here symbol  $\oplus$  means, that if  $a \in R^n$ ,  $B \subset R^n$ , than  $a \oplus B = \{a + b : b \in B\}$ .

**Proposition 4.1** *Optimality principle  $\mathcal{I}[V(\bar{z}_0; S)]$  is strongly time consistent in game  $G(\bar{z}_0)$ .*

**Proof.** Let some imputation  $\xi_0 \in \mathcal{I}[V(\bar{z}_0; S)]$ . Then following inequality is true

$$\sum_{i \in S} \xi_{i0} \geq \sum_{r=0}^{\ell} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g(z_r)) \cap S} h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r)), \quad S \subset N, \quad S \neq N,$$

$$\sum_{i=1}^N \xi_{i0} = \sum_{r=0}^{\ell} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_i(g(z_r)) \cap N} h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r)).$$

By definition, one can write the division  $\xi_0$  as a sum of IDPs:

$$\xi_0 = \sum_{k=0}^{\ell} \bar{\beta}_k, \quad \bar{\beta}_k \in \mathcal{C}(v(\bar{z}_k); S), \quad (4.12)$$

where  $\mathcal{C}(v(\bar{z}_k); S)$  — the core of single-stage game  $\Gamma(\bar{z}_k)$ , constructed by characteristic function  $v(\bar{z}_k); S$ .

In a similar way, one can represent an arbitrary imputation  $\xi_{k+1} \in \mathcal{I}[V(\bar{z}_{k+1}; S)]$  as following sum:

$$\xi_{k+1} = \sum_{r=k+1}^{\ell} \bar{\bar{\beta}}_r, \quad \bar{\bar{\beta}}_r \in \mathcal{C}(v(\bar{z}_r); S). \quad (4.13)$$

Took as IDP vector  $\beta = (\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_k, \bar{\bar{\beta}}_{k+1}, \dots, \bar{\bar{\beta}}_{\ell})$  and construct new vector:

$$\hat{\xi}_0 = \sum_{r=0}^k \bar{\beta}_r + \xi_{k+1} = \sum_{r=0}^k \bar{\beta}_r + \sum_{r=k+1}^{\ell} \bar{\bar{\beta}}_r \geq \sum_{r=0}^{\ell} \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i(g(z_r)) \cap S} h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r)).$$

Thus, the vector  $\hat{\xi}_0$  is the sum of the components IDP  $\beta$  and arbitrary imputation  $\xi_{k+1} \in \mathcal{I}[V(\bar{z}_{k+1}; S)]$ . Vector  $\hat{\xi}_0 \in \mathcal{I}[V(\bar{z}_0; S)]$ , which proves the strongly time consistency of the optimality principle  $\mathcal{I}[V(\bar{z}_0; S)]$ . Proposition is proved.

## Example

Consider the case, with  $N = 3$ ,  $\ell = 3$ , i. e. the game consists of four stages and

starts in the state  $z_0$ . In this state sets  $M_i$  are given. Remind, that they are sets, whom player  $i$  can offer a connection

$$M_1 = \{2, 3\}, \quad M_2 = \{1, 3\}, \quad M_3 = \{1, 2\},$$

as well as restrictions on the number of connections that each player can support:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2.$$

In state  $z_0$  players choose vectors of behaviors  $b_i(z_0)$ , after that the network  $g(z_0)$  is formed and players pass to a state  $z_1$ . In every state  $z_k$ ,  $k \geq 1$  players choose controls  $y_i(z_k) = (b_i(z_k), x_i(z_k))$ , where  $b_i(z_k)$  — vector of regulation of connections of the player (with values 1 and 0), and  $x_i(z_k)$  is equal to

$$x_1(z_k) = x_1(z) \in X_1 = \{x_1^1(z), x_1^2(z)\},$$

$$x_2(z_k) = x_2(z) \in X_2 = \{x_2^1(z), x_2^2(z)\}, \quad x_3(z_k) = x_3(z) \in X_3 = \{x_3^1(z), x_3^2(z)\}$$

I. e. every player  $i$  has the same set of control components  $X_i$  in all state  $z_k$ .

For all admissible states  $z_k$ ,  $k \geq 1$ , and all possible strategies payoffs are given  $h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r))$  in two types:  $h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r))$  and  $h'_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r))$ .

In state  $z_1$  the game happens with payoffs  $h(\bar{x}_i(z_1), \bar{x}_j(z_1))$ . In state  $z_1$  every player  $i \in N$  chose his component of control  $x_i(z_1)$ , and if all  $x_i(z_1) = x_i^1(z_1)$ ,  $i \in N$ , then player pass to the state  $z_2$ , where play game with similar payoffs  $h_i(\bar{x}_i(z_2), \bar{x}_j(z_2))$ . If at least one of components  $x_i(z_1) = x_i^2(z_1)$ ,  $i \in N$ , then in state  $z_2$  players play game with payoffs  $h'_i(\bar{x}_i(z_2), \bar{x}_j(z_2))$ . The transition to the state is carried out in a similar way  $z_3$ : if all  $x_i(z_1) = x_i^1(z_1)$ ,  $i \in N$ , then players pass to a state  $z_3$  where use payoffs  $h_i(\bar{x}_i(z_3), \bar{x}_j(z_3))$ , if at least one of components  $x_i(z_1) = x_i^2(z_1)$ ,  $i \in N$ , — then payoffs will be  $h'_i(\bar{x}_i(z_3), \bar{x}_j(z_3))$ .

Payoffs  $h_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r))$ :



$$\begin{aligned}
h_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1) &= 4, & h_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_3^1) &= 5, & h_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_3^1) &= 5, \\
h_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^1) &= 3, & h_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_3^1) &= 3, & h_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_3^1) &= 1, \\
h_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^2) &= 5, & h_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_3^2) &= 1, & h_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_3^2) &= 4, \\
h_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2) &= 5, & h_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_3^2) &= 2, & h_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_3^2) &= 1, \\
h_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_1^1) &= 4, & h_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_1^1) &= 5, & h_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_2^1) &= 5, \\
h_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_1^2) &= 3, & h_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_1^2) &= 3, & h_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_2^2) &= 1, \\
h_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_1^1) &= 5, & h_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_1^1) &= 1, & h_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_2^1) &= 4, \\
h_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_1^2) &= 5, & h_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_1^2) &= 2, & h_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_2^2) &= 1;
\end{aligned}$$

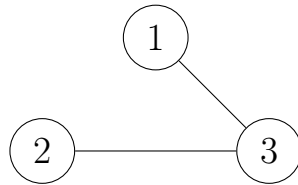
payoffs  $h'_i(\bar{x}_i(z_r), \bar{x}_j(z_r))$ :

$$\begin{aligned}
h'_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1) &= 8, & h'_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_3^1) &= 6, & h'_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_3^1) &= 12, \\
h'_2(\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^1) &= 3, & h'_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_3^1) &= 5, & h'_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_3^1) &= 10, \\
h'_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^2) &= 7, & h'_1(\bar{x}_1^1, \bar{x}_3^2) &= 4, & h'_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_3^2) &= 5, \\
h'_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2) &= 4, & h'_1(\bar{x}_1^2, \bar{x}_3^2) &= 3, & h'_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_3^2) &= 4, \\
h'_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_1^1) &= 8, & h'_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_1^1) &= 6, & h'_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_2^1) &= 12, \\
h'_2(\bar{x}_2^1, \bar{x}_1^2) &= 3, & h'_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_1^2) &= 5, & h'_3(\bar{x}_3^1, \bar{x}_2^2) &= 10, \\
h'_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_1^1) &= 7, & h'_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_1^1) &= 4, & h'_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_2^1) &= 5, \\
h'_2(\bar{x}_2^2, \bar{x}_1^2) &= 4, & h'_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_1^2) &= 3, & h'_3(\bar{x}_3^2, \bar{x}_2^2) &= 4.
\end{aligned}$$

In state  $z_0$  players choose their behaviors in order to maximize the total payoff of all players:

$$b_1(z_0) = (0, 0, 1), \quad b_2(z_0) = (0, 0, 1), \quad b_3(z_0) = (1, 1, 0)$$

As a result, a network is formed, which has the form shown on the figure 11.



**Figure 11.** Network on the first stage.

To maximize the overall payoff, it is beneficial for the players to keep in touch with all neighbors throughout the game, i. e.  $b_i(z_0) = b_i(z_1) = b_i(z_2) = b_i(z_3)$ , for all  $i \in N$ . The components of controls  $\bar{y}_i(z)$  of all players

$$\bar{x}_1(z_1) = x_1^2, \quad \bar{x}_2(z_1) = x_2^1, \quad \bar{x}_3(z_1) = x_3^1,$$

$$\bar{x}_1(z_2) = x_1^1, \quad \bar{x}_2(z_2) = x_2^2, \quad \bar{x}_3(z_2) = x_3^1,$$

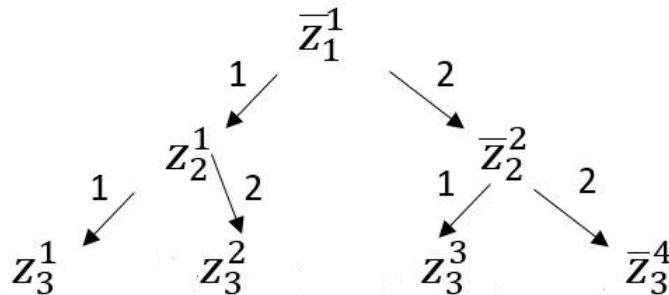
$$\bar{x}_1(z_3) = x_1^1, \quad \bar{x}_2(z_3) = x_2^2, \quad \bar{x}_3(z_3) = x_3^1.$$

Values of characteristic function  $v(z; S)$  calculate in all states on cooperative path, except  $z_0$ , because on the first stage only network is formed and players do not receive any payoffs:

$S$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{123\}$
$v(S; \bar{z}_1)$	0	0	0	6	6	10	16
$v(S; \bar{z}_2)$	0	0	0	14	12	20	32
$v(S; \bar{z}_3)$	0	0	0	14	12	20	32

**Tabular 7.** Values of characteristic function  $v(z; S)$ .

In state  $z_1$  players choose their controls and, depending on this, they pass into a new state. In each state, the players have only two alternatives: either, as a result of the choice of controls, they will play the game  $\Gamma(z_k)$  with payoffs  $h_i(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k))$  in the next state, or pass to the state, where the game will take place with payoffs  $h'_i(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k))$ .



**Figure 12.** Tree of all possible states in game.

Numbers 1 and 2 above arrows (fig. 2) show, what payoffs will be used by players in the next state: 1 means  $h_i(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k))$ , 2 means  $h'_i(\bar{x}_i(z_k), \bar{x}_j(z_k))$ .

Cooperative path (optimal trajectory) in game  $G(z_0)$ :  $\bar{z} = (z_0, z_1^1, z_2^2, z_3^4) = (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$ . The result of calculating characteristic function of multistage game  $G(z_0)$ :

$S$	{1}	{2}	{3}	{12}	{13}	{23}	{123}
$V(S; \bar{z}_3)$	0	0	0	14	12	20	32
$V(S; \bar{z}_2)$	0	0	0	28	24	40	64
$V(S; \bar{z}_1)$	0	0	0	34	30	50	80

**Tabular 8.** The values of characteristic function for multistage game  $G(z_0)$ .

Consider an imputation  $q \in \mathcal{I}[V(\bar{z}_1); S]$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \geq 34, \\ x_1 + x_3 \geq 30, \\ x_2 + x_3 \geq 50, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 80. \end{array} \right.$$

As IDP  $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$  an imputation  $\alpha^k \in \mathcal{I}[v(\bar{z}_k); S]$  is taken, and it is satisfy conditions (4.12), (4.13),  $\beta_k = \alpha$ ,  $k = 1, 2, 3$ ;

$\beta_0$  set equal to zero (since the players do not receive payoffs at the first stage - the

network formation stage), and  $\beta_1$  satisfy following system

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^1 \geq 0, \\ \alpha_2^1 \geq 0, \\ \alpha_3 \geq 0, \\ \alpha_1^1 + \alpha_2^1 \geq 6, \\ \alpha_1^1 + \alpha_3^1 \geq 6, \\ \alpha_2^1 + \alpha_3^1 \geq 10, \\ \alpha_1^1 + \alpha_2^1 + \alpha_3^1 = 16, \end{array} \right.$$

$\beta_2$  and  $\beta_3$  — satisfy inequalities, where  $k = 2, 3$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^k \geq 0, \\ \alpha_2^k \geq 0, \\ \alpha_3^k \geq 0, \\ \alpha_1^k + \alpha_2^k \geq 14, \\ \alpha_1^k + \alpha_3^k \geq 12, \\ \alpha_2^k + \alpha_3^k \geq 20, \\ \alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k = 32. \end{array} \right.$$

After summing the left and right sides of the inequalities of the last two systems with respect to  $k = 1, 2, 3$  the following system is obtained:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{q}_1 \geq 0, \\ \hat{q}_2 \geq 0, \\ \hat{q}_3 \geq 0, \\ \hat{q}_1 + \hat{q}_2 \geq 34, \\ \hat{q}_1 + \hat{q}_3 \geq 30, \\ \hat{q}_2 + \hat{q}_3 \geq 50, \\ \hat{q}_1 + \hat{q}_2 + \hat{q}_3 = 80. \end{array} \right.$$

It follows from the last inequality, that  $\hat{q} \in \mathcal{I}[V(\bar{z}_0); S]$ . In other words, an imputation from the set  $\mathcal{I}[V(\bar{z}_0); S]$ , can be decomposed by sum of imputations from sets  $\mathcal{I}[v(\bar{z}_k); S], k = 1, 2, 3$ , which proves strongly time consistency of optimality principle  $\mathcal{I}[V(\bar{z}_0); S]$ .

## CONCLUSION

In the course of the study, the following scientific results were obtained, submitted to the defense:

1. For the first time, a cooperative form of network games with pairwise interaction, a defined characteristic function is described, its properties are investigated, and cooperative solutions for this class of games are obtained: the core, the Shapley value,  $\tau$ -value. The convexity of a two-stage game with pairwise interaction is proved.
2. For a special class of symmetric networks (for a star-network) - a simplified formula for calculating the components of the Shapley value is obtained, and conditions for strongly time consistency of the core are obtained.
3. For the first time multistage cooperative games with pairwise interaction are considered. An approach to the definition of the characteristic function is proposed and its properties are investigated. For this class of games, an analogue of the core is constructed and its strongly time consistency is proved.
4. Alternative approaches to the construction of the characteristic function for games with pairwise interaction are considered. Their advantages and disadvantages are described.
5. For non-zero sum games on networks based on games with pairwise interaction, a new characteristic function is constructed, which has a lower computational complexity in relation to the classical one, and its supermodularity is proved. The IDP-core is constructed and its strongly time consistency is proved.

## REFERENCES

1. Bulgakova, M. A. Cooperative network games with pairwise interactions / M. A. Bulgakova, L. A. Petrosyan // Mathematical game theory and applications. – 2015. – V. 4, № 7. – P. 7-18.
2. Bulgakova, M. A. Solutions of network games with pairwise interactions / M. A. Bulgakova // Vestnik of Saint-Petersburg State university. Series 10. Applied mathematics. Informatics. Control processes. – 2019. – V. 15, I. 1. – P. 147-156.
3. Bulgakova, M. A. Multistage games with pairwise interactions on the full graph / M. A. Bulgakova, L. A. Petrosyan // Mathematical game theory and applications. – 2019. – V. 11, I. 1. – P. 3-20.
4. Bulgakova, M. A. About one multistage non-zero sum game on the network. / M. A. Bulgakova, L. A. Petrosyan // Vestnik of Saint-Petersburg State university. Series 10. Applied mathematics. Informatics. Control processes. – 2019. – V. 15, № 4. – P. 603-615.
5. Bulgakova, M. A. The Shapley value for the network game with pairwise interactions / M. A. Bulgakova, L. A. Petrosyan // Proceedings of the III international conference «Stability and control processes». – 2015. – P. 227-228.
6. Bulgakova, M. A. About construction of characteristic function in game with pairwise interactions / M. A. Bulgakova, L. A. Petrosyan // Proceedings of international conference Control Processes and Stability. – 2018. – P. 53-58.
7. Wolf, D. A. On the existence of IDP-core in cooperative differential games / D. A. Wolf, V. V. Zakharov, O. L. Petrosian // Mathematical game theory and applications. – 2017. – V. 9, № 4. – P. 18-38.
8. Pankratova, Y. B. About new characteristic function for multistage dynamic games / Y. B. Pankratova, L. A. Petrosyan // Vestnik of Saint-Petersburg

- state university. Series 10. Applied mathematics. Informatics. Control processes.  
– 2018. – V. 14, №. 4. – P. 316–324.
9. Petrosyan, L. A. Stability of solutions in n-person differential games / L. A. Petrosyan // Vestnik of the Leningrad University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy. – 1977. – № 19. – P. 46–52.
  10. Petrosyan, L. A. Strongly time consistent optimality principles / L. A. Petrosyan // Vestnik of Saint-Petersburg State university. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy. – 1993. – № 4. – P. 40–46.
  11. Petrosyan, L. A. Multistage network games with full information / L. A. Petrosyan, A. A. Sedakov // Mathematical game theory and applications. – 2009. – T. 1, № 2. – P. 66-81.
  12. Petrosyan, L. A. Game theory: student book / L. A. Petrosyan, N. A. Zenkevich, E. V. Shevkoplyas. – SPb: BHV-Petersburg, 2012. – 432 p.
  13. Petrosyan, L. A. Stability of solutions of non-zero-sum game with transferable payoffs / L. A. Petrosyan, N. N. Danilov // Vestnik of the Leningrad University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy. – 1979. – № 1. – P. 52–59.
  14. Petrosyan, L. A. Two-stage network games / L. A. Petrosyan, A. A. Sedakov, A. O. Bochkarev // Mathematical game theory and applications. – 2013. – V. 5, №. 4. – P. 84-104.
  15. Pecherskiy, S. L. Cooperative games: axioms and solutions / S. L. Pecherskiy, E. B. Yanovskaya. – SPb.: European university press in SPb, 2004. – 459 p.
  16. Pizaruk, N. N. Introduction to the game theory / N. N. Pizaruk. – Minsk: BSU-press, 2015. – 256 p.
  17. Acemoglu, D. Spread of (mis)information in social networks / D. Acemoglu, A. Ozdaglar, A. ParandehGheibib // Games and Economic Behavior. – 2010. – Vol. 70, № 2.– P. 194–227.
  18. Aumann, R. Endogenous Formation of Links Between Players and Coalitions: An Application of the Shapley Value/ R. Aumann, R. Myerson // The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley / ed. by A. Roth. – Cambridge, 1988.



- P. 175-191.
19. Bala, V. A noncooperative model of network formation / V. Bala, S. Goyal // *Econometrica*. – 2000. – Vol. 65, № 5. – P. 1181-1229.
  20. Blume, L. Evolutionary Equilibrium with Forward-Looking Players / L. Blume // *Game Theory and Information*. – 1995.
  21. Boncinelli, L. Stochastic stability in best shot network games / L. Boncinelli, P. Pin // *Games and Economic Behavior*. – 2012. – Vol. 75, № 2. – P. 538–554.
  22. Bulgakova, M. A. About strongly time-consistency of core in the network game with pairwise interactions / M. A. Bulgakova, L. A. Petrosyan // *Proceedings of 2016 International Conference «Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems»*. – 2016. – P. 157-160.
  23. Bulgakova, M. A. Strongly time-consistent core in multistage games / M. A. Bulgakova, L. A. Petrosyan // *Proceedings of 2017 Constructive nonsmooth analysis and related topics*. – 2017. – P. 337-342.
  24. Challita, U. Network Formation in the Sky: Unmanned Aerial Vehicles for Multi-hop Wireless Backhauling / U. Challita, W. Saad // *Proceedings of the IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM), Singapore*. – 2017.
  25. Corbae, D. Experiments with network formation / D. Corbae, J. Duffy // *Games and Economic Behavior*. – 2008. – Vol. 64, № 1. – P. 81-120.
  26. Davis, M. The kernel of a cooperative game / M. Davis, M. Maschler // *Naval Research Logistics Quarterly*. – 1965. – Vol. 12, № 3. – P. 223-259.
  27. Dyer, M. Pairwise-Interaction Games / M. Dyer, V. Mohanaraj // *ICALP: Automata, Languages and Programming*. – 2011. – P. 159-170.
  28. Dziubińska, M. Network design and defence / M. Dziubińska, S. Goyal // *Games and Economic Behavior*. – 2013. – Vol. 79. – P. 30–43.
  29. Goyal, S. Non-Exclusive Conventions and Social Coordination / S. Goyal, M. Janssen // *Journal of Economic Theory*. – 1997. – Vol. 77, № 1. – P. 34-57.
  30. Goyal, S. Network formation and social coordination / S. Goyal, F. Vega-Redondo // *Games and Economic Behavior*. – 2005. – Vol. 50, № 2. –

- P. 178-207.
31. Hernández, P. Heterogeneous network games: Conflicting preference / P. Hernández, M. Muñoz-Herrerab, Á. Sánchez // Games and Economic Behavior. – 2013. Vol. 79. – P. 56–66.
  32. Jackson, M. O. Social and Economic Networks / M. O. Jackson. – Princeton : Princeton University Press, 2008. – 520 p.
  33. Jackson, M. O. On the formation of interaction networks in social coordination games / M. O. Jackson, A. Watts // Games and Economic Behavior. – 2002. – Vol. 41, № 2. – P. 265-291.
  34. The efficiency and stability of R&D networks / M. D. König [and others] // Games and Economic Behavior. – 2012. – Vol. 75, № 2. – P. 694-713.
  35. Kuzyutin, D. Time consistent cooperative solutions for multistage games with vector payoffs / D. Kuzyutin, M. Nikitina // Operations Research Letters. – 2017. – Vol. 45, № 3. – P. 269–274.
  36. Unmanned Aerial Vehicle With Underlaid Device-to-Device Communications: Performance and Tradeoffs / M. Mozaffari [and others] // IEEE Transactions on Wireless Communications. – 2016. – Vol. 15, № 6. – P. 3949-3963.
  37. Von Neumann, J. Theory of Games and Economic Behavior / J. Von Neumann, O. Morgenstern. – Princeton: Princeton University press, 1944. – 625 p.
  38. Nash, J. Non-cooperative games // The Annals of Mathematics. – 1951. – Vol. 54. – P. 286–295.
  39. Petrosian, O. L. Strong time-consistent subset of core in cooperative differential games with finite time horizon / O. L. Petrosian, E. V. Gromova, S. V. Pogozhev // Automation and Remote Control. – 2018. – Vol. 79, № 10. – P. 1912-1928.
  40. Petrosyan, L. A. The Subgame-Consistent Shapley Value for Dynamic Network Games with Shock / L. A. Petrosyan, A. A. Sedakov // Dynamic Games and Applications. – 2016. Vol. 6, № 4. – P. 520-537.
  41. Petrosyan L. A. Time-Consistent Solutions for Two-Stage Network Games with Pairwise Interactions / L. A. Petrosyan, M. A. Bulgakova, A. A. Sedakov //

- Mobile Networks and Applications. – 2018.
42. Petrosyan L. A. The time-consistent Shapley value for two-stage network games with pairwise Interactions / L. A. Petrosyan, M. A. Bulgakova, A. A. Sedakov // Game Theory for Networking Applications. – 2019. – P. 15-23.
  43. Network Formation Games Among Relay Stations in Next Generation Wireless Networks / W. Saad [and others] // IEEE Transactions on Communications. – 2011. – Vol. 59, № 9. – P. 2528-2542.
  44. Shapley, L. S. Cores of Convex Games / L. S. Shapley // International Journal of Game Theory. – 1971. – Vol. 1. – P. 11-26.
  45. Shapley, L. S. A value for  $n$ -person games / L. S. Shapley // Contributions to the theory of games II / ed. by H. W. Kuhn, A. W. Tucker. – Princeton, 1953. – P. 307–317.
  46. Tijs, S. H. An axiomatization of the  $\tau$ -value / S. H. Tijs // Mathematical Social Sciences. – 1987. – Vol. 13. – P. 177-181.
  47. Xie, F. Prisoners dilemma game on adaptive networks under limited foresight / F. Xie, W. Cui, J. Lin // Complexity. – 2013. – Vol. 18. – P.38–47.
  48. Yanovskaya, E. The Nucleolus and the  $\tau$ -value of Interval Games / E. B. Yanovskaya // Contributions to Game Theory and Management. – (2010). – Vol. 3. – P. 421–430.
  49. Zakharov, V. Linear programming approach in cooperative games / V. Zakharov, O-Hun Kwon // Journal of Korean Mathematical Society. – 1977. – Vol. 34, № 2. – P. 423-435.