Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Саакян Артур Темиевич

Алгоритмы и программы высокоточных вычислений в задачах Динамики

Научная специальность 1.2.2.
Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Бабаджанянц Левон Константинович

Санкт-Петербург — 2021

Оглавление

Введение

Вначале рассмотрим структуру диссертации: кратко изложим её содержание по главам, скажем о её практической значимости и результатах, сформулируем цели работы, её актуальность, новизну и положения, выносимые на защиту. Далее более обстоятельно обсудим связанные с нашей работой проблемы математического моделирования динамических процессов и основные проблемы, решаемые в диссертации.

В первой главе "Сведение дифференциальных уравнений к полиномиальной форме" изложены необходимые понятия, и приводится алгоритм метода дополнительных переменных и алгоритм сведения дифференциальных уравнений к полиномиальной форме, метод применим как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для полных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрено десять примеров сведения.

Во второй главе "Схемы и быстрое вычисление систем мономов многих переменных" представлены необходимые определения, сформулирована задача быстрого вычисления систем мономов многих переменных, представлен алгоритм решения проблемы и приведены примеры, показывающие эффективность работы алгоритма.

В третьей главе "Методы рядов Тейлора" описаны классический метод рядов Тейлора, несколько способов рекуррентного нахождения коэффициентов Тейлора, Метод Паркера – Сохацки и представлены алгоритм реализации метода рядов Тейлора, алгоритм вычисления коэффициентов Тейлора, оценка локальной погрешности, вспомогательные алгоритмы и общий алгоритм метода рядов Тейлора.

В четвертой главе "Численные эксперименты" представлен численный анализ эффективности схем как на произвольном наборе мономов, так и на примере задачи N тел в различных полиномиальных формах. Также дано сравнение результатов численного интегрирования дифференциальных уравнений двумя различными методами: TSMR (при помощи алгоритма построения схемы [124]) и TIDES [25].

В последней главе "Категории функций" предсталены десять категорий функций, удовлетворяющих системам дифференциальных уравнений: элементарные функции, функции типа Бесселя, функция ошибок, интегралы Френеля и интегральная показательная функция, неполные гамма и бета-функции, гипергеометрические функции, полиномы, Матье и сфероидальные функции, эллиптические интегралы, трансценденты Пенлеве, неявные функции.

Целью данной работы является разработка общих подходов, методов и алгоритмов моделирования в символьной и численной формах в задачах Динамики, основанных на применении систем дифференциальных уравнений.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать детали построения схем,
2. Реализовать алгоритмы построения схем для произвольного набора мономов,
3. Разработать компьютерные программы, реализующие алгоритмы построения схем.
4. Разработать компьютерные программы, реализующие алгоритм TSMR методов рядов Тейлора и их сравнение с программой TIDES.
5. Провести численные эксперименты, исследовать эффективность разработанных алгоритмов и программ для численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Научная новизна:

1. Впервые представлены алгоритмы построения схем для быстрого вычисления произвольного набора мономов.
2. Впервые выполнено исследование, показавшее высокую эффективность представленных алгоритмов для численного интегрирования произвольных полиномиальных систем дифференциальных уравнений.

Практическая значимость. Ускорение численного интегрирования дифференциальных уравнений в полиномиальной форме, описывающих как реальные, так и статистически сформированные модели.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Построение и полный анализ алгоритмов и соответсвующих компьютерных программ построения схем вычисления всех мономов произвольного набора мономов.
2. Построение алгоритмов и соответсвующих компьютерных программ TSMR, реализующих методы рядов Тейлора для полиномиальных задач Коши.

3. Численные эксперименты для реальных и статистически сформированных моделей Динамики.

Достоверность. Все результаты диссертации получены строгими математическими методами, проверены при помощи многочисленных вычислений и опираются на шесть публикаций в российских и международных рецензируемых журналах. Все эти результаты докладывались на многочисленных международных конференциях.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на международной научной конференции "Процессы управления и устойчивость" (г. Санкт-Петербург, март 2016 г.), международной конференции "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)" (г. Москва, июнь 2016 г.), на 14th и 15th "International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics" (г. Родос и г. Салоники, Греция, сентябрь 2016 г. и сентябрь 2017 г.), международной научной конференции по механике "VIII Поляховские чтения" (г. Санкт-Петербург, февраль 2018 г.) и на "International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying, Geology and Mining, Ecology and Management" (г. София, Болгария, июль 2019 г.).

Личный вклад. Автор принимал активное участие в разработке и имплементации алгоритмов построения схем и проведении анализа эффективности представленных алгоритмов. Все результаты, представленные в диссертации, получены лично автором.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 126 страниц, включая 5 таблиц. Список литературы содержит 127 наименований.

Глава 1. Сведение дифференциальных уравнений к полиномиальной форме

При написании данной главы использовались многие источники: [1 – 12, 22, 26, 30, 39, 40].

Данная глава состоит из двух разделов. В первом разделе описана теоретическая и алгоритмическая основа методов сведения систем к полиномиальной форме (система дифференциальных уравнений первого порядка с полиномами по неизвестным в правой части), для полных систем дифференциальных уравнений и систем функций. Метод дополнительных переменных сводит их к системе дифференциальных уравнений в полиномиальной форме. Отметим метод дополнительных переменных для полных систем дифференциальных уравнений в частных производных, необходимые и достаточные условия применимости и их реализация были представлены в работе [9], метод дополнительных переменных для обыкновенных дифференциальных уравнений был представлен в работе А. Пуанкаре [105].

Во втором разделе приведены примеры сведения систем дифференциальных уравнений и систем функций: задача Коши для ОДУ, задача Коши для систем ОДУ, задача Коши для полных систем, математический маятник, вращательное движение спутника вокруг своего центра масс, задача N тел, сведенная к трем полиномиальным формам: пятой, четвертой и третьей степени, система из двух функций, экзотическая функция и многоэтажная экспонента.

Кроме того, в пятой главе представлены 10 категорий функций, соответствующие замены, необходимые для сведения их к дифференциальным уравнениям, и соответсвующие дифференциальные уравнения.

1.1 Метод дополнительных переменных

Метод дополнительных переменных направлен на приведение систем функций и/или дифференциальных уравнений (полных дифференциальных уравнений в частных производных и, в частности, обыкновенных дифференциальных уравнений) к полиномиальной форме. Идея метода для ОДУ рассмотрена в работе Пуанкаре [105]. В небесной механике эта идея использовалась для решения задачи трех тел с использованием степенных рядов. Необходимые и достаточные условия для полных дифференциальных уравнений в частных производных, позволяющие компьютеризировать применение метода, были предложены в [9], а алгоритм метода и его реализация приведены в [11].

Рассмотрим основные обозначения, которые будем использовать в дальнейшем. Пусть

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in C^m, \quad t = (t_1, \dots, t_s) \in C^s, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\omega) \in C^\omega, \quad f_i^j \in C,$$

$(y_1, \dots, y_N) \in C^N$, $g_r \in C$, предполагая x функцией переменной t и параметра α, а y - функцией переменной x и параметра α. Символ C обозначает поле комплексных чисел. Отметим, что везде символ C можно заменить на символ R, который обозначает поле вещественных чисел, так как все описанные ниже алгоритмы символьные.

Рассмотрим полную систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, разрешенную относительно производной. Такие системы дифференциальных уравнений можно записать в следующих формах:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = f_i^j(x, \alpha), \quad i \in [1:m], \; j \in [1:s], \\ &\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, \alpha), \quad dx = f(x, \alpha) dt, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_m) \in C^m$, $t = (t_1, \dots, t_s) \in C^s$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\omega) \in C^\omega$, $dx = (dx_1, \dots, dx_m)$, $dt = (dt_1, \dots, dt_s)$, $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $f = (f_i^j)$, $f_i^j \in C$.

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений (т.е. при $s = 1$) эти формы можно свести к следующей:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, \alpha), \quad i \in [1:m], \quad \frac{dx}{dt} = f(x, \alpha). \tag{1.2}$$

Также рассмотрим систему функций:

$$y_r = g_r(x, \alpha), \quad r \in [1:N], \tag{1.3}$$

где $s, N \in [0 : +\infty)$ и $(s, N) \neq 0$. Систему (1.1) (или (1.3)), правая часть которой является полиномом по неизвестным $x_1, \dots, x_m$, называют полиномиальной системой.

Рассмотрим отдельно: метод дополнительных переменных для полных систем, метод дополнительных переменных для систем функций и метод дополнительных переменных для смешанных систем.

Метод дополнительных переменных для полных систем

Пусть дополнительные переменные $x_{m+1}, \dots, x_{m+k}$ удовлетворяют условиям:
— все производные $\frac{\partial x_{m+l}}{\partial x_i}$, $(l \in [1:k], \quad i \in [1:m])$ – некоторые полиномы $P_{m+l,i}(x_1, \dots, x_{m+k})$ по переменным $x_1, \dots, x_{m+k}$;
— все правые части уравнений (1.1) – полиномы $Q_i^j(x_1, \dots, x_{m+k})$,
то $x_1, \dots, x_{m+k}$ удовлетворяют полиномиальной системе:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = Q_i^j(x_1, \dots, x_{m+k}), \quad i \in [1:m], \quad j \in [1:s], \quad l \in [1:k],$$
$$\frac{\partial x_{m+l}}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{m} Q_i^j(x_1, \dots, x_{m+k}) P_{m+l,i}(x_1, \dots, x_{m+k}).$$

Метод дополнительных переменных для систем функций

Пусть дополнительные переменные $x_{m+1}, \dots, x_{m+k}$ удовлетворяют условиям:
— все производные $\frac{\partial x_{m+l}}{\partial x_i}$, $(l \in [1:k], \quad i \in [1:m])$ – некоторые полиномы $P_{m+l,i}(x_1, \dots, x_{m+k})$ по переменным $x_1, \dots, x_{m+k}$;
— все функции $g_r(x, \alpha)$, $r \in [1:N]$, – полиномы $R_r(x_1, \dots, x_{m+k})$, то $x_1, \dots, x_{m+k}$ удовлетворяют полиномиальной системе:

$$y_r = R_r(x_1, \dots, x_{m+k}), \quad r \in [1:N],$$
$$\frac{\partial x_{m+l}}{\partial t_j} = P_{m+l,i}(x_1, \dots, x_{m+k}), \quad i \in [1:m], \quad l \in [1:k].$$

Дифференцируя y_r по переменным $x_1, \dots, x_m$, можно получить полную систему:

$$\frac{\partial y_r}{\partial x_i} = \frac{\partial R_r}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{k} P_{m+s,i} \frac{\partial R_r}{\partial x_{m+s}}, \quad r \in [1:N], \quad i \in [1:m],$$
$$\frac{\partial x_{m+l}}{\partial t_j} = P_{m+l,i}(x_1, \dots, x_{m+k}), \quad l \in [1:k].$$

Метод дополнительных переменных для смешанных систем

Пусть дополнительные переменные $x_{m+1},\dots,x_{m+k}$ удовлетворяют условиям:
— все производные $\frac{\partial x_{m+l}}{\partial x_i}$, $\quad (l\in[1:k],\quad i\in[1:m])$ – некоторые полиномы $P_{m+l,i}(x_1,\dots,x_{m+k})$ по переменным $x_1,\dots,x_{m+k}$;
— все правые части уравнений (1.1) – полиномы $Q_i^j(x_1,\dots,x_{m+k})$,
— все функции $g_r(x,\alpha)$, $\quad r\in[1:N]$, – полиномы $R_r(x_1,\dots,x_{m+k})$, тогда $x_1,\dots,x_{m+k}$ удовлетворяют полиномиальной системе:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x_i}{\partial t_j}=Q_i^j(x_1,\dots,x_{m+k}),\quad i\in[1:m],\quad j\in[1:s],\quad l\in[1:k],\\
&\frac{\partial x_{m+l}}{\partial t_j}=\sum_{i=1}^{m}Q_i^j(x_1,\dots,x_{m+k})P_{m+l,i}(x_1,\dots,x_{m+k}),\\
&y_r=R_r(x_1,\dots,x_{m+k}),\quad r\in[1:N],
\end{aligned}$$

причем, дифференцируя y_r по переменным $x_1,\dots,x_m$, можно получить полную систему:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x_i}{\partial t_j}=Q_i^j(x_1,\dots,x_{m+k}),\quad i\in[1:m],\quad j\in[1:s],\quad l\in[1:k],\\
&\frac{\partial x_{m+l}}{\partial t_j}=\sum_{i=1}^{m}Q_i^j(x_1,\dots,x_{m+k})P_{m+l,i}(x_1,\dots,x_{m+k}),\\
&\frac{\partial y_r}{\partial x_i}=\frac{\partial R_r}{\partial x_i}+\sum_{s=1}^{k}P_{m+s,i}\frac{\partial R_r}{\partial x_{m+s}},\quad r\in[1:N],\quad i\in[1:m].
\end{aligned}$$

1.2 Примеры

В первых трех из рассматриваемых здесь десяти примерах используются функции Гильберта (трех аргументов p_1,p_2,p_3).
Замечание. Эти функции были введены в связи с 13 проблемой Гильберта. К моменту формулировки Гильбертом этой проблемы было известно преобразование, сводящее уравнение n-ой степени, в котором свободный член равен 1, коэффициент при старшей степени равен 1, а коэффициенты при степенях $n-1,\ n-2,\ n-3$ равны нулю. Проблема Гильберта: можно ли решить общее уравнение седьмой степени с помощью функций, зависящих только от двух переменных? Как указывалось, уравнение седьмой степени можно рассматривать,

как уравнение, решение которого зависит только от трёх коэффициентов. Первый из них является решением уравнения:

$$\varphi_1^7(p_1,p_2,p_3) + p_3\varphi_1^3(p_1,p_2,p_3) + p_2\varphi_1^3(p_1,p_2,p_3) + p_1\varphi_1(p_1,p_2,p_3) + 1 = 0,$$

при условии $\varphi_1(0,0,0) = -1$, а второй определяется равенством:

$$\varphi_2(p_1,p_2,p_3) = (7\varphi_1^6(p_1,p_2,p_3) + 3p_3\varphi_1^2(p_1,p_2,p_3) + 2p_2\varphi_1(p_1,p_2,p_3) + p_1)^{-1}.$$

Они удовлетворяют задаче Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi_1}{\partial p_j} = -\varphi_1^j\varphi_2, \quad j = 1,2,3, \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial p_j} = (42\varphi_1^5 + 6p_3\varphi_1 + 2p_2)\varphi_1^j\varphi_2^3 - j\varphi_1^{j-1}\varphi_2^2, \\ \varphi_1(0,0,0) = -1, \varphi_2(0,0,0) = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

В четвертом и пятом примерах рассматриваются две задачи динамики – математический маятник и вращательное движение спутника около своего центра масс.

Примеры метода дополнительных переменных для полных систем.

Пример 1: Задача Коши для ОДУ.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = a\sin\varphi_1(x,x^2,x^3) + b\cos\varphi_1(x,x^2,x^3)$$

и начальные условия $x(0) = 0$ (a, b - вещественные параметры).
Введем дополнительные переменные:

$$\psi_1 = \varphi_1(x,x^2,x^3),\ \psi_2 = \varphi_2(x,x^2,x^3),\ \psi_3 = \sin\varphi_1(x,x^2,x^3),\ \psi_4 = \cos\varphi_1(x,x^2,x^3)$$

и получим их полные производные по t в силу этого уравнения:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\right)_{x_1=x,\ x_2=x^2,\ x_3=x^3} \cdot jx^{j-1}\frac{dx}{dt} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\Big(-j\varphi_1^{j-1}\varphi_2\Big)_{x_1=x,\ x_2=x^2,\ x_3=x^3} \cdot jx^{j-1}\frac{dx}{dt} = -\sum_{j=1}^{3} jx^{j-1}\psi_1^j\psi_2 \cdot \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\right)_{x_1=x,\ x_2=x^2,\ x_3=x^3} \cdot jx^{j-1}\frac{dx}{dt} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \Big((42\varphi_1^5 + 6x_3\varphi_1 + 2x_2)\varphi_1^j\varphi_2^3 - j\varphi_1^{j-1}\varphi_2^2 \Big)_{x_1=x,\ x_2=x^2,\ x_3=x^3} \cdot jx^{j-1}\frac{dx}{dt} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} jx^{j-1}\Big((42\psi_1^5 + 6x^3\psi_1 + 2x^2)\psi_1^j\psi_2^3 - j\psi_1^{j-1}\psi_2^2 \Big)\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = \cos\varphi_1(x, x^2, x^3)\frac{d\varphi_1(x, x^2, x^3)}{dt} = \psi_4\frac{d\psi_1}{dt},$$

$$\frac{d\psi_4}{dt} = -\sin\varphi_1(x, x^2, x^3)\frac{d\varphi_1(x, x^2, x^3)}{dt} = -\psi_3\frac{d\psi_1}{dt}.$$

Тогда можно записать исходное уравнение и начальные условия в форме полиномиальной задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a\psi_3 + b\varphi_4,\ \frac{d\psi_1}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{3} jx^{j-1}\psi_1^j\psi_2 \cdot \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{3} jx^{j-1}\Big((42\psi_1^5 + 6x^3\psi_1 + 2x^2)\psi_1^j\psi_2^3 - j\psi_1^{j-1}\psi_2^2 \Big)\frac{dx}{dt}, \\ \frac{d\psi_3}{dt} = \psi_4\frac{d\psi_1}{dt},\ \frac{d\psi_4}{dt} = -\psi_3\frac{d\psi_1}{dt}, \\ x(0) = 0,\ \psi_1(0) = -1,\ \psi_2(0) = \frac{1}{7},\ \psi_3(0) = -\sin 1,\ \psi_4(0) = \cos 1. \end{cases}$$

Пример 2: Задача Коши для системы ОДУ.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i \sin\varphi_1(x, x_2, x_3) + b_i\cos\varphi_1(x, x_2, x_3)$$

и начальные условия $x_i(0) = 0,\ i \in [1:3]$, $(a_i = a_i(x, x_2, x_3),\ b_i = b_i(x, x_2, x_3)$ - алгебраические полиномы).

Введем дополнительные переменные:

$$\psi_1 = \varphi_1(x, x_2, x_3),\ \psi_2 = \varphi_2(x, x_2, x_3),\ \psi_3 = \sin\varphi_1(x, x_2, x_3),\ \psi_4 = \cos\varphi_1(x, x_2, x_3)$$

и получим их полные производные по t в силу этого уравнения:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} = -\sum_{j=1}^{3}\varphi_1^j\varphi_2\frac{dx_j}{dt} = -\sum_{j=1}^{3}x^{j-1}\psi_1^j\psi_2\frac{dx_j}{dt},$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\Big((42\varphi_1^5 + 6x_3\varphi_1 + 2x_2)\varphi_1^j\varphi_2^3 - j\varphi_1^{j-1}\varphi_2^2 \Big)\frac{dx_j}{dt} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\Big((42\psi_1^5 + 6x_3\psi_1 + 2x_2)\psi_1^j\psi_2^3 - j\psi_1^{j-1}\psi_2^2 \Big)\frac{dx_j}{dt},$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = \cos\varphi_1(x, x_2, x_3)\frac{d\varphi_1(x_1, x_2, x_3)}{dt} = \psi_4\frac{d\psi_1}{dt},$$
$$\frac{d\psi_4}{dt} = -\sin\varphi_1(x, x_2, x_3)\frac{d\varphi_1(x_1, x_2, x_3)}{dt} = -\psi_3\frac{d\psi_1}{dt}.$$

Тогда можно записать исходную систему и начальные условия в форме полиномиальной задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = a_i\psi_3 + b_i\varphi_4,\ i \in [1:3],\ \frac{d\psi_1}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{3}\psi_1^j\psi_2\cdot\frac{dx_j}{dt}, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{3}\Big((42\psi_1^5 + 6x_3\psi_1 + 2x_2)\psi_1^j\psi_2^3 - j\psi_1^{j-1}\psi_2^2\Big)\frac{dx_j}{dt}, \\ \frac{d\psi_3}{dt} = \psi_4\frac{d\psi_1}{dt},\ \frac{d\psi_4}{dt} = -\psi_3\frac{d\psi_1}{dt}, \\ x_i(0) = 0,\ i \in [1:3],\ \psi_1(0) = -1,\ \psi_2(0) = \frac{1}{7},\ \psi_3(0) = -\sin 1,\ \psi_4(0) = \cos 1. \end{cases}$$

Пример 3. Задача Коши для полной системы.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = a_{i,j}\sin\varphi_1(x, x_2, x_3) + b_{i,j}\cos\varphi_1(x, x_2, x_3)$$

и начальные условия $x_i(0) = 0$, $i \in [1:m]$, $j \in [1:3]$, $(a_{i,j} = a_{i,j}(x, \dots, x_m),\ b_{i,j} = b_{i,j}(xx, \dots, x_m)$ – алгебраические полиномы).

Введем дополнительные переменные:

$$\psi_1 = \varphi_1(x, x_2, x_3),\ \psi_2 = \varphi_2(x, x_2, x_3),\ \psi_3 = \sin\varphi_1(x, x_2, x_3),\ \psi_4 = \cos\varphi_1(x, x_2, x_3)$$

и получим их полные производные по t в силу этих уравнений:

$$\frac{d\psi_1}{dt_j} = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t_j} = -\sum_{k=1}^{3}\varphi_1^k\varphi_2\frac{\partial x_k}{\partial t_j} = -\sum_{k=1}^{3}\psi_1^k\psi_2\frac{\partial x_k}{\partial t_j},$$

$$\frac{d\psi_2}{dt_j} = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{3}\Big((42\varphi_1^5 + 6x_3\varphi_1 + 2x_2)\varphi_1^k\varphi_2^3 - k\varphi_1^{k-1}\varphi_2^2\Big)\frac{\partial x_k}{\partial t_j} =$$
$$= \sum_{k=1}^{3}\Big((42\psi_1^5 + 6x_3\psi_1 + 2x_2)\psi_1^k\psi_2^3 - k\psi_1^{k-1}\psi_2^2\Big)\frac{\partial x_k}{\partial t_j},$$
$$\frac{d\psi_3}{dt_j} = \cos\varphi_1(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial\varphi_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial t_j} = \psi_4\frac{\partial\psi_1}{\partial t_j},$$
$$\frac{d\psi_4}{dt_j} = -\sin\varphi_1(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial\varphi_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial t_j} = -\psi_3\frac{\partial\psi_1}{\partial t_j}.$$

Тогда можно записать исходную систему и начальные условия в форме полиномиальной задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} = a_{i,j}\psi_3 + b_{i,j}\varphi_4, \ i \in [1:m], \ j \in [1:3], \ \frac{\partial \psi_1}{\partial t_j} = -\sum\limits_{k=1}^{3} \psi_1^k \psi_2 \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_j}, \\ \frac{\partial \psi_2}{dt_j} = \sum\limits_{k=1}^{3} \Big((42\psi_1^5 + 6x_3\psi_1 + 2x_2)\psi_1^k\psi_2^3 - k\psi_1^{k-1}\psi_2^2 \Big) \frac{\partial x_k}{\partial t_j}, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial t_j} = \psi_4 \frac{\partial \psi_1}{\partial t_j}, \ \frac{\partial \psi_4}{dt_j} = -\psi_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial t_j}, \\ x_i(0,0,0) = 0, \ i \in [1:m], \ \psi_1(0,0,0) = -1, \ \psi_2(0,0,0) = \frac{1}{7}, \\ \psi_3(0,0,0) = -\sin 1, \ \psi_4(0,0,0) = \cos 1. \end{cases}$$

Пример 4. Математический маятник.

Пусть $x_1 = x, \ x_2 = \dot{x}$, тогда уравнение математического маятника

$$\ddot{x} + k^2 \sin x = 0$$

запишем в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = -k^2 \sin x_1.$$

Вводя дополнительные переменные $x_3 = \sin x_1, \ x_4 = \cos x_1$, получаем полиномиальную (квадратичную) систему:

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = -k^2 x_3, \ \dot{x}_3 = x_2 x_4, \ \dot{x}_4 = -x_2 x_3.$$

Пример 5. Вращательное движение спутника.

Рассмотрим движение спутника вокруг своего центра масс в предположении, что сам центр масс движется по круговой орбите с угловой скоростью ω. Обычно движение спутника вокруг своего центра масс описывается шестью фазовыми переменными, пусть это будут $x_1, \ldots, x_6$. При учете основных возмущающих факторов оказывается, как правило, что уравнения относительно этих переменных имеют вид:

$$\dot{x}_j = P_j(x_1, \ldots, x_6, \sin x_1, \ldots, \sin x_6, \cos x_1, \ldots, \cos x_6, \sin \omega t, \cos \omega t),$$

причем P_j - полиномы по всем своим аргументам. Пусть $x_7 = \sin x_1, \ldots,$ $x_{13} = \cos x_1, \ldots,$ а также $x_{19} = \sin \omega t, \ x_{20} = \cos \omega t$, получаем полиномиальную систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_j = P_j(x_1, \ldots, x_{20}), \ \dot{x}_{6+j} = x_{13+j} P_j(x_1, \ldots, x_{20}), \\ \dot{x}_{6+j} = -x_{6+j} P_j(x_1, \ldots, x_{20}), \ j = 1, \ldots, 6, \ \dot{x}_{19} = \omega x_{20}, \ \dot{x}_{20} = -\omega x_{19}. \end{cases}$$

Пример 6. Уравнения Пенлеве.

Рассмотрим шесть уравнений Пенлеве $P_I - P_{VI}$.

$$P_I: \ \frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z \tag{1.4}$$

$$P_{II}: \ \frac{d^2w}{dz^2} = 2w^3 + zw + \alpha \tag{1.5}$$

$$P_{III}: \ \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{w}\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2 - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{\alpha w^2 + \beta}{z} + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w} \tag{1.6}$$

$$P_{VI}: \ \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2w}\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2 + \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w} \tag{1.7}$$

$$P_V: \ \frac{d^2w}{dz^2} = \Big(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\Big)\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2 - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\Big(\alpha w + \frac{\beta}{w}\Big) +$$
$$+ \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1} \tag{1.8}$$

$$P_{VI}: \ \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\Big)\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2 - \Big(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z}\Big)\frac{dw}{dz} +$$
$$+ \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\Big(\alpha + \frac{\beta z}{w^2} + \frac{\gamma(z-1)}{(w-1)^2} + \frac{\delta z(z-1)}{(w-z)^2}\Big) \tag{1.9}$$

Начальные данные: $w(z_0) = w_0, \ w'(z_0) = w'_0$, где $\alpha, \ \beta, \ \gamma, \delta$ – произвольные постоянные. Решения $P_I - P_{VI}$ называют трансцендентами Пенлеве.

Рассмотрим первое уравнение Пенлеве (P_I) и сведем его к полиномиальной форме. Произведем замену переменных:

$$x_1 = w, \ x_2 = w', \ x_3 = z,$$

приходим к

$$\begin{aligned} &x'_1 = x_2, \ x'_2 = 6x_1^2 + x_3, \ x'_3 = 1, \\ &x_1(z_0) = w_0, \ x_2(z_0) = w'_0, \ x_3(x_0) = z_0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Рассмотрим второе уравнение Пенлеве (P_{II}) и сведем его к полиномиальной форме. Произведем замену переменных:

$$x_1 = w, \ x_2 = w', \ x_3 = z,$$

приходим к

$$\begin{aligned} &x'_1 = x_2, \ x'_2 = 2x_1^3 + x_1x_3 + \alpha, \ x'_3 = 1, \\ &x_1(z_0) = w_0, \ x_2(z_0) = w'_0, \ x_3(x_0) = z_0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Рассмотрим третье уравнение Пенлеве (P_{III}) и сведем его к полиномиальной форме. Произведем замену переменных:

$$x_1 = w,\ x_2 = w',\ x_3 = \frac{1}{w},\ x_4 = \frac{1}{z},$$

приходим к

$$\begin{aligned}
&x_1' = x_2,\ x_2' = x_2^2 x_3 - x_2 x_4 + \alpha x_1^2 x_4 + \beta x_4 + \gamma x_1^3 + \delta x_3,\\
&x_3' = -x_2 x_3^2,\ x_4' = -x_4^2,\\
&x_1(z_0) = w_0,\ x_2(z_0) = w_0',\ x_3(x_0) = \frac{1}{w_0},\ x_4 = \frac{1}{z_0}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Рассмотрим четвёртое уравнение Пенлеве (P_{VI}) и сведем его к полиномиальной форме. Произведем замену переменных:

$$x_1 = w,\ x_2 = w',\ x_3 = \frac{1}{w},\ x_4 = z,$$

приходим к

$$\begin{aligned}
&x_1' = x_2,\ x_2' = \frac{1}{2} x_2^2 x_3 - \frac{3}{2} x_1^3 + 4x_1^2 x_4 + 2x_1 x_4^2 - 2\alpha x_1 + \beta x_3,\\
&x_3' = -x_2 x_3^2,\ x_4' = 1,\\
&x_1(z_0) = w_0,\ x_2(z_0) = w_0',\ x_3(x_0) = \frac{1}{w_0},\ x_4 = z_0.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Рассмотрим пятое уравнение Пенлеве (P_V) и сведем его к полиномиальной форме. Произведем замену переменных:

$$x_1 = w,\ x_2 = w',\ x_3 = \frac{1}{w},\ x_4 = \frac{1}{w-1},\ x_5 = \frac{1}{z},$$

приходим к

$$\begin{aligned}
&x_1' = x_2,\ x_2' = \frac{1}{2} x_2^2 x_3 + x_2^2 x_4 - x_2 x_5 + \alpha x_1^3 x_5^2 + \beta x_1^2 x_3 x_5^2 - 2\alpha x_1^2 x_5^2 -\\
&- 2\beta x_1 x_3 x_5^2 + \alpha x_1 x_5^2 + \beta x_3 x_5^2 + \gamma x_1 x_4 + \gamma x_1 x_4,\\
&x_3' = -x_2 x_3^2,\ x_4' = -x_2 x_4^2,\ x_5 = -x_5^2,\\
&x_1(z_0) = w_0,\ x_2(z_0) = w_0',\ x_3(x_0) = \frac{1}{w_0},\ x_4 = \frac{1}{w_0 - 1},\ x_5(z_0) = \frac{1}{z_0}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Рассмотрим шестое уравнение Пенлеве (P_{VI}) и сведем его к полиномиальной форме. Произведем замену переменных:

$$x_1 = w,\ x_2 = w',\ x_3 = \frac{1}{w},\ x_4 = \frac{1}{w-1},\ x_5 = \frac{1}{w-z},$$

$$x_6 = \frac{1}{z},\ x_7 = \frac{1}{z-1},\ x_8 = z,$$

приходим к

$$\begin{aligned}
&x_1' = x_2,\ x_2' = \frac{1}{2}x_2^2x_3 + \frac{1}{2}x_2^2x_4 + \frac{1}{2}x_2^2x_5 - x_2x_5 - x_2x_6 - x_2x_7 + \\
&+ \alpha x_1(x_1-1)(x_1-x_8)x_6^2x_7^2 + \beta(x_1-1)(x_1-x_8)x_3x_6x_7^2 + \\
&+ \gamma x_1(x_1-x_8)x_4x_6^2x_7 + \delta x_1(x_1-1)x_6x_6x_7, \\
&x_3' = -x_2x_3^2,\ x_4' = -x_2x_4^2,\ x_5' = -x_5^2(x_2-1), \\
&x_6' = -x_6^2,\ x_7' = -x_7^2,\ x_8' = 1, \\
&x_1(z_0) = w_0,\ x_2(z_0) = w_0',\ x_3(z_0) = \frac{1}{w_0},\ x_4(z_0) = \frac{1}{w_0-1},\ x_5 = \frac{1}{w_0-z_0}, \\
&x_6(z_0) = \frac{1}{z_0},\ x_7(z_0) = \frac{1}{z_0-1},\ x_8(z_0) = z_0.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Пример 7. Задача N тел.

Дифференциальные уравнения задачи N тел в относительных координатах:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2g_{i,j}}{dt^2} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}r_{0,i}^{-3} + \\
&+ k^2 \sum_{s\in[1:l],s\neq i} m_s[(g_{s,j}-g_{i,j})r_{s,i}^{-3} - g_{s,j}r_{0,s}^{-3}],
\end{aligned} \tag{1.16}$$

где $r_{s,i}^2 = \sum\limits_{j=1}^{3}(g_{s,j}-g_{i,j})^2$, k — постоянная Гаусса, $m_0,\ldots,m_l$ — массы материальных точек $M_0,\ldots,M_l$, $l = N-1$, $s<i$, $s\in[0:l]$, $i\in[1:l]$, $j\in[1:3]$, можно свести к полиномиальной форме пятой, четвертой или третьей степени.

Задача N тел в полиномиальной форме пятой степени

Введём дополнительные переменные: $p_{i,j} = \frac{dg_{i,j}}{dt}$, получим систему:

$$\frac{dg_{i,j}}{dt} = p_{i,j},\quad \frac{dp_{i,j}}{dt} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}r_{0,i}^{-3} + k^2 \sum_{s\in[1:l],s\neq i} m_s[(g_{s,j}-g_{i,j})r_{s,i}^{-3} - g_{s,j}r_{0,s}^{-3}],$$

затем введем $d_{s,i} = r_{s,i}^{-1}$, получим задачу N тел в полиномиальной форме пятой степени:

$$\frac{dp_{i,j}}{dt} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}d_{0,i}^3 + k^2 \sum_{w\in[1:l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})d_{w,i}^3 - g_{w,j}d_{0,w}^3],$$

$$\frac{dg_{i,j}}{dt} = p_{i,j},\quad \frac{dd_{s,i}}{dt} = -d_{s,i}^3\sum_{j=1}^{3}(g_{i,j}-g_{s,j})(p_{i,j}-p_{s,j}). \tag{1.17}$$

Задача N тел в полиномиальной форме четвертой степени

Сведем полученную задачу N тел в полиномиальной форме пятой степени к полиномиальной системе четвертой степени.
Введём дополнительные переменные $v_{s,i} = d^3_{s,i}$, получим систему:

$$\frac{dp_{i,j}}{dt} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}d^3_{0,i} + k^2 \sum_{w\in[1:l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})d^3_{w,i} - g_{w,j}d^3_{0,w}],$$

$$\frac{dg_{i,j}}{dt} = p_{i,j},\ \frac{dd_{s,i}}{dt} = v_{s,i}\sum_{j=1}^{3}(g_{i,j}-g_{s,j})(p_{i,j}-p_{s,j}),$$
$$\frac{dv_{s,i}}{dt} = -3d^2_{s,i}v_{s,i}\sum_{j=1}^{3}(g_{i,j}-g_{s,j})(p_{i,j}-p_{s,j}),$$

затем введём $w_{s,i} = \sum\limits_{j=1}^{3}(g_{i,j}-g_{s,j})(p_{i,j}-p_{s,j})$, получим задачу N тел в полиномиальной форме четвертой степени:

$$\frac{dp_{i,j}}{dt} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}v_{0,i} + k^2 \sum_{w\in[1:l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})v_{w,i} - g_{w,j}v_{0,w}],$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dg_{i,j}}{dt} = p_{i,j},\quad \frac{dd_{s,i}}{dt} = -v_{s,i}w_{s,i},\quad \frac{dv_{s,i}}{dt} = -3d^2_{s,i}v_{s,i}w_{s,i},\\
&\frac{dw_{s,i}}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\Big[(p_{i,j}-p_{s,j})^2 + k^2(g_{i,j}-g_{s,j})\times\\
&\times\Big((m_0+m_s)g_{s,j}v_{0,s} - (m_0+m_i)g_{i,j}v_{0,i}+
\end{aligned} \tag{1.18}$$
$$+\sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})v_{w,i} - g_{w,j}v_{0,w} - \sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{s,j})v_{w,s} - g_{w,s}v_{0,w}]\Big)\Big].$$

Задача N тел в полиномиальной форме третьей степени

Сведем полученную задачу N тел в полиномиальной форме четвертой степени к полиномиальной системе третьей степени.
Введём дополнительные переменные $q_{s,i} = d^2_{s,i}$, получим задачу N тел в полиномиальной форме третьей степени:

$$\frac{dp_{i,j}}{dt} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}v_{0,i} + k^2 \sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})v_{w,i} - g_{w,j}v_{0,w}],$$

$$\frac{dg_{i,j}}{dt} = p_{i,j}, \quad \frac{dd_{s,i}}{dt} = -v_{s,i}w_{s,i}, \quad \frac{dq_{s,i}}{dt} = -2d_{s,i}v_{s,i}w_{s,i}, \quad \frac{dv_{s,i}}{dt} = -3q_{s,i}v_{s,i}w_{s,i},$$

$$\begin{gathered}\frac{dw_{s,i}}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\Big[(p_{i,j}-p_{s,j})^2 + k^2(g_{i,j}-g_{s,j})\times \\ \times\Big((m_0+m_s)g_{s,j}v_{0,s} - (m_0+m_i)g_{i,j}v_{0,i} + \\ + \sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})v_{w,i} - g_{w,j}v_{0,w} - \sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{s,j})v_{w,s} - g_{w,s}v_{0,w}]\Big)\Big].\end{gathered} \tag{1.19}$$

Примеры метода дополнительных переменных для систем функций.

Пример 8. Система из двух функций.

Система функций:

$$\begin{aligned}&y_1 = x_1^{x_3\cos(\omega x_2)}(ax_1+bx_2)^7 x_3\sin(\omega x_2),\\ &y_2 = ln^{12}x_1(c^3x_1x_2x_3\cos^3(\omega x_2) + \coth(c^d d)\sin(\omega x_2))^3,\end{aligned}$$

где x_1, x_2, x_3 - переменные, а a, b, c d, ω - параметры,
введением переменных

$$\varphi_1 = \sin(\omega x_2), \quad \varphi_2 = \cos(\omega x_2), \quad \varphi_3 = lnx_1, \quad \varphi_4 = x_1^{-1}, \quad \varphi_5 = x_1^{x_3\cos(\omega x_2)}$$

сводится к полиномиальной системе:

$$y_1 = (ax_1+bx_2)^7x_3\varphi_1\varphi_5, \quad y_2 = \varphi_3^{12}(c^3x_1x_2x_3\varphi_2^3 + \coth(c^d d)\varphi_1)^3,$$

где φ - решение полной системы:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} = \omega\varphi_2, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} = -\omega\varphi_1, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} = 0,\\ &\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} = \varphi_4, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_1} = -\varphi_4^2, \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_3} = 0,\\ &\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1} = x_2\varphi_2\varphi_4\varphi_5, \quad \frac{\partial\varphi_5}{\partial x_2} = -\omega x_3\varphi_1\varphi_3\varphi_5, \quad \frac{\partial\varphi_5}{\partial x_3} = \varphi_2\varphi_3\varphi_5.\end{aligned}$$

Пример 9. Экзотическая функция.

Рассмотрим функцию:

$$\varphi(t) = \sqrt{\int_1^t \frac{\sin t}{t+a}\,dt \cdot \int_a^{\sin(t+b)} (\mathrm{tg}(t+b)+c)^{\cos(t+b)}dt + l}.$$

Чтобы получить систему ОДУ для $\varphi(t)$, введем дополнительные переменные

$$x_1 = \varphi(t), \quad x_2 = \frac{1}{\varphi(t)}, \quad x_3 = \int\limits_1^t \frac{\sin t}{t+a}\, dt, \quad x_4 = \int\limits_a^{\sin(t+b)} (\mathrm{tg}(t+b)+c)^{\cos(t+b)} dt,$$

$$x_5 = \frac{1}{t+a}, \quad x_6 = \sin t, \quad x_7 = \cos t, \quad x_8 = (\mathrm{tg}(\sin(t+b)+b)+c)^{\cos(\sin(t+b)+b)},$$

$$x_9 = \sin(t+b), \quad x_{10} = \cos(t+b), \quad x_{11} = \frac{1}{\mathrm{tg}(\sin(t+b)+b)+c},$$

$$x_{12} = ln(\mathrm{tg}(\sin(t+b)+b)+c), \quad x_{13} = \frac{1}{\cos(\sin(t+b)+b)},$$

$$x_{14} = \sin(\sin(t+b)+b), \quad x_{15} = \cos(\sin(t+b)+b).$$

Продифференцируем их по t, получим:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{2} x_2 (x_4 \frac{dx_3}{dt} + x_3 \frac{dx_4}{dt}) = \frac{1}{2} x_2 (x_4 x_5 x_6 + x_3 x_8 x_{10}),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2^2 \frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{2} x_2^3 (x_4 x_5 x_6 + x_3 x_8 x_{10}),$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_5 x_6, \quad \frac{dx_4}{dt} = x_8 x_{10}, \quad \frac{dx_5}{dt} = -x_5^2, \quad \frac{dx_6}{dt} = x_7, \quad \frac{dx_7}{dt} = -x_6,$$

$$\frac{dx_8}{dt} = x_8 (x_{15} \frac{dx_{12}}{dt} + x_{12} \frac{dx_{15}}{dt}) = x_8 (x_{15} x_{12} x_{13}^2 x_{10} - x_{12} x_{14} x_{10}),$$

$$\frac{dx_9}{dt} = x_{10}, \quad \frac{dx_{10}}{dt} = -x_9, \quad \frac{dx_{11}}{dt} = -x_{11}^2 x_{13}^2 x_{10}, \quad \frac{dx_{12}}{dt} = x_{11} x_{13}^2 x_{10},$$

$$\frac{dx_{13}}{dt} = -x_{13}^2 \frac{dx_{15}}{dt} = x_{13}^2 x_{14} x_{10}, \quad \frac{dx_{14}}{dt} = x_{15} x_{10}, \quad \frac{dx_{15}}{dt} = -x_{14} x_{10}.$$

Пример 10. Многоэтажная экспонента.

При постоянных $a_0, \ \dots, a_m$ и $m \in [1, +\infty)$ рассмотрим функции $u_1 = e(a_{m-1}, a_m, t), \ \dots, u_m = e(a_0, \dots, a_m, t)$ аргумента t, заданные рекуррентными соотношениями:

$$e(a_{m-1}, a_m, t) = a_{m-1} exp(a_m t), \ \ e(a_{m-i}, \ \dots, a_m, t) = a_{m-i} exp(e(a_{m-i+1}, \ \dots, a_m, t)).$$

Дифференцируя эти равенства по t, получаем полиномиальную систему:

$$\frac{du_1}{dt} = a_m u_1, \quad \frac{du_2}{dt} = a_m u_1 u_2, \ \dots, \frac{du_m}{dt} = a_m u_1 \cdot \ldots \cdot u_m.$$

Глава 2. Схемы и быстрое вычисление систем мономов многих переменных

При написании данной главы использовались многие источники: [3, 8, 22, 30, 35].

Данная глава состоит из трех разделов. В первом разделе описаны основные определения, введенные для формулировки проблемы построения схемы и её алгоритма.

Во втором разделе представлены алгоритмы построения схем для произвольного набора мономов: до третьей степени и выше.

В третьей разделе представлены примеры построения схем для уравнений Пенлеве и задачи N тел в различных полиномиальных формах.

2.1 Основные определения

Введем необходимые определения и обозначения.

Моном – функция, определяемая формулой:

$$x^i = \prod_{k=1}^{n} x_k^{i_k} = x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}, \quad i_k \geqslant 0, \; k \in [1, n].$$

Набор $T = (x^{i(1)}, \ldots, x^{i(n)}, x^{i(n+1)}, \ldots, x^{i(M)})$ мономов рассмотрим как упорядоченный при условии, что

$$2 \leqslant |i(n+1)| \leqslant |i(n+2)| \leqslant \ldots \leqslant |i(M)| \leqslant L,$$

и обсудим задачу вычисления мономов $x^{i(n+1)}, \ldots, x^{i(M)}$ набора T в предположении, что известны первые n его мономов, то есть мономы

$$x^{i(1)} = x_1, \ldots, x^{i(n)} = x_n.$$

Вычислить T (то есть мономы $x^{i(n+1)}, \ldots, x^{i(M)}$ в T) можно всегда, так как каждый из мономов можно получить, перемножив соответствующее число раз исходные величины $x_1, ..., x_n$, например, $x_1^2 x_2^3 x_3 = x_1 x_1 x_2 x_2 x_2 x_3$. Ясно, что это не самый эффективный способ вычисления T. Вычисляя мономы последовательно слева направо в T, можно для получения очередного монома использовать в качестве сомножителей уже вычисленные ранее мономы, если таковые есть. Например, $x_1^2x_2^3x_3$ можно вычислить как $(x_1^2x_2^3)x_3$ или как $x_1^2(x_2^3x_3)$, если моном $x_1^2x_2^3$ или мономы $x_2^3x_3$ и x_1^2 ранее были вычислены.

Если очередной моном $x^{i(r)}$ в наборе можно вычислить как произведение ранее вычисленных мономов $x^{i(p)},\ x^{i(q)}$, то это означает, что $i(r) = i(p) + i(q)$, причем $1 \leqslant p < r,\ 1 \leqslant q < r$. Если при $|i(r)| \geqslant 3$ все мономы $x^{i(r)}$ можно вычислить таким образом последовательно (мономы в T упорядочены), то можно ввести в рассмотрение ***схему*** – упорядоченный набор

$$S(T) = \big((p(n+1), q(n+1)), \ldots, (p(M), q(M))\big)$$

из $M - n$ пар натуральных чисел $((p(r), q(r))$, удовлетворяющих условию $r > p(r), q(r)$ для любых $r \in [n+1, M]$.

Набор T может не иметь схемы, а может иметь одну или несколько схем. Например, набор $\{x, x^2, x^4, x^7\}$ не имеет схемы, а наборы $\{x, x^2, x^4, x^5, x^7\}$, $\{x, x^2, x^3, x^4, x^7\}$ имеют одну и две схемы соответственно. Если T имеет схему, ее можно использовать при вычислении $T : x^{i(n+1)}, \ldots, x^{i(M)}$ вычисляются слева направо в этом порядке, причем очередной моном $x^{i(r)}$ вычисляется как произведение уже вычисленных $x^{i(p)}$ и $x^{i(q)}$. Если набор T не имеет схемы, то его всегда можно дополнить до набора T', имеющего схему. Это очевидно, так как любой набор T мономов степени не выше L можно дополнить до набора T', содержащего все мономы степени не выше $L - 1$.

Пусть $T,\ T'$ – упорядоченные наборы мономов. Будем писать $T \subset T'$ или $T' \supset T$ в том случае, когда все мономы набора T содержатся и в T'. Если $T' \supset T$ и T' имеет схему, то будем называть T' ***оболочкой*** для $T : \ T' = span(T)$. Набор T' с минимальным количеством добавленных мономов будем называть ***минимальной оболочкой*** и обозначать $T' = mspan(T)$. Если мы хотим вычислять T на основе некоторой схемы, а T не имеет схемы, то следует вычислять не T, а его оболочку T', причем чем меньше дополнительных мономов в T', тем быстрее, вообще говоря, будет процедура вычисления набора T. В то же время для данного набора T могут существовать различные оболочки с одинаковым количеством мономов (например, у набора $\{x, x^2, x^4, x^7\}$ есть оболочки $\{x, x^2, x^3, x^4, x^7\},\ \{x, x^2, x^4, x^5, x^7\},\ \{x, x^2, x^4, x^6, x^7\}$).

Исходный набор $T^0 = (x^{i(1)}, \ldots, x^{i(n)}, \ldots x^{i(n+1)}, \ldots, x^{i(M^0)})$ можно задать соответствующим набором индексов $I^0 = (i(1), \ldots, i(n), \ldots i(n+1), \ldots, i(M^0))$. Набор мономов, индексов и количество элементов оболочки обозначим

T^h, I^h, M^h. Эти же величины на текущем шаге алгоритма обозначим T, I, M (в начале и в конце алгоритма они равны T^0, I^0, M^0 и T^h, I^h, M^h).

Неравенства для индексов означают, что они выполнены для всех компонентов индексов, например, $i(\nu) = (i_1(\nu), \dots, i_n(\nu)) \geqslant 0$ означает, что $i_j(\nu) \geqslant 0,\ j = 1, \dots n$. Если $i - k \geqslant 0 (i - k > 0)$, то будем говорить, что i содержит (строго содержит) k, или что k содержится (строго содержится) в i (будем говорить еще, что k является подиндексом i, а i – надиндексом k).

Величину $s = |i| = i_1 + \dots + i_n$ будем называть ***степенью индекса*** i, причем при $s = 1, 2, 3, \dots, m$ будем говорить о линейном, квадратичном, кубическом индексе и m – индексе (или индексе степени m).

Нелинейный индекс $i(v) \in I^0$ будем называть ***согласованным*** или ***несогласованным*** в наборе I^0, если он представляется или нет суммой двух индексов из I^0. Все квадратичные индексы i согласованы. Исходный набор индексов $I^0 = (i(1), \dots, i(n), \dots i(n+1), \dots, i(M^0))$ разделим на два набора, $I^0_+ = (i(1), \dots, i(n), \dots i(n + M_+))$, $I^0_- = (i(n + r), \dots, i(n), \dots i(n + R)$, первый из которых состоит из линейных и согласованных нелинейных индексов, а второй – из несогласованных индексов. Предполагается, что в наборах порядок следования индексов тот же, что у них был в I^0. Очевидно, что целые r, R, M_+ должны удовлетворять неравенствам

$$0 < r \leqslant R \leqslant M^0 - n, \quad n + 1 \leqslant M \leqslant M^0.$$

Для $i(k) \in I$, примем также и обозначение $i(s, \mu(s))$, где $s = |i(k)| = i_1(k) + \dots + i_n(k)$, а $\mu(s) = 1, 2, \dots, m(s)$ – порядковый номер индекса в множестве

$$I(s) = \{i(\nu) \in I \big| |i(\nu)| = s\},$$

как и соответствующего монома в

$$T(s) = \{x^{i(\nu)} \in T \big| |i(\nu)| = s\}$$

(если $I(s)$ пустое множество, то полагаем $\mu(s) = m(s) = 0$).

2.2 Быстрое вычисление систем мономов многих переменных

Данный раздел разбит на две части. В первой части описан алгоритм решения проблемы построения минимальной оболочки для произвольного набора мономов до третьей степени включительно. Во второй части описан алгоритм для вычисления оболочки для произвольного набора мономов произвольной степени.

2.2.1 Системы мономов до третьей степени

В данном разделе описана и решена проблема построения минимальной оболочки и схемы для набора мономов до третьей степени включительно. Материал взят из [3, 22, 26].

Формулировка проблемы: Задача состоит во введении меньшего количества таких квадратичных индексов (мономов второй степени), что любой несогласованный кубический индекс (несогласованный моном третьей степени) $i(3, \mu_1(3)),\ \ldots, i(3, \mu_m(3))$ исходного набора содержит хотя бы один из них.

Каждый из кубических индексов содержит до трех квадратичных. Например, кубический индекс $(3, 0, 0,\ \ldots, 0)$ содержит один квадратичный $(2, 0, 0,\ \ldots, 0)$, индекс $(2, 1, 0,\ \ldots, 0)$ содержит два $(2, 0, 0,\ \ldots, 0)$, $(1, 1, 0,\ \ldots, 0)$, а $(1, 1, 1, 0,\ \ldots, 0)$ – три $(1, 1, 0,\ \ldots, 0)$, $(1, 0, 1,\ \ldots, 0)$ и $(0, 1, 1,\ \ldots, 0)$.

Квадратичный подиндекс индекса k^r обозначим k^r_j, а их количество – $\sigma(r) \in [1 : 3]$. Все различные подиндексы k^r_j $j \in [1 : \sigma(r)]$, $r \in [1 : m]$ рассмотрим в виде упорядоченного набора $i^1,\ \ldots, i^l$, а каждый подиндекс k^r_j запишем как $i^{\nu(r,\ j)}$. Сопоставив каждой величине i^v переменную d_v, которая может принимать два значения – 0 и 1, приходим к задаче:

при известных $\sigma(r) \in [1 : 3]$, $\nu(i, j) \in [1 : l]$

найти целые $d_1,\ \ldots, d_l$, удовлетворяющие неравенствам:

$$\sum_{j=1}^{\sigma(r)} d_{\nu(i,j)} \geqslant 1, \quad 0 \leqslant d_\nu \leqslant 1,\ \nu \in [1 : l],\ r \in [1 : m],$$

и минимизировать сумму $L(d_1,\ \ldots, d_l) = d_1 + \ \cdots + d_l$.

Решение проблемы минимизации количества квадратичных подиндексов сведена к задаче бинарного линейного программирования. Решив полученную задачу бинарного программирования, получим оптимальное решение сформулированной проблемы.

2.2.2 Системы мономов третьей степени и выше

В данном разделе описана и решена проблема построения оболочки и схемы для набора мономов произвольной степени. Материал взят из [43].

Формулировка проблемы: Рассмотрим набор T мономов до степени s включительно. Задача состоит во введении, по возможности, меньшего количества дополнительных мономов для построения оболочки $span(T)$ и схемы $S(T)$.

Рассмотрим упорядоченный набор мономов T_s степени s из исходного набора $T : T_s \subseteq T$ и рассмотрим проблему: найти минимальный набор мономов $D(T_s)$, состоящий из мономов $s-1$ степени, такой, что любой моном из набора T_s можно вычислить умножением монома из набора $D(T_s)$ и одного монома первой степени.

Введем рекурсивные обозначения:

$$T^{(L-1)} = D(T_s) \cup T_{L-1},\ T^{(L-2)} = D(T^{(L-1)}) \cup T_{L-2},\ \ldots, T^3 = D(T^2) \cup T_2,$$

мы будем использовать следующую эвристическую формулу:

$$span(T) = T^{(2)} \cup\ \cdots \cup T^{(L-1)} \cup T_L.$$

Кроме того, будем использовать обозначения, введенные выше, и обозначения:

$m(s) = card\, T_s$ – количество индексов в T_s;

$k^{(r,s)}(r \in [1 : m(s)])$ – r – ый индекс в T_s;

$G(r, s) \in [1 : s]$ – количество подиндексов $s-1$ степени в индексе $k^{(r,s)}$;

$k_j^{(r,s)}(r \in [1 : m],\ j \in [1 : G(r, s)],\ G(r, s) \in [1 : s])$ – j – ый подиндекс $s-1$ степени индекса $k^{(r,s)}$;

$l(s) = card \cup_{r=1}^{m(s)} \cup_{j=1}^{G(r,s)} k_j^{(r,s)}$ – количество различных подиндексов $s-1$ степени для всех индексов $k^{(r,s)}$;

$i^1,\ \ldots, i^l$ – упорядоченный набор $card \cup_{r=1}^{m(s)} \cup_{j=1}^{G(r,s)} k_j^{(r,s)}$;

$v(r, s, j)$ – такая функция, которая $k_j^{(r,s)} = i^{\nu(r,s,j)}$;

Связывая с каждой переменной i^ν бинарную переменную d_ν ($d_v = 0$ или $d_v = 1$), возникает следующая проблема бинарного линейного программирования:

при известных $m(s),\ l(s)$, и $\sigma(r, s) \in [1 : s],\ \nu(r, s, j) \in [1 : l(s)]$

минимизировать $L(d_1,\ \ldots, d_{l(s)}) = d_1 +\ \cdots + d_{l(s)}$

при ограничениях: $0 \leqslant d_\nu \leqslant 1,\ \nu \in [1 : l(s)],\ \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant G(r,s)} d_{\nu(r,s,j)} \geqslant 1.$

Для решения таких задач использовалась соответствующая программа на Wolfram Mathematica (Приложение А).

2.3 Примеры построения схем

В данном разделе рассмотрены шесть уравнением Пенлеве в полиномиальной форме (Глава 1; Раздел 1.2; Пример 6), оболочки для данных полиномиальных систем и соответствующие схемы для этих оболочек. Также рассмотрена задача 5 тел в полиномиальной форме пятой, четвертой и третьей степенях (Глава 1; Раздел 1.2; Пример 7). Построена оболочка для этих полиномиальных систем и соответствующие схемы для них. Построение оболочки и схемы производилось при помощи программы, представленной в Приложении А.

2.3.1 Уравнения Пенлеве

Рассмотрим шесть уравнений Пенлеве в полиномиальной форме (1.10 – 1.15) и построим для них оболочку и схему, соответствующую этой оболочке.

Первое уравнение Пенлеве:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= 6x_1^2 + x_3, \\ x_3' &= 1. \end{aligned}$$

Набор мономов, стоящих в правой части дифференциальных уравнений, состоит из мономов первой и второй степени, поэтому схема строится автоматически.

Набор мономов: $T(P_I) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_1^2\}$, Схема: $S(P_I) = \{(1,1)\}$.

Второе уравнение Пенлеве:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= 2x_1^3 + x_1x_3 + \alpha, \\ x_3' &= 1. \end{aligned}$$

Набор мономов: $T(P_{II}) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_1^3,\ x_1x_3\}$.
Добавим один моном $\{x_1^2\}$, получим оболочку:

$$T'(P_{II}) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_1^2,\ x_1^3,\ x_1x_3\}.$$

Схема для полученной оболочки:

$$S(P_{II}) = \{(1,1),\ (1,4),\ (1,3)\}.$$

Третье уравнение Пенлеве:

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_2,\\
x_2' &= x_2^2x_3 - x_2x_4 + \alpha x_1^2x_4 + \beta x_4 + \gamma x_1^3 + \delta x_3,\\
x_3' &= -x_2x_3^2,\\
x_4' &= -x_4^2.
\end{aligned}$$

Набор мономов:

$$T(P_{III}) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_2x_4,\ x_4^2,\ x_1^2x_4,\ x_2^2x_3,\ x_2x_3^2,\ x_1^3\}.$$

Добавим два монома $\{x_2x_3,\ x_1^2\}$, получим оболочку:

$$T'(P_{III}) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_2x_3,\ x_2x_4,\ x_1^2,\ x_4^2,\ x_1^2x_4,\ x_2^2x_3,\ x_2x_3^2,\ x_1^3\}.$$

Схема для полученной оболочки:

$$S(P_{III}) = \{(2,3),\ (2,4),\ (1,1),\ (4,4),\ (4,7),\ (2,5),\ (3,5),\ (1,7)\}.$$

Четвёртое уравнение Пенлеве:

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_2,\\
x_2' &= \frac{1}{2}x_2^2x_3 - \frac{3}{2}x_1^3 + 4x_1^2x_4 + 2x_1x_4^2 - 2\alpha x_1 + \beta x_3,\\
x_3' &= -x_2x_3^2,\\
x_4' &= 1.
\end{aligned}$$

Набор мономов:

$$T(P_{IV}) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_1^2x_4,\ x_1x_4^2,\ x_2x_3^2,\ x_2^2x_3,\ x_1^3\}.$$

Добавим три монома $\{x_1x_4,\ x_2x_3,\ x_1^2\}$, получим оболочку:

$$T'(P_{IV}) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_1x_4,\ x_2x_3,\ x_1^2,\ x_1^2x_4,\ x_1x_4^2,\ x_2x_3^2,\ x_2^2x_3,\ x_1^3\}.$$

Схема для полученной оболочки:

$$S(P_{IV}) = \{(1,4),\ (2,3),\ (1,1),\ (1,5),\ (4,5),\ (3,6),\ (2,6),\ (1,7)\}.$$

Пятое уравнение Пенлеве:

$$\begin{aligned}
&x_1' = x_2,\\
&x_2' = \frac{1}{2}x_2^2x_3 + x_2^2x_4 - x_2x_5 + \alpha x_1^3x_5^2 + \beta x_1^2x_3x_5^2 - 2\alpha x_1^2x_5^2 -\\
&- 2\beta x_1x_3x_5^2 + \alpha x_1x_5^2 + \beta x_3x_5^2 + \gamma x_1x_4 + \gamma x_1x_4,\\
&x_3' = -x_2x_3^2,\\
&x_4' = -x_2x_4^2,\ x_5 = -x_5^2.
\end{aligned}$$

Набор мономов:

$$T(P_V) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_1x_4,\ x_1x_5,\ x_2x_5,\ x_1^2x_4,\ x_2^2x_3,\ x_5^2,$$

$$x_1^2x_4,\ x_2^2x_3,\ x_2^2x_4,\ x_2x_3^2,\ x_2x_4^2,\ x_1x_5^2,\ x_3x_5^2,\ x_1^2x_5^2,\ x_1x_3x_5^2,\ x_1^3x_5^2,\ x_1^2x_3x_5^2\}.$$

Добавим три монома $\{x_2x_3,\ x_2x_4\}$, получим оболочку:

$$T'(P_V) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_1x_4,\ x_1x_5,\ x_2x_5,\ x_2x_3,\ x_2x_4,\ x_1^2x_4,\ x_2^2x_3,\ x_5^2,$$

$$x_1^2x_4,\ x_2^2x_3,\ x_2^2x_4,\ x_2x_3^2,\ x_2x_4^2,\ x_1x_5^2,\ x_3x_5^2,\ x_1^2x_5^2,\ x_1x_3x_5^2,\ x_1^3x_5^2,\ x_1^2x_3x_5^2\}.$$

Схема для полученной оболочки:

$$S(P_V) = \{(1,4),\ (1,5),\ (2,5),\ (2,3),\ (2,4),\ (1,6),\ (2,9),\ (5,5),\ (1,6),$$

$$(2,9),\ (2,10),\ (3,9),\ (4,10),\ (5,7),\ (3,13),\ (7,7),\ (3,19),\ (1,21),\ (3,21)\}.$$

Шестое уравнение Пенлеве:

$$\begin{aligned}
&x_1' = x_2,\\
&x_2' = \frac{1}{2}x_2^2x_3 + \frac{1}{2}x_2^2x_4 + \frac{1}{2}x_2^2x_5 - x_2x_5 - x_2x_6 - x_2x_7 +\\
&+ \alpha x_1(x_1-1)(x_1-x_8)x_6^2x_7^2 + \beta(x_1-1)(x_1-x_8)x_3x_6x_7^2 +\\
&+ \gamma x_1(x_1-x_8)x_4x_6^2x_7 + \delta x_1(x_1-1)x_6x_6x_7,\\
&x_3' = -x_2x_3^2,\ x_4' = -x_2x_4^2,\ x_5' = -x_5^2(x_2-1),\\
&x_6' = -x_6^2,\ x_7' = -x_7^2,\ x_8' = 1.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Набор мономов:

$$T(P_{VI}) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_2x_5,\ x_2x_6,\ x_2x_7,\ x_5^2,\ x_6^2,\ x_7^2,$$

$$x_2^2x_3,\ x_2^2x_4,\ x_2^2x_5,\ x_2x_3^2,\ x_2x_4^2,\ x_2x_5^2,\ x_1x_5x_6x_7,\ x_1x_3x_6x_7^2,\ x_3x_6x_7^2x_8,$$
$$x_1^2x_5x_6x_7,\ x_1^2x_6^2x_7^2,\ x_1x_6^2x_7^2x_8,\ x_1^2x_3x_6x_7^2,\ x_1^2x_3x_6x_7^2x_8,\ x_1^2x_4x_6^2x_7,$$
$$x_1x_4x_6^2x_7x_8,\ x_1^3x_6^2x_7^2,\ x_1^2x_6^2x_7^2x_8\}.$$

Добавим десять мономов:

$$\{x_1x_5,\ x_1x_7,\ x_2x_3,\ x_2x_4,\ x_3x_7,\ x_6x_7,\ x_6^2x_7,\ x_3x_6x_7^2,\ x_1x_6^2x_7^2,\ x_1x_4x_6^2x_7\},$$

получим оболочку:

$$T'(P_{VI}) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_1x_5,\ x_1x_7,\ x_2x_3,\ x_2x_4,\ x_3x_7,$$
$$x_6x_7,\ x_2x_5,\ x_2x_6,\ x_2x_7,\ x_5^2,\ x_6^2,\ x_7^2,\ x_6^2x_7,\ x_2^2x_3,$$
$$x_2^2x_4,\ x_2^2x_5,\ x_2x_3^2,\ x_2x_4^2,\ x_2x_5^2,\ x_3x_6x_7^2,\ x_1x_6^2x_7^2,\ x_1x_5x_6x_7,\ x_1x_3x_6x_7^2,$$
$$x_3x_6x_7^2x_8,\ x_1x_4x_6^2x_7,\ x_1^2x_5x_6x_7,\ x_1^2x_6^2x_7^2,\ x_1x_6^2x_7^2x_8,\ x_1^2x_3x_6x_7^2,\ x_1^2x_3x_6x_7^2x_8,$$
$$x_1^2x_4x_6^2x_7,\ x_1x_4x_6^2x_7x_8,\ x_1^3x_6^2x_7^2,\ x_1^2x_6^2x_7^2x_8\}.$$

Схема для полученной оболочки:

$$S(P_{VI}) = \{(1,5),\ (1,7),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,7),\ (6,7),\ (2,5),\ (2,6),\ (2,7),\ (5,5),$$
$$(6,6),\ (7,7),\ (2,11),\ (2,12),\ (2,13),\ (3,11),\ (4,12),\ (5,13),\ (6,18),$$
$$(10,18),\ (17,18),\ (1,10),\ (8,30),\ (1,29),\ (15,28),\ (9,28),\ (1,34),$$
$$(8,34),\ (1,31),\ (8,31),\ (1,35),\ (8,35)\}.$$

2.3.2 Задача N тел в различных полиномиальных формах

Рассмотрим примеры полиномиальной системы задачи N тел в различных полиномиальных формах: пятой, четвертой и третьей степени соответственно (1.17 – 1.19). Ниже представлена таблица со статистикой по этим задачам: количество тел, количество независимых переменных системы, количество уникальных мономов, стоящих в правой части этих систем, и оптимальное количество мономов, необходимых и достаточных для построения оболочки/схемы. В представленной ниже таблице используются обозначения:

N – количество тел;

i – задача N тел в полиномиальной форме i степени, $i = 5,\ 4,\ 3$;

$N_v^{(i)}$ – количество независимых переменных полиномиальной системы i степени;

$N_m^{(i)}$ – количество уникальных мономов, стоящих в правой части полиномиальной системы i степени;

$N_m^{(i)+}$ – оптимальное количество мономов, которое необходимо и достаточно добавить для построения оболочки (для полиномиальной системы i степени).

Таблица 1 — Статистика по мономам для задачи N тел в различных полиномиальных формах

N	$N_v^{(5)}$	$N_m^{(5)}$	$N_m^{(5)+}$	$N_v^{(4)}$	$N_m^{(4)}$	$N_m^{(4)+}$	$N_v^{(3)}$	$N_m^{(3)}$	$N_m^{(3)+}$
3	15	24	6	21	50	3	24	51	0
4	24	63	12	36	126	6	42	129	0
5	34	120	20	54	252	10	64	258	0
6	45	195	30	75	440	15	90	450	0
7	57	288	42	99	702	21	120	717	0
8	70	399	56	126	1050	28	154	1071	0
9	84	528	72	156	1496	36	192	1524	0
10	99	675	90	189	2052	45	234	2088	0

Ниже рассмотрим примеры построения оболочки и схемы для задачи 5 тел в различных полиномиальных формах: пятой, четвертой и третьей степенях соответственно.

Задача N тел в полиномиальной форме пятой степени

Система дифференциальных уравнений для задачи N тел в полиномиальной форме пятой степени имеет вид (Глава 1, 1.2 Примеры, Пример 7):

$$\frac{dp_{i,j}}{dt} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}d_{0,i}^3 + k^2 \sum_{w\in[1:l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})d_{w,i}^3 - g_{w,j}d_{0,w}^3],$$

$$\frac{dg_{i,j}}{dt} = p_{i,j},\quad \frac{dd_{s,i}}{dt} = -d_{s,i}^3\sum_{j=1}^{3}(g_{i,j}-g_{s,j})(p_{i,j}-p_{s,j}). \tag{2.2}$$

Пусть $N = 5$. Выпишем список переменных и соответствующие замены для удобства работы с мономами.

Список переменных:

$$\{g_{1,1},\ g_{1,2},\ g_{1,3},\ g_{2,1},\ g_{2,2},\ g_{2,3},\ g_{3,1},\ g_{3,2},\ g_{3,3},\ g_{4,1},\ g_{4,2},\ g_{4,3},$$

$$p_{1,1},\ p_{1,2},\ p_{1,3},\ p_{2,1},\ p_{2,2},\ p_{2,3},\ p_{3,1},\ p_{3,2},\ p_{3,3},\ p_{4,1},\ p_{4,2},\ p_{4,3},$$

$$d_{0,1},\ d_{0,2},\ d_{0,3},\ d_{0,4},\ d_{1,2},\ d_{1,3},\ d_{2,3},\ d_{1,4},\ d_{2,4},\ d_{3,4}\}$$

Замена переменных:

$$\{g_{1,1} \to x_1,\ g_{1,2} \to x_2,\ g_{1,3} \to x_3,\ g_{2,1} \to x_4,\ g_{2,2} \to x_5,\ g_{2,3} \to x_6,$$

$$g_{3,1} \to x_7,\ g_{3,2} \to x_8,\ g_{3,3} \to x_9,\ g_{4,1} \to x_{10},\ g_{4,2} \to x_{11},\ g_{4,3} \to x_{12},$$

$$p_{1,1} \to x_{13},\ p_{1,2} \to x_{14},\ p_{1,3} \to x_{15},\ p_{2,1} \to x_{16},\ p_{2,2} \to x_{17},\ p_{2,3} \to x_{18},$$

$$p_{3,1} \to x_{19},\ p_{3,2} \to x_{20},\ p_{3,3} \to x_{21},\ p_{4,1} \to x_{22},\ p_{4,2} \to x_{23},\ p_{4,3} \to x_{24},$$

$$d_{0,1} \to x_{25},\ d_{0,2} \to x_{26},\ d_{0,3} \to x_{27},\ d_{0,4} \to x_{28},$$

$$d_{1,2} \to x_{29},\ d_{1,3} \to x_{30},\ d_{2,3} \to x_{31},\ d_{1,4} \to x_{32},\ d_{2,4} \to x_{33},\ d_{3,4} \to x_{34},\}$$

Полученный набор мономов является входным аргументом для программы из Приложения А:

$$\{x_1x_{25}^3,\ x_1x_{29}^3,\ x_1x_{30}^3,\ x_1x_{32}^3,\ x_2x_{25}^3,\ x_2x_{29}^3,\ x_2x_{30}^3,\ x_2x_{32}^3,$$

$$x_3x_{25}^3,\ x_3x_{29}^3,\ x_3x_{30}^3,\ x_3x_{32}^3,\ x_4x_{26}^3,\ x_4x_{29}^3,\ x_4x_{31}^3,\ x_4x_{33}^3,$$

$$x_5x_{26}^3,\ x_5x_{29}^3,\ x_5x_{31}^3,\ x_5x_{33}^3,\ x_6x_{26}^3,\ x_6x_{29}^3,\ x_6x_{31}^3,\ x_6x_{33}^3,$$

$$x_7x_{27}^3,\ x_7x_{30}^3,\ x_7x_{31}^3,\ x_7x_{34}^3,\ x_8x_{27}^3,\ x_8x_{30}^3,\ x_8x_{31}^3,\ x_8x_{34}^3,$$

$$x_9x_{27}^3,\ x_9x_{30}^3,\ x_9x_{31}^3,\ x_9x_{34}^3,\ x_{10}x_{28}^3,\ x_{10}x_{32}^3,\ x_{10}x_{33}^3,\ x_{10}x34^3,$$

$$x_{11}x_{28}^3,\ x_{11}x_{32}^3,\ x_{11}x_{33}^3,\ x_{11}x_{34}^3,\ x_{12}x_{28}^3, x_{12}x_{32}^3,\ x_{12}x_{33}^3,\ x_{12}x_{34}^3,$$

$$x_1x_{13}x_{25}^3,\ x_1x_{13}x_{29}^3,\ x_1x_{13}x_{30}^3,\ x_1x_{13}x_{32}^3,\ x_1x_{16}x_{29}^3,\ x_1x_{19}x_{30}^3,\ x_1x_{22}x_{32}^3,$$

$$x_2x_{14}x_{25}^3,\ x_2x_{14}x_{29}^3,\ x_2x_{14}x_{30}^3,\ x_2x_{14}x_{32}^3,\ x_2x_{17}x_{29}^3,\ x_2x_{20}x_{30}^3,\ x_2x_{23}x_{32}^3,$$

$$x_3x_{15}x_{25}^3,\ x_3x_{15}x_{29}^3,\ x_3x_{15}x_{30}^3,\ x_3x_{15}x_{32}^3,\ x_3x_{18}x_{29}^3,\ x_3x_{21}x_{30}^3,\ x_3x_{24}x_{32}^3,$$

$$x_4x_{13}x_{29}^3,\ x_4x_{16}x_{26}^3,\ x_4x_{16}x_{29}^3,\ x_4x_{16}x_{31}^3,\ x_4x_{16}x_{33}^3,\ x_4x_{19}x_{31}^3,\ x_4x_{22}x_{33}^3,$$

$$x_5x_{14}x_{29}^3,\ x_5x_{17}x_{26}^3,\ x_5x_{17}x_{29}^3,\ x_5x_{17}x_{31}^3,\ x_5x_{17}x_{33}^3,\ x_5x_{20}x_{31}^3,\ x_5x_{23}x_{33}^3,$$

$$x_6x_{15}x_{29}^3,\ x_6x_{18}x_{26}^3,\ x_6x_{18}x_{29}^3,\ x_6x_{18}x_{31}^3,\ x_6x_{18}x_{33}^3,\ x_6x_{21}x_{31}^3,\ x_6x_{24}x_{33}^3,$$

$$x_7x_{13}x_{30}^3,\ x_7x_{16}x_{31}^3,\ x_7x_{19}x_{27}^3,\ x_7x_{19}x_{30}^3,\ x_7x_{19}x_{31}^3,\ x_7x_{19}x_{34}^3,\ x_7x_{22}x_{34}^3,$$

$$x_8x_{14}x_{30}^3,\ x_8x_{17}x_{31}^3,\ x_8x_{20}x_{27}^3,\ x_8x_{20}x_{30}^3,\ x_8x_{20}x_{31}^3,\ x_8x_{20}x_{34}^3,\ x_8x_{23}x_{34}^3,$$

$$x_9x_{15}x_{30}^3,\ x_9x_{18}x_{31}^3,\ x_9x_{21}x_{27}^3,\ x_9x_{21}x_{30}^3,\ x_9x_{21}x_{31}^3,\ x_9x_{21}x_{34}^3,\ x_9x_{24}x_{34}^3,$$

$$x_{10}x_{13}x_{32}^3,\ x_{10}x_{16}x_{33}^3,\ x_{10}x_{19}x_{34}^3,\ x_{10}x_{22}x_{28}^3,\ x_{10}x_{22}x_{32}^3,\ x_{10}x_{22}x_{33}^3,\ x_{10}x_{22}x_{34}^3,$$

$$x_{11}x_{14}x_{32}^3,\ x_{11}x_{17}x_{33}^3,\ x_{11}x_{20}x_{34}^3,\ x_{11}x_{23}x_{28}^3,\ x_{11}x_{23}x_{32}^3,\ x_{11}x_{23}x_{33}^3,\ x_{11}x_{23}x_{34}^3,$$

$$x_{12}x_{15}x_{32}^3,\ x_{12}x_{18}x_{33}^3,\ x_{12}x_{21}x_{34}^3,\ x_{12}x_{24}x_{28}^3,\ x_{12}x_{24}x_{32}^3,\ x_{12}x_{24}x_{33}^3,\ x_{12}x_{24}x_{34}^3\}$$

Результом решения задачи линейного программирования является дополнительный набор мономов, который необходимо и достаточно добавить к исходному набору, чтобы получить оболочку для этого набора. Ниже приведен этот набор мономов:

$$\{x_{25}^2,\ x_{26}^2,\ x_{27}^2,\ x_{28}^2,\ x_{29}^2,\ x_{30}^2,\ x_{31}^2,\ x_{32}^2,\ x_{33}^2,\ x_{34}^2,$$

$$x_{25}^3,\ x_{26}^3,\ x_{27}^3,\ x_{28}^3,\ x_{29}^3,\ x_{30}^3,\ x_{31}^3,\ x_{32}^3,\ x_{33}^3,\ x_{34}^3\}$$

Результатом работы программы является схема:

$$\{(25,25),\ (26,26),\ (27,27),\ (28,28),\ (29,29),\ (30,30),\ (31,31),\ (32,32),$$

$$(33,33),\ (34,34),\ (25,35),\ (26,36),\ (27,37),\ (28,38),\ (29,39),\ (30,40),$$

$$(31,41),\ (32,42),\ (33,43),\ (34,44),\ (1,45),\ (1,49),\ (1,50),\ (1,52),$$

$$(2,45),\ (2,49),\ (2,50),\ (2,52),\ (3,45),\ (3,49),\ (3,50),\ (3,52),$$

$$(4,46),\ (4,49),\ (4,51),\ (4,53),\ (5,46),\ (5,49),\ (5,51),\ (5,53),$$

$$(6,46),\ (6,49),\ (6,51),\ (6,53),\ (7,47),\ (7,50),\ (7,51),\ (7,54),$$

$$(8,47),\ (8,50),\ (8,51),\ (8,54),\ (9,47),\ (9,50),\ (9,51),\ (9,54),$$

$$(10,48),\ (10,52),\ (10,53),\ (10,54),\ (11,48),\ (11,52),\ (11,53),\ (11,54),$$

$$(12,48),\ (12,52),\ (12,53),\ (12,54),\ (13,55),\ (13,56),\ (13,57),\ (13,58),$$

$$(16,56),\ (19,57),\ (22,58),\ (14,59),\ (14,60),\ (14,61),\ (14,62),\ (17,60),$$

$$(20,61),\ (23,62),\ (15,63),\ (15,64),\ (15,65),\ (15,66),\ (18,64),\ (21,65),$$

$$(24,66),\ (13,68),\ (16,67),\ (16,68),\ (16,69),\ (16,70),\ (19,69),\ (22,70),$$

$$(14,72),\ (17,71),\ (17,72),\ (17,73),\ (17,74),\ (20,73),\ (23,74),\ (15,76),$$

$$(18,75),\ (18,76),\ (18,77),\ (18,78),\ (21,77),\ (24,78),\ (13,80),\ (16,81),$$

$$(19,79),\ (19,80),\ (19,81),\ (19,82),\ (22,82),\ (14,84),\ (17,85),\ (20,83),$$

$$(20,84),\ (20,85,\ (20,86),\ (23,86),\ (15,88),\ (18,89),\ (21,87),\ (21,88),$$

$$(21,89),\ (21,90),\ (24,90),\ (13,92),\ (16,93),\ (19,94),\ (22,91),\ (22,92),$$

$$(22,93),\ (22,94),\ (14,96),\ (17,97),\ (20,98),\ (23,95),\ (23,96),\ (23,97),$$

$$(23,98),\ (15,100),\ (18,101),\ (21,102),\ (24,99),\ (24,100),\ (24,101),\ (24,102)\}$$

Задача N тел в полиномиальной форме четвертой степени

Система дифференциальных уравнений для задачи N тел в полиномиальной форме четвертой степени имеет вид:

$$\frac{dp_{i,j}}{dt} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}v_{0,i} + k^2 \sum_{w\in[1:l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})v_{w,i} - g_{w,j}v_{0,w}],$$

$$\begin{aligned} &\frac{dg_{i,j}}{dt} = p_{i,j}, \quad \frac{dd_{s,i}}{dt} = -v_{s,i}w_{s,i}, \quad \frac{dv_{s,i}}{dt} = -3d_{s,i}^2 v_{s,i}w_{s,i}, \\ &\frac{dw_{s,i}}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\Big[(p_{i,j}-p_{s,j})^2 + k^2(g_{i,j}-g_{s,j})\times \\ &\times\Big((m_0+m_s)g_{s,j}v_{0,s} - (m_0+m_i)g_{i,j}v_{0,i}+ \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$+\sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})v_{w,i}-g_{w,j}v_{0,w}-\sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{s,j})v_{w,s}-g_{w,s}v_{0,w}]\Big)\Big].$$

Пусть $N = 5$. Выпишем список переменных и соответствующие замены для удобства работы с мономами.

Список переменных:

$$\{g_{1,1},\ g_{1,2},\ g_{1,3},\ g_{2,1},\ g_{2,2},\ g_{2,3},\ g_{3,1},\ g_{3,2},\ g_{3,3},\ g_{4,1},\ g_{4,2},\ g_{4,3},$$

$$p_{1,1},\ p_{1,2},\ p_{1,3},\ p_{2,1},\ p_{2,2},\ p_{2,3},\ p_{3,1},\ p_{3,2},\ p_{3,3},\ p_{4,1},\ p_{4,2},\ p_{4,3},$$

$$d_{0,1},\ d_{0,2},\ d_{0,3},\ d_{0,4},\ d_{1,2},\ d_{1,3},\ d_{2,3},\ d_{1,4},\ d_{2,4},\ d_{3,4},$$

$$v_{0,1},\ v_{0,2},\ v_{0,3},\ v_{0,4},\ v_{1,2},\ v_{1,3},\ v_{2,3},\ v_{1,4},\ v_{2,4},\ v_{3,4},$$

$$w_{0,1},\ w_{0,2},\ w_{0,3},\ w_{0,4},\ w_{1,2},\ w_{1,3},\ w_{2,3},\ w_{1,4},\ w_{2,4},\ w_{3,4}\}$$

Замена переменных:

$$\{g_{1,1}\to x_1,\ g_{1,2}\to x_2,\ g_{1,3}\to x_3,\ g_{2,1}\to x_4,\ g_{2,2}\to x_5,\ g_{2,3}\to x_6,$$

$$g_{3,1}\to x_7,\ g_{3,2}\to x_8,\ g_{3,3}\to x_9,\ g_{4,1}\to x_{10},\ g_{4,2}\to x_{11},\ g_{4,3}\to x_{12},$$

$$p_{1,1} \to x_{13},\ p_{1,2} \to x_{14},\ p_{1,3} \to x_{15},\ p_{2,1} \to x_{16},\ p_{2,2} \to x_{17},\ p_{2,3} \to x_{18},$$

$$p_{3,1} \to x_{19},\ p_{3,2} \to x_{20},\ p_{3,3} \to x_{21},\ p_{4,1} \to x_{22},\ p_{4,2} \to x_{23},\ p_{4,3} \to x_{24},$$

$$d_{0,1} \to x_{25},\ d_{0,2} \to x_{26},\ d_{0,3} \to x_{27},\ d_{0,4} \to x_{28},$$

$$d_{1,2} \to x_{29},\ d_{1,3} \to x_{30},\ d_{2,3} \to x_{31},\ d_{1,4} \to x_{32},\ d_{2,4} \to x_{33},\ d_{3,4} \to x_{34},$$

$$v_{0,1} \to x_{35},\ v_{0,2} \to x_{36},\ v_{0,3} \to x_{37},\ v_{0,4} \to x_{38},$$

$$v_{1,2} \to x_{39},\ v_{1,3} \to x_{40},\ v_{2,3} \to x_{41},\ v_{1,4} \to x_{42},\ v_{2,4} \to x_{43},\ v_{3,4} \to x_{44},$$

$$w_{0,1} \to x_{35},\ w_{0,2} \to x_{36},\ w_{0,3} \to x_{37},\ w_{0,4} \to x_{38},$$

$$w_{1,2} \to x_{39},\ w_{1,3} \to x_{40},\ w_{2,3} \to x_{41},\ w_{1,4} \to x_{42},\ w_{2,4} \to x_{43},\ w_{3,4} \to x_{44}\}$$

Полученный набор мономов является входным аргументом для программы из Приложения А:

$$\{x_1x_{35},\ x_1x_{39},\ x_1x_{40},\ x_1x_{42},\ x_2x_{35},\ x_2x_{39},\ x_2x_{40},\ x_2x_{42},\ x_3x_{35},\ x_3x_{39},$$

$$x_3x_{40},\ x_3x_{42},\ x_4x_{36},\ x_4x_{39},\ x_4x_{41},\ x_4x_{43},\ x_5x_{36},\ x_5x_{39},\ x_5x_{41},\ x_5x_{43},$$

$$x_6x_{36},\ x_6x_{39},\ x_6x_{41},\ x_6x_{43},\ x_7x_{37},\ x_7x_{40},\ x_7x_{41},\ x_7x_{44},\ x_8x_{37},\ x_8x_{40},$$

$$x_8x_{41},\ x_8x_{44},\ x_9x_{37},\ x_9x_{40},\ x_9x_{41},\ x_9x_{44},\ x_{10}x_{38},\ x_{10}x_{42},\ x_{10}x_{43},\ x_{10}x_{44},$$

$$x_{11}x_{38},\ x_{11}x_{42},\ x_{11}x_{43},\ x_{11}x_{44},\ x_{12}x_{38},\ x_{12}x_{42},\ x_{12}x_{43},\ x_{12}x_{44},\ x_{13}^2,\ x_{13}x_{16},$$

$$x_{13}x_{19},\ x_{13}x_{22},\ x_{14}^2,\ x_{14}x_{17},\ x_{14}x_{20},\ x_{14}x_{23},\ x_{15}^2,\ x_{15}x_{18},\ x_{15}x_{21},\ x_{15}x_{24},$$

$$x_{16}^2,\ x_{16}x_{19},\ x_{16}x_{22},\ x_{17}^2,\ x_{17}x_{20},\ x_{17}x_{23},\ x_{18}^2,\ x_{18}x_{21},\ x_{18}x_{24},\ x_{19}^2,$$

$$x_{19}x_{22},\ x_{20}^2,\ x_{20}x_{23},\ x_{21}^2,\ x_{21}x_{24},\ x_{22}^2,\ x_{23}^2,\ x_{24}^2,\ x_{25}^2,\ x_{26}^2,$$

$$x_{27}^2,\ x_{28}^2,\ x_{29}^2,\ x_{30}^2,\ x_{31}^2,\ x_{32}^2,\ x_{33}^2,\ x_{34}^2,\ x_{35}x_{45},\ x_{36}x_{46},$$

$$x_{37}x_{47},\ x_{38}x_{48},\ x_{39}x_{49},\ x_{40}x_{50},\ x_{41}x_{51},\ x_{42}x_{52},\ x_{43}x_{53},\ x_{44}x_{54}$$

$$x_1^2x_{35},\ x_1^2x_{39},\ x_1^2x_{40},\ x_1^2x_{42},\ x_1x_4x_{35},\ x_1x_4x_{36},\ x_1x_4x_{39},\ x_1x_4x_{40},$$

$$x_1x_4x_{41},\ x_1x_4x_{42},\ x_1x_4x_{43},\ x_1x_7x_{35},\ x_1x_7x_{37},\ x_1x_7x_{39},\ x_1x_7x_{40},\ x_1x_7x_{41},$$

$$x_1x_7x_{42},\ x_1x_7x_{44},\ x_1x_{10}x_{35},\ x_1x_{10}x_{38},\ x_1x_{10}x_{39},\ x_1x_{10}x_{40},\ x_1x_{10}x_{42},\ x_1x_{10}x_{43},$$

$$x_1x_{10}x_{44},\ x_2^2x_{35},\ x_2^2x_{39},\ x_2^2x_{40},\ x_2^2x_{42},\ x_2x_5x_{35},\ x_2x_5x_{36},\ x_2x_5x_{39},$$

$$x_2x_5x_{40},\ x_2x_5x_{41},\ x_2x_5x_{42},\ x_2x_5x_{43},\ x_2x_8x_{35},\ x_2x_8x_{37},\ x_2x_8x_{39},\ x_2x_8x_{40},$$

$$x_2x_8x_{41},\ x_2x_8x_{42},\ x_2x_8x_{44},\ x_2x_{11}x_{35},\ x_2x_{11}x_{38},\ x_2x_{11}x_{39},\ x_2x_{11}x_{40},\ x_2x_{11]}x_{42},$$

$$x_2x_{11}x_{43},\ x_2x_{11}x_{44},\ x_3^2x_{35},\ x_3^2x_{39},\ x_3^2x_{40},\ x_3^2x_{42},\ x_3x_6x_{35},\ x_3x_6x_{36},$$

$$x_3x_6x_{39},\ x_3x_6x_{40},\ x_3x_6x_{41},\ x_3x_6x_{42},\ x_3x_6x_{43},\ x_3x_9x_{35},\ x_3x_9x_{37},\ x_3x_9x_{39},$$
$$x_3x_9x_{40},\ x_3x_9x_{41},\ x_3x_9x_{42},\ x_3x_9x_{44},\ x_3x_{12}x_{35},\ x_3x_{12}x_{38},\ x_3x_{12}x_{39},\ x_3x_{12}x_{40},$$
$$x_3x_{12}x_{42},\ x_3x_{12}x_{43},\ x_3x_{12}x_{44},\ x_4^2x_{36},\ x_4^2x_{39},\ x_4^2x_{41},\ x_4^2x_{43},\ x_4x_7x_{36},$$
$$x_4x_7x_{37},\ x_4x_7x_{39},\ x_4x_7x_{40},\ x_4x_7x_{41},\ x_4x_7x_{43},\ x_4x_7x_{44},\ x_4x_{10}x_{36},\ x_4x_{10}x_{38},$$
$$x_4x_{10}x_{39},\ x_4x_{10}x_{41},\ x_4x_{10}x_{42},\ x_4x_{10}x_{43},\ x_4x_{10}x_{44},\ x_5^2x_{36},\ x_5^2x_{39},\ x_5^2x_{41},$$
$$x_5^2x_{43},\ x_5x_8x_{36},\ x_5x_8x_{37},\ x_5x_8x_{39},\ x_5x_8x_{40},\ x_5x_8x_{41},\ x_5x_8x_{43},\ x_5x_8x_{44},$$
$$x_5x_{11}x_{36},\ x_5x_{11}x_{38},\ x_5x_{11}x_{39},\ x_5x_{11}x_{41},\ x_5x_{11}x_{42},\ x_5x_{11}x_{43},\ x_5x_{11}x_{44},\ x_6^2x_{36},$$
$$x_6^2x_{39},\ x_6^2x_{41},\ x_6^2x_{43},\ x_6x_9x_{36},\ x_6x_9x_{37},\ x_6x_9x_{39},\ x_6x_9x_{40},\ x_6x_9x_{41},$$
$$x_6x_9x_{43},\ x_6x_9x_{44},\ x_6x_{12}x_{36},\ x_6x_{12}x_{38},\ x_6x_{12}x_{39},\ x_6x_{12}x_{41},\ x_6x_{12}x_{42},\ x_6x_{12}x_{43},$$
$$x_6x_{12}x_{44},\ x_7^2x_{37},\ x_7^2x_{40},\ x_7^2x_{41},\ x_7^2x_{44},\ x_7x_{10}x_{37},\ x_7x_{10}x_{38},\ x_7x_{10}x_{40},$$
$$x_7x_{10}x_{41},\ x_7x_{10}x_{42},\ x_7x_{10}x_{43},\ x_7x_{10}x_{44},\ x_8^2x_{37},\ x_8^2x_{40},\ x_8^2x_{41},\ x_8^2x_{44},$$
$$x_8x_{11}x_{37},\ x_8x_{11}x_{38},\ x_8x_{11}x_{40},\ x_8x_{11}x_{41},\ x_8x_{11}x_{42},\ x_8x_{11}x_{43},\ x_8x_{11}x_{44},\ x_9^2x_{37},$$
$$x_9^2x_{40},\ x_9^2x_{41},\ x_9^2x_{44},\ x_9x_{12}x_{37},\ x_9x_{12}x_{38},\ x_9x_{12}x_{40},\ x_9x_{12}x_{41},\ x_9x_{12}x_{42},$$
$$x_9x_{12}x_{43},\ x_9x_{12}x_{44},\ x_{10}^2x_{38},\ x_{10}^2x_{42},\ x_{10}^2x_{43},\ x_{10}^2x_{44},\ x_{11}^2x_{38},\ x_{11}^2x_{42},$$
$$x_{11}^2x_{43},\ x_{11}^2x_{44},\ x_{12}^2x_{38},\ x_{12}^2x_{42},\ x_{12}^2x_{43},\ x_{12}^2x_{44},$$
$$x_{25}^2x_{35}x_{45},\ x_{26}^2x_{36}x_{46},\ x_{27}^2x_{37}x_{47},\ x_{28}^2x_{38}x_{48},\ x_{29}^2x_{39}x_{49},$$
$$x_{30}^2x_{40}x_{50},\ x_{31}^2x_{41}x_{51},\ x_{32}^2x_{42}x_{52},\ x_{33}^2x_{43}x_{53},\ x_{34}^2x_{44}x_{54}\}$$

Результом решения задачи линейного программирования является дополнительный набор мономов, который необходимо и достаточно добавить к исходному набору, чтобы получить оболочку для этого набора. Ниже приведен этот набор мономов:

$$\{x_{25}^2,\ x_{26}^2,\ x_{27}^2,\ x_{28}^2,\ x_{29}^2,\ x_{30}^2,\ x_{31}^2,\ x_{32}^2,\ x_{33}^2,\ x_{34}^2\}$$

Результатом работы программы является схема:

$$\{(1,35),\ (1,39),\ (1,40),\ (1,42),\ (2,35),\ (2,39),\ (2,40),\ (2,42),$$
$$(3,35),\ (3,39),\ (3,40),\ (3,42),\ (4,36),\ (4,39),\ (4,41),\ (4,43),$$
$$(5,36),\ (5,39),\ (5,41),\ (5,43),\ (6,36),\ (6,39),\ (6,41),\ (6,43),$$
$$(7,37),\ (7,40),\ (7,41),\ (7,44),\ (8,37),\ (8,40),\ (8,41),\ (8,44),$$

$(9,37)$, $(9,40)$, $(9,41)$, $(9,44)$, $(10,38)$, $(10,42)$, $(10,43)$, $(10,44)$, $(11,38)$, $(11,42)$, $(11,43)$, $(11,44)$, $(12,38)$, $(12,42)$, $(12,43)$, $(12,44)$, $(13,13)$, $(13,16)$, $(13,19)$, $(13,22)$, $(14,14)$, $(14,17)$, $(14,20)$, $(14,23)$, $(15,15)$, $(15,18)$, $(15,21)$, $(15,24)$, $(16,16)$, $(16,19)$, $(16,22)$, $(17,17)$, $(17,20)$, $(17,23)$, $(18,18)$, $(18,21)$, $(18,24)$, $(19,19)$, $(19,22)$, $(20,20)$, $(20,23)$, $(21,21)$, $(21,24)$, $(22,22)$, $(23,23)$, $(24,24)$, $(25,25)$, $(26,26)$, $(27,27)$, $(28,28)$, $(29,29)$, $(30,30)$, $(31,31)$, $(32,32)$, $(33,33)$, $(34,34)$, $(35,45)$, $(36,46)$, $(37,47)$, $(38,48)$, $(39,49)$, $(40,50)$, $(41,51)$, $(42,52)$, $(43,53)$, $(44,54)$, $(1,55)$, $(1,56)$, $(1,57)$, $(1,58)$, $(4,55)$, $(1,67)$, $(1,68)$, $(4,57)$, $(1,69)$, $(4,58)$, $(1,70)$, $(7,55)$, $(1,79)$, $(7,56)$, $(1,80)$, $(1,81)$, $(7,58)$, $(1,82)$, $(10,55)$, $(1,91)$, $(10,56)$, $(10,57)$, $(1,92)$, $(1,93)$, $(1,94)$, $(2,59)$, $(2,60)$, $(2,61)$, $(2,62)$, $(5,59)$, $(2,71)$, $(2,72)$, $(5,61)$, $(2,73)$, $(5,62)$, $(2,74)$, $(8,59)$, $(2,83)$, $(8,60)$, $(2,84)$, $(2,85)$, $(8,62)$, $(2,86)$, $(11,59)$, $(2,95)$, $(11,60)$, $(11,61)$, $(2,96)$, $(2,97)$, $(2,98)$, $(3,63)$, $(3,64)$, $(3,65)$, $(3,66)$, $(6,63)$, $(3,75)$, $(3,76)$, $(6,65)$, $(3,77)$, $(6,66)$, $(3,78)$, $(9,63)$, $(3,87)$, $(9,64)$, $(3,88)$, $(3,89)$, $(9,66)$, $(3,90)$, $(12,63)$, $(3,99)$, $(12,64)$, $(12,65)$, $(3,100)$, $(3,101)$, $(3,102)$, $(4,67)$, $(4,68)$, $(4,69)$, $(4,70)$, $(7,67)$, $(4,79)$, $(7,68)$, $(4,80)$, $(4,81)$, $(7,70)$, $(4,82)$, $(10,67)$, $(4,91)$, $(10,68)$, $(10,69)$, $(4,92)$, $(4,93)$, $(4,94)$, $(5,71)$, $(5,72)$, $(5,73)$, $(5,74)$, $(8,71)$, $(5,83)$, $(8,72)$, $(5,84)$, $(5,85)$, $(8,74)$, $(5,86)$, $(11,71)$, $(5,95)$, $(11,72)$, $(11,73)$, $(5,96)$, $(5,97)$, $(5,98)$, $(6,75)$, $(6,76)$, $(6,77)$, $(6,78)$, $(9,75)$, $(6,87)$, $(9,76)$, $(6,88)$, $(6,89)$, $(9,78)$, $(6,90)$, $(12,75)$, $(6,99)$, $(12,76)$, $(12,77)$, $(6,100)$, $(6,101)$, $(6,102)$, $(7,79)$, $(7,80)$, $(7,81)$, $(7,82)$, $(10,79)$, $(7,91)$, $(10,80)$, $(10,81)$, $(7,92)$, $(7,93)$, $(7,94)$, $(8,83)$, $(8,84)$, $(8,85)$, $(8,86)$, $(11,83)$, $(8,95)$, $(11,84)$, $(11,85)$, $(8,96)$, $(8,97)$,

$$(8,98),\ (9,87),\ (9,88),\ (9,89),\ (9,90),\ (12,87),\ (9,99),\ (12,88),$$
$$(12,89),\ (9,100),\ (9,101),\ (9,102),\ (10,91),\ (10,92),\ (10,93),\ (10,94),$$
$$(11,95),\ (11,96),\ (11,97),\ (11,98),\ (12,99),\ (12,100),\ (12,101),\ (12,102),$$
$$(133,143),\ (134,144),\ (135,145),\ (136,146),\ (137,147),\ (138,148),\ (139,149),$$
$$(140,150),\ (141,151),\ (142,152)\}$$

Задача N тел в полиномиальной форме третьей степени

Система дифференциальных уравнений для задачи N тел в полиномиальной форме третьей степени имеет вид:

$$\frac{dp_{i,j}}{dt} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}v_{0,i} + k^2 \sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})v_{w,i} - g_{w,j}v_{0,w}],$$

$$\frac{dg_{i,j}}{dt} = p_{i,j},\quad \frac{dd_{s,i}}{dt} = -v_{s,i}w_{s,i},\quad \frac{dq_{s,i}}{dt} = -2d_{s,i}v_{s,i}w_{s,i},\quad \frac{dv_{s,i}}{dt} = -3q_{s,i}v_{s,i}w_{s,i},$$

$$\begin{gathered}\frac{dw_{s,i}}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\Big[(p_{i,j}-p_{s,j})^2 + k^2(g_{i,j}-g_{s,j})\times \\ \times\Big((m_0+m_s)g_{s,j}v_{0,s} - (m_0+m_i)g_{i,j}v_{0,i} + \\ + \sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})v_{w,i} - g_{w,j}v_{0,w} - \sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{s,j})v_{w,s} - g_{w,s}v_{0,w}]\Big)\Big].\end{gathered} \tag{2.4}$$

Пусть $N = 5$. Выпишем список переменных и соответствующие замены для удобства работы с мономами.

Список переменных:

$$\{g_{1,1},\ g_{1,2},\ g_{1,3},\ g_{2,1},\ g_{2,2},\ g_{2,3},\ g_{3,1},\ g_{3,2},\ g_{3,3},\ g_{4,1},\ g_{4,2},\ g_{4,3},$$
$$p_{1,1},\ p_{1,2},\ p_{1,3},\ p_{2,1},\ p_{2,2},\ p_{2,3},\ p_{3,1},\ p_{3,2},\ p_{3,3},\ p_{4,1},\ p_{4,2},\ p_{4,3},$$
$$d_{0,1},\ d_{0,2},\ d_{0,3},\ d_{0,4},\ d_{1,2},\ d_{1,3},\ d_{2,3},\ d_{1,4},\ d_{2,4},\ d_{3,4},$$
$$q_{0,1},\ q_{0,2},\ q_{0,3},\ q_{0,4},\ q_{1,2},\ q_{1,3},\ q_{2,3},\ q_{1,4},\ q_{2,4},\ q_{3,4},$$
$$v_{0,1},\ v_{0,2},\ v_{0,3},\ v_{0,4},\ v_{1,2},\ v_{1,3},\ v_{2,3},\ v_{1,4},\ v_{2,4},\ v_{3,4},$$
$$w_{0,1},\ w_{0,2},\ w_{0,3},\ w_{0,4},\ w_{1,2},\ w_{1,3},\ w_{2,3},\ w_{1,4},\ w_{2,4},\ w_{3,4}\}$$

Замена переменных:

$$\{g_{1,1}\to x_1,\ g_{1,2}\to x_2,\ g_{1,3}\to x_3,\ g_{2,1}\to x_4,\ g_{2,2}\to x_5,\ g_{2,3}\to x_6,$$

$$g_{3,1} \to x_7,\ g_{3,2} \to x_8,\ g_{3,3} \to x_9,\ g_{4,1} \to x_{10},\ g_{4,2} \to x_{11},\ g_{4,3} \to x_{12},$$

$$p_{1,1} \to x_{13},\ p_{1,2} \to x_{14},\ p_{1,3} \to x_{15},\ p_{2,1} \to x_{16},\ p_{2,2} \to x_{17},\ p_{2,3} \to x_{18},$$

$$p_{3,1} \to x_{19},\ p_{3,2} \to x_{20},\ p_{3,3} \to x_{21},\ p_{4,1} \to x_{22},\ p_{4,2} \to x_{23},\ p_{4,3} \to x_{24},$$

$$d_{0,1} \to x_{25},\ d_{0,2} \to x_{26},\ d_{0,3} \to x_{27},\ d_{0,4} \to x_{28},$$

$$d_{1,2} \to x_{29},\ d_{1,3} \to x_{30},\ d_{2,3} \to x_{31},\ d_{1,4} \to x_{32},\ d_{2,4} \to x_{33},\ d_{3,4} \to x_{34},$$

$$q_{0,1} \to x_{35},\ q_{0,2} \to x_{36},\ q_{0,3} \to x_{37},\ q_{0,4} \to x_{38},$$

$$q_{1,2} \to x_{39},\ q_{1,3} \to x_{40},\ q_{2,3} \to x_{41},\ q_{1,4} \to x_{42},\ q_{2,4} \to x_{43},\ q_{3,4} \to x_{44},$$

$$v_{0,1} \to x_{45},\ v_{0,2} \to x_{46},\ v_{0,3} \to x_{47},\ v_{0,4} \to x_{48},$$

$$v_{1,2} \to x_{49},\ v_{1,3} \to x_{50},\ v_{2,3} \to x_{51},\ v_{1,4} \to x_{52},\ v_{2,4} \to x_{53},\ v_{3,4} \to x_{54},$$

$$w_{0,1} \to x_{55},\ w_{0,2} \to x_{56},\ w_{0,3} \to x_{57},\ w_{0,4} \to x_{58},$$

$$w_{1,2} \to x_{59},\ w_{1,3} \to x_{60},\ w_{2,3} \to x_{61},\ w_{1,4} \to x_{62},\ w_{2,4} \to x_{63},\ w_{3,4} \to x_{64}\}$$

Полученный набор мономов является входным аргументом для программы из Приложения А:

$$\{x_1x_{45},\ x_1x_{49},\ x_1x_{50},\ x_1x_{52},\ x_2x_{45},\ x_2x_{49},\ x_2x_{50},\ x_2x_{52},\ x_3x_{45},\ x_3x_{49},$$

$$x_3x_{50},\ x_3x_{52},\ x_4x_{46},\ x_4x_{49},\ x_4x_{51},\ x_4x_{53},\ x_5x_{46},\ x_5x_{49},\ x_5x_{51},\ x_5x_{53},$$

$$x_6x_{46},\ x_6x_{49},\ x_6x_{51},\ x_6x_{53},\ x_7x_{47},\ x_7x_{50},\ x_7x_{51},\ x_7x_{54},\ x_8x_{47},\ x_8x_{50},$$

$$x_8x_{51},\ x_8x_{54},\ x_9x_{47},\ x_9x_{50},\ x_9x_{51},\ x_9x_{54},\ x_{10}x_{48},\ x_{10}x_{52},\ x_{10}x_{53},\ x_{10}x_{54},$$

$$x_{11}x_{48},\ x_{11}x_{52},\ x_{11}x_{53},\ x_{11}x_{54},\ x_{12}x_{48},\ x_{12}x_{52},\ x_{12}x_{53},\ x_{12}x_{54},\ x_{13}^2,\ x_{13}x_{16},$$

$$x_{13}x_{19},\ x_{13}x_{22},\ x_{14}^2,\ x_{14}x_{17},\ x_{14}x_{20},\ x_{14}x_{23},\ x_{15}^2,\ x_{15}x_{18},\ x_{15}x_{21},\ x_{15}x_{24},$$

$$x_{16}^2,\ x_{16}x_{19},\ x_{16}x_{22},\ x_{17}^2,\ x_{17}x_{20},\ x_{17}x_{23},\ x_{18}^2,\ x_{18}x_{21},\ x_{18}x_{24},\ x_{19}^2,$$

$$x_{19}x_{22},\ x_{20}^2,\ x_{20}x_{23},\ x_{21}^2,\ x_{21}x_{24},\ x_{22}^2,\ x_{23}^2,\ x_{24}^2,\ x_{45}x_{55},\ x_{46}x_{56},\ x_{47}x_{57},$$

$$x_{48}x_{58},\ x_{49}x_{59},\ x_{50}x_{60},\ x_{51}x_{61},\ x_{52}x_{62},\ x_{53}x_{63},\ x_{54}x_{64},\ x_1^2x_{45},\ x_1^2x_{49},$$

$$x_1^2x_{50},\ x_1^2x_{52},\ x_1x_4x_{45},\ x_1x_4x_{46},\ x_1x_4x_{49},\ x_1x_4x_{50},\ x_1x_4x_{51},\ x_1x_4x_{52},$$

$$x_1x_4x_{53},\ x_1x_7x_{45},\ x_1x_7x_{47},\ x_1x_7x_{49},\ x_1x_7x_{50},\ x_1x_7x_{51},\ x_1x_7x_{52},\ x_1x_7x_{54},$$

$$x_1x_{10}x_{45},\ x_1x_{10}x_{48},\ x_1x_{10}x_{49},\ x_1x_{10}x_{50},\ x_1x_{10}x_{52},\ x_1x_{10}x_{53},\ x_1x_{10}x_{54},\ x_2^2x_{45},$$

$$x_2^2x_{49},\ x_2^2x_{50},\ x_2^2x_{52},\ x_2x_5x_{45},\ x_2x_5x_{46},\ x_2x_5x_{49},\ x_2x_5x_{50},\ x_2x_5x_{51},$$

$$x_2x_5x_{52},\ x_2x_5x_{53},\ x_2x_8x_{45},\ x_2x_8x_{47},\ x_2x_8x_{49},\ x_2x_8x_{50},\ x_2x_8x_{51},\ x_2x_8x_{52},$$

$$x_2x_8x_{54},\ x_2x_{11}x_{45},\ x_2x_{11}x_{48},\ x_2x_{11}x_{49},\ x_2x_{11}x_{50},\ x_2x_{11}x_{52},\ x_2x_{11}x_{53},\ x_2x_{11}x_{54},$$

$$x_3^2x_{45},\ x_3^2x_{49},\ x_3^2x_{50},\ x_3^2x_{52},\ x_3x_6x_{45},\ x_3x_6x_{46},\ x_3x_6x_{49},\ x_3x_6x_{50},$$

$$x_3x_6x_{51},\ x_3x_6x_{52},\ x_3x_6x_{53},\ x_3x_9x_{45},\ x_3x_9x_{47},\ x_3x_9x_{49},\ x_3x_9x_{50},\ x_3x_9x_{51},$$

$$x_3x_9x_{52},\ x_3x_9x_{54},\ x_3x_{12}x_{45},\ x_3x_{12}x_{48},\ x_3x_{12}x_{49},\ x_3x_{12}x_{50},\ x_3x_{12}x_{52},\ x_3x_{12}x_{53},$$

$$x_3x_{12}x_{54},\ x_4^2x_{46},\ x_4^2x_{49},\ x_4^2x_{51},\ x_4^2x_{53},\ x_4x_7x_{46},\ x_4x_7x_{47},\ x_4x_7x_{49},$$

$$x_4x_7x_{50},\ x_4x_7x_{51},\ x_4x_7x_{53},\ x_4x_7x_{54},\ x_4x_{10}x_{46},\ x_4x_{10}x_{48},\ x_4x_{10}x_{49},\ x_4x_{10}x_{51},$$

$$x_4x_{10}x_{52},\ x_4x_{10}x_{53},\ x_4x_{10}x_{54},\ x_5^2x_{46},\ x_5^2x_{49},\ x_5^2x_{51},\ x_5^2x_{53},\ x_5x_8x_{46},$$

$$x_5x_8x_{47},\ x_5x_8x_{49},\ x_5x_8x_{50},\ x_5x_8x_{51},\ x_5x_8x_{53},\ x_5x_8x_{54},\ x_5x_{11}x_{46},\ x_5x_{11}x_{48},$$

$$x_5x_{11}x_{49},\ x_5x_{11}x_{51},\ x_5x_{11}x_{52},\ x_5x_{11}x_{53},\ x_5x_{11}x_{54},\ x_6^2x_{46},\ x_6^2x_{49},\ x_6^2x_{51},$$

$$x_6^2x_{53},\ x_6x_9x_{46},\ x_6x_9x_{47},\ x_6x_9x_{49},\ x_6x_9x_{50},\ x_6x_9x_{51},\ x_6x_9x_{53},\ x_6x_9x_{54},$$

$$x_6x_{12}x_{46},\ x_6x_{12}x_{48},\ x_6x_{12}x_{49},\ x_6x_{12}x_{51},\ x_6x_{12}x_{52},\ x_6x_{12}x_{53},\ x_6x_{12}x_{54},\ x_7^2x_{47},$$

$$x_7^2x_{50},\ x_7^2x_{51},\ x_7^2x_{54},\ x_7x_{10}x_{47},\ x_7x_{10}x_{48},\ x_7x_{10}x_{50},\ x_7x_{10}x_{51},\ x_7x_{10}x_{52},$$

$$x_7x_{10}x_{53},\ x_7x_{10}x_{54},\ x_8^2x_{47},\ x_8^2x_{50},\ x_8^2x_{51},\ x_8^2x_{54},\ x_8x_{11}x_{47},\ x_8x_{11}x_{48},$$

$$x_8x_{11}x_{50},\ x_8x_{11}x_{51},\ x_8x_{11}x_{52},\ x_8x_{11}x_{53},\ x_8x_{11}x_{54},\ x_9^2x_{47},\ x_9^2x_{50},\ x_9^2x_{51},$$

$$x_9^2x_{54},\ x_9x_{12}x_{47},\ x_9x_{12}x_{48},\ x_9x_{12}x_{50},\ x_9x_{12}x_{51},\ x_9x_{12}x_{52},\ x_9x_{12}x_{53},\ x_9x_{12}x_{54},$$

$$x_{10}^2x_{48},\ x_{10}^2x_{52},\ x_{10}^2x_{53},\ x_{10}^2x_{54},\ x_{11}^2x_{48},\ x_{11}^2x_{52},\ x_{11}^2x_{53},\ x_{11}^2x_{54},\ x_{12}^2x_{48},\ x_{12}^2x_{52},$$

$$x_{12}^2x_{53},\ x_{12}^2x_{54},\ x_{25}x_{45}x_{55},\ x_{26}x_{46}x_{56},\ x_{27}x_{47}x_{57},\ x_{28}x_{48}x_{58},\ x_{29}x_{49}x_{59},\ x_{30}x_{50}x_{60},$$

$$x_{31}x_{51}x_{61},\ x_{32}x_{52}x_{62},\ x_{33}x_{53}x_{63},\ x_{34}x_{54}x_{64},\ x_{35}x_{45}x_{55},\ x_{36}x_{46}x_{56},\ x_{37}x_{47}x_{57},$$

$$x_{38}x_{48}x_{58},\ x_{39}x_{49}x_{59},\ x_{40}x_{50}x_{60},\ x_{41}x_{51}x_{61},\ x_{42}x_{52}x_{62},\ x_{43}x_{53}x_{63},\ x_{44}x_{54}x_{64}\}.$$

В данном примере нет необходимости для добавления дополнительных мономов, так как исходный набор уже является оболочкой. Результатом работы программы является схема:

$$S = \{(1,45),\ (1,49),\ (1,50),\ (1,52),\ (2,45),\ (2,49),\ (2,50),\ (2,52),$$

$$(3,45),\ (3,49),\ (3,50),\ (3,52),\ (4,46),\ (4,49),\ (4,51),\ (4,53),$$

$$(5,46),\ (5,49),\ (5,51),\ (5,53),\ (6,46),\ (6,49),\ (6,51),\ (6,53),$$

$$(7,47),\ (7,50),\ (7,51),\ (7,54),\ (8,47),\ (8,50),\ (8,51),\ (8,54),$$

$$(9,47),\ (9,50),\ (9,51),\ (9,54),\ (10,48),\ (10,52),\ (10,53),\ (10,54),$$

$(11,48),\ (11,52),\ (11,53),\ (11,54),\ (12,48),\ (12,52),\ (12,53),\ (12,54),$

$(13,13),\ (13,16),\ (13,19),\ (13,22),\ (14,14),\ (14,17),\ (14,20),\ (14,23),$

$(15,15),\ (15,18),\ (15,21),\ (15,24),\ (16,16),\ (16,19),\ (16,22),\ (17,17),$

$(17,20),\ (17,23),\ (18,18),\ (18,21),\ (18,24),\ (19,19),\ (19,22),\ (20,20),$

$(20,23),\ (21,21),\ (21,24),\ (22,22),\ (23,23),\ (24,24),\ (45,55),\ (46,56),$

$(47,57),\ (48,58),\ (49,59),\ (50,60),\ (51,61),\ (52,62),\ (53,63),\ (54,64),$

$(1,65),\ (1,66),\ (1,67),\ (1,68),\ (4,65),\ (1,77),\ (1,78),\ (4,67),$

$(1,79),\ (4,68),\ (1,80),\ (7,65),\ (1,89),\ (7,66),\ (1,90),\ (1,91),$

$(7,68),\ (1,92),\ (10,65),\ (1,101),\ (10,66),\ (10,67),\ (1,102),\ (1,103),$

$(1,104),\ (2,69),\ (2,70),\ (2,71),\ (2,72),\ (5,69),\ (2,81),\ (2,82),$

$(5,71),\ (2,83),\ (5,72),\ (2,84),\ (8,69),\ (2,93),\ (8,70),\ (2,94),$

$(2,95),\ (8,72),\ (2,96),\ (11,69),\ (2,105),\ (11,70),\ (11,71),\ (2,106),$

$(2,107),\ (2,108),\ (3,73),\ (3,74),\ (3,75),\ (3,76),\ (6,73),\ (3,85),$

$(3,86),\ (6,75),\ (3,87),\ (6,76),\ (3,88),\ (9,73),\ (3,97),\ (9,74),$

$(3,98),\ (3,99),\ (9,76),\ (3,100),\ (12,73),\ (3,109),\ (12,74),\ (12,75),$

$(3,110),\ (3,111),\ (3,112),\ (4,77),\ (4,78),\ (4,79),\ (4,80),\ (7,77),$

$(4,89),\ (7,78),\ (4,90),\ (4,91),\ (7,80),\ (4,92),\ (10,77),\ (4,101),$

$(10,78),\ (10,79),\ (4,102),\ (4,103),\ (4,104),\ (5,81),\ (5,82),\ (5,83),$

$(5,84),\ (8,81),\ (5,93),\ (8,82),\ (5,94),\ (5,95),\ (8,84),\ (5,96),$

$(11,81),\ (5,105),\ (11,82),\ (11,83),\ (5,106),\ (5,107),\ (5,108),\ (6,85),$

$(6,86),\ (6,87),\ (6,88),\ (9,85),\ (6,97),\ (9,86),\ (6,98),\ (6,99),$

$(9,88),\ (6,100),\ (12,85),\ (6,109),\ (12,86),\ (12,87),\ (6,110),\ (6,111),$

$(6,112),\ (7,89),\ (7,90),\ (7,91),\ (7,92),\ (10,89),\ (7,101),\ (10,90),$

$(10,91),\ (7,102),\ (7,103),\ (7,104),\ (8,93),\ (8,94),\ (8,95),\ (8,96),$

$(11,93),\ (8,105),\ (11,94),\ (11,95),\ (8,106),\ (8,107),\ (8,108),\ (9,97),$

$(9,98),\ (9,99),\ (9,100),\ (12,97),\ (9,109),\ (12,98),\ (12,99),\ (9,110),$

$(9,111),\ (9,112),\ (10,101),\ (10,102),\ (10,103),\ (10,104),\ (11,105),\ (11,106),$

$$(11,107),\ (11,108),\ (12,109),\ (12,110),\ (12,111),\ (12,112),\ (25,143),\ (26,144),$$
$$(27,145),\ (28,146),\ (29,147),\ (30,148),\ (31,149),\ (32,150),\ (33,151),\ (34,152),$$
$$(35,143),\ (36,144),\ (37,145),\ (38,146),\ (39,147),\ (40,148),\ (41,149),\ (42,150),$$
$$(43,151),\ (44,152)\}.$$

Глава 3. Методы рядов Тейлора

При написании данной главы использовались источники: [4, 5, 8, 98].

Настоящая глава состоит из пяти разделов. В первом разделе описан классический метод рядов Тейлора.

Во втором разделе представлены несколько способов рекуррентного нахождения коэффициентов Тейлора.

В третьем разделе представлен Метод Паркера – Сохацки.

В четвертом разделе представлено полное описание метода рядов Тейлора в полиномиальной форме. Выведены формулы подсчета коэффициентов Тейлора, сформулирован метод рядов Тейлора для полиномиальной системы, представлены оценки локальной погрешности для линейной и нелинейной задачи. Описаны вспомогательные алгоритмы, основываясь на которых, строится сам алгоритм метода рядов Тейлора в полиномиальной форме. В последнем подразделе второго раздела (3.2.5) алгоритм представлен в операторной форме.

В пятом разделе описана структура реализации представленного метода (из четвертого разделе данной главы) с описанием основных функций и подпрограмм.

3.1 Классический метод рядов Тейлора

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \tag{3.1}$$

удовлетворяющего начальному условию:

$$x(t_0) = x_0. \tag{3.2}$$

Предположим, что правая часть $f(x,t)$ дифференциального уравнения (3.1) имеет непрерывные частные производные до порядка s. Тогда искомое решение $x(t)$ имеет непрерывные производные до $(s+1)$ - го порядка включительно. Точное значение решения в узле t_1 запишем по формуле:

$$x(t_1) = x_0 + hx_0' + \frac{h^2}{2}x_0'' + ... + \frac{h^s}{s!}x_0^{(s)} + \frac{h^{(s+1)}}{(s+1)!}x^{(s+1)}(\xi), \tag{3.3}$$

где

$$x_0^{(k)} = x^{(k)}(t_0), \quad h = t_1 - t_0, \quad t_0 < \xi < t_1.$$

Может оказаться, что для получения решения с нужной точностью не требуется использовать все члены формулы (3.3). Производные, входящие в правую часть формулы (3.3), могут быть фактически найдены:

$$x_0' = f(x_0, t_0),$$

$$x_0'' = \{f_t' + f f_x'\}_0,$$

$$x_0''' = \{f_{tt}'' + 2f f_{tx}'' + f^2 f_{xx}'' + (f_t' + f f_x') f_x'\}_0.$$

$$\ldots$$

3.2 Несколько способов рекуррентного нахождения коэффициентов Тейлора

При написании данного раздела использовался источник: [4].

Методы пошагового численного интегрирования задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \in R^n, \tag{3.4}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{3.5}$$

позволяют, отправляясь от значения $x(t_0)$ решения в начальный момент t_0, последовательно получать приближенные значения $\widetilde{x}(t_1), \ldots, \widetilde{x}(t_m), \ldots$ решения в точках $t_1 = t_0 + h_1, \ldots, t_m = t_{m-1} + h_m, \ldots$ Числа $h_1, \ldots$ (обычно они выбираются положительными) называют шагами интегрирования (h_m – m-й шаг интегрирования), числа $t_1, t_2, \ldots$ – узлами таблицы или сетки численного интегрирования, совокупность узлов называют сеткой и, наконец, величины $\widetilde{x}(t_1), \widetilde{x}(t_2), \ldots$ называют значениями решения на узлах сетки или значениями таблицы численного интегрирования. Если $h_1 = h_2 = \ldots$, то говорят о равномерной сетке или об интегрировании с постоянным шагом.

Будем предпологать, что правая часть уравнения (3.4) голоморфна по переменным $(x, t) = (x_1, x_2, ..., x_n, t)$ в окрестности начальной точки $(x_0, t_0) = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}, t)$. Как известно, в этом случае единственное решение задачи

(3.4), (3.5) в некоторой области начального момента t_0 представляется рядом Тейлора с ненулевым радиусом сходимости $R(t_0, x_0)$. Введем обозначения:

$$
\begin{aligned}
&xT_M(t, t_0, x_0) = \sum_{l=0}^{M} \frac{x^{(l)}(t-t_0)^l}{l!},\\
&x^{(l)} = x^{(l)}(t_0, x_0) = \Big(\frac{d^l x}{dt^l}\Big)_{t=t_0},\\
&O_a(b) = \{t \in C \big| |t-b| < a\}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Таким образом, $R(t_0, x_0)$ - радиус сходимости ряда $xT_{\inf}(t, t_0, x_0)$, а $O_R(b)$ - его круг сходимости. Метод рядов Тейлора численного интегрирования задачи (3.4), (3.5) заключается в построении таблицы приближенных значений

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{x}(t_1) = xT_{M_1}(t_1, t_0, x_0),\\
&\widetilde{x}(t_m) = xT_{M_m}(t_m, t_{m-1}, \widetilde{x}(t_{m-1})),\\
&...
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

где $M_1, M_2, ...$ - натуральные числа, $t_1 = t_0 + h_1,\ t_2 = t_1 + h_1, ...$, а положительные числа $h_1, h_2, ...$ удовлетворяют неравенствам

$$h_k < R(t_{k-1},\ \widetilde{x}(t_{k-1})). \tag{3.8}$$

Величина M_k называется порядком метода на k – ом шаге. Для того, чтобы вычислить $xT_M(t, \tau, x^\tau)$, нужно вычислить величины $x^{(l)}(\tau, x^\tau),\ l = 1, ..., M$, т.е. значения первых M производных решения уравнения (3.4) в момент $t = \tau$ при условии, что величина $x(\tau) = x^\tau = \big(\frac{d^0 x}{dt^0}\big)_{t=\tau}$ известна. Для успешного применения метода рядов Тейлора к задаче (3.4), (3.5) используют следующую схему (метод Стеффенса в небесной механике [114, 115]): уравнения (3.4) введением дополнительных переменных приводят к виду полиномиальной системы - лучше всего автономной, а затем коэффициенты Тейлора $\alpha_l = \frac{x^{(l)}}{l!}$ находят рекуррентно методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим два способа рекуррентного нахождения коэффициентов Тейлора вектор-функции, удовлетворяющей полиномиальной системе.

Первый способ. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k\big(\{a_k[i]\}, x_1, ..., x_n\big), \tag{3.9}$$

$$x_k(t_0) = c_k,\ k = 1, ..., n, \tag{3.10}$$

где

$$X_k = \sum_{m=0}^{L} \sum_{i \in I_n(m)} a_k[i] x_1^{i_1} \cdot ... \cdot x_n^{i_n}, \tag{3.11}$$

$t, t_0, c_k \in C$; L – натуральное число;
$I_n(m) = \{i = (i_1, ..., i_n) \in Z^n | i_1 + ... + i_n = m;\ i_1, ..., i_n \geqslant 0\}$;
$a_k[i]$ – комплекснозначные функции аргумента t, голоморфные в окрестности точки t_0.
Пусть $\{x_{k,j}\}_{j=0}^{\infty}$ – последовательность коэффициентов Тейлора функции x_k в её разложении по степеням $t - t_0$, а $\{a_{k,j}[i]\}_{j=0}^{\infty}$ – аналогичная последовательность для функции $a_k[i]$. Введем обозначения:

$$x_k^j = \sum_{j=0}^{r} x_{k,j}(t - t_0)^j, \quad a_k^r[i] = \sum_{j=0}^{r} a_{kj}[i](t - t_0)^j. \tag{3.12}$$

Символом

$$\Big\langle X_k\big(\{a_k^r\},\ x_1^r, ..., x_n^r\big)\Big\rangle \tag{3.13}$$

обозначают коэффициент при $(t - t_0)^r$ полинома

$$X_k\big(\{a_k^r[i]\},\ x_1^r, ..., x_n^r\big) \tag{3.14}$$

по степеням $t - t_0$. Вычисление этого полинома состоит из умножений и сложений полиномов; для получения его членов до r – го порядка включительно при выполнении этих операций достаточно удерживать каждый раз в результате члены до r – го порядка включительно.

Если подставить в уравнения (3.9) разложения Тейлора функции $x_1, ..., x_n$, привести подобные члены и приравнять нулю все коэффициенты полученного степенного ряда (согласно принципу единственности для аналитических функций, если аналитическая функция равна нулю в некоторой окрестности точки t_0, то все её коэффициенты тейлоровского разложения по степени $t - t_0$ равны нулю), то из полученных таким образом уравнений можно получить следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} &x_{k,r+1} = \frac{1}{r+1}\Big\langle X_k\big(\{a_k^r[i]\},\ x_1^r, ..., x_n^r\big)\Big\rangle, \\ &x_{k,0} = c_k;\ k = 1, ..., n;\ r = 0, 1, ... \end{aligned} \tag{3.15}$$

Замечания.

1. Формулы (3.15) верны и при $L = +\infty$ в (3.11), т.е. они верны и в случае аналитической (а не обязательно полиномиальной) системы (3.9).
2. Для реализации формул (3.15) целесообразно иметь в своём распоряжении процедуры алгебраических (кроме деления) операций над полиномами одного аргумента $\lambda = t - t_0$ с удержанием во всех промежуточных выкладках членов только до r – го порядка. Для нахождения коэффициентов Тейлора решения произвольной аналитической задачи Коши (3.9), (3.10) по формулам (3.15) может быть составлена специальная процедура, которой можно было бы пользоваться в прикладных задачах при условии, что разложение (3.11) известно.

Второй способ заключается в нахождении явных рекуррентных формул для величин x_{kj}. Рассмотрим квадратичную задачу Коши:

$$\frac{dx_k}{dt} = a_k + \sum_{l=1}^{n} a_{k,l} x_l + \sum_{i,j=1}^{n} a_{k,i,j} x_i x_j, \tag{3.16}$$

$$x_k(t_0) = c_k, \tag{3.17}$$

$t_0,\ c_k,\ a_k,\ a_{k,l},\ a_{k,j,l}$ – комплексные постоянные, а t – комплексная переменная. Подставляя в уравнения (3.16) разложения

$$x_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k,m} (t - t_0)^m, \tag{3.18}$$

получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) x_{k,m+1} (t-t_0)^m - \Big(a_k + \sum_{l=1}^{n} a_{k,l} \sum_{m=0}^{\infty} x_{l,m} (t-t_0)^m + \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} a_{k,i,j} \sum_{m=0}^{\infty} \big(\sum_{p=0}^{m} x_{i,p} x_{j,m-p} \big) (t-t_0)^m \Big) = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Приводя подобные члены и приравнивая все коэффициенты полученного степенного ряда нулю, получаем искомые формулы:

$$\begin{aligned} &x_{k,m+1} = \frac{1}{m+1} \Big[\delta_m a_k + \sum_{l=1}^{n} a_{k,l} x_{l,m} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{k,i,j} \sum_{p=0}^{m} x_{i,p} x_{j,m-p} \Big]; \\ &x_{k,0} = c_k,\ k = 1, ..., n,\ m = 0, 1, ..., \end{aligned} \tag{3.20}$$

где $\delta_0 = 1,\ \delta_1 = \delta_2 = ... = 0.$

Замечания.

1. Не представляет большого труда вывести аналогичные формулы для случая переменных коэффициентов $a_k,\ a_{k,l},\ a_{k,i,j}$ голоморфных по t в окрестности t_0.
2. Формулы (3.20) и аналогичные формулы для случая переменных коэффициентов могут быть использованы для нахождения коэффициентов Тейлора решения общей полиномиальной системы (3.9), (3.11), так как она приводит к виду (3.16) введением дополнительных переменных $x[i_1, ..., i_n] = x_1^{i_1}, ..., x_n^{i_n}$ при $i_1 \leqslant 0, ..., i_n \leqslant 0;\ i_1 + ... + i_n \geqslant L$.

Выше была рассмотрена квадратичная задача Коши. Выведем рекуррентные формулы для общего случая:

$$\frac{dx_k}{dt} = a_k + \sum_{m=1}^{L}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{i_{m-1}} a_{k,i_1,\dots,i_m} x_{i_1}\cdots x_{i_m},\ k = 1,\dots n,$$

$$x_k(t_0) = x_{k,0}.$$

Подставляя в уравнения выше разложения

$$x_k = \sum_{q=0}^{\infty} x_{k,q}(t-t_0)^q,$$

приводя подобные члены и приравнивая все коэффициенты полученного степенного ряда нулю, получаем искомые формулы:

$$x_{k,q+1} = \frac{1}{q+1}\Big[\delta_q a_k + \sum_{m=1}^{L}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{i_{m-1}} a_{k,i_1,\dots,i_m} \sum_{q_1+\dots+q_m=q} x_{i_1q_1}\cdots x_{i_mq_m}\Big],\ q = 0,1,\dots$$

где $\delta_q = \begin{cases} 1, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$

3.3 Метод Паркера – Сохацки

Рассмотрим задачу Коши для систем дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t).$$

Разложим в ряд Маклорена переменные системы:

$$x(t) = \sum_{p=0}^{\infty} x_p t^p,$$

где $x_0 = x(0),\ x_1 = x'(0),\ x_2 = \frac{x''(0)}{2!}$ и так далее.
Запишем первую производную для ряда:

$$x'(t) = \sum_{p=0}^{\infty} x'_p t^p = \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) x_{(p+1)} t^p.$$

Приравнивая, получим:

$$x'_p = (p+1) x_{(p+1)},$$

тогда формулы для вычисления коэффициентов ряда Маклорена:

$$x_{p+1} = \frac{x'_p}{p+1}.$$

Замечание: Не смотря на то, что описанные выше методы легко запрограммировать, они уступают методам, в которых используются схемы.

3.4 Метод рядов Тейлора для полиномиальных систем

При написании данного раздела использовались источники: [8, 10].

В данном разделе рассматриваются три формы задания полиномиальной задачи Коши, формулы для коэффициентов Тейлора и различные оценки локальных решений.

3.4.1 Коэффициенты Тейлора

Рассмотрим автономную задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.21}$$

где $f = (f_1, ..., f_n),\ x = (x_1, ..., x_n),\ x_0 = (x_{10}, ..., x_{n0}) \in R^n,\ t,\ t_0 \in R$. Решение ее обозначим $x(t, t_0, x_0),\ x(t)$, или x. Полиномиальной называют систему (3.24) (и задачу Коши), в которой все функции f_i – алгебраические полиномы по $x_1, ..., x_n$. Далее используются две формы задания полиномиальной системы.
Первая форма представления полиномиальной задачи Коши имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = a + \sum_{m=1}^{L+1} \sum_{i \in I(m)} a[i] x^i, \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.22}$$

где
$i = (i_1, ..., i_n),\ i_1, ..., i_n \in Z,\ L \in [0 : \infty),\ I(m) = \{i \in Z^n | i_1, ..., i_n \geqslant 0, |i| = m\}$,
$|i| = i_1 + ... + i_n,\ x = (x_1, ..., x_n) \in R^n,\ x^i = x_1^{i_1} \cdot ... \cdot x_n^{i_n},\ x_0 = (x_{10}, ..., x_{n0}) =$
$= (x_1(t_0), ..., x_n(t_0)) \in R^n,\ a = (a_1, ..., a_n) \in R^n,\ a[i] = (a_1[i], ..., a_n[i])$.
Вторая форма представления задачи (3.24) следующая:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=0}^{u} a_{j,k} x^{i(k)}, \quad x_j(t_0) = x_{j0},\ j \in [1 : n], \tag{3.23}$$

где $x^{i(0)} = 1, ..., x^{i(n)} = x_n$, а $x^{i(n+1)}, ..., x^{i(u)}$ – все различные нелинейные мономы в правых частях уравнений (3.25).
Третья форма – иерархическая, она представляется формулами:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=0}^{u(1)} a_{s,j,k} y_1^{i(1,k)},\ j \in [1 : n], \tag{3.24}$$

$$y_r^{i(r,j)} = \sum_{k=0}^{u(r+1)} a_{r,j,k} y_{r+1}^{i(r+1,k)},\ j \in [1 : m(r)],\ r \in [1 : s-1], \tag{3.25}$$

в которых использованы обозначения:

$$y_r = (y_{r,1}, ..., y_{r,m(r)}),\ r \in [1 : s],\ y_s = x,\ \text{т.е. } y_{s,1} = x_1, ..., y_{s,m(s)} = x_n,\ m(s) = n;$$

$$y_r^{i(r,0)} = 1,\ y_r^{i(r,1)} = y_{r,1},\ ...,\ y_r^{i(r,m(s))} = y_{r,m(s)},\ r \in [1 : s];$$

при каждом $r \in [1 : s]$ величины $y_r^{i(r,m(s)+1)}, ..., y_r^{i(r,u(r))}$ – различные нелинейные мономы по $y_{r,1}, ..., y_{r,m(r)}$ (в частности, при $r = s$ это мономы по $x_1, ..., x_n$).

В формулах (3.27), (3.28) величина s – любое фиксированное натуральное число. Будем называть его числом уровней третьей формы. При $s = 1$ третья форма совпадает со второй. При $s \in [2 : \infty)$ третья форма является обобщением второй. Вместе с тем простым перемножением полиномов третью форму всегда можно свести к форме с меньшим числом уровней и в конце концов – ко второй. Необходимость в третьей форме может возникнуть по разным причинам, но важно, что к такой форме полиномиальной системы сводятся системы ОДУ в результате применения к ним метода дополнительных переменных в самом общем случае в автоматизированном режиме.

Дополним, если необходимо, набор мономов T (мономы стоящие в правой части дифференциального уравнения) до оболочки T' со схемой

$$S(T) = \big((p(n+1), q(n+1)), \ldots, (p(u), q(u))\big)$$

и обратимся к уравнениям (3.26) с тем, чтобы получить искомые формулы для коэффициентов Тейлора. Подставив

$$x^{i(k)} = \sum_{p=0}^{\infty} x_{k,p}(t-t_0)^p, \ k \in [0:u], \tag{3.26}$$

в равенство

$$x^{i(k)} = x^{i(p(k))} \cdot x^{i(q(k))}, \ k \in [n+1, u], \tag{3.27}$$

и в уравнения (3.26), находим

$$\sum_{p=0}^{\infty}[x_{k,p} - \sum_{l=0}^{p} x_{p(k),l}x_{q(k),p-l}](t-t_0)^p = 0, \tag{3.28}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}[(p+1)x_{j,p+1} - \sum_{k=0}^{u} a_{j,k}x_{k,p}](t-t_0)^p = 0. \tag{3.29}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $(t-t_0)^p$ в равенствах (3.31), (3.32) и вспоминая начальные условия $x(t_0) = x_0$, получаем расчетные формулы

$$x_{k,0} = x_k(t_0), \ k \in [1:n], \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} x_{k,p} &= \sum_{l=0}^{p} x_{p(k),l}\ x_{q(k),p-l}, \ k \in [n+1:u], \ (p = 0, 1, \ldots); \\ x_{k,p+1} &= (p+1)^{-1} \sum_{l=0}^{u} a_{k,l}\ x_{l,p}, \ k \in [1:n], \ (p = 0, 1, \ldots); \end{aligned} \tag{3.31}$$

Формулы (3.33), (3.34) позволяют вычислять последовательно все коэффициенты $x_{k,p}$ разложений (3.29) величин $x_1, ..., x_n, x_i(n+1), ..., x_i(u)$ в ряд Тейлора. Для того чтобы использовать эти формулы, достаточно иметь в своем распоряжении:

– начальные данные: $x_k(t_0)$ при $k \in [1:n]$,

– коэффициенты: $a_{k,l}$ при $k \in [1:n],\ l \in [0:u]$,

– соответствующую схему: $S(T) = \big((p(n+1), q(n+1)), \ldots ,(p(u), q(u))\big)$.

Важно, что теми же величинами задается и сама полиномиальная задача Коши, и такой способ задания может быть предпочтительным не только при ее пошаговом интегрировании (методом рядов Тейлора, методом Рунге - Кутта и т. п.), но и при решении других задач, связанных с дифференциальными уравнениями.

3.4.2 Формулировка метода рядов Тейлора

В данном подразделе рассматривается формулировка метода рядов Тейлора и используемые в его реализации оценки радиуса сходимости и остаточного члена для линейной и нелинейной задач.

Введем обозначения:

$$x^{(k)} = \frac{\partial^k x}{\partial t^k},\ x_0^{(k)} = x^{(k)}(t_0),\ |x| = \max_{i \in [1:n]} |x_i|,\ O_\rho(t_0) = \{t \in C \big| |t - t_0| < \rho\},$$

$$T_M x(t, t_0, x_0) = \sum_{m=0}^{M} x_0^{(m)} \frac{(t - t_0)^m}{m!},\ \delta T_M x(t, t_0, x_0) = x(t, t_0, x_0) - T_M x(t, t_0, x_0),$$

где T_M и δT_M – операторы, которые решению $x(t, t_0, x_0)$ задачи (3.24) сопоставляют полином Тейлора $T_M x(t, t_0, x_0)$ и остаточный член $\delta T_M x(t, t_0, x_0)$ соответственно. Радиус сходимости ряда $T_\infty x(t, t0, x0)$ обозначим через $R(t_0, x_0)$.

Метод рядов Тейлора решения задачи Коши (3.29) заключается в построении таблицы приближенных значений $\tilde{x}_w = \tilde{x}(t_w)$ по формулам

$$\tilde{x}_1 = T_{M_1} x(t_1, t_0, x_0), ..., \tilde{x}_w = T_{M_w} x(t_w, t_{w-1}, x_{w-1}), ...,$$

где $M_1, M_2, ...$ – натуральные числа, $t_1 = t_0 + h_1,\ t_2 = t_1 + h_2, ...,\ h_1, h_2, ...$ удовлетворяют неравенствам

$$|h_w| < R(t_{w-1}, \tilde{x}_{w-1}).$$

Вычисление каждого значения $\tilde{x}(t_w)$ называют шагом метода, а число h_w – величиной шага.

3.4.3 Оценки локальной погрешности

В данном подразделе рассматриваются оценки локальной погрешности, чтобы автоматизировать выбор порядка M_k и величины шага h_k, можно воспользоваться оценками величин $R(t_0, x_0)$ и $\delta T_M x(t, t_0, x_0)$.

Оценки для линейной задачи.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = a + Ax,\ x(t_0) = x_0,\ x = (x_1, ..., x_n) \in R^n, \\ &x_0 = (x_{10}, ..., x_{n0}) \in R^n,\ a = (a_1, ..., a_n) \in R^n,\ A = (a_{i,j}),\ t,\ t_0, a_{i,j} \in R. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Введем замену $x_j = \alpha_j y_j,\ j \in [1 : n]$, зависящую от "масштабирующих множителей"$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n),\ \alpha_1, ..., \alpha_n > 0$, и обозначения

$$\rho(\alpha) = \frac{1}{s(\alpha)},\ s(\alpha) = \max_{i\in[1:n]} s_i(\alpha),\ s_i(\alpha) = \alpha_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j |a_{i,j}|,\ |b| = \max_{i\in[1:n]} \alpha_i^{-1} |\alpha_i|,$$

$$|y_0| = \max_{i\in[1:n]} \alpha_i^{-1} |x_{i0}|,\ T_M e^\tau = \sum_{m=0}^{M} \frac{\tau^m}{m!},\ u(\tau) = \delta T_M e^\tau = e^\tau - T_M e^\tau. \tag{3.33}$$

Утверждение 1. Решение $x(t, t_0, x_0)$ задачи (3.25) удовлетворяет неравенству

$$|\delta T_M x_i(t, t_0, x_0)| \leqslant \alpha_i (|y_0| + |b|\rho) \delta T_M e^{\frac{|t-t_0|}{\rho}},\ i \in [1 : n],\ t \in C.$$

Утверждение 2. Пусть u^{-1} – функция, обратная u при $\tau > 0$, $\chi_1, ..., \chi_n,\ \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ – положительные числа и

$$\varepsilon = (|y_0| + \rho|b|)^{-1} \min_{i\in[1:n]} \frac{\varepsilon_i \chi_i}{\alpha_i}.$$

Тогда

$$(|t - t_0| \geqslant \rho u^{-1}(\varepsilon)) \Rightarrow (|\delta T_M x_i(t, t_0, x_0)| \leqslant \varepsilon_i \chi_i,\ i \in [1 : n]).$$

Оценки для нелинейной задачи.

В задаче (3.25) положим, что $x_j = \alpha_j y_j,\ j \in [1 : n]$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \alpha_1, ..., \alpha_n > 0$, и предположим дополнительно, что x_{j0} и α удовлетворяют неравенствам $0 < |x_{j0}| < \alpha_j,\ j \in [1 : n]$. Введем обозначения:

$$\rho(\alpha) = \frac{1}{Ls(\alpha)},\ s(\alpha) = \max_{j\in[1:n]} s_j(\alpha),\ s_j(\alpha) = \alpha_j^{-1} \Big(|a_j| + \sum_{m=1}^{L+1} \sum_{|i|=m} \alpha^i |a_j[i]| \Big),$$

$$O_\rho(t_0) = \{t \in C \big| |t - t_0| < \rho\},\ b(\tau) = (1-\tau)^{\frac{-1}{L}},\ T_M b(\tau) = \sum_{m=0}^{M} \prod_{l=0}^{m-1} \frac{(\frac{1}{L} + l)\tau^m}{m!}, \tag{3.34}$$

$$v(\tau) = \delta T_M b(\tau) = b(\tau) - T_M b(\tau),\ \tau \in [0, 1).$$

Утверждение 3. Решение $x(t, t_0, x_0)$ задачи (3.25) регулярно в круге $O_\rho(t_0)$ и удовлетворяет там неравенству

$$|\delta T_M x_j(t, t_0, x_0)| \leqslant \alpha_j \delta T_M b(\frac{|t - t_0|}{\rho}).$$

Утверждение 4. Если функция v^{-1} обратна v, а

$$\varepsilon = \min_{i \in [1:n]} (\frac{\varepsilon_i \chi_i}{\alpha_i}),\ \varepsilon_i > 0,$$

то

$$(|t - t_0| \geqslant \rho v^{-1}(\varepsilon)) \Rightarrow (|\delta T_M x_i(t, t_0, x_0)| \leqslant \varepsilon_i \chi_i,\ i \in [1:n]).$$

Далее будем использовать эти утверждения при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = ... = \varepsilon_n$, $\chi_1 = \alpha_1, ..., \chi_n = \alpha_n$.

3.4.4 Вспомогательные алгоритмы

В основе реализации МРТ для полиномиальных ОДУ лежат формулы (3.33) и (3.34) для коэффициентов Тейлора и алгоритмы автоматического выбора величины шага и порядка, опирающиеся как на утверждения 1 – 4, так и на обычно применяемые в численном анализе эвристические соображения. Мы изложим вначале некоторые вспомогательные алгоритмы, потом опирающиеся на них алгоритмы автоматического выбора величины шага и порядка, а затем алгоритм интегрирования полиномиальной системы ОДУ на заданном промежутке.

Далее величины $t = t_k$, $x = x^k = \tilde{x}(t_k)$, $h = h_k = t_{k+1} - t_k$ будут обозначать текущий узел, приближенное значение решения в нем и величину текущего шага, а ε, Δ – заданные пользователем допустимые относительную и абсолютную погрешности решения на шаге. Кроме того, при фиксированных M, K, t_k, $x^k k$ величины $T_M x(t_{k+1}, t_k, x^k)$ и

$$T_M x(t_{k+1}, t_k, x^k),\quad \delta T_{M,K} x(t_{k+1}, t_k, x^k) = T_{M+K} x(t_{k+1}, t_k, x^k) - T_m x(t_{k+1}, t_k, x^k),$$

$$\varepsilon_{M,K}(t_{k+1},t_k,x^k) = |\delta T_{M+K}x(t_{k+1},t_k,x^k)|\Big(\ |T_m x(t_{k+1},t_k,x^k)| + \Delta\Big)^{-1}$$

будут записаны упрощенно как $T(h),\ \delta T(h), \varepsilon(h)$.

1. Таблицы для вычисления значений функций u^{-1} и v^{-1} (утверждения 2 и 4). Таблицы содержатся в [124] и используются в алгоритме 2 (см. ниже).

Для каждой пары $L = 0, ..., 99,\ M = 1, ..., 99$ таблицы содержат набор значений $(u(\tau_j), v(\tau_j))$, упорядоченный по возрастанию $\tau_j = 0.01, 0.02, ..., 0.99$. Они вычислены при помощи программы Wolfram Mathematica [126] по формулам

$$u(\tau_j) = e^{\tau_j} - T_M e^{\tau_j},\ v(\tau_j) = b(\tau_j) - T_M b(\tau_j).$$

Из равенств $u^{-1}(u(\tau_j)) = \tau_j$ и $v^{-1}(v(\tau_j)) = \tau_j$ следует, что значение функций u^{-1}, v^{-1} в промежуточных точках можно получить интерполированием по значениям в ближайших узловых точках $(u(\tau_j), v(\tau_j))$.

2. Априорный выбор шага. Величины x_0 (значение решения в узле, для которого выбирается шаг h),ε, Δ (допустимые относительная и абсолютная погрешности) считаются заданными. Вначале вычисляются масштабирующие множители $\alpha_i,\ i \in [1:n]$ по процедуре *tsmr_alp*, если она задана пользователем, иначе при $i \in [1:n]$

$$\text{если } \max_{j\in[1:n]}|x_j(t_0)| = 0, \text{то } \alpha_j = 1,\ \text{иначе } \alpha_j = \max_{j\in[1:n]}(|x_j(t_0)|).$$

Затем вычисляется величина τ :

для нелинейной системы:

$$\tau = u^{-1}\Big(\varepsilon \min_{i\in[1:n]} \frac{|x_i(t_0)| + \Delta}{\alpha_i}\Big),$$

для линейной системы:

$$\tau = v^{-1}\Big(\varepsilon \min_{i\in[1:n]} \frac{|x_i(t_0)| + \Delta}{\alpha_i}\Big).$$

3. Итеративный алгоритм коррекции шага. Введем следующие обозначения: D – натуральное число, например, $D = 5,\ d = \frac{h_0}{D},\ s = sgn(\varepsilon - \varepsilon(h_0))$,

$$\text{если } sgn(\varepsilon - \varepsilon(h)) > 0,\ \text{то } \sigma(i,h) = i - 1,\ \text{иначе } \sigma(i,h) = i,$$

где h_0 – шаг, который требуется скорректировать так, чтобы получить максимально возможную его величину при заданной пользователем допустимой относительной погрешности ε.

Алгоритм в операторной форме:

1) $i := 1$;

2) $h := h_0 + sid$. Если $sgn(\varepsilon - \varepsilon(h)) < 0$, то $h := h_0 + s\sigma(i, h)d$ и переход к 5;

3) если $i = D - 1$, то $h_0 := h,\ d := \frac{h_0}{D}$, и переход к 1;

4) $i := i + 1$ и переход к 2;

5) выход.

4. Стандартный алгоритм коррекции шага. Он основан на апостериорной информации. Скорректированная величина h для текущего узла при известном значении $x = (x_1, ..., x_n)$ в нем и известном приближении h_0 вычисляется как

$$h = h_0 \left(\sqrt{n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\delta T(h_0)\right)^2 \cdot \left(\Delta + \varepsilon\ max(|x_i|,\ |T_i(h_0)|)\right) \right)} \right)^{1/(M+1)},$$

которая аналогична используемым в методах Рунге - Кутта (M – порядок МРТ).

5. Градуировка. Она заключается в том, что для каждого порядка $p \in [M_{min} : M_{max}]$ (где, например, $M_{min} = 5,\ M_{max} = 60$) определяется процессорное время $t(p)$ вычисления всего набора коэффициентов Тейлора решения. Градуировка производится на начальном этапе работы программы до начала интегрирования системы на заданном промежутке, а ее результаты используются для выбора порядка и величины шага на первом шаге интегрирования и для корректировки порядка на следующих шагах.

6. Выбор величины шага и порядка на первом шаге. Начальное приближение h_0 для величины первого шага вычисляется по алгоритму 2. Затем при $p \in [M_{min} : M_{max}]$ вычисляются величины $V(p) = \frac{h(p)}{t(p)}$ – "пошаговые скорости", где $h(p)$ – величина шага, полученная МРТ порядка p с помощью алгоритма 3 и с использованием начального приближения h_0. В качестве порядка на первом шаге выбирается величина M такая, что

$$V(M) = \max_{p \in [M_{min}, M_{max}]} V(p),$$

а в качестве величины этого шага принимается $h = h(M)$.

(a) Алгоритм автоматического выбора шага. На каждом шаге (кроме первого) за начальное приближение h_0 принимается значение, полученное на предыдущем шаге интегрирования. Затем с помощью алгоритмов 2 и 4 вычисляются две величины шага h_1 и h_2. Из них выбирается максимальная – $h = \max\{h_1, h_2\}$, которая корректируется по алгоритму 3.

(б) Алгоритм автоматического выбора порядка. Если на очередном шаге МРТ величина шага h изменилась в m (например, $m = 5$) раз по сравнению с величиной H (H изменяется после каждого изменения величины порядка M, а на первом шаге полагается равной величине первого шага), то производится корректировка порядка M. Предполагается, что известны коэффициенты Тейлора до порядка M. Для $p = M - 1, ..., M_{min}$ последовательно вычисляются длины шагов $h(p)$ и $V(p) = \frac{h(p)}{t(p)}$. Как только (и если) окажется, что $V(p) \leqslant V(M)$, новый порядок M полагается равным этому p. Если же не найдется таких $p = M - 1, ..., M_{min}$, то для $p = M + 1, ..., M_{max}$ последовательно вычисляются коэффициенты Тейлора порядка p (с учетом того, что коэффициенты порядка до p уже известны), соответствующий шаг $h(p)$ и скорость $V(p)$. Как только (и если) окажется, что $V(p) > V(M)$, новый порядок M полагается равным этому p. Если же не найдется таких $p = M + 1, ..., M_{max}$, то использовавшийся порядок не корректируется.

3.4.5 Общий алгоритм метода рядов Тейлора

Ниже этот алгоритм представлен в операторной форме.

1. Выбор величины шага и порядка на первом шаге (см. алгоритм 6) и присвоение этих значений переменным H и M(см. (б)).
2. Вычисление в следующей точке t_k коэффициентов Тейлора по формулам (3.29), (3.30) и шага h (см. (а)).
3. Если шаг h изменился более чем в m раз по сравнению с величиной H, то вычисляется новый порядок M (см. (б)) и соответствующий шаг h (см. (а)).
4. Если $t_k + h < T$, то $t_{k+1} = t_k + h$, вычисляется решение в точке t_{k+1} и переход к 2.
5. Вычисление решения в точке T (шаг: $h = T - t_k$), выход.

3.5 Реализация метода рядов Тейлора (МРТ)

Описанная ниже программа взята из [10, 124].

В данном разделе описана программа, реализованная на языке Фортран, которая численно интегрирует системы дифференциальных уравнений в полиномиальной форме (методом, описанным в главе 3).

Программа состоит из главной программы, подпрограммы чтения кофигурационного файла, подпрограммы интегрирования на промежутке, подпрограммы вычисления коэффициентов Тейлора, подпрограммы вычисления полиномов Тейлора, функции вычисления шага по априорному алгоритму, функции вычисления шага стандартной коррекцией, функции вычисления шага итеративной коррекцией, функции автоматического выбора шага, функции вычисления ρ, подпрограммы чтения файлов с данными, функции вычисления степени правой части, функции вычисления u^{-1} и v^{-1}, процедуры замера времени расчета коэффициентов, функции вычисления $\alpha_1, ..., \alpha_n$, процедуры вычисления оптимального порядка.

Главная программа.

1. Считывает имя конфигурационного файла из командной строки.
2. Считывает данные из конфигурационного файла.
   - $cfg.dat$ – задаются: требуемая относительная погрешность, требуемая абсолютная погрешность и пути к остальным файлам конфигурации;
   - $coef.dat$ – набор ненулевых коэффициентов системы. Коэффициент задается тройкой (коэффициент, номер уравнения, номер монома);
   - $sch.dat$ – схема: последовательность пар чисел. Если система линейна, схема не задается;
   - $ic.dat$ – начальные данные для задачи Коши;
   - $points.dat$ – последовательность значений аргумента, в которых выдаются значения решения.
3. Запускает интегрирование на промежутке.

Программа чтения конфигурационного файла.

Аргументы: cfg - имя конфигурационного файла $ipar$:

1 - размерность,

2 - число мономов,

3 - число ненулевых коэффициентов,

4 - число точек вывода;

$rpar$ - требуемая погрешность:

1 - относительная, 2 - абсолютная; ln - линейность;

$fpar$ - файлы:

1. - с начальными данными,
2. - со схемой,
3. - файлы с коэффициентами,
4. - с таблицей,
5. - для записи результатов,
6. - с точками вывода.

Возвращает: $ipar, rpar, ln, fpar$.

Подпрограмма интегрирования на промежутке.

Аргументы:

n - размерность; u - число мономов; na - число ненулевых коэффициентов; np - число точек для выдачи решения; ln - линейность; $rtol$ - требуемая относительная погрешность; $atol$ - требуемая абсолютная погрешность; $fpar$ - файлы: 1 - с начальными данными, 2 - со схемой, 3 - файл с коэффициентами, 4 - с таблицей, 5 - для записи результатов, 6 - с точками вывода.

Возвращает: значение x.

Подпрограмма вычисления коэффициентов Тейлора.

Аргументы:

x - массив коэффициентов Тейлора; tx - массив значений решения в точке; pl, pu - нижний и верхний порядок.

Возвращает: значение x.

Глобальные переменные: n, u, na, sch, a, ia, ja, $pmax$.

Подпрограмма вычисления полиномов Тейлора.

Аргументы:
tx - массив значений решения в точке; x - массив коэффицентов Тейлора; h - длина шага; pl, pu - нижний и верхний порядок.
Возвращает: tx.
Глобальные переменные: n, u, $pmax$.

Функция вычисления шага по априорному алгоритму.

Аргументы: tx - массив значений решения в точке; $alp - \alpha_1, ..., \alpha_n$; $pwork$ - порядок.
Глобальные переменные: n.

Функция вычисления шага стандартной коррекцией.

Аргументы: tx - массив значений решения в точке; x - массив коэффициентов Тейлора; $h0$ - приближение к шагу; rx, tx - вспомогательные массивы; $pwork$ - порядок.
Глобальные переменные: n, $pmax$, $atol$, $rtol$.

Функция вычисления шага итеративной коррекцией.

Аргументы: tx - массив значений решения в точке; x - массив коэффициентов Тейлора; $h0$ - приближение к шагу; rx, tx - вспомогательные массивы; $pwork$ - порядок.
Глобальные переменные: n, $pmax$, $atol$, $rtol$.

Функция автоматического выбора шага.

Аргументы: h - приближение к шагу; tx - массив значений решения в точке; x - массив коэффициентов Тейлора; rx, tx - вспомогательные массивы; $alp - \alpha_1, ..., \alpha_n$; $pwork$ - порядок; dir - направление.
Глобальные переменные: n, u.

Функция вычисления ρ по $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Аргументы: $alp - \alpha_1, ..., \alpha_n$.
Глобальные переменные: n, u, na, ut, aa, ia, ja, $rdeg$.

Программа чтения файлов с данными.

Аргументы: tx - значение решения в точке; $fpar$ - файлы: 1 - с начальными данными, 2 - со схемой, 3 - файл с коэффициентами, 4 - с таблицей, 5 - для записи результатов, 6 - с точками вывода.
Возвращает: tx, sch, a, ia, ja, $rdeg$, ox
Глобальные переменные: n, u, na, sch, ox, np, a, ia, ja, $rdeg$.

Функция вычисления степени правой части.

Глобальные переменные: n, u, sch.

Функция вычисления u^{-1} и v^{-1}.

Аргументы: $alp - -\alpha_1, ..., \alpha_n$; $pwork$ - текущий порядок метода.
Глобальные переменные: n, $atol$, $rtol$, vtb, vtn, $pmin$, $pmax$.

Процедура замера времени расчета коэффициентов

Аргументы: x - массив коэффициентов Тейлора; tx - массив значений решения в точке.
Возвращает: $time$.
Глобальные переменные: n, u, $pmax$, $time$.

Функция вычисления $\alpha_1, ..., \alpha_n$

Аргументы: $alp - -\alpha_1, ..., \alpha_n$; tx - массив значений решения в точке; $rpar, ipar$ - вспомогательные массивы.
Глобальные переменные: n.

Процедура вычисления оптимального порядка.

Аргументы: x - массив коэффициентов Тейлора; tx - массив значений решения в точке.
Возвращает: $pwork$, h.
Глобальные переменные: n, u, $pmax$, $time$.

Глава 4. Численные эксперименты

При написании данной главы использовались многие источники: [26, 30, 35, 43].

В данной главе рассматривается серия экспериментов, показывающая эффективность схем и метода рядов Тейлора для полиномиальных систем, использующего схем как инструмент подсчёта коэффициентов Тейлора.

4.1 Эффективность схем

В данном разделе рассмотрен вопрос эффективности схемы для полиномиальных систем дифференциальных уравнений как для случайно сгенерированного набора мономов, так и на примере задачи N тел (с возмущениями и без).

4.1.1 Произвольный набор мономов

В данном эксперименте случайным образом генерируются системы из N_m мономов из N_v переменных. Учитывая систему мономов, можно вычислить $\tau = t/t_s$ (эффективность схемы), где t_s, t – время, необходимое для вычисления всех мономов сгенерированной системы с помощью схемы и без неё соответственно. Учитывая N_m, N_v для сотни систем случайно выбранных мономов, мы можем вычислить минимальные и максимальные значения $\tau : \tau_{min}, \tau_{max}$. Результаты эксперимента представлены в Таблице 1.

Таблица 2 — Рандомный набор мономов

$N_m = 1000$			$N_v = 200$		
N_v	τ_{min}	τ_{max}	N_m	τ_{min}	τ_{max}
50	1.6	1.7	1 000	4.5	4.7
100	2.6	2.8	2 000	4.9	5.2
150	3.5	3.8	3 000	5.1	5.3
200	4.5	4.7	4 000	5.3	5.8
250	5.2	5.5	5 000	5.6	5.9
300	6.3	6.7	6 000	5.8	6.2
350	7.5	8.2	7 000	5.6	6.0
400	8.6	9.7	8 000	5.7	6.6
450	9.9	11.0	9 000	5.7	6.9
500	11.2	13.5	10 000	5.8	7.0

4.1.2 Задача N тел

В Главе 1 (Пример 7) рассмотрена система дифференциальных уравнений классической задачи N тел с использованием декартовых координат. Затем эта система дифференциальных уравнений сведена к трем различным системам уравнений с правыми частями, которые являются многочленами пятой, четвертой и третьей степени соответственно.

Рассмотрим два численных эксперимента (Таблица 2, Таблица 3). Они связаны со сравнением стоимости оценки при вычислении правых частей уравнений исходной системы и систем одночленов в правых частях полиномиальных уравнений пятой, четвертой и третьей степени (с помощью схем и без них).

Здесь используются следующие обозначения:
N – количество тел;
t_0 – время, необходимое для вычисления всех мономов из правых частей исходных уравнений задачи N тел;
t_5, t_4, t_3 – время, необходимое для вычисления всех различных мономов в правых частях систем пятой, четвертой и третьей степени соответственно;
$t_{j,s}, t_j$ – время, необходимое для вычисления всех мономов степени j в правых частях системы пятой ($j = 5$), четвертой ($j = 4$) и третьей степени ($j = 3$)

соответственно (с помощью схемы и без неё);
$t^+_{j,s}, t^+_j$ – время, необходимое для вычисления дополнительных кубических мономов (возмущений) и всех одночленов степени j в правых частях системы пятой ($j = 5$), четвертой ($j = 4$) и третьей степени ($j = 3$) соответственно (с помощью схемы и без нее).

Таблица 3 — Мономы задачи N тел без возмущений

N	t_0/t_5	$t_0/t_{5,s}$	t_0/t_4	$t_0/t_{4,s}$	t_0/t_3	$t_0/t_{3,s}$
3	7.2	8.6	4.2	5.0	4.2	5.5
4	9.6	15.4	4.7	7.0	4.6	7.8
5	9.7	20.4	4.8	11.5	4.7	14.1
6	9.8	22.5	4.9	14.2	4.8	16.3
7	10.2	25.5	5.2	17.7	5.1	19.3
8	12.1	38.7	5.3	20.1	5.3	22.8
9	13.0	49.9	5.6	23.0	5.5	25.8
10	13.1	57.6	5.8	26.6	5.7	29.6

Таблица 4 — Мономы задачи N тел с возмущениями

N	$t_5/t_{5,s}$	$t^+_5/t^+_{5,s}$	$t_4/t_{4,s}$	$t^+_4/t^+_{4,s}$	$t_3/t_{3,s}$	$t^+_3/t^+_{3,s}$
3	1.2	1.2	1.2	1.1	1.3	1.2
4	1.6	1.5	1.5	1.5	1.7	1.6
5	2.1	2.0	2.4	2.3	3.0	2.7
6	2.3	2.1	2.9	2.7	3.4	3.1
7	2.6	2.2	3.4	3.0	3.8	3.3
8	3.2	2.6	3.8	3.3	4.3	3.6
9	3.8	3.0	4.1	3.5	4.7	3.8
10	4.4	3.2	4.6	3.8	5.2	4.1

4.2 Численное интегрирование дифференциальных уравнений

Одним из наиболее эффективных методов решения дифференциальных уравнений является метод рядов Тейлора [10, 23, 40, 57, 85, 108, 113, 123].

При применении метода численного интегрирования рядов Тейлора к уравнениям задачи N тел для упрощения и/или ускорения вычислений естественно использовать полиномиальные системы дифференциальных уравнений. Для интеграции полиномиальных систем (1.17), (1.18) и (1.19) используются две программы: TSMR [124] и TIDES [25].

Расчеты производились на компьютере с процессором Intel Core i5, 2,6 ГГц, 8 ГБ оперативной памяти и операционной системой Mac OS X El Capitan (версия 10.11.5); Использовались Intel Parallel Studio XE 2016 для TSMR и GNU Compiler Collection (Xcode Version 7.3.1) для TIDES.

Рассмотрена задача трех тел (Солнце-Меркурий-Венера) для систем (1.17), (1.18) и (1.19). Исходные данные и массы планет взяты из [95], [127] соответственно. Для корректной оценки абсолютных погрешностей координат и скоростей, интегрирование проводилось по схеме «туда и обратно». Это означает, что уравнения сначала интегрируются от $t = 0$ до $t = T$, а затем — от $t = T$ до $t = 0$. Результаты, сравнивающие эффективность метода рядов Тейлора для систем (1.17), (1.18) и (1.19), представлены в таблице 4.

Здесь используются следующие обозначения:

Method – название метода TSi (TSMR) or TDi (TIDES); $i = 5, 4, 3$ означает, что метод был применен к системе (1.17), (1.18) и (1.19) соответственно (i - степень системы);

RT – допустимые относительные погрешности по координатам и скоростям планет;

RE – допустимые абсолютные погрешности координат и скоростей планет;

$\mathbf{t^{CPU}}$ — время вычисления;

T (дни) – конечная точка ($t \in [0, T]$).

Таблица 5 — Численное интегрирование задачи N тел в различных полиномиальных формах

Method	T	$RT = 10^{-10}$, RE	$RT = 10^{-20}$, RE	$RT = 10^{-30}$, RE	t^{CPU} (sec)		
TD5	10^6	$6.2 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-11}$	$5.3 \cdot 10^{-22}$	551	1458	2915
TS5		$2.5 \cdot 10^{-2}$	$7.8 \cdot 10^{-15}$	$1.4 \cdot 10^{-24}$	227	659	1369
TD4		$1.8 \cdot 10^{1}$	$3.4 \cdot 10^{-10}$	$9.7 \cdot 10^{-20}$	1261	3368	6173
TS4		$6.6 \cdot 10^{0}$	$5.5 \cdot 10^{-10}$	$1.9 \cdot 10^{-21}$	381	1088	2272
TD3		$1.2 \cdot 10^{1}$	$3.4 \cdot 10^{-10}$	$4.9 \cdot 10^{-20}$	1233	3244	6096
TS3		$7.0 \cdot 10^{0}$	$2.8 \cdot 10^{-10}$	$3.7 \cdot 10^{-21}$	407	1252	2230
TD5	$2 \cdot 10^6$	$5.2 \cdot 10^{-2}$	$8.9 \cdot 10^{-11}$	$2.2 \cdot 10^{-21}$	1101	3006	5701
TS5		$6.7 \cdot 10^{-1}$	$2.0 \cdot 10^{-13}$	$3.1 \cdot 10^{-24}$	484	1311	2698
TD4		$4.1 \cdot 10^{1}$	$7.5 \cdot 10^{-10}$	$2.1 \cdot 10^{-19}$	2425	6266	11855
TS4		$2.1 \cdot 10^{1}$	$7.1 \cdot 10^{-9}$	$9.6 \cdot 10^{-22}$	777	2214	4315
TD3		$2.9 \cdot 10^{1}$	$7.5 \cdot 10^{-10}$	$5.9 \cdot 10^{-19}$	2519	6491	12163
TS3		$2.4 \cdot 10^{1}$	$7.8 \cdot 10^{-10}$	$1.0 \cdot 10^{-20}$	756	2279	4258
TS5	$3 \cdot 10^6$	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-13}$	$6.0 \cdot 10^{-24}$	649	1993	3977
TS4		$2.9 \cdot 10^{1}$	$9.9 \cdot 10^{-9}$	$2.3 \cdot 10^{-20}$	1494	3203	6579
TS3		$3.6 \cdot 10^{1}$	$3.3 \cdot 10^{-8}$	$3.6 \cdot 10^{-20}$	1130	3370	6409

Глава 5. Категории функций

В данной главе рассмотрена обширная коллекция библиотек функций, состоящая из 10 категорий, удовлетворяющих системам дифференциальных уравнений [11].

5.1 Категория 1: Элементарные функции

Основные элементарные функции

1. Определение: $Inv[p] = \frac{1}{p}$, Замены: $\varphi = Inv[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = -\varphi^2$.
2. Определение: $Power[p, a] = p^a$, Замены: $\varphi_1 = Power[p, a]$, $\varphi_2 = Inv[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = a\varphi_1\varphi_2, \frac{d\varphi_2}{dp} = -\varphi_2$.
3. Определение: $Sqrt[p] = \sqrt{p}$, Замены: $\varphi_1 = Sqrt[p]$, $\varphi_2 = Inv[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \frac{\varphi_1\varphi_2}{2}$, $\frac{d\varphi_2}{dp} = -\varphi_2^2$.
4. Определение: $Exp[p] = e^p$, Замены: $\varphi = Exp[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = \varphi_1$.
5. Определение: $Powerf[a, p] = a^p$, Замены: $\varphi = Powerf[a, p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = \varphi Log[a]$.
6. Определение: $Log[p] = \log(p)$, $ln(p)$, Замены: $\varphi_1 = Log[p]$, $\varphi_2 = Inv[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2$, $\frac{d\varphi_2}{dp} = -\varphi_2^2$.
7. Определение: $Log[a, p] = \log_a(p)$, Замены: $\varphi_1 = Log[a, p]$, $\varphi_2 = Inv[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \frac{\varphi_2}{Log[a]}$, $\frac{d\varphi_2}{dp} = -\varphi_2^2$.
8. Определение: $Sin[p] = \sin(p)$, Замены: $\varphi_1 = Sin[p]$, $\varphi_2 = Cos[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2$, $\frac{d\varphi_2}{dp} = -\varphi_1$.
9. Определение: $Cos[p] = \cos(p)$, Замены: $\varphi_1 = Sin[p]$, $\varphi_2 = Cos[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_1$, $\frac{d\varphi_2}{dp} = -\varphi_2$.
10. Определение: $Tan[p] = \mathrm{tg}(p)$, Замены: $\varphi = Tan[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = \varphi^2 + 1$.
11. Определение: $Cot[p] = \mathrm{ctg}(p)$, Замены: $\varphi = Cot[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = -(1 + \varphi^2)$.

12. Определение: $Csc[p] = \mathrm{cosec}(p)$, Замены: $\varphi_1 = Csc[p], \varphi_2 = Cot[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_1\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -(1+\varphi_2^2)$.
13. Определение: $Sec[p] = \sec(p)$, Замены: $\varphi_1 = Sec[p], \varphi_2 = Tan[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_1\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 1+\varphi_2^2$.
14. Определение: $Sinh[p] = \sinh(p)$, Замены: $\varphi_1 = Sinh[p], \varphi_2 = Cosh[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_1$.
15. Определение: $Cosh[p] = \cosh(p)$, Замены: $\varphi_1 = Sinh[p], \varphi_2 = Cosh[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_1$.
16. Определение: $Tanh[p] = \tanh(p)$, Замены: $\varphi = Tanh[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = 1-\varphi^2$.
17. Определение: $Coth[p] = \coth(p)$, Замены: $\varphi = Coth[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = 1-\varphi^2$.
18. Определение: $Csch[p] = csch(p)$, Замены: $\varphi_1 = Csch[p], \varphi_2 = Coth[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_1\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 1-\varphi_2^2$.
19. Определение: $Sech[p] = sech(p)$, Замены: $\varphi_1 = Sech[p], \varphi_2 = Tanh[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_1\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 1-\varphi_2^2$.
20. Определение: $ArcSin[p] = \arcsin(p)$, Замены: $\varphi_1 = ArcSin[p], \varphi_2 = Aux1[p] = (1-p^2)^{-1/2}$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = p\varphi_2^3$.
21. Определение: $ArcCos[p] = \arccos(p)$, Замены: $\varphi_1 = ArcCos[p], \varphi_2 = Aux1[p] = (1-p^2)^{-1/2}$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = p\varphi_2^3$.
22. Определение: $ArcTan[p] = \arctan(p)$, Замены: $\varphi_1 = ArcTan[p], \varphi_2 = Aux2[p] = (1+p^2)^{-1}$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -2p\varphi_2^2$.
23. Определение: $ArcCot[p] = arcctg(p)$, Замены: $\varphi_1 = ArcCot[p], \varphi_2 = Aux2[p] = (1+p^2)^{-1}$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -2p\varphi_2^2$.
24. Определение: $ArcCsc[p] = arccosec(p)$, Замены: $\varphi_1 = ArcCsc[p], \varphi_2 = Aux3[p] = (p^4-p^2)^{-1/2}$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-2p^3)\varphi_2^3$.
25. Определение: $ArcSec[p] = arcsec(p)$, Замены: $\varphi_1 = ArcSec[p], \varphi_2 = Aux3[p] = (p^4-p^2)^{-1/2}$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-2p^3)\varphi_2^3$.
26. Определение: $ArcSinh[p] = arsh(p)$, Замены: $\varphi_1 = ArcSinh[p], \varphi_2 =$

$Aux4[p] = (p^2+1)^{-1/2}$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -p\varphi_2^3$.
27. Определение: $ArcCosh[p] = arch(p)$, Замены: $\varphi_1 = ArcCosh[p], \varphi_2 = Aux5[p] = (p^2-1)^{-1/2},\ p > 1$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -p\varphi_2^3$.
28. Определение: $ArcTanh[p] = arth(p)$, Замены: $\varphi_1 = ArcTanh[p], \varphi_2 = Aux6[p] = (1-p^2)^{-1}$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2^2$.
29. Определение: $ArcCoth[p] = arcth(p)$, Замены: $\varphi_1 = ArcCoth[p], \varphi_2 = Aux6[p] = (1-p^2)^{-1}$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2^2$.
30. Определение: $ArcCsch[p] = arcsch(p)$, Замены: $\varphi_1 = ArcCsch[p], \varphi_2 = Aux7[p] = (p^2+p^4)^{-1/2}$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -(p+2p^3)\varphi_2^3$.
31. Определение: $ArcSech[p] = arsch(p)$, Замены: $\varphi_1 = ArcSech[p], \varphi_2 = Aux8[p] = (p^2-p^4)^{-1/2}$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -(2p^3-p)\varphi_2^3$.

Вспомогательные функции

32. Определение: $Aux1[p] = (1-p^2)^{-1/2}$, Замены: $\varphi = Aux1[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = p\varphi_3$.
33. Определение: $Aux2[p] = (1+p^2)^{-1}$, Замены: $\varphi = Aux2[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = -2p\varphi_2$.
34. Определение: $Aux3[p] = (p^4-p^2)^{-1/2}$, Замены: $\varphi = Aux3[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = (p-2p^3)\varphi_3$.
35. Определение: $Aux4[p] = (p^2+1)^{-1/2}$, Замены: $\varphi = Aux4[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = -p\varphi_3$.
36. Определение: $Aux5[p] = (p^2-1)^{-1/2},\ p > 1$, Замены: $\varphi = Aux5[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = -p\varphi_3$.
37. Определение: $Aux6[p] = (1-p^2)^{-1}$, Замены: $\varphi = Aux6[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = 2p\varphi^2$.
38. Определение: $Aux7[p] = (p^2+p^4)^{-1/2}$, Замены: $\varphi = Aux7[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = -(p+2p^3)\varphi^3$.
39. Определение: $Aux8[p] = (p^2-p^4)^{-1/2}$, Замены: $\varphi = Aux8[p]$,
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = (2p^3-p)\varphi^3$.

5.2 Категория 2: Функции типа Бесселя

Функции Бесселя

1. Определение:

$$BesselJ[\nu,p] = J_\nu(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)k!}(\frac{p}{2})^{2k+\nu},$$

Замены: $\varphi_1 = BesselJ[\nu,p]$, $\varphi_2 = BesselJAux[\nu,p]$, $\varphi_3 = Inv[p]$,
Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3^2((\nu^2 - p^2)\varphi_1 - p\varphi_2),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

2. Определение:

$$BesselY[\nu,p] = Y_\nu(p) = \operatorname{cosec}(\pi\nu)(\cos(\pi\nu)J_\nu(p) - J_{-\nu}(p));\ \nu \notin Z,$$

Замены: $\varphi_1 = BesselY[\nu,p]$, $\varphi_2 = BesselYAux[\nu,p] = \frac{\partial BesselY[\nu,p]}{\partial p}$, $\varphi_3 = Inv[p]$,
Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3^2((\nu^2 - p^2)\varphi_1 - p\varphi_2),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

3. Определение:

$$BesselI[\nu,p] = I_\nu(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)k!}(\frac{p}{2})^{2k+\nu},$$

Замены: $\varphi_1 = BesselI[\nu,p]$, $\varphi_2 = BesselIAux[\nu,p] = \frac{\partial BesselI[\nu,p]}{\partial p}$, $\varphi_3 = Inv[p]$,
Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3^2((\nu^2 + p^2)\varphi_1 - p\varphi_2),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

4. Определение:

$$BesselK[\nu,p] = K_\nu(p) = 0.5\pi \operatorname{cosec}(\pi\nu)(I_\nu(p) - I_{-\nu}(p));\ \nu \notin Z,$$

Замены: $\varphi_1 = BesselY[\nu,p]$, $\varphi_2 = BesselYAux[\nu,p] = \frac{\partial BesselY[\nu,p]}{\partial p}$, $\varphi_3 = Inv[p]$,
Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3^2((\nu^2 + p^2)\varphi_1 - p\varphi_2),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

Функции Эйри

5. Определение:

$$AiryAi[p] = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma(2/3)} {}_0F_1(;\frac{2}{3};\frac{p^3}{9}) - \frac{}{\sqrt[3]{3}\Gamma(1/3)} {}_0F_1(;\frac{4}{3};\frac{p^3}{9})$$

Замены: $\varphi_1 = AiryAi[p],\ \varphi_2 = AiryAiPrime[p]$.

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = p\varphi_1.$$

6. Определение:

$$AiryBi[p] = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma(2/3)} {}_0F_1(;\frac{2}{3};\frac{p^3}{9}) - \frac{}{\sqrt[3]{3}\Gamma(1/3)} {}_0F_1(;\frac{4}{3};\frac{p^3}{9})$$

Замены: $\varphi_1 = AiryAi[p],\ \varphi_2 = AiryBiPrime[p]$.

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = p\varphi_1.$$

7. Определение:

$$AiryAiPrime[p] = \frac{1}{23^{2/3}\Gamma(2/3)} {}_0F_1(;\frac{5}{3};\frac{p^3}{9}) - \frac{1}{\sqrt[3]{3}\Gamma(1/3)} {}_0F_1(;\frac{1}{3};\frac{p^3}{9}).$$

Замены: $\varphi_1 = AiryAiPrime[p],\ \varphi_2 = AiryAiPrimeAux[p] = \frac{\partial AiryAiPrime[p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p]$.

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_2\varphi_3 + p\varphi_1,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

8. Определение:

$$AiryBiPrime[p] = \frac{p^2}{2\sqrt[6]{3}\Gamma(2/3)} {}_0F_1(;\frac{5}{3};\frac{p^3}{9}) + \frac{\sqrt[6]{3}}{\Gamma(1/3)} {}_0F_1(;\frac{1}{3};\frac{p^3}{9}).$$

Замены:

$$\varphi_1 = AiryBiPrime[p],\ \varphi_2 = AiryBiPrimeAux[p] = \frac{\partial AiryBiPrime[p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p]$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_2\varphi_3 + p\varphi_1,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

Струйные функции

9. Определение:

$$StruveH[\nu,p]=(\frac{p}{2})^{\nu+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma^2(k+3/2)(k+\nu)}(\frac{p}{2})^{2k}.$$

Замены:

$$\varphi_1=StruveH[\nu,p]\ \varphi_2=StruveHAux[\nu,p]=\frac{\partial StruveH[\nu,p]}{\partial p},\ \varphi_3=Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp}=\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp}=\varphi_3^2(\nu^2-p^2)\varphi_1-p\varphi_2+\frac{4}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+0.5)}(\frac{p}{2})^{\nu+1},\ \frac{d\varphi_3}{dp}=-\varphi_3^2.$$

10. Определение:

$$StruveL[\nu,p]=(\frac{p}{2})^{\nu+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma^2(k+3/2)(k+\nu)}(\frac{p}{2})^{2k}.$$

Замены:

$$\varphi_1=StruveL[\nu,p]\ \varphi_2=StruveLAux[\nu,p]=\frac{\partial StruveL[\nu,p]}{\partial p},\ \varphi_3=Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp}=\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp}=\varphi_3^2(\nu^2+p^2)\varphi_1-p\varphi_2+\frac{4}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+0.5)}(\frac{p}{2})^{\nu+1},\ \frac{d\varphi_3}{dp}=-\varphi_3^2.$$

Функции Кельвина

11. Определение:

$$KelvinBei[p]=-0.5i\Big(I_0(\sqrt[4]{-1}p)-J_0(\sqrt[4]{-1}p)\Big).$$

Замены:

$$\varphi_1=KelvinBei[p],\ \varphi_2=KelvinBeiAux1[p]=\frac{\partial KelvinBei[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3=KelvinBeiAux2[p]=\frac{\partial KelvinBeiAux1[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_4=KelvinBeiAux3[p]=\frac{\partial KelvinBeiAux2[p]}{\partial p},\ \varphi_5=Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = \varphi_3\varphi_5^2 - 2\varphi_4\varphi_5 - \varphi_2\varphi_5^3 - \varphi_1.$$

12. Определение:

$$KelvinBer[p] = 0.5i\Big(I_0(\sqrt[4]{-1}p) + J_0(\sqrt[4]{-1}p)\Big).$$

Замены:

$$\varphi_1 = KelvinBer[p],\ \varphi_2 = KelvinBerAux1[p] = \frac{\partial KelvinBer[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = KelvinBerAux2[p] = \frac{\partial KelvinBerAux1[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_4 = KelvinBerAux3[p] = \frac{\partial KelvinBerAux2[p]}{\partial p},\ \varphi_5 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = \varphi_3\varphi_5^2 - 2\varphi_4\varphi_5 - \varphi_2\varphi_5^3 - \varphi_1.$$

13. Определение:

$$KelvinKei[p] = -kei_0(p).$$

Замены:

$$\varphi_1 = KelvinKei[p],\ \varphi_2 = KelvinKeiAux1[p] = \frac{\partial KelvinKei[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = KelvinKeiAux2[p] = \frac{\partial KelvinKeiAux1[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_4 = KelvinKeiAux3[p] = \frac{\partial KelvinKeiAux2[p]}{\partial p},\ \varphi_5 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = \varphi_3\varphi_5^2 - 2\varphi_4\varphi_5 - \varphi_2\varphi_5^3 - \varphi_1.$$

14. Определение:

$$KelvinKer[p] = kei_0(p).$$

Замены:

$$\varphi_1 = KelvinKer[p],\ \varphi_2 = KelvinKerAux1[p] = \frac{\partial KelvinKer[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = KelvinKerAux2[p] = \frac{\partial KelvinKerAux1[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_4 = KelvinKerAux3[p] = \frac{\partial KelvinKerAux2[p]}{\partial p},\ \varphi_5 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = \varphi_3\varphi_5^2 - 2\varphi_4\varphi_5 - \varphi_2\varphi_5^3 - \varphi_1.$$

15. Определение:

$$KelvinBei[\nu, p] = bei_\nu(p) = -0.5ie^{-\frac{3}{4}i\pi\nu}p^\nu(\sqrt[4]{-1}p)^{-\nu}\Big(e^{\frac{3}{2}i\pi\nu}I_\nu(\sqrt[4]{-1}p) - J_\nu(\sqrt[4]{-1}p)\Big).$$

Замены:

$$\varphi_1 = KelvinBei[\nu, p],\ \varphi_2 = KelvinBeiAux1[\nu, p] = \frac{\partial KelvinBei[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = KelvinBeiAux2[\nu, p] = \frac{\partial KelvinBeiAux1[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_4 = KelvinBeiAux3[\nu, p] = \frac{\partial KelvinBeiAux2[\nu, p]}{\partial p},\ \varphi_5 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dp} = (2\nu_1^2 + 1)\varphi_3\varphi_5^2 - 2\varphi_4\varphi_5 - (2\nu_1^2 + 1)\varphi_2\varphi_5^3 - (p^4 + \nu^4 - 4\nu^2)\varphi_1\varphi_5^4.$$

16. Определение:

$$KelvinBer[\nu, p] = ber_\nu(p) = 0.5ie^{-\frac{3}{4}i\pi\nu}p^\nu(\sqrt[4]{-1}p)^{-\nu}\Big(e^{\frac{3}{2}i\pi\nu}I_\nu(\sqrt[4]{-1}p) + J_\nu(\sqrt[4]{-1}p)\Big).$$

Замены:

$$\varphi_1 = KelvinBer[\nu, p],\ \varphi_2 = KelvinBerAux1[\nu, p] = \frac{\partial KelvinBer[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = KelvinBerAux2[\nu, p] = \frac{\partial KelvinBerAux1[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_4 = KelvinBerAux3[\nu, p] = \frac{\partial KelvinBerAux2[\nu, p]}{\partial p},\ \varphi_5 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dp} = (2\nu_1^2 + 1)\varphi_3\varphi_5^2 - 2\varphi_4\varphi_5 - (2\nu^2 + 1)\varphi_2\varphi_5^3 - (p^4 + \nu^4 - 4\nu^2)\varphi_1\varphi_5^4.$$

17. Определение:

$$KelvinKei[\nu, p] = kei_\nu(p) = -0.25ei^{-\frac{3}{4}i\pi\nu}\pi p^\nu \sqrt[4]{-1}p)^{-\nu} csc(\pi\nu)$$

$$\Big((\sqrt[4]{-1}p)^{2\nu}\Big(I_{-\nu}\sqrt[4]{-1}p) - e^{\frac{3}{2}i\pi\nu}J_{-\nu}(\sqrt[4]{-1}p)\Big) - e^{\frac{i\pi\nu}{2}}p^{2\nu}\Big(I_\nu\sqrt[4]{-1}p) - e^{\frac{i\pi\nu}{2}}J_\nu(\sqrt[4]{-1}p)\Big)\Big).$$

Замены:

$$\varphi_1 = KelvinKei[\nu, p],\ \varphi_2 = KelvinKeiAux1[\nu, p] = \frac{\partial KelvinKei[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = KelvinKeiAux2[\nu, p] = \frac{\partial KelvinKeiAux1[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_4 = KelvinKeiAux3[\nu, p] = \frac{\partial KelvinKeiAux2[\nu, p]}{\partial p},\ \varphi_5 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dp} = (2\nu_1^2 + 1)\varphi_3\varphi_5^2 - 2\varphi_4\varphi_5 - (2\nu^2 + 1)\varphi_2\varphi_5^3 - (p^4 + \nu^4 - 4\nu^2)\varphi_1\varphi_5^4.$$

18. Определение:

$$KelvinKer[\nu, p] = ker_\nu(p) = 0.25e^{-\frac{3}{4}i\pi\nu}\pi p^\nu \sqrt[4]{-1}p)^{-\nu} csc(\pi\nu)$$

$$\Big((\sqrt[4]{-1}p)^{2\nu}\Big(I_{-\nu}\sqrt[4]{-1}p) + e^{\frac{3}{2}i\pi\nu}J_{-\nu}(\sqrt[4]{-1}p)\Big) - e^{\frac{i\pi\nu}{2}}p^{2\nu}\Big(I_\nu\sqrt[4]{-1}p) + e^{\frac{i\pi\nu}{2}}J_\nu(\sqrt[4]{-1}p)\Big)\Big).$$

Замены:

$$\varphi_1 = KelvinKer[\nu, p],\ \varphi_2 = KelvinKerAux1[\nu, p] = \frac{\partial KelvinKer[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = KelvinKerAux2[\nu, p] = \frac{\partial KelvinKerAux1[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_4 = KelvinKerAux3[\nu, p] = \frac{\partial KelvinKerAux2[\nu, p]}{\partial p},\ \varphi_5 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dp} = (2\nu_1^2 + 1)\varphi_3\varphi_5^2 - 2\varphi_4\varphi_5 - (2\nu^2 + 1)\varphi_2\varphi_5^3 - (p^4 + \nu^4 - 4\nu^2)\varphi_1\varphi_5^4.$$

Сферические функции типа Бесселя

19. Определение:

$$SphericalBesselJ[\nu,p] = j_\nu(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}J_{\nu+0.5}(p).$$

Замены:

$$\varphi_1 = SphericalBesselJ[\nu,p],\ \varphi_2 = SphericalBesselJAux[\nu,p] =$$

$$= \frac{\partial SphericalBesselJ[\nu,p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (\nu(\nu+1) - p^2)\varphi_1\varphi_3^2 - 2\varphi_2\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

20. Определение:

$$SphericalBesselY[\nu,p] = y_\nu(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}Y_{\nu+0.5}(p).$$

Замены:

$$\varphi_1 = SphericalBesselY[\nu,p],\ \varphi_2 = SphericalBesselYAux[\nu,p] =$$

$$= \frac{\partial SphericalBesselY[\nu,p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p],$$

где $SphericalBesselYAux[\nu,p] = \frac{\partial SphericalBesselY[\nu,p]}{\partial p}$.
Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (\nu(\nu+1) - p^2)\varphi_1\varphi_3^2 - 2\varphi_2\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

5.3 Категория 3: Функция ошибок, интегралы Френеля и интегральная показательная функция

Вероятностные интегралы и инверсии

1. Определение:

$$Erf[p] = erf(p) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Замены:

$$\varphi_1 = Erf[p],\ \varphi_2 = ErfAux[p] = \frac{\partial Erf[p]}{\partial p}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -2p\varphi_2.$$

2. Определение:

$$Erfc[p] = erfc(p) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Замены:

$$\varphi_1 = Erfc[p],\ \varphi_2 = ErfcAux[p] = \frac{\partial Erfc[p]}{\partial p}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -2p\varphi_2.$$

3. Определение:

$$Erfi[p] = erfi(p) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Замены:

$$\varphi_1 = Erfi[p],\ \varphi_2 = ErfiAux[p] = \frac{\partial Erfi[p]}{\partial p}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2.$$

4. Определение:

$$InverseErf[p] = erf^{-1}(p).$$

Замены:

$$\varphi_1 = InverseErf[p],\ \varphi_2 = InverseErfAux[p] = \frac{\partial InverseErf[p]}{\partial p}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_1\varphi_2^2.$$

5. Определение:

$$InverseErfc[p] = erfc^{-1}(p).$$

Замены:

$$\varphi_1 = InverseErfc[p],\ \varphi_2 = InverseErfcAux[p] = \frac{\partial InverseErfc[p]}{\partial p}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_1\varphi_2^2.$$

Интегралы Френеля

6. Определение:

$$FrensnelS[p] = S(p) = \int\limits_0^p \sin(\frac{\pi t^2}{2})dt.$$

Замены:

$$\varphi_1 = FrensnelS[p],\ \varphi_2 = FrensnelSAux1[p] = \frac{\partial FrensnelS[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = FrensnelSAux2[p] = \frac{\partial FrensnelSAux1[p]}{\partial p},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_3\varphi_4 - \pi^2 p^2\varphi_2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

7. Определение:

$$FrensnelC[p] = S(p) = \int\limits_0^p \cos(\frac{\pi t^2}{2})dt.$$

Замены:

$$\varphi_1 = FrensnelC[p],\ \varphi_2 = FrensnelCAux1[p] = \frac{\partial FrensnelC[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = FrensnelCAux2[p] = \frac{\partial FrensnelCAux1[p]}{\partial p},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_3\varphi_4 - \pi^2 p^2 \varphi_2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

Интегральная показательная функция

8. Определение: $ExpIntegralE[\nu, p] = E_\nu(p)$.

Замены:

$$\varphi_1 = ExpIntegralE[p],\ \varphi_2 = ExpIntegralEAux[p] = \frac{\partial ExpIntegralE[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (\nu - 1)\varphi_1\varphi_3 - \varphi_2\varphi_3(p - \nu + 2),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

9. Определение: $ExpIntegralEi[p] = E_i(p)$.

Замены:

$$\varphi_1 = ExpIntegralEi[p],\ \varphi_2 = ExpIntegralEiAux1[p] = \frac{\partial ExpIntegralEi[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = ExpIntegralEiAux2[p] = \frac{\partial ExpIntegralEiAux1[\nu, p]}{\partial p},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (\nu - 1)\varphi_1\varphi_3 - \varphi_2\varphi_3(p - \nu + 2),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

10. Определение: $LogIntegral[p] = li(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = LogIntegral[p],\ \varphi_2 = LogIntegralAux[p] = \frac{\partial LogIntegral[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -\varphi_2^2\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

11. Определение: $SinIntegral[p] = Si(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = SinIntegral[p],\ \varphi_2 = SinIntegralAux1[p] = \frac{\partial SinIntegral[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = SinIntegralAux2[p] = \frac{\partial SinIntegralAux1[p]}{\partial p},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -2\varphi_3\varphi_4 - \varphi_2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

12. Определение: $CosIntegral[p] = Ci(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = CosIntegral[p],\ \varphi_2 = CosIntegralAux1[p] = \frac{\partial CosIntegral[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = CosIntegralAux2[p] = \frac{\partial CosIntegralAux1[p]}{\partial p},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -2\varphi_3\varphi_4 - \varphi_2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

13. Определение: $SinhIntegral[p] = Shi(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = SinhIntegral[p],\ \varphi_2 = SinhIntegralAux1[p] = \frac{\partial SinhIntegral[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = SinhIntegralAux2[p] = \frac{\partial SinhIntegralAux1[p]}{\partial p},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -2\varphi_3\varphi_4 + \varphi_2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

14. Определение: $CoshIntegral[p] = Chi(p)$.

Замены:

$$\varphi_1 = CoshIntegral[p],\ \varphi_2 = CoshIntegralAux1[p] = \frac{\partial CoshIntegral[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = CoshIntegralAux2[p] = \frac{\partial CoshIntegralAux1[p]}{\partial p},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -2\varphi_3\varphi_4 + \varphi_2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

5.4 Категория 4: Неполные гамма и бета-функции

Гамма-функции и инверсии

1. Определение: $Gamma[a, p] = \Gamma(a, p)$.

Замены:

$$\varphi_1 = Gamma[a, p],\ \varphi_2 = GammaAux[a, p] = \frac{\partial Gamma[a,p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_2\varphi_3(p + a - 1),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

2. Определение: $Gamma[a, p_1, p_2] = \Gamma(a, p_1, p_2)$.

Замены:

$$\varphi_1 = Gamma[a, p_1, p_2],\ \varphi_2 = GammaAux1[a, p_1, p_2] = \frac{\partial Gamma[a, p_1, p_2]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = GammaAux2[a, p_1, p_2] = \frac{\partial GammaAux1[a, p_1, p_2]}{\partial p},\ \varphi_4 = Inv[p_1],\ \varphi_5 = Inv[p_2].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_1} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_1}{dp_2} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_2}{dp_1} = \varphi_2\varphi_4(a - p_1 - 1),\ \frac{d\varphi_2}{dp_2} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_3}{dp_2} = \varphi_3\varphi_5(a - p_2 - 1),\ \frac{d\varphi_4}{dp_1} = -\varphi_4^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_2} = -\varphi_5^2.$$

Бета-функции

3. Определение: $Beta[p,a,b] = B_p(a,b)$.
Замены:

$$\varphi_1 = Beta[p,a,b],\ \varphi_2 = BetaAux[p,a,b] = \frac{\partial Beta[p,a,b]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = Inv[p],\ \varphi_4 = (1-p)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_2\varphi_3\varphi_4(a-1-p(a+b-2)),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp_2} = \varphi_4^2.$$

4. Определение: $Beta[p_1,p_2,a,b] = B_{(p_1,p_2)}(a,b)$.
Замены:

$$\varphi_1 = Beta[p_1,p_2,a,b],\ \varphi_2 = BetaAux1[p_1,p_2,a,b] = \frac{\partial Beta[p_1,p_2,a,b]}{\partial p_1},$$

$$\varphi_3 = BetaAux2[p_1,p_2,a,b] = \frac{\partial Beta[p_1,p_2,a,b]}{\partial p_2},\ \varphi_4 = Inv[p_1],$$

$$\varphi_5 = Inv[p_2],\ \varphi_6 = (1-p_1)^{-1},\ \varphi_7 = (1-p_2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_1} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_1}{dp_2} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_2}{dp_1} = \varphi_2\varphi_4\varphi_6(a-1-p_1(a+b-2)),\ \frac{d\varphi_2}{dp_2} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_3}{dp_2} = \varphi_3\varphi_5\varphi_7(a-1-p_2(a+b-2)),\ \frac{d\varphi_4}{dp_1} = -\varphi_4^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp_2} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_5}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_2} = -\varphi_5^2,\ \frac{d\varphi_6}{dp_1} = \varphi_6^2,\ \frac{d\varphi_6}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_2} = -\varphi_7^2.$$

5.5 Категория 5: Гипергеометрические функции

Функции Эрмита, Параболического Цилиндра и Лагерра

1. Определение: $HermiteH[\nu,p] = H_\nu(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = HermiteH[\nu,p],\ \varphi_2 = HermiteHAux[\nu,p] = \frac{\partial HermiteH[\nu,p]}{\partial p}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2 - 2\nu\varphi_1.$$

2. Определение: $ParabolicCylinderD[\nu, p] = D_\nu(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = ParabolicCylinderD[\nu, p],\ \varphi_2 = ParabolicCylinderDAux[\nu, p] =$$
$$= \frac{\partial ParabolicCylinderD[\nu, p]}{\partial p}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_1(0.25p^2 - 0.5 - \nu).$$

3. Определение: $LaguerreL[\nu, p] = L_\nu(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = LaguerreL[\nu, p],\ \varphi_2 = LaguerreLAux[\nu, p] =$$
$$= \frac{\partial LaguerreL[\nu, p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-1)\varphi_2\varphi_3 + \nu\varphi_1\varphi_4,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

4. Определение: $LaguerreL[\nu, \lambda, p] = L_\nu^\lambda(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = LaguerreL[\nu, \lambda, p],\ \varphi_2 = LaguerreLAux[\nu, \lambda, p] =$$
$$= \frac{\partial LaguerreL[\nu, \lambda, p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p - \lambda - 1)\varphi_2\varphi_3 + \nu\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

Функции Чебышева и Фибоначчи

5. Определение: $ChebyshevT[\nu, p] = T_\nu(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = ChebyshevT[\nu, p],\ \varphi_2 = ChebyshevTAux[\nu, p] = \frac{\partial ChebyshevT[\nu, p]}{\partial p},$$

$$phi_3 = HGAux1[p] = (1 - p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = p\varphi_2\varphi_3 - \nu^2\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

6. Определение: $ChebyshevU[\nu, p] = U_\nu(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = ChebyshevU[\nu, p],\ \varphi_2 = ChebyshevUAux[\nu, p] = \frac{\partial ChebyshevU[\nu, p]}{\partial p},$$

$$phi_3 = HGAux1[p] = (1 - p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 3p\varphi_2\varphi_3 - \nu(\nu + 2)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

7. Определение: $Fibonacci[\nu, p] = F_\nu(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = Fibonacci[\nu, p],\ \varphi_2 = FibonacciAux[\nu, p] = \frac{\partial Fibonacci[\nu, p]}{\partial p},$$

$$phi_3 = HGAux2[p] = (4 + p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (\nu^2 - 1)\varphi_1\varphi_3 - 3p\varphi_2\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

Функции Лежандра

8. Определение: $LegendreP[\nu, p] = P_\nu(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = LegendreP[\nu, p],\ \varphi_2 = LegendrePAux[\nu, p] = \frac{\partial LegendreP[\nu, p]}{\partial p},$$

$$phi_3 = HGAux1[p] = (1 - p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - \nu(\nu + 1)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

9. Определение: $LegendreP[\nu, \mu, 2, p] = P_\nu^\mu(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = LegendreP[\nu, \mu, 2, p],\ \ \varphi_2 = LegendrePAux[\nu, \mu, 2, p] =$$

$$= \frac{\partial LegendreP[\nu, \mu, 2, p]}{\partial p},\ \ \varphi_3 = HGAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - (\nu(\nu+1)\varphi_3 - \mu^2\varphi_3^2)\varphi_1,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

10. Определение: $LegendreP[\nu, \mu, 3, p] = P_\nu^\mu(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = LegendreP[\nu, \mu, 3, p],\ \ \varphi_2 = LegendrePAux[\nu, \mu, 3, p] =$$

$$\frac{\partial LegendreP[\nu, \mu, 3, p]}{\partial p},\ \ \varphi_3 = HGAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - (\nu(\nu+1)\varphi_3 - \mu^2\varphi_3^2)\varphi_1,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

11. Определение: $LegendreQ[\nu, p] = Q_\nu(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = LegendreQ[\nu, p],\ \ \varphi_2 = LegendreQAux[\nu, p] = \frac{\partial LegendreQ[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = HGAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - \nu(\nu+1)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

12. Определение: $LegendreQ[\nu, \mu, 2, p] = Q_\nu^\mu(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = LegendreQ[\nu, \mu, 2, p],\ \ \varphi_2 = LegendreQAux[\nu, \mu, 2, p] =$$

$$= \frac{\partial LegendreQ[\nu, \mu, 2, p]}{\partial p},\ \ \varphi_3 = HGAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - (\nu(\nu+1)\varphi_3 - \mu^2\varphi_3^2)\varphi_1,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

13. Определение: $LegendreQ[\nu,\mu,3,p] = Q_\nu^\mu(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = LegendreQ[\nu,\mu,3,p],\ \varphi_2 = LegendreQAux[\nu,\mu,3,p] =$$
$$= \frac{\partial LegendreQ[\nu,\mu,3,p]}{\partial p},\ \varphi_3 = HGAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - (\nu(\nu+1)\varphi_3 - \mu^2\varphi_3^2)\varphi_1,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

Функции Гегенбауэра и Якоби

14. Определение: $GegenbauerC[\nu,p] = C_\nu^{(0)}(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = GegenbauerC[\nu,p],\ \varphi_2 = GegenbauerCAux[\nu,p] = \frac{\partial GegenbauerC[\nu,p]}{\partial p},$$
$$phi_3 = HGAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = p\varphi_2\varphi_3 - \nu^2\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

15. Определение: $GegenbauerC[\nu,\lambda,p] = C_\nu^{(1)}(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = GegenbauerC[\nu,\lambda,p],\ \varphi_2 = GegenbauerCAux[\nu,\lambda,p] =$$
$$= \frac{\partial GegenbauerC[\nu,\lambda,p]}{\partial p},\ \varphi_3 = HGAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = p(2\lambda+1)\varphi_2\varphi_3 - \nu(\nu+2\lambda)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

16. Определение: $JacobiP[\nu,a,b,p] = P_\nu^{(a,b)}(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = JacobiP[\nu,a,b,p],\ \varphi_2 = JacobiPAux[\nu,a,b,p] = \frac{\partial JacobiP[\nu,a,b,p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = HGAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = ((a+b+2)p-b+a)\varphi_2\varphi_3 - \nu(\nu+2\lambda)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

Конфлюэнтные гипергеометрические функции

17. Определение: $Hypergeometric1F1[a,b,p] = {}_1F_1(a,b,p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = Hypergeometric1F1[a,b,p],\ \varphi_2 = Hypergeometric1F1Aux[a,b,p] =$$

$$= \frac{\partial Hypergeometric1F1[a,b,p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-b)\varphi_2\varphi_3 + a\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

18. Определение:

$$Hypergeometric1F1Regularized[a,b,p] = {}_1\tilde{F}_1(a,b,p).$$

Замены:

$$\varphi_1 = Hypergeometric1F1Regularized[a,b,p],$$

$$\varphi_2 = Hypergeometric1F1RegularizedAux[a,b,p] =$$

$$= \frac{\partial Hypergeometric1F1Regularized[a,b,p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-b)\varphi_2\varphi_3 + a\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

19. Определение: $HypergeometricU[a,b,p] = U(a,b,p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = HypergeometricU[a,b,p],\ \varphi_2 = HypergeometricUAux[a,b,p] =$$

$$= \frac{\partial HypergeometricU[a,b,p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-b)\varphi_2\varphi_3 + a\varphi_1\varphi_3, \ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

20. Определение: $WhittakerM[\nu, \mu, p] = M_{\nu,\mu}(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = WhittakerM[\nu, \mu, p], \ \varphi_2 = WhittakerMAux[\nu, \mu, p] =$$

$$= \frac{\partial WhittakerM[\nu, \mu, p]}{\partial p}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p^2 - 4\nu p + 4\mu^2 - 1)\frac{\varphi_1}{4p^2}.$$

21. Определение: $WhittakerW[\nu, \mu, p] = W_{\nu,\mu}(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = WhittakerW[\nu, \mu, p], \ \varphi_2 = WhittakerWAux[\nu, \mu, p] =$$

$$= \frac{\partial WhittakerW[\nu, \mu, p]}{\partial p}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p^2 - 4\nu p + 4\mu^2 - 1)\frac{\varphi_1}{4p^2}.$$

Гипергеометрические функции

22. Определение: $Hypergeometric[a, b; c; p] = F(a, b; c; p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = Hypergeometric[a, b; c; p], \ \varphi_2 = HypergeometricAux[a, b; c; p] =$$

$$= \frac{\partial Hypergeometric[a, b; c; p]}{\partial p}, \ \varphi_3 = HGAux3[p] = (1-p)^{-1}, \ \varphi_4 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = ab\varphi_1\varphi_3\varphi_4 - (c(a+b+1)p)\varphi_2\varphi_3\varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_3^2, \ \frac{d\varphi_4}{dp} = \varphi_4^2.$$

23. Определение: $HypergeometricPFQ[\{\},\{\},p] = {}_0F_0(;;p)$.
Замены: $\varphi_1 = HypergeometricPFQ[\{\},\{\},p]$.
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = \varphi$.
24. Определение: $Hypergeometric0F1[b,p] = {}_0F_1(;b;p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = Hypergeometric0F1[b,p],\ \varphi_2 = Hypergeometric0F1Aux[b,p] =$$

$$= \frac{\partial Hypergeometric0F1[b,p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_1\varphi_3 - b\varphi_2\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

25. Определение:

$$Hypergeometric0F1Regularized[b,p] = {}_0\tilde{F}_1(;b;p).$$

Замены:

$$\varphi_1 = Hypergeometric0F1Regularized[b,p],$$

$$\varphi_2 = Hypergeometric0F1RegularizedAux[b,p] =$$

$$= \frac{\partial Hypergeometric0F1Regularized[b,p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_1\varphi_3 - b\varphi_2\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

26. Определение: $HypergeometricPFQ[\{a\},\{\},p] = {}_1F_0(;;p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = HypergeometricPFQ[\{a\},\{\},p],\ phi_2 = HGAux3[p] = (1-p)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = a\varphi_1\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_2^2.$$

27. Определение:

$$HypergeometricPFQ[\{a_1\},\{b_1,b_2\},p] = {}_1F_2(a_1;b_1,b_2;p).$$

Замены:

$$\varphi_1 = HypergeometricPFQ[\{a_1\}, \{b_1, b_2\}, p],$$

$$\varphi_2 = HypergeometricPFQAux1[\{a_1\}, \{b_1, b_2\}, p] =$$
$$= \frac{\partial HypergeometricPFQ[\{a_1\}, \{b_1, b_2\}, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = HypergeometricPFQAux2[\{a_1\}, \{b_1, b_2\}, p] =$$
$$= \frac{\partial HypergeometricPFQAux1[\{a_1\}, \{b_1, b_2\}, p]}{\partial p}, \ \varphi_4 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = a_1\varphi_1\varphi_4^2 - (b_1b_2 - p)\varphi_2\varphi_4^2 - p(b_1 + b_2 + 1)\varphi_3\varphi_4^2, \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

28. Определение:

$$HypergeometricPFQ[\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, p] = {}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; p).$$

Замены:

$$\varphi_1 = HypergeometricPFQ[\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, p],$$

$$\varphi_2 = HypergeometricPFQAux1[\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, p] =$$
$$= \frac{\partial HypergeometricPFQ[\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = HypergeometricPFQAux2[\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, p] =$$
$$= \frac{\partial HypergeometricPFQAux1[\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, p]}{\partial p}, \ \varphi_4 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = a_1a_2\varphi_1\varphi_4^2 - (b_1b_2 - p(a_1 + a_2 + 1))\varphi_2\varphi_4^2 - p(1 - p + b_1 + b_2)\varphi_3\varphi_4^2, \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

29. Определение:

$$HypergeometricPFQ[\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2, b_3\}, p] = {}_2F_3(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; p).$$

Замены:

$$\varphi_1 = HypergeometricPFQ[\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2, b_3\}, p],$$

$$\varphi_2 = HypergeometricPFQAux1[\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2, b_3\}, p] =$$
$$= \frac{\partial HypergeometricPFQ[\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2, b_3\}, p]}{\partial p},$$
$$\varphi_3 = HypergeometricPFQAux2[\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2, b_3\}, p] =$$
$$= \frac{\partial HypergeometricPFQAux1[\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2, b_3\}, p]}{\partial p}, \ \varphi_4 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3, \ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dp} = a_1 a_2 \varphi_1 \varphi_5^2 - (b_1 b_2 b_3 - p(a_1 + a_2 + 1))\varphi_2 \varphi_5^3 -$$

$$-p(1-p+b_1+b_1b_2+b_2+b_1b_3+b_2b_3+b_3)\varphi_3\varphi_5^3-(b_1+b_2+b_3+3)p^2\varphi_4\varphi_5^2, \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

Вспомогательные гипергеометрические функции

30. Определение: $HGAux1[p] = (1 - p^2)^{-1}$
Замены: $\varphi = HGAux1[p]$.
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = 2p\varphi^3$.
31. Определение: $HGAux2[p] = (4 + p^2)^{-1}$
Замены: $\varphi = HGAux2[p]$.
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = -2p\varphi^2$.
32. Определение: $HGAux3[p] = (1 - p)^{-1}$
Замены: $\varphi = HGAux3[p]$.
Дифференциальное уравнение: $\frac{d\varphi}{dp} = \varphi^2$.

5.6 Категория 6: Полиномы

Классические ортогональные полиномы

1. Определение: $HermiteH[n, p] = H_n(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = HermiteH[n, p], \ \varphi_2 = HermiteHAux[n, p] = \frac{\partial HermiteH[n, p]}{\partial p}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2 - 2p\varphi_1.$$

2. Определение: $LaguerreL[n, p] = L_n(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = LaguerreL[n, p], \ \varphi_2 = LaguerreLAux[n, p] = \frac{\partial LaguerreL[n, p]}{\partial p}, \ \varphi_3 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-1)\varphi_2\varphi_3 - n\varphi_1\varphi_3, \ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

3. Определение: $LaguerreL[n, \lambda, p] = L_n^{\lambda}(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = LaguerreL[n, \lambda, p], \ \varphi_2 = LaguerreLAux[n, \lambda, p] =$$

$$= \frac{\partial LaguerreL[n, \lambda, p]}{\partial p}, \ \varphi_3 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-1-\lambda)\varphi_2\varphi_3 - n\varphi_1\varphi_3, \ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

4. Определение: $LegendreP[n, p] = L_n(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = LegendreP[n, p], \ \varphi_2 = LegendrePAux[n, p] =$$

$$= \frac{\partial LegendreP[n, p]}{\partial p}, \ \varphi_3 = PFAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - n(n+1)\varphi_1\varphi_3, \ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2.$$

5. Определение: $ChebyshevT[n, p] = T_n(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = ChebyshevT[n, p], \ \varphi_2 = ChebyshevTAux[n, p] = \frac{\partial ChebyshevT[n, p]}{\partial p},$$

$$phi_3 = PFAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = p\varphi_2\varphi_3 - n^2\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

6. Определение: $ChebyshevU[n,p] = U_n(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = ChebyshevU[n,p],\ \varphi_2 = ChebyshevUAux[n,p] = \frac{\partial ChebyshevU[n,p]}{\partial p},$$

$$phi_3 = PFAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 3p\varphi_2\varphi_3 - n(n+2)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

7. Определение: $GegenbauerC[n,\lambda,p] = C_n^{(1)}(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = GegenbauerC[n,\lambda,p],\ \varphi_2 = GegenbauerCAux[n,\lambda,p] =$$

$$= \frac{\partial GegenbauerC[n,\lambda,p]}{\partial p},\ \varphi_3 = PFAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = p(2\lambda+1)\varphi_2\varphi_3 - n(n+2\lambda)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

8. Определение: $JacobiP[n,a,b,p] = P_n^{(a,b)}(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = JacobiP[n,a,b,p],\ \varphi_2 = JacobiPAux[n,a,b,p] = \frac{\partial JacobiP[n,a,b,p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = PFAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p(a+b+2)+a-b)\varphi_2\varphi_3 - n(n+2\lambda)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

Полиномы Лежандра и сферические гармоники

9. Определение: $LegendreP[n, \mu, 2, p] = P_n^{\mu}(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = LegendreP[n, \mu, 2, p],\ \ \varphi_2 = LegendrePAux[n, \mu, 2, p] =$$
$$= \frac{\partial LegendreP[n, \mu, 2, p]}{\partial p},\ \ \varphi_3 = PFAux1[p] = (1 - p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - (n(n+1)\varphi_3 - \mu^2\varphi_3^2)\varphi_1,\ \ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

5.7 Категория 7: Матье и сфероидальные функции

Функции Матье

1. Определение: $MathieuC[a, q, p] = Ce(a, q, p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = MathieuC[a, q, p],\ \ \varphi_2 = MathieuCAux[a, q, p] = \frac{\partial MathieuC[a, q, p]}{\partial p},$$
$$\varphi_3 = Cos[p],\ \ \varphi_4 = Sin[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_1(2q(\varphi_3^2 - \varphi_4^2) - a),\ \ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_4,\ \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_3.$$

2. Определение: $MathieuS[a, q, p] = Se(a, q, p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = MathieuS[a, q, p],\ \ \varphi_2 = MathieuSAux[a, q, p] = \frac{\partial MathieuS[a, q, p]}{\partial p},$$
$$\varphi_3 = Cos[p],\ \ \varphi_4 = Sin[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_1(2q(\varphi_3^2 - \varphi_4^2) - a),\ \ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_4,\ \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_3.$$

3. Определение: $MathieuCPrime[a,q,p] = Ce_z(a,q,p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = MathieuCPrime[a,q,p] = \frac{\partial MathieuC[a,q,p]}{\partial p},$$

$$\varphi_2 = MathieuCPrimeAux[a,q,p] = \frac{\partial MathieuCPrime[a,q,p]}{\partial p},$$

$\varphi_3 = MASAux1[a,q,-p] = (a-2q(\cos^2(p)-\sin^2(p)))^{-1},\ \varphi_4 = Cos[p],\ \varphi_5 = Sin[p].$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 8q\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5 - (a - 2q(\varphi_4^2 - \varphi_5^2))\varphi_1,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = 4q(\varphi_4 - \varphi_5)\varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_5,\ \frac{d\varphi_5}{dp} = \varphi_4.$$

4. Определение: $MathieuSPrime[a,q,p] = Se_z(a,q,p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = MathieuSPrime[a,q,p] = \frac{\partial MathieuS[a,q,p]}{\partial p},$$

$$\varphi_2 = MathieuSPrimeAux[a,q,p] = \frac{\partial MathieuSPrime[a,q,p]}{\partial p},$$

$\varphi_3 = MASAux1[a,q,-p] = (a-2q(\cos^2(p)-\sin^2(p)))^{-1},\ \varphi_4 = Cos[p],\ \varphi_5 = Sin[p].$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 8q\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5 - (a - 2q(\varphi_4^2 - \varphi_5^2))\varphi_1,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = 4q(\varphi_4 - \varphi_5)\varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_5,\ \frac{d\varphi_5}{dp} = \varphi_4.$$

Сфероидальные функции

5. Определение:

$$SpheroidalPS[\lambda,\nu,\mu,\gamma,p] = PS_{\nu,\mu}(\gamma,p).$$

Параметр λ зависит от параметров $\nu,\mu,\gamma : \lambda = \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)$ - собственное значение сфероида.
Замены:

$$\varphi_1 = SpheroidalPS[\lambda,\nu,\mu,\gamma,p],\ \varphi_2 = SpheroidalPSAux[\lambda,\nu,\mu,\gamma,p] =$$

$$= \frac{\partial SpheroidalPS[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},\ \varphi_3 = MASAux2[a, q, -p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - ((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma) - \mu^2\varphi_3)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2.$$

6. Определение:

$$SpheroidalQS[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = QS_{\nu,\mu}(\gamma, p).$$

Параметр λ зависит от параметров $\nu, \mu, \gamma : \lambda = \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)$ - собственное значение сфероида.

Замены:

$$\varphi_1 = SpheroidalQS[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p],\ \varphi_2 = SpheroidalQSAux[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] =$$

$$= \frac{\partial SpheroidalQS[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},\ \varphi_3 = MASAux2[a, q, -p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - ((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma) - \mu^2\varphi_3)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2.$$

7. Определение:

$$SpheroidalS1[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = S^{(1)}_{\nu,\mu}(\gamma, p).$$

Параметр λ зависит от параметров $\nu, \mu, \gamma : \lambda = \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)$ - собственное значение сфероида.

Замены:

$$\varphi_1 = SpheroidalS1[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p],\ \varphi_2 = SpheroidalS1Aux[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] =$$

$$= \frac{\partial SpheroidalS1[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},\ \varphi_3 = MASAux2[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - ((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma) - \mu^2\varphi_3)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2.$$

8. Определение:

$$SpheroidalS2[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = S^{(1)}_{\nu,\mu}(\gamma, p).$$

Параметр λ зависит от параметров $\nu, \mu, \gamma : \lambda = \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)$ - собственное значение сфероида.
Замены:

$$\varphi_1 = SpheroidalS2[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p], \ \varphi_2 = SpheroidalS2Aux[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] =$$

$$= \frac{\partial SpheroidalS2[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p}, \ \varphi_3 = MASAux2[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - ((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma) - \mu^2\varphi_3)\varphi_1\varphi_3, \ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2.$$

9. Определение:

$$SpheroidalPSPrime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = PS'_{\nu,\mu}(\gamma, p).$$

Параметр λ зависит от параметров $\nu, \mu, \gamma : \lambda = \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)$ - собственное значение сфероида.
Замены:

$$\varphi_1 = SpheroidalPSPrime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = \frac{\partial SpheroidalPS[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_2 = SpheroidalPSPrimeAux[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = \frac{\partial SpheroidalPSPrime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = MASAux2[p] = (1-p^2)^{-1},$$

$$\varphi_4 = MASAux3[p] = (\mu^2 - (1-p^2)((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)))^{-1},$$

$$\varphi_5 = MASAux4[p] = (\mu^2 - (1-p^2)\gamma^2 - (1-p^2)\lambda_{\nu,\mu}(\gamma))^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p(((1-p^2)^2\gamma^2 + \mu^2)\varphi_4 + 2)\varphi_2\varphi_3 -$$

$$-(4p^2((1-p^2)^2\gamma^2 + \mu^2)\varphi_5 + ((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma) - \mu^2\varphi_3 - 2)\varphi_1\varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2, \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -2p(2\gamma^2(1-p^2) + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma))\varphi_3^2,$$

$$\frac{d\varphi_5}{dp} = -2p(2\gamma^2(1-p^2) + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma))\varphi_3^2.$$

10. Определение:

$$SpheroidalQSPrime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = QS'_{\nu,\mu}(\gamma, p).$$

Параметр λ зависит от параметров $\nu, \mu, \gamma : \lambda = \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)$ - собственное значение сфероида.
Замены:

$$\varphi_1 = SpheroidalQSPrime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = \frac{\partial SpheroidalQS[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_2 = SpheroidalQSPrimeAux[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = \frac{\partial SpheroidalQSPrime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = MASAux2[p] = (1 - p^2)^{-1},$$

$$\varphi_4 = MASAux3[p] = (\mu^2 - (1 - p^2)((1 - p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)))^{-1},$$

$$\varphi_5 = MASAux4[p] = (\mu^2 - (1 - p^2)\gamma^2 - (1 - p^2)\lambda_{\nu,\mu}(\gamma))^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p(((1 - p^2)^2\gamma^2 + \mu^2)\varphi_4 + 2)\varphi_2\varphi_3 -$$

$$-(4p^2((1 - p^2)^2\gamma^2 + \mu^2)\varphi_5 + ((1 - p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma) - \mu^2\varphi_3 - 2)\varphi_1\varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -2p(2\gamma^2(1 - p^2) + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma))\varphi_3^2,$$

$$\frac{d\varphi_5}{dp} = -2p(2\gamma^2(1 - p^2) + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma))\varphi_3^2.$$

11. Определение:

$$SpheroidalS1Prime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = S^{(1)\prime}_{\nu,\mu}(\gamma, p).$$

Параметр λ зависит от параметров $\nu, \mu, \gamma : \lambda = \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)$ - собственное значение сфероида.
Замены:

$$\varphi_1 = SpheroidalS1Prime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = \frac{\partial SpheroidalS1[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_2 = SpheroidalS1PrimeAux[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = \frac{\partial SpheroidalS1Prime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = MASAux2[p] = (1 - p^2)^{-1},$$

$$\varphi_4 = MASAux3[p] = (\mu^2 - (1 - p^2)((1 - p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)))^{-1},$$

$$\varphi_5 = MASAux4[p] = (\mu^2 - (1 - p^2)\gamma^2 - (1 - p^2)\lambda_{\nu,\mu}(\gamma))^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p(((1-p^2)^2\gamma^2 + \mu^2)\varphi_4 + 2)\varphi_2\varphi_3-$$

$$-(4p^2((1-p^2)^2\gamma^2 + \mu^2)\varphi_5 + ((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma) - \mu^2\varphi_3 - 2)\varphi_1\varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -2p(2\gamma^2(1-p^2) + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma))\varphi_3^2,$$

$$\frac{d\varphi_5}{dp} = -2p(2\gamma^2(1-p^2) + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma))\varphi_3^2.$$

12. Определение:

$$SpheroidalS2Prime[\lambda,\nu,\mu,\gamma,p] = S^{(2)'}_{\nu,\mu}(\gamma,p).$$

Параметр λ зависит от параметров $\nu,\mu,\gamma : \lambda = \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)$ - собственное значение сфероида.

Замены:

$$\varphi_1 = SpheroidalS2Prime[\lambda,\nu,\mu,\gamma,p] = \frac{\partial SpheroidalS2[\lambda,\nu,\mu,\gamma,p]}{\partial p},$$

$$\varphi_2 = SpheroidalS2PrimeAux[\lambda,\nu,\mu,\gamma,p] = \frac{\partial SpheroidalS2Prime[\lambda,\nu,\mu,\gamma,p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = MASAux2[p] = (1-p^2)^{-1},$$

$$\varphi_4 = MASAux3[p] = (\mu^2 - (1-p^2)((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)))^{-1},$$

$$\varphi_5 = MASAux4[p] = (\mu^2 - (1-p^2)\gamma^2 - (1-p^2)\lambda_{\nu,\mu}(\gamma))^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p(((1-p^2)^2\gamma^2 + \mu^2)\varphi_4 + 2)\varphi_2\varphi_3-$$

$$-(4p^2((1-p^2)^2\gamma^2 + \mu^2)\varphi_5 + ((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma) - \mu^2\varphi_3 - 2)\varphi_1\varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -2p(2\gamma^2(1-p^2) + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma))\varphi_3^2,$$

$$\frac{d\varphi_5}{dp} = -2p(2\gamma^2(1-p^2) + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma))\varphi_3^2.$$

5.8 Категория 8: Эллиптические интегралы

Полные эллиптические интегралы

1. Определение: $EllipticE[p] = E(p) = E(\frac{\pi}{2}p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = EllipticE[p],\ \varphi_2 = EllipticEAux[p] = \frac{\partial EllipticE[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = EIAux1[p] = (1-p)^{-1},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -\varphi_2\varphi_4 - 0.25\varphi_1\varphi_3\varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

2. Определение: $EllipticK[p] = K(p) = F(\frac{\pi}{2}p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = EllipticK[p],\ \varphi_2 = EllipticKAux[p] = \frac{\partial EllipticK[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = EIAux1[p] = (1-p)^{-1},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 0.25\varphi_1\varphi_3\varphi_4 - (1-2p)\varphi_2\varphi_3\varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

3. Определение:

$$EllipticPi[p_1, p_2] = \Pi(p_1|p_2) = \Pi(p_1; \frac{\pi}{2}p_2).$$

Замены:

$$\varphi_1 = EllipticPi[p_1, p_2],\ \varphi_2 = EllipticE[p_1],\ \varphi_3 = EllipticE[p_2],$$

$$\varphi_4 = EIAux2[p_2] = (1-p_2)^{-1},\ \varphi_5 = Inv[p_1],\ \varphi_6 = Inv[p_2],$$

$$\varphi_7 = EIAux3[p_1, p_2] = (p_2 - p_1)^{-1},\ \varphi_8 = EIAux4[p_1] = (p_1 - 1)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_1} = 0.5\varphi_7\varphi_8(\varphi_2 + (p_2 - p_1)\varphi_3\varphi_5 + (p_1^2 - p_2)\varphi_1\varphi_5),\ \frac{d\varphi_1}{dp_2} = 0.5\varphi_7(\varphi_2\varphi_4 - \varphi_1),$$

$$\frac{d\varphi_2}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_2}{dp_2} = 0.5(\varphi_2 - \varphi_3)\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp_1} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp_2} = 0.5(\varphi_2 - (1 - p_2)\varphi_3)\varphi_4\varphi_6,\ \frac{d\varphi_4}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_4}{dp_2} = \varphi_4^2,\ \frac{d\varphi_5}{dp_1} = -\varphi_5^2,\ \frac{d\varphi_5}{dp_2} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_6}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_6}{dp_2} = -\varphi_6^2,\ \frac{d\varphi_7}{dp_1} = \varphi_7^2,\ \frac{d\varphi_7}{dp_2} = -\varphi_7^2,$$

$$\frac{d\varphi_8}{dp_1} = -\varphi_8^2,\ \frac{d\varphi_7}{dp_2} = 0.$$

Неполные эллиптические интегралы

4. Определение:

$$EllipticE[p_1, p_2] = \Pi(p_1|p_2) = \int\limits_0^{p_1} \sqrt{1 - p_2\sin^2(t)}dt.$$

Замены:

$$\varphi_1 = EllipticE[p_1, p_2],\ \varphi_2 = EllipticF[p_1],\ \varphi_3 = Inv[p_2],\ \varphi_4 = Cos[p_1],$$

$$\varphi_5 = Sin[p_1],\ \varphi_6 = ElAux5[p_1, p_2] = (1 - p_2\sin^2(p_1))^{0.5},$$

$$\varphi_7 = ElAux6[p_1, p_2] = (1 - p_2\sin^2(p_1))^{-0.5}\ \varphi_8 = EIAux7[p_2] = (1 - p_2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_1} = \varphi_6,\ \frac{d\varphi_1}{dp_2} = 0.5(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dp_1} = \varphi_7,\ \frac{d\varphi_2}{dp_2} = 0.5(\varphi_1\varphi_3\varphi_8 - \varphi_2\varphi_3 - \varphi_4\varphi_5\varphi_7\varphi_8,\ \frac{d\varphi_3}{dp_1} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp_2} = -\varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp_1} = -\varphi_5,\ \frac{d\varphi_4}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_1} = \varphi_4,\ \frac{d\varphi_5}{dp_2} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_6}{dp_1} = -p_2\varphi_4\varphi_5\varphi_7,\ \frac{d\varphi_6}{dp_2} = -0.5\varphi_5^2\varphi_7,\ \frac{d\varphi_7}{dp_1} = p_2\varphi_4\varphi_5\varphi_7^3,\ \frac{d\varphi_7}{dp_2} = 0.5\varphi_5^2\varphi_7^3,$$

$$\frac{d\varphi_8}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_7}{dp_2} = \varphi_8^2.$$

5. Определение:

$$EllipticE[p_1, p_2] = F(p_1|p_2) = \int\limits_0^{p_1} \frac{1}{\sqrt{1 - p_2 \sin^2(t)}} dt.$$

Замены:

$$\varphi_1 = EllipticF[p_1, p_2],\ \varphi_2 = EllipticE[p_1, p_2],\ \varphi_3 = Inv[p_2],\ \varphi_4 = Cos[p_1],$$

$$\varphi_5 = Sin[p_1],\ \varphi_6 = ElAux5[p_1, p_2] = (1 - p_2 \sin^2(p_1))^{0.5},$$

$$\varphi_7 = ElAux6[p_1, p_2] = (1 - p_2 \sin^2(p_1))^{-0.5}\ \varphi_8 = EIAux7[p_2] = (1 - p_2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_1} = \varphi_7,\ \frac{d\varphi_1}{dp_2} = 0.5(\varphi_2\varphi_3\varphi_8 - \varphi_1\varphi_3 - \varphi_4\varphi_5\varphi_7\varphi_8,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dp_1} = \varphi_6,\ \frac{d\varphi_2}{dp_2} = 0.5(\varphi_2 - \varphi_1)\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp_1} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp_2} = -\varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp_1} = -\varphi_5,\ \frac{d\varphi_4}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_1} = \varphi_4,\ \frac{d\varphi_5}{dp_2} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_6}{dp_1} = -p_2\varphi_4\varphi_5\varphi_7,\ \frac{d\varphi_6}{dp_2} = -0.5\varphi_5^2\varphi_7,\ \frac{d\varphi_7}{dp_1} = p_2\varphi_4\varphi_5\varphi_7^3,\ \frac{d\varphi_7}{dp_2} = 0.5\varphi_5^2\varphi_7^3,$$

$$\frac{d\varphi_8}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_7}{dp_2} = \varphi_8^2.$$

6. Определение:

$$EllipticPi[p_1, p_2, p_3] = \Pi(p_3; p_1|p_2) = \int\limits_0^{p_1} \frac{1}{(1 - p_3 \sin^2(t))\sqrt{1 - p_2 \sin^2(t)}} dt.$$

Замены:

$$\varphi_1 = EllipticPi[p_1, p_2, p_3],\ \varphi_2 = EllipticE[p_1, p_2],\ \varphi_3 = EllipticF[p_1, p_2],$$

$$\varphi_4 = Inv[p_2],\ \varphi_5 = Inv[p_3],\ \varphi_6 = Cos[p_1],\ \varphi_7 = Sin[p_1],$$

$$\varphi_8 = ElAux5[p_1, p_2] = (1 - p_2 \sin^2(p_1))^{0.5},\ \varphi_9 = ElAux6[p_1, p_2] = (1 - p_2 \sin^2(p_1))^{-0.5},$$

$$\varphi_{10} = EIAux7[p_2] = (1 - p_2)^{-1},\ \varphi_{11} = ElAux8[p_1, p_3] = (1 - p_3 \sin^2(p_1))^{-0.5},$$

$$\varphi_{12} = EIAux9[p_2, p_3] = (p_2 - p_3)^{-1},\ \varphi_{13} = ElAux10[p_3] = (p_3 - 1)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_1} = \varphi_9\varphi_{11},\ \frac{d\varphi_1}{dp_2} = 0.5\varphi_{12}(\varphi_2\varphi_1 0 - p_2\varphi_6\varphi_7\varphi_9\varphi_{10} - \varphi_1),$$

$$\frac{d\varphi_1}{dp_3} = 0.5\varphi_{12}\varphi_{13}(\varphi_2 + (p_2 - p_3)\varphi_3\varphi_5 - p_3\varphi_6\varphi_7\varphi_8\varphi_{11}),\ \frac{d\varphi_2}{dp_1} = \varphi_8,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dp_2} = 0.5(\varphi_2 - \varphi_3)\varphi_4,\ \frac{d\varphi_2}{dp_3} = 0,\ \frac{d\varphi_3}{dp_1} = \varphi_9,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp_2} = 0.5(\varphi_2\varphi_4\varphi_1 0 - \varphi_6\varphi_7\varphi_9\varphi_{10} - \varphi_3\varphi_4), frac d\varphi_3 dp_3 = 0,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_4}{dp_2} = \varphi_4^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp_3} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_3} = -\varphi_5^2,$$

$$\frac{d\varphi_6}{dp_1} = -\varphi_7,\ \frac{d\varphi_6}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_6}{dp_3} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_7}{dp_1} = \varphi_6,\ \frac{d\varphi_7}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_7}{dp_3} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_8}{dp_1} = -p_2\varphi_6\varphi_7\varphi_9,\ \frac{d\varphi_8}{dp_2} = -0.5\varphi_7^2\varphi_9,\ \frac{d\varphi_8}{dp_3} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_9}{dp_1} = 0.5p_2\varphi_6\varphi_7\varphi_9^3,\ \frac{d\varphi_9}{dp_2} = 0.5\varphi_7^2\varphi_9^3,\ \frac{d\varphi_9}{dp_3} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_{10}}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_{10}}{dp_2} = \varphi_1 0^2,\ \frac{d\varphi_{10}}{dp_3} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_{11}}{dp_1} = 2p_2\varphi_6\varphi_7\varphi_{11}^2,\ \frac{d\varphi_{11}}{dp_2} = \varphi_7^2\varphi_{11}^2,\ \frac{d\varphi_{11}}{dp_3} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_{12}}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_{12}}{dp_2} = -\varphi_{12}^2,\ \frac{d\varphi_{12}}{dp_3} = \varphi_{12}^2,$$

$$\frac{d\varphi_{13}}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_{13}}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_{13}}{dp_3} = -\varphi_{13}^2.$$

7. Определение:

$$JacobiZeta[p_1, p_2] = Z(p_1|p_2) = E(p_1|p_2) - \frac{E(p_2)}{K(p_2)}F(p_1|p_2).$$

Замены:

$$\varphi_1 = JacobiZeta[p_1, p_2],\ \varphi_2 = EllipticE[p_2],\ \varphi_3 = EllipticK[p_2],$$

$$\varphi_4 = (EllipticK[p_2])^{-1},\ \varphi_5 = Inv[p_2],\ \varphi_6 = Cos[p_1],\ \varphi_7 = Sin[p_1],$$

$$\varphi_8 = ElAux5[p_1, p_2] = (1 - p_2\sin^2(p_1))^{0.5},\ \varphi_9 = ElAux6[p_1, p_2] = (1 - p_2\sin^2(p_1))^{-0.5},$$

$$\varphi_{10} = EIAux7[p_2] = (1-p_2)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_1} = \varphi_8 - \varphi_2\varphi_4\varphi_9,\ \frac{d\varphi_1}{dp_2} = 0.5\varphi_5((1-\varphi_2\varphi_4\varphi_{10})\varphi_1 - \varphi_2\varphi_4\varphi_6\varphi_7\varphi_9\varphi_{10},$$

$$\frac{d\varphi_2}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_2}{dp_2} = 0.5(\varphi_2 - \varphi_3)\varphi_5,\ \frac{d\varphi_3}{dp_1} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp_2} = 0.5(\varphi_2 - (1-p_2)\varphi_3)\varphi_5\varphi_{10},\ \frac{d\varphi_4}{dp_1} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dp_2} = -0.5(\varphi_2 - (1-p_2)\varphi_3)\varphi_4^2\varphi_5\varphi_{10},\ \frac{d\varphi_5}{dp_1} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_5}{dp_2} = -\varphi_5^2,\ \frac{d\varphi_6}{dp_1} = -\varphi_7,\ \frac{d\varphi_6}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_7}{dp_1} = \varphi_6,$$

$$\frac{d\varphi_7}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_8}{dp_1} = -p_2\varphi_6\varphi_7\varphi_9,\ \frac{d\varphi_8}{dp_2} = -0.5\varphi_7^2\varphi_9,$$

$$\frac{d\varphi_9}{dp_1} = p_2\varphi_6\varphi_7\varphi_9^3,\ \frac{d\varphi_9}{dp_2} = 0.5p_2\varphi_7^2\varphi_9^3,\ \frac{d\varphi_{10}}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_{10}}{dp_2} = \varphi_{10}^3.$$

5.9 Категория 9: Трансценденты Пенлеве

1. Определение: $PainleveI[p] = P_I(p)$.
Функции Пенлеве являются решениями уравнений $P_I - P_{VI}$.
Замены:

$$\varphi_1 = PainleveI[p],\ \varphi_2 = PainleveIAux[p] = \frac{\partial PainleveI[p]}{\partial p}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 6\varphi_1^2 + p.$$

2. Определение: $PainleveII[p] = P_{II}(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = PainleveII[p],\ \varphi_2 = PainleveIIAux[p] = \frac{\partial PainleveII[p]}{\partial p}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2\varphi_3^2 + p\varphi + \alpha.$$

3. Определение: $PainleveIII[p] = P_{III}(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = PainleveIII[p],\ \varphi_2 = PainleveIIIAux1[p] = \frac{\partial PainleveIII[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = PainleveIIIAux2[p] = \frac{1}{PainleveIII[p]},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_2^2\varphi_3 - \varphi_2\varphi_4 + \varphi_4(\alpha\varphi_1^2 + \beta) + \gamma\varphi_1^3 + \delta\varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_2\varphi_3^2, \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

4. Определение: $PainleveIV[p] = P_{IV}(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = PainleveIV[p],\ \varphi_2 = PainleveIVAux[p] = \frac{\partial PainleveIV[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = PainleveIVAux1[p] = \frac{1}{PainleveIV[p]}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 0.5\varphi_2^2\varphi_3 + 1.5\varphi_1^3 + 4p\varphi_1^2 + 2\varphi_1(p^2 - \alpha) + \beta\varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_2\varphi_3^2.$$

5. Определение: $PainleveV[p] = P_V(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = PainleveV[p],\ \varphi_2 = PainleveVAux[p] = \frac{\partial PainleveV[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = PainleveVAux1[p] = \frac{1}{PainleveV[p]},\ \varphi_4 = PainleveVAux2[p] =$$

$$= \frac{1}{(PainleveV[p] - 1)},\ \varphi_5 = Inv[p].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 0.5\varphi_2^2\varphi_3 + 1.5\varphi_1^3 + 4p\varphi_1^2 + 2\varphi_1(p^2 - \alpha) + \beta\varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_2\varphi_3^2.$$

6. Определение: $PainleveVI[p] = P_{VI}(p)$.
Замены:

$$\varphi_1 = PainleveVI[p],\ \varphi_2 = PainleveVIAux[p] = \frac{\partial PainleveVI[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = PainleveVIAux1[p] = \frac{1}{PainleveVI[p]},\ \varphi_4 = PainleveVIAux2[p] =$$

$$= \frac{1}{(PainleveVI[p] - 1)},\ \varphi_5 = PainleveVIAux3[p] = \frac{1}{(PainleveVI[p] - 1)},$$

$$\varphi_6 = Inv[p],\ \varphi_7 = Inv[p - 1].$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 0.5\varphi_2^2(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5) - \varphi_2(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7) +$$

$$+\varphi_1\varphi_6^2\varphi_7^2(\varphi_1 - 1)(\varphi_1 - p)\Big(\alpha + p\beta\varphi_3^2 + \gamma\varphi_4^2(p - 1) + \gamma p\varphi_5^2(p - 1)\Big),$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_2\varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_2\varphi_4^2,\ \frac{d\varphi_5}{dp} = -\varphi_4^2(\varphi_2 - 1),$$

$$\frac{d\varphi_6}{dp} = -\varphi_6^2,\ \frac{d\varphi_7}{dp} = -\varphi_7^2.$$

5.10 Категория 10: Неявные функции

1. Определение: $Gilbert[p_1, p_2, p_3]$.
Функция Гильберта $\varphi_1 = Gilbert[p_1, p_2, p_3]$ определена как решения уравнение такое, что $\varphi_1(0, 0, 0) = -1$.
Замены:

$$\varphi_1 = Gilbert[p_1, p_2, p_3],\ \varphi_2 = GilbertAux[p_1, p_2, p_3] = (7\varphi_1^6 + 3p_3\varphi_1^2 + 2p_2\varphi_1 + p_1)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_j} = -\varphi_1^j \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp_j} = (42\varphi_1^5 + 6p_3\varphi_1 + 2p_2)\varphi_1^j \varphi_2^3 - j\varphi_1^{j-1}\varphi_2^2, \ j = 1, 2, 3.$$

2. Определение: $KeplerE[p_1, p_2]$, где $p_1 = e$ - эксцентриситет кеплеровской эллиптической орбиты в гравитационной задаче двух тел, $p_2 = M$ - средняя аномалия. $KeplerE[p_1, p_2] = E(e, M)$ является неявной функцией, определенной уравнением Кеплера.

Замены:

$$\varphi_1 = KeplerE[p_1, p_2], \ \varphi_2 = KeplerS[p_1, p_2] = Sin[e],$$

$$\varphi_3 = KeplerC[p_1, p_2] = Cos[e], \ \varphi_4 = KeplerAux[p_1, p_2] = (1 - e\cos E)^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_1} = \varphi_2\varphi_4, \ \frac{d\varphi_1}{dp_2} = \varphi_4, \ \frac{d\varphi_2}{dp_1} = \varphi_2\varphi_3\varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dp_2} = \varphi_3\varphi_4, \ \frac{d\varphi_3}{dp_1} = -\varphi_2^2\varphi_4, \ \frac{d\varphi_3}{dp_2} = -\varphi_2\varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dp_1} = \varphi_3\varphi_4^2 - p\varphi_2^2\varphi_4^3, \ \frac{d\varphi_4}{dp_2} = -p\varphi_2\varphi_4^3.$$

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Разработаны детали построения схем,
2. Реализованы алгоритмы построения схем для произвольного набора мономов,
3. Разработаны компьютерные программы, реализующие алгоритмы построения схем,
4. Разработаны компьютерные программы, реализующие алгоритм TSMR методов рядов Тейлора и их сравнение с программой TIDES,
5. Проведены численные эксперименты, исследована эффективность алгоритмов и программ, разработанных для численного интегрирования дифференциальных уравнений.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Бабаджанянцу Л. К. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Автор также благодарит всех, кто сделал настоящую работу возможной.

Список литературы

[1] *Абалакин В., Аксенов Е., Гребеников Е., Демин В., Рябов Ю.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике // М.: Наука, 1976.

[2] *Алесова И., Бабаджанянц Л., Потоцкая И., Саакян А.* Оптимальное управление нелинейными колебаниями спутника на эллиптической орбите // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления. 2016. С. 14 - 17.

[3] *Алесова И., Бабаджанянц Л., Потоцкая И., Саакян А.* Оптимизация пошагового интегрирования дифференциальных уравнений динамики // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления. 2016. С. 17 - 19.

[4] *Алферов Г., Бабаджанянц Л., Ковригин Д., Сенатова С.* Лабораторный практикум по механике управляемого движения. // Учебное пособие. Издательство ЛГУ. 1989.

[5] *Арушанян О., Залеткин С.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране // М.: Издательство Московского университета, 1990.

[6] *Бабаджанянц Л.* Продолжаемость и представление решений в задачах небесной механики // Труды ИТА АН СССР, Вып. 17. 1978. С. 3 – 45.

[7] *Бабаджанянц Л., Чекашкин Ю.* Аналитический метод вычисления возмущений в координатах планет // Вестник Ленингр. ун–та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. Вып. 3. 1990. С. 101 – 107.

[8] *Бабаджанянц Л.* Метод рядов Тейлора // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. № 3. 2010. С. 13 – 29.

[9] *Бабаджанянц Л.* Метод дополнительных переменных // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. № 1. 2010. С. 3 –11.

[10] *Бабаджанянц Л., Большаков А.* Реализация метода рядов Тейлора для решения обыкновенных дифференциальных уравнений // Вычислительные

методы и программирование. Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В. Ломоносова. Т. 13. 2012. С. 497 – 510.

[11] *Бабаджанянц Л., Брэгман К.* Алгоритм метода дополнительных переменных // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. № 2. 2012. С. 3 – 12.

[12] *Бабаджанянц Л., Мгоян П.* Оценка голоморфных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия АН Арм. ССР. Серия "Математика". Том XVII. №2. 1982. С. 83 – 91.

[13] *Бабаджанянц Л., Мгоян П.* Оценка голоморфных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник ЛГУ. 1984. № 7.

[14] *Банди Б.* Основы линейного программирования // Москва "Радио и Связь". 1989. С. 17 – 20.

[15] *Беллман Р.* Процессы регулирования с адаптацией // пер. с англ. Ю. П. Леонова; под ред. А. М. Летова. М.: Наука, 1964. 360 с.

[16] *Беллман Р.* Введение в теорию матриц // пер. с англ.; под ред. В. Б. Лидского. М.: Наука. 1969. 368 с.

[17] *Брумберг В.* Ряды полиномов в задаче трех тел // Бюл. Ин-та теор. астрономии АН СССР. Т. 9, №4., 1963, С. 234 – 256.

[18] *Брэгман К.* Математические модели возмущенного движения в центральных полях // Диссертация. 2014.

[19] *Гантмахер Ф.* Теория матриц // Наука. 1988.

[20] *Мерман Г.* О представлении общего решения задачи трех тел сходящимися рядами // Бюл. Ин-та теор. астрономии АН СССР. Т. 6, № 10., 1958, С. 713 – 769.

[21] *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями // Под ред. А. Андронова, М.: Гостехиздат. 1947. 392 с.

[22] *Саакян А.* Ускорение численного интегрирования уравнений динамики при помощи схем // Процессы управления и устойчивость. Том 3. Номер 1. 2016.

[23] *Чернышева Н.* Метод вычисления возмущений в поле вращающегося тела // Вестник Ленинградского университета. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. Вып. 4. 1987, С. 83 – 89.

[24] *Abad A., Barrio R., Blesa F., Rodriguez M.* Breaking the limits: the Taylor series method // Applied Mathematics and Computation. 217, №20. 2011. pp. 7940 – 7954.

[25] *Abad A., Barrio R., Blesa F., Rodriguez M.* Algorithm 924: TIDES, a Taylor Series Integrator for Differential EquationS // ACM Transactions on Mathematical Software. 2012.

[26] *Alesova I., Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Taylor Series Method of Numerical Integration of the N-body problem // AIP Conference Proceeding. Volume 1863. Issue 1. 2017.

[27] *Alesova I., Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Piecewise Polynomial Control in Mechanical Systems // AIP Conference Proceeding. Volume 1863. Issue 1. 2017.

[28] *Alesova I., Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Fuel/Time Optimal Control of Satellite Oscillations // AIP Conference Proceeding. Volume 1863. Issue 1. 2017.

[29] *Alesova I., Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Control of Mechanical Systems by the Mixed "Time and Expenditure"Criterion // AIP Conference Proceeding. Volume 1959. Issue 1. 2018.

[30] *Alesova I., Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* High-Precision Numerical Integration of Equations in Dynamics // AIP Conference Proceeding. Volume 1959. Issue 1. 2018.

[31] *Alesova I., Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Optimal Control of Parametric Oscillations of Compressed Flexible Bars // AIP Conference Proceeding. Volume 1959. Issue 1. 2018.

[32] *Alesova I., Babadzanjanz L., Bregman A., Bregman K., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Piecewise Constant Control of Linear Mechanical

Systems in the General Case // AIP Conference Proceeding. Volume 1978. Issue 1. 2018.

[33] *Alesova I., Babadzanjanz L., Bregman A., Bregman K., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Perturbations of Calculation Technique for Central Fields // AIP Conference Proceeding. Volume 1978. Issue 1. 2018.

[34] *Alesova I., Babadzanjanz L., Bregman A., Bregman K., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Control of Satellite Aerodynamic Oscillations // AIP Conference Proceeding. Volume 1978. Issue 1. 2018.

[35] *Alesova I., Babadzanjanz L., Bregman A., Bregman K., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Schemes of Fast Evaluation of Multivariate Monomials for Speeding Up Numerical Integration of Equations in Dynamics // AIP Conference Proceeding. Volume 1978. Issue 1. 2018.

[36] *Alesova I., Babadzanjanz L., Pototskaya I., Saakyan A.* Fuel Optimal Control of Non-Linear Oscillations of a Satellite on Elliptical Orbit // International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems. 2016.

[37] *Andrade R., Rauh A.* The Lorenz model and the method of Carleman embedding // Physics Letters. Vol. 82A. 1981. pp. 276 – 278.

[38] *Azamed Yehuala G.* Qualitative Models of Neural Activity and the Carleman Embedding Technique // East Tennessee State University M.S thesis. 2009. pp. 11 – 17.

[39] *Babadzanjanz L.* Existence of the Continuations in the N-body problem // Celestial Mechanics. 20, 1979. pp. 43 – 57.

[40] *Babadzanjanz L.* Error estimates for numerical integration of the N-body problem // American Institute of Physics (Sov.Astron.Lett.7(6) Nov.-dec.-1981), 1982. pp. 416 – 418.

[41] *Babadzanjanz L.* On the global solution of N-body problem // Celestial Mechanics. 56. 1993. pp. 427 – 449.

[42] *Babadzanjanz L., Sarkissian D* Taylor series method for dynamic systems with control: convergence and error estimates // Journal of Mathematical Sciences. Springer New York, Vol. 139. № 6. 2006. pp. 7025 – 7046.

[43] *Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Fast evaluation of multivariate monomials for speeding up numerical integration in space dynamics // International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management. Volume 19. 2019. pp. 647 - 654.

[44] *Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Quality-cost optimal control in Lotka-Volterra populations model // International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management. Volume 19. 2019. pp. 3 - 10.

[45] *Bank B., Giusti M., Heintz J., Safey El Din.* Intrinsic complexity estimates in polynomial optimization // Journal of Complexity, 2014.

[46] *Bates D., Hauenstein J., Sommese A., Wampler C.* Numerically solving polynomial systems with Bertini // Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM. Philadelphia. Software, Environments, and Tools, Vol. 25. 2015.

[47] *Bellman R.* Introduction to matrix analysis // MCGRAW-HILL book company, inc. 1960.

[48] *Bellman R.* Adaptive control processes: a guided tour // Princeton University Press. 1961.

[49] *Bellman R., Richardson J.* On Some questions arising in the approximate solution of nonlinear differential equations // Quart. Math., Vol. 20. 1963. pp. 333 – 339.

[50] *Bellman R.* Addition chains of vectors (advanced problem 5125) // American Mathematical Monthly Vol. 70. 1963.

[51] *Berz M., Bischof C., Corliss G., Griewank A.* Computational differentiation: techniques, applications, and tools // Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM. Philadelphia. 1996.

[52] *Berz M.* Cosy infinity version 8 reference manual // Technical Report MSUCL-1088. National Superconducting Cyclotron Lab., Michigan State University, East Lansing. Mich. 2003.

[53] *Brauer A.* On addition chains // Bulletin of the American Mathematical Society. Vol.45. 1939. pp. 736 – 739.

[54] *Brening L., Fairen V.* Analytic approach to initiate value problems in nonlinear systems // Journal of Mathematical Physics. Vol. 22. 1981. pp. 649 – 652.

[55] *Broucke R.* Solution of the N-body problem with recurrent power series // Celestial Mechanics. № 4. 1971. pp. 110 – 115.

[56] *Captain Brain Gaude[W.* Solving nonlinear Aeronautical problems using Carleman linearization method // Sandia National Laboratories. 2001.

[57] *Carleman T.* Application de la theories des equations integrales lineaire aux systemes dequations differentielles nonlineaires // Acta mathematica, Vol. 59, 1963. pp. 63-87.

[58] *Ceberio M., Kreinovich V.* Greedy Algorithms for Optimizing Multivariate Horner Schemes // ACM Sigsam Bull, 38, 2004. pp. 8 – 15.

[59] *Corliss G., Chang Y.* Solving ordinary differential equations using Taylor series // ACM Transactions on Mathematical Software. 1982. pp. 114 – 144.

[60] *Carothers D., Parker G., Sochacki J., Warne P.* Some properties of solutions to polynomial systems of differential equations // Electronic journal of differential equations. № 40. 2005. pp. 1 – 17.

[61] *Chang Y., Corliss G.* ATOMFT: solving ODEs and DAEs using Taylor series // Computers and Mathematics with Applications. 1994. № 10 – 12. pp. 209 – 233.

[62] *Charnyi V.* Two Methods of integrating the equations of motion // Cosmic Research. Vol. 8. № 5. 1970.

[63] *Chen B., He S., Li Z., Zhang S.* Maximum block improvement and polynomial optimization // Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Optimization, SIOPT. 2012.

[64] *Dekker K., Verwer J.* Stability of Runge - Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations // Elsevier Science Publishers B. V., North-Holland, Amsterdam - New York - Oxford. 1984.

[65] *Estes R., Lancaster E.* An algorithm for integrating stepwise the restricted problem in Thiele's coordinates // Celestial Mechanics. № 1. 1970. pp. 297 – 300.

[66] *Gordon D.* A survey of fast exponentiation methods // Journal of Algorithms 27. 1998. pp. 129 – 146.

[67] *Griewank A.* Evaluating derivatives // Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM. Philadelphia. 2000.

[68] *Griffith J.* On a generalized Taylor scheme for numerical integration // Astronomy and Astrophysics. Vol. 8. № 2. 1970. pp. 267 – 272.

[69] *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear Oscillations; Dynamical Systems; and Bifurcations of Vector Fields // Springer - Verlag. 1983.

[70] *Hairer E., Norsett S., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems // Springer - Verlag, Berlin - Heildeberg. 1987.

[71] *Hairer E., Wanner G., Norsett S.* Solving ordinary differential equations: nonstiff problems // Berlin: Springer. 2009.

[72] *Hoefkens J., Berz M., Makino K* Computing validated solutions of implicit differential Equations // Advances in Computational Mathematics 19. 2003. pp. 231 – 253.

[73] *Holmes H.* Introduction to Perturbation Methods // Text in Applied Mathematics, Springer - Verlag New York, Inc. 1998.

[74] *Hoppensteadt F.* Analysis and Simulation of Chaotic Systems // Second Edition, Springer - Verlag, Inc. 1993.

[75] *Horner W.* Phil. Trans. Soc. London (1819) 308 – 305. Reprinted in: D.E. Smith, A Source Book in Mathematics McGraw-Hill. 1959.

[76] *Jorba A., Zou M* A software package for the numerical integration of ODEs by means of high-order Taylor methods // Experimental Mathematics 14, № 1. 2005. pp. 99 – 117.

[77] *Kerner E.* Universal formats for ordinary differential systems // Journal of Mathematical Physics, Vol. 22. 1981. pp. 1366 – 1371.

[78] *Knuth D., Papadimitriou C.* Duality in addition chains // Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science 13. 1981. pp. 2 – 4.

[79] *Kochergin V.* On the complexity of computations of system of three monomials in three variables // Matematicheskie Voprosy Kibernetiki, vyp.15 , 2006. pp. 79 – 155.

[80] *Kochergin V.* Correction of estimations of complexity of evaluation of a monomial and systems of monomials in Bellman‘s and Knuth‘s problems // Diskretnyi Analiz i Issl. Oper. Vol. 21. № 6. 2014. pp. 51 – 72.

[81] *Kojima M.* Efficient evaluation of polynomials and their partial derivatives in continuation methods // Journal of the Operations Research Society of Japan. Vol. 51. 2008. pp. 29 – 54.

[82] *Kowalski K.* Hilbert space description of classical dynamical systems // Physica., Vol. 145A. 1987. pp. 408 – 427.

[83] *Kowalski K., Steeb W.* Nonlinear Dynamical Systems and Carleman linearization // Word Scientist. 1991.

[84] *Lara M., Elipe A., Palacios M.* Automatic programming of recurrent power series // Mathematics and Computers in Simulation. Vol. 49. 1999. pp. 351 – 362.

[85] *Leiserson C., Liyun Li, Maza, Moreno M., Xie, Yuzhen.* Efficient Evaluation of Large Polynomials // In K. Fukuda et al. (Eds.): Mathematical Software – ICMS 2010, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6327. 2010. pp. 342 – 353.

[86] *Levi M.* Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations // Memoirs of the American Mathematical Society. Vol. 32. № 244. 1981.

[87] *Makino K., Berz M.* Taylor models and other validated functional inclusion methods // International Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 6. № 3. 2003. pp. 239 – 316.

[88] *Miletics E., Molnarka G.* Taylor series method with numerical derivatives for initial value problems // Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering. Vol. 4. № 1 – 2. 204. pp. 105 – 114.

[89] *Molnarka G., Miletics E.* Implicit extension of Taylor series method with numerical derivatives for initial value problems // Computers and Mathematics with Applications. Vol. 50. № 7. 2005. pp. 1167 – 1177.

[90] *Montroll E., Helleman R.* On a nonlinear perurbation theory without secular terms // AIP Conference Proceedings. Vol. 17. 1976. pp. 75 – 111.

[91] *Nedialkov N., Jackson K., Corliss G.* Validated solutions of initial value problems for ordinary differential equations // Applied Mathematics and Computation. Vol. 105. 1999. pp. 21 – 68.

[92] *Nedialkov N., Pryce J.* Solving differential-algebraic equations by Taylor series. I. Computing Taylor coefficients // BIT. Vol. 45. № 3. 205. pp. 561 – 591.

[93] *Nedialkov N., Pryce J.* Solving differential-algebraic equations by Taylor series. II. Computing the system Jacobian // BIT. Vol. 47. № 1. 2007. pp. 121 – 135.

[94] *Nedialkov N., Pryce J.* Solving differential algebraic equations by Taylor series. III. The DAETS code // Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics. Vol. 3. № 1 – 2. 2008. pp. 61 – 80.

[95] *Oesterwinter C., Cohen C.* New orbital elements for Moon and planets // Celestial Mechanics. Vol. 5. № 3. 1972. pp. 317 – 395.

[96] *Okhotsimskii D., Sikharulidze Yu.* Foundations of Space Flight Mechanics // Science. Moscow. 1994.

[97] *Pan V.* Some schemes for the evaluation of polynomials with real coefficients // Problems of Cybernetics. Pergamon Press 5. 1961. pp. 14 – 32.

[98] *Parker G., Sochacki J.* Implementing the Picard iteration // Neural, Parallel and Scientific Computation. Vol. 4. 1996. pp. 97 – 112.

[99] *Parker G., Sochacki J.* A Picard–McLaurin theorem for initial value PDE's // Abstract and Applied Analysis. 5. 2000. pp. 47 – 63.

[100] *Paterson M., Stockmeyer L.* On the number of nonscalar multiplications necessary to evaluate polynomials // SIAM Journal on Computing. Vol. 2. 1973. pp. 60 – 66.

[101] *Pena J., Sauer T.* On the multivariate Horner scheme // SIAM Journal on Numerical Analysis. Vol. 37, 2000. pp. 1186 – 1197.

[102] *Pena J., Sauer T.* On the multivariate Horner scheme. II: Running error analysis // Computing. Vol. 65. 2000. pp. 313 – 322.

[103] *Pippenger N.* On evaluation of powers and related problems // Proceedings 17th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, Houston. 1976. pp. 258 – 263.

[104] *Pippenger N.* On evaluation of powers and monomials // SIAM Journal on Computing. Vol. 9(2). 1980. pp. 230 – 250.

[105] *Poincare H.* Sur les courbes definies par les equations differentielles (IV) // Journal de mathematiques pures et appliques 4e serie. Tome 2. 1886. pp. 151 – 218.

[106] *Pruett C., Rudmin J., Lacy J.* An adaptive N-body algorithm of optimal order // Journal of Computational Physics. Vol. 187. 2003. pp. 298 – 317.

[107] *Rall L.* Automatic differentiation: techniques and applications // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 120. Berlin: Springer - Verlag. 1981.

[108] *Rauch L.* Iterative solution of the N-body problem for real time // ARS Journal. № 30. 1960. pp. 284 – 286.

[109] *Rauch L., Riddel W.* The iterative solution of the analytical N-body problem // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. № 8. 1960. pp. 568 – 581.

[110] *Rodriguez M., Barrio R.* Reducing rounding errors and achieving Brouwer's law with Taylor series method // Applied Numerical Mathematics. Vol. 62. № 8. 2012. pp. 1014 – 1024.

[111] *Simai He, Zhening Li., Zhang S.* Inhomogeneous polynomial optimization over a convex set: An approximation approach // Mathematics of Computation. Vol. 84. pp. 715 – 741.

[112] *Steeb W., Wilhelm F.* Nonlinear autonomous system of differential equations and Carleman linearization procedure // Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 44. 1980. pp. 601 – 611.

[113] *Steeb W.* A note on Carleman linearization // Physics Letters. Vol. 140A. 1989. pp. 336 – 338.

[114] *Steffensen J.* On the restricted problem of three bodies // Mat.-Fys. Medd. Danske, Videnskab. Selskab. Vol. 30, № 18. 1956. pp. 75 – 83.

[115] *Steffensen J.* On the problem of three bodies in the plane // Mat.-Fys. Medd. Danske, Videnskab. Selskab. Vol. 31. № 3. 1957. pp. 98 – 123.

[116] *Tsiligiannis C., Lyberatos G.* Steady state bifurcations and exact multiplicity conditions via Carleman linearization // Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 126. 1987. pp. 143 – 160.

[117] *Tsiligiannis C., Lyberatos G.* Normal forms, resonance and bifurcation analysis via the Carleman linearization // Journal of Mathematical Analysis and Applications. Elsevier. Vol. 139, 1989. pp. 123 – 138.

[118] *Van Barel M., Humet M., Sorber L.* Approximating optimal point configurations for multivariate polynomial interpolation // Electronic Transactions on Numerical Analysis. Vol. 42. 2014. pp. 41 – 63.

[119] *Van der Pol B.* A theory of Amplitude of free and forced triode vibrations // Radio Review. Vol. 1. 1920. pp. 701 – 754.

[120] *Van der Pol B.* On relaxation oscillation // Philosophical Magazine. Vol. 2. 1962. pp. 978 – 992.

[121] *Wong W.* Carleman transformation and Ovsyannikov Treves operators // Nonlinear analysis. Vol. 6. 1982. pp. 1296 – 1303.

[122] *Xiao S., Zeng G.* Equality-constrained minimization of polynomial functions // Science China Mathematics. Vol. 58, Issue 10. 2015.

[123] *Yao A C.* On the evaluation of powers // SIAM Journal on Computing. Vol. 5. 1976. pp. 100 – 103.

[124] *Babadzanjanz L.* webpage URL: (TSMR) `http://www.apmath.spbu.ru/en/staff/babadzhanyants/index.html`

[125] *Hairer E.* webpage URL: `http://www.unige.ch/~hairer/`

[126] *Wolfram Mathematica.* webpage URL: `https://reference.wolfram.com/language/`

[127] *NASA Jet Propulsion Laboratory.* webpage URL: `ssd.jpl.nasa.gov/?constants`

Список таблиц

Приложение А

Программа расчёта схемы для произвольного набора мономов

В данном разделе представлена программа *mono*3 реализованная в Wolfram Mathematica, алгоритм которой описан в главе 2.

На вход программе подаётся набор мономов третьей степени. На выходе программа выдаёт схему для введеного набора мономов. В случае набора мономов выше третьей степени, необходимо рекуррентно вызвать основную часть (Листинг А.2) программы.

Листинг А.1 — Программа *mono*3: Ввод и обработка набора мономов.

```
# utilits
im[t_] := Times @@ ((x[#] &) /@ t);
mi[t_] := Flatten[t /. {Power -> ConstantArray, Times -> List}
   /. x -> Identity];

# input
m = DeleteDuplicates[{ x[1] x[2], x[1] x[3] x[4]}];

# preprocessing
monomial1 = im /@ Transpose[{Sort[DeleteDuplicates[
  Catenate[mi /@ m]]]}];
monomial2 = Select[m, Length[mi[#]] == 2 &];
monomial3 = Select[m, Length[mi[#]] == 3 &];
m3 = DeleteCases[Complement[m, monomial2], t_ /;
   Length[DeleteDuplicates[Subsets[mi[t], {2}]] \[Intersection]
       mi /@ monomial2] > 0];
m3Subsets = (DeleteDuplicates[Subsets[mi[#], {2}]] &) /@ m3;
m3AllSubsets = DeleteDuplicates@Catenate[m3Subsets];
```

Листинг А.2 — Программа *mono*3: Основная часть.

```
% linear programming part
% use this part recursively if the set consists of
% monomials higher than third degree
m3OptimalSubsets = If[m3AllSubsets == {}, {},
  im /@ m3AllSubsets[[Transpose[Position[
  LinearProgramming[Table[1.0, {i, Length[m3AllSubsets]}],
    (ReplacePart[Table[0, {i, Length[m3AllSubsets]}],
    Transpose[{#}] -> 1] &) /@
          Table[FirstPosition[m3AllSubsets,
          m3Subsets[[r, j]]][[1]],
          {r, Length[m3]}, {j, Length[m3Subsets[[r]]]}],
          Table[1, {i, Length[m3]}],
          Table[{0, 1}, {i, Length[m3AllSubsets]}],
          Integers], 1]][[1]]]]
];
```

Листинг А.3 — Программа *mono*3: Схема.

```
monomial23OptimalSubsets = Join[monomial2, m3OptimalSubsets];

Join[
 monomial2scheme =
  Catch[Do[If[# == monomial1[[i]] monomial1[[j]], Throw[{i, j
   }]],
  {i, Length[monomial1]}, {j, Length[monomial1]}]] & /@
  Select[Join[m, m3OptimalSubsets], Length[mi[#]] == 2 &],

 monomial3scheme =
  Catch[Do[If[# == monomial1[[i]] monomial23OptimalSubsets[[j]],
  Throw[{i, Length[monomial1] + j}]],
  {i, Length[monomial1]}, {j, Length[monomial23OptimalSubsets
   ]}]] & /@
  Select[m, Length[mi[#]] == 3 &]
]
```

Приложение В

Программа построения кофигурационных файлов для TSMR

В данном разделе представлена программа для автоматического кофигурирования файла $coef.dat$. Остальные конфигурационные файл задаются вручную, в силу их простоты.

Листинг В.1 — Программа построения $coef.dat$

```
Nbody = 5; L = Nbody - 1;
% input system (polynomial system fifth/fourth/third degree)
system1 = Expand@Catenate@Table[D[Subscript[g, i, j][t], t]
 -> Subscript[p, i, j][t], {i, L}, {j, 3}];
system2 = Expand[Catenate[Table[D[Subscript[p, i, j][t], t]
 -> k^2 (- (m[0] + m[i]) Subscript[g, i, j][t]
Subscript[v, 0, i][t] + \!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\),
\(s\), \(L\)] \(If[s == i, 0, m[s] \((\((\(\*SubscriptBox[\(g\),
    \(s, j\)]\)
[t] - \(\*SubscriptBox[\(g\), \(i, j\)]\)[t])\)
\ If[s > i, \(\*SubscriptBox[\(v\), \(i, s\)]\)[t],
\(\*SubscriptBox[\(v\), \(s, i\)]\)[t]] -
\(\*SubscriptBox[\(g\), \(s, j\)]\)[t]\
\(\*SubscriptBox[\(v\), \(0, s\)]\)[t])\)]\)\)),
 {i, L}, {j, 3}]]];

system3 = Catenate@Table[{Derivative[1][Subscript[d, 0, i]][t]
 -> -Subscript[v, 0, i][t] Subscript[w, 0, i][t]}, {i, L}];
system4 = Catenate@Table[Derivative[1][Subscript[d, s, i]][t]
 -> -Subscript[v, s, i][t] Subscript[w, s, i][t],
 {i, 2, L}, {s, i - 1}];

system5 = Table[D[Subscript[q, 0, i][t], t]
 -> D[(Subscript[d, 0, i][t])^2, t], {i, L}] /. system3;
system6 = Catenate@Table[D[Subscript[q, s, i][t], t]
 -> D[(Subscript[d, s, i][t])^2, t],
 {i, 2, L}, {s, i - 1}] /. system4;
```

```
system7 = Table[D[Subscript[v, 0, i][t], t]
 -> D[(Subscript[d, 0, i][t])^3, t], {i, L}] /. system3
 /. Table[(Subscript[d, 0, i][t])^2 -> Subscript[q, 0, i][t],
 {i, L} ];
system8 = Flatten[Table[D[Subscript[v, s, i][t], t]
 -> D[(Subscript[d, s, i][t])^3, t], {i, 2, L}, {s, i - 1}]
 /. system4 /. Catenate@Table[(Subscript[d, s, i][t])^2
 -> Subscript[q, s, i][t], {i, 2, L}, {s, i - 1} ]];
system9 = Expand@Catenate[{Catenate@Table[
 {D[Subscript[w, 0, i][t], t]
 -> D[ \!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(j\), \(3\)]\(
 \(\*SubscriptBox[\(g\), \(i, j\)]\)[t]
 \(\*SubscriptBox[\(p\), \(i, j\)]\)[t]\)\), t]}, {i, L}] /.
   system1} /. system2];
system10 = Catenate[Expand[Catenate[{Catenate@Table[
 {D[Subscript[w, s, i][t], t] ->
 D[ \!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(j\), \(3\)]\(\((
 \(\*SubscriptBox[\(g\), \(i, j\)]\)[t] -
 \(\*SubscriptBox[\(g\), \(s, j\)]\)[t])\) \((
 \(\*SubscriptBox[\(p\), \(i, j\)]\)[t] -
 \(\*SubscriptBox[\(p\), \(s, j\)]\)[t])\)\)\), t]},
 {i, 2, L}, {s, i - 1}] /. system1} /. system2]]];

systemWithT = Join[
   Catenate[Table[D[Subscript[g, i, j][t], t],
    {i, L}, {j, 3}] /. system1],
   Catenate[Table[D[Subscript[p, i, j][t], t],
    {i, L}, {j, 3}] /. system2],
   Catenate[Table[{D[Subscript[d, 0, i][t], t]},
    {i, L}] /. system3],
   Catenate[Table[D[Subscript[d, s, i][t], t],
    {i, 2, L}, {s, i - 1}] /. system4],
   Catenate[Table[{D[Subscript[q, 0, i][t], t]},
    {i, L}] /. system5],
   Catenate[Table[D[Subscript[q, s, i][t], t],
    {i, 2, L}, {s, i - 1}] /. system6],
   Catenate[Table[{D[Subscript[v, 0, i][t], t]},
    {i, L}] /. system7],
   Catenate[Table[D[Subscript[v, s, i][t], t],
    {i, 2, L}, {s, i - 1}] /. system8],
   Catenate[Table[{D[Subscript[w, 0, i][t], t]},
    {i, L}] /. system9],
   Catenate[Table[D[Subscript[w, s, i][t], t],
    {i, 2, L}, {s, i - 1}] /. system10]];
```

```
change = Join[
 Catenate@Table[Subscript[g, i, j][t] -> Subscript[g, i, j],
  {i, L}, {j, 3}],
 Catenate@Table[Subscript[p, i, j][t] -> Subscript[p, i, j],
  {i, L}, {j, 3}],
 Catenate@Table[{Subscript[d, 0, i][t] -> Subscript[d, 0, i]},
  {i, L}],
 Catenate@Table[Subscript[d, s, i][t] -> Subscript[d, s, i],
  {i, 2, L}, {s, i - 1}],
 Catenate@Table[{Subscript[q, 0, i][t] -> Subscript[q, 0, i]},
  {i, L}],
 Catenate@Table[Subscript[q, s, i][t] -> Subscript[q, s, i],
  {i, 2, L}, {s, i - 1}],
 Catenate@Table[{Subscript[v, 0, i][t] -> Subscript[v, 0, i]},
  {i, L}],
 Catenate@Table[Subscript[v, s, i][t] -> Subscript[v, s, i],
  {i, 2, L}, {s, i - 1}],
 Catenate@Table[{Subscript[w, 0, i][t] -> Subscript[w, 0, i]},
  {i, L}],
 Catenate@Table[Subscript[w, s, i][t] -> Subscript[w, s, i],
  {i, 2, L}, {s, i - 1}]];

system3Degree = systemWithT /. change;
allVariable = Catenate@Join[
 Table[Subscript[g, i, j], {i, L}, {j, 3}],
 Table[Subscript[p, i, j], {i, L}, {j, 3}],
 Table[{Subscript[d, 0, i]}, {i, L}],
 Table[Subscript[d, s, i], {i, 2, L}, {s, i - 1}],
 Table[{Subscript[q, 0, i]}, {i, L}],
 Table[Subscript[q, s, i], {i, 2, L}, {s, i - 1}],
 Table[{Subscript[v, 0, i]}, {i, L}],
 Table[Subscript[v, s, i], {i, 2, L}, {s, i - 1}],
 Table[{Subscript[w, 0, i]}, {i, L}],
 Table[Subscript[w, s, i], {i, 2, L}, {s, i - 1}]];

variableMASS = Flatten[{m[0], Table[m[i], {i, L}]}];
valueMASS = {1, 1/6023600, 1/408523.71, 1/328900.56, 1/3098708,
 1/1047.3486, 1/3497.898, 1/22902.98, 1/19412.24, 1/135000000};
subValMass = Table[variableMASS[[i]] -> valueMASS[[i]],
 {i, Length@variableMASS}];
sys = system3Degree /. {k -> 0.01720209895} /. subValMass;
var = Array[x, Length@allVariable];
```

```
rules = Inner[Rule, allVariable, var, List];
sys2 = sys /. rules

mon = Sort[DeleteDuplicates@
 Catenate[CoefficientRules[#, var][[All, 1]] & /@
 Join[var, sys2]]];

mon2 = Sort[mon, Total@#1 < Total@#2 &];
monomials = Times @@ Inner[Power, var, #, List] & /@ mon2

monomials2degree = Select[monomials, Length[mi[#]] == 2 &];
monomials3degree = Select[monomials, Length[mi[#]] == 3 &];

monomial3Scheme = {Catch[Do[
 If[# == var[[i]] monomials2degree[[j]],
 Throw[{i, Length[var] + j}]],
 {i, Length[var]}, {j, Length[monomials2degree]}]] &
 /@ monomials3degree};

schemeForPolynomialSystem3Degree =
 Catenate@Join[{Table[
 mi[monomials2degree[[i]]], {i, Length@monomials2degree}]},
 monomial3Scheme]

Export[NotebookDirectory[] <> "coef.dat",
 StringRiffle[Catenate@Table[
  StringPadRight[ToString@NumberForm[#[[2]], 32,
  ExponentFunction -> (Null &), NumberFormat
  -> (StringTake[#, UpTo[32]] &)], 40] <> " " <>
  StringPadRight[ToString@e, 10] <> " " <>
  ToString@FirstPosition[mon2, #[[1]]][[1]] & /@
   CoefficientRules[sys2[[e]], var],
  {e, Length@sys2}], "\n"]]
```

Saint-Petersburg State University

Saakyan Artur Temievich

Algorithms and programs for high-precision computation problems in Dynamics

Scientific specialisation 1.2.2.
Mathematical modeling, numerical methods and program complexes

Dissertation is submitted for the degree of
Candidate of Physical and Mathematical Sciences

Translation from Russian

Thesis supervisor:
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Babadzhanjanz Levon Konstantinovich

Saint-Petersburg — 2021

Contents

Introduction

Actuality. First, consider the structure of the dissertation: briefly outline its content by chapters, mention about its practical significance and results, formulate the goals of the work, its relevance, novelty and the provisions submitted for defense. Further, discuss in more detail the problems of mathematical modeling of dynamic processes related to the work and the main problems solved in the dissertation.

In the first chapter, "Reduction to differential equations to a polynomial form" the necessary concepts are presented, and an algorithm for the method of additional variables and an algorithm for reducing differential equations to a polynomial form are presented, the method is applicable both for ordinary differential equations and for complete systems of partial differential equations. Ten examples of reducing are considered.

In the second chapter "Schemes and fast computation of systems of multivariable monomials" the necessary definitions are presented, the problem of fast computation of systems of multivariable monomials is formulated, an algorithm for solving the problem is presented, and examples showing the efficiency of the algorithm are given.

The third chapter "Taylor series methods" describes the classical method of Taylor series, several methods of recurrent finding the Taylor coefficients, the Parker - Sochacki method. The third chapter also presents an algorithm for the implementation of the Taylor series method, an algorithm for calculating the Taylor coefficients, an estimate of the local error, auxiliary algorithms and the general algorithm of the Taylor series method.

The fourth chapter "Numerical experiments" presents a numerical analysis of the efficiency of circuits both on an arbitrary set of monomials and on the example of the N-body problem in various polynomial forms. A comparison of the results of numerical integration of differential equations by two different methods is also given: TSMR (using the algorithm for constructing a scheme [124]) and TIDES [25].

The last chapter "Categories of functions" presents ten categories of functions that satisfy systems of differential equations: elementary functions, Bessel-type functions, Erf, Fresnel and exponential integral functions, incomplete gamma and beta functions, hypergeometric functions, polynomials, Mathieu and spheroidal functions, elliptic integrals, Painlevé transcendents, implicit functions.

Aim of this work is the development of general approaches, methods and algorithms for modeling in symbolic and numerical forms in Dynamic problems, based on the usage of systems of differential equations.

To achieve this aim, it was necessary to solve the following tasks:

1. Develop the details of scheme construction;
2. Implement algorithms for constructing a scheme for an arbitrary set of monomials;
3. Develop computer programs that implement scheme design algorithms;
4. Develop computer programs that implement the TSMR algorithm of Taylor series methods and compare them with the TIDES program;
5. Conduct numerical experiments, investigate the effectiveness of the developed algorithms and programs for the numerical integration of differential equations.

Novelty:

1. Constructing schemes algorithms for fast computation of an arbitrary set of monomials are presented for the first time.
2. For the first time, a study which showed the high efficiency of the presented algorithms for the numerical integration of arbitrary polynomial systems of differential equations has been performed.

Influence. Acceleration of the numerical integration of differential equations in polynomial form describing both real and statistically generated models.

The main states for the defense:

1. Construction and complete analysis of algorithms and corresponding computer programs for constructing schemes to calculate all monomials of an arbitrary set.
2. Construction of algorithms and corresponding computer programs TSMR that implement Taylor series methods for Cauchy polynomial problems.
3. Numerical experiments for real and statistically generated dynamics models.

Reliability. All the results of the dissertation were obtained by rigorous mathematical methods, verified by numerous calculations, and are based on six publications in Russian and international peer-reviewed journals. All these results have been reported at numerous international conferences.

Probation. The main results of the work were reported during the international scientific conference "Control processes and stability" (St. Petersburg, March 2016), the international conference "Stability and oscillations of nonlinear control systems (Pyatnitsky conference)" (Moscow, June 2016), during the 14th and 15th "International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics" (Rhodes and Thessaloniki, Greece, September 2016 and September 2017), an international scientific conference on mechanics "VIII Polyakhov readings" (St. Petersburg, February 2018) and on "International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying, Geology and Mining, Ecology and Management" (Sofia, Bulgaria, July 2019).

Contribution. The author took an active part in the development and implementation of algorithms for constructing schemes and in analyzing the effectiveness of the presented algorithms. All the presented results in the dissertation were obtained personally by the author.

Publications. The main results on the topic of the dissertation are presented in 6 printed publications, 5 of which were published in journals recommended by the Higher Attestation Commission .

Scope and structure of the work. The dissertation consists of introduction, five chapters, conclusion and two appendices. The full volume of the dessertation is 125 pages, including 5 tables. The list of references contains 127 titles.

Chapter 1. Reduction of differential equations to a polynomial form

Many sources were used in writing this chapter: [1 – 12, 22, 26, 30, 39, 40].

This chapter is divided into two sections. The first section describes the theoretical and algorithmic basis of methods for reducing systems to a polynomial form (a system of first-order differential equations with polynomials in the unknowns on the right-hand side) for complete systems of differential equations and systems of functions. The method of additional variables reduces them to a system of differential equations in polynomial form. Note the method of additional variables for complete systems of partial differential equations, necessary and sufficient conditions of applicability and their implementation were presented in [9], the method of additional variables for ordinary differential equations was presented in A. Poincares paper [105].

In the second section, examples of reduction of systems of differential equations and systems of functions are given: the Cauchy problem for ODE, the Cauchy problem for ODE systems, the Cauchy problem for complete systems, a mathematical pendulum, the rotational motion of a satellite around its center of mass, the N body problem reduced to three polynomial forms: fifth, fourth and third degrees, a system of two functions, an exotic function and a multistory exponent.

In addition, in the fifth chapter, 10 categories of functions are presented, the corresponding replacements necessary to reduce them to differential equations, and the corresponding differential equations.

1.1 Additional variables method

The method of additional variables is aimed at reducing systems of functions and/or differential equations (complete partial differential equations and, in particular, ordinary differential equations) to a polynomial form. The idea of the method for ODE was considered in the work of Poincare [105]. In celestial mechanics, this idea has been used to solve the three-body problem using power series. Necessary and sufficient conditions for complete partial differential equations that allow computerizing the application of the method were proposed in [9], and the algorithm of the method and its implementation are given in [11].

Consider the basic notation that will use in what follows. Let's

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in C^m, \quad t = (t_1, \dots, t_s) \in C^s, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\omega) \in C^\omega, \quad f_i^j \in C,$$

$(y_1, \dots, y_N) \in C^N$, $g_r \in C$, assuming x is function of t and parameter α, and y is function of x and parameter α. The C symbol denotes a field of complex numbers. Note that everywhere the symbol C can be replaced by the symbol R, which denotes the field of real numbers, since all the algorithms described below are symbolic.

Consider a complete system of first-order partial differential equations resolved with respect to the derivative. Such systems of differential equations can be written in the following forms:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = f_i^j(x, \alpha), \quad i \in [1 : m], \; j \in [1 : s], \\ &\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, \alpha), \quad dx = f(x, \alpha)dt, \end{aligned} \tag{1.1}$$

where $x = (x_1, \dots, x_m) \in C^m$, $t = (t_1, \dots, t_s) \in C^s$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\omega) \in C^\omega$, $dx = (dx_1, \dots, dx_m)$, $dt = (dt_1, \dots, dt_s)$, $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $f = (f_i^j)$, $f_i^j \in C$.

In the case of ordinary differential equations (i.e., for $s = 1$), these forms can be reduced to the following:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, \alpha), \quad i \in [1 : m], \quad \frac{dx}{dt} = f(x, \alpha). \tag{1.2}$$

Also consider the system of functions:

$$y_r = g_r(x, \alpha), \quad r \in [1 : N], \tag{1.3}$$

where $s, N \in [0 : +\infty)$ and $(s, N) \neq 0$. System (1.1) (or (1.3)), the right-hand side of which is a polynomial in the unknowns $x_1, \ dots, x_m$, is called a polynomial system.

Let us consider separately: the method of additional variables for complete systems, the method of additional variables for systems of functions and the method of additional variables for mixed systems.

Additional variables method for complete systems

Let additional variables $x_{m+1}, \dots, x_{m+k}$ satisfy the conditions:
— all derivatives $\frac{\partial x_{m+l}}{\partial x_i}$, $(l \in [1 : k], \quad i \in [1 : m])$ – some polynomials

$P_{m+l,i}(x_1, \ldots, x_{m+k})$ by variables $x_1, \ldots, x_{m+k}$;
— all right sides of equations (1.1) – polynomials $Q_i^j(x_1, \ldots, x_{m+k})$,
then $x_1, \ldots, x_{m+k}$ satisfy the polynomial system:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = Q_i^j(x_1, \ldots, x_{m+k}), \quad i \in [1:m], \quad j \in [1:s], \quad l \in [1:k],$$
$$\frac{\partial x_{m+l}}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{m} Q_i^j(x_1, \ldots, x_{m+k}) P_{m+l,i}(x_1, \ldots, x_{m+k}).$$

Additional variables method for systems of functions

Let additional variables $x_{m+1}, \ldots, x_{m+k}$ satisfy the conditions:
— all derivatives $\frac{\partial x_{m+l}}{\partial x_i}$, $(l \in [1:k], \quad i \in [1:m])$ – some polynomials $P_{m+l,i}(x_1, \ldots, x_{m+k})$ by variables $x_1, \ldots, x_{m+k}$;
— all functions $g_r(x, \alpha)$, $r \in [1:N]$, – polynomials $R_r(x_1, \ldots, x_{m+k})$, then $x_1, \ldots, x_{m+k}$ satisfy the polynomial system:

$$y_r = R_r(x_1, \ldots, x_{m+k}), \quad r \in [1:N],$$
$$\frac{\partial x_{m+l}}{\partial t_j} = P_{m+l,i}(x_1, \ldots, x_{m+k}), \quad i \in [1:m], \quad l \in [1:k].$$

Differentiating y_r by variables $x_1, \ldots, x_m$, can get the complete system:

$$\frac{\partial y_r}{\partial x_i} = \frac{\partial R_r}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{k} P_{m+s,i} \frac{\partial R_r}{\partial x_{m+s}}, \quad r \in [1:N], \quad i \in [1:m],$$
$$\frac{\partial x_{m+l}}{\partial t_j} = P_{m+l,i}(x_1, \ldots, x_{m+k}), \quad l \in [1:k].$$

Additional variables method for mixed systems

Let additional variables $x_{m+1}, \ldots, x_{m+k}$ satisfy the conditions:
— all derivatives $\frac{\partial x_{m+l}}{\partial x_i}$, $(l \in [1:k], \quad i \in [1:m])$ – some polynomials $P_{m+l,i}(x_1, \ldots, x_{m+k})$ by variables $x_1, \ldots, x_{m+k}$;
— all right sides of equations (1.1) – polynomials $Q_i^j(x_1, \ldots, x_{m+k})$,
— all functions $g_r(x, \alpha)$, $r \in [1:N]$, – polynomials $R_r(x_1, \ldots, x_{m+k})$, then $x_1, \ldots, x_{m+k}$ satisfy the polynomial system:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = Q_i^j(x_1, \ldots, x_{m+k}), \quad i \in [1:m], \quad j \in [1:s], \quad l \in [1:k],$$
$$\frac{\partial x_{m+l}}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{m} Q_i^j(x_1, \ldots, x_{m+k}) P_{m+l,i}(x_1, \ldots, x_{m+k}),$$
$$y_r = R_r(x_1, \ldots, x_{m+k}), \quad r \in [1:N],$$

moreover, differentiating y_r by variables $x_1, \ldots, x_m$, can get the complete system:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = Q_i^j(x_1, \ldots, x_{m+k}), \quad i \in [1:m], \quad j \in [1:s], \quad l \in [1:k],$$

$$\frac{\partial x_{m+l}}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{m} Q_i^j(x_1, \ldots, x_{m+k}) P_{m+l,i}(x_1, \ldots, x_{m+k}),$$

$$\frac{\partial y_r}{\partial x_i} = \frac{\partial R_r}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{k} P_{m+s,i} \frac{\partial R_r}{\partial x_{m+s}}, \quad r \in [1:N], \quad i \in [1:m].$$

1.2 Examples

The first three of the ten examples considered here use the Hilbert functions (three arguments p_1, p_2, p_3).

Remark. These functions were introduced in connection with Hilbert's problem 13. By the time Hilbert formulated this problem, a transformation is known that reduces the equation of the n-th degree, in which the free term is equal to 1, the coefficient at the highest degree of equality 1, and the coefficients at the powers of $n-1,\ n-2,\ n-3$ are zero. Hilbert's problem: is it possible to solve an equation of the seventh degree using functions depending on only two numbers? As indicated, an equation of the seventh degree can be considered as an equation, the solution of which depends only on three coefficients. The first one is the solution of the equation:

$$\varphi_1^7(p_1, p_2, p_3) + p_3\varphi_1^3(p_1, p_2, p_3) + p_2\varphi_1^3(p_1, p_2, p_3) + p_1\varphi_1(p_1, p_2, p_3) + 1 = 0,$$

on condition $\varphi_1(0,0,0) = -1$, and the second is determined by the equality:

$$\varphi_2(p_1, p_2, p_3) = (7\varphi_1^6(p_1, p_2, p_3) + 3p_3\varphi_1^2(p_1, p_2, p_3) + 2p_2\varphi_1(p_1, p_2, p_3) + p_1)^{-1}.$$

They satisfy the Cauchy problem:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_j} = -\varphi_1^j \varphi_2, \quad j = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_j} = (42\varphi_1^5 + 6p_3\varphi_1 + 2p_2)\varphi_1^j \varphi_2^3 - j\varphi_1^{j-1}\varphi_2^2, \\ \varphi_1(0,0,0) = -1, \varphi_2(0,0,0) = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

In the fourth and fifth examples, two problems of dynamics are considered - a mathematical pendulum and the rotational motion of a satellite about its center of mass.

Examples of additional variables method for complete systems.

Example 1: Cauchy Problem for ODE.
Consider the equation:

$$\frac{dx}{dt} = a\sin\varphi_1(x, x^2, x^3) + b\cos\varphi_1(x, x^2, x^3)$$

and initial conditions $x(0) = 0$ (a, b - real parameters).
Let's introduce additional variables:

$$\psi_1 = \varphi_1(x, x^2, x^3),\ \psi_2 = \varphi_2(x, x^2, x^3),\ \psi_3 = \sin\varphi_1(x, x^2, x^3),\ \psi_4 = \cos\varphi_1(x, x^2, x^3)$$

and obtain their total derivatives with respect to t of this equation:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\right)_{x_1=x,\ x_2=x^2,\ x_3=x^3} \cdot jx^{j-1}\frac{dx}{dt} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\Big(-j\varphi_1^{j-1}\varphi_2\Big)_{x_1=x,\ x_2=x^2,\ x_3=x^3} \cdot jx^{j-1}\frac{dx}{dt} = -\sum_{j=1}^{3} jx^{j-1}\psi_1^j\psi_2 \cdot \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\right)_{x_1=x,\ x_2=x^2,\ x_3=x^3} \cdot jx^{j-1}\frac{dx}{dt} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\Big((42\varphi_1^5 + 6x_3\varphi_1 + 2x_2)\varphi_1^j\varphi_2^3 - j\varphi_1^{j-1}\varphi_2^2\Big)_{x_1=x,\ x_2=x^2,\ x_3=x^3} \cdot jx^{j-1}\frac{dx}{dt} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} jx^{j-1}\Big((42\psi_1^5 + 6x^3\psi_1 + 2x^2)\psi_1^j\psi_2^3 - j\psi_1^{j-1}\psi_2^2\Big)\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = \cos\varphi_1(x, x^2, x^3)\frac{d\varphi_1(x, x^2, x^3)}{dt} = \psi_4\frac{d\psi_1}{dt},$$

$$\frac{d\psi_4}{dt} = -\sin\varphi_1(x, x^2, x^3)\frac{d\varphi_1(x, x^2, x^3)}{dt} = -\psi_3\frac{d\psi_1}{dt}.$$

Then, we can write the original equation and initial conditions in the form of the polynomial Cauchy problem:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a\psi_3 + b\varphi_4,\ \frac{d\psi_1}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{3} jx^{j-1}\psi_1^j\psi_2 \cdot \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{3} jx^{j-1}\Big((42\psi_1^5 + 6x^3\psi_1 + 2x^2)\psi_1^j\psi_2^3 - j\psi_1^{j-1}\psi_2^2\Big)\frac{dx}{dt}, \\ \frac{d\psi_3}{dt} = \psi_4\frac{d\psi_1}{dt},\ \frac{d\psi_4}{dt} = -\psi_3\frac{d\psi_1}{dt}, \\ x(0) = 0,\ \psi_1(0) = -1,\ \psi_2(0) = \frac{1}{7},\ \psi_3(0) = -\sin 1,\ \psi_4(0) = \cos 1. \end{cases}$$

Example 2: Cauchy Problem for ODE System.
Consider the equation:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i \sin \varphi_1(x, x_2, x_3) + b_i \cos \varphi_1(x, x_2, x_3)$$

and initial conditions $x_i(0) = 0,\ i \in [1:3]$, $(a_i = a_i(x, x_2, x_3),\ b_i = b_i(x, x_2, x_3)$ - algebraic polynomials).
Let's introduce additional variables:

$$\psi_1 = \varphi_1(x, x_2, x_3),\ \psi_2 = \varphi_2(x, x_2, x_3),\ \psi_3 = \sin \varphi_1(x, x_2, x_3),\ \psi_4 = \cos \varphi_1(x, x_2, x_3)$$

and obtain their total derivatives with respect to t of this equation:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} = -\sum_{j=1}^{3} \varphi_1^j \varphi_2 \frac{dx_j}{dt} = -\sum_{j=1}^{3} x^{j-1}\psi_1^j \psi_2 \frac{dx_j}{dt},$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{3} \Big((42\varphi_1^5 + 6x_3\varphi_1 + 2x_2)\varphi_1^j\varphi_2^3 - j\varphi_1^{j-1}\varphi_2^2\Big)\frac{dx_j}{dt} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \Big((42\psi_1^5 + 6x_3\psi_1 + 2x_2)\psi_1^j\psi_2^3 - j\psi_1^{j-1}\psi_2^2\Big)\frac{dx_j}{dt},$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = \cos \varphi_1(x, x_2, x_3)\frac{d\varphi_1(x_1, x_2, x_3)}{dt} = \psi_4 \frac{d\psi_1}{dt},$$

$$\frac{d\psi_4}{dt} = -\sin \varphi_1(x, x_2, x_3)\frac{d\varphi_1(x_1, x_2, x_3)}{dt} = -\psi_3 \frac{d\psi_1}{dt}.$$

Then, we can write the original system and initial conditions in the form of the polynomial Cauchy problem:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = a_i\psi_3 + b_i\varphi_4,\ i \in [1:3],\ \frac{d\psi_1}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{3} \psi_1^j\psi_2 \cdot \frac{dx_j}{dt}, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{3} \Big((42\psi_1^5 + 6x_3\psi_1 + 2x_2)\psi_1^j\psi_2^3 - j\psi_1^{j-1}\psi_2^2\Big)\frac{dx_j}{dt}, \\ \frac{d\psi_3}{dt} = \psi_4\frac{d\psi_1}{dt},\ \frac{d\psi_4}{dt} = -\psi_3\frac{d\psi_1}{dt}, \\ x_i(0) = 0,\ i \in [1:3],\ \psi_1(0) = -1,\ \psi_2(0) = \frac{1}{7},\ \psi_3(0) = -\sin 1,\ \psi_4(0) = \cos 1. \end{cases}$$

Example 3. The Cauchy problem for complete system.
Consider the equation:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = a_{i,j} \sin \varphi_1(x, x_2, x_3) + b_{i,j} \cos \varphi_1(x, x_2, x_3)$$

and initial conditions $x_i(0) = 0$, $i \in [1:m]$, $j \in [1:3]$, ($a_{i,j} = a_{i,j}(x, \ldots, x_m)$, $b_{i,j} = b_{i,j}(xx, \ldots, x_m)$ – algebraic polynomials).
Let's introduce additional variables:

$$\psi_1 = \varphi_1(x, x_2, x_3),\ \psi_2 = \varphi_2(x, x_2, x_3),\ \psi_3 = \sin\varphi_1(x, x_2, x_3),\ \psi_4 = \cos\varphi_1(x, x_2, x_3)$$

and obtain their total derivatives with respect to t of this equation:

$$\frac{d\psi_1}{dt_j} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t_j} = -\sum_{k=1}^{3} \varphi_1^k \varphi_2 \frac{\partial x_k}{\partial t_j} = -\sum_{k=1}^{3} \psi_1^k \psi_2 \frac{\partial x_k}{\partial t_j},$$

$$\frac{d\psi_2}{dt_j} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{3}\Big((42\varphi_1^5 + 6x_3\varphi_1 + 2x_2)\varphi_1^k\varphi_2^3 - k\varphi_1^{k-1}\varphi_2^2\Big)\frac{\partial x_k}{\partial t_j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\Big((42\psi_1^5 + 6x_3\psi_1 + 2x_2)\psi_1^k\psi_2^3 - k\psi_1^{k-1}\psi_2^2\Big)\frac{\partial x_k}{\partial t_j},$$

$$\frac{d\psi_3}{dt_j} = \cos\varphi_1(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial\varphi_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial t_j} = \psi_4\frac{\partial\psi_1}{\partial t_j},$$

$$\frac{d\psi_4}{dt_j} = -\sin\varphi_1(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial\varphi_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial t_j} = -\psi_3\frac{\partial\psi_1}{\partial t_j}.$$

Then, we can write the original system and initial conditions in the form of the polynomial Cauchy problem:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} = a_{i,j}\psi_3 + b_{i,j}\varphi_4,\ i \in [1:m],\ j \in [1:3],\ \frac{\partial\psi_1}{\partial t_j} = -\sum\limits_{k=1}^{3}\psi_1^k\psi_2 \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_j}, \\ \frac{\partial\psi_2}{dt_j} = \sum\limits_{k=1}^{3}\Big((42\psi_1^5 + 6x_3\psi_1 + 2x_2)\psi_1^k\psi_2^3 - k\psi_1^{k-1}\psi_2^2\Big)\frac{\partial x_k}{\partial t_j}, \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial t_j} = \psi_4\frac{\partial\psi_1}{\partial t_j},\ \frac{\partial\psi_4}{dt_j} = -\psi_3\frac{\partial\psi_1}{\partial t_j}, \\ x_i(0,0,0) = 0,\ i \in [1:m],\ \psi_1(0,0,0) = -1,\ \psi_2(0,0,0) = \frac{1}{7}, \\ \psi_3(0,0,0) = -\sin 1,\ \psi_4(0,0,0) = \cos 1. \end{cases}$$

Example 4. Mathematical pendulum.
Let's $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, then the equation of the mathematical pendulum

$$\ddot{x} + k^2 \sin x = 0$$

can be written in the form of a system of ordinary differential equations

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -k^2 \sin x_1.$$

Introducing additional variables $x_3 = \sin x_1$, $x_4 = \cos x_1$, obtained a polynomial (quadratic) system:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -k^2 x_3,\ \dot{x}_3 = x_2 x_4,\ \dot{x}_4 = -x_2 x_3.$$

Example 5. Rotational motion of a satellite.
Consider the motion of a satellite around its center of mass under the assumption that the center of mass itself moves in a circular orbit with an angular velocity ω. Usually the movement of a satellite around its center of mass is described by six phase variables, let them be $x_1, \ldots, x_6$. Taking into account the main disturbing factors, it turns out, as a rule, that the equations for these variables have the form:

$$\dot{x}_j = P_j(x_1, \ldots, x_6, \sin x_1, \ldots, \sin x_6, \cos x_1, \ldots, \cos x_6, \sin \omega t, \cos \omega t),$$

moreover P_j - polynomials in all their arguments. Let's $x_7 = \sin x_1, \ldots,$ $x_{13} = \cos x_1, \ldots,$ as well as $x_{19} = \sin \omega t$, $x_{20} = \cos \omega t$, get a polynomial system:

$$\begin{cases} \dot{x}_j = P_j(x_1, \ldots, x_{20}),\ \dot{x}_{6+j} = x_{13+j} P_j(x_1, \ldots, x_{20}), \\ \dot{x}_{6+j} = -x_{6+j} P_j(x_1, \ldots, x_{20}),\ j = 1, \ldots, 6,\ \dot{x}_{19} = \omega x_{20},\ \dot{x}_{20} = -\omega x_{19}. \end{cases}$$

Example 6. Painlevé equations.
Consider six Painlevé equations $P_I - P_{VI}$.

$$P_I: \ \frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z \tag{1.4}$$

$$P_{II}: \ \frac{d^2w}{dz^2} = 2w^3 + zw + \alpha \tag{1.5}$$

$$P_{III}: \ \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{w}\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2 - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{\alpha w^2 + \beta}{z} + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w} \tag{1.6}$$

$$P_{VI}: \ \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2w}\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2 + \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w} \tag{1.7}$$

$$P_V: \ \frac{d^2w}{dz^2} = \Big(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\Big)\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2 - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\Big(\alpha w + \frac{\beta}{w}\Big) + \\ + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1} \tag{1.8}$$

$$P_{VI}: \ \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\Big)\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2 - \Big(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z}\Big)\frac{dw}{dz} + \\ + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\Big(\alpha + \frac{\beta z}{w^2} + \frac{\gamma(z-1)}{(w-1)^2} + \frac{\delta z(z-1)}{(w-z)^2}\Big) \tag{1.9}$$

Initial conditions: $w(z_0) = w_0,\ w'(z_0) = w'_0$, where $\alpha,\ \beta,\ \gamma, \delta$ – arbitrary constants. Solutions of $P_I - P_{VI}$ called Painlevé transcendents.

Consider the first Painlevé equation (P_I) and reduce it to a polynomial form. Let's make the change of variables:

$$x_1 = w,\ x_2 = w',\ x_3 = z,$$

get to

$$\begin{aligned} &x_1' = x_2,\ x_2' = 6x_1^2 + x_3,\ x_3' = 1,\\ &x_1(z_0) = w_0,\ x_2(z_0) = w'_0,\ x_3(x_0) = z_0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Consider the second Painlevé equation (P_{II}) and reduce it to a polynomial form. Let's make the change of variables:

$$x_1 = w,\ x_2 = w',\ x_3 = z,$$

get to

$$\begin{aligned} &x_1' = x_2,\ x_2' = 2x_1^3 + x_1x_3 + \alpha,\ x_3' = 1,\\ &x_1(z_0) = w_0,\ x_2(z_0) = w'_0,\ x_3(x_0) = z_0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Consider the third Painlevé equation (P_{III}) and reduce it to a polynomial form. Let's make the change of variables:

$$x_1 = w,\ x_2 = w',\ x_3 = \frac{1}{w},\ x_4 = \frac{1}{z},$$

get to

$$\begin{aligned} &x_1' = x_2,\ x_2' = x_2^2x_3 - x_2x_4 + \alpha x_1^2x_4 + \beta x_4 + \gamma x_1^3 + \delta x_3,\\ &x_3' = -x_2x_3^2,\ x_4' = -x_4^2,\\ &x_1(z_0) = w_0,\ x_2(z_0) = w'_0,\ x_3(x_0) = \frac{1}{w_0},\ x_4 = \frac{1}{z_0}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Consider the fourth Painlevé equation (P_{VI}) and reduce it to a polynomial form. Let's make the change of variables:

$$x_1 = w,\ x_2 = w',\ x_3 = \frac{1}{w},\ x_4 = z,$$

get to

$$\begin{aligned} &x_1' = x_2,\ x_2' = \frac{1}{2}x_2^2x_3 - \frac{3}{2}x_1^3 + 4x_1^2x_4 + 2x_1x_4^2 - 2\alpha x_1 + \beta x_3,\\ &x_3' = -x_2x_3^2,\ x_4' = 1,\\ &x_1(z_0) = w_0,\ x_2(z_0) = w'_0,\ x_3(x_0) = \frac{1}{w_0},\ x_4 = z_0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Consider the fifth Painlevé equation (P_V) and reduce it to a polynomial form. Let's make the change of variables:

$$x_1 = w,\ x_2 = w',\ x_3 = \frac{1}{w},\ x_4 = \frac{1}{w-1},\ x_5 = \frac{1}{z},$$

get to

$$\begin{aligned}
&x_1' = x_2,\ x_2' = \frac{1}{2}x_2^2x_3 + x_2^2x_4 - x_2x_5 + \alpha x_1^3x_5^2 + \beta x_1^2x_3x_5^2 - 2\alpha x_1^2x_5^2 - \\
&- 2\beta x_1x_3x_5^2 + \alpha x_1x_5^2 + \beta x_3x_5^2 + \gamma x_1x_4 + \gamma x_1x_4, \\
&x_3' = -x_2x_3^2,\ x_4' = -x_2x_4^2,\ x_5 = -x_5^2, \\
&x_1(z_0) = w_0,\ x_2(z_0) = w_0',\ x_3(x_0) = \frac{1}{w_0},\ x_4 = \frac{1}{w_0-1},\ x_5(z_0) = \frac{1}{z_0}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Consider the sixth Painlevé equation (P_{VI}) and reduce it to a polynomial form. Let's make the change of variables:

$$x_1 = w,\ x_2 = w',\ x_3 = \frac{1}{w},\ x_4 = \frac{1}{w-1},\ x_5 = \frac{1}{w-z},$$

$$x_6 = \frac{1}{z},\ x_7 = \frac{1}{z-1},\ x_8 = z,$$

get to

$$\begin{aligned}
&x_1' = x_2,\ x_2' = \frac{1}{2}x_2^2x_3 + \frac{1}{2}x_2^2x_4 + \frac{1}{2}x_2^2x_5 - x_2x_5 - x_2x_6 - x_2x_7 + \\
&+ \alpha x_1(x_1-1)(x_1-x_8)x_6^2x_7^2 + \beta(x_1-1)(x_1-x_8)x_3x_6x_7^2 + \\
&+ \gamma x_1(x_1-x_8)x_4x_6^2x_7 + \delta x_1(x_1-1)x_6x_6x_7, \\
&x_3' = -x_2x_3^2,\ x_4' = -x_2x_4^2,\ x_5' = -x_5^2(x_2-1), \\
&x_6' = -x_6^2,\ x_7' = -x_7^2,\ x_8' = 1, \\
&x_1(z_0) = w_0,\ x_2(z_0) = w_0',\ x_3(z_0) = \frac{1}{w_0},\ x_4(z_0) = \frac{1}{w_0-1},\ x_5 = \frac{1}{w_0-z_0}, \\
&x_6(z_0) = \frac{1}{z_0},\ x_7(z_0) = \frac{1}{z_0-1},\ x_8(z_0) = z_0.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Example 7. The N-body problem.

Differential equations of the N-body problem in relative coordinates:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2g_{i,j}}{dt^2} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}r_{0,i}^{-3} + \\
&+ k^2 \sum_{s\in[1:l],s\neq i} m_s[(g_{s,j}-g_{i,j})r_{s,i}^{-3} - g_{s,j}r_{0,s}^{-3}],
\end{aligned} \tag{1.16}$$

where $r_{s,i}^2 = \sum\limits_{j=1}^{3}(g_{s,j}-g_{i,j})^2$, k — Gaussian constant, $m_0,\ldots,m_l$ — masses of material points $M_0,\ldots,M_l$, $l=N-1$, $s<i$, $s\in[0:l]$, $i\in[1:l]$, $j\in[1:3]$,
can be reduced to a polynomial form of the fifth, fourth, or third degree.

The N-body problem in polynomial form of the fifth degree

Let's introduce additional variables: $p_{i,j} = \frac{dg_{i,j}}{dt}$, we get the system:

$$\frac{dg_{i,j}}{dt} = p_{i,j},\quad \frac{dp_{i,j}}{dt} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}r_{0,i}^{-3} + k^2\sum_{s\in[1:l],s\neq i} m_s[(g_{s,j}-g_{i,j})r_{s,i}^{-3} - g_{s,j}r_{0,s}^{-3}],$$

then we introduce $d_{s,i} = r_{s,i}^{-1}$, we get the problem of N-bodies in polynomial form of the fifth degree:

$$\frac{dp_{i,j}}{dt} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}d_{0,i}^3 + k^2\sum_{w\in[1:l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})d_{w,i}^3 - g_{w,j}d_{0,w}^3],$$

$$\frac{dg_{i,j}}{dt} = p_{i,j},\quad \frac{dd_{s,i}}{dt} = -d_{s,i}^3\sum_{j=1}^{3}(g_{i,j}-g_{s,j})(p_{i,j}-p_{s,j}). \tag{1.17}$$

The N-body problem in polynomial form of the fourth degree

Let's reduce the resulting N-body problem in polynomial form of the fifth degree to a polynomial system of the fourth degree.
Let's introduce additional variables: $v_{s,i} = d_{s,i}^3$, we get the system:

$$\frac{dp_{i,j}}{dt} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}d_{0,i}^3 + k^2\sum_{w\in[1:l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})d_{w,i}^3 - g_{w,j}d_{0,w}^3],$$

$$\frac{dg_{i,j}}{dt} = p_{i,j},\quad \frac{dd_{s,i}}{dt} = v_{s,i}\sum_{j=1}^{3}(g_{i,j}-g_{s,j})(p_{i,j}-p_{s,j}),$$

$$\frac{dv_{s,i}}{dt} = -3d_{s,i}^2v_{s,i}\sum_{j=1}^{3}(g_{i,j}-g_{s,j})(p_{i,j}-p_{s,j}),$$

then we introduce $w_{s,i} = \sum\limits_{j=1}^{3}(g_{i,j}-g_{s,j})(p_{i,j}-p_{s,j})$, we get the problem of N-bodies in polynomial form of the fourth degree:

$$\frac{dp_{i,j}}{dt} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}v_{0,i} + k^2\sum_{w\in[1:l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})v_{w,i} - g_{w,j}v_{0,w}],$$

$$\frac{dg_{i,j}}{dt} = p_{i,j}, \quad \frac{dd_{s,i}}{dt} = -v_{s,i}w_{s,i}, \quad \frac{dv_{s,i}}{dt} = -3d_{s,i}^2 v_{s,i}w_{s,i},$$
$$\frac{dw_{s,i}}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\Big[(p_{i,j}-p_{s,j})^2 + k^2(g_{i,j}-g_{s,j})\times \tag{1.18}$$
$$\times\Big((m_0+m_s)g_{s,j}v_{0,s} - (m_0+m_i)g_{i,j}v_{0,i} +$$
$$+\sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})v_{w,i} - g_{w,j}v_{0,w} - \sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{s,j})v_{w,s} - g_{w,s}v_{0,w}]\Big)\Big].$$

The N-body problem in polynomial form of the third degree

Let's reduce the resulting N-body problem in polynomial form of the fourth degree to a polynomial system of the third degree.
Let's introduce additional variables: $q_{s,i} = d_{s,i}^2$, we get the problem of N-bodies in polynomial form of the third degree:

$$\frac{dp_{i,j}}{dt} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}v_{0,i} + k^2 \sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})v_{w,i} - g_{w,j}v_{0,w}],$$

$$\frac{dg_{i,j}}{dt} = p_{i,j}, \quad \frac{dd_{s,i}}{dt} = -v_{s,i}w_{s,i}, \quad \frac{dq_{s,i}}{dt} = -2d_{s,i}v_{s,i}w_{s,i}, \quad \frac{dv_{s,i}}{dt} = -3q_{s,i}v_{s,i}w_{s,i},$$
$$\frac{dw_{s,i}}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\Big[(p_{i,j}-p_{s,j})^2 + k^2(g_{i,j}-g_{s,j})\times \tag{1.19}$$
$$\times\Big((m_0+m_s)g_{s,j}v_{0,s} - (m_0+m_i)g_{i,j}v_{0,i} +$$
$$+\sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})v_{w,i} - g_{w,j}v_{0,w} - \sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{s,j})v_{w,s} - g_{w,s}v_{0,w}]\Big)\Big].$$

Examples of using the set for systems of functions.

Example 8. System of two functions.
System of functions:

$$y_1 = x_1^{x_3\cos(\omega x_2)}(ax_1+bx_2)^7 x_3\sin(\omega x_2),$$
$$y_2 = ln^{12}x_1(c^3x_1x_2x_3\cos^3(\omega x_2) + \coth(c^d d)\sin(\omega x_2))^3,$$

where $x_1,\ x_2,\ x_3$ - variables, and $a,\ b,\ c\ d,\ \omega$ - parameters,
introducing variables

$$\varphi_1 = \sin(\omega x_2), \quad \varphi_2 = \cos(\omega x_2), \quad \varphi_3 = lnx_1, \quad \varphi_4 = x_1^{-1}, \quad \varphi_5 = x_1^{x_3\cos(\omega x_2)}$$

reduces to a polynomial system:

$$y_1 = (ax_1 + bx_2)^7 x_3 \varphi_1 \varphi_5, \quad y_2 = \varphi_3^{12}(c^3 x_1 x_2 x_3 \varphi_2^3 + \coth(c^d d)\varphi_1)^3,$$

where φ - complete system solution:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} = \omega\varphi_2, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} = -\omega\varphi_1, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} = \varphi_4, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_1} = -\varphi_4^2, \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_3} = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1} = x_2\varphi_2\varphi_4\varphi_5, \quad \frac{\partial\varphi_5}{\partial x_2} = -\omega x_3\varphi_1\varphi_3\varphi_5, \quad \frac{\partial\varphi_5}{\partial x_3} = \varphi_2\varphi_3\varphi_5.$$

Example 9. Exotic function.
Consider a function:

$$\varphi(t) = \sqrt{\int_1^t \frac{\sin t}{t+a}\, dt \cdot \int_a^{\sin(t+b)} (\mathrm{tg}(t+b)+c)^{\cos(t+b)} dt + l}.$$

To obtain an ODE system for $\varphi(t)$, let's introduce additional variables

$$x_1 = \varphi(t), \quad x_2 = \frac{1}{\varphi(t)}, \quad x_3 = \int_1^t \frac{\sin t}{t+a}\, dt, \quad x_4 = \int_a^{\sin(t+b)} (\mathrm{tg}(t+b)+c)^{\cos(t+b)} dt,$$

$$x_5 = \frac{1}{t+a}, \quad x_6 = \sin t, \quad x_7 = \cos t, \quad x_8 = (\mathrm{tg}(\sin(t+b)+b)+c)^{\cos(\sin(t+b)+b)},$$
$$x_9 = \sin(t+b), \quad x_{10} = \cos(t+b), \quad x_{11} = \frac{1}{\mathrm{tg}(\sin(t+b)+b)+c},$$
$$x_{12} = ln(\mathrm{tg}(\sin(t+b)+b)+c), \quad x_{13} = \frac{1}{\cos(\sin(t+b)+b)},$$
$$x_{14} = \sin(\sin(t+b)+b), \quad x_{15} = \cos(\sin(t+b)+b).$$

Let's differentiate them by t, we obtain:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{2}x_2(x_4\frac{dx_3}{dt} + x_3\frac{dx_4}{dt}) = \frac{1}{2}x_2(x_4x_5x_6 + x_3x_8x_{10}),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2^2\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{2}x_2^3(x_4x_5x_6 + x_3x_8x_{10}),$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_5x_6, \quad \frac{dx_4}{dt} = x_8x_{10}, \quad \frac{dx_5}{dt} = -x_5^2, \quad \frac{dx_6}{dt} = x_7, \quad \frac{dx_7}{dt} = -x_6,$$

$$\frac{dx_8}{dt} = x_8(x_{15}\frac{dx_{12}}{dt} + x_{12}\frac{dx_{15}}{dt}) = x_8(x_{15}x_{12}x_{13}^2x_{10} - x_{12}x_{14}x_{10}),$$

$$\frac{dx_9}{dt} = x_{10}, \quad \frac{dx_{10}}{dt} = -x_9, \quad \frac{dx_{11}}{dt} = -x_{11}^2x_{13}^2x_{10}, \quad \frac{dx_{12}}{dt} = x_{11}x_{13}^2x_{10},$$

$$\frac{dx_{13}}{dt} = -x_{13}^2\frac{dx_{15}}{dt} = x_{13}^2x_{14}x_{10}, \quad \frac{dx_{14}}{dt} = x_{15}x_{10}, \quad \frac{dx_{15}}{dt} = -x_{14}x_{10}.$$

Example 10. Multi-storey exponent.

With constant $a_0, \ \ldots, a_m$ and $m \in [1, +\infty)$ consider the functions $u_1 = e(a_{m-1}, a_m, t), \ \ldots, u_m = e(a_0, \ldots, a_m, t)$ argument t, given by recurrence relations:

$$e(a_{m-1}, a_m, t) = a_{m-1}exp(a_m t), \;\; e(a_{m-i}, \ \ldots, a_m, t) = a_{m-i}exp(e(a_{m-i+1}, \ \ldots, a_m, t)).$$

Differentiating these equalities by t, we obtain the polynomial system:

$$\frac{du_1}{dt} = a_m u_1, \quad \frac{du_2}{dt} = a_m u_1 u_2, \ \ldots, \frac{du_m}{dt} = a_m u_1 \cdot \ldots \cdot u_m.$$

Chapter 2. Schemes and fast computation of systems of multivariable monomials

Many sources were used in writing this chapter: [3, 8, 22, 30, 35].

This chapter is divided into three sections. The first section describes the basic definitions that introduced to formulate the problem of constructing a scheme and its algorithm.

The second section presents algorithms for constructing schemes for an arbitrary set of monomials: up to the third degree and higher.

The third section presents examples of constructing schemes for the Painlevé equations and the N-body problem in various polynomial forms.

2.1 Basic definitions

Let's introduce the basic definitions and notation.

Monomial – a function that defined by the formula:

$$x^i = \prod_{k=1}^{n} x_k^{i_k} = x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}, \quad i_k \geqslant 0,\ k \in [1, n].$$

Consider the ordered system of monomials

$$T = (x^{i(1)}, \ldots, x^{i(n)}, x^{i(n+1)}, \ldots, x^{i(M)})$$

on the hypothesis that

$$2 \leqslant |i(n+1)| \leqslant |i(n+2)| \leqslant \ldots \leqslant |i(M)| \leqslant L,$$

and look upon the problem of evaluation of $x^{i(n+1)}, \ldots, x^{i(M)}$ on the condition that the monomials

$$x^{i(1)} = x_1, \ldots, x^{i(n)} = x_n.$$

are given in advance.

Evaluate system T (that is, all monomials $x^{i(n+1)}, \ldots, x^{i(M)}$ of T) is always possible, since each of the monomials can be obtained by multiplying the corresponding number of times the initial values $x_1, ..., x_n$, for example, $x_1^2 x_2^3 x_3 = x_1 x_1 x_2 x_2 x_2 x_3$. It is clear that this is not the most efficient way to calculate T. Evaluating monomials of T in order from "left to right" one evaluates the next monomial as the product of the two monomials already evaluated, if exist. For example, $x_1^2 x_2^3 x_3$ can be calculated as $(x_1^2 x_2^3)x_3$ or $x_1^2(x_2^3 x_3)$, if monomial $x_1^2 x_2^3$ or monomials $x_2^3 x_3$ and x_1^2 were previously calculated.

If the next monomial $x^{i(r)}$ of T can be calculated as the product of previously calculated monomials $x^{i(p)}$, $x^{i(q)}$, then it means that $i(r) = i(p) + i(q)$, $1 \leqslant p < r$, $1 \leqslant q < r$. If, for $|i(r)| \geqslant 3$, all monomials $x^{i(r)}$ one can evaluate in such a way (monomials in T are ordered), then we say that the system T has a ***scheme***

$$S(T) = \big((p(n+1), q(n+1)), \ldots, (p(M), q(M))\big)$$

which is an ordered set of $M - n$ pairs of natural numbers $((p(r), q(r))$, satisfying the conditions $r > p(r), q(r)$ for all $r \in [n+1, M]$.

The given system T may has or not a scheme and may has one or more of them. For example, set $\{x, x^2, x^4, x^7\}$ has no scheme, but sets $\{x, x^2, x^4, x^5, x^7\}$, $\{x, x^2, x^3, x^4, x^7\}$ have one and two schemes, respectively.

If T has a scheme, it can be used to calculate $T : x^{i(n+1)}, \ldots, x^{i(M)}$. T is calculated from left to right in this order, and the next monomial $x^{i(r)}$ calculated as the product of already calculated $x^{i(p)}$ and $x^{i(q)}$. If the set T has no scheme, then it can always be completed to the set T', which has a schema. This is obvious, since any set T of monomials of degree at most L can be completed to a set T' that containing all monomials of degree at most $L - 1$.

Let T, T' be ordered sets of monomials. We will write $T \subset T'$ or $T' \supset T$ in the case when all monomials of the set T are contained in T'. If $T' \supset T$ and T' has a scheme, then we will call T' ***span*** of T : $T' = span(T)$.

The set T' with the minimum number of added monomials will be called ***minimal span*** and designate $T' = mspan(T)$. If we want to calculate T based on some scheme, and T does not have a scheme, then it is necessary to calculate not T, but its span T', and the fewer additional monomials in T', the faster, generally speaking, there will be a procedure for calculating the set T. At the same time, for a given set of T, there may be different spans with the same number of monomials (for example, the set $\{x, x^2, x^4, x^7\}$ has the spans $\{x, x^2, x^3, x^4, x^7\}$, $\{x, x^2, x^4, x^5, x^7\}$, $\{x, x^2, x^4, x^6, x^7\}$).)

Initial set $T^0 = (x^{i(1)}, \dots, x^{i(n)}, \dots x^{i(n+1)}, \dots, x^{i(M^0)})$ can be specified by an appropriate set of indices $I^0 = (i(1), \dots, i(n), \dots i(n+1), \dots, i(M^0))$. The set of monomials, indices and the number of elements of the span are denoted by T^h, I^h, M^h. The same values at the current step of the algorithm will be denoted by T, I, M (at the beginning and at the end of the algorithm they are equal T^0, I^0, M^0 and T^h, I^h, M^h respectively).

Inequalities for indices mean that they are satisfied for all components of the indices, for example, $i(\nu) = (i_1(\nu), \dots, i_n(\nu)) \geqslant 0$ means that $i_j(\nu) \geqslant 0$, $j = 1, \dots n$. If $i - k \geqslant 0$ $(i - k > 0)$ then we will say that i contains (strictly contains) k, or that k is contained (strictly contained) in i (will also say that k is sub-index i and i – supra-index k).

The value $s = |i| = i_1 + \dots + i_n$ will call ***the degree of the index*** i, and for $s = 1, 2, 3, \dots, m$ will talk about linear, quadratic, cubic index and m-index (or index of the degree m).

A non-linear index $i(v) \in I^0$ will be called ***concerted*** or ***unconcerted*** in the set I^0, if it is represented or not by the sum of two indices from I^0. All quadratic indices are concerted. Divide the original set of indices $I^0 = (i(1), \dots, i(n), \dots i(n+1), \dots, i(M^0))$ into two sets, $I^0_+ = (i(1), \dots, i(n), \dots i(n+M_+))$, $I^0_- = (i(n+r), \dots, i(n), \dots i(n+R)$, the first of which consists of linear and concerted non-linear indices, and the second – unconcerted indices. Sets the order of indices is assumed to be the same as theirs was in I^0. Obviously, the integers r, R, M_+ must satisfy the inequalities

$$0 < r \leqslant R \leqslant M^0 - n, \quad n + 1 \leqslant M \leqslant M^0.$$

For $i(k) \in I$, we also take the notation $i(s, \mu(s))$, where $s = |i(k)| = i_1(k) + \dots + i_n(k)$, and $\mu(s) = 1, 2, \dots, m(s)$ – the ordinal number of the index in the set

$$I(s) = \{i(\nu) \in I \big| |i(\nu)| = s\},$$

as well as the corresponding monomial in

$$T(s) = \{x^{i(\nu)} \in T \big| |i(\nu)| = s\}$$

(if $I(s)$ is an empty set, then we put $\mu(s) = m(s) = 0$).

2.2 Fast computation of systems of monomials of many variables

This section is divided into two subsections. The first subsection describes an algorithm for solving the problem of constructing a minimal span for an arbitrary set of monomials up to third degree inclusive. The second subsection describes an algorithm for computing the span for an arbitrary set of monomials of arbitrary degree.

2.2.1 Systems of monomials up to third degree

This subsection describes and solves the problem of constructing a minimal span and scheme for a set of monomials up to the third degree inclusive. Material taken from [3, 22, 26].

Problem formulation: The problem is to introduce a minimal number of quadratic indices (monomials of the second degree) that any unconcerned cubic index (unconcerned monomials of third degree) $i(3, \mu_1(3)), \ \dots, i(3, \mu_m(3))$ of the initial set contains at least one of them.

Every cubic index has at most three quadratic sub-indices. For example, $(3, 0, 0, \ \dots, 0)$ has one quadratic sub-index $(2, 0, 0, \ \dots, 0)$, the index $(2, 1, 0, \ \dots, 0)$ has two quadratic sub-indices $(2, 0, 0, \ \dots, 0)$, $(1, 1, 0, \ \dots, 0)$ and the index $(1, 1, 1, 0, \ \dots, 0)$ has three quadratic sub-indices $(1, 1, 0, \ \dots, 0)$, $(1, 0, 1, \ \dots, 0)$ and $(0, 1, 1, \ \dots, 0)$.

Quadratic sub-index of the index k^r denote k^r_j, and their number $\sigma(r) \in [1 : 3]$. All different sub-indices k^r_j $j \in [1 : \sigma(r)]$, $r \in [1 : m]$ consider in the form of an ordered set $i^1, \ \dots, i^l$, and each sub-index k^r_j write as $i^{\nu(r,\, j)}$. Comparing to each value i^v the variable d_v, which can take two values – 0 and 1, we arrive at the problem:

given $\sigma(r) \in [1 : 3]$, $\nu(i, j) \in [1 : l]$,

find integers $d_1, \ \dots, d_l$, satisfying the inequalities:

$$\sum_{j=1}^{\sigma(r)} d_{\nu(i,j)} \geqslant 1, \quad 0 \leqslant d_\nu \leqslant 1, \ \nu \in [1 : l], \ r \in [1 : m],$$

and minimize $L(d_1, \ \dots, d_l) = d_1 + \ \cdots + d_l$.

The solution to the problem of minimizing the number of quadratic sub-indices is reduced to a binary linear programming problem. Having solved the obtained binary programming problem, we obtain the optimal solution to the formulated problem.

2.2.2 Systems of monomials above the third degree

This subsection describes and solves the problem of constructing a span and a scheme for a set of monomials of arbitrary degree. The material is taken from [43].
Problem formulation: Let's consider a set of T monomials up to degree s inclusive. The problem is to introduce as minimal additional monomials as possible for constructing a $span(T)$ and a scheme $S(T)$.

Consider the ordered subsystem T_s of system consisting of all its T consisting of all its s-degree monomials, and set the problem: find out the set $D(T_s)$ consisting of minimum number of $(s-1)$ - degree monomials, so that any monomials from T_s would be the product of a $(s-1)$ - degree monomial and some first-degree monomial. Introducing recursively the designations

$$T^{(L-1)} = D(T_s) \cup T_{L-1},\ T^{(L-2)} = D(T^{(L-1)}) \cup T_{L-2},\ \ldots, T^3 = D(T^2) \cup T_2,$$

we will utilize the following heuristic formula:

$$span(T) = T^{(2)} \cup\ \cdots \cup T^{(L-1)} \cup T_L.$$

Besides, we will use the designations introduced above and the designations:
$m(s) = card\ T_s$ - is the number of all the indexes in T_s;
$k^{(r,s)}(r \in [1 : m(s)])$ – is the r - th index in T_s;
$G(r,s) \in [1 : s]$ – is the number of the indices of the degree $(s-1)$ of the index $k^{(r,s)}$;
$l(s) = card \cup_{r=1}^{m(s)} \cup_{j=1}^{G(r,s)} k_j^{(r,s)}$ – is the number of all different indices of $(s-1)$ degree of all indices $k^{(r,s)}$;
$i^1,\ \ldots, i^l$ – is the ordered set $card \cup_{r=1}^{m(s)} \cup_{j=1}^{G(r,s)} k_j^{(r,s)}$;
$v(r,s,j)$ – is such a function that $k_j^{(r,s)} = i^{\nu(r,s,j)}$;
By associating with each variable i^ν the binary variable d_ν ($d_v = 0$ or $d_v = 1$), one arrives at the following binary linear programming problem:

given $m(s)$, $l(s)$, and $\sigma(r,s) \in [1:s]$, $\nu(r,s,j) \in [1:l(s)]$
minimize $L(d_1, \ \ldots, d_{l(s)}) = d_1 + \ \cdots + d_{l(s)}$
subject to $0 \leqslant d_\nu \leqslant 1$, $\nu \in [1:l(s)]$, $\sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant G(r,s)} d_{\nu(r,s,j)} \geqslant 1.$

To solve such problems, the corresponding program in Wolfram Mathematica was used (Appendix A).

2.3 Examples for constructing a scheme

This section discusses six Painlevé equations in polynomial form (Chapter 1; Section 1.2; Example 6), spans for these polynomial systems, and corresponding schemes for these spans. We also considered the 5-body problem in polynomial form of the fifth, fourth and third degrees (Chapter 1; Section 1.2; Example 7). The span for these polynomial systems and the corresponding schemes for them are constructed. The span and scheme were built using the program presented in Appendix A.

2.3.1 Painlevé equations

Consider six Painlevé equations in polynomial form (1.10 - 1.15) and construct a span for them and a scheme corresponding to this span.

The first Painlevé equation:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= 6x_1^2 + x_3, \\ x_3' &= 1. \end{aligned}$$

The set of monomials on the right-hand side of differential equations consists of monomials of the first and second degrees, so the scheme is constructed automatically.

Set of monomials: $T(P_I) = \{x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_1^2\}$, Scheme: $S(P_I) = \{(1,1)\}$.

The second Painlevé equation:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= 2x_1^3 + x_1x_3 + \alpha, \\ x_3' &= 1. \end{aligned}$$

Set of monomials: $T(P_{II}) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_1^3,\ x_1x_3\}$.
Add one monomial $\{x_1^2\}$, get a span:

$$T'(P_{II}) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_1^2,\ x_1^3,\ x_1x_3\}.$$

Scheme for the gotten span:

$$S(P_{II}) = \{(1,1),\ (1,4),\ (1,3)\}.$$

The third Painlevé equation:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_2^2x_3 - x_2x_4 + \alpha x_1^2x_4 + \beta x_4 + \gamma x_1^3 + \delta x_3, \\ x_3' &= -x_2x_3^2, \\ x_4' &= -x_4^2. \end{aligned}$$

Set of monomials:

$$T(P_{III}) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_2x_4,\ x_4^2,\ x_1^2x_4,\ x_2^2x_3,\ x_2x_3^2,\ x_1^3\}.$$

Add two monomials $\{x_2x_3,\ x_1^2\}$, get a span:

$$T'(P_{III}) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_2x_3,\ x_2x_4,\ x_1^2,\ x_4^2,\ x_1^2x_4,\ x_2^2x_3,\ x_2x_3^2,\ x_1^3\}.$$

Scheme for the gotten span:

$$S(P_{III}) = \{(2,3),\ (2,4),\ (1,1),\ (4,4),\ (4,7),\ (2,5),\ (3,5),\ (1,7)\}.$$

The fourth Painlevé equation:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= \frac{1}{2}x_2^2x_3 - \frac{3}{2}x_1^3 + 4x_1^2x_4 + 2x_1x_4^2 - 2\alpha x_1 + \beta x_3, \\ x_3' &= -x_2x_3^2, \\ x_4' &= 1. \end{aligned}$$

Set of monomials:

$$T(P_{IV}) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_1^2x_4,\ x_1x_4^2,\ x_2x_3^2,\ x_2^2x_3,\ x_1^3\}.$$

Add three monomials $\{x_1x_4,\ x_2x_3,\ x_1^2\}$, get a span:

$$T'(P_{IV}) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_1x_4,\ x_2x_3,\ x_1^2,\ x_1^2x_4,\ x_1x_4^2,\ x_2x_3^2,\ x_2^2x_3,\ x_1^3\}.$$

Scheme for the gotten span:

$$S(P_{IV}) = \{(1,4),\ (2,3),\ (1,1),\ (1,5),\ (4,5),\ (3,6),\ (2,6),\ (1,7)\}.$$

The fifth Painlevé equation:

$$\begin{aligned}
&x_1' = x_2,\\
&x_2' = \frac{1}{2}x_2^2x_3 + x_2^2x_4 - x_2x_5 + \alpha x_1^3x_5^2 + \beta x_1^2x_3x_5^2 - 2\alpha x_1^2x_5^2 -\\
&- 2\beta x_1x_3x_5^2 + \alpha x_1x_5^2 + \beta x_3x_5^2 + \gamma x_1x_4 + \gamma x_1x_4,\\
&x_3' = -x_2x_3^2,\\
&x_4' = -x_2x_4^2,\ x_5 = -x_5^2.
\end{aligned}$$

Set of monomials:

$$T(P_V) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_1x_4,\ x_1x_5,\ x_2x_5,\ x_1^2x_4,\ x_2^2x_3,\ x_5^2,$$
$$x_1^2x_4,\ x_2^2x_3,\ x_2^2x_4,\ x_2x_3^2,\ x_2x_4^2,\ x_1x_5^2,\ x_3x_5^2,\ x_1^2x_5^2,\ x_1x_3x_5^2,\ x_1^3x_5^2,\ x_1^2x_3x_5^2\}.$$

Add three monomials $\{x_2x_3,\ x_2x_4\}$, get a span:

$$T'(P_V) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_1x_4,\ x_1x_5,\ x_2x_5,\ x_2x_3,\ x_2x_4,\ x_1^2x_4,\ x_2^2x_3,\ x_5^2,$$
$$x_1^2x_4,\ x_2^2x_3,\ x_2^2x_4,\ x_2x_3^2,\ x_2x_4^2,\ x_1x_5^2,\ x_3x_5^2,\ x_1^2x_5^2,\ x_1x_3x_5^2,\ x_1^3x_5^2,\ x_1^2x_3x_5^2\}.$$

Scheme for the gotten span:

$$S(P_V) = \{(1,4),\ (1,5),\ (2,5),\ (2,3),\ (2,4),\ (1,6),\ (2,9),\ (5,5),\ (1,6),$$
$$(2,9),\ (2,10),\ (3,9),\ (4,10),\ (5,7),\ (3,13),\ (7,7),\ (3,19),\ (1,21),\ (3,21)\}.$$

The sixth Painlevé equation:

$$\begin{aligned}
&x_1' = x_2,\\
&x_2' = \frac{1}{2}x_2^2x_3 + \frac{1}{2}x_2^2x_4 + \frac{1}{2}x_2^2x_5 - x_2x_5 - x_2x_6 - x_2x_7 +\\
&+ \alpha x_1(x_1-1)(x_1-x_8)x_6^2x_7^2 + \beta(x_1-1)(x_1-x_8)x_3x_6x_7^2 +\\
&+ \gamma x_1(x_1-x_8)x_4x_6^2x_7 + \delta x_1(x_1-1)x_6x_6x_7,\\
&x_3' = -x_2x_3^2,\ x_4' = -x_2x_4^2,\ x_5' = -x_5^2(x_2-1),\\
&x_6' = -x_6^2,\ x_7' = -x_7^2,\ x_8' = 1.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Set of monomials:

$$T(P_{VI}) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_2x_5,\ x_2x_6,\ x_2x_7,\ x_5^2,\ x_6^2,\ x_7^2,$$

$$x_2^2x_3,\ x_2^2x_4,\ x_2^2x_5,\ x_2x_3^2,\ x_2x_4^2,\ x_2x_5^2,\ x_1x_5x_6x_7,\ x_1x_3x_6x_7^2,\ x_3x_6x_7^2x_8,$$

$$x_1^2x_5x_6x_7,\ x_1^2x_6^2x_7^2,\ x_1x_6^2x_7^2x_8,\ x_1^2x_3x_6x_7^2,\ x_1^2x_3x_6x_7^2x_8,\ x_1^2x_4x_6^2x_7,$$

$$x_1x_4x_6^2x_7x_8,\ x_1^3x_6^2x_7^2,\ x_1^2x_6^2x_7^2x_8\}.$$

Add ten monomials:

$$\{x_1x_5,\ x_1x_7,\ x_2x_3,\ x_2x_4,\ x_3x_7,\ x_6x_7,\ x_6^2x_7,\ x_3x_6x_7^2,\ x_1x_6^2x_7^2,\ x_1x_4x_6^2x_7\},$$

get a span:

$$T'(P_{VI}) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_1x_5,\ x_1x_7,\ x_2x_3,\ x_2x_4,\ x_3x_7,$$

$$x_6x_7,\ x_2x_5,\ x_2x_6,\ x_2x_7,\ x_5^2,\ x_6^2,\ x_7^2,\ x_6^2x_7,\ x_2^2x_3,$$

$$x_2^2x_4,\ x_2^2x_5,\ x_2x_3^2,\ x_2x_4^2,\ x_2x_5^2,\ x_3x_6x_7^2,\ x_1x_6^2x_7^2,\ x_1x_5x_6x_7,\ x_1x_3x_6x_7^2,$$

$$x_3x_6x_7^2x_8,\ x_1x_4x_6^2x_7,\ x_1^2x_5x_6x_7,\ x_1^2x_6^2x_7^2,\ x_1x_6^2x_7^2x_8,\ x_1^2x_3x_6x_7^2,\ x_1^2x_3x_6x_7^2x_8,$$

$$x_1^2x_4x_6^2x_7,\ x_1x_4x_6^2x_7x_8,\ x_1^3x_6^2x_7^2,\ x_1^2x_6^2x_7^2x_8\}.$$

Scheme for the gotten span:

$$S(P_{VI}) = \{(1,5),\ (1,7),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,7),\ (6,7),\ (2,5),\ (2,6),\ (2,7),\ (5,5),$$

$$(6,6),\ (7,7),\ (2,11),\ (2,12),\ (2,13),\ (3,11),\ (4,12),\ (5,13),\ (6,18),$$

$$(10,18),\ (17,18),\ (1,10),\ (8,30),\ (1,29),\ (15,28),\ (9,28),\ (1,34),$$

$$(8,34),\ (1,31),\ (8,31),\ (1,35),\ (8,35)\}.$$

2.3.2 The N-body problem in various polynomial forms

Consider examples of the polynomial system of the N-body problem in various polynomial forms: fifth, fourth, and third degrees, respectively (1.17 - 1.19). Below is a table with statistics on these problems: the number of bodies, the number of independent variables of the system, the number of unique monomials on the right side of these systems, and the optimal number of monomials necessary and sufficient to construct a span/scheme.

Table 1 (below) uses the notation:

N – the number of bodies;

i – the N-body problem in the polynomial form of the i degree, $i = 5,\ 4,\ 3$;

$N_v^{(i)}$ – the number of independent variables of the polynomial system of the i degree;

$N_m^{(i)}$ – the number of unique monomials on the right-hand side of the polynomial system of the i degree;

$N_m^{(i)+}$ – the optimal number of monomials, which is necessary and sufficient to add to construct the span (for a polynomial system of the i degree).

Table 1 — Monomial statistics for the N-body problem in various polynomial forms

N	$N_v^{(5)}$	$N_m^{(5)}$	$N_m^{(5)+}$	$N_v^{(4)}$	$N_m^{(4)}$	$N_m^{(4)+}$	$N_v^{(3)}$	$N_m^{(3)}$	$N_m^{(3)+}$
3	15	24	6	21	50	3	24	51	0
4	24	63	12	36	126	6	42	129	0
5	34	120	20	54	252	10	64	258	0
6	45	195	30	75	440	15	90	450	0
7	57	288	42	99	702	21	120	717	0
8	70	399	56	126	1050	28	154	1071	0
9	84	528	72	156	1496	36	192	1524	0
10	99	675	90	189	2052	45	234	2088	0

Below we consider examples of constructing a span and a scheme for the 5 body problem in various polynomial forms: fifth, fourth, and third degrees, respectively.

The N-body problem in polynomial form of the fifth degree

The system of differential equations for the N-body problem in polynomial form of the fifth degree has the form (Chapter 1, 1.2 Examples, Example 7):

$$\frac{dp_{i,j}}{dt} = -k^2(m_0 + m_i)g_{i,j}d_{0,i}^3 + k^2 \sum_{w\in[1:l],w\neq i} m_w[(g_{w,j} - g_{i,j})d_{w,i}^3 - g_{w,j}d_{0,w}^3],$$

$$\frac{dg_{i,j}}{dt} = p_{i,j},\quad \frac{dd_{s,i}}{dt} = -d_{s,i}^3\sum_{j=1}^{3}(g_{i,j} - g_{s,j})(p_{i,j} - p_{s,j}). \tag{2.2}$$

Let $N=5$. Let's write down the list of variables and the corresponding additional variables for the convenience of working with monomials.
List of variables:

$$\{g_{1,1},\ g_{1,2},\ g_{1,3},\ g_{2,1},\ g_{2,2},\ g_{2,3},\ g_{3,1},\ g_{3,2},\ g_{3,3},\ g_{4,1},\ g_{4,2},\ g_{4,3},$$

$$p_{1,1},\ p_{1,2},\ p_{1,3},\ p_{2,1},\ p_{2,2},\ p_{2,3},\ p_{3,1},\ p_{3,2},\ p_{3,3},\ p_{4,1},\ p_{4,2},\ p_{4,3},$$

$$d_{0,1},\ d_{0,2},\ d_{0,3},\ d_{0,4},\ d_{1,2},\ d_{1,3},\ d_{2,3},\ d_{1,4},\ d_{2,4},\ d_{3,4}\}$$

Additional variables:

$$\{g_{1,1}\to x_1,\ g_{1,2}\to x_2,\ g_{1,3}\to x_3,\ g_{2,1}\to x_4,\ g_{2,2}\to x_5,\ g_{2,3}\to x_6,$$

$$g_{3,1}\to x_7,\ g_{3,2}\to x_8,\ g_{3,3}\to x_9,\ g_{4,1}\to x_{10},\ g_{4,2}\to x_{11},\ g_{4,3}\to x_{12},$$

$$p_{1,1}\to x_{13},\ p_{1,2}\to x_{14},\ p_{1,3}\to x_{15},\ p_{2,1}\to x_{16},\ p_{2,2}\to x_{17},\ p_{2,3}\to x_{18},$$

$$p_{3,1}\to x_{19},\ p_{3,2}\to x_{20},\ p_{3,3}\to x_{21},\ p_{4,1}\to x_{22},\ p_{4,2}\to x_{23},\ p_{4,3}\to x_{24},$$

$$d_{0,1}\to x_{25},\ d_{0,2}\to x_{26},\ d_{0,3}\to x_{27},\ d_{0,4}\to x_{28},$$

$$d_{1,2}\to x_{29},\ d_{1,3}\to x_{30},\ d_{2,3}\to x_{31},\ d_{1,4}\to x_{32},\ d_{2,4}\to x_{33},\ d_{3,4}\to x_{34},\}$$

The gotten set of monomials is an input argument for the program from Appendix A:

$$\{x_1x_{25}^3,\ x_1x_{29}^3,\ x_1x_{30}^3,\ x_1x_{32}^3,\ x_2x_{25}^3,\ x_2x_{29}^3,\ x_2x_{30}^3,\ x_2x_{32}^3,$$

$$x_3x_{25}^3,\ x_3x_{29}^3,\ x_3x_{30}^3,\ x_3x_{32}^3,\ x_4x_{26}^3,\ x_4x_{29}^3,\ x_4x_{31}^3,\ x_4x_{33}^3,$$

$$x_5x_{26}^3,\ x_5x_{29}^3,\ x_5x_{31}^3,\ x_5x_{33}^3,\ x_6x_{26}^3,\ x_6x_{29}^3,\ x_6x_{31}^3,\ x_6x_{33}^3,$$

$$x_7x_{27}^3,\ x_7x_{30}^3,\ x_7x_{31}^3,\ x_7x_{34}^3,\ x_8x_{27}^3,\ x_8x_{30}^3,\ x_8x_{31}^3,\ x_8x_{34}^3,$$

$$x_9x_{27}^3,\ x_9x_{30}^3,\ x_9x_{31}^3,\ x_9x_{34}^3,\ x_{10}x_{28}^3,\ x_{10}x_{32}^3,\ x_{10}x_{33}^3,\ x_{10}x34^3,$$

$$x_{11}x_{28}^3,\ x_{11}x_{32}^3,\ x_{11}x_{33}^3,\ x_{11}x_{34}^3,\ x_{12}x_{28}^3, x_{12}x_{32}^3,\ x_{12}x_{33}^3,\ x_{12}x_{34}^3,$$

$$x_1x_{13}x_{25}^3,\ x_1x_{13}x_{29}^3,\ x_1x_{13}x_{30}^3,\ x_1x_{13}x_{32}^3,\ x_1x_{16}x_{29}^3,\ x_1x_{19}x_{30}^3,\ x_1x_{22}x_{32}^3,$$

$$x_2x_{14}x_{25}^3,\ x_2x_{14}x_{29}^3,\ x_2x_{14}x_{30}^3,\ x_2x_{14}x_{32}^3,\ x_2x_{17}x_{29}^3,\ x_2x_{20}x_{30}^3,\ x_2x_{23}x_{32}^3,$$

$$x_3x_{15}x_{25}^3,\ x_3x_{15}x_{29}^3,\ x_3x_{15}x_{30}^3,\ x_3x_{15}x_{32}^3,\ x_3x_{18}x_{29}^3,\ x_3x_{21}x_{30}^3,\ x_3x_{24}x_{32}^3,$$

$$x_4x_{13}x_{29}^3,\ x_4x_{16}x_{26}^3,\ x_4x_{16}x_{29}^3,\ x_4x_{16}x_{31}^3,\ x_4x_{16}x_{33}^3,\ x_4x_{19}x_{31}^3,\ x_4x_{22}x_{33}^3,$$

$$x_5x_{14}x_{29}^3,\ x_5x_{17}x_{26}^3,\ x_5x_{17}x_{29}^3,\ x_5x_{17}x_{31}^3,\ x_5x_{17}x_{33}^3,\ x_5x_{20}x_{31}^3,\ x_5x_{23}x_{33}^3,$$

$$x_6x_{15}x_{29}^3,\ x_6x_{18}x_{26}^3,\ x_6x_{18}x_{29}^3,\ x_6x_{18}x_{31}^3,\ x_6x_{18}x_{33}^3,\ x_6x_{21}x_{31}^3,\ x_6x_{24}x_{33}^3,$$

$$x_7x_{13}x_{30}^3,\ x_7x_{16}x_{31}^3,\ x_7x_{19}x_{27}^3,\ x_7x_{19}x_{30}^3,\ x_7x_{19}x_{31}^3,\ x_7x_{19}x_{34}^3,\ x_7x_{22}x_{34}^3,$$

$$x_8x_{14}x_{30}^3,\ x_8x_{17}x_{31}^3,\ x_8x_{20}x_{27}^3,\ x_8x_{20}x_{30}^3,\ x_8x_{20}x_{31}^3,\ x_8x_{20}x_{34}^3,\ x_8x_{23}x_{34}^3,$$

$$x_9x_{15}x_{30}^3,\ x_9x_{18}x_{31}^3,\ x_9x_{21}x_{27}^3,\ x_9x_{21}x_{30}^3,\ x_9x_{21}x_{31}^3,\ x_9x_{21}x_{34}^3,\ x_9x_{24}x_{34}^3,$$

$$x_{10}x_{13}x_{32}^3,\ x_{10}x_{16}x_{33}^3,\ x_{10}x_{19}x_{34}^3,\ x_{10}x_{22}x_{28}^3,\ x_{10}x_{22}x_{32}^3,\ x_{10}x_{22}x_{33}^3,\ x_{10}x_{22}x_{34}^3,$$

$$x_{11}x_{14}x_{32}^3,\ x_{11}x_{17}x_{33}^3,\ x_{11}x_{20}x_{34}^3,\ x_{11}x_{23}x_{28}^3,\ x_{11}x_{23}x_{32}^3,\ x_{11}x_{23}x_{33}^3,\ x_{11}x_{23}x_{34}^3,$$

$$x_{12}x_{15}x_{32}^3,\ x_{12}x_{18}x_{33}^3,\ x_{12}x_{21}x_{34}^3,\ x_{12}x_{24}x_{28}^3,\ x_{12}x_{24}x_{32}^3,\ x_{12}x_{24}x_{33}^3,\ x_{12}x_{24}x_{34}^3\}$$

The result of solving the linear programming problem is an additional set of monomials, which must and should be added to the original set to obtain a span for this set. Below is this set of monomials:

$$\{x_{25}^2,\ x_{26}^2,\ x_{27}^2,\ x_{28}^2,\ x_{29}^2,\ x_{30}^2,\ x_{31}^2,\ x_{32}^2,\ x_{33}^2,\ x_{34}^2,$$

$$x_{25}^3,\ x_{26}^3,\ x_{27}^3,\ x_{28}^3,\ x_{29}^3,\ x_{30}^3,\ x_{31}^3,\ x_{32}^3,\ x_{33}^3,\ x_{34}^3\}$$

The result of the program is the following scheme:

$$\{(25,25),\ (26,26),\ (27,27),\ (28,28),\ (29,29),\ (30,30),\ (31,31),\ (32,32),$$

$$(33,33),\ (34,34),\ (25,35),\ (26,36),\ (27,37),\ (28,38),\ (29,39),\ (30,40),$$

$$(31,41),\ (32,42),\ (33,43),\ (34,44),\ (1,45),\ (1,49),\ (1,50),\ (1,52),$$

$$(2,45),\ (2,49),\ (2,50),\ (2,52),\ (3,45),\ (3,49),\ (3,50),\ (3,52),$$

$$(4,46),\ (4,49),\ (4,51),\ (4,53),\ (5,46),\ (5,49),\ (5,51),\ (5,53),$$

$$(6,46),\ (6,49),\ (6,51),\ (6,53),\ (7,47),\ (7,50),\ (7,51),\ (7,54),$$

$$(8,47),\ (8,50),\ (8,51),\ (8,54),\ (9,47),\ (9,50),\ (9,51),\ (9,54),$$

$$(10,48),\ (10,52),\ (10,53),\ (10,54),\ (11,48),\ (11,52),\ (11,53),\ (11,54),$$

$$(12,48),\ (12,52),\ (12,53),\ (12,54),\ (13,55),\ (13,56),\ (13,57),\ (13,58),$$

$$(16,56),\ (19,57),\ (22,58),\ (14,59),\ (14,60),\ (14,61),\ (14,62),\ (17,60),$$

$$(20,61),\ (23,62),\ (15,63),\ (15,64),\ (15,65),\ (15,66),\ (18,64),\ (21,65),$$

$$(24,66),\ (13,68),\ (16,67),\ (16,68),\ (16,69),\ (16,70),\ (19,69),\ (22,70),$$

$$(14,72),\ (17,71),\ (17,72),\ (17,73),\ (17,74),\ (20,73),\ (23,74),\ (15,76),$$

$$(18,75),\ (18,76),\ (18,77),\ (18,78),\ (21,77),\ (24,78),\ (13,80),\ (16,81),$$

$$(19,79),\ (19,80),\ (19,81),\ (19,82),\ (22,82),\ (14,84),\ (17,85),\ (20,83),$$
$$(20,84),\ (20,85,\ (20,86),\ (23,86),\ (15,88),\ (18,89),\ (21,87),\ (21,88),$$
$$(21,89),\ (21,90),\ (24,90),\ (13,92),\ (16,93),\ (19,94),\ (22,91),\ (22,92),$$
$$(22,93),\ (22,94),\ (14,96),\ (17,97),\ (20,98),\ (23,95),\ (23,96),\ (23,97),$$
$$(23,98),\ (15,100),\ (18,101),\ (21,102),\ (24,99),\ (24,100),\ (24,101),\ (24,102)\}$$

The N-body problem in polynomial form of the fourth degree

The system of differential equations for the N-body problem in polynomial form of the fourth degree has the form:

$$\frac{dp_{i,j}}{dt} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}v_{0,i} + k^2 \sum_{w\in[1:l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})v_{w,i} - g_{w,j}v_{0,w}],$$

$$\frac{dg_{i,j}}{dt} = p_{i,j}, \quad \frac{dd_{s,i}}{dt} = -v_{s,i}w_{s,i}, \quad \frac{dv_{s,i}}{dt} = -3d_{s,i}^2 v_{s,i}w_{s,i},$$
$$\frac{dw_{s,i}}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\Big[(p_{i,j}-p_{s,j})^2 + k^2(g_{i,j}-g_{s,j})\times \tag{2.3}$$
$$\times\Big((m_0+m_s)g_{s,j}v_{0,s} - (m_0+m_i)g_{i,j}v_{0,i} +$$
$$+\sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})v_{w,i} - g_{w,j}v_{0,w} - \sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{s,j})v_{w,s} - g_{w,s}v_{0,w}]\Big)\Big].$$

Let $N=5$. Let's write down the list of variables and the corresponding additional variables for the convenience of working with monomials.

List of variables:

$$\{g_{1,1},\ g_{1,2},\ g_{1,3},\ g_{2,1},\ g_{2,2},\ g_{2,3},\ g_{3,1},\ g_{3,2},\ g_{3,3},\ g_{4,1},\ g_{4,2},\ g_{4,3},$$
$$p_{1,1},\ p_{1,2},\ p_{1,3},\ p_{2,1},\ p_{2,2},\ p_{2,3},\ p_{3,1},\ p_{3,2},\ p_{3,3},\ p_{4,1},\ p_{4,2},\ p_{4,3},$$
$$d_{0,1},\ d_{0,2},\ d_{0,3},\ d_{0,4},\ d_{1,2},\ d_{1,3},\ d_{2,3},\ d_{1,4},\ d_{2,4},\ d_{3,4},$$
$$v_{0,1},\ v_{0,2},\ v_{0,3},\ v_{0,4},\ v_{1,2},\ v_{1,3},\ v_{2,3},\ v_{1,4},\ v_{2,4},\ v_{3,4},$$
$$w_{0,1},\ w_{0,2},\ w_{0,3},\ w_{0,4},\ w_{1,2},\ w_{1,3},\ w_{2,3},\ w_{1,4},\ w_{2,4},\ w_{3,4}\}$$

Additional variables:

$$\{g_{1,1}\to x_1,\ g_{1,2}\to x_2,\ g_{1,3}\to x_3,\ g_{2,1}\to x_4,\ g_{2,2}\to x_5,\ g_{2,3}\to x_6,$$
$$g_{3,1}\to x_7,\ g_{3,2}\to x_8,\ g_{3,3}\to x_9,\ g_{4,1}\to x_{10},\ g_{4,2}\to x_{11},\ g_{4,3}\to x_{12},$$

$$p_{1,1} \to x_{13},\ p_{1,2} \to x_{14},\ p_{1,3} \to x_{15},\ p_{2,1} \to x_{16},\ p_{2,2} \to x_{17},\ p_{2,3} \to x_{18},$$

$$p_{3,1} \to x_{19},\ p_{3,2} \to x_{20},\ p_{3,3} \to x_{21},\ p_{4,1} \to x_{22},\ p_{4,2} \to x_{23},\ p_{4,3} \to x_{24},$$

$$d_{0,1} \to x_{25},\ d_{0,2} \to x_{26},\ d_{0,3} \to x_{27},\ d_{0,4} \to x_{28},$$

$$d_{1,2} \to x_{29},\ d_{1,3} \to x_{30},\ d_{2,3} \to x_{31},\ d_{1,4} \to x_{32},\ d_{2,4} \to x_{33},\ d_{3,4} \to x_{34},$$

$$v_{0,1} \to x_{35},\ v_{0,2} \to x_{36},\ v_{0,3} \to x_{37},\ v_{0,4} \to x_{38},$$

$$v_{1,2} \to x_{39},\ v_{1,3} \to x_{40},\ v_{2,3} \to x_{41},\ v_{1,4} \to x_{42},\ v_{2,4} \to x_{43},\ v_{3,4} \to x_{44},$$

$$w_{0,1} \to x_{35},\ w_{0,2} \to x_{36},\ w_{0,3} \to x_{37},\ w_{0,4} \to x_{38},$$

$$w_{1,2} \to x_{39},\ w_{1,3} \to x_{40},\ w_{2,3} \to x_{41},\ w_{1,4} \to x_{42},\ w_{2,4} \to x_{43},\ w_{3,4} \to x_{44}\}$$

The gotten set of monomials is an input argument for the program from Appendix A:

$$\{x_1x_{35},\ x_1x_{39},\ x_1x_{40},\ x_1x_{42},\ x_2x_{35},\ x_2x_{39},\ x_2x_{40},\ x_2x_{42},\ x_3x_{35},\ x_3x_{39},$$

$$x_3x_{40},\ x_3x_{42},\ x_4x_{36},\ x_4x_{39},\ x_4x_{41},\ x_4x_{43},\ x_5x_{36},\ x_5x_{39},\ x_5x_{41},\ x_5x_{43},$$

$$x_6x_{36},\ x_6x_{39},\ x_6x_{41},\ x_6x_{43},\ x_7x_{37},\ x_7x_{40},\ x_7x_{41},\ x_7x_{44},\ x_8x_{37},\ x_8x_{40},$$

$$x_8x_{41},\ x_8x_{44},\ x_9x_{37},\ x_9x_{40},\ x_9x_{41},\ x_9x_{44},\ x_{10}x_{38},\ x_{10}x_{42},\ x_{10}x_{43},\ x_{10}x_{44},$$

$$x_{11}x_{38},\ x_{11}x_{42},\ x_{11}x_{43},\ x_{11}x_{44},\ x_{12}x_{38},\ x_{12}x_{42},\ x_{12}x_{43},\ x_{12}x_{44},\ x_{13}^2,\ x_{13}x_{16},$$

$$x_{13}x_{19},\ x_{13}x_{22},\ x_{14}^2,\ x_{14}x_{17},\ x_{14}x_{20},\ x_{14}x_{23},\ x_{15}^2,\ x_{15}x_{18},\ x_{15}x_{21},\ x_{15}x_{24},$$

$$x_{16}^2,\ x_{16}x_{19},\ x_{16}x_{22},\ x_{17}^2,\ x_{17}x_{20},\ x_{17}x_{23},\ x_{18}^2,\ x_{18}x_{21},\ x_{18}x_{24},\ x_{19}^2,$$

$$x_{19}x_{22},\ x_{20}^2,\ x_{20}x_{23},\ x_{21}^2,\ x_{21}x_{24},\ x_{22}^2,\ x_{23}^2,\ x_{24}^2,\ x_{25}^2,\ x_{26}^2,$$

$$x_{27}^2,\ x_{28}^2,\ x_{29}^2,\ x_{30}^2,\ x_{31}^2,\ x_{32}^2,\ x_{33}^2,\ x_{34}^2,\ x_{35}x_{45},\ x_{36}x_{46},$$

$$x_{37}x_{47},\ x_{38}x_{48},\ x_{39}x_{49},\ x_{40}x_{50},\ x_{41}x_{51},\ x_{42}x_{52},\ x_{43}x_{53},\ x_{44}x_{54}$$

$$x_1^2x_{35},\ x_1^2x_{39},\ x_1^2x_{40},\ x_1^2x_{42},\ x_1x_4x_{35},\ x_1x_4x_{36},\ x_1x_4x_{39},\ x_1x_4x_{40},$$

$$x_1x_4x_{41},\ x_1x_4x_{42},\ x_1x_4x_{43},\ x_1x_7x_{35},\ x_1x_7x_{37},\ x_1x_7x_{39},\ x_1x_7x_{40},\ x_1x_7x_{41},$$

$$x_1x_7x_{42},\ x_1x_7x_{44},\ x_1x_{10}x_{35},\ x_1x_{10}x_{38},\ x_1x_{10}x_{39},\ x_1x_{10}x_{40},\ x_1x_{10}x_{42},\ x_1x_{10}x_{43},$$

$$x_1x_{10}x_{44},\ x_2^2x_{35},\ x_2^2x_{39},\ x_2^2x_{40},\ x_2^2x_{42},\ x_2x_5x_{35},\ x_2x_5x_{36},\ x_2x_5x_{39},$$

$$x_2x_5x_{40},\ x_2x_5x_{41},\ x_2x_5x_{42},\ x_2x_5x_{43},\ x_2x_8x_{35},\ x_2x_8x_{37},\ x_2x_8x_{39},\ x_2x_8x_{40},$$

$$x_2x_8x_{41},\ x_2x_8x_{42},\ x_2x_8x_{44},\ x_2x_{11}x_{35},\ x_2x_{11}x_{38},\ x_2x_{11}x_{39},\ x_2x_{11}x_{40},\ x_2x_{11]}x_{42},$$

$$x_2x_{11}x_{43},\ x_2x_{11}x_{44},\ x_3^2x_{35},\ x_3^2x_{39},\ x_3^2x_{40},\ x_3^2x_{42},\ x_3x_6x_{35},\ x_3x_6x_{36},$$

$$x_3x_6x_{39},\ x_3x_6x_{40},\ x_3x_6x_{41},\ x_3x_6x_{42},\ x_3x_6x_{43},\ x_3x_9x_{35},\ x_3x_9x_{37},\ x_3x_9x_{39},$$

$$x_3x_9x_{40},\ x_3x_9x_{41},\ x_3x_9x_{42},\ x_3x_9x_{44},\ x_3x_{12}x_{35},\ x_3x_{12}x_{38},\ x_3x_{12}x_{39},\ x_3x_{12}x_{40},$$

$$x_3x_{12}x_{42},\ x_3x_{12}x_{43},\ x_3x_{12}x_{44},\ x_4^2x_{36},\ x_4^2x_{39},\ x_4^2x_{41},\ x_4^2x_{43},\ x_4x_7x_{36},$$

$$x_4x_7x_{37},\ x_4x_7x_{39},\ x_4x_7x_{40},\ x_4x_7x_{41},\ x_4x_7x_{43},\ x_4x_7x_{44},\ x_4x_{10}x_{36},\ x_4x_{10}x_{38},$$

$$x_4x_{10}x_{39},\ x_4x_{10}x_{41},\ x_4x_{10}x_{42},\ x_4x_{10}x_{43},\ x_4x_{10}x_{44},\ x_5^2x_{36},\ x_5^2x_{39},\ x_5^2x_{41},$$

$$x_5^2x_{43},\ x_5x_8x_{36},\ x_5x_8x_{37},\ x_5x_8x_{39},\ x_5x_8x_{40},\ x_5x_8x_{41},\ x_5x_8x_{43},\ x_5x_8x_{44},$$

$$x_5x_{11}x_{36},\ x_5x_{11}x_{38},\ x_5x_{11}x_{39},\ x_5x_{11}x_{41},\ x_5x_{11}x_{42},\ x_5x_{11}x_{43},\ x_5x_{11}x_{44},\ x_6^2x_{36},$$

$$x_6^2x_{39},\ x_6^2x_{41},\ x_6^2x_{43},\ x_6x_9x_{36},\ x_6x_9x_{37},\ x_6x_9x_{39},\ x_6x_9x_{40},\ x_6x_9x_{41},$$

$$x_6x_9x_{43},\ x_6x_9x_{44},\ x_6x_{12}x_{36},\ x_6x_{12}x_{38},\ x_6x_{12}x_{39},\ x_6x_{12}x_{41},\ x_6x_{12}x_{42},\ x_6x_{12}x_{43},$$

$$x_6x_{12}x_{44},\ x_7^2x_{37},\ x_7^2x_{40},\ x_7^2x_{41},\ x_7^2x_{44},\ x_7x_{10}x_{37},\ x_7x_{10}x_{38},\ x_7x_{10}x_{40},$$

$$x_7x_{10}x_{41},\ x_7x_{10}x_{42},\ x_7x_{10}x_{43},\ x_7x_{10}x_{44},\ x_8^2x_{37},\ x_8^2x_{40},\ x_8^2x_{41},\ x_8^2x_{44},$$

$$x_8x_{11}x_{37},\ x_8x_{11}x_{38},\ x_8x_{11}x_{40},\ x_8x_{11}x_{41},\ x_8x_{11}x_{42},\ x_8x_{11}x_{43},\ x_8x_{11}x_{44},\ x_9^2x_{37},$$

$$x_9^2x_{40},\ x_9^2x_{41},\ x_9^2x_{44},\ x_9x_{12}x_{37},\ x_9x_{12}x_{38},\ x_9x_{12}x_{40},\ x_9x_{12}x_{41},\ x_9x_{12}x_{42},$$

$$x_9x_{12}x_{43},\ x_9x_{12}x_{44},\ x_{10}^2x_{38},\ x_{10}^2x_{42},\ x_{10}^2x_{43},\ x_{10}^2x_{44},\ x_{11}^2x_{38},\ x_{11}^2x_{42},$$

$$x_{11}^2x_{43},\ x_{11}^2x_{44},\ x_{12}^2x_{38},\ x_{12}^2x_{42},\ x_{12}^2x_{43},\ x_{12}^2x_{44},$$

$$x_{25}^2x_{35}x_{45},\ x_{26}^2x_{36}x_{46},\ x_{27}^2x_{37}x_{47},\ x_{28}^2x_{38}x_{48},\ x_{29}^2x_{39}x_{49},$$

$$x_{30}^2x_{40}x_{50},\ x_{31}^2x_{41}x_{51},\ x_{32}^2x_{42}x_{52},\ x_{33}^2x_{43}x_{53},\ x_{34}^2x_{44}x_{54}\}$$

The result of solving the linear programming problem is an additional set of monomials, which must and should be added to the original set to obtain a span for this set. Below is this set of monomials:

$$\{x_{25}^2,\ x_{26}^2,\ x_{27}^2,\ x_{28}^2,\ x_{29}^2,\ x_{30}^2,\ x_{31}^2,\ x_{32}^2,\ x_{33}^2,\ x_{34}^2\}$$

The result of the program is the following scheme:

$$\{(1,35),\ (1,39),\ (1,40),\ (1,42),\ (2,35),\ (2,39),\ (2,40),\ (2,42),$$

$$(3,35),\ (3,39),\ (3,40),\ (3,42),\ (4,36),\ (4,39),\ (4,41),\ (4,43),$$

$$(5,36),\ (5,39),\ (5,41),\ (5,43),\ (6,36),\ (6,39),\ (6,41),\ (6,43),$$

$$(7,37),\ (7,40),\ (7,41),\ (7,44),\ (8,37),\ (8,40),\ (8,41),\ (8,44),$$

$(9,37)$, $(9,40)$, $(9,41)$, $(9,44)$, $(10,38)$, $(10,42)$, $(10,43)$, $(10,44)$, $(11,38)$, $(11,42)$, $(11,43)$, $(11,44)$, $(12,38)$, $(12,42)$, $(12,43)$, $(12,44)$, $(13,13)$, $(13,16)$, $(13,19)$, $(13,22)$, $(14,14)$, $(14,17)$, $(14,20)$, $(14,23)$, $(15,15)$, $(15,18)$, $(15,21)$, $(15,24)$, $(16,16)$, $(16,19)$, $(16,22)$, $(17,17)$, $(17,20)$, $(17,23)$, $(18,18)$, $(18,21)$, $(18,24)$, $(19,19)$, $(19,22)$, $(20,20)$, $(20,23)$, $(21,21)$, $(21,24)$, $(22,22)$, $(23,23)$, $(24,24)$, $(25,25)$, $(26,26)$, $(27,27)$, $(28,28)$, $(29,29)$, $(30,30)$, $(31,31)$, $(32,32)$, $(33,33)$, $(34,34)$, $(35,45)$, $(36,46)$, $(37,47)$, $(38,48)$, $(39,49)$, $(40,50)$, $(41,51)$, $(42,52)$, $(43,53)$, $(44,54)$, $(1,55)$, $(1,56)$, $(1,57)$, $(1,58)$, $(4,55)$, $(1,67)$, $(1,68)$, $(4,57)$, $(1,69)$, $(4,58)$, $(1,70)$, $(7,55)$, $(1,79)$, $(7,56)$, $(1,80)$, $(1,81)$, $(7,58)$, $(1,82)$, $(10,55)$, $(1,91)$, $(10,56)$, $(10,57)$, $(1,92)$, $(1,93)$, $(1,94)$, $(2,59)$, $(2,60)$, $(2,61)$, $(2,62)$, $(5,59)$, $(2,71)$, $(2,72)$, $(5,61)$, $(2,73)$, $(5,62)$, $(2,74)$, $(8,59)$, $(2,83)$, $(8,60)$, $(2,84)$, $(2,85)$, $(8,62)$, $(2,86)$, $(11,59)$, $(2,95)$, $(11,60)$, $(11,61)$, $(2,96)$, $(2,97)$, $(2,98)$, $(3,63)$, $(3,64)$, $(3,65)$, $(3,66)$, $(6,63)$, $(3,75)$, $(3,76)$, $(6,65)$, $(3,77)$, $(6,66)$, $(3,78)$, $(9,63)$, $(3,87)$, $(9,64)$, $(3,88)$, $(3,89)$, $(9,66)$, $(3,90)$, $(12,63)$, $(3,99)$, $(12,64)$, $(12,65)$, $(3,100)$, $(3,101)$, $(3,102)$, $(4,67)$, $(4,68)$, $(4,69)$, $(4,70)$, $(7,67)$, $(4,79)$, $(7,68)$, $(4,80)$, $(4,81)$, $(7,70)$, $(4,82)$, $(10,67)$, $(4,91)$, $(10,68)$, $(10,69)$, $(4,92)$, $(4,93)$, $(4,94)$, $(5,71)$, $(5,72)$, $(5,73)$, $(5,74)$, $(8,71)$, $(5,83)$, $(8,72)$, $(5,84)$, $(5,85)$, $(8,74)$, $(5,86)$, $(11,71)$, $(5,95)$, $(11,72)$, $(11,73)$, $(5,96)$, $(5,97)$, $(5,98)$, $(6,75)$, $(6,76)$, $(6,77)$, $(6,78)$, $(9,75)$, $(6,87)$, $(9,76)$, $(6,88)$, $(6,89)$, $(9,78)$, $(6,90)$, $(12,75)$, $(6,99)$, $(12,76)$, $(12,77)$, $(6,100)$, $(6,101)$, $(6,102)$, $(7,79)$, $(7,80)$, $(7,81)$, $(7,82)$, $(10,79)$, $(7,91)$, $(10,80)$, $(10,81)$, $(7,92)$, $(7,93)$, $(7,94)$, $(8,83)$, $(8,84)$, $(8,85)$, $(8,86)$, $(11,83)$, $(8,95)$, $(11,84)$, $(11,85)$, $(8,96)$, $(8,97)$,

$$(8,98),\ (9,87),\ (9,88),\ (9,89),\ (9,90),\ (12,87),\ (9,99),\ (12,88),$$
$$(12,89),\ (9,100),\ (9,101),\ (9,102),\ (10,91),\ (10,92),\ (10,93),\ (10,94),$$
$$(11,95),\ (11,96),\ (11,97),\ (11,98),\ (12,99),\ (12,100),\ (12,101),\ (12,102),$$
$$(133,143),\ (134,144),\ (135,145),\ (136,146),\ (137,147),\ (138,148),\ (139,149),$$
$$(140,150),\ (141,151),\ (142,152)\}$$

The N-body problem in polynomial form of the third degree

The system of differential equations for the N-body problem in polynomial form of the third degree has the form:

$$\frac{dp_{i,j}}{dt} = -k^2(m_0+m_i)g_{i,j}v_{0,i} + k^2 \sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})v_{w,i} - g_{w,j}v_{0,w}],$$

$$\frac{dg_{i,j}}{dt} = p_{i,j},\quad \frac{dd_{s,i}}{dt} = -v_{s,i}w_{s,i},\quad \frac{dq_{s,i}}{dt} = -2d_{s,i}v_{s,i}w_{s,i},\quad \frac{dv_{s,i}}{dt} = -3q_{s,i}v_{s,i}w_{s,i},$$

$$\frac{dw_{s,i}}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\Big[(p_{i,j}-p_{s,j})^2 + k^2(g_{i,j}-g_{s,j})\times$$
$$\times\Big((m_0+m_s)g_{s,j}v_{0,s} - (m_0+m_i)g_{i,j}v_{0,i}+ \tag{2.4}$$
$$+\sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{i,j})v_{w,i}-g_{w,j}v_{0,w}-\sum_{w\in[1,l],w\neq i} m_w[(g_{w,j}-g_{s,j})v_{w,s}-g_{w,s}v_{0,w}]\Big)\Big].$$

Let $N=5$. Let's write down the list of variables and the corresponding additional variables for the convenience of working with monomials.

List of variables:

$$\{g_{1,1},\ g_{1,2},\ g_{1,3},\ g_{2,1},\ g_{2,2},\ g_{2,3},\ g_{3,1},\ g_{3,2},\ g_{3,3},\ g_{4,1},\ g_{4,2},\ g_{4,3},$$
$$p_{1,1},\ p_{1,2},\ p_{1,3},\ p_{2,1},\ p_{2,2},\ p_{2,3},\ p_{3,1},\ p_{3,2},\ p_{3,3},\ p_{4,1},\ p_{4,2},\ p_{4,3},$$
$$d_{0,1},\ d_{0,2},\ d_{0,3},\ d_{0,4},\ d_{1,2},\ d_{1,3},\ d_{2,3},\ d_{1,4},\ d_{2,4},\ d_{3,4},$$
$$q_{0,1},\ q_{0,2},\ q_{0,3},\ q_{0,4},\ q_{1,2},\ q_{1,3},\ q_{2,3},\ q_{1,4},\ q_{2,4},\ q_{3,4},$$
$$v_{0,1},\ v_{0,2},\ v_{0,3},\ v_{0,4},\ v_{1,2},\ v_{1,3},\ v_{2,3},\ v_{1,4},\ v_{2,4},\ v_{3,4},$$
$$w_{0,1},\ w_{0,2},\ w_{0,3},\ w_{0,4},\ w_{1,2},\ w_{1,3},\ w_{2,3},\ w_{1,4},\ w_{2,4},\ w_{3,4}\}$$

Additional variables:

$$\{g_{1,1}\to x_1,\ g_{1,2}\to x_2,\ g_{1,3}\to x_3,\ g_{2,1}\to x_4,\ g_{2,2}\to x_5,\ g_{2,3}\to x_6,$$

$$g_{3,1} \to x_7,\ g_{3,2} \to x_8,\ g_{3,3} \to x_9,\ g_{4,1} \to x_{10},\ g_{4,2} \to x_{11},\ g_{4,3} \to x_{12},$$

$$p_{1,1} \to x_{13},\ p_{1,2} \to x_{14},\ p_{1,3} \to x_{15},\ p_{2,1} \to x_{16},\ p_{2,2} \to x_{17},\ p_{2,3} \to x_{18},$$

$$p_{3,1} \to x_{19},\ p_{3,2} \to x_{20},\ p_{3,3} \to x_{21},\ p_{4,1} \to x_{22},\ p_{4,2} \to x_{23},\ p_{4,3} \to x_{24},$$

$$d_{0,1} \to x_{25},\ d_{0,2} \to x_{26},\ d_{0,3} \to x_{27},\ d_{0,4} \to x_{28},$$

$$d_{1,2} \to x_{29},\ d_{1,3} \to x_{30},\ d_{2,3} \to x_{31},\ d_{1,4} \to x_{32},\ d_{2,4} \to x_{33},\ d_{3,4} \to x_{34},$$

$$q_{0,1} \to x_{35},\ q_{0,2} \to x_{36},\ q_{0,3} \to x_{37},\ q_{0,4} \to x_{38},$$

$$q_{1,2} \to x_{39},\ q_{1,3} \to x_{40},\ q_{2,3} \to x_{41},\ q_{1,4} \to x_{42},\ q_{2,4} \to x_{43},\ q_{3,4} \to x_{44},$$

$$v_{0,1} \to x_{45},\ v_{0,2} \to x_{46},\ v_{0,3} \to x_{47},\ v_{0,4} \to x_{48},$$

$$v_{1,2} \to x_{49},\ v_{1,3} \to x_{50},\ v_{2,3} \to x_{51},\ v_{1,4} \to x_{52},\ v_{2,4} \to x_{53},\ v_{3,4} \to x_{54},$$

$$w_{0,1} \to x_{55},\ w_{0,2} \to x_{56},\ w_{0,3} \to x_{57},\ w_{0,4} \to x_{58},$$

$$w_{1,2} \to x_{59},\ w_{1,3} \to x_{60},\ w_{2,3} \to x_{61},\ w_{1,4} \to x_{62},\ w_{2,4} \to x_{63},\ w_{3,4} \to x_{64}\}$$

The gotten set of monomials is an input argument for the program from Appendix A:

$$\{x_1x_{45},\ x_1x_{49},\ x_1x_{50},\ x_1x_{52},\ x_2x_{45},\ x_2x_{49},\ x_2x_{50},\ x_2x_{52},\ x_3x_{45},\ x_3x_{49},$$

$$x_3x_{50},\ x_3x_{52},\ x_4x_{46},\ x_4x_{49},\ x_4x_{51},\ x_4x_{53},\ x_5x_{46},\ x_5x_{49},\ x_5x_{51},\ x_5x_{53},$$

$$x_6x_{46},\ x_6x_{49},\ x_6x_{51},\ x_6x_{53},\ x_7x_{47},\ x_7x_{50},\ x_7x_{51},\ x_7x_{54},\ x_8x_{47},\ x_8x_{50},$$

$$x_8x_{51},\ x_8x_{54},\ x_9x_{47},\ x_9x_{50},\ x_9x_{51},\ x_9x_{54},\ x_{10}x_{48},\ x_{10}x_{52},\ x_{10}x_{53},\ x_{10}x_{54},$$

$$x_{11}x_{48},\ x_{11}x_{52},\ x_{11}x_{53},\ x_{11}x_{54},\ x_{12}x_{48},\ x_{12}x_{52},\ x_{12}x_{53},\ x_{12}x_{54},\ x_{13}^2,\ x_{13}x_{16},$$

$$x_{13}x_{19},\ x_{13}x_{22},\ x_{14}^2,\ x_{14}x_{17},\ x_{14}x_{20},\ x_{14}x_{23},\ x_{15}^2,\ x_{15}x_{18},\ x_{15}x_{21},\ x_{15}x_{24},$$

$$x_{16}^2,\ x_{16}x_{19},\ x_{16}x_{22},\ x_{17}^2,\ x_{17}x_{20},\ x_{17}x_{23},\ x_{18}^2,\ x_{18}x_{21},\ x_{18}x_{24},\ x_{19}^2,$$

$$x_{19}x_{22},\ x_{20}^2,\ x_{20}x_{23},\ x_{21}^2,\ x_{21}x_{24},\ x_{22}^2,\ x_{23}^2,\ x_{24}^2,\ x_{45}x_{55},\ x_{46}x_{56},\ x_{47}x_{57},$$

$$x_{48}x_{58},\ x_{49}x_{59},\ x_{50}x_{60},\ x_{51}x_{61},\ x_{52}x_{62},\ x_{53}x_{63},\ x_{54}x_{64},\ x_1^2x_{45},\ x_1^2x_{49},$$

$$x_1^2x_{50},\ x_1^2x_{52},\ x_1x_4x_{45},\ x_1x_4x_{46},\ x_1x_4x_{49},\ x_1x_4x_{50},\ x_1x_4x_{51},\ x_1x_4x_{52},$$

$$x_1x_4x_{53},\ x_1x_7x_{45},\ x_1x_7x_{47},\ x_1x_7x_{49},\ x_1x_7x_{50},\ x_1x_7x_{51},\ x_1x_7x_{52},\ x_1x_7x_{54},$$

$$x_1x_{10}x_{45},\ x_1x_{10}x_{48},\ x_1x_{10}x_{49},\ x_1x_{10}x_{50},\ x_1x_{10}x_{52},\ x_1x_{10}x_{53},\ x_1x_{10}x_{54},\ x_2^2x_{45},$$

$$x_2^2x_{49},\ x_2^2x_{50},\ x_2^2x_{52},\ x_2x_5x_{45},\ x_2x_5x_{46},\ x_2x_5x_{49},\ x_2x_5x_{50},\ x_2x_5x_{51},$$

$$x_2x_5x_{52},\ x_2x_5x_{53},\ x_2x_8x_{45},\ x_2x_8x_{47},\ x_2x_8x_{49},\ x_2x_8x_{50},\ x_2x_8x_{51},\ x_2x_8x_{52},$$

$$x_2x_8x_{54},\ x_2x_{11}x_{45},\ x_2x_{11}x_{48},\ x_2x_{11}x_{49},\ x_2x_{11}x_{50},\ x_2x_{11}x_{52},\ x_2x_{11}x_{53},\ x_2x_{11}x_{54},$$

$$x_3^2x_{45},\ x_3^2x_{49},\ x_3^2x_{50},\ x_3^2x_{52},\ x_3x_6x_{45},\ x_3x_6x_{46},\ x_3x_6x_{49},\ x_3x_6x_{50},$$

$$x_3x_6x_{51},\ x_3x_6x_{52},\ x_3x_6x_{53},\ x_3x_9x_{45},\ x_3x_9x_{47},\ x_3x_9x_{49},\ x_3x_9x_{50},\ x_3x_9x_{51},$$

$$x_3x_9x_{52},\ x_3x_9x_{54},\ x_3x_{12}x_{45},\ x_3x_{12}x_{48},\ x_3x_{12}x_{49},\ x_3x_{12}x_{50},\ x_3x_{12}x_{52},\ x_3x_{12}x_{53},$$

$$x_3x_{12}x_{54},\ x_4^2x_{46},\ x_4^2x_{49},\ x_4^2x_{51},\ x_4^2x_{53},\ x_4x_7x_{46},\ x_4x_7x_{47},\ x_4x_7x_{49},$$

$$x_4x_7x_{50},\ x_4x_7x_{51},\ x_4x_7x_{53},\ x_4x_7x_{54},\ x_4x_{10}x_{46},\ x_4x_{10}x_{48},\ x_4x_{10}x_{49},\ x_4x_{10}x_{51},$$

$$x_4x_{10}x_{52},\ x_4x_{10}x_{53},\ x_4x_{10}x_{54},\ x_5^2x_{46},\ x_5^2x_{49},\ x_5^2x_{51},\ x_5^2x_{53},\ x_5x_8x_{46},$$

$$x_5x_8x_{47},\ x_5x_8x_{49},\ x_5x_8x_{50},\ x_5x_8x_{51},\ x_5x_8x_{53},\ x_5x_8x_{54},\ x_5x_{11}x_{46},\ x_5x_{11}x_{48},$$

$$x_5x_{11}x_{49},\ x_5x_{11}x_{51},\ x_5x_{11}x_{52},\ x_5x_{11}x_{53},\ x_5x_{11}x_{54},\ x_6^2x_{46},\ x_6^2x_{49},\ x_6^2x_{51},$$

$$x_6^2x_{53},\ x_6x_9x_{46},\ x_6x_9x_{47},\ x_6x_9x_{49},\ x_6x_9x_{50},\ x_6x_9x_{51},\ x_6x_9x_{53},\ x_6x_9x_{54},$$

$$x_6x_{12}x_{46},\ x_6x_{12}x_{48},\ x_6x_{12}x_{49},\ x_6x_{12}x_{51},\ x_6x_{12}x_{52},\ x_6x_{12}x_{53},\ x_6x_{12}x_{54},\ x_7^2x_{47},$$

$$x_7^2x_{50},\ x_7^2x_{51},\ x_7^2x_{54},\ x_7x_{10}x_{47},\ x_7x_{10}x_{48},\ x_7x_{10}x_{50},\ x_7x_{10}x_{51},\ x_7x_{10}x_{52},$$

$$x_7x_{10}x_{53},\ x_7x_{10}x_{54},\ x_8^2x_{47},\ x_8^2x_{50},\ x_8^2x_{51},\ x_8^2x_{54},\ x_8x_{11}x_{47},\ x_8x_{11}x_{48},$$

$$x_8x_{11}x_{50},\ x_8x_{11}x_{51},\ x_8x_{11}x_{52},\ x_8x_{11}x_{53},\ x_8x_{11}x_{54},\ x_9^2x_{47},\ x_9^2x_{50},\ x_9^2x_{51},$$

$$x_9^2x_{54},\ x_9x_{12}x_{47},\ x_9x_{12}x_{48},\ x_9x_{12}x_{50},\ x_9x_{12}x_{51},\ x_9x_{12}x_{52},\ x_9x_{12}x_{53},\ x_9x_{12}x_{54},$$

$$x_{10}^2x_{48},\ x_{10}^2x_{52},\ x_{10}^2x_{53},\ x_{10}^2x_{54},\ x_{11}^2x_{48},\ x_{11}^2x_{52},\ x_{11}^2x_{53},\ x_{11}^2x_{54},\ x_{12}^2x_{48},\ x_{12}^2x_{52},$$

$$x_{12}^2x_{53},\ x_{12}^2x_{54},\ x_{25}x_{45}x_{55},\ x_{26}x_{46}x_{56},\ x_{27}x_{47}x_{57},\ x_{28}x_{48}x_{58},\ x_{29}x_{49}x_{59},\ x_{30}x_{50}x_{60},$$

$$x_{31}x_{51}x_{61},\ x_{32}x_{52}x_{62},\ x_{33}x_{53}x_{63},\ x_{34}x_{54}x_{64},\ x_{35}x_{45}x_{55},\ x_{36}x_{46}x_{56},\ x_{37}x_{47}x_{57},$$

$$x_{38}x_{48}x_{58},\ x_{39}x_{49}x_{59},\ x_{40}x_{50}x_{60},\ x_{41}x_{51}x_{61},\ x_{42}x_{52}x_{62},\ x_{43}x_{53}x_{63},\ x_{44}x_{54}x_{64}\}.$$

In this example, there is no need to add monomials, since the original set is already a span. The result of the program is the following scheme:

$$S = \{(1,45),\ (1,49),\ (1,50),\ (1,52),\ (2,45),\ (2,49),\ (2,50),\ (2,52),$$

$$(3,45),\ (3,49),\ (3,50),\ (3,52),\ (4,46),\ (4,49),\ (4,51),\ (4,53),$$

$$(5,46),\ (5,49),\ (5,51),\ (5,53),\ (6,46),\ (6,49),\ (6,51),\ (6,53),$$

$$(7,47),\ (7,50),\ (7,51),\ (7,54),\ (8,47),\ (8,50),\ (8,51),\ (8,54),$$

$$(9,47),\ (9,50),\ (9,51),\ (9,54),\ (10,48),\ (10,52),\ (10,53),\ (10,54),$$

$$(11,48),\ (11,52),\ (11,53),\ (11,54),\ (12,48),\ (12,52),\ (12,53),\ (12,54),$$

$(13,13)$, $(13,16)$, $(13,19)$, $(13,22)$, $(14,14)$, $(14,17)$, $(14,20)$, $(14,23)$,
$(15,15)$, $(15,18)$, $(15,21)$, $(15,24)$, $(16,16)$, $(16,19)$, $(16,22)$, $(17,17)$,
$(17,20)$, $(17,23)$, $(18,18)$, $(18,21)$, $(18,24)$, $(19,19)$, $(19,22)$, $(20,20)$,
$(20,23)$, $(21,21)$, $(21,24)$, $(22,22)$, $(23,23)$, $(24,24)$, $(45,55)$, $(46,56)$,
$(47,57)$, $(48,58)$, $(49,59)$, $(50,60)$, $(51,61)$, $(52,62)$, $(53,63)$, $(54,64)$,
$(1,65)$, $(1,66)$, $(1,67)$, $(1,68)$, $(4,65)$, $(1,77)$, $(1,78)$, $(4,67)$,
$(1,79)$, $(4,68)$, $(1,80)$, $(7,65)$, $(1,89)$, $(7,66)$, $(1,90)$, $(1,91)$,
$(7,68)$, $(1,92)$, $(10,65)$, $(1,101)$, $(10,66)$, $(10,67)$, $(1,102)$, $(1,103)$,
$(1,104)$, $(2,69)$, $(2,70)$, $(2,71)$, $(2,72)$, $(5,69)$, $(2,81)$, $(2,82)$,
$(5,71)$, $(2,83)$, $(5,72)$, $(2,84)$, $(8,69)$, $(2,93)$, $(8,70)$, $(2,94)$,
$(2,95)$, $(8,72)$, $(2,96)$, $(11,69)$, $(2,105)$, $(11,70)$, $(11,71)$, $(2,106)$,
$(2,107)$, $(2,108)$, $(3,73)$, $(3,74)$, $(3,75)$, $(3,76)$, $(6,73)$, $(3,85)$,
$(3,86)$, $(6,75)$, $(3,87)$, $(6,76)$, $(3,88)$, $(9,73)$, $(3,97)$, $(9,74)$,
$(3,98)$, $(3,99)$, $(9,76)$, $(3,100)$, $(12,73)$, $(3,109)$, $(12,74)$, $(12,75)$,
$(3,110)$, $(3,111)$, $(3,112)$, $(4,77)$, $(4,78)$, $(4,79)$, $(4,80)$, $(7,77)$,
$(4,89)$, $(7,78)$, $(4,90)$, $(4,91)$, $(7,80)$, $(4,92)$, $(10,77)$, $(4,101)$,
$(10,78)$, $(10,79)$, $(4,102)$, $(4,103)$, $(4,104)$, $(5,81)$, $(5,82)$, $(5,83)$,
$(5,84)$, $(8,81)$, $(5,93)$, $(8,82)$, $(5,94)$, $(5,95)$, $(8,84)$, $(5,96)$,
$(11,81)$, $(5,105)$, $(11,82)$, $(11,83)$, $(5,106)$, $(5,107)$, $(5,108)$, $(6,85)$,
$(6,86)$, $(6,87)$, $(6,88)$, $(9,85)$, $(6,97)$, $(9,86)$, $(6,98)$, $(6,99)$,
$(9,88)$, $(6,100)$, $(12,85)$, $(6,109)$, $(12,86)$, $(12,87)$, $(6,110)$, $(6,111)$,
$(6,112)$, $(7,89)$, $(7,90)$, $(7,91)$, $(7,92)$, $(10,89)$, $(7,101)$, $(10,90)$,
$(10,91)$, $(7,102)$, $(7,103)$, $(7,104)$, $(8,93)$, $(8,94)$, $(8,95)$, $(8,96)$,
$(11,93)$, $(8,105)$, $(11,94)$, $(11,95)$, $(8,106)$, $(8,107)$, $(8,108)$, $(9,97)$,
$(9,98)$, $(9,99)$, $(9,100)$, $(12,97)$, $(9,109)$, $(12,98)$, $(12,99)$, $(9,110)$,
$(9,111)$, $(9,112)$, $(10,101)$, $(10,102)$, $(10,103)$, $(10,104)$, $(11,105)$, $(11,106)$,
$(11,107)$, $(11,108)$, $(12,109)$, $(12,110)$, $(12,111)$, $(12,112)$, $(25,143)$, $(26,144)$,

$$(27, 145),\ (28, 146),\ (29, 147),\ (30, 148),\ (31, 149),\ (32, 150),\ (33, 151),\ (34, 152),$$
$$(35, 143),\ (36, 144),\ (37, 145),\ (38, 146),\ (39, 147),\ (40, 148),\ (41, 149),\ (42, 150),$$
$$(43, 151),\ (44, 152)\}.$$

Chapter 3. Taylor series methods

Many sources were used in writing this chapter: [4, 5, 8, 98].

This chapter is divided into five sections. The first section describes the classical Taylor series method.

The second section presents several methods for finding the Taylor coefficients recursively.

In the third section, Parker - Sochacki method is presented.

The fourth section provides a complete description of the Taylor series in polynomial form. Calculations of the Taylor coefficients are derived, the method of Taylor series for the polynomial system is formulated, the error estimates of the formula for the linear and non-linear problem are presented. Auxiliary algorithms are described, the algorithm of the Taylor series method is constructed in polynomial form. In the last subsection of the second section (3.2.5) is presented in operator form.

The fifth section describes the implementation structure of the presented method (from the fourth section of this chapter) with a description of the main functions and subprograms.

3.1 Classical Taylor series method

Consider an ordinary differential equation:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \tag{3.1}$$

satisfying the initial condition:

$$x(t_0) = x_0. \tag{3.2}$$

Suppose that the right-hand side $f(x,t)$ of the differential equation (3.1) has continuous partial derivatives up to the order s. Then the desired solution $x(t)$ has continuous derivatives up to the $(s+1)$-th order inclusive. We write down the exact value of the solution at the node t_1 by the formula:

$$x(t_1) = x_0 + hx_0' + \frac{h^2}{2}x_0'' + ... + \frac{h^s}{s!}x_0^{(s)} + \frac{h^{(s+1)}}{(s+1)!}x^{(s+1)}(\xi), \tag{3.3}$$

where

$$x_0^{(k)} = x^{(k)}(t_0), \quad h = t_1 - t_0, \quad t_0 < \xi < t_1.$$

It may turn out that to obtain a solution with the required accuracy it is not required to use all the terms of formula (3.3). The derivatives included in the right-hand side of formula (3.3) can actually be found:

$$x_0' = f(x_0, t_0),$$

$$x_0'' = \{f_t' + f f_x'\}_0,$$

$$x_0''' = \{f_{tt}'' + 2f f_{tx}'' + f^2 f_{xx}'' + (f_t' + f f_x') f_x'\}_0.$$

$$\dots$$

3.2 Several ways to recursively find the Taylor coefficients

The source was used when writing this section: [4].

Methods for stepwise numerical integration of the Cauchy problem

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \in R^n, \tag{3.4}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{3.5}$$

that allow, starting from the value $x(t_0)$ of the solution at the initial moment of t_0, sequentially obtain approximate values $\widetilde{x}(t_1), \dots, \widetilde{x}(t_m), \dots$ solutions at points $t_1 = t_0 + h_1, \dots, t_m = t_{m-1} + h_m, \dots$ The numbers h_1, *dots* (usually they are chosen positive) are called integration steps (h_m is the m-th step of integration), the numbers t_1, t_2, *dots* - nodes of a table or a grid of numerical integration, the set of nodes is called a grid and, finally, the quantities $\widetilde{x}(t_1), \widetilde{x}(t_2), \dots$ are called the values of the solution at the nodes of the grid or the values of the numerical integration table. If $h_1 = h_2 = \dots$, then one speaks of a uniform grid or integration with a constant step.

Let assume that the right-hand side of equation (3.4) is holomorphic in the variables $(x, t) = (x_1, x_2, ..., X_n, t)$ in the vicinity of the initial point $(x_0, t_0) = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}, t)$. As is known, in this case, the unique solution of problem (3.4), (3.5) in some region of the initial moment t_0 is represented by a Taylor series with a nonzero convergence radius $R(t_0, x_0)$. Introduce the notation:

$$
\begin{aligned}
&xT_M(t, t_0, x_0) = \sum_{l=0}^{M} \frac{x^{(l)}(t-t_0)^l}{l!},\\
&x^{(l)} = x^{(l)}(t_0, x_0) = \Big(\frac{d^l x}{dt^l}\Big)_{t=t_0},\\
&O_a(b) = \{t \in C \big| |t-b| < a\}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Thus, $R(t_0, x_0)$ is the radius of convergence of the series $xT_{\inf}(t, t_0, x_0)$, and $O_R(b)$ is its circle of convergence. The Taylor series method for numerical integration of problem (3.4), (3.5) consists in constructing a table of approximate values

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{x}(t_1) = xT_{M_1}(t_1, t_0, x_0),\\
&\widetilde{x}(t_m) = xT_{M_m}(t_m, t_{m-1}, \widetilde{x}(t_{m-1})),\\
&\dots
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

where $M_1, M_2, ...$ are integers, $t_1 = t_0 + h_1,\ t_2 = t_1 + h_1, ...$, a positive numbers $h_1, h_2, ...$ satisfy the inequalities

$$
h_k < R(t_{k-1},\ \widetilde{x}(t_{k-1})). \tag{3.8}
$$

The value M_k is called the order of the method at the k-th step. In order to calculate $xT_M(t, \tau, x^\tau)$, you need to calculate the values $x^{(l)}(\tau, x^\tau),\ l = 1, ..., M$, i.e. the values of the first M derivatives of the solution of equation (3.4) at the time $t = \tau$ provided that the value $x(\tau) = x^\tau = \big(\frac{d^0 x}{dt^0}\big)_{t=\tau}$ is known. To successfully apply the Taylor series method to problem (3.4), (3.5), the following scheme is used (Steffen's method in celestial mechanics [114, 115]): equations (3.4) by introducing additional variables lead to the form of a polynomial system - best of all autonomous, and then the Taylor coefficients $\alpha_l = \frac{x^{(l)}}{l!}$ are found recursively by the method of undefined coefficients.

Consider two ways to recursively find the Taylor coefficients of a vector function satisfying a polynomial system.

The first way. Consider the Cauchy problem

$$
\frac{dx_k}{dt} = X_k\big(\{a_k[i]\}, x_1, ..., x_n\big), \tag{3.9}
$$

$$
x_k(t_0) = c_k,\ k = 1, ..., n, \tag{3.10}
$$

where

$$X_k = \sum_{m=0}^{L} \sum_{i \in I_n(m)} a_k[i] x_1^{i_1} \cdot ... \cdot x_n^{i_n}, \tag{3.11}$$

$t, t_0, c_k \in C$; L – integers;
$I_n(m) = \{i = (i_1, ..., i_n) \in Z^n | i_1 + ... + i_n = m;\ i_1, ..., i_n \geqslant 0\}$;
$a_k[i]$ – complex-valued argument functions t, holomorphic in a neighbourhood of a point t_0.
Let's $\{x_{k,j}\}_{j=0}^{\infty}$ – sequence of Taylor coefficients of the function x_k in its expansion in powers $t - t_0$, $\{a_{k,j}[i]\}_{j=0}^{\infty}$ – similar sequence for function $a_k[i]$. Let's introduce the notation:

$$x_k^j = \sum_{j=0}^{r} x_{k,j}(t - t_0)^j, \quad a_k^r[i] = \sum_{j=0}^{r} a_{kj}[i](t - t_0)^j. \tag{3.12}$$

Symbol

$$\Big\langle X_k\big(\{a_k^r\},\ x_1^r, ..., x_n^r\big)\Big\rangle \tag{3.13}$$

denotes the coefficient at $(t - t_0)^r$ of the polynomial

$$X_k\big(\{a_k^r[i]\},\ x_1^r, ..., x_n^r\big) \tag{3.14}$$

in powers of $t - t_0$. The calculation of this polynomial consists of multiplications and additions of polynomials; to obtain its terms up to the r-th order inclusive, when performing these operations, it is sufficient to keep each time in terms up to the r-th order inclusive.

If we substitute (3.9) the functions x_1,....., x_n, reduce similar terms and equate to zero all the coefficients of the resulting power series (according to the uniqueness principle for analytic functions, if an analytic function is equal to zero in some neighbourhood of the point t_0, then all its coefficients of the Taylor expansion in power $t - t_0$ are equal to zero), then the following recurrence relations can be obtained from the equations obtained in this way:

$$\begin{aligned} &x_{k,r+1} = \frac{1}{r+1}\Big\langle X_k\big(\{a_k^r[i]\},\ x_1^r, ..., x_n^r\big)\Big\rangle, \\ &x_{k,0} = c_k;\ k = 1, ..., n;\ r = 0, 1, ... \end{aligned} \tag{3.15}$$

Remarks.

1. Formulas (3.15) are also valid for $L = +\infty$ in (3.11), i.e. they are also true in the case of the analytic (and not necessarily polynomial) system (3.9).
2. To implement formulas (3.15), it is advisable to have at our disposal procedures of algebraic (except division) operations on polynomials of one argument $\lambda = t - t_0$ with retention in all intermediate calculations of terms only up to the r-th order. To find the Taylor coefficients of the solution to an arbitrary analytic Cauchy problem (3.9), (3.10) using formulas (3.15), a special procedure can be written that could be used in applied problems provided that the expansion (3.11) is known.

The second way is to find explicit recurrent formulas for the values x_{kj}. Consider the quadratic Cauchy problem:

$$\frac{dx_k}{dt} = a_k + \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}x_l + \sum_{i,j=1}^{n} a_{k,i,j}x_ix_j, \tag{3.16}$$

$$x_k(t_0) = c_k, \tag{3.17}$$

t_0, c_k, a_k, $a_{k,l}$, $a_{k,j,l}$ – complex constants, t – complex variable. Substituting into the equations (3.16) the expansions

$$x_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k,m}(t - t_0)^m, \tag{3.18}$$

we get

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)x_{k,m+1}(t-t_0)^m - \Big(a_k + \sum_{l=1}^{n} a_{k,l} \sum_{m=0}^{\infty} x_{l,m}(t-t_0)^m + \\ + \sum_{i,j=1}^{n} a_{k,i,j} \sum_{m=0}^{\infty} \big(\sum_{p=0}^{m} x_{i,p}x_{j,m-p}\big)(t-t_0)^m\Big) = 0.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Reducing similar terms and equating all the coefficients of the resulting power series to zero, we obtain the formulas:

$$\begin{aligned}x_{k,m+1} &= \frac{1}{m+1}\Big[\delta_m a_k + \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}x_{l,m} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{k,i,j} \sum_{p=0}^{m} x_{i,p}x_{j,m-p}\Big]; \\ x_{k,0} &= c_k, \; k = 1, ..., n, \; m = 0, 1, ...,\end{aligned} \tag{3.20}$$

where $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = ... = 0$.

Remarks.

1. It is not difficult to derive similar formulas for the case of variable coefficients $a_k,\ a_{k,l},\ a_{k,i,j}$ holomorphic in t in a neighbourhood of t_0.
2. Formulas (3.20) and similar formulas for the case of variable coefficients can be used to find the Taylor coefficients of the solution to the general polynomial system (3.9), (3.11), since it leads to the form (3.16) by introducing additional variables $x[i_1, ..., i_n] = x_1^{i_1}, ..., x_n^{i_n},\ i_1 \leqslant 0, ..., i_n \leqslant 0;$ $i_1 + ... + i_n \geqslant L$.

Above, the quadratic Cauchy problem was considered. Let's derive recurrent formulas for the general case:

$$\frac{dx_k}{dt} = a_k + \sum_{m=1}^{L}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{i_{m-1}} a_{k,i_1,\ldots,i_m} x_{i_1}\cdots x_{i_m},\ \ k = 1, \ldots n,$$

$$x_k(t_0) = x_{k,0}.$$

Substituting into the equations above the expansions

$$x_k = \sum_{q=0}^{\infty} x_{k,q}(t - t_0)^q,$$

reducing similar terms and equating all the coefficients of the resulting power series to zero, we obtain the formulas:

$$x_{k,q+1} = \frac{1}{q+1}\Big[\delta_q a_k + \sum_{m=1}^{L}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{i_{m-1}} a_{k,i_1,\ldots,i_m} \sum_{q_1+\cdots+q_m=q} x_{i_1 q_1}\cdots x_{i_m q_m}\Big],\ q = 0, 1, \ldots$$

where $\delta_q \ = \begin{cases} 1, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$

3.3 Parker - Sochacki method

Consider the Cauchy problem for systems of first-order differential equations

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t).$$

Expansion the system variables in a Maclaurin series:

$$x(t) = \sum_{p=0}^{\infty} x_p t^p,$$

where $x_0 = x(0),\ x_1 = x'(0),\ x_2 = \frac{x''(0)}{2!}$ and so on.
Let's write the first derivative for the series:

$$x'(t) = \sum_{p=0}^{\infty} x'_p t^p = \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) x_{(p+1)} t^p.$$

Equating:

$$x'_p = (p+1) x_{(p+1)},$$

then the formulas for calculating the coefficients of the Maclaurin series:

$$x_{p+1} = \frac{x'_p}{p+1}.$$

Remark: Although the methods described above are easy to program, they are inferior to methods using a schemes.

3.4 Taylor series method for polynomial systems

Many sources were used in writing this section: [8, 10].

This section considers three forms of specifying the polynomial Cauchy problem, formulas for the Taylor coefficients, and various estimates for local solutions.

3.4.1 Taylor coefficients

Consider the autonomous Cauchy problem

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.21}$$

where $f = (f_1, ..., f_n),\ x = (x_1, ..., x_n),\ x_0 = (x_{10}, ..., x_{n0}) \in R^n,\ t,\ t_0 \in R$. Let us denote its solution $x(t, t_0, x_0),\ x(t)$, or x. The system (3.24) (and the Cauchy problem) is called polynomial if all functions f_i – algebraic polynomials by $x_1, ..., x_n$. Further, three forms of specifying the polynomial system are used.

The first form of representation of the polynomial Cauchy problem is:

$$\frac{dx}{dt} = a + \sum_{m=1}^{L+1} \sum_{i \in I(m)} a[i]x^i, \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.22}$$

where

$i = (i_1, ..., i_n),\ i_1, ..., i_n \in Z,\ L \in [0 : \infty),\ I(m) = \{i \in Z^n | i_1, ..., i_n \geqslant 0, |i| = m\}$, $|i| = i_1 + ... + i_n,\ x = (x_1, ..., x_n) \in R^n,\ x^i = x_1^{i_1} \cdot ... \cdot x_n^{i_n},\ x_0 = (x_{10}, ..., x_{n0}) =$ $= (x_1(t_0), ..., x_n(t_0)) \in R^n,\ a = (a_1, ..., a_n) \in R^n,\ a[i] = (a_1[i], ..., a_n[i])$.

The second form of representation of problem (3.24) is as follows:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=0}^{u} a_{j,k} x^{i(k)}, \quad x_j(t_0) = x_{j0},\ j \in [1 : n], \tag{3.23}$$

where $x^{i(0)} = 1, ..., x^{i(n)} = x_n$, a $x^{i(n+1)}, ..., x^{i(u)}$ – all different non-linear monomials on the right-hand sides of equations (3.25).

The third form – hierarchical, it is represented by the formulas:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=0}^{u(1)} a_{s,j,k} y_1^{i(1,k)},\ j \in [1 : n], \tag{3.24}$$

$$y_r^{i(r,j)} = \sum_{k=0}^{u(r+1)} a_{r,j,k} y_{r+1}^{i(r+1,k)},\ j \in [1 : m(r)],\ r \in [1 : s-1], \tag{3.25}$$

in which the notation is used:

$$y_r = (y_{r,1}, ..., y_{r,m(r)}),\ r \in [1 : s],\ y_s = x,\ \text{т.е. } y_{s,1} = x_1, ..., y_{s,m(s)} = x_n,\ m(s) = n;$$

$$y_r^{i(r,0)} = 1,\ y_r^{i(r,1)} = y_{r,1},\ ...,\ y_r^{i(r,m(s))} = y_{r,m(s)},\ r \in [1 : s];$$

for all $r \in [1 : s]$ quantities $y_r^{i(r,m(s)+1)}, ..., y_r^{i(r,u(r))}$ – various non-linear monomials by $y_{r,1}, ..., y_{r,m(r)}$ (in particular, for $r = s$ these are monomials with respect to $x_1, ..., x_n$).

In formulas (3.27), (3.28) the value s is any fixed integer number. We will call it the number of levels of the third form. For $s = 1$, the third form coincides with the second. For $s \in [2 : \infty)$, the third form is a generalization of the second. At the same time, by simple multiplication of polynomials, the third form can always be reduced to a form with fewer levels and, ultimately, to the second. The need for the third form may arise for various reasons, but it is important that ODE systems are reduced to this form of a polynomial system as a result of applying the method of additional variables to them in the most general case in an automated mode.

Supplement, if necessary, the set of monomials T (monomials on the right-hand side of the differential equation) to the span T' with the scheme

$$S(T) = \big((p(n+1), q(n+1)), \ldots, (p(u), q(u))\big)$$

and turn to equations (3.26) in order to obtain the required formulas for the Taylor coefficients. Substituting

$$x^{i(k)} = \sum_{p=0}^{\infty} x_{k,p}(t-t_0)^p, \; k \in [0:u], \tag{3.26}$$

into equality

$$x^{i(k)} = x^{i(p(k))} \cdot x^{i(q(k))}, \; k \in [n+1, u], \tag{3.27}$$

and in equations (3.26), we find

$$\sum_{p=0}^{\infty} [x_{k,p} - \sum_{l=0}^{p} x_{p(k),l} x_{q(k),p-l}](t-t_0)^p = 0, \tag{3.28}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} [(p+1)x_{j,p+1} - \sum_{k=0}^{u} a_{j,k} x_{k,p}](t-t_0)^p = 0. \tag{3.29}$$

Equating to zero the coefficients of $(t-t_0)^p$ in equalities (3.31), (3.32) and recalling the initial conditions $x(t_0) = x_0$, we obtain the calculation formulae

$$x_{k,0} = x_k(t_0), \; k \in [1:n], \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} x_{k,p} &= \sum_{l=0}^{p} x_{p(k),l}\; x_{q(k),p-l}, \; k \in [n+1:u], \; (p = 0, 1, \ldots); \\ x_{k,p+1} &= (p+1)^{-1} \sum_{l=0}^{u} a_{k,l}\; x_{l,p}, \; k \in [1:n], \; (p = 0, 1, \ldots); \end{aligned} \tag{3.31}$$

Formulas (3.33), (3.34) allow one to calculate sequentially all the coefficients $x_{k,p}$ of expansions (3.29) of the quantities $x_1, \ldots\ldots, x_n, x_i(n+1), \ldots\ldots, x_i(u)$ into the Taylor series. In order to use these formulae, it is enough to have at your disposal:

– initial conditions: $x_k(t_0)$, $k \in [1:n]$,

– coefficients: $a_{k,l}$, $k \in [1:n]$, $l \in [0:u]$,

– the corresponding scheme: $S(T) = \big((p(n+1), q(n+1)), \ldots, (p(u), q(u))\big)$.

It is important that the polynomial Cauchy problem itself is specified by the same quantities, and this way of setting it can be preferable not only for its step-by-step integration (by the Taylor series method, the Runge-Kutta method, etc.), but also when solving other problems related with differential equations.

3.4.2 Taylor series method formulation

This subsection considers the formulation of the Taylor series method and the estimates of the radius of convergence and the remainder for linear and non-linear problems used in its implementation.

Let's introduce the notation:

$$x^{(k)} = \frac{\partial^k x}{\partial t^k},\ x_0^{(k)} = x^{(k)}(t_0),\ |x| = \max_{i\in[1:n]} |x_i|,\ O_\rho(t_0) = \{t \in C \big| |t - t_0| < \rho\},$$

$$T_M x(t, t_0, x_0) = \sum_{m=0}^{M} x_0^{(m)} \frac{(t - t_0)^m}{m!},\ \delta T_M x(t, t_0, x_0) = x(t, t_0, x_0) - T_M x(t, t_0, x_0),$$

where T_M and δT_M – operators that decide $x(t, t_0, x_0)$ problems (3.24) match the Taylor polynomial $T_M x(t, t_0, x_0)$ and remainder $\delta T_M x(t, t_0, x_0)$ respectively. Convergence radius of the series $T_\infty x(t, t0, x0)$ denote by $R(t_0, x_0)$.

The Taylor series method for solving the Cauchy problem (3.29) consists in constructing a table of approximate values $\tilde{x}_w = \tilde{x}(t_w)$ by formulae

$$\tilde{x}_1 = T_{M_1} x(t_1, t_0, x_0), \ldots, \tilde{x}_w = T_{M_w} x(t_w, t_{w-1}, x_{w-1}), \ldots,$$

where $M_1, M_2, \ldots$ – integer numbers, $t_1 = t_0 + h_1$, $t_2 = t_1 + h_2, \ldots$, $h_1, h_2, \ldots$ satisfy the inequalities

$$|h_w| < R(t_{w-1}, \tilde{x}_{w-1}).$$

The calculation of each value $\tilde{x}(t_w)$ is called the step of the method and the number h_w is called the step size.

3.4.3 Local error estimates

In this subsection, estimates of the local error are considered in order to automate the choice of the order M_k and the step size h_k, you can use the estimates of the quantities $R(t_0, x_0)$ and $\delta T_M x(t, t_0, x_0)$.

Estimates for the linear problem.

Consider the Cauchy problem

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = a + Ax,\ x(t_0) = x_0,\ x = (x_1, ..., x_n) \in R^n, \\ &x_0 = (x_{10}, ..., x_{n0}) \in R^n,\ a = (a_1, ..., a_n) \in R^n,\ A = (a_{i,j}),\ t,\ t_0, a_{i,j} \in R. \end{aligned} \tag{3.32}$$

We introduce substitute $x_j = \alpha_j y_j,\ j \in [1 : n]$, depending on "scaling factors" $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n),\ \alpha_1, ..., \alpha_n > 0$, and notation

$$\rho(\alpha) = \frac{1}{s(\alpha)},\ s(\alpha) = \max_{i \in [1:n]} s_i(\alpha),\ s_i(\alpha) = \alpha_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j |a_{i,j}|,\ |b| = \max_{i \in [1:n]} \alpha_i^{-1} |\alpha_i|,$$

$$|y_0| = \max_{i \in [1:n]} \alpha_i^{-1} |x_{i0}|,\ T_M e^{\tau} = \sum_{m=0}^{M} \frac{\tau^m}{m!},\ u(\tau) = \delta T_M e^{\tau} = e^{\tau} - T_M e^{\tau}. \tag{3.33}$$

Statement 1. The solution $x(t, t_0, x_0)$ of the problem (3.25) satisfies the inequality

$$|\delta T_M x_i(t, t_0, x_0)| \leqslant \alpha_i (|y_0| + |b|\rho) \delta T_M e^{\frac{|t-t_0|}{\rho}},\ i \in [1 : n],\ t \in C.$$

Statement 2. Let's u^{-1} – inverse function of u by $\tau > 0$, $\chi_1, ..., \chi_n$, $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ – positive numbers and

$$\varepsilon = (|y_0| + \rho|b|)^{-1} \min_{i \in [1:n]} \frac{\varepsilon_i \chi_i}{\alpha_i}.$$

Then

$$(|t - t_0| \geqslant \rho u^{-1}(\varepsilon)) \Rightarrow (|\delta T_M x_i(t, t_0, x_0)| \leqslant \varepsilon_i \chi_i,\ i \in [1 : n]).$$

Estimates for a non-linear problem.

In problem (3.25), we set $x_j = \alpha_j y_j,\ j \in [1 : n],\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \alpha_1, ..., \alpha_n > 0$, and assume additionally that x_{j0} and α satisfy the inequalities $0 < |x_{j0}| < \alpha_j,\ j \in [1 : n]$. Let's introduce the notation:

$$\rho(\alpha) = \frac{1}{Ls(\alpha)},\ s(\alpha) = \max_{j \in [1:n]} s_j(\alpha),\ s_j(\alpha) = \alpha_j^{-1} \Big(|a_j| + \sum_{m=1}^{L+1} \sum_{|i|=m} \alpha^i |a_j[i]|\Big),$$

$$O_\rho(t_0) = \{t \in C \big| |t - t_0| < \rho\},\ b(\tau) = (1-\tau)^{\frac{-1}{L}},\ T_M b(\tau) = \sum_{m=0}^{M} \prod_{l=0}^{m-1} \frac{(\frac{1}{L}+l)\tau^m}{m!}, \tag{3.34}$$

$$v(\tau) = \delta T_M b(\tau) = b(\tau) - T_M b(\tau),\ \tau \in [0,1).$$

Statement 3. The solution $x(t, t_0, x_0)$ of the problem (3.25) regularly in a circle $O_\rho(t_0)$ and satisfies the inequality

$$|\delta T_M x_j(t, t_0, x_0)| \leqslant \alpha_j \delta T_M b(\frac{|t-t_0|}{\rho}).$$

Statement 4. If the function v^{-1} is inverse function of v,

$$\varepsilon = \min_{i \in [1:n]} (\frac{\varepsilon_i \chi_i}{\alpha_i}),\ \varepsilon_i > 0,$$

then

$$(|t - t_0| \geqslant \rho v^{-1}(\varepsilon)) \Rightarrow (|\delta T_M x_i(t, t_0, x_0)| \leqslant \varepsilon_i \chi_i,\ i \in [1:n]).$$

In what follows, we will use these statements

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n,\ \chi_1 = \alpha_1, \ldots, \chi_n = \alpha_n.$$

3.4.4 Auxiliary algorithms

The implementation of Taylor series method for polynomial ODEs is based on formulae (3.33) and (3.34) for the Taylor coefficients and algorithms for automatic selection of the step size and order, based both on statements 1 - 4 and on those commonly used in numerical analysis of heuristic considerations. We will first outline some auxiliary algorithms, then the algorithms based on them for the automatic selection of the step size and order, and then the algorithm for integrating the polynomial system of ODEs over a given interval.

The implementation of Taylor series method for polynomial ODEs is based on formulas (3.33) and (3.34) for the Taylor coefficients and algorithms for automatic selection of the step size and order, based both on statements 1 - 4 and on those commonly used in numerical analysis of heuristic considerations. We will first outline some auxiliary algorithms, then the algorithms based on them for the automatic selection of the step size and order, and then the algorithm for integrating the polynomial system of ODEs over a given interval.

Further, the values $t = t_k,\ x = x^k = \tilde{x}(t_k),\ h = h_k = t_{k+1} - t_k$ will denote the current node, the approximate value of the solution in it and the value of the current step and ε, Δ are user-specified permissible relative and absolute errors of the solution at a step. In addition, for fixed $M,\ K,\ t_k,\ x^k k$ values $T_M x(t_{k+1}, t_k, x^k)$ and

$$T_M x(t_{k+1}, t_k, x^k),\quad \delta T_{M,K} x(t_{k+1}, t_k, x^k) = T_{M+K} x(t_{k+1}, t_k, x^k) - T_m x(t_{k+1}, t_k, x^k),$$

$$\varepsilon_{M,K}(t_{k+1}, t_k, x^k) = |\delta T_{M+K} x(t_{k+1}, t_k, x^k)| \Big(\ |T_m x(t_{k+1}, t_k, x^k)| + \Delta \Big)^{-1}$$

will be written simplified as $T(h),\ \delta T(h), \varepsilon(h)$.

1. Tables for Calculating Values of the Function ν^{-1} (statements 2 and 4). The tables are contained in [124] and are used in Algorithm 2 (see below).

For each pair $L = 0, \dots, 99,\ M = 1, \dots, 99$ they contain a set of values $\nu(\tau_j) = b(\tau_j) - T_M b(\tau_j)$ ordered in accordance with the sequence of increasing node values $\tau_j = 0.01, \dots, 0.99$. From the identity $\nu^{-1}(\nu(\tau)) = \tau$ it follows that the values of the function ν^{-1} at the intermediate points can be obtained by inverse interpolation using its values at the nearest nodes.

2. A Priori Choice of Step Size Given the tolerated relative and absolute errors ε, Δ, and the solution value $x^k = (x_1(t_k), \dots, x_n(t_k))$ at the node t_k for which the step size has to be chosen, the scaling factors α_j are calculated by procedure tsmr_ualp, if it is specified by the user, otherwise - by setting $\alpha_j = \mu = |x(t_k)|$, if $\mu \neq 0$ and $\alpha_j = 1$ if $\mu = 0$. Using the alphas obtained by one or another way, we find the step size by the formulas $h = \tau\rho,\ \rho = 1/(Ls)$ and $\tau = \nu^{-1}(\varepsilon \min_{i \in [1:n]}(|x_i(t_0)| + \Delta)/\alpha_i)$ (see above).

3. Iterative Algorithm for Correction of Step Size The following notation is used: D is a natural number, for example, equal to 3 or 5; $d = h_0/D$; $s = sign(\varepsilon - \varepsilon(h_0))$; $\sigma(i,h) = i$, if $sign(\varepsilon - \varepsilon(h)) \leqslant 0$, and $\sigma(i,h) = i - 1$, if $sign(\varepsilon - \varepsilon(h)) > 0$, where h_0 is the step that needs to be adjusted to obtain the maximal possible value of the user-defined tolerated relative error ε. Then the algorithm is defined as the following sequence of operators:

1. $i := 1$;
2. $h := h_0 + s \cdot i \cdot d$; if $s \cdot sign(\varepsilon - \varepsilon(h)) < 0$, then $h = h_0 + s \cdot \sigma(i,h) \cdot d$, else go to 5;
3. If $i = D - 1$, then $h_0 = h$; $d = h_0/D$, else go to 1;

4. $i := i + 1$; go to 2;

5. End.

4. Standard Step Correction Algorithm It is based on a posteriori information. The corrected step size h for the current node, with the known value $x = (x_1, \ldots, x_n)$ at this node and the known approximation h_0, is calculated using

$$h = h_0 \left(\sqrt{n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\ (\delta T(h_0))^2 \cdot (\Delta + \varepsilon \ max(|x_i|, \ |T_i(h_0)|)) \ \right)} \ \right)^{1/(M+1)}$$

which is similar to that used in the Runge-Kutta methods (M is TSM order).

5. Calibration For each order $p \in [M_{min} : M_{max}]$ (where, for example, $M_{min} = 5$, $M_{max} = 60$), the processing time $t(p)$ of computing all the Taylor's coefficients of the solution is estimated. Calibration is performed before the integration of the system along the specified time interval is started; its results are used to choose the order and step size in the first step of integration and to correct the order in the next steps.

6. Step Size and Order at the First Step The initial approximation h_0 for the size of the first step is calculated by the algorithm "A Priori Choice of Step Size". Then, for $p \in [M_{min} : M_{max}]$, the "step-by-step velocities" $V(p) = h(p)/t(p)$ are calculated ($h(p)$ is the step size obtained by TSM of order p using the algorithm "Iterative Algorithm for Correction of Step Size" and the initial approximation h_0). As the order at the first step, we choose M such that $V(M) = \max_{p \in [M_{min}:M_{max}]} V(p)$, and set $h = h(M)$ as the step size at the first step.

(a) The Algorithm of Automatic Choice of Step Size At each step (except the first one), the initial approximation h_0 assumes the value obtained at the previous step of integration. Then, using algorithms "A Priori Choice of Step Size" and "Standard Step Correction Algorithm", two values of step h_1, h_2 are computed. Of these, maximum $h = max(h_1, h_2)$ is selected, which is then corrected by the algorithm "Iterative Algorithm for Correction of Step Size".

(b) The Algorithm of Automatic Choice of Order If, in the next step of TSM, the step size h has changed in m times (for example, $m = 3$ or 5) compared to the value of H (H changes after each change of the order M, and at the first step is assumed equal to the value of the first step), then the order M is corrected. It is assumed that the Taylor coefficients are known up to the order M. For $p = M - 1, \ldots, M_{min}$, the step sizes $h(p)$ and "velocities" $V(p) = h(p)/t(p)$ are calculated successively. If there are no such $p = M-1, \ldots, M_{min}$, then for $p = M+1, \ldots, M_{max}$

the Taylor coefficients of order p, the corresponding step size $h(p)$ and the "velocity" $V(p)$ are calculated successively. As soon as (and if) it turns out that $V(p) \geqslant V(M)$, the new order M is assumed to be equal to this p. If there are no such $p = M+1, \ldots, M_{max}$, then the order used is not corrected.

3.4.5 General algorithm of the Taylor series method

The algorithm is defined as the following sequence of operators using the auxiliary algorithms given above:

1. The choice of step and order at the first step and assigning these values to variables H, M;
2. Calculation at the next point t_k of the Taylor coefficients according to formulas (3.29), (3.30) and step;
3. If the step h has changed more than m times compared to the value H, then a new order M and the corresponding step size h are calculated;
4. If $t_k + h < T$, then $t_{k+1} = t_k + h$ and the solution at the point t_{k+1} are computed, and go to 2;
5. Calculation of $h = T - t_k$ and the solution at the final point T; End.

3.5 Implementation of the Taylor series method (TSM)

The program described below is taken from [10, 124].

This section describes a Fortran program that numerically integrates systems of differential equations in polynomial form (by the method described in Chapter 3).

The program consists of a main program, a configuration file reading subroutine, an interval integration subroutine, a Taylor coefficient calculation subroutine, a Taylor polynomial calculation subroutine, a step calculation function according to the a priori algorithm, a standard correction step calculation function, an iterative correction step calculation function, an automatic step selection function, functions for calculating ρ, subroutines for reading data files, functions for calculating the degree of the right-hand side, functions for calculating u^{-1} and v^{-1}, procedures for measuring the time for calculating coefficients, functions for calculating α_1,....., α_n, procedures for calculating the optimal order.

Main program.

1. Read the name of the configuration file from the command line.
2. Read data from a configuration file.
   - *cfg.dat* – set: required relative error, required absolute error and paths to the rest of the configuration files;
   - *coef.dat* – a set of non-zero coefficients of the system. The coefficient is set by a triple (coefficient, equation number, monomial number);
   - *sch.dat* – scheme: a sequence of pairs of numbers. If the system is linear, the scheme is not specified;
   - *ic.dat* – initial conditions for the Cauchy problem;
   - *points.dat* – a sequence of argument values in which the solution values are returned.
3. Run numerical integration for the time Interval.

Configuration file reader.

Arguments: *cfg* - configuration file name *ipar* :

1 - dimension,

2 - number of monomials,

3 - number of non-zero coefficients,

4 - number of output points;

rpar - required error:

   1 - relative, 2 - absolute; *ln* - linearity;

fpar - files:

   1. - with initial conditions,
   2. - with scheme,
   3. - files with coefficients,
   4. - with table,
   5. - to record results,
   6. - with output points.

Return: $ipar, rpar, ln, fpar$.

Interval Integration Routine.

Arguments:
n - dimension; u - number of monomials; na - number of non-zero coefficients; np - number of points for issuing a solution; ln - linearity; $rtol$ - required relative error; $atol$ - required absolute error; $fpar$ - files: 1 - with initial conditions, 2 - with scheme, 3 - files with coefficients, 4 - with table, 5 - to record results, 6 - with output points.
Return: x.

Subroutine for calculating Taylor coefficients.

Arguments:
x - array of Taylor coefficients; tx - array of solution values at point; $pl,\ pu$ - bottom and top order.
Return: x.
Global variables: $n,\ u,\ na,\ sch,\ a,\ ia,\ ja,\ pmax$.

Taylor polynomial calculation routine.

Arguments:
tx - array of solution values at point; x - array of Taylor coefficients; h - length of step; $pl,\ pu$ - bottom and top order.
Return: tx.
Global variables: $n,\ u,\ pmax$.

Function for calculating the step by the a priori algorithm.

Arguments: tx - array of solution values at point; $alp - \alpha_1, ..., \alpha_n$; $pwork$ - order.
Global variables: n.

Standard correction step calculation function.

Arguments: tx - array of solution values at point; x - array of Taylor coefficients; $h0$ - approximation to step; $rx,\ tx$ - auxiliary arrays; $pwork$ - order.
Global variables: $n,\ pmax,\ atol,\ rtol$.

Step calculation function by iterative correction.

Arguments: tx - array of solution values at point; x - array of Taylor coefficients; $h0$ - approximation to step; rx, tx - auxiliary arrays; $pwork$ - order.
Global variables: n, $pmax$, $atol$, $rtol$.

Automatic step selection function.

Arguments: h - approximation to step; tx - array of solution values at point; x - array of Taylor coefficients; rx, tx - auxiliary arrays; $alp - \alpha_1, ..., \alpha_n$; $pwork$ - order; dir - direction.
Global variables: n, u.

Calculation function ρ by $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Arguments: $alp - \alpha_1, ..., \alpha_n$.
Global variables: n, u, na, ut, aa, ia, ja, $rdeg$.

Data file reader.

Arguments: tx - array of solution values at point; $fpar$ - files: 1 - with initial conditions, 2 - with scheme, 3 - files with coefficients, 4 - with table, 5 - to record results, 6 - with output points.
Return: tx, sch, a, ia, ja, $rdeg$, ox
Global variables: n, u, na, sch, ox, np, a, ia, ja, $rdeg$.

Function for calculating the degree of the right side.

Global variables: n, u, sch.

Calculation function u^{-1} and v^{-1}.

Arguments: $alp - -\alpha_1, ..., \alpha_n$; $pwork$ - current order of method.
Global variables: n, $atol$, $rtol$, vtb, vtn, $pmin$, $pmax$.

The procedure for measuring the time of calculating the coefficients.

Arguments: x - array of Taylor coefficients; tx - array of solution values at point.
Return: $time$.
Global variables: n, u, $pmax$, $time$.

Calculation function $\alpha_1, ..., \alpha_n$

Arguments: $alp - -\alpha_1, ..., \alpha_n$; tx - array of solution values at point; $rpar, ipar$ - auxiliary arrays.
Global variables: n.

Optimal order calculation procedure.

Arguments: x - array of Taylor coefficients; tx - array of solution values at point.
Return: $pwork$, h.
Global variables: n, u, $pmax$, $time$.

Chapter 4. Numerical experiments

Many sources were used when writing this section: [26, 30, 35, 43].

This section discusses a series of experiments showing the effectiveness of schemes and the Taylor series method for polynomial systems using schemes as a tool for calculating Taylor coefficients.

4.1 Effectiveness of scheme

In this section, the issue of the efficiency of the scheme for polynomial systems of differential equations is considered, both for a randomly generated set of monomials and for the N body problem (with and without perturbations).

4.1.1 An arbitrary set of monomials

In this experiment, it is randomly generated by systems of N_m monomials in N_v variables. Given the system of monomials, we can compute $\tau = t/t_s$ (effectiveness of a scheme), where t_s, t are the process times required to calculate all monomials of the system with and without the aid of a scheme. Given N_m, N_v for a hundred system of randomly chosen monomials one computes minimal and maximal values of $\tau : \tau_{min}, \tau_{max}$, which are presented in Table 1.

4.1.2 The N-body problem

Chapter 1 (Example 7) discusses the system of differential equations of the classical N body problem using Cartesian coordinates. Then this system of differ-

Table 2 — An arbitrary set of monomials

$N_m = 1000$			$N_v = 200$		
N_v	τ_{min}	τ_{max}	N_m	τ_{min}	τ_{max}
50	1.6	1.7	1 000	4.5	4.7
100	2.6	2.8	2 000	4.9	5.2
150	3.5	3.8	3 000	5.1	5.3
200	4.5	4.7	4 000	5.3	5.8
250	5.2	5.5	5 000	5.6	5.9
300	6.3	6.7	6 000	5.8	6.2
350	7.5	8.2	7 000	5.6	6.0
400	8.6	9.7	8 000	5.7	6.6
450	9.9	11.0	9 000	5.7	6.9
500	11.2	13.5	10 000	5.8	7.0

ential equations is reduced to three different systems of equations with right-hand sides, which are polynomials of the fifth, fourth and third degrees, respectively.

There are two numerical experiments (Table 2, Table 3). They associated with comparison of evaluation cost when evaluating the right-hand sides of the equations for original system and system of monomials in the right-hand sides, which are polynomials of the fifth, fourth and third degrees (with and without the aid of the schemes).

The following designations are used here:
N — the number of bodies;
t_0 — the process time required to calculate all the right-hand sides of original N-body equations;
$t_5,\ t_4,\ t_3$ — the process times required to calculate all different monomials in the right-hand sides of systems of the fifth, fourth and third degrees respectively;
$t_{j,s},\ t_j$ — the process times required to calculate all monomials of degree j in the right-hand sides of the system of the fifth ($j = 5$), fourth ($j = 4$) and third degrees ($j = 3$) respectively (with and without the aid of a scheme);
$t^+_{j,s},\ t^+_j$ — the process times required to calculate a number of cubic monomials and all monomials of degree j in the right-hand sides of the system of the fifth ($j = 5$), fourth ($j = 4$) and third degrees ($j = 3$) respectively (with and without the aid of a scheme).

Table 3 — The monomials of the N body problem without perturbations

N	t_0/t_5	$t_0/t_{5,s}$	t_0/t_4	$t_0/t_{4,s}$	t_0/t_3	$t_0/t_{3,s}$
3	7.2	8.6	4.2	5.0	4.2	5.5
4	9.6	15.4	4.7	7.0	4.6	7.8
5	9.7	20.4	4.8	11.5	4.7	14.1
6	9.8	22.5	4.9	14.2	4.8	16.3
7	10.2	25.5	5.2	17.7	5.1	19.3
8	12.1	38.7	5.3	20.1	5.3	22.8
9	13.0	49.9	5.6	23.0	5.5	25.8
10	13.1	57.6	5.8	26.6	5.7	29.6

Table 4 — The monomials of the N body problem with perturbations

N	$t_5/t_{5,s}$	$t_5^+/t_{5,s}^+$	$t_4/t_{4,s}$	$t_4^+/t_{4,s}^+$	$t_3/t_{3,s}$	$t_3^+/t_{3,s}^+$
3	1.2	1.2	1.2	1.1	1.3	1.2
4	1.6	1.5	1.5	1.5	1.7	1.6
5	2.1	2.0	2.4	2.3	3.0	2.7
6	2.3	2.1	2.9	2.7	3.4	3.1
7	2.6	2.2	3.4	3.0	3.8	3.3
8	3.2	2.6	3.8	3.3	4.3	3.6
9	3.8	3.0	4.1	3.5	4.7	3.8
10	4.4	3.2	4.6	3.8	5.2	4.1

4.2 Numerical integration of differential equations

One of the most effective methods for solving differential equations is the method of Taylor series [10, 23, 40, 57, 85, 108, 113, 123].

When applying Taylor series method of numerical integration to the equations of the N-body problem, to simplify and/or speed up calculations it is natural to use polynomial systems of differential equations. To integrate polynomial systems (1.17), (1.18) and (1.19) here used two programs: TSMR [124] and TIDES [25].

Calculations were made on the computer with the Intel Core i5 processor, 2,6 GHz, 8 GB of RAM and Mac OS X El Capitan (Version 10.11.5) operating system; Intel Parallel Studio XE 2016 for TSMR and GNU Compiler Collection (Xcode Version 7.3.1) for TIDES were used.

Three body (Sun-Mercury-Venus) initial value problems for systems (1.17), (1.18) and (1.19) were considered. The initial data and the masses of the planets were taken from [95], [127]. To provide correct estimation of relative errors in coordinates and velocities, the integration was carried out according to the scheme "go there and come back". This means that the equations are integrated first from $t = 0$ to $t = T$, and then - from $t = T$ to $t = 0$. The results that compare the efficiency of the method of Taylor series for systems (1.17), (1.18) and (1.19) are presented in Table 4.

The following designations are used here:

Method — program names TSi (TSMR) or TDi (TIDES); $i = 5, 4, 3$ it means that the method was applied to the systems (1.17), (1.18) and (1.19) respectively (i is the degree of the system);

RT — maximal relative tolerances in the coordinates and velocities of planets;

RE — maximal relative errors in the coordinates and velocities of planets;

$\mathbf{t^{CPU}}$ — the process time;

T (days) — endpoint ($t \in [0, T]$).

Table 5 — Numerical integration of the N body problem in the different polynomial forms

Method	T	$RT = 10^{-10}$, RE	$RT = 10^{-20}$, RE	$RT = 10^{-30}$, RE	t^{CPU} (sec)		
TD5	10^6	$6.2 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-11}$	$5.3 \cdot 10^{-22}$	551	1458	2915
TS5		$2.5 \cdot 10^{-2}$	$7.8 \cdot 10^{-15}$	$1.4 \cdot 10^{-24}$	227	659	1369
TD4		$1.8 \cdot 10^{1}$	$3.4 \cdot 10^{-10}$	$9.7 \cdot 10^{-20}$	1261	3368	6173
TS4		$6.6 \cdot 10^{0}$	$5.5 \cdot 10^{-10}$	$1.9 \cdot 10^{-21}$	381	1088	2272
TD3		$1.2 \cdot 10^{1}$	$3.4 \cdot 10^{-10}$	$4.9 \cdot 10^{-20}$	1233	3244	6096
TS3		$7.0 \cdot 10^{0}$	$2.8 \cdot 10^{-10}$	$3.7 \cdot 10^{-21}$	407	1252	2230
TD5	$2 \cdot 10^6$	$5.2 \cdot 10^{-2}$	$8.9 \cdot 10^{-11}$	$2.2 \cdot 10^{-21}$	1101	3006	5701
TS5		$6.7 \cdot 10^{-1}$	$2.0 \cdot 10^{-13}$	$3.1 \cdot 10^{-24}$	484	1311	2698
TD4		$4.1 \cdot 10^{1}$	$7.5 \cdot 10^{-10}$	$2.1 \cdot 10^{-19}$	2425	6266	11855
TS4		$2.1 \cdot 10^{1}$	$7.1 \cdot 10^{-9}$	$9.6 \cdot 10^{-22}$	777	2214	4315
TD3		$2.9 \cdot 10^{1}$	$7.5 \cdot 10^{-10}$	$5.9 \cdot 10^{-19}$	2519	6491	12163
TS3		$2.4 \cdot 10^{1}$	$7.8 \cdot 10^{-10}$	$1.0 \cdot 10^{-20}$	756	2279	4258
TS5	$3 \cdot 10^6$	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-13}$	$6.0 \cdot 10^{-24}$	649	1993	3977
TS4		$2.9 \cdot 10^{1}$	$9.9 \cdot 10^{-9}$	$2.3 \cdot 10^{-20}$	1494	3203	6579
TS3		$3.6 \cdot 10^{1}$	$3.3 \cdot 10^{-8}$	$3.6 \cdot 10^{-20}$	1130	3370	6409

Chapter 5. Categories of functions

This chapter covers an extensive collection of function libraries, consisting of 10 categories that satisfy systems of differential equations [11].

5.1 Category 1: Elementary Functions

Basic Elementary Functions

1. Definition: $Inv[p] = \frac{1}{p}$, Extension: $\varphi = Inv[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = -\varphi^2$.
2. Definition: $Power[p, a] = p^a$, Extension: $\varphi_1 = Power[p, a]$, $\varphi_2 = Inv[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = a\varphi_1\varphi_2, \frac{d\varphi_2}{dp} = -\varphi_2$.
3. Definition: $Sqrt[p] = \sqrt{p}$, Extension: $\varphi_1 = Sqrt[p]$, $\varphi_2 = Inv[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \frac{\varphi_1\varphi_2}{2}$, $\frac{d\varphi_2}{dp} = -\varphi_2^2$.
4. Definition: $Exp[p] = e^p$, Extension: $\varphi = Exp[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = \varphi_1$.
5. Definition: $Powerf[a, p] = a^p$, Extension: $\varphi = Powerf[a, p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = \varphi Log[a]$.
6. Definition: $Log[p] = \log(p)$, $ln(p)$, Extension: $\varphi_1 = Log[p]$, $\varphi_2 = Inv[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2$, $\frac{d\varphi_2}{dp} = -\varphi_2^2$.
7. Definition: $Log[a, p] = \log_a(p)$, Extension: $\varphi_1 = Log[a, p]$, $\varphi_2 = Inv[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \frac{\varphi_2}{Log[a]}$, $\frac{d\varphi_2}{dp} = -\varphi_2^2$.
8. Definition: $Sin[p] = \sin(p)$, Extension: $\varphi_1 = Sin[p]$, $\varphi_2 = Cos[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2$, $\frac{d\varphi_2}{dp} = -\varphi_1$.
9. Definition: $Cos[p] = \cos(p)$, Extension: $\varphi_1 = Sin[p]$, $\varphi_2 = Cos[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_1$, $\frac{d\varphi_2}{dp} = -\varphi_2$.
10. Definition: $Tan[p] = \mathrm{tg}(p)$, Extension: $\varphi = Tan[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = \varphi^2 + 1$.
11. Definition: $Cot[p] = \mathrm{ctg}(p)$, Extension: $\varphi = Cot[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = -(1 + \varphi^2)$.
12. Definition: $Csc[p] = \mathrm{cosec}(p)$, Extension: $\varphi_1 = Csc[p], \varphi_2 = Cot[p]$,

Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_1\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -(1+\varphi_2^2)$.
13. Definition: $Sec[p] = \sec(p)$, Extension: $\varphi_1 = Sec[p], \varphi_2 = Tan[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_1\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 1+\varphi_2^2$.
14. Definition: $Sinh[p] = \sinh(p)$, Extension: $\varphi_1 = Sinh[p], \varphi_2 = Cosh[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_1$.
15. Definition: $Cosh[p] = \cosh(p)$, Extension: $\varphi_1 = Sinh[p], \varphi_2 = Cosh[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_1$.
16. Definition: $Tanh[p] = \tanh(p)$, Extension: $\varphi = Tanh[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = 1-\varphi^2$.
17. Definition: $Coth[p] = \coth(p)$, Extension: $\varphi = Coth[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = 1-\varphi^2$.
18. Definition: $Csch[p] = csch(p)$, Extension: $\varphi_1 = Csch[p], \varphi_2 = Coth[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_1\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 1-\varphi_2^2$.
19. Definition: $Sech[p] = sech(p)$, Extension: $\varphi_1 = Sech[p], \varphi_2 = Tanh[p]$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_1\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 1-\varphi_2^2$.
20. Definition: $ArcSin[p] = \arcsin(p)$, Extension: $\varphi_1 = ArcSin[p], \varphi_2 = Aux1[p] = (1-p^2)^{-1/2}$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = p\varphi_2^3$.
21. Definition: $ArcCos[p] = \arccos(p)$, Extension: $\varphi_1 = ArcCos[p], \varphi_2 = Aux1[p] = (1-p^2)^{-1/2}$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = p\varphi_2^3$.
22. Definition: $ArcTan[p] = \arctan(p)$, Extension: $\varphi_1 = ArcTan[p], \varphi_2 = Aux2[p] = (1+p^2)^{-1}$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -2p\varphi_2^2$.
23. Definition: $ArcCot[p] = arcctg(p)$, Extension: $\varphi_1 = ArcCot[p], \varphi_2 = Aux2[p] = (1+p^2)^{-1}$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -2p\varphi_2^2$.
24. Definition: $ArcCsc[p] = arccosec(p)$, Extension: $\varphi_1 = ArcCsc[p], \varphi_2 = Aux3[p] = (p^4-p^2)^{-1/2}$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-2p^3)\varphi_2^3$.
25. Definition: $ArcSec[p] = arcsec(p)$, Extension: $\varphi_1 = ArcSec[p], \varphi_2 = Aux3[p] = (p^4-p^2)^{-1/2}$,
Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-2p^3)\varphi_2^3$.
26. Definition: $ArcSinh[p] = arsh(p)$, Extension: $\varphi_1 = ArcSinh[p], \varphi_2 = Aux4[p] = (p^2+1)^{-1/2}$,

Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -p\varphi_2^3$.

27. Definition: $ArcCosh[p] = arch(p)$, Extension: $\varphi_1 = ArcCosh[p], \varphi_2 = Aux5[p] = (p^2-1)^{-1/2},\ p > 1$,

Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -p\varphi_2^3$.

28. Definition: $ArcTanh[p] = arth(p)$, Extension: $\varphi_1 = ArcTanh[p], \varphi_2 = Aux6[p] = (1-p^2)^{-1}$,

Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2^2$.

29. Definition: $ArcCoth[p] = arcth(p)$, Extension: $\varphi_1 = ArcCoth[p], \varphi_2 = Aux6[p] = (1-p^2)^{-1}$,

Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2^2$.

30. Definition: $ArcCsch[p] = arcsch(p)$, Extension: $\varphi_1 = ArcCsch[p], \varphi_2 = Aux7[p] = (p^2+p^4)^{-1/2}$,

Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -(p+2p^3)\varphi_2^3$.

31. Definition: $ArcSech[p] = arsch(p)$, Extension: $\varphi_1 = ArcSech[p], \varphi_2 = Aux8[p] = (p^2-p^4)^{-1/2}$,

Differential equation: $\frac{d\varphi_1}{dp} = -\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -(2p^3-p)\varphi_2^3$.

Auxiliary Function

32. Definition: $Aux1[p] = (1-p^2)^{-1/2}$, Extension: $\varphi = Aux1[p]$,

Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = p\varphi_3$.

33. Definition: $Aux2[p] = (1+p^2)^{-1}$, Extension: $\varphi = Aux2[p]$,

Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = -2p\varphi_2$.

34. Definition: $Aux3[p] = (p^4-p^2)^{-1/2}$, Extension: $\varphi = Aux3[p]$,

Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = (p-2p^3)\varphi_3$.

35. Definition: $Aux4[p] = (p^2+1)^{-1/2}$, Extension: $\varphi = Aux4[p]$,

Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = -p\varphi_3$.

36. Definition: $Aux5[p] = (p^2-1)^{-1/2},\ p > 1$, Extension: $\varphi = Aux5[p]$,

Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = -p\varphi_3$.

37. Definition: $Aux6[p] = (1-p^2)^{-1}$, Extension: $\varphi = Aux6[p]$,

Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = 2p\varphi^2$.

38. Definition: $Aux7[p] = (p^2+p^4)^{-1/2}$, Extension: $\varphi = Aux7[p]$,

Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = -(p+2p^3)\varphi^3$.

39. Definition: $Aux8[p] = (p^2-p^4)^{-1/2}$, Extension: $\varphi = Aux8[p]$,

Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = (2p^3-p)\varphi^3$.

5.2 Category 2: Bessel-Type Functions

Bessel Functions

1. Definition:

$$BesselJ[\nu,p] = J_\nu(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)k!}(\frac{p}{2})^{2k+\nu},$$

Extension: $\varphi_1 = BesselJ[\nu,p]$, $\varphi_2 = BesselJAux[\nu,p]$, $\varphi_3 = Inv[p]$,
Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3^2((\nu^2 - p^2)\varphi_1 - p\varphi_2),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

2. Definition:

$$BesselY[\nu,p] = Y_\nu(p) = \operatorname{cosec}(\pi\nu)(\cos(\pi\nu)J_\nu(p) - J_{-\nu}(p));\ \nu \notin Z,$$

Extension: $\varphi_1 = BesselY[\nu,p]$, $\varphi_2 = BesselYAux[\nu,p] = \frac{\partial BesselY[\nu,p]}{\partial p}$, $\varphi_3 = Inv[p]$,
Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3^2((\nu^2 - p^2)\varphi_1 - p\varphi_2),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

3. Definition:

$$BesselI[\nu,p] = I_\nu(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)k!}(\frac{p}{2})^{2k+\nu},$$

Extension: $\varphi_1 = BesselI[\nu,p]$, $\varphi_2 = BesselIAux[\nu,p] = \frac{\partial BesselI[\nu,p]}{\partial p}$, $\varphi_3 = Inv[p]$,
Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3^2((\nu^2 + p^2)\varphi_1 - p\varphi_2),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

4. Definition:

$$BesselK[\nu,p] = K_\nu(p) = 0.5\pi \operatorname{cosec}(\pi\nu)(I_\nu(p) - I_{-\nu}(p));\ \nu \notin Z,$$

Extension: $\varphi_1 = BesseIY[\nu,p]$, $\varphi_2 = BesseIYAux[\nu,p] = \frac{\partial BesseIY[\nu,p]}{\partial p}$, $\varphi_3 = Inv[p]$,
Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3^2((\nu^2+p^2)\varphi_1 - p\varphi_2),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

Airy Functions

5. Definition:

$$AiryAi[p] = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma(2/3)}{}_0F_1(;\frac{2}{3};\frac{p^3}{9}) - \frac{}{\sqrt[3]{3}\Gamma(1/3)}{}_0F_1(;\frac{4}{3};\frac{p^3}{9})$$

Extension: $\varphi_1 = AiryAi[p]$, $\varphi_2 = AiryAiPrime[p]$.
Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = p\varphi_1.$$

6. Definition:

$$AiryBi[p] = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma(2/3)}{}_0F_1(;\frac{2}{3};\frac{p^3}{9}) - \frac{}{\sqrt[3]{3}\Gamma(1/3)}{}_0F_1(;\frac{4}{3};\frac{p^3}{9})$$

Extension: $\varphi_1 = AiryAi[p]$, $\varphi_2 = AiryBiPrime[p]$.
Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = p\varphi_1.$$

7. Definition:

$$AiryAiPrime[p] = \frac{1}{23^{2/3}\Gamma(2/3)}{}_0F_1(;\frac{5}{3};\frac{p^3}{9}) - \frac{1}{\sqrt[3]{3}\Gamma(1/3)}{}_0F_1(;\frac{1}{3};\frac{p^3}{9}).$$

Extension: $\varphi_1 = AiryAiPrime[p]$, $\varphi_2 = AiryAiPrimeAux[p] = \frac{\partial AiryAiPrime[p]}{\partial p}$, $\varphi_3 = Inv[p]$.
Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_2\varphi_3 + p\varphi_1,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

8. Definition:

$$AiryBiPrime[p] = \frac{p^2}{2\sqrt[6]{3}\Gamma(2/3)}{}_0F_1(;\frac{5}{3};\frac{p^3}{9}) + \frac{\sqrt[6]{3}}{\Gamma(1/3)}{}_0F_1(;\frac{1}{3};\frac{p^3}{9}).$$

Extension:

$$\varphi_1 = AiryBiPrime[p],\ \varphi_2 = AiryBiPrimeAux[p] = \frac{\partial AiryBiPrime[p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p]$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_2\varphi_3 + p\varphi_1,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

Struve Functions

9. Definition:

$$StruveH[\nu, p] = (\frac{p}{2})^{\nu+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma^2(k+3/2)(k+\nu)} (\frac{p}{2})^{2k}.$$

Extension:

$$\varphi_1 = StruveH[\nu, p]\ \varphi_2 = StruveHAux[\nu, p] = \frac{\partial StruveH[\nu, p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3^2(\nu^2 - p^2)\varphi_1 - p\varphi_2 + \frac{4}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+0.5)}(\frac{p}{2})^{\nu+1},\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

10. Definition:

$$StruveL[\nu, p] = (\frac{p}{2})^{\nu+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma^2(k+3/2)(k+\nu)} (\frac{p}{2})^{2k}.$$

Extension:

$$\varphi_1 = StruveL[\nu, p]\ \varphi_2 = StruveLAux[\nu, p] = \frac{\partial StruveL[\nu, p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3^2(\nu^2 + p^2)\varphi_1 - p\varphi_2 + \frac{4}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+0.5)}(\frac{p}{2})^{\nu+1},\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

Kelvin Functions

11. Definition:

$$KelvinBei[p] = -0.5i\Big(I_0(\sqrt[4]{-1}p) - J_0(\sqrt[4]{-1}p)\Big).$$

Extension:

$$\varphi_1 = KelvinBei[p],\ \varphi_2 = KelvinBeiAux1[p] = \frac{\partial KelvinBei[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = KelvinBeiAux2[p] = \frac{\partial KelvinBeiAux1[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_4 = KelvinBeiAux3[p] = \frac{\partial KelvinBeiAux2[p]}{\partial p},\ \varphi_5 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = \varphi_3\varphi_5^2 - 2\varphi_4\varphi_5 - \varphi_2\varphi_5^3 - \varphi_1.$$

12. Definition:

$$KelvinBer[p] = 0.5i\Big(I_0(\sqrt[4]{-1}p) + J_0(\sqrt[4]{-1}p)\Big).$$

Extension:

$$\varphi_1 = KelvinBer[p],\ \varphi_2 = KelvinBerAux1[p] = \frac{\partial KelvinBer[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = KelvinBerAux2[p] = \frac{\partial KelvinBerAux1[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_4 = KelvinBerAux3[p] = \frac{\partial KelvinBerAux2[p]}{\partial p},\ \varphi_5 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = \varphi_3\varphi_5^2 - 2\varphi_4\varphi_5 - \varphi_2\varphi_5^3 - \varphi_1.$$

13. Definition:

$$KelvinKei[p] = -kei_0(p).$$

Extension:

$$\varphi_1 = KelvinKei[p],\ \varphi_2 = KelvinKeiAux1[p] = \frac{\partial KelvinKei[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = KelvinKeiAux2[p] = \frac{\partial KelvinKeiAux1[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_4 = KelvinKeiAux3[p] = \frac{\partial KelvinKeiAux2[p]}{\partial p},\ \varphi_5 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = \varphi_3\varphi_5^2 - 2\varphi_4\varphi_5 - \varphi_2\varphi_5^3 - \varphi_1.$$

14. Definition:

$$KelvinKer[p] = kei_0(p).$$

Extension:

$$\varphi_1 = KelvinKer[p],\ \varphi_2 = KelvinKerAux1[p] = \frac{\partial KelvinKer[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = KelvinKerAux2[p] = \frac{\partial KelvinKerAux1[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_4 = KelvinKerAux3[p] = \frac{\partial KelvinKerAux2[p]}{\partial p},\ \varphi_5 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = \varphi_3\varphi_5^2 - 2\varphi_4\varphi_5 - \varphi_2\varphi_5^3 - \varphi_1.$$

15. Definition:

$$KelvinBei[\nu,p] = bei_\nu(p) = -0.5ie^{-\frac{3}{4}i\pi\nu}p^\nu(\sqrt[4]{-1}p)^{-\nu}\Big(e^{\frac{3}{2}i\pi\nu}I_\nu(\sqrt[4]{-1}p) - J_\nu(\sqrt[4]{-1}p)\Big).$$

Extension:

$$\varphi_1 = KelvinBei[\nu,p],\ \varphi_2 = KelvinBeiAux1[\nu,p] = \frac{\partial KelvinBei[\nu,p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = KelvinBeiAux2[\nu,p] = \frac{\partial KelvinBeiAux1[\nu,p]}{\partial p},$$

$$\varphi_4 = KelvinBeiAux3[\nu,p] = \frac{\partial KelvinBeiAux2[\nu,p]}{\partial p},\ \varphi_5 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dp} = (2\nu_1^2+1)\varphi_3\varphi_5^2 - 2\varphi_4\varphi_5 - (2\nu_1^2+1)\varphi_2\varphi_5^3 - (p^4+\nu^4-4\nu^2)\varphi_1\varphi_5^4.$$

16. Definition:

$$KelvinBer[\nu,p] = ber_\nu(p) = 0.5ie^{-\frac{3}{4}i\pi\nu}p^\nu(\sqrt[4]{-1}p)^{-\nu}\Big(e^{\frac{3}{2}i\pi\nu}I_\nu(\sqrt[4]{-1}p) + J_\nu(\sqrt[4]{-1}p)\Big).$$

Extension:

$$\varphi_1 = KelvinBer[\nu,p],\ \varphi_2 = KelvinBerAux1[\nu,p] = \frac{\partial KelvinBer[\nu,p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = KelvinBerAux2[\nu,p] = \frac{\partial KelvinBerAux1[\nu,p]}{\partial p},$$

$$\varphi_4 = KelvinBerAux3[\nu,p] = \frac{\partial KelvinBerAux2[\nu,p]}{\partial p},\ \varphi_5 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dp} = (2\nu_1^2+1)\varphi_3\varphi_5^2 - 2\varphi_4\varphi_5 - (2\nu^2+1)\varphi_2\varphi_5^3 - (p^4+\nu^4-4\nu^2)\varphi_1\varphi_5^4.$$

17. Definition:

$$KelvinKei[\nu,p] = kei_\nu(p) = -0.25ei^{-\frac{3}{4}i\pi\nu}\pi p^\nu \sqrt[4]{-1}p)^{-\nu}csc(\pi\nu)$$

$$\Big((\sqrt[4]{-1}p)^{2\nu}\Big(I_{-\nu}\sqrt[4]{-1}p) - e^{\frac{3}{2}i\pi\nu}J_{-\nu}(\sqrt[4]{-1}p)\Big) - e^{\frac{i\pi\nu}{2}}p^{2\nu}\Big(I_\nu\sqrt[4]{-1}p) - e^{\frac{i\pi\nu}{2}}J_\nu(\sqrt[4]{-1}p)\Big)\Big).$$

Extension:

$$\varphi_1 = KelvinKei[\nu,p],\ \varphi_2 = KelvinKeiAux1[\nu,p] = \frac{\partial KelvinKei[\nu,p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = KelvinKeiAux2[\nu,p] = \frac{\partial KelvinKeiAux1[\nu,p]}{\partial p},$$

$$\varphi_4 = KelvinKeiAux3[\nu,p] = \frac{\partial KelvinKeiAux2[\nu,p]}{\partial p},\ \varphi_5 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dp} = (2\nu_1^2+1)\varphi_3\varphi_5^2 - 2\varphi_4\varphi_5 - (2\nu^2+1)\varphi_2\varphi_5^3 - (p^4+\nu^4-4\nu^2)\varphi_1\varphi_5^4.$$

18. Definition:

$$KelvinKer[\nu,p] = ker_\nu(p) = 0.25e^{-\frac{3}{4}i\pi\nu}\pi p^\nu \sqrt[4]{-1}p)^{-\nu}csc(\pi\nu)$$

$$\Big((\sqrt[4]{-1}p)^{2\nu}\Big(I_{-\nu}\sqrt[4]{-1}p) + e^{\frac{3}{2}i\pi\nu}J_{-\nu}(\sqrt[4]{-1}p)\Big) - e^{\frac{i\pi\nu}{2}}p^{2\nu}\Big(I_\nu\sqrt[4]{-1}p) + e^{\frac{i\pi\nu}{2}}J_\nu(\sqrt[4]{-1}p)\Big)\Big).$$

Extension:

$$\varphi_1 = KelvinKer[\nu, p],\ \ \varphi_2 = KelvinKerAux1[\nu, p] = \frac{\partial KelvinKer[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = KelvinKerAux2[\nu, p] = \frac{\partial KelvinKerAux1[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_4 = KelvinKerAux3[\nu, p] = \frac{\partial KelvinKerAux2[\nu, p]}{\partial p},\ \ \varphi_5 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dp} = (2\nu_1^2 + 1)\varphi_3\varphi_5^2 - 2\varphi_4\varphi_5 - (2\nu^2 + 1)\varphi_2\varphi_5^3 - (p^4 + \nu^4 - 4\nu^2)\varphi_1\varphi_5^4.$$

Spherical Bessel - Type Functions

19. Definition:

$$SphericalBesselJ[\nu,p] = j_\nu(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}J_{\nu+0.5}(p).$$

Extension:

$$\varphi_1 = SphericalBesselJ[\nu,p],\ \ \varphi_2 = SphericalBesselJAux[\nu,p] =$$

$$= \frac{\partial SphericalBesselJ[\nu,p]}{\partial p},\ \ \varphi_3 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (\nu(\nu + 1) - p^2)\varphi_1\varphi_3^2 - 2\varphi_2\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

20. Definition:

$$SphericalBesselY[\nu,p] = y_\nu(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}Y_{\nu+0.5}(p).$$

Extension:

$$\varphi_1 = SphericalBesselY[\nu,p],\ \ \varphi_2 = SphericalBesselYAux[\nu,p] =$$

$$= \frac{\partial SphericalBesselY[\nu,p]}{\partial p},\ \ \varphi_3 = Inv[p],$$

where $SphericalBesselYAux[\nu,p] = \frac{\partial SphericalBesselY[\nu,p]}{\partial p}$.

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (\nu(\nu + 1) - p^2)\varphi_1\varphi_3^2 - 2\varphi_2\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

5.3 Category 3: Erf, Fresnel and Exponential integrals

Probability Integrals and Inverses

1. Definition:

$$Erf[p] = erf(p) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Extension:

$$\varphi_1 = Erf[p],\ \varphi_2 = ErfAux[p] = \frac{\partial Erf[p]}{\partial p}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -2p\varphi_2.$$

2. Definition:

$$Erfc[p] = erfc(p) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Extension:

$$\varphi_1 = Erfc[p],\ \varphi_2 = ErfcAux[p] = \frac{\partial Erfc[p]}{\partial p}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -2p\varphi_2.$$

3. Definition:

$$Erfi[p] = erfi(p) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Extension:

$$\varphi_1 = Erfi[p],\ \varphi_2 = ErfiAux[p] = \frac{\partial Erfi[p]}{\partial p}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2.$$

4. Definition:

$$InverseErf[p] = erf^{-1}(p).$$

Extension:

$$\varphi_1 = InverseErf[p],\ \varphi_2 = InverseErfAux[p] = \frac{\partial InverseErf[p]}{\partial p}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_1\varphi_2^2.$$

5. Definition:

$$InverseErfc[p] = erfc^{-1}(p).$$

Extension:

$$\varphi_1 = InverseErfc[p],\ \varphi_2 = InverseErfcAux[p] = \frac{\partial InverseErfc[p]}{\partial p}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_1\varphi_2^2.$$

Fresnel Integrals

6. Definition:

$$FrensnelS[p] = S(p) = \int\limits_0^p \sin(\frac{\pi t^2}{2})dt.$$

Extension:

$$\varphi_1 = FrensnelS[p],\ \varphi_2 = FrensnelSAux1[p] = \frac{\partial FrensnelS[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = FrensnelSAux2[p] = \frac{\partial FrensnelSAux1[p]}{\partial p},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_3\varphi_4 - \pi^2p^2\varphi_2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

7. Definition:

$$FrensnelC[p] = S(p) = \int\limits_0^p \cos(\frac{\pi t^2}{2})dt.$$

Extension:

$$\varphi_1 = FrensnelC[p],\ \varphi_2 = FrensnelCAux1[p] = \frac{\partial FrensnelC[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = FrensnelCAux2[p] = \frac{\partial FrensnelCAux1[p]}{\partial p},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_3\varphi_4 - \pi^2 p^2 \varphi_2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

Exponential Integrals

8. Definition: $ExpIntegralE[\nu, p] = E_\nu(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = ExpIntegralE[p],\ \varphi_2 = ExpIntegralEAux[p] = \frac{\partial ExpIntegralE[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (\nu - 1)\varphi_1\varphi_3 - \varphi_2\varphi_3(p - \nu + 2),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

9. Definition: $ExpIntegralEi[p] = E_i(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = ExpIntegralEi[p],\ \varphi_2 = ExpIntegralEiAux1[p] = \frac{\partial ExpIntegralEi[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = ExpIntegralEiAux2[p] = \frac{\partial ExpIntegralEiAux1[\nu, p]}{\partial p},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (\nu - 1)\varphi_1\varphi_3 - \varphi_2\varphi_3(p - \nu + 2),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

10. Definition: $LogIntegral[p] = li(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = LogIntegral[p],\ \varphi_2 = LogIntegralAux[p] = \frac{\partial LogIntegral[\nu, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = -\varphi_2^2\varphi_3, \ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

11. Definition: $SinIntegral[p] = Si(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = SinIntegral[p], \ \varphi_2 = SinIntegralAux1[p] = \frac{\partial SinIntegral[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = SinIntegralAux2[p] = \frac{\partial SinIntegralAux1[p]}{\partial p}, \ \varphi_4 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3, \ \frac{d\varphi_3}{dp} = -2\varphi_3\varphi_4 - \varphi_2, \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

12. Definition: $CosIntegral[p] = Ci(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = CosIntegral[p], \ \varphi_2 = CosIntegralAux1[p] = \frac{\partial CosIntegral[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = CosIntegralAux2[p] = \frac{\partial CosIntegralAux1[p]}{\partial p}, \ \varphi_4 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3, \ \frac{d\varphi_3}{dp} = -2\varphi_3\varphi_4 - \varphi_2, \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

13. Definition: $SinhIntegral[p] = Shi(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = SinhIntegral[p], \ \varphi_2 = SinhIntegralAux1[p] = \frac{\partial SinhIntegral[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = SinhIntegralAux2[p] = \frac{\partial SinhIntegralAux1[p]}{\partial p}, \ \varphi_4 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3, \ \frac{d\varphi_3}{dp} = -2\varphi_3\varphi_4 + \varphi_2, \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

14. Definition: $CoshIntegral[p] = Chi(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = CoshIntegral[p], \ \varphi_2 = CoshIntegralAux1[p] = \frac{\partial CoshIntegral[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = CoshIntegralAux2[p] = \frac{\partial CoshIntegralAux1[p]}{\partial p},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -2\varphi_3\varphi_4 + \varphi_2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

5.4 Category 4: Incomplete Gamma and Beta functions

Gamma Functions and Inverses

1. Definition: $Gamma[a,p] = \Gamma(a,p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = Gamma[a,p],\ \varphi_2 = GammaAux[a,p] = \frac{\partial Gamma[a{,}p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_2\varphi_3(p+a-1),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

2. Definition: $Gamma[a,p_1,p_2] = \Gamma(a,p_1,p_2)$.
Extension:

$$\varphi_1 = Gamma[a,p_1,p_2],\ \varphi_2 = GammaAux1[a,p_1,p_2] = \frac{\partial Gamma[a,p_1,p_2]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = GammaAux2[a,p_1,p_2] = \frac{\partial GammaAux1[a,p_1,p_2]}{\partial p},\ \varphi_4 = Inv[p_1],\ \varphi_5 = Inv[p_2].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_1} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_1}{dp_2} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_2}{dp_1} = \varphi_2\varphi_4(a-p_1-1),\ \frac{d\varphi_2}{dp_2} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_3}{dp_2} = \varphi_3\varphi_5(a-p_2-1),\ \frac{d\varphi_4}{dp_1} = -\varphi_4^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_2} = -\varphi_5^2.$$

Beta Functions

3. Definition: $Beta[p,a,b] = B_p(a,b)$.
Extension:

$$\varphi_1 = Beta[p,a,b],\ \varphi_2 = BetaAux[p,a,b] = \frac{\partial Beta[p,a,b]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = Inv[p],\ \varphi_4 = (1-p)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_2\varphi_3\varphi_4(a-1-p(a+b-2)),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp_2} = \varphi_4^2.$$

4. Definition: $Beta[p_1, p_2, a, b] = B_{(p_1,p_2)}(a, b)$.
Extension:

$$\varphi_1 = Beta[p_1, p_2, a, b],\ \varphi_2 = BetaAux1[p_1, p_2, a, b] = \frac{\partial Beta[p_1, p_2, a, b]}{\partial p_1},$$

$$\varphi_3 = BetaAux2[p_1, p_2, a, b] = \frac{\partial Beta[p_1, p_2, a, b]}{\partial p_2},\ \varphi_4 = Inv[p_1],$$

$$\varphi_5 = Inv[p_2],\ \varphi_6 = (1-p_1)^{-1},\ \varphi_7 = (1-p_2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_1} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_1}{dp_2} = \varphi_3,\ \frac{d\varphi_2}{dp_1} = \varphi_2\varphi_4\varphi_6(a-1-p_1(a+b-2)),\ \frac{d\varphi_2}{dp_2} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_3}{dp_2} = \varphi_3\varphi_5\varphi_7(a-1-p_2(a+b-2)),\ \frac{d\varphi_4}{dp_1} = -\varphi_4^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp_2} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_5}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_2} = -\varphi_5^2,\ \frac{d\varphi_6}{dp_1} = \varphi_6^2,\ \frac{d\varphi_6}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_2} = -\varphi_7^2.$$

5.5 Category 5: Hypergeometric Functions

Hermite, Parabolic Cylinder, and Laguerre Functions

1. Definition: $HermiteH[\nu, p] = H_\nu(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = HermiteH[\nu, p],\ \varphi_2 = HermiteHAux[\nu, p] = \frac{\partial HermiteH[\nu, p]}{\partial p}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2 - 2\nu\varphi_1.$$

2. Definition: $ParabolicCylinderD[\nu, p] = D_\nu(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = ParabolicCylinderD[\nu, p],\ \ \varphi_2 = ParabolicCylinderDAux[\nu, p] =$$
$$= \frac{\partial ParabolicCylinderD[\nu, p]}{\partial p}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_1(0.25p^2 - 0.5 - \nu).$$

3. Definition: $LaguerreL[\nu, p] = L_\nu(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = LaguerreL[\nu, p],\ \ \varphi_2 = LaguerreLAux[\nu, p] =$$
$$= \frac{\partial LaguerreL[\nu, p]}{\partial p},\ \ \varphi_3 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-1)\varphi_2\varphi_3 + \nu\varphi_1\varphi_4,\ \ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

4. Definition: $LaguerreL[\nu, \lambda, p] = L_\nu^\lambda(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = LaguerreL[\nu, \lambda, p],\ \ \varphi_2 = LaguerreLAux[\nu, \lambda, p] =$$
$$= \frac{\partial LaguerreL[\nu, \lambda, p]}{\partial p},\ \ \varphi_3 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-\lambda-1)\varphi_2\varphi_3 + \nu\varphi_1\varphi_3,\ \ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

Chebyshev and Fibonacci Functions

5. Definition: $ChebyshevT[\nu, p] = T_\nu(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = ChebyshevT[\nu, p],\ \ \varphi_2 = ChebyshevTAux[\nu, p] = \frac{\partial ChebyshevT[\nu, p]}{\partial p},$$
$$phi_3 = HGAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = p\varphi_2\varphi_3 - \nu^2\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

6. Definition: $ChebyshevU[\nu, p] = U_\nu(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = ChebyshevU[\nu, p],\ \varphi_2 = ChebyshevUAux[\nu, p] = \frac{\partial ChebyshevU[\nu, p]}{\partial p},$$

$$phi_3 = HGAux1[p] = (1 - p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 3p\varphi_2\varphi_3 - \nu(\nu + 2)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

7. Definition: $Fibonacci[\nu, p] = F_\nu(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = Fibonacci[\nu, p],\ \varphi_2 = FibonacciAux[\nu, p] = \frac{\partial Fibonacci[\nu, p]}{\partial p},$$

$$phi_3 = HGAux2[p] = (4 + p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (\nu^2 - 1)\varphi_1\varphi_3 - 3p\varphi_2\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

Legendre Functions

8. Definition: $LegendreP[\nu, p] = P_\nu(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = LegendreP[\nu, p],\ \varphi_2 = LegendrePAux[\nu, p] = \frac{\partial LegendreP[\nu, p]}{\partial p},$$

$$phi_3 = HGAux1[p] = (1 - p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - \nu(\nu + 1)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

9. Definition: $LegendreP[\nu, \mu, 2, p] = P_\nu^\mu(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = LegendreP[\nu, \mu, 2, p],\ \varphi_2 = LegendrePAux[\nu, \mu, 2, p] =$$

$$= \frac{\partial LegendreP[\nu, \mu, 2, p]}{\partial p}, \;\; \varphi_3 = HGAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \;\; \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - (\nu(\nu+1)\varphi_3 - \mu^2\varphi_3^2)\varphi_1, \;\; \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

10. Definition: $LegendreP[\nu, \mu, 3, p] = P_\nu^\mu(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = LegendreP[\nu, \mu, 3, p], \;\; \varphi_2 = LegendrePAux[\nu, \mu, 3, p] =$$
$$\frac{\partial LegendreP[\nu, \mu, 3, p]}{\partial p}, \;\; \varphi_3 = HGAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \;\; \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - (\nu(\nu+1)\varphi_3 - \mu^2\varphi_3^2)\varphi_1, \;\; \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

11. Definition: $LegendreQ[\nu, p] = Q_\nu(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = LegendreQ[\nu, p], \;\; \varphi_2 = LegendreQAux[\nu, p] = \frac{\partial LegendreQ[\nu, p]}{\partial p},$$
$$\varphi_3 = HGAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \;\; \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - \nu(\nu+1)\varphi_1\varphi_3, \;\; \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

12. Definition: $LegendreQ[\nu, \mu, 2, p] = Q_\nu^\mu(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = LegendreQ[\nu, \mu, 2, p], \;\; \varphi_2 = LegendreQAux[\nu, \mu, 2, p] =$$
$$= \frac{\partial LegendreQ[\nu, \mu, 2, p]}{\partial p}, \;\; \varphi_3 = HGAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \;\; \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - (\nu(\nu+1)\varphi_3 - \mu^2\varphi_3^2)\varphi_1, \;\; \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

13. Definition: $LegendreQ[\nu, \mu, 3, p] = Q_\nu^\mu(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = LegendreQ[\nu, \mu, 3, p], \;\; \varphi_2 = LegendreQAux[\nu, \mu, 3, p] =$$

$$= \frac{\partial LegendreQ[\nu, \mu, 3, p]}{\partial p}, \ \varphi_3 = HGAux1[p] = (1 - p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - (\nu(\nu+1)\varphi_3 - \mu^2\varphi_3^2)\varphi_1, \ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

Gegenbauer and Jacobi Functions

14. Definition: $GegenbauerC[\nu, p] = C_\nu^{(0)}(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = GegenbauerC[\nu, p], \ \varphi_2 = GegenbauerCAux[\nu, p] = \frac{\partial GegenbauerC[\nu, p]}{\partial p},$$

$$phi_3 = HGAux1[p] = (1 - p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = p\varphi_2\varphi_3 - \nu^2\varphi_1\varphi_3, \ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

15. Definition: $GegenbauerC[\nu, \lambda, p] = C_\nu^{(1)}(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = GegenbauerC[\nu, \lambda, p], \ \varphi_2 = GegenbauerCAux[\nu, \lambda, p] =$$

$$= \frac{\partial GegenbauerC[\nu, \lambda, p]}{\partial p}, \ \varphi_3 = HGAux1[p] = (1 - p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = p(2\lambda+1)\varphi_2\varphi_3 - \nu(\nu+2\lambda)\varphi_1\varphi_3, \ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

16. Definition: $JacobiP[\nu, a, b, p] = P_\nu^{(a,b)}(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = JacobiP[\nu, a, b, p], \ \varphi_2 = JacobiPAux[\nu, a, b, p] = \frac{\partial JacobiP[\nu, a, b, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = HGAux1[p] = (1 - p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = ((a+b+2)p - b + a)\varphi_2\varphi_3 - \nu(\nu+2\lambda)\varphi_1\varphi_3, \ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

Confluent Hypergeometric Functions

17. Definition: $Hypergeometric1F1[a,b,p] = {}_1F_1(a,b,p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = Hypergeometric1F1[a,b,p],\ \varphi_2 = Hypergeometric1F1Aux[a,b,p] =$$

$$= \frac{\partial Hypergeometric1F1[a,b,p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-b)\varphi_2\varphi_3 + a\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

18. Definition:

$$Hypergeometric1F1Regularized[a,b,p] = {}_1\tilde{F}_1(a,b,p).$$

Extension:

$$\varphi_1 = Hypergeometric1F1Regularized[a,b,p],$$

$$\varphi_2 = Hypergeometric1F1RegularizedAux[a,b,p] =$$

$$= \frac{\partial Hypergeometric1F1Regularized[a,b,p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-b)\varphi_2\varphi_3 + a\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

19. Definition: $HypergeometricU[a,b,p] = U(a,b,p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = HypergeometricU[a,b,p],\ \varphi_2 = HypergeometricUAux[a,b,p] =$$

$$= \frac{\partial HypergeometricU[a,b,p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-b)\varphi_2\varphi_3 + a\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

20. Definition: $WhittakerM[\nu,\mu,p] = M_{\nu,\mu}(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = WhittakerM[\nu,\mu,p],\ \varphi_2 = WhittakerMAux[\nu,\mu,p] =$$

$$= \frac{\partial WhittakerM[\nu,\mu,p]}{\partial p}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p^2 - 4\nu p + 4\mu^2 - 1)\frac{\varphi_1}{4p^2}.$$

21. Definition: $WhittakerW[\nu,\mu,p] = W_{\nu,\mu}(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = WhittakerW[\nu,\mu,p],\ \varphi_2 = WhittakerWAux[\nu,\mu,p] =$$

$$= \frac{\partial WhittakerW[\nu,\mu,p]}{\partial p}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p^2 - 4\nu p + 4\mu^2 - 1)\frac{\varphi_1}{4p^2}.$$

Hypergeometric Functions

22. Definition: $Hypergeometric[a,b;c;p] = F(a,b;c;p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = Hypergeometric[a,b;c;p],\ \varphi_2 = HypergeometricAux[a,b;c;p] =$$

$$= \frac{\partial Hypergeometric[a,b;c;p]}{\partial p},\ \varphi_3 = HGAux3[p] = (1-p)^{-1},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = ab\varphi_1\varphi_3\varphi_4 - (c(a+b+1)p)\varphi_2\varphi_3\varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = \varphi_4^2.$$

23. Definition: $HypergeometricPFQ[\{\},\{\},p] = {}_0F_0(;;p)$.
Extension: $\varphi_1 = HypergeometricPFQ[\{\},\{\},p]$.
Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = \varphi$.
24. Definition: $Hypergeometric0F1[b,p] = {}_0F_1(;b;p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = Hypergeometric0F1[b,p],\ \varphi_2 = Hypergeometric0F1Aux[b,p] =$$

$$= \frac{\partial Hypergeometric0F1[b,p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_1\varphi_3 - b\varphi_2\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

25. Definition:

$$Hypergeometric0F1Regularized[b,p] = {}_0\tilde{F}_1(;b;p).$$

Extension:

$$\varphi_1 = Hypergeometric0F1Regularized[b,p],$$

$$\varphi_2 = Hypergeometric0F1RegularizedAux[b,p] =$$

$$= \frac{\partial Hypergeometric0F1Regularized[b,p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_1\varphi_3 - b\varphi_2\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

26. Definition: $HypergeometricPFQ[\{a\},\{\},p] = {}_1F_0(;;p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = HypergeometricPFQ[\{a\},\{\},p],\ phi_2 = HGAux3[p] = (1-p)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = a\varphi_1\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_2^2.$$

27. Definition:

$$HypergeometricPFQ[\{a_1\},\{b_1,b_2\},p] = {}_1F_2(a_1;b_1,b_2;p).$$

Extension:

$$\varphi_1 = HypergeometricPFQ[\{a_1\},\{b_1,b_2\},p],$$

$$\varphi_2 = HypergeometricPFQAux1[\{a_1\},\{b_1,b_2\},p] =$$

$$= \frac{\partial HypergeometricPFQ[\{a_1\},\{b_1,b_2\},p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = HypergeometricPFQAux2[\{a_1\},\{b_1,b_2\},p] =$$

$$= \frac{\partial HypergeometricPFQAux1[\{a_1\},\{b_1,b_2\},p]}{\partial p},\ \ \varphi_4 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = a_1\varphi_1\varphi_4^2 - (b_1b_2 - p)\varphi_2\varphi_4^2 - p(b_1 + b_2 + 1)\varphi_3\varphi_4^2,\ \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

28. Definition:

$$HypergeometricPFQ[\{a_1,a_2\},\{b_1,b_2\},p] = {}_2F_2(a_1,a_2;b_1,b_2;p).$$

Extension:

$$\varphi_1 = HypergeometricPFQ[\{a_1,a_2\},\{b_1,b_2\},p],$$

$$\varphi_2 = HypergeometricPFQAux1[\{a_1,a_2\},\{b_1,b_2\},p] =$$
$$= \frac{\partial HypergeometricPFQ[\{a_1,a_2\},\{b_1,b_2\},p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = HypergeometricPFQAux2[\{a_1,a_2\},\{b_1,b_2\},p] =$$
$$= \frac{\partial HypergeometricPFQAux1[\{a_1,a_2\},\{b_1,b_2\},p]}{\partial p},\ \ \varphi_4 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = a_1a_2\varphi_1\varphi_4^2 - (b_1b_2 - p(a_1+a_2+1))\varphi_2\varphi_4^2 - p(1-p+b_1+b_2)\varphi_3\varphi_4^2,\ \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

29. Definition:

$$HypergeometricPFQ[\{a_1,a_2\},\{b_1,b_2,b_3\},p] = {}_2F_3(a_1,a_2;b_1,b_2,b_3;p).$$

Extension:

$$\varphi_1 = HypergeometricPFQ[\{a_1,a_2\},\{b_1,b_2,b_3\},p],$$

$$\varphi_2 = HypergeometricPFQAux1[\{a_1,a_2\},\{b_1,b_2,b_3\},p] =$$
$$= \frac{\partial HypergeometricPFQ[\{a_1,a_2\},\{b_1,b_2,b_3\},p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = HypergeometricPFQAux2[\{a_1,a_2\},\{b_1,b_2,b_3\},p] =$$
$$= \frac{\partial HypergeometricPFQAux1[\{a_1,a_2\},\{b_1,b_2,b_3\},p]}{\partial p},\ \ \varphi_4 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_3, \ \frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dp} = a_1 a_2 \varphi_1 \varphi_5^2 - (b_1 b_2 b_3 - p(a_1 + a_2 + 1))\varphi_2 \varphi_5^3 -$$

$$-p(1-p+b_1+b_1b_2+b_2+b_1b_3+b_2b_3+b_3)\varphi_3\varphi_5^3-(b_1+b_2+b_3+3)p^2\varphi_4\varphi_5^2, \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

Auxiliary Hypergeometric functions

30. Definition: $HGAux1[p] = (1-p^2)^{-1}$
Extension: $\varphi = HGAux1[p]$.
Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = 2p\varphi^3$.
31. Definition: $HGAux2[p] = (4+p^2)^{-1}$
Extension: $\varphi = HGAux2[p]$.
Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = -2p\varphi^2$.
32. Definition: $HGAux3[p] = (1-p)^{-1}$
Extension: $\varphi = HGAux3[p]$.
Differential equation: $\frac{d\varphi}{dp} = \varphi^2$.

5.6 Category 6: Polynomials

Classical Orthogonal Polynomials

1. Definition: $HermiteH[n, p] = H_n(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = HermiteH[n, p], \ \varphi_2 = HermiteHAux[n, p] = \frac{\partial HermiteH[n, p]}{\partial p}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2 - 2p\varphi_1.$$

2. Definition: $LaguerreL[n, p] = L_n(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = LaguerreL[n, p], \ \varphi_2 = LaguerreLAux[n, p] = \frac{\partial LaguerreL[n, p]}{\partial p}, \ \varphi_3 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-1)\varphi_2\varphi_3 - n\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

3. Definition: $LaguerreL[n, \lambda, p] = L_n^{\lambda}(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = LaguerreL[n, \lambda, p],\ \varphi_2 = LaguerreLAux[n, \lambda, p] =$$
$$= \frac{\partial LaguerreL[n, \lambda, p]}{\partial p},\ \varphi_3 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p-1-\lambda)\varphi_2\varphi_3 - n\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_3^2.$$

4. Definition: $LegendreP[n, p] = L_n(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = LegendreP[n, p],\ \varphi_2 = LegendrePAux[n, p] =$$
$$= \frac{\partial LegendreP[n, p]}{\partial p},\ \varphi_3 = PFAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - n(n+1)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2.$$

5. Definition: $ChebyshevT[n, p] = T_n(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = ChebyshevT[n, p],\ \varphi_2 = ChebyshevTAux[n, p] = \frac{\partial ChebyshevT[n, p]}{\partial p},$$
$$phi_3 = PFAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = p\varphi_2\varphi_3 - n^2\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

6. Definition: $ChebyshevU[n, p] = U_n(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = ChebyshevU[n, p],\ \varphi_2 = ChebyshevUAux[n, p] = \frac{\partial ChebyshevU[n, p]}{\partial p},$$

$$phi_3 = PFAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 3p\varphi_2\varphi_3 - n(n+2)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

7. Definition: $GegenbauerC[n, \lambda, p] = C_n^{(1)}(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = GegenbauerC[n, \lambda, p],\ \varphi_2 = GegenbauerCAux[n, \lambda, p] =$$

$$= \frac{\partial GegenbauerC[n, \lambda, p]}{\partial p},\ \varphi_3 = PFAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = p(2\lambda+1)\varphi_2\varphi_3 - n(n+2\lambda)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

8. Definition: $JacobiP[n, a, b, p] = P_n^{(a,b)}(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = JacobiP[n, a, b, p],\ \varphi_2 = JacobiPAux[n, a, b, p] = \frac{\partial JacobiP[n, a, b, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = PFAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = (p(a+b+2)+a-b)\varphi_2\varphi_3 - n(n+2\lambda)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

Associated Legendre Polynomials and Spherical Harmonics

9. Definition: $LegendreP[n, \mu, 2, p] = P_n^{\mu}(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = LegendreP[n, \mu, 2, p],\ \varphi_2 = LegendrePAux[n, \mu, 2, p] =$$

$$= \frac{\partial LegendreP[n, \mu, 2, p]}{\partial p},\ \varphi_3 = PFAux1[p] = (1-p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - (n(n+1)\varphi_3 - \mu^2\varphi_3^2)\varphi_1,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2p\varphi_3^2.$$

5.7 Category 7: Mathieu and Spheroidal Functions

Mathieu Functions

1. Definition: $MathieuC[a, q, p] = Ce(a, q, p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = MathieuC[a, q, p],\ \varphi_2 = MathieuCAux[a, q, p] = \frac{\partial MathieuC[a, q, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = Cos[p],\ \varphi_4 = Sin[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_1(2q(\varphi_3^2 - \varphi_4^2) - a),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_4,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_3.$$

2. Definition: $MathieuS[a, q, p] = Se(a, q, p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = MathieuS[a, q, p],\ \varphi_2 = MathieuSAux[a, q, p] = \frac{\partial MathieuS[a, q, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = Cos[p],\ \varphi_4 = Sin[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_1(2q(\varphi_3^2 - \varphi_4^2) - a),\ \frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_4,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_3.$$

3. Definition: $MathieuCPrime[a, q, p] = Ce_z(a, q, p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = MathieuCPrime[a, q, p] = \frac{\partial MathieuC[a, q, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_2 = MathieuCPrimeAux[a, q, p] = \frac{\partial MathieuCPrime[a, q, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = MASAux1[a, q, -p] = (a - 2q(\cos^2(p) - \sin^2(p)))^{-1},\ \varphi_4 = Cos[p],\ \varphi_5 = Sin[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 8q\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5 - (a - 2q(\varphi_4^2 - \varphi_5^2))\varphi_1,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = 4q(\varphi_4 - \varphi_5)\varphi_3^2, \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_5, \ \frac{d\varphi_5}{dp} = \varphi_4.$$

4. Definition: $MathieuSPrime[a, q, p] = Se_z(a, q, p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = MathieuSPrime[a, q, p] = \frac{\partial MathieuS[a, q, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_2 = MathieuSPrimeAux[a, q, p] = \frac{\partial MathieuSPrime[a, q, p]}{\partial p},$$

$\varphi_3 = MASAux1[a, q, -p] = (a-2q(\cos^2(p)-\sin^2(p)))^{-1}, \ \varphi_4 = Cos[p], \ \varphi_5 = Sin[p].$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = 8q\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5 - (a - 2q(\varphi_4^2 - \varphi_5^2))\varphi_1,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = 4q(\varphi_4 - \varphi_5)\varphi_3^2, \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_5, \ \frac{d\varphi_5}{dp} = \varphi_4.$$

Spheroidal Functions

5. Definition:

$$SpheroidalPS[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = PS_{\nu,\mu}(\gamma, p).$$

The parameter λ depends on parameters $\nu, \mu, \gamma : \lambda = \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)$ is spheroidal eigenvalue.
Extension:

$$\varphi_1 = SpheroidalPS[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p], \ \varphi_2 = SpheroidalPSAux[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] =$$

$$= \frac{\partial SpheroidalPS[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p}, \ \varphi_3 = MASAux2[a, q, -p] = (1 - p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - ((1 - p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma) - \mu^2\varphi_3)\varphi_1\varphi_3, \ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2.$$

6. Definition:

$$SpheroidalQS[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = QS_{\nu,\mu}(\gamma, p).$$

The parameter λ depends on parameters $\nu, \mu, \gamma : \lambda = \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)$ is spheroidal eigenvalue.
Extension:

$$\varphi_1 = SpheroidalQS[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p],\ \varphi_2 = SpheroidalQSAux[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] =$$

$$= \frac{\partial SpheroidalQS[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},\ \varphi_3 = MASAux2[a, q, -p] = (1 - p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - ((1 - p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma) - \mu^2\varphi_3)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2.$$

7. Definition:

$$SpheroidalS1[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = S^{(1)}_{\nu,\mu}(\gamma, p).$$

The parameter λ depends on parameters $\nu, \mu, \gamma : \lambda = \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)$ is spheroidal eigenvalue.
Extension:

$$\varphi_1 = SpheroidalS1[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p],\ \varphi_2 = SpheroidalS1Aux[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] =$$

$$= \frac{\partial SpheroidalS1[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},\ \varphi_3 = MASAux2[p] = (1 - p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - ((1 - p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma) - \mu^2\varphi_3)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2.$$

8. Definition:

$$SpheroidalS2[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = S^{(1)}_{\nu,\mu}(\gamma, p).$$

The parameter λ depends on parameters $\nu, \mu, \gamma : \lambda = \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)$ s spheroidal eigenvalue.
Extension:

$$\varphi_1 = SpheroidalS2[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p],\ \varphi_2 = SpheroidalS2Aux[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] =$$

$$= \frac{\partial SpheroidalS2[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},\ \varphi_3 = MASAux2[p] = (1 - p^2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p\varphi_2\varphi_3 - ((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma) - \mu^2\varphi_3)\varphi_1\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2.$$

9. Definition:

$$SpheroidalPSPrime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = PS'_{\nu,\mu}(\gamma, p).$$

The parameter λ depends on parameters $\nu, \mu, \gamma : \lambda = \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)$ is spheroidal eigenvalue.

Extension:

$$\varphi_1 = SpheroidalPSPrime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = \frac{\partial SpheroidalPS[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_2 = SpheroidalPSPrimeAux[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = \frac{\partial SpheroidalPSPrime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = MASAux2[p] = (1-p^2)^{-1},$$

$$\varphi_4 = MASAux3[p] = (\mu^2 - (1-p^2)((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)))^{-1},$$

$$\varphi_5 = MASAux4[p] = (\mu^2 - (1-p^2)\gamma^2 - (1-p^2)\lambda_{\nu,\mu}(\gamma))^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p(((1-p^2)^2\gamma^2 + \mu^2)\varphi_4 + 2)\varphi_2\varphi_3 -$$

$$-(4p^2((1-p^2)^2\gamma^2 + \mu^2)\varphi_5 + ((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma) - \mu^2\varphi_3 - 2)\varphi_1\varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -2p(2\gamma^2(1-p^2) + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma))\varphi_3^2,$$

$$\frac{d\varphi_5}{dp} = -2p(2\gamma^2(1-p^2) + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma))\varphi_3^2.$$

10. Definition:

$$SpheroidalQSPrime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = QS'_{\nu,\mu}(\gamma, p).$$

The parameter λ depends on parameters $\nu, \mu, \gamma : \lambda = \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)$ is spheroidal eigenvalue.

Extension:

$$\varphi_1 = SpheroidalQSPrime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = \frac{\partial SpheroidalQS[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_2 = SpheroidalQSPrimeAux[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = \frac{\partial SpheroidalQSPrime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = MASAux2[p] = (1-p^2)^{-1},$$

$$\varphi_4 = MASAux3[p] = (\mu^2 - (1-p^2)((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)))^{-1},$$

$$\varphi_5 = MASAux4[p] = (\mu^2 - (1-p^2)\gamma^2 - (1-p^2)\lambda_{\nu,\mu}(\gamma))^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p(((1-p^2)^2\gamma^2 + \mu^2)\varphi_4 + 2)\varphi_2\varphi_3 -$$

$$-(4p^2((1-p^2)^2\gamma^2 + \mu^2)\varphi_5 + ((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma) - \mu^2\varphi_3 - 2)\varphi_1\varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2, \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -2p(2\gamma^2(1-p^2) + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma))\varphi_3^2,$$

$$\frac{d\varphi_5}{dp} = -2p(2\gamma^2(1-p^2) + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma))\varphi_3^2.$$

11. Definition:

$$SpheroidalS1Prime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = S^{(1)'}_{\nu,\mu}(\gamma, p).$$

The parameter λ depends on parameters $\nu, \mu, \gamma : \lambda = \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)$ is spheroidal eigenvalue.

Extension:

$$\varphi_1 = SpheroidalS1Prime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = \frac{\partial SpheroidalS1[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_2 = SpheroidalS1PrimeAux[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = \frac{\partial SpheroidalS1Prime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = MASAux2[p] = (1-p^2)^{-1},$$

$$\varphi_4 = MASAux3[p] = (\mu^2 - (1-p^2)((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)))^{-1},$$

$$\varphi_5 = MASAux4[p] = (\mu^2 - (1-p^2)\gamma^2 - (1-p^2)\lambda_{\nu,\mu}(\gamma))^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p(((1-p^2)^2\gamma^2 + \mu^2)\varphi_4 + 2)\varphi_2\varphi_3 -$$

$$-(4p^2((1-p^2)^2\gamma^2 + \mu^2)\varphi_5 + ((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma) - \mu^2\varphi_3 - 2)\varphi_1\varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2, \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -2p(2\gamma^2(1-p^2) + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma))\varphi_3^2,$$

$$\frac{d\varphi_5}{dp} = -2p(2\gamma^2(1-p^2) + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma))\varphi_3^2.$$

12. Definition:

$$SpheroidalS2Prime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = S^{(2)\prime}_{\nu,\mu}(\gamma, p).$$

The parameter λ depends on parameters $\nu, \mu, \gamma : \lambda = \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)$ is spheroidal eigenvalue.

Extension:

$$\varphi_1 = SpheroidalS2Prime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = \frac{\partial SpheroidalS2[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_2 = SpheroidalS2PrimeAux[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p] = \frac{\partial SpheroidalS2Prime[\lambda, \nu, \mu, \gamma, p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = MASAux2[p] = (1-p^2)^{-1},$$

$$\varphi_4 = MASAux3[p] = (\mu^2 - (1-p^2)((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma)))^{-1},$$

$$\varphi_5 = MASAux4[p] = (\mu^2 - (1-p^2)\gamma^2 - (1-p^2)\lambda_{\nu,\mu}(\gamma))^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2, \ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2p(((1-p^2)^2\gamma^2 + \mu^2)\varphi_4 + 2)\varphi_2\varphi_3 -$$

$$-(4p^2((1-p^2)^2\gamma^2 + \mu^2)\varphi_5 + ((1-p^2)\gamma^2 + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma) - \mu^2\varphi_3 - 2)\varphi_1\varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = 2\varphi_3^2, \ \frac{d\varphi_4}{dp} = -2p(2\gamma^2(1-p^2) + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma))\varphi_3^2,$$

$$\frac{d\varphi_5}{dp} = -2p(2\gamma^2(1-p^2) + \lambda_{\nu,\mu}(\gamma))\varphi_3^2.$$

5.8 Category 8: Elliptic Integrals

Complete Elliptic Integrals

1. Definition: $EllipticE[p] = E(p) = E(\frac{\pi}{2}p)$.

Extension:

$$\varphi_1 = EllipticE[p], \ \varphi_2 = EllipticEAux[p] = \frac{\partial EllipticE[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = EIAux1[p] = (1-p)^{-1},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = -\varphi_2\varphi_4 - 0.25\varphi_1\varphi_3\varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

2. Definition: $EllipticK[p] = K(p) = F(\frac{\pi}{2}p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = EllipticK[p],\ \varphi_2 = EllipticKAux[p] = \frac{\partial EllipticK[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = EIAux1[p] = (1-p)^{-1},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 0.25\varphi_1\varphi_3\varphi_4 - (1-2p)\varphi_2\varphi_3\varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = \varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

3. Definition:

$$EllipticPi[p_1, p_2] = \Pi(p_1|p_2) = \Pi(p_1; \frac{\pi}{2}p_2).$$

Extension:

$$\varphi_1 = EllipticPi[p_1, p_2],\ \varphi_2 = EllipticE[p_1],\ \varphi_3 = EllipticE[p_2],$$

$$\varphi_4 = EIAux2[p_2] = (1-p_2)^{-1},\ \varphi_5 = Inv[p_1],\ \varphi_6 = Inv[p_2],$$

$$\varphi_7 = EIAux3[p_1, p_2] = (p_2 - p_1)^{-1},\ \varphi_8 = EIAux4[p_1] = (p_1 - 1)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_1} = 0.5\varphi_7\varphi_8(\varphi_2 + (p_2 - p_1)\varphi_3\varphi_5 + (p_1^2 - p_2)\varphi_1\varphi_5),\ \frac{d\varphi_1}{dp_2} = 0.5\varphi_7(\varphi_2\varphi_4 - \varphi_1),$$

$$\frac{d\varphi_2}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_2}{dp_2} = 0.5(\varphi_2 - \varphi_3)\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp_1} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp_2} = 0.5(\varphi_2 - (1-p_2)\varphi_3)\varphi_4\varphi_6,\ \frac{d\varphi_4}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_4}{dp_2} = \varphi_4^2,\ \frac{d\varphi_5}{dp_1} = -\varphi_5^2,\ \frac{d\varphi_5}{dp_2} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_6}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_6}{dp_2} = -\varphi_6^2,\ \frac{d\varphi_7}{dp_1} = \varphi_7^2,\ \frac{d\varphi_7}{dp_2} = -\varphi_7^2,$$

$$\frac{d\varphi_8}{dp_1} = -\varphi_8^2,\ \frac{d\varphi_7}{dp_2} = 0.$$

Incomplete Elliptic Integrals

4. Definition:

$$EllipticE[p_1,p_2]=\Pi(p_1|p_2)=\int\limits_0^{p_1}\sqrt{1-p_2\sin^2(t)}dt.$$

Extension:

$$\varphi_1=EllipticE[p_1,p_2],\ \varphi_2=EllipticF[p_1],\ \varphi_3=Inv[p_2],\ \varphi_4=Cos[p_1],$$

$$\varphi_5=Sin[p_1],\ \varphi_6=ElAux5[p_1,p_2]=(1-p_2\sin^2(p_1))^{0.5},$$

$$\varphi_7=ElAux6[p_1,p_2]=(1-p_2\sin^2(p_1))^{-0.5}\ \varphi_8=EIAux7[p_2]=(1-p_2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_1}=\varphi_6,\ \frac{d\varphi_1}{dp_2}=0.5(\varphi_1-\varphi_2)\varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dp_1}=\varphi_7,\ \frac{d\varphi_2}{dp_2}=0.5(\varphi_1\varphi_3\varphi_8-\varphi_2\varphi_3-\varphi_4\varphi_5\varphi_7\varphi_8,\ \frac{d\varphi_3}{dp_1}=0,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp_2}=-\varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp_1}=-\varphi_5,\ \frac{d\varphi_4}{dp_2}=0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_1}=\varphi_4,\ \frac{d\varphi_5}{dp_2}=0,$$

$$\frac{d\varphi_6}{dp_1}=-p_2\varphi_4\varphi_5\varphi_7,\ \frac{d\varphi_6}{dp_2}=-0.5\varphi_5^2\varphi_7,\ \frac{d\varphi_7}{dp_1}=p_2\varphi_4\varphi_5\varphi_7^3,\ \frac{d\varphi_7}{dp_2}=0.5\varphi_5^2\varphi_7^3,$$

$$\frac{d\varphi_8}{dp_1}=0,\ \frac{d\varphi_7}{dp_2}=\varphi_8^2.$$

5. Definition:

$$EllipticE[p_1,p_2]=F(p_1|p_2)=\int\limits_0^{p_1}\frac{1}{\sqrt{1-p_2\sin^2(t)}}dt.$$

Extension:

$$\varphi_1=EllipticF[p_1,p_2],\ \varphi_2=EllipticE[p_1,p_2],\ \varphi_3=Inv[p_2],\ \varphi_4=Cos[p_1],$$

$$\varphi_5=Sin[p_1],\ \varphi_6=ElAux5[p_1,p_2]=(1-p_2\sin^2(p_1))^{0.5},$$

$$\varphi_7=ElAux6[p_1,p_2]=(1-p_2\sin^2(p_1))^{-0.5}\ \varphi_8=EIAux7[p_2]=(1-p_2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_1}=\varphi_7,\ \frac{d\varphi_1}{dp_2}=0.5(\varphi_2\varphi_3\varphi_8-\varphi_1\varphi_3-\varphi_4\varphi_5\varphi_7\varphi_8,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dp_1} = \varphi_6,\ \frac{d\varphi_2}{dp_2} = 0.5(\varphi_2 - \varphi_1)\varphi_3,\ \frac{d\varphi_3}{dp_1} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp_2} = -\varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp_1} = -\varphi_5,\ \frac{d\varphi_4}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_1} = \varphi_4,\ \frac{d\varphi_5}{dp_2} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_6}{dp_1} = -p_2\varphi_4\varphi_5\varphi_7,\ \frac{d\varphi_6}{dp_2} = -0.5\varphi_5^2\varphi_7,\ \frac{d\varphi_7}{dp_1} = p_2\varphi_4\varphi_5\varphi_7^3,\ \frac{d\varphi_7}{dp_2} = 0.5\varphi_5^2\varphi_7^3,$$

$$\frac{d\varphi_8}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_7}{dp_2} = \varphi_8^2.$$

6. Definition:

$$EllipticPi[p_1, p_2, p_3] = \Pi(p_3; p_1|p_2) = \int\limits_0^{p_1} \frac{1}{(1 - p_3\sin^2(t))\sqrt{1 - p_2\sin^2(t)}}dt.$$

Extension:

$$\varphi_1 = EllipticPi[p_1, p_2, p_3],\ \varphi_2 = EllipticE[p_1, p_2],\ \varphi_3 = EllipticF[p_1, p_2],$$

$$\varphi_4 = Inv[p_2],\ \varphi_5 = Inv[p_3],\ \varphi_6 = Cos[p_1],\ \varphi_7 = Sin[p_1],$$

$$\varphi_8 = ElAux5[p_1, p_2] = (1 - p_2\sin^2(p_1))^{0.5},\ \varphi_9 = ElAux6[p_1, p_2] = (1 - p_2\sin^2(p_1))^{-0.5},$$

$$\varphi_{10} = EIAux7[p_2] = (1 - p_2)^{-1},\ \varphi_{11} = ElAux8[p_1, p_3] = (1 - p_3\sin^2(p_1))^{-0.5},$$

$$\varphi_{12} = EIAux9[p_2, p_3] = (p_2 - p_3)^{-1},\ \varphi_{13} = ElAux10[p_3] = (p_3 - 1)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_1} = \varphi_9\varphi_{11},\ \frac{d\varphi_1}{dp_2} = 0.5\varphi_{12}(\varphi_2\varphi_1 0 - p_2\varphi_6\varphi_7\varphi_9\varphi_{10} - \varphi_1),$$

$$\frac{d\varphi_1}{dp_3} = 0.5\varphi_{12}\varphi_{13}(\varphi_2 + (p_2 - p_3)\varphi_3\varphi_5 - p_3\varphi_6\varphi_7\varphi_8\varphi_{11}),\ \frac{d\varphi_2}{dp_1} = \varphi_8,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dp_2} = 0.5(\varphi_2 - \varphi_3)\varphi_4,\ \frac{d\varphi_2}{dp_3} = 0,\ \frac{d\varphi_3}{dp_1} = \varphi_9,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp_2} = 0.5(\varphi_2\varphi_4\varphi_1 0 - \varphi_6\varphi_7\varphi_9\varphi_{10} - \varphi_3\varphi_4), fracd\varphi_3 dp_3 = 0,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_4}{dp_2} = \varphi_4^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp_3} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_5}{dp_3} = -\varphi_5^2,$$

$$\frac{d\varphi_6}{dp_1} = -\varphi_7,\ \frac{d\varphi_6}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_6}{dp_3} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_7}{dp_1} = \varphi_6,\ \frac{d\varphi_7}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_7}{dp_3} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_8}{dp_1} = -p_2\varphi_6\varphi_7\varphi_9,\ \frac{d\varphi_8}{dp_2} = -0.5\varphi_7^2\varphi_9,\ \frac{d\varphi_8}{dp_3} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_9}{dp_1} = 0.5p_2\varphi_6\varphi_7\varphi_9^3,\ \frac{d\varphi_9}{dp_2} = 0.5\varphi_7^2\varphi_9^3,\ \frac{d\varphi_9}{dp_3} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_{10}}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_{10}}{dp_2} = \varphi_1 0^2,\ \frac{d\varphi_{10}}{dp_3} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_{11}}{dp_1} = 2p_2\varphi_6\varphi_7\varphi_{11}^2,\ \frac{d\varphi_{11}}{dp_2} = \varphi_7^2\varphi_{11}^2,\ \frac{d\varphi_{11}}{dp_3} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_{12}}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_{12}}{dp_2} = -\varphi_{12}^2,\ \frac{d\varphi_{12}}{dp_3} = \varphi_{12}^2,$$

$$\frac{d\varphi_{13}}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_{13}}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_{13}}{dp_3} = -\varphi_{13}^2.$$

7. Definition:

$$JacobiZeta[p_1,p_2] = Z(p_1|p_2) = E(p_1|p_2) - \frac{E(p_2)}{K(p_2)}F(p_1|p_2).$$

Extension:

$$\varphi_1 = JacobiZeta[p_1,p_2],\ \varphi_2 = EllipticE[p_2],\ \varphi_3 = EllipticK[p_2],$$

$$\varphi_4 = (EllipticK[p_2])^{-1},\ \varphi_5 = Inv[p_2],\ \varphi_6 = Cos[p_1],\ \varphi_7 = Sin[p_1],$$

$$\varphi_8 = ElAux5[p_1,p_2] = (1-p_2\sin^2(p_1))^{0.5},\ \varphi_9 = ElAux6[p_1,p_2] = (1-p_2\sin^2(p_1))^{-0.5},$$

$$\varphi_{10} = EIAux7[p_2] = (1-p_2)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_1} = \varphi_8 - \varphi_2\varphi_4\varphi_9,\ \frac{d\varphi_1}{dp_2} = 0.5\varphi_5((1-\varphi_2\varphi_4\varphi_{10})\varphi_1 - \varphi_2\varphi_4\varphi_6\varphi_7\varphi_9\varphi_{10},$$

$$\frac{d\varphi_2}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_2}{dp_2} = 0.5(\varphi_2-\varphi_3)\varphi_5,\ \frac{d\varphi_3}{dp_1} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp_2} = 0.5(\varphi_2-(1-p_2)\varphi_3)\varphi_5\varphi_{10},\ \frac{d\varphi_4}{dp_1} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dp_2} = -0.5(\varphi_2-(1-p_2)\varphi_3)\varphi_4^2\varphi_5\varphi_{10},\ \frac{d\varphi_5}{dp_1} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_5}{dp_2} = -\varphi_5^2,\ \frac{d\varphi_6}{dp_1} = -\varphi_7,\ \frac{d\varphi_6}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_7}{dp_1} = \varphi_6,$$

$$\frac{d\varphi_7}{dp_2} = 0,\ \frac{d\varphi_8}{dp_1} = -p_2\varphi_6\varphi_7\varphi_9,\ \frac{d\varphi_8}{dp_2} = -0.5\varphi_7^2\varphi_9,$$

$$\frac{d\varphi_9}{dp_1} = p_2\varphi_6\varphi_7\varphi_9^3,\ \frac{d\varphi_9}{dp_2} = 0.5p_2\varphi_7^2\varphi_9^3,\ \frac{d\varphi_{10}}{dp_1} = 0,\ \frac{d\varphi_{10}}{dp_2} = \varphi_{10}^3.$$

5.9 Category 9: Painleve Transcendents

1. Definition: $PainleveI[p] = P_I(p)$.
The Painleve functions are the solutions of the equations $P_I - P_{VI}$.
Extension:

$$\varphi_1 = PainleveI[p],\ \varphi_2 = PainleveIAux[p] = \frac{\partial PainleveI[p]}{\partial p}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 6\varphi_1^2 + p.$$

2. Definition: $PainleveII[p] = P_{II}(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = PainleveII[p],\ \varphi_2 = PainleveIIAux[p] = \frac{\partial PainleveII[p]}{\partial p}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 2\varphi_3^2 + p\varphi + \alpha.$$

3. Definition: $PainleveIII[p] = P_{III}(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = PainleveIII[p],\ \varphi_2 = PainleveIIIAux1[p] = \frac{\partial PainleveIII[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = PainleveIIIAux2[p] = \frac{1}{PainleveIII[p]},\ \varphi_4 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = \varphi_2^2\varphi_3 - \varphi_2\varphi_4 + \varphi_4(\alpha\varphi_1^2 + \beta) + \gamma\varphi_1^3 + \delta\varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_2\varphi_3^2, \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_4^2.$$

4. Definition: $PainleveIV[p] = P_{IV}(p)$.
Extension:

$$\varphi_1 = PainleveIV[p],\ \varphi_2 = PainleveIVAux[p] = \frac{\partial PainleveIV[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = PainleveIVAux1[p] = \frac{1}{PainleveIV[p]}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 0.5\varphi_2^2\varphi_3 + 1.5\varphi_1^3 + 4p\varphi_1^2 + 2\varphi_1(p^2 - \alpha) + \beta\varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_2\varphi_3^2.$$

5. Definition: $PainleveV[p] = P_V(p)$.

Extension:

$$\varphi_1 = PainleveV[p],\ \varphi_2 = PainleveVAux[p] = \frac{\partial PainleveV[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = PainleveVAux1[p] = \frac{1}{PainleveV[p]},\ \varphi_4 = PainleveVAux2[p] =$$

$$= \frac{1}{(PainleveV[p] - 1)},\ \varphi_5 = Inv[p].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 0.5\varphi_2^2\varphi_3 + 1.5\varphi_1^3 + 4p\varphi_1^2 + 2\varphi_1(p^2 - \alpha) + \beta\varphi_3,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_2\varphi_3^2.$$

6. Definition: $PainleveVI[p] = P_{VI}(p)$.

Extension:

$$\varphi_1 = PainleveVI[p],\ \varphi_2 = PainleveVIAux[p] = \frac{\partial PainleveVI[p]}{\partial p},$$

$$\varphi_3 = PainleveVIAux1[p] = \frac{1}{PainleveVI[p]},\ \varphi_4 = PainleveVIAux2[p] =$$

$$= \frac{1}{(PainleveVI[p] - 1)},\ \varphi_5 = PainleveVIAux3[p] = \frac{1}{(PainleveVI[p] - 1)},$$

$$\varphi_6 = Inv[p],\ \varphi_7 = Inv[p - 1].$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp} = \varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp} = 0.5\varphi_2^2(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5) - \varphi_2(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7) +$$

$$+ \varphi_1\varphi_6^2\varphi_7^2(\varphi_1 - 1)(\varphi_1 - p)\Big(\alpha + p\beta\varphi_3^2 + \gamma\varphi_4^2(p - 1) + \gamma p\varphi_5^2(p - 1)\Big),$$

$$\frac{d\varphi_3}{dp} = -\varphi_2\varphi_3^2,\ \frac{d\varphi_4}{dp} = -\varphi_2\varphi_4^2,\ \frac{d\varphi_5}{dp} = -\varphi_4^2(\varphi_2 - 1),$$

$$\frac{d\varphi_6}{dp} = -\varphi_6^2,\ \frac{d\varphi_7}{dp} = -\varphi_7^2.$$

5.10 Category 10: Implicit Functions

1. Definition: $Gilbert[p_1, p_2, p_3]$.
The function $\varphi_1 = Gilbert[p_1, p_2, p_3]$ is defined as solution of equation such that $\varphi_1(0, 0, 0) = -1$.
Extension:

$$\varphi_1 = Gilbert[p_1, p_2, p_3],\ \varphi_2 = GilbertAux[p_1, p_2, p_3] = (7\varphi_1^6 + 3p_3\varphi_1^2 + 2p_2\varphi_1 + p_1)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_j} = -\varphi_1^j\varphi_2,\ \frac{d\varphi_2}{dp_j} = (42\varphi_1^5 + 6p_3\varphi_1 + 2p_2)\varphi_1^j\varphi_2^3 - j\varphi_1^{j-1}\varphi_2^2,\ j = 1, 2, 3.$$

2. Definition: $KeplerE[p_1, p_2]$, where $p_1 = e$ is Eccentricity of the Keplerian Elliptic Orbit to gravitational Two-Body problem and $p_2 = M$ is Mean Anomaly. $KeplerE[p_1, p_2] = E(e, M)$ is the implicit function defined by Kepler equation.
Extension:

$$\varphi_1 = KeplerE[p_1, p_2],\ \varphi_2 = KeplerS[p_1, p_2] = Sin[e],$$

$$\varphi_3 = KeplerC[p_1, p_2] = Cos[e],\ \varphi_4 = KeplerAux[p_1, p_2] = (1 - e\cos E)^{-1}.$$

Differential equation:

$$\frac{d\varphi_1}{dp_1} = \varphi_2\varphi_4,\ \frac{d\varphi_1}{dp_2} = \varphi_4,\ \frac{d\varphi_2}{dp_1} = \varphi_2\varphi_3\varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dp_2} = \varphi_3\varphi_4,\ \frac{d\varphi_3}{dp_1} = -\varphi_2^2\varphi_4,\ \frac{d\varphi_3}{dp_2} = -\varphi_2\varphi_4,$$

$$\frac{d\varphi_4}{dp_1} = \varphi_3\varphi_4^2 - p\varphi_2^2\varphi_4^3,\ \frac{d\varphi_4}{dp_2} = -p\varphi_2\varphi_4^3.$$

Conclusion

The main results of the dissertation are as follows:

1. Details of the scheme construction have been developed;
2. Constructing schemes algorithms for an arbitrary set of monomials have been implemented;
3. Programs that implement schemes design algorithms have been developed;
4. Programs that implement the TSMR algorithm of Taylor series methods and their comparison with the TIDES program have been developed;
5. Numerical experiments have been conducted, the effectiveness of the developed algorithms and programs for numerical integration of differential equations has been investigated.

In conclusion, the author expresses his deep gratitude to the scientific advisor Babadzanjanz L. K for support, help, discussion of the results and scientific guidance. The author also thanks everyone who made this work possible.

References

[1] *Abalakin V., Aksenov E., Grebenikov E., Demin V., Ryabov Yu* Reference guide to celestial mechanics and astrodynamics // Moscow: Nauka. 1976 (in Russian).

[2] *Alesova I., Babadzanjanz L., Pototskaya I., Saakyan A.* Optimal control of nonlinear oscillations of a satellite in an elliptical orbit // Stability and oscillations of nonlinear control systems. 2016. p. 14 – 17 (in Russian).

[3] *Alesova I., Babadzanjanz L., Pototskaya I., Saakyan A.* Optimization of stepwise integration of differential equations of dynamics // Stability and oscillations of nonlinear control systems. 2016. p. 17 – 19 (in Russian).

[4] *Alferov G., Babadzanjanz L., Kovrigin D., Senatova S.* Laboratory workshop on the mechanics of controlled motion. // Tutorial. LGU Publishing House. 1989 (in Russian).

[5] *Arushanyan O., Zaletkin S.* Numerical solution of ordinary differential equations in Fortran // Moscow: Moscow University Press, 1990 (in Russian).

[6] *Babadzanjanz L.* Continuity and representation of solutions in problems of celestial mechanics // Trudy ITA AN SSSR, no. 17. 1978. p. 3 – 45 (in Russian).

[7] *Babadzanjanz L., Chekashkin Yu.* An analytical method for calculating perturbations in the coordinates of the planets // Vestnik Leningrad. un-that. Ser. 1: Mathematics, Mechanics, Astronomy. Issue 3. 1990. p. 101 – 107 (in Russian).

[8] *Babadzanjanz L.* Taylor series method // Bulletin of St. Petersburg University. Ser. 10.No. 3. 2010. p. 13 – 29 (in Russian).

[9] *Babadzanjanz L.* Method of additional variables // Bulletin of Saint Petersburg University. Ser. 10. No. 1. 2010. p. 3 – 11 (in Russian).

[10] *Babadzanjanz L., Bolshakov A.* Implementation of the Taylor series method for solving ordinary differential equations // Computational methods and programming. Research Computing Center of Moscow State University M.V. Lomonosov. T. 13.2012. p. 497 – 510 (in Russian).

[11] *Babadzanjanz L., Bregman K.* Algorithm of the method of additional variables // Bulletin of St. Petersburg University. Ser. 10. No. 2. 2012. p. 3 – 12 (in Russian).

[12] *Babadzanjanz L., Mgoian P.* Estimation of holomorphic solutions of ordinary differential equations // Izvestiya AN Arm. SSR. Series "Mathematics". Volume XVII. No. 2. 1982. p. 83 – 91 (in Russian).

[13] *Babadzanjanz L., Mgoian P.* Estimation of holomorphic solutions of ordinary differential equations // Vestnik LSU. 1984. No. 7 (in Russian).

[14] *Bandi B.* Fundamentals of linear programming // Moscow "Radio and Communication". 1989. p. 17 - 20 (in Russian).

[15] *Bellman R.* Regulation processes with adaptation // translation from English. Yu. P. Leonova; ed. A.M. Letova. Moscow: Nauka, 1964. p. 360.

[16] *Bellman R.* Introduction to matrix theory // translation from English; ed. V. B. Lidsky. M .: Science. 1969. p. 368.

[17] *Brumberg B.* Series of polynomials in the three-body problem // Byul. Institute of theory. Astronomy of the USSR Academy of Sciences. T. 9., No. 4., 1963. p. 234 – 256.

[18] *Bregman K.* Mathematical models of disturbed motion in central fields // Dissertation. 2014 (in Russian).

[19] *Guntmatcher F.* Matrix theory // Science. 1988.

[20] *Mermun G.* On the representation of the general solution of the three-body problem by converging series // Byul. Institute of theory. Astronomy of the USSR Academy of Sciences. T. 6. No. 10. 1958. p. 713 – 769.

[21] *Poincare A.* On curves determined by differential equations // Ed. A. Andronova, M.: Gostekhizdat. 1947. p. 392.

[22] *Saakayn A.* Acceleration of the numerical integration of dynamic equations by means of schemes // Control processes and stability. Volume 3. Number 1. 2016 (in Russian).

[23] *Chernichova N.* Method for calculating perturbations in the field of a rotating body // Bulletin of the Leningrad University. Ser. 1: Mathematics, Mechanics, Astronomy. Issue 4. 187. p. 83 – 89 (in Russian).

[24] *Abad A., Barrio R., Blesa F., Rodriguez M.* Breaking the limits: the Taylor series method // Applied Mathematics and Computation. 217, №20. 2011. pp. 7940 – 7954.

[25] *Abad A., Barrio R., Blesa F., Rodriguez M.* Algorithm 924: TIDES, a Taylor Series Integrator for Differential EquationS // ACM Transactions on Mathematical Software. 2012.

[26] *Alesova I., Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Taylor Series Method of Numerical Integration of the N-body problem // AIP Conference Proceeding. Volume 1863. Issue 1. 2017.

[27] *Alesova I., Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Piecewise Polynomial Control in Mechanical Systems // AIP Conference Proceeding. Volume 1863. Issue 1. 2017.

[28] *Alesova I., Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Fuel/-Time Optimal Control of Satellite Oscillations // AIP Conference Proceeding. Volume 1863. Issue 1. 2017.

[29] *Alesova I., Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Control of Mechanical Systems by the Mixed "Time and Expenditure" Criterion // AIP Conference Proceeding. Volume 1959. Issue 1. 2018.

[30] *Alesova I., Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* High-Precision Numerical Integration of Equations in Dynamics // AIP Conference Proceeding. Volume 1959. Issue 1. 2018.

[31] *Alesova I., Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Optimal Control of Parametric Oscillations of Compressed Flexible Bars // AIP Conference Proceeding. Volume 1959. Issue 1. 2018.

[32] *Alesova I., Babadzanjanz L., Bregman A., Bregman K., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Piecewise Constant Control of Linear Mechanical Systems in the General Case // AIP Conference Proceeding. Volume 1978. Issue 1. 2018.

[33] *Alesova I., Babadzanjanz L., Bregman A., Bregman K., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Perturbations of Calculation Technique for Central Fields // AIP Conference Proceeding. Volume 1978. Issue 1. 2018.

[34] *Alesova I., Babadzanjanz L., Bregman A., Bregman K., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Control of Satellite Aerodynamic Oscillations // AIP Conference Proceeding. Volume 1978. Issue 1. 2018.

[35] *Alesova I., Babadzanjanz L., Bregman A., Bregman K., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Schemes of Fast Evaluation of Multivariate Monomials for Speeding Up Numerical Integration of Equations in Dynamics // AIP Conference Proceeding. Volume 1978. Issue 1. 2018.

[36] *Alesova I., Babadzanjanz L., Pototskaya I., Saakyan A.* Fuel Optimal Control of Non-Linear Oscillations of a Satellite on Elliptical Orbit // International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems. 2016.

[37] *Andrade R., Rauh A.* The Lorenz model and the method of Carleman embedding // Physics Letters. Vol. 82A. 1981. pp. 276 – 278.

[38] *Azamed Yehuala G.* Qualitative Models of Neural Activity and the Carleman Embedding Technique // East Tennessee State University M.S thesis. 2009. pp. 11 – 17.

[39] *Babadzanjanz L.* Existence of the Continuations in the N-body problem // Celestial Mechanics. 20, 1979. pp. 43 – 57.

[40] *Babadzanjanz L.* Error estimates for numerical integration of the N-body problem // American Institute of Physics (Sov.Astron.Lett.7(6) Nov.-dec.-1981), 1982. pp. 416 – 418.

[41] *Babadzanjanz L.* On the global solution of N-body problem // Celestial Mechanics. 56. 1993. pp. 427 – 449.

[42] *Babadzanjanz L., Sarkissian D* Taylor series method for dynamic systems with control: convergence and error estimates // Journal of Mathematical Sciences. Springer New York, Vol. 139. № 6. 2006. pp. 7025 – 7046.

[43] *Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Fast evaluation of multivariate monomials for speeding up numerical integration in space dynamics // International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management. Volume 19. 2019. pp. 647 - 654.

[44] *Babadzanjanz L., Pototskaya I., Pupysheva Y., Saakyan A.* Quality-cost optimal control in Lotka-Volterra populations model // International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management. Volume 19. 2019. pp. 3 - 10.

[45] *Bank B., Giusti M., Heintz J., Safey El Din.* Intrinsic complexity estimates in polynomial optimization // Journal of Complexity, 2014.

[46] *Bates D., Hauenstein J., Sommese A., Wampler C.* Numerically solving polynomial systems with Bertini // Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM. Philadelphia. Software, Environments, and Tools, Vol. 25. 2015.

[47] *Bellman R.* Introduction to matrix analysis // MCGRAW-HILL book company, inc. 1960.

[48] *Bellman R.* Adaptive control processes: a guided tour // Princeton University Press. 1961.

[49] *Bellman R., Richardson J.* On Some questions arising in the approximate solution of nonlinear differential equations // Quart. Math., Vol. 20. 1963. pp. 333 – 339.

[50] *Bellman R.* Addition chains of vectors (advanced problem 5125) // American Mathematical Monthly Vol. 70. 1963.

[51] *Berz M., Bischof C., Corliss G., Griewank A.* Computational differentiation: techniques, applications, and tools // Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM. Philadelphia. 1996.

[52] *Berz M.* Cosy infinity version 8 reference manual // Technical Report MSUCL-1088. National Superconducting Cyclotron Lab., Michigan State University, East Lansing. Mich. 2003.

[53] *Brauer A.* On addition chains // Bulletin of the American Mathematical Society. Vol.45. 1939. pp. 736 – 739.

[54] *Brening L., Fairen V.* Analytic approach to initiate value problems in nonlinear systems // Journal of Mathematical Physics. Vol. 22. 1981. pp. 649 – 652.

[55] *Broucke R.* Solution of the N-body problem with recurrent power series // Celestial Mechanics. № 4. 1971. pp. 110 – 115.

[56] *Captain Brain Gaude[W.* Solving nonlinear Aeronautical problems using Carleman linearization method // Sandia National Laboratories. 2001.

[57] *Carleman T.* Application de la theories des equations integrales lineaire aux systemes dequations differentielles nonlineaires // Acta mathematica, Vol. 59, 1963. pp. 63-87.

[58] *Ceberio M., Kreinovich V.* Greedy Algorithms for Optimizing Multivariate Horner Schemes // ACM Sigsam Bull, 38, 2004. pp. 8 – 15.

[59] *Corliss G., Chang Y.* Solving ordinary differential equations using Taylor series // ACM Transactions on Mathematical Software. 1982. pp. 114 – 144.

[60] *Carothers D., Parker G., Sochacki J., Warne P.* Some properties of solutions to polynomial systems of differential equations // Electronic journal of differential equations. № 40. 2005. pp. 1 – 17.

[61] *Chang Y., Corliss G.* ATOMFT: solving ODEs and DAEs using Taylor series // Computers and Mathematics with Applications. 1994. № 10 – 12. pp. 209 – 233.

[62] *Charnyi V.* Two Methods of integrating the equations of motion // Cosmic Research. Vol. 8. № 5. 1970.

[63] *Chen B., He S., Li Z., Zhang S.* Maximum block improvement and polynomial optimization // Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Optimization, SIOPT. 2012.

[64] *Dekker K., Verwer J.* Stability of Runge - Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations // Elsevier Science Publishers B. V., North-Holland, Amsterdam - New York - Oxford. 1984.

[65] *Estes R., Lancaster E.* An algorithm for integrating stepwise the restricted problem in Thiele's coordinates // Celestial Mechanics. № 1. 1970. pp. 297 – 300.

[66] *Gordon D.* A survey of fast exponentiation methods // Journal of Algorithms 27. 1998. pp. 129 – 146.

[67] *Griewank A.* Evaluating derivatives // Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM. Philadelphia. 2000.

[68] *Griffith J.* On a generalized Taylor scheme for numerical integration // Astronomy and Astrophysics. Vol. 8. № 2. 1970. pp. 267 – 272.

[69] *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear Oscillations; Dynamical Systems; and Bifurcations of Vector Fields // Springer - Verlag. 1983.

[70] *Hairer E., Norsett S., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems // Springer - Verlag, Berlin - Heildeberg. 1987.

[71] *Hairer E., Wanner G., Norsett S.* Solving ordinary differential equations: nonstiff problems // Berlin: Springer. 2009.

[72] *Hoefkens J., Berz M., Makino K* Computing validated solutions of implicit differential Equations // Advances in Computational Mathematics 19. 2003. pp. 231 – 253.

[73] *Holmes H.* Introduction to Perturbation Methods // Text in Applied Mathematics, Springer - Verlag New York, Inc. 1998.

[74] *Hoppensteadt F.* Analysis and Simulation of Chaotic Systems // Second Edition, Springer - Verlag, Inc. 1993.

[75] *Horner W.* Phil. Trans. Soc. London (1819) 308 – 305. Reprinted in: D.E. Smith, A Source Book in Mathematics McGraw-Hill. 1959.

[76] *Jorba A., Zou M* A software package for the numerical integration of ODEs by means of high-order Taylor methods // Experimental Mathematics 14, № 1. 2005. pp. 99 – 117.

[77] *Kerner E.* Universal formats for ordinary differential systems // Journal of Mathematical Physics, Vol. 22. 1981. pp. 1366 – 1371.

[78] *Knuth D., Papadimitriou C.* Duality in addition chains // Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science 13. 1981. pp. 2 – 4.

[79] *Kochergin V.* On the complexity of computations of system of three monomials in three variables // Matematicheskie Voprosy Kibernetiki, vyp.15 , 2006. pp. 79 – 155.

[80] *Kochergin V.* Correction of estimations of complexity of evaluation of a monomial and systems of monomials in Bellman‘s and Knuth‘s problems // Diskretnyi Analiz i Issl. Oper. Vol. 21. № 6. 2014. pp. 51 – 72.

[81] *Kojima M.* Efficient evaluation of polynomials and their partial derivatives in continuation methods // Journal of the Operations Research Society of Japan. Vol. 51. 2008. pp. 29 – 54.

[82] *Kowalski K.* Hilbert space description of classical dynamical systems // Physica., Vol. 145A. 1987. pp. 408 – 427.

[83] *Kowalski K., Steeb W.* Nonlinear Dynamical Systems and Carleman linearization // Word Scientist. 1991.

[84] *Lara M., Elipe A., Palacios M.* Automatic programming of recurrent power series // Mathematics and Computers in Simulation. Vol. 49. 1999. pp. 351 – 362.

[85] *Leiserson C., Liyun Li, Maza, Moreno M., Xie, Yuzhen.* Efficient Evaluation of Large Polynomials // In K. Fukuda et al. (Eds.): Mathematical Software – ICMS 2010, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6327. 2010. pp. 342 – 353.

[86] *Levi M.* Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations // Memoirs of the American Mathematical Society. Vol. 32. № 244. 1981.

[87] *Makino K., Berz M.* Taylor models and other validated functional inclusion methods // International Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 6. № 3. 2003. pp. 239 – 316.

[88] *Miletics E., Molnarka G.* Taylor series method with numerical derivatives for initial value problems // Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering. Vol. 4. № 1 – 2. 204. pp. 105 – 114.

[89] *Molnarka G., Miletics E.* Implicit extension of Taylor series method with numerical derivatives for initial value problems // Computers and Mathematics with Applications. Vol. 50. № 7. 2005. pp. 1167 – 1177.

[90] *Montroll E., Helleman R.* On a nonlinear perurbation theory without secular terms // AIP Conference Proceedings. Vol. 17. 1976. pp. 75 – 111.

[91] *Nedialkov N., Jackson K., Corliss G.* Validated solutions of initial value problems for ordinary differential equations // Applied Mathematics and Computation. Vol. 105. 1999. pp. 21 – 68.

[92] *Nedialkov N., Pryce J.* Solving differential-algebraic equations by Taylor series. I. Computing Taylor coefficients // BIT. Vol. 45. № 3. 205. pp. 561 – 591.

[93] *Nedialkov N., Pryce J.* Solving differential-algebraic equations by Taylor series. II. Computing the system Jacobian // BIT. Vol. 47. № 1. 2007. pp. 121 – 135.

[94] *Nedialkov N., Pryce J.* Solving differential algebraic equations by Taylor series. III. The DAETS code // Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics. Vol. 3. № 1 – 2. 2008. pp. 61 – 80.

[95] *Oesterwinter C., Cohen C.* New orbital elements for Moon and planets // Celestial Mechanics. Vol. 5. № 3. 1972. pp. 317 – 395.

[96] *Okhotsimskii D., Sikharulidze Yu.* Foundations of Space Flight Mechanics // Science, Moscow. 1994.

[97] *Pan V.* Some schemes for the evaluation of polynomials with real coefficients // Problems of Cybernetics. Pergamon Press 5. 1961. pp. 14 – 32.

[98] *Parker G., Sochacki J.* Implementing the Picard iteration // Neural, Parallel and Scientific Computation. Vol. 4. 1996. pp. 97 – 112.

[99] *Parker G., Sochacki J.* A Picard–McLaurin theorem for initial value PDE's // Abstract and Applied Analysis. 5. 2000. pp. 47 – 63.

[100] *Paterson M., Stockmeyer L.* On the number of nonscalar multiplications necessary to evaluate polynomials // SIAM Journal on Computing. Vol. 2. 1973. pp. 60 – 66.

[101] *Pena J., Sauer T.* On the multivariate Horner scheme // SIAM Journal on Numerical Analysis. Vol. 37, 2000. pp. 1186 – 1197.

[102] *Pena J., Sauer T.* On the multivariate Horner scheme. II: Running error analysis // Computing. Vol. 65. 2000. pp. 313 – 322.

[103] *Pippenger N.* On evaluation of powers and related problems // Proceedings 17th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, Houston. 1976. pp. 258 – 263.

[104] *Pippenger N.* On evaluation of powers and monomials // SIAM Journal on Computing. Vol. 9(2). 1980. pp. 230 – 250.

[105] *Poincare H.* Sur les courbes definies par les equations differentielles (IV) // Journal de mathematiques pures et appliques 4e serie. Tome 2. 1886. pp. 151 – 218.

[106] *Pruett C., Rudmin J., Lacy J.* An adaptive N-body algorithm of optimal order // Journal of Computational Physics. Vol. 187. 2003. pp. 298 – 317.

[107] *Rall L.* Automatic differentiation: techniques and applications // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 120. Berlin: Springer - Verlag. 1981.

[108] *Rauch L.* Iterative solution of the N-body problem for real time // ARS Journal. № 30. 1960. pp. 284 – 286.

[109] *Rauch L., Riddel W.* The iterative solution of the analytical N-body problem // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. № 8. 1960. pp. 568 – 581.

[110] *Rodriguez M., Barrio R.* Reducing rounding errors and achieving Brouwer's law with Taylor series method // Applied Numerical Mathematics. Vol. 62. № 8. 2012. pp. 1014 – 1024.

[111] *Simai He, Zhening Li., Zhang S.* Inhomogeneous polynomial optimization over a convex set: An approximation approach // Mathematics of Computation. Vol. 84. pp. 715 – 741.

[112] *Steeb W., Wilhelm F.* Nonlinear autonomous system of differential equations and Carleman linearization procedure // Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 44. 1980. pp. 601 – 611.

[113] *Steeb W.* A note on Carleman linearization // Physics Letters. Vol. 140A. 1989. pp. 336 – 338.

[114] *Steffensen J.* On the restricted problem of three bodies // Mat.-Fys. Medd. Danske, Videnskab. Selskab. Vol. 30, № 18. 1956. pp. 75 – 83.

[115] *Steffensen J.* On the problem of three bodies in the plane // Mat.-Fys. Medd. Danske, Videnskab. Selskab. Vol. 31. № 3. 1957. pp. 98 – 123.

[116] *Tsiligiannis C., Lyberatos G.* Steady state bifurcations and exact multiplicity conditions via Carleman linearization // Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 126. 1987. pp. 143 – 160.

[117] *Tsiligiannis C., Lyberatos G.* Normal forms, resonance and bifurcation analysis via the Carleman linearization // Journal of Mathematical Analysis and Applications. Elsevier. Vol. 139, 1989. pp. 123 – 138.

[118] *Van Barel M., Humet M., Sorber L.* Approximating optimal point configurations for multivariate polynomial interpolation // Electronic Transactions on Numerical Analysis. Vol. 42. 2014. pp. 41 – 63.

[119] *Van der Pol B.* A theory of Amplitude of free and forced triode vibrations // Radio Review. Vol. 1. 1920. pp. 701 – 754.

[120] *Van der Pol B.* On relaxation oscillation // Philosophical Magazine. Vol. 2. 1962. pp. 978 – 992.

[121] *Wong W.* Carleman transformation and Ovsyannikov Treves operators // Nonlinear analysis. Vol. 6. 1982. pp. 1296 – 1303.

[122] *Xiao S., Zeng G.* Equality-constrained minimization of polynomial functions // Science China Mathematics. Vol. 58, Issue 10. 2015.

[123] *Yao A C.* On the evaluation of powers // SIAM Journal on Computing. Vol. 5. 1976. pp. 100 – 103.

[124] *Babadzanjanz L.* webpage URL: (TSMR) `http://www.apmath.spbu.ru/en/staff/babadzhanyants/index.html`

[125] *Hairer E.* webpage URL: `http://www.unige.ch/~hairer/`

[126] *Wolfram Mathematica.* webpage URL: https://reference.wolfram.com/language/

[127] *NASA Jet Propulsion Laboratory.* webpage URL: ssd.jpl.nasa.gov/?constants

List of tables

Appendix A

The program for calculating a scheme for arbitrary set of monomials

This section presents the *mono*3 program implemented in Wolfram Mathematica, the algorithm is described in Chapter 2.

An input to the program is a set of monomials of the third degree. At the output of the program is a scheme for the introduced set of monomials. In the case of a set of monomials higher than the third degree, you need to recursively call the main part (Listing A.2) of the program.

Listing A.1 – Program *mono*3: An input and a processing the set of monomials.

```
# utilits
im[t_] := Times @@ ((x[#] &) /@ t);
mi[t_] := Flatten[t /. {Power -> ConstantArray, Times -> List}
   /. x -> Identity];

# input
m = DeleteDuplicates[{ x[1] x[2], x[1] x[3] x[4]}];

# preprocessing
monomial1 = im /@ Transpose[{Sort[DeleteDuplicates[
  Catenate[mi /@ m]]]}];
monomial2 = Select[m, Length[mi[#]] == 2 &];
monomial3 = Select[m, Length[mi[#]] == 3 &];
m3 = DeleteCases[Complement[m, monomial2], t_ /;
   Length[DeleteDuplicates[Subsets[mi[t], {2}]] \[Intersection]
       mi /@ monomial2] > 0];
m3Subsets = (DeleteDuplicates[Subsets[mi[#], {2}]] &) /@ m3;
m3AllSubsets = DeleteDuplicates@Catenate[m3Subsets];
```

Listing A.2 – Program *mono*3: Main part.

```
% linear programming part
% use this part recursively if the set consists of
% monomials higher than third degree
m3OptimalSubsets = If[m3AllSubsets == {}, {},
  im /@ m3AllSubsets[[Transpose[Position[
  LinearProgramming[Table[1.0, {i, Length[m3AllSubsets]}],
    (ReplacePart[Table[0, {i, Length[m3AllSubsets]}],
```

```
    Transpose[{#}] -> 1] &) /@
         Table[FirstPosition[m3AllSubsets,
         m3Subsets[[r, j]]][[1]],
         {r, Length[m3]}, {j, Length[m3Subsets[[r]]]}],
         Table[1, {i, Length[m3]}],
         Table[{0, 1}, {i, Length[m3AllSubsets]}],
         Integers], 1]][[1]]]]
];
```

Listing A.3 – Program *mono*3: Scheme.

```
monomial23OptimalSubsets = Join[monomial2, m3OptimalSubsets];

Join[
 monomial2scheme =
  Catch[Do[If[# == monomial1[[i]] monomial1[[j]], Throw[{i, j
   }]],
  {i, Length[monomial1]}, {j, Length[monomial1]}]] & /@
  Select[Join[m, m3OptimalSubsets], Length[mi[#]] == 2 &],

 monomial3scheme =
  Catch[Do[If[# == monomial1[[i]] monomial23OptimalSubsets[[j]],
  Throw[{i, Length[monomial1] + j}]],
  {i, Length[monomial1]}, {j, Length[monomial23OptimalSubsets
   ]}]] & /@
  Select[m, Length[mi[#]] == 3 &]
]
```

Appendix B

The program for creating the configuration files for TSMR

This section presents a program for creating a configuration file *coef.dat*. The rest of the configuration files set manually due to their simplicity.

Listing B.1 – Program for creating *coef.dat*

```
Nbody = 5; L = Nbody - 1;
% input system (polynomial system fifth/fourth/third degree)
system1 = Expand@Catenate@Table[D[Subscript[g, i, j][t], t]
 -> Subscript[p, i, j][t], {i, L}, {j, 3}];
system2 = Expand[Catenate[Table[D[Subscript[p, i, j][t], t]
 -> k^2 (- (m[0] + m[i]) Subscript[g, i, j][t]
Subscript[v, 0, i][t] + \!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\),
\(s\), \(L\)] \(If[s == i, 0, m[s] \((\((\(\*SubscriptBox[\(g\),
    \(s, j\)]\)
[t] - \(\*SubscriptBox[\(g\), \(i, j\)]\)[t])\)
\ If[s > i, \(\*SubscriptBox[\(v\), \(i, s\)]\)[t],
\(\*SubscriptBox[\(v\), \(s, i\)]\)[t]] -
\(\*SubscriptBox[\(g\), \(s, j\)]\)[t]\
\(\*SubscriptBox[\(v\), \(0, s\)]\)[t])\)]\)\)),
 {i, L}, {j, 3}]]];

system3 = Catenate@Table[{Derivative[1][Subscript[d, 0, i]][t]
 -> -Subscript[v, 0, i][t] Subscript[w, 0, i][t]}, {i, L}];
system4 = Catenate@Table[Derivative[1][Subscript[d, s, i]][t]
 -> -Subscript[v, s, i][t] Subscript[w, s, i][t],
 {i, 2, L}, {s, i - 1}];

system5 = Table[D[Subscript[q, 0, i][t], t]
 -> D[(Subscript[d, 0, i][t])^2, t], {i, L}] /. system3;
system6 = Catenate@Table[D[Subscript[q, s, i][t], t]
 -> D[(Subscript[d, s, i][t])^2, t],
 {i, 2, L}, {s, i - 1}] /. system4;
```

```
system7 = Table[D[Subscript[v, 0, i][t], t]
 -> D[(Subscript[d, 0, i][t])^3, t], {i, L}] /. system3
 /. Table[(Subscript[d, 0, i][t])^2 -> Subscript[q, 0, i][t],
 {i, L} ];
system8 = Flatten[Table[D[Subscript[v, s, i][t], t]
 -> D[(Subscript[d, s, i][t])^3, t], {i, 2, L}, {s, i - 1}]
 /. system4 /. Catenate@Table[(Subscript[d, s, i][t])^2
 -> Subscript[q, s, i][t], {i, 2, L}, {s, i - 1} ]];
system9 = Expand@Catenate[{Catenate@Table[
 {D[Subscript[w, 0, i][t], t]
 -> D[ \!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(j\), \(3\)]\(
 \(\*SubscriptBox[\(g\), \(i, j\)]\)[t]
 \(\*SubscriptBox[\(p\), \(i, j\)]\)[t]\)\), t]}, {i, L}] /.
   system1} /. system2];
system10 = Catenate[Expand[Catenate[{Catenate@Table[
 {D[Subscript[w, s, i][t], t] ->
 D[ \!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(j\), \(3\)]\(\((
 \(\*SubscriptBox[\(g\), \(i, j\)]\)[t] -
 \(\*SubscriptBox[\(g\), \(s, j\)]\)[t])\) \((
 \(\*SubscriptBox[\(p\), \(i, j\)]\)[t] -
 \(\*SubscriptBox[\(p\), \(s, j\)]\)[t])\)\)\), t]},
 {i, 2, L}, {s, i - 1}] /. system1} /. system2]]];

systemWithT = Join[
   Catenate[Table[D[Subscript[g, i, j][t], t],
    {i, L}, {j, 3}] /. system1],
   Catenate[Table[D[Subscript[p, i, j][t], t],
    {i, L}, {j, 3}] /. system2],
   Catenate[Table[{D[Subscript[d, 0, i][t], t]},
    {i, L}] /. system3],
   Catenate[Table[D[Subscript[d, s, i][t], t],
    {i, 2, L}, {s, i - 1}] /. system4],
   Catenate[Table[{D[Subscript[q, 0, i][t], t]},
    {i, L}] /. system5],
   Catenate[Table[D[Subscript[q, s, i][t], t],
    {i, 2, L}, {s, i - 1}] /. system6],
   Catenate[Table[{D[Subscript[v, 0, i][t], t]},
    {i, L}] /. system7],
   Catenate[Table[D[Subscript[v, s, i][t], t],
    {i, 2, L}, {s, i - 1}] /. system8],
   Catenate[Table[{D[Subscript[w, 0, i][t], t]},
    {i, L}] /. system9],
   Catenate[Table[D[Subscript[w, s, i][t], t],
    {i, 2, L}, {s, i - 1}] /. system10]];
```

```
change = Join[
 Catenate@Table[Subscript[g, i, j][t] -> Subscript[g, i, j],
  {i, L}, {j, 3}],
 Catenate@Table[Subscript[p, i, j][t] -> Subscript[p, i, j],
  {i, L}, {j, 3}],
 Catenate@Table[{Subscript[d, 0, i][t] -> Subscript[d, 0, i]},
  {i, L}],
 Catenate@Table[Subscript[d, s, i][t] -> Subscript[d, s, i],
  {i, 2, L}, {s, i - 1}],
 Catenate@Table[{Subscript[q, 0, i][t] -> Subscript[q, 0, i]},
  {i, L}],
 Catenate@Table[Subscript[q, s, i][t] -> Subscript[q, s, i],
  {i, 2, L}, {s, i - 1}],
 Catenate@Table[{Subscript[v, 0, i][t] -> Subscript[v, 0, i]},
  {i, L}],
 Catenate@Table[Subscript[v, s, i][t] -> Subscript[v, s, i],
  {i, 2, L}, {s, i - 1}],
 Catenate@Table[{Subscript[w, 0, i][t] -> Subscript[w, 0, i]},
  {i, L}],
 Catenate@Table[Subscript[w, s, i][t] -> Subscript[w, s, i],
  {i, 2, L}, {s, i - 1}]];

system3Degree = systemWithT /. change;
allVariable = Catenate@Join[
 Table[Subscript[g, i, j], {i, L}, {j, 3}],
 Table[Subscript[p, i, j], {i, L}, {j, 3}],
 Table[{Subscript[d, 0, i]}, {i, L}],
 Table[Subscript[d, s, i], {i, 2, L}, {s, i - 1}],
 Table[{Subscript[q, 0, i]}, {i, L}],
 Table[Subscript[q, s, i], {i, 2, L}, {s, i - 1}],
 Table[{Subscript[v, 0, i]}, {i, L}],
 Table[Subscript[v, s, i], {i, 2, L}, {s, i - 1}],
 Table[{Subscript[w, 0, i]}, {i, L}],
 Table[Subscript[w, s, i], {i, 2, L}, {s, i - 1}]];

variableMASS = Flatten[{m[0], Table[m[i], {i, L}]}];
valueMASS = {1, 1/6023600, 1/408523.71, 1/328900.56, 1/3098708,
 1/1047.3486, 1/3497.898, 1/22902.98, 1/19412.24, 1/135000000};
subValMass = Table[variableMASS[[i]] -> valueMASS[[i]],
 {i, Length@variableMASS}];
sys = system3Degree /. {k -> 0.01720209895} /. subValMass;
var = Array[x, Length@allVariable];
```

```
rules = Inner[Rule, allVariable, var, List];
sys2 = sys /. rules

mon = Sort[DeleteDuplicates@
 Catenate[CoefficientRules[#, var][[All, 1]] & /@
 Join[var, sys2]]];

mon2 = Sort[mon, Total@#1 < Total@#2 &];
monomials = Times @@ Inner[Power, var, #, List] & /@ mon2

monomials2degree = Select[monomials, Length[mi[#]] == 2 &];
monomials3degree = Select[monomials, Length[mi[#]] == 3 &];

monomial3Scheme = {Catch[Do[
 If[# == var[[i]] monomials2degree[[j]],
 Throw[{i, Length[var] + j}]],
 {i, Length[var]}, {j, Length[monomials2degree]}]] &
 /@ monomials3degree};

schemeForPolynomialSystem3Degree =
 Catenate@Join[{Table[
 mi[monomials2degree[[i]]], {i, Length@monomials2degree}]},
 monomial3Scheme]

Export[NotebookDirectory[] <> "coef.dat",
 StringRiffle[Catenate@Table[
  StringPadRight[ToString@NumberForm[#[[2]], 32,
  ExponentFunction -> (Null &), NumberFormat
  -> (StringTake[#, UpTo[32]] &)], 40] <> " " <>
  StringPadRight[ToString@e, 10] <> " " <>
  ToString@FirstPosition[mon2, #[[1]]][[1]] & /@
   CoefficientRules[sys2[[e]], var],
  {e, Length@sys2}], "\n"]]
```