

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Manuscript Copy

Elmahalawy Yasser Reda Ahmed Abdelhamid

**QUANTUM ASPECTS OF THE PROBLEM OF TIME IN GRAVITY
AND COSMOLOGY**

Scientific specialization 01.04.02 —
Theoretical Physics

Dissertation is submitted for the degree of candidate of
physical and mathematical sciences

Scientific supervisor:
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Andrianov Alexander Andreevich

St. Petersburg — 2021

Contents

Abstract	4
Acknowledgment	5
Introduction	6
Chapter 1. The (2+1)-dimensional gravity	12
1.1 Preliminary	12
1.2 Lagrangian Formulations	13
1.3 Classical solutions for (2+1)-dimensional gravity	15
1.3.1 The ADM formulation	16
1.3.2 Chern-Simons Theory	19
1.3.3 Geometric structure	22
1.4 Quantum solutions for (2+1)-dimensional gravity	25
1.4.1 Reduced phase space Quantization	25
1.4.2 Connection representation	27
1.4.3 Covariant canonical quantization	28
1.4.4 Loop representation	30
1.4.5 Wheeler-Dewitt equation	32
1.4.6 Path Integrals	34
1.4.7 Lattice Approaches	36
Chapter 2. The BTZ black hole	38
2.1 Preliminary	38
2.2 The BTZ Black Holes	39
2.3 Three dimensional Anti-de Sitter	40
2.4 Quantum field theory in the BTZ background	42
2.5 Thermodynamics	44
2.6 Generalization	46
Chapter 3. Quantization of dust thin shell coupled to (2+1)-dimensional gravity	48
3.1 Preliminary	48
3.2 Canonical Formalism for Spherically Symmetric Spacetimes in 2+1 Gravity	50
3.2.1 Kuchař Transformation for (2+1)-dimensional Gravity	51
3.2.2 Canonical analysis for (2+1)-dimensional gravity with a thin shell	53
3.3 First-order formalism and Anti-de Sitter momentum space	55
3.3.1 Action principle and phase space reduction	56
3.3.2 Constraints	60

3.3.3	Poisson brackets	62
3.4	Quantization	63
3.4.1	Quantum kinematics	63
3.4.2	Physical states	65
3.5	Quantum Dynamics	66
3.6	Discussion	68
Chapter 4. Quantum Analysis of BTZ Black Hole Formation Due to the Collapse of a Dust Shell		69
4.1	Preliminary	69
4.2	Global parameterization of AdS and BTZ spacetime	71
4.3	Action principle and symplectic form	73
4.4	Constraints	77
4.5	Derivation of the constraint equations	79
4.6	Quantization	81
4.7	Quantum dynamics	83
4.8	Discussion	85
Chapter 5. Dust shell away from the BTZ black hole horizon		86
5.1	Preliminary	86
5.2	Symplectic form and classical r-matrix	86
5.3	Matrix elements of representations of $SL_q(2)$	88
5.4	Harmonic analysis on $SL_q(2)$ with axial symmetry	91
5.5	Hamiltonian constraint	94
5.6	Discussion	96
Conclusion		97
Bibliography		99
List of Figures		113

Abstract

We perform the canonical analysis of a thin dust shell coupled to (2+1)-dimensional gravity for different values of the cosmological constant. Spacetime has a flat and BTZ black hole solution for zero and negative cosmological constants, respectively. The momentum space turned out to be AdS_2 space, and the global chart for it is provided by the Euler angles. In quantum kinematics, this results in noncommutativity in coordinate space and discreteness of the shell radius in the timelike region, which includes the collapse point. At the dynamical level, quantization has been performed for both cosmological constants, where the momentum noncommutativity can be neglected. For a negative cosmological constant, quantization is implemented in the vicinity of the horizon. The momentum noncommutativity appears far away from the horizon and requires a quantum group. We also find transition amplitudes between zero and non-zero eigenvalues of the shell radius, which describe the rate of gravitational collapse (bounce). Their values are everywhere finite, which could be interpreted as the resolution of the central singularity.

Acknowledgment

I am sincerely grateful to my supervisor Professor Alexander A. Andrianov for his valuable ideas and comments during my PhD program. His encouragement and support have a powerful effect on my current work.

I would like to express my deep thanks to Dr. Artem N. Starodubtsev for his kind assistance and discussion. His significant contribution has a positive impact on completing my PhD program. His valuable comments and helpful suggestions are very important to finish my PhD thesis on time. I really appreciate his efforts to guide me through my recent publications.

I am thankful to Saint Petersburg state university for its kind hospitality during a stay at the Department of high energy and elementary particles physics, where this work originated. I would like to thank all staff members at the Department of high energy and elementary particles physics for their kind assistance and educate me with numerous theoretical courses to enhance my background.

This work is supported by a grant from both the Egyptian and Russian governments. I would like to express my deep thank to all staff members at the Department of Physics at Benha University for their kind support. Many thanks and appreciation to my family for supporting me to complete my PhD program.

Introduction

General relativity is a generalization of special relativity that describes the geometric property of spacetime. It was first proposed by Albert Einstein in 1915. Einstein's field equations give an explicit relationship between the curvature of spacetime and the energy and momentum of matter and radiation. General relativity is the simplest relativistic theory of gravity and provides the basis for the understanding of essential problems in modern astrophysics like the existence of black holes and gravitational waves [1; 2].

Spacetime singularities are the major problem in general relativity. The classical and satisfactory definition of singularity is that Einstein's field equations break down and become physically unaccepted. In other words, physical quantity is infinite at the singular point and the periodicity of physical laws is lost. Furthermore, physics is no longer known and determined in a singular region. Subsequently, many theories are developed to overcome this outstanding problem by coupling gravity with quantum effects, known recently as quantum gravity.

Quantum gravity is a suitable framework to study the effect of spacetime singularities and the appropriate ways to resolve them. Classical gravity develops singularities, while there are ultraviolet divergences in quantum gravity that cannot be removed by renormalization. Obviously, quantum gravity is a nonrenormalizable theory. Quantization of gravity is a complicated theory and is the most promising approach to resolve singularities. The most significant approaches to reveal the microphysics features of spacetime are string theories [3; 4], loop quantum gravity [5; 6], and noncommutative geometries [7; 8].

A consistent theory of quantum gravity remains an open task. The simplest approach of quantum gravity depends on the degrees of freedom of the canonical structure of the phase space. This attempt is primarily pursued by B. DeWitt [9–11] in 1967. The Wheeler–DeWitt equation has an operator form acting on a wave functional and is well-defined in quantum gravity. The wave function of the Wheeler–DeWitt equation includes all the necessary information about the matter and geometry of the universe and is well defined in minisuperspaces such as the configuration space of cosmological theories.

In 1986, A. Ashtekar [12] provided the Hamiltonian formulation for general relativity as a new model for the canonical method closely related to an $SU(2)$ gauge theory. The essential success of loop quantization of gravity is admitting a discrete spacetime structure, starting from continuous variables in the phase space. The advantage of the loop quantum gravity can be recognized in the ability to deal with nonlocal geometric variables, like holonomies, instead of the metric analysis encountered by DeWitt. As a candidate for quantum gravity, loop quantum gravity competes with string theory.

String theory is a theoretical framework in which the point particles are replaced by strings. It describes the propagation and the interaction of strings through space and addresses a number of problems in fundamental physics like early universe cosmology, black hole physics, and condensed

matter physics. Because it gives a unified description of gravity and particle physics, it is a candidate for a theory of everything that describes all fundamental forces and forms of matter [13–15].

The (2+1)-dimensional gravity is a simplified model to describe the mathematical and physical properties of fundamental problems in quantum gravity. The solutions of (2+1)-dimensional are physically quite different from those in 3+1 dimensions, but the (2+1)-dimensional model is rather helpful for understanding the dynamics of realistic quantum gravity. The (2+1)-dimensional gravity was first recognized in the Hamiltonian formulation of point particles by Staruszkiewicz [16] in 1963. It has a similar conceptual foundation as realistic (3+1)-dimensional general relativity, and many of the essential problems of quantum gravity carry over to the lower-dimensional setting.

The importance of (2+1)-dimensional gravity appeared after the work done by Deser, Jackiw, and 't Hooft [17; 18], as well as Witten [19; 20]. On the other hand, the (2+1)-dimensional gravity is a toy model for (3+1)-dimensional gravity [19] and its main results could be generalized to 3+1 dimensions. The only difference between (2+1)- and (3+1)-dimensional gravity is that there is no Newtonian limit [21]. We study a spherically symmetric dust shell which is an example of (2+1)-dimensional gravity representing gravitational collapse. Spherically symmetric dust shell is a generalization of the point-like particles and its dynamics was studied by Israel [22] in 1967.

We investigate the Hamiltonian structure of a spherically symmetric dust shell in 2+1 dimensions for both zero and negative cosmological constants [23–25]. We start from the first order Einstein-Hilbert action for (2+1)-dimensional gravity and add dust thin shell. We also added boundary terms to the action to find the correct equations of motion at spatial infinity. The Hamiltonian constraint is either derived directly from equations of motion or from the variational principle for spherically symmetric dust thin shell or from the Lagrangian formalism of the Einstein-Hilbert action.

In 2+1 dimensions, spacetime has a BTZ black hole solution for a negative cosmological constant [26]. Moreover, spacetime is locally flat in a vacuum and spherically symmetric Einstein's theory has no local degrees of freedom. This emphasizes that the reduced phase space is finite-dimensional in the Hamiltonian formulation. Kuchař [27] found a generic way to express Hamiltonian and momentum constraints into a simple set in which old variables can be canonically transformed into a new set of variables. The momentum space turns out to be the group manifold $SL(2)$. We use the representation theory of $SL(2)$ to investigate the structure of the dust shell.

The coordinates are commutative in a vacuum, but it is not necessarily true for a negative cosmological constant. In the case of a negative cosmological constant, we focus on studying quantum dynamics in the near-horizon area, where we can neglect the noncommutativity coordinates. The momentum noncommutativity exists away from the horizon and requires the quantum group technique. Quantization of dust shell is fully investigated and the spectrum of the shell radius is found.

For zero cosmological constant, the spectrum indicates that naked singularity is resolved in the case of timelike movement of the shell. For the spacelike movement of the shell, singularity

belongs to a discrete spectrum and is also regularized. For the negative cosmological constant, one can tell that the point of the central singularity, the zero radius of the shell, belongs to the discrete spectrum. This is suggestive of the singularity resolution. We obtained transition amplitudes between different locations of the shell in the near-horizon region. Also, there is a non-zero transition rate between all possible sectors of the Penrose diagram, even between those which are classically forbidden. However, for the classically forbidden transitions, their rate is exponentially damped away from the horizon. In general, this model could be generalized to 3+1 dimensions.

The structure of the thesis is as follows: The work contains 113 pages and 14 figures. The thesis structure includes an introduction, five chapters, a conclusion, a list of references (consisting of 202 titles), and a list of figures.

- **Introduction** describes the general outline of the thesis. As well, the introductory part includes the goals and objectives of the study.
- **Chapter 1** briefly explains the microscopic and macroscopic features of the (2+1)-dimensional gravity. The classical solutions of (2+1)-dimensional gravity are fundamental approaches to describe its behavior in quantum levels.
- **Chapter 2** is a survey about the properties of the BTZ black hole solutions in the context of classical and quantum field theory. We also discuss some different models describing thermodynamics and the generalization of the BTZ black hole.
- **Chapter 3** investigates the canonical analysis of dust thin shell coupled to (2+1)-dimensional gravity for a zero cosmological constant and its quantization.
- **Chapter 4** concentrates on the quantization of the BTZ black hole near the horizon for a negative cosmological constant, where the momentum noncommutativity can be neglected.
- **Chapter 5** studies the kinematical part for the dust shell of the BTZ black hole away from the horizon for a negative cosmological constant, where the momentum noncommutativity exists.
- **Conclusion** presents the main scientific results of this work and further recommendations for future work.

The thesis aims to study and analyze the Hamiltonian structure of dust thin shell for both zero and negative cosmological constants coupled to (2+1)-dimensional gravity. Quantization of this model was studied and the spectrum of spacelike and timelike movement of the shell was discovered.

The main results of the dissertation submitted for defense are summarized and enhanced in the following different points:

1. We study the canonical analysis of dust thin shell coupled to (2+1)-dimensional gravity. This analysis has been performed for both zero and negative cosmological constants. The momentum space turned out to be AdS_2 and the representation theory of $SL(2)$ is used to investigate the structure of the dust shell.

2. We analyze the quantization of the dust shell model. In the case of zero cosmological constant, spacetime is flat and the coordinates are commutative which allows resolving the central singularity.
3. For a negative cosmological constant, quantization has been performed in the vicinity of the horizon, where one can neglect momentum noncommutativity. The momentum noncommutativity exists away from the horizon and requires a full-fledged quantum group technique.
4. The kinematical part of the dust shell away from the BTZ black hole horizon is described. The momentum noncommutativity exists in this case and requires a full-fledged quantum group technique. The spectrum of the time operator and the shell radius operator inside the black hole was found.
5. The time coordinate has a discrete spectrum because of the periodicity of the wave function in energy.
6. The spectrum of the shell radius is figured out. This spectrum turns out to be continuous outside the horizon and becomes discrete inside the horizon.
7. The transition amplitudes between different regions of the Penrose diagram is evaluated and the conditions for being continuous or discrete spectrum are determined.

The statements to be defended are outlined and strengthened as follows:

1. The Hamiltonian structure for a model in which (2+1)-dimensional gravity with zero and negative cosmological constants is coupled to asymmetric dust shell. The phase space is AdS_2 and represented by $SL(2)$ group.
2. Quantization of the shell radius and the conditions for being continuous and discrete spectrum are evaluated. It has been performed where the momentum noncommutativity can be ignored.
3. The kinematical part for dust shell away from the BTZ black hole horizon has been performed where the momentum noncommutativity exists.
4. The transition amplitudes between different regions of the Penrose diagram is determined and its value is finite everywhere.

The scientific novelty of the results are specified as:

1. The Hamiltonian structure for a dust shell in (2+1)-dimensional gravity is described.
2. Quantum analysis is investigated and the spectrum of the shell radius is calculated.
3. Spacetime singularity is resolved. This can be identified by calculating the transition amplitude which is finite.
4. The main scientific results obtained in 2+1 dimensions could be generalized to 3+1 dimensions.

Personal contribution of the author: All the main scientific results in this dissertation were obtained personally by the author of the dissertation and are reflected in the works of joint authorship.

These thesis results are from collaborations and discussions with Alexander A. Andrianov, Artem N. Starodubtsev and are based on the following published articles:

1. Alexander A. Andrianov, Artem N. Starodubtsev, and Yasser Elmahalawy, (2+1)-dimensional gravity coupled to a dust shell: Quantization in terms of global phase space variable, Theoretical and Mathematical Physics, 200, 2019. [23]
2. Alexander A. Andrianov, Yasser Elmahalawy and Artem Starodubtsev, Cylindrically symmetric 2+1 gravity in terms of global variables: Quantum dynamics, International Journal of Modern Physics A, 35, 2020. [24]
3. Alexander A. Andrianov, Artem Starodubtsev, and Yasser Elmahalawy, Quantum analysis of BTZ black hole formation due to the collapse of a dust shell, Universe, 6, 2020. [25]

In addition, these results are based on the following unpublished article:

1. Alexander A. Andrianov, Artem Starodubtsev, and Yasser Elmahalawy, Quantization of dust shell model away from the BTZ black hole horizon (unfinished).

The essential results of the work were reported and presented at the following scientific conferences:

1. Alexander Andrianov, Artem Starodubtsev and **Yasser Elmahalawy**, Quantum Geometrodynamics for thin shell "**Poster**" in VI International Conference "Models in quantum field theory" [MQFT-2018], St. Petersburg, Russia, 27 - 31 August 2018.
2. A. A. Andrianov, A. Starodubtsev and **Y. Elmahalawy**, Quantization of dust shell model within 2+1 dimensional gravity and its generalization "**Oral Presentation**" in 10th Alexander Friedmann International Seminar on Gravitation and Cosmology and 4th Satellite Symposium on the Casimir Effect [Friedmann 2019], St. Petersburg, Russia, 23 - 29 June 2019.
3. **A. A. Andrianov**, A. Starodubtsev and Y. Elmahalawy, Cylindrically symmetric 2+1-dimensional gravity: quantization in terms of global phase space variables "**Oral Presentation**" in **V RUSSIAN-IBERIAN CONGRESS: Particle, Nuclear, Astroparticle Physics and Cosmology**, Madrid, Spain, 7 - 10 October 2019.
4. A. Andrianov, **Y. Elmahalawy** and A. Starodubtsev, Quantum analysis of BTZ black hole formation due to collapse of a dust shell "**Oral Presentation**" in 17th Russian Gravitational Conference — International Conference on Gravitation, Cosmology and Astrophysics [RUSGRAV-17], St. Petersburg, Russia, 28 June - 4 July 2020.
5. Alexander Andrianov, Artem Starodubtsev and **Yasser Elmahalawy**, Cylindrically symmetric 2+1 gravity in terms of global variables: quantum dynamics "**Gong Show/-Poster**" in **QFT and Geometry Summer School**, 13 - 24 July 2020.
6. **A. A. Andrianov**, A. Starodubtsev and Y. Elmahalawy, Quantum analysis of BTZ black hole formation due to collapse of a dust shell "**Oral Presentation**" in **VIII AFU-NALHUE "La Parte y el Todo"**, Online workshop, 4 - 8 January 2021.

Other activities attended during my PhD studies:

1. [Spring workshop on gravity and cosmology](#), Online workshop, 25 - 29 May 2020.
2. [Quantum Information in QFT and AdS/CFT](#), Online workshop, 6 - 7 August 2020.
3. [Testing General Relativity using Gravitational Waves](#), Online workshop, 13 - 14 August 2020.
4. [Cosmology in Colombia \[CoCo 2o2o\]](#), online meeting, 23 - 25 September 2020.
5. [Materia Oscura en Colombia \[MOCa 2o2o\]](#), online workshop, 7 - 8 October 2020.

Chapter 1. The (2+1)-dimensional gravity

We mainly review different approaches characterizing the (2+1)-dimensional gravity from both classical and quantum levels. Our goal is to emphasize the properties of spacetime within the framework of 2+1 dimensions. Furthermore, we mention some pioneering procedures to quantize the (2+1)-dimensional gravity. Nevertheless, these models do not have a unique solution from quantum views.

1.1 Preliminary

The (2+1)-dimensional gravity has a similar structure as (3+1)-dimensional gravity, but with lower dimensions in which degrees of freedom can be reduced. In two spatial and one time dimensions, general relativity turns out to have no Newtonian limit [21] and no degrees of freedom specifying that (2+1)-dimensional gravity is a soluble system [19]. The theory of (2+1)-dimensional gravity is a toy model for (3+1)-dimensional gravity [28]. It is a useful tool to study many fundamental problems such as point particles [29–31], matter coupling [32–34], supergravity [35–37], massive gravity [38–40], and topological field theory [41].

The idea of (2+1)-dimensional gravity dates back to Staruszkiewicz [16], who first argued that the classical solution of gravity in three-dimensional space (two spacelike and one timelike dimension) is examined for a point particle. It is an example of matter coupled to (2+1)-dimensional gravity. The canonical structure and quantization for a point particle have been studied in [42–44]. In 1984, Deser, Jackiw, and 't Hooft [17; 18] investigated systematically the classical and quantum behavior of point sources in (2+1)-dimensional gravity, showing that such systems have interesting behavior both as toy models for (3+1)-dimensional quantum gravity and as realistic models of cosmic strings. In 1988, Witten [19; 20] showed that (2+1)-dimensional gravity could be represented as a Chern-Simons theory.

The (2+1)-dimensional gravity is fully investigated from both classical and quantum views. Classically, (2+1)-dimensional gravity is fully studied and indicated useful approaches toward the quantization. In the context of quantum, (2+1)-dimensional gravity is formulated from the point of views of the reduced phase space action, Chern-Simons theory [45; 46], the loop representation [47], path integral [48], the Wheeler-DeWitt equation [9; 49], or lattice approach [50].

Chapter 1 is arranged as follows. In section 1.2, Hamiltonian formulations of general relativity are discussed in the context of metric tensor and Palatini formulations. In section 1.3, a classical description of the Hamiltonian structure in (2+1)-dimensional gravity is interpreted based on the metric or $SO(2,1)$ group. This structure is classically equivalent. In section 1.4, different quantum approaches have been clarified and their main results do not coincide.

1.2 Lagrangian Formulations

The Lagrangian formulations of general relativity are outlined by a particular feature, in which the gauge-invariant action can not be written without assuming some boundary conditions on the manifold. The Lagrangian densities of general relativity are presented in terms of the metric tensor (second-order formalism) and Palatini formulations (first-order formalism). These formulations are identical for compact manifolds¹ and are well-studied in [51; 52]. The standard Einstein-Hilbert action is

$$I_{EH}[g^{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} R, \quad (1.1)$$

where $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$ is a covariant Lagrangian density. The variation of the action (1.1) with respect to the inverse metric tensor $\delta g^{\mu\nu}$ is

$$\delta I_{EH}[g^{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \left[(\delta\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right]. \quad (1.2)$$

Note that $(\delta\sqrt{-g})R = \frac{-1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}R \delta g^{\mu\nu}$ and the variation of the Ricci tensor can be calculated by evaluating the variation for the Riemann tensor. The last term of equation (1.2) can be written as

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \partial_\mu \left[\sqrt{-g}(g^{\rho\sigma} \delta\Gamma_{\rho\sigma}^\mu - g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\tau}^\tau) \right]. \quad (1.3)$$

Substitute (1.3) into (1.2), we get

$$\delta I_{EH}[g^{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.4)$$

The condition $\delta g^{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ is not enough to ensure that (1.3) vanishes. The boundary terms vanish for a special class of the manifold, like asymptotically Minkowskian and this condition confirms the vanishing of (1.3). The vacuum Einstein's field equations take the form

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (1.5)$$

If we insert matter coupled to the fields, then Einstein's field equations become

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

where $T_{\mu\nu}$ is the symmetric stress-energy tensor. The Einstein-Hilbert Lagrangian density can be written in a noncovariant form, and the boundary terms immediately disappear when the stationarity condition is imposed without any hypothesis on the manifold. Let us write down the

¹For example, a closed universe without boundaries.

Einstein-Hilbert Lagrangian density as

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{EH} &= \sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \\
&= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\rho}, \\
&= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) + 2\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}) + \partial_{\mu}[\sqrt{-g}(g^{\sigma\rho}\Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} - g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\rho}^{\rho})]. \\
&= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}) + \partial_{\mu}[\sqrt{-g}(g^{\sigma\rho}\Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} - g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\rho}^{\rho})]. \tag{1.7}
\end{aligned}$$

Let us define the following quantities:

$$\partial_{\mu}\mathcal{E}\mathcal{H}^{\mu} = \partial_{\mu}[\sqrt{-g}(g^{\sigma\rho}\Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} - g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\rho}^{\rho})], \tag{1.8}$$

$$\mathcal{L}_{\Gamma\Gamma} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}), \tag{1.9}$$

where $\mathcal{L}_{\Gamma\Gamma}$ is called the Gamma-Gamma Lagrangian density proposed by Einstein. Therefore, the Einstein-Hilbert Lagrangian density (1.7) could be rewritten in terms of (1.8) and (1.9) as:

$$\mathcal{L}_{EH} = \mathcal{L}_{\Gamma\Gamma} + \partial_{\mu}\mathcal{E}\mathcal{H}^{\mu}. \tag{1.10}$$

The variation of the action defined by the Lagrangian density (1.9) is

$$\delta I_{\Gamma\Gamma}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \partial_{\mu} \delta \Gamma \Gamma^{\mu}, \tag{1.11}$$

where $\partial_{\mu}\delta\Gamma\Gamma^{\mu}$ is the boundary term aroused due to the variation of the action and is defined as:

$$\partial_{\mu}\delta\Gamma\Gamma^{\mu} = \partial_{\mu} \left[\sqrt{-g} \left(\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} \delta g^{\rho\mu} - \frac{1}{2} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} g^{\rho\mu} g_{\nu\tau} \delta g^{\nu\tau} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} \delta g^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} g^{\rho\sigma} g_{\nu\tau} \delta g^{\nu\tau} \right) \right]. \tag{1.12}$$

The boundary term (1.12) vanishes because of $\delta g^{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ without specifying any particular feature on the manifold or assuming an asymptotic metric tensor. Thus, the variation of the action (1.11) reduces to Einstein's field equation (1.5). Dirac [53] suggested that the Gamma-Gamma Lagrangian density can be written in terms of inverse metric tensors to obtain the Hamiltonian formulations of general relativity, where

$$\mathcal{L}_{\Gamma\Gamma} = \frac{1}{4} \sqrt{-g} \partial_{\rho} g_{\mu\nu} \partial_{\sigma} g^{\pi\tau} [g^{\rho\sigma} (g^{\pi\tau} g^{\mu\nu} - g^{\mu\pi} g^{\nu\tau}) + 2g^{\sigma\nu} (g^{\rho\tau} g^{\mu\pi} - g^{\rho\mu} g^{\pi\tau})]. \tag{1.13}$$

Dirac defined a symmetric tensor of rank two which vanishes if one of the indices equals 0,

$$e^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{g^{0\nu}g^{0\mu}}{g^{00}} \quad \implies \quad e^{0\nu} = 0. \tag{1.14}$$

Thus, Dirac Lagrangian density takes the form

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_{\Gamma\Gamma} + \partial_{\mu}\mathcal{D}^{\mu}, \tag{1.15}$$

where $\partial_\mu \mathcal{D}^\mu$ is Dirac boundary term defined as

$$\partial_\mu \mathcal{D}^\mu = \partial_i \left[\frac{g^{0i}}{g^{00}} \partial_0 (\sqrt{-g} g^{00}) \right] - \partial_0 \left[\frac{g^{0i}}{g^{00}} \partial_i (\sqrt{-g} g^{00}) \right]. \quad (1.16)$$

Dirac formulation has a very simple calculation to formulate the Hamiltonian of general relativity. Another possible approach is to write the Einstein-Hilbert action as a first-order action. This is known as Palatini formulation in which the Levi-Civita connections $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ have to be independent variables. The variation of the action (1.1) with respect to $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ and $\delta g_{\mu\nu}$ equals to

$$\delta I = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \left[\frac{\delta[\sqrt{-g} R(g, \Gamma)]}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\delta[\sqrt{-g} R(g, \Gamma)]}{\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho \right], \quad (1.17)$$

and leads to sets of the equation of motion

$$\frac{\delta[\sqrt{-g} R(g, \Gamma)]}{\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho} = \sqrt{-g} g^{\sigma\tau} \frac{\delta R_{\sigma\tau}}{\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho} = 0, \quad (1.18)$$

$$\frac{\delta[\sqrt{-g} R(g, \Gamma)]}{\delta g^{\mu\nu}} = -\sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}(\Gamma) \right] = 0. \quad (1.19)$$

This formulation is similar to second-order formulation in a vacuum and spin connections are equivalent to Christoffel symbols. The action (1.1) is written as

$$I_G = -\frac{1}{16\pi} \int d^3x e e_\alpha^\mu e_\beta^\nu R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}, \quad (1.20)$$

which is the first-order action in terms of vierbein vectors e_μ^α and Lorentz connections $\omega_\mu^{\alpha\beta}$. Note that $R = e_\alpha^\mu e_\beta^\nu R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ is the curvature tensor and $g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} e_\mu^\alpha e_\nu^\beta$ is the metric, where $\eta_{\alpha\beta}$ is the Minkowski metric. Action (1.20) is equivalent to the metric formulation in the absence of matter. If the spin connection is included in the matter Lagrangian, the Palatini formulation is completely different from the metric formulation. The only difference between first- and second-order formulations is the existence of the spin connection.

1.3 Classical solutions for (2+1)-dimensional gravity

We focus on studying the classical solutions of gravity in 2+1 dimensions. Classical approaches have a significant keyword toward the quantization of spacetime. We concentrate on classical approaches for (2+1)-dimensional gravity. The first approach depends on the division of spacetime, which is well-known as the Arnowitt-Deser-Misner (ADM) decomposition of the metric [54]. The second approach is the first-order form of the field equations. Both of them are classically equivalent and lead to different quantization methods [55].

In 2+1 dimensions, as the Weyl tensor vanishes, the curvature tensor is expressed in terms of the curvature scalar and the Ricci tensor as

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})R, \quad (1.21)$$

which implies that Einstein's field equation has a flat solution for vacuum spacetime. The spacetime is locally de Sitter for $\Lambda > 0$, while it's anti-de Sitter for $\Lambda < 0$. Physically, there are no local degrees of freedom for a (2+1)-dimensional spacetime as gravitational waves disappear in classical theory, and there are no gravitons in quantum theory. The vanishing of the curvature tensor $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ means that the metric is the Minkowski metric $\eta_{\mu\nu}$.

1.3.1 The ADM formulation

The foliation of spacetime is first described by Arnowitt, Deser, and Misner [54] to formulate the Hamiltonian of general relativity. The ADM decomposition is commonly used because there is a physical and geometrical interpretation of the canonical variables described in this context. The ADM formulation is based on slicing of the spacetime manifold \mathcal{M} in the direction of time t . Moncrief [56], Hosoya and Nakao [57] have shown a full description of the vacuum metric with topology $R \times \Sigma$.

Consider a spacetime manifold with the topology $[0,1] \times \Sigma$ ², where Σ is an open or closed two-surface. The spacetime manifold \mathcal{M} is divided into constant-time surfaces Σ_t which are represented by a coordinate x^i and an induced metric $g_{ij}(t, x^i)$. The change in the proper time between two neighboring surfaces Σ_t and Σ_{t+dt} is

$$d\tau = N dt, \quad (1.22)$$

where $N(t, x^i)$ is the lapse function. The change in the spatial coordinates can be written as

$$x^i(t + dt) = x^i(t) - N^i dt, \quad (1.23)$$

where $N^i(t, x^i)$ is the shift function. The dynamics of the field in the ADM decomposition can be determined by considering its projections in the directions of the parallel and tangential to the hypersurfaces. The metric components can be defined as

$$g_{00} = -N^2 + N^a N_a, \quad g_{0j} = h_{ij} N^j = N_i, \quad g_{ij} = h_{ij}. \quad (1.24)$$

²This is a compact three-dimensional manifold with a flat, time-orientable Lorentzian metric proposed by Mess [58].

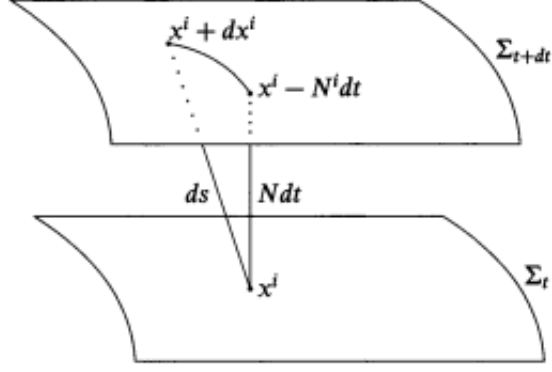


Figure 1.1 — The foliation of spacetime in the direction of time.

From equation (1.24), the metric and its inverse are

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^a N_a & N_i \\ N_j & h_{ij} \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \frac{1}{N^2} \begin{pmatrix} -1 & N^i \\ N^j & h^{ij} N^2 - N^i N^j \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

where $h^{ik} h_{kl} = \delta_i^k$. The interval ds^2 between two points (t, x^i) and $(t + dt, x^i + dx^i)$ is measured by the Lorentzian version of the Pythagoras theorem as shown in figure 1.1. The line element is

$$\begin{aligned} ds^2 &= -N^2 dt^2 + h_{ij} (dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt), \\ &= -(N^2 - N^i N_i) dt^2 + 2N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Equation (1.26) is the ADM metric. The geometry of the constant-time surface Σ_t includes intrinsic and extrinsic geometries. The intrinsic geometry is evaluated by the vectors tangent to the surface Σ_t , while the extrinsic geometry is evaluated by the vectors normal to the surface Σ_t . The extrinsic curvature is

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2N} \left(\partial_t g_{ij} - {}^{(2)}\nabla_i N_j - {}^{(2)}\nabla_j N_i \right). \quad (1.27)$$

The full Einstein-Hilbert action is

$$\begin{aligned} I &= \int d^3x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \\ &= \int dt \int_{\Sigma} d^2x N \sqrt{{}^{(2)}g} \left[{}^{(2)}R - 2\Lambda + K_{ij} K^{ij} - K^2 \right] + \text{boundary terms}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

The action (1.28) has to be written in the canonical form. This is carried out by Moncrief [56], Hosoya, and Nakao [57]. The canonical momenta are

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t g_{ij})} = \sqrt{{}^{(2)}g} (K^{ij} - g^{ij} K). \quad (1.29)$$

Note that the canonical conjugates to the time derivatives of variables N and N^i are zero and they are considered as Lagrange multiplier. Equation (1.27) reduced to

$$K^{ij} = \frac{1}{\sqrt{{}^{(2)}g}} (\pi^{ij} - g^{ij} \pi). \quad (1.30)$$

The action (1.28) can be written in terms of (1.30) as

$$I = \int dt \int_{\Sigma} d^2x \left(\pi^{ij} \partial_t g_{ij} - N \mathcal{H} - N_i \mathcal{H}^i \right), \quad (1.31)$$

where the Hamiltonian constraint is

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{{}^{(2)}g}} (\pi_{ij} \pi^{ij} - \pi^2) - \sqrt{{}^{(2)}g} ({}^{(2)}R - 2\Lambda), \quad (1.32)$$

and the momentum constraints are

$$\mathcal{H}^i = -2{}^{(2)}\nabla_j \pi^{ij}. \quad (1.33)$$

The Poisson brackets for (2+1)-dimensional gravity can be read from the action (1.31):

$$\{g_{ij}(x), \pi^{kl}(x')\} = \frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) \tilde{\delta}^2(x - x'), \quad (1.34)$$

where $\tilde{\delta}^2(x - x')$ is the delta function, defined for any scalar function $f(x)$ as $\int d^2x \tilde{\delta}^2(x - x') f(x') = f(x)$. The symplectic form can be found from the Poisson brackets (1.34) as

$$\Omega = \int_{\Sigma} d^2x \delta\pi^{ij} \wedge \delta g_{ij}, \quad (1.35)$$

where $\delta\pi^{ij}$ and δg_{ij} are the variations with respect to the momenta and metric, respectively. In 2+1 dimensions, the reduction of the physical degrees of freedom can be carried out in two steps. We first solve the constraints $\mathcal{H} = 0$ and $\mathcal{H}^i = 0$. Next, we fix gauge transformations. The resulting is known as reduced phase space, which describes the true degrees of freedom of the phase space. In 3+1 dimensions, the reduction of the physical degrees of freedom is hard because constraints are difficult to solve.

The splitting of spacetime is given by York's time-slicing [59], defined by surfaces of constant extrinsic curvature $TrK = g^{ij} K_{ij} = T$. Consider that the spatial metric is

$$g_{ij} = e^{2\lambda} \tilde{g}_{ij}, \quad (1.36)$$

where \tilde{g}_{ij} is a constant curvature metric on Σ . The momentum constraint $\mathcal{H}_i = 0$ can be decomposed into a traceless tensor $\bar{\pi}^{ij}$ and $\pi = g_{ij}\bar{\pi}^{ij}$, where

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i = & \left\{ \frac{1}{8} \frac{\delta}{\delta\lambda} e^{-2\lambda} \frac{\delta}{\delta\lambda} + \frac{1}{2} e^{-2\lambda} \Delta_0 + 2\tilde{\Delta}\lambda - 2e^{-2\lambda} Y^i[\pi] \tilde{\Delta} Y_i[\pi] \right. \\ & \left. + 2e^{-2\lambda} \tilde{\nabla}_i \left[(2p^{ij} + \tilde{\nabla}^i Y^j[\pi] + \tilde{\nabla}^j Y^i[\pi] - \tilde{g}^{ij} \tilde{\nabla}_k Y^k[\pi]) Y_j[\pi] \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.37)$$

where

$$Y^i[\pi] = \frac{i}{4} \tilde{\Delta}^{-1} \left[e^{2\lambda} \tilde{\nabla}_i \left(e^{-2\lambda} \frac{\delta}{\delta\lambda} \right) \right]. \quad (1.38)$$

The Hamiltonian constraint $\mathcal{H} = 0$ becomes an elliptic differential equation for λ , where

$$\mathcal{H} = \nabla_{\bar{g}} \lambda - \frac{1}{4} T^2 e^{2\lambda} + \frac{1}{2} \left[\bar{g}^{-1} \bar{g}_{ij} \bar{g}_{kl} \bar{\pi}^{ik} \bar{\pi}^{jl} \right] e^{-2\lambda} - \frac{k}{2} = 0. \quad (1.39)$$

The reduced phase space action (1.31) reduces to

$$I = \int dT \left\{ p^\alpha \frac{dm_\alpha}{dT} - H_{red}(m, p, T) \right\}, \quad (1.40)$$

where p^α determines the momenta P^{ij} . Note that p^α and m_α are conjugate variables used to simplify the symplectic form (1.35). The reduced phase space Hamiltonian is

$$H_{red}(m, p, T) = \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\bar{g}} e^{2\lambda(m, p, T)}. \quad (1.41)$$

Note that λ is a function of m , p , and T . Geometrically, H_{red} is the surface area of $TrK = -T$ and the structure of the ADM phase space is a cotangent bundle $T^*\mathcal{N}$. Moncrief [56] indicated that N and N_i are resolved by the positions m_α and the momenta p^α . If Σ is a torus parametrized by a single complex number $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ and a variable p_{ij} conjugate to the flat metric \tilde{g}_{ij} . Then, equation (1.41) reduces to

$$H_{red} = \frac{1}{\sqrt{T^2 - 4\Lambda}} \tau_2 \left[(p_1)^2 + (p_2)^2 \right]^{(1/2)}. \quad (1.42)$$

1.3.2 Chern-Simons Theory

The Chern-Simons action depends only on one-form connection and is used to describe the action for (2+1)-dimensional gravity. Achúcarro and Townsend [60] showed that the 2+1 Palatini action based on $SO(2,1)$ is equivalent to the Chern-Simons action based on $ISO(2,1)$. Generally, Ashtekar and Romano [61] pointed out that the 2+1 Palatini theory based on any Lie group G is equal to Chern-Simons theory based on the inhomogeneous Lie group IG related to G . Witten

[19] used this result to quantize gravity in 2+1 dimensions. The fundamental variables to describe the first-order formalism are a triad e_μ^a and a spin connection ω_μ^{ab} . The standard Einstein-Hilbert action takes the form

$$I = -2 \int_{\mathcal{M}} \left\{ e^a \wedge \left(d\omega_a + \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \omega^b \wedge \omega^c \right) + \frac{\Lambda}{6} \epsilon_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c \right\}, \quad (1.43)$$

where $e^a = e_\mu^a dx^\mu$ and $\omega^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \omega_{\mu bc} dx^\mu$ are considered as one-forms on the spacetime \mathcal{M} . The variation of the action (1.43) with respect to ω leads to the Euler-Lagrange equation which is defined as

$$T_a = de_a + \epsilon_{abc} \omega^b \wedge e^c = 0. \quad (1.44)$$

Equation (1.44) is known as the standard torsion-free condition, indicates that the spin connection ω is compatible with the dreibein e . The variation (1.43) with respect to e is

$$R_a = d\omega_a + \epsilon_{abc} \omega^b \wedge \omega^c = -\frac{\Lambda}{2} \epsilon_{abc} e^b \wedge e^c, \quad (1.45)$$

implies that the curvature of the spacetime \mathcal{M} is flat or the curvature of the metric $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$ vanishes. Note that the first-order formalism is equivalent to the second-order formalism when the triad e_μ^a is invertible. The action is invariant under local Lorentz transformations,

$$\delta e^a = \epsilon^{abc} e_b \tau_c, \quad \delta \omega^a = d\tau^a + \epsilon^{abc} \omega_b \tau_c, \quad (1.46)$$

and under the 'local translations'

$$\delta e^a = d\rho^a + \epsilon^{abc} \omega_b \rho_c, \quad \delta \omega^a = -\Lambda \epsilon^{abc} e_b \rho_c. \quad (1.47)$$

Note that the gravitational action (1.43) is also invariant under diffeomorphisms of \mathcal{M} . Consider that $A = A_\mu^a T_a dx^\mu$ is a connection for a gauge theory, where T_a is a generator of a gauge group G . The Chern-Simons action for A is

$$I_{CS}[A] = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} Tr \left\{ A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right\}, \quad (1.48)$$

where Tr is a nondegenerate and invariant bilinear form on the lie algebra of G . The Euler-Lagrange equations for action (1.48) are

$$F[A] = dA + A \wedge A = 0. \quad (1.49)$$

The vanishing of the field strength F gives rise to trivial spacetime \mathcal{M} , where A is a flat connection. The combination of the one-forms e^a and ω^a leads to a single $ISO(2,1)$ connection. The Poincaré group $ISO(2,1)$ has two generators. One is due to Lorentz transformations \mathcal{J}^a and the other is

corresponding to translations \mathcal{P}^b , obeying the commutation relations

$$[\mathcal{J}^a, \mathcal{J}^b] = \epsilon^{abc} \mathcal{J}_c, \quad [\mathcal{J}^a, \mathcal{P}^b] = \epsilon^{abc} \mathcal{P}_c, \quad [\mathcal{P}^a, \mathcal{P}^b] = 0. \quad (1.50)$$

The invariant bilinear form on the Lie algebra is defined as

$$\text{Tr}[\mathcal{J}^a \mathcal{P}^b] = \eta^{ab}, \quad \text{Tr}[\mathcal{J}^a \mathcal{J}^b] = \text{Tr}[\mathcal{P}^a \mathcal{P}^b] = 0. \quad (1.51)$$

If we write the gauge potential as $A = e^a \mathcal{P}_a + \omega^a \mathcal{J}_a$, the Chern-Simons action (1.48) reduces to the first-order gravitational action (1.43) with $\Lambda = 0$. A similar structure is possible [19; 62], when $\Lambda \neq 0$. The pair of $SO(2,1)$ connections, for $\Lambda = -1/\ell^2 < 0$, are

$$A^{(\pm)a} = \omega^a \pm \frac{1}{\ell} e^a, \quad (1.52)$$

and the Chern-Simons action has the form

$$I[A^{(+)}, A^{(-)}] = I_{CS}[A^{(+)}] - I_{CS}[A^{(-)}]. \quad (1.53)$$

For $\Lambda > 0$, the one-form is defined as

$$A^a = \omega^a + i\sqrt{\Lambda} e^a, \quad (1.54)$$

which is a complex connection of $SL(2, C)$ gauge potential. The action for a manifold with the topology $\mathcal{M} \approx [0,1] \times \Sigma$ can be written as

$$I = 2 \int dt \int_{\Sigma} d^2x \left\{ \epsilon^{ij} e_i^a \dot{\omega}_{ja} - \omega_t^a \mathcal{B}_a - e_t^a \bar{\mathcal{B}}_a \right\}, \quad (1.55)$$

where the Hamiltonian and momentum constraints are

$$\mathcal{B}^a[\omega, e] = \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \left[\partial_i e_j^a - \partial_j e_i^a + \epsilon^{abc} (\omega_{ib} e_{jc} - \omega_{jb} e_{ic}) \right], \quad (1.56)$$

$$\bar{\mathcal{B}}^a[\omega, e] = \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \left[\partial_i \omega_j^a - \partial_j \omega_i^a + \epsilon^{abc} (\omega_{ib} \omega_{jc} - \Lambda e_{ib} e_{jc}) \right]. \quad (1.57)$$

When $\Lambda = 0$, the $SO(2,1)$ connection on Σ is flat which deduced from the constraint $\bar{\mathcal{B}}$. The constraint \mathcal{B} implies that e_j^a is a contangent vector to the space of flat connections. The Poisson brackets between triad e_i^a and spin connection ω_j^b is

$$\{e_i^a(x), \omega_{jb}(x')\} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ij} \delta_b^a \delta^2(x - x'). \quad (1.58)$$

Nelson and Regge [63; 64] found the resulting brackets for the genus 1, genus 2, and high genus [62].

1.3.3 Geometric structure

The global geometry of vacuum spacetimes in 2+1 dimensions is described by the theory of the geometric structures [65; 66]. If the spacetime manifold \mathcal{M} has a trivial topology, then the field equations show that the manifold is a subset of Minkowski space. If \mathcal{M} has a nontrivial topology, then it is covered by coordinate patches U_i with the Minkowski metric $\eta_{\mu\nu}$. The transition function between two patches is an element of Poincaré group $ISO(2,1)$. If $\Lambda \neq 0$, a vacuum spacetime has de Sitter characterized by isometry group $SO(3,1)$ for $\Lambda > 0$ or anti-de Sitter space by isometry group $SO(2,2)$ for $\Lambda < 0$.

A fundamental part to describe the geometric structure is the holonomy group, which depends on its homotopy class for any curve γ . The Wilson loop [67] is an example of the holonomy in (2+1)-dimensional gravity, used to illustrate its geometric structure. Mess [58] investigated the holonomy group for $\Lambda = 0$. Some informative examples of the holonomy for de Sitter and anti-de Sitter structures are shown in [68–70].

For negative cosmological constant $\Lambda = -1/\ell^2$, the spacetime is represented by anti-de Sitter space (AdS) and its metric is

$$dS^2 = dX_1^2 + dX_2^2 - dT_1^2 - dT_2^2, \quad (1.59)$$

where anti-de Sitter space is determined by $\det \mathbf{X} = 1$. It clear that $\mathbf{X} \in SL(2, R)$, and written in the matrix form as

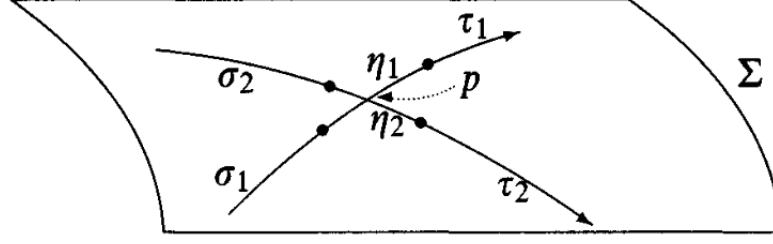
$$\mathbf{X} = \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} X_1 + T_1 & X_2 + T_2 \\ X_2 - T_2 & -X_1 + T_1 \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

Note that the isometry group $SO(2,2)$ is equivalent to $SL(2, R) \times SL(2, R)$. For positive cosmological constant, the spacetime is represented by de Sitter space and its metric is

$$dS^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2. \quad (1.61)$$

It is clear that the (2+1)-dimensional gravity with $\Lambda > 0$ is described by isometry group $SO(3,1)$, clarifying its geometric structure. Mess [58] illustrated that de Sitter structures are not determined by their holonomies. Alternatively, Witten [71] argued that the holonomies are the fundamental variables, and the quantization of spacetime is identical. The Poisson brackets are fundamental quantities to understand the geometric structures of (2+1)-dimensional gravity in terms of holonomies, which are derived in [72]. Consider that the $SL(2, R)$ connections are $A^{(\pm)a} = \omega^a \pm \frac{1}{\ell} e^a$ for a negative cosmological constant, and the Poisson brackets are

$$\{A_i^{(\pm)a}(x), A_j^{(\pm)b}(x')\} = \mp \frac{1}{\ell} \epsilon_{ij} \eta^{ab} \delta^2(x - x'), \quad \{A_i^{(+a)}(x), A_j^{(-b)}(x')\} = 0. \quad (1.62)$$

Figure 1.2 — Two paths γ_1 and γ_2 intersecting at a point p .

Let γ_1 and γ_2 are two paths, intersecting at a point p , as shown in figure 1.2, and consider

$$\rho^\pm[\gamma_\alpha] = P \exp \left\{ \int_{\gamma_\alpha} A_i^{(\pm)a} T_a dx^i \right\}, \quad (1.63)$$

where T_a are generators of the Lie algebra of $SL(2, R)$ and (1.63) represent the $SL(2, R)$ holonomies along γ . As the holonomies at the intersection point have nontrivial brackets, it is possible to isolate this point by writing $\gamma_\alpha = \sigma_\alpha \cdot \eta_\alpha \cdot \tau_\alpha$. Note that the infinitesimal segments η_1 and η_2 contain the intersection point p and the dot represents the product of curves. The definition of the holonomies (1.63) becomes

$$\rho^\pm[\gamma_\alpha] = \rho^\pm[\sigma_\alpha] \cdot \rho^\pm[\eta_\alpha] \cdot \rho^\pm[\tau_\alpha]. \quad (1.64)$$

The Poisson brackets between $\rho^\pm[\eta_1]$ and $\rho^\pm[\eta_2]$ are

$$\{\rho^\pm[\eta_1], \rho^\pm[\eta_2]\} = \mp \frac{1}{\ell} (\eta^{ab} T_a \otimes T_b) \epsilon(p; \gamma_1, \gamma_2), \quad (1.65)$$

where

$$\epsilon(p; \gamma_1, \gamma_2) = \int_{s(p)-\epsilon}^{s(p)+\epsilon} ds \int_{s'(p)-\epsilon}^{s'(p)+\epsilon} ds' \epsilon_{ij} \frac{d(x^i \circ \eta_1)}{ds} \frac{d(x^j \circ \eta_2)}{ds'} \delta^2(x \circ \eta_1(s) - x \circ \eta_2(s')). \quad (1.66)$$

By using the following identity $T_a^A T_b^C = -\frac{1}{4} \delta_B^A \delta_D^C + \frac{1}{2} \delta_B^C \delta_D^A$, the Poisson brackets between $\rho^\pm[\gamma_1]$ and $\rho^\pm[\gamma_2]$ become

$$\{\rho^\pm[\gamma_1]^M_N, \rho^\pm[\gamma_2]^P_Q\} = \mp \frac{1}{4\ell} \epsilon(p; \gamma_1, \gamma_2) \left(-\rho^\pm[\gamma_1]^M_N \rho^\pm[\gamma_2]^P_Q + 2\rho^\pm[\sigma_1 \cdot \tau_2]^M_Q \rho^\pm[\sigma_2 \cdot \tau_1]^P_N \right). \quad (1.67)$$

or

$$\{\langle X \rangle, \langle Y \rangle\} = \pm \frac{1}{4\ell} \epsilon(p) \langle X \rangle \langle -2 \rangle \langle Y \rangle. \quad (1.68)$$

Particularly, if two loops γ_1 and γ_2 intersect at the base point p . The trace of (1.67) becomes

$$\{R^\pm[\gamma_1], R^\pm[\gamma_2]\} = \mp \frac{1}{4\ell} \epsilon(p; \gamma_1, \gamma_2) \left(R^\pm[\gamma_1 \cdot \gamma_2] - R^\pm[\gamma_1] R^\pm[\gamma_2] \right), \quad (1.69)$$

where $R^\pm[\gamma_\alpha] = \frac{1}{2}Tr\rho^\pm[\gamma_\alpha]$. For loops with many intersection points p_i , equation (1.69) becomes

$$\{R^\pm[\gamma_1], R^\pm[\gamma_2]\} = \mp \frac{1}{4\ell} \sum_i \epsilon(p_i; \gamma_1, \gamma_2) \left(R^\pm[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2] - R^\pm[\gamma_1] R^\pm[\gamma_2] \right), \quad (1.70)$$

where \cdot_i represents the product of curves. For the torus, the geometrical structure is obtained by a closed subalgebra of three holonomies. Consider that γ_1 and γ_2 are two independent circumferences, and the traces are $R^\pm[\gamma_1] = R_1^\pm$, $R^\pm[\gamma_2] = R_2^\pm$, and $R^\pm[\gamma_1 \cdot \gamma_2] = R_{12}^\pm$, then

$$\{R_1^\pm, R_2^\pm\} = \mp \frac{4\pi G}{\ell} \left(R_{12}^\pm - R_1^\pm R_2^\pm \right), \quad (1.71)$$

and cyclical permutations. The six traces R_α^\pm are overcomplete³ and this overcompleteness can be understood by considering the cubic polynomials $R^\pm[\gamma_2] = R_2^\pm$, and $R^\pm[\gamma_1 \cdot \gamma_2] = R_{12}^\pm$, then

$$F^\pm = 1 - (R_1^\pm)^2 - (R_2^\pm)^2 - (R_{12}^\pm)^2 + 2R_1^\pm R_2^\pm R_{12}^\pm. \quad (1.72)$$

where F^\pm vanish classically which provide only two relations among the six R_α^\pm . Goldman [73] investigated the symplectic structures of Riemann surfaces and found an equivalent set of Poisson brackets in (2+1)-dimensional gravity. A similar Poisson algebra can be found in [74] for $\Lambda = 0$, using matrix representation of $ISO(2,1)$. Consider that the holonomy of the $SO(2,1)$ is

$$\rho_0[\gamma, x] = P \exp \left\{ \int_\gamma \omega^a \mathcal{J}_a \right\}, \quad (1.73)$$

where \mathcal{J}_a are generators of the lie algebra of $SO(2,1)$. The loop variables [28; 75] are

$$T^0[\gamma] = \frac{1}{2}Tr\rho_0[\gamma, x], \quad \text{and} \quad T^1[\gamma] = \int_\gamma Tr \{ \rho_0[\gamma, x(s)] e^a(\gamma(s)) \mathcal{J}_a \}. \quad (1.74)$$

The variables T^0 and T^1 obey the following Poisson brackets

$$\{T^0[\gamma_1], T^0[\gamma_2]\} = 0, \quad (1.75)$$

$$\{T^1[\gamma_1], T^0[\gamma_2]\} = -\frac{1}{8} \sum_i \epsilon(p_i; \gamma_1, \gamma_2) \left(T^0[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2] - T^0[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2^{-1}] \right), \quad (1.76)$$

$$\{T^1[\gamma_1], T^1[\gamma_2]\} = -\frac{1}{8} \sum_i \epsilon(p_i; \gamma_1, \gamma_2) \left(T^1[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2] - T^1[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2^{-1}] \right), \quad (1.77)$$

where the product is defined by $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2^{-1} = I$. Note also that T^0 and T^1 subject to

$$\begin{aligned} T^0[\gamma_1] T^0[\gamma_2] &= \frac{1}{2} \left(T^0[\gamma_1 \cdot \gamma_2] + T^0[\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}] \right), \\ T^0[\gamma_1] T^1[\gamma_2] + T^0[\gamma_2] T^1[\gamma_1] &= \frac{1}{2} \left(T^1[\gamma_1 \cdot \gamma_2] + T^1[\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}] \right), \end{aligned} \quad (1.78)$$

³The space of the torus is only four dimensions.

using the following identities

$$\begin{aligned} T^0[0] &= 1, & T^0[\gamma] &= T^0[\gamma^{-1}], & T^0[\gamma_1 \cdot \gamma_2] &= T^0[\gamma_2 \cdot \gamma_1], \\ T^1[0] &= 0, & T^1[\gamma] &= T^1[\gamma^{-1}], & T^1[\gamma_1 \cdot \gamma_2] &= T^1[\gamma_2 \cdot \gamma_1]. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Note that T^0 is a function of spin connection, defined on the flat space of $SO(2,1)$ connection. The set of loops in (1.78) and (1.79) are difficult to parametrize the phase space with a finite-dimensional set of observable.

1.4 Quantum solutions for (2+1)-dimensional gravity

The (2+1)-dimensional gravity is a diffeomorphism-invariant geometry theory and has finite degrees of freedom. Thus, the problem of nonrenormalizability is fixed, and quantum field theory is simplified to quantum mechanics. Classical solutions are a toy model to describe the quantization of (2+1)-dimensional gravity. Different quantization approaches are extensively illustrated in [76; 77].

1.4.1 Reduced phase space Quantization

The simplest approach to quantize (2+1)-dimensional gravity starts with the reduced phase space action (1.40), which describes the real degrees of freedom. Consider that m_α and p_α are operators on the Hilbert space, obeying the commutation relations

$$[\hat{m}_\alpha, \hat{p}^\beta] = -i\delta_\alpha^\beta, \quad (1.80)$$

which means that the momenta are

$$\hat{p}^\alpha = -i \frac{\partial}{\partial m_\alpha}. \quad (1.81)$$

Schrodinger equation can be written for a torus Σ as

$$i \frac{\partial}{\partial T} \psi(\tau, \bar{\tau}, T) = \hat{H}_{red} \psi(\tau, \bar{\tau}, T), \quad (1.82)$$

where $\psi(\tau, \bar{\tau}, T)$ is square-integrable wave functions and the Hamiltonian can be obtained from (1.40) by operator ordering. The classical Hamiltonian for spatial topologies of tours is

$$\hat{H}_{red} = \frac{1}{\sqrt{T^2 - 4\Lambda}} \hat{\tau}_2 \left[(\hat{p}_1)^2 + (\hat{p}_2)^2 \right]^{(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{T^2 - 4\Lambda}} \Delta_0^{1/2}, \quad (1.83)$$

where

$$\Delta_0 = -\tau_2^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2} \right), \quad (1.84)$$

is the scalar Laplacian for negative curvature Poincaré metric on moduli space. This method strongly depends on the classical choice of time slicing. The geometry of different time slices is difficult and leads to equivalent theories. The Laplacian acting on invariant functions is known as the Maass Laplacian of weight zero, and its eigenfunctions are weight zero Maass forms [78; 79]. Any invariant function ψ can be expanded in terms of eigenfunctions of Δ_0 as

$$\psi(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{\nu} c_{\nu} \psi_{\nu}(\tau, \bar{\tau}), \quad (1.85)$$

where ψ_{ν} are zero weight Maass forms. The action of $\Delta_0^{1/2}$ on ψ can be defined as

$$\Delta_0^{1/2} \psi(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{\nu} c_{\nu} \lambda_{\nu}^{1/2} \psi_{\nu}(\tau, \bar{\tau}). \quad (1.86)$$

The eigenfunctions of the Laplacian (1.84) can be obtained by separation of variables. One set of eigenfunctions is $u_{\nu}^{(n)}$, written in terms of the Bessel function, while the other set of eigenfunctions with the same eigenvalues is $h_{\nu}^{(\pm)}$. A weight zero Maass form must be a superposition

$$\psi(\tau, \bar{\tau}) = \sum_n \rho_{\nu}(n) u_{\nu}^{(n)} + \rho_{\nu}^+ h_{\nu}^+ + \rho_{\nu}^- h_{\nu}^-. \quad (1.87)$$

Modular invariant superpositions (1.87) exist for all ν values. The continuous spectrum of Δ_0 comes from a set of eigenfunctions $E_{\nu}(\tau_1, \tau_2)$ with coefficients ρ_{ν} . Additional eigenfunctions $\nu_n(\tau_1, \tau_2)$ representing the discrete spectrum for particular values of ν , known as cusp forms. The coefficients ρ_{ν} and eigenvalues λ_n are calculated numerically. Any modular invariant square integrable function $\psi(\tau, \bar{\tau})$ can be expanded as

$$\psi(\tau, \bar{\tau}) = \sum \langle \nu_n | \psi \rangle \nu_n(\tau, \bar{\tau}) + \frac{1}{4\pi} \int d\nu \langle E_{\nu} | \psi \rangle E_{\nu}(\tau, \bar{\tau}), \quad (1.88)$$

where

$$\langle f | \psi \rangle = \int_{\mathcal{N}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} f^*(\tau, \bar{\tau}) \psi(\tau, \bar{\tau}). \quad (1.89)$$

Equation (1.88) may be realized as the expansion form of (1.85), in which the discrete and the continuous spectra are considered. The general form of (1.82) for Schrodinger equation is

$$i \frac{\partial}{\partial T} \psi(\tau, \bar{\tau}, T) = \hat{H}_{red}^{(n)} \psi(\tau, \bar{\tau}, T), \quad (1.90)$$

with

$$\hat{H}_{red}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{T^2 - 4\Lambda}} \Delta_n^{1/2}, \quad (1.91)$$

where Δ_n is the Maass Laplacian. The Hamiltonian $\hat{H}_{red}^{(n)}$ varies by terms of order \hbar from (1.83), and can be interpreted as an operator ordering of the classical Hamiltonian. The eigenvalues of the Hamiltonian $\hat{H}_{red}^{(n)}$ rely on the value of n and $n = 0$ for the ADM formalism. The procedure of this section is straightforward, but several problems are observed. The Hamiltonian comes from a complicated differential equation, and its solution is unknown for spatial topologies. The other problem comes from the existence of the square root in the Hamiltonian form. Classically, the reduced Hamiltonian is positive as it represents an area. Quantum mechanically, there is no obvious choice to guarantee that the Hamiltonian must be positive. Finally, the choice of York time $TrK = -T$ is classically acceptable, but it violates the covariance of general relativity. However, it is ambiguous that different classical choices of time lead to identical predictions.

1.4.2 Connection representation

The connection representation is based on the spin connection rather than the metric, which starts with the first-order action (1.55) and depends on the sign of the cosmological constant Λ . The Chern-Simons quantization is well discussed for compact gauge theory [80–83] as well as for noncompact gauge theory [84–86].

For $\Lambda < 0$, the relevant gauge group is $SO(2,2)$ or its cover $SL(2,R) \times SL(2,R)$. This is the most understood case; the quantization of the algebra holonomies exists for genus 1 and genus 2 [87], but general results do not yet exist. For $\Lambda > 0$, the relevant gauge group is $SO(3,1)$ or its cover $SL(2,C)$, a complex gauge group whose Chern-Simons theory is understood in [84]. The Poisson brackets for this theory are connected to the quantum double of the Lorentz group, and Buffenoir used this structure to write down the quantization [88].

For $\Lambda = 0$, the relevant gauge group is $ISO(2,1)$, the (2+1)-dimensional Poincaré group, or its universal cover. The phase space has a cotangent bundle structure, allowing us to identify the holonomies of the spin connection ω as positions and their derivatives as momenta. This provides a direct link to the loop variables of Ashtekar, Rovelli, and Smolin [28; 89]

$$T^0[\gamma] = \frac{1}{2} Tr \rho_0[\gamma, x], \quad T^1[\gamma] = \int_{\gamma} Tr \{ \rho_0[\gamma, x(s)] e^a(\gamma(s)) \mathcal{J}_a \}, \quad (1.92)$$

where

$$\rho_0[\gamma, x] = P \exp \left\{ \int_{\gamma} \omega^a \mathcal{J}_a \right\} \quad (1.93)$$

is the $SL(2,R)$ holonomy of the spin connection and $T^1[\gamma]$ can be expressed as a derivative of $T^0[\gamma]$ along a path in the space of flat connections. Note that the generator \mathcal{J} may be in any representation of $SL(2,R)$ and the trace in (1.92) may depend on the choice of representation.

As in the reduced phase space quantization, matter simplifies for the torus universe $R \times T^2$. Let us again focus on the case $\Lambda = 0$, and our goal is to quantize the algebra (1.71). First, the classical Poisson brackets $\{, \}$ is replaced by commutators $[,]$, satisfying the rule $[x, y] = xy - yx = i\hbar\{x, y\}$. Next, the product is replaced by the symmetrized product $xy \rightarrow \frac{1}{2}(xy + yx)$. The resulting algebra is defined as

$$\hat{R}_1^\pm \hat{R}_2^\pm e^{i\pm\theta} - \hat{R}_2^\pm \hat{R}_1^\pm e^{i\mp\theta} = \pm 2i \sin \theta \hat{R}_{12}^\pm, \quad (1.94)$$

and cyclical permutations with $\tan \theta = -\hbar/8\ell$. Classically, the observables \hat{R}_1^\pm , \hat{R}_2^\pm , and \hat{R}_{12}^\pm are not independent; in the quantum theory, the corresponding statement is that the quantities

$$\hat{F}^\pm = 1 - \tan^2 \theta + e^{\pm 2i\theta} \left((\hat{R}_1^\pm)^2 + (\hat{R}_{12}^\pm)^2 \right) - e^{\mp 2i\theta} (\hat{R}_2^\pm)^2 + 2e^{\pm i\theta} \cos \theta \hat{R}_1^\pm \hat{R}_2^\pm \hat{R}_{12}^\pm, \quad (1.95)$$

commute with the holonomies, and can be consistently set to zero. In terms of the parameters \hat{r}_a^\pm , the algebra [90; 91] can be represented by

$$\hat{R}_1^\pm = \sec \theta \cosh \frac{\hat{r}_1^\pm}{2}, \quad \hat{R}_2^\pm = \sec \theta \cosh \frac{\hat{r}_2^\pm}{2}, \quad \hat{R}_{12}^\pm = \sec \theta \cosh \frac{(\hat{r}_1^\pm + \hat{r}_2^\pm)}{2}, \quad (1.96)$$

with

$$[\hat{r}_1^\pm, \hat{r}_2^\pm] = \pm 8i\theta, \quad [\hat{r}_a^+, \hat{r}_b^-] = 0. \quad (1.97)$$

For Λ small, these commutators differ from the quantization of the classical brackets by terms of order \hbar^3 . An alternative quantization, also differing by terms of order \hbar^3 , works directly with the holonomy matrices, imposing a quantum-group-like quantization condition

$$\rho^+[\gamma_1]\rho^+[\gamma_2] = q\rho^+[\gamma_2]\rho^+[\gamma_1], \quad q = e^{-i\hbar/4\ell} \quad (1.98)$$

with a similar condition for ρ^- .

1.4.3 Covariant canonical quantization

The ADM and geometric structure formalism describe the entire spacetime geometry as evolving in time and a single entity.⁴ The two descriptions are classically equivalent, but they are different regarding the quantum theories. The geometric structures quantization turned out

⁴Timeless entity. Quantum gravity without time is clarified in [92].

to be Heisenberg's picture that supplements the ADM quantization in the Schrodinger picture. Covariant canonical quantization [93–95] begins with the classical description of (2+1)-dimensional gravity where the phase space of classical theory is isomorphic. The first-order Lagrangian for (2+1)-dimensional gravity is defined as

$$\mathcal{L} = -2 \left\{ e^a \wedge \left(d\omega_a + \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \omega_b \wedge \omega_c \right) + \frac{\Lambda}{6} \epsilon_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c \right\}. \quad (1.99)$$

The symplectic form is

$$\hat{\Omega}[e, \omega, \delta_1 e, \delta_2 \omega] = 2 \int_{\mathcal{M}} (\delta_1 e^a \wedge \delta_2 \omega_a). \quad (1.100)$$

Consider spacetimes with the topology $[0,1] \times T^2$ with $\Lambda = 0$, then

$$\begin{aligned} e^0 &= e^{-t} dt, & \omega^0 &= 0, \\ e^1 &= a dx + b dy, & \omega^1 &= -(\lambda dx + \mu dy), \\ e^2 &= e^{-t}(\lambda dx + \mu dy), & \omega^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Substituting (1.101) into (1.100), we get

$$\hat{\Omega}[\delta e, \delta_2 \omega] = 2(\delta \mu \wedge \delta a - \delta \lambda \wedge \delta b), \quad (1.102)$$

where λ and b are conjugate variables. The symplectic form $\hat{\Omega}$ can be computed in terms of holonomies. Note that the Poisson brackets between two holonomies $\rho[\gamma_1]$ and $\rho[\gamma_2]$ are nontrivial if two curves γ_1 and γ_2 are intersecting and nonhomotopic. If we consider a set of coordinates μ_α on the $SO(2,1)$ moduli space $\tilde{\mathcal{N}}$ and a parametrization $\omega = \omega(\mu_\alpha)$, we define a set of conjugate momenta

$$\pi^\alpha = 2 \int_{\Sigma} e^a \wedge \left(\frac{\partial \omega_a}{\partial \mu_\alpha} \right). \quad (1.103)$$

The first-order action is simplified to

$$I = \int dt \pi^\alpha \dot{\mu}_\alpha, \quad (1.104)$$

with no Hamiltonian which complicates the interpretation of the quantum theory. This is because holonomies are time-independent variables. Like the Chern-Simons quantization, covariant canonical quantization leads to a ‘‘frozen time’’ formalism, in which the fundamental operators are constants of motion that describe an entire classical spacetime. The covariant phase space is parametrized by coordinates μ_α and π^α , which are canonically conjugate in the classical theory. To quantize, Poisson brackets is replaced by commutators

$$[\hat{\mu}_\alpha, \hat{\pi}^\beta] = i\delta_\alpha^\beta, \quad (1.105)$$

For the torus, for example, the commutators are $[\hat{\mu}, \hat{a}] = [\hat{b}, \hat{\lambda}] = -i/2$, and the wavefunction can be taken as $\psi(\lambda, \mu)$ and represent \hat{a} and \hat{b} as

$$\hat{a} = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad \hat{b} = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda}. \quad (1.106)$$

These operators are fundamental for quantization, reflecting the classical choice of holonomies as time-independent observables. Thus, we can evaluate the spectrum and the expectation value of the holonomies for any wavefunction. Besides, the dynamic information is missing as there is no Hamiltonian. Rovelli [96; 97] showed that time-independent operators can provide dynamic information.

1.4.4 Loop representation

The loop representation is an alternative approach to quantize the (2+1)-dimensional gravity, starts from the operator algebra of $\hat{T}^0[\gamma]$ and $\hat{T}^1[\gamma]$. These operators are function of the triad e and the spin ω , labeled by loops γ . The variables T^0 and T^1 discussed in section 1.3.3 has the following operator forms

$$[\hat{T}^0[\gamma_1], \hat{T}^0[\gamma_2]] = 0, \quad (1.107)$$

$$[\hat{T}^1[\gamma_1], \hat{T}^0[\gamma_2]] = -\frac{i}{8} \sum_i \epsilon(p_i; \gamma_1, \gamma_2) \left(\hat{T}^0[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2] - \hat{T}^0[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2^{-1}] \right), \quad (1.108)$$

$$[\hat{T}^1[\gamma_1], \hat{T}^1[\gamma_2]] = -\frac{i}{8} \sum_i \epsilon(p_i; \gamma_1, \gamma_2) \left(\hat{T}^1[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2] - \hat{T}^1[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2^{-1}] \right). \quad (1.109)$$

Note also that \hat{T}^0 and \hat{T}^1 subject to

$$\begin{aligned} \hat{T}^0[\gamma_1] \hat{T}^0[\gamma_2] &= \frac{1}{2} \left(\hat{T}^0[\gamma_1 \cdot \gamma_2] + \hat{T}^0[\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}] \right), \\ \hat{T}^0[\gamma_1] \hat{T}^1[\gamma_2] + \hat{T}^0[\gamma_2] \hat{T}^1[\gamma_1] &= \frac{1}{2} \left(\hat{T}^1[\gamma_1 \cdot \gamma_2] + \hat{T}^1[\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}] \right), \end{aligned} \quad (1.110)$$

and

$$\begin{aligned} \hat{T}^0[0] &= 1, & \hat{T}^0[\gamma] &= \hat{T}^0[\gamma^{-1}], & \hat{T}^0[\gamma_1 \cdot \gamma_2] &= \hat{T}^0[\gamma_2 \cdot \gamma_1], \\ \hat{T}^1[0] &= 0, & \hat{T}^1[\gamma] &= \hat{T}^1[\gamma^{-1}], & \hat{T}^1[\gamma_1 \cdot \gamma_2] &= \hat{T}^1[\gamma_2 \cdot \gamma_1]. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Wavefunctions are a natural function of all sets of loops. This approach is simply suggested by Ashtekar [28; 75]. The vacuum state $|0\rangle$ is defined as

$$\hat{T}^1[\gamma] |0\rangle = 0, \quad (1.112)$$

for all homotopy classes $[\gamma]$ and any state can be expressed as

$$|\Psi\rangle = \sum c_i |[\gamma_i]\rangle, \quad (1.113)$$

with $|[\gamma_i]\rangle = \hat{T}^0[\gamma_i]|0\rangle$. Ashtekar proposed a new term 'equitopy' to describe the equivalence relation $[\gamma_1] \sim [\gamma_2]$ if $T^0[\gamma_1](\omega) = T^0[\gamma_2](\omega)$ for all spin connections ω . Define the Hilbert space for the loop representation as $\mathcal{H}_{loop} = \mathcal{H}' / \sim$, where \mathcal{H}' is the space generated by the $|[\gamma_i]\rangle$ and \sim is the equivalence relation. The actions of \hat{T}^0 and \hat{T}^1 on \mathcal{H}_{loop} is defined as

$$\hat{T}^0[\alpha] |[\beta]\rangle = \frac{1}{2} (|[\alpha] \cdot [\beta]\rangle + |[\alpha] \cdot [\beta]^{-1}\rangle), \quad (1.114)$$

$$\hat{T}^1[\alpha] |[\beta]\rangle = -\frac{i}{8} \sum_i \epsilon(p; \alpha, \beta) (|[\alpha \cdot_i \beta]\rangle + |[\alpha \cdot_i \beta^{-1}]\rangle). \quad (1.115)$$

It is useful to assume that spacetime has the topology of the torus to understand the physical meaning of the loop representation. If the spacetime has the topology $[0,1] \times T^2$ and the homotopy classes of curves on T^2 labeled by integers m and n . Equations (1.114) and (1.115) become

$$\hat{T}^0[m,n] |p,q\rangle = \frac{1}{2} (|m+p, n+q\rangle + |m-p, n-q\rangle), \quad (1.116)$$

$$\hat{T}^1[m,n] |p,q\rangle = -\frac{i}{8} (mq - np) (|m+p, n+q\rangle - |m-p, n-q\rangle). \quad (1.117)$$

Since operator $\hat{T}^0[m,n]$ commute, so its eigenstates are linear combinations $|\Psi\rangle = \sum_{p,q} c_{pq} |p,q\rangle$, such that

$$\hat{T}^0[m,n] |\Psi\rangle = T^0[m,n] |\Psi\rangle, \quad (1.118)$$

for some numbers $T^0[m,n]$. Equations (1.116) and (1.117) give a set of relations for c_{pq} and satisfied by

$$|\lambda_0, \mu_0\rangle = \sum_{p,q} \cosh\left(\frac{p\lambda_0 + q\mu_0}{2}\right) |p,q\rangle, \quad (1.119)$$

$$\hat{T}^0[m,n] |\lambda_0, \mu_0\rangle = \cosh\left(\frac{m\lambda_0 + n\mu_0}{2}\right) |\lambda_0, \mu_0\rangle, \quad (1.120)$$

where λ_0 and μ_0 are arbitrary real numbers. The state $|\lambda_0, \mu_0\rangle$ is an eigenstate of the operator $\hat{\lambda}$ and $\hat{\mu}$ of the connection representation with eigenvalues λ_0 and μ_0 . A general connection representation state can be written as a superposition

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu) &= \langle \psi | \lambda, \mu \rangle = \sum_{p,q} \cosh\frac{p\lambda + q\mu}{2} \langle \psi | p, q \rangle = \sum_{p,q} \cosh\frac{p\lambda + q\mu}{2} \tilde{\psi}(p, q), \\ &= \sum_{[\gamma]} T^0[\gamma](\lambda, \mu) \tilde{\psi}([\gamma]). \end{aligned} \quad (1.121)$$

This relation is the inverse loop transform, relating loop and connection representation states. The inverse loop transform can be written as

$$\tilde{\psi}'(p,q) = \int d\lambda d\mu \cosh\left(\frac{p\lambda + q\mu}{2}\right) \psi(\lambda,\mu), \quad (1.122)$$

and

$$\tilde{\psi}'[\gamma] = \int d\lambda d\mu T^0[\gamma](\lambda,\mu) \psi(\lambda,\mu). \quad (1.123)$$

The action of operator \hat{T} on state $\tilde{\psi}'(p,q)$ can be determined by

$$\begin{aligned} \hat{T}^0[m,n] \tilde{\psi}'(p,q) &= \int d\lambda d\mu \cosh\left(\frac{p\lambda + q\mu}{2}\right) \cosh\left(\frac{m\lambda + n\mu}{2}\right) \psi(\lambda,\mu), \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{\psi}'(p+m, q+n) + \tilde{\psi}'(p-m, q-n)), \end{aligned} \quad (1.124)$$

and

$$\begin{aligned} \hat{T}^1[m,n] \tilde{\psi}'(p,q) &= -\frac{i}{2} \int d\lambda d\mu \cosh\left(\frac{p\lambda + q\mu}{2}\right) \sinh\left(\frac{m\lambda + n\mu}{2}\right) \left[m \frac{\partial}{\partial \mu} - n \frac{\partial}{\partial \lambda}\right] \psi(\lambda,\mu), \\ &= -\frac{i}{4} (np - mq) \int d\lambda d\mu \sinh\left(\frac{p\lambda + q\mu}{2}\right) \sinh\left(\frac{m\lambda + n\mu}{2}\right) \psi(\lambda,\mu), \\ &= -\frac{i}{8} (np - mq) (\tilde{\psi}'(p+m, q+n) - \tilde{\psi}'(p-m, q-n)), \end{aligned} \quad (1.125)$$

in agreement with equations (1.116) and (1.117). The transform (1.122) gives a good formal representation of the action of the loop operators and used as a starting point for defining the loop representation.

1.4.5 Wheeler-DeWitt equation

The previous approaches are based on true degrees of freedom of the classical theory. Dirac [98–100] developed an alternative approach to quantize the entire degrees of freedom, where states are known from the classical phase space. In quantum gravity, the constraints are supposed to be operators on Hilbert space. The Hamiltonian constraint acting on states leads to a differential equation, known as the Wheeler-DeWitt equation [9] in gravity. The solution of the Wheeler-DeWitt equation is the physical states.

We consider different forms of Dirac quantization of (2+1)-dimensional gravity for the first- and second-order formalisms. The first-order of the wheeler-Dewitt equation is equivalent to the reduced phase space quantization, while the second-order version is more problematic. In the first-order formalism, with $\Lambda = 0$, the Poisson brackets between the spin connection ω_i^a and triad

e_i^a are

$$[e_i^a(x), \omega_{jb}(x')] = -\frac{i}{2} \epsilon_{ij} \delta_b^a \delta^2(x - x'), \quad [e_{ia}(x), e_j^b(x')] = [\omega_{ia}(x), \omega_j^b(x')] = 0. \quad (1.126)$$

Choosing ω as configuration space variable thus e can be represented as

$$e_{ia} = -\frac{i}{2} \epsilon^{ij} \frac{\delta}{\delta \omega_j^a}. \quad (1.127)$$

The constraints (1.56) and (1.57) acting on wave functions $\Psi[\omega]$ become the first-order Wheeler-Dewitt equations

$$\bar{\mathcal{B}}^a \Psi[\omega] = \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \left[\partial_i \omega_j^a - \partial_j \omega_i^a + \epsilon^{abc} \omega_{ib} \omega_{jc} \right] \Psi[\omega] = 0, \quad (1.128)$$

$$\mathcal{B}^a \Psi[\omega] = \frac{i}{2} \left[\partial_k \frac{\delta}{\delta \omega_{ka}} + \epsilon^{abc} \omega_{kb} \frac{\delta}{\delta \omega_k^c} \right] \Psi[\omega] = 0. \quad (1.129)$$

The first constraint (1.128) contains no functional derivatives and wavefunctions $\Psi[\omega]$ are on flat $SO(2,1)$ connections, while the second constraint (1.129) is $SO(2,1)$ gauge invariance. This means that physical states in Dirac quantization are gauge-invariant functions of flat connection. The condition (1.129) is satisfied when wavefunction Ψ is a gauge-invariant function. This is simply the obtained description from covariant canonical quantization. The inner product of arbitrary physical wave function $\Psi[\omega]$ is

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int [d\omega] \Psi^*[\omega] \Phi[\omega], \quad (1.130)$$

which can be evaluated by gauge-fixing of the inner product. To quantize a classical theory, the phase space must be split into variables that act as position and momenta. This is known as polarization in which the spin connections ω are positions and the triads e are momenta. If we apply Dirac quantization to the metric formulation of (2+1)-dimensional gravity, we obtain the second-order Wheeler-Dewitt equation.

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} \Psi[\lambda, \tau] = & \left\{ \frac{1}{8} \frac{\delta}{\delta \lambda} e^{-2\lambda} \frac{\delta}{\delta \lambda} + \frac{1}{2} e^{-2\lambda} \Delta_0 + 2\tilde{\Delta} \lambda - 2e^{-2\lambda} Y^i[\pi] \tilde{\Delta} Y_i[\pi] \right. \\ & \left. + 2e^{-2\lambda} \tilde{\nabla}_i \left[(2p^{ij} + \tilde{\nabla}^i Y^j[\pi] + \tilde{\nabla}^j Y^i[\pi] - \tilde{g}^{ij} \tilde{\nabla}_k Y^k[\pi]) Y_j[\pi] \right] \right\} \Psi[\lambda, \tau] = 0, \end{aligned} \quad (1.131)$$

where $\tilde{\nabla}$ represents the covariant derivative for the spin connection compatible with \tilde{g}_{ij} and Δ_0 is the Laplacian on the torus moduli space.

$$\Delta_0 = -\tau_2^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2} \right), \quad (1.132)$$

and $Y^i[\pi]$ is determined by solving the momentum constraints

$$Y^i[\pi] = \frac{i}{4} \tilde{\Delta}^{-1} \left[e^{2\lambda} \tilde{\nabla}_i \left(e^{-2\lambda} \frac{\delta}{\delta \lambda} \right) \right]. \quad (1.133)$$

According to (1.131), λ is a function, not a constant and the $\tilde{\Delta}\lambda$ term can not be removed. The nonlocal terms in the Wheeler-DeWitt equation (1.131) represent terms involving $Y_i[\pi]$ and make it difficult to extract its solution. Henneaux [101] pointed out that the nonlocal term appears when the spatial topology is a two-sphere. The explicit solution of the Wheeler-DeWitt equation is unknown because of the operator order ambiguities. A Wheeler-DeWitt wave functional does not rely on a specific choice of the time coordinate, but the wave function could be found out for any arbitrary slice.

1.4.6 Path Integrals

The path integral is less proper than previous canonical quantization approaches. The problem of operator-ordering is overcome as the path integral variables are classical fields instead of operators. In quantum gravity, path integral can be evaluated for any spacetime topology, and the transition amplitude can be computed. The path integral is defined as either

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int [dq] e^{iI[q]}, \quad (1.134)$$

or

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int [dq] [dp] e^{iI[q,p]}, \quad (1.135)$$

where the integration is overall phase space between the initial q_i and final q_f data. The Feynman path integral specified the transition amplitude between the initial and final states, which is the same as that coming from canonical quantization for any simple systems. The path integral of the canonical action (1.31) is

$$Z = \int [d\pi^{ij}] [dg_{ij}] [dN^i] [dN] e^{iI_{grav}[\pi, g]}, \quad (1.136)$$

where the integration over the lapse and shift functions N and N^i leads to delta functionals. Generally, path integral under gauge conditions $\chi^\mu = 0$ is

$$Z = \int [d\pi^{ij}] [dg_{ij}] [dN^i] [dN] \delta[\chi^\mu] \det\{\{\mathcal{H}_\mu, \chi^\nu\}\} e^{iI_{grav}[\pi, g]}, \quad (1.137)$$

where $\{, \}$ represents the Poisson bracket [102]. Let us parametrize the spatial metric as $g_{ij} = e^{2\lambda} f^* \tilde{g}_{ij}(m_\alpha)$, where \tilde{g}_{ij} is a constant curvature metric as a function of moduli m_α and f^* is a

diffeomorphism on σ . Set that

$$\delta g_{ij} = 2(\delta\lambda) g_{ij} + (\hat{P}(\delta\xi))_{ij} + \delta m_\alpha T^{\alpha\beta} \Psi_{(\beta)ij}, \quad (1.138)$$

$$\pi^{ij} = \frac{1}{2} g^{ij} \pi + \sqrt{g} (\hat{P}Y)^{ij} + \sqrt{g} \hat{p}^\alpha \Psi_{(\alpha)}^{ij}, \quad (1.139)$$

where the operator \hat{P} is defined as

$$(\hat{P}\xi)_{ij} = \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i - g_{ij} \nabla_k \xi^k, \quad (1.140)$$

where ∇_i is the covariant derivative with the spatial metric g_{ij} . The constraints become

$$\mathcal{H}_i = \sqrt{g} (\hat{P}^\dagger \hat{P}Y)_i - \nabla_i \pi, \quad (1.141)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} e^{-2\lambda} \pi^2 + 2\sqrt{g} \left(\tilde{\Delta}\lambda - \frac{k}{2} \right) \\ & + \sqrt{g} \tilde{g}^{ik} \tilde{g}^{jl} e^{-2\lambda} \left((\hat{P}Y)_{ij} + \hat{p}^\alpha \Psi_{(\alpha)ij} \right) \left((\hat{P}Y)_{kl} + \hat{p}^\beta \Psi_{(\beta)kl} \right). \end{aligned} \quad (1.142)$$

Now we have to change path integral variables (1.137) from (g_{ij}, π^{ij}) to $(m_\alpha, \lambda, \xi, \hat{p}^\alpha, \pi, Y^i)$, then we get

$$\begin{aligned} Z = & \int [d^n \hat{p}] [d^n m] \det | \langle \chi^{(\alpha)}, \Psi_{(\beta)} \rangle | \\ & \int [d(\pi/\sqrt{g})] [d\lambda] [dY] [d\xi] \det | \hat{P}^\dagger \hat{P} | \delta[\xi^\mu] \delta[\mathcal{H}_\nu/\sqrt{g}] \det | \{ \mathcal{H}_\mu, \chi^\nu \} | e^{iI_{grav}}. \end{aligned} \quad (1.143)$$

We consider a gauge-fixing condition $\chi^0 = \pi/\sqrt{g} - T = 0$ and $\det | \{ \mathcal{H}_\mu, \chi^\nu \} |$ reduces to $\det | \{ \mathcal{H}_i, \chi^j \} | \det | \{ \mathcal{H}_0, \chi^0 \} |$. The path integral (1.143) simplifies to

$$Z = \int [d^n \hat{p}] [d^n m] \det | \langle \chi^{(\alpha)}, \Psi_{(\beta)} \rangle | \int [d\lambda] \delta[\mathcal{H}/\sqrt{g}] \det | \{ \mathcal{H}_0, \chi^0 \} | e^{iI_{grav}}, \quad (1.144)$$

$$= \int [d^n \hat{p}] [d^n m] \det | \langle \chi^{(\alpha)}, \Psi_{(\beta)} \rangle | e^{iI_{grav}}, \quad (1.145)$$

where the delta function $\delta[\mathcal{H}/\sqrt{g}]$ evaluates the integral over λ which canceled with the determinant $\det | \{ \mathcal{H}_0, \chi^0 \} |$ in the path integral. The determinant $\det | \langle \chi^{(\alpha)}, \Psi_{(\beta)} \rangle |$ is defined as

$$p^\alpha = \int_\sigma d^2x e^{s\lambda} (\pi^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} \pi) \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial m_\alpha} = \langle \hat{p}^\beta \Psi_{(\beta)}, \chi^{(\alpha)} \rangle = \langle \chi^{(\alpha)}, \Psi_{(\beta)} \rangle \hat{p}^\beta. \quad (1.146)$$

The path integral (1.145) becomes

$$Z = \int [d^n p] [d^n m] e^{iI_{grav}[p,m]}, \quad (1.147)$$

which is the path integral obtained from the reduced phase space quantization. Now we try to analyze the path integral in the first-order formalism. The path integral of the first-order action

(1.43) for zero cosmological constant $\Lambda = 0$ is

$$Z = \int [de] [d\omega] e^{iI_{grav}[e,\omega]}. \quad (1.148)$$

The path integral (1.148) can be evaluated by fixing the gauge condition of the action [20; 103]. Consider a closed manifold and the spin connection and triad is given in terms of the background fields $(\bar{e}, \bar{\omega})$, where

$$e^a = \bar{e}^a + \alpha^a, \quad \omega^\alpha = \bar{\omega}^\alpha + \beta^\alpha. \quad (1.149)$$

We take Landau gauge as a standard gauge choice, where

$$\bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \alpha_\nu^a = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \beta_\nu^a = 0, \quad (1.150)$$

where $\bar{\nabla}$ is the covariant derivative with respect to the background metric \bar{g} . Witten [20] showed that the gauge conditions (1.150) can be written as

$$D_{\bar{\omega}} * \alpha^a = D_{\bar{\omega}} * \beta^a = 0, \quad (1.151)$$

where $D_{\bar{\omega}}$ is the gauge-covariant derivative which can be evaluated from $D_{\bar{\omega}} \gamma^a = d\gamma^a + \epsilon^{abc} \bar{\omega}_b \gamma_c$ and $*$ is the Hodge star operator. The first-order action (1.43) for zero cosmological constant $\Lambda = 0$ reduces to

$$I_{gauge} = 2 \int_{\mathcal{M}} (u_a D_{\bar{\omega}} * \alpha^a + \nu_a D_{\bar{\omega}} * \beta^a). \quad (1.152)$$

The path integral (1.148) becomes

$$Z = \int [d\alpha] [d\beta] [du] [d\nu] |det \Delta_{\bar{\omega}}^{(0)}|^2 e^{iI_{grav}}, \quad (1.153)$$

where $|det \Delta_{\bar{\omega}}^{(0)}|^2$ is Faddeev-Popov determinant.

1.4.7 Lattice Approaches

The lattice formulation was proposed by Regge [50] in general relativity. The idea of Regge calculus is easily understood in the two-dimensional triangulated surface. The triangles are flat, and the edges carry only extrinsic curvature; the intrinsic curvature is concentrated entirely at the vertices. These vertices are conical points, characterized by deficit angles δ_i . But we know that each such point contributes an amount $2\delta_i$ to the integral $\int d^2x \sqrt{g} R$. The Einstein action for a

triangulated surface is

$$I_{Regge}^{(2)} = 2 \sum_{\text{vertices:}i} \delta_i. \quad (1.154)$$

Regge showed that a similar expression holds for an n -dimensional simplicial manifold \mathcal{M} , composed of flat n -simplices glued along their $(n-l)$ -dimensional edges. Hamiltonian lattice approach has been studied by Waelbroeck [104–107], related to the first-order formalism.

A different Hamiltonian lattice model, based on the metric formalism, has been developed by 't Hooft [108–112]. Classically, 't Hooft's polygon model can be considered as a gauge-fixed version of the lattice formulation of Waelbroeck, but the two theories are related by a nonlocal change of variables, so it is not clear that the quantum theories should be equivalent.

Chapter 2. The BTZ black hole

We concentrate on investigating the classical and quantum properties of the BTZ black hole. Its solution was first proposed by Bañados, Teitelboim, and Zanelli in 1992. BTZ black hole has a simple structure to compute sophisticated conceptual problems raised in 3+1 dimensions black holes. This model is physically realistic to provide a lot of comprehension for (3+1)- gravitational systems.

2.1 Preliminary

The Einstein field equations in 2+1 dimensions, with a negative cosmological constant, have a BTZ black hole solution [26; 113]. Black hole formation has been explored in many different field theories [114–117]. The BTZ black hole distinguishes from the solutions of Schwarzschild and Kerr black holes in some significant points: it is asymptotically anti-de Sitter rather than asymptotically flat, and the curvature singularity disappears at the origin. It is an example of a collapsing matter that has an event horizon and an inner horizon, and its thermodynamic properties are much like those of Schwarzschild black hole.

The BTZ black hole behavior has been classically inspected as the Schwarzschild black hole. The geodesics behavior has been investigated by Cruz [118] and Farina [119], and the strings propagation in BTZ black hole has been realized by Larsen and Sanchez [120]. The static BTZ black hole depends on the mass M and angular momentum J . The spinning and charged BTZ black hole has been discussed in [121–123].

Some attempts have been done to find multi-black hole solutions [124]. Clément has reported the existence of solutions representing multiple freely falling black holes, but the metrics have also conical singularities [125]. Coussaert and Henneaux argue that all static multi-black hole solutions include such singularities [126], but it is not known whether exact nonstatic and nonsingular solutions can be found.

Chapter 2 is structured as follows. In section 2.2, we summarize the BTZ solution and its basic physical characteristics in different coordinates such as Schwarzschild, Eddington-Finkelstein, and Kruskal coordinates. Section 2.3 deals with the global geometry of the (2+1)-dimensional black hole. Section 2.4 describes the properties of the BTZ solution in the context of quantum field theory. Section 2.5 gives briefly some various theories concerning the thermodynamics of the BTZ black hole. Section 2.6 discusses a different possible generalization of the BTZ black hole.

2.2 The BTZ Black Holes

When the cosmological constant is negative, the (2+1)-dimensional gravity has a black hole solution [26; 113] in a vacuum. In Schwarzschild coordinates, The BTZ metric has the following form

$$ds^2 = -(N^\perp)^2 dt^2 + dr^2 + f^{-2} dr^2 + r^2(d\phi + N^\phi dt)^2, \quad (2.1)$$

with lapse and shift functions and radial metric

$$N^\perp = f = \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{J^2}{4r^2} \right)^{1/2}, \quad N^\phi = -\frac{J}{2r^2}. \quad (2.2)$$

The parameters M and J are the ADM mass and angular momentum. The metric (2.1) satisfies the vacuum field equations of (2+1)-dimensional general relativity with a cosmological constant $\Lambda = -1/\ell^2$. The metric (2.1) is singular at the location of the inner and outer horizons $r = r_\pm$, where

$$r_\pm^2 = \frac{M\ell^2}{2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{M\ell} \right)^2} \right\}, \quad (2.3)$$

where the mass and angular momentum are expressed in terms of $r = r_\pm$ as

$$M = \frac{r_+^2 + r_-^2}{\ell^2}, \quad J = \frac{2r_+ r_-}{\ell}. \quad (2.4)$$

The two horizons occur simultaneously in the extremal case $|J| = M\ell > 0$, while the inner one vanishes for $J = 0, M > 0$. The metric with the conditions $M = -1$ and $J = 0$ is recognized as three-dimensional anti-de Sitter space, while the conditions $M = 0$ and $J = 0$ refer to a massless black hole. The BTZ metric is a genuine black hole can be seen most easily by transforming to Eddington-Finkelstein-like coordinates [127]

$$dv = dt + \frac{dr}{(N^\perp)^2}, \quad d\tilde{\phi} = d\phi - \frac{N^\phi}{(N^\perp)^2} dr, \quad (2.5)$$

in which the metric (2.1) becomes

$$ds^2 = -(N^\perp)^2 dv^2 + 2dv dr + r^2(d\tilde{\phi} + N^\phi dv)^2. \quad (2.6)$$

It is now easy to see that the horizon $r = r_+$, where N^\perp vanishes, is a null surface, generated by geodesics

$$r(\lambda) = r_+, \quad \frac{d\tilde{\phi}}{d\lambda} + N^\phi(r_+) \frac{dv}{d\lambda} = 0. \quad (2.7)$$

For a more complete description of the BTZ solution, we can transform it instead to Kruskal-like coordinates. To do so, let us define new null coordinates

$$u = \rho(r) e^{-at}, \quad v = \rho(r) e^{at}, \quad (2.8)$$

with $\frac{d\rho}{dr} = \frac{a\rho}{(N^+)^2}$. As in the case of the Kerr metric, we need two patches, $r_- < r < \infty$ and $0 < r < r_+$, to cover the BTZ spacetime. In each patch, the metric (2.1) takes the form

$$ds^2 = \Omega^2 du dv + r^2 (d\tilde{\phi} + N^\phi dt)^2, \quad (2.9)$$

where

$$\begin{aligned} \Omega_+^2 &= \frac{(r^2 - r_-^2)(r + r_+)^2}{a_+^2 r^2 \ell^2} \left(\frac{r - r_-}{r + r_-} \right)^{r_-/r_+}, & \tilde{\phi}_+ &= \phi + N^\phi(r_+) t, \\ a_+ &= \frac{r_+^2 - r_-^2}{\ell^2 r_+} \quad (r_- < r < \infty) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \Omega_-^2 &= \frac{(r_+^2 - r^2)(r + r_-)^2}{a_-^2 r^2 \ell^2} \left(\frac{r_+ - r}{r_+ + r} \right)^{r_+/r_-}, & \tilde{\phi}_- &= \phi + N^\phi(r_-) t, \\ a_- &= \frac{r_-^2 - r_+^2}{\ell^2 r_-} \quad (0 < r < r_+) \end{aligned} \quad (2.11)$$

with r and t viewed as implicit functions of u and v . The overall structure of the BTZ black hole is similar to the Kerr metric except at $r = \infty$, where the BTZ black hole is asymptotically anti-de Sitter rather than asymptotically flat. The outer horizon $r = r_+$ represents an event horizon, while the inner horizon $r = r_-$ represents a Cauchy horizon.

2.3 Three dimensional Anti-de Sitter

A standard representation of AdS_3 may be obtained from a flat spacetime, with coordinates (X_1, X_2, T_1, T_2) , and metric

$$ds^2 = dX_1^2 + dX_2^2 - dT_1^2 - dT_2^2. \quad (2.12)$$

The induced metric on the submanifold

$$X_1^2 + X_2^2 - T_1^2 - T_2^2 = -\ell^2, \quad (2.13)$$

corresponds to the AdS_3 metric. It is clear that the isometry group of AdS_3 is $SO(2,2)$. Equiva-

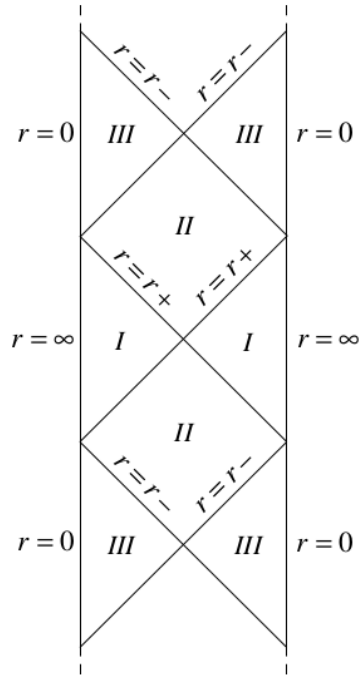
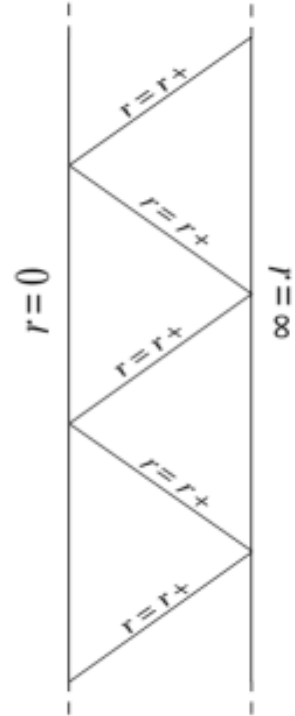
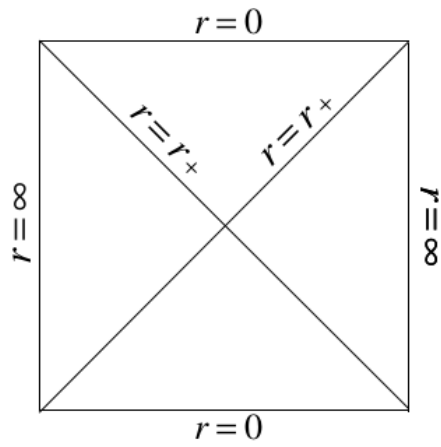
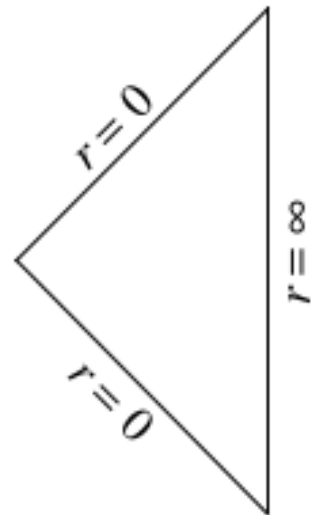
(a) The generic case $J \neq 0$.(b) The extremal case $J = \pm M\ell$.(c) The case for $J = 0$ and $M \neq 0$.(d) The case for $M = 0$.

Figure 2.1 — The BTZ black hole solutions in the Penrose diagram.

lently, we can combine the coordinates into an $SL(2,R)$ matrix

$$X = \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} X_1 + T_1 & X_2 + T_2 \\ X_2 - T_2 & -X_1 + T_1 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

where anti-de Sitter space is determined by $\det \mathbf{X} = 1$ and $X \in SL(2,R)$.

The relevant region of the universal covering space of anti-de Sitter space may be covered by an infinite set of coordinate patches of three types, corresponding to the regions of the Penrose diagram of figure 2.1:

I. ($r \geq r_+$)

$$\begin{aligned} X_1 &= \ell \sqrt{\alpha} \sinh \left(\frac{r_+}{\ell} \phi - \frac{r_-}{\ell^2} t \right), & X_2 &= \ell \sqrt{\alpha - 1} \cosh \left(\frac{r_+}{\ell^2} t - \frac{r_-}{\ell} \phi \right), \\ T_1 &= \ell \sqrt{\alpha} \cosh \left(\frac{r_+}{\ell} \phi - \frac{r_-}{\ell^2} t \right), & T_2 &= \ell \sqrt{\alpha - 1} \sinh \left(\frac{r_+}{\ell^2} t - \frac{r_-}{\ell} \phi \right), \end{aligned}$$

II. ($r_- \leq r \leq r_+$)

$$\begin{aligned} X_1 &= \ell \sqrt{\alpha} \sinh \left(\frac{r_+}{\ell} \phi - \frac{r_-}{\ell^2} t \right), & X_2 &= -\ell \sqrt{1 - \alpha} \sinh \left(\frac{r_+}{\ell^2} t - \frac{r_-}{\ell} \phi \right), \\ T_1 &= \ell \sqrt{\alpha} \cosh \left(\frac{r_+}{\ell} \phi - \frac{r_-}{\ell^2} t \right), & T_2 &= -\ell \sqrt{1 - \alpha} \cosh \left(\frac{r_+}{\ell^2} t - \frac{r_-}{\ell} \phi \right), \end{aligned}$$

III. ($0 \leq r \leq r_-$)

$$\begin{aligned} X_1 &= \ell \sqrt{-\alpha} \cosh \left(\frac{r_+}{\ell} \phi - \frac{r_-}{\ell^2} t \right), & X_2 &= -\ell \sqrt{1 - \alpha} \sinh \left(\frac{r_+}{\ell^2} t - \frac{r_-}{\ell} \phi \right), \\ T_1 &= \ell \sqrt{\alpha} \sinh \left(\frac{r_+}{\ell} \phi - \frac{r_-}{\ell^2} t \right), & T_2 &= -\ell \sqrt{1 - \alpha} \cosh \left(\frac{r_+}{\ell^2} t - \frac{r_-}{\ell} \phi \right), \end{aligned}$$

where

$$\alpha = \left(\frac{r^2 - r_-^2}{r_+^2 - r_-^2} \right), \quad \phi \in (-\infty, \infty), \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (2.15)$$

The angle ϕ has infinite range and one must identify ϕ with $\phi + 2\pi$.

2.4 Quantum field theory in the BTZ background

In this section, we consider the quantum field theory based on a classical black hole background. The starting point is the two-point function $G(x, x') = \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle$ for a free field, from which the expectation value $\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle$ can be evaluated. As noted that the BTZ black hole is isometry to the anti-de Sitter space. Thus, we have to write the two-point function for BTZ

black hole $G_{BTZ}(x, x')$ in terms of the corresponding anti-de Sitter two-point function $G_A(x, x')$ as

$$G_{BTZ}(x, x') = \sum_n e^{-i\delta n} G_A(x, \Lambda^n x'), \quad (2.16)$$

where $\Lambda^n x'$ is the action of the group element on x' and δ is the phase. Note that the phase $\delta = 0$ is for untwisted fields and may be arbitrary depending on the boundary conditions. The phase $\delta = \pi$ corresponds to twisted fields. Now, our main point reduces to understand quantum field theory on anti-de Sitter space. Quantization of anti-de Sitter space is trivial, and the difficulty is that the anti-de Sitter space is not globally hyperbolic. One must impose boundary conditions at infinity to formulate a sensible field theory.

In 3+1 dimensions, the boundary conditions for a scalar field at spatial infinity [128] are Dirichlet (D), Neumann (N), and transparent boundary condition (T). Similarly, These boundary conditions exist in 2+1 dimensions [129]. The action for massless gravity conformally coupled to scalar field is

$$I = - \int d^3x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{16} R \phi^2 \right), \quad (2.17)$$

the anti-de Sitter two-point functions are

$$G_A^{(D)} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \{ \sigma^{-1/2} - [\sigma + 2\ell^2]^{-1/2} \}, \quad (2.18)$$

$$G_A^{(N)} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \{ \sigma^{-1/2} + [\sigma + 2\ell^2]^{-1/2} \}, \quad (2.19)$$

$$G_A^{(T)} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \sigma^{-1/2}, \quad (2.20)$$

where $\sigma(x, x')$ is the squared distance between the embedding space x and x' given by

$$\sigma(x, x') = \frac{1}{2} \left[(X_1 - X'_1)^2 - (T_1 - T'_1)^2 + (X_2 - X'_2)^2 - (T_2 - T'_2)^2 \right]. \quad (2.21)$$

The general Greens function with boundary conditions [130] is

$$G_A^{(\alpha)} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \{ \sigma^{-1/2} - \alpha [\sigma + 2\ell^2]^{-1/2} \}. \quad (2.22)$$

Under these boundary conditions, the two-point function (2.16) is periodic in imaginary time, with a period β given by

$$\beta^{-1} = (N^\perp)^{-1} T_0, \quad T_0 = \frac{r_+}{2\pi\ell^2} = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (2.23)$$

where κ is the surface gravity. As usual, β is interpreted as a local inverse temperature, corresponding to a black hole temperature T_0 . The analytical properties of the two-point functions showed that the vacuum state is relevant to the Hartle-Hawking vacuum. To evaluate the expectation

value $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$, the stress-energy tensor for the action (2.17) is

$$T_{\mu\nu} = \frac{3}{4}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\nabla_\rho\phi\nabla_\sigma\phi - \frac{1}{4}\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\phi\nabla_\rho\nabla_\sigma\phi - \frac{1}{16\ell^2}g_{\mu\nu}\phi^2. \quad (2.24)$$

The expectation value of the first term in (2.24) is $\lim_{x\rightarrow x'}\frac{3}{4}\nabla_\mu\nabla_{\nu'}G(x,x')$. The resulting expectation value are discussed in [129–131]. Massive, nonconformally coupled to scalar fields in a BTZ background has been studied in [132].

2.5 Thermodynamics

The BTZ black hole is a thermodynamic object with temperature $T_0 = \kappa/2\pi$ and has thermal Hawking radiation. I will briefly discuss some basic approaches to BTZ black hole thermodynamics such as the Euclidean path integral [133], Brown and York path integral approach [134], the quantum tunneling approach [135], and Noether charges method [136].

The Euclidean path integral proposed by Gibbons and Hawking [133] is a straightforward approach, in which the partition function of the black hole is represented as the path integral in imaginary time. By setting $t = i\tau$ and $J = iJ_E$, the BTZ metric (2.1) becomes

$$ds_E^2 = -(N_E^\perp)^2 dt^2 + f_E^{-2} dr^2 + r^2(d\phi + N_E^\phi d\tau)^2, \quad (2.25)$$

with Euclidean lapse and shift functions given by

$$N_E^\perp = f_E = \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2} - \frac{J_E^2}{4r^2}\right)^{1/2}, \quad N_E^\phi = -iN^\phi = -\frac{J_E}{2r^2}. \quad (2.26)$$

The roots of r^2 are

$$r_+ = \left\{\frac{M\ell^2}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{J_E}{M\ell}\right)^2}\right]\right\}^{1/2}, \quad r_- = -i|r_-| = \left\{\frac{M\ell^2}{2}\left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{J_E}{M\ell}\right)^2}\right]\right\}^{1/2}. \quad (2.27)$$

Note that the metric (2.25) is a Riemannian metric because of the imaginary values of J . It has negative curvature with positive metric and it is locally isometric to hyperbolic three-space \mathbb{H}^3 . The Euclidean path integral is obtained by evaluating the canonical partition function

$$Z = \int [dg] e^{I_E[g]}, \quad (2.28)$$

where $I_E[g]$ is the Euclidean action. At the extremal metric \bar{g} , one finds the following action

$$I_E[\bar{g}] = 4\pi r_+ - \beta_0(M - \Omega J), \quad (2.29)$$

where β_0 is the temperature and Ω is the rotational chemical potential. The action (2.29) corresponds to an entropy $4\pi r_+$, given by

$$S = \frac{2\pi r_+}{4\hbar G}, \quad (2.30)$$

which is similar to the standard Bekenstein entropy. By taking into consideration the Chern-Simons formalism, the partition function [137] becomes

$$Z = \exp \left\{ I[\bar{g}] + \frac{2\pi r_+}{\ell} \right\}, \quad (2.31)$$

leading to an entropy given by

$$S = \frac{2\pi r_+}{4\hbar G} \left(1 + \frac{4\hbar G}{\ell} \right). \quad (2.32)$$

The Euclidean path integral has important limitations to black hole thermodynamics. Brown and York [134] developed the path integral approach, rely on the microcanonical ensemble in a cavity for a black hole. The microcanonical partition function is written in the form (2.31), but the action is the same as in the Gibbons-Hawking approach with different boundary terms. The temperature at the boundary of a cavity of radius R is calculated in [138] as

$$T = \frac{1}{N^\perp(R)} \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (2.33)$$

Note also that the BTZ black hole obeys the first law of thermodynamics,

$$dE = TdS + \Omega dJ - \mathcal{P}d(2\pi R), \quad (2.34)$$

where \mathcal{P} is the surface pressure at R . Wald [136] defined the entropy as the Noether charge related to the Killing vector ξ which is normal to the event horizon. The Noether charge one-form for (2+1)-dimensional gravity is

$$Q = -\frac{1}{16\pi G} \epsilon_{abc} \nabla^b \xi^c dx^a. \quad (2.35)$$

The same calculation has been performed in the first-order formalism in [139]. Another approach is quantum tunneling [135] reflecting the BTZ black hole thermodynamics. In 2+1 dimensions, the tunneling is between a thick spherical matter shell and a black hole with equivalent mass. The tunneling entropy is the same as that found in (2.30).

2.6 Generalization

We mainly focus on extending the BTZ black hole solution to other fields, such as string theory, massive gravity, and others. The simplest generalization of the BTZ black hole formed by coupling an electromagnetic field to get Reissner-Nördstrom solution in 2+1 dimensions. The one-form potential for static case $N^\phi = 0$ is

$$A = -Q \ln \left[\frac{r}{r_0} \right] dt, \quad (2.36)$$

and the metric (2.1) is modified by considering

$$N^\perp = f = \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{J^2}{4r^2} - \frac{1}{2} Q^2 \ln \left[\frac{r}{r_0} \right] \right)^{1/2}, \quad (2.37)$$

to satisfy the Einstein-Maxwell equations in 2+1 dimensions. In addition, its static solution independently exists for a vanishing cosmological constant in [140–142]. The energy-momentum tensor of the charged black hole is nonzero, and the charged black hole is represented as a group of isometries rather than a quotient of anti-de Sitter space. Note also that a rotating black hole has a nonvanishing magnetic field, and the potential form (2.36) should be generalized.

Another possible extension of the BTZ solution can be realized by inserting a dilaton coupling [143]. The action of the black hole connected with the dilaton field ϕ is

$$I = \int d^3x \sqrt{-g} \left(R - \frac{B}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - e^{-4a\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2e^{b\phi} \Lambda \right), \quad (2.38)$$

where $F_{\mu\nu}$ is the electromagnetic field, and the parameters a , b , and B are the coupling strengths. The horizons structure of the action (2.38) has been studied in [144] with $F_{\mu\nu}$ and $b = 4$.

The generalization of the BTZ black hole interact with string theory is investigated in [145–147]. The low energy string effective action is

$$I = \int d^3x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left(\frac{4}{k} + R + 4 \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right), \quad (2.39)$$

where $H_{\mu\nu\rho}$ is an antisymmetric Kalb-Ramond field. The equations of motion from the action (2.39) reduces to the Einstein field equations under the following ansatz $H_{\mu\nu\rho} = (2/\ell)\epsilon_{\mu\nu\rho}$, $\phi = 0$, and $k = \ell^2$, where $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ is the volume form. The BTZ black hole in string theory is an interesting model for investigating space duality [148], and tachyon scattering [149].

Consider BTZ black hole in topologically massive gravity [150; 151]. The action of this system is a combination between the Einstein gravity action and a Chern-Simons action,

$$I_{GCS} = \frac{k'}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \left(\partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\sigma + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu\tau}^\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\tau \right). \quad (2.40)$$

This action is invariant under diffeomorphisms and depends on the spin connection. The BTZ solution is equivalent to the field equations of massive gravity when the Cotton tensor vanishes, i.e.

$$C^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\rho\sigma} \nabla_\rho (R_\sigma^\nu - \frac{1}{4} \delta_\sigma^\nu R) = 0. \quad (2.41)$$

A final generalization model can be considered by coupling BTZ black hole with the topological matter. The action of black hole in such theory [139] is

$$I = \int_{\mathcal{M}} \left(e^a \wedge R_a[\omega] + B^a \wedge D_\omega C_a \right), \quad (2.42)$$

where R_a is the curvature of the connection ω . The first term of (2.42) represents the first-order action for gravity. The configuration space of this model is finite-dimensional, parametrized by $ISO(2,1)$. The physical properties of this model are still a mystery.

Chapter 3. Quantization of dust thin shell coupled to (2+1)-dimensional gravity

The main objective of this chapter is to study the phase space of a dust shell for a zero cosmological constant in (2+1)-dimensional gravity and its quantization. The momentum-space structure is investigated using the representation theory of $SL(2)$ group and has AdS_2 geometry. The Euler angles support a global parameterization of that manifold. Quantization in these variables leads to noncommutativity and also to discreteness in the coordinate space, which allows resolving the central singularity. The transition amplitude is finite between the discrete and continuous spectrum.

3.1 Preliminary

Spherically symmetric thin shells are widely used to study many phenomena in a classical [152–155] and quantum [156–159] gravitational field. They are considered as the closest generalizations of the point-like particles. The phase space structure and the quantization of a point-like particle in (2+1)-dimensional gravity was studied by 't Hooft [112; 160], Witten [161] and others. The dynamics of a self-gravitating thin shell were first studied by Israel [22] in 1967, which is considered as the toy model representing gravitational collapse. Israel equations give an explicit relationship between the surface energy-momentum tensor and the extrinsic curvature tensor difference between the two sides of the thin shell.

Classically, dust shells collapse to form either naked singularities or black holes, depending on their initial conditions, such as velocity distributions and initial matter. Black holes can be recognized via Hawking radiation [162] rather than naked singularities. The naked singularities formation is more difficult to comprehend and Penrose proposed Cosmic Censor operators [163] to guarantee that naked singularities never exist. The semiclassical dynamics of a self-gravitating shell formed from bosons in Anti-de Sitter spacetime is discussed in [164]. The dynamical solution may extend for such a model, where the emission of radiation [165] or the creation homogeneous of matter [166] illustrated by the collapsing of the shell. The Hamiltonian formulation for a multishell system is considered in [167] and thin self-gravitating crossing shells are discussed in [168; 169].

There has long been a hypothesis that a quantum theory of gravity should resolve the singularities of general relativity. The first argument for this goes back to Bronstein [170], who showed that distances less than the Planck length cannot be measured. In the absence of a full theory of gravity, there is still no final answer whether this is indeed the case. This question can be studied by considering reduced models of general relativity in which all but a few degrees of freedom are frozen. Those models that contain black hole solutions, which are crucial for Bronstein's argument, present a special interest.

The simplest possible model is a universe with a scalar matter field [171–173]. Quantization of this model has been studied extensively, and the general conclusion is that quantum theory does not resolve the singularity, in this case, [174; 175] unless some exotic matter is added [176–178]. The next-to-simplest model is a spherically symmetric spacetime in which matter is represented by one or more dust shells. In contrast to the homogenous model, this model contains solutions with black holes, which lead to a nontrivial structure of the phase space with the branching of the solutions for the constraints.

Many various works are studying such models on both the classical [179–181] and the quantum levels [182–184]. In some versions of quantum theory, the central singularity is removed [152; 185; 186], but these results do not always agree with each other. In addition to the quantization ambiguity, another possible reason for this is the complicated structure of the phase space of the theory. Different quantum theories can arise in different sectors of such a phase space.

In such a situation, the common wisdom is that the wave function of a quantum theory must be defined on all possible configurations independent of their classical accessibility. This was realized in one of the possible ways in [185; 186], where different sectors of the phase space were combined into one Riemann surface using complex coordinates, and the branch point corresponded to the horizon. Another possibility is to try to find a real global parameterization for the phase space (if it exists). One example where this was realized is (2+1)-dimensional gravity coupled to a point particle [110; 112]. The particle momentum turns out to take values in the Lorentz group manifold, and the different branches of the solution for the constraints result from different ways of intersecting this manifold by a plane. This example is our starting point in trying to unite these two approaches.

Chapter 3 is outlined as follows. In section 3.2, we investigate the canonical analysis for a dust shell coupled to gravity, including Kuchař canonical transformation in 2+1 dimensions. These results are quite close to that in 3+1 dimensions, the only difference being that there is no Newtonian potential, but the branching of the constraint solution is the same.

In section 3.3, we extend the results of [112; 187] from a point particle to a spherical shell, representing the later as an ensemble of an infinite number of point particles. The momentum space of the shell turns out to be AdS_2 , which results, in particular, in the noncommutativity of the coordinates. The Hamiltonian constraint is, however, different from that of a particle, which accounts for a contribution of inter-shell movement energy to the gravitational field. The relation between momenta from AdS_2 and canonical momenta from [180; 185] is found.

In section 3.4, we perform quantization in momentum representation on AdS_2 . Apart from the noncommutativity of the coordinates, it results in discreteness of the spectrum of one of them (time). The perimeter of the shell has a discrete spectrum when it is timelike and continuous, but separated from zero spectrum when it is spacelike. The latter provides a mechanism for the resolution of the central singularity. Finally, the implementation of the Hamiltonian constraint and finding the physical Hilbert space are discussed. We also discuss the possibility to extend the above results to 3+1 spacetime dimensions.

3.2 Canonical Formalism for Spherically Symmetric Spacetimes in 2+1 Gravity

The standard Einstein-Hilbert action for the gravitational field in the absence of matter is

$$I_{\Sigma}[g, N, N^a] = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^3x = \int dt \int_{\Sigma} \mathcal{L}_{\Sigma} d^2x, \quad (3.1)$$

and its Lagrangian \mathcal{L}_{Σ} is

$$\mathcal{L}_{\Sigma} = \frac{N}{16\pi} \sqrt{{}^{(2)}g} \left(K^{ab} K_{ab} - K^2 + {}^{(2)}R - 2\Lambda \right), \quad (3.2)$$

where $\mathbf{R}[g]$ is the scalar curvature of a space metric $g_{ab} = (L^2, R^2)$ and K_{ab} is the extrinsic curvature for a constant time surface. The scalar curvature for space metric $g_{ab} = (L^2, R^2)$ and K_{ab} is

$${}^{(2)}R = -2L^{-2}R^{-1}R'' + 2L^{-3}R^{-1}L'R'. \quad (3.3)$$

Note that dot and prime denote differentiation with respect to t and r , respectively. The extrinsic curvature is defined by

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(-\partial_t g_{ij} + {}^{(2)}\nabla_i N_j + {}^{(2)}\nabla_j N_i \right), \quad (3.4)$$

where ${}^{(2)}\nabla$ is the full covariant derivative and shift vector $N^i = (N^r, 0)$. For spherically symmetric, the extrinsic curvature is diagonal

$$K_i^j = \text{diag}(K_r^r, K_{\theta}^{\theta}), \quad (3.5)$$

$$K_{rr} = -N^{-1}L \left[\dot{L} - (LN^r)' \right], \quad (3.6)$$

$$K_{\theta\theta} = -N^{-1}R(\dot{R} - R'N^r). \quad (3.7)$$

The ADM action in terms of equations (3.2), (3.5), (3.6), and (3.7) is

$$I_{\Sigma}[R, L; N, N^a] = \int dt \int_{-\infty}^{\infty} dr \left[-N^{-1} \left(-\dot{L} + (LN^r)' \right) \left(\dot{R} + R'N^r \right) + N \left(-L^{-1}R'' + L^{-2}R'L' \right) \right]. \quad (3.8)$$

The canonical formalism of the action is derived by differentiating the ADM action (3.8) with respect to velocities \dot{L} and \dot{R} . We obtain

$$P_L = -N^{-1}(\dot{R} - R'N^r), \quad P_R = -N^{-1} \left[\dot{L} - (LN^r)' \right], \quad (3.9)$$

where the momentum P_R is a density and the momentum P_L is a scalar. The velocities \dot{L} and \dot{R} can be written in terms of P_R and P_L as

$$\dot{R} = -NP_L + R'N^r, \quad \dot{L} = -NP_R + (LN^r)'. \quad (3.10)$$

The extrinsic curvature as a function of the canonical momenta:

$$K_{rr} = LP_R, \quad K_{\theta\theta} = RP_L. \quad (3.11)$$

The ADM action (3.8) can be written in the canonical form by Legendre transformation as

$$I_\Sigma[R, L, P_L, P_R; N, N^r] = \int dt \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(P_L \dot{L} + P_R \dot{R} - NH^G - N^r H_r^G \right), \quad (3.12)$$

where the Hamiltonian constraint is

$$H^G = -P_L P_R + L^{-1} R'' - L^{-2} R' L', \quad (3.13)$$

and the momentum constraint is

$$H_r^G = P_R R' - L P_L'. \quad (3.14)$$

3.2.1 Kuchař Transformation for (2+1)-dimensional Gravity

Kuchař [27] proposed a new procedure for expressing Hamiltonian and momentum constraints into a simple set of constraints in (3+1)-dimensional gravity. This approach is based on the canonical transformation of the old variables to a new canonical set. In this section, we discuss Kuchař's method in (2+1)-dimensional gravity. The general metric of a spherically symmetric spacetime [186] is

$$ds^2 = -[N^2 - L^2(N^r)^2]dt^2 + 2L^2N^r dt dr + L^2 dr^2 + R^2 d\theta^2, \quad (3.15)$$

where N, N^r, L and R are continuous functions of t and r only. Equation (3.15) represents the Arnowitt-Deser-Misner (ADM) form of the 2+1 decomposition of spacetime. The general spherically symmetric (2+1)-dimensional Schwarzschild metric, in the curvature coordinates (T, R) , is

$$ds^2 = -(1 - 2m + |\Lambda|R^2)dT^2 + (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1}dR^2 + R^2 d\theta^2, \quad (3.16)$$

where conical singularity with angle $\sim 2\pi(1 - \sqrt{1 - 2m + |\Lambda|R^2}) \simeq 2\pi M$. We consider the hypersurface as a leaf of a foliation

$$T = T(t,r), \quad R = R(t,r). \quad (3.17)$$

Substitute (3.17) into (3.16) and obtain

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left[(1 - 2m + |\Lambda|R^2) \dot{T}^2 - (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1} \dot{R}^2 \right] dt^2 \\ & + 2 \left[- (1 - 2m + |\Lambda|R^2) \dot{T}T' + (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1} \dot{R}R' \right] dt dr \\ & + \left[- (1 - 2m + |\Lambda|R^2) T'^2 + (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1} R'^2 \right] dr^2 + R^2 d\theta^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Comparing (3.18) with (3.15), we get

$$L^2 = - (1 - 2m + |\Lambda|R^2) T'^2 + (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1} R'^2, \quad (3.19)$$

$$L^2 N^r = - (1 - 2m + |\Lambda|R^2) \dot{T}T' + (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1} \dot{R}R', \quad (3.20)$$

$$N^2 - L^2 (N^r)^2 = (1 - 2m + |\Lambda|R^2) \dot{T}^2 - (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1} \dot{R}^2. \quad (3.21)$$

The lapse function and shift function are given by

$$N^r = \frac{- (1 - 2m + |\Lambda|R^2) \dot{T}T' + (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1} \dot{R}R'}{- (1 - 2m + |\Lambda|R^2) T'^2 + (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1} R'^2}, \quad (3.22)$$

$$N = \frac{\dot{T}R' - \dot{R}T'}{\sqrt{- (1 - 2m + |\Lambda|R^2) T'^2 + (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1} R'^2}}, \quad (3.23)$$

respectively. To calculate P_L , we substitute (3.22) and (3.23) into (3.9)

$$-T' = (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1} L P_L. \quad (3.24)$$

The Schwarzschild mass can be calculated using (3.19), which is equal to

$$m = \frac{1}{2} + \frac{P_L^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{R'^2}{L^2} + \frac{|\Lambda|R^2}{2}. \quad (3.25)$$

We found that functions $m(r)$ and $-T'(r)$ are canonically conjugate variables and the dynamical variable $-T'(r)$ can be denoted by $P_m(r)$. The new momentum $\bar{P}_R(r)$ is written in terms of the old momentum $P_R(r)$ and a dynamical variable $\Phi(r)$,

$$\bar{P}_R(r) = P_R(r) + \Phi(r; R, L, P_L), \quad (3.26)$$

where $\Phi(r)$ does not depend on $P_R(r)$. The final transformation form is

$$L = \sqrt{R'^2(1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1} - (1 - 2m + |\Lambda|R^2)P_m^2}, \quad (3.27)$$

$$P_L = \frac{(1 - 2m + |\Lambda|R^2)P_m}{\sqrt{R'^2(1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1} - (1 - 2m + |\Lambda|R^2)P_m^2}}, \quad (3.28)$$

$$\bar{R} = R, \quad (3.29)$$

$$\bar{P}_R = P_R - \frac{(1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1}}{L^2} \left[(LP_L)'R' - (LP_L)R'' \right]. \quad (3.30)$$

The transformation form is not valid at the Horizon. The Liouville form is

$$\begin{aligned} \Theta &= \int P_L \dot{L} + P_R \dot{R}, \\ &= \int P_m \dot{m} + \bar{P}_R \dot{R} + \frac{\partial}{\partial t} \left[LP_L + \frac{R'}{2} \ln \left| \frac{R' - LP_L}{R' + LP_L} \right| \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\dot{R}}{2} \ln \left| \frac{R' + LP_L}{R' - LP_L} \right| \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Equations (3.13) and (3.14) can be represented by a simple set of constraints:

$$\bar{P}_R = 0, \quad m' = 0. \quad (3.32)$$

3.2.2 Canonical analysis for (2+1)-dimensional gravity with a thin shell

We briefly describe the canonical formalism for a spherically symmetric gravitational field in 2+1 dimensions in the existence of a thin shell. The action for this system is

$$\begin{aligned} I &= I_{gr} + \text{boundary terms} + I_{shell}, \\ &= \frac{1}{16\pi} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^3x + (\text{boundary terms}) + M \int_{\Sigma} d\tau. \end{aligned} \quad (3.33)$$

The first and third terms in (3.33) represent the standard Einstein-Hilbert action for the gravitational field and dust thin shell action, respectively. The shell action is

$$I_{shell} = -M \int_{\Sigma} \sqrt{\hat{N}^2 - \hat{L}^2(\hat{N}^r + \hat{r})^2} dt, \quad (3.34)$$

where hats denote the value of variables on the shell and M is the shell rest mass. The explicit form of the action (3.33) in the Hamiltonian form becomes

$$I = \int dt \hat{\pi} \dot{\hat{r}} + \int \left[P_L \dot{L} + P_R \dot{R} - N(H^s + H^G) - N^r(H_r^s - H_r^G) \right] dr dt + \int m_{ADM} dt, \quad (3.35)$$

where m_{ADM} is the total mass of the combined gravity+shell system and $\hat{\pi}$ is the momentum conjugate to \hat{r} , which is equal to

$$\hat{\pi} = \frac{M\hat{L}^2(\hat{N}^r + \dot{\hat{r}})}{\sqrt{\hat{N}^2 - \hat{L}^2(\hat{N}^r + \dot{\hat{r}})^2}}, \quad (3.36)$$

and the Hamiltonian constraint of the shell is

$$H^s = \sqrt{(\hat{\pi}/\hat{L})^2 + M^2} \delta(r - \hat{r}), \quad (3.37)$$

and its momentum constraint is

$$H_r^s = \hat{\pi} \delta(r - \hat{r}). \quad (3.38)$$

The regular contribution to the constraints is the same as in a vacuum and is valid in the inner and outer regions of the shell. There is also a delta-functional contribution on the shell which has to be combined with the shell hamiltonian. As a result, we get the shell constraints:

$$C^s = \frac{[R']}{L} + \sqrt{(\hat{\pi}/\hat{L})^2 + M^2}, \quad (3.39)$$

$$C_r^s = L[P_L] + \hat{\pi}, \quad (3.40)$$

where the square brackets mean the jump of the field across the shell. Now we go to the Kuchař variables, solve the constraints in the inner and outer regions, and plug the solution back into the action. It turns out that the kinetic term in the bulk disappears due to the bulk constraints, the kinetic term containing $\dot{\hat{r}}$ on the shell disappears due to the constraint (3.40), and all that remains is the contribution from boundary terms that appear after the Kuchař canonical transformation:

$$I = \int dt \left[m\dot{\hat{T}} + [P_R]\dot{R} - N^s C^s \right], \quad (3.41)$$

Here \hat{T} is the Killing time evaluated at the shell,

$$P_R \Big|_{in,out} = \ln \left| \frac{R' + LP_L}{R' - LP_L} \right|_{in,out}, \quad (3.42)$$

and C^s is the constraint (3.40). We next express the constraint (3.40) in terms of the shell canonical variables m and P_R :

$$C^s = \sqrt{1 - 2m + |\Lambda|R^2} \cosh P_{Rout} - \cosh P_{Rin} + M. \quad (3.43)$$

From the resulting action, we find equations of motion for R

$$\frac{\dot{R}}{N^s} = \sqrt{1 - 2m + |\Lambda|R^2} \sinh P_{Rout} = \sinh P_{Rin}, \quad (3.44)$$

which leads to another constraint

$$\sqrt{1 - 2m + |\Lambda|R^2} \sinh P_{Rout} - \sinh P_{Rin} = 0. \quad (3.45)$$

Unlike the 3+1 dimensional situation, the constraints (3.43) and (3.45) are now first class. Substituting (3.44) into (3.43) we recover the Israel equation for the shell:

$$\sqrt{1 + |\Lambda|R^2 + \frac{\dot{R}^2}{(N^s)^2}} + \sqrt{1 - 2m + |\Lambda|R^2 + \frac{\dot{R}^2}{(N^s)^2}} - M = 0. \quad (3.46)$$

Finally, squaring the two constraints (3.43) and (3.45) and adding them we find the single Hamiltonian constraint describing the dynamics of the shell:

$$1 + 1 - 2m + |\Lambda|R^2 - 2\sqrt{1 - 2m + |\Lambda|R^2} \cosh[P_R] - M^2 = 0. \quad (3.47)$$

This is the constraint to be used in quantum theory. We note that many of the above equations contain square roots in them which are not single-valued functions. Different choices of the signs in front of square roots correspond to different sectors of the phase space of the model, which are pictured as different regions on Penrose diagrams. The same m corresponds to two different points in momentum space. Moreover, the Killing time \hat{T} and the radial momentum $[P_R]$ diverge at the gravitational collapse point (horizon), where $2m = 1$. We must note that in (2+1)-dimensional gravity with a zero cosmological constant, there is no horizon in the usual sense of being located somewhere in space. The entire space is outside the “horizon” for $2m < 0$ and inside the “horizon” for $2m > 1$. The horizon is therefore located not in the coordinate space but in the phase space at $2m = 1$. For $2m > 1$, equation (3.47) does not have solutions in real variables. In other words, the theory is formulated in variables that do not cover the phase space globally.

One way to circumvent the problem is to introduce a complex phase space and to assemble different patches into a Riemann surface [185; 186]. However, there is still a possibility that there exists another set of real phase space variables that would cover it globally. This possibility is studied in the next section.

3.3 First-order formalism and Anti-de Sitter momentum space

The global parameterization of the phase space of (2+1)-dimensional gravity coupled to point particles is studied in [110; 112; 187]. We generalize these results to a spherically symmetric

shell. Similar results were found for a thin shell coupled to (2+1)-dimensional gravity as a limit of a many-particle solution [188; 189] and were based on cutting and gluing manifolds. Our focus is on preparing the model for quantization by obtaining a reduced canonical action. The method that we use is based on group theory.

3.3.1 Action principle and phase space reduction

The basic variables are the triad $e_\mu = e_\mu^a \gamma_a$ and the connection $\omega_\mu^{ab} \gamma_a \gamma_b$, where γ^a are generators of $sl(2)$ algebra. The action has the form

$$I = \int_{\mathcal{M}} d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} Tr(e_\mu R_{\nu\rho}) + S_{shell}, \quad (3.48)$$

where $R_{\nu\rho}$ is the curvature of ω_ρ . The shell is discretized (Consisting of N particles labelled by index i)

$$I_{shell} = \sum_i^N \int_{l_i} Tr(K_i e_\mu) dx^\mu, \quad (3.49)$$

where l_i is the i th particle worldline and $K_i = m_i \gamma_0$ is a fixed element of the $sl(2)$ algebra. The condition of spherical symmetry will be imposed later. Gravity action is invariant with respect to gauge transformations

$$\omega_\mu \rightarrow g^{-1}(\partial_\mu + \omega_\mu) g, \quad e_\mu \rightarrow g^{-1}(e_\mu + \partial_\mu \xi) g, \quad (3.50)$$

where g is an $SL(2)$ group element, and ξ is an $sl(2)$ algebra element. The shell action is not invariant. The i th particle term transforms as

$$\int_{l_i} Tr(K_i e_\mu) dx^\mu \rightarrow \int_{l_i} Tr(\tilde{K}_i e_\mu) dx^\mu + \int_{l_i} Tr(\tilde{K}_i \dot{\xi}) d\tau, \quad (3.51)$$

where $\tilde{K}_i = g K_i g^{-1}$, and τ is a parameter along the particle worldline and dot is the derivative with respect to it. In the last term on the right-hand side of (3.51), we can recognize the standard particle action as it has the form of $\int p_a \dot{x}^a$, where $p_a = Tr(\gamma_a \tilde{K}_i)$, $x^a = Tr(\gamma^a \xi)$, and the definition of $\tilde{K}_i p^a$ satisfies the constraint $p^a p_a = m^2$. Thus the particle's degrees of freedom are represented as gauge degrees of freedom evaluated at the location of the particles.

As before, to obtain a reduced action for this model we have to solve the constraints and plug the solution back into the initial action. We choose a slicing so that particle worldlines move along the time coordinate and obtain the constraints by varying action (3.48) with respect to ω_0

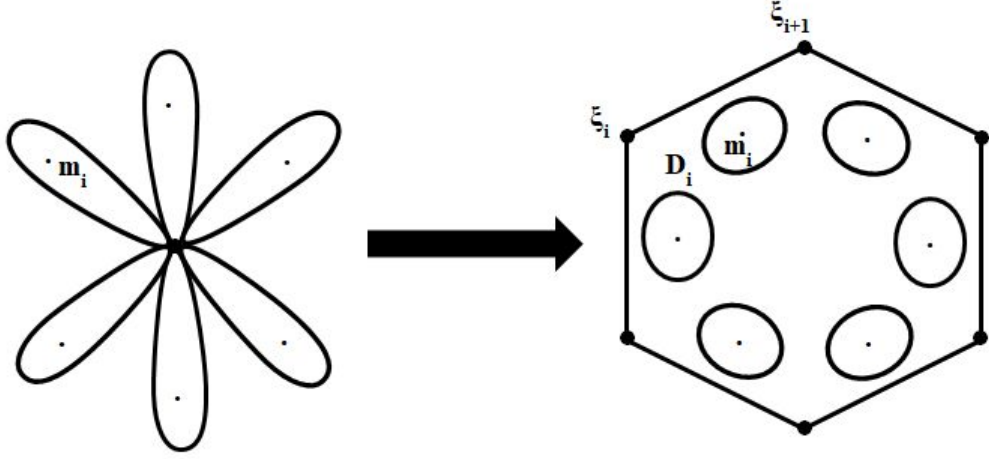


Figure 3.1 — Dividing space into discs and a polygon.

and e_0 :

$$\epsilon^{0\mu\nu} \nabla_\mu e_\nu = 0, \quad \epsilon^{0\mu\nu} R_{\mu\nu} = \sum_i^N \tilde{K}_i \delta^2(x, x_i), \quad (3.52)$$

where x_i is the location of the i th particle. The first constraint (3.52) generates the first of the transformations (3.50) and the second generates the second.

By using transformations (3.50), we can put simultaneously one component of ω and one component of e to zero. This automatically linearizes the constraints (3.52). But we cannot choose such a gauge globally, because the model has a non-trivial moduli space, for example containing the gauge parameter evaluated at the location of one particle with respect to another. Following [190; 191] we divide the spacial slice into regions in each of which the above gauge choice could be made. Each such region should contain no more than one particle. We draw a circle around each particle such that the circles are connected to a common origin, but have no common boundaries, as shown in figure 3.1. By making cuts along the circles the manifold is divided into N discs, each containing a particle, and a polygon containing no particles but connected to infinity.

For the discs, it is convenient to write down the solution in polar coordinates with the origin at the location of the particles. We choose the gauge in which the radial components of e and ω equal zero, solve the constraints, and put the solution back into an arbitrary gauge:

$$\omega_{r,i} = g_i^{-1} \partial_r g_i, \quad \omega_{\phi,i} = g_i^{-1} \nabla_\phi g_i, \quad (3.53)$$

$$e_{r,i} = g_i^{-1} \partial_r \xi_i g_i, \quad e_{\phi,i} = g_i^{-1} \nabla_\phi \xi_i g_i, \quad (3.54)$$

where $\nabla_\phi \xi_i = \partial_\phi \xi_i + [\xi_i, K_i]$. And similar for polygon, for which the gauge parameters will be denoted h and ζ . Now these solutions have to be put back into the kinetic term of the action

which for the i th disc has the form

$$I_{D_i} = \int_{D_i} d^3x \epsilon^{0\mu\nu} \text{Tr}(e_\mu \dot{\omega}_\nu) + \int_{l_i} \text{Tr}(\tilde{K}_i \dot{\xi}_i) d\tau. \quad (3.55)$$

By using the identity $\dot{g}_i^{-1} \nabla_\mu g_i = g_i^{-1} \nabla_\mu (\dot{g}_i g_i^{-1}) g_i$, (notice that K_i does not depend on time, so ∇_ϕ commutes with time derivative). We find that in the first term of (3.55), there is a δ -functional contribution which cancels the second term, plus another term which is a total derivative. Hence, the action for the disk collapses to its boundary:

$$I_{D_i} = \int_{\partial D_i} d^2x \text{Tr}(\nabla_\phi \xi_i \dot{g}_i g_i^{-1}). \quad (3.56)$$

Similarly for polygon, whose boundary consists of N edges E_i . The resulting action is a sum of contributions from every edge:

$$I_P = \sum_i^N \int_{E_i} d^2x \text{Tr}(\partial_\phi \zeta \dot{h}_i h_i^{-1}). \quad (3.57)$$

The next step is to assemble all the above pieces of the action and apply the condition of continuity of metric and connection across the boundary between discs and polygon. First, we convert the covariant derivative in (3.53) and (3.54) into ordinary derivative by a gauge transformation

$$\tilde{g}_i = \exp(K\phi) g_i, \quad \tilde{\xi}_i = \exp(K\phi) \xi_i \exp(-K\phi). \quad (3.58)$$

This condition violates the periodicity, so the boundary of the disk is no longer a circle but an interval. Disc action (3.56) becomes

$$I_{D_i} = \int_{\partial D_i} d^2x \text{Tr}(\partial_\phi \tilde{\xi}_i \dot{\tilde{g}}_i \tilde{g}_i^{-1}), \quad (3.59)$$

and continuity conditions for metric and connection (3.53) and (3.54) take a simple form:

$$\tilde{g}_i = C_i h \Big|_{E_i}, \quad \tilde{\xi}_i = C_i \left(\zeta \Big|_{E_i} + \chi_i \right) C_i^{-1}, \quad (3.60)$$

where C_i and χ_i are functions only of time. In the subsequent, we will put $\chi_i = 0$, which is possible if the positions of different particles could be related by pure rotation with no translations. This is an implementation of spherical symmetry. Substituting this into equations (3.57) and (3.59), and combining them one obtains

$$I_{full} = I_P + \sum_i^N I_{D_i} = \sum_i^N \int_{E_i} \text{Tr}(\partial_\phi \zeta C_i^{-1} \dot{C}_i) = - \sum_i^N \int_{\partial D_i} \text{Tr}(\partial_\phi \tilde{\xi}_i \dot{C}_i C_i^{-1}). \quad (3.61)$$

The integrands are total derivatives, so the result contains contributions only from the vertices of the polygon or endpoints of discs boundaries.

$$I_{full} = \sum_i^N \int_R Tr((\zeta_{i+1} - \zeta_i) C_i^{-1} \dot{C}_i) = - \sum_i^N \int_R Tr((\tilde{\xi}_i(2\pi) - \tilde{\xi}_i(0)) \dot{C}_i C_i^{-1}), \quad (3.62)$$

where ζ_i is the value of ζ at the i -th vertex of the polygon. Introduce new variables

$$u_i = C_i^{-1} \exp(2\pi K) C_i, \quad \text{and} \quad \bar{\xi}_i = C_i^{-1} \tilde{\xi}_i(0) C_i. \quad (3.63)$$

Then taking into account that

$$\tilde{\xi}_i(2\pi) = \exp(2\pi K) \tilde{\xi}_i(0) \exp(-2\pi K), \quad (3.64)$$

and

$$u_i^{-1} \dot{u}_i = C_i^{-1} \dot{C}_i - C_i^{-1} \exp(-2\pi K) \dot{C}_i C_i^{-1} \exp(2\pi K) C_i. \quad (3.65)$$

We can rewrite the second equation in (3.62) as

$$I_{full} = \sum_i^N \int_R Tr(\bar{\xi}_i u_i^{-1} \dot{u}_i). \quad (3.66)$$

To relate $\bar{\xi}_i$'s for different i 's, we use the second of the overlap conditions (3.60) which in particular implies that

$$\tilde{\xi}_i(0) = C_i \zeta_i C_i^{-1}, \quad \tilde{\xi}_i(2\pi) = \exp(2\pi K) \tilde{\xi}_i(0) \exp(-2\pi K) = C_i \zeta_{i+1} C_i^{-1}, \quad (3.67)$$

from which using the definition (3.63) one can derive

$$\bar{\xi}_{i+1} = u_i \bar{\xi}_i u_i^{-1}, \quad (3.68)$$

and

$$\bar{\xi}_i = \left(\prod_{j=0}^{i-1} u_j \right) \bar{\xi}_0 \left(\prod_{j=0}^{i-1} u_j \right)^{-1}, \quad (3.69)$$

where the factors in the product are ordered from right to left. Now introduce the holonomy around the full shell, which is the product of holonomies around every particle

$$U = \prod_{j=0}^N u_j. \quad (3.70)$$

Using an obvious identity

$$U^{-1}\dot{U} = \sum_{i=0}^N \left(\prod_{j=0}^{i-1} u_j \right)^{-1} u_i^{-1} \dot{u}_i \left(\prod_{j=0}^{i-1} u_j \right), \quad (3.71)$$

and taking into account the relation (3.69), we can rewrite the kinetic term of the action (3.66) in a simple form

$$I_{full} = \int_R Tr(\bar{\xi}_0 U^{-1}\dot{U}). \quad (3.72)$$

The action for many-particle is thus collapsed to a term depending on a single variable. This became possible only because we put $\chi_i = 0$ in (3.60), making use of spherical symmetry.

3.3.2 Constraints

To get the complete action for the shell one has to find the constraints satisfied by the variables entering (3.72), and add them to the kinetic term. In the definition of U

$$U = \prod_{i=0}^N C_i^{-1} \exp(2\pi K_i) C_i. \quad (3.73)$$

We choose a spherically symmetric ansatz for C_i

$$C_i = \exp(\bar{\chi} \gamma_1) \exp\left(\frac{2\pi i \gamma_0}{N}\right), \quad (3.74)$$

where i (not to confuse with the imaginary unit) plays the role of an angular variable, and $\bar{\chi}$ is the boost parameter independent of i . For $K_i = M_i \gamma_0$ spherical symmetry means that $M_i = M/N$, where M is the overall bare mass of the shell. Substituting this into (3.73), we obtain

$$\begin{aligned} U &= \prod_{i=0}^N \exp\left(-\frac{2\pi i \gamma_0}{N}\right) \exp\left(\frac{2\pi M}{N}(\gamma_0 \cosh \bar{\chi} + \gamma_2 \sinh \bar{\chi})\right) \exp\left(\frac{2\pi i \gamma_0}{N}\right), \\ &= \left(\exp\left(\frac{2\pi M}{N}(\gamma_0 \cosh \bar{\chi} + \gamma_2 \sinh \bar{\chi})\right) \exp\left(\frac{2\pi i \gamma_0}{N}\right) \right)^N. \end{aligned} \quad (3.75)$$

The product of two exponents in the last equation could be calculated by Campbell–Hausdorff formula $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B + [A, B]/2 + \dots)$. But the terms with commutators will be of the order of $1/N^2$ and higher and are therefore negligible as $N \rightarrow \infty$. Finally, we obtain

$$U = \exp\left[2\pi\left((1 - M \cosh \bar{\chi})\gamma_0 + M \sinh \bar{\chi} \gamma_2\right)\right]. \quad (3.76)$$

The conjugacy class of the above holonomy is fixed by the boundary conditions at infinity. It can be evaluated as a Wilson loop of the angular component of the connection, which can be expressed in terms of the ADM variables as

$$\omega_\phi = R'/L \gamma_0 + P_L \gamma_1, \quad (3.77)$$

and

$$Tr(U) = Tr \left(P \exp \left(\int d\phi \omega_\phi \right) \right) = \cos \left(2\pi \sqrt{(R'/L)^2 - P_L^2} \right) = \cos \left(2\pi \sqrt{1 - 2m} \right), \quad (3.78)$$

where m is the ADM mass. On the other hand from (3.76), it follows that

$$Tr(U) = \cos \left(2\pi \sqrt{(1 - M \cosh \bar{\chi})^2 - (M \sinh \bar{\chi})^2} \right). \quad (3.79)$$

Equating two last expressions for $Tr(U)$ and solving for M one finds

$$M = \sqrt{1 + \sinh^2 \bar{\chi}} + \sqrt{1 - 2m + \sinh^2 \bar{\chi}}. \quad (3.80)$$

This is the Israel equation (3.46) from the previous section with $\dot{R}/N^c = \sinh \bar{\chi}$. Now we can write down the relations between canonical momenta used here and canonical momenta from the previous section:

$$\sinh \chi = \sqrt{1 - 2m} \sinh P_{Rout} = \sinh P_{Rin}, \quad (3.81)$$

and

$$Tr(U) = \cos \left(2\pi \sqrt{1 - 2m} \right). \quad (3.82)$$

One can see that $\sinh \chi$ is always real even when $\sqrt{1 - 2m}$ and P_{Rout} are complex. U is also always real and elliptic when $1 - 2m > 0$ and hyperbolic when $1 - 2m < 0$. In elliptic case, $U = g^{-1} \exp(\gamma_0 \phi) g$, when $\sqrt{1 - 2m} > 0$ then $0 < \phi < \pi$, and when $\sqrt{1 - 2m} < 0$ then $\pi < \phi < 2\pi$. And similar for the hyperbolic case: $U = g^{-1} \exp(\gamma_1 \chi) g$, when $i\sqrt{1 - 2m} > 0$ then $\chi > 0$, and when $i\sqrt{1 - 2m} < 0$ then $\chi < 0$. In other words, U provides a real global parametrization of the momentum space of the model. This momentum space is shown in figure 3.2a, the four described above regions labelled as I, III, II, and VI respectively. These regions can also be found on the Penrose diagram 3.2b, where they are labelled the same way.

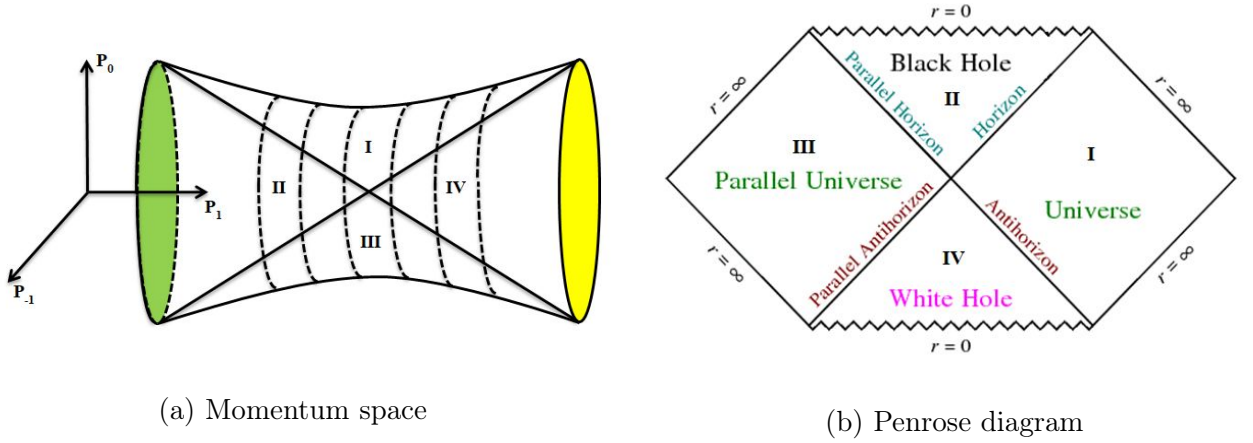


Figure 3.2 — Different regions characterizing the real global parameterization of the momentum space.

3.3.3 Poisson brackets

By a change of variables, the kinetic term of the action (3.72) can be put in the standard canonical form

$$I_{full} = - \int_R p_a \dot{q}^a, \quad (3.83)$$

where $a = 0, 1$ labels temporal and radial components of a coordinate (momentum). The explicit form of this transformation is as follows:

$$p_{-1} = Tr(U), \quad p_a = Tr(\gamma_a U), \quad q^a = (p_{-1} \eta^{ab} - p_{-1}^{-1} p^a p^b) \xi_b. \quad (3.84)$$

They satisfy the standard commutation relations

$$\{p_a, p^b\} = 0, \quad \{q_a, q^b\} = 0, \quad \{q_a, p^b\} = \delta_a^b. \quad (3.85)$$

It is, however, not these variables that will subsequently be used in quantization. The reason is that because U is an $SL(2)$ group element the momenta satisfy the relation

$$p_{-1}^2 - p_a p^a = 1. \quad (3.86)$$

This means that the momentum space of the model is a one sheet hyperboloid or 2-dimensional anti-De Sitter space, p_{-1} and p_a being coordinates of 3-dimensional space in which the AdS is embedded. Momenta p_a do not form a global chart on AdS_2 . The global chart on AdS_2 is formed by the Euler angles which parameterize the group element U as follows:

$$U = \exp\left(\frac{\rho}{2}\gamma_0\right) \exp(\chi\gamma_1) \exp\left(\frac{\rho}{2}\gamma_0\right). \quad (3.87)$$

These are related to the p as

$$p_{-1} = \cos \rho \cosh \chi, \quad p_0 = \sin \rho \cosh \chi, \quad p_1 = \sinh \chi. \quad (3.88)$$

It is clear that the Euler angles together with coordinates canonically conjugate to them cannot form the standard canonical set of variables. This is because the Euler angles parameterize a curved space that cannot be mapped onto a flat space, and translations in such a space do not commute. In fact, the coordinates conjugate to the Euler angles are the original translation parameters ξ^a from (3.72). To show this we can calculate the Poisson brackets for them using the inverse of (3.84):

$$\{\xi^a, p_b\} = p_{-1}^{-1}(\delta_b^a + p^a p_b), \quad \{\xi^a, p_{-1}^{-1}\} = p^a, \quad \{\xi^a, \xi^b\} = p_{-1}(\xi^a p^b - \xi^b p^a). \quad (3.89)$$

This implies

$$\{U, \xi^a\} = U \gamma^a. \quad (3.90)$$

and expected noncommutativity of the coordinates.

3.4 Quantization

We briefly describe the quantization of the model using momentum (Euler angle) representation. The exposition will basically follow [187], but take into account that there is one less degree of freedom due to spherical symmetry and that the constraint describing dynamics is now different.

3.4.1 Quantum kinematics

We define the kinematical states of the model as functions of U given by (3.87) as

$$\Psi(U) = \Psi(\rho, \chi), \quad (3.91)$$

single-valued functions on the entire momentum space. From the requirement of Ψ being single-valued, it immediately follows the periodicity property is

$$\Psi(\rho + 2\pi, \chi) = \Psi(\rho, \chi), \quad (3.92)$$

which will have an important consequence on the spectra of coordinates. Next, for defining the scalar product, we need a Lorenz-invariant measure on our momentum space. It can be inferred from the Haar measure on $SL(2)$:

$$dU = \frac{1}{\pi} \cosh(2\chi) d\rho d\chi, \quad (3.93)$$

and the scalar product is thus:

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \frac{1}{\pi} \int \cosh(2\chi) d\rho d\chi \Phi(\rho, \chi)^* \Psi(\rho, \chi). \quad (3.94)$$

It is easy to calculate the spectrum of a time coordinate, ξ^0 , which is canonically conjugate to ρ , and the corresponding operator is

$$\hat{T}|\rho, \chi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial \rho} |\rho, \chi\rangle, \quad (3.95)$$

its eigenstates are

$$|t; \psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int \cosh(2\chi) d\rho d\chi \exp(it\rho) \psi(\chi) |\rho, \chi\rangle, \quad (3.96)$$

where t is an integer. The time operator has a discrete spectrum:

$$\hat{T}|t; \psi\rangle = t\hbar|t; \psi\rangle. \quad (3.97)$$

Notice that it is quantized in units of the Planck length, as the above equation also contains the Newton constant, which is put to 1. A more interesting observable is the perimeter, $R^2 = 2\pi \xi_a \xi^a$, which is a Lorenz-invariant quantity defining the size of the shell. Because ξ_a in (3.90) is defined as the left-invariant derivative on the group, its square is the Beltrami–Laplace operator on our momentum space:

$$\hat{R}^2|t; \psi\rangle = 2\pi|t; \Delta\psi\rangle, \quad (3.98)$$

where

$$\Delta = \hbar^2 \left(\frac{1}{\cosh(2\chi)} \frac{\partial}{\partial \chi} \cosh(2\chi) \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{t^2}{\cosh^2(2\chi)} \right). \quad (3.99)$$

This operator was shown in [187] to have two series of eigenvalues. One is continuous, but separated from zero, corresponds to positive, i.e. spacelike, R^2

$$\hat{R}^2|t, \lambda\rangle = 2\pi(\lambda^2 + 1)\hbar^2|t, \lambda\rangle, \quad (3.100)$$

where λ is a real number. The other is discrete, but containing zero, corresponds to negative, i.e. timelike, R^2

$$\hat{R}^2|t,l\rangle = -2\pi l(l+2)\hbar^2|t,l\rangle, \quad (3.101)$$

where l is a non-negative integer satisfying the condition $l \leq t$. Physically, the shell perimeter would be spacelike outside the horizon and timelike inside. In the (2+1)-dimensional gravity with no cosmological constant considered here, there is no event horizon. We can therefore say that only the continuous series is relevant in our model. Thinking about the entire universe being inside an event horizon is not compatible with any sensible boundary conditions at infinity. On the other hand, we could consider a more complicated model with several concentric shells that admit spacetimes with no boundary. In such a situation, a shell perimeter could be timelike, and the discrete series is relevant. Nevertheless, in both cases, the result for the spectrum of R^2 provides a regularization near $R = 0$ singularity.

3.4.2 Physical states

Now we try to apply the Hamiltonian constraint to obtain physical states. In contrast to the particle case, the group element representing the momentum (3.76) has a complicated dependence on the external parameter of the model, the bare mass M . Because of these complications, we will use some implicit expressions in this section. The analog of the Hamiltonian constraint for a particle is (3.77), which in terms of the Euler angles reads

$$\cos \rho \cosh \chi = \cos \left(2\pi \sqrt{1 + M^2 - 2M \cosh \bar{\chi}} \right) \equiv p_{-1}(\bar{\chi}). \quad (3.102)$$

It contains an extra parameter $\bar{\chi}$, in which the wavefunction of the kinematical Hilbert space is independent. To fix it, one has to use another equation from the set (3.77), for example,

$$\sin \rho \cosh \chi = \frac{(1 - M) \cosh \bar{\chi} \sin \left(2\pi \sqrt{1 + M^2 - 2M \cosh \bar{\chi}} \right)}{\sqrt{1 + M^2 - 2M \cosh \bar{\chi}}} \equiv p_0(\bar{\chi}), \quad (3.103)$$

or

$$\sinh \chi = \frac{M \sinh \bar{\chi} \sin \left(2\pi \sqrt{1 + M^2 - 2M \cosh \bar{\chi}} \right)}{\sqrt{1 + M^2 - 2M \cosh \bar{\chi}}} \equiv p_1(\bar{\chi}), \quad (3.104)$$

with

$$p_{-1}(\bar{\chi})^2 + p_0(\bar{\chi})^2 - p_1(\bar{\chi})^2 = 1. \quad (3.105)$$

These constraints canonically commute with each other, i.e. they are first class. So, we can start with kinematical Hilbert space as space of functions of three parameters $\Psi(\rho, \chi, \bar{\chi})$ and then impose two of the three constraints listed above. The solution can be written as

$$\Psi(\rho, \chi, \bar{\chi}) = \delta\left(\cos \rho \cosh \chi - p_{-1}(\bar{\chi})\right) \delta\left(\sin \rho \cosh \chi - p_0(\bar{\chi})\right) \Psi(\chi), \quad (3.106)$$

where $\Psi(\chi)$ is an arbitrary function. As usual, it is not normalized with respect to the kinematical Hilbert space. The scalar product on the physical Hilbert space can be defined in terms of functions $\Psi(\chi)$ entering (3.106) as

$$\langle \Psi, \Phi \rangle_{phy} = \int \frac{\cosh(2\chi)}{\pi} d\chi d\rho d(\cosh \bar{\chi}) \delta\left(\cos \rho \cosh \chi - p_{-1}(\bar{\chi})\right) \delta\left(\sin \rho \cosh \chi - p_0(\bar{\chi})\right) \Psi(\chi)^* \Phi(\chi). \quad (3.107)$$

It is easy to show that in the limit $M \ll 1$ and $\chi \ll 1$ it is reduced to the standard scalar product for the states of relativistic particles in 1+1 dimensions,

$$\langle \Psi, \Phi \rangle_{phy} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\chi}{\sqrt{\chi^2 + M^2}} \Psi(\chi)^* \Phi(\chi), \quad (3.108)$$

as expected. In particular, it hence follows that in contrast to the (3+1)-dimensional situation, the spectrum of the energy-momentum of the model is fully continuous. This is unsurprising: in (2+1)-dimensional gravity, there is no Newtonian potential and therefore no potential well to hold the shell in a bounded region.

3.5 Quantum Dynamics

The group-valued momentum variable U can be expressed in terms of the bare mass M and radial boost parameter $\bar{\chi}$ by multiplying holonomies of all the particles composing the shell u_i

$$U = \prod u_i = \exp \left[2\pi \left((1 - M \cosh \bar{\chi}) \gamma_0 + M \sinh \bar{\chi} \gamma_2 \right) \right]. \quad (3.109)$$

This matrix relation contains two independent equations and a free parameter, $\bar{\chi}$. By excluding this parameter one can obtain a single equation which is the Hamiltonian constraint. Because of complications, the form of the constraint is derived approximately by interpolation between $\bar{\chi} \rightarrow 0$ and $\bar{\chi} \rightarrow \infty$ limits

$$Tr(U) = \cosh \chi \cos \rho \approx \cos \left[2\pi \sqrt{1 + M^2 - M \sqrt{1 + \frac{(1 - M)^2}{M^2 \sin^2(2\pi(1 - M))} \chi^2}} \right]. \quad (3.110)$$

This expression is valid only for finite M . Its quantum version is an analog of the Klein-Gordon

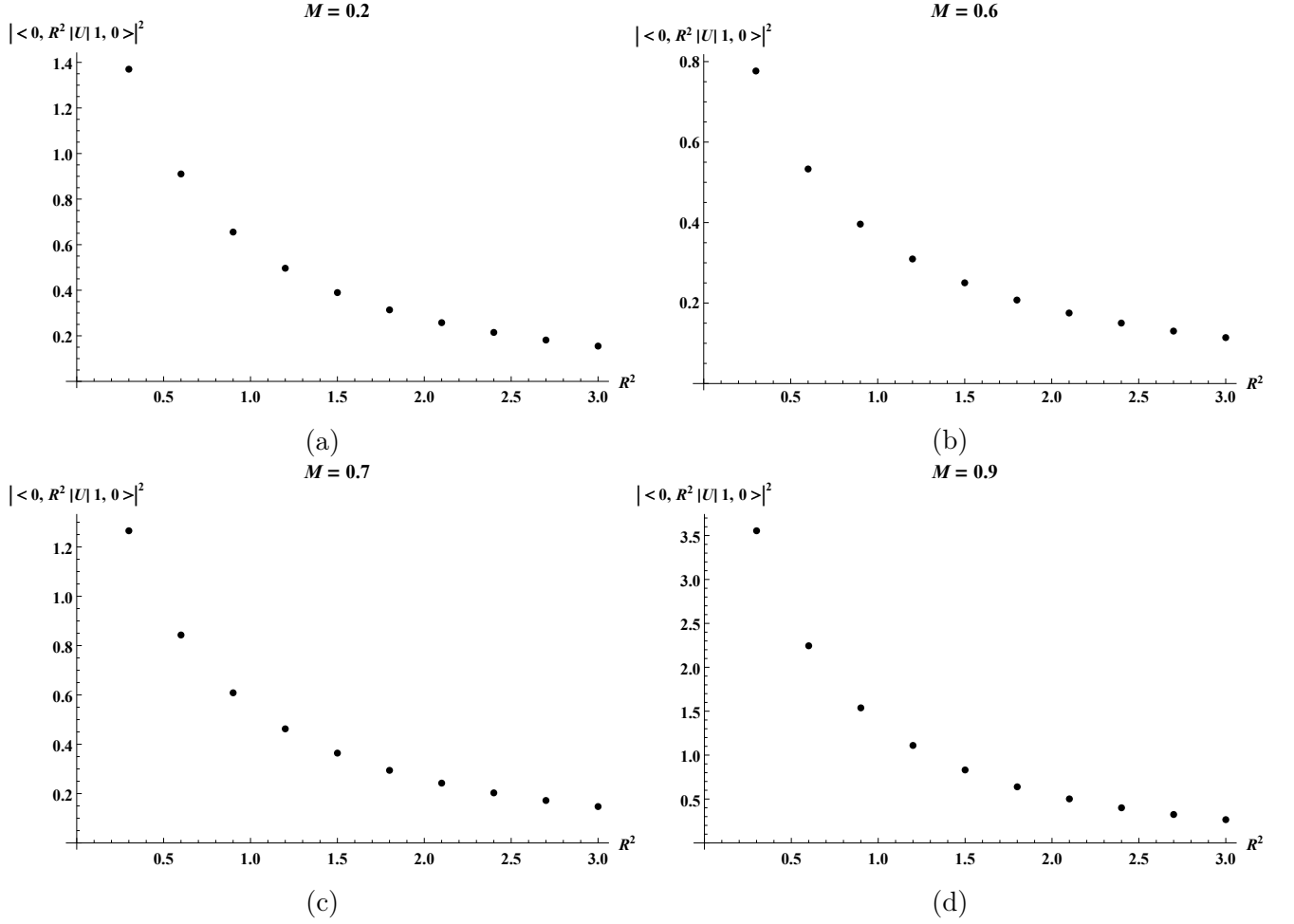


Figure 3.3 — Absolute value of matrix element $\langle 1,0|\hat{U}|0,R^2\rangle$ describing gravitational collapse rate.

equation for relativistic particles. In a skew representation (coordinate in time variable and momentum in a radial variable) it has the form:

$$\Psi(t+1, \chi) + \Psi(t-1, \chi) = H(\chi) \Psi(t, \chi), \quad (3.111)$$

where

$$H(\chi) = \frac{\cos \left(2\pi \sqrt{1 + M^2} - M \sqrt{1 + \frac{(1-M)^2}{M^2 \sin^2(2\pi(1-M))} \chi^2} \right)}{\cosh(\chi)}. \quad (3.112)$$

Due to periodicity in the energy variable, this is not a differential equation, but a finite difference equation, which is in agreement with the discreteness of time found in the previous section. By separation positive and negative frequency parts this equation can be put in Schrodinger-like form:

$$\Psi(t \pm 1, \chi) \equiv \hat{U}^{\pm 1} \Psi(t, \chi) = \left(H(\chi) \pm \sqrt{2H^2(\chi) - 2} \right) \Psi(t, \chi), \quad (3.113)$$

where \hat{U} is the evolution operator for one step in time. The gravitational collapse rate is described by a matrix element of the evolution operator \hat{U} between eigenstates of the shell radius R for

positive (spacelike) R^2 and for zero R^2 , $\langle t + 1, 0 | \hat{U} | t, R^2 \rangle$. In figure 3.3, we show the result of numerical calculation of the absolute value of matrix element $\langle 1, 0 | \hat{U} | 0, R^2 \rangle$ for different R^2 . One can see that this value is everywhere finite, including minimal possible positive eigenvalue of the shell radius, $R^2 = 1/4$, which can be interpreted as the resolution of the central singularity.

3.6 Discussion

The full quantum theory of the (2+1)-dimensional gravity coupled to the thin shell is investigated. The spectrum of the shell perimeter in the case of a timelike motion of the shell does not reach zero. This means that the naked singularity existing in the classical theory does not arise in the quantum theory. Regarding the singularity beyond an event horizon, which is classically attained by the spacelike motion of the shell, it belongs to a discrete spectrum of the perimeter and is therefore also regularized.

The most interesting question is whether our results above can be generalized to (3+1)-dimensional gravity. There are some results for the quantum kinematics of a Schwarzschild black hole in the frame of a test particle [192; 193], where it was shown that it also has the properties of noncommutativity and discreteness of the coordinates. But as it turns out, generalizing these results to a spherical shell dynamics as was done in Section 3.3 above is impossible, because the many-body problem in (3+1)-dimensional gravity is unsolvable.

On the other hand, almost all the works on a spherical shell mentioned in the introduction were considered in the (3+1)-dimensional case. Even the expression for the Hamiltonian constraint was found (although not in global coordinates). The map between the coordinates used in the phase space and the global coordinates should be analogous to the map found at the end of Section 3.3.3. The only difference is the presence of a Newtonian potential. Based on this, we can conjecture the form of the Hamiltonian constraint in global coordinates.

Chapter 4. Quantum Analysis of BTZ Black Hole Formation Due to the Collapse of a Dust Shell

We perform the Hamiltonian reduction of a model in which 2+1 dimensional gravity with a negative cosmological constant is coupled to a cylindrically symmetric dust shell. The resulting action contains only a finite number of degrees of freedom. The phase space consists of two copies of AdS_2 – both coordinate and momentum space are curved. Different regions in the Penrose diagram can be identified with different patches of AdS_2 momentum space. Quantization in the momentum representation becomes particularly simple in the vicinity of the horizon, where one can neglect momentum noncommutativity. In this region, we calculate the spectrum of the shell radius. This spectrum turns out to be continuous outside the horizon and becomes discrete inside the horizon with eigenvalue spacing proportional to the square root of the black hole mass. We also calculate numerically quantum transition amplitudes between different regions of the Penrose diagram in the vicinity of the horizon. This calculation shows a possibility of quantum tunneling of the shell into classically forbidden regions of the Penrose diagram, although with an exponentially damped rate away from the horizon.

4.1 Preliminary

General Relativity encounters problems at short distances both at the classical and quantum levels. Classical gravity develops singularities, while there are ultraviolet divergences in quantum gravity that cannot be removed by renormalization.

On the other hand, as it was first argued by Bronstein [170] there is the smallest possible distance in quantum gravity, the Planck length, beyond which measurements are not possible. The argument relies on non-perturbative effects such as black hole formation and could be described only within a non-perturbative quantum theory of gravity absent to the date.

In the absence of a full theory, non-perturbative quantization can be performed for some symmetry-reduced models for General Relativity in which all but a few degrees of freedom are removed [194]. Within such models, black hole formation could be described, which is essential for Bronstein's argument.

The simplest model of this kind is gravity coupled to a spherically symmetric thin dust shell. This model was extensively studied both on classical [27; 176; 180] and quantum [152; 179; 185; 186] level. In some of this work, a resolution of singularity was obtained [152; 185]. However, the quantum theories obtained in different work are not equivalent. This may be a result of quantization ambiguity as well as the non-trivial structure of the phase space of the model. The

definition of a wavefunction on different sectors of the configuration space of the model can lead to inequivalent theories.

In quantum theory, it is common that the definition of the wavefunction has to be extended to all possible configurations, whether they are classically reachable or not. In a particular way, it was realized in [168; 185] where the phase space was complexified and its different sectors were assembled into a Riemann surface where the branching point represented the horizon.

On the other hand, there is an example where the phase space of a similar model was given a real global chart. This model is gravity in 2+1 spacetime dimensions coupled to a point particle [110; 112; 187]. The momentum of the particle turns out to be an element of the Lorentz group, and the Hamiltonian constraint fixes the conjugacy class of this group element.

An attempt to relate the two above approaches was made in [23; 24] for a zero cosmological constant. The momenta turned out to form AdS_2 space, which results, in particular, in the noncommutativity of the coordinates. The Hamiltonian constraint was found to be different from that of a particle, accounting for the gravitational field generated by inter-shell movement energy. The relation between group-valued momenta and canonical momenta analogous to that of [180; 185] was found. Transition amplitudes between zero and positive shell radii were found to show no divergences, which could be interpreted as singularity resolution in quantum theory.

However, the above model is substantially different from 3+1 dimensional gravity as it has naked singularity solutions instead of black hole solutions. The closest analog to the 3+1 dimensional model is 2+1 dimensional gravity with a negative cosmological constant which has the well-known BTZ black hole solutions [26].

BTZ black holes have been extensively studied both semiclassically [195; 196], where the back reaction of a quantum field on spacetime geometry was taken into account, and via holographic approach [197; 198], using boundary conformal field theory. Here we will consider a simpler model with axial symmetry because this model could be generalized to higher spacetime dimensions.

We partially extend the results of [23; 24] to the case of negative cosmological constant. We focus on studying quantum dynamics in the near-horizon area, where quantization could be performed by traditional methods due to momentum commutativity. The question of interest to be asked in this regime is the possibility of quantum tunneling into classically inaccessible sectors of the Penrose diagram.

Chapter 4 is organized as follows. In section 4.3, the results of [110; 112; 187] are generalized from a point particle to a circular shell, describing the later as an ensemble of circularly arranged point particles by analogy with [23; 24], but now with a negative cosmological constant. As before, the momenta of the shell form AdS_2 space, and coordinates are again noncommutative.

In sections 4.4 and 4.5, we derive the expression for the Hamiltonian constraint of the model in terms of global phase space coordinates. This constraint turns out to be slightly different from that of [23; 24] due to partial compensation of the positive curvature created by the shell by

negative curvature from the cosmological constant term. The relation between momenta from AdS_2 and canonical momenta from [180; 185] is found.

In section 4.6, we consider an approximation when the shell is located close to the horizon. This allows us to quantize the model in momentum representation on AdS_2 . We find that shell coordinates are non-commutative and one of them (time) has a discrete spectrum. The shell radius is found to have a discrete spectrum inside the horizon and a continuous spectrum, but separated from zero, outside the horizon.

In section 4.7, we study the quantum dynamics of the shell. We derive the expression for the evolution operator and calculate numerically some of its matrix elements. These matrix elements describe the transition amplitudes between different sectors of the Penrose diagram. It turns out that there is a possibility of quantum tunneling for the shell into classically not accessible regions. Generalization of some of these results to 3+1 dimensional gravity is also discussed.

4.2 Global parameterization of AdS and BTZ spacetime

Both AdS_3 spacetime and BTZ spacetime can be given a global parameterization by $SO(2,2)$ group elements, g . The metric can be reconstructed from pure gauge $so(2,2)$ connection as

$$A_\mu = g^{-1} \partial_\mu g. \quad (4.1)$$

A connection of $so(2,2)$ is $A_\mu = \Gamma_{AB} A_\mu^{AB}$, where Γ_{AB} are $so(2,2)$ generators, $A, B = 0, 1, 2, 3$ can be decomposed into Lorentz connection $\omega_\mu^{ab} = A_\mu^{ab}$, where $a, b = 0, 1, 2$, and triad $e_\mu^a = \ell A_\mu^{3a}$, where $\ell = 1/\sqrt{\Lambda}$. $SO(2,2)$ generators are Γ^{AB} , Γ^{ab} - Lorentz and Γ^{a3} - translations. Extracting triad from

$$A_\mu = g^{-1} \partial_\mu g, \quad (4.2)$$

where $g \in SO(2,2)$. Line element is defined as

$$ds^2 = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b dx^\mu dx^\nu. \quad (4.3)$$

Alternatively, line element could be obtained from embedding of AdS space into four dimensional flat space with signature $(-, +, +, -)$. Embedding coordinates are defined as $X^A = (gv)^A$, where $v = (0, 0, 0, \ell)$. They satisfy $\eta_{AB} X^A X^B = -\ell^2$, where $\eta_{AB} = \text{diag}(-1, 1, 1, -1)$. Line element is then

$$ds^2 = \eta_{AB} \partial_\mu X^A \partial_\nu X^B dx^\mu dx^\nu. \quad (4.4)$$

Parameterization of spacetime by a group element g is related to the static coordinate system as:

$$g = g_t g_\phi g_R, \quad (4.5)$$

where in the case of AdS_3 spacetime

$$\begin{aligned} g_t &= \cos(t/\ell) I + \sin(t/\ell) \Gamma^{03}, & g_\phi &= \cos(\phi) I + \sin(\phi) \Gamma^{12}, \\ g_R &= \sqrt{1 + R^2/\ell^2} I + (R/\ell) \Gamma^{13}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

and

$$\begin{aligned} X^0 &= \ell \sqrt{1 + R^2/\ell^2} \cosh(t/\ell), & X^1 &= \ell \sqrt{1 + R^2/\ell^2} \sinh(t/\ell), \\ X^2 &= R \sin(\phi), & X^3 &= R \cos(\phi), \end{aligned} \quad (4.7)$$

and the metric is

$$ds^2 = -\left(\frac{R^2}{\ell^2} + 1\right) dt^2 + \left(\frac{R^2}{\ell^2} + 1\right)^{-1} dR^2 + R^2 d\phi^2. \quad (4.8)$$

For BTZ solution outside the horizon ($r > \sqrt{2m-1} \ell$), we have

$$\begin{aligned} g_t &= \cosh(\sqrt{2m-1} t/\ell) I + \sinh(\sqrt{2m-1} t/\ell) \Gamma^{01}, \\ g_\phi &= \cosh(\sqrt{2m-1} \phi) I + \sinh(\sqrt{2m-1} \phi) \Gamma^{32}, \\ g_R &= R/(\sqrt{2m-1} \ell) I + \sqrt{R^2/((2m-1)\ell^2) - 1} \Gamma^{13}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

and

$$\begin{aligned} X^0 &= \ell \sqrt{R^2/((2m-1)\ell^2) - 1} \sinh(\sqrt{2m-1} t/\ell), \\ X^1 &= \ell \sqrt{R^2/((2m-1)\ell^2) - 1} \cosh(\sqrt{2m-1} t/\ell), \\ X^2 &= R/\sqrt{2m-1} \sinh(\sqrt{2m-1} \phi), \\ X^3 &= R/\sqrt{2m-1} \cosh(\sqrt{2m-1} \phi). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Substituting this into (4.3) or (4.4), one obtains

$$ds^2 = -\left(\frac{R^2}{\ell^2} - 2m + 1\right) dt^2 + \left(\frac{R^2}{\ell^2} - 2m + 1\right)^{-1} dR^2 + R^2 d\phi^2, \quad (4.11)$$

which is the familiar expression for BTZ metric in static coordinates. Continuation of the field $g(x) \in SO(2,2)$ inside the horizon, ($R < \sqrt{2m-1} \ell$), takes into account the interchange of radial

and temporal variables:

$$\begin{aligned}
g_t &= \cosh(\sqrt{2m-1}t/\ell) I + \sinh(\sqrt{2m-1}t/\ell) \Gamma^{01}, \\
g_\phi &= \cosh(\sqrt{2m-1}\phi) I + \sinh(\sqrt{2m-1}\phi) \Gamma^{32}, \\
g_R &= R/(\sqrt{2m-1}\ell) I - \sqrt{1 - R^2/((2m-1)\ell^2)} \Gamma^{03},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

and

$$\begin{aligned}
X^0 &= -\ell \sqrt{1 - R^2/((2m-1)\ell^2)} \cosh(\sqrt{2m-1}t/\ell), \\
X^1 &= -\ell \sqrt{1 - R^2/((2m-1)\ell^2)} \sinh(\sqrt{2m-1}t/\ell), \\
X^2 &= R/\sqrt{2m-1} \sinh(\sqrt{2m-1}\phi), \\
X^3 &= R/\sqrt{2m-1} \cosh(\sqrt{2m-1}\phi).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

The group fields (4.9) and (4.12) are continuously (but not smoothly in terms of r and t variables) glued along the horizon. Substituting (4.12) into (4.3) or (4.13) into (4.4) again results in the same BTZ metric (4.8).

As we shall see in the next section, two of the embedding coordinates X^a , $a = 0,1$ from (4.10) and (4.13) will play the role of canonical coordinates of the shell. The shell radius can be expressed in terms of these coordinates as

$$R = \sqrt{(2m-1)(X^a X_a + \ell^2)}. \tag{4.14}$$

4.3 Action principle and symplectic form

The total action consists of gravity action and shell action.

$$I = I_{gr} + I_{shell}. \tag{4.15}$$

Gravity action is the Chern-Simons action for $SO(2,2)$ group. As before $A_\mu = \Gamma_{AB} A_\mu^{AB}$ is $so(2,2)$ connection, and \langle, \rangle is a bilinear form on $so(2,2)$ algebra such that $\langle \Gamma^{AB}, \Gamma^{CD} \rangle = \epsilon^{ABCD}$. Then

$$I_{gr} = \frac{\kappa}{8\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \langle A_\mu, (\partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3} A_\nu A_\rho) \rangle. \tag{4.16}$$

The shell is divided into N particles with label i ,

$$I_{shell} = \sum_i^N \int_{l_i} Tr(K_i A_\mu) dx^\mu, \tag{4.17}$$

where integration is along each particle worldline l_i and $K_i = m_i \Gamma_{03}$ is an element of $so(2,2)$ -algebra. Gravity action is invariant under gauge transformations:

$$A_\mu \rightarrow g^{-1}(\partial_\mu + A_\mu)g, \quad (4.18)$$

where g is an $SO(2,2)$ group element. Unlike gravity action, shell action is variant under gauge transformations. Each particle is transformed under gauge transformations (4.18) as

$$\int_{l_i} Tr(K_i A_\mu) dx^\mu \rightarrow \int_{l_i} Tr(\tilde{K}_i A_\mu) dx^\mu + \int_{l_i} Tr(K_i g^{-1} \dot{g}) d\tau, \quad (4.19)$$

where $\tilde{K}_i = gK_i g^{-1}$, τ is a parameter along the particle worldline and the derivative with respect to it is represented by a dot. The second term on the right-hand side of (4.19) represents the action of a massive spinless particle on AdS space. Thus, the degrees of freedom of the particles are represented by formerly gauge degrees of freedom.

We slice the manifold so that the particle worldlines are in the direction of the time coordinate. Then the variation of the action (4.15) with respect to A_0 results in the following constraint

$$\epsilon^{0\mu\nu} F(A)_{\mu\nu} = \sum_i^N \tilde{K}_i \delta^2(x, x_i), \quad (4.20)$$

where $F(A)_{\mu\nu}$ is the curvature of connection A , and x_i is the location of each particle. We have to choose one component of connection A to be zero to linearize the constraint. Such choice of a gauge cannot be globally made, because the model contains a non-trivial moduli space.

Following [190; 191], the spacial slice is divided into different regions in which such choice of a gauge could be made. Each region is surrounded by a circle containing only one particle. Note that there is no common boundaries between the circles and they are connected to common origins, as shown in figure 3.1. By making cuts along the circles, the manifold is splitted into N discs and a polygon. Each disc contains a particle, while a polygon contains no particles, but connected to infinity.

The solution for the discs is written in polar coordinates. Then, we select the gauge in which the radial component of A has to be zero. Next, we solve the constraints and plug the solution back into the action in an arbitrary gauge:

$$A_{r,i} = g_i^{-1} \partial_r g_i, \quad A_{\phi,i} = g_i^{-1} \nabla_\phi g_i, \quad (4.21)$$

where $\nabla_\phi g_i = \partial_\phi g_i + K_i g_i$. Similarly, for the polygon, in which the gauge parameter will be labeled as h . After solving the constraints all that remains of the action is the kinetic term:

$$I_{D_i} = \int_{D_i} d^3x \epsilon^{0\mu\nu} \langle A_\mu, \dot{A}_\nu \rangle + \int_{l_i} Tr(K_i g_i^{-1} \dot{g}_i) d\tau, \quad (4.22)$$

and similar for the polygon, without a source. However, it is much easier to calculate the symplectic form which is the variation of the kinetic term of the action:

$$\Omega_{D_i} = \int_{D_i} d^2x \epsilon^{0\mu\nu} \langle \delta A_\mu, \wedge \delta A_\nu \rangle + \delta Tr(K_i \delta g_i^{-1} \wedge \delta g_i). \quad (4.23)$$

After plugging in the constraint solution in the form (4.21) and using the identity $\delta(g_i^{-1} \nabla_\mu g_i) = g_i^{-1} \nabla_\mu (\delta g_i g_i^{-1}) g_i$, the symplectic form for the disk reduces to its boundary:

$$\Omega_{D_i} = \int_{\partial D_i} dx \langle \nabla_\phi (\delta g_i g_i^{-1}), \wedge \delta g_i g_i^{-1} \rangle. \quad (4.24)$$

The same situation for polygon, whose symplectic is a sum of contributions from every edge E_i :

$$\Omega_P = \sum_i^N \int_{E_i} dx \langle \partial_\phi (\delta h_i h_i^{-1}), \wedge \delta h_i h_i^{-1} \rangle. \quad (4.25)$$

Next, we have to collect all the symplectic form together and consider the condition of continuity of metric and connection between discs and polygon. Firstly, covariant derivative in (4.21) has to be converted to ordinary derivative using gauge transformation

$$\tilde{g}_i = \exp(K\phi) g_i. \quad (4.26)$$

The symplectic form of disc (4.24) changes to

$$\Omega_{D_i} = \int_{\partial D_i} dx \langle \nabla_\phi (\delta \tilde{g}_i \tilde{g}_i^{-1}), \wedge \delta \tilde{g}_i \tilde{g}_i^{-1} \rangle. \quad (4.27)$$

The continuity conditions for the connection (4.21) is

$$\tilde{g}_i = C_i h \Big|_{E_i}, \quad (4.28)$$

where C_i is a function only of time. Substituting this into (4.24) and (4.25), and combining them one obtains

$$\Omega_{full} = \Omega_P + \sum_i^N \Omega_{D_i} = \sum_i^N \int_{E_i} \langle \partial_\phi (\delta h h^{-1}), C_i^{-1} \delta C_i \rangle = - \sum_i^N \int_{\partial D_i} \langle \partial_\phi (\delta \tilde{g}_i \tilde{g}_i^{-1}), \delta C_i C_i^{-1} \rangle. \quad (4.29)$$

This symplectic form collapses to the vertices of the polygon or to the initial points of disc boundaries. Now, let us rewrite the action in the following variables

$$u_i = C_i^{-1} \exp(2\pi K) C_i, \quad \text{and} \quad h_i = C_i^{-1} \tilde{g}_i(0), \quad (4.30)$$

where

$$\tilde{g}_i(2\pi) = \exp(2\pi K)\tilde{g}_i(0), \quad (4.31)$$

and

$$u_i^{-1}\delta u_i = C_i^{-1}\delta C_i - C_i^{-1}\exp(-2\pi K)\delta C_i C_i^{-1}\exp(2\pi K)C_i. \quad (4.32)$$

Equation (4.29) reduces to

$$\Omega_{full} = \sum_i^N \int_R \langle \delta h_i h_i^{-1}, u_i^{-1}\delta u_i \rangle. \quad (4.33)$$

h_i will play the role of the configuration variable and u_i -momentum variable. The translational part of h_i gives rise to the BTZ metric outside of the shell. The canonical coordinates are thus the variables (4.10) or (4.13). By using the overlap conditions (4.28) which implies that

$$g_i(0) = C_i h_i, \quad g_i(2\pi) = \exp(2\pi K)g_i(0) = C_i h_{i+1}, \quad (4.34)$$

we find that

$$g_{i+1} = u_i g_i, \quad (4.35)$$

and

$$g_i = \left(\prod_{j=0}^{i-1} u_j \right) g_0 \left(\prod_{j=0}^{i-1} u_j \right)^{-1}, \quad (4.36)$$

where the order of factors in the product is from right to left. The holonomy around the full shell is defined as the product of holonomies around each particle

$$U = \prod_{j=0}^N u_j. \quad (4.37)$$

By using the following identity

$$U^{-1}\dot{U} = \sum_{i=0}^N \left(\prod_{j=0}^{i-1} u_j \right)^{-1} u_i^{-1}\dot{u}_i \left(\prod_{j=0}^{i-1} u_j \right), \quad (4.38)$$

we can rewrite the symplectic form (4.33) as

$$\Omega_{full} = \int_R \langle \delta h_0 h_0^{-1}, U^{-1}\delta U \rangle. \quad (4.39)$$

The symplectic form for the full shell is reduced to a term depending on a single variable. It can be shown that only the translational part of h and the only Lorentzian part of U will enter (4.39). In the neighborhood of the horizon where $\delta h_0 h_0^{-1} \ll 1$ the symplectic form simplifies further:

$$\Omega_{full} = \frac{1}{\ell} \int_R \langle \delta X, U^{-1} \delta U \rangle, \quad (4.40)$$

where $X = X^a \Gamma_a$ and X_a are embedding coordinates (4.10) or (4.13) for $\phi = 0$.

4.4 Constraints

Here, we find the equations to which the holonomy around the full shell U is satisfied. Let C_i and u_i are elements of Anti-de sitter group $SO(2,2)$. By the definition of U which is the product of holonomies around every particle, we have

$$U = \prod_{i=0}^N u_i, \quad (4.41)$$

where

$$u_i = C_i^{-1} \exp\left(\frac{2\pi M}{N} \Gamma_{12}\right) C_i, \quad (4.42)$$

which represents the holonomy around a fixed particle. Choose the following ansatz for C_i ,

$$C_i = (tr)_i (b)_i, \quad (4.43)$$

where tr and b refer to translations and boost parameters.

$$(tr)_i = \exp\left(\frac{-2\pi i}{N} \Gamma_{12}\right) (tr)_0 \exp\left(\frac{2\pi i}{N} \Gamma_{12}\right), \quad (4.44)$$

$$(b)_i = \exp\left(\frac{-2\pi i}{N} \Gamma_{12}\right) (b)_0 \exp\left(\frac{2\pi i}{N} \Gamma_{12}\right), \quad (4.45)$$

$$(tr)_0 = t = \sqrt{1 + \Lambda R^2} I + \sqrt{\Lambda} R \Gamma^{13}, \quad (4.46)$$

$$(b)_0 = b = \cosh \bar{x} I + \sinh \bar{x} \Gamma^{10}. \quad (4.47)$$

Then, the product of holonomies of two neighboring particles is

$$u_i u_{i+1} = C_i^{-1} K C_i C_{i+1}^{-1} K C_{i+1}, \quad (4.48)$$

where

$$K = \exp\left(\frac{2\pi M}{N}\Gamma_{12}\right). \quad (4.49)$$

Using equations (4.42), (4.43), (4.44), (4.45), (4.46) and (4.47), equation (4.48) can be simplified as

$$\begin{aligned} u_i u_{i+1} = & \exp\left(\frac{-2\pi i}{N}\Gamma_{12}\right)(b)^{-1}(t)^{-1}K t b \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\Gamma_{12}\right) \\ & \exp\left(\frac{-2\pi(i+1)}{N}\Gamma_{12}\right)(b)^{-1}(t)^{-1}K t b \exp\left(\frac{2\pi(i+1)}{N}\Gamma_{12}\right). \end{aligned} \quad (4.50)$$

In terms of equation (4.50), the holonomy around the full shell (4.41) can be written as

$$U = \prod_{i=0}^N u_i = \prod_{i=0}^N \exp\left(\frac{-2\pi i}{N}\Gamma_{12}\right)(b)^{-1}(t)^{-1}K t b = \left[\exp\left(\frac{-2\pi i}{N}\Gamma_{12}\right)(b)^{-1}(t)^{-1}K t b \right]^N. \quad (4.51)$$

Note that

$$(t)^{-1}K t = \exp\left[\frac{M}{N}\left(\sqrt{1+|\Lambda|R^2}\Gamma_{12}^{-1} + \sqrt{|\Lambda|R}\Gamma_{23}\right)\right], \quad (4.52)$$

$$(b)^{-1}(t)^{-1}K t b = \exp\left[\frac{M}{N}\left(\sqrt{1+|\Lambda|R^2}\cosh\bar{x}\Gamma_{12} + \sqrt{1+|\Lambda|R^2}\sinh\bar{x}\Gamma_{02} + \sqrt{|\Lambda|R}\Gamma_{23}\right)\right]. \quad (4.53)$$

Then, equation (4.51) is

$$U = \exp\left[2\pi\left(1 - M\sqrt{1+|\Lambda|R^2}\cosh\bar{x}\right)\Gamma_{12} + M\sqrt{1+|\Lambda|R^2}\sinh\bar{x}\Gamma_{02} + M\sqrt{|\Lambda|R}\Gamma_{23}\right]. \quad (4.54)$$

Then, we take the trace of equation (4.54), we find that

$$Tr(U) = \cos\left[2\pi\sqrt{\left(1 - M\sqrt{1+|\Lambda|R^2}\cosh\bar{x}\right)^2 - \left(M\sqrt{1+|\Lambda|R^2}\sinh\bar{x}\right)^2 - \left(M\sqrt{|\Lambda|R}\right)^2}\right]. \quad (4.55)$$

In terms of the ADM variables, we have

$$Tr(U) = \cos\left[2\pi\sqrt{1-2m}\right]. \quad (4.56)$$

Compare (4.55) with (4.56), we have

$$1 - 2m = \left(1 - M\sqrt{1+|\Lambda|R^2}\cosh\bar{x}\right)^2 - \left(M\sqrt{1+|\Lambda|R^2}\sinh\bar{x}\right)^2 - M^2|\Lambda|R^2. \quad (4.57)$$

We find that

$$m = M \left(\sqrt{1 + |\Lambda|R^2} \cosh \bar{x} - \frac{M}{2} \right), \quad (4.58)$$

and

$$M = \sqrt{1 + |\Lambda|R^2} \cosh \bar{x} \pm \sqrt{(1 + |\Lambda|R^2) \cosh^2 \bar{x} - 2m + 1}. \quad (4.59)$$

Notice that R in the transformation (4.46) was used as a longitudinal radial variable. This variable undergoes the Lorentz contraction under radial boost transformations. On the other hand, the perimeteral radius entering (4.3) is transverse to the radial boost and is thus invariant. To take this into account, we have to undergo the Lorentz contraction by rescaling $R \rightarrow R \cosh \bar{x}$. Then, in terms of the perimeteral radius, equation (4.59) becomes

$$M = \sqrt{1 + |\Lambda|R^2 + \sinh^2 \bar{x}} \pm \sqrt{1 - 2m + |\Lambda|R^2 + \sinh^2 \bar{x}}, \quad (4.60)$$

which is the familiar Israel equation.

4.5 Derivation of the constraint equations

In the previous section, we obtained the expression for the holonomy around the shell. To obtain the Hamiltonian constraint in the canonical form, we have to extract the Lorentzian part of the above holonomy and then reexpress it in terms of the Euler angles which provide global parameterization of the Lorentzian manifold.

To extract the Lorentzian part of the holonomy, one has to perform its conjugation by a translation transformation

$$U_l = g_t^{-1} U g_t, \quad (4.61)$$

where

$$U = \exp(\pi J), \quad J = \left(1 - M \sqrt{1 + \frac{R^2}{\ell^2}} \cosh(\bar{\chi}) \right) \Gamma_{12} + \sinh(\bar{\chi}) \Gamma_{20} + M \cosh(\bar{\chi}) \frac{R}{\ell} \Gamma_{23}. \quad (4.62)$$

Note that g_t in (4.61) is to be found from the condition that $g_t^{-1} J g_t$ is a pure Lorentz transformation. This results in an equation for g_t which could be sought for in a form $g_t = aI + \sqrt{-1 + a^2} \Gamma_{13}$. Plugging this into (4.62), one finds $a = R/(\sqrt{2m - 1}\ell)$, or

$$g_t = R/(\sqrt{2m - 1}\ell) I + \sqrt{R^2/((2m - 1)\ell^2) - 1} \Gamma^{13} = \sqrt{X^2/\ell + 1} I + X/\ell \Gamma^{13}, \quad (4.63)$$

which coincides with the radial translation in BTZ space (4.10), $X^2 = X_a X^a$. Now, one has to express the total mass m in terms of canonical coordinates X^a . From

$$m = M \left(\sqrt{\cosh^2 \bar{\chi} + \frac{R^2}{\ell^2}} - \frac{M}{2} \right), \quad (4.64)$$

and

$$R^2 = (2m - 1)(X^a X_a + \ell^2), \quad (4.65)$$

one obtains the following equation for m :

$$m = M \left(\sqrt{2m \left(1 + \frac{X^2}{\ell^2} \right) + \sinh^2 \bar{\chi}} - \frac{X^2}{\ell^2} - \frac{M}{2} \right). \quad (4.66)$$

We shall solve this equation in the limit of the slow movement, $\bar{\chi} \ll 1$, and the near-horizon location $X^2 \ll \ell^2$, where it becomes

$$m = M \left[\sqrt{2m} + \frac{2}{\sqrt{2m}} \left((2m - 1) \frac{X^2}{\ell^2} + \sinh^2 \bar{\chi} \right) - \frac{M}{2} \right]. \quad (4.67)$$

The approximate solution is

$$m = M/\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{M}} \left((\sqrt{2}M - 1) \frac{X^2}{\ell^2} + \sinh^2 \bar{\chi} \right). \quad (4.68)$$

Next, we can express R as

$$R = \sqrt{M/\sqrt{2} - 1} \ell + a(M) X^2/\ell + b(M) \bar{\chi}^2 \ell, \quad (4.69)$$

where $a(M)$ and $b(M)$ are constants related to the bare mass. Now, we can write an expression for U_l in terms of canonical coordinates and boost parameter

$$U_l = \exp(\pi J_l), \quad (4.70)$$

where

$$J_l = \left[\left(1 - M \sqrt{\cosh^2(\bar{\chi}) + \frac{R^2}{\ell^2}} \right) \sqrt{X^2/\ell^2 + 1} + M \frac{RX}{\ell^2} \right] \Gamma_{12} + M \sinh(\bar{\chi}) \Gamma_{20}. \quad (4.71)$$

In terms of the Euler angles ρ and χ

$$\cos(\rho) \cosh(\chi) = \cos \left(\pi \sqrt{\left[\left(1 - M \sqrt{\cosh^2(\bar{\chi}) + \frac{R^2}{\ell^2}} \right) \sqrt{X^2/\ell^2 + 1} + M \frac{RX}{\ell^2} \right]^2 - \left[M \sinh(\bar{\chi}) \right]^2} \right), \quad (4.72)$$

and

$$\sinh(\chi) = \frac{\sinh \bar{\chi} \sin \left(\pi \sqrt{\left[\left(1 - M \sqrt{\cosh^2(\bar{\chi}) + \frac{R^2}{\ell^2}} \right) \sqrt{X^2/\ell^2 + 1} + M \frac{RX}{\ell^2} \right]^2 - \left[M \sinh(\bar{\chi}) \right]^2} \right)}{\sqrt{\left[\left(1 - M \sqrt{\cosh^2(\bar{\chi}) + \frac{R^2}{\ell^2}} \right) \sqrt{X^2/\ell^2 + 1} + M \frac{RX}{\ell^2} \right]^2 - \left[M \sinh(\bar{\chi}) \right]^2}}. \quad (4.73)$$

From the second expression, we express $\bar{\chi}$ in terms of canonical variables in the limit $\bar{\chi} \ll 1$

$$\sinh(\bar{\chi}) = \frac{\left[\left(1 - M \sqrt{1 + \frac{R^2}{\ell^2}} \right) \sqrt{X^2/\ell^2 + 1} + M \frac{RX}{\ell^2} \right] \sinh(\chi)}{\sin \left(\pi \left[\left(1 - M \sqrt{1 + \frac{R^2}{\ell^2}} \right) \sqrt{X^2/\ell^2 + 1} + M \frac{RX}{\ell^2} \right] \right)}. \quad (4.74)$$

After all substitutions, the Hamiltonian constraint will take the form

$$\cos(\rho) = \frac{\cos \left(\pi \sqrt{a_1(M) - a_2(M) \chi^2 + a_3(M) X^2/\ell^2} \right)}{\cosh(\chi)}, \quad (4.75)$$

where a_1, a_2, a_3 are coefficients depending on M only.

4.6 Quantization

We shall perform quantization in a neighborhood of the horizon $X_0, X_1 \ll \ell$ in (4.10) or (4.13), where the translation noncommutativity can be neglected and a standard momentum representation could be constructed.

$$U = u I + p^a \Gamma_a, \quad (4.76)$$

where

$$u = \cosh \chi \cos \rho, \quad p_0 = \cosh \chi \sin \rho, \quad p_1 = \sinh \chi \cos \phi, \quad p_2 = \sinh \chi \sin \phi. \quad (4.77)$$

Coordinate operators are

$$\hat{x}^a U = U \Gamma_a, \quad \Gamma_a \Gamma_b = \eta_{ab} I + \epsilon_{abc} \Gamma^c, \quad (4.78)$$

from which we can deduce

$$\begin{aligned}\hat{X}^0\Psi &= i\left(\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\partial}{\partial\phi}\right)\Psi, \\ \hat{X}^1\Psi &= i\left(\cos\rho\cos\phi\frac{\partial}{\partial\chi} + \tanh\chi\sin\rho\cos\phi\frac{\partial}{\partial\rho} + \coth\chi\cos\rho\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\Psi, \\ \hat{X}^2\Psi &= i\left(\cos\rho\sin\phi\frac{\partial}{\partial\chi} + \tanh\chi\sin\rho\sin\phi\frac{\partial}{\partial\rho} - \coth\chi\cos\rho\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\Psi.\end{aligned}\quad (4.79)$$

By using a cylindrical symmetry ($\frac{\partial}{\partial\phi} = 0$, and only two components of X remains)

$$\hat{X}^0\Psi = i\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\Psi, \quad \hat{X}^1\Psi = i\left(\cos\rho\frac{\partial}{\partial\chi} + \tanh\chi\sin\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\Psi. \quad (4.80)$$

The kinematical states of the model are defined as functions of $U \in AdS_2$,

$$\Psi(U) = \Psi(\rho, \chi), \quad (4.81)$$

which is a single-valued and periodic in ρ functions on the entire momentum space. The scalar product can be deduced from the Haar measure on $SL(2)$ and is defined as

$$\langle\Phi, \Psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int \cosh(\chi) d\rho d\chi \Phi(\rho, \chi)^* \Psi(\rho, \chi). \quad (4.82)$$

The spectrum of the time coordinate X^0 is canonically conjugate to ρ , and its corresponding operator is

$$\hat{T}|\rho, \chi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial\rho}|\rho, \chi\rangle, \quad (4.83)$$

and its eigenstates are

$$|t; \psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int \cosh(\chi) d\rho d\chi \exp(it\rho) \psi(\chi)|\rho, \chi\rangle, \quad (4.84)$$

where t is an integer. Time operator has only a discrete spectrum:

$$\hat{T}|t; \psi\rangle = t\hbar|t; \psi\rangle. \quad (4.85)$$

Notice that Newton constant G is equal to one and the quantization is in the units of the Planck length. A more interesting observable is a Lorentz-invariant length, $X^2 = X_a X^a$, defining the distance of the shell to the horizon. This distance is related to the perimeterial radius of the shell by (4.14). Notice that the perimeterial radius depends not only on canonical coordinates X^a but also on the total mass m which is a function of canonical momenta. Because of this R is not diagonalizable simultaneously with X . We shall choose the basis in which X is diagonal as more convenient. As X_a in (4.79) is specified as the left-invariant derivative on the group and its square

is represented by the Beltrami–Laplace operator on our momentum space:

$$\hat{X}^2|t; \psi\rangle = |t; \Delta\psi\rangle, \quad (4.86)$$

where

$$\Delta = \hbar^2 \left(\frac{1}{\cosh(\chi)} \frac{\partial}{\partial \chi} \cosh(\chi) \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{t^2}{\cosh^2(\chi)} \right). \quad (4.87)$$

This operator has two series of eigenvalues as shown in [187]. One is positive, but separated from zero, corresponds to continuous spectrum, i.e. spacelike, X^2

$$\hat{X}^2|t, \lambda\rangle = \pi(\lambda^2 + 1/4)\hbar^2|t, \lambda\rangle, \quad (4.88)$$

where λ is a real number. The other is negative, but containing zero, corresponds to discrete spectrum, i.e. timelike, X^2

$$\hat{X}^2|t, l\rangle = -\pi l(l + 1)\hbar^2|t, l\rangle, \quad (4.89)$$

where l is a non-negative integer, subject to the condition $l \leq t$. As it is seen from (4.14) that positive X^2 corresponds to the shell outside the horizon, while negative X^2 corresponds to the shell inside the horizon. Thus, the shell radius takes on a continuous set of values outside the horizon and discrete inside.

4.7 Quantum dynamics

Angular variable ρ in (4.75) plays the role of Hamiltonian canonically conjugate to the time variable t . In coordinate representation, it become a time derivative operator $\rho \rightarrow i\partial/(\partial t)$. Plugging this into (4.75), we see that quantum Hamiltonian constraint is not a differential equation but a finite difference equation

$$\frac{1}{2} \left(\Psi(t + 1, \chi) + \Psi(t - 1, \chi) \right) = \frac{\cos \left(\pi \sqrt{a_1(M) - a_2(M)\chi^2 + a_3(M)\Delta/\ell^2} \right)}{\cosh(\chi)} \Psi(t, \chi), \quad (4.90)$$

where we use a skew representation (coordinate in time variable and momentum in a spatial variable) and Δ is the Beltrami-Laplace operator in momentum space. This is a discrete analog of the Klein-Gordon equation which is reduced to the ordinary differential Klein-Gordon equation in zero gravity limit. Concerning the factor ordering issue in the above expression, we always choose symmetric order to render the Hamiltonian hermitian and the evolution operator unitary. The discrete analog of the Schrodinger equation can be written by using evolution operator for one

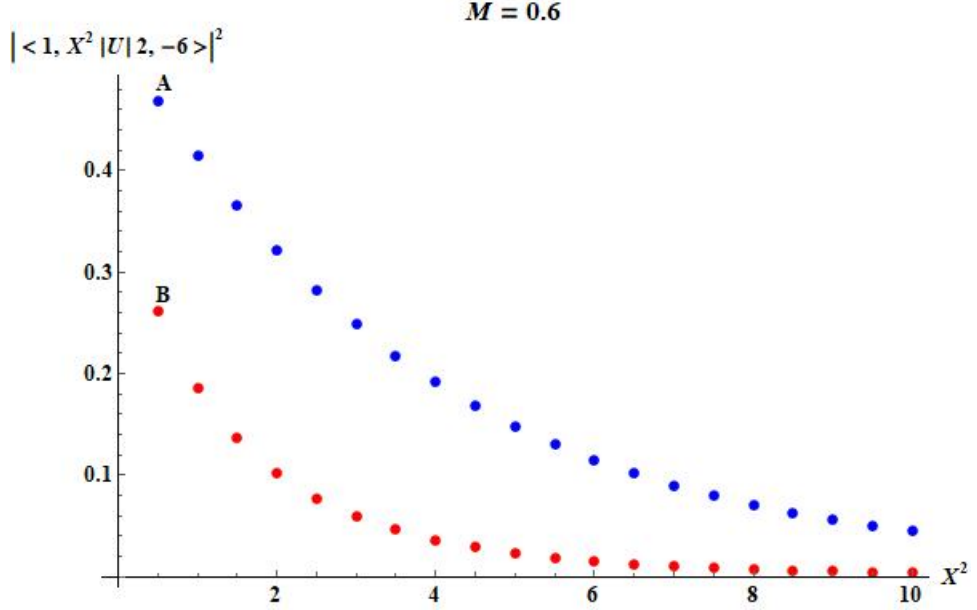


Figure 4.1 — $II \rightarrow I$ (curve B) vs. $I \rightarrow II$ (curve A) transition rate.

step in time

$$\Psi(t+1, \chi) = U^\pm \Psi(t, \chi), \quad (4.91)$$

where U was found from (4.90) to be

$$U^\pm = F \pm \sqrt{F^2 - 1}, \quad (4.92)$$

where

$$F = \frac{\cos(\pi \sqrt{a_1(M) - a_2(M)\chi^2 + a_3(M)\Delta/\ell^2})}{\cosh(\chi)}. \quad (4.93)$$

Now, we are ready to calculate transition amplitudes between different locations of the shell in spacetime. As we saw in the previous section, the location of the shell could be described by two quantum numbers: time coordinate t and the eigenvalue of the invariant distance to the horizon $X^2 = X_a X^a$. The corresponding state in the momentum representation is

$$|t, X^2\rangle = \exp(it\rho) L_{t, X^2}(\chi) |\rho, \chi\rangle, \quad (4.94)$$

where $L_{t, X^2}(\chi)$ is the eigenstate of the operator (4.87) with the eigenvalue X^2 . Now, we can convert kinematical state (4.94) into a physical state by applying the Hamiltonian constraint (4.75)

$$|t, X^2\rangle_{phys} = \left(a_+(U^+)^t + a_-(U^-)^t \right) L_{t, X^2}(\chi) |\rho, \chi\rangle, \quad (4.95)$$

where a_+ and a_- are arbitrary coefficients. One can distinguish four types of such states. The states with $X^2 > 0$, $a_+ \neq 0$, $a_- = 0$ correspond to sector I of the Penrose diagram in figure 3.2b. In the zero-gravity limit, this sector corresponds to positive frequency solutions of the Klein-Gordon

equation. The states with $X^2 > 0$, $a_+ = 0$, $a_- \neq 0$ correspond to sector *III* in figure 3.2b. In the zero-gravity limit, this sector corresponds to negative frequency solutions of the Klein-Gordon equation. The states with $X^2 < 0$, $a_+ \neq 0$, $a_- = 0$ correspond to sector *II* in figure 3.2b. Zero gravity limit keeps no trace of such kinds of states. The states with $X^2 < 0$, $a_+ = 0$, $a_- \neq 0$ correspond to sector *IV* in figure 3.2b. The zero-gravity limit keeps no trace of such kinds of states. We calculate numerically matrix elements between various states of the type

$$\langle t_1 X_1^2 | t_2, X_2^2 \rangle_{phys}, \quad (4.96)$$

which describe the rate of change of the shell radius from X_2^2 to X_1^2 during the time interval $t_1 - t_2$. For example, in figure 4.1, we show the relative rate for the shell to cross the horizon from region *I* to region *II* and back. As one can see that the transition rate $II \rightarrow I$ is comparable to that of $I \rightarrow II$ in close vicinity of the horizon but become exponentially damped away from the horizon. This agrees with the results obtained earlier in [185] by a very different method.

4.8 Discussion

Quantum theory of a model describing a dust shell coupled to 2+1- dimensional gravity with negative cosmological constant has been studied both at the kinematical and dynamical level in a near-horizon region.

At the kinematical level, it was shown that the shell radius has a continuous spectrum outside the horizon and discrete inside. The eigenvalues spacing of the shell radius measured along the radial coordinate X is Planckian, while for the radius measured along the perimeter of the shell the eigenvalue spacing is proportional to the square root of the black hole mass. Although the approximation used does not allow us to go deep inside the black hole, one can tell that the point of the central singularity, the zero radius of the shell, belongs to the discrete spectrum. This is suggestive of the singularity resolution.

At the dynamical level, we obtained transition amplitudes between different locations of the shell in the near-horizon region. It was shown that there is a non-zero transition rate between all possible sectors of the Penrose diagram, even between those which are classically forbidden. However, for the classically forbidden transitions, their rate is exponentially damped away from the horizon. The main reason for studying the cylindrically symmetric shell model is that it could be extended to 3+1 spacetime dimensions. Some results exist on quantum kinematics of a Schwarzschild black hole in a frame of a test particle [192; 193]. It has also such features as coordinate noncommutativity and discreteness. Even though the many-body problem in 3+1 gravity is not solvable, the holonomy composition still could be as in sections 4.4 and 4.5. The only difference is the presence of Newtonian potential. Thus, in principle, there is a possibility to generalize the above results to 3+1 dimensional gravity.

Chapter 5. Dust shell away from the BTZ black hole horizon

Our main objective of this chapter is to discuss the kinematical part of the dust shell away from the BTZ black hole horizon. The momentum noncommutativity exists in this case and requires a full-fledged quantum group technique. The spectrum of the time operator and the shell radius operator inside the black hole was found.

5.1 Preliminary

The dynamics of a dust shell near the BTZ black hole horizon were considered in chapter 4. In that region, the translations can be considered small, and the momenta noncommutativity could be neglected. If we want to explore the interior of the black hole in-depth, in particular, study what happens near the singularity, this approximation is no longer valid. The momentum space becomes a quantum group. This part of the work is not completed and some preliminary results are reported.

Chapter 5 has the following structure. In section 5.2, we sketch the derivation of Poisson-Lie structure from gravity action, whose quantization results in quantum group. In section 5.3, we consider a derivation of $SL_q(2)$ representations matrix element which will provide a basis of the Hilbert space of the model. In section 5.4, we find the spectra of the time operator and the shell radius inside the black hole. In section 5.5, we derive the Hamiltonian constraint in terms of matrix entries of $SL_q(2)$. Some open problems are discussed.

5.2 Symplectic form and classical r-matrix

The derivation of Poisson-Lie structure from the action here closely follows [190; 199]. In section 4.3, we obtained the symplectic form for particles composing the shell

$$\Omega = \ell \langle \delta h h^{-1}, \wedge u^{-1} \delta u \rangle, \quad (5.1)$$

where h is an $SO(2,2)$ transport from the reference point to the particle and u is a holonomy around the particle originated at the same reference point, $u = h^{-1} \exp(\ell m H) h$, where H is the spatial rotation generator, and $\ell = 1/\sqrt{\Lambda}$. In terms of h it could be rewritten as

$$\Omega = \langle \exp(-m H) h^{-1} \delta h \exp(m H), \wedge h^{-1} \delta h \rangle, \quad (5.2)$$

where h can be decomposed into left-handed and right-handed parts, and the symplectic form is

$$\begin{aligned} \Omega = & Tr(\exp(-mH)h_L^{-1}\delta h_L \exp(mH), \wedge h_L^{-1}\delta h_L) \\ & - Tr(\exp(-mH)h_R^{-1}\delta h_R \exp(mH), \wedge h_R^{-1}\delta h_R), \end{aligned} \quad (5.3)$$

from which we derive the Poisson brackets (for small m):

$$\{h_L, \otimes h_L\} = 1/(\ell m)[r, h_L \otimes h_L], \quad (5.4)$$

where

$$r = 1/2H \otimes H + X^+ \otimes X^-, \quad (5.5)$$

is the classical r-matrix. From this, we can derive the Poisson brackets for u_L

$$\{u_L, \otimes u_L\} = (1/\ell)[r, u_L \otimes u_L], \quad (5.6)$$

which does not depend on mass, and the same for u_R . The Lorentz subgroup of $SO(2,2)$ corresponds to $u_L = u_R = U$. So the same Poisson brackets hold for U . Representation of these Poisson brackets by operators leads to $SL_q(2)$ -group. We consider a quantum version of $SU(1,1)$ group which is isomorphic to quantum $SL(2)$.

$$U = U_{ij} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

The commutation relations between the matrix entries are:

$$\begin{aligned} ab &= qba, & ac &= qca, \\ bd &= qdb, & cd &= qdc, \\ bc &= cb, & ad &= da + (q - q^{-1})bc, \end{aligned} \quad (5.8)$$

which also could be rewritten in terms of r-matrix as

$$R_{12} U_1 U_2 = U_2 U_1 R_{12}, \quad (5.9)$$

where

$$U_1 = U \otimes I, \quad U_2 = I \otimes U, \quad (5.10)$$

and

$$R = R_{ij}^{kl} = q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - q^{-2} & q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Here $q = \exp(2\pi i\ell)$. The choice of q to be a root of unity is motivated first by the fact that for H here is chosen the generator of spacial rotations which are periodic. The translational part of h unlike $\Lambda = 0$ doesn't form a Lie algebra, as it is not a linear space. Instead, it is now universal enveloping algebra $U_q(sl(2))$ with the same deformation parameter.

5.3 Matrix elements of representations of $SL_q(2)$

The eigenstate for time operator and invariant distance operator could be obtained from matrix elements of representations of the group. First, we consider the representation theory of a classical group in a form which is easiest to generalize to quantum case [200]. Finite-dimensional representations of a general linear group $GL(2)$ could be constructed on $2l + 1$ -dimensional spaces of homogeneous polynomials of two complex variables

$$p_n^l(\xi, \eta) = \binom{2l}{l-n}^{1/2} \xi^{l-n} \eta^{l+n}, \quad n = -l, \dots, l. \quad (5.12)$$

Matrix elements T_{mn}^l are defined

$$p_n^l(a\xi + c\eta, b\xi + d\eta) = \sum_{m=-l}^l T_{mn}^l(a, b, c, d) p_m^l(\xi, \eta), \quad (5.13)$$

where

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

is the $GL(2)$ matrix in the fundamental representation. The left hand side of (5.13) will be expanded using the relations

$$\begin{aligned} (a\xi + b\eta)^{l-n} &= \sum_{j=0}^{l-n} \binom{l-n}{j} a^j c^{l-n-j} \xi^j \eta^{l-n-j}, \\ (b\xi + d\eta)^{l+n} &= \sum_{k=0}^{l+n} \binom{l+n}{k} b^k d^{l+n-k} \xi^k \eta^{l+n-k}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Assembling them together and changing the summation $(j,k) \rightarrow (m,j)$, where $j+k=l-m$, the left hand side of (5.13) takes the form

$$\binom{2l}{l-n}^{1/2} \sum_{m=-l}^l \sum_{j=\max(0,-m-n)}^{\min(l-m,l-n)} \binom{l-n}{j} \binom{l+n}{l-m-j} a^j c^{l-n-j} b^{l-m-j} d^{m+m+j} \xi^{l-m} \eta^{l+m}, \quad (5.15)$$

from which we deduce

$$T_{mn}^l(a,b,c,d) = \binom{2l}{l-m}^{-1/2} \binom{2l}{l-n}^{1/2} \sum_{j=\max(0,-m-n)}^{\min(l-m,l-n)} \binom{l-n}{j} \binom{l+n}{l-m-j} a^j c^{l-n-j} b^{l-m-j} d^{m+m+j}, \quad (5.16)$$

in particular

$$T_{ml}^l(a,b,c,d) = d^{2l}, \quad (5.17)$$

and

$$T_{ml}^l(a,b,c,d) = \binom{2l}{l-m}^{1/2} b^{l-m} d^{l+m}. \quad (5.18)$$

Different matrix elements within one representation could be related by the ladder operator which are obtained from the algebra generators

$$[X^\pm, H] = \pm 2X^\pm, \quad [X^+, X^-] = H. \quad (5.19)$$

We consider representations of $SU(1,1)$ for which $a = d^*$, $b = c^*$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$. It is isomorphic to $SL(2)$. From them we could obtain left-invariant and right-invariant derivatives operators (by multiplying fundamental representation by generator on the right or on the left). We will have the relation

$$X_L^+ T_{m,n}^l = T_{m,n+1}^l, \quad X_L^- T_{m,n}^l = T_{m,n-1}^l, \quad (5.20)$$

and

$$X_R^+ T_{m,n}^l = T_{m+1,n}^l, \quad X_R^- T_{m,n}^l = T_{m+1,n}^l. \quad (5.21)$$

On monomials of matrix entries, these ladder operators act as follows

$$X_L^- a^n = X_L^- c^n = 0, \quad X_L^- b^n = n a b^{n-1}, \quad X_L^- d^n = n c d^{n-1}, \quad (5.22)$$

$$X_R^- a^n = X_R^- b^n = 0, \quad X_R^- c^n = n a c^{n-1}, \quad X_R^- d^n = n b d^{n-1}, \quad (5.23)$$

$$X_L^+ b^n = X_L^+ d^n = 0, \quad X_L^+ a^n = n b a^{n-1}, \quad X_L^+ c^n = n d c^{n-1}, \quad (5.24)$$

$$X_R^+ c^n = X_R^+ d^n = 0, \quad X_R^+ b^n = n d b^{n-1}, \quad X_R^+ a^n = n c a^{n-1}. \quad (5.25)$$

The representations described above are not unitary and they do not form normalizable states in quantum mechanics. We are interested in the other representations which could not be realized on a space of finite degree polynomials but could be reconstructed from a negative degree monomial term with the same ladder operators as above. The starting matrix element will be

$$T_{ml}^l(a,b,c,d) = d^{-2l}, \quad (5.26)$$

where $l \leq |m|, |n|$. For this group, the matrix elements in (5.13) are calculated to be

$$T_{mn}^l(a,b,c,d) = \binom{l-m}{n-m}^{1/2} \binom{l+m}{n-m}^{1/2} P_{l-n}^{n-m, n+m}(bc+ad) c^{n-m} a^{n+m}, \quad (5.27)$$

where $P_{l-n}^{n-m, n+m}(bc)$ is the Jacobi polynomial. In parameterization, we have

$$T = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) e^{i\rho} & \sinh(\chi) e^{i\phi} \\ \sinh(\chi) e^{-i\phi} & \cosh(\chi) e^{-i\rho} \end{pmatrix},$$

axially symmetric states have no dependence on ϕ , which corresponds to diagonal elements of T in (5.27), where

$$T_{nm}^l(a,b,c,d) = P_{l-n}^{0, 2n}(bc+ad) a^{2n} = P_{l-n}^{0, 2n}(\cosh(2\chi)) \cosh(\chi)^{2n} e^{2in\rho}. \quad (5.28)$$

They could be obtained from monomial

$$T_{ll}^l(a,b,c,d) = T_l^l(a,b,c,d) = a^{2l} = \cosh(\chi)^{2l} e^{2il\rho}. \quad (5.29)$$

By the action of ladder operators

$$T_{l-n}^l = (X_-)^n T_l^l, \quad n = 0 \dots 2l. \quad (5.30)$$

The finite-dimensional representations considered above are not unitary, and the states corresponding to them are not normalizable. Unitary representations giving rise to normalizable states are infinite-dimensional and could be obtained with the same ladder operators, X_{\pm} , starting from

monomial with a negative degree

$$T_l^l = d^{-2l}, \quad (5.31)$$

$$T_{l+n}^l = (X_+)^n T_l^l, \quad n = 0, \dots, \infty, \quad (5.32)$$

and analogously for T_{-l-n}^l . The equation

$$T_{nn}^l(a, b, c, d) = P_{l-n}^{0, 2n}(bc + ad) a^{2n}, \quad (5.33)$$

admits generalization for noncommutative entries a, b, c, d .

$$T_{nn}^l(a, b, c, d) = q^{n-l} P_{l-n}^{0, 2n}(bc + ad; q) a^{2n}, \quad (5.34)$$

where $P_{l-n}^{0, 2n}(bc + ad; q)$ is q -deformed Jacobi polynomial [201]. Below we describe the construction of ladder operators on axially symmetric states directly.

5.4 Harmonic analysis on $SL_q(2)$ with axial symmetry

For classical $SU(1,1)$, (which is isomorphic to $SL(2)$), in parameterization

$$T = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) e^{i\rho} & \sinh(\chi) e^{i\phi} \\ \sinh(\chi) e^{-i\phi} & \cosh(\chi) e^{-i\rho} \end{pmatrix},$$

axial symmetry means no dependence on ϕ . The action of the algebra on the functions $f(T)$ can be represented by differential operators

$$\begin{aligned} H &= i \frac{\partial}{\partial \rho}, \\ X^\pm &= e^{\pm i\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \pm i \tanh(\chi) \frac{\partial}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \quad (5.35)$$

which reproduces commutation relations

$$[H, X^\pm] = \pm 2X^\pm, \quad [X^+, X^-] = H. \quad (5.36)$$

In matrix notation, the action of the above differential operators can be expressed as a combination of left-invariant and right-invariant vector fields:

$$X^\pm T = J^\pm . T + T . J^\mp, \quad HT = J^0 . T + T . J^0, \quad (5.37)$$

where J^\pm and J^0 are the algebra generators in matrix representation, and "." is the matrix multiplication. So, in terms of matrix entries

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

and the action of the algebra on the group can be written as (for an axially symmetric case we assume $b = c$)

$$\begin{aligned} [X^+, a] &= 0, & [X^+, b] &= a, & [X^+, d] &= b = c, \\ [X^-, a] &= b = c, & [X^-, b] &= d, & [X^-, d] &= 0, \\ [H, a] &= a, & [H, b] &= 0, & [H, d] &= -d. \end{aligned} \quad (5.38)$$

In $q \neq 1$ case, in the absence of parametrization in terms of the Euler angles, the action of the algebra on the group should be expressed directly in terms of matrix T entries. It has to be a deformed version of relations (5.38). The exact form of these relations is derived from compatibility conditions with $U_q(su(1,1))$ commutation relations,

$$X^\pm K = q^{\pm 2} K X^\pm, \quad [X^+, X^-] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad (5.39)$$

where $K = q^H$, and $SU_q(1,1)$ commutation relations,

$$\begin{aligned} ab &= qba & ac &= qca, \\ bd &= qdb & cd &= qdc, \\ bc &= cb & ad &= da + (q - q^{-1})bc, \end{aligned} \quad (5.40)$$

where $d = a^*$, $b = qc^*$, and $ad - qbc = 1$. Notice that the element bc^{-1} is central with respect to commutation relations (5.40), so it is consistent to put it to be a fixed number. This allows us to impose the axial symmetry condition $bc^{-1} = q$. The compatibility conditions will be the Jacobi identities involving all possible cross commutation relations between $SU_q(1,1)$ and $U_q(su(1,1))$ elements. The resulting deformed version of the relations (5.38) has the form:

$$\begin{aligned} X^+ a &= q^{-1} a X^+, & [X^+, c] &= a K, & X^+ d &= q d X^+ + c K, \\ X^- a &= q^{-1} a X^- + b K^{-1}, & [X^-, b] &= d K, & X^- d &= q d X^-, \\ K a &= q a K, & K d &= q^{-1} d K, & [K, b] &= 0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

This could also be derived from the double $D(SU_q(1,1))$ [88; 202]. Using these operators the normalizable basis states can be constructed as follows:

$$\Psi_{j,j} = d^{-j}, \quad \Psi_{j,-j} = a^{-j}, \quad (5.42)$$

$$X^- \Psi_{j,j} = 0, \quad X^+ \Psi_{j,-j} = 0, \quad (5.43)$$

$$\Psi_{j,n} \sim (X^+)^n \Psi_{j,j}, \quad \Psi_{j,-n} \sim (X^-)^n \Psi_{j,-j}, \quad (5.44)$$

the proportionality coefficients will be chosen from the normalization condition. The eigenvalues of the time operator (which is H in the present case) are

$$H \Psi_{j,n} = (j + 2n) \Psi_{j,n}, \quad (5.45)$$

or

$$K \Psi_{j,n} = q^{(j+2n)} \Psi_{j,n}, \quad (5.46)$$

when q is a root of unity eigenvalues of K depend periodically on n , which is in accordance with time periodicity in AdS space. In fact, in this case, unlike $q = 1$, the representation described here are finite-dimensional. If $q = \exp(\frac{2\pi i}{N})$ (in our case $N = l$, where l is the radius of AdS space in the Planck units) the series (5.44) terminates when $j + 2n = N$. For example, if $j = N$, then

$$X^+ \Psi_{j,j} = X^+ d^{-j} = [j; q^{-1}] b d^{-j-1}, \quad (5.47)$$

where

$$[j; q] = \frac{q^j - 1}{q - 1}, \quad (5.48)$$

is the geometric progression sum. It is obvious that $[N; q] = 0$, so the state $\Psi_{N,N}$ is annihilated by both X^+ and X^- . This state is just one-dimensional, and it is analogous to the state $j = 0$, i.e. at $j = N$ we return to the horizon. The eigenvalues of quadratic Casimir operator

$$C_2 = X^+ X^- + \frac{q^{-1}K + q, K^{-1}}{(q - q^{-1})^2} = X^- X^+ + \frac{q, K + q^{-1}K^{-1}}{(q - q^{-1})^2}, \quad (5.49)$$

are

$$C_2 \Psi_{j,n} = -[j]_q [j + 1]_q \Psi_{j,n}, \quad (5.50)$$

where

$$[j]_q = \frac{q^j - q^{-j}}{q - q^{-1}}. \quad (5.51)$$

They are also periodic if q is a root of unity, which means that we have only a finite number of irreducible representations. The spectrum of the Casimir not only discrete but also bounded from above. As we saw in the previous chapter, the quadratic Casimir of algebra is related to the invariant distance to the horizon. Inside the black hole, this distance is timelike and thus periodic in AdS space. This periodicity corresponds to departing from the horizon from the black hole side, passing through the central singularity, and then returning to the horizon from the white hole side. The states with $0 < j < N/2$ correspond to the black hole, $j = N/2$ corresponds to singularity, $N/2 < j < N$ corresponds to the white hole. The inner product of these states is defined as

$$\langle \Psi_{j,n}, \Psi_{j',n'} \rangle = \int \Psi_{j,n}^* \Psi_{j',n'} d_q g. \quad (5.52)$$

In the absence of integral calculus on a noncompact quantum group, we first notice that the states with different n must be orthogonal. If $n = n'$, then the product $\Psi_{j,n}^* \Psi_{j',n'}$ is a polynomial of a , b , and d in which every term contains the same power of a and d . Using commutation relations and the condition that $ad - b^2 = 1$ this polynomial can be expressed as a function only of b , i.e. of a single variable. This variable could be parametrized by an Euler angle as in the classical case, $b = \sinh(\chi)$ and calculate one dimensional integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Psi_{j,n}^* \Psi_{j',n'}) (\cosh(\chi)) \sinh(2\chi) d_q \chi, \quad (5.53)$$

where

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d_q x = (1 - q) \sum_n (f(q^n) + f(-q^n)) q^n, \quad (5.54)$$

the so-called q -integral [201]. Despite our group is noncompact the norm of the states considered is always finite, for the same reasons as in $q = 1$ case. Finally

$$\langle \Psi_{j,n}, \Psi_{j',n'} \rangle \sim \delta_{j,j'} \delta_{n,n'}. \quad (5.55)$$

5.5 Hamiltonian constraint

From the previous chapter (before quantization), we have

$$U = \exp \left[\pi \left(\left(1 - M \sqrt{1 + \Lambda R^2} \cosh \bar{\chi} \right) T_{12} + M \sqrt{1 + \Lambda R^2} \sinh \bar{\chi} T_{02} + M \sqrt{\Lambda} R T_{23} \right) \right]. \quad (5.56)$$

So far

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

is a classical group. We first rewrite the constraints in terms of their entries and then apply quantization. For simplicity, near singularity $\sqrt{\Lambda}R \ll 1$. then

$$U = \exp \left[\pi \left((1 - M \cosh \bar{\chi}) T_{12} - M \sinh \bar{\chi} T_{02} \right) \right]. \quad (5.57)$$

In terms of the Euler angles ρ and χ

$$(a + d)/2 = \cos \left(\pi \sqrt{(1 - M \cosh \bar{\chi})^2 - (M \sinh \bar{\chi})^2} \right), \quad (5.58)$$

$$b = \frac{\sin \bar{\chi} \sin \left(\pi \sqrt{(1 - M \cosh \bar{\chi})^2 - (M \sinh \bar{\chi})^2} \right)}{\pi \sqrt{(1 - M \cosh \bar{\chi})^2 - (M \sinh \bar{\chi})^2}}. \quad (5.59)$$

For a black hole with the mass just above the planckian $|\sqrt{(1 - M \cosh \bar{\chi})^2 - (M \sinh \bar{\chi})^2}| \ll 1$. In this limit, we can put $\sinh(\bar{\chi}) = b$, and the constraint reduces to the form

$$(a + d)/2 = \cos \left(\pi \sqrt{(1 - M\sqrt{1 + b^2})^2 - (Mb)^2} \right), \quad (5.60)$$

or, using $ad - b^2 = 1$, then

$$(a + d)/2 = \cos \left(\pi \sqrt{(1 - M\sqrt{ad})^2 - M^2(ad - 1)} \right), \quad (5.61)$$

$$\sqrt{ad^{-1}} + \sqrt{da^{-1}} = 2 \frac{\cos \left(\pi \sqrt{(1 - M\sqrt{1 + b^2})^2 - M^2(b^2)} \right)}{\sqrt{1 + b^2}}, \quad (5.62)$$

where $\sqrt{ad^{-1}}$ can be considered as an operator of a shift in time for one step (time is discrete). From this, we could derive an evolution operator as in the previous chapter and calculate transition amplitudes between different shell radii. The result is ambiguous. The arguments of the evolution operator and the arguments of the wavefunction do not commute, and one has to choose the ordering. It is natural to suggest that the ordering should be chosen so that the Hamiltonian be hermitian (and the evolution unitary).

5.6 Discussion

We found that the Hilbert space of a shell inside the black hole is finite-dimensional. Its dimensionality does not depend on the size of the black hole and equals simply to the inverse cosmological constant in the Planck units. The eigenstates of the time operator and the shell radius operator inside the black hole were found. The spectrum of time operator is discrete and bounded by the shell radius at one side and the horizon on the other. The spectrum of the shell radius is also discrete and also bounded between the black hole horizon and the white hole horizon. To study the model at the dynamical level, one needs to solve the factor ordering ambiguity problem in the matrix elements.

Conclusion

The theory of gravity classically suffers from singularity problems. It is not possible to terminate gravitational collapse and usually leads to infinite densities and curvatures. This divergence contradicts the basic postulates of the theory. Quantum theory seems to be the most possible solution to this problem. However, attempts to originate quantum gravity have not been flourished yet. We attempt to overcome the construction of quantum gravity by working with a more solvable model, which remains classically suffering from the same ambiguous problem. The model is a spherically symmetric thin shell of dust with a fixed rest mass M and its gravitational field is given by Einstein's equations.

Recently, thin shells have become quite common as models for various phenomena. The dynamics of a self-gravitating thin matter shell in general relativity were first discussed by Werner Israel [22]. It is the simplest toy model describing gravitational collapse. Since field equations for the realistic collapse are very intractable, these models demonstrate useful to inspect many aspects of this phenomenon. We focus on demonstrating the dust shell model in (2+1)-dimensional gravity as it is much easier to handle.

Over the past several years, the (2+1)-dimensional gravity was first theorized by Staruszkiewicz [16] to investigate the classical behavior of a point particle. It is an exactly solvable model to realize sophisticated problems of quantum gravity. While attempts to quantize (3+1)-dimensional gravity have so far failed, several approaches have been succeeded in three dimensions. Moreover, the (2+1)-dimensional gravity has the same general structure as the (3+1)-dimensional gravity with no Newtonian limit and no degrees of freedom.

We examine the canonical structure of dust thin shells coupled with (2+1)-dimensional gravity for both zero and negative cosmological constants. The resulting Hamiltonian contains only the real degrees of freedom which are finite. Spacetime has a trivial topological structure and it turned out to be AdS_2 space. The Euler angles support a global parameterization of that manifold. Quantization in these variables leads to noncommutativity and also to discreteness in the coordinate space, which allows resolving the central singularity.

In the case of a zero cosmological constant, the spacetime is everywhere flat. It implies that the momentum noncommutativity is avoided and quantization of this model can be easily carried out. In the case of a negative cosmological constant, the main calculations have been performed in the vicinity of the horizon, where we can neglect momentum noncommutativity and the spacetime of this region is totally flat. If we consider simple extensions of noncommutativity, it means that the spacetime turned out to be curved. This description could happen away from the horizon in which the quantum group is involved.

The kinematical part of the dust shell away from the BTZ black hole horizon is figured out, where momentum noncommutativity exists. The eigenstates of the time operator and the shell radius operator inside the black hole were found. The spectrum of time operator is discrete and

bounded by the shell radius at one side and the horizon on the other. The spectrum of the shell radius is also discrete and also bounded between the black hole horizon and the white hole horizon. The dynamical level of this model is still in progress and faced the problem of the factor ordering ambiguity in the matrix elements.

In the vicinity of the horizon as well as a model with a zero cosmological constant, the spectrum of the time is discretized, while the spectrum of the shell radius is continuous outside the horizon and becomes discrete inside the horizon. The gravitational collapse rate is described by a matrix element of the evolution operator \hat{U} between eigenstates of the shell radius R for positive (spacelike) R^2 and for zero R^2 . Its value is finite everywhere which can be interpreted as a resolution of the singularity.

Furthermore, these calculations could be generalized to (3+1)-dimensional gravity. The only difference between (2+1)- and (3+1)-dimensional gravity is the existence of the Newtonian potential. In fact, (2+1)-dimensional gravity does not reflect the reality of the universe where we live, but it has a trivial spacetime to give an explicit description of various problems in quantum gravity. This means that (2+1)-dimensional gravity is a realistic model for (3+1)-dimensional gravity.

Bibliography

1. *Hawking S. W., Ellis G. F. R.* The large scale structure of space-time. — Cambridge university press, 1973.
2. *Carroll S. M.* Spacetime and geometry. — Cambridge university press, 2019.
3. *Ortín T.* Gravity and strings. — Cambridge university press, 2004.
4. *Kaku M.* Introduction to superstrings and M-theory. — Springer Science & Business Media, 2012.
5. *Gambini R., Pullin J.* A first course in loop quantum gravity. — OUP Oxford, 2011.
6. *Rovelli C., Vidotto F.* Covariant loop quantum gravity: an elementary introduction to quantum gravity and spinfoam theory. — Cambridge university press, 2014.
7. *Connes A.* Noncommutative geometry. — Springer, 1994.
8. *Carey A. L. et al.* Index theory for locally compact noncommutative geometries. — American Mathematical Soc., 2014.
9. *DeWitt B. S.* Quantum theory of gravity. I. The canonical theory // Phys. Rev. — 1967. — Vol. 160. — P. 1113. — DOI: [10.1103/PhysRev.160.1113](https://doi.org/10.1103/PhysRev.160.1113).
10. *DeWitt B. S.* Quantum theory of gravity. II. The manifestly covariant theory // Phys. Rev. — 1967. — Vol. 162. — P. 1195. — DOI: [10.1103/PhysRev.162.1195](https://doi.org/10.1103/PhysRev.162.1195).
11. *DeWitt B. S.* Quantum theory of gravity. III. Applications of the covariant theory // Phys. Rev. — 1967. — Vol. 162. — P. 1239. — DOI: [10.1103/PhysRev.162.1239](https://doi.org/10.1103/PhysRev.162.1239).
12. *Ashtekar A.* New Variables for classical and quantum gravity // Phys. Rev. Lett. — 1986. — Vol. 57. — P. 2244–2247. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.57.2244](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.57.2244).
13. *Polchinski J.* String theory: an introduction to the bosonic string. Vol. 1. — Cambridge university press, 1998.
14. *Polchinski J.* String theory: superstring theory and beyond. Vol. 2. — Cambridge university press, 1998.
15. *Zwiebach B.* A first course in string theory. — Cambridge university press, 2004.
16. *Staruszkiewicz A.* Gravitation theory in three-dimensional space // Acta Phys. Polon. — 1963. — Vol. 24. — P. 735–740.
17. *Deser S., Jackiw R., 't Hooft G.* Three-dimensional Einstein gravity: Dynamics of flat space // Annals Phys. — 1984. — Vol. 152. — P. 220–235. — DOI: [10.1016/0003-4916\(84\)90085-X](https://doi.org/10.1016/0003-4916(84)90085-X).
18. *Deser S., Jackiw R.* Three-dimensional cosmological gravity: Dynamics of constant curvature // Annals Phys. — 1984. — Vol. 153. — P. 405–416. — DOI: [10.1016/0003-4916\(84\)90025-3](https://doi.org/10.1016/0003-4916(84)90025-3).

19. *Witten E.* 2+1 dimensional gravity as an exactly soluble system // Nucl. Phys. B. — 1988. — Vol. 311. — P. 46–78. — DOI: [10.1016/0550-3213\(88\)90143-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90143-5).
20. *Witten E.* Topology-changing amplitudes in 2+1 dimensional gravity // Nucl. Phys. B. — 1989. — Vol. 323. — P. 113–140. — DOI: [10.1016/0550-3213\(89\)90591-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90591-9).
21. *Barrow J. D., Burd A. B., Lancaster D.* Three-dimensional classical spacetimes // Class. Quant. Grav. — 1986. — Vol. 3. — P. 551. — DOI: [10.1088/0264-9381/3/4/010](https://doi.org/10.1088/0264-9381/3/4/010).
22. *Israel W.* Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity // Il Nuovo Cim. B (1965-1970). — 1966. — Vol. 44. — P. 1–14. — DOI: [10.1007/BF02710419](https://doi.org/10.1007/BF02710419).
23. *Andrianov A. A., Starodubtsev A. N., Elmahalawy Y.* (2+1)-dimensional gravity coupled to a dust shell: Quantization in terms of global phase space variables // Theor. Math. Phys. — 2019. — Vol. 200. — P. 1269–1281. — DOI: [10.1134/S0040577919090022](https://doi.org/10.1134/S0040577919090022). — arXiv: [1812.11425](https://arxiv.org/abs/1812.11425) [gr-qc].
24. *Andrianov A. A., Elmahalawy Y., Starodubtsev A.* Cylindrically symmetric 2+1 gravity in terms of global variables: Quantum dynamics // Int. J. Mod. Phys. A. — 2020. — Vol. 35. — P. 2040031. — DOI: [10.1142/S0217751X2040031X](https://doi.org/10.1142/S0217751X2040031X). — arXiv: [1912.11890](https://arxiv.org/abs/1912.11890) [gr-qc].
25. *Andrianov A. A., Starodubtsev A., Elmahalawy Y.* Quantum analysis of BTZ black hole formation due to the collapse of a dust shell // Universe. — 2020. — Vol. 6. — P. 201. — DOI: [10.3390/universe6110201](https://doi.org/10.3390/universe6110201). — arXiv: [2011.07971](https://arxiv.org/abs/2011.07971) [gr-qc].
26. *Bañados M., Teitelboim C., Zanelli J.* Black hole in three-dimensional spacetime // Phys. Rev. Lett. — 1992. — Vol. 69. — P. 1849–1851. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.69.1849](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.1849). — arXiv: [hep-th/9204099](https://arxiv.org/abs/hep-th/9204099).
27. *Kuchař K. V.* Geometrodynamics of Schwarzschild black holes // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 50. — P. 3961–3981. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.3961](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.3961). — arXiv: [gr-qc/9403003](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9403003).
28. *Ashtekar A. et al.* 2+1 quantum gravity as a toy model for the 3+1 theory // Class. Quant. Grav. — 1989. — Vol. 6. — P. L185. — DOI: [10.1088/0264-9381/6/10/001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/6/10/001).
29. *Fiziev P.* Gravitational field of massive point particle in general relativity. — 2003. — arXiv: [gr-qc/0306088](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0306088).
30. *Welling M.* Some approaches to 2+1-dimensional gravity coupled to point particles // 7th Summer School: Theoretical and Mathematical Physics. — 1995. — arXiv: [hep-th/9511211](https://arxiv.org/abs/hep-th/9511211).
31. *Carlip S.* Exact quantum scattering in 2+1 dimensional gravity // Nucl. Phys. B. — 1989. — Vol. 324. — P. 106–122. — DOI: [10.1016/0550-3213\(89\)90183-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90183-1).
32. *Gegenberg J., Kunstatter G., Leivo H.* Topological matter coupled to gravity in 2+1 dimensions // Phys. Lett. B. — 1990. — Vol. 252. — P. 381–386. — DOI: [10.1016/0370-2693\(90\)90556-L](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90556-L).
33. *Carlip S., Gegenberg J.* Gravitating topological matter in 2+1 dimensions // Phys. Rev. D. — 1991. — Vol. 44. — P. 424–432. — DOI: [10.1103/PhysRevD.44.424](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.44.424).

34. *Grats Y., García A.* Topological interactions in (2+1)-gravity: classical fields // *Class. Quant. Grav.* — 1996. — Vol. 13. — P. 189–197. — DOI: [10.1088/0264-9381/13/2/007](https://doi.org/10.1088/0264-9381/13/2/007).
35. *Dayi Ö. F.* Quantization of the $N=2m$ simple supergravity in $d=2+1$ // *Phys. Lett. B.* — 1990. — Vol. 234. — P. 25–29. — DOI: [10.1016/0370-2693\(90\)91995-N](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)91995-N).
36. *De Wit B., Matschull H.-J., Nicolai H.* Physical states in $d=3$, $N=2$ supergravity // *Phys. Lett. B.* — 1993. — Vol. 318. — P. 115–121. — DOI: [10.1016/0370-2693\(93\)91793-M](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)91793-M). — arXiv: [gr-qc/9309006](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9309006).
37. *Alkaç G. et al.* Massive $\mathcal{N} = 2$ supergravity in three dimensions // *J. High Eng. Phys.* — 2015. — Vol. 02. — P. 125. — DOI: [10.1007/JHEP02\(2015\)125](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2015)125). — arXiv: [1412.3118](https://arxiv.org/abs/1412.3118) [[hep-th](#)].
38. *Deser S., Yang Z.* Is topologically massive gravity renormalisable? // *Class. Quant. Grav.* — 1990. — Vol. 7. — P. 1603–1612. — DOI: [10.1088/0264-9381/7/9/012](https://doi.org/10.1088/0264-9381/7/9/012).
39. *Keszthelyi B., Kleppe G.* Renormalizability of $D=3$ topologically massive gravity // *Phys. Lett. B.* — 1992. — Vol. 281. — P. 33–35. — DOI: [10.1016/0370-2693\(92\)90270-E](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)90270-E).
40. *Bergshoeff E. A., Hohm O., Townsend P. K.* Massive gravity in three dimensions // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 102. — P. 201301. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.102.201301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.201301). — arXiv: [0901.1766](https://arxiv.org/abs/0901.1766) [[hep-th](#)].
41. *Brooks R., Lifschytz G.* Quantum gravity and equivariant cohomology // *Nucl. Phys. B.* — 1995. — Vol. 438. — P. 211–232. — DOI: [10.1016/0550-3213\(95\)00027-P](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00027-P). — arXiv: [hep-th/9407177](https://arxiv.org/abs/hep-th/9407177).
42. *Carlip S.* Measuring the metric in (2+1)-dimensional quantum gravity // *Class. Quant. Grav.* — 1991. — Vol. 8. — P. 5–18. — DOI: [10.1088/0264-9381/8/1/007](https://doi.org/10.1088/0264-9381/8/1/007).
43. *Falbo-Kenkel M. K., Mansouri F.* Nonperturbative two-body dynamics in 2+1-dimensional gravity // *J. Math. Phys.* — 1993. — Vol. 34. — P. 139–153. — DOI: [10.1063/1.530396](https://doi.org/10.1063/1.530396).
44. *Kabat D., Ortiz M. E.* Canonical quantization and braid invariance of (2+1)-dimensional gravity coupled to point particles // *Phys. Rev. D.* — 1994. — Vol. 49. — P. R1684(R). — DOI: [10.1103/PhysRevD.49.R1684](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.R1684). — arXiv: [hep-th/9305155](https://arxiv.org/abs/hep-th/9305155).
45. *Meusburger C., Schroers B. J.* Poisson structure and symmetry in the Chern-Simons formulation of (2+1)-dimensional gravity // *Class. Quant. Grav.* — 2003. — Vol. 20. — P. 2193–2234. — DOI: [10.1088/0264-9381/20/11/318](https://doi.org/10.1088/0264-9381/20/11/318). — arXiv: [gr-qc/0301108](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0301108).
46. *Meusburger C., Schroers B. J.* Boundary conditions and symplectic structure in the Chern-Simons formulation of (2+1)-dimensional gravity // *Class. Quant. Grav.* — 2005. — Vol. 22. — P. 3689–3724. — DOI: [10.1088/0264-9381/22/17/021](https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/17/021). — arXiv: [gr-qc/0505071](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0505071).
47. *Constantinidis C. P., Oporto Z., Piguet O.* Loop quantization of a model for $D=1+2$ (anti)de Sitter gravity coupled to topological matter // *Class. Quant. Grav.* — 2015. — Vol. 32. — P. 055007. — DOI: [10.1088/0264-9381/32/5/055007](https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/5/055007). — arXiv: [1403.7217](https://arxiv.org/abs/1403.7217) [[gr-qc](#)].

48. *Carlip S.* A phase space path integral for (2+1)-dimensional gravity // *Class. Quant. Grav.* — 1995. — Vol. 12. — P. 2201–2208. — DOI: [10.1088/0264-9381/12/9/007](https://doi.org/10.1088/0264-9381/12/9/007). — arXiv: [gr-qc/9504033](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9504033).
49. *Carlip S.* Notes on the (2+1)-dimensional Wheeler-DeWitt equation // *Class. Quant. Grav.* — 1994. — Vol. 11. — P. 31–40. — DOI: [10.1088/0264-9381/11/1/007](https://doi.org/10.1088/0264-9381/11/1/007). — arXiv: [gr-qc/9309002](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9309002).
50. *Regge T.* General relativity without coordinates // *Il Nuovo Cim. (1955-1965)*. — 1961. — Vol. 19. — P. 558–571. — DOI: [10.1007/BF02733251](https://doi.org/10.1007/BF02733251).
51. *Romano J. D.* Geometrodynamics vs. connection dynamics // *Gen. Rel. Grav.* — 1993. — Vol. 25. — P. 759–854. — DOI: [10.1007/BF00758384](https://doi.org/10.1007/BF00758384). — arXiv: [gr-qc/9303032](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9303032).
52. *Cianfrani F.* et al. *Canonical quantum gravity: Fundamentals and recent developments.* — World Scientific, 2014.
53. *Dirac P. A. M.* Fixation of coordinates in the Hamiltonian theory of gravitation // *Phys. Rev.* — 1959. — Vol. 114. — P. 924. — DOI: [10.1103/PhysRev.114.924](https://doi.org/10.1103/PhysRev.114.924).
54. *Arnowitt R., Deser S., Misner C. W.* Dynamical structure and definition of energy in general relativity // *Phys. Rev.* — 1959. — Vol. 116. — P. 1322. — DOI: [10.1103/PhysRev.116.1322](https://doi.org/10.1103/PhysRev.116.1322).
55. *Carlip S.* Lectures on (2+1)-dimensional gravity // *J. Korean Phys. Soc.* — 1995. — Vol. 28. — P. S447–S467. — arXiv: [gr-qc/9503024](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9503024).
56. *Moncrief V.* Reduction of the Einstein equations in 2+1 dimensions to a Hamiltonian system over Teichmüller space // *J. Math. Phys.* — 1989. — Vol. 30. — P. 2907–2914. — DOI: [10.1063/1.528475](https://doi.org/10.1063/1.528475).
57. *Hosoya A., Nakao K.* (2+1)-dimensional pure gravity for an arbitrary closed initial surface // *Class. Quant. Grav.* — 1990. — Vol. 7. — P. 163. — DOI: [10.1088/0264-9381/7/2/010](https://doi.org/10.1088/0264-9381/7/2/010).
58. *Mess G.* Lorentz spacetimes of constant curvature // *Geom. Dedicata.* — 2007. — Vol. 126. — P. 3–45. — DOI: [10.1007/s10711-007-9155-7](https://doi.org/10.1007/s10711-007-9155-7). — arXiv: [0706.1570v1](https://arxiv.org/abs/0706.1570v1).
59. *York Jr. J. W.* Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation // *Phys. Rev. Lett.* — 1972. — Vol. 28. — P. 1082–1085. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.28.1082](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.1082).
60. *Achúcarro A., Townsend P. K.* A Chern-Simons action for three-dimensional anti-de Sitter supergravity theories // *Phys. Lett. B.* — 1986. — Vol. 180. — P. 89–92. — DOI: [10.1016/0370-2693\(86\)90140-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(86)90140-1).
61. *Ashtekar A., Romano J. D.* Chern-Simons and palatini actions and (2+1)-gravity // *Phys. Lett. B.* — 1989. — Vol. 229. — P. 56–60. — DOI: [10.1016/0370-2693\(89\)90155-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(89)90155-X).
62. *Nelson J. E., Regge T.* 2+1 quantum gravity for high genus // *Class. Quant. Grav.* — 1992. — Vol. 9. — P. S187–S196. — DOI: [10.1088/0264-9381/9/s/012](https://doi.org/10.1088/0264-9381/9/s/012).
63. *Nelson J. E., Regge T.* Homotopy groups and 2+1 dimensional quantum gravity // *Nucl. Phys. B.* — 1989. — Vol. 328. — P. 190–202. — DOI: [10.1016/0550-3213\(89\)90099-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90099-0).

64. *Nelson J. E., Regge T.* 2+1 quantum gravity // *Phys. Lett. B.* — 1991. — Vol. 272. — P. 213–216. — DOI: [10.1016/0370-2693\(91\)91822-D](https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)91822-D).
65. *Thurston W. P.* The geometry and topology of three-manifolds. — Princeton university press, 1979.
66. *Sullivan D., Thurston W.* Manifolds with canonical coordinate charts: some examples // *Enseign. Math. (2).* — 1983. — Vol. 29. — P. 15–25.
67. *Loll R.* Wilson loop coordinates for 2+1 gravity // 7th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity (MG 7). — 1994. — P. 807–810.
68. *Fujiwara Y.* Geometrical construction of holonomy in three-dimensional hyperbolic manifold // *Class. Quant. Grav.* — 1993. — Vol. 10. — P. 219–232. — DOI: [10.1088/0264-9381/10/2/005](https://doi.org/10.1088/0264-9381/10/2/005).
69. *Ezawa K.* Classical and quantum evolutions of the de Sitter and the anti-de Sitter universes in 2+1 dimensions // *Phys. Rev. D.* — 1994. — Vol. 49. — P. 5211–5226. — DOI: [10.1103/PhysRevD.49.5211](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.5211). — arXiv: [hep-th/9311103](https://arxiv.org/abs/hep-th/9311103).
70. *Ezawa K.* Addendum to “Classical and quantum evolutions of the de Sitter and the anti-de Sitter universes in 2+1 dimensions” // *Phys. Rev. D.* — 1994. — Vol. 50. — P. 2935–2938. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.2935](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.2935). — arXiv: [hep-th/9403160](https://arxiv.org/abs/hep-th/9403160).
71. *Witten E.* Quantization of Chern-Simons gauge theory with complex gauge group // *Commun. Math. Phys.* — 1991. — Vol. 137. — P. 29–66. — DOI: [10.1007/BF02099116](https://doi.org/10.1007/BF02099116).
72. *Nelson J. E., Regge T., Zertuche F.* Homotopy groups and (2+1)-dimensional quantum de Sitter gravity // *Nucl. Phys. B.* — 1990. — Vol. 339. — P. 516–532. — DOI: [10.1016/0550-3213\(90\)90359-L](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90359-L).
73. *Goldman W. M.* The symplectic nature of fundamental groups of surfaces // *Adv. Math.* — 1984. — Vol. 54. — P. 200–225. — DOI: [10.1016/0001-8708\(84\)90040-9](https://doi.org/10.1016/0001-8708(84)90040-9).
74. *Martin S. P.* Observables in 2+1 dimensional Gravity // *Nucl. Phys. B.* — 1989. — Vol. 327. — P. 178–204. — DOI: [10.1016/0550-3213\(89\)90291-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90291-5).
75. *Ashtekar A.* Lectures on non-perturbative canonical gravity. — World scientific, 1991.
76. *Carlip S.* Quantum gravity in 2+1 dimensions. — Cambridge university press, 2003.
77. *Carlip S.* Quantum gravity in 2+1 dimensions: The case of a closed universe // *Living Rev. Rel.* — 2005. — Vol. 8. — P. 1. — DOI: [10.12942/lrr-2005-1](https://doi.org/10.12942/lrr-2005-1). — arXiv: [gr-qc/0409039](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0409039).
78. *Puzio R.* On the square root of the Laplace–Beltrami operator as a Hamiltonian // *Class. Quant. Grav.* — 1994. — Vol. 11. — P. 609. — DOI: [10.1088/0264-9381/11/3/013](https://doi.org/10.1088/0264-9381/11/3/013).
79. *Miyake T.* Modular forms. — Springer Science & Business Media, 2006.
80. *Witten E.* Quantum field theory and the Jones polynomial // *Commun. Math. Phys.* — 1989. — Vol. 121. — P. 351–399. — DOI: [10.1007/BF01217730](https://doi.org/10.1007/BF01217730).

81. *Schwarz A. S.* The partition function of a degenerate functional // Commun. Math. Phys. — 1979. — Vol. 67. — P. 1–16. — DOI: [10.1007/BF01223197](https://doi.org/10.1007/BF01223197).
82. *Elitzur S.* et al. Remarks on the canonical quantization of the Chern-Simons-Witten theory // Nucl. Phys. B. — 1989. — Vol. 326. — P. 108–134. — DOI: [10.1016/0550-3213\(89\)90436-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90436-7).
83. *Axelrod S., Della Pietra S., Witten E.* Geometric quantization of Chern-Simons gauge theory // J. Diff. Geom. — 1991. — Vol. 33. — P. 787–902. — DOI: [10.4310/jdg/1214446565](https://doi.org/10.4310/jdg/1214446565).
84. *Bar-Natan D., Witten E.* Perturbative expansion of Chern-Simons theory with non-compact gauge group // Commun. Math. Phys. — 1991. — Vol. 141. — P. 423–440. — DOI: [10.1007/BF02101513](https://doi.org/10.1007/BF02101513).
85. *Hayashi N.* Quantum Hilbert space of G_C Chern-Simons-Witten theory and gravity // Prog. Theor. Phys. Suppl. — 1993. — Vol. 114. — P. 125–147. — DOI: [10.1143/PTPS.114.125](https://doi.org/10.1143/PTPS.114.125).
86. *Gukov S.* Three-dimensional quantum gravity, Chern-Simons theory, and the A-polynomial // Commun. Math. Phys. — 2005. — Vol. 255. — P. 577–627. — DOI: [10.1007/s00220-005-1312-y](https://doi.org/10.1007/s00220-005-1312-y). — arXiv: [hep-th/0306165](https://arxiv.org/abs/hep-th/0306165).
87. *Nelson J. E., Regge T.* Quantization of 2+1 gravity for genus 2 // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 50. — P. 5125–5129. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.5125](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.5125). — arXiv: [gr-qc/9311029](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9311029).
88. *Buffenoir E., Noui K., Roche P.* Hamiltonian quantization of Chern-Simons theory with $SL(2, \mathbb{C})$ group // Class. Quant. Grav. — 2002. — Vol. 19. — P. 4953. — DOI: [10.1088/0264-9381/19/19/313](https://doi.org/10.1088/0264-9381/19/19/313). — arXiv: [hep-th/0202121](https://arxiv.org/abs/hep-th/0202121).
89. *Nelson J. E., Picken R. F.* Quantum holonomies in (2+1)-dimensional gravity // Phys. Lett. B. — 2000. — Vol. 471. — P. 367–372. — DOI: [10.1016/S0370-2693\(99\)01407-0](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(99)01407-0). — arXiv: [gr-qc/9911005](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9911005).
90. *Carlip S., Nelson J. E.* Comparative quantizations of (2+1)-dimensional gravity // Phys. Rev. D. — 1995. — Vol. 51. — P. 5643–5653. — DOI: [10.1103/PhysRevD.51.5643](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.5643). — arXiv: [gr-qc/9411031](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9411031).
91. *Carlip S., Nelson J. E.* Equivalent quantisations of (2+1)-dimensional gravity // Phys. Lett. B. — 1994. — Vol. 324. — P. 299–302. — DOI: [10.1016/0370-2693\(94\)90197-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)90197-X). — arXiv: [gr-qc/9311007](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9311007).
92. *Kuchař K. V.* Time and interpretations of quantum gravity // Int. J. Mod. Phys. D. — 2011. — Vol. 20. — P. 3–86. — DOI: [10.1142/S0218271811019347](https://doi.org/10.1142/S0218271811019347).
93. *Ashtekar A., Magnon A.* Quantum fields in curved space-times // Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1975. — Vol. 346. — P. 375–394. — DOI: [10.1098/rspa.1975.0181](https://doi.org/10.1098/rspa.1975.0181).
94. *Crnković C., Witten E.* Covariant description of canonical formalism in geometrical theories. // Three hundred years of gravitation. — 1987. — P. 676–684.
95. *Wald R. M.* Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics. — University of Chicago press, 1994.

96. *Rovelli C.* Quantum mechanics without time: A model // *Phys. Rev. D.* — 1990. — Vol. 42. — P. 2638–2646. — DOI: [10.1103/PhysRevD.42.2638](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.42.2638).
97. *Rovelli C.* Time in quantum gravity: An hypothesis // *Phys. Rev. D.* — 1991. — Vol. 43. — P. 442–456. — DOI: [10.1103/PhysRevD.43.442](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.43.442).
98. *Dirac P. A. M.* Generalized Hamiltonian dynamics // *Can. J. Math.* — 1950. — Vol. 2. — P. 129–148. — DOI: [10.4153/CJM-1950-012-1](https://doi.org/10.4153/CJM-1950-012-1).
99. *Dirac P. A. M.* The Hamiltonian form of field dynamics // *Can. J. Math.* — 1951. — Vol. 3. — P. 1–23. — DOI: [10.4153/CJM-1951-001-2](https://doi.org/10.4153/CJM-1951-001-2).
100. *Dirac P. A. M.* Generalized Hamiltonian dynamics // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* — 1958. — Vol. 246. — P. 326–332. — DOI: [10.1098/rspa.1958.0141](https://doi.org/10.1098/rspa.1958.0141).
101. *Henneaux M.* Coordinate invariant states for quantum gravity in 2+1 dimensions // *Phys. Lett. B.* — 1984. — Vol. 134. — P. 184–186. — DOI: [10.1016/0370-2693\(84\)90667-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(84)90667-1).
102. *Henneaux M., Teitelboim C.* Quantization of gauge systems. — Princeton university press, 1992.
103. *Carlip S., Cosgrove R.* Topology change in (2+1)-dimensional gravity // *J. Math. Phys.* — 1994. — Vol. 35. — P. 5477–5493. — DOI: [10.1063/1.530760](https://doi.org/10.1063/1.530760). — arXiv: [gr-qc/9406006](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9406006).
104. *Waelbroeck H.* 2+1 lattice gravity // *Class. Quant. Grav.* — 1990. — Vol. 7. — P. 751–769. — DOI: [10.1088/0264-9381/7/5/006](https://doi.org/10.1088/0264-9381/7/5/006).
105. *Waelbroeck H.* Time-dependent solutions of 2+1 gravity // *Phys. Rev. Lett.* — 1990. — Vol. 64. — P. 2222–2225. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.64.2222](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.2222).
106. *Waelbroeck H.* Solving the time-evolution problem in 2+1 gravity // *Nucl. Phys. B.* — 1991. — Vol. 364. — P. 475–494. — DOI: [10.1016/0550-3213\(91\)90594-N](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90594-N).
107. *Waelbroeck H.* Canonical quantization of (2+1)-dimensional gravity // *Phys. Rev. D.* — 1994. — Vol. 50. — P. 4982–4992. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.4982](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.4982). — arXiv: [gr-qc/9401022](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9401022).
108. *'t Hooft G.* Classical N-particle cosmology in 2+1 dimensions // *Class. Quant. Grav.* — 1993. — Vol. 10. — P. S79. — DOI: [10.1088/0264-9381/10/S/008](https://doi.org/10.1088/0264-9381/10/S/008).
109. *'t Hooft G.* Causality in (2+1)-dimensional gravity // *Class. Quant. Grav.* — 1992. — Vol. 9. — P. 1335. — DOI: [10.1088/0264-9381/9/5/015](https://doi.org/10.1088/0264-9381/9/5/015).
110. *'t Hooft G.* Quantization of point particles in (2+1)-dimensional gravity and spacetime discreteness // *Class. Quant. Grav.* — 1996. — Vol. 13. — P. 1023. — DOI: [10.1088/0264-9381/13/5/018](https://doi.org/10.1088/0264-9381/13/5/018). — arXiv: [gr-qc/9601014](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9601014).
111. *'t Hooft G.* The evolution of gravitating point particles in 2+1 dimensions // *Class. Quant. Grav.* — 1993. — Vol. 10. — P. 1023. — DOI: [10.1088/0264-9381/10/5/019](https://doi.org/10.1088/0264-9381/10/5/019).
112. *'t Hooft G.* Canonical quantization of gravitating point particles in 2+1 dimensions // *Class. Quant. Grav.* — 1993. — Vol. 10. — P. 1653. — DOI: [10.1088/0264-9381/10/8/022](https://doi.org/10.1088/0264-9381/10/8/022). — arXiv: [gr-qc/9305008](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9305008).

113. *Bañados M.* et al. Geometry of the 2+1 black hole // Phys. Rev. D. — 1993. — Vol. 48. — P. 1506–1525. — DOI: [10.1103/PhysRevD.48.1506](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.48.1506). — arXiv: [gr-qc/9302012](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9302012). — [Erratum: Phys.Rev.D 88, 069902 (2013)].
114. *Carlip S.* The (2+1)-dimensional black hole // Class. Quant. Grav. — 1995. — Vol. 12. — P. 2853–2880. — DOI: [10.1088/0264-9381/12/12/005](https://doi.org/10.1088/0264-9381/12/12/005). — arXiv: [gr-qc/9506079](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9506079).
115. *Brotz T.* Quantization of black holes in the Wheeler-DeWitt approach // Phys. Rev. D. — 1998. — Vol. 57. — P. 2349–2362. — DOI: [10.1103/PhysRevD.57.2349](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.57.2349). — arXiv: [gr-qc/9708066](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9708066).
116. *Brill D.* Black holes and wormholes in 2+1 dimensions // Mathematical and Quantum Aspects of Relativity and Cosmology. Lecture Notes in Physics. Vol. 537. — 2000. — P. 143–179. — DOI: [10.1007/3-540-46671-1_6](https://doi.org/10.1007/3-540-46671-1_6). — arXiv: [gr-qc/9904083](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9904083).
117. *Keski-Vakkuri E.* Bulk and boundary dynamics in BTZ black holes // Phys. Rev. D. — 1999. — Vol. 59. — P. 104001. — DOI: [10.1103/PhysRevD.59.104001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.59.104001). — arXiv: [hep-th/9808037](https://arxiv.org/abs/hep-th/9808037).
118. *Cruz N., Martínez C., Peña L.* Geodesic structure of the (2+1)-dimensional BTZ black hole // Class. Quant. Grav. — 1994. — Vol. 11. — P. 2731–2740. — DOI: [10.1088/0264-9381/11/11/014](https://doi.org/10.1088/0264-9381/11/11/014). — arXiv: [gr-qc/9401025](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9401025).
119. *Farina C., Gamboa J., Segui-Santonja A. J.* Motion and trajectories of particles around three-dimensional black holes // Class. Quant. Grav. — 1993. — Vol. 10. — P. L193–L200. — DOI: [10.1088/0264-9381/10/11/001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/10/11/001). — arXiv: [gr-qc/9303005](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9303005).
120. *Larsen A. L., Sánchez N. G.* Strings propagating in the (2+1)-dimensional black hole anti-de Sitter spacetime // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 50. — P. 7493–7518. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.7493](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.7493). — arXiv: [hep-th/9405026](https://arxiv.org/abs/hep-th/9405026).
121. *Clément G.* Spinning charged BTZ black holes and self-dual particle-like solutions // Phys. Lett. B. — 1996. — Vol. 367. — P. 70–74. — DOI: [10.1016/0370-2693\(95\)01464-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(95)01464-0). — arXiv: [gr-qc/9510025](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9510025).
122. *Kamata M., Koikawa T.* The electrically charged BTZ black hole with self (anti-self) dual Maxwell field // Phys. Lett. B. — 1995. — Vol. 353. — P. 196–200. — DOI: [10.1016/0370-2693\(95\)00583-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(95)00583-7). — arXiv: [hep-th/9505037](https://arxiv.org/abs/hep-th/9505037).
123. *Kim H.* Spinning BTZ black hole versus Kerr black hole: A closer look // Phys. Rev. D. — 1999. — Vol. 59. — P. 064002. — DOI: [10.1103/PhysRevD.59.064002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.59.064002). — arXiv: [gr-qc/9809047](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9809047).
124. *Brill D. R.* Multi-black-hole geometries in (2+1)-dimensional gravity // Phys. Rev. D. — 1996. — Vol. 53. — P. R4133(R). — DOI: [10.1103/PhysRevD.53.R4133](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.R4133). — arXiv: [gr-qc/9511022](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9511022).
125. *Clément G.* Multiwormholes and multi-black-holes in three dimensions // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 50. — P. R7119(R). — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.R7119](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.R7119). — arXiv: [gr-qc/9402013](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9402013).

126. *Coussaert O., Henneaux M.* Supersymmetry of the (2+1)-dimensional black holes // Phys. Rev. Lett. — 1994. — Vol. 72. — P. 183–186. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.72.183](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.183). — arXiv: [hep-th/9310194](https://arxiv.org/abs/hep-th/9310194).
127. *Chan J. S. F., Chan K. C. K., Mann R. B.* Interior structure of a spinning black hole in 2+1 dimensions // Phys. Rev. D. — 1996. — Vol. 54. — P. 1535–1539. — DOI: [10.1103/PhysRevD.54.1535](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.54.1535). — arXiv: [gr-qc/9406049](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9406049).
128. *Avis S. J., Isham C. J., Storey D.* Quantum field theory in anti-de Sitter space-time // Phys. Rev. D. — 1978. — Vol. 18. — P. 3565. — DOI: [10.1103/PhysRevD.18.3565](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.18.3565).
129. *Lifschytz G., Ortiz M.* Scalar field quantization on the (2+1)-dimensional black hole background // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 49. — P. 1929–1943. — DOI: [10.1103/PhysRevD.49.1929](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.1929). — arXiv: [gr-qc/9310008](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9310008).
130. *Shiraishi K., Maki T.* Quantum fluctuation of stress tensor and black holes in three dimensions // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 49. — P. 5286–5294. — DOI: [10.1103/PhysRevD.49.5286](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.5286). — arXiv: [1804.07872 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1804.07872).
131. *Steif A. R.* The Quantum stress tensor in the three-dimensional black hole // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 49. — P. R585(R). — DOI: [10.1103/PhysRevD.49.R585](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.R585). — arXiv: [gr-qc/9308032](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9308032).
132. *Ichinose I., Satoh Y.* Entropies of scalar fields on three dimensional black holes // Nucl. Phys. B. — 1995. — Vol. 447. — P. 340–372. — DOI: [10.1016/0550-3213\(95\)00197-Z](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00197-Z). — arXiv: [hep-th/9412144](https://arxiv.org/abs/hep-th/9412144).
133. *Gibbons G. W., Hawking S. W.* Action integrals and partition functions in quantum gravity // Phys. Rev. D. — 1977. — Vol. 15. — P. 2752. — DOI: [10.1103/PhysRevD.15.2752](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.15.2752).
134. *Brown J. D., York Jr. J. W.* Microcanonical functional integral for the gravitational field // Phys. Rev. D. — 1993. — Vol. 47. — P. 1420–1431. — DOI: [10.1103/PhysRevD.47.1420](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.47.1420). — arXiv: [gr-qc/9209014](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9209014).
135. *Englert F., Reznik B.* Entropy generation by tunneling in 2+1 gravity // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 50. — P. 2692–2699. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.2692](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.2692). — arXiv: [gr-qc/9401010](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9401010).
136. *Wald R. M.* Black hole entropy is the Noether charge // Phys. Rev. D. — 1993. — Vol. 48. — P. R3427(R). — DOI: [10.1103/PhysRevD.48.R3427](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.48.R3427). — arXiv: [gr-qc/9307038](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9307038).
137. *Carlip S., Teitelboim C.* Aspects of black hole quantum mechanics and thermodynamics in 2+1 dimensions // Phys. Rev. D. — 1995. — Vol. 51. — P. 622–631. — DOI: [10.1103/PhysRevD.51.622](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.622). — arXiv: [gr-qc/9405070](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9405070).
138. *Brown J. D., Creighton J., Mann R. B.* Temperature, energy, and heat capacity of asymptotically anti-de Sitter black holes // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 50. — P. 6394–6403. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.6394](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.6394). — arXiv: [gr-qc/9405007](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9405007).

139. *Carlip S., Gegenberg J., Mann R. B.* Black holes in three-dimensional topological gravity // Phys. Rev. D. — 1995. — Vol. 51. — P. 6854–6859. — DOI: [10.1103/PhysRevD.51.6854](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.6854). — arXiv: [gr-qc/9410021](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9410021).
140. *Deser S., Mazur P. O.* Static solutions in D=3 Einstein-Maxwell theory // Class. Quant. Grav. — 1985. — Vol. 2. — P. L51. — DOI: [10.1088/0264-9381/2/3/003](https://doi.org/10.1088/0264-9381/2/3/003).
141. *Gott J. R., Simon J. Z., Alpert M.* General relativity in a (2+1)-dimensional space-time: An electrically charged solution // Gen. Relat. Gravit. — 1986. — Vol. 18. — P. 1019–1035. — DOI: [10.1007/BF01090483](https://doi.org/10.1007/BF01090483).
142. *Melvin M. A.* Exterior solutions for electric and magnetic stars in 2+1 dimensions // Class. Quant. Grav. — 1986. — Vol. 3. — P. 117. — DOI: [10.1088/0264-9381/3/1/014](https://doi.org/10.1088/0264-9381/3/1/014).
143. *Chan K. C. K., Mann R. B.* Static charged black holes in (2+1)-dimensional dilaton gravity // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 50. — P. 6385. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.6385](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.6385). — arXiv: [gr-qc/9404040](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9404040). — [Erratum: Phys.Rev.D 52, 2600 (1995)].
144. *Sá P. M., Kleber A., Lemos J. P. S.* Black holes in three-dimensional dilaton gravity theories // Class. Quant. Grav. — 1996. — Vol. 13. — P. 125–138. — DOI: [10.1088/0264-9381/13/1/011](https://doi.org/10.1088/0264-9381/13/1/011). — arXiv: [hep-th/9503089](https://arxiv.org/abs/hep-th/9503089).
145. *Kaloper N.* Miens of the three-dimensional black hole // Phys. Rev. D. — 1993. — Vol. 48. — P. 2598–2605. — DOI: [10.1103/PhysRevD.48.2598](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.48.2598). — arXiv: [hep-th/9303007](https://arxiv.org/abs/hep-th/9303007).
146. *Horowitz G. T., Welch D. L.* String theory formulation of the three-dimensional black hole // Phys. Rev. Lett. — 1993. — Vol. 71. — P. 328–331. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.71.328](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.328). — arXiv: [hep-th/9302126](https://arxiv.org/abs/hep-th/9302126).
147. *Birmingham D., Sachs I., Sen S.* Three-dimensional black holes and string theory // Phys. Lett. B. — 1997. — Vol. 413. — P. 281–286. — DOI: [10.1016/S0370-2693\(97\)01125-8](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(97)01125-8). — arXiv: [hep-th/9707188](https://arxiv.org/abs/hep-th/9707188).
148. *Horowitz G. T., Welch D. L.* Duality invariance of the Hawking temperature and entropy // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 49. — P. R590(R). — DOI: [10.1103/PhysRevD.49.R590](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.R590). — arXiv: [hep-th/9308077](https://arxiv.org/abs/hep-th/9308077).
149. *Ghoroku K., Larsen A. L.* Hawking temperature and string scattering off the 2+1 black hole // Phys. Lett. B. — 1994. — Vol. 328. — P. 28–35. — DOI: [10.1016/0370-2693\(94\)90423-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)90423-5). — arXiv: [hep-th/9403008](https://arxiv.org/abs/hep-th/9403008).
150. *Deser S., Jackiw R., Templeton S.* Three-dimensional massive gauge theories // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 48. — P. 975. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.48.975](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.975).
151. *Deser S., Jackiw R., Templeton S.* Topologically massive gauge theories // Annals Phys. — 1982. — Vol. 140. — P. 372–411. — DOI: [10.1016/0003-4916\(82\)90164-6](https://doi.org/10.1016/0003-4916(82)90164-6).
152. *Hájíček P., Kiefer C.* Embedding variables in the canonical theory of gravitating shells // Nucl. Phys. B. — 2001. — Vol. 603. — P. 531–554. — DOI: [10.1016/S0550-3213\(01\)00141-9](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(01)00141-9). — arXiv: [hep-th/0007004](https://arxiv.org/abs/hep-th/0007004).

153. *Jeziernski J., Kijowski J., Czuchry E.* Dynamics of a self-gravitating light like matter shell: A gauge-invariant Lagrangian and Hamiltonian description // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Vol. 65. — P. 064036. — DOI: [10.1103/PhysRevD.65.064036](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.064036). — arXiv: [gr-qc/0110018](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0110018).
154. *Kijowski J., Czuchry E.* Dynamics of a self-gravitating shell of matter // *Phys. Rev. D.* — 2005. — Vol. 72. — P. 084015. — DOI: [10.1103/PhysRevD.72.084015](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.72.084015). — arXiv: [gr-qc/0507074](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0507074).
155. *Vogt D., Letelier P. S.* Newtonian and general relativistic models of spherical shells // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2010. — Vol. 402. — P. 1313–1316. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2009.15967.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15967.x). — arXiv: [0911.4822](https://arxiv.org/abs/0911.4822) [[gr-qc](#)].
156. *Hájíček P.* Quantum mechanics of gravitational collapse // *Commun. Math. Phys.* — 1992. — Vol. 150. — P. 545–559. — DOI: [10.1007/BF02096961](https://doi.org/10.1007/BF02096961).
157. *Hájíček P., Kay B. S., Kuchař K. V.* Quantum collapse of a self-gravitating shell: Equivalence to Coulomb scattering // *Phys. Rev. D.* — 1992. — Vol. 46. — P. 5439. — DOI: [10.1103/PhysRevD.46.5439](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.46.5439).
158. *Casadio R.* Quantized shells as a tool for studying semiclassical effects in general relativity // *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* — 2000. — Vol. 88. — P. 273–276. — DOI: [10.1016/S0920-5632\(00\)00783-0](https://doi.org/10.1016/S0920-5632(00)00783-0). — arXiv: [gr-qc/9911088](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9911088).
159. *Vaz C., Witten L., Singh T. P.* Toward a quantization of null dust collapse // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Vol. 65. — P. 104016. — DOI: [10.1103/PhysRevD.65.104016](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.104016). — arXiv: [gr-qc/0112024](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0112024).
160. *'t Hooft G.* Non-perturbative 2 particle scattering amplitudes in 2+1 dimensional quantum gravity // *Commun. Math. Phys.* — 1988. — Vol. 117. — P. 685–700. — DOI: [10.1007/BF01218392](https://doi.org/10.1007/BF01218392).
161. *Koehler K. et al.* Two-particle scattering in the Chern Simons Witten theory of gravity in 2+1 dimensions // *Nucl. Phys. B.* — 1991. — Vol. 348. — P. 373–389. — DOI: [10.1016/0550-3213\(91\)90524-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90524-2).
162. *Hawking S. W.* Particle creation by black holes // *Commun. Math. Phys.* — 1975. — Vol. 43. — P. 199–220. — DOI: [10.1007/BF02345020](https://doi.org/10.1007/BF02345020).
163. *Penrose R.* Gravitational collapse: The role of general relativity // *NCimR.* — 1969. — Vol. 1. — P. 252.
164. *Alberghi G. L., Casadio R.* Gravitational collapse in anti-de Sitter space-time // *Phys. Lett. B.* — 2003. — Vol. 571. — P. 245–249. — DOI: [10.1016/j.physletb.2003.06.015](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2003.06.015). — arXiv: [gr-qc/0306002](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0306002).
165. *Alberghi G. L. et al.* Gravitational collapse of a radiating shell // *Phys. Rev. D.* — 2001. — Vol. 64. — P. 104012. — DOI: [10.1103/PhysRevD.64.104012](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.104012). — arXiv: [gr-qc/0102014](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0102014).

166. *Alberghi G. L. et al.* Gravitational collapse of a shell of quantized matter // *Class. Quant. Grav.* — 1999. — Vol. 16. — P. 131–147. — DOI: [10.1088/0264-9381/16/1/010](https://doi.org/10.1088/0264-9381/16/1/010). — arXiv: [gr-qc/9808026](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9808026).
167. *Kijowski J., Magli G., Malafarina D.* The Hamiltonian formulation for the dynamics of a multishell self-gravitating system // *J. Math. Phys.* — 2010. — Vol. 51. — P. 072504. — DOI: [10.1063/1.3431030](https://doi.org/10.1063/1.3431030).
168. *Berezin V., Smirnov A.* Towards a theory of thin selfgravitating crossing shells. — 2002. — arXiv: [gr-qc/0210084](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0210084).
169. *Jeziński J.* Geometry of crossing null shells // *J. Math. Phys.* — 2003. — Vol. 44. — P. 641–661. — DOI: [10.1063/1.1512973](https://doi.org/10.1063/1.1512973). — arXiv: [gr-qc/0406084](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0406084).
170. *Bronstein M. P.* Quantentheorie schwacher gravitationsfelder // *Phys. Z. Sowjetunion.* — 1936. — Vol. 9. — P. 140–157.
171. *Schmidt H.-J., Singleton D.* Exact radial solution in 2+1 gravity with a real scalar field // *Phys. Lett. B.* — 2013. — Vol. 721. — P. 294–298. — DOI: [10.1016/j.physletb.2013.03.007](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2013.03.007). — arXiv: [1212.1285 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1212.1285).
172. *Gurtug O., Mazharimousavi S. H., Halilsoy M.* Classical and quantum analysis of an Einstein-Scalar solution in 2+1 dimensions // *Eur. Phys. J. Plus.* — 2017. — Vol. 132. — P. 161. — DOI: [10.1140/epjp/i2017-11446-4](https://doi.org/10.1140/epjp/i2017-11446-4). — arXiv: [1703.05315 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1703.05315).
173. *Kamenshchik A. Y., Tronconi A., Venturi G.* The Born–Oppenheimer method, quantum gravity and matter // *Class. Quant. Grav.* — 2018. — Vol. 35. — P. 015012. — DOI: [10.1088/1361-6382/aa8fb3](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa8fb3). — arXiv: [1709.10361 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1709.10361).
174. *Struyve W.* Loop quantum cosmology and singularities // *Sci. Rep.* — 2017. — Vol. 7. — P. 8161. — DOI: [10.1038/s41598-017-06616-y](https://doi.org/10.1038/s41598-017-06616-y). — arXiv: [1703.10274 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1703.10274).
175. *Kuntz I., Casadio R.* Singularity avoidance in quantum gravity // *Phys. Lett. B.* — 2020. — Vol. 802. — P. 135219. — DOI: [10.1016/j.physletb.2020.135219](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135219). — arXiv: [1911.05037 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1911.05037).
176. *Andrianov A. A., Novikov O. O., Lan C.* Quantum cosmology of multifield scalar matter: Some exact solutions // *Theor. Math. Phys.* — 2015. — Vol. 184. — P. 1224–1233. — DOI: [10.1007/s11232-015-0328-5](https://doi.org/10.1007/s11232-015-0328-5). — arXiv: [1503.05527 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1503.05527).
177. *Hansen D., Hartong J., Obers N. A.* Non-relativistic gravity and its coupling to matter // *J. High Energ. Phys.* — 2020. — Vol. 06. — P. 145. — DOI: [10.1007/JHEP06\(2020\)145](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2020)145). — arXiv: [2001.10277 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/2001.10277).
178. *Kamenshchik A., Kiefer C., Kwidzinski N.* Classical and quantum cosmology of Born-Infeld type models // *Phys. Rev. D.* — 2016. — Vol. 93. — P. 083519. — DOI: [10.1103/PhysRevD.93.083519](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.083519). — arXiv: [1602.01319 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1602.01319).

179. *Louko J., Whiting B. F., Friedman J. L.* Hamiltonian spacetime dynamics with a spherical null-dust shell // *Phys. Rev. D.* — 1998. — Vol. 57. — P. 2279. — DOI: [10.1103/PhysRevD.57.2279](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.57.2279). — arXiv: [gr-qc/9708012](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9708012).
180. *Hájíček P.* Spherically symmetric gravitating shell as a reparametrization-invariant system // *Phys. Rev. D.* — 1998. — Vol. 57. — P. 936. — DOI: [10.1103/PhysRevD.57.936](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.57.936). — arXiv: [gr-qc/9708008](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9708008).
181. *Kijowski J., Magli G., Malafarina D.* New derivation of the variational principle for the dynamics of a gravitating spherical shell // *Physical Review D.* — 2006. — Vol. 74. — P. 084017. — DOI: [10.1103/PhysRevD.74.084017](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.74.084017).
182. *Hawkins E.* Quantum gravitational collapse of a charged dust shell // *Phys. Rev. D.* — 1994. — Vol. 49. — P. 6556. — DOI: [10.1103/PhysRevD.49.6556](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.6556). — arXiv: [gr-qc/9312033](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9312033). — [Erratum: *Phys.Rev.D* 50, 7744 (1994)].
183. *Campiglia M. et al.* Quantum self-gravitating collapsing matter in a quantum geometry // *Class. Quant. Grav.* — 2016. — Vol. 33. — P. 18LT01. — DOI: [10.1088/0264-9381/33/18/18LT01](https://doi.org/10.1088/0264-9381/33/18/18LT01). — arXiv: [1601.05688](https://arxiv.org/abs/1601.05688) [[gr-qc](#)].
184. *Berezin V., Dokuchaev V., Eroshenko Y.* The theory of spherically symmetric thin shells in conformal gravity // *Int. J. Mod. Phys. D.* — 2018. — Vol. 27. — P. 1841012. — DOI: [10.1142/S0218271818410122](https://doi.org/10.1142/S0218271818410122). — arXiv: [1710.10438](https://arxiv.org/abs/1710.10438) [[gr-qc](#)].
185. *Berezin V. A., Boyarsky A. M., Neronov A. Y.* Quantum geometrodynamics for black holes and wormholes // *Phys. Rev. D.* — 1998. — Vol. 57. — P. 1118–1128. — DOI: [10.1103/PhysRevD.57.1118](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.57.1118). — arXiv: [gr-qc/9708060](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9708060).
186. *Berezin V.* Towards a theory of quantum black holes // *Int. J. Mod. Phys. A.* — 2002. — Vol. 17. — P. 979–988. — DOI: [10.1142/S0217751X0201039X](https://doi.org/10.1142/S0217751X0201039X). — arXiv: [gr-qc/0112022](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0112022).
187. *Matschull H.-J., Welling M.* Quantum mechanics of a point particle in (2+1)-dimensional gravity // *Class. Quant. Grav.* — 1998. — Vol. 15. — P. 2981–3030. — DOI: [10.1088/0264-9381/15/10/008](https://doi.org/10.1088/0264-9381/15/10/008). — arXiv: [gr-qc/9708054](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9708054).
188. *Lindgren J.* Collisions of massive particles, timelike thin shells and formation of black holes in three dimensions // *J. High Energ. Phys.* — 2016. — Vol. 12. — P. 48. — DOI: [10.1007/JHEP12\(2016\)048](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2016)048). — arXiv: [1611.02973](https://arxiv.org/abs/1611.02973) [[hep-th](#)].
189. *Lindgren E. J.* Black hole formation from pointlike particles in three-dimensional anti-de Sitter space // *Class. Quant. Grav.* — 2016. — Vol. 33. — P. 145009. — DOI: [10.1088/0264-9381/33/14/145009](https://doi.org/10.1088/0264-9381/33/14/145009). — arXiv: [1512.05696](https://arxiv.org/abs/1512.05696) [[gr-qc](#)].
190. *Alekseev A. Y., Malkin A. Z.* Symplectic structure of the moduli space of flat connection on a Riemann surface // *Commun. Math. Phys.* — 1995. — Vol. 169. — P. 99–119. — DOI: [10.1007/BF02101598](https://doi.org/10.1007/BF02101598). — arXiv: [hep-th/9312004](https://arxiv.org/abs/hep-th/9312004).
191. *Meusburger C., Schroers B. J.* Phase space structure of Chern-Simons theory with a non-standard puncture // *Nucl. Phys. B.* — 2006. — Vol. 738. — P. 425–456. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2006.01.014](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2006.01.014). — arXiv: [hep-th/0505143](https://arxiv.org/abs/hep-th/0505143).

192. *Starodubtsev A. N.* New approach to calculating the spectrum of a quantum space-time // Theor. Math. Phys. — 2017. — Vol. 190. — P. 439–445. — DOI: [10.1134/S0040577917030138](https://doi.org/10.1134/S0040577917030138).
193. *Starodubtsev A. N.* Phase space of a gravitating particle and dimensional reduction at the Planck scale // Theor. Math. Phys. — 2015. — Vol. 185. — P. 1527–1532. — DOI: [10.1007/s11232-015-0362-3](https://doi.org/10.1007/s11232-015-0362-3).
194. *Ashtekar A., Singh P.* Loop quantum cosmology: a status report // Class. Quant. Grav. — 2011. — Vol. 28. — P. 213001. — DOI: [10.1088/0264-9381/28/21/213001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/21/213001). — arXiv: [1108.0893 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1108.0893).
195. *Casals M. et al.* Quantum backreaction on three-dimensional black holes and naked singularities // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Vol. 118. — P. 131102. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.131102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.131102). — arXiv: [1608.05366 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1608.05366).
196. *Casals M. et al.* Quantum-corrected rotating black holes and naked singularities in (2+1) dimensions // Phys. Rev. D. — 2019. — Vol. 99. — P. 104023. — DOI: [10.1103/PhysRevD.99.104023](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.104023). — arXiv: [1902.01583 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1902.01583).
197. *Carlip S.* Conformal field theory, (2+1)-dimensional gravity and the BTZ black hole // Class. Quant. Grav. — 2005. — Vol. 22. — P. R85. — DOI: [10.1088/0264-9381/22/12/R01](https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/12/R01). — arXiv: [gr-qc/0503022](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0503022).
198. *Empanan R., Frassino A. M., Way B.* Quantum BTZ black hole // J. High Energ. Phys. — 2020. — Vol. 11. — P. 137. — DOI: [10.1007/JHEP11\(2020\)137](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2020)137). — arXiv: [2007.15999 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2007.15999).
199. *Alekseev A. Y., Malkin A. Z.* Symplectic structures associated to Lie-Poisson groups // Commun. Math. Phys. — 1994. — Vol. 162. — P. 147–174. — DOI: [10.1007/BF02105190](https://doi.org/10.1007/BF02105190). — arXiv: [hep-th/9303038](https://arxiv.org/abs/hep-th/9303038).
200. *Chaichian M., Demichev A.* Introduction to quantum groups. — World Scientific, 1996.
201. *Gasper G., Rahman M., George G.* Basic hypergeometric series. — Cambridge university press, 2004.
202. *Buffenoir E., Roche P.* Harmonic analysis on the quantum Lorentz group // Commun. Math. Phys. — 1999. — Vol. 207. — P. 499–555. — DOI: [10.1007/s002200050736](https://doi.org/10.1007/s002200050736). — arXiv: [q-alg/9710022](https://arxiv.org/abs/q-alg/9710022).

List of Figures

1.1	The foliation of spacetime in the direction of time.	17
1.2	Two paths γ_1 and γ_2 intersecting at a point p	23
2.1	The BTZ black hole solutions in the Penrose diagram.	41
3.1	Dividing space into discs and a polygon.	57
3.2	Different regions characterizing the real global parameterization of the momentum space.	62
3.3	Absolute value of matrix element $\langle 1,0 \hat{U} 0,R^2\rangle$ describing gravitational collapse rate.	67
4.1	$II \rightarrow I$ (curve B) vs. $I \rightarrow II$ (curve A) transition rate.	84

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Элмахалави Яссер Реда Ахмед Абдельхамид

**КВАНТОВЫЕ АСПЕКТЫ ПРОБЛЕМЫ ВРЕМЕНИ В
ГРАВИТАЦИИ И КОСМОЛОГИИ**

Научная специальность 01.04.02 —
Теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

(Перевод с английского)

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Андрианов Александр Андреевич

Санкт-Петербург — 2021

Оглавление

Тезисы доклада	117
Благодарности	118
Введение	119
Глава 1. Теория (2+1)-мерной гравитации	125
1.1 Предварительные сведения	125
1.2 Лагранжевы формулировки	126
1.3 Классические решения для (2+1)-мерной гравитации	129
1.3.1 АДМ-формализм	129
1.3.2 Теория Черна-Саймонса	133
1.3.3 Геометрическая структура	135
1.4 Квантованные решения для (2+1)-мерной гравитации	139
1.4.1 Редуцированное квантование фазового пространства	139
1.4.2 Представление связности	141
1.4.3 Ковариантное каноническое квантование	143
1.4.4 Представление петель	144
1.4.5 Подход Уилера-Девитта	147
1.4.6 Интегралы по траекториям	149
1.4.7 Решеточные подходы	151
Глава 2. Черные дыры БТЗ	153
2.1 Предварительные сведения	153
2.2 Решения для черных дыр БТЗ	154
2.3 Трехмерное пространство Анти-де Ситтера	155
2.4 Квантовая теория поля в черной дыре БТЗ	156
2.5 Термодинамика	159
2.6 Обобщения черной дыры БТЗ	161
Глава 3. Квантование тонкой пылевой оболочки в сочетании с (2+1)-мерной гравитацией	163
3.1 Предварительные сведения	163
3.2 Канонический формализм для сферически симметричных пространств-времен в 2+1 Гравитации	165
3.2.1 Преобразование Кухаржа для (2+1)-мерной гравитации	167
3.2.2 Канонический анализ для (2+1)-мерной гравитации с тонкой оболочкой	168
3.3 Формализм первого порядка и импульсное пространство Анти-де Ситтера . .	171

3.3.1	Принцип действия и редукция фазового пространства	171
3.3.2	Связи	175
3.3.3	Скобки Пуассона	177
3.4	Квантование	179
3.4.1	Квантовая кинематика	179
3.4.2	Физические состояния	181
3.5	Квантовая динамика	182
3.6	Обсуждение	184
Глава 4. Квантовый анализ формирования БТЗ черной дыры вследствие		
	коллапса пылевой оболочки	185
4.1	Предварительные сведения	185
4.2	Глобальная параметризация AdS и БТЗ пространства-времени	187
4.3	Принцип действия и симплектическая форма	190
4.4	Связи	193
4.5	Вывод уравнений связей	196
4.6	Квантование	198
4.7	Квантовая динамика	200
4.8	Обсуждение	202
Глава 5. Пылевая оболочка вдали от горизонта черной дыры БТЗ		
5.1	Предварительные сведения	203
5.2	Симплектическая форма и классическая g -матрица	203
5.3	Матричные элементы представлений $SL_q(2)$	205
5.4	Гармонический анализ на $SL_q(2)$	208
5.5	Гамильтоново связи	212
5.6	Обсуждение	213
Заключение		214
Список литературы		216
Список рисунков		230

Тезисы доклада

Исследуется канонический анализ тонкой пылевой оболочки, взаимодействующей с $(2+1)$ -мерной гравитацией для различных значений космологической постоянной. Пространство-время имеет решение в виде плоского пространства и решение в виде черной дыры БТЗ для нулевой и отрицательной космологических констант соответственно. Импульсное пространство оказывается пространством AdS_2 , а глобальная параметризация для него дается углами Эйлера. В квантовой кинематике это приводит к некоммутативности в координатном пространстве и дискретности радиуса оболочки во времениподобной области, включающей точку коллапса. На уровне квантовой динамики квантование было выполнено для обоих значений космологической постоянной, в области, где некоммутативностью импульса можно пренебречь. Для отрицательной космологической постоянной квантование реализуется в окрестности горизонта. Некоммутативность импульса появляется далеко от горизонта и требует применения методов квантовых групп. Мы также находим амплитуды переходов между нулевыми и ненулевыми собственными значениями радиуса оболочки, которые описывают вероятность гравитационного коллапса (отскока). Их значения везде конечны, что можно интерпретировать как разрешение проблемы центральной сингулярности. проблемы центральной сингулярности.

Благодарности

Я искренне благодарен моему научному руководителю профессору Александру Андреевичу Андрианову за его ценные идеи и комментарии во время моей докторской программы. Его ободрение и поддержка оказывают мощное влияние на мою нынешнюю работу.

Я хотел бы выразить глубокую благодарность доктору Артему Николаевичу Стародубцеву за его любезную помощь и дискуссию. Его значительный вклад положительно повлиял на завершение моей докторской программы. Его ценные замечания и полезные предложения были очень важны для того, чтобы закончить мою докторскую диссертацию вовремя. Я очень ценю его усилия, направленные на то, чтобы подготовить мои последние публикации.

Я благодарен Санкт-Петербургскому государственному университету за любезное гостеприимство во время пребывания на кафедре физики высоких энергий и элементарных частиц, где зародилась эта работа. Я хотел бы поблагодарить всех сотрудников Кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц за их любезную помощь и обучение меня многочисленным теоретическим курсам для повышения моей квалификации.

Эта работа поддерживается грантом как египетского, так и российского правительств. Я хотел бы выразить глубокую благодарность всем сотрудникам физического факультета Университета Бенха за их любезную поддержку. Большое спасибо и признательность моей семье за поддержку в завершении моей докторской программы.

Введение

Общая теория относительности - это обобщение специальной теории относительности, описывающее геометрическое свойство пространства-времени. Впервые он был предложен Альбертом Эйнштейном в 1915 году. Уравнения поля Эйнштейна дают явную связь между кривизной пространства-времени и энергией и импульсом материи и излучения. Общая теория относительности является простейшей релятивистской теорией гравитации и обеспечивает основу для понимания существенных проблем современной астрофизики, таких как существование черных дыр и гравитационных волн [1; 2].

Сингулярности пространства-времени - главная проблема общей теории относительности. Классическое и удовлетворительное определение сингулярности состоит в том, что уравнения поля Эйнштейна нарушаются и становятся физически неприемлемыми. Другими словами, некоторые физические величины становятся бесконечными в сингулярной точке, и периодичность физических законов теряется. Кроме того, физика больше не известна и не определена в сингулярной области. Впоследствии было разработано много теорий для преодоления этой выдающейся проблемы путем соединения гравитации с квантовыми эффектами, известными в последнее время как квантовая гравитация.

Квантовая гравитация является подходящей основой для изучения влияния пространственно-временных сингулярностей и соответствующих способов их разрешения. Классическая гравитация приводит к сингулярностям, в то время как в квантовой гравитации существуют ультрафиолетовые расходимости, которые не могут быть устранены перенормировкой. Очевидно, что квантовая гравитация - это ненормируемая теория. Квантование гравитации является сложной теорией и является наиболее перспективным подходом к разрешению сингулярностей. Наиболее значимыми подходами к раскрытию микрофизических особенностей пространства-времени являются теории струн [3; 4], петлевая квантовая гравитация [5; 6] и некоммутативная геометрия [7; 8].

Непротиворечивая теория квантовой гравитации остается открытой задачей. Простейший подход квантовой гравитации зависит от степеней свободы канонической структуры фазового пространства. Эту попытку в первую очередь предпринял Б. Девитт [9–11] в 1967 году. Уравнение Уилера–Девитта имеет операторную форму, действующую на волновую функцию, и хорошо определено в квантовой гравитации. Волновая функция уравнения Уилера–Девитта включает в себя всю необходимую информацию о материи и геометрии Вселенной и хорошо определена в минисуперпространствах, таких как конфигурационное пространство космологических теорий.

В 1986 году А. Аштекар [12] представил гамильтонову формулировку общей теории относительности в качестве новой модели канонического метода, тесно связанного с калибровочной теорией $SU(2)$. Существенным успехом петлевого квантования гравитации является допущение дискретной пространственно-временной структуры, начиная с непрерывных

переменных в фазовом пространстве. Преимущество петлевой квантовой гравитации можно признать в способности иметь дело с нелокальными геометрическими переменными, такими как голономии, вместо метрического анализа, с которым столкнулся Девитт. В качестве кандидата на квантовую гравитацию петлевая квантовая гравитация конкурирует с теорией струн.

Теория струн - это теоретическая структура, в которой точечные частицы заменяются струнами. Он описывает распространение и взаимодействие струн в пространстве и решает ряд проблем фундаментальной физики, таких как космология ранней вселенной, физика черных дыр и физика конденсированных сред. Поскольку она дает единое описание гравитации и физики элементарных частиц, она является кандидатом на теорию всего, что описывает все фундаментальные силы и формы материи [13–15].

Теория (2+1)-мерной гравитации представляет собой упрощенную модель для описания математических и физических свойств фундаментальных задач квантовой гравитации. Решения (2+1)-мерных физически отличаются от решений в 3+1 измерениях, но (2+1)-мерная модель весьма полезна для понимания динамики реалистичной квантовой гравитации. Теория (2+1)-мерной гравитации была впервые развита в гамильтоновой формулировке точечных частиц Старушкевичем [16] в 1963 году. Она имеет ту же концептуальную основу, что и реалистическая (3+1)-мерная общая теория относительности, и многие фундаментальные вопросы квантовой гравитации переносятся в область более низких измерений.

Важность (2+1)-мерной гравитации появилась после работы Дезера, Джекив и Хуфта [17; 18], а также Виттена [19; 20]. С другой стороны, (2+1)-мерная гравитация является игрующей моделью для (3+1)-мерной гравитации [19], и ее основные результаты могут быть обобщены на 3+1 измерения. Единственное различие между (2+1)- и (3+1)-мерной гравитацией состоит в том, что нет ньютоновского предела [21]. Мы изучаем сферически симметричную пылевую оболочку, которая является примером (2+1)-мерной гравитации, представляющей гравитационный коллапс. Сферически симметричная пылевая оболочка является обобщением точечных частиц, и ее динамика была изучена Israel [22] в 1967 году.

Мы исследуем гамильтонову структуру сферически симметричной пылевой оболочки в 2+1 измерениях как для нулевых, так и для отрицательных космологических констант [23–25]. Мы начинаем с действия Эйнштейна-Гильберта первого порядка для (2+1)-мерной гравитации и добавляем тонкую оболочку пыли. Мы также добавили граничные члены к действию, чтобы найти правильные уравнения движения в пространственной бесконечности. Гамильтоновы связи либо выводятся непосредственно из уравнений движения, либо из вариационного принципа для сферически симметричной пылевой тонкой оболочки, либо из лагранжева формализма действия Эйнштейна-Гильберта.

В измерениях 2+1 пространство-время имеет решение черной дыры БТЗ для отрицательной космологической постоянной [26]. Более того, пространство-время локально плоское в вакууме, а сферически симметричная теория Эйнштейна не имеет локальных степеней свободы. Это подчеркивает, что приведенное фазовое пространство является конечномерным

в гамильтоновой формулировке. Кучар [27] нашел общий способ выразить гамильтоны и импульсные связи в простом наборе, в котором старые переменные могут быть канонически преобразованы в новый набор переменных. Импульсное пространство оказывается групповым многообразием $SL(2)$. Мы используем теорию представлений $SL(2)$ для исследования структуры пылевой оболочки.

Координаты коммутативны в вакууме, но это не обязательно верно для отрицательной космологической постоянной. В случае отрицательной космологической постоянной мы фокусируемся на изучении квантовой динамики в области ближнего горизонта, где мы можем пренебречь координатами некоммутируемости. Некоммутируемость импульса существует вдали от горизонта и требует квантовой групповой техники. Полностью исследовано квантование пылевой оболочки и найден спектр радиуса оболочки.

Для нулевой космологической постоянной спектр показывает, что голая сингулярность разрешена в случае времениподобного перемещения оболочки. Для пространственноподобного движения оболочки сингулярность принадлежит дискретному спектру и также регуляризована. Для отрицательной космологической постоянной можно сказать, что точка центральной сингулярности, нулевой радиус оболочки, принадлежит дискретному спектру. Это наводит на мысль о разрешении сингулярности. Получены амплитуды переходов между различными местоположениями оболочки в пригоризонтной области. Кроме того, существует ненулевая скорость перехода между всеми возможными секторами диаграммы Пенроуза, даже между теми, которые классически запрещены. Однако для классически запрещенных переходов их скорость экспоненциально затухает вдали от горизонта. В общем случае эта модель может быть обобщена на $3+1$ измерения.

Структура диссертации выглядит следующим образом: Работа содержит 117 страниц и 14 рисунков. Структура диссертации включает введение, четыре главы, заключение, список литературы (состоящий из 202 названий) и список рисунков.

- **Введение** описываются общие контуры диссертации. Кроме того, вводная часть включает в себя цели и задачи исследования.
- **Глава 1** кратко объясняет микроскопические и макроскопические особенности $(2+1)$ -мерной гравитации. Классические решения $(2+1)$ -мерной гравитации являются фундаментальными элементами для ее описания поведения на квантовом уровне.
- **Глава 2** представляет собой обзор свойств решений черных дыр БТЗ в контексте классической и квантовой теории поля. Мы также обсуждаем некоторые различные модели, описывающие термодинамику и обобщение черной дыры БТЗ.
- **Глава 3** исследует канонический анализ тонкой оболочки пыли, связанной с $(2+1)$ -мерной гравитацией для нулевой космологической постоянной и ее квантования.
- **Глава 4** посвящена квантованию черной дыры БТЗ вблизи горизонта для отрицательной космологической постоянной, где некоммутируемостью импульса можно пренебречь.

- **Глава 5** изучается кинематическая часть пылевой оболочки черной дыры БТЗ вдали от горизонта для отрицательной космологической постоянной, где существует некоммутативность импульса.
- **Заключение** представлены основные научные результаты данной работы и дальнейшие рекомендации по дальнейшей работе.

Диссертация направлена на изучение и анализ гамильтоновой структуры пылевой тонкой оболочки как для нулевой, так и для отрицательной космологической постоянной, связанной с $(2+1)$ -мерной гравитацией. Исследовано квантование этой модели и найден спектр пространственно-временного распространения оболочки.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту суммируются и развиваются в следующих разделах:

1. Мы изучаем канонический анализ тонкой оболочки пыли, связанной с $(2+1)$ -мерной гравитацией. Этот анализ был проведен как для нулевых, так и для отрицательных космологических констант. Импульсное пространство оказалось AdS_2 , и теория представления $SL(2)$ используется для исследования структуры пылевой оболочки.
2. Мы анализируем квантование модели пылевой оболочки. В случае нулевой космологической постоянной пространство-время плоское, а координаты коммутативны, что позволяет разрешить центральную сингулярность.
3. Для отрицательной космологической постоянной квантование было выполнено в окрестности горизонта, где можно пренебречь некоммутативностью импульса. Некоммутативность импульса существует вдали от горизонта и требует полноценной квантовой групповой техники.
4. Описана кинематическая часть пылевой оболочки вдали от горизонта черной дыры БТЗ. В этом случае существует некоммутативность импульса, которая требует полноценной квантовой групповой техники. Найден спектр оператора времени и оператор радиуса оболочки внутри черной дыры.
5. Временная координата имеет дискретный спектр из-за периодичности волновой функции по энергии.
6. Вычислен спектр радиуса оболочки. Этот спектр оказывается непрерывным вне горизонта и становится дискретным внутри горизонта.
7. Оцениваются амплитуды переходов между различными областями диаграммы Пенроуза и определяются условия непрерывности или дискретности спектра.

Положения, выносимые на защиту, излагаются и обобщаются в следующих направлениях:

1. Гамильтонова структура для модели, в которой $(2+1)$ -мерная гравитация с нулевыми и отрицательными космологическими константами связана с асимметричной пылевой оболочкой. Фазовое пространство равно AdS_2 и представлено группой $SL(2)$.

2. Оцениваются квантование радиуса оболочки и условия непрерывности и дискретности спектра. Это было сделано там, где некоммутативность импульса может быть проигнорирована.
3. Кинематическая часть для пылевой оболочки вдали от горизонта черной дыры БТЗ выполнена там, где существует некоммутативность импульса.
4. Определены амплитуды переходов между различными областями диаграммы Пенроуза и их величина везде конечна

Научная новизна полученных результатов уточняется и суммируется следующим образом:

1. Описана гамильтонова структура пылевой оболочки в $(2+1)$ -мерной гравитации.
2. Исследуется квантовый анализ и вычисляется спектр радиуса оболочки.
3. Сингулярность пространства-времени разрешена. Это можно определить, вычисляя конечную амплитуду перехода.
4. Основные научные результаты, полученные в измерениях $2+1$, можно обобщить на измерения $3+1$.

Личный вклад автора: Все основные научные результаты в этой диссертации были получены лично автором диссертации и отражены в работах совместного авторства.

Эти результаты диссертации являются результатом сотрудничества и дискуссий с Александром Андреевичем Андриановым, Артемом Николаевичем Стародубцевым и основаны на следующих опубликованных статьях:

1. Alexander A. Andrianov, Artem N. Starodubtsev and Yasser Elmahalawy, $(2+1)$ -dimensional gravity coupled to a dust shell: Quantization in terms of global phase space variable, Theoretical and Mathematical Physics, 200, 2019. [23]
2. Alexander A. Andrianov, Yasser Elmahalawy and Artem Starodubtsev, Cylindrically symmetric $2+1$ gravity in terms of global variables: Quantum dynamics, International Journal of Modern Physics A, 35, 2020. [24]
3. Alexander A. Andrianov, Artem Starodubtsev and Yasser Elmahalawy, Quantum analysis of BTZ black hole formation due to the collapse of a dust shell, Universe, 6, 2020. [25]

Кроме того, эти результаты основаны на следующей неопубликованной статье:

1. Александр А. Андрианов, Артем Стародубцев, and Яссер Элмахалави, Квантование модели пылевой оболочки вдали от горизонта черной дыры БТЗ (незаконченный).

Основные результаты работы были доложены и представлены на следующих научных конференциях:

1. Александр Андрианов, Артем Стародубцев и Яссер Элмахалави, Квантовая геометродинамика для тонкой оболочки "Постер" в VI международная конференция "Models in quantum field theory" [MQFT-2018], Санкт-Петербург, Россия, 27 - 31 Август 2018.

2. А. А. Андрианов, А. Стародубцев и **Я. Элмахалави**, Квантование модели пылевой оболочки в пределах 2+1 мерной гравитации и ее обобщение "**Устный Доклад**" в 10th Alexander Friedmann International Seminar on Gravitation and Cosmology and 4th Satellite Symposium on the Casimir Effect [[Friedmann 2019](#)], Санкт-Петербург, Россия, 23 - 29 Июнь 2019.
3. **А. А. Андрианов**, А. Стародубцев и Я. Элмахалави, Цилиндрически симметричная 2+1-мерная гравитация: квантование в терминах глобальных переменных фазового пространства "**Устный Доклад**" в [V RUSSIAN-IBERIAN CONGRESS: Particle, Nuclear, Astroparticle Physics and Cosmology](#), Мадрид, Испания, 7 - 10 Октябрь 2019.
4. А. Андрианов, **Я. Элмахалави** и А. Стародубцев, Квантовый анализ образования БТЗ черных дыр при коллапсе пылевой оболочки "**Устный Доклад**" в 17th Russian Gravitational Conference — International Conference on Gravitation, Cosmology and Astrophysics [[RUSGRAV-17](#)], Санкт-Петербург, Россия, 28 Июнь - 4 Июль 2020.
5. Александр Андрианов, Артем Стародубцев и **Яссер Элмахалави**, Цилиндрически симметричная гравитация 2+1 в терминах глобальных переменных: квантовая динамика "**Gong Show/Постер**" в [QFT and Geometry Summer School](#), Онлайн, 13 - 24 Июль 2020.
6. **А. А. Андрианов**, А. Стародубцев и Я. Элмахалави, QКвантовый анализ образования БТЗ черных дыр при коллапсе пылевой оболочки "**Устный Доклад**" в [VIII AFUNALHUE "La Parte y el Todo"](#), Онлайн, 4 - 8 Январь 2021.

Другие мероприятия, которые я посещал во время учебы в аспирантуре:

1. [Spring workshop on gravity and cosmology](#), Онлайн, 25 - 29 Май 2020.
2. [Quantum Information in QFT and AdS/CFT](#), Онлайн, 6 - 7 Август 2020.
3. [Testing General Relativity using Gravitational Waves](#), Онлайн, 13 - 14 Август 2020.
4. [Cosmology in Colombia \[CoCo 2o2o\]](#), Онлайн, 23 - 25 Сентябрь 2020.
5. [Materia Oscura en Colombia \[МОСа 2o2o\]](#), Онлайн, 7 - 8 Октябрь 2020.

Глава 1. Теория (2+1)-мерной гравитации

Мы в основном рассматриваем различные подходы, характеризующие (2+1)-мерную гравитацию как с классического, так и с квантового уровней. Наша цель — подчеркнуть свойства пространства-времени в рамках 2+1 измерений. Кроме того, мы упоминаем некоторые новаторские процедуры квантования (2+1)-мерной гравитации. Тем не менее, эти модели не обладают уникальным решением с квантовых позиций.

1.1 Предварительные сведения

Теория (2+1)-мерная гравитация имеет ту же структуру, что и (3+1)-мерная гравитация, но с меньшими размерами, в которых степени свободы могут быть редуцированы. В двух пространственных и одном временном измерениях общая теория относительности, оказывается, не имеет ньютоновского предела [21] и никаких степеней свободы, определяющих, что (2+1)-мерная гравитация является разрешимой системой [19]. Теория (2+1)-мерной гравитации является игрушечной моделью для (3+1)-мерной гравитации [28]. Это полезный инструмент для изучения многих фундаментальных проблем, таких как точечные частицы [29–31], связь материи [32–34], супергравитация [35–37], массивная гравитация [38–40], и топологическая теория поля [41].

Идея (2+1)-мерной гравитации восходит к Старушкевичу [16], который впервые доказал, что классическое решение гравитации в трехмерном пространстве (два пространственных и одно временное измерение) исследуется для точечной частицы. Это пример материи, связанной с (2+1)-мерной гравитацией. Каноническая структура и квантование для точечной частицы были изучены в [42–44]. В 1984 году Дезер, Джекив и Хофт [17; 18] систематически исследовали классическое и квантовое поведение точечных источников в (2+1)-мерной гравитации, показав, что такие системы имеют интересное поведение как в качестве игрушечных моделей для (3+1)-мерной квантовой гравитации, так и в качестве реалистичных моделей космических струн. В 1988 году Виттен [19; 20] показал, что (2+1)-мерная гравитация может быть представлена как теория Черна-Саймонса.

Гравитация (2+1)-мерная полностью исследована как с классической, так и с квантовой точек зрения. Классически (2+1)-мерная гравитация полностью изучена и указывает на полезные подходы к квантованию. В контексте квантовой (2+1)-мерной гравитации формулируется с точки зрения действия редуцированного фазового пространства, теория Черна-Саймонса [45; 46], представление цикла [47], континуальный интеграл [48], уравнение Уилера-Девитта [9; 49], или решеточный подход [50].

Глава 1 устроена следующим образом. В разделе 1.2 гамильтоновы формулировки общей теории относительности обсуждаются в контексте формулировок метрического тензора и Палатини. В разделе 1.3 классическое описание гамильтоновой структуры в (2+1)-мерной гравитации интерпретируется на основе метрики или группы $SO(2,1)$. Эти структуры классически эквивалентны. В разделе 1.4 были уточнены различные квантовые подходы, и их основные результаты не совпадают.

1.2 Лагранжевы формулировки

Лагранжевы формулировки общей теории относительности очерчены особой особенностью, в которой калибровочно-инвариантное действие не может быть записано без принятия некоторых граничных условий на многообразии. Лагранжевы плотности общей теории относительности представлены в терминах метрического тензора (формализм второго порядка) и формулировок Палатини (формализм первого порядка). Эти формулировки идентичны для компактных многообразий¹ и хорошо изучены в [51; 52]. Стандартное действие Эйнштейна-Гильберта

$$I_{EH}[g^{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} R, \quad (1.1)$$

где $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$ является ковариантным Лагранжевой плотности. Вариация действия (1.1) относительно обратного метрического тензора $\delta g^{\mu\nu}$ равна

$$\delta I_{EH}[g^{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \left[(\delta\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right]. \quad (1.2)$$

Обратите внимание, что $(\delta\sqrt{-g})R = \frac{-1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}R \delta g^{\mu\nu}$ а вариацию тензора Риччи можно вычислить, оценив вариацию тензора Римана. Последний член уравнения (1.2) можно записать в виде

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \partial_\mu \left[\sqrt{-g}(g^{\rho\sigma} \delta\Gamma_{\rho\sigma}^\mu - g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\tau}^\tau) \right]. \quad (1.3)$$

Подставим (1.3) в (1.2), получим

$$\delta I_{EH}[g^{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.4)$$

Условие $\delta g^{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ недостаточно для того, чтобы (1.3) исчез. Граничные члены исчезают для специального класса многообразия, как асимптотически Минковского, и это условие

¹Например, замкнутая вселенная без границ.

подтверждает исчезновение (1.3). Уравнения поля Эйнштейна в вакууме принимают вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (1.5)$$

Если мы введем материю, связанную с полями, то уравнения поля Эйнштейна станут

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

где $T_{\mu\nu}$ - симметричный тензор энергии напряжений. Лагранжева плотность Эйнштейна-Гильберта может быть записана в нековариантной форме, и граничные члены немедленно исчезают, когда условие стационарности накладывается без какой-либо гипотезы на многообразии. Запишем плотность лагранжиана Эйнштейна-Гильберта в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EH} &= \sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \\ &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\rho}, \\ &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) + 2\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}) + \partial_{\mu}[\sqrt{-g}(g^{\sigma\rho}\Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} - g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\rho}^{\rho})]. \\ &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}) + \partial_{\mu}[\sqrt{-g}(g^{\sigma\rho}\Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} - g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\rho}^{\rho})]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Определим следующие величины:

$$\partial_{\mu}\mathcal{E}\mathcal{H}^{\mu} = \partial_{\mu}[\sqrt{-g}(g^{\sigma\rho}\Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} - g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\rho}^{\rho})], \quad (1.8)$$

$$\mathcal{L}_{\Gamma\Gamma} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}), \quad (1.9)$$

где $\mathcal{L}_{\Gamma\Gamma}$ называется плотность лагранжиана Гамма-Гамма, предложенным Эйнштейном. Поэтому плотность лагранжиана Эйнштейна-Гильберта (1.7) можно переписать в терминах (1.8) и (1.9) как:

$$\mathcal{L}_{EH} = \mathcal{L}_{\Gamma\Gamma} + \partial_{\mu}\mathcal{E}\mathcal{H}^{\mu}. \quad (1.10)$$

Вариация действия, определяемая лагранжевой плотностью (1.9), равна

$$\delta I_{\Gamma\Gamma}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \partial_{\mu} \delta\Gamma\Gamma^{\mu}, \quad (1.11)$$

где $\partial_{\mu}\delta\Gamma\Gamma^{\mu}$ - граничный член, вызванный изменением действия, и определяется как:

$$\partial_{\mu}\delta\Gamma\Gamma^{\mu} = \partial_{\mu} \left[\sqrt{-g} \left(\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} \delta g^{\rho\mu} - \frac{1}{2} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} g^{\rho\mu} g_{\nu\tau} \delta g^{\nu\tau} - \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} \delta g^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} g^{\rho\sigma} g_{\nu\tau} \delta g^{\nu\tau} \right) \right]. \quad (1.12)$$

Граничный член (1.12) обращается в нуль из-за $\delta g^{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ без указания какой-либо конкретной функции на многообразии или предположения асимптотического метрического тензора. Таким образом, вариация действия (1.11) сводится к уравнению поля Эйнштейна (1.5). Дирак [53] предположил, что плотность лагранжиана Гамма-Гамма может быть записана

в терминах обратных метрических тензоров для получения гамильтоновых формулировок общей теории относительности, где

$$\mathcal{L}_{\Gamma\Gamma} = \frac{1}{4}\sqrt{-g}\partial_\rho g_{\mu\nu}\partial_\sigma g_{\pi\tau}\left[g^{\rho\sigma}(g^{\pi\tau}g^{\mu\nu} - g^{\mu\pi}g^{\nu\tau}) + 2g^{\sigma\nu}(g^{\rho\tau}g^{\mu\pi} - g^{\rho\mu}g^{\pi\tau})\right]. \quad (1.13)$$

Дирак определил симметричный тензор второго ранга, который обращается в нуль, если один из индексов равен 0,

$$e^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{g^{0\nu}g^{0\mu}}{g^{00}} \quad \implies \quad e^{0\nu} = 0. \quad (1.14)$$

Таким образом, Плотность лагранжиана Дирака принимает вид

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_{\Gamma\Gamma} + \partial_\mu \mathcal{D}^\mu, \quad (1.15)$$

где $\partial_\mu \mathcal{D}^\mu$ - граничный член Дирака, определяемый как

$$\partial_\mu \mathcal{D}^\mu = \partial_i \left[\frac{g^{0i}}{g^{00}} \partial_0 (\sqrt{-g} g^{00}) \right] - \partial_0 \left[\frac{g^{0i}}{g^{00}} \partial_i (\sqrt{-g} g^{00}) \right]. \quad (1.16)$$

Формулировка Дирака имеет очень простой расчет для формулировки гамильтониана общей теории относительности. Другой возможный подход состоит в том, чтобы записать действие Эйнштейна-Гильберта как действие первого порядка. Это известно как формулировка Палатини, в которой связи Леви-Чивиты $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ должны быть независимыми переменными. Вариация действия (1.1) по отношению к $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ и $\delta g_{\mu\nu}$ равна

$$\delta I = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \left[\frac{\delta[\sqrt{-g}R(g,\Gamma)]}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\delta[\sqrt{-g}R(g,\Gamma)]}{\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho \right], \quad (1.17)$$

и приводит к множествам уравнения движения

$$\frac{\delta[\sqrt{-g}R(g,\Gamma)]}{\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho} = \sqrt{-g} g^{\sigma\tau} \frac{\delta R_{\sigma\tau}}{\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho} = 0, \quad (1.18)$$

$$\frac{\delta[\sqrt{-g}R(g,\Gamma)]}{\delta g^{\mu\nu}} = -\sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}(\Gamma) \right] = 0. \quad (1.19)$$

Эта формулировка аналогична формулировке второго порядка в вакууме, а спиновые связности эквивалентны символам Кристоффеля. Действие (1.1) записывается в виде

$$I_G = -\frac{1}{16\pi} \int d^3x e e_\alpha^\mu e_\beta^\nu R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}, \quad (1.20)$$

что является действием первого порядка в терминах триада e_μ^α и связи Лоренца $\omega_\mu^{\alpha\beta}$. Обратите внимание, что $R = e_\alpha^\mu e_\beta^\nu R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ является тензор кривизны и $g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} e_\mu^\alpha e_\nu^\beta$ является метрикой, где $\eta_{\alpha\beta}$ является метрикой Минковского. Действие (1.20) эквивалентно метрической формулировке в отсутствие материи. Если спиновая связности включена в лагранжиан

материи, то формулировка Палатини полностью отличается от метрической формулировки. Единственное различие между формулировками первого и второго порядка заключается в существовании спиновой связности.

1.3 Классические решения для (2+1)-мерной гравитации

Мы сосредоточимся на изучении классических решений гравитации в измерениях 2+1. Классические подходы имеют важное ключевое слово в квантовании пространства-времени. Мы сосредоточимся на классических подходах для (2+1)-мерной гравитации. Первый подход зависит от деления пространства-времени, которое хорошо известно как разложение метрики Арновитта-Дезера-Миснера (АДМ) [54]. Второй подход - это форма уравнений поля первого порядка. Оба они классически эквивалентны и приводят к различным методам квантования [55].

В 2+1 измерениях, когда тензор Вейля обращается в нуль, тензор кривизны выражается через скаляр кривизны, а тензор Риччи как

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})R, \quad (1.21)$$

из чего следует, что уравнение поля Эйнштейна имеет плоское решение для вакуумного пространства-времени. Пространство-время локально де Ситтер для $\Lambda > 0$, в то время как оно анти-де Ситтер для $\Lambda < 0$. Физически не существует локальных степеней свободы для (2+1)-мерного пространства-времени, поскольку гравитационные волны исчезают в классической теории, а в квантовой теории нет гравитонов. Исчезновение тензора кривизны $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ означает, что метрика является метрикой Минковского $\eta_{\mu\nu}$.

1.3.1 АДМ-формализм

Разложение пространства-времени впервые описано Арновиттом, Дезером и Мизнером для формулировки гамильтониана общей теории относительности. Декомпозиция АДМ обычно используется, потому что существует физическая и геометрическая интерпретация канонических переменных, описанных в этом контексте. Формулировка АДМ основана на разрезании пространственно-временного многообразия \mathcal{M} в направлении времени t . Монкриф [56], Хосоя и Накао [57] показали полное описание вакуумной метрики с топологией $R \times \Sigma$.

Рассмотрим пространственно-временное многообразие с топологией $[0,1] \times \Sigma^2$, где Σ - открытая или закрытая двухповерхность. Пространственно-временное многообразие \mathcal{M} делится на поверхности постоянного времени Σ_t которые представлены координатой x^i и индуцированной метрикой $g_{ij}(t, x^i)$. Изменение собственного времени между двумя соседними поверхностями Σ_t и Σ_{t+dt} равно

$$d\tau = N dt, \quad (1.22)$$

где $N(t, x^i)$ - функции хода. Изменение пространственных координат можно записать в виде

$$x^i(t + dt) = x^i(t) - N^i dt, \quad (1.23)$$

где $N^i(t, x^i)$ - функции сдвига. Динамику поля в разложении АДМ можно определить, рассматривая его проекции в направлениях параллельных и касательных к гиперповерхностям. Компоненты метрики могут быть определены следующим образом

$$g_{00} = -N^2 + N^a N_a, \quad g_{0j} = h_{ij} N^j = N_i, \quad g_{ij} = h_{ij}. \quad (1.24)$$

Из уравнения (1.24) метрика и ее обратная

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^a N_a & N_i \\ N_j & h_{ij} \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \frac{1}{N^2} \begin{pmatrix} -1 & N^i \\ N^j & h^{ij} N^2 - N^i N^j \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

где $h^{ik} h_{kl} = \delta_l^i$. Интервал ds^2 между двумя точками (t, x^i) и $(t + dt, x^i + dx^i)$ измеряется лоренцевой версией теоремы Пифагора, как показано на рисунке 1.1. Элемент линии является

$$\begin{aligned} ds^2 &= -N^2 dt^2 + h_{ij} (dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt), \\ &= -(N^2 - N^i N_i) dt^2 + 2N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Уравнение (1.26) - это АДМ метрика. Геометрия поверхности постоянного времени Σ_t включает внутреннюю и внешнюю геометрии. Внутренняя геометрия оценивается векторами, касательными к поверхности Σ_t , в то время как внешняя геометрия оценивается векторами, нормальными к поверхности Σ_t . Внешняя кривизна является

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2N} \left(\partial_t g_{ij} - {}^{(2)}\nabla_i N_j - {}^{(2)}\nabla_j N_i \right). \quad (1.27)$$

²Это компактное трехмерное многообразие с плоской, ориентированной во времени лоренцевой метрикой, предложенной Мисс [58].

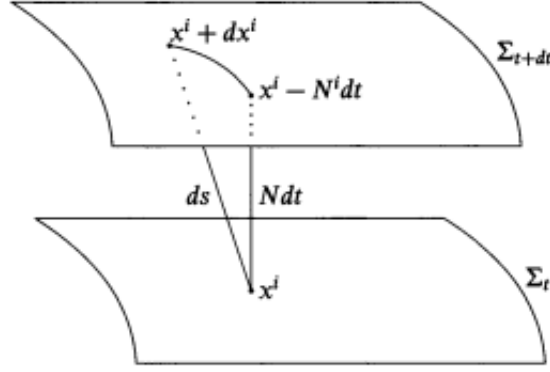


Рисунок 1.1 — Разложение пространства-времени в направлении времени.

Полное действие Эйнштейна-Гильберта

$$\begin{aligned}
 I &= \int d^3x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \\
 &= \int dt \int_{\Sigma} d^2x N \sqrt{{}^{(2)}g} \left[{}^{(2)}R - 2\Lambda + K_{ij} K^{ij} - K^2 \right] + \text{boundary terms}. \quad (1.28)
 \end{aligned}$$

Действие (1.28) должно быть записано в канонической форме. Этим занимаются Монкриф [56], Хосоя и Накао [57]. Каноническими моментами являются

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t g_{ij})} = \sqrt{{}^{(2)}g} (K^{ij} - g^{ij} K). \quad (1.29)$$

Заметим, что канонические конъюгаты к производным по времени переменных N и N^i равны нулю и рассматриваются как множитель Лагранжа. Уравнение (1.27) сводится к

$$K^{ij} = \frac{1}{\sqrt{{}^{(2)}g}} (\pi^{ij} - g^{ij} \pi). \quad (1.30)$$

Действие (1.28) может быть записано в терминах (1.30) следующим образом

$$I = \int dt \int_{\Sigma} d^2x \left(\pi^{ij} \partial_t g_{ij} - N \mathcal{H} - N_i \mathcal{H}^i \right), \quad (1.31)$$

где гамильтонова связь является

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{{}^{(2)}g}} (\pi_{ij} \pi^{ij} - \pi^2) - \sqrt{{}^{(2)}g} ({}^{(2)}R - 2\Lambda), \quad (1.32)$$

а импульсная связь таковы

$$\mathcal{H}^i = -2 {}^{(2)}\nabla_j \pi^{ij}. \quad (1.33)$$

Скобки Пуассона для (2+1)-мерной гравитации можно прочесть из действия (1.31):

$$\{g_{ij}(x), \pi^{kl}(x')\} = \frac{1}{2}(\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) \tilde{\delta}^2(x - x'), \quad (1.34)$$

где $\tilde{\delta}^2(x - x')$ - дельта-функция, определенная для любой скалярной функции $f(x)$ как $\int d^2x \tilde{\delta}^2(x - x') f(x') = f(x)$. Симплектическая форма может быть найдена из скобок Пуассона (1.34) как

$$\Omega = \int_{\Sigma} d^2x \delta\pi^{ij} \wedge \delta g_{ij}, \quad (1.35)$$

где $\delta\pi^{ij}$ и δg_{ij} - вариации по отношению к импульсам и метрике соответственно. В измерениях 2+1 уменьшение физических степеней свободы может осуществляться в два этапа. Сначала мы решаем связь $\mathcal{H} = 0$ и $\mathcal{H}^i = 0$. Далее мы фиксируем калибровочные преобразования. Полученный результат известен как редуцированное фазовое пространство, которое описывает истинные степени свободы фазового пространства. В измерениях 3+1 уменьшение физических степеней свободы трудно, потому что связь трудно решить.

Расщепление пространства-времени задается срезом времени Йорка [59], определяемым поверхностями постоянной внешней кривизны $TrK = g^{ij}K_{ij} = T$. Рассмотрим, что пространственная метрика является

$$g_{ij} = e^{2\lambda} \tilde{g}_{ij}, \quad (1.36)$$

где \tilde{g}_{ij} - постоянная метрика кривизны на Σ . Импульсная связь $\mathcal{H}_i = 0$ можно разложить на бесследный тензор $\bar{\pi}^{ij}$ и $\pi = g_{ij}\bar{\pi}^{ij}$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i = & \left\{ \frac{1}{8} \frac{\delta}{\delta\lambda} e^{-2\lambda} \frac{\delta}{\delta\lambda} + \frac{1}{2} e^{-2\lambda} \Delta_0 + 2\tilde{\Delta}\lambda - 2e^{-2\lambda} Y^i[\pi] \tilde{\Delta} Y_i[\pi] \right. \\ & \left. + 2e^{-2\lambda} \tilde{\nabla}_i \left[(2p^{ij} + \tilde{\nabla}^i Y^j[\pi] + \tilde{\nabla}^j Y^i[\pi] - \tilde{g}^{ij} \tilde{\nabla}_k Y^k[\pi]) Y_j[\pi] \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.37)$$

где

$$Y^i[\pi] = \frac{i}{4} \tilde{\Delta}^{-1} \left[e^{2\lambda} \tilde{\nabla}_i \left(e^{-2\lambda} \frac{\delta}{\delta\lambda} \right) \right]. \quad (1.38)$$

Гамильтоново связь $\mathcal{H} = 0$ становится эллиптическим дифференциальным уравнением для λ , где

$$\mathcal{H} = \nabla_{\bar{g}} \lambda - \frac{1}{4} T^2 e^{2\lambda} + \frac{1}{2} \left[\bar{g}^{-1} \bar{g}_{ij} \bar{g}_{kl} \bar{\pi}^{ik} \bar{\pi}^{jl} \right] e^{-2\lambda} - \frac{k}{2} = 0. \quad (1.39)$$

Приведенное действие фазового пространства (1.31) сводится к

$$I = \int dT \left\{ p^\alpha \frac{dm_\alpha}{dT} - H_{red}(m, p, T) \right\}, \quad (1.40)$$

где p^α определяет импульсы P^{ij} . Обратите внимание, что p^α and m_α являются сопряженными переменными, используемыми для упрощения симплектической формы (1.35). Приведенным гамильтонианом фазового пространства является

$$H_{red}(m,p,T) = \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\tilde{g}} e^{2\lambda(m,p,T)}. \quad (1.41)$$

Обратите внимание, что λ является функцией m , p , и T . Геометрически, H_{red} является площадью в размере $TrK = -T$ и структура фазового пространства АДМ представляет собой котангенсное расслоение $T^*\mathcal{N}$. Монкриф [56] указала, что N и N_i решаются на позиции m_α и импульсов переменной p^α . Если Σ является Тором параметризуются одной комплексное число вида $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ а переменная p_{ij} сопряженное с плоской метрикой \tilde{g}_{ij} . Тогда уравнение (1.41) сводится к

$$H_{red} = \frac{1}{\sqrt{T^2 - 4\Lambda}} \tau_2 \left[(p_1)^2 + (p_2)^2 \right]^{(1/2)}. \quad (1.42)$$

1.3.2 Теория Черна-Саймонса

Действие Черна-Саймонса зависит только от связи одной формы и используется для описания действия для (2+1)-мерной гравитации. Ачукарро и Таунсенд [60] показали, что в 2+1 измерениях действие Палатини основано на группе $SO(2,1)$, эквивалентно действию Черна-Саймонса, основанному на группе $ISO(2,1)$. Как правило, Аштекар и Романо [61] указывали, что теория 2+1 Палатини, основанная на любой группе Ли G , равна теории Черна-Саймонса, основанной на неоднородной группе Ли IG , связанной с G . Виттен [19] использовал этот результат для квантования гравитации в 2+1 измерениях. Фундаментальными переменными для описания формализма первого порядка являются триада e_μ^a и спиновой связности ω_μ^{ab} . Стандартное действие Эйнштейна-Гильберта принимает вид

$$I = -2 \int_{\mathcal{M}} \left\{ e^a \wedge \left(d\omega_a + \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \omega^b \wedge \omega^c \right) + \frac{\Lambda}{6} \epsilon_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c \right\}, \quad (1.43)$$

где $e^a = e_\mu^a dx^\mu$ и $\omega^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \omega_{\mu bc} dx^\mu$ рассматриваются как одноформы на пространстве-времени \mathcal{M} . Изменение действия (1.43) относительно ω приводит к уравнению Эйлера-Лагранжа, которое определяется как

$$T_a = de_a + \epsilon_{abc} \omega^b \wedge e^c = 0. \quad (1.44)$$

Уравнения (1.44) называется стандартной кручения свободном состоянии, указывает на то, что спиновой связности ω совместима с триадой e . Вариация (1.43) по отношению к e имеет

вид

$$R_a = d\omega_a + \epsilon_{abc}\omega^b \wedge \omega^c = -\frac{\Lambda}{2}\epsilon_{abc}e^b \wedge e^c, \quad (1.45)$$

подразумевает, что кривизна пространства-времени \mathcal{M} плоская или кривизна метрики $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$ обращается в нуль. Обратите внимание, что первый-того, формализм является эквивалентом второго порядка формализма, когда триады e_μ^a является обратимой. Действие инвариантно относительно локальных преобразований Лоренца,

$$\delta e^a = \epsilon^{abc}e_b \tau_c, \quad \delta \omega^a = d\tau^a + \epsilon^{abc}\omega_b \tau_c, \quad (1.46)$$

и под "локальные трансляции"

$$\delta e^a = d\rho^a + \epsilon^{abc}\omega_b \rho_c, \quad \delta \omega^a = -\Lambda \epsilon^{abc}e_b \rho_c. \quad (1.47)$$

Заметим, что гравитационное действие (1.43) также инвариантно относительно диффеоморфизмов \mathcal{M} . Рассмотрим, что $A = A_\mu^a T_a dx^\mu$ - это связь для калибровочной теории, где T_a - генератор калибровочной группы G . Действие Черна-Саймонса для A является

$$I_{CS}[A] = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} Tr\{A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\}, \quad (1.48)$$

где Tr - невырожденная и инвариантная билинейная форма на алгебре Ли G . Уравнения Эйлера-Лагранжа для действия (1.48) являются

$$F[A] = dA + A \wedge A = 0. \quad (1.49)$$

Исчезновение напряженности поля F приводит к тривиальному пространству-времени \mathcal{M} , где A - плоская связь. Комбинация одноформных e^a и ω^a приводит к единственной связи $ISO(2,1)$. Группа Пуанкаре $ISO(2,1)$ имеет два генератора. Один из них обусловлен преобразованиями Лоренца \mathcal{J}^a , а другой соответствует трансляции \mathcal{P}^b , подчиняющимся коммутационным соотношениям

$$[\mathcal{J}^a, \mathcal{J}^b] = \epsilon^{abc}\mathcal{J}_c, \quad [\mathcal{J}^a, \mathcal{P}^b] = \epsilon^{abc}\mathcal{P}_c, \quad [\mathcal{P}^a, \mathcal{P}^b] = 0. \quad (1.50)$$

Инвариантная билинейная форма на алгебре Ли определяется как

$$Tr[\mathcal{J}^a \mathcal{P}^b] = \eta^{ab}, \quad Tr[\mathcal{J}^a \mathcal{J}^b] = Tr[\mathcal{P}^a \mathcal{P}^b] = 0. \quad (1.51)$$

Если мы запишем калибровочный потенциал как $A = e^a \mathcal{P}_a + \omega^a \mathcal{J}_a$, то действие Черна-Саймонса (1.48) сводится к гравитационному действию первого порядка (1.43) с $\Lambda = 0$. Аналогичная

структура возможна [19; 62], когда $\Lambda \neq 0$. Пара связь $SO(2,1)$, для $\Lambda = -1/\ell^2 < 0$, являются

$$A^{(\pm)a} = \omega^a \pm \frac{1}{\ell} e^a, \quad (1.52)$$

а действие Черна-Саймонса имеет вид

$$I[A^{(+)}, A^{(-)}] = I_{CS}[A^{(+)}] - I_{CS}[A^{(-)}]. \quad (1.53)$$

Для $\Lambda > 0$ одноформа определяется как

$$A^a = \omega^a + i\sqrt{\Lambda} e^a, \quad (1.54)$$

которая представляет собой сложную связь $SL(2, C)$ калибровочного потенциала. Действие для многообразия с топологией $\mathcal{M} \approx [0, 1] \times \Sigma$ можно записать в виде

$$I = 2 \int dt \int_{\Sigma} d^2x \left\{ \epsilon^{ij} e_i^a \dot{\omega}_{ja} - \omega_t^a \mathcal{B}_a - e_t^a \bar{\mathcal{B}}_a \right\}, \quad (1.55)$$

где гамильтониан и импульсные связь являются

$$\mathcal{B}^a[\omega, e] = \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \left[\partial_i e_j^a - \partial_j e_i^a + \epsilon^{abc} (\omega_{ib} e_{jc} - \omega_{jb} e_{ic}) \right], \quad (1.56)$$

$$\bar{\mathcal{B}}^a[\omega, e] = \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \left[\partial_i \omega_j^a - \partial_j \omega_i^a + \epsilon^{abc} (\omega_{ib} \omega_{jc} - \Lambda e_{ib} e_{jc}) \right]. \quad (1.57)$$

Когда $\Lambda = 0$, связь $SO(2,1)$ на Σ является плоским, что выводится из связь $\bar{\mathcal{B}}$. Связь \mathcal{B} подразумевает, что e_j^a является контангентным вектором к пространству плоских связей. Скобки Пуассона между триадой e_i^a и спиновой связности ω_j^b является

$$\{e_i^a(x), \omega_{jb}(x')\} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ij} \delta_b^a \delta^2(x - x'). \quad (1.58)$$

Нельсон и Реджи [63; 64] нашли результирующие скобки для рода 1, рода 2, и высокие рода [62].

1.3.3 Геометрическая структура

Глобальная геометрия вакуумных пространств-времен в 2+1 измерениях описывается теорией геометрической структуры [65; 66]. Если пространственно-временное многообразие \mathcal{M} имеет тривиальную топологию, то уравнения поля показывают, что многообразие является подмножеством пространства Минковского. Если \mathcal{M} имеет нетривиальную топологию, то она покрыта координатными патчами U_i с метрикой Минковского $\eta_{\mu\nu}$. Функция перехода между двумя патчами является элементом группы Пуанкаре $ISO(2,1)$. Если $\Lambda \neq 0$, то ваку-

умное пространство-время имеет де Ситтера, характеризуемого группой изометрии $SO(3,1)$ для $\Lambda > 0$, или анти-де Ситтера, характеризуемого группой изометрии $SO(2,2)$ для $\Lambda < 0$.

Фундаментальной частью для описания геометрической структуры является группа голономии, которая зависит от ее гомотопического класса для любой кривой γ . Петля Вильсона [67] является примером голономии в (2+1)-мерной гравитации, используемой для иллюстрации ее геометрической структуры. Месс [58] исследовал группу голономии для $\Lambda = 0$. Некоторые информативные примеры голономии для структур де Ситтера и анти-де Ситтера приведены в работах [68–70].

Для отрицательной космологической постоянной $\Lambda = -1/\ell^2$ пространство-время вложения представлено пространством анти-де Ситтера, а его метрика равна

$$dS^2 = dX_1^2 + dX_2^2 - dT_1^2 - dT_2^2, \quad (1.59)$$

где пространство анти-де Ситтера определяется $\det \mathbf{X} = 1$. Понятно, что $\mathbf{X} \in SL(2, R)$, и записывается в матричном виде как

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} X_1 + T_1 & X_2 + T_2 \\ X_2 - T_2 & -X_1 + T_1 \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

Обратите внимание, что группа изометрии $SO(2,2)$ эквивалентна $SL(2, R) \times SL(2, R)$. Для положительной космологической постоянной пространство-время вложения представлено пространством де Ситтера, а его метрика равна

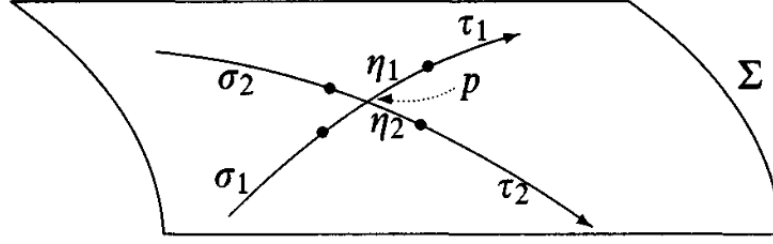
$$dS^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2. \quad (1.61)$$

Ясно, что (2+1)-мерная гравитация с $\Lambda > 0$ описывается группой изометрии $SO(3,1)$, уточняющей ее геометрическую структуру. Месс [58] показал, что структуры де Ситтера не определяются их голономиями. В качестве альтернативы Виттен [71] утверждал, что голономии являются фундаментальными переменными, а квантование пространства-времени идентично. Скобки Пуассона являются фундаментальными величинами для понимания геометрических структур (2+1)-мерной гравитации в терминах голономий, которые получены в [72]. Рассмотрим, что связи $SL(2, R)$ равны $A^{(\pm)a} = \omega^a \pm \frac{1}{\ell} e^a$ для отрицательной космологической постоянной, а скобки Пуассона

$$\{A_i^{(\pm)a}(x), A_j^{(\pm)b}(x')\} = \mp \frac{1}{\ell} \epsilon_{ij} \eta^{ab} \delta^2(x - x'), \quad \{A_i^{(+a)}(x), A_j^{(-b)}(x')\} = 0. \quad (1.62)$$

Пусть γ_1 и γ_2 - это два пути, пересекающиеся в точке p , как показано на рисунке 1.2, и рассмотрим

$$\rho^\pm[\gamma_\alpha] = P \exp \left\{ \int_{\gamma_\alpha} A_i^{(\pm)a} T_a dx^i \right\}, \quad (1.63)$$

Рисунок 1.2 — Два пути γ_1 и γ_2 пересекаются в точке p .

где T_a - генераторы алгебры Ли $SL(2, R)$ и (1.63) представляют собой $SL(2, R)$ голономии вдоль γ . Поскольку голономии в точке пересечения имеют нетривиальные скобки, можно изолировать эту точку, написав $\gamma_\alpha = \sigma_\alpha \cdot \eta_\alpha \cdot \tau_\alpha$. Обратите внимание, что бесконечно малые отрезки η_1 и η_2 содержат точку пересечения p , а точка представляет собой произведение кривых. Определение голономий (1.63) становится

$$\rho^\pm[\gamma_\alpha] = \rho^\pm[\sigma_\alpha] \cdot \rho^\pm[\eta_\alpha] \cdot \rho^\pm[\tau_\alpha]. \quad (1.64)$$

Скобки Пуассона между $\rho^\pm[\eta_1]$ и $\rho^\pm[\eta_2]$ являются

$$\{\rho^\pm[\eta_1], \rho^\pm[\eta_2]\} = \mp \frac{1}{\ell} (\eta^{ab} T_a \otimes T_b) \epsilon(p; \gamma_1, \gamma_2), \quad (1.65)$$

где

$$\epsilon(p; \gamma_1, \gamma_2) = \int_{s(p)-\epsilon}^{s(p)+\epsilon} ds \int_{s'(p)-\epsilon}^{s'(p)+\epsilon} ds' \epsilon_{ij} \frac{d(x^i \circ \eta_1)}{ds} \frac{d(x^j \circ \eta_2)}{ds'} \delta^2(x \circ \eta_1(s) - x \circ \eta_2(s')). \quad (1.66)$$

С помощью следующим тождеством $T_a^a T_b^c = -\frac{1}{4} \delta_B^A \delta_D^C + \frac{1}{2} \delta_B^C \delta_D^A$, то скобки Пуассона между $\rho^\pm[\gamma_1]$ и $\rho^\pm[\gamma_2]$ становится

$$\{\rho^\pm[\gamma_1]^M_N, \rho^\pm[\gamma_2]^P_Q\} = \mp \frac{1}{4\ell} \epsilon(p; \gamma_1, \gamma_2) \left(-\rho^\pm[\gamma_1]^M_N \rho^\pm[\gamma_2]^P_Q + 2\rho^\pm[\sigma_1 \cdot \tau_2]^M_Q \rho^\pm[\sigma_2 \cdot \tau_1]^P_N \right). \quad (1.67)$$

либо

$$\left\{ \left\langle \begin{array}{c} X \\ Y \end{array} \right\rangle \right\} = \pm \frac{1}{4\ell} \epsilon(p) \left(\left\langle X \right\rangle - 2 \left\langle Y \right\rangle \right). \quad (1.68)$$

В частности, если две петли γ_1 и γ_2 пересекаются в базовой точке p . След (1.67) становится

$$\{R^\pm[\gamma_1], R^\pm[\gamma_2]\} = \mp \frac{1}{4\ell} \epsilon(p; \gamma_1, \gamma_2) \left(R^\pm[\gamma_1 \cdot \gamma_2] - R^\pm[\gamma_1] R^\pm[\gamma_2] \right), \quad (1.69)$$

где $R^\pm[\gamma_\alpha] = \frac{1}{2} Tr \rho^\pm[\gamma_\alpha]$. Для петель со многими точками пересечения p_i уравнение (1.69) становится

$$\{R^\pm[\gamma_1], R^\pm[\gamma_2]\} = \mp \frac{1}{4\ell} \sum_i \epsilon(p_i; \gamma_1, \gamma_2) \left(R^\pm[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2] - R^\pm[\gamma_1] R^\pm[\gamma_2] \right), \quad (1.70)$$

где \cdot_i представляет собой произведение кривых. Для тора геометрическая структура получается замкнутой подалгеброй трех голономий. Предположим, что γ_1 и γ_2 являются двумя независимыми окружностями, а следы равны $R^\pm[\gamma_1] = R_1^\pm$, $R^\pm[\gamma_2] = R_2^\pm$, и $R^\pm[\gamma_1 \cdot \gamma_2] = R_{12}^\pm$, тогда

$$\{R_1^\pm, R_2^\pm\} = \mp \frac{4\pi G}{\ell} (R_{12}^\pm - R_1^\pm R_2^\pm), \quad (1.71)$$

и циклические перестановки. Шесть трасс R_α^\pm являются сверхсложными³ аи эту сверхсложность можно понять, рассматривая кубические многочлены $R^\pm[\gamma_2] = R_2^\pm$, и $R^\pm[\gamma_1 \cdot \gamma_2] = R_{12}^\pm$, тогда

$$F^\pm = 1 - (R_1^\pm)^2 - (R_2^\pm)^2 - (R_{12}^\pm)^2 + 2R_1^\pm R_2^\pm R_{12}^\pm. \quad (1.72)$$

где F^\pm исчезают классически, которые обеспечивают только два отношения среди шести R_α^\pm . Гольдман [73] исследовал симплектические структуры римановых поверхностей и нашел эквивалентный набор скобок Пуассона в (2+1)-мерной гравитации. Аналогичную алгебру Пуассона можно найти в [74] для $\Lambda = 0$, используя матричное представление $ISO(2,1)$. Рассмотрим, что голономия $SO(2,1)$ равна

$$\rho_0[\gamma, x] = P \exp \left\{ \int_\gamma \omega^a \mathcal{J}_a \right\}, \quad (1.73)$$

где \mathcal{J}_a - генераторы алгебры ли $SO(2,1)$. Переменные цикла [28; 75] are

$$T^0[\gamma] = \frac{1}{2} Tr \rho_0[\gamma, x], \quad \text{and} \quad T^1[\gamma] = \int_\gamma Tr \{ \rho_0[\gamma, x(s)] e^a(\gamma(s)) \mathcal{J}_a \}. \quad (1.74)$$

Переменные T^0 и T^1 подчиняются следующим скобкам Пуассона

$$\{T^0[\gamma_1], T^0[\gamma_2]\} = 0, \quad (1.75)$$

$$\{T^1[\gamma_1], T^0[\gamma_2]\} = -\frac{1}{8} \sum_i \epsilon(p_i; \gamma_1, \gamma_2) \left(T^0[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2] - T^0[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2^{-1}] \right), \quad (1.76)$$

$$\{T^1[\gamma_1], T^1[\gamma_2]\} = -\frac{1}{8} \sum_i \epsilon(p_i; \gamma_1, \gamma_2) \left(T^1[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2] - T^1[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2^{-1}] \right), \quad (1.77)$$

где произведение определяется $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2^{-1} = I$. Заметим также, что T^0 и T^1 подчиняются

$$\begin{aligned} T^0[\gamma_1] T^0[\gamma_2] &= \frac{1}{2} \left(T^0[\gamma_1 \cdot \gamma_2] + T^0[\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}] \right), \\ T^0[\gamma_1] T^1[\gamma_2] + T^0[\gamma_2] T^1[\gamma_1] &= \frac{1}{2} \left(T^1[\gamma_1 \cdot \gamma_2] + T^1[\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}] \right), \end{aligned} \quad (1.78)$$

³Пространство тора имеет только четыре измерения.

используя следующие тождества

$$\begin{aligned} T^0[0] &= 1, & T^0[\gamma] &= T^0[\gamma^{-1}], & T^0[\gamma_1 \cdot \gamma_2] &= T^0[\gamma_2 \cdot \gamma_1], \\ T^1[0] &= 0, & T^1[\gamma] &= T^1[\gamma^{-1}], & T^1[\gamma_1 \cdot \gamma_2] &= T^1[\gamma_2 \cdot \gamma_1]. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Заметим, что T^0 является функцией спиновой связности, определенной на плоском пространстве $SO(2,1)$ связи. Множество петель в (1.78) и (1.79) трудно параметризовать фазовое пространство конечномерным набором наблюдаемых.

1.4 Квантованные решения для (2+1)-мерной гравитации

Теория (2+1)-мерная гравитация является диффеоморфно-инвариантной геометрической теорией и имеет конечные степени свободы. Таким образом, проблема ненормируемости фиксируется, а квантовая теория поля упрощается до квантовой механики. Классические решения - это игрушечная модель для описания квантования (2+1)-мерной гравитации. Различные подходы к квантованию подробно проиллюстрированы в [76; 77].

1.4.1 Редуцированное квантование фазового пространства

Простейший подход к квантованию (2+1)-мерной гравитации начинается с приведенного действия фазового пространства (1.40), которое описывает реальные степени свободы. Рассмотрим, что m_α и p_α являются операторами на Гильбертовом пространстве, подчиняющимися коммутационным соотношениям

$$[\hat{m}_\alpha, \hat{p}^\beta] = -i\delta_\alpha^\beta, \quad (1.80)$$

это означает, что импульсы являются

$$\hat{p}^\alpha = -i\frac{\partial}{\partial m_\alpha}. \quad (1.81)$$

Уравнение Шредингера можно записать для тора Σ в виде

$$i\frac{\partial}{\partial T}\psi(\tau, \bar{\tau}, T) = \hat{H}_{red}\psi(\tau, \bar{\tau}, T), \quad (1.82)$$

где $\psi(\tau, \bar{\tau}, T)$ - квадратично интегрируемые волновые функции, а гамильтониан может быть получен из (1.40) путем упорядочения операторов. Классический гамильтониан для про-

странственных топологий туров

$$\hat{H}_{red} = \frac{1}{\sqrt{T^2 - 4\Lambda}} \hat{\tau}_2 \left[(\hat{p}_1)^2 + (\hat{p}_2)^2 \right]^{(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{T^2 - 4\Lambda}} \Delta_0^{1/2}, \quad (1.83)$$

где

$$\Delta_0 = -\tau_2^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2} \right), \quad (1.84)$$

является скалярным лапласианом для отрицательной кривизны метрики Пуанкаре на пространстве модулей. Этот метод сильно зависит от классического выбора времени нарезки. Геометрия различных временных срезов сложна и приводит к эквивалентным теориям. Лапласиан, действующий на инвариантные функции, известен как Лапласиан Мааса нулевого веса, а его собственные функции являются нулевыми формами Мааса [78; 79]. Любая инвариантная функция ψ может быть расширена в терминах собственных функций Δ_0 как

$$\psi(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{\nu} c_{\nu} \psi_{\nu}(\tau, \bar{\tau}), \quad (1.85)$$

где ψ_{ν} are zero weight Maass forms. The action of $\Delta_0^{1/2}$ on ψ can be defined as

$$\Delta_0^{1/2} \psi(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{\nu} c_{\nu} \lambda_{\nu}^{1/2} \psi_{\nu}(\tau, \bar{\tau}). \quad (1.86)$$

Собственные функции лапласиана (1.84) могут быть получены путем разделения переменных. Один набор собственных функций - это $u_{\nu}^{(n)}$, записанный в терминах функции Бесселя, в то время как другой набор собственных функций с теми же собственными значениями - это $h_{\nu}^{(\pm)}$. Форма Мааса с нулевым весом должна быть суперпозицией

$$\psi(\tau, \bar{\tau}) = \sum_n \rho_{\nu}(n) u_{\nu}^{(n)} + \rho_{\nu}^{+} h_{\nu}^{+} + \rho_{\nu}^{-} h_{\nu}^{-}. \quad (1.87)$$

Модулярные инвариантные суперпозиции (1.87) существуют для всех значений ν . Непрерывный спектр Δ_0 исходит из набора собственных функций $E_{\nu}(\tau_1, \tau_2)$ с коэффициентами ρ_{ν} . Дополнительные собственные функции $\nu_n(\tau_1, \tau_2)$, представляющие дискретный спектр для конкретных значений ν , известны как формы куска. Коэффициенты ρ_{ν} и собственные значения λ_n вычисляются численно. Любая модулярная инвариантная квадратно интегрируемая функция $\psi(\tau, \bar{\tau})$ может быть расширена как

$$\psi(\tau, \bar{\tau}) = \sum \langle \nu_n | \psi \rangle \nu_n(\tau, \bar{\tau}) + \frac{1}{4\pi} \int d\nu \langle E_{\nu} | \psi \rangle E_{\nu}(\tau, \bar{\tau}), \quad (1.88)$$

где

$$\langle f | \psi \rangle = \int_{\mathcal{N}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} f^*(\tau, \bar{\tau}) \psi(\tau, \bar{\tau}). \quad (1.89)$$

Уравнение (1.88) может быть реализовано как форма разложения (1.85), в которой рассматриваются дискретный и непрерывный спектры. Общая форма (1.82) для уравнения Шредингера имеет вид

$$i\frac{\partial}{\partial T}\psi(\tau,\bar{\tau},T) = \hat{H}_{red}^{(n)}\psi(\tau,\bar{\tau},T), \quad (1.90)$$

с помощью

$$\hat{H}_{red}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{T^2 - 4\Lambda}} \Delta_n^{1/2}, \quad (1.91)$$

где Δ_n - Маасс лапласиан. Гамильтониан $\hat{H}_{red}^{(n)}$ зависит от условий того, \hbar из (1.83), и может быть интерпретирован в качестве оператора заказа от классического гамильтониана. Собственные значения гамильтониана $\hat{H}_{red}^{(n)}$ зависят от значения n и $n = 0$ для формализма АДМ. Процедура этого раздела проста, но наблюдается несколько проблем. Гамильтониан исходит из сложного дифференциального уравнения, и его решение неизвестно для пространственных топологий. Другая проблема исходит из существования квадратного корня в гамильтоновой форме. Классически редуцированный гамильтониан положителен, поскольку он представляет собой область. С квантовой точки зрения нет очевидного выбора, гарантирующего, что гамильтониан должен быть положительным. Наконец, выбор Йоркского времени $TrK = -T$ является классически приемлемым, но он нарушает ковариацию общей теории относительности. Однако неоднозначно, что различные классические варианты времени приводят к одинаковым предсказаниям.

1.4.2 Представление связности

Связность представления основано на спиновой связности, а не на метрике, которая начинается с действия первого порядка (1.55) и зависит от знака космологической постоянной Λ . Квантование Черна-Саймонса хорошо обсуждается для компактной калибровочной теории [80–83], так и для некомпактной калибровочной теории [84–86].

Для $\Lambda < 0$ соответствующей калибровочной группой является $SO(2,2)$ или ее покрытие $SL(2,R) \times SL(2,R)$. Это наиболее плохо изученный случай; явное квантование голономий алгебры существует для рода один и рода два [87], но более общих результатов пока не существует. Для $\Lambda > 0$ соответствующей калибровочной группой является $SO(3,1)$ или ее покрытие $SL(2,C)$, комплексная калибровочная группа, теория Черна-Саймонса которой несколько лучше понятна [84]. Скобки Пуассона для этой теории связаны с квантовым двойником группы Лоренца, и Буффенуар использовал эту структуру для записи явного квантования [88].

Для $\Lambda = 0$ соответствующей калибровочной группой является $ISO(2,1)$, $(2+1)$ -мерная группа Пуанкаре или ее универсальное покрытие. фазовое пространство имеет естественную

структуру котангентного расслоения, позволяющую сразу же идентифицировать голономии спиновой связи ω как обобщенные положения и их производные как обобщенные импульсы. Это обеспечивает прямую связь с переменными цикла Аштекара, Ровелли и Смолина [28; 89]

$$T^0[\gamma] = \frac{1}{2} \text{Tr} \rho_0[\gamma, x], \quad T^1[\gamma] = \int_{\gamma} \text{Tr} \{ \rho_0[\gamma, x(s)] e^a(\gamma(s)) \mathcal{J}_a \}, \quad (1.92)$$

где

$$\rho_0[\gamma, x] = P \exp \left\{ \int_{\gamma} \omega^a \mathcal{J}_a \right\} \quad (1.93)$$

является $SL(2, R)$ голономией спиновой связи и $T^1[\gamma]$ может быть выражена как производная от $T^0[\gamma]$ вдоль пути в пространстве плоских связей. Обратите внимание, что генератор \mathcal{J} может находиться в любом представлении $SL(2, R)$ и что трассировка в (1.92) может зависеть от выбора представления.

Как и при редуцированном квантовании фазового пространства, материя упрощается для торовой вселенной $\mathbb{R} \times T^2$. Давайте снова сосредоточимся на случае $\Lambda = 0$, и наша цель-квантовать алгебру (1.71). Во-первых, мы заменяем классические скобки Пуассона $\{, \}$ коммутаторами $[,]$ с правилом $[x, y] = xy - yx = i\hbar \{x, y\}$. Далее мы заменяем произведение симметричным произведением $xy \rightarrow \frac{1}{2}(xy + yx)$. Полученная алгебра определяется соотношениями

$$\hat{R}_1^{\pm} \hat{R}_2^{\pm} e^{i\pm\theta} - \hat{R}_2^{\pm} \hat{R}_1^{\pm} e^{i\mp\theta} = \pm 2i \sin \theta \hat{R}_{12}^{\pm}, \quad (1.94)$$

и циклические перестановки с $\tan \theta = -\hbar/8\ell$. Классически наблюдаемые \hat{R}_1^{\pm} , \hat{R}_2^{\pm} и \hat{R}_{12}^{\pm} не являются независимыми; в квантовой теории соответствующее утверждение состоит в том, что величины

$$\hat{F}^{\pm} = 1 - \tan^2 \theta + e^{\pm 2i\theta} \left((\hat{R}_1^{\pm})^2 + (\hat{R}_{12}^{\pm})^2 \right) - e^{\mp 2i\theta} (\hat{R}_2^{\pm})^2 + 2e^{\pm i\theta} \cos \theta \hat{R}_1^{\pm} \hat{R}_2^{\pm} \hat{R}_{12}^{\pm}, \quad (1.95)$$

коммутируют с голономиями и могут быть последовательно установлены на ноль. С точки зрения параметров \hat{r}_a^{\pm} , алгебра [90; 91] может быть представлено

$$\hat{R}_1^{\pm} = \sec \theta \cosh \frac{\hat{r}_1^{\pm}}{2}, \quad \hat{R}_2^{\pm} = \sec \theta \cosh \frac{\hat{r}_2^{\pm}}{2}, \quad \hat{R}_{12}^{\pm} = \sec \theta \cosh \frac{(\hat{r}_1^{\pm} + \hat{r}_2^{\pm})}{2}, \quad (1.96)$$

с помощью

$$[\hat{r}_1^{\pm}, \hat{r}_2^{\pm}] = \pm 8i\theta, \quad [\hat{r}_a^{\pm}, \hat{r}_b^{\mp}] = 0. \quad (1.97)$$

Для небольшие Λ , эти коммутаторы отличаются от квантования классических скобок членами порядка \hbar^3 . Альтернативное квантование, также отличающееся терминами порядка \hbar^3 , работает непосредственно с матрицами голономии, накладывая условие квантово-группового

квантования

$$\rho^+[\gamma_1]\rho^+[\gamma_2] = q\rho^+[\gamma_2]\rho^+[\gamma_1], \quad q = e^{-i\hbar/4l} \quad (1.98)$$

с аналогичным условием для ρ^- .

1.4.3 Ковариантное каноническое квантование

Формализм АДМ и геометрической структуры описывают всю геометрию пространства-времени как эволюционирующую во времени и единую сущность.⁴ Эти два описания классически эквивалентны, но они различны в отношении квантовых теорий. Квантование геометрических структур оказалось картиной Гейзенберга, дополняющей квантование АДМ в картине Шредингера. Ковариантное каноническое квантование [93–95] начинается с классического описания (2+1)-мерной гравитации, где фазовое пространство классической теории изоморфно. Лагранжиан первого порядка для (2+1)-мерной гравитации определяется как

$$\mathcal{L} = -2\left\{e^a \wedge \left(d\omega_a + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega_b \wedge \omega_c\right) + \frac{\Lambda}{6}\epsilon_{abc}e^a \wedge e^b \wedge e^c\right\}. \quad (1.99)$$

Симплектическая форма является

$$\hat{\Omega}[e, \omega, \delta_1 e, \delta_2 \omega] = 2 \int_{\mathcal{M}} (\delta_1 e^a \wedge \delta_2 \omega_a). \quad (1.100)$$

Рассмотрим пространства-времени с топологией $[0,1] \times T^2$ с $\Lambda = 0$, тогда

$$\begin{aligned} e^0 &= e^{-t} dt, & \omega^0 &= 0, \\ e^1 &= a dx + b dy, & \omega^1 &= -(\lambda dx + \mu dy), \\ e^2 &= e^{-t}(\lambda dx + \mu dy), & \omega^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Подставляя (1.101) в (1.100), получаем

$$\hat{\Omega}[\delta e, \delta_2 \omega] = 2(\delta\mu \wedge \delta a - \delta\lambda \wedge \delta b), \quad (1.102)$$

где λ и b - сопряженные переменные. Симплектическая форма $\hat{\Omega}$ может быть вычислена в терминах голономий. Обратите внимание, что скобки Пуассона между двумя группами голономии $\rho[\gamma_1]$ и $\rho[\gamma_2]$ - нетривиальны, если две кривые γ_1 и γ_2 пересекаются и не гомотопичны. Если мы рассмотрим набор координат μ_α на $SO(2,1)$ пространстве модулей $\tilde{\mathcal{N}}$ и

⁴Вневременная сущность. Квантовая гравитация без времени проясняется в [92].

параметризацию $\omega = \omega(\mu_\alpha)$, то определим набор сопряженных импульсов

$$\pi^\alpha = 2 \int_{\Sigma} e^a \wedge \left(\frac{\partial \omega_a}{\partial \mu_\alpha} \right). \quad (1.103)$$

Действие первого порядка упрощается до

$$I = \int dt \pi^\alpha \dot{\mu}_\alpha, \quad (1.104)$$

без гамильтониана, который усложняет интерпретацию квантовой теории. Это происходит потому, что голономии являются независимыми от времени переменными. Как и квантование Черна-Саймонса, ковариантное каноническое квантование приводит к формализму “фиксированного времени”, в котором фундаментальными операторами являются константы движения, описывающие все классическое пространство-время. Ковариантное фазовое пространство параметризуется координатами μ_α и π^α , которые канонически сопряжены в классической теории. Для квантования скобки Пуассона заменяются коммутаторами

$$[\hat{\mu}_\alpha, \hat{\pi}^\beta] = i\delta_\alpha^\beta, \quad (1.105)$$

В Торе, например, коммутаторы $[\hat{\mu}, \hat{a}] = [\hat{b}, \hat{\lambda}] = -i/2$, и волновую функцию можно рассматривать как $\psi(\lambda, \mu)$ и обозначают \hat{a} и \hat{b} как

$$\hat{a} = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad \hat{b} = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda}. \quad (1.106)$$

Эти операторы являются фундаментальными для квантования, отражая классический выбор голономий как независимых от времени наблюдаемых. Таким образом, мы можем оценить спектр и математическое ожидание голономий для любой волновой функции. Кроме того, динамическая информация отсутствует, так как нет гамильтониана. Ровелли [96; 97] показал, что независимые от времени операторы могут предоставлять динамическую информацию.

1.4.4 Представление петель

Петлевое представление - это альтернативный подход к квантованию (2+1) - мерной гравитации, начинающийся с операторной алгебры $\hat{T}^0[\gamma]$ и $\hat{T}^1[\gamma]$. Эти операторы являются функциями триады e и спина ω , помеченных петлями γ . Переменные T^0 и T^1 , обсуждаемые

в разделе 1.3.3, имеют следующие операторные формы

$$[\hat{T}^0[\gamma_1], \hat{T}^0[\gamma_2]] = 0, \quad (1.107)$$

$$[\hat{T}^1[\gamma_1], \hat{T}^0[\gamma_2]] = -\frac{i}{8} \sum_i \epsilon(p_i; \gamma_1, \gamma_2) \left(\hat{T}^0[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2] - \hat{T}^0[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2^{-1}] \right), \quad (1.108)$$

$$[\hat{T}^1[\gamma_1], \hat{T}^1[\gamma_2]] = -\frac{i}{8} \sum_i \epsilon(p_i; \gamma_1, \gamma_2) \left(\hat{T}^1[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2] - \hat{T}^1[\gamma_1 \cdot_i \gamma_2^{-1}] \right). \quad (1.109)$$

Заметим также, что \hat{T}^0 и \hat{T}^1 подчиняются

$$\begin{aligned} \hat{T}^0[\gamma_1] \hat{T}^0[\gamma_2] &= \frac{1}{2} \left(\hat{T}^0[\gamma_1 \cdot \gamma_2] + \hat{T}^0[\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}] \right), \\ \hat{T}^0[\gamma_1] \hat{T}^1[\gamma_2] + \hat{T}^0[\gamma_2] \hat{T}^1[\gamma_1] &= \frac{1}{2} \left(\hat{T}^1[\gamma_1 \cdot \gamma_2] + \hat{T}^1[\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}] \right), \end{aligned} \quad (1.110)$$

а также

$$\begin{aligned} \hat{T}^0[0] &= 1, & \hat{T}^0[\gamma] &= \hat{T}^0[\gamma^{-1}], & \hat{T}^0[\gamma_1 \cdot \gamma_2] &= \hat{T}^0[\gamma_2 \cdot \gamma_1], \\ \hat{T}^1[0] &= 0, & \hat{T}^1[\gamma] &= \hat{T}^1[\gamma^{-1}], & \hat{T}^1[\gamma_1 \cdot \gamma_2] &= \hat{T}^1[\gamma_2 \cdot \gamma_1]. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Волновые функции являются естественной функцией всех множеств петель. Этот подход просто предложен Аштекаром [28; 75]. Состояние вакуума $|0\rangle$ определяется как

$$\hat{T}^1[\gamma] |0\rangle = 0, \quad (1.112)$$

для всех гомотопических классов $[\gamma]$ и любого состояния можно выразить как

$$|\Psi\rangle = \sum c_i |[\gamma_i]\rangle, \quad (1.113)$$

с помощью $|[\gamma_i]\rangle = \hat{T}^0[\gamma_i] |0\rangle$. Аштекара предложил новый термин 'equitoru', чтобы описать отношение эквивалентности $[\gamma_1] \sim [\gamma_2]$, если $T^0[\gamma_1](\omega) = T^0[\gamma_2](\omega)$ для всех спиновой связности ω . Определите Гильбертово пространство для представления петли как $\mathcal{H}_{loop} = \mathcal{H}' / \sim$, где \mathcal{H}' is the space generated by the $|[\gamma_i]\rangle$ и \sim является отношением эквивалентности. Действия \hat{T}^0 и \hat{T}^1 на \mathcal{H}_{loop} определяются как

$$\hat{T}^0[\alpha] |[\beta]\rangle = \frac{1}{2} \left(|[\alpha] \cdot [\beta]\rangle + |[\alpha] \cdot [\beta]^{-1}\rangle \right), \quad (1.114)$$

$$\hat{T}^1[\alpha] |[\beta]\rangle = -\frac{i}{8} \sum_i \epsilon(p; \alpha, \beta) \left(|[\alpha \cdot_i \beta]\rangle + |[\alpha \cdot_i \beta^{-1}]\rangle \right). \quad (1.115)$$

Полезно предположить, что пространство-время имеет топологию тора, чтобы понять физический смысл представления петли. Если пространство-время имеет топологию $[0,1] \times T^2$ и гомотопические классы кривых на T^2 , помеченные целыми числами m и n . Уравнения

(1.114) и (1.115) становятся

$$\hat{T}^0[m,n] |p,q\rangle = \frac{1}{2} (|m+p, n+q\rangle + |m-p, n-q\rangle), \quad (1.116)$$

$$\hat{T}^1[m,n] |p,q\rangle = -\frac{i}{8} (mq - np) (|m+p, n+q\rangle - |m-p, n-q\rangle). \quad (1.117)$$

Так как оператор $\hat{T}^0[m,n]$ коммутирует, поэтому его собственных состояний представляют собой линейные комбинации $|\Psi\rangle = \sum_{p,q} c_{pq} |p,q\rangle$, такие, что

$$\hat{T}^0[m,n] |\Psi\rangle = T^0[m,n] |\Psi\rangle, \quad (1.118)$$

для некоторых чисел $T^0[m,n]$. Уравнения (1.116) и (1.117) дают набор соотношений для c_{pq} и удовлетворяются

$$|\lambda_0, \mu_0\rangle = \sum_{p,q} \cosh\left(\frac{p\lambda_0 + q\mu_0}{2}\right) |p,q\rangle, \quad (1.119)$$

$$\hat{T}^0[m,n] |\lambda_0, \mu_0\rangle = \cosh\left(\frac{m\lambda_0 + n\mu_0}{2}\right) |\lambda_0, \mu_0\rangle, \quad (1.120)$$

где λ_0 и μ_0 - произвольные вещественные числа. Состояние $|\lambda_0, \mu_0\rangle$ является собственным состоянием оператора $\hat{\lambda}$ и $\hat{\mu}$ представления связи с собственными значениями λ_0 и μ_0 . Общее состояние представления связи может быть записано как суперпозиция

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \mu) &= \langle \psi | \lambda, \mu \rangle = \sum_{p,q} \cosh\left(\frac{p\lambda + q\mu}{2}\right) \langle \psi | p, q \rangle = \sum_{p,q} \cosh\left(\frac{p\lambda + q\mu}{2}\right) \tilde{\psi}(p, q), \\ &= \sum_{[\gamma]} T^0[\gamma](\lambda, \mu) \tilde{\psi}([\gamma]). \end{aligned} \quad (1.121)$$

Это отношение представляет собой обратное преобразование петли, связывающее петли и состояния представления соединения. Обратное преобразование петли можно записать в виде

$$\tilde{\psi}'(p, q) = \int d\lambda d\mu \cosh\left(\frac{p\lambda + q\mu}{2}\right) \psi(\lambda, \mu), \quad (1.122)$$

так и

$$\tilde{\psi}'[\gamma] = \int d\lambda d\mu T^0[\gamma](\lambda, \mu) \psi(\lambda, \mu). \quad (1.123)$$

Действие оператора \hat{T} на состояние $\tilde{\psi}'(p, q)$ может быть определено

$$\begin{aligned} \hat{T}^0[m,n] \tilde{\psi}'(p, q) &= \int d\lambda d\mu \cosh\left(\frac{p\lambda + q\mu}{2}\right) \cosh\left(\frac{m\lambda + n\mu}{2}\right) \psi(\lambda, \mu), \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{\psi}'(p+m, q+n) + \tilde{\psi}'(p-m, q-n)), \end{aligned} \quad (1.124)$$

а также

$$\begin{aligned}
\hat{T}^1[m,n] \tilde{\psi}'(p,q) &= -\frac{i}{2} \int d\lambda d\mu \cosh\left(\frac{p\lambda + q\mu}{2}\right) \sinh\left(\frac{m\lambda + n\mu}{2}\right) \left[m \frac{\partial}{\partial \mu} - n \frac{\partial}{\partial \lambda}\right] \psi(\lambda, \mu), \\
&= -\frac{i}{4} (np - mq) \int d\lambda d\mu \sinh\left(\frac{p\lambda + q\mu}{2}\right) \sinh\left(\frac{m\lambda + n\mu}{2}\right) \psi(\lambda, \mu), \\
&= -\frac{i}{8} (np - mq) (\tilde{\psi}'(p + m, q + n) - \tilde{\psi}'(p - m, q - n)), \tag{1.125}
\end{aligned}$$

в согласии с уравнениями (1.116) и (1.117). Преобразование (1.122) дает хорошее формальное представление действия операторов петли и используется в качестве отправной точки для определения представления петлю.

1.4.5 Подход Уилера-Девитта

Предыдущие подходы основаны на истинных степенях свободы классической теории. Дирак [98–100] разработал альтернативный подход к квантованию целых степеней свободы, где состояния известны из классического фазового пространства. В квантовой гравитации связи должны быть операторами на Гильбертовом пространстве. Гамильтоном связи, действующее на состояния, приводит к дифференциальному уравнению связи, действующее на состояния, приводит к дифференциальному уравнению, известному как уравнение Уилера-Девитта [9] в гравитации. Решением уравнения Уилера-Девитта являются физические состояния.

Рассматриваются различные формы квантования Дирака (2+1)-мерной гравитации для формализмов первого и второго порядков. Первый порядок уравнения Уилера-Девитта эквивалентен приведенному квантованию фазового пространства, в то время как версия второго порядка более проблематична. В формализме первого порядка с $\Lambda = 0$ скобки Пуассона между спиновой связью ω_i^a and triad e_i^a являются

$$[e_i^a(x), \omega_{jb}(x')] = -\frac{i}{2} \epsilon_{ij} \delta_b^a \delta^2(x - x'), \quad [e_{ia}(x), e_j^b(x')] = [\omega_{ia}(x), \omega_j^b(x')] = 0. \tag{1.126}$$

Выбрав ω в качестве переменной конфигурационного пространства, таким образом, e можно представить в виде

$$e_{ia} = -\frac{i}{2} \epsilon^{ij} \frac{\delta}{\delta \omega_j^a}. \tag{1.127}$$

Связи (1.56) и (1.57), действующие на волновые функции $\Psi[\omega]$, становятся уравнениями Уилера-Девитта первого порядка

$$\bar{\mathcal{B}}^a \Psi[\omega] = \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \left[\partial_i \omega_j^a - \partial_j \omega_i^a + \epsilon^{abc} \omega_{ib} \omega_{jc} \right] \Psi[\omega] = 0, \quad (1.128)$$

$$\mathcal{B}^a \Psi[\omega] = \frac{i}{2} \left[\partial_k \frac{\delta}{\delta \omega_{ka}} + \epsilon^{abc} \omega_{kb} \frac{\delta}{\delta \omega_k^c} \right] \Psi[\omega] = 0. \quad (1.129)$$

Первое связь (1.128) не содержит функциональных производных и волновые функции $\Psi[\omega]$ находятся на плоских $SO(2,1)$ связях, в то время как второе связь (1.129) является $SO(2,1)$ калибровочной инвариантностью. Это означает, что физические состояния в квантовании Дирака являются калибровочно-инвариантными функциями плоской связи. Условие (1.129) выполняется, когда волновая функция Ψ является калибровочно-инвариантной функцией. Это просто полученное описание из ковариантного канонического квантования. Внутреннее произведение произвольной физической волновой функции $\Psi[\omega]$ равно

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int [d\omega] \Psi^*[\omega] \Phi[\omega], \quad (1.130)$$

что может быть оценено калибровочной фиксацией внутреннего изделия. Чтобы квантовать классическую теорию, фазовое пространство должно быть разделено на переменные, которые действуют как положение и импульсы. Это известно как поляризация, в которой спиновые связи ω являются позициями, а триады e - импульсами. Если мы применим квантование Дирака к метрической формулировке (2+1)-мерной гравитации, то получим уравнение Уилера-Девитта второго порядка.

$$\hat{\mathcal{H}} \Psi[\lambda, \tau] = \left\{ \frac{1}{8} \frac{\delta}{\delta \lambda} e^{-2\lambda} \frac{\delta}{\delta \lambda} + \frac{1}{2} e^{-2\lambda} \Delta_0 + 2\tilde{\Delta} \lambda - 2e^{-2\lambda} Y^i[\pi] \tilde{\Delta} Y_i[\pi] + 2e^{-2\lambda} \tilde{\nabla}_i \left[(2p^{ij} + \tilde{\nabla}^i Y^j[\pi] + \tilde{\nabla}^j Y^i[\pi] - \tilde{g}^{ij} \tilde{\nabla}_k Y^k[\pi]) Y_j[\pi] \right] \right\} \Psi[\lambda, \tau] = 0, \quad (1.131)$$

где $\tilde{\nabla}$ представляет ковариантную производную для спиновой связи, совместимую с \tilde{g}_{ij} и Δ_0 - лапласиан на пространстве модулей тора.

$$\Delta_0 = -\tau_2^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2} \right), \quad (1.132)$$

и $Y^i[\pi]$ определяется решением импульсная связь

$$Y^i[\pi] = \frac{i}{4} \tilde{\Delta}^{-1} \left[e^{2\lambda} \tilde{\nabla}_i \left(e^{-2\lambda} \frac{\delta}{\delta \lambda} \right) \right]. \quad (1.133)$$

Согласно (1.131), λ является функцией, а не константой, и термин $\tilde{\Delta} \lambda$ не может быть удален. Нелокальные члены в уравнении Уилера-Девитта (1.131) представляют собой члены, включающие $Y_i[\pi]$, и затрудняют извлечение его решения. Хенно [101] указал, что нелокальный член появляется, когда пространственная топология является двухсферной. Явное решение уравнения Уилера-Девитта неизвестно из-за неоднозначности порядка операторов. Волновой

функционал Уилера-Девитта не зависит от конкретного выбора временной координаты, но волновая функция может быть найдена для любого произвольного среза.

1.4.6 Интегралы по траекториям

Интеграл по траекториям менее корректен, чем предыдущие канонические подходы квантования. Проблема операторного упорядочения преодолевается, поскольку интегральные переменные по траекториям являются классическими полями, а не операторами. В квантовой гравитации интеграл по траекториям может быть вычислен для любой топологии пространства-времени и амплитуда перехода может быть вычислена. Интеграл по траекториям определяется как либо

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int [dq] e^{iI[q]}, \quad (1.134)$$

или

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int [dq] [dp] e^{iI[q,p]}, \quad (1.135)$$

где интеграция - это общее фазовое пространство между начальными данными q_i и конечными данными q_f . Интеграл по траекториям Фейнмана задал амплитуду перехода между начальным и конечным состояниями, которая совпадает с амплитудой перехода от канонического квантования для любых простых систем. Интеграл по траекториям канонического действия (1.31) равен

$$Z = \int [d\pi^{ij}] [dg_{ij}] [dN^i] [dN] e^{iI_{grav}[\pi,g]}, \quad (1.136)$$

где интеграция по функциям хода и сдвига N и N^i приводит к дельта-функционалу. Как правило, интегралы по траекториям при калибровочных условиях $\chi^\mu = 0$ равен

$$Z = \int [d\pi^{ij}] [dg_{ij}] [dN^i] [dN] \delta[\chi^\mu] \det\{\mathcal{H}_\mu, \chi^\nu\} e^{iI_{grav}[\pi,g]}, \quad (1.137)$$

где $\{, \}$ представляет скобку Пуассона [102]. Параметризуем пространственную метрику как $g_{ij} = e^{2\lambda} f^* \tilde{g}_{ij}(m_\alpha)$, где \tilde{g}_{ij} - постоянная метрика кривизны как функция модулей m_α и f^* - диффеоморфизм на σ . Установить, что

$$\delta g_{ij} = 2(\delta\lambda) g_{ij} + (\hat{P}(\delta\xi))_{ij} + \delta m_\alpha T^{\alpha\beta} \Psi_{(\beta)ij}, \quad (1.138)$$

$$\pi^{ij} = \frac{1}{2} g^{ij} \pi + \sqrt{g} (\hat{P}Y)^{ij} + \sqrt{g} \hat{p}^\alpha \Psi_{(\alpha)}^{ij}, \quad (1.139)$$

где оператор \hat{P} определяется как

$$(\hat{P}\xi)_{ij} = \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i - g_{ij} \nabla_k \xi^k, \quad (1.140)$$

где ∇_i - ковариантная производная с пространственной метрикой g_{ij} . Связи становятся

$$\mathcal{H}_i = \sqrt{g} (\hat{P}^\dagger \hat{P} Y)_i - \nabla_i \pi, \quad (1.141)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} e^{-2\lambda} \pi^2 + 2\sqrt{\tilde{g}} \left(\tilde{\Delta} \lambda - \frac{k}{2} \right) \\ & + \sqrt{\tilde{g}} \tilde{g}^{ik} \tilde{g}^{jl} e^{-2\lambda} \left((\hat{P} Y)_{ij} + \hat{p}^\alpha \Psi_{(\alpha)ij} \right) \left((\hat{P} Y)_{kl} + \hat{p}^\beta \Psi_{(\beta)kl} \right). \end{aligned} \quad (1.142)$$

Теперь мы должны изменить интегральные по траекториям переменные (1.137) с (g_{ij}, π^{ij}) на $(m_\alpha, \lambda, \xi, \hat{p}^\alpha, \pi, Y^i)$, тогда мы получим

$$\begin{aligned} Z = & \int [d^n \hat{p}] [d^n m] \det | \langle \chi^{(\alpha)}, \Psi_{(\beta)} \rangle | \\ & \int [d(\pi/\sqrt{g})] [d\lambda] [dY] [d\xi] \det | \hat{P}^\dagger \hat{P} | \delta[\xi^\mu] \delta[\mathcal{H}_\nu/\sqrt{g}] \det | \{ \mathcal{H}_\mu, \chi^\nu \} | e^{iI_{grav}}. \end{aligned} \quad (1.143)$$

Рассмотрим условие калибровочной фиксации $\chi^0 = \pi/\sqrt{g} - T = 0$ и $\det | \{ \mathcal{H}_\mu, \chi^\nu \} |$ сводится к $\det | \{ \mathcal{H}_i, \chi^j \} | \det | \{ \mathcal{H}_0, \chi^0 \} |$. Интеграл по траекториям (1.143) упрощается до

$$Z = \int [d^n \hat{p}] [d^n m] \det | \langle \chi^{(\alpha)}, \Psi_{(\beta)} \rangle | \int [d\lambda] \delta[\mathcal{H}/\sqrt{g}] \det | \{ \mathcal{H}_0, \chi^0 \} | e^{iI_{grav}}, \quad (1.144)$$

$$= \int [d^n \hat{p}] [d^n m] \det | \langle \chi^{(\alpha)}, \Psi_{(\beta)} \rangle | e^{iI_{grav}}, \quad (1.145)$$

где дельта-функция $\delta[\mathcal{H}/\sqrt{g}]$ вычисляет интеграл по λ , который отменяется с определителем $\det | \{ \mathcal{H}_0, \chi^0 \} |$ в интеграле по траекториям. Определитель $\det | \langle \chi^{(\alpha)}, \Psi_{(\beta)} \rangle |$ определяется как

$$p^\alpha = \int_\sigma d^2 x e^{s\lambda} (\pi^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} \pi) \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial m_\alpha} = \langle \hat{p}^\beta \Psi_{(\beta)}, \chi^{(\alpha)} \rangle = \langle \chi^{(\alpha)}, \Psi_{(\beta)} \rangle \hat{p}^\beta. \quad (1.146)$$

Интеграл по траекториям (1.145) становится

$$Z = \int [d^n p] [d^n m] e^{iI_{grav}[p,m]}, \quad (1.147)$$

который является интегралом по траекториям, полученным из приведенного квантования фазового пространства. Теперь мы попытаемся проанализировать интеграл по траекториям в формализме первого порядка. Интеграл по траекториям действия первого порядка (1.43) для нулевой космологической постоянной $\Lambda = 0$ равен

$$Z = \int [de] [d\omega] e^{iI_{grav}[e,\omega]}. \quad (1.148)$$

Интеграл по траекториям (1.148) может быть оценен путем фиксации калибровочного условия действия [20; 103]. Рассмотрим замкнутое многообразие, а спиновая связь и триада даны в терминах фоновых полей $(\bar{e}, \bar{\omega})$, где

$$e^a = \bar{e}^a + \alpha^a, \quad \omega^a = \bar{\omega}^a + \beta^a. \quad (1.149)$$

Мы берем калибровку Ландау как стандартный выбор калибровки, где

$$\bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \alpha_\nu^a = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \beta_\nu^a = 0, \quad (1.150)$$

где $\bar{\nabla}$ - ковариантная производная по фоновой метрике \bar{g} . Виттен [20] показал, что калибровочные условия (1.150) можно записать в виде

$$D_{\bar{\omega}} * \alpha^a = D_{\bar{\omega}} * \beta^a = 0, \quad (1.151)$$

где $D_{\bar{\omega}}$ - калибровочно-ковариантная производная, которая может быть оценена $D_{\bar{\omega}} \gamma^a = d\gamma^a + \epsilon^{abc} \bar{\omega}_b \gamma_c$ and $*$ - оператор звезды Ходжа. Действие первого порядка (1.43) для нулевой космологической постоянной $\Lambda = 0$ сводится к

$$I_{gauge} = 2 \int_{\mathcal{M}} (u_a D_{\bar{\omega}} * \alpha^a + \nu_a D_{\bar{\omega}} * \beta^a). \quad (1.152)$$

Интеграл по траекториям (1.148) становится

$$Z = \int [d\alpha] [d\beta] [du] [d\nu] |det \Delta_{\bar{\omega}}^{(0)}|^2 e^{iI_{grav}}, \quad (1.153)$$

где $|det \Delta_{\bar{\omega}}^{(0)}|^2$ - определитель Фаддеева-Попова.

1.4.7 Решеточные подходы

Решетчатая формулировка была предложена Реджи [50] в общей теории относительности. Идея исчисления Реджа легко понимается в двумерной триангулированной поверхности. Треугольники плоские, и края несут только внешнюю кривизну; внутренняя кривизна полностью сосредоточена в вершинах. Эти вершины являются коническими точками, характеризующимися дефицитными углами δ_i . Но мы знаем, что каждая такая точка вносит сумму $2\delta_i$ в интеграл $\int d^2x \sqrt{g} R$. Действие Эйнштейна для триангулированной поверхности

$$I_{Regge}^{(2)} = 2 \sum_{vertices:i} \delta_i. \quad (1.154)$$

Редж показал, что аналогичное выражение справедливо для n -мерного симплициального многообразия \mathcal{M} , состоящего из плоских n -симплексов, склеенных вдоль их $(n - l)$ -мерных ребер. Гамильтонов решетчатый подход был изучен Вельброком [104–107], связанным с формализмом первого порядка.

Другая модель гамильтоновой решетки, основанная на метрическом формализме, была разработана Хофтом [108–112]. Классически полигональную модель Хофта можно рассматривать как калибровочно-фиксированную версию решетчатой формулировки Вельброка, но эти две теории связаны нелокальным изменением переменных, поэтому неясно, должны ли квантовые теории быть эквивалентными.

Глава 2. Черные дыры БТЗ

Мы сосредоточимся на исследовании классических и квантовых свойств черной дыры БТЗ. Его решение было впервые предложено Банадосом, Гейтельбоймом и Занелли в 1992 году. Чёрная дыра БТЗ имеет простую структуру для вычисления сложных концептуальных задач, возникающих в $3+1$ измерениях черных дыр. Эта модель физически реалистична, чтобы обеспечить большое понимание для $(3+1)$ - гравитационных систем.

2.1 Предварительные сведения

Уравнения поля Эйнштейна в $2+1$ измерениях с отрицательной космологической постоянной имеют решение для черной дыры БТЗ [26; 113]. Образование черных дыр исследовалось во многих различных теориях поля [114—117]. Черная дыра БТЗ отличается от решений черных дыр Шварцшильда и Керра в некоторых существенных точках: она асимптотически анти-де Ситтера, а не асимптотически плоская, и сингулярность кривизны исчезает в начале координат. Это пример коллапсирующей материи, которая имеет горизонт событий и внутренний горизонт, и ее термодинамические свойства очень похожи на свойства черной дыры Шварцшильда.

Поведение черной дыры БТЗ было классически исследовано как черная дыра Шварцшильда. Поведение геодезических было исследовано Крузом [118] и Фариной [119], а пространство струн в черной дыре БТЗ - Ларсеном и Санчесом [120]. Статическая черная дыра БТЗ зависит от массы M и углового момента J . Вращающаяся и заряженная черная дыра БТЗ обсуждалась в работах [121—123].

Были предприняты некоторые попытки найти решения для нескольких черных дыр [124]. Клемент сообщил о существовании решений, представляющих множество свободно падающих черных дыр, но метрики также содержат конические сингулярности [125]. Куссер и Хенно утверждают, что все статические решения с несколькими черными дырами содержат такие сингулярности [126], но неизвестно, можно ли найти точные нестатические и несингулярные решения.

Глава 2 структурирована следующим образом. В разделе 2.2, мы суммируем решение БТЗ и его основные физические характеристики в различных координатах, таких как координаты Шварцшильда, Эддингтона-Финкельштейна и Крускаля. Раздел 2.3 посвящен глобальной геометрии $(2+1)$ -мерной черной дыры. Раздел 2.4 описывает свойства решения БТЗ в контексте квантовой теории поля. В разделе 2.5 кратко излагаются некоторые различные теории, касающиеся термодинамики черной дыры БТЗ. В разделе 2.6 обсуждается другое возможное обобщение черной дыры БТЗ.

2.2 Решения для черных дыр БТЗ

Когда космологическая постоянная отрицательна, (2+1)-мерная гравитация имеет решение черной дыры в вакууме [26; 113]. В координатах Шварцшильда метрика ВТЗ имеет следующий вид

$$ds^2 = -(N^\perp)^2 dt^2 + dr^2 + f^{-2} dr^2 + r^2(d\phi + N^\phi dt)^2, \quad (2.1)$$

с функциями хода и сдвига и радиальной метрикой

$$N^\perp = f = \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{J^2}{4r^2} \right)^{1/2}, \quad N^\phi = -\frac{J}{2r^2}. \quad (2.2)$$

Параметры M и J - это масса АДМ и угловой момент. Метрика (2.1) удовлетворяет уравнениям вакуумного поля (2+1)-мерной общей теории относительности с космологической постоянной $\Lambda = -1/\ell^2$. Метрика (2.1) сингулярна в месте расположения внутреннего и внешнего горизонтов $r = r_\pm$, где

$$r_\pm^2 = \frac{M\ell^2}{2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{M\ell} \right)^2} \right\}, \quad (2.3)$$

где масса и угловой момент выражаются через $r = r_\pm$ как

$$M = \frac{r_+^2 + r_-^2}{\ell^2}, \quad J = \frac{2r_+ r_-}{\ell}. \quad (2.4)$$

Два горизонта возникают одновременно в экстремальном случае $|J| = M\ell > 0$, в то время как внутренний горизонт исчезает при $J = 0, M > 0$. Метрика с условиями $M = -1$ и $J = 0$ распознается как трехмерное анти-де ситтеровское пространство, в то время как условия $M = 0$ и $J = 0$ относятся к безмассовой черной дыре. Метрика БТЗ - это подлинная черная дыра, которую легче всего увидеть, преобразовав в координаты Эддингтона-Финкельштейна [127]

$$dv = dt + \frac{dr}{(N^\perp)^2}, \quad d\tilde{\phi} = d\phi - \frac{N^\phi}{(N^\perp)^2} dr, \quad (2.5)$$

в которой метрика (2.1) становится

$$ds^2 = -(N^\perp)^2 dv^2 + 2dv dr + r^2(d\tilde{\phi} + N^\phi dv)^2. \quad (2.6)$$

Теперь легко видеть, что горизонт $r = r_+$, где N^\perp обращается в нуль, является изотропной поверхностью, порожденной геодезическими

$$r(\lambda) = r_+, \quad \frac{d\tilde{\phi}}{d\lambda} + N^\phi(r_+) \frac{dv}{d\lambda} = 0. \quad (2.7)$$

Для более полного описания решения БТЗ мы можем вместо этого преобразовать его в координаты типа Крускала. Для этого определим новые изотропные координаты

$$u = \rho(r) e^{-at}, \quad v = \rho(r) e^{at}, \quad (2.8)$$

с $\frac{d\rho}{dr} = \frac{a\rho}{(N^\perp)^2}$. Как и в случае с метрикой Керра, нам нужны два патча, $r_- < r < \infty$ and $0 < r < r_+$, чтобы покрыть пространство-время БТЗ. В каждом патче метрика (2.1) принимает вид

$$ds^2 = \Omega^2 du dv + r^2 (d\tilde{\phi} + N^\phi dt)^2, \quad (2.9)$$

где

$$\Omega_+^2 = \frac{(r^2 - r_-^2)(r + r_+)^2}{a_+^2 r^2 \ell^2} \left(\frac{r - r_-}{r + r_-} \right)^{r_-/r_+}, \quad \tilde{\phi}_+ = \phi + N^\phi(r_+) t, \\ a_+ = \frac{r_+^2 - r_-^2}{\ell^2 r_+} \quad (r_- < r < \infty) \quad (2.10)$$

$$\Omega_-^2 = \frac{(r_+^2 - r^2)(r + r_-)^2}{a_-^2 r^2 \ell^2} \left(\frac{r_+ - r}{r_+ + r} \right)^{r_+/r_-}, \quad \tilde{\phi}_- = \phi + N^\phi(r_-) t, \\ a_- = \frac{r_-^2 - r_+^2}{\ell^2 r_-} \quad (0 < r < r_+) \quad (2.11)$$

с r и t , рассматриваемыми как неявные функции u и v . Общая структура черной дыры БТЗ аналогична метрике Керра, за исключением $r = \infty$, где черная дыра БТЗ асимптотически анти-де Ситтер, а не асимптотически плоская. Внешний горизонт $r = r_+$ представляет сквозь горизонт, в то время как внутренний горизонт $r = r_+$ представляет горизонт Коши.

2.3 Трехмерное пространство Анти-де Ситтера

Стандартное представление AdS_3 может быть получено из плоского пространства-времени с координатами (X_1, X_2, T_1, T_2) , и метрикой

$$ds^2 = dX_1^2 + dX_2^2 - dT_1^2 - dT_2^2. \quad (2.12)$$

Индукцированная метрика на подмногообразии

$$X_1^2 + X_2^2 - T_1^2 - T_2^2 = -\ell^2, \quad (2.13)$$

соответствует метрике AdS_3 . Ясно, что группа изометрии AdS_3 равна $SO(2,2)$. Эквивалентно, мы можем объединить координаты в матрицу $SL(2, R)$

$$X = \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} X_1 + T_1 & X_2 + T_2 \\ X_2 - T_2 & -X_1 + T_1 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

где пространство анти-де Ситтера определяется $\det \mathbf{X} = 1$ и $X \in SL(2, R)$.

Соответствующая область универсального покрывающего пространства пространства анти-де Ситтера может быть покрыта бесконечным набором координатных пятен трех типов, соответствующих областям диаграммы Пенроуза на рисунок 2.1:

I. ($r \geq r_+$)

$$\begin{aligned} X_1 &= \ell \sqrt{\alpha} \sinh \left(\frac{r_+}{\ell} \phi - \frac{r_-}{\ell^2} t \right), & X_2 &= \ell \sqrt{\alpha - 1} \cosh \left(\frac{r_+}{\ell^2} t - \frac{r_-}{\ell} \phi \right), \\ T_1 &= \ell \sqrt{\alpha} \cosh \left(\frac{r_+}{\ell} \phi - \frac{r_-}{\ell^2} t \right), & T_2 &= \ell \sqrt{\alpha - 1} \sinh \left(\frac{r_+}{\ell^2} t - \frac{r_-}{\ell} \phi \right), \end{aligned}$$

II. ($r_- \leq r \leq r_+$)

$$\begin{aligned} X_1 &= \ell \sqrt{\alpha} \sinh \left(\frac{r_+}{\ell} \phi - \frac{r_-}{\ell^2} t \right), & X_2 &= -\ell \sqrt{1 - \alpha} \sinh \left(\frac{r_+}{\ell^2} t - \frac{r_-}{\ell} \phi \right), \\ T_1 &= \ell \sqrt{\alpha} \cosh \left(\frac{r_+}{\ell} \phi - \frac{r_-}{\ell^2} t \right), & T_2 &= -\ell \sqrt{1 - \alpha} \cosh \left(\frac{r_+}{\ell^2} t - \frac{r_-}{\ell} \phi \right), \end{aligned}$$

III. ($0 \leq r \leq r_-$)

$$\begin{aligned} X_1 &= \ell \sqrt{-\alpha} \cosh \left(\frac{r_+}{\ell} \phi - \frac{r_-}{\ell^2} t \right), & X_2 &= -\ell \sqrt{1 - \alpha} \sinh \left(\frac{r_+}{\ell^2} t - \frac{r_-}{\ell} \phi \right), \\ T_1 &= \ell \sqrt{\alpha} \sinh \left(\frac{r_+}{\ell} \phi - \frac{r_-}{\ell^2} t \right), & T_2 &= -\ell \sqrt{1 - \alpha} \cosh \left(\frac{r_+}{\ell^2} t - \frac{r_-}{\ell} \phi \right), \end{aligned}$$

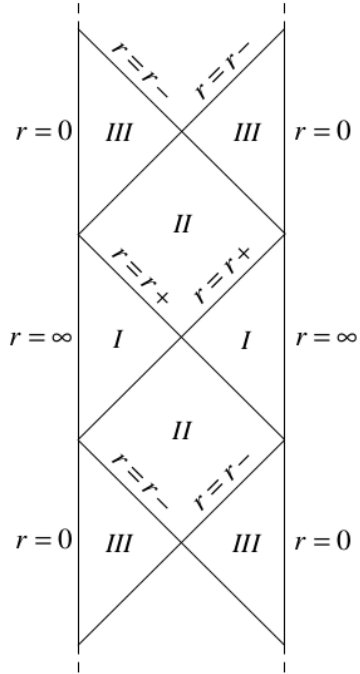
где

$$\alpha = \left(\frac{r^2 - r_-^2}{r_+^2 - r_-^2} \right), \quad \phi \in (-\infty, \infty), \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (2.15)$$

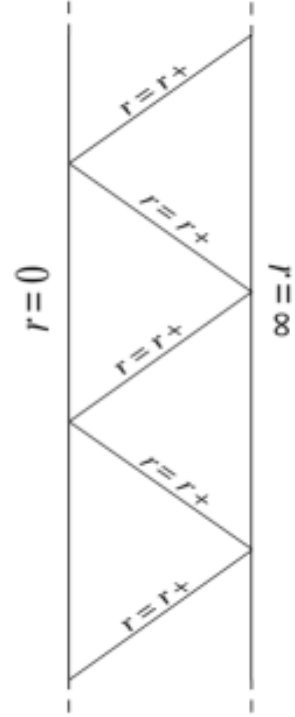
Угол ϕ имеет бесконечный диапазон, и нужно отождествить ϕ с $\phi + 2\pi$.

2.4 Квантовая теория поля в черной дыре БТЗ

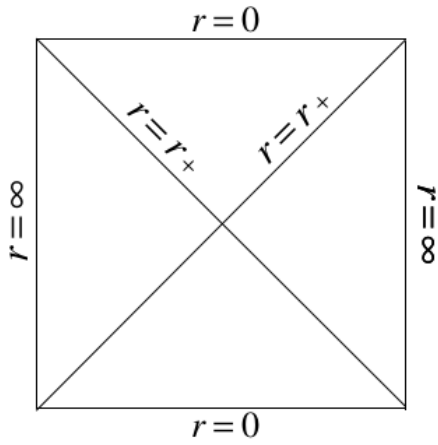
В этом разделе мы рассмотрим квантовую теорию поля, основанную на классическом фоне черной дыры. Отправной точкой является двухточечная функция $G(x, x') =$



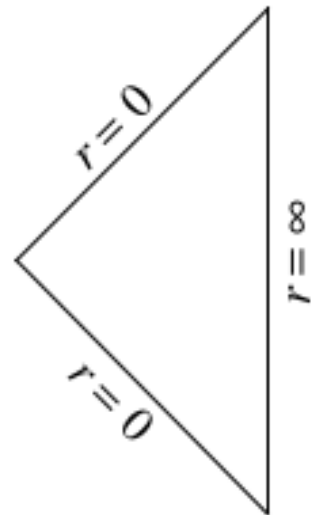
(a) Общий случай $J \neq 0$.



(b) экстремальный случай $J = \pm M\ell$.



(c) Случай для $J = 0$ и $M \neq 0$.



(d) Случай для $M = 0$.

Рисунок 2.1 — Решения для черных дыр БТЗ на диаграмме Пенроуза.

$\langle 0 | \phi(x)\phi(x') | 0 \rangle$ для свободного поля, из которой можно вычислить математическое ожидание $\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle$. Как уже отмечалось, черная дыра БТЗ изометрична пространству анти-де Ситтера. Таким образом, мы должны написать в двухточках функция для черной дыры БТЗ $G_{BTZ}(x, x')$ в терминах соответствующих анти-де Ситтера двухточечной функции $G_A(x, x')$ как

$$G_{BTZ}(x, x') = \sum_n e^{-i\delta n} G_A(x, \Lambda^n x'), \quad (2.16)$$

где $\Lambda^n x'$ - действие элемента группы на x' , а δ - фаза. Обратите внимание, что фаза $\delta = 0$ предназначена для раскрученных полей и может быть произвольной в зависимости от граничных условий. Фаза $\delta = \pi$ соответствует скрученным полям. Теперь наш главный вопрос сводится к пониманию квантовой теории поля в анти-де-ситтеровском пространстве. Квантование пространства анти-де Ситтера тривиально, и трудность заключается в том, что пространство анти-де Ситтера не является глобально гиперболическим. Чтобы сформулировать разумную теорию поля, необходимо наложить граничные условия на бесконечность.

В 3+1 измерениях граничными условиями для скалярного поля на пространственной бесконечности [128] являются Дирихле (D), Нейман (N) и трансляция граничное условие (T). Аналогично, эти граничные условия существуют в 2+1 измерениях [129]. Действие безмассовой гравитации, конформно связанной со скалярным полем,

$$I = - \int d^3x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{16} R \phi^2 \right), \quad (2.17)$$

двухточечные функции анти-де Ситтера являются

$$G_A^{(D)} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \{ \sigma^{-1/2} - [\sigma + 2\ell^2]^{-1/2} \}, \quad (2.18)$$

$$G_A^{(N)} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \{ \sigma^{-1/2} + [\sigma + 2\ell^2]^{-1/2} \}, \quad (2.19)$$

$$G_A^{(T)} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \sigma^{-1/2}, \quad (2.20)$$

где $\sigma(x, x')$ - квадрат расстояния между пространством вложения x и x' , заданный

$$\sigma(x, x') = \frac{1}{2} \left[(X_1 - X'_1)^2 - (T_1 - T'_1)^2 + (X_2 - X'_2)^2 - (T_2 - T'_2)^2 \right]. \quad (2.21)$$

Общая функция Грина с граничными условиями [130] имеет вид

$$G_A^{(\alpha)} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \{ \sigma^{-1/2} - \alpha [\sigma + 2\ell^2]^{-1/2} \}. \quad (2.22)$$

При этих граничных условиях двухточечная функция (2.16) периодична в мнимом времени с периодом β , заданным

$$\beta^{-1} = (N^\perp)^{-1} T_0, \quad T_0 = \frac{r_+}{2\pi\ell^2} = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (2.23)$$

где κ - поверхностная гравитация. Как обычно, β интерпретируется как локальная обратная температура, соответствующая температуре черной дыры T_0 . Аналитические свойства двухточечных функций показали, что состояние вакуума имеет отношение к вакууму Хартла-Хокинга. Оценить математическое ожидание $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$, тензора энергии-импульса для действий в (2.17) является

$$T_{\mu\nu} = \frac{3}{4}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\nabla_\rho\phi\nabla_\sigma\phi - \frac{1}{4}\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\phi\nabla_\rho\nabla_\sigma\phi - \frac{1}{16\ell^2}g_{\mu\nu}\phi^2. \quad (2.24)$$

Математическое ожидание первого члена в (2.24) равно $\lim_{x\rightarrow x'}\frac{3}{4}\nabla_\mu\nabla_\nu G(x,x')$. Полученное математическое ожидание обсуждается в [129–131]. Массивные, неконформно связанные со скалярными полями на фоне БТЗ были изучены в работе [132].

2.5 Термодинамика

Черная дыра БТЗ - это термодинамический объект с температурой $T_0 = \kappa/2\pi$ и тепловым излучением Хокинга. Я коротко остановлюсь на некоторых основных подходах к БТЗ черной дыры, термодинамика, таких, как Евклидов интеграл по траекториям [133], Интегральный подход Брауна и Йорка [134], квантовый туннельный подход [135], и Нётер заряды метода [136].

Евклидов интеграл по траекториям, предложенный Гиббонсом и Хокингом [133], представляет собой прямой подход, в котором статистическая сумма черной дыры представляется как интеграл по траекториям в мнимом времени. При установке $t = i\tau$ and $J = iJ_E$, то метрических БТЗ (2.1) становится

$$ds_E^2 = -(N_E^\perp)^2 dt^2 + f_E^{-2} dr^2 + r^2(d\phi + N_E^\phi d\tau)^2, \quad (2.25)$$

с евклидовыми функциями хода и сдвига, заданными

$$N_E^\perp = f_E = \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2} - \frac{J_E^2}{4r^2}\right)^{1/2}, \quad N_E^\phi = -iN^\phi = -\frac{J_E}{2r^2}. \quad (2.26)$$

Корни r^2 таковы

$$r_+ = \left\{ \frac{M\ell^2}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{J_E}{M\ell}\right)^2} \right] \right\}^{1/2}, \quad r_- = -i|r_-| = \left\{ \frac{M\ell^2}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{J_E}{M\ell}\right)^2} \right] \right\}^{1/2}. \quad (2.27)$$

Заметим, что метрика (2.25) является римановой метрикой из-за мнимых значений J . Он имеет отрицательную кривизну с положительной метрикой и локально изометричен гиперболическому трехмерному пространству \mathbb{H}^3 . Евклидов интеграл по траекториям получается путем вычисления канонической статистической суммой

$$Z = \int [dg] e^{I_E[g]}, \quad (2.28)$$

где $I_E[g]$ - евклидово действие. В экстремальной метрике \bar{g} можно найти следующее действие

$$I_E[\bar{g}] = 4\pi r_+ - \beta_0(M - \Omega J), \quad (2.29)$$

где β_0 - температура, а Ω - вращательный химический потенциал. Действие (2.29) соответствует энтропии $4\pi r_+$, заданной

$$S = \frac{2\pi r_+}{4\hbar G}, \quad (2.30)$$

что аналогично стандартной энтропии Бекенштейна. Принимая во внимание формализм Черна-Саймонса, статистическая сумма [137] становится

$$Z = \exp \left\{ I[\bar{g}] + \frac{2\pi r_+}{\ell} \right\}, \quad (2.31)$$

приводя к энтропии, заданной

$$S = \frac{2\pi r_+}{4\hbar G} \left(1 + \frac{4\hbar G}{\ell} \right). \quad (2.32)$$

Евклидов интеграл по траекториям имеет важные ограничения для термодинамики черных дыр. Браун и Йорк [134] разработали интегральный подход по траекториям, основанный на микроканоническом ансамбле в полости для черной дыры. Микроканоническая статистическая сумма записывается в виде (2.31), но действие такое же, как и в подходе Гиббонса-Хокинга с различными граничными членами. Температура на границе полости радиуса R вычисляется в [138] как

$$T = \frac{1}{N^\perp(R)} \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (2.33)$$

Заметим также, что черная дыра БТЗ подчиняется первому закону термодинамики,

$$dE = TdS + \Omega dJ - \mathcal{P}d(2\pi R), \quad (2.34)$$

где \mathcal{P} - это поверхностное давление при R . Вальд [136] определил энтропию как заряд Нетера, связанный с вектором Киллинга ξ , нормальным к горизонту событий. Одномерная форма

заряда Нетера для (2+1)-мерной гравитации равна

$$Q = -\frac{1}{16\pi G} \epsilon_{abc} \nabla^b \xi^c dx^a. \quad (2.35)$$

Тот же расчет был выполнен в формализме первого порядка в [139]. Другой подход заключается квантового туннелирования [135], отражающие термодинамика черной дыры БТЗ. В измерениях 2+1 туннелирование происходит между толстой сферической оболочкой вещества и черной дырой с эквивалентной массой. Энтропия туннелирования такая же, как и в (2.30).

2.6 Обобщения черной дыры БТЗ

Мы в основном фокусируемся на распространении решения БТЗ для черных дыр на другие области, такие как теория струн, массивная гравитация и другие. Простейшее обобщение черной дыры БТЗ, образованной связью электромагнитного поля, позволяет получить решение Рейсснера-Нордстрёма в 2+1 измерениях. Потенциал одной формы для статического случая $N^\phi = 0$ равен

$$A = -Q \ln \left[\frac{r}{r_0} \right] dt, \quad (2.36)$$

а метрика (2.1) модифицируется путем рассмотрения

$$N^\perp = f = \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{J^2}{4r^2} - \frac{1}{2} Q^2 \ln \left[\frac{r}{r_0} \right] \right)^{1/2}, \quad (2.37)$$

чтобы удовлетворить уравнениям Эйнштейна-Максвелла в 2+1 измерениях. Кроме того, его статическое решение независимо существует для исчезающей космологической постоянной в [140–142]. Тензор энергии-импульса заряженной черной дыры не равен нулю, и заряженная черная дыра представлена как группа изометрий, а не как частное анти-де-ситтеровского пространства. Заметим также, что вращающаяся черная дыра имеет неисчезающее магнитное поле, и потенциальная форма (2.36) должна быть обобщена.

Еще одним возможным продлением решение БТЗ могут быть реализованы путем введения дилатон взаимодействия [143]. Действие черной дыры, связанной с полем дилатона ϕ является

$$I = \int d^3x \sqrt{-g} \left(R - \frac{B}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - e^{-4a\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2e^{b\phi} \Lambda \right), \quad (2.38)$$

где $F_{\mu\nu}$ является электромагнитное поле и параметры значение a , b , и B являются взаимодействием прочность. Структура горизонтов действия (2.38) была изучена в [144] с $F_{\mu\nu}$ и $b = 4$.

Обобщение взаимодействия черной дыры БТЗ с теорией струн исследуется в работе [145–147]. Эффективное действие низкоэнергетической струны

$$I = \int d^3x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left(\frac{4}{k} + R + 4\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right), \quad (2.39)$$

где $H_{\mu\nu\rho}$ - антисимметричное поле Калба-Рамонда. Уравнения движения от действия (2.39) сводятся к уравнениям поля Эйнштейна при следующем анзаце $H_{\mu\nu\rho} = (2/\ell)\epsilon_{\mu\nu\rho}$, $\phi = 0$, и $k = \ell^2$, где $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ - объемная форма. Черная дыра БТЗ в теории струн является интересной моделью для исследования пространственной двойственности [148], и тахионного рассеяния [149].

Рассмотрим черную дыру БТЗ в топологически массивной гравитации [150; 151]. Действие этой системы представляет собой комбинацию между действием гравитации Эйнштейна и действием Черна-Саймонса,

$$I_{GCS} = \frac{k'}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \left(\partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\sigma + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu\tau}^\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\tau \right). \quad (2.40)$$

Это действие инвариантно относительно диффеоморфизмов и зависит от спиновой связности. Решение БТЗ эквивалентно уравнениям поля массивной гравитации, когда тензор Коттона обращается в нуль, т.е.

$$C^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\rho\sigma} \nabla_\rho \left(R_\sigma^\nu - \frac{1}{4} \delta_\sigma^\nu R \right) = 0. \quad (2.41)$$

Окончательную обобщающую модель можно рассмотреть, связав черную дыру БТЗ с топологической материей. Действие черной дыры в такой теории [139] является

$$I = \int_{\mathcal{M}} \left(e^a \wedge R_a[\omega] + B^a \wedge D_\omega C_a \right), \quad (2.42)$$

где R_a - кривизна связь ω . Первый член (2.42) представляет действие первого порядка для гравитации. Конфигурационное пространство этой модели конечномерно, параметризовано $ISO(2,1)$. Физические свойства этой модели до сих пор остаются загадкой.

Глава 3. Квантование тонкой пылевой оболочки в сочетании с $(2+1)$ -мерной гравитацией

Основной целью данной главы является исследование фазового пространства пылевой оболочки для нулевой космологической постоянной в $(2+1)$ -мерном гравитационном пространстве и ее квантование. Структура импульсного пространства исследуется с использованием теории представлений группы $SL(2)$ и имеет геометрию AdS_2 . Углы Эйлера поддерживают глобальную параметризацию этого многообразия. Квантование в этих переменных приводит к некоммутативности, а также к дискретности в координатном пространстве, что позволяет разрешить центральную особенность. Амплитуда перехода между дискретным и непрерывным спектром конечна.

3.1 Предварительные сведения

Сферически симметричные тонкие оболочки широко используются для изучения многих явлений в классическом гравитационном [152–155] и квантовом гравитационном поле [156–159]. Они рассматриваются как наиболее близкие обобщения точечных частиц. Структура фазового пространства и квантование точечной частицы в $(2+1)$ -мерной гравитации изучались Хоофта [112; 160], Виттена [161] и другими. Динамика самогравитирующей тонкой оболочки была впервые изучена Израилем [22] в 1967 году, которая рассматривается как игрушечная модель, представляющая гравитационный коллапс. Уравнения Израиля дают явную связь между тензором поверхностной энергии-импульса и разностью тензоров внешней кривизны между двумя сторонами тонкой оболочки.

Классически пылевые оболочки коллапсируют, образуя либо голые сингулярности, либо черные дыры, в зависимости от их начальных условий, таких как распределение скоростей и исходная материя. Черные дыры могут быть распознаны с помощью излучения Хокинга [162], а не голые сингулярности. Формирование голых сингулярностей труднее понять, и Пенроуз предложил космические Цензорные операторы [163], чтобы гарантировать, что голые сингулярности никогда не существуют. Квазиклассическая динамика самогравитирующей оболочки, образованной из бозонов в анти-де-Ситтеровском пространстве-времени, обсуждается в работе [164]. Динамическое решение может распространяться и на такую модель, где испускание излучения [165] или создание однородной материи [166] иллюстрируется коллапсом оболочки. Гамильтонова формулировка для многослойной системы рассматривается в [167], а тонкие самогравитирующие пересекающиеся оболочки обсуждаются в [168; 169].

Долгое время существовала гипотеза, что квантовая теория гравитации должна разрешить сингулярности общей теории относительности. Первый аргумент в пользу этого восходит к Бронштейну [170], который показал, что расстояния меньше длины Планка неизмери-

мы. В отсутствие полной теории гравитации до сих пор нет окончательного ответа, так ли это на самом деле. Этот вопрос можно изучить, рассматривая редуцированные модели для общей теории относительности, где все, за исключением нескольких, степени свободы заморожены. Особый интерес представляют те модели, которые содержат решения с черными дырами, гравитациями ключевую роль в аргументе Бронштейна.

Простейшей возможной моделью является однородная вселенная со скалярным полем материи [171–173]. Квантование такой модели было широко изучено, и общий вывод состоит в том, что квантовая теория не разрешает сингулярность, в данном случае, [174; 175], если не добавить некоторую экзотическую материю [176–178]. Следующая по простоте модель - это сферически-симметричное пространство-время, в котором материя представлена одной или несколькими пылевыми оболочками. В отличие от однородной вселенной, такая модель содержит решения с черными дырами, что приводит к нетривиальной структуре фазового пространства с ветвлением решений связей.

Существует много разнообразных работ, изучающих такие модели как на классическом [179–181] так и на квантовом уровне [182–184]. В некоторых случаях квантовой теории центральная сингулярность удалена [152; 185; 186], но эти результаты не всегда согласуются друг с другом. Помимо неоднозначности квантования, еще одной возможной причиной этого является сложная структура фазового пространства теории. Различные квантовые теории могут возникать на различных секторах такого фазового пространства.

В такой ситуации общепринято считать, что волновая функция квантовой теории должна быть определена на всех возможных конфигурациях независимо от их классической доступности. Это было реализовано одним из возможных способов в [185; 186], где различные сектора фазового пространства были объединены в одну Риманову поверхность с использованием комплексных координат, а точка ветвления соответствовала горизонту. Другая возможность - попытаться найти реальную глобальную параметризацию для фазового пространства (если оно существует). Один из примеров, где это возможно осуществить, представляет собой $(2+1)$ -мерная гравитация, взаимодействующая с точечными частицами [110; 112]. Оказывается, что импульс частицы оказывается определен на многообразии группы Лоренца, а различные ветви решения связей являются результатом различных пересечений этого многообразия плоскостью. Этот пример является нашей отправной точкой в попытке объединить эти два подхода.

Глава 3 изложена следующим образом. В разделе 3.2 мы исследуем канонический анализ пылевой оболочки, связанной с гравитацией, включая каноническое преобразование Кухаржа в $2+1$ измерениях. Эти результаты довольно близки к таковым в $3+1$ измерениях, с той лишь разницей, что ньютоновского потенциала нет, однако ветвление решений уравнений связи то же самое.

В разделе 3.3 мы обобщаем результаты статей [112; 187] с точечной частицы на сферическую оболочку, представляя последнюю как ансамбль бесконечного числа точечных частиц. Импульсным пространством оболочки пространство анти-де Ситтера AdS_2 , что приводит, в

частности, к некоммутативности координат. Гамильтонова связь в случае оболочки отличается от случая частицы, что объясняется вкладом энергии движения частиц внутри оболочки в гравитационное поле. Также мы находим связь между импульсами на AdS_2 и каноническими импульсами из работ [180; 185].

В разделе 3.4 мы выполняем квантование в импульсном представлении в пространстве AdS_2 . Помимо некоммутативности координат, оно приводит к дискретности спектра одной из них (временной). Периметр оболочки имеет дискретный спектр, когда он времениподобен, и непрерывный, но отделенный от нуля, когда он пространственноподобен. Это обеспечивает исчезновение центральной сингулярности. Наконец, мы обсуждаем применение гамильтоновой связи и нахождение физического гильбертова пространства. Мы также обсуждаем возможность обобщения данных результатов на случай $3 + 1$ измерений пространства-времени.

3.2 Канонический формализм для сферически симметричных пространств-времен в $2+1$ Гравитации

Стандартное действие Эйнштейна-Гильберта для гравитационного поля в отсутствие материи

$$I_{\Sigma}[g, N, N^a] = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^3x = \int dt \int_{\Sigma} \mathcal{L}_{\Sigma} d^2x, \quad (3.1)$$

и его Лагранжиан \mathcal{L}_{Σ} равен

$$\mathcal{L}_{\Sigma} = \frac{N}{16\pi} \sqrt{{}^{(2)}g} \left(K^{ab} K_{ab} - K^2 + {}^{(2)}R - 2\Lambda \right), \quad (3.2)$$

где $\mathbf{R}[g]$ - скалярная кривизна пространственной метрики $g_{ab} = (L^2, R^2)$, а K_{ab} - внешняя кривизна поверхности постоянного времени. Скалярная кривизна для пространственной метрики $g_{ab} = (L^2, R^2)$ и K_{ab} равна

$${}^{(2)}R = -2L^{-2}R^{-1}R'' + 2L^{-3}R^{-1}L'R'. \quad (3.3)$$

Заметим, что точка и штрих обозначают дифференцирование по отношению к t и r соответственно. Внешняя кривизна определяется

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(-\partial_t g_{ij} + {}^{(2)}\nabla_i N_j + {}^{(2)}\nabla_j N_i \right), \quad (3.4)$$

где ${}^{(2)}\nabla$ - полная ковариантная производная, а $N^i = (N^r, 0)$ - вектор сдвига. Для сферически симметричных внешняя кривизна является диагональной

$$K_i^j = \text{diag}(K_r^r, K_\theta^\theta), \quad (3.5)$$

$$K_{rr} = -N^{-1}L \left[\dot{L} - (LN^r)' \right], \quad (3.6)$$

$$K_{\theta\theta} = -N^{-1}R(\dot{R} - R'N^r). \quad (3.7)$$

Действие АДМ в терминах уравнений (3.2), (3.5), (3.6) и (3.7) является

$$I_\Sigma[R, L; N, N^a] = \int dt \int_{-\infty}^{\infty} dr \left[-N^{-1} \left(-\dot{L} + (LN^r)' \right) \left(\dot{R} + R'N^r \right) + N \left(-L^{-1}R'' + L^{-2}R'L' \right) \right]. \quad (3.8)$$

Канонический формализм действия получается путем дифференцирования действия АДМ (3.8) по скоростям \dot{L} и \dot{R} . Мы получаем

$$P_L = -N^{-1}(\dot{R} - R'N^r), \quad P_R = -N^{-1} \left[\dot{L} - (LN^r)' \right], \quad (3.9)$$

где импульс P_R - плотность, тогда как импульс P_L - скаляр. Скоростей \dot{L} и \dot{R} можно записать в терминах P_R и P_L как

$$\dot{R} = -NP_L + R'N^r, \quad \dot{L} = -NP_R + (LN^r)'. \quad (3.10)$$

Внешняя кривизна как функция канонических импульсов имеет вид

$$K_{rr} = LP_R, \quad K_{\theta\theta} = RP_L. \quad (3.11)$$

Действие АДМ (3.8) может быть записано в канонической форме преобразованием Лежандра как

$$I_\Sigma[R, L, P_L, P_R; N, N^r] = \int dt \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(P_L \dot{L} + P_R \dot{R} - NH^G - N^r H_r^G \right), \quad (3.12)$$

где гамильтонова связь является

$$H^G = -P_L P_R + L^{-1}R'' - L^{-2}R'L', \quad (3.13)$$

а импульсная связь является

$$H_r^G = P_R R' - LP_L'. \quad (3.14)$$

3.2.1 Преобразование Кухаржа для (2+1)-мерной гравитации

Кухарж [27] предложил новую процедуру выражения гамильтоновых и импульсных связей в простой набор связи в (3+1)-мерной гравитации. Этот подход основан на каноническом преобразовании старых переменных в новое каноническое множество. В этом разделе мы обсудим метод Кухаржа в (2+1)-мерной гравитации. Метрика сферически-симметричного пространства-времени в общем виде [186] записывается как

$$ds^2 = -[N^2 - L^2(N^r)^2]dt^2 + 2L^2N^r dt dr + L^2dr^2 + R^2d\theta^2, \quad (3.15)$$

где N, N^r, L и R - непрерывные функции только t и r . Уравнение (3.15) представляет собой форму Арновитта-Дезер-Мизнера (АДМ) разложения 2+1 пространства-времени. Общая сферически симметричная (2+1)-мерная метрика Шварцшильда в координатах кривизны (T, R) имеет вид

$$ds^2 = -(1 - 2m + |\Lambda|R^2)dT^2 + (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1}dR^2 + R^2d\theta^2, \quad (3.16)$$

где коническая сингулярность с углом $\sim 2\pi(1 - \sqrt{1 - 2m + |\Lambda|R^2}) \simeq 2\pi M$. Мы рассматриваем это решение в произвольной параметризации

$$T = T(t, r), \quad R = R(t, r). \quad (3.17)$$

Мы подставляем (3.17) в (3.16) и получаем выражение

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left[(1 - 2m + |\Lambda|R^2)\dot{T}^2 - (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1}\dot{R}^2 \right] dt^2 \\ & + 2 \left[- (1 - 2m + |\Lambda|R^2)\dot{T}T' + (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1}\dot{R}R' \right] dt dr \\ & + \left[- (1 - 2m + |\Lambda|R^2)T'^2 + (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1}R'^2 \right] dr^2 + R^2d\theta^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Сравнивая (3.18) с (3.15), мы получаем

$$L^2 = -(1 - 2m + |\Lambda|R^2)T'^2 + (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1}R'^2, \quad (3.19)$$

$$L^2N^r = -(1 - 2m + |\Lambda|R^2)\dot{T}T' + (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1}\dot{R}R', \quad (3.20)$$

$$N^2 - L^2(N^r)^2 = (1 - 2m + |\Lambda|R^2)\dot{T}^2 - (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1}\dot{R}^2. \quad (3.21)$$

Функций смещения и сдвига даются по выражения

$$N^r = \frac{-(1 - 2m + |\Lambda|R^2)\dot{T}T' + (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1}\dot{R}R'}{-(1 - 2m + |\Lambda|R^2)T'^2 + (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1}R'^2}, \quad (3.22)$$

$$N = \frac{\dot{T}R' - \dot{R}T'}{\sqrt{-(1 - 2m + |\Lambda|R^2)T'^2 + (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1}R'^2}}, \quad (3.23)$$

соответственно. Чтобы вычислить P_L , мы подставляем (3.22) и (3.23) в (3.9) и приходим к формуле

$$-T' = (1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1} LP_L. \quad (3.24)$$

Массу Шварцшильда можно вычислить с помощью (3.19), которая равна

$$m = \frac{1}{2} + \frac{P_L^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{R'^2}{L^2} + \frac{|\Lambda|R^2}{2}. \quad (3.25)$$

Мы обнаружили, что функции $m(r)$ и $-T'(r)$ являются канонически сопряженными переменными, а динамическая переменная $-T'(r)$ может быть обозначена $P_m(r)$. Новый импульс $\bar{P}_R(r)$ записывается в терминах старого импульса $P_R(r)$ и динамической переменной $\Phi(r)$,

$$\bar{P}_R(r) = P_R(r) + \Phi(r; R, L, P_L), \quad (3.26)$$

где $\Phi(r)$ не зависит от $P_R(r)$. Окончательная форма преобразования

$$L = \sqrt{R'^2(1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1} - (1 - 2m + |\Lambda|R^2)P_m^2}, \quad (3.27)$$

$$P_L = \frac{(1 - 2m + |\Lambda|R^2)P_m}{\sqrt{R'^2(1 - 2m)^{-1} - (1 - 2m + |\Lambda|R^2)P_m^2}}, \quad (3.28)$$

$$\bar{R} = R, \quad (3.29)$$

$$\bar{P}_R = P_R - \frac{(1 - 2m + |\Lambda|R^2)^{-1}}{L^2} \left[(LP_L)'R' - (LP_L)R'' \right]. \quad (3.30)$$

Форма трансформации не действительна на горизонте. Форма Лиувилля принимает вид

$$\begin{aligned} \Theta &= \int P_L \dot{L} + P_R \dot{R}, \\ &= \int P_m \dot{m} + \bar{P}_R \dot{R} + \frac{\partial}{\partial t} \left[LP_L + \frac{R'}{2} \ln \left| \frac{R' - LP_L}{R' + LP_L} \right| \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\dot{R}}{2} \ln \left| \frac{R' + LP_L}{R' - LP_L} \right| \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Связи (3.13) и (3.14) могут быть представлены простым набором

$$\bar{P}_R = 0, \quad m' = 0. \quad (3.32)$$

3.2.2 Канонический анализ для (2+1)-мерной гравитации с тонкой оболочкой

Мы кратко описываем канонический формализм для сферически симметричного гравитационного поля в 2+1 измерениях при существовании тонкой оболочки. Действие такой

системы имеет вид

$$\begin{aligned} I &= I_{gr} + \text{boundary terms} + I_{shell}, \\ &= \frac{1}{16\pi} \int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g} d^3x + (\text{boundary terms}) + M \int_{\Sigma} d\tau. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Первый и третий члены в (3.33) представляют стандартное действие Эйнштейна-Гильберта для гравитационного поля и действия тонкой оболочки пыли соответственно. Действие оболочки имеет вид

$$I_{shell} = -M \int_{\Sigma} \sqrt{\hat{N}^2 - \hat{L}^2(\hat{N}^r + \dot{\hat{r}})^2} dt, \quad (3.34)$$

где M - масса покоя оболочки, а шляпы обозначают значение переменных на оболочке. Явная форма действия (3.33) в Гамильтоновой форме становится

$$I = \int dt \hat{\pi} \dot{\hat{r}} + \int \left[P_L \dot{L} + P_R \dot{R} - N(H^s + H^G) - N^r(H_r^s - H_r^G) \right] dr dt + \int m_{ADM} dt, \quad (3.35)$$

где m_{ADM} - полная масса комбинированной системы гравитация+оболочка, а $\hat{\pi}$ - импульс, канонически сопряженный с \hat{r} , который равен

$$\hat{\pi} = \frac{M \hat{L}^2 (\hat{N}^r + \dot{\hat{r}})}{\sqrt{\hat{N}^2 - \hat{L}^2 (\hat{N}^r + \dot{\hat{r}})^2}}, \quad (3.36)$$

а Гамильтоново связь оболочки таково

$$H^s = \sqrt{(\hat{\pi}/\hat{L})^2 + M^2} \delta(r - \hat{r}), \quad (3.37)$$

а ее импульсная связь

$$H_r^s = \hat{\pi} \delta(r - \hat{r}). \quad (3.38)$$

Регулярный вклад в связи такой же, как и в вакууме, и справедлив во внутренней и внешней областях оболочки. Существует также Дельта-функциональный вклад на оболочке, который должен быть объединен с гамильтонианом оболочки. В результате мы получаем связи для оболочки:

$$C^s = \frac{[R']}{L} + \sqrt{(\hat{\pi}/\hat{L})^2 + M^2}, \quad (3.39)$$

$$C_r^s = L[P_L] + \hat{\pi}, \quad (3.40)$$

где квадратные скобки означают скачок поля через оболочку. Теперь мы переходим к переменным Кухаржа, решаем связи во внутренней и внешней областях и подключаем решение обратно к действию. Оказывается, что кинетический член в объеме исчезает за счет связей,

кинетический член, содержащий $\dot{\hat{r}}$ на оболочке, исчезает за счет связей (3.40), и все, что остается, - это вклад граничных членов, которые появляются после канонического преобразования Кухаржа:

$$I = \int dt \left[m\dot{\hat{T}} + [P_R]\dot{R} - N^s C^s \right], \quad (3.41)$$

Здесь \hat{T} - это время Киллинга, оцененное на оболочке,

$$P_R \Big|_{in,out} = \ln \left| \frac{R' + LP_L}{R' - LP_L} \right|_{in,out}, \quad (3.42)$$

а C^s - это связь (3.40). Далее мы выражаем связь (3.40) в терминах канонических переменных оболочки m и P_R :

$$C^s = \sqrt{1 - 2m + |\Lambda|R^2} \cosh P_{Rout} - \cosh P_{Rin} + M. \quad (3.43)$$

Из результирующего действия мы находим уравнения движения для R

$$\frac{\dot{R}}{N^s} = \sqrt{1 - 2m + |\Lambda|R^2} \sinh P_{Rout} = \sinh P_{Rin}, \quad (3.44)$$

которое ведет к еще одной связи

$$\sqrt{1 - 2m + |\Lambda|R^2} \sinh P_{Rout} - \sinh P_{Rin} = 0. \quad (3.45)$$

В отличие от трехмерной ситуации 3+1, связи (3.43) и (3.45) теперь являются связями первого рода. Подставляя (3.44) в (3.43), мы восстанавливаем уравнение Израэля для оболочки:

$$\sqrt{1 + |\Lambda|R^2 + \frac{\dot{R}^2}{(N^s)^2}} + \sqrt{1 - 2m + |\Lambda|R^2 + \frac{\dot{R}^2}{(N^s)^2}} - M = 0. \quad (3.46)$$

Наконец, возведя в квадрат два связи (3.43) и (3.45) и добавив их, мы находим единую гамильтонову связь, описывающую динамику оболочки:

$$1 + 1 - 2m + |\Lambda|R^2 - 2\sqrt{1 - 2m + |\Lambda|R^2} \cosh[P_R] - M^2 = 0. \quad (3.47)$$

Это связь должно использоваться в квантовой теории. Отметим, что многие из вышеприведенных уравнений содержат квадратные корни, которые не являются однозначными функциями. Различные знаки квадратного корня соответствуют различным секторам фазового пространства модели, которые изображаются как разные области на диаграммах Пенроуза. Одно и то же m соответствует двум разным точкам в импульсном пространстве. Более того, время Киллинга \hat{T} и радиальный импульс $[P_R]$ расходятся в точке гравитационного коллапса (горизонт), где $2m = 1$. Заметим, что в (2+1)-мерной гравитации с нулевой космологической

постоянной нет в обычном смысле горизонта, который был бы расположен в пространстве. При $2m < 0$ пространство находится целиком вне горизонта, тогда как при $2m > 1$ – целиком внутри горизонта, т. е. горизонт расположен не в координатном пространстве, а в фазовом пространстве в точке $2m = 1$. При $2m > 1$ уравнение (3.47) не имеет решений в терминах вещественных переменных. Другими словами, теория формулируется в переменных, которые не покрывают глобально фазовое пространство.

Один из способов обойти эту проблему - ввести сложное фазовое пространство и собрать различные участки в Риманову поверхность [185; 186]. Однако также возможно использовать другой набор вещественных переменных фазового пространства, который покрывал бы его глобально. Эта возможность изучается в следующем разделе.

3.3 Формализм первого порядка и импульсное пространство Анти-де Ситтера

Глобальная параметризация фазового пространства (2+1)-мерной гравитации, взаимодействующей с точечными частицами, изучается в работе [110; 112; 187]. Мы обобщаем эти результаты на случай сферически-симметричной оболочки. Аналогичные результаты были получены для тонкой оболочки, взаимодействующей с (2+1)-мерной гравитацией как пределом многочастичного решения [188; 189], и были основаны на разрезании и склеивании многообразий. Нашей целью является подготовка модели к квантованию путем получения редуцированного канонического действия. Метод, который мы используем, основан на теории групп.

3.3.1 Принцип действия и редукция фазового пространства

Основными переменными теории являются триада $e_\mu = e_\mu^a \gamma_a$ и связность $\omega_\mu^{ab} \gamma_a \gamma_b$, где γ^a – генераторы алгебры $SL(2)$. Действие имеет вид

$$I = \int_{\mathcal{M}} d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} Tr(e_\mu R_{\nu\rho}) + S_{shell}, \quad (3.48)$$

где $R_{\nu\rho}$ - кривизна связности ω_ρ . Оболочка дискретизирована (состоит из N частиц, нумерованных индексом i)

$$I_{shell} = \sum_i^N \int_{l_i} Tr(K_i e_\mu) dx^\mu, \quad (3.49)$$

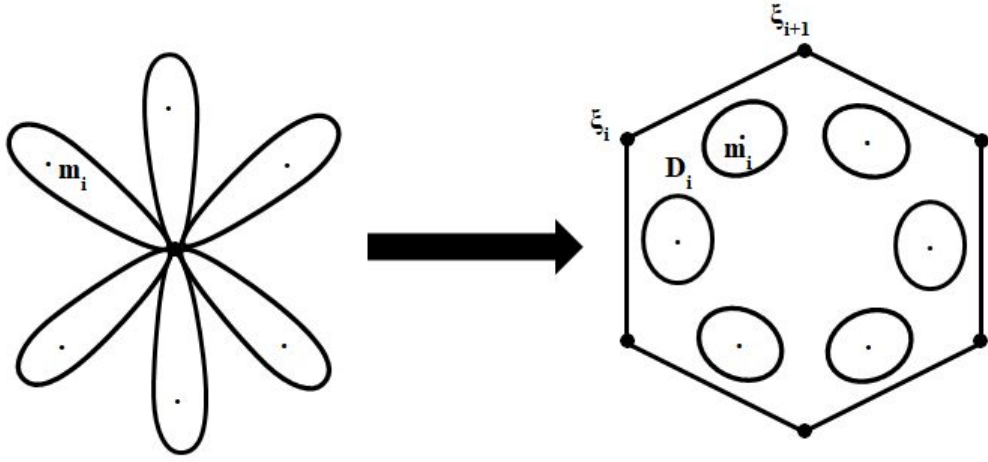


Рисунок 3.1 — Деление пространства на диски и многоугольник.

где l_i мировая линия i -й частицы, а $K_i = m_i \gamma_0$ - фиксированный элемент алгебры $sl(2)$. Условие сферической симметрии налагается позже. Действие гравитации инвариантно по отношению к калибровочным преобразованиям:

$$\omega_\mu \rightarrow g^{-1}(\partial_\mu + \omega_\mu) g, \quad e_\mu \rightarrow g^{-1}(e_\mu + \partial_\mu \xi) g, \quad (3.50)$$

где g - элемент группы $SL(2)$, а ξ - элемент алгебры $sl(2)$. Однако действие оболочки не инвариантно. Вклад, соответствующий i -й частицы преобразуется как

$$\int_{l_i} Tr(K_i e_\mu) dx^\mu \rightarrow \int_{l_i} Tr(\tilde{K}_i e_\mu) dx^\mu + \int_{l_i} Tr(\tilde{K}_i \dot{\xi}) d\tau, \quad (3.51)$$

где $\tilde{K}_i = g K_i g^{-1}$, а τ - параметр вдоль мировой линии частицы и точкой обозначается производная по нему. В последнем члене в правой части действие (3.51) мы можем распознать стандартное действие частицы, так как оно имеет вид $\int p_a \dot{x}^a$, где $p_a = Tr(\gamma_a \tilde{K}_i)$, $x^a = Tr(\gamma^a \xi)$, а с учетом определения $\tilde{K}_i p^a$ удовлетворяет уравнению связи $p^a p_a = m^2$. Таким образом, определение пени свободы частиц представлены калибровочными степенями свободы на мировых линиях частиц.

Как и прежде, чтобы получить редуцированное действие для этой модели, мы должны решить связи и подставить решение обратно в действие. Мы выбираем такое расслоение пространства-времени, что мировые линии частиц двигаются вдоль временной координаты, и получаем связи, варьируя действие(3.48) по ω_0 и e_0 :

$$\epsilon^{0\mu\nu} \nabla_\mu e_\nu = 0, \quad \epsilon^{0\mu\nu} R_{\mu\nu} = \sum_i^N \tilde{K}_i \delta^2(x, x_i), \quad (3.52)$$

где x_i - координаты i -й частицы. Первое связь (3.52) генерирует первое из преобразований (3.50), а вторая связь генерирует второе.

Используя преобразования (3.50), мы можем одновременно сделать нулевыми компоненту ω и одну компоненту e . Это автоматически линеаризует связи (3.52). Но мы не можем выбрать такую калибровку глобально, потому что модель имеет нетривиальное пространство модулей, например, содержащее калибровочный параметр, оцениваемый в местоположении одной частицы относительно другой. Следуя работе [190; 191], мы разделяем пространственный сечение на области, в каждой из которых возможен вышеупомянутый выбор калибровки. Каждая такая область должна содержать не более одной частицы. Вокруг каждой частицы опишем круг так, чтобы все круги имели одну и ту же исходную точку, но не имели общих границ, как показано на рисунке 3.1. Делая разрезы вдоль окружностей, многообразие делится на N дисков, каждый из которых содержит частицу, и многоугольник, не содержащий частиц, но соединенный с бесконечностью.

Для дисков удобно записать решение в полярных координатах с центром на мировой линии частицы. Мы выбираем калибровку, в котором радиальные компоненты e и ω равны нулю, решаем связи и переводим решение обратно в произвольную калибровку:

$$\omega_{r,i} = g_i^{-1} \partial_r g_i, \quad \omega_{\phi,i} = g_i^{-1} \nabla_{\phi} g_i, \quad (3.53)$$

$$e_{r,i} = g_i^{-1} \partial_r \xi_i g_i, \quad e_{\phi,i} = g_i^{-1} \nabla_{\phi} \xi_i g_i, \quad (3.54)$$

где $\nabla_{\phi} \xi_i = \partial_{\phi} \xi_i + [\xi_i, K_i]$. Аналогично находим решение для многоугольника, для которого калибровочные параметры обозначены как h и ζ . Теперь эти решения должны быть возвращены в кинетический член действия, которое для i -го диска имеет вид

$$I_{D_i} = \int_{D_i} d^3x \epsilon^{0\mu\nu} Tr(e_{\mu} \dot{\omega}_{\nu}) + \int_{l_i} Tr(\tilde{K}_i \dot{\xi}_i) d\tau. \quad (3.55)$$

Используя тождество $\dot{g}_i^{-1} \nabla_{\mu} g_i = g_i^{-1} \nabla_{\mu} (\dot{g}_i g_i^{-1}) g_i$, (обратите внимание, что K_i не зависит от времени, так что ∇_{ϕ} коммутирует с производной по времени). Мы находим, что в первом члене (3.55) есть дельта-функциональный вклад, который сокращается со вторым членом, а также вклад, представляющий собой полную производную. Следовательно, действие для диска коллапсирует к его границе:

$$I_{D_i} = \int_{\partial D_i} d^2x Tr(\nabla_{\phi} \xi_i \dot{g}_i g_i^{-1}). \quad (3.56)$$

Аналогично для многоугольника, граница которого состоит из N ребер E_i . Результирующее действие представляет собой сумму вкладов от каждого ребра:

$$I_P = \sum_i^N \int_{E_i} d^2x Tr(\partial_{\phi} \zeta \dot{h}_i h_i^{-1}). \quad (3.57)$$

Следующий шаг – собрать все вышеперечисленные вклады в действие и применить условие непрерывности метрики и связности при переходе через границу между дисками и многоугольником. Во-первых, мы преобразуем ковариантную производную в (3.53) и (3.54) в

обычную производную с помощью калибровочного преобразования

$$\tilde{g}_i = \exp(K\phi)g_i, \quad \tilde{\xi}_i = \exp(K\phi)\xi_i \exp(-K\phi). \quad (3.58)$$

Это условие нарушает периодичность, поэтому граница диска уже не круг, а интервал. Действие диска (3.56) принимает вид

$$I_{D_i} = \int_{\partial D_i} d^2x \text{Tr}(\partial_\phi \tilde{\xi}_i \dot{\tilde{g}}_i \tilde{g}_i^{-1}), \quad (3.59)$$

а условия непрерывности метрики и связности (3.53) и (3.54) принимают простую форму:

$$\tilde{g}_i = C_i h \Big|_{E_i}, \quad \tilde{\xi}_i = C_i \left(\zeta \Big|_{E_i} + \chi_i \right) C_i^{-1}, \quad (3.60)$$

где C_i и chi_i - функции только времени. В последующем мы поставим $chi_i = 0$, что возможно, если координаты различных частиц могут быть связаны чистым вращением без каких-либо трансляций. Это реализация сферической симметрии. Подставляя это в уравнения (3.57) и (3.59) и комбинируя их, получаем

$$I_{full} = I_P + \sum_i^N I_{D_i} = \sum_i^N \int_{E_i} \text{Tr}(\partial_\phi \zeta C_i^{-1} \dot{C}_i) = - \sum_i^N \int_{\partial D_i} \text{Tr}(\partial_\phi \tilde{\xi}_i \dot{C}_i C_i^{-1}). \quad (3.61)$$

Подынтегральные выражения являются полными производными, поэтому результат содержит вклады только от вершин многоугольника или конечных точек границ дисков:

$$I_{full} = \sum_i^N \int_R \text{Tr}((\zeta_{i+1} - \zeta_i) C_i^{-1} \dot{C}_i) = - \sum_i^N \int_R \text{Tr}((\tilde{\xi}_i(2\pi) - \tilde{\xi}_i(0)) \dot{C}_i C_i^{-1}), \quad (3.62)$$

где ζ_i - значение ζ в i -й вершине многоугольника. Ввести новые переменные

$$u_i = C_i^{-1} \exp(2\pi K) C_i, \quad \bar{\xi}_i = C_i^{-1} \tilde{\xi}_i(0) C_i. \quad (3.63)$$

Тогда принимая во внимание, что

$$\tilde{\xi}_i(2\pi) = \exp(2\pi K) \tilde{\xi}_i(0) \exp(-2\pi K), \quad (3.64)$$

и

$$u_i^{-1} \dot{u}_i = C_i^{-1} \dot{C}_i - C_i^{-1} \exp(-2\pi K) \dot{C}_i C_i^{-1} \exp(2\pi K) C_i. \quad (3.65)$$

Мы можем переписать второе уравнение в (3.62) следующим образом

$$I_{full} = \sum_i^N \int_R \text{Tr}(\bar{\xi}_i u_i^{-1} \dot{u}_i). \quad (3.66)$$

Чтобы связать $\bar{\xi}_i$ для различных i , Мы используем второе условие из (3.60), которое, в частности, означает, что

$$\tilde{\xi}_i(0) = C_i \zeta_i C_i^{-1}, \quad \tilde{\xi}_i(2\pi) = \exp(2\pi K) \tilde{\xi}_i(0) \exp(-2\pi K) = C_i \zeta_{i+1} C_i^{-1}, \quad (3.67)$$

из которого, используя определение (3.63), мы получаем выражения

$$\bar{\xi}_{i+1} = u_i \bar{\xi}_i u_i^{-1}, \quad (3.68)$$

и

$$\bar{\xi}_i = \left(\prod_{j=0}^{i-1} u_j \right) \bar{\xi}_0 \left(\prod_{j=0}^{i-1} u_j \right)^{-1}, \quad (3.69)$$

где множители в произведении упорядочены справа налево. Теперь введем голономию вокруг целой оболочки, которая есть произведение голономий вокруг каждой частицы:

$$U = \prod_{j=0}^N u_j. \quad (3.70)$$

Используя очевидное тождество

$$U^{-1} \dot{U} = \sum_{i=0}^N \left(\prod_{j=0}^{i-1} u_j \right)^{-1} u_i^{-1} \dot{u}_i \left(\prod_{j=0}^{i-1} u_j \right), \quad (3.71)$$

и принимая во внимание соотношение (3.69), можно переписать кинетический член действия (3.66) к простому виду

$$I_{full} = \int_R Tr(\bar{\xi}_0 U^{-1} \dot{U}). \quad (3.72)$$

Действие для многих частиц, таким образом, свелось к вкладу, зависящему от одной переменной. Это стало возможным только потому, что мы поместили $\chi_i = 0$ в (3.60), используя сферическую симметрию.

3.3.2 Связи

Групповая переменная импульса U может быть выражена в терминах голой массы M и параметрарадиального буста $\bar{\chi}$ путем умножения голономий всех частиц, составляющих

оболочку u_i

$$U = \prod_{i=0}^N C_i^{-1} \exp(2\pi K_i) C_i. \quad (3.73)$$

Мы выбираем сферически симметричный анзац для C_i

$$C_i = \exp(\bar{\chi} \gamma_1) \exp\left(\frac{2\pi i \gamma_0}{N}\right), \quad (3.74)$$

где i (не путать с мнимой единицей) играет роль угловой переменной, а $\bar{\chi}$ - параметр буста, не зависящий от i . Для $K_i = M_i \gamma_0$ сферическая симметрия означает, что $M_i = M/N$, где M - общая голая масса оболочки. Подставляя это в (3.73), мы получаем выражение

$$\begin{aligned} U &= \prod_{i=0}^N \exp\left(-\frac{2\pi i \gamma_0}{N}\right) \exp\left(\frac{2\pi M}{N}(\gamma_0 \cosh \bar{\chi} + \gamma_2 \sinh \bar{\chi})\right) \exp\left(\frac{2\pi i \gamma_0}{N}\right), \\ &= \left(\exp\left(\frac{2\pi M}{N}(\gamma_0 \cosh \bar{\chi} + \gamma_2 \sinh \bar{\chi})\right) \exp\left(\frac{2\pi i \gamma_0}{N}\right)\right)^N. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Произведение двух экспонент в последнем уравнении может быть вычислено по формуле Кемпбелла–Хаусдорфа $\exp(A) \exp(B) = \exp(A + B + [A, B]/2 + \dots)$. Но члены с коммутаторами суть величины порядка $1/N^2$ и выше и поэтому пренебрежимо малы при $N \rightarrow \infty$. Наконец, мы получаем равенство

$$U = \exp\left[2\pi\left((1 - M \cosh \bar{\chi})\gamma_0 + M \sinh \bar{\chi} \gamma_2\right)\right]. \quad (3.76)$$

Класс сопряженности вышеприведенной голономии фиксирован граничными условиями на бесконечности. Его можно выразить как петля Вильсона угловой компоненты связности, которая может быть записана в терминах переменных АДМ как

$$\omega_\phi = R'/L \gamma_0 + P_L \gamma_1, \quad (3.77)$$

и

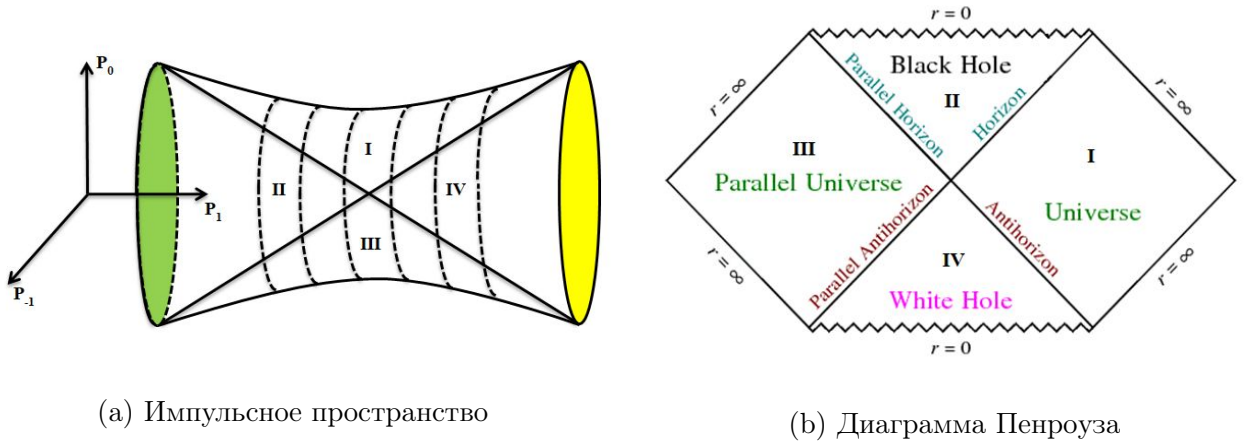
$$Tr(U) = Tr\left(P \exp\left(\int d\phi \omega_\phi\right)\right) = \cos\left(2\pi\sqrt{(R'/L)^2 - P_L^2}\right) = \cos(2\pi\sqrt{1 - 2m}), \quad (3.78)$$

где m - масса АДМ. С другой стороны, из равенства (3.76) следует, что

$$Tr(U) = \cos\left(2\pi\sqrt{(1 - M \cosh \bar{\chi})^2 - (M \sinh \bar{\chi})^2}\right). \quad (3.79)$$

Приравнивая два последних выражения для $Tr(U)$ и решая относительно M , находим, что

$$M = \sqrt{1 + \sinh^2 \bar{\chi}} + \sqrt{1 - 2m + \sinh^2 \bar{\chi}}. \quad (3.80)$$



(a) Импульсное пространство
 (b) Диаграмма Пенроуза
 Рисунок 3.2 — Различные области, характеризующие реальную глобальную параметризацию импульсного пространства.

Это уравнение Израила (3.46) из предыдущего раздела с $\dot{R}/N^c = \sinh \bar{\chi}$. Теперь мы можем записать отношения между каноническими импульсами, используемыми здесь, и каноническими импульсами из предыдущего раздела:

$$\sinh \chi = \sqrt{1 - 2m} \sinh P_{Rout} = \sinh P_{Rin}, \quad (3.81)$$

и

$$Tr(U) = \cos(2\pi\sqrt{1 - 2m}). \quad (3.82)$$

Можно видеть, что $\sinh \chi$ всегда реален, даже когда $\sqrt{1 - 2m}$ и P_{Rout} комплексны. Голономия U также является вещественной и эллиптической, когда $1 - 2m > 0$, и гиперболической, когда $1 - 2m < 0$. В эллиптическом случае $U = g^{-1} \exp(\gamma_0 \phi) g$, Когда $\sqrt{1 - 2m} > 0$, то $0 < \phi < \pi$, а когда $\sqrt{1 - 2m} < 0$, то $\pi < \phi < 2\pi$. И аналогично для гиперболического случая: $U = g^{-1} \exp(\gamma_1 \chi) g$, Когда $i\sqrt{1 - 2m} > 0$, то $\chi > 0$, а когда $i\sqrt{1 - 2m} < 0$, то $\chi < 0$. Другими словами, U обеспечивает реальную глобальную параметризацию импульсного пространства модели. Это импульсное пространство показано на рисунке 3.2a, четыре описанные выше области обозначены как I, III, II и VI соответственно. Эти области также можно найти на диаграмме Пенроуза на рисунке 3.2b, где они обозначены таким же образом.

3.3.3 Скобки Пуассона

При изменении переменных кинетический член действия (3.72) может быть приведен в стандартную каноническую форму

$$I_{full} = - \int_R p_a \dot{q}^a, \quad (3.83)$$

где $a = 0, 1$ обозначает временную и радиальную компоненты координаты (импульса). Явная форма этого преобразования выглядит следующим образом:

$$p_{-1} = Tr(U), \quad p_a = Tr(\gamma_a U), \quad q^a = (p_{-1} \eta^{ab} - p_{-1}^{-1} p^a p^b) \xi_b. \quad (3.84)$$

Они удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям

$$\{p_a, p^b\} = 0, \quad \{q_a, q^b\} = 0, \quad \{q_a, p^b\} = \delta_a^b. \quad (3.85)$$

Однако эти переменные впоследствии не используются при квантовании. Причина этого в том, что U – элемент группы $SL(2)$, импульсы удовлетворяют соотношению

$$p_{-1}^2 - p_a p^a = 1. \quad (3.86)$$

Это означает, что импульсное пространство модели представляет собой однослойный Гиперболоид или двумерное пространство анти-де Ситтера, причем p_{-1} и p_a -координаты трехмерного пространства, в которое вложена AdS . Импульсы p_a не формируют глобальный график на AdS_2 . Глобальная диаграмма на AdS_2 , если она сформирована углами Эйлера, которые параметризуют групповой элемент U следующим образом:

$$U = \exp\left(\frac{\rho}{2}\gamma_0\right) \exp(\chi\gamma_1) \exp\left(\frac{\rho}{2}\gamma_0\right). \quad (3.87)$$

Они связаны с p как

$$p_{-1} = \cos \rho \cosh \chi, \quad p_0 = \sin \rho \cosh \chi, \quad p_1 = \sinh \chi. \quad (3.88)$$

Ясно, что углы Эйлера вместе с канонически сопряженными с ними координатами не могут сформировать стандартный канонический набор переменных. Это происходит потому, что углы Эйлера параметризуют искривленное пространство, которое не может быть отображено на плоское пространство, а трансляции в таком пространстве не коммутируют. На самом деле координаты, сопряженные с углами Эйлера, суть первоначальные параметры трансляции ξ^a из (3.72). Чтобы показать это, мы можем вычислить скобки Пуассона для них, используя обратную функцию (3.84):

$$\{\xi^a, p_b\} = p_{-1}^{-1}(\delta_b^a + p^a p_b), \quad \{\xi^a, p_{-1}^{-1}\} = p^a, \quad \{\xi^a, \xi^b\} = p_{-1}(\xi^a p^b - \xi^b p^a). \quad (3.89)$$

Отсюда следует, что

$$\{U, \xi^a\} = U \gamma^a. \quad (3.90)$$

и ожидаемая некоммутативность координат.

3.4 Квантование

Мы кратко опишем квантование модели с использованием импульсного представления (представлении углов Эйлера). Изложение в основном следует работе [187], но учитывается, что за счет сферической симметрии число степеней свободы теперь на одну меньше, , а также то, что динамические связи теперь другие.

3.4.1 Квантовая кинематика

Мы определяем кинематические состояния модели как функции U , заданные (3.87) как

$$\Psi(U) = \Psi(\rho, \chi), \quad (3.91)$$

являющиеся однозначными функциям на всем импульсном пространстве. Из требования однозначности функции Ψ немедленно следует свойство периодичности

$$\Psi(\rho + 2\pi, \chi) = \Psi(\rho, \chi), \quad (3.92)$$

что будет иметь важное влияние на спектры координат. Далее, для определения скалярного произведения нам нужна Лоренц-инвариантная мера на импульсном пространстве. Это можно сделать из меры Хаара на группе $SL(2)$:

$$dU = \frac{1}{\pi} \cosh(2\chi) d\rho d\chi, \quad (3.93)$$

и, таким образом, скалярное произведение имеет вид

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \frac{1}{\pi} \int \cosh(2\chi) d\rho d\chi \Phi(\rho, \chi)^* \Psi(\rho, \chi). \quad (3.94)$$

Легко вычислить спектр временной координаты x^0 , которая канонически сопряжена с ρ . Соответствующий оператор

$$\hat{T}|\rho, \chi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial \rho} |\rho, \chi\rangle, \quad (3.95)$$

его собственные состояния

$$|t; \psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int \cosh(2\chi) d\rho d\chi \exp(it\rho) \psi(\chi) |\rho, \chi\rangle, \quad (3.96)$$

где t - целое число. Оператор времени имеет дискретный спектр:

$$\hat{T}|t; \psi\rangle = t\hbar|t; \psi\rangle. \quad (3.97)$$

Обратите внимание, что время квантовано в планковских единицах, так как вышеприведенные уравнения содержат гравитационную постоянную Ньютона, которая принята за единицу. Более интересной переменной является периметр, $R^2 = 2\pi \xi_a \xi^a$, который является Лоренц-инвариантная величина, определяющая размер оболочки. Поскольку x^i_a в (3.90) определена как левоинвариантная производная на группе, ее квадрат является оператором Бельтрами-Лапласа на нашем импульсном пространстве:

$$\hat{R}^2|t; \psi\rangle = 2\pi|t; \Delta\psi\rangle, \quad (3.98)$$

где

$$\Delta = \hbar^2 \left(\frac{1}{\cosh(2\chi)} \frac{\partial}{\partial \chi} \cosh(2\chi) \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{t^2}{\cosh^2(2\chi)} \right). \quad (3.99)$$

Этот оператор был показан в [187], чтобы иметь два ряда собственных значений. Непрерывный, но отделенный от нуля ряд соответствует положительным, то есть пространственноподобным значениям, R^2 :

$$\hat{R}^2|t, \lambda\rangle = 2\pi(\lambda^2 + 1)\hbar^2|t, \lambda\rangle, \quad (3.100)$$

где λ - вещественное число. Дискретный, содержащий нуль ряд соответствует отрицательным, т. е. времениподобным значениям R^2

$$\hat{R}^2|t, l\rangle = -2\pi l(l + 2)\hbar^2|t, l\rangle, \quad (3.101)$$

где l - неотрицательное целое число, удовлетворяющее условию $l \leq t$. Физически периметр оболочки был бы пространственноподобным вне горизонта событий и времениподобным внутри. В (2+1)-мерной гравитации с нулевой космологической постоянной нет горизонтов событий. Поэтому мы можем сказать, что в нашей модели релевантен только непрерывный ряд. Мысль о том, что вся Вселенная находится внутри горизонта событий, несовместима ни с какими разумными граничными условиями на бесконечности. С другой стороны, мы могли бы рассмотреть более сложную модель с несколькими концентрическими оболочками, допускающими пространство-время без границ. В такой ситуации периметр оболочки может быть времениподобным и дискретный ряд собственных значений является актуальным. Тем не менее, в обоих случаях результат для спектра R^2 обеспечивают регуляризацию в окрестности точки $R = 0$.

3.4.2 Физические состояния

Теперь мы попробуем решить гамильтонову связь, чтобы получить физические состояния. В отличие от случая частиц, импульс (3.76), имеет сложную зависимость от внешнего параметра модели-голой массы M . Ввиду этого усложнения в этом разделе используются неявные выражения. Аналогом гамильтоновой связи для частицы равенство (3.77), которое p в терминах углов Эйлера имеет вид

$$\cos \rho \cosh \chi = \cos \left(2\pi \sqrt{1 + M^2 - 2M \cosh \bar{\chi}} \right) \equiv p_{-1}(\bar{\chi}). \quad (3.102)$$

Это выражение содержит дополнительный параметр $\bar{\chi}$, в котором волновая функция кинематического гильбертова пространства независима. Чтобы исправить это, нужно использовать другое уравнение из системы (3.77), например,

$$\sin \rho \cosh \chi = \frac{(1 - M) \cosh \bar{\chi} \sin \left(2\pi \sqrt{1 + M^2 - 2M \cosh \bar{\chi}} \right)}{\sqrt{1 + M^2 - 2M \cosh \bar{\chi}}} \equiv p_0(\bar{\chi}), \quad (3.103)$$

или

$$\sinh \chi = \frac{M \sinh \bar{\chi} \sin \left(2\pi \sqrt{1 + M^2 - 2M \cosh \bar{\chi}} \right)}{\sqrt{1 + M^2 - 2M \cosh \bar{\chi}}} \equiv p_1(\bar{\chi}), \quad (3.104)$$

где

$$p_{-1}(\bar{\chi})^2 + p_0(\bar{\chi})^2 - p_1(\bar{\chi})^2 = 1. \quad (3.105)$$

Эти связи канонически коммутируют друг с другом, то есть они – первого рода. Итак, мы можем начать с кинематического гильбертова пространства как пространства функций трех параметров $\Psi(\rho, \chi, \bar{\chi})$, а затем наложить два из трех вышеперечисленных связей. Решение может быть записано в виде

$$\Psi(\rho, \chi, \bar{\chi}) = \delta \left(\cos \rho \cosh \chi - p_{-1}(\bar{\chi}) \right) \delta \left(\sin \rho \cosh \chi - p_0(\bar{\chi}) \right) \Psi(\chi), \quad (3.106)$$

где $\Psi(\chi)$ - произвольная функция. Как обычно, она не нормирована по отношению к кинематическому Гильбертову пространству. Скалярное произведение в физическом гильбертовом пространстве может определить в терминах функций $\Psi(\chi)$, входящих в (3.106), как

$$\langle \Psi, \Phi \rangle_{phy} = \int \frac{\cosh(2\chi)}{\pi} d\chi d\rho d(\cosh \bar{\chi}) \delta \left(\cos \rho \cosh \chi - p_{-1}(\bar{\chi}) \right) \delta \left(\sin \rho \cosh \chi - p_0(\bar{\chi}) \right) \Psi(\chi)^* \Phi(\chi). \quad (3.107)$$

Легко показать, что в пределе $M \ll 1$ и $\chi \ll 1$ оно сводится к стандартному скалярному произведению для состояний релятивистской частицы в 1+1 измерениях:

$$\langle \Psi, \Phi \rangle_{phy} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\chi}{\sqrt{\chi^2 + M^2}} \Psi(\chi)^* \Phi(\chi), \quad (3.108)$$

как и ожидалось. В частности, отсюда следует, что в отличие от (3+1)-мерной ситуации спектр энергии-импульса модели полностью непрерывен. Это вполне естественно: в (2+1)-мерной гравитации нет ньютонова притяжения, а значит, нет потенциала, который бы удерживал оболочку в ограниченной области.

3.5 Квантовая динамика

Групповая переменная импульса U может быть выражена в терминах голой массы M и параметра радиального буста $\bar{\chi}$ путем умножения голономий всех частиц, составляющих оболочку u_i

$$U = \prod u_i = \exp \left[2\pi \left((1 - M \cosh \bar{\chi}) \gamma_0 + M \sinh \bar{\chi} \gamma_2 \right) \right]. \quad (3.109)$$

Это матричное отношение содержит два независимых уравнения и свободный параметр $\bar{\chi}$. Исключив этот параметр, можно получить единственное уравнение, которое является гамильтоновым Связям. Из-за сложностей форма Связи получается приблизительно путем интерполяции между $\bar{\chi} \rightarrow 0$ и $\bar{\chi} \rightarrow \infty$ пределы

$$Tr(U) = \cosh \chi \cos \rho \approx \cos \left[2\pi \sqrt{1 + M^2 - M \sqrt{1 + \frac{(1-M)^2}{M^2 \sin^2(2\pi(1-M))} \chi^2}} \right]. \quad (3.110)$$

Это выражение действительно только для конечных M . Его квантовая версия является аналогом уравнения Клейна-Гордона для релятивистских частиц. В этом представлении (координата во временной переменной и импульс в радиальной переменной) она имеет вид:

$$\Psi(t+1, \chi) + \Psi(t-1, \chi) = H(\chi) \Psi(t, \chi), \quad (3.111)$$

где

$$H(\chi) = \frac{\cos \left(2\pi \sqrt{1 + M^2 - M \sqrt{1 + \frac{(1-M)^2}{M^2 \sin^2(2\pi(1-M))} \chi^2}} \right)}{\cosh(\chi)}. \quad (3.112)$$

Из-за периодичности в переменной энергии это не дифференциальное уравнение, а конечно-разностное уравнение, которое согласуется с дискретностью времени, найденной в преды-

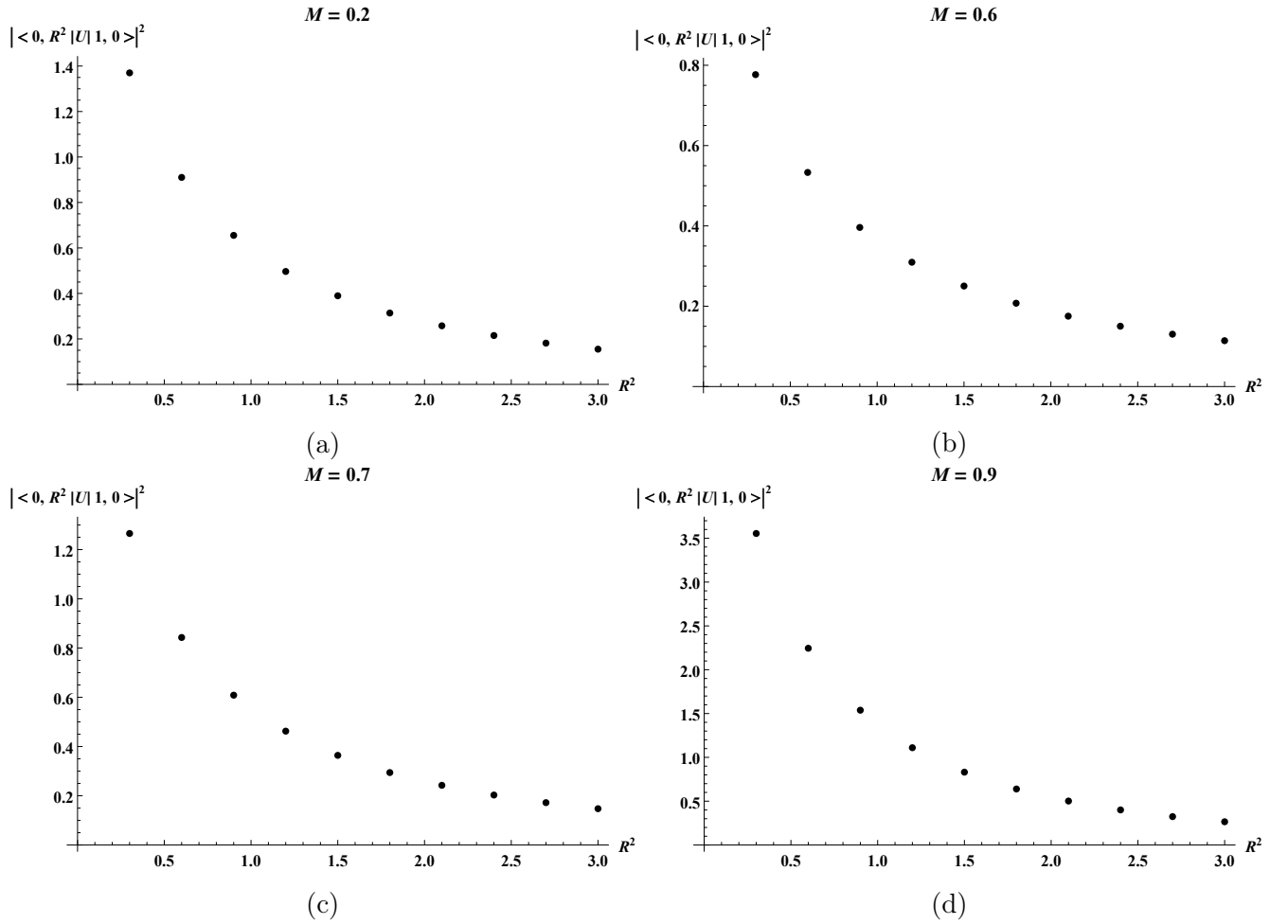


Рисунок 3.3 — Абсолютное значение матричного элемента $\langle 1, 0 | \hat{U} | 0, R^2 \rangle$, описывающего скорость гравитационного коллапса.

дущем разделе. Путем разделения положительной и отрицательной частотных частей это уравнение может быть приведено в Шредингеровскую форму:

$$\Psi(t \pm 1, \chi) \equiv \hat{U}^{\pm 1} \Psi(t, \chi) = \left(H(\chi) \pm \sqrt{2H^2(\chi) - 2} \right) \Psi(t, \chi), \quad (3.113)$$

где \hat{U} - оператор эволюции для одного шага во времени. Скорость гравитационного коллапса описывается матричным элементом эволюционного оператора \hat{U} между собственными состояниями радиуса оболочки R для положительных (пространственно-подобных) R^2 и нулевых R^2 , $\langle t+1, 0 | \hat{U} | t, R^2 \rangle$. На рисунке 3.3 показан результат численного расчета абсолютного значения матричного элемента $\langle 1, 0 | \hat{U} | 0, R^2 \rangle$ для различных R^2 . Можно видеть, что эта величина всюду конечна, включая минимально возможное положительное собственное значение радиуса оболочки, $R^2 = 1/4$, которое можно интерпретировать как разрешение центральной сингулярности.

3.6 Обсуждение

Исследована полная квантовая теория $(2+1)$ -мерной гравитации, связанной с тонкой оболочкой. Спектр периметра оболочки в случае временного движения оболочки не достигает нуля. Это означает, что голая сингулярность, существующая в классической теории, не возникает в квантовой теории. Что касается сингулярности за горизонтом событий, которая классически достигается пространственным движением оболочки, то она находится в дискретной части спектра оператора периметра и поэтому также регуляризуется.

Самый интересный вопрос заключается в следующем, можно ли обобщить наши результаты выше на $(3+1)$ -мерную гравитацию. Некоторые результаты по квантовой кинематике черной дыры Шварцшильда в системе отсчета тестовой частицы [192; 193], где показано, что ей также свойственны некоммутативность и дискретность координат. Но, как оказалось, обобщение этих результатов на динамику сферической оболочки, как это было сделано в разделе 3.3 выше, невозможно, потому что задача многих тел в $(3+1)$ -мерной гравитации неразрешима.

С другой стороны, почти все работы по сферической оболочке, упомянутые во введении, рассматривался $(3+1)$ -мерный случай. Даже выражение для гамильтоновой связи было найдено (хотя и не в глобальных координатах). Преобразование между используемыми координатами фазового пространства и глобальными координатами должна быть аналогична преобразованию, найденной в конце раздела 3.3.3. Единственная разница состоит в наличии ньютонова потенциала. На основании этого можно предположить, каков будет вид гамильтоновой связи в глобальных координатах.

Глава 4. Квантовый анализ формирования БТЗ черной дыры вследствие коллапса пылевой оболочки

Мы выполняем гамильтонову редукцию модели, в которой $2+1$ -мерная гравитация с отрицательной космологической постоянной связана с цилиндрически симметричной пылевой оболочкой. Результирующее действие содержит только конечное число степеней свободы. Фазовое пространство состоит из двух копий AdS_2 - и координатное, и импульсное пространство искривлены. Различные области на диаграмме Пенроуза могут быть идентифицированы с различными участками импульсного пространства AdS_2 . Квантование в представлении импульса становится особенно простым в окрестности горизонта, где можно пренебречь некомутативностью импульса. В этой области мы вычисляем спектр радиуса оболочки. Этот спектр оказывается непрерывным вне горизонта и становится дискретным внутри горизонта с интервалом собственных значений, пропорциональным квадратному корню из массы черной дыры. Мы также численно вычисляем амплитуды квантовых переходов между различными областями диаграммы Пенроуза в окрестности горизонта. Этот расчет показывает возможность квантового туннелирования оболочки в классически запрещенные области диаграммы Пенроуза, хотя и с экспоненциально затухающей скоростью вдали от горизонта.

4.1 Предварительные сведения

Общая теория относительности сталкивается с проблемами на малых расстояниях как на классическом, так и на квантовом уровнях. Классическая гравитация развивает сингулярности, в то время как в квантовой гравитации существуют ультрафиолетовые расхождения, которые не могут быть устранены перенормировкой.

С другой стороны, как впервые доказал Бронштейн [170], существует наименьшее возможное расстояние в квантовой гравитации - планковская длина, за пределами которой измерения невозможны. Этот аргумент опирается на непертурбативные эффекты, такие как образование черных дыр, и может быть описан только в рамках непертурбативной квантовой теории гравитации, отсутствующей до настоящего времени.

В отсутствие полной теории непертурбативное квантование может быть выполнено для некоторых приведенных к симметрии моделей Общей теории Относительности, в которых все, кроме нескольких степеней свободы, удалены [194]. В рамках таких моделей можно было бы описать образование черных дыр, что существенно для аргументации Браунштейна.

Простейшей моделью такого рода является гравитация, связанная со сферически симметричной тонкой пылевой оболочкой. Эта модель была широко изучена как на классическом [27; 176; 180], так и на квантовом [152; 179; 185; 186] уровне. В некоторых из этих работ было

получено разрешение сингулярности [152; 185]. Однако квантовые теории, полученные в разных работах, не эквивалентны. Это может быть результатом неоднозначности квантования, а также нетривиальной структуры фазового пространства модели. Определение волновой функции на различных участках конфигурационного пространства модели может привести к неэквивалентным теориям.

В квантовой теории принято, что определение волновой функции должно быть распространено на все возможные конфигурации, независимо от того, являются ли они классически достижимыми или нет. В частности, это было реализовано в [168; 185], где фазовое пространство было усложнено и его различные сектора были собраны в риманову поверхность, где точка ветвления представляла горизонт.

С другой стороны, есть пример, когда фазовому пространству подобной модели была дана реальная глобальная диаграмма. Эта модель представляет собой гравитацию в 2+1 пространственно-временных измерениях, связанную с точечной частицей [110; 112; 187]. Импульс частицы оказывается элементом группы Лоренца, а гамильтоновская связь фиксирует класс сопряженности этого элемента группы.

Попытка связать два вышеприведенных подхода была предпринята в работе [23; 24] для нулевой космологической постоянной. Оказалось, что импульсы образуют пространство AdS_2 , что приводит, в частности, к некоммутативности координат. Было обнаружено, что связь Гамильтона отличается от связи частицы, учитывающего гравитационное поле, создаваемое энергией движения между оболочками. Была найдена связь между групповыми импульсами и каноническими импульсами, аналогичная связи [180; 185]. Было обнаружено, что амплитуды переходов между нулевым и положительным радиусами оболочек не имеют расхождений, что можно интерпретировать как разрешение сингулярности в квантовой теории.

Однако приведенная выше модель существенно отличается от 3+1 трехмерной гравитации, поскольку она имеет решения голых сингулярностей вместо решений черных дыр. Ближайшим аналогом 3+1-мерной модели является 2+1-мерная гравитация с отрицательной космологической постоянной, которая имеет хорошо известные решения БТЗ для черных дыр [26].

Черные дыры БТЗ широко изучались как квазиклассически [195; 196], где учитывалась обратная реакция квантового поля на геометрию пространства-времени, так и с помощью голографического подхода [197; 198], используя граничную конформную теорию поля. Здесь мы рассмотрим более простую модель с осевой симметрией, поскольку эта модель может быть обобщена на более высокие пространственно-временные измерения.

Мы частично распространяем результаты [23; 24] на случай отрицательной космологической постоянной. Мы фокусируемся на изучении квантовой динамики в области ближнего горизонта, где квантование может быть выполнено традиционными методами из-за коммутативности импульса. В этом режиме интерес представляет возможность квантового туннелирования в классически недоступные сектора диаграммы Пенроуза.

Глава 4 организована следующим образом. В разделе 4.3 результаты [110; 112; 187] обобщаются от точечной частицы к круговой оболочке, описывая ее позже как ансамбль циркулярно расположенных точечных частиц по аналогии с [23; 24], но теперь с отрицательной космологической постоянной. Как и прежде, импульсы оболочки из пространства AdS_2 и координаты снова некоммутативны.

В разделах 4.4 и 4.5 мы получаем выражение для гамильтонова связи модели в терминах глобальных координат фазового пространства. Этой связи оказывается несколько отличным от связи [23; 24] из-за частичной компенсации положительной кривизны, создаваемой оболочкой, отрицательной кривизной от члена космологической постоянной. Найдена связь между импульсами из AdS_2 и каноническими импульсами из [180; 185].

В разделе 4.6 мы рассмотрим приближение, когда оболочка расположена близко к горизонту. Это позволяет нам квантовать модель в импульсном представлении на AdS_2 . Мы находим, что координаты оболочки некоммутативны, и одна из них (время) имеет дискретный спектр. Установлено, что радиус оболочки имеет дискретный спектр внутри горизонта и непрерывный спектр, но отделенный от нуля, вне горизонта.

В разделе 4.7 мы изучаем квантовую динамику оболочки. Выведем выражение для оператора эволюции и численно вычислим некоторые его матричные элементы. Эти матричные элементы описывают амплитуды переходов между различными секторами диаграммы Пенроуза. Оказывается, существует возможность квантового туннелирования оболочки в классически недоступные области. Обсуждается также обобщение некоторых из этих результатов на 3+1-мерную гравитацию.

4.2 Глобальная параметризация AdS и БТЗ пространства-времени

Как AdS_3 и БТЗ пространства-времени может быть дана глобальная параметризация по $SO(2,2)$ элементы группы g . Метрика может быть восстановлена из чистого калибровочного $so(2,2)$ соединения как

$$A_\mu = g^{-1} \partial_\mu g. \quad (4.1)$$

Связи $so(2,2)$ является $A_\mu = \Gamma_{AB} A_\mu^{AB}$, где Γ_{AB} являются $so(2,2)$ генераторы, $A, B = 0, 1, 2, 3$ можно разложить на Лоренца связи, что $\omega_\mu^{ab} = A_\mu^{ab}$, где $a, b = 0, 1, 2$, и триады $e_\mu^a = \ell A_\mu^{3a}$, где $\ell = 1/\sqrt{\Lambda}$. $SO(2,2)$ генераторы Γ^{AB} , Γ^{ab} - Лоренца и Γ^{a3} - трансляции. Извлечение координат из

$$A_\mu = g^{-1} \partial_\mu g, \quad (4.2)$$

где $g \in SO(2,2)$. Линейный элемент определяется как

$$ds^2 = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b dx^\mu dx^\nu. \quad (4.3)$$

В качестве альтернативы линейный элемент может быть получен путем встраивания AdS пространства в четырехмерное плоское пространство с сигнатурой $(-, +, +, -)$. Координаты вложения определяются как $X^A = (gv)^A$, где $v = (0,0,0,\ell)$. Они удовлетворяют $\eta_{AB} X^A X^B = -\ell^2$, где $\eta_{AB} = \text{diag}(-1,1,1-1)$. Элемент линии является то

$$ds^2 = \eta_{AB} \partial_\mu X^A \partial_\nu X^B dx^\mu dx^\nu. \quad (4.4)$$

Параметризация пространства-времени групповым элементом g связана со статической системой координат следующим образом:

$$g = g_t g_\phi g_R, \quad (4.5)$$

где в случае AdS_3 пространство-время

$$\begin{aligned} g_t &= \cos(t/\ell) I + \sin(t/\ell) \Gamma^{03}, & g_\phi &= \cos(\phi) I + \sin(\phi) \Gamma^{12}, \\ g_R &= \sqrt{1 + R^2/\ell^2} I + (R/\ell) \Gamma^{13}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

а также

$$\begin{aligned} X^0 &= \ell \sqrt{1 + R^2/(\ell^2)} \cosh(t/\ell), & X^1 &= \ell \sqrt{1 + R^2/(\ell^2)} \sinh(t/\ell), \\ X^2 &= R \sin(\phi), & X^3 &= R \cos(\phi), \end{aligned} \quad (4.7)$$

а метрика такова

$$ds^2 = -\left(\frac{R^2}{\ell^2} + 1\right) dt^2 + \left(\frac{R^2}{\ell^2} + 1\right)^{-1} dR^2 + R^2 d\phi^2. \quad (4.8)$$

Для решения БТЗ за горизонтом ($r > \sqrt{2m-1}\ell$), имеем

$$\begin{aligned} g_t &= \cosh(\sqrt{2m-1} t/\ell) I + \sinh(\sqrt{2m-1} t/\ell) \Gamma^{01}, \\ g_\phi &= \cosh(\sqrt{2m-1} \phi) I + \sinh(\sqrt{2m-1} \phi) \Gamma^{32}, \\ g_R &= R/(\sqrt{2m-1} \ell) I + \sqrt{R^2/((2m-1)\ell^2) - 1} \Gamma^{13}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

тоже

$$\begin{aligned}
X^0 &= \ell \sqrt{R^2 / ((2m-1)\ell^2) - 1} \sinh(\sqrt{2m-1} t / \ell), \\
X^1 &= \ell \sqrt{R^2 / ((2m-1)\ell^2) - 1} \cosh(\sqrt{2m-1} t / \ell), \\
X^2 &= R / \sqrt{2m-1} \sinh(\sqrt{2m-1} \phi), \\
X^3 &= R / \sqrt{2m-1} \cosh(\sqrt{2m-1} \phi).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Подставляя это в (4.3) или (4.4), получаем

$$ds^2 = -\left(\frac{R^2}{\ell^2} - 2m + 1\right) dt^2 + \left(\frac{R^2}{\ell^2} - 2m + 1\right)^{-1} dR^2 + R^2 d\phi^2, \tag{4.11}$$

это знакомое выражение для БТЗ метрики в статических координатах. Непрерывность поля $g(x) \in SO(2,2)$ внутри горизонта, ($R < \sqrt{2m-1}\ell$), учитывает взаимообмен радиальными и временными переменными:

$$\begin{aligned}
g_t &= \cosh(\sqrt{2m-1} t / \ell) I + \sinh(\sqrt{2m-1} t / \ell) \Gamma^{01}, \\
g_\phi &= \cosh(\sqrt{2m-1} \phi) I + \sinh(\sqrt{2m-1} \phi) \Gamma^{32}, \\
g_R &= R / (\sqrt{2m-1} \ell) I - \sqrt{1 - R^2 / ((2m-1)\ell^2)} \Gamma^{03},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

а также

$$\begin{aligned}
X^0 &= -\ell \sqrt{1 - R^2 / ((2m-1)\ell^2)} \cosh(\sqrt{2m-1} t / \ell), \\
X^1 &= -\ell \sqrt{1 - R^2 / ((2m-1)\ell^2)} \sinh(\sqrt{2m-1} t / \ell), \\
X^2 &= R / \sqrt{2m-1} \sinh(\sqrt{2m-1} \phi), \\
X^3 &= R / \sqrt{2m-1} \cosh(\sqrt{2m-1} \phi).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Групповые поля (4.9) и (4.12) непрерывно (но не плавно в терминах переменных r и t) склеиваются вдоль горизонта. Подставляя (4.12) в (4.3) или (4.13) в (4.4) еще раз, результирующий в тот же БТЗ метрика (4.8).

Как мы увидим в следующем разделе, две координаты вложения X^a , $a = 0,1$ из (4.10) и (4.13) будут играть роль канонических координат оболочки. Радиус оболочки может быть выражен через эти координаты следующим образом

$$R = \sqrt{(2m-1)(X^a X_a + \ell^2)}. \tag{4.14}$$

4.3 Принцип действия и симплектическая форма

Общее действие состоит из действия гравитации и действия оболочки.

$$I = I_{gr} + I_{shell}. \quad (4.15)$$

Гравитационное действие - это действие черна-Саймонса для группы $SO(2,2)$. Как и прежде $A_\mu = \Gamma_{AB} A_\mu^{AB}$ составляет $so(2,2)$ связность, и \langle, \rangle называется билинейная форма на $so(2,2)$ алгебры таких, что $\langle \Gamma^{AB}, \Gamma^{CD} \rangle = \epsilon^{ABCD}$. Затем

$$I_{gr} = \frac{\kappa}{8\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \langle A_\mu, (\partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3} A_\nu A_\rho) \rangle. \quad (4.16)$$

Действие оболочки состоит из N частиц, нумеруемых индексом i ,

$$I_{shell} = \sum_i^N \int_{l_i} Tr(K_i A_\mu) dx^\mu, \quad (4.17)$$

где интегрирование происходит вдоль каждой мировой линии частиц l_i , а $K_i = m_i \Gamma_{03}$ - элемент алгебры $so(2,2)$. Действие гравитации инвариантно относительно калибровочных преобразований :

$$A_\mu \rightarrow g^{-1}(\partial_\mu + A_\mu)g, \quad (4.18)$$

где g - элемент группы $SO(2,2)$. В отличие от гравитационного действия, Действие оболочки является вариантом при калибровочных преобразованиях. Каждая частица преобразуется при калибровочных преобразованиях (4.18) как

$$\int_{l_i} Tr(K_i A_\mu) dx^\mu \rightarrow \int_{l_i} Tr(\tilde{K}_i A_\mu) dx^\mu + \int_{l_i} Tr(K_i g^{-1} \dot{g}) d\tau, \quad (4.19)$$

где $\tilde{K}_i = g K_i g^{-1}$, τ - параметр вдоль мировой линии частицы, а производная по нему представлена точкой. Второй член в правой части (4.19) представляет собой действие массивной бесспиновой частицы на пространство AdS. Таким образом, степени свободы частиц представлены ранее калибровочными степенями свободы.

Мы срезаем многообразие так, чтобы мировые линии частиц находились в направлении временной координаты. Тогда изменение действия (4.15) относительно A_0 приводит к следующему связи

$$\epsilon^{0\mu\nu} F(A)_{\mu\nu} = \sum_i^N \tilde{K}_i \delta^2(x, x_i), \quad (4.20)$$

где $F(A)_{\mu\nu}$ - кривизна связности A , а x_i - координаты каждой частицы. W Мы должны выбрать один компонент соединения A равным нулю, чтобы линейаризовать ограничение. Такой выбор калибровки не может быть сделан глобально, поскольку модель содержит нетривиальное пространство модулей.

Следуя работе [190; 191], пространственный срез делится на различные области, в которых такой выбор калибра мог бы быть сделан. Каждая область окружена кругом, содержащим только одну частицу. Обратите внимание, что между окружностями нет общих границ, соединивший с общими истоками, как показано на рисунке 3.1. Делая разрезы вдоль окружностей, многообразие разбивается на N дисков и многоугольник. Каждый диск содержит частицу, в то время как многоугольник не содержит частиц, но соединенный с бесконечностью.

Решение для дисков записывается в полярных координатах. Затем мы выбираем калибровку, в которой радиальные компоненты A должна быть равна нулю. Затем мы решаем связи и подключаем решение обратно к действию в произвольную калибровку:

$$A_{r,i} = g_i^{-1} \partial_r g_i, \quad A_{\phi,i} = g_i^{-1} \nabla_\phi g_i, \quad (4.21)$$

где $\nabla_\phi g_i = \partial_\phi g_i + K_i g_i$. Аналогично, для многоугольника, в котором калибровочный параметр будет помечен как h . После решения связи все, что остается от действия, - это кинетический член:

$$I_{D_i} = \int_{D_i} d^3 x \epsilon^{0\mu\nu} \langle A_\mu, \dot{A}_\nu \rangle + \int_{l_i} Tr(K_i g_i^{-1} \dot{g}_i) d\tau, \quad (4.22)$$

и то же самое для многоугольника, без источника. Однако гораздо проще вычислить симплектическую форму, которая является вариацией кинетического члена действия:

$$\Omega_{D_i} = \int_{D_i} d^2 x \epsilon^{0\mu\nu} \langle \delta A_\mu, \wedge \delta A_\nu \rangle + \delta Tr(K_i \delta g_i^{-1} \wedge \delta g_i). \quad (4.23)$$

После подключения решения связи в виде (4.21) и использования тождества $\delta(g_i^{-1} \nabla_\mu g_i) = g_i^{-1} \nabla_\mu (\delta g_i g_i^{-1}) g_i$, симплектическая форма для диска сводится к его границе:

$$\Omega_{D_i} = \int_{\partial D_i} dx \langle \nabla_\phi (\delta g_i g_i^{-1}), \wedge \delta g_i g_i^{-1} \rangle. \quad (4.24)$$

Та же ситуация и для многоугольника, симплектика которого представляет собой сумму вкладов от каждого ребра E_i :

$$\Omega_P = \sum_i^N \int_{E_i} dx \langle \partial_\phi (\delta h_i h_i^{-1}), \wedge \delta h_i h_i^{-1} \rangle. \quad (4.25)$$

Далее мы должны собрать все симплектические формы вместе и рассмотреть условие непрерывности метрики и связности между дисками и многоугольником. Во-первых, ковариант-

ная производная в (4.21) должна быть преобразована в обычную производную с помощью калибровочного преобразования

$$\tilde{g}_i = \exp(K\phi) g_i. \quad (4.26)$$

Симплектическая форма диска (4.24) изменяется на

$$\Omega_{D_i} = \int_{\partial D_i} dx \langle \nabla_\phi(\delta\tilde{g}_i \tilde{g}_i^{-1}), \wedge \delta\tilde{g}_i \tilde{g}_i^{-1} \rangle. \quad (4.27)$$

Условия непрерывности связности (4.21) принимает вид

$$\tilde{g}_i = C_i h \Big|_{E_i}, \quad (4.28)$$

где C_i - это функция только времени. Подставляя это в (4.24) и (4.25) и комбинируя их, получаем

$$\Omega_{full} = \Omega_P + \sum_i^N \Omega_{D_i} = \sum_i^N \int_{E_i} \langle \partial_\phi(\delta h h^{-1}), C_i^{-1} \delta C_i \rangle = - \sum_i^N \int_{\partial D_i} \langle \partial_\phi(\delta\tilde{g}_i \tilde{g}_i^{-1}), \delta C_i C_i^{-1} \rangle. \quad (4.29)$$

Эта симплектическая форма коллапсирует к вершинам многоугольника или к начальным точкам границ диска. Теперь давайте перепишем действие в следующих переменных

$$u_i = C_i^{-1} \exp(2\pi K) C_i, \quad h_i = C_i^{-1} \tilde{g}_i(0), \quad (4.30)$$

где

$$\tilde{g}_i(2\pi) = \exp(2\pi K) \tilde{g}_i(0), \quad (4.31)$$

и

$$u_i^{-1} \delta u_i = C_i^{-1} \delta C_i - C_i^{-1} \exp(-2\pi K) \delta C_i C_i^{-1} \exp(2\pi K) C_i. \quad (4.32)$$

Уравнение (4.29) сводится к

$$\Omega_{full} = \sum_i^N \int_R \langle \delta h_i h_i^{-1}, u_i^{-1} \delta u_i \rangle. \quad (4.33)$$

h_i будет играть роль переменной конфигурации, а u_i - переменной импульса. Трансляционная часть h_i порождает БТЗ метрику вне оболочки. Таким образом, канонические координаты являются переменной величиной (4.10) от (4.13). Используя условия перекрытия (4.28), которые означают, что

$$g_i(0) = C_i h_i, \quad g_i(2\pi) = \exp(2\pi K) g_i(0) = C_i h_{i+1}, \quad (4.34)$$

мы находим, что

$$g_{i+1} = u_i g_i, \quad (4.35)$$

а также

$$g_i = \left(\prod_{j=0}^{i-1} u_j \right) g_0 \left(\prod_{j=0}^{i-1} u_j \right)^{-1}, \quad (4.36)$$

где порядок факторов в продукте-справа налево. Голономия вокруг полной оболочки определяется как произведение голономий вокруг каждой частицы

$$U = \prod_{j=0}^N u_j. \quad (4.37)$$

Используя следующее тождество

$$U^{-1} \dot{U} = \sum_{i=0}^N \left(\prod_{j=0}^{i-1} u_j \right)^{-1} u_i^{-1} \dot{u}_i \left(\prod_{j=0}^{i-1} u_j \right), \quad (4.38)$$

мы можем переписать симплектическую форму (4.33) следующим образом

$$\Omega_{full} = \int_R \langle \delta h_0 h_0^{-1}, U^{-1} \delta U \rangle. \quad (4.39)$$

Симплектическая форма для полной оболочки сводится к члену, зависящему от одной переменной. Можно показать, что только трансляционная часть h и единственная Лоренцева часть U войдут в (4.39). В окрестности горизонта, где $\delta h_0 h_0^{-1} \ll 1$ симплектическая форма еще больше упрощается:

$$\Omega_{full} = \frac{1}{\ell} \int_R \langle \delta X, U^{-1} \delta U \rangle, \quad (4.40)$$

где $X = X^a \Gamma_a$, а X_a являются вложенными координатами (4.10) или (4.13) для $\phi = 0$.

4.4 Связи

Здесь мы находим уравнения, которым удовлетворяет голономия вокруг полной оболочки U . Пусть C_i и u_i являются элементами группы Анти-де Ситтера $SO(2,2)$. По определению

U , которое является произведением голономий вокруг каждой частицы, мы имеем

$$U = \prod_{i=0}^N u_i, \quad (4.41)$$

где

$$u_i = C_i^{-1} \exp\left(\frac{2\pi M}{N} \Gamma^{12}\right) C_i, \quad (4.42)$$

которая представляет собой голономию вокруг неподвижной частицы. Выберите следующий анзац для C_i ,

$$C_i = (tr)_i (b)_i, \quad (4.43)$$

где tr and b относятся к трансляционным и параметрам бустам.

$$(tr)_i = \exp\left(\frac{-2\pi i}{N} \Gamma_{12}\right) (tr)_0 \exp\left(\frac{2\pi i}{N} \Gamma_{12}\right), \quad (4.44)$$

$$(b)_i = \exp\left(\frac{-2\pi i}{N} \Gamma_{12}\right) (b)_0 \exp\left(\frac{2\pi i}{N} \Gamma_{12}\right), \quad (4.45)$$

$$(tr)_0 = t = \sqrt{1 + \Lambda R^2} I + \sqrt{\Lambda} R \Gamma^{13}, \quad (4.46)$$

$$(b)_0 = b = \cosh \bar{x} I + \sinh \bar{x} \Gamma^{10}. \quad (4.47)$$

Тогда произведение голономий двух соседних частиц равно

$$u_i u_{i+1} = C_i^{-1} K C_i C_{i+1}^{-1} K C_{i+1}, \quad (4.48)$$

где

$$K = \exp\left(\frac{2\pi M}{N} \Gamma^{12}\right). \quad (4.49)$$

Используя уравнения (4.42), (4.43), (4.44), (4.45), (4.46) и (4.47), уравнение (4.48) можно упростить следующим образом

$$u_i u_{i+1} = \exp\left(\frac{-2\pi i}{N} \Gamma_{12}\right) (b)^{-1} (t)^{-1} K t b \exp\left(\frac{2\pi i}{N} \Gamma_{12}\right) \exp\left(\frac{-2\pi(i+1)}{N} \Gamma_{12}\right) (b)^{-1} (t)^{-1} K t b \exp\left(\frac{2\pi(i+1)}{N} \Gamma_{12}\right). \quad (4.50)$$

В терминах уравнения (4.50) голономия вокруг полной оболочки (4.41) может быть записана в виде

$$U = \prod_{i=0}^N u_i = \prod_{i=0}^N \exp\left(\frac{-2\pi i}{N} \Gamma_{12}\right) (b)^{-1} (t)^{-1} K t b = \left[\exp\left(\frac{-2\pi i}{N} \Gamma_{12}\right) (b)^{-1} (t)^{-1} K t b \right]^N. \quad (4.51)$$

Обратите внимание, что

$$(t)^{-1} K t = \exp \left[\frac{M}{N} \left(\sqrt{1 + |\Lambda| R^2} \Gamma_{12}^{-1} + \sqrt{|\Lambda| R} \Gamma_{23} \right) \right], \quad (4.52)$$

$$(b)^{-1} (t)^{-1} K t b = \exp \left[\frac{M}{N} \left(\sqrt{1 + |\Lambda| R^2} \cosh \bar{x} \Gamma_{12} + \sqrt{1 + |\Lambda| R^2} \sinh \bar{x} \Gamma_{02} + \sqrt{|\Lambda| R} \Gamma_{23} \right) \right]. \quad (4.53)$$

Тогда уравнение (4.51) имеет вид

$$U = \exp \left[2\pi \left(1 - M \sqrt{1 + |\Lambda| R^2} \cosh \bar{x} \right) \Gamma_{12} + M \sqrt{1 + |\Lambda| R^2} \sinh \bar{x} \Gamma_{02} + M \sqrt{|\Lambda| R} \Gamma_{23} \right]. \quad (4.54)$$

Затем мы берем уравнение трассировки (4.54), находим, что

$$Tr(U) = \cos \left[2\pi \sqrt{\left(1 - M \sqrt{1 + |\Lambda| R^2} \cosh \bar{x} \right)^2 - \left(M \sqrt{1 + |\Lambda| R^2} \sinh \bar{x} \right)^2 - \left(M \sqrt{|\Lambda| R} \right)^2} \right]. \quad (4.55)$$

С точки зрения переменных АДМ, у нас есть

$$Tr(U) = \cos [2\pi \sqrt{1 - 2m}]. \quad (4.56)$$

Сравниваем (4.55) и (4.56), то есть

$$1 - 2m = \left(1 - M \sqrt{1 + |\Lambda| R^2} \cosh \bar{x} \right)^2 - \left(M \sqrt{1 + |\Lambda| R^2} \sinh \bar{x} \right)^2 - M^2 |\Lambda| R^2. \quad (4.57)$$

Мы находим, что

$$m = M \left(\sqrt{1 + |\Lambda| R^2} \cosh \bar{x} - \frac{M}{2} \right), \quad (4.58)$$

а также

$$M = \sqrt{1 + |\Lambda| R^2} \cosh \bar{x} \pm \sqrt{(1 + |\Lambda| R^2) \cosh^2 \bar{x} - 2m + 1}. \quad (4.59)$$

Обратите внимание, что R в преобразовании (4.46) использовался в качестве продольной радиальной переменной. Эта переменная подвергается сжатию Лоренца при радиальных ускорительных преобразованиях. С другой стороны, радиус периметра, входящий в (4.3), поперечен радиальному ускорению и, таким образом, инвариантен. Чтобы принять это во внимание, мы должны подвергнуться сжатию Лоренца путем масштабирования $R \rightarrow R \cosh \bar{x}$. Тогда в терминах периметрического радиуса уравнение (4.59) становится

$$M = \sqrt{1 + |\Lambda| R^2 + \sinh^2 \bar{x}} \pm \sqrt{1 - 2m + |\Lambda| R^2 + \sinh^2 \bar{x}}, \quad (4.60)$$

это знакомое уравнение Израила.

4.5 Вывод уравнений связей

В предыдущем разделе мы получили выражение для голономии вокруг оболочки. Чтобы получить гамильтонову связи в канонической форме, мы должны извлечь лоренцеву часть приведенной выше голономии и затем выразить ее в терминах углов Эйлера, которые обеспечивают глобальную параметризацию лоренцева многообразия.

Чтобы извлечь лоренцеву часть голономии, нужно выполнить ее сопряжение с помощью преобразования трансляции

$$U_l = g_t^{-1} U g_t, \quad (4.61)$$

где

$$U = \exp(\pi J), \quad J = \left(1 - M \sqrt{1 + \frac{R^2}{\ell^2} \cosh(\bar{\chi})}\right) \Gamma_{12} + \sinh(\bar{\chi}) \Gamma_{20} + M \cosh(\bar{\chi}) \frac{R}{\ell} \Gamma_{23}. \quad (4.62)$$

Обратите внимание, что g_t в (4.61) находится из условия, что $g_t^{-1} J g_t$ является чистым преобразованием Лоренца. Это приводит к уравнению для g_t , которое можно было бы искать в виде $g_t = aI + \sqrt{-1 + a^2} \Gamma_{13}$. Подключив его к (4.62), можно найти $a = R/(\sqrt{2m-1}\ell)$, или

$$g_t = R/(\sqrt{2m-1}\ell) I + \sqrt{R^2/((2m-1)\ell^2) - 1} \Gamma^{13} = \sqrt{X^2/\ell + 1} I + X/\ell \Gamma^{13}, \quad (4.63)$$

что совпадает с радиальным трансляционным в БТЗ пространстве (4.10), $X^2 = X_a X^a$. Теперь нужно выразить общую массу m в терминах канонических координат X^a . От

$$m = M \left(\sqrt{\cosh^2 \bar{\chi} + \frac{R^2}{\ell^2}} - \frac{M}{2} \right), \quad (4.64)$$

а также

$$R^2 = (2m-1)(X^a X_a + \ell^2), \quad (4.65)$$

получается следующее уравнение для m :

$$m = M \left(\sqrt{2m \left(1 + \frac{X^2}{\ell^2}\right) + \sinh^2 \bar{\chi} - \frac{X^2}{\ell^2}} - \frac{M}{2} \right). \quad (4.66)$$

Мы решим это уравнение в пределе медленного движения, $\bar{\chi} \ll 1$, и близком к горизонту местоположении $X^2 \ll \ell^2$, где оно становится

$$m = M \left[\sqrt{2m} + \frac{2}{\sqrt{2m}} \left((2m - 1) \frac{X^2}{\ell^2} + \sinh^2 \bar{\chi} \right) - \frac{M}{2} \right]. \quad (4.67)$$

Приближенное решение таково

$$m = M/\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{M}} \left((\sqrt{2}M - 1) \frac{X^2}{\ell^2} + \sinh^2 \bar{\chi} \right). \quad (4.68)$$

Далее, мы можем выразить R как

$$R = \sqrt{M/\sqrt{2} - 1} \ell + a(M) X^2/\ell + b(M) \bar{\chi}^2 \ell, \quad (4.69)$$

где $a(M)$ и $b(M)$ - это константы, связанные с голой массой. Теперь мы можем написать выражение для U_l в терминах канонических координат и параметра буста

$$U_l = \exp(\pi J_l), \quad (4.70)$$

где

$$J_l = \left[\left(1 - M \sqrt{\cosh^2(\bar{\chi}) + \frac{R^2}{\ell^2}} \right) \sqrt{X^2/\ell^2 + 1} + M \frac{RX}{\ell^2} \right] \Gamma_{12} + M \sinh(\bar{\chi}) \Gamma_{20}. \quad (4.71)$$

В терминах углов Эйлера ρ и χ

$$\cos(\rho) \cosh(\chi) = \cos \left(\pi \sqrt{\left[\left(1 - M \sqrt{\cosh^2(\bar{\chi}) + \frac{R^2}{\ell^2}} \right) \sqrt{X^2/\ell^2 + 1} + M \frac{RX}{\ell^2} \right]^2 - \left[M \sinh(\bar{\chi}) \right]^2} \right), \quad (4.72)$$

тоже

$$\sinh(\chi) = \frac{\sinh \bar{\chi} \sin \left(\pi \sqrt{\left[\left(1 - M \sqrt{\cosh^2(\bar{\chi}) + \frac{R^2}{\ell^2}} \right) \sqrt{X^2/\ell^2 + 1} + M \frac{RX}{\ell^2} \right]^2 - \left[M \sinh(\bar{\chi}) \right]^2} \right)}{\sqrt{\left[\left(1 - M \sqrt{\cosh^2(\bar{\chi}) + \frac{R^2}{\ell^2}} \right) \sqrt{X^2/\ell^2 + 1} + M \frac{RX}{\ell^2} \right]^2 - \left[M \sinh(\bar{\chi}) \right]^2}}. \quad (4.73)$$

Из второго выражения мы выражаем $\bar{\chi}$ в терминах канонических переменных в пределе $\bar{\chi} \ll 1$

$$\sinh(\bar{\chi}) = \frac{\left[\left(1 - M \sqrt{1 + \frac{R^2}{\ell^2}} \right) \sqrt{X^2/\ell^2 + 1} + M \frac{RX}{\ell^2} \right] \sinh(\chi)}{\sin \left(\pi \left[\left(1 - M \sqrt{1 + \frac{R^2}{\ell^2}} \right) \sqrt{X^2/\ell^2 + 1} + M \frac{RX}{\ell^2} \right] \right)}. \quad (4.74)$$

После всех подстановок гамильтоново связи примет вид

$$\cos(\rho) = \frac{\cos\left(\pi\sqrt{a_1(M) - a_2(M)\chi^2 + a_3(M)X^2/\ell^2}\right)}{\cosh(\chi)}, \quad (4.75)$$

где a_1, a_2, a_3 - коэффициенты, зависящие только от M .

4.6 Квантование

Мы выполним квантование в окрестности горизонта $X_0, X_1 \ll \ell$ в (4.10) или (4.13), где трансляционной некоммутативностью можно пренебречь и построить стандартное представление импульса.

$$U = uI + p^a \Gamma_a, \quad (4.76)$$

где

$$u = \cosh \chi \cos \rho, \quad p_0 = \cosh \chi \sin \rho, \quad p_1 = \sinh \chi \cos \phi, \quad p_2 = \sinh \chi \sin \phi. \quad (4.77)$$

Координат оператор

$$\hat{x}^a U = U \Gamma_a, \quad \Gamma_a \Gamma_b = \eta_{ab} I + \epsilon_{abc} \Gamma^c, \quad (4.78)$$

из чего мы можем сделать вывод

$$\begin{aligned} \hat{X}^0 \Psi &= i \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \Psi, \\ \hat{X}^1 \Psi &= i \left(\cos \rho \cos \phi \frac{\partial}{\partial \chi} + \tanh \chi \sin \rho \cos \phi \frac{\partial}{\partial \rho} + \coth \chi \cos \rho \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \Psi, \\ \hat{X}^2 \Psi &= i \left(\cos \rho \sin \phi \frac{\partial}{\partial \chi} + \tanh \chi \sin \rho \sin \phi \frac{\partial}{\partial \rho} - \coth \chi \cos \rho \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \Psi. \end{aligned} \quad (4.79)$$

С помощью цилиндрической симметрии ($\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$, и только две компоненты из X остаются)

$$\hat{X}^0 \Psi = i \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Psi, \quad \hat{X}^1 \Psi = i \left(\cos \rho \frac{\partial}{\partial \chi} + \tanh \chi \sin \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Psi. \quad (4.80)$$

Кинематические состояния модели определяются как функции $U \in AdS_2$,

$$\Psi(U) = \Psi(\rho, \chi), \quad (4.81)$$

которая является однозначной и периодической в ρ функциях на всем импульсном пространстве. Скалярное произведение может быть выведено из меры Хаара на группе $SL(2)$ и опре-

делено как

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \frac{1}{\pi} \int \cosh(\chi) d\rho d\chi \Phi(\rho, \chi)^* \Psi(\rho, \chi). \quad (4.82)$$

Спектр временной координаты X^0 канонически сопряжена с ρ , а соответствующий ему оператор

$$\hat{T}|\rho, \chi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial \rho} |\rho, \chi\rangle, \quad (4.83)$$

а его собственные состояния таковы

$$|t; \psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int \cosh(\chi) d\rho d\chi \exp(it\rho) \psi(\chi) |\rho, \chi\rangle, \quad (4.84)$$

где t – целое число. Оператор времени имеет только дискретный спектр:

$$\hat{T}|t; \psi\rangle = t\hbar|t; \psi\rangle. \quad (4.85)$$

Обратите внимание, что постоянная Ньютона G равна единице, а квантование происходит в единицах планковской длины.

Более интересной наблюдаемой является Лоренц-инвариантная длина, $X^2 = X_a X^a$, определяющая расстояние оболочки до горизонта. Это расстояние связано с радиусом периметра оболочки (4.14). Заметим, что переметериальный радиус зависит не только от канонических координат X^a , но и от общей массы m , которая является функцией канонических импульсов. Из-за этого R не диагоналізується одновременно с X . Мы выберем более удобный базис, на котором X является диагональным. Поскольку X_a в (4.79) задается как левоинвариантная производная на группе, а ее квадрат представлен оператором Бельтрами-Лапласа на нашем импульсном пространстве:

$$\hat{X}^2|t; \psi\rangle = |t; \Delta\psi\rangle, \quad (4.86)$$

где

$$\Delta = \hbar^2 \left(\frac{1}{\cosh(\chi)} \frac{\partial}{\partial \chi} \cosh(\chi) \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{t^2}{\cosh^2(\chi)} \right). \quad (4.87)$$

Этот оператор имеет два ряда собственных значений, как показано в [187]. Единица положительна, но отделена от нуля, соответствует непрерывному спектру, т. е. пространственноподобным значениям, X^2

$$\hat{X}^2|t, \lambda\rangle = \pi(\lambda^2 + 1/4)\hbar^2|t, \lambda\rangle, \quad (4.88)$$

где λ - вещественное число. Другой отрицательный, но содержащий ноль, соответствует дискретному спектру, т. е., времениподобным значениям, X^2

$$\hat{X}^2|t,l\rangle = -\pi l(l+1)\hbar^2|t,l\rangle, \quad (4.89)$$

где l - неотрицательное число, подчиненное условию $l \leq t$. Как видно из (4.14), положительный X^2 соответствует оболочке вне горизонта, в то время как отрицательный X^2 соответствует оболочке внутри горизонта. Таким образом, радиус оболочки принимает непрерывный набор значений вне горизонта и дискретный внутри.

4.7 Квантовая динамика

Угловая переменная ρ в (4.75) играет роль гамильтониана, канонически сопряженного с временной переменной t . В координатном представлении он становится оператором производной по времени $\rho \rightarrow i\partial/(\partial t)$. Подключив это к (4.75), мы видим, что квантовое гамильтоново связи является не дифференциальным уравнением, а конечно-разностным уравнением

$$\frac{1}{2}(\Psi(t+1,\chi) + \Psi(t-1,\chi)) = \frac{\cos(\pi\sqrt{a_1(M) - a_2(M)\chi^2 + a_3(M)\Delta/\ell^2})}{\cosh(\chi)}\Psi(t,\chi), \quad (4.90)$$

где мы используем косое представление (координата во временной переменной и импульс в пространственной переменной), а Δ - оператор Бельтрами-Лапласа в импульсном пространстве. Это дискретный аналог уравнения Клейна-Гордона, который сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению Клейна-Гордона в пределе невесомости. Что касается вопроса о факторном упорядочении в приведенном выше выражении, то мы всегда выбираем симметричный порядок, чтобы сделать гамильтониан эрмитовым и оператор эволюции унитарными. Дискретный аналог уравнения Шредингера может быть записан с помощью оператора эволюции для одного шага во времени

$$\Psi(t+1,\chi) = U^\pm \Psi(t,\chi), \quad (4.91)$$

где U был найден из (4.90), чтобы быть

$$U^\pm = F \pm \sqrt{F^2 - 1}, \quad (4.92)$$

где

$$F = \frac{\cos(\pi\sqrt{a_1(M) - a_2(M)\chi^2 + a_3(M)\Delta/\ell^2})}{\cosh(\chi)}. \quad (4.93)$$

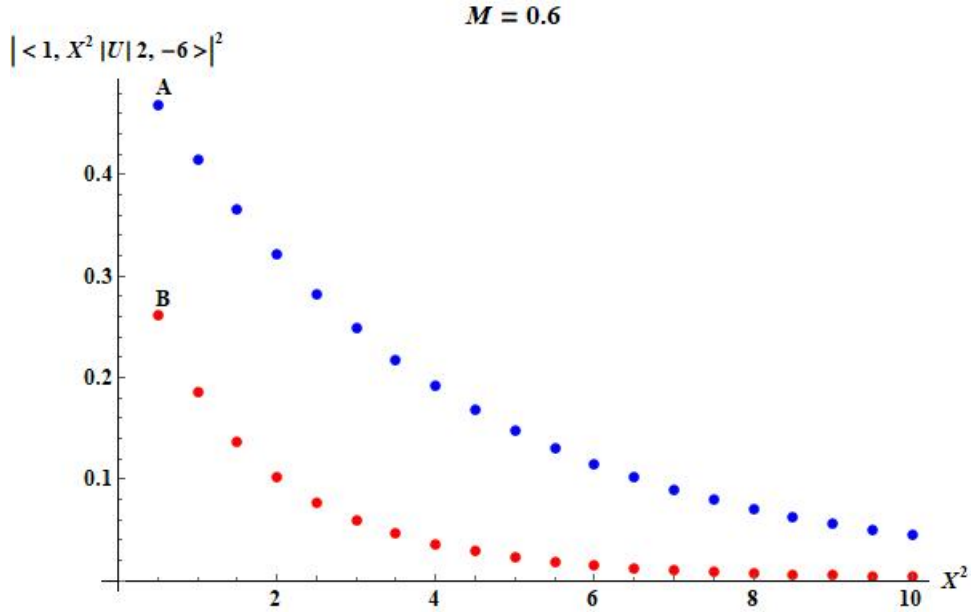


Рисунок 4.1 — $II \rightarrow I$ (кривая B) против $I \rightarrow II$ (кривая A) вероятность перехода.

Теперь мы готовы рассчитать амплитуды переходов между различными местами оболочки в пространстве-времени. Как мы видели в предыдущем разделе, положение оболочки можно описать двумя квантовыми числами: временной координатой t и собственным значением инвариантного расстояния до горизонта $X^2 = X_a X^a$. Соответствующее состояние в представлении импульса

$$|t, X^2\rangle = \exp(it\rho) L_{t, X^2}(\chi) |\rho, \chi\rangle, \quad (4.94)$$

где $L_{t, X^2}(\chi)$ - собственное состояние оператора (4.87) с собственным значением X^2 . Теперь мы можем преобразовать кинематическое состояние (4.94) в физическое состояние, применив гамильтоново связи (4.75)

$$|t, X^2\rangle_{phys} = \left(a_+(U^+)^t + a_-(U^-)^t \right) L_{t, X^2}(\chi) |\rho, \chi\rangle, \quad (4.95)$$

где a_+ и a_- - произвольные коэффициенты.

Можно выделить четыре типа таких состояний. Состояния с $X^2 > 0$, $a_+ \neq 0$, $a_- = 0$ соответствуют сектору I диаграммы Пенроуза на рисунке 3.2b. В пределе невесомости этот сектор соответствует положительным частотным решениям уравнения Клейна-Гордона. Состояния $X^2 > 0$, $a_+ = 0$, $a_- \neq 0$ соответствуют сектору III на рисунке 3.2b. В пределе невесомости этот сектор соответствует отрицательным частотным решениям уравнения Клейна-Гордона. Состояния $X^2 < 0$, $a_+ \neq 0$, $a_- = 0$ соответствуют сектору II на рисунке 3.2b. Предел невесомости не оставляет следов такого рода состояний. Состояния с $X^2 < 0$, $a_+ = 0$, $a_- \neq 0$ соответствуют сектору IV на рисунке 3.2b. Предел невесомости не оставляет следов такого рода состояний. Численно вычисляются матричные элементы между различ-

ными состояниями типа

$$\langle t_1 X_1^2 | t_2, X_2^2 \rangle_{phys}, \quad (4.96)$$

которые описывают вероятность изменения радиуса оболочки от X_2^2 to X_1^2 в течение временного интервала $t_1 - t_2$. Например, на рисунке 4.1 мы показываем относительную вероятность того, что оболочка пересечет горизонт из области I в область II и обратно. Как видно, вероятность перехода $II \rightarrow I$ сравнима с вероятностью перехода $I \rightarrow II$ в непосредственной близости от горизонта, но экспоненциально затухает вдали от горизонта. Это согласуется с результатами, полученными ранее в [185] совершенно другим методом.

4.8 Обсуждение

Квантовая теория модели, описывающей пылевую оболочку, связанную с 2+1 - мерной гравитацией с отрицательной космологической постоянной, изучена как на кинематическом, так и на динамическом уровне в околоразрешенной области.

На кинематическом уровне было показано, что радиус оболочки имеет непрерывный спектр вне горизонта и дискретный внутри. Пространственноподобным значениям радиуса оболочки, измеренного по радиальной координате X , является Планковским, в то время как для радиуса, измеренного по периметру оболочки, пространственноподобным значениям пропорционально квадратному корню из массы черной дыры.

Хотя использованное приближение не позволяет нам проникнуть глубоко внутрь черной дыры, можно сказать, что точка центральной сингулярности, нулевой радиус оболочки, принадлежит дискретному спектру. Это наводит на мысль о разрешении сингулярности.

На динамическом уровне получены амплитуды переходов между различными местоположениями оболочки в пригоризонтной области. Было показано, что существует ненулевая скорость перехода между всеми возможными секторами диаграммы Пенроуза, даже между теми, которые классически запрещены. Однако для классически запрещенных переходов их скорость экспоненциально затухает вдали от горизонта.

Основная причина изучения цилиндрически симметричной модели оболочки заключается в том, что она может быть расширена до 3+1 пространственно-временных измерений. Существуют некоторые результаты по квантовой кинематике черной дыры Шварцшильда в рамке тестовой частицы [192; 193]. Оно также обладает такими свойствами, как координатная некоммутативность и дискретность. Несмотря на то, что проблема многих тел в гравитации 3+1 не разрешима, состав голономии все еще может быть таким, как в разделах 4.4 и 4.5. Единственное отличие - это наличие ньютоновского потенциала. Таким образом, в принципе существует возможность обобщить приведенные выше результаты на 3+1 мерную гравитацию.

Глава 5. Пылевая оболочка вдали от горизонта черной дыры БТЗ

Наша главная цель в этой главе-обсудить кинематическую часть пылевой оболочки вдали от горизонта черной дыры БТЗ. В этом случае существует некоммутативность импульса, которая требует полноценной квантовой групповой техники. Найден спектр оператора времени и оператора радиуса оболочки внутри черной дыры.

5.1 Предварительные сведения

Динамика пылевой оболочки вблизи горизонта черной дыры БТЗ рассматривалась в главе 4. В этой области трансляции можно считать малыми, а некоммутативностью импульсов можно пренебречь. Если мы хотим изучать что происходит в глубине черной дыры, в частности вблизи сингулярности, такое приближение более не применимо. Импульсное пространство становится квантовой группой. Эта часть работы не завершена, и здесь представлены некоторые предварительные результаты.

Глава 5 имеет следующую структуру. В разделе 5.2 мы делаем короткий обзор вывода структуры Пуассона-Ли из действия гравитации, квантование которой приводит к квантовой группе. В разделе 5.3 мы рассмотрим вывод матриц представлений $SL_q(2)$, которые станут базисом гильбертова пространства модели. В разделе 5.4 мы находим спектры оператора времени и радиуса оболочки внутри черной дыры. В разделе 5.5 мы выводим гамильтонову связь в терминах матричных элементов $SL_q(2)$. Далее обсуждаются некоторые открытые вопросы.

5.2 Симплектическая форма и классическая r -матрица

Вывод структуры Пуассона-Ли из действия в основном следует работам [190; 199]. В разделе 4.3 мы получили симплектическую форму для частиц, из которых состоит оболочка

$$\Omega = \ell \langle \delta h h^{-1}, \wedge u^{-1} \delta u \rangle, \quad (5.1)$$

где h - $SO(2,2)$ -преобразование между некой начальной точкой и положением частицы, а u - голономия вокруг частицы, стартующая с той же самой начальной точки, $u = h^{-1} \exp(\ell m H) h$, где H - генератор пространственного вращений, а $\ell = 1/\sqrt{\Lambda}$. В терминах h

это можно было бы переписать следующим образом

$$\Omega = \langle \exp(-m H) h^{-1} \delta h \exp(m H), \wedge h^{-1} \delta h \rangle, \quad (5.2)$$

где h можно разложить на левую и правую части, а симплектическая форма сводится к

$$\begin{aligned} \Omega &= Tr \left(\exp(-m H) h_L^{-1} \delta h_L \exp(m H), \wedge h_L^{-1} \delta h_L \right) \\ &\quad - Tr \left(\exp(-m H) h_R^{-1} \delta h_R \exp(m H), \wedge h_R^{-1} \delta h_R \right), \end{aligned} \quad (5.3)$$

откуда выводятся скобки Пуассона (для малых m):

$$\{h_L, \otimes h_L\} = 1/(\ell m) [r, h_L \otimes h_L], \quad (5.4)$$

где

$$r = 1/2 H \otimes H + X^+ \otimes X^-, \quad (5.5)$$

является классической r -матрицей. Из этого мы можем вывести скобки Пуассона для u_L

$$\{u_L, \otimes u_L\} = (1/\ell) [r, u_L \otimes u_L], \quad (5.6)$$

который не зависит от массы, и то же самое для u_R . Лоренцева подгруппа $SO(2,2)$ соответствует $u_L = u_R = U$. Поэтому U удовлетворяет тем же скобкам Пуассона. Представление скобок Пуассона операторами приводит к группе $SL_q(2)$. Рассмотрим квантовую версию группы $SU(1,1)$, изоморфную квантовой группе $SL(2)$.

$$U = U_{ij} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Коммутационные отношения между элементами матрицы следующие:

$$\begin{aligned} ab &= qba, & ac &= qca, \\ bd &= qdb, & cd &= qdc, \\ bc &= cb, & ad &= da + (q - q^{-1})bc, \end{aligned} \quad (5.8)$$

что может так же быть записано в терминах r -матрицы

$$R_{12} U_1 U_2 = U_2 U_1 R_{12}, \quad (5.9)$$

где

$$U_1 = U \otimes I, \quad U_2 = I \otimes U, \quad (5.10)$$

а также

$$R = R_{ij}^{kl} = q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - q^{-2} & q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Здесь $q = \exp(2\pi\ell)$. Выбор q в корнях единицы мотивирован, во первых, тем, что в качестве H выбран генератор пространственных вращений, которые периодичны. Трансляционная часть h в отличие от $\Lambda = 0$ не образует алгебру Ли, поскольку это не линейное пространство. Теперь это универсальная обертывающая алгебра $U_q(sl(2))$ с тем же параметром деформации.

5.3 Матричные элементы представлений $SL_q(2)$

Собственные состояния для оператора времени и оператора инвариантной длины могут быть получены из матричных элементов представлений группы. Во-первых, мы рассмотрим теорию представлений классической группы в форме, в которой это проще обобщается на квантовый случай [200]. Конечномерные представления общей линейной группы $GL(2)$ могут быть построены на $2l + 1$ -мерных пространствах полиномов многочленов двух комплексных переменных

$$p_n^l(\xi, \eta) = \binom{2l}{l-n}^{1/2} \xi^{l-n} \eta^{l+n}, \quad n = -l, \dots, l. \quad (5.12)$$

Матричные элементы T_{mn}^l определяются как

$$p_n^l(a\xi + c\eta, b\xi + d\eta) = \sum_{m=-l}^l T_{mn}^l(a, b, c, d) p_m^l(\xi, \eta), \quad (5.13)$$

где

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

является матрицей $GL(2)$ в фундаментальном представлении. Правая часть (5.13) выражается с помощью соотношений

$$\begin{aligned} (a\xi + b\eta)^{l-n} &= \sum_{j=0}^{l-n} \binom{l-n}{j} a^j c^{l-n-j} \xi^j \eta^{l-n-j}, \\ (b\xi + d\eta)^{l+n} &= \sum_{k=0}^{l+n} \binom{l+n}{k} b^k d^{l+n-k} \xi^k \eta^{l+n-k}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Собирая все вместе и меняя суммирование, $(j,k) \rightarrow (m,j)$, где $j+k = l-m$, левая часть (5.13) принимает вид

$$\binom{2l}{l-n}^{1/2} \sum_{m=-l}^l \sum_{j=\max(0, -m-n)}^{\min(l-m, l-n)} \binom{l-n}{j} \binom{l+n}{l-m-j} a^j c^{l-n-j} b^{l-m-j} d^{n+m+j} \xi^{l-m} \eta^{l+m}, \quad (5.15)$$

из чего мы делаем вывод

$$\begin{aligned} T_{mn}^l(a,b,c,d) &= \binom{2l}{l-m}^{-1/2} \binom{2l}{l-n}^{1/2} \\ &\quad \sum_{j=\max(0, -m-n)}^{\min(l-m, l-n)} \binom{l-n}{j} \binom{l+n}{l-m-j} a^j c^{l-n-j} b^{l-m-j} d^{n+m+j}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

в частности

$$T_{ml}^l(a,b,c,d) = d^{2l}, \quad (5.17)$$

а также

$$T_{ml}^l(a,b,c,d) = \binom{2l}{l-m}^{1/2} b^{l-m} d^{l+m}. \quad (5.18)$$

Разные матричные элементы внутри одного представления могут быть связаны лестничными операторами, которые получаются из генераторов алгебры

$$[X^\pm, H] = \pm 2X^\pm, \quad [X^+, X^-] = H. \quad (5.19)$$

Рассмотрим представления $SU(1,1)$, для которых $a = d^*$, $b = c^*$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Они изоморфны $SL(2)$. Отсюда можно получить правоинвариантные и левоинвариантные операторы производных (умножая фундаментальное представление на генератор справа и слева) Отсюда можно получить лево-инвариантные и право-инвариантные операторы производных (умножая фундаментальное представление на генераторы, слева или справа) Получаются следующее

соотношения:

$$X_L^+ T_{m,n}^l = T_{m,n+1}^l, \quad X_L^- T_{m,n}^l = T_{m,n-1}^l, \quad (5.20)$$

а также

$$X_R^+ T_{m,n}^l = T_{m+1,n}^l, \quad X_R^- T_{m,n}^l = T_{m+1,n}^l. \quad (5.21)$$

На мономах матричных элементов лестничные операторы действуют как:

$$X_L^- a^n = X_L^- c^n = 0, \quad X_L^- b^n = n a b^{n-1}, \quad X_L^- d^n = n c d^{n-1}, \quad (5.22)$$

$$X_R^- a^n = X_R^- b^n = 0, \quad X_R^- c^n = n a c^{n-1}, \quad X_R^- d^n = n b d^{n-1}, \quad (5.23)$$

$$X_L^+ b^n = X_L^+ d^n = 0, \quad X_L^+ a^n = n b a^{n-1}, \quad X_L^+ c^n = n d c^{n-1}, \quad (5.24)$$

$$X_R^+ c^n = X_R^+ d^n = 0, \quad X_R^+ b^n = n d b^{n-1}, \quad X_R^+ a^n = n c a^{n-1}. \quad (5.25)$$

Описанные выше представления не являются унитарными и не образуют нормализуемых состояний в квантовой механике. Нас интересуют другие представления, которые не могут быть реализованы на пространстве полиномов конечной степени, но могут быть восстановлены из мономиального члена отрицательной степени с теми же лестничными операторами, что и выше. Начальным матричным элементом будет

$$T_{ml}^l(a,b,c,d) = d^{-2l}, \quad (5.26)$$

где $l \leq |m|, |n|$. Для этой группы матричные элементы в (5.13) вычисляются как

$$T_{mn}^l(a,b,c,d) = \binom{l-m}{n-m}^{1/2} \binom{l+m}{n-m}^{1/2} P_{l-n}^{n-m, n+m}(bc+ad) c^{n-m} a^{n+m}, \quad (5.27)$$

где $P_{l-n}^{n-m, n+m}(bc)$ - полином Якоби. При параметризации мы имеем

$$T = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) e^{i\rho} & \sinh(\chi) e^{i\phi} \\ \sinh(\chi) e^{-i\phi} & \cosh(\chi) e^{-i\rho} \end{pmatrix},$$

осесимметричные состояния не имеют зависимости от ϕ , что соответствует диагональным элементам T в (5.27), где

$$T_{nn}^l(a,b,c,d) = P_{l-n}^{0,2n}(bc+ad) a^{2n} = P_{l-n}^{0,2n}(\cosh(2\chi)) \cosh(\chi)^{2n} e^{2in\rho}. \quad (5.28)$$

Их можно было получить из мономиала

$$T_{ll}^l(a,b,c,d) = T_l^l(a,b,c,d) = a^{2l} = \cosh(\chi)^{2l} e^{2il\rho}. \quad (5.29)$$

По действию лестничных операторов

$$T_{l-n}^l = (X_-)^n T_l^l, \quad n = 0 \dots 2l. \quad (5.30)$$

Рассмотренные выше конечномерные представления не являются унитарными, и соответствующие им состояния не нормализуемы. Унитарные представления, порождающие нормализуемые состояния, являются бесконечномерными и могут быть получены с помощью тех же лестничных операторов, X_{\pm} , начиная с мономиала с отрицательной степенью

$$T_l^l = d^{-2l}, \quad (5.31)$$

$$T_{l+n}^l = (X_+)^n T_l^l, \quad n = 0 \dots \infty, \quad (5.32)$$

и аналогично для T_{-l-n}^l . Уравнение

$$T_{nn}^l(a, b, c, d) = P_{l-n}^{0, 2n}(bc + ad) a^{2n}, \quad (5.33)$$

допускает обобщение на не коммутативные элементы a, b, c, d .

$$T_{nn}^l(a, b, c, d) = q^{n-l} P_{l-n}^{0, 2n}(bc + ad; q) a^{2n}, \quad (5.34)$$

где $P_{l-n}^{0, 2n}(bc + ad; q)$ - q -полиномы Якоби [201]. Далее мы рассмотрим построение лестничных операторов на аксиально симметричных состояниях.

5.4 Гармонический анализ на $SL_q(2)$

Для классического $SU(1,1)$, (который изоморфен $SL(2)$), в параметризации

$$T = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) e^{i\rho} & \sinh(\chi) e^{i\phi} \\ \sinh(\chi) e^{-i\phi} & \cosh(\chi) e^{-i\rho} \end{pmatrix},$$

аксиальная симметрия означает отсутствие зависимости от ϕ . Действие алгебры на функции $f(T)$ представляется дифференциальными операторами:

$$\begin{aligned} H &= i \frac{\partial}{\partial \rho}, \\ X^{\pm} &= e^{\pm i\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \pm i \tanh(\chi) \frac{\partial}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \quad (5.35)$$

который воспроизводит коммутационные отношения

$$[H, X^{\pm}] = \pm 2X^{\pm}, \quad [X^+, X^-] = H. \quad (5.36)$$

В матричных обозначениях действие этих дифференциальных операторов может быть выражено как комбинация левоинвариантного и правоинвариантноо векторных полей:

$$X^\pm T = J^\pm .T + T.J^\mp, \quad HT = J^0 .T + T.J^0, \quad (5.37)$$

где J^\pm и J^0 - генераторы алгебры в матричном представлении, a'' . матричное умножение. Итак, в терминах матричных элементов записей

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

и действие алгебры на группу может быть записано как (приаксиальной симметрии предполагается $b = c$)

$$\begin{aligned} [X^+, a] &= 0, & [X^+, b] &= a, & [X^+, d] &= b = c, \\ [X^-, a] &= b = c, & [X^-, b] &= d, & [X^-, d] &= 0, \\ [H, a] &= a, & [H, b] &= 0, & [H, d] &= -d. \end{aligned} \quad (5.38)$$

В случае $q \neq 1$, в отсутствии параметризации в терминах углов Эйлера, действие алгебры на группу может быть выражено прямо в терминах элементов матрицы T . Это должна быть деформированная версия соотношений (5.38). Точная форма этих соотношений выводится из условий совместности с коммутационными соотношениями $U_q(su(1,1))$

$$X^\pm K = q^{\pm 2} K X^\pm, \quad [X^+, X^-] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad (5.39)$$

где $K = q^H$ и $SU_q(1,1)$ коммутационные соотношения,

$$\begin{aligned} ab &= qba & ac &= qca, \\ bd &= qdb & cd &= qdc, \\ bc &= cb & ad &= da + (q - q^{-1})bc, \end{aligned} \quad (5.40)$$

где $d = a^*$, $b = qc^*$ и $ad - qbc = 1$. Обратите внимание, что элемент bc^{-1} является центральным по отношению к коммутационным отношениям (5.40), так что возможно его фиксировать и считать равным константе. Условие аксиальной симметрии значит что $bc^{-1} = q$. Условиями совместности будут тождества Якоби, включающие все возможные перекрестные коммутационные соотношения между элементами $SU_q(1,1)$ и $U_q(su(1,1))$. В результате деформированная версия (5.38) имеет вид:

$$\begin{aligned} X^+ a &= q^{-1} a X^+, & [X^+, c] &= a K, & X^+ d &= q d X^+ + c K, \\ X^- a &= q^{-1} a X^- + b K^{-1}, & [X^-, b] &= d K, & X^- d &= q d X^-, \\ K a &= q a K, & K d &= q^{-1} d K, & [K, b] &= 0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Это также может быть получено из дубля $D(SU_q(1,1))$ [88; 202]. Используя эти операторы, нормируемые состояния могут быть построены как:

$$\Psi_{j,j} = d^{-j}, \quad \Psi_{j,-j} = a^{-j}, \quad (5.42)$$

$$X^- \Psi_{j,j} = 0, \quad X^+ \Psi_{j,-j} = 0, \quad (5.43)$$

$$\Psi_{j,n} \sim (X^+)^n \Psi_{j,j}, \quad \Psi_{j,-n} \sim (X^-)^n \Psi_{j,-j}, \quad (5.44)$$

коэффициенты пропорциональности будут выбраны из условия нормировки. Собственные значения оператора времени (который в данном случае равен H) равны

$$H \Psi_{j,n} = (j + 2n) \Psi_{j,n}, \quad (5.45)$$

либо

$$K \Psi_{j,n} = q^{(j+2n)} \Psi_{j,n}, \quad (5.46)$$

когда q является корнем из единицы, собственные значения K периодически зависят от n , что соответствует периодичности времени в пространстве AdS. Фактически, в этом случае, в отличие от $q = 1$, описанное здесь представление является конечномерным. Если $q = \exp(\frac{2\pi i}{N})$ (в нашем случае $N = l$, где l - радиус AdS-пространства в планковских единицах), то ряд (5.44) завершается при $j + 2n = N$. Например, если $j = N$, то

$$X^+ \Psi_{j,j} = X^+ d^{-j} = [j; q^{-1}] b d^{-j-1}, \quad (5.47)$$

где

$$[j; q] = \frac{q^j - 1}{q - 1}, \quad (5.48)$$

является суммой геометрической прогрессии. Очевидно, что $[N; q] = 0$, поэтому состояние $\Psi_{N,N}$ аннигилируется как X^+ , так и X^- . Это состояние одномерно и аналогично состоянию $j = 0$, то есть при $j = N$ мы возвращаемся к горизонту. Собственные значения квадратичного оператора Казимира

$$C_2 = X^+ X^- + \frac{q^{-1}K + q, K^{-1}}{(q - q^{-1})^2} = X^- X^+ + \frac{q, K + q^{-1}K^{-1}}{(q - q^{-1})^2}, \quad (5.49)$$

являются

$$C_2 \Psi_{j,n} = -[j]_q [j + 1]_q \Psi_{j,n}, \quad (5.50)$$

где

$$[j]_q = \frac{q^j - q^{-j}}{q - q^{-1}}. \quad (5.51)$$

Они также являются периодическими, если q является корнем из единицы, что означает, что у нас есть только конечное число неприводимых представлений. Спектр Казимира не только дискретен, но и ограничен сверху. Как мы видели в предыдущей главе, квадратичный Казимир алгебры связан с инвариантным расстоянием до горизонта. Внутри черной дыры это расстояние является временным и, следовательно, периодическим в пространстве AdS. Эта периодичность соответствует отходу от горизонта со стороны черной дыры, прохождению через центральную сингулярность, а затем возвращению к горизонту со стороны белой дыры. Состояния с $0 < j < N/2$ соответствуют черной дыре, $j = N/2$ - сингулярности, $N/2 < j < N$ - белой дыре. Внутренний продукт этих состояний определяется как

$$\langle \Psi_{j,n}, \Psi_{j',n'} \rangle = \int \Psi_{j,n}^* \Psi_{j',n'} d_q g. \quad (5.52)$$

В отсутствие интегрального исчисления на некомпактной квантовой группе мы сначала замечаем, что состояния с различными n должны быть ортогональными. Если $n = n'$, то произведение $\Psi_{j,n}^* \Psi_{j',n'}$ является многочленом a , b и d , в котором каждый член содержит одну и ту же степень a и d . Используя коммутационные соотношения и условие, что $ad - b^2 = 1$, этот многочлен может быть выражен как функция только от b , то есть от одной переменной. Эта переменная может быть параметризована углом Эйлера, как в классическом случае, $b = \sinh(\chi)$ и вычислить одномерный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Psi_{j,n}^* \Psi_{j',n'}) (\cosh(\chi)) \sinh(2\chi) d_q \chi, \quad (5.53)$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d_q x = (1 - q) \sum_n (f(q^n) + f(-q^n)) q^n, \quad (5.54)$$

так называемый q -интеграл [201]. Несмотря на то, что группа не компактна, норма рассматриваемых состояний всегда конечна, по той же причине как и в случае $q = 1$. Наконец

$$\langle \Psi_{j,n}, \Psi_{j',n'} \rangle \sim \delta_{j,j'} \delta_{n,n'}. \quad (5.55)$$

5.5 Гамильтоново связи

Из предыдущей главы (до квантования) мы имеем

$$U = \exp \left[\pi \left(\left(1 - M\sqrt{1 + \Lambda R^2} \cosh \bar{\chi} \right) T_{12} + M\sqrt{1 + \Lambda R^2} \sinh \bar{\chi} T_{02} + M\sqrt{\Lambda R} T_{23} \right) \right]. \quad (5.56)$$

Пока что

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

это классическая группа. Сначала мы переписываем ограничения в терминах их записей, а затем применяем квантование. Для простоты вблизи сингулярности $\sqrt{\Lambda R} \ll 1$. тогда

$$U = \exp \left[\pi \left(\left(1 - M \cosh \bar{\chi} \right) T_{12} - M \sinh \bar{\chi} T_{02} \right) \right]. \quad (5.57)$$

В терминах углов Эйлера ρ и χ

$$(a + d)/2 = \cos \left(\pi \sqrt{\left(1 - M \cosh \bar{\chi} \right)^2 - \left(M \sinh \bar{\chi} \right)^2} \right), \quad (5.58)$$

$$b = \frac{\sin \bar{\chi} \sin \left(\pi \sqrt{\left(1 - M \cosh \bar{\chi} \right)^2 - \left(M \sinh \bar{\chi} \right)^2} \right)}{\pi \sqrt{\left(1 - M \cosh \bar{\chi} \right)^2 - \left(M \sinh \bar{\chi} \right)^2}}. \quad (5.59)$$

Для черной дыры с массой чуть выше планковской $|\sqrt{\left(1 - M \cosh \bar{\chi} \right)^2 - \left(M \sinh \bar{\chi} \right)^2}| \ll 1$. В этом пределе мы можем поставить $\sinh(\bar{\chi}) = b$, и связи сводится к виду

$$(a + d)/2 = \cos \left(\pi \sqrt{\left(1 - M\sqrt{1 + b^2} \right)^2 - (Mb)^2} \right), \quad (5.60)$$

или, используя $ad - b^2 = 1$, то

$$(a + d)/2 = \cos \left(\pi \sqrt{\left(1 - M\sqrt{ad} \right)^2 - M^2(ad - 1)} \right), \quad (5.61)$$

$$\sqrt{ad^{-1}} + \sqrt{da^{-1}} = 2 \frac{\cos \left(\pi \sqrt{\left(1 - M\sqrt{1 + b^2} \right)^2 - M^2(b^2)} \right)}{\sqrt{1 + b^2}}, \quad (5.62)$$

где $\sqrt{ad^{-1}}$ может быть рассмотрен как оператор сдвига во времени на один шаг (время дискретно). Отсюда может быть выведен оператор эволюции, и амплитуда перехода между различными радиусами оболочки может быть вычислена. Результат однако неоднозначный.

Аргументы в операторе эволюции и аргументы волновой функции не коммутируют, и нужно выбирать упорядочение сомножителей. Естественно предположить, что упорядочение должно быть выбрано так, что гамильтониан был бы эрмитовым (а эволюция унитарной).

5.6 Обсуждение

Мы находим, что Гильбертово пространство оболочки внутри черной дыры конечномерно. Его размерность не зависит от размера черной дыры, и равна обратной космологической постоянной в планковских единицах. Были найдены собственные состояния оператора времени и оператора радиуса оболочки. Спектр оператора времени дискретен и ограничен радиусом оболочки с одной стороны и горизонтом с другой. Спектр радиуса оболочки так же дискретен и так же ограничен между горизонтом черной дыры и горизонтом белой дыры. Изучение модели на динамическом уровне требует решения проблемы упорядочения множителей в матричных элементах.

Заключение

Классическая теория гравитации страдает от проблемы сингулярностей. Гравитационный коллапс не может быть остановлен, и он обычно приводит к бесконечным плотностям и кривизнам. Это расхождение противоречит основным постулатам теории. Возможное решение этой проблемы часто ищут в квантовой теории. Однако попытки построить квантовую гравитацию пока не увенчались успехом. Мы пытаемся обойти построение квантовой гравитации, работая с более подходящей моделью, которая все еще страдает в своей классической форме той же болезнью. Модель представляет собой сферически симметричную тонкую оболочку из пыли с фиксированной массой покоя M и ее гравитационным полем, заданным уравнениями Эйнштейна.

В последнее время тонкие оболочки стали довольно распространенными моделями различных явлений. Динамика самогравитирующей оболочки тонкой материи в общей теории относительности впервые была обсуждена Вернером Израэлем [22]. Она считается простейшей игрушечной моделью, описывающей гравитационный коллапс. Поскольку уравнения поля для реалистичного коллапса очень трудноразрешимы, эти модели демонстрируют полезность для изучения многих аспектов этого явления. Мы сосредоточимся на демонстрации модели пылевой оболочки в $(2+1)$ -мерной гравитации, поскольку с ней гораздо легче справиться.

За последние несколько лет $(2+1)$ -мерная гравитация была впервые теоретизирована Старушкевичем [16] для исследования классического поведения точечной частицы. Это точно разрешимая модель для реализации сложных задач квантовой гравитации. В то время как попытки квантовать $(3+1)$ -мерную гравитацию до сих пор не увенчались успехом, несколько подходов были успешными в трех измерениях. Более того, $(2+1)$ -мерная гравитация имеет ту же общую структуру, что и $(3+1)$ -мерная гравитация без ньютоновского предела и без степеней свободы.

Мы исследуем каноническую структуру пылевых тонких оболочек в сочетании с $(2+1)$ -мерной гравитацией как для нулевых, так и для отрицательных космологических констант. Полученный гамильтониан содержит только действительные степени свободы, которые конечны. Пространство-время имеет нетривиальные топологические структуры, и это оказалось AdS_2 пространства. Углы Эйлера поддерживают глобальную параметризацию этого многообразия. Квантование в этих переменных приводит к некоммутативности, а также к дискретности в координатном пространстве, что позволяет разрешить центральную особенность.

В случае нулевой космологической постоянной пространство-время везде плоское. Это означает, что можно избежать некоммутативности импульса и легко провести квантование этой модели. В случае отрицательной космологической постоянной основные расчеты проводились в окрестности горизонта, где можно пренебречь некоммутативностью импульса и

пространство-время этой области абсолютно плоское. Если рассматривать простые расширения некоммутативности, то это означает, что пространство-время оказалось искривленным. Это описание может происходить вдали от горизонта, в котором участвует квантовая группа.

Выясняется кинематическая часть пылевой оболочки вдали от горизонта черной дыры БТЗ, где существует некоммутативность импульса. Найдены собственные состояния оператора времени и оператора радиуса оболочки внутри черной дыры. Спектр оператора времени дискретен и ограничен радиусом оболочки с одной стороны и горизонтом с другой. Спектр радиуса оболочки также дискретен и также ограничен между горизонтом черной дыры и горизонтом белой дыры. Динамический уровень этой модели все еще находится в стадии разработки и столкнулся с проблемой неоднозначности факторного упорядочения в матричных элементах.

В окрестности горизонта, как и в модели с нулевой космологической постоянной, спектр времени дискретизируется, в то время как спектр радиуса оболочки непрерывен вне горизонта и становится дискретным внутри горизонта. Скорость гравитационного коллапса описывается матричным элементом эволюционного оператора \hat{U} между собственными состояниями радиуса оболочки R для положительного (пространственного) R^2 и для нулевого R^2 . Его величина конечна везде, что можно интерпретировать как разрешение сингулярности.

Кроме того, эти вычисления могут быть обобщены на (3+1)-мерную гравитацию. Единственное различие между (2+1)- и (3+1)-мерной гравитацией заключается в существовании ньютоновского потенциала. На самом деле (2+1)-мерная гравитация не отражает реальность Вселенной, в которой мы живем, но она имеет тривиальное пространство-время, чтобы дать явное описание различных проблем квантовой гравитации. Это означает, что (2+1)-мерная гравитация является реалистичной моделью для (3+1)-мерной гравитации.

Список литературы

1. *Hawking S. W., Ellis G. F. R.* The large scale structure of space-time. — Cambridge university press, 1973.
2. *Carroll S. M.* Spacetime and geometry. — Cambridge university press, 2019.
3. *Ortín T.* Gravity and strings. — Cambridge university press, 2004.
4. *Kaku M.* Introduction to superstrings and M-theory. — Springer Science & Business Media, 2012.
5. *Gambini R., Pullin J.* A first course in loop quantum gravity. — OUP Oxford, 2011.
6. *Rovelli C., Vidotto F.* Covariant loop quantum gravity: an elementary introduction to quantum gravity and spinfoam theory. — Cambridge university press, 2014.
7. *Connes A.* Noncommutative geometry. — Springer, 1994.
8. *Carey A. L. et al.* Index theory for locally compact noncommutative geometries. — American Mathematical Soc., 2014.
9. *DeWitt B. S.* Quantum theory of gravity. I. The canonical theory // Phys. Rev. — 1967. — т. 160. — с. 1113. — DOI: [10.1103/PhysRev.160.1113](https://doi.org/10.1103/PhysRev.160.1113).
10. *DeWitt B. S.* Quantum theory of gravity. II. The manifestly covariant theory // Phys. Rev. — 1967. — т. 162. — с. 1195. — DOI: [10.1103/PhysRev.162.1195](https://doi.org/10.1103/PhysRev.162.1195).
11. *DeWitt B. S.* Quantum theory of gravity. III. Applications of the covariant theory // Phys. Rev. — 1967. — т. 162. — с. 1239. — DOI: [10.1103/PhysRev.162.1239](https://doi.org/10.1103/PhysRev.162.1239).
12. *Ashtekar A.* New Variables for classical and quantum gravity // Phys. Rev. Lett. — 1986. — т. 57. — с. 2244—2247. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.57.2244](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.57.2244).
13. *Polchinski J.* String theory: an introduction to the bosonic string. т. 1. — Cambridge university press, 1998.
14. *Polchinski J.* String theory: superstring theory and beyond. т. 2. — Cambridge university press, 1998.
15. *Zwiebach B.* A first course in string theory. — Cambridge university press, 2004.
16. *Staruszkiewicz A.* Gravitation theory in three-dimensional space // Acta Phys. Polon. — 1963. — т. 24. — с. 735—740.
17. *Deser S., Jackiw R., 't Hooft G.* Three-dimensional Einstein gravity: Dynamics of flat space // Annals Phys. — 1984. — т. 152. — с. 220—235. — DOI: [10.1016/0003-4916\(84\)90085-X](https://doi.org/10.1016/0003-4916(84)90085-X).
18. *Deser S., Jackiw R.* Three-dimensional cosmological gravity: Dynamics of constant curvature // Annals Phys. — 1984. — т. 153. — с. 405—416. — DOI: [10.1016/0003-4916\(84\)90025-3](https://doi.org/10.1016/0003-4916(84)90025-3).

19. *Witten E.* 2+1 dimensional gravity as an exactly soluble system // Nucl. Phys. B. — 1988. — т. 311. — с. 46–78. — DOI: [10.1016/0550-3213\(88\)90143-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90143-5).
20. *Witten E.* Topology-changing amplitudes in 2+1 dimensional gravity // Nucl. Phys. B. — 1989. — т. 323. — с. 113–140. — DOI: [10.1016/0550-3213\(89\)90591-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90591-9).
21. *Barrow J. D., Burd A. B., Lancaster D.* Three-dimensional classical spacetimes // Class. Quant. Grav. — 1986. — т. 3. — с. 551. — DOI: [10.1088/0264-9381/3/4/010](https://doi.org/10.1088/0264-9381/3/4/010).
22. *Israel W.* Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity // Il Nuovo Cim. B (1965-1970). — 1966. — т. 44. — с. 1–14. — DOI: [10.1007/BF02710419](https://doi.org/10.1007/BF02710419).
23. *Andrianov A. A., Starodubtsev A. N., Elmahalawy Y.* (2+1)-dimensional gravity coupled to a dust shell: Quantization in terms of global phase space variables // Theor. Math. Phys. — 2019. — т. 200. — с. 1269–1281. — DOI: [10.1134/S0040577919090022](https://doi.org/10.1134/S0040577919090022). — arXiv: [1812.11425 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1812.11425).
24. *Andrianov A. A., Elmahalawy Y., Starodubtsev A.* Cylindrically symmetric 2+1 gravity in terms of global variables: Quantum dynamics // Int. J. Mod. Phys. A. — 2020. — т. 35. — с. 2040031. — DOI: [10.1142/S0217751X2040031X](https://doi.org/10.1142/S0217751X2040031X). — arXiv: [1912.11890 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1912.11890).
25. *Andrianov A. A., Starodubtsev A., Elmahalawy Y.* Quantum analysis of BTZ black hole formation due to the collapse of a dust shell // Universe. — 2020. — т. 6. — с. 201. — DOI: [10.3390/universe6110201](https://doi.org/10.3390/universe6110201). — arXiv: [2011.07971 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/2011.07971).
26. *Bañados M., Teitelboim C., Zanelli J.* Black hole in three-dimensional spacetime // Phys. Rev. Lett. — 1992. — т. 69. — с. 1849–1851. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.69.1849](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.1849). — arXiv: [hep-th/9204099](https://arxiv.org/abs/hep-th/9204099).
27. *Kuchař K. V.* Geometrodynamics of Schwarzschild black holes // Phys. Rev. D. — 1994. — т. 50. — с. 3961–3981. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.3961](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.3961). — arXiv: [gr-qc/9403003](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9403003).
28. *Ashtekar A. et al.* 2+1 quantum gravity as a toy model for the 3+1 theory // Class. Quant. Grav. — 1989. — т. 6. — с. L185. — DOI: [10.1088/0264-9381/6/10/001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/6/10/001).
29. *Fiziev P.* Gravitational field of massive point particle in general relativity. — 2003. — arXiv: [gr-qc/0306088](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0306088).
30. *Welling M.* Some approaches to 2+1-dimensional gravity coupled to point particles // 7th Summer School: Theoretical and Mathematical Physics. — 1995. — arXiv: [hep-th/9511211](https://arxiv.org/abs/hep-th/9511211).
31. *Carlip S.* Exact quantum scattering in 2+1 dimensional gravity // Nucl. Phys. B. — 1989. — т. 324. — с. 106–122. — DOI: [10.1016/0550-3213\(89\)90183-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90183-1).
32. *Gegenberg J., Kunstatter G., Leivo H.* Topological matter coupled to gravity in 2+1 dimensions // Phys. Lett. B. — 1990. — т. 252. — с. 381–386. — DOI: [10.1016/0370-2693\(90\)90556-L](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90556-L).
33. *Carlip S., Gegenberg J.* Gravitating topological matter in 2+1 dimensions // Phys. Rev. D. — 1991. — т. 44. — с. 424–432. — DOI: [10.1103/PhysRevD.44.424](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.44.424).

34. *Grats Y., García A.* Topological interactions in (2+1)-gravity: classical fields // *Class. Quant. Grav.* — 1996. — т. 13. — с. 189–197. — DOI: [10.1088/0264-9381/13/2/007](https://doi.org/10.1088/0264-9381/13/2/007).
35. *Dayi Ö. F.* Quantization of the $N=2m$ simple supergravity in $d=2+1$ // *Phys. Lett. B.* — 1990. — т. 234. — с. 25–29. — DOI: [10.1016/0370-2693\(90\)91995-N](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)91995-N).
36. *De Wit B., Matschull H.-J., Nicolai H.* Physical states in $d=3$, $N=2$ supergravity // *Phys. Lett. B.* — 1993. — т. 318. — с. 115–121. — DOI: [10.1016/0370-2693\(93\)91793-M](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)91793-M). — arXiv: [gr-qc/9309006](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9309006).
37. *Alkaç G. et al.* Massive $\mathcal{N} = 2$ supergravity in three dimensions // *J. High Eng. Phys.* — 2015. — т. 02. — с. 125. — DOI: [10.1007/JHEP02\(2015\)125](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2015)125). — arXiv: [1412.3118](https://arxiv.org/abs/1412.3118) [[hep-th](#)].
38. *Deser S., Yang Z.* Is topologically massive gravity renormalisable? // *Class. Quant. Grav.* — 1990. — т. 7. — с. 1603–1612. — DOI: [10.1088/0264-9381/7/9/012](https://doi.org/10.1088/0264-9381/7/9/012).
39. *Keszthelyi B., Kleppe G.* Renormalizability of $D=3$ topologically massive gravity // *Phys. Lett. B.* — 1992. — т. 281. — с. 33–35. — DOI: [10.1016/0370-2693\(92\)90270-E](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)90270-E).
40. *Bergshoeff E. A., Hohm O., Townsend P. K.* Massive gravity in three dimensions // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — т. 102. — с. 201301. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.102.201301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.201301). — arXiv: [0901.1766](https://arxiv.org/abs/0901.1766) [[hep-th](#)].
41. *Brooks R., Lifschytz G.* Quantum gravity and equivariant cohomology // *Nucl. Phys. B.* — 1995. — т. 438. — с. 211–232. — DOI: [10.1016/0550-3213\(95\)00027-P](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00027-P). — arXiv: [hep-th/9407177](https://arxiv.org/abs/hep-th/9407177).
42. *Carlip S.* Measuring the metric in (2+1)-dimensional quantum gravity // *Class. Quant. Grav.* — 1991. — т. 8. — с. 5–18. — DOI: [10.1088/0264-9381/8/1/007](https://doi.org/10.1088/0264-9381/8/1/007).
43. *Falbo-Kenkel M. K., Mansouri F.* Nonperturbative two-body dynamics in 2+1-dimensional gravity // *J. Math. Phys.* — 1993. — т. 34. — с. 139–153. — DOI: [10.1063/1.530396](https://doi.org/10.1063/1.530396).
44. *Kabat D., Ortiz M. E.* Canonical quantization and braid invariance of (2+1)-dimensional gravity coupled to point particles // *Phys. Rev. D.* — 1994. — т. 49. — с. R1684(R). — DOI: [10.1103/PhysRevD.49.R1684](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.R1684). — arXiv: [hep-th/9305155](https://arxiv.org/abs/hep-th/9305155).
45. *Meusburger C., Schroers B. J.* Poisson structure and symmetry in the Chern-Simons formulation of (2+1)-dimensional gravity // *Class. Quant. Grav.* — 2003. — т. 20. — с. 2193–2234. — DOI: [10.1088/0264-9381/20/11/318](https://doi.org/10.1088/0264-9381/20/11/318). — arXiv: [gr-qc/0301108](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0301108).
46. *Meusburger C., Schroers B. J.* Boundary conditions and symplectic structure in the Chern-Simons formulation of (2+1)-dimensional gravity // *Class. Quant. Grav.* — 2005. — т. 22. — с. 3689–3724. — DOI: [10.1088/0264-9381/22/17/021](https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/17/021). — arXiv: [gr-qc/0505071](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0505071).
47. *Constantinidis C. P., Oporto Z., Piguet O.* Loop quantization of a model for $D=1+2$ (anti)de Sitter gravity coupled to topological matter // *Class. Quant. Grav.* — 2015. — т. 32. — с. 055007. — DOI: [10.1088/0264-9381/32/5/055007](https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/5/055007). — arXiv: [1403.7217](https://arxiv.org/abs/1403.7217) [[gr-qc](#)].

48. *Carlip S.* A phase space path integral for (2+1)-dimensional gravity // *Class. Quant. Grav.* — 1995. — т. 12. — с. 2201–2208. — DOI: [10.1088/0264-9381/12/9/007](https://doi.org/10.1088/0264-9381/12/9/007). — arXiv: [gr-qc/9504033](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9504033).
49. *Carlip S.* Notes on the (2+1)-dimensional Wheeler-DeWitt equation // *Class. Quant. Grav.* — 1994. — т. 11. — с. 31–40. — DOI: [10.1088/0264-9381/11/1/007](https://doi.org/10.1088/0264-9381/11/1/007). — arXiv: [gr-qc/9309002](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9309002).
50. *Regge T.* General relativity without coordinates // *Il Nuovo Cim. (1955-1965)*. — 1961. — т. 19. — с. 558–571. — DOI: [10.1007/BF02733251](https://doi.org/10.1007/BF02733251).
51. *Romano J. D.* Geometrodynamics vs. connection dynamics // *Gen. Rel. Grav.* — 1993. — т. 25. — с. 759–854. — DOI: [10.1007/BF00758384](https://doi.org/10.1007/BF00758384). — arXiv: [gr-qc/9303032](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9303032).
52. *Cianfrani F.* et al. Canonical quantum gravity: Fundamentals and recent developments. — World Scientific, 2014.
53. *Dirac P. A. M.* Fixation of coordinates in the Hamiltonian theory of gravitation // *Phys. Rev.* — 1959. — т. 114. — с. 924. — DOI: [10.1103/PhysRev.114.924](https://doi.org/10.1103/PhysRev.114.924).
54. *Arnowitt R., Deser S., Misner C. W.* Dynamical structure and definition of energy in general relativity // *Phys. Rev.* — 1959. — т. 116. — с. 1322. — DOI: [10.1103/PhysRev.116.1322](https://doi.org/10.1103/PhysRev.116.1322).
55. *Carlip S.* Lectures on (2+1)-dimensional gravity // *J. Korean Phys. Soc.* — 1995. — т. 28. — с. S447–S467. — arXiv: [gr-qc/9503024](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9503024).
56. *Moncrief V.* Reduction of the Einstein equations in 2+1 dimensions to a Hamiltonian system over Teichmüller space // *J. Math. Phys.* — 1989. — т. 30. — с. 2907–2914. — DOI: [10.1063/1.528475](https://doi.org/10.1063/1.528475).
57. *Hosoya A., Nakao K.* (2+1)-dimensional pure gravity for an arbitrary closed initial surface // *Class. Quant. Grav.* — 1990. — т. 7. — с. 163. — DOI: [10.1088/0264-9381/7/2/010](https://doi.org/10.1088/0264-9381/7/2/010).
58. *Mess G.* Lorentz spacetimes of constant curvature // *Geom. Dedicata.* — 2007. — т. 126. — с. 3–45. — DOI: [10.1007/s10711-007-9155-7](https://doi.org/10.1007/s10711-007-9155-7). — arXiv: [0706.1570v1](https://arxiv.org/abs/0706.1570v1).
59. *York Jr. J. W.* Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation // *Phys. Rev. Lett.* — 1972. — т. 28. — с. 1082–1085. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.28.1082](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.1082).
60. *Achúcarro A., Townsend P. K.* A Chern-Simons action for three-dimensional anti-de Sitter supergravity theories // *Phys. Lett. B.* — 1986. — т. 180. — с. 89–92. — DOI: [10.1016/0370-2693\(86\)90140-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(86)90140-1).
61. *Ashtekar A., Romano J. D.* Chern-Simons and palatini actions and (2+1)-gravity // *Phys. Lett. B.* — 1989. — т. 229. — с. 56–60. — DOI: [10.1016/0370-2693\(89\)90155-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(89)90155-X).
62. *Nelson J. E., Regge T.* 2+1 quantum gravity for high genus // *Class. Quant. Grav.* — 1992. — т. 9. — с. S187–S196. — DOI: [10.1088/0264-9381/9/s/012](https://doi.org/10.1088/0264-9381/9/s/012).
63. *Nelson J. E., Regge T.* Homotopy groups and 2+1 dimensional quantum gravity // *Nucl. Phys. B.* — 1989. — т. 328. — с. 190–202. — DOI: [10.1016/0550-3213\(89\)90099-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90099-0).

64. *Nelson J. E., Regge T.* 2+1 quantum gravity // *Phys. Lett. B.* — 1991. — т. 272. — с. 213—216. — DOI: [10.1016/0370-2693\(91\)91822-D](https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)91822-D).
65. *Thurston W. P.* The geometry and topology of three-manifolds. — Princeton university press, 1979.
66. *Sullivan D., Thurston W.* Manifolds with canonical coordinate charts: some examples // *Enseign. Math.* (2). — 1983. — т. 29. — с. 15—25.
67. *Loll R.* Wilson loop coordinates for 2+1 gravity // 7th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity (MG 7). — 1994. — с. 807—810.
68. *Fujiwara Y.* Geometrical construction of holonomy in three-dimensional hyperbolic manifold // *Class. Quant. Grav.* — 1993. — т. 10. — с. 219—232. — DOI: [10.1088/0264-9381/10/2/005](https://doi.org/10.1088/0264-9381/10/2/005).
69. *Ezawa K.* Classical and quantum evolutions of the de Sitter and the anti-de Sitter universes in 2+1 dimensions // *Phys. Rev. D.* — 1994. — т. 49. — с. 5211—5226. — DOI: [10.1103/PhysRevD.49.5211](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.5211). — arXiv: [hep-th/9311103](https://arxiv.org/abs/hep-th/9311103).
70. *Ezawa K.* Addendum to “Classical and quantum evolutions of the de Sitter and the anti-de Sitter universes in 2+1 dimensions” // *Phys. Rev. D.* — 1994. — т. 50. — с. 2935—2938. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.2935](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.2935). — arXiv: [hep-th/9403160](https://arxiv.org/abs/hep-th/9403160).
71. *Witten E.* Quantization of Chern-Simons gauge theory with complex gauge group // *Commun. Math. Phys.* — 1991. — т. 137. — с. 29—66. — DOI: [10.1007/BF02099116](https://doi.org/10.1007/BF02099116).
72. *Nelson J. E., Regge T., Zertuche F.* Homotopy groups and (2+1)-dimensional quantum de Sitter gravity // *Nucl. Phys. B.* — 1990. — т. 339. — с. 516—532. — DOI: [10.1016/0550-3213\(90\)90359-L](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90359-L).
73. *Goldman W. M.* The symplectic nature of fundamental groups of surfaces // *Adv. Math.* — 1984. — т. 54. — с. 200—225. — DOI: [10.1016/0001-8708\(84\)90040-9](https://doi.org/10.1016/0001-8708(84)90040-9).
74. *Martin S. P.* Observables in 2+1 dimensional Gravity // *Nucl. Phys. B.* — 1989. — т. 327. — с. 178—204. — DOI: [10.1016/0550-3213\(89\)90291-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90291-5).
75. *Ashtekar A.* Lectures on non-perturbative canonical gravity. — World scientific, 1991.
76. *Carlip S.* Quantum gravity in 2+1 dimensions. — Cambridge university press, 2003.
77. *Carlip S.* Quantum gravity in 2+1 dimensions: The case of a closed universe // *Living Rev. Rel.* — 2005. — т. 8. — с. 1. — DOI: [10.12942/lrr-2005-1](https://doi.org/10.12942/lrr-2005-1). — arXiv: [gr-qc/0409039](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0409039).
78. *Puzio R.* On the square root of the Laplace–Beltrami operator as a Hamiltonian // *Class. Quant. Grav.* — 1994. — т. 11. — с. 609. — DOI: [10.1088/0264-9381/11/3/013](https://doi.org/10.1088/0264-9381/11/3/013).
79. *Miyake T.* Modular forms. — Springer Science & Business Media, 2006.
80. *Witten E.* Quantum field theory and the Jones polynomial // *Commun. Math. Phys.* — 1989. — т. 121. — с. 351—399. — DOI: [10.1007/BF01217730](https://doi.org/10.1007/BF01217730).

81. *Schwarz A. S.* The partition function of a degenerate functional // Commun. Math. Phys. — 1979. — т. 67. — с. 1–16. — DOI: [10.1007/BF01223197](https://doi.org/10.1007/BF01223197).
82. *Elitzur S.* et al. Remarks on the canonical quantization of the Chern-Simons-Witten theory // Nucl. Phys. B. — 1989. — т. 326. — с. 108–134. — DOI: [10.1016/0550-3213\(89\)90436-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90436-7).
83. *Axelrod S., Della Pietra S., Witten E.* Geometric quantization of Chern-Simons gauge theory // J. Diff. Geom. — 1991. — т. 33. — с. 787–902. — DOI: [10.4310/jdg/1214446565](https://doi.org/10.4310/jdg/1214446565).
84. *Bar-Natan D., Witten E.* Perturbative expansion of Chern-Simons theory with non-compact gauge group // Commun. Math. Phys. — 1991. — т. 141. — с. 423–440. — DOI: [10.1007/BF02101513](https://doi.org/10.1007/BF02101513).
85. *Hayashi N.* Quantum Hilbert space of G_C Chern-Simons-Witten theory and gravity // Prog. Theor. Phys. Suppl. — 1993. — т. 114. — с. 125–147. — DOI: [10.1143/PTPS.114.125](https://doi.org/10.1143/PTPS.114.125).
86. *Gukov S.* Three-dimensional quantum gravity, Chern-Simons theory, and the A-polynomial // Commun. Math. Phys. — 2005. — т. 255. — с. 577–627. — DOI: [10.1007/s00220-005-1312-y](https://doi.org/10.1007/s00220-005-1312-y). — arXiv: [hep-th/0306165](https://arxiv.org/abs/hep-th/0306165).
87. *Nelson J. E., Regge T.* Quantization of 2+1 gravity for genus 2 // Phys. Rev. D. — 1994. — т. 50. — с. 5125–5129. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.5125](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.5125). — arXiv: [gr-qc/9311029](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9311029).
88. *Buffenoir E., Noui K., Roche P.* Hamiltonian quantization of Chern-Simons theory with $SL(2, \mathbb{C})$ group // Class. Quant. Grav. — 2002. — т. 19. — с. 4953. — DOI: [10.1088/0264-9381/19/19/313](https://doi.org/10.1088/0264-9381/19/19/313). — arXiv: [hep-th/0202121](https://arxiv.org/abs/hep-th/0202121).
89. *Nelson J. E., Picken R. F.* Quantum holonomies in (2+1)-dimensional gravity // Phys. Lett. B. — 2000. — т. 471. — с. 367–372. — DOI: [10.1016/S0370-2693\(99\)01407-0](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(99)01407-0). — arXiv: [gr-qc/9911005](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9911005).
90. *Carlip S., Nelson J. E.* Comparative quantizations of (2+1)-dimensional gravity // Phys. Rev. D. — 1995. — т. 51. — с. 5643–5653. — DOI: [10.1103/PhysRevD.51.5643](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.5643). — arXiv: [gr-qc/9411031](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9411031).
91. *Carlip S., Nelson J. E.* Equivalent quantisations of (2+1)-dimensional gravity // Phys. Lett. B. — 1994. — т. 324. — с. 299–302. — DOI: [10.1016/0370-2693\(94\)90197-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)90197-X). — arXiv: [gr-qc/9311007](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9311007).
92. *Kuchař K. V.* Time and interpretations of quantum gravity // Int. J. Mod. Phys. D. — 2011. — т. 20. — с. 3–86. — DOI: [10.1142/S0218271811019347](https://doi.org/10.1142/S0218271811019347).
93. *Ashtekar A., Magnon A.* Quantum fields in curved space-times // Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1975. — т. 346. — с. 375–394. — DOI: [10.1098/rspa.1975.0181](https://doi.org/10.1098/rspa.1975.0181).
94. *Crnković C., Witten E.* Covariant description of canonical formalism in geometrical theories. // Three hundred years of gravitation. — 1987. — с. 676–684.
95. *Wald R. M.* Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics. — University of Chicago press, 1994.

96. *Rovelli C.* Quantum mechanics without time: A model // *Phys. Rev. D.* — 1990. — т. 42. — с. 2638–2646. — DOI: [10.1103/PhysRevD.42.2638](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.42.2638).
97. *Rovelli C.* Time in quantum gravity: An hypothesis // *Phys. Rev. D.* — 1991. — т. 43. — с. 442–456. — DOI: [10.1103/PhysRevD.43.442](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.43.442).
98. *Dirac P. A. M.* Generalized Hamiltonian dynamics // *Can. J. Math.* — 1950. — т. 2. — с. 129–148. — DOI: [10.4153/CJM-1950-012-1](https://doi.org/10.4153/CJM-1950-012-1).
99. *Dirac P. A. M.* The Hamiltonian form of field dynamics // *Can. J. Math.* — 1951. — т. 3. — с. 1–23. — DOI: [10.4153/CJM-1951-001-2](https://doi.org/10.4153/CJM-1951-001-2).
100. *Dirac P. A. M.* Generalized Hamiltonian dynamics // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* — 1958. — т. 246. — с. 326–332. — DOI: [10.1098/rspa.1958.0141](https://doi.org/10.1098/rspa.1958.0141).
101. *Henneaux M.* Coordinate invariant states for quantum gravity in 2+1 dimensions // *Phys. Lett. B.* — 1984. — т. 134. — с. 184–186. — DOI: [10.1016/0370-2693\(84\)90667-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(84)90667-1).
102. *Henneaux M., Teitelboim C.* Quantization of gauge systems. — Princeton university press, 1992.
103. *Carlip S., Cosgrove R.* Topology change in (2+1)-dimensional gravity // *J. Math. Phys.* — 1994. — т. 35. — с. 5477–5493. — DOI: [10.1063/1.530760](https://doi.org/10.1063/1.530760). — arXiv: [gr-qc/9406006](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9406006).
104. *Waelbroeck H.* 2+1 lattice gravity // *Class. Quant. Grav.* — 1990. — т. 7. — с. 751–769. — DOI: [10.1088/0264-9381/7/5/006](https://doi.org/10.1088/0264-9381/7/5/006).
105. *Waelbroeck H.* Time-dependent solutions of 2+1 gravity // *Phys. Rev. Lett.* — 1990. — т. 64. — с. 2222–2225. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.64.2222](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.2222).
106. *Waelbroeck H.* Solving the time-evolution problem in 2+1 gravity // *Nucl. Phys. B.* — 1991. — т. 364. — с. 475–494. — DOI: [10.1016/0550-3213\(91\)90594-N](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90594-N).
107. *Waelbroeck H.* Canonical quantization of (2+1)-dimensional gravity // *Phys. Rev. D.* — 1994. — т. 50. — с. 4982–4992. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.4982](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.4982). — arXiv: [gr-qc/9401022](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9401022).
108. *'t Hooft G.* Classical N-particle cosmology in 2+1 dimensions // *Class. Quant. Grav.* — 1993. — т. 10. — с. S79. — DOI: [10.1088/0264-9381/10/S/008](https://doi.org/10.1088/0264-9381/10/S/008).
109. *'t Hooft G.* Causality in (2+1)-dimensional gravity // *Class. Quant. Grav.* — 1992. — т. 9. — с. 1335. — DOI: [10.1088/0264-9381/9/5/015](https://doi.org/10.1088/0264-9381/9/5/015).
110. *'t Hooft G.* Quantization of point particles in (2+1)-dimensional gravity and spacetime discreteness // *Class. Quant. Grav.* — 1996. — т. 13. — с. 1023. — DOI: [10.1088/0264-9381/13/5/018](https://doi.org/10.1088/0264-9381/13/5/018). — arXiv: [gr-qc/9601014](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9601014).
111. *'t Hooft G.* The evolution of gravitating point particles in 2+1 dimensions // *Class. Quant. Grav.* — 1993. — т. 10. — с. 1023. — DOI: [10.1088/0264-9381/10/5/019](https://doi.org/10.1088/0264-9381/10/5/019).
112. *'t Hooft G.* Canonical quantization of gravitating point particles in 2+1 dimensions // *Class. Quant. Grav.* — 1993. — т. 10. — с. 1653. — DOI: [10.1088/0264-9381/10/8/022](https://doi.org/10.1088/0264-9381/10/8/022). — arXiv: [gr-qc/9305008](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9305008).

113. *Bañados M.* et al. Geometry of the 2+1 black hole // Phys. Rev. D. — 1993. — т. 48. — с. 1506—1525. — DOI: [10.1103/PhysRevD.48.1506](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.48.1506). — arXiv: [gr-qc/9302012](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9302012). — [Erratum: Phys.Rev.D 88, 069902 (2013)].
114. *Carlip S.* The (2+1)-dimensional black hole // Class. Quant. Grav. — 1995. — т. 12. — с. 2853—2880. — DOI: [10.1088/0264-9381/12/12/005](https://doi.org/10.1088/0264-9381/12/12/005). — arXiv: [gr-qc/9506079](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9506079).
115. *Brotz T.* Quantization of black holes in the Wheeler-DeWitt approach // Phys. Rev. D. — 1998. — т. 57. — с. 2349—2362. — DOI: [10.1103/PhysRevD.57.2349](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.57.2349). — arXiv: [gr-qc/9708066](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9708066).
116. *Brill D.* Black holes and wormholes in 2+1 dimensions // Mathematical and Quantum Aspects of Relativity and Cosmology. Lecture Notes in Physics. т. 537. — 2000. — с. 143—179. — DOI: [10.1007/3-540-46671-1_6](https://doi.org/10.1007/3-540-46671-1_6). — arXiv: [gr-qc/9904083](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9904083).
117. *Keski-Vakkuri E.* Bulk and boundary dynamics in BTZ black holes // Phys. Rev. D. — 1999. — т. 59. — с. 104001. — DOI: [10.1103/PhysRevD.59.104001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.59.104001). — arXiv: [hep-th/9808037](https://arxiv.org/abs/hep-th/9808037).
118. *Cruz N., Martínez C., Peña L.* Geodesic structure of the (2+1)-dimensional BTZ black hole // Class. Quant. Grav. — 1994. — т. 11. — с. 2731—2740. — DOI: [10.1088/0264-9381/11/11/014](https://doi.org/10.1088/0264-9381/11/11/014). — arXiv: [gr-qc/9401025](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9401025).
119. *Farina C., Gamboa J., Segui-Santonja A. J.* Motion and trajectories of particles around three-dimensional black holes // Class. Quant. Grav. — 1993. — т. 10. — с. L193—L200. — DOI: [10.1088/0264-9381/10/11/001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/10/11/001). — arXiv: [gr-qc/9303005](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9303005).
120. *Larsen A. L., Sánchez N. G.* Strings propagating in the (2+1)-dimensional black hole anti-de Sitter spacetime // Phys. Rev. D. — 1994. — т. 50. — с. 7493—7518. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.7493](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.7493). — arXiv: [hep-th/9405026](https://arxiv.org/abs/hep-th/9405026).
121. *Clément G.* Spinning charged BTZ black holes and self-dual particle-like solutions // Phys. Lett. B. — 1996. — т. 367. — с. 70—74. — DOI: [10.1016/0370-2693\(95\)01464-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(95)01464-0). — arXiv: [gr-qc/9510025](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9510025).
122. *Kamata M., Koikawa T.* The electrically charged BTZ black hole with self (anti-self) dual Maxwell field // Phys. Lett. B. — 1995. — т. 353. — с. 196—200. — DOI: [10.1016/0370-2693\(95\)00583-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(95)00583-7). — arXiv: [hep-th/9505037](https://arxiv.org/abs/hep-th/9505037).
123. *Kim H.* Spinning BTZ black hole versus Kerr black hole: A closer look // Phys. Rev. D. — 1999. — т. 59. — с. 064002. — DOI: [10.1103/PhysRevD.59.064002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.59.064002). — arXiv: [gr-qc/9809047](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9809047).
124. *Brill D. R.* Multi-black-hole geometries in (2+1)-dimensional gravity // Phys. Rev. D. — 1996. — т. 53. — с. R4133(R). — DOI: [10.1103/PhysRevD.53.R4133](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.R4133). — arXiv: [gr-qc/9511022](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9511022).
125. *Clément G.* Multiwormholes and multi-black-holes in three dimensions // Phys. Rev. D. — 1994. — т. 50. — с. R7119(R). — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.R7119](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.R7119). — arXiv: [gr-qc/9402013](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9402013).

126. *Coussaert O., Henneaux M.* Supersymmetry of the (2+1)-dimensional black holes // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — т. 72. — с. 183–186. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.72.183](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.183). — arXiv: [hep-th/9310194](https://arxiv.org/abs/hep-th/9310194).
127. *Chan J. S. F., Chan K. C. K., Mann R. B.* Interior structure of a spinning black hole in 2+1 dimensions // *Phys. Rev. D.* — 1996. — т. 54. — с. 1535–1539. — DOI: [10.1103/PhysRevD.54.1535](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.54.1535). — arXiv: [gr-qc/9406049](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9406049).
128. *Avis S. J., Isham C. J., Storey D.* Quantum field theory in anti-de Sitter space-time // *Phys. Rev. D.* — 1978. — т. 18. — с. 3565. — DOI: [10.1103/PhysRevD.18.3565](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.18.3565).
129. *Lifschytz G., Ortiz M.* Scalar field quantization on the (2+1)-dimensional black hole background // *Phys. Rev. D.* — 1994. — т. 49. — с. 1929–1943. — DOI: [10.1103/PhysRevD.49.1929](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.1929). — arXiv: [gr-qc/9310008](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9310008).
130. *Shiraishi K., Maki T.* Quantum fluctuation of stress tensor and black holes in three dimensions // *Phys. Rev. D.* — 1994. — т. 49. — с. 5286–5294. — DOI: [10.1103/PhysRevD.49.5286](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.5286). — arXiv: [1804.07872 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1804.07872).
131. *Steif A. R.* The Quantum stress tensor in the three-dimensional black hole // *Phys. Rev. D.* — 1994. — т. 49. — с. R585(R). — DOI: [10.1103/PhysRevD.49.R585](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.R585). — arXiv: [gr-qc/9308032](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9308032).
132. *Ichinose I., Satoh Y.* Entropies of scalar fields on three dimensional black holes // *Nucl. Phys. B.* — 1995. — т. 447. — с. 340–372. — DOI: [10.1016/0550-3213\(95\)00197-Z](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00197-Z). — arXiv: [hep-th/9412144](https://arxiv.org/abs/hep-th/9412144).
133. *Gibbons G. W., Hawking S. W.* Action integrals and partition functions in quantum gravity // *Phys. Rev. D.* — 1977. — т. 15. — с. 2752. — DOI: [10.1103/PhysRevD.15.2752](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.15.2752).
134. *Brown J. D., York Jr. J. W.* Microcanonical functional integral for the gravitational field // *Phys. Rev. D.* — 1993. — т. 47. — с. 1420–1431. — DOI: [10.1103/PhysRevD.47.1420](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.47.1420). — arXiv: [gr-qc/9209014](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9209014).
135. *Englert F., Reznik B.* Entropy generation by tunneling in 2+1 gravity // *Phys. Rev. D.* — 1994. — т. 50. — с. 2692–2699. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.2692](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.2692). — arXiv: [gr-qc/9401010](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9401010).
136. *Wald R. M.* Black hole entropy is the Noether charge // *Phys. Rev. D.* — 1993. — т. 48. — с. R3427(R). — DOI: [10.1103/PhysRevD.48.R3427](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.48.R3427). — arXiv: [gr-qc/9307038](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9307038).
137. *Carlip S., Teitelboim C.* Aspects of black hole quantum mechanics and thermodynamics in 2+1 dimensions // *Phys. Rev. D.* — 1995. — т. 51. — с. 622–631. — DOI: [10.1103/PhysRevD.51.622](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.622). — arXiv: [gr-qc/9405070](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9405070).
138. *Brown J. D., Creighton J., Mann R. B.* Temperature, energy, and heat capacity of asymptotically anti-de Sitter black holes // *Phys. Rev. D.* — 1994. — т. 50. — с. 6394–6403. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.6394](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.6394). — arXiv: [gr-qc/9405007](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9405007).

139. *Carlip S., Gegenberg J., Mann R. B.* Black holes in three-dimensional topological gravity // Phys. Rev. D. — 1995. — т. 51. — с. 6854–6859. — DOI: [10.1103/PhysRevD.51.6854](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.6854). — arXiv: [gr-qc/9410021](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9410021).
140. *Deser S., Mazur P. O.* Static solutions in D=3 Einstein-Maxwell theory // Class. Quant. Grav. — 1985. — т. 2. — с. L51. — DOI: [10.1088/0264-9381/2/3/003](https://doi.org/10.1088/0264-9381/2/3/003).
141. *Gott J. R., Simon J. Z., Alpert M.* General relativity in a (2+1)-dimensional space-time: An electrically charged solution // Gen. Relat. Gravit. — 1986. — т. 18. — с. 1019–1035. — DOI: [10.1007/BF01090483](https://doi.org/10.1007/BF01090483).
142. *Melvin M. A.* Exterior solutions for electric and magnetic stars in 2+1 dimensions // Class. Quant. Grav. — 1986. — т. 3. — с. 117. — DOI: [10.1088/0264-9381/3/1/014](https://doi.org/10.1088/0264-9381/3/1/014).
143. *Chan K. C. K., Mann R. B.* Static charged black holes in (2+1)-dimensional dilaton gravity // Phys. Rev. D. — 1994. — т. 50. — с. 6385. — DOI: [10.1103/PhysRevD.50.6385](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.6385). — arXiv: [gr-qc/9404040](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9404040). — [Erratum: Phys.Rev.D 52, 2600 (1995)].
144. *Sá P. M., Kleber A., Lemos J. P. S.* Black holes in three-dimensional dilaton gravity theories // Class. Quant. Grav. — 1996. — т. 13. — с. 125–138. — DOI: [10.1088/0264-9381/13/1/011](https://doi.org/10.1088/0264-9381/13/1/011). — arXiv: [hep-th/9503089](https://arxiv.org/abs/hep-th/9503089).
145. *Kaloper N.* Miens of the three-dimensional black hole // Phys. Rev. D. — 1993. — т. 48. — с. 2598–2605. — DOI: [10.1103/PhysRevD.48.2598](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.48.2598). — arXiv: [hep-th/9303007](https://arxiv.org/abs/hep-th/9303007).
146. *Horowitz G. T., Welch D. L.* String theory formulation of the three-dimensional black hole // Phys. Rev. Lett. — 1993. — т. 71. — с. 328–331. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.71.328](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.328). — arXiv: [hep-th/9302126](https://arxiv.org/abs/hep-th/9302126).
147. *Birmingham D., Sachs I., Sen S.* Three-dimensional black holes and string theory // Phys. Lett. B. — 1997. — т. 413. — с. 281–286. — DOI: [10.1016/S0370-2693\(97\)01125-8](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(97)01125-8). — arXiv: [hep-th/9707188](https://arxiv.org/abs/hep-th/9707188).
148. *Horowitz G. T., Welch D. L.* Duality invariance of the Hawking temperature and entropy // Phys. Rev. D. — 1994. — т. 49. — с. R590(R). — DOI: [10.1103/PhysRevD.49.R590](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.R590). — arXiv: [hep-th/9308077](https://arxiv.org/abs/hep-th/9308077).
149. *Ghoroku K., Larsen A. L.* Hawking temperature and string scattering off the 2+1 black hole // Phys. Lett. B. — 1994. — т. 328. — с. 28–35. — DOI: [10.1016/0370-2693\(94\)90423-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)90423-5). — arXiv: [hep-th/9403008](https://arxiv.org/abs/hep-th/9403008).
150. *Deser S., Jackiw R., Templeton S.* Three-dimensional massive gauge theories // Phys. Rev. Lett. — 1982. — т. 48. — с. 975. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.48.975](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.975).
151. *Deser S., Jackiw R., Templeton S.* Topologically massive gauge theories // Annals Phys. — 1982. — т. 140. — с. 372–411. — DOI: [10.1016/0003-4916\(82\)90164-6](https://doi.org/10.1016/0003-4916(82)90164-6).
152. *Hájíček P., Kiefer C.* Embedding variables in the canonical theory of gravitating shells // Nucl. Phys. B. — 2001. — т. 603. — с. 531–554. — DOI: [10.1016/S0550-3213\(01\)00141-9](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(01)00141-9). — arXiv: [hep-th/0007004](https://arxiv.org/abs/hep-th/0007004).

153. *Jeziński J., Kijowski J., Czuchry E.* Dynamics of a self-gravitating light like matter shell: A gauge-invariant Lagrangian and Hamiltonian description // *Phys. Rev. D.* — 2002. — т. 65. — с. 064036. — DOI: [10.1103/PhysRevD.65.064036](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.064036). — arXiv: [gr-qc/0110018](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0110018).
154. *Kijowski J., Czuchry E.* Dynamics of a self-gravitating shell of matter // *Phys. Rev. D.* — 2005. — т. 72. — с. 084015. — DOI: [10.1103/PhysRevD.72.084015](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.72.084015). — arXiv: [gr-qc/0507074](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0507074).
155. *Vogt D., Letelier P. S.* Newtonian and general relativistic models of spherical shells // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2010. — т. 402. — с. 1313–1316. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2009.15967.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15967.x). — arXiv: [0911.4822](https://arxiv.org/abs/0911.4822) [[gr-qc](#)].
156. *Hájíček P.* Quantum mechanics of gravitational collapse // *Commun. Math. Phys.* — 1992. — т. 150. — с. 545–559. — DOI: [10.1007/BF02096961](https://doi.org/10.1007/BF02096961).
157. *Hájíček P., Kay B. S., Kuchař K. V.* Quantum collapse of a self-gravitating shell: Equivalence to Coulomb scattering // *Phys. Rev. D.* — 1992. — т. 46. — с. 5439. — DOI: [10.1103/PhysRevD.46.5439](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.46.5439).
158. *Casadio R.* Quantized shells as a tool for studying semiclassical effects in general relativity // *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* — 2000. — т. 88. — с. 273–276. — DOI: [10.1016/S0920-5632\(00\)00783-0](https://doi.org/10.1016/S0920-5632(00)00783-0). — arXiv: [gr-qc/9911088](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9911088).
159. *Vaz C., Witten L., Singh T. P.* Toward a quantization of null dust collapse // *Phys. Rev. D.* — 2002. — т. 65. — с. 104016. — DOI: [10.1103/PhysRevD.65.104016](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.104016). — arXiv: [gr-qc/0112024](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0112024).
160. *'t Hooft G.* Non-perturbative 2 particle scattering amplitudes in 2+1 dimensional quantum gravity // *Commun. Math. Phys.* — 1988. — т. 117. — с. 685–700. — DOI: [10.1007/BF01218392](https://doi.org/10.1007/BF01218392).
161. *Koehler K. et al.* Two-particle scattering in the Chern Simons Witten theory of gravity in 2+1 dimensions // *Nucl. Phys. B.* — 1991. — т. 348. — с. 373–389. — DOI: [10.1016/0550-3213\(91\)90524-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(91)90524-2).
162. *Hawking S. W.* Particle creation by black holes // *Commun. Math. Phys.* — 1975. — т. 43. — с. 199–220. — DOI: [10.1007/BF02345020](https://doi.org/10.1007/BF02345020).
163. *Penrose R.* Gravitational collapse: The role of general relativity // *NCimR.* — 1969. — т. 1. — с. 252.
164. *Alberghi G. L., Casadio R.* Gravitational collapse in anti-de Sitter space-time // *Phys. Lett. B.* — 2003. — т. 571. — с. 245–249. — DOI: [10.1016/j.physletb.2003.06.015](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2003.06.015). — arXiv: [gr-qc/0306002](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0306002).
165. *Alberghi G. L. et al.* Gravitational collapse of a radiating shell // *Phys. Rev. D.* — 2001. — т. 64. — с. 104012. — DOI: [10.1103/PhysRevD.64.104012](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.104012). — arXiv: [gr-qc/0102014](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0102014).
166. *Alberghi G. L. et al.* Gravitational collapse of a shell of quantized matter // *Class. Quant. Grav.* — 1999. — т. 16. — с. 131–147. — DOI: [10.1088/0264-9381/16/1/010](https://doi.org/10.1088/0264-9381/16/1/010). — arXiv: [gr-qc/9808026](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9808026).

167. *Kijowski J., Magli G., Malafarina D.* The Hamiltonian formulation for the dynamics of a multishell self-gravitating system // *J. Math. Phys.* — 2010. — т. 51. — с. 072504. — DOI: [10.1063/1.3431030](https://doi.org/10.1063/1.3431030).
168. *Berezin V., Smirnov A.* Towards a theory of thin selfgravitating crossing shells. — 2002. — arXiv: [gr-qc/0210084](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0210084).
169. *Jeziński J.* Geometry of crossing null shells // *J. Math. Phys.* — 2003. — т. 44. — с. 641–661. — DOI: [10.1063/1.1512973](https://doi.org/10.1063/1.1512973). — arXiv: [gr-qc/0406084](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0406084).
170. *Bronstein M. P.* Quantentheorie schwacher gravitationsfelder // *Phys. Z. Sowjetunion.* — 1936. — т. 9. — с. 140–157.
171. *Schmidt H.-J., Singleton D.* Exact radial solution in 2+1 gravity with a real scalar field // *Phys. Lett. B.* — 2013. — т. 721. — с. 294–298. — DOI: [10.1016/j.physletb.2013.03.007](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2013.03.007). — arXiv: [1212.1285 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1212.1285).
172. *Gurtug O., Mazharimousavi S. H., Halilsoy M.* Classical and quantum analysis of an Einstein-Scalar solution in 2+1 dimensions // *Eur. Phys. J. Plus.* — 2017. — т. 132. — с. 161. — DOI: [10.1140/epjp/i2017-11446-4](https://doi.org/10.1140/epjp/i2017-11446-4). — arXiv: [1703.05315 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1703.05315).
173. *Kamenshchik A. Y., Tronconi A., Venturi G.* The Born–Oppenheimer method, quantum gravity and matter // *Class. Quant. Grav.* — 2018. — т. 35. — с. 015012. — DOI: [10.1088/1361-6382/aa8fb3](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa8fb3). — arXiv: [1709.10361 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1709.10361).
174. *Struyve W.* Loop quantum cosmology and singularities // *Sci. Rep.* — 2017. — т. 7. — с. 8161. — DOI: [10.1038/s41598-017-06616-y](https://doi.org/10.1038/s41598-017-06616-y). — arXiv: [1703.10274 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1703.10274).
175. *Kuntz I., Casadio R.* Singularity avoidance in quantum gravity // *Phys. Lett. B.* — 2020. — т. 802. — с. 135219. — DOI: [10.1016/j.physletb.2020.135219](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135219). — arXiv: [1911.05037 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1911.05037).
176. *Andrianov A. A., Novikov O. O., Lan C.* Quantum cosmology of multifield scalar matter: Some exact solutions // *Theor. Math. Phys.* — 2015. — т. 184. — с. 1224–1233. — DOI: [10.1007/s11232-015-0328-5](https://doi.org/10.1007/s11232-015-0328-5). — arXiv: [1503.05527 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1503.05527).
177. *Hansen D., Hartong J., Obers N. A.* Non-relativistic gravity and its coupling to matter // *J. High Energ. Phys.* — 2020. — т. 06. — с. 145. — DOI: [10.1007/JHEP06\(2020\)145](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2020)145). — arXiv: [2001.10277 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/2001.10277).
178. *Kamenshchik A., Kiefer C., Kwidzinski N.* Classical and quantum cosmology of Born-Infeld type models // *Phys. Rev. D.* — 2016. — т. 93. — с. 083519. — DOI: [10.1103/PhysRevD.93.083519](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.083519). — arXiv: [1602.01319 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1602.01319).
179. *Louko J., Whiting B. F., Friedman J. L.* Hamiltonian spacetime dynamics with a spherical null-dust shell // *Phys. Rev. D.* — 1998. — т. 57. — с. 2279. — DOI: [10.1103/PhysRevD.57.2279](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.57.2279). — arXiv: [gr-qc/9708012](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9708012).
180. *Hájíček P.* Spherically symmetric gravitating shell as a reparametrization-invariant system // *Phys. Rev. D.* — 1998. — т. 57. — с. 936. — DOI: [10.1103/PhysRevD.57.936](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.57.936). — arXiv: [gr-qc/9708008](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9708008).

181. *Kijowski J., Magli G., Malafarina D.* New derivation of the variational principle for the dynamics of a gravitating spherical shell // *Physical Review D*. — 2006. — т. 74. — с. 084017. — DOI: [10.1103/PhysRevD.74.084017](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.74.084017).
182. *Hawkins E.* Quantum gravitational collapse of a charged dust shell // *Phys. Rev. D*. — 1994. — т. 49. — с. 6556. — DOI: [10.1103/PhysRevD.49.6556](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.6556). — arXiv: [gr-qc/9312033](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9312033). — [Erratum: *Phys.Rev.D* 50, 7744 (1994)].
183. *Campiglia M.* et al. Quantum self-gravitating collapsing matter in a quantum geometry // *Class. Quant. Grav.* — 2016. — т. 33. — с. 18LT01. — DOI: [10.1088/0264-9381/33/18/18LT01](https://doi.org/10.1088/0264-9381/33/18/18LT01). — arXiv: [1601.05688](https://arxiv.org/abs/1601.05688) [[gr-qc](#)].
184. *Berezin V., Dokuchaev V., Eroshenko Y.* The theory of spherically symmetric thin shells in conformal gravity // *Int. J. Mod. Phys. D*. — 2018. — т. 27. — с. 1841012. — DOI: [10.1142/S0218271818410122](https://doi.org/10.1142/S0218271818410122). — arXiv: [1710.10438](https://arxiv.org/abs/1710.10438) [[gr-qc](#)].
185. *Berezin V. A., Boyarsky A. M., Neronov A. Y.* Quantum geometrodynamics for black holes and wormholes // *Phys. Rev. D*. — 1998. — т. 57. — с. 1118—1128. — DOI: [10.1103/PhysRevD.57.1118](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.57.1118). — arXiv: [gr-qc/9708060](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9708060).
186. *Berezin V.* Towards a theory of quantum black holes // *Int. J. Mod. Phys. A*. — 2002. — т. 17. — с. 979—988. — DOI: [10.1142/S0217751X0201039X](https://doi.org/10.1142/S0217751X0201039X). — arXiv: [gr-qc/0112022](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0112022).
187. *Matschull H.-J., Welling M.* Quantum mechanics of a point particle in (2+1)-dimensional gravity // *Class. Quant. Grav.* — 1998. — т. 15. — с. 2981—3030. — DOI: [10.1088/0264-9381/15/10/008](https://doi.org/10.1088/0264-9381/15/10/008). — arXiv: [gr-qc/9708054](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9708054).
188. *Lindgren J.* Collisions of massive particles, timelike thin shells and formation of black holes in three dimensions // *J. High Energ. Phys.* — 2016. — т. 12. — с. 48. — DOI: [10.1007/JHEP12\(2016\)048](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2016)048). — arXiv: [1611.02973](https://arxiv.org/abs/1611.02973) [[hep-th](#)].
189. *Lindgren E. J.* Black hole formation from pointlike particles in three-dimensional anti-de Sitter space // *Class. Quant. Grav.* — 2016. — т. 33. — с. 145009. — DOI: [10.1088/0264-9381/33/14/145009](https://doi.org/10.1088/0264-9381/33/14/145009). — arXiv: [1512.05696](https://arxiv.org/abs/1512.05696) [[gr-qc](#)].
190. *Alekseev A. Y., Malkin A. Z.* Symplectic structure of the moduli space of flat connection on a Riemann surface // *Commun. Math. Phys.* — 1995. — т. 169. — с. 99—119. — DOI: [10.1007/BF02101598](https://doi.org/10.1007/BF02101598). — arXiv: [hep-th/9312004](https://arxiv.org/abs/hep-th/9312004).
191. *Meusburger C., Schroers B. J.* Phase space structure of Chern-Simons theory with a non-standard puncture // *Nucl. Phys. B*. — 2006. — т. 738. — с. 425—456. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2006.01.014](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2006.01.014). — arXiv: [hep-th/0505143](https://arxiv.org/abs/hep-th/0505143).
192. *Starodubtsev A. N.* New approach to calculating the spectrum of a quantum space-time // *Theor. Math. Phys.* — 2017. — т. 190. — с. 439—445. — DOI: [10.1134/S0040577917030138](https://doi.org/10.1134/S0040577917030138).
193. *Starodubtsev A. N.* Phase space of a gravitating particle and dimensional reduction at the Planck scale // *Theor. Math. Phys.* — 2015. — т. 185. — с. 1527—1532. — DOI: [10.1007/s11232-015-0362-3](https://doi.org/10.1007/s11232-015-0362-3).

194. *Ashtekar A., Singh P.* Loop quantum cosmology: a status report // *Class. Quant. Grav.* — 2011. — т. 28. — с. 213001. — DOI: [10.1088/0264-9381/28/21/213001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/21/213001). — arXiv: [1108.0893 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1108.0893).
195. *Casals M.* et al. Quantum backreaction on three-dimensional black holes and naked singularities // *Phys. Rev. Lett.* — 2017. — т. 118. — с. 131102. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.131102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.131102). — arXiv: [1608.05366 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1608.05366).
196. *Casals M.* et al. Quantum-corrected rotating black holes and naked singularities in (2+1) dimensions // *Phys. Rev. D.* — 2019. — т. 99. — с. 104023. — DOI: [10.1103/PhysRevD.99.104023](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.104023). — arXiv: [1902.01583 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1902.01583).
197. *Carlip S.* Conformal field theory, (2+1)-dimensional gravity and the BTZ black hole // *Class. Quant. Grav.* — 2005. — т. 22. — с. R85. — DOI: [10.1088/0264-9381/22/12/R01](https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/12/R01). — arXiv: [gr-qc/0503022](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0503022).
198. *Emparan R., Frassino A. M., Way B.* Quantum BTZ black hole // *J. High Energ. Phys.* — 2020. — т. 11. — с. 137. — DOI: [10.1007/JHEP11\(2020\)137](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2020)137). — arXiv: [2007.15999 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2007.15999).
199. *Alekseev A. Y., Malkin A. Z.* Symplectic structures associated to Lie-Poisson groups // *Commun. Math. Phys.* — 1994. — т. 162. — с. 147–174. — DOI: [10.1007/BF02105190](https://doi.org/10.1007/BF02105190). — arXiv: [hep-th/9303038](https://arxiv.org/abs/hep-th/9303038).
200. *Chaichian M., Demichev A.* Introduction to quantum groups. — World Scientific, 1996.
201. *Gasper G., Rahman M., George G.* Basic hypergeometric series. — Cambridge university press, 2004.
202. *Buffenoir E., Roche P.* Harmonic analysis on the quantum Lorentz group // *Commun. Math. Phys.* — 1999. — т. 207. — с. 499–555. — DOI: [10.1007/s002200050736](https://doi.org/10.1007/s002200050736). — arXiv: [q-alg/9710022](https://arxiv.org/abs/q-alg/9710022).

Список рисунков

1.1	Разложение пространства-времени в направлении времени.	131
1.2	Два пути γ_1 и γ_2 пересекаются в точке p	137
2.1	Решения для черных дыр БТЗ на диаграмме Пенроуза.	157
3.1	Деление пространства на диски и многоугольник.	172
3.2	Различные области, характеризующие реальную глобальную параметризацию импульсного пространства.	177
3.3	Абсолютное значение матричного элемента $\langle 1,0 \hat{U} 0,R^2\rangle$, описывающего скорость гравитационного коллапса.	183
4.1	$II \rightarrow I$ (кривая В) против $I \rightarrow II$ (кривая А) вероятность перехода.	201