Институт проблем машиноведения Российской академии наук

На правах рукописи

Долгополик Максим Владимирович

Конструктивный негладкий анализ и его приложения к задачам оптимизации, вариационного исчисления и теории управления

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико–математических наук
по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и
функциональный анализ

Научный консультант:
доктор технических наук, профессор
Фрадков Александр Львович

Санкт–Петербург — 2021

Оглавление

Введение **4**

Глава 1 Конструктивный негладкий анализ **19**

1.1 Глобальные кодифференциалы разности выпуклых функций 19

1.1.1 Аффинные опорные множества выпуклых функций 20

1.1.2 Глобальные кодифференциалы и условия глобальной оптимальности . 28

1.2 Кодифференциальное исчисление в банаховых пространствах 41

1.2.1 Непрерывность многозначных отображений по Хаусдорфу 42

1.2.2 Кодифференцируемые и квазидифференцируемые функции 46

1.2.3 Кодифференциальное исчисление 64

1.2.4 Метрическая регулярность квазидифференцируемых отображений . . . 74

1.2.5 Описание касательных конусов к квазидифференцируемым множествам 86

1.2.6 Необходимые условия экстремума для негладких задач нелинейного программирования 94

1.3 Абстрактное кодифференциальное исчисление 106

Глава 2 Негладкие задачи вариационного исчисления **116**

2.1 Кодифференцируемость интегрального функционала 116

2.2 Условия экстремума для негладких задач вариационного исчисления 134

2.2.1 Негладкая классическая задача вариационного исчисления 134

2.2.2 Негладкая задача Больцы с ограничениями 137

2.2.3 Негладкая задача с изопериметрическими ограничениями 144

Глава 3 Метод кодифференциального спуска и его модификации **150**

3.1 Метод кодифференциального спуска 150

3.1.1 Описание метода 151

3.1.2 Вспомогательные результаты 154

3.1.3 Исследование сходимости 158

3.2 Квадратичная регуляризация метода кодифференциального спуска 161
3.3 Метод гиподифференциального спуска для выпуклых функций 164
3.4 Метод глобального кодифференциального спуска для кусочно-аффинных функций 170

Глава 4 Точные штрафные функции и модифицированные функции Лагранжа 180

4.1 Параметрическая точность отделяющих функций 180
4.1.1 Принцип локализации в параметрической форме 182
4.1.2 Линейные точные штрафные функции 187
4.1.3 Модифицированные функции Лагранжа-Рокафеллара-Ветса 189
4.2 Расширенная точность отделяющих функций 193
4.2.1 Принцип локализации в расширенной форме 194
4.2.2 Сингулярные точные штрафные функции 197
4.2.3 Точные модифицированные функции Лагранжа 198
4.3 Точные штрафные функции в бесконечномерных пространствах 201
4.3.1 Вполне точные штрафные функции 201
4.3.2 Точные штрафные функции для задач управления линейными эволюционными уравнениями 207

Глава 5 Приложения к задачам управления 213

5.1 Негладкие алгоритмы скоростного градиента 213
5.1.1 Конечный и дифференциальный алгоритмы скоростного градиента . . 213
5.1.2 Стабилизация интегратора Брокетта 225
5.1.3 Конечно-дифференциальные алгоритмы скоростного градиента 231
5.1.4 Задача синхронизации двух осцилляторов Дуффинга 236
5.2 Задачи управления гиперболическими уравнениями 241
5.2.1 Управление энергией в нелинейной модели Клейна-Гордона 242
5.2.2 Управление энергией в модели синус-Гордона при наличии только граничных измерений 249

Заключение 258

Список обозначений 261

Список литературы 265

Введение

Современная теория негладкого анализа [48, 94, 126, 259, 323, 366] и тесно примыкающего к нему вариационного анализа [266, 332, 333, 358] основана на использовании различных субдифференциалов невыпуклых функций и связанных с ними понятий обобщённых производных и нормальных конусов. К настоящему моменту было предложено более десятка неэквивалентных подходов к определению выпуклых и невыпуклых субдифференциалов негладких функций. К ним относятся субдифференциал Кларка [48], субдифференциал Мишеля-Пено [110, 264, 329, 330], субдифференциал Мордуховича и субдифференциал Фреше [52, 291, 332, 333], аппроксимативный субдифференциал (субдифференциал Иоффе) [260, 262, 263], линейный субдифференциал Трэймана [384, 385], субдифференциал Джеякумара-Люка [272, 407], субдифференциал Дини [261], проксимальный субдифференциал [126, 400], направленный субдифференциал [98, 99, 233] и т.д. Попытки объединения разрозненных результатов по различным типам субдифференциалов в единую теорию были предприняты в монографии Пено [343] и статье Иоффе [265].

Альтернативным подходом к исследованию негладких функций, не основанным на использовании субдифференциалов, является *конструктивный негладкий анализ* проф. В.Ф. Демьянова. Главным отличием конструктивного негладкого анализа от теории субдифференциалов негладких невыпуклых функций является его нацеленность на получение алгоритмически реализуемых (т.е. «конструктивных») формул и результатов и разработку численных методов минимизации негладких функций.

Центральным объектом исследований конструктивного негладкого анализа является производная по направлениям, а его главная цель заключается в выделении различных классов негладких функций и аппроксимаций этих функций, для которых можно (1) построить простое и достаточное полное исчисление, (2) вывести легко проверяемые («конструктивные») условия экстремума и (3) разработать эффективные методы вычисления направлений спуска для построения численных методов недифференцируемой оптимизации.

Отправной точкой в развитии конструктивного негладкого анализа стала полученная в 1966 г. Данскиным [132] и Демьяновым [22, 23] формула для производной по направлениям функции максимума. К началу 70-х годов была разработана теория минимаксных задач, изложенная в монографиях Данскина [20], Демьянова [24] и Демьянова и Малозёмова [32] и послужившая основной для дальнейшего развития конструктивного негладкого анализа.

Одним из основных инструментов исследования в конструктивном негладком анализе является *квазидифференциальное исчисление*. Определение квазидифференциала было впервые дано в конце 70-х годов Демьяновым, Поляковой и Рубиновым [35, 36]. С тех пор было опубликовано несколько сборников статей [147, 160] и монографий [30, 37, 162], посвящённых как изучению различных теоретических аспектов квазидифференциального исчисления, так и его приложениям. Бесконечномерные обобщения квазидифференциального исчисления изучались Демьяновым и Рубиновым [159], Паллашке, Рехтом и Урбанским [340], Удерцо [397], а также Басаевой, Кусраевым и Кутателадзе [10, 50, 100]. Обобщённое понятие квазидифференцируемости, называемое *ε-квазидифференцируемостью*, было введено и подробно изучено Гороховиком [13–15, 236] в 80-х годах.

Дальнейшие обобщения квазидифференциального исчисления велись в двух направлениях. С одной стороны, в конце 80-х годов Демьяновым [25, 26, 134, 135] было введено понятие *кодифференциала* негладкой функции. Главным отличием кодифференциала от субдифференциалов, квазидифференциалов и иных аппроксимаций, обычно используемых в негладком анализе, является его *непрерывность* в метрике Хаусдорфа. Однако, кодифференциальное исчисление не нашло значительных теоретический приложений и было использовано только для построения и исследования различных численных методов [37, 70, 137, 163, 164, 219]. Бесконечномерные обобщения кодифференциального исчисления изучались Заффарони [416, 417].

С другой стороны, в конце 90-х годов Демьяновым [138, 139] (см. также работу Абанькина [1]) были введены понятия *экзостеров* и *коэкзостеров* негладких функций, позволившие распространить основные идеи конструктивного негладкого анализа на гораздо более широкий класс негладких функций, чем класс квазидифференцируемых функций. Различные свойства экзостеров и коэкзостеров изучались в работах Демьянова, Рябовой и Рощиной [144, 158, 161], а также Гороховика и Старовойтовой [19]. Бесконечномерные обобщение понятия экзостера исследовались Удерцо [395] и Гороховиком [17, 238]. Отметим также предложенное Ишизукой [269] обобщённое понятие квазидифференцируемости, представляющее из себя дальнейшее обобщение понятия экзостера негладкой функции.

Условия экстремума для различных классов задач негладкой оптимизации являются одним из основных направлений теоретических исследований в негладком анализе. В рамках конструктивного негладкого анализа больше всего внимания уделялось условиям экстремума в терминах квазидифференциалов. Геометрические условия экстремума в терминах квазидифференциалов впервые были получены Поляковой и Демьяновым [34, 57–59, 348]. Условия типа Куна-Таккена для задач квазидифференцируемой оптимизации изучались Шапиро [367, 368], Лудерером и Росигером [315], Кунцем и Шолтесом [296] и Сутти [381]. Условия экстремума для задач квазидифференцируемой оптимизации в терминах некоторой (вообще говоря, неизвестной) нелинейной функции Лагранжа были получены Удерцо [396]. Условия регулярности ограничений в терминах квазидифференциалов исследовались Вардом [409] и Кунцем и Шолтесом [295, 296], а независимость условий регулярности и условий экстремума в терминах квазидифференциалов от выбора соответствующих квазидифференциалов изучалась в работах Лудерера, Росигера и Вуркера [314, 316], а также Ванга и Мортенсена [408].

Необходимые условия экстремума для задач негладкой оптимизации с ограничениями вида $F(x) = 0$ или $F(x) \leqslant 0$, где F — *скалярно квазидифференцируемое* отображение между бесконечномерными пространствами изучались Гловером, Джеякумаром и Оэттли [234, 235], а также Удерцо [71, 398]. Условия экстремума для негладких задач математического программирования, включающие квазидифференциалы целевой функции и ограничений-неравенств и субдифференциалы Кларка ограничений-равенств, были получены Гао [226]. Условия экстремума для задач квазидифференцируемой оптимизации в терминах т. н. *разности Демьянова* квазидифференциалов изучались Гао [227, 228] и Ксиа, Сонгом и Зхангом [374]. Условия экстремума в терминах квазидифференциалов для задач векторной (многокритериальной) оптимизации изучались Гловером, Джеякумаром и Оэттли [235], Басаевой [11, 12] (см. также работы Басаевой, Кусраева и Кутателадзе [50, 100]), Антцаком [85] и Гороховиком [16]. Наконец, условия экстремума для задач негладкой оптимизации в терминах экзостеров и коэкзостеров изучались Аббасовым [2, 3, 79], Аббасовым и Демьяновым [4, 80, 81], Демьяновым и Рощиной [155–157].

Одним из популярных направлений исследований в невыпуклой оптимизации в последние годы являются задачи оптимизации разности выпуклых функций [253, 254, 299, 391–393]. Привлекательность данного класса задач обусловлена, с одной стороны, возможностью использовать хорошо разработанный аппарат выпуклого анализа для их исследования, а, с другой стороны, возможностью получения условий глобальной оптимальности и построения детерминированных методов глобальной оптимизации разности выпуклых функций. К настоящему моменту было разработано множество методов локального поиска [97, 229, 275, 276, 299, 383] и методов глобального поиска [103, 104, 106, 215, 390, 394] для различных классов задач оптимизации разности выпуклых функций. Методы глобального поиска для этих задач обычно основаны на тех или иных условиях глобальной оптимальности, подробно изучавшихся в работах Туя [388, 389, 394], Ирриарта-Уррути [247–249], Джеякумара и Гловера [271], Дюра, Хорста и Локателли [209], Зингера [371], Зханга [422] и других исследователей. Особо следует отметить работы по задачам глобальной оптимизации разности выпуклых функций научной школы проф. А.С. Стрекаловского [67–69, 375–379].

Несмотря на обилие публикаций по задачам оптимизации разности выпуклых функций, эта тематика практически не рассматривалась в рамках конструктивного негладкого анализа. Только в работе Поляковой [349] аппарат кодифференциального исчисления был использован для получения условий ограниченности и глобальной оптимальности для невыпуклых кусочно-аффинных функций.

Одним из традиционных теоретических приложений методов негладкого и вариационного анализа являются негладкие задачи вариационного исчисления и оптимального управления, а также задачи оптимального управления дифференциальными включениями. Первые общие результаты по негладким задачам вариационного исчисления были получены Рокафелларом [353–355] в выпуклом случае в начале 70-х годов. В конце 70-х начале 80-х годов Кларк [48, 120–122] обобщил эти результаты на случай негладких задач вариационного исчисления с локально липшицевым интегрантом и ограничениями. В начале 90-х результаты Кларка были распространены Лоэвеном и Рокафелларом [308, 309] на более общие негладкие задачи вариационного исчисления, включая задачи с ограничениями в виде дифференциального включения.

Первые необходимые условия экстремума для негладких задач вариационного исчисления в терминах *невыпуклых* субдифференциалов были получены Мордуховичем [52, 331] (см. также монографии [332, 333]) в конце 80-х начале 90-х годов. Позднее аналогичные условия экстремума в терминах других невыпуклых субдифференциалов были получены Лоэвеном и Рокафелларом [307, 310, 311], Иоффе и Рокафелларом [268], Винтером и Зхенгом [400, 401], Беллаассали [101] и Журани [278].

Условия экстремума в терминах различных субдифференциалов для негладких задач оптимального управления, в том числе задач с фазовыми ограничениями и задач оптимального управления дифференциальными включениями, подробно изучались Кларком [48, 123], Мордуховичем [52, 331, 333], Иоффе [44, 267], Журани [278], Лоэвеном [307], Винтером [400], Кларком и де Пиньо [125] и Половинкиным [53–55].

В рамках конструктивного негладкого анализа негладким задачам вариационного исчисления и оптимального управления внимания практически не уделялось. Минимаксные задачи вариационного исчисления рассматривались Демьяновым [136]. Необходимые условия экстремума типа неотрицательности производной по направлениям целевой функции на конусе допустимых вариаций для некоторых негладких задач оптимального управления были получены в работах Демьянова, Никулиной и Шаблинской [33, 154].

Современные численные методы негладкой невыпуклой оптимизации в большинстве своём основаны на использовании субдифференциала Кларка и его различных аппроксимаций. Наиболее широко применяемыми общими методами негладкой невыпуклой оптимизации являются многочисленные варианты bundle методов [223, 242, 245, 284, 322, 323], методы градиентной выборки [118, 130, 285], негладкие версии квазиньютоновских методов [283, 302], методы дискретного градиента [93, 96] и различные методы нулевого порядка [128, 351]. Подробный сравнительный анализ существующих методов негладкой невыпуклой оптимизации и соответствующего программного обеспечения был представлен в работах Багирова, Кармитсы и Макелы [94, 282] (см. также недавний сборник [92]).

Несмотря на то, что квазидифференциальное исчисление является одним из центральных инструментов конструктивного негладкого анализа, квазидифференциалы, как и экзостеры, и коэкзостеры, во многом оказались непригодны для построения эффективных численных методов недифференцируемой оптимизации. Сходящиеся численные методы, основанные на квазидифференциалах, были разработаны только для некоторых специальных классов негладких функций [90, 91, 317]. Для построения численных методов более эффективным оказалось использовать кодифференциалы. Первый численный метод минимизации негладких кодифференцируемых функций, названный *методом кодифференциального спуска*, был разработан Демьяновым [37]. Модификация этого метода, позволяющая существенно уменьшить его трудоёмкость и основанная на использовании т. н. усечённого кодифференциала, была предложена Демьяновым, Багировым и Рубиновым [145]. Методы минимизации негладких выпуклых функций и разности выпуклых функций, сочетающие в себе идеи метода кодифференциального спуска и bundle методов, изучались в работах Багирова и др. [95, 97, 383]. Методы доверительных областей для минимизации кодифференцируемых функций были разработаны Андрамоновым [7].

Большинство существующих работ по численным методам негладкой оптимизации посвящено методам решения задач без ограничений и задач с ограничениями-неравенствами. Эти методы могут быть распространены на задачи с ограничениями-равенствами и другими типами ограничений с помощью общих подходов условной оптимизации. Один из таких подходов основан на сведении исследуемой задачи оптимизации с ограничениями к задаче без ограничений с помощью штрафных функций или модифицированных функций Лагранжа. К настоящему моменту было разработано множество неэквивалентных подходов к изучению теории двойственности для таких функций. Общий подход к изучению теории двойственности для модифицированных функций Лагранжа для задач невыпуклой оптимизации был предложен Рокафелларом и Ветсом [358] и подробно изучен в работах [255,256,425]. Идеи Рокафеллара и Ветса получили дальнейшее развитие в статьях [114,115,406,426–428], где были предложены различные обобщения теории модифицированных функций Лагранжа из [358], позволяющие включить ряд нелинейных функций Лагранжа и нелинейных штрафных функций в теорию модифицированных функций Лагранжа-Рокафеллара-Ветса. Общая теория двойственности для нелинейных функций Лагранжа и нелинейных штрафных функций изучалась в работах Рубинова, Янга и др. [344, 360, 361, 405]. Другой общий подход к теории двойственности модифицированных функций Лагранжа и штрафных функций, основанный на т. н. *анализе пространства образов*, систематически изучался Евтушенко, Рубиновым и Жаданом [212], Джианнесси [232], Мастроени [326] и другими исследователям [304, 430, 431].

Общей теории глобальной точности вспомогательных функций для задач условной оптимизации уделялось гораздо меньше внимания. Попытки обобщения существующих результатов были предприняты в статьях Евтушенко, Жадана и Рубинова [41, 213, 214], а также работах Ди Пилло и Гриппо [167, 173]. Однако, предложенные в этих работах подходы не могут быть применены к многим существующим классам штрафных функций и модифицированных функций Лагранжа.

Напомним, что штрафная функция называется (глобально) точной, если для всех достаточно больших значений штрафного параметра её точки глобального минимума совпадают с точками глобального минимума исследуемой задачи. Понятие точности штрафной функции было впервые введено в конце 60-х годов Ерёминым [42] и Зангвиллом [418]. Различные результаты по теории точных штрафных функций были получены Пиетржиковским [346], Эвансом, Гоулдом и Толле [211], Бертсекасом [102], Ханом и Мангасаряном [243, 324], Иоффе [258], Росенбергом [359], Бурком [117], Демьяновым и др. [27,29,38,143,146], Ди Пилло, Гриппо и Факкинеем [168, 172, 173], Поляковой [60] и другими исследователям [414, 419].

Непрерывно дифференцируемые точные штрафные функции впервые были введены Флетчером [216, 217] в 1970 году. Штрафная функция Флетчера подробно изучалась в работах Ди Пилло и Гриппо [167, 171, 173], Хана и Мангасаряна [244], Люсиди, Контальди и Ди Пилло [129, 313] и других исследователей.

В 1979 году Ди Пилло и Гриппо [169] впервые ввели т. н. *точные модифицированные функции Лагранжа* для задач нелинейного программирования. Эти модифицированные функции Лагранжа подробно изучались в работах Ди Пилло, Гриппо, Люсиди, Палаги и Льюцци [170, 174–178, 312], а также Луо, Ву и Лиу [320] и Фукуды и Лоуренко [224].

Общая теория точных нелинейных штрафных функций была разработана Рубиновым, Янгом и др. [361, 362] в конце 90-х начале 2000-х. Наконец, новый класс точных штрафных функций, зависящих от дополнительного параметра, был введён Хайером и Неумайером [257] в 2003. Этот класс штрафных функций изучался в работах [274, 303, 305, 404].

К теории точных штрафных функций тесно примыкают вопросы существования глобальных седловых точек модифицированных функций Лагранжа и существования т. н. *модифицированных множителей Лагранжа* для модифицированных функций Лагранжа-Рокафеллара-Ветса. Различные теоремы существования глобальных седловых точек модифицированных функций Лагранжа были получены для задач оптимизации с коническим ограничением [369, 429], задач математического программирования [306, 319, 380, 402, 403, 412, 424], задач с ограничением в виде конуса Лоренца [423], задач нелинейного полуопределённого программирования [321, 413] и задач нелинейного программирования с бесконечным числом ограничений [116,364]. Вопросы существования модифицированных множителей Лагранжа изучались в работах [116, 280, 281, 364, 369, 429].

Большинство существующих работ по теории точных штрафных функций были посвящены изучению этих функций в конечномерном случае. Теория точных штрафных функций для задач оптимизации в метрических и нормированных пространствах систематически разрабатывалась в работах Демьянова [29, 143] и Заславского [419]. Приложения теории точных штрафных функций к задачам вариационного исчисления рассматривались в работах Демьянова, Тамасяна и Джианнесси [28, 141, 142, 148, 152, 163, 164], а её приложения к задачам оптимального управления изучались Демьяновым, Карелиным и Джианнесси [47, 149–151], Люенбергером [318], Лассерром [297], а также Ксингом, Ченгом, Вангом и Яо [415]. Точные штрафные функции для задач управления дифференциальными уравнениями в частных производных изучались Гуга и Зуазуа [240, 241], а также Джаясвалом и Преети [270]. Численные методы решения задач оптимального управления, основанные на точных штрафных функциях, изучались в работах Маратоса [325], Мэйна, Полака и Смита [327, 328, 347, 372], Вонга и Тео [410], Аутраты и Шиндлера [337–339], а также Фоминых, Карелина и Поляковой [219]. Численные методы оптимального управления, основанные на точной штрафной функции Хайера и Неумайера, разрабатывались в работах [274, 303, 305].

Общий подход к синтезу систем управления, называемый *методом скоростного градиента*, был предложен проф. А.Л. Фрадковым в конце 70-х годов [73]. Методы скоростного градиента успешно применялись для решения различных задач адаптивного и нелинейного управления [9, 51, 74, 220] и нашли множество приложений (см., например, [84, 277, 289]). Однако, в негладком случае эти методы подробно не изучались.

Основной **целью диссертации** является разработка новых современных методов конструктивного негладкого анализа и их применение, как к теоретическому исследованию различных негладких задач оптимизации, вариационного исчисления и теории управления, так и к разработке новых численных методов решения данных задач. В диссертации рассматриваются новые методы исследования негладких задач оптимизации разности выпуклых функций с ограничениями и выводятся новые условия глобальной оптимальности для данного класса задач. Также разрабатываются кодифференциальное исчисление негладких функций, определённых на банаховых пространствах, и абстрактное кодифференциальное исчисление негладких отображений между бесконечномерными пространствами, объединяющее большое количество разрозненных результатов конструктивного негладкого анализа в единую теорию локальных аппроксимаций негладких функций.

Помимо этого диссертация посвящена изучению условий экстремума в терминах квази- и кодифференциалов для негладких задач математического программирования и негладких задач вариационного исчисления и разработке теоретического аппарата необходимого для получения таких условий экстремума. В частности, исследуются достаточные условия метрической регулярности квазидифференцируемых отображений и описание касательных конусов к множествам, задаваемым квазидифференцируемыми ограничениями. Также разрабатываются общие методы минимизации кодифференцируемых функций, исследуется их сходимость и приводятся оценки скорости сходимости.

Ещё одной целью диссертации является разработка единой теории глобальной точности штрафных функций и модифицированных функций Лагранжа для различных классов задач оптимизации с ограничениями, с помощью которой могут быть как легко изучены существующие штрафные функции и модифицированные функции Лагранжа, так и предложены новые классы подобных функций для различных задач условной оптимизации.

Помимо этого диссертация также посвящена разработке негладких алгоритмов скоростного градиента для решения различных задач теории управления, исследованию их свойств и приложению этих алгоритмов к решению конкретных задач, в частности, задач управления распределёнными системами.

Теоретическая значимость работы состоит в разработке новых методов исследования задач минимизации разности выпуклых функций с ограничениями и выводе новых условий глобальной оптимальности для данного класса задач в терминах глобальных кодифференциалов. Также в диссертации подробно разработано кодифференциальное исчисление для негладких функций, определённых на банаховых пространствах, исследованы различные свойства кодифференцируемых функций, получены простые достаточные условия кодифференцируемости негладких интегральных функционалов, определённых на пространстве Соболева, и приведены явные формулы для вычисления их кодифференциалов. Данные результаты могут быть использованы для исследования различных классов негладких экстремальных задач в бесконечномерных пространствах, включая негладкие задачи вариационного исчисления и теории управления.

Также в диссертации получены новые условия экстремума в терминах квази- и кодифференциалов для негладких задач математического программирования и негладких задач вариационного исчисления, включая негладкую задачу Больцы с дополнительными ограничениями на границе и негладкую вариационную задачу с изопериметрическими ограничениями-неравенствами. На примерах показано, что полученные в диссертации условия экстремума в ряде случаев оказываются лучше существующих условий экстремума в терминах различных субдифференциалов негладких функций, таких как субдифференциалы Кларка, Мишеля-Пено, Мордуховича, Иоффе, Джеякумара-Люка, предельный проксимальный субдифференциал и предельный субдифференциал Фреше. Условия экстремума, полученные в диссертации, опираются на новые условия регулярности ограничений в терминах квазидифференциалов, изученные автором диссертации. Данные условия позволили автору вывести ранее не изучавшиеся достаточные условия локальной метрической регулярности квазидифференцируемых систем равенств и неравенств и получить качественно новое описание выпуклых подконусов контигентного конуса к множеству, задаваемому системой квазидифференцируемых равенств и неравенств.

Помимо этого в диссертации разработано абстрактное кодифференциальное исчисление негладких отображений между бесконечномерными пространствами, позволяющее обобщить и объединить в целостную теорию множество разрозненных результатов в конструктивном негладком анализе. Абстрактное кодифференциальное исчисление позволяет включить различные концепции квазидифференцируемости, кодифференцируемости, а также понятие экзостеров, коэкзостеров и исчерпывающих семейств верхних выпуклых и нижних вогнутых аппроксимаций в единую теорию локальных аппроксимаций негладких функций.

Теоретическая значимость работы также заключается в разработке единой теории глобальной точности штрафных функций и модифицированных функций Лагранжа. Данная теория позволяет с единых позиций взглянуть на многочисленные существующие классы подобных функций и предложить простой общий подход к исследованию таких функций, основанный на предложенном автором диссертации принципом локализации. Принцип локализации позволяет сводить изучение глобальных свойств штрафных функций и модифицированных функций Лагранжа для конечномерных задач оптимизации к локальному исследованию таких функций с помощью условий регулярности ограничений и условий экстремума.

В бесконечномерном случае автором диссертации была доказана новая теорема о т. н. полной точности штрафных функций и показана её применимость к задачам управления линейными эволюционными уравнениями с терминальным ограничением.

Практическая значимость работы заключается в разработке новых численных методов минимизации негладких функций, основанных на использовании кодифференциалов, которые могут быть применены для решения широкого круга задач негладкой оптимизации, возникающих в приложениях. В частности, в диссертации разработана новая версия метода кодифференциального спуска, более удобная для практической реализации, чем существовавшие ранее варианты этого метода. Также предложен новый метод минимизации негладких функций на выпуклых множествах и эффективный метод глобальной минимизации невыпуклых кусочно-аффинных функций, сходящийся за конечное число итераций.

Помимо этого в диссертации разработана единая теория точных штрафных функций и модифицированных функций Лагранжа, которая может быть использована для разработки эффективных численных методов решения различных классов задач оптимизации с ограничениями. В частности, автором диссертации предложена новая глобально точная модифицированная функция Лагранжа для задач нелинейного полуопределённого программирования (задач оптимизации с матричными ограничениями), которая может быть использована для разработки эффективных сверхлинейно сходящихся численных методов решения данного класса задач.

Также в диссертации разработаны общие негладкие алгоритмы скоростного градиента, которые могут применяться для решения различных классов задач управления. В работе изучена применимость этих алгоритмов к решению задачи стабилизации интегратора Брокетта, синхронизации двух осцилляторов Дуффинга и исследованы алгоритмы скоростного градиента для граничного управления энергией в распределённых системах.

Научная новизна. Все основные результаты полученные в диссертации являются новыми. В частности, автором был предложен новый подход к исследованию негладких задач оптимизации разности выпуклых функций с ограничениями в терминах глобальных кодифференциалов и с его помощью получены новые необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности для данного класса задач. Также автором было подробно разработано кодифференциальное исчисление негладких функций, определённых на банаховых пространствах, получены новые легко проверяемые достаточные условия непрерывной кодифференцируемости негладкого интегрального функционала, определённого на пространстве Соболева, и впервые получены явные формулы для вычисления кодифференциалов и квазидифференциалов подобных функционалов.

В диссертации были получены ранее не изучавшиеся достаточные условия локальной метрической регулярности квазидифференцируемых отображений и качественно новое описание выпуклых подконусов контингентного конуса к множеству, определяемому квазидифференцируемыми ограничениями. С помощью этих результатов были получены новые условия экстремума в терминах квази- и ко-дифференциалов для негладких задач математического программирования и негладких задач вариационного исчисления.

Автором была разработана новая теория абстрактных кодифференциалов негладких отображений, позволившая объединить большое число разрозненных результатов конструктивного негладкого анализа в единую теорию локальных аппроксимаций негладких функций. Эта теория включается в себя исчисления квазидифференциалов, кодифференциалов, экзостеров, коэкзостеров и исчерпывающих семейств верхних выпуклых и нижних вогнутых аппроксимаций в качестве частных случаев.

Помимо этого в диссертации были исследованы новые методы минимизации негладких кодифференцируемых функций, впервые доказана сходимость этих методов по мере нестационарности и впервые получена оценка скорости сходимости метода кодифференциального спуска. Автором был разработан новый метод глобальной минимизации невыпуклых кусочно-аффинных функций, основанный на использовании кодифференциалов, и доказана его сходимость к точке глобального минимума за конечное число шагов, ранее отмечавшаяся для подобных методов лишь в рамках численных экспериментов.

В диссертации был предложен новый общий подход к изучению точных штрафных функций и модифицированных функций Лагранжа для конечномерных задач оптимизации, основанный на принципе локализации. В рамках этого подхода автором были предложены новые модифицированные функции Лагранжа для различных задач оптимизации с коническими ограничениями (в частности, для задач нелинейного полуопределённого программирования) и доказана их глобальная точность.

Наконец, в диссертации были разработаны новые негладкие версии алгоритма скоростного градиента и с их помощью были предложены новые алгоритмы управления для задачи стабилизации интегратора Брокетта и задачи синхронизации двух осцилляторов Дуффинга. Также впервые была доказана работоспособность алгоритмов скоростного градиента для решения задач граничного управления энергией в распределённых системах.

Методы исследования. В диссертации применяются современные методы теории экстремальных задач, негладкого анализа, вариационного анализа, выпуклого анализа, недифференцируемой оптимизации, теории управления и функционального анализа. В частности, используются исчисления различных классов субдифференциалов невыпуклых функций (а именно, субдифференциалов Кларка, Мишеля-Пено, Мордуховича, Иоффе, Джеякумара-Люка, предельного проксимального субдифференциала, предельного субдифференциала Фреше и обобщённого гессиана), исчисление квазидифференциалов Демьянова-Рубинова, общая теория метрической регулярности многозначных отображений, методы теории точных штрафных функций и модифицированных функций Лагранжа, а также методы скоростного градиента для синтеза нелинейных систем управления.

Основные результаты, полученные в диссертации и выносимые на защиту:

- ведено понятие глобального кодифференциала разности выпуклых функций и на его основе получены новые необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности для задач оптимизации разности выпуклых функций;

- построено исчисление непрерывно кодифференцируемых функций в банаховых пространствах, доказаны теорема о среднем для кодифференцируемых функций и свойство локальной липшицевости непрерывно кодифференцируемых функций и получен ряд новых свойств непрерывно кодифференцируемых функций;

- введены новые условия регулярности для квазидифференцируемых систем равенств и неравенств, получены достаточные условия локальной метрической регулярности таких систем и разработан новый способ вычисления выпуклых подконусов касательных конусов к квазидифференцируемым множествам;

- получены новые условия экстремума для негладких задач математического программирования в терминах квазидифференциалов и при некоторых предположениях доказана их независимость от выбора квазидифференциалов;

- построено исчисление абстрактно кодифференцируемых отображений, позволяющее объединить целый ряд различных понятий в негладком анализе (квазидифференциалы, кодифференциалы, экзостеры, коэкзостеры и др.) в единую теорию;

- получены условия, гарантирующие непрерывную кодифференцируемость интегрального функционала, определённого на пространстве Соболева, и вычислено непрерывное кодифференциальное отображения этого функционала;

- получены новые условия экстремума для различных негладких задач вариационного исчисления (в частности, негладкой задачи Больцы и негладкой изопериметрической задачи) в терминах кодифференциалов;

- предложено несколько новых модификаций метода кодифференциального спуска, доказана их сходимость, впервые получена оценка скорости сходимости метода кодифференциального спуска и доказана сходимость метода глобального кодифференциального спуска к точке глобального минимума невыпуклой кусочно-аффинной функции за конечное число шагов;

- на основе принципа локализации построена общая теория глобальной точности штрафных функций и модифицированных функций Лагранжа, а также введена и изучена новая точная модифицированная функция Лагранжа для задач нелинейного полуопределённого программирования;

- доказана новая теорема о полной точности штрафных функций для задач оптимизации в метрических пространствах и рассмотрено её приложение к задачам оптимального управления линейными эволюционными уравнениями;

- метод скоростного градиента обобщён на негладкий случай и рассмотрены примеры применения негладких алгоритмов скоростного градиента к задачам стабилизации интегратора Брокетта и синхронизации двух осцилляторов Дуффинга;

- с помощью метода скоростного градиента решена задача граничного управления энергией для одномерного нелинейного уравнения Клейна-Гордона и задача граничного управления энергией в системе синус-Гордона при наличии только граничных измерений.

Апробация работы. Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на семинаре по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации (математико — механический факультет, СПбГУ, http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/), семинаре лаборатории «Управление сложными системами» Института проблем машиноведения РАН и различных всероссийских и международных конференциях:

- международная конференция «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы (CNSA-2012)» (г. Санкт–Петербург, 18–23 июня 2012 г.);

- 17 Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (г. Саратов, 27 января – 3 февраля, 2014 г.);

- European Control Conference 2015 (г. Линц, Австрия, 15–17 июля 2015 г.);

- 6th IFAC International Workshop on Periodic Control Systems (PSYCO 2016) (г. Эйндховен, Нидерланды, 29 июня–1 июля 2016 г.);

- международная конференция «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы (CNSA-2017)», посвящённая памяти профессора В.Ф. Демьянова (г. Санкт–Петербург, 22–27 мая 2017 г.);

- конференция «Нелинейное и адаптивное управление с применениями в физике и технике», приуроченная к 70-летию А.Л. Фрадкова (г. Санкт–Петербург, 22 мая 2018 г.);

- European Control Conference 2018 (г. Лимасол, Кипр, 12–15 июня 2018 г.);

- международная научная конференция «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», посвящённая 100-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина (г. Минск, Белоруссия, 24–29 сентября 2018 г.).

По результатам исследований опубликовано 32 печатных работы [31, 39, 179–208], 25 из которых [179, 181–187, 189–192, 194–200, 202, 203, 205–208] в периодических изданиях, индексируемых в международных наукометрических базах Scopus и Web of Science, и две из которых [31, 39] в изданиях, включённых в перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК РФ. Работы [31, 200–208] написаны в соавторстве. В работе [31] автору диссертации принадлежит формулировка метода кодифференциального спуска в бесконечномерном случае и исследование его сходимости, В.Ф. Демьянову — все остальные результаты. В работе [200] А.В. Фоминых принадлежит доказательство точности штрафной функции для задачи оптимального управления дифференциальным включением, автору диссертации — все остальные результаты. В работах [201–205] А.Л. Фрадкову принадлежат постановки задач, автору диссертации — доказательства основных результатов. В работах [206–208] А.Л. Фрадкову принадлежат постановки задач и идея применения метода скоростного градиента для их решения, автору диссертации — доказательства основных результатов, Б.Р. Андриевским были получены результаты численного моделирования.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка обозначений и списка литературы. Определения, предложения, теоремы, леммы, следствия, примеры и замечания нумеруются в соответствии с главой, параграфом, в которых они находятся. Формулы нумеруются в соответствии с главой, в которой они находятся. Объём работы составляет 302 страницы. Иллюстративный материал включает 21 рисунок. Список литературы состоит из 431 наименования.

Благодарности. Автор выражает глубочайшую признательность своему учителю и создателю конструктивного негладкого анализа д.ф.-м.н., проф. $\boxed{\text{В. Ф. Демьянову}}$, без поддержки, одобрения и наставления которого мне бы не удалось стать математиком и в конце концов написать данную диссертационную работу, представляющую из себя продолжение и естественное развитие многочисленных исследований В. Ф. Демьянова и его учеников в области негладкого анализа и его приложений.

Автор выражает искреннюю благодарность д.ф.-м.н., проф. В. Н. Малозёмову и д.т.н., проф. А. Л. Фрадкову за помощь в трудоустройстве, за создание благоприятной атмосферы для исследований, за ценные замечания и наставления, а также за поддержку и помощь, которую они оказывали мне с момента окончания университета и продолжают оказывать по сей день. Также автор считает своим долгом поблагодарить своих коллег д.т.н., проф. Б. Р. Андриевского, к.ф.-м.н., доц. Г. Ш. Тамасяна, к.ф.-м.н., доц. А. В. Фоминых и Т. А. Ангелова, под влиянием которых сформировались многочисленные результаты данной работы. Наконец, автор хочет выразить свою искреннюю благодарность Елене Захаровой и Грегори Фину за их помощь в изучении английского языка и огромную поддержку, без которой мне бы не удалось найти себя в международной науке.

Глава 1

Конструктивный негладкий анализ

Глава посвящена подробной разработке теории глобальных кодифференциалов разности выпуклых функций и выводу условий глобальной оптимальности для задач минимизации таких функций, а также построению кодифференциального исчисления в банаховых пространствах и абстрактного кодифференциального исчисления нелинейных операторов, позволяющего объединить и обобщить множество разрозненных результатов в конструктивном негладком анализе. Кроме того, рассмотрено применение аппарата конструктивного негладкого анализа к изучению метрической регулярности многозначных отображений, описанию касательных конусов к множествам, задаваемым системами негладких равенств и неравенств, а также выводу необходимых условий экстремума для негладких задачах математического программирования. Основные результаты этой главы опубликованы в статьях [31, 39, 179, 182, 189, 195, 197, 198].

1.1 Глобальные кодифференциалы разности выпуклых функций

В данном параграфе изучаются глобальные кодифференциалы негладких функций, представимых в виде разности выпуклых функций. С их помощью получены новые необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности для задач оптимизации разности выпуклых функций с ограничениями равенствами и неравенствами. Результаты этого параграфа будут использованы в главе 3 для доказательства сходимости метода кодифференциального спуска к точке глобального минимума невыпуклой кусочно-аффинной функции за конечное число шагов.

1.1.1 Аффинные опорные множества выпуклых функций

Пусть $\mathcal{H}$ — вещественное гильбертово пространство, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, а $f\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственная замкнутая выпуклая функция. Обозначим через $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathcal{H} \mid |f(x)| < +\infty\}$ эффективное множество функции f. Как хорошо известно (см., например, [78, предложение I.3.1]), функцию f можно представить в виде супремума некоторого семейства аффинных функций. Отождествляя каждую аффинную функцию $\ell(x) = a + \langle v, x\rangle$ с парой $(a, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}$ и применяя операции взятия выпуклой оболочки и замыкания, получаем, что существует непустое замкнутое выпуклое множество $S_f \subset \mathbb{R} \times \mathcal{H}$ такое, что

$$f(x) = \sup_{(a,v)\in S_f} (a + \langle v, x\rangle) \quad \forall x \in \mathcal{H}, \tag{1.1}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$. Любое такое множество $S_f \subset \mathbb{R} \times \mathcal{H}$ называется *аффинным опорным множеством* выпуклой функции f. Аффинные опорные множества функции f тесно связаны с её ε-субдифференциалом $\partial_\varepsilon f(\cdot)$.

Теорема 1.1.1. *Для любого аффинного опорного множества S_f функции f и для всех $\varepsilon \geqslant 0$ и $x \in \operatorname{dom} f$ справедливо равенство*

$$\partial_\varepsilon f(x) = \big\{ v \in \mathcal{H} \;\big|\; \exists a \in \mathbb{R}\colon (a, v) \in S_f,\ a + \langle v, x\rangle \geqslant f(x) - \varepsilon \big\}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\varepsilon \geqslant 0$ и $x \in \operatorname{dom} f$ и обозначим через $D_\varepsilon(x)$ множество, стоящее в правой части равенства (1.2). Заметим, что для любой пары $(a, v) \in S_f$, удовлетворяющей неравенству $a + \langle v, x\rangle \geqslant f(x) - \varepsilon$, будет

$$f(y) - f(x) \geqslant a + \langle v, y\rangle - \big(a + \langle v, x\rangle\big) - \varepsilon = \langle v, y - x\rangle - \varepsilon \quad \forall y \in \mathcal{H},$$

откуда следует, что $v \in \partial_\varepsilon f(x)$. Таким образом, справедливо включение $D_\varepsilon(x) \subseteq \partial_\varepsilon f(x)$.

Предположим, что обратное включение не выполнено, то есть $\partial_\varepsilon f(x) \neq D_\varepsilon(x)$. Тогда существует $v_0 \in \partial_\varepsilon f(x)$ такое, что $v_0 \notin D_\varepsilon(x)$. Из определения множества $D_\varepsilon(x)$ следует, что $(a, v_0) \notin S_f$ для всех $a \geqslant f(x) - \langle v_0, x\rangle - \varepsilon$.

Положим $C_f = \{(b, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \mid \exists a \geqslant b\colon (a, v) \in S_f\}$. Ясно, что множество C_f является выпуклым и $(f(x) - \langle v_0, x\rangle - \varepsilon, v_0) \notin C_f$. Для того чтобы воспользоваться теоремой об отделимости проверим, что множество C_f является замкнутым. Введём функцию $g(v) = \sup\{a \mid (a, v) \in S_f\}$, $v \in \mathcal{H}$. Из определения следует, что $(g(v), v) \in S_f$ для всех $v \in \operatorname{dom} g$, поскольку множество S_f замкнуто. Кроме того, нетрудно заметить, что множество C_f является подграфиком функции g. Поэтому достаточно проверить, что функция g полунепрерывна сверху (пн. св.).

Функция g является вогнутой, поскольку её подграфик совпадает с выпуклым множеством C_f. Покажем, что она является собственной. Действительно, если $g(v) = +\infty$ для некоторого $v \in \mathcal{H}$ (то есть $(a, v) \in S_f$ для любого достаточно большого $a \in \mathbb{R}$), то $f(\cdot) \equiv +\infty$, что противоречит нашему предположению о том, что функция f является собственной. С другой стороны, $g(\cdot) \not\equiv -\infty$, поскольку в противном случае $S_f = \varnothing$ и $f(\cdot) \equiv -\infty$, что вновь противоречит предположению о том, что функция f является собственной. Значит, g — собственная вогнутая функция. Более того, функция g ограничена сверху на ограниченных множествах. Действительно, для любого ограниченного множества $Q \subset \mathcal{H}$ и для всех $v \in Q$ будет, либо $(\mathbb{R} \times \{v\}) \cap S_f = \varnothing$ и тогда $g(v) = -\infty$, либо $(a, v) \in S_f$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$ и

$$g(v) = \sup\{a \mid (a,v) \in S_f\} = \sup_{a\colon (a,v)\in S_f} \big(a + \langle v, x\rangle - \langle v, x\rangle\big) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{(a,v)\in S_f} \big(a + \langle v, x\rangle\big) - \langle v, x\rangle \leqslant f(x) + q\|x\|,$$

где $q = \sup_{v\in Q} \|v\|$ (напомним, что $x \in \operatorname{dom} f$, т. е. $f(x) < +\infty$).

Рассуждая от противного, предположим, что функция g не является пн. св. в некоторой точке $v \in \mathcal{H}$. Рассмотрим два случая. Пусть $v \in \operatorname{dom} g$. Тогда по определению полунепрерывности сверху существует $\theta > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся $v_n \in \operatorname{dom} g$, удовлетворяющее неравенства $g(v_n) > g(v) + \theta$ и $\|v_n - v\| < 1/n$. Последовательность $\{g(v_n)\}$ ограничена, поскольку функция g ограничена сверху на ограниченных множествах. Следовательно, существует подпоследовательность $\{v_{n_k}\}$ такая, что соответствующая подпоследовательность $\{g(v_{n_k})\}$ сходится к некоторому $g_* \geqslant g(v) + \theta$. Как было указано выше, $(g(v_{n_k}), v_{n_k}) \in S_f$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Поэтому, переходя к пределу при $k \to \infty$, получим, что $(g_*, v) \in S_f$, так как множество S_f замкнуто. Значит $g(v) \geqslant g_*$, что противоречит неравенству $g_* \geqslant g(v) + \theta$.

Рассмотрим теперь второй случай. Пусть $v \notin \operatorname{dom} g$. Тогда по определению существует $M \in \mathbb{R}$ и последовательность $\{v_n\} \subset \operatorname{dom} g$, сходящаяся к точке v, и такая, что $g(v_n) \geqslant M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Воспользовавшись, как и в первом случае, ограниченностью сверху функции g на ограниченных множествах, можно извлечь подпоследовательность $\{v_{n_k}\}$ такую, что соответствующая последовательность $\{g(v_{n_k})\}$ сходится к некоторому $g_* \geqslant M > -\infty$. Поэтому $(g_*, v) \in S_f$ и $g(v) \geqslant g_* > -\infty$, что противоречит условию $v \notin \operatorname{dom} g$. Таким образом, функция g пн. св. и множество C_f замкнуто, как подграфик пн. св. функции.

Напомним, что множество C_f замкнуто и выпукло и $(f(x) - \langle v_0, x\rangle - \varepsilon, v_0) \notin C_f$. Следовательно, по теореме об отделимости существуют $(b, y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}$ и $\delta > 0$ такие, что

$$b(f(x) - \langle v_0, x\rangle - \varepsilon) + \langle v_0, y\rangle \geqslant ba + \langle v, y\rangle + \delta \quad \forall (a, v) \in C_f. \tag{1.3}$$

По определению $(-\infty, a] \times \{v\} \subset C_f$ для любого $(a, v) \in S_f$. Поэтому $b \geqslant 0$.

Если $b > 0$, то, поделив неравенство (1.3) на b и взяв супремум по всем $(a, v) \in S_f$, получим

$$f(x) + \left\langle v_0, \frac{1}{b}y - x \right\rangle - \varepsilon \geqslant f\left(\frac{1}{b}y\right) + \frac{\delta}{b}.$$

По нашему предположению $v_0 \in \partial_\varepsilon f(x)$. Поэтому

$$f\left(\frac{1}{b}y\right) \geqslant f(x) + \left\langle v_0, \frac{1}{b}y - x \right\rangle - \varepsilon \geqslant f\left(\frac{1}{b}y\right) + \frac{\delta}{b}.$$

Получили противоречие, из которого следует, что $\partial_\varepsilon f(x) = D_\varepsilon(x)$.

Предположим теперь, что $b = 0$. Тогда из неравенства (1.3) вытекает, что

$$\frac{f(x + \alpha y) - f(x)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\Big(\sup_{(a,v) \in S_f} \big(a + \langle v, x + \alpha y\rangle\big) - f(x)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\alpha}\Big(\sup_{(a,v)\in S_f} (a + \langle v, x\rangle)) + \alpha\langle v_0, y\rangle - \alpha\delta - f(x)\Big) = \langle v_0, y\rangle - \delta \quad (1.4)$$

для всех $\alpha > 0$. С другой стороны, по определению ε-субградиента для всех $\alpha > \varepsilon/\delta$ будет

$$\frac{f(x + \alpha y) - f(x)}{\alpha} \geqslant \langle v_0, y\rangle - \frac{\varepsilon}{\alpha} > \langle v_0, y\rangle - \delta,$$

что противоречит неравенству (1.4). Таким образом, $\partial_\varepsilon f(x) = D_\varepsilon(x)$, что и требовалось доказать. □

Замечание 1.1.1. Согласно предыдущей теореме, супремум в определении аффинного опорного множества (1.1) достигается в точке $x \in \operatorname{dom} f$ тогда и только тогда, когда f субдифференцируема в точке x. В частности, если f принимает только конечные значения, то функция f субдифференцируема в каждой точке $x \in \mathcal{H}$ (см., например, [78, предложение I.5.2 и Следствие I.2.5]) и поэтому супремум в определении аффинного опорного множества достигается в каждой точке $x \in \mathcal{H}$.

Зафиксируем произвольное аффинное опорное множество S_f функции f. Покажем, что различные свойства функции f, такие как ограниченность снизу, достижимость глобального минимума и др., могут быть простым образом описаны в терминах геометрических свойств множества S_f.

Если f достигает глобального минимума в точке x_*, то $0 \in \partial f(x_*)$ и $(f(x_*), 0) \in S_f$ согласно теореме 1.1.1, где ∂f — субдифференциал функции f в смысле выпуклого анализа. Таким образом, если f достигает глобального минимума, то множество S_f пересекается с прямой $\mathbb{R} \times \{0\}$. В общем случае положим $a_f = \sup_{(a,0)\in S_f} a$. По определению $a_f = -\infty$, если множества $\mathbb{R} \times \{0\}$ и S_f не пересекаются. Заметим, что $(a_f, 0) \in S_f$ в случае когда эти множества пересекается, в силу того, что пересечение этих множеств замкнуто и если $a_f = +\infty$, то $f(\cdot) \equiv +\infty$, что противоречит предположению о том, что f собственная функция.

Обозначим через $N_f = \{(b, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \mid b(a - a_f) + \langle w, v \rangle \leqslant 0 \ \forall (a, v) \in S_f\}$ нормальный конус к множеству S_f в точке $(a_f, 0)$, если множества $\mathbb{R} \times \{0\}$ и S_f пересекаются, и положим $N_f = \varnothing$ в противном случае. Здесь и далее мы предполагаем, что пространство $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$ наделено нормой $\|(a, v)\| = \sqrt{a^2 + \|v\|^2}$.

Теорема 1.1.2. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *f ограничена снизу тогда и только тогда, когда $S_f \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \neq \varnothing$;*

2. *если f ограничена снизу, то $a_f = \inf\limits_{x \in \mathcal{H}} f(x)$;*

3. *f достигает глобального минимума тогда и только тогда, когда существует $(b, w) \in N_f$ такое, что $b > 0$; более того, $\operatorname*{arg\,min}\limits_{x \in \mathcal{H}} f(x) = \{b^{-1} w \in \mathcal{H} \mid (b, w) \in N_f \colon b > 0\}$;*

4. *если $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathcal{H}$, то, либо $0 \in S_f$, либо $a_* > 0$, где (a_*, v_*) — это точка глобального минимума в задаче*

$$\|(a, v)\|^2 \to \min_{(a,v) \in S_f};$$

обратно, если f ограничена снизу и выполнено одно из двух условий $0 \in S_f$ и $a_* > 0$, то $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathcal{H}$. Более того, в случае $a_* > 0$ будет $a_f > 0$, т. е. $\inf\limits_{x \in \mathcal{H}} f(x) > 0$.

Доказательство. **1.** Если $S_f \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \neq \varnothing$, то существует $a_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $(a_0, 0) \in S_f$. Отсюда по определению аффинного опорного множества для всех $x \in \mathcal{H}$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant a_0$, т. е. функция f ограничена снизу.

Предположим теперь, что функция f ограничена снизу. Обозначим $f_* = \inf_{x \in \mathcal{H}} f(x)$. По определению точной нижней грани для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x_\varepsilon \in \mathcal{H}$ такая, что $f(x_\varepsilon) \leqslant f_* + \varepsilon$. Отсюда по определению ε-субдифференциала справедливо включение $0 \in \partial_\varepsilon f(x_\varepsilon)$, из которого согласно теореме 1.1.1 следует, что найдётся $a \geqslant f(x_\varepsilon) - \varepsilon$ такое, что $(a, 0) \in S_f$, то есть $S_f \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \neq \varnothing$.

2. Как было доказано в пункте **1**, для любого $\varepsilon > 0$ существует $a \geqslant f(x_\varepsilon) - \varepsilon \geqslant f_* - \varepsilon$ такое, что $(a, 0) \in S_f$. Поэтому $a_f \geqslant f_*$. С другой стороны, для любых $(a, 0) \in S_f$ и $x \in \mathcal{H}$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant a$, из которого следует, что $a_f \leqslant f_*$. Поэтому $a_f = f_*$.

3. Предположим, что f достигает глобального минимума в точке $x_* \in \mathcal{H}$. По определению аффинного опорного множества $f(x_*) = \sup_{(a,v) \in S_f}(a + \langle v, x_* \rangle) = f_*$ или, что эквивалентно,

$$(a - f_*) + \langle v, x_* \rangle \leqslant 0 \quad \forall (a, v) \in S_f.$$

Так как $(f_*, 0) \in S_f$ и $a_f = f_*$ по второй части теоремы, из данного неравенства и определения конуса N_f вытекает, что $(1, x_*) \in N_f$, т. е. существует $(b, w) \in N_f$ такое, что $b > 0$.

Предположим теперь, что $N_f \neq \varnothing$ и найдётся $(b, w) \in N_f$, удовлетворяющее неравенству $b > 0$. По определению множества N_f будет

$$b(a - f_*) + \langle w, v \rangle \leqslant 0 \quad \forall (a, v) \in S_f,$$

поскольку $a_f = f_*$. Разделив данное неравенство на b и взяв супремум по всех $(a, v) \in S_f$ получим

$$f\left(\frac{1}{b}w\right) = \sup_{(a,v)\in S_f} \left(a + \left\langle v, \frac{1}{b}w \right\rangle\right) \leqslant f_*,$$

откуда следует, что вектор $b^{-1}w$ является точкой глобального минимума функции f. Следовательно, справедливо равенство $\arg\min_{x\in\mathcal{H}} f(x) = \{b^{-1}w \in \mathcal{H} \mid (b, w) \in N_f \colon b > 0\}$.

4. Пусть $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathcal{H}$. Рассуждая от противного, предположим, что $0 \notin S_f$ и $a_* \leqslant 0$. По определению (a_*, v_*) — точка глобального минимума выпуклой функции $(a, v) \mapsto \|(a, v)\|^2$ на множестве S_f. Следовательно, в данной точке выполнено необходимое и достаточное условие минимума выпуклой функции на выпуклом множестве:

$$a_*(a - a_*) + \langle v_*, v - v_* \rangle \geqslant 0 \quad \forall (a, v) \in S_f. \tag{1.5}$$

Если $a_* = 0$, то из данного неравенства следует, что $\langle v, -v_* \rangle \leqslant -\|v_*\|^2 < 0$ для всех $(a, v) \in S_f$ (заметим, что $v_* \neq 0$, так как иначе $0 \in S_f$). Поэтому для любых $\alpha > 0$ и $x \in \operatorname{dom} f$ будет

$$f(x - \alpha v_*) = \sup_{(a,v)\in S_f} (a + \langle v, x \rangle + \alpha \langle v, -v_* \rangle) \leqslant f(x) - \alpha \|v_*\|^2.$$

Поэтому $f(x - \alpha v_*) \to -\infty$ при $\alpha \to +\infty$, что противоречит предположению о неотрицательности функции f.

Если $a_* < 0$, то поделив неравенство (1.5) на a_* и взяв супремум по всем $(a, v) \in S_f$ получим

$$f\left(\frac{1}{a_*}v_*\right) = \sup_{(a,v)\in S_f} \left(a + \left\langle v, \frac{1}{a_*}v_* \right\rangle\right) \leqslant a_* + \frac{1}{a_*}\|v_*\|^2 < 0,$$

что вновь противоречит предположению о неотрицательности функции f.

Докажем обратное утверждение. Если $0 \in S_f$, то по определению аффинного опорного множества $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathcal{H}$. Поэтому предположим, что $0 \notin S_f$ и $a_* > 0$. Рассуждая от противного, допустим, что $f_* = \inf_{x\in\mathcal{H}} f(x) < 0$ (заметим, что $f_* > -\infty$ в силу ограниченности снизу функции f). По второй части теоремы $(f_*, 0) \in S_f$. Следовательно, для любого $\alpha \in [0, 1]$ будет $\alpha(a_*, v_*) + (1-\alpha)(f_*, 0) \in S_f$. Полагая $\alpha = |f_*|/(|f_*| + a_*) \in (0, 1)$, получаем, что $(0, \alpha v_*) \in S_f$, что противоречит определению точки (a_*, v_*), поскольку очевидным образом выполнено неравенство $\|(0, \alpha v_*)\|^2 < \|(a_*, v_*)\|^2$. Таким образом, функция f является неотрицательной на $\mathcal{H}$. Остаётся заметить, что $a_f > 0$ в случае когда $a_* > 0$, поскольку $a_f \geqslant 0$ в силу неотрицательности функции f и $a_f \neq 0$, так как в противном случае $(a_f, 0) = (0, 0) \in S_f$ и $a_* = 0$. $\square$

Замечание 1.1.2. (i) Отметим, что предположение об ограниченности снизу функции f является необходимым для справедливости последнего утверждения предыдущей теоремы. Действительно, если $f(x) \equiv a + \langle v, x \rangle$ для некоторых $a > 0$ и $v \neq 0$, то полагая $S_f = \{(a, v)\}$ получим, что $a_* > 0$, однако функция f не является неотрицательной.
(ii) Из доказательства последнего утверждения предыдущей теоремы следует, что если выполняется условие $0 \notin S_f$, но $a_* = 0$, то f функция f не ограничена снизу. Следовательно, если f ограничена снизу, то она является неотрицательной на $\mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда $a_* \geqslant 0$. Кроме того, из доказательства также следует, что если $a_* < 0$, то $f(\frac{1}{a_*} v_*) < 0$.

Приведём простой пример иллюстрирующий теорему 1.1.2.

Пример 1.1.1. Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ и $S_f = \{(a, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (a+1)^2 + (v-1)^2 \leqslant 1\}$. Согласно теореме 1.1.2 имеем $f_* = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -1$. Кроме того, нетрудно проверить, что справедливо равенство $N_f = \{(a, v) \in \mathbb{R}^2 \mid a = 0, v \leqslant 0\}$, и поэтому согласно третьему пункту теоремы 1.1.2 функция f не достигает глобального минимума.

Проверим данные утверждения непосредственно. Действительно, для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливы равенства:

$$f(x) = \max_{(a,v) \in S_f} (a + vx) = \max\{(a-1) + (v+1)x \mid a^2 + v^2 \leqslant 1\} = \sqrt{1 + x^2} + x - 1.$$

Поэтому $f_* = -1$ и f не достигает глобального минимума.

С помощью теоремы 1.1.2 нетрудно установить взаимосвязь между аффинными опорными множествами функции f и сопряжённой функцией $f^*(v) = \sup_{x \in \mathcal{H}} (\langle v, x \rangle - f(x))$.

Предложение 1.1.1. *Пусть S_f — произвольное аффинное множество функции f. Тогда*

$$\sup\{a \mid (a, v) \in S_f\} = -f^*(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}. \tag{1.6}$$

В частности, любое аффинное опорное множество функции f содержится в множестве $\{(a, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \mid a \leqslant -f^*(v)\}$. Кроме того, множество

$$\begin{aligned} S_f &= \operatorname{cl} \operatorname{co}\{(-f^*(v), v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \mid v \in \operatorname{dom} f^*\} = \\ &= \operatorname{cl} \operatorname{co}\{(f(y) - \langle v, y \rangle, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \mid y \in \operatorname{dom} \partial f, \ v \in \partial f(y)\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

является наименьшим (по включению) аффинным опорным множеством функции f.

Доказательство. Зафиксируем $v \in \mathcal{H}$ и рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \langle v, x \rangle$. Заметим, что данная функция ограничена снизу тогда и только тогда, когда $v \in \operatorname{dom} f^*$. С другой стороны, из первой части теоремы 1.1.2 и того факта, что множество $S_f - (0, v)$ очевидно является аффинным опорным множеством функции g, следует, что функция g ограничена снизу тогда и только тогда, когда найдётся $a \in \mathbb{R}$ такое, что $(a, v) \in S_f$. Более того, если $v \in \operatorname{dom} f^*$, то, воспользовавшись второй частью теоремы 1.1.2, получим

$$-f^*(v) = \inf_{x \in \mathcal{H}} (f(x) - \langle v, x \rangle) = \sup\{a \mid (a, 0) \in S_f - (0, v)\} = \sup\{a \mid (a, v) \in S_f\},$$

то есть справедливо равенство (1.6) и включение $S_f \subseteq \{(a, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \mid a \leqslant -f^*(v)\}$. Отсюда и из равенства

$$f(x) = f^{**}(x) = \sup_{v \in \operatorname{dom} f^*} \big(\langle v, x \rangle - f^*(v) \big) \quad \forall x \in \mathcal{H} \tag{1.8}$$

следует, что множество (1.7) является наименьшим опорным множеством функции f. Остаётся заметить, что справедливость второго равенства в (1.7) непосредственно вытекает из двух следующих фактов: (i) супремум в (1.8) можно брать по всем $v \in \operatorname{dom} \partial f^*$, так как если $v \in \operatorname{dom} f^* \setminus \operatorname{dom} \partial f^*$, то для всех $x \in \mathcal{H}$ по определению существует $w \in \operatorname{dom} f^*$ такое, что $\langle w, x \rangle - f^*(w) > \langle v, x \rangle - f^*(v)$; (ii) $v \in \operatorname{dom} \partial f^*$ тогда и только тогда, когда $v \in \partial f(y)$ для некоторого $y \in \operatorname{dom} \partial f$ или, что эквивалентно, тогда и только тогда, когда $f^*(v) = \langle v, y \rangle - f(y)$ (см. [56, теорема 1.16.4]). □

Замечание 1.1.3. Предыдущее предложение устанавливает прямую связь между аффинными опорными множествами выпуклой функции f и её сопряжённой функцией f^*. Заметим, в частности, что функция $g(v)$, определённая в доказательстве теоремы 1.1.1 в действительности совпадает с $-f^*$. Более того, сама теорема 1.1.1 представляет из себя переформулировку известного описания ε-субградиентов выпукой функции через её сопряжённую функцию (см., например, [251, предложение XI.1.2.1]) в терминах аффинных опорных множеств. Кроме того, предложение 1.1.1 позволяет связать теорему 1.1.2 с некоторыми широко известными результатами из выпуклого анализа. Так, например, первые два утверждения данной теоремы являются переформулировкой очевидного равенства $\inf_{x \in \mathcal{H}} f(x) = -f^*(0)$. Третье утверждение является комбинацией равенства $\arg\min_{x \in \mathcal{H}} f(x) = \partial f^*(0)$ и описания субдифференциала выпуклой функции через нормальный конус к надграфику (см., например, [56, предложение 1.16.1]). Однако, насколько известно автору, последнее утверждение теоремы 1.1.2 является новым. Данное утверждение послужит основой для получения новых условий глобальной оптимальности для разности выпуклых функций в последующих параграфах и исследования сходимости метода кодифференциального спуска в кусочно-аффинном случае в главе 3.

Обозначим через $\operatorname{co} C$ выпуклую оболочку подмножества C некоторого вещественного топологического векторного пространства, а через $\operatorname{cl} C$ его замыкание. Здесь и далее под суммой множеств $A + B$ понимается сумма Минковского этих множеств. Непосредственно проверяется справедливость следующих правил вычисления аффинных опорных множеств выпуклых функций.

Предложение 1.1.2 (выпуклая комбинация)**.** *Пусть $f_i \colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in I = \{1, \ldots, k\}$ — собственные замкнутые выпуклые функции, а S_{f_i} — аффинные опорные множества этих функций. Тогда для любых $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in I$, множество $S_f = \operatorname{cl}(\sum_{i \in I} \lambda_i S_{f_i})$ является аффинным опорным множеством функции $f = \sum_{i \in I} \lambda_i f_i$, если $\operatorname{dom} f \neq \varnothing$.*

Предложение 1.1.3 (аффинное преобразование)**.** *Пусть $g \colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственная замкнутая выпуклая функция, а S_g — аффинное опорное множество функции g. Предположим также, что X — гильбертово пространство, $\mathcal{T} \colon X \to \mathcal{H}$ — линейный непрерывный оператор и $f(x) = g(\mathcal{T}x + b)$ для некоторого $b \in \mathcal{H}$. Тогда множество*

$$S_f = \operatorname{cl} \big\{ (a + \langle v, b \rangle, \mathcal{T}^* v) \in \mathbb{R} \times X \;\big|\; (a, v) \in S_g \big\} \tag{1.9}$$

является аффинным опорным множеством функции f. Кроме того, оператор замыкания в равенстве (1.9) *может быть отброшен, если множество S_g ограничено или оператор $\mathcal{T}$ обратим.*

Предложение 1.1.4 (супремум)**.** *Пусть Y — непустое множество, $f \colon \mathcal{H} \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ — заданная функция такая, что для любого $y \in Y$ функция $f(\cdot, y)$ является замкнутой, собственной и выпуклой. Предположим также, что для любого $y \in Y$ множество $S(y) \subset \mathbb{R} \times \mathcal{H}$ является аффинным опорным множеством функции $f(\cdot, y)$ и функция $g(\cdot) = \sup_{y \in Y} f(\cdot, y)$ является собственной. Тогда множество $S_g = \operatorname{cl} \operatorname{co}\{S(y) \mid y \in Y\}$ является аффинным опорным множеством функции g.*

Приведём несколько простых примеров вычисления аффинных опорных множеств выпуклых функций.

Пример 1.1.2. Если f — собственная замкнутая сублинейная функция, то множество $S_f = \{0\} \times \partial f(0)$ является аффинным опорным множеством функции f (см., например, [250, теорема V.3.1.1]).

Пример 1.1.3. Если $\mathcal{H} = \mathbb{R}^d$ и f — конечная выпуклая полиэдральная функция, то $f(x) = \max_{i \in 1:\, k}(a_i + \langle v_i, x \rangle)$ для некоторых $k \in \mathbb{N}$ и $(a_i, v_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, где $1 \colon k = \{1, \ldots, k\}$ (см. [65, параграф 19]). Следовательно, множество $S_f = \operatorname{co}\{(a_i, v_i) \mid i \in 1\colon k\}$ является аффинным опорным множеством функции f. Таким образом, конечная выпуклая функция f является полиэдральной тогда и только тогда, когда существует аффинное опорное множество этой функции являющееся выпуклым многогранником (т. е. выпуклой оболочкой конечного числа точек).

Пример 1.1.4. Если f дифференцируема по Гато на своём эффективном множестве $\operatorname{dom} f$ и $\nabla f(x)$ её градиент Гато в точке x, то по предложению 1.1.1 множество

$$S_f = \operatorname{cl}\operatorname{co}\Big\{\big(f(x) - \langle \nabla f(x), x\rangle, \nabla f(x)\big) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \Bigm| x \in \operatorname{dom} f\Big\}$$

является аффинным опорным множеством функции f. В частности, если f квадратичная функция вида $f(x) = 0.5\langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle$, где $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ неотрицательно определённый линейный непрерывный оператор, то множество $S_f = \operatorname{cl}\operatorname{co}\{(-0.5\langle x, Ax\rangle, Ax + b) \mid x \in \mathcal{H}\}$ является аффинным опорным множеством функции f.

1.1.2 Глобальные кодифференциалы и условия глобальной оптимальности

С помощью аффинных опорных множеств выпуклых функций можно естественным образом ввести *глобальный кодифференциал* разности выпуклых функций и получить новые условия глобальной оптимальности в задачах минимизации разности выпуклых функций.

Пусть $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ — произвольная DC (от англ. *Difference-of-Convex*) функция, то есть функцию f можно представить в виде $f = g - h$ для некоторых *замкнутых* выпуклых функций $g, h\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$. Пусть S_g и S_h — произвольные аффинные опорные множества функций g и h соответственно. Введём многозначные отображения

$$\underline{d}f(x) = \big\{(a - g(x) + \langle v, x\rangle, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} | (a, v) \in S_g\big\}, \tag{1.10}$$

$$\overline{d}f(x) = \big\{(-b + h(x) - \langle w, x\rangle, -w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} | (b, w) \in S_h\big\}. \tag{1.11}$$

Заметим, что для любых $x, \Delta x \in \mathcal{H}$ справедливо следующее равенство:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sup_{(a,v) \in \underline{d}f(x)} (a + \langle v, \Delta x\rangle) + \inf_{(b,w) \in \overline{d}f(x)} (b + \langle w, \Delta x\rangle) \tag{1.12}$$

(в действительности, супремум и инфимум в данном равенстве достигаются согласно замечанию 1.1.1). Действительно, по определению имеем

$$g(x + \Delta x) - g(x) = \sup_{(a,v) \in S_g} (a + \langle v, x + \Delta x\rangle) - g(x) = \sup_{(a,v) \in S_g} (a - g(x) + \langle v, x\rangle + \langle v, \Delta x\rangle) =$$

$$= \sup_{(a,v) \in \underline{d}f(x)} (a + \langle v, \Delta x\rangle).$$

Вычитая из этого равенства точно такое же равенство для функции $h(x)$ приходим к формуле (1.12). Отметим также, что для любого $x \in \mathcal{H}$ будет

$$\sup_{(a,v)\in \underline{d}f(x)} a = \sup_{(a,v)\in S_g} (a + \langle v, x\rangle) - g(x) = 0,$$

и аналогично $\inf_{(b,w)\in \overline{d}f(x)} b = 0$. Кроме того, множества $\underline{d}f(x)$ и $\overline{d}f(x)$ являются замкнутыми и выпуклыми, поскольку аффинное отображение $(a, v) \mapsto (a - g(x) + \langle v, x\rangle, v)$ является гомеоморфизмом пространства $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$. Таким образом, пара множеств $[\underline{d}f(x), \overline{d}f(x)]$ обладает свойствами, схожими со свойствами кодифференциала функции f в точке x [25, 26, 37, 134, 135]. Поэтому естественно называть пару $Df = [\underline{d}f, \overline{d}f]$ *глобальным кодифференциальным отображением* (или просто *глобальным кодифференциалом*) функции f, соответствующим DC разложению $f = g - h$. Многозначное отображение $\underline{d}f$ называется *глобальным гиподифференциалом* функции f, а многозначное отображение $\overline{d}f$ называется *глобальным гипердифференциалом* функции f. Очевидно, что существует бесконечно много глобальных кодифференциалов DC функции f, поскольку существует бесконечно много DC разложений данной функции (для любой выпуклой функции z можно представить $f = (g + z) - (h + z)$).

Приведём несколько простых правил вычисления глобальных кодифференциалов.

Теорема 1.1.3. *Пусть $f_i \colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, \dots k\}$ — DC функции, а Df_i — их глобальные кодифференциалы, соответствующие DC разложениям $f_i = g_i - h_i$, $i \in I$. Справедливы следующие утверждения:*

1. *если $f = f_1 + c$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$, то $Df = Df_1$;*

2. *если $f = \sum_{i=1}^k f_i$, то пара $Df = [\operatorname{cl}(\sum_{i=1}^k \underline{d}f_i), \operatorname{cl}(\sum_{i=1}^k \overline{d}f_i)]$ является глобальным кодифференциалом функции f, соответствующим DC разложению $f = \sum_{i=1}^k g_i - \sum_{i=1}^k h_i$;*

3. *если $f = \lambda f_1$, то в случае $\lambda \geqslant 0$ пара $Df = [\lambda \underline{d}f_1, \lambda \overline{d}f_1]$ является глобальным кодифференциалом функции f, соответствующим DC разложению $f = \lambda g_1 - \lambda h_1$, а в случае $\lambda < 0$ пара $Df = [\lambda \overline{d}f_1, \lambda \underline{d}f_1]$ является глобальным кодифференциалом функции f, соответствующим DC разложению $f = |\lambda| h_1 - |\lambda| g_1$;*

4. *если $f = \max_{i\in I} f_i$, то пара*
$$Df(\cdot) = \left[\operatorname{cl}\operatorname{co}\left\{(f_i(\cdot) - f(\cdot), 0) + \underline{d}f_i(\cdot) - \sum_{j\neq i} \overline{d}f_j(\cdot) \;\middle|\; i \in I\right\}, \operatorname{cl}\Big(\sum_{i=1}^k \overline{d}f_i(\cdot)\Big)\right]$$
является глобальным кодифференциалом функции f, соответствующим DC разложению $f = \max_{i\in I}\{g_i + \sum_{j\neq i} h_j\} - \sum_{i=1}^k h_i$;

5. если $f = \min_{i\in I} f_i$, то пара

$$Df(\cdot) = \Big[\operatorname{cl}\Big(\sum_{i=1}^{k} \underline{d} f_i(\cdot) \Big), \operatorname{cl}\operatorname{co}\Big\{ (f_i(\cdot) - f(\cdot), 0) + \overline{d} f_i(\cdot) - \sum_{j\neq i} \underline{d} f_j(\cdot) \;\Big|\; i \in I \Big\} \Big]$$

является глобальным кодифференциалом функции f, соответствующим DC разложению $f = \sum_{i=1}^k g_i - \max_{i\in I}\{h_i + \sum_{j\neq i} g_j\}$.

Доказательство. Пусть глобальные кодифференциалы Df_i построены по аффинным опорным множествам S_{g_i} и S_{h_i} функций g_i и h_i, $i \in I$, соответственно.

1. Положим $g = g_1 + c$ и $h = h_1$. Тогда представление $f = g - h$ является DC разложением функции f. Отсюда, в частности, следует, что $\overline{d} f = \overline{d} f_1$ (см. (1.11)). Ясно, что множество $S_g = S_{g_1} + (c, 0)$ является аффинным опорным множеством функции g. Следовательно, по формуле (1.10) будет $\underline{d} f = \underline{d} f_1$, что и требовалось доказать.

2. Положим $g = \sum_{i\in I} g_i$ и $h = \sum_{i\in I} h_i$. Поскольку сумма выпуклых функций является выпуклой, представление $f = g - h$ является DC разложением функции f. По предложению 1.1.2 множество $S_g = \operatorname{cl}(\sum_{i\in I} S_{g_i})$ является аффинным опорным множеством функции g, а множество $S_h = \operatorname{cl}(\sum_{i\in I} S_{h_i})$ является аффинным опорным множеством функции h.

Воспользуемся формулами (1.10) и (1.11) для вычисления глобального кодифференциала функции f. Для краткости мы вычислим только $\underline{d} f$. Зафиксируем $x \in \mathcal{H}$ и выберем произвольные элементы $z_i \in \underline{d} f_i(x)$. По определению $z_i = (a_i - g_i(x) + \langle v_i, x\rangle, v_i)$ для некоторых $(a_i, v_i) \in S_{g_i}$, $i \in I$, и $(a, v) = \sum_{i\in I}(a_i, v_i) \in S_g$. Поэтому

$$\underline{d} f(x) \ni (a - g(x) + \langle v, x\rangle, v) = \sum_{i=1}^{k} (a_i - g_i(x) + \langle v_i, x\rangle, v_i) = \sum_{i=1}^{k} z_i,$$

откуда следует, что $\operatorname{cl}(\sum_{i=1}^k \underline{d} f_i(x)) \subseteq \underline{d} f(x)$, поскольку множество $\underline{d} f(x)$ замкнуто.

Зафиксируем теперь произвольное $z \in \underline{d} f(x)$. Согласно (1.10) найдётся $(a, v) \in S_g$ такое, что $z = (a - g(x) + \langle v, x\rangle, v)$. По определению S_g для любого $\varepsilon > 0$ существуют $(a_i, v_i) \in S_{g_i}$ такие, что $\|(a, v) - \sum_{i\in I}(a_i, v_i)\| < \varepsilon$. Положим $z_i = (a_i - g_i(x) + \langle v_i, x\rangle, v_i)$, $i \in I$. По определению $z_i \in \underline{d} f_i(x)$ и

$$\Big\| z - \sum_{i=1}^{k} z_i \Big\| \leqslant \Big\| (a, v) - \sum_{i=1}^{k} (a_i, v_i) \Big\| + \Big\| v - \sum_{i=1}^{k} v_i \Big\| \|x\| \leqslant \varepsilon(1 + \|x\|).$$

Таким образом, для любых $\varepsilon > 0$ и $z \in \underline{d} f(x)$ существуют $z_i \in \underline{d} f_i(x)$, $i \in I$, такие, что $\|z - \sum_{i=1}^k z_i\| < \varepsilon$, откуда следует, что $\underline{d} f(x) \subseteq \operatorname{cl}(\sum_{i=1}^k \underline{d} f_i(x))$. Значит справедливо равенство $\underline{d} f(x) = \operatorname{cl}(\sum_{i=1}^k \underline{d} f_i(x))$, что и требовалось доказать.

3. Пусть $\lambda \geqslant 0$. Положим $g = \lambda g_1$ и $h = \lambda h_1$. Тогда представление $f = g - h$ является DC разложением функции f. Ясно, что множество $S_g = \lambda S_{g_1}$ является аффинным опорным множеством функции g, а множество $S_h = \lambda S_{h_1}$ является аффинным опорным множеством функции h.

Зафиксируем $x \in \mathcal{H}$. Покажем, что $\underline{d}f(x) = \lambda \underline{d}f_1(x)$. Для этого воспользуемся определением глобального гиподифференциала (1.10). Имеем

$$\begin{aligned}\underline{d}f(x) &= \big\{(a - g(x) + \langle v, x\rangle, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \bigm| (a, v) \in \lambda S_{g_1}\big\} = \\ &= \big\{\lambda(a - g_1(x) + \langle v, x\rangle, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \bigm| (a, v) \in S_{g_1}\big\} = \\ &= \lambda\big\{(a - g_1(x) + \langle v, x\rangle, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \bigm| (a, v) \in S_{g_1}\big\} = \lambda \underline{d}f(x).\end{aligned}$$

Аналогичным образом доказывается, что $\overline{d}f(x) = \lambda \overline{d}f_1(x)$.

Пусть теперь $\lambda < 0$. Положим $g = |\lambda| h_1$ и $h = |\lambda| g_1$. Тогда представление $f = -|\lambda| f_1 = g - h$ является DC разложением функции f. Ясно, что множество $S_g = |\lambda| S_{h_1}$ является аффинным опорным множеством функции g, а множество $S_h = |\lambda| S_{g_1}$ является аффинным опорным множеством функции h.

Зафиксируем $x \in \mathcal{H}$ и покажем, что $\underline{d}f(x) = \lambda \overline{d}f_1(x)$. Для этого воспользуемся определением глобального кодифференциала (1.10) и (1.11). Имеем

$$\begin{aligned}\underline{d}f(x) &= \big\{(a - g(x) + \langle v, x\rangle, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \bigm| (a, v) \in |\lambda| S_{h_1}\big\} = \\ &= \big\{|\lambda|(b - h_1(x) + \langle w, x\rangle, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \bigm| (b, w) \in S_{h_1}\big\} = \\ &= \lambda\big\{(-b + h_1(x) - \langle w, x\rangle, -w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \bigm| b, w) \in S_{h_1}\big\} = \lambda \overline{d}f_1(x).\end{aligned}$$

Аналогичным образом доказывается, что $\overline{d}f(x) = \lambda \underline{d}f_1(x)$.

4. Положим $g = \max_{i \in I}\{g_i + \sum_{j \neq i} h_j\}$ и $h = \sum_{i=1}^k h_i$. Функции g и h выпуклы, поскольку сумма и максимум выпуклых функций является выпуклыми функциями. Кроме того, прибавляя и отнимая $\sum_{i \in I} h_i$, получим

$$f(x) = \max_{i \in I}(g_i(x) - h_i(x)) = \max_{i \in I}\Big\{g_i + \sum_{j \neq i} h_j\Big\} - \sum_{i=1}^k h_i = g - h$$

для любого $x \in \mathcal{H}$, то есть представление $f = g - h$ является DC разложением функции f. Вычислим глобальный кодифференциал функции f, соответствующим данному DC разложению.

Поскольку $h = \sum_{i \in I} h_i$, то, рассуждая как и при доказательства пункта 2, получим, что $\overline{d}f(\cdot) = \operatorname{cl}(\sum_{i \in I} \overline{d}f_i(\cdot))$. Докажем формулу для $\underline{d}f$. Для этого зафиксируем $x \in \mathcal{H}$ и воспользуемся формулами (1.10) и (1.11).

Выберем произвольные $i \in I$, $z_i \in \underline{d}f_i(x)$ и $u_j \in \overline{d}f_j(x)$, $j \neq i$. По определению существуют $(a_i, v_i) \in S_{g_i}$ и $(b_j, w_j) \in S_{h_j}$, $j \neq i$, такие, что $z_i = (a_i - g_i(x) + \langle v_i, x\rangle, v_i)$ и

$u_j = (-b_j + h_j(x) - \langle w_j, x\rangle, -w_j)$. Заметим, что согласно предложениям 1.1.2 и 1.1.4 множество $S_g = \operatorname{cl}\operatorname{co}\{S_{g_i} + \sum_{j\neq i} S_{h_j} \mid i \in I\}$ является аффинным опорным множеством функции g. Поэтому $(a, v) = (a_i, v_i) + \sum_{j\neq i}(b_j, w_j) \in S_g$ и $z = (a - g(x) + \langle v, x\rangle, v) \in \underline{d}f(x)$. Прибавляя и отнимая сначала $\sum_{i\in I} h_i(x)$, а затем $g_i(x)$, получим

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{i\in I}\Big(g_i(x) + \sum_{j\neq i} h_j(x)\Big) = \max_{i\in I}(g_i(x) - h_i(x)) + \sum_{i\in I} h_i(x) = \\ &= f(x) + g_i(x) - g_i(x) + \sum_{i\in I} h_i(x) = f(x) - f_i(x) + \Big(g_i(x) + \sum_{j\neq i} h_j(x)\Big). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Следовательно,

$$z = \Big(a_i + \sum_{j\neq i} b_j - g(x) + \Big\langle v_i + \sum_{j\neq i} w_j, x\Big\rangle, v_i + \sum_{j\neq i} w_j\Big) = (f_i(x) - f(x), 0) + z_i - \sum_{j\neq i} u_j,$$

то есть $(f_i(x) - f(x), 0) + \underline{d}f_i(x) + \sum_{j\neq i}\overline{d}f_j(x) \subseteq \underline{d}f(x)$. В силу того, что $i \in I$ было выбрано произвольно, а множество $\underline{d}f(x)$ выпукло и замкнуто, имеем

$$\operatorname{cl}\operatorname{co}\Big\{(f_i(x) - f(x), 0) + \underline{d}f_i(x) - \sum_{j\neq i}\overline{d}f_j(x) \;\Big|\; i \in I\Big\} \subseteq \underline{d}f(x).$$

Докажем справедливость обратного включения. Для этого обозначим множество, стоящее в левой части данного включения, через $D(x)$.

Зафиксируем произвольное $z \in \underline{d}f(x)$. По определению глобального гиподифференциала (1.10) найдётся $(a, v) \in S_g$ такое, что $z = (a - g(x) + \langle v, x\rangle, v)$. В свою очередь, по определению S_g для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\alpha_i \geqslant 0$, $i \in I$, $(a_i, v_i) \in S_{g_i}$ и $(b_{ij}, w_{ij}) \in S_{h_j}$, $i \in I$, $j \neq i$, такие, что $\sum_{i\in I}\alpha_i = 1$ и $\|(a, v) - (\widehat{a}, \widehat{v})\| < \varepsilon$, где

$$(\widehat{a}, \widehat{v}) = \sum_{i\in I}\alpha_i\Big((a_i, v_i) + \sum_{j\neq i}(b_{ij}, w_{ij})\Big).$$

Положим $z_i = (a_i - g_i(x) + \langle v_i, x\rangle, v_i) \in \underline{d}f_i(x)$, $u_{ij} = (-b_{ij} + h_j(x) - \langle w_{ij}, x\rangle, -w_{ij}) \in \overline{d}f_j(x)$ и

$$\widehat{z} = \sum_{i\in I}\alpha_i\Big((f_i(x) - f(x), 0) + z_i - \sum_{j\neq i} u_{ij}\Big) \in D(x).$$

Воспользовавшись равенствами (1.13), нетрудно проверить, что $\widehat{z} = (\widehat{a} - g(x) + \langle\widehat{v}, x\rangle, \widehat{v})$. Поэтому

$$\|z - \widehat{z}\| \leqslant \|(a, v) - (\widehat{a}, \widehat{v})\| + \|v - \widehat{v}\|\|x\| \leqslant \varepsilon(1 + \|x\|).$$

Таким образом, для любых $\varepsilon > 0$ и $z \in \underline{d}f(x)$ существует $\widehat{z} \in D(x)$ такое, что $\|z - \widehat{z}\| < \varepsilon$. Поскольку множество $D(x)$ замкнуто, отсюда следует, что $\underline{d}f(x) \subseteq D(x)$. Таким образом, справедливо равенство $\underline{d}f(x) = D(x)$, что и требовалось доказать.

5. Данное утверждение доказывается последовательным применением пункта 3 данной теоремы с $\lambda = -1$, затем пункта 4 и вновь пункта 3 с $\lambda = -1$ к представлению $f = -\max_{i\in I}(-f_i)$. $\square$

Перейдём к изучению условий глобальной оптимальности для задач минимизации разности выпуклых функций.

Теорема 1.1.4. *Предположим, что f — ограниченная снизу DC функция, Df — её глобальный кодифференциал, а $x_* \in \mathcal{H}$ — заданная точка. Пусть также $C \subseteq \overline{d}f(x_*)$ — произвольное непустое множество такое, что $\overline{d}f(x_*) = \operatorname{cl}\operatorname{co} C$. Тогда для того чтобы точка x_* являлась точкой глобального минимума функции f необходимо и достаточно, чтобы для любого $z \in C$ выполнялось неравенство $a(z) \geqslant 0$, где $(a(z), v(z))$ — точка глобального минимума в задаче*

$$\|(a, v)\|^2 \to \min_{(a,v) \in \underline{d}f(x_*) + z}.$$

Доказательство. Из определения глобального кодифференциала и равенства $\overline{d}f(x_*) = \operatorname{cl}\operatorname{co} C$ следует, что

$$f(x) - f(x_*) = \sup_{(a,v) \in \underline{d}f(x_*)} (a + \langle v, x - x_* \rangle) + \inf_{(b,w) \in C} (b + \langle w, x - x_* \rangle).$$

Следовательно, x_* является точкой глобального минимума функции f тогда и только тогда, когда для любых $z \in C$ выполняется неравенство

$$\sup_{(a,v) \in \underline{d}f(x_*) + z} (a + \langle v, x - x_* \rangle) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Заметим, что функция в левой части данного неравенства ограничена снизу константой $\inf_{x \in \mathcal{H}} f(x) - f(x_*) > -\infty$. Поэтому, воспользовавшись последним утверждением теоремы 1.1.2 и замечанием 1.1.2, получим, что x_* является точкой глобального минимума функции f тогда и только тогда, когда $a(z) \geqslant 0$ для всех $z \in C$. $\square$

Замечание 1.1.4. (i) Из доказательства теорем 1.1.2 и 1.1.4 (см. также замечание 1.1.2) следует, что если x_* не является точкой глобального минимума функции f, то найдётся $z \in C$ такое, что $a(z) < 0$. Более того, для любого такого $z \in C$ справедливо неравенство $f(x_* + a(z)^{-1} v(z)) < f(x_*)$. Таким образом, необходимые и достаточные условия глобального минимума из предыдущей теоремы позволяют не только проверить достигается ли в заданной точке глобальный минимум, но и найти направления «глобального спуска» $v(z)$ и точки с меньшими значениями функции f, если условия не выполнены. Таким образом, можно сказать, что условия глобальной оптимальности в терминах глобальных кодифференциалов в некоторой степени являются конструктивными. В частности, с их помощью возможно разработать численные методы минимизации разности выпуклых функций, использующие полиэдральные аппроксимации глобальных кодифференциалов (ср. численные методы в работах [97, 383]).

(ii) Ясно, что в большинстве частных случаев условия глобальной оптимальности из теоремы 1.1.4 представляют лишь теоретический интерес, поскольку чаще всего глобальный кодифференциал заданной DC функции невозможно вычислить в явном виде. Однако, аналогичное замечание справедливо и для многих других условий глобальной оптимальности. В частности, оно справедливо для хорошо известных условий глобальной оптимальности в терминах ε-субдифференциалов [247–249], поскольку на практике задача вычисления ε-субдифференциала выпуклой функции для всех $\varepsilon \geqslant 0$ разрешима только для некоторых очень узких классов выпуклых функций (см., например, [293]). Тем не менее, в случае, когда функция f является кусочно-аффинной, всегда существует глобальный кодифференциал функции f, представляющий из себя пару выпуклых многогранников [239]. В этом случае глобальный кодифференциал может быть легко вычислен с помощью теоремы 1.1.3, и с помощью условий глобальной оптимальности из теоремы 1.1.4 оказывается возможным построить эффективный численный метод глобальной минимизации кусочно-аффинных функций (см. параграф 3.4).

Перейдём к изучению задач DC оптимизации с ограничениями. Сначала рассмотрим задачу с ограничениями-неравенствами вида:

$$f_0(x) \to \min_{x \in \mathcal{H}}, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i \in I, \tag{$\mathcal{P}_I$}$$

где $f_i \colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, $i \in 0 \cup I$, $I = \{1, \ldots, m\}$, — заданные DC функции. Обозначим через Ω допустимое множество данной задачи (т. е. множество точек, удовлетворяющих ограничениям). Для того чтобы получить условия глобальной оптимальности необходимо сделать определённые предположения о регулярности ограничений. А именно, мы будем говорить, что в точке $x_0 \in \Omega$ выполнено *условие регулярности типа внутренней точки*, если $x_0 \in \operatorname{cl}\{x \in \mathcal{H} \mid f_i(x) < 0 \; i \in I\}$ или, что эквивалентно, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in \Omega$ такое, что $\|y - x\| < \varepsilon$ и $f_i(y) < 0$ для всех $i \in I$. Нетрудно проверить, что в случае когда все ограничения являются выпуклыми (т. е. функции f_i, $i \in I$, выпуклы), данное условие регулярности эквивалентно условию Слейтера. Заметим также, что условие регулярности типа внутренней точки выполнено в точке x_0, в частности, если в точке x_0 выполняется негладкое условие регулярности Мангасаряна-Фромовица, то есть существует $v \in \mathcal{H}$ такое, что $f_i'(x_0, v) < 0$ для всех $i \in I$ таких, что $f_i(x_0) = 0$, где $f_i'(x_0, \cdot)$ — производная по направлениям функции f_i в точке x_0. Наконец, отметим, что условие регулярности типа внутренней точки обобщается т.н. условие робастности из работы [254].

Теорема 1.1.5. *Пусть функция f_0 ограничена снизу на множестве Ω, x_* — допустимая точка задачи $(\mathcal{P}_I)$ и существует точка глобального минимума данной задачи, в которой* *выполнено условие регулярности типа внутренней точки. Предположим также, что* Df_i *— глобальные кодифференциалы функций* f_i*,* $i \in I \cup \{0\}$*, а множества* $C_i \subseteq \overline{d} f_i(x_*)$ *удовлетворяют условию* $\overline{d} f_i(x_*) = \operatorname{cl}\operatorname{co} C_i$*,* $i \in I \cup \{0\}$*. Тогда для того чтобы точка* x_* *являлась точкой глобального минимума в задаче* $(\mathcal{P}_I)$ *необходимо и достаточно, чтобы для всех* $z_i \in C_i$*,* $i \in I \cup \{0\}$*, выполнялось неравенство* $a(z) \geqslant 0$*, где* $z = (z_0, z_1, \ldots, z_m)$ *и* $(a(z), v(z))$ *— точка глобального минимума в задаче*

$$\|(a,v)\|^2 \to \min_{(a,v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}}, \quad (a,v) \in L(z) = \operatorname{cl}\operatorname{co}\{\underline{d} f_0(x_*) + z_0,\, \underline{d} f_i(x_*) + z_i + (f_i(x_*), 0) \mid i \in I\}.$$

Доказательство. Воспользуемся стандартным приёмом сведения экстремальной задачи с ограничениями-неравенствами к задаче безусловной оптимизации, впервые предложенным Б.Н. Пшеничным [62]. Для этого введём функцию $F(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_*), f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$, $x \in \mathcal{H}$. Заметим, что $F(x_*) = 0$, поскольку x_* — допустимая точка задачи $(\mathcal{P}_I)$. Проверим, что точка x_* является точкой глобального минимума в задаче $(\mathcal{P}_I)$ тогда и только тогда, когда она является точкой глобального минимума функции F.

Действительно, предположим, что x_* — точка глобального минимума в задаче $(\mathcal{P}_I)$. Если $F(x) < 0$ для некоторого $x \in \mathcal{H}$, то $x \in \Omega$ и $f_0(x) < f_0(x_*)$, что противоречит нашему предположению. Поэтому $F(x) \geqslant F(x_*) = 0$ для всех $x \in \mathcal{H}$, т. е. x_* — точка глобального минимума функции F. Пусть x_* — точка глобального минимума функции F. По определению $F(x) \geqslant F(x_*) = 0$ для всех $x \in \mathcal{H}$. Отсюда, в частности, следует, что для любого x, удовлетворяющего неравенству $f_i(x) < 0$ для всех $i \in I$ будет $f_0(x) \geqslant f_0(x_*)$. Таким образом, x_* — точка глобального минимума в задаче

$$f_0(x) \to \min_{x \in \mathcal{H}}, \quad x \in \{x_*\} \cup \{y \in \mathcal{H} \mid f_i(y) < 0\, \forall i \in I\}.$$

Функция f_0 непрерывна, как разность конечных замкнутых выпуклых функций, определённых на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (см., например, [78, следствие I.2.5]). Поэтому x_* — точка глобального минимума функции f_0 на множестве $\{x_*\} \cup \operatorname{cl}\{y \in \mathcal{H} \mid f_i(y) < 0\, \forall i \in I\}$. По нашему предположению существует точка глобального минимума y_* в задаче $(\mathcal{P}_I)$, в которой выполнено условие регулярности типа внутренней точке. Согласно данному условию $y_* \in \operatorname{cl}\{y \in \mathcal{H} \mid f_i(y) < 0\, \forall i \in I\}$, откуда следует, что $f(x_*) \leqslant f(y_*)$. Данное неравенство означает, что x_* является точкой глобально минимума в задаче $(\mathcal{P}_I)$. Таким образом, точка x_* является точкой глобального минимума в задаче $(\mathcal{P}_I)$ тогда и только тогда, когда она является точкой глобального минимума функции F.

Из определения глобального кодифференциала (см. (1.12)) следует, что

$$F(x) = \max_{i \in I} \Big\{ \sup_{(a,v) \in \underline{d} f_0(x_*)} (a + \langle v, x - x_* \rangle) + \inf_{(b,w) \in \overline{d} f_0(x_*)} (b + \langle w, x - x_* \rangle),$$

$$f_i(x_*) + \sup_{(a,v) \in \underline{d} f_i(x_*)} (a + \langle v, x - x_* \rangle) + \inf_{(b,w) \in \overline{d} f_i(x_*)} (b + \langle w, x - x_* \rangle) \Big\}.$$

Поэтому, как нетрудно заметить, x_* является точкой глобального минимума функции F тогда и только тогда, когда для любых $z_i \in C_i$, $i \in I \cup \{0\}$ функция

$$F_z(x) = \max_{i \in I} \Big\{ \sup_{(a,v) \in \underline{d} f_0(x_*) + z_0} (a + \langle v, x - x_* \rangle), f_i(x_*) + \sup_{(a,v) \in \underline{d} f_i(x_*) + z_i} (a + \langle v, x - x_* \rangle) \Big\}$$

неотрицательна. Заметим, что $F_z(x) \geqslant F(x) \geqslant f_0(x) - f_0(x_*) \geqslant \inf_{x \in \Omega} f_0(x) - f_0(x_*) > -\infty$ для любого $x \in \Omega$ и $F_z(x) \geqslant F(x) > 0$ для всех $x \notin \Omega$, т. е. функция F_z ограничена снизу на всём пространстве. Отсюда, учитывая, что множество $L(z)$ из формулировки теоремы очевидно является аффинным опорным множеством функции F_z, и применяя последнее утверждение теоремы 1.1.2, получаем требуемый результат. $\square$

Замечание 1.1.5. Как и в случае условий оптимальности из теоремы 1.1.4, условия глобальной оптимальности из предыдущей теоремы являются в некоторой степени конструктивными. А именно, нетрудно проверить, что если x_* не является точкой глобального минимума в задаче $(\mathcal{P}_I)$, то для всех $z_i \in C_i$, $i \in I \cup \{0\}$, таких, что $a(z) < 0$ (такие z_i существуют по теореме 1.1.5) будет $f_0(x_* + a(z)^{-1} v(z)) < f_0(x_*)$ и $f_i(x_* + a(z)^{-1} v(z)) < 0$ для всех $i \in I$. Таким образом, если x_* не является точкой глобального минимума в задаче $(\mathcal{P}_I)$, то с помощью условий глобальной оптимальности из теоремы 1.1.5 можно найти точку с меньшим значением целевой функции, лежащую во *внутренности* допустимого множества, что указывает на связь данных условий с методами внутренней точки.

Приведём простой пример, иллюстрирующий теорему 1.1.5.

Пример 1.1.5. Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ и задача $(\mathcal{P}_I)$ имеет вид

$$f_0(x) = |x - 4| \to \min, \quad f_1(x) = \min\{|x - 2|, |x + 2|\} - 1 \leqslant 0. \tag{1.14}$$

Пусть также $x_0 = -1$. Легко заметить, что в данном случае $\Omega = [-3, -1] \cup [1, 3]$ и условие регулярности типа внутренней точки выполнено в единственной точке глобального минимума $x_* = 3$ в задаче (1.14). Кроме того, x_0 является точкой локального минимума в данной задаче. Проверим, что в ней не выполнены условия глобальной оптимальности.

Воспользовавшись теоремой 1.1.3, получим

$$\underline{d} f_0(x_0) = \operatorname{co} \left\{ \left(\begin{smallmatrix} -10 \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \right) \right\}, \quad \overline{d} f_0(x_0) = \{0\},$$

$$\underline{d} f_1(x_0) = \operatorname{co} \left\{ \left(\begin{smallmatrix} -6 \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} -8 \\ 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -2 \end{smallmatrix} \right) \right\}, \quad \overline{d} f_1(x_0) = \operatorname{co} \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right\}.$$

Пусть $C_0 = \{0\}$, а C_1 совпадает с множеством крайних точек $\overline{d} f_1(x_0)$. Нетрудно проверить, что в данном случае

1. $0 \in L(z)$ для $z = (z_0, z_1)$ при $z_0 = (0,0)^T \in C_0$, $z_1 = (4,1)^T \in C_1$, $z_1 = (6,-1)^T \in C_1$ и $z_1 = (0,1)^T \in C_1$;
2. $(a(z), v(z)) = (-0,1; -0,3)$ для $z = (z_0, z_1)$ при $z_0 = (0,0)^T \in C_0$ и $z_1 = (2,-1)^T \in C_1$.

Таким образом, условия глобальной оптимальности из теоремы 1.1.5 не выполнены в точке x_0. Кроме того, заметим, что в случае $z_1 = (2,-1)^T$ будет $x_1 = x_0 + a(z)^{-1} v(z) = 2$, причём $f_0(x_1) = 2 < 5 = f_0(x_0)$ и $f_1(x_1) = -1 < 0$. Значит, с помощью условий глобальной оптимальности удалось найти точку из внутренности допустимого множества Ω, в которой значение целевой функции меньше, чем в точке x_0.

Рассмотрим теперь общую задачу DC оптимизации с ограничениями равенствами и неравенствами вида

$$f_0(x) \to \min_{x \in \mathcal{H}}, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i \in I, \quad f_j(x) = 0, \quad j \in J, \qquad (\mathcal{P}_{IJ})$$

где f_i, $i \in \{0\} \cup I \cup J$, $I = \{1, \ldots, m\}$, $J = \{m+1, \ldots, m+\ell\}$ — заданные DC функции. Обозначим через Ω допустимое множество задачи $(\mathcal{P}_{IJ})$ и положим

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \max\{0, f_i(x)\} + \sum_{j=m+1}^{m+\ell} |f_j(x)|.$$

Заметим, что $\Omega = \{x \in \mathcal{H} \mid \varphi(x) = 0\}$.

Введём штрафную функцию $F_c(x) = f_0(x) + c\varphi(x)$ для задачи $(\mathcal{P}_{IJ})$. Функция F_c является DC функцией. Действительно, если $f_i = g_i - h_i$ для некоторых выпуклых функций g_i и h_i, $i \in \{0\} \cup I \cup J$, то

$$F_c(x) = g_0(x) - h_0(x) + c\Big(\sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x) - h_i(x)\} + \sum_{j=m+1}^{m+\ell} |g_j(x) - h_j(x)| \Big) = G_c(x) - H_c(x),$$

где

$$G_c(x) = g_0(x) + c\Big(\sum_{i=1}^{m} \max\{g_i(x), h_i(x)\} + 2 \sum_{j=m+1}^{m+\ell} \max\{g_j(x), h_j(x)\} \Big),$$

$$H_c(x) = h_0(x) + c\Big(\sum_{i=1}^{m} h_i(x) + \sum_{j=m+1}^{m+\ell} (g_j(x) + h_j(x)) \Big).$$

Представление $F_c = G_c - H_c$ очевидно является DC разложением штрафной функции F_c.

Покажем, что при некоторых предположения штрафная функция F_c является *глобально точной*, то есть что существует $c_* \geqslant 0$ такое, что для любого $c \geqslant c_*$ множество точек глобального минимума функции F_c совпадает с множеством точек глобального минимума в задаче $(\mathcal{P}_{IJ})$. Точная нижняя грань всех таких c_* называется *наименьшим точным штрафным параметром* функции F_c. Глобальная точность штрафной функции F_c позволяет не только легко получить условия глобальной оптимальности для задачи $(\mathcal{P}_{IJ})$ с помощью теоремы 1.1.4, но и применять методы безусловной глобальной оптимизации DC функций для решения задачи DC оптимизации с ограничениями.

Для простоты изложения мы ограничимся доказательством точности функции F_c в конечномерном случае. Данный результат может быть распространён на бесконечномерный случай с помощью теоремы 4.3.1 или общих результатов теории точных штрафных функций в бесконечномерных пространствах из работ автора [183, 186].

Теорема 1.1.6. *Предположим, что пространство $\mathcal{H}$ конечномерно и для любой точки глобального минимума x_* задачи $(\mathcal{P}_{IJ})$ существуют $\tau > 0$ и окрестность U точки x_* такие, что*

$$\varphi(x) \geqslant \tau \operatorname{dist}(x, \Omega) := \tau \inf_{y \in \Omega} \|x - y\| \quad \forall x \in U. \tag{1.15}$$

Тогда штрафная функция F_c является глобально точной тогда и только тогда, когда существует $c \geqslant 0$ такое, что множество $\{x \in \mathcal{H} \mid F_c(x) < f_*\}$ ограничено, где f_* — оптимальное значение задачи $(\mathcal{P}_{IJ})$. В частности, штрафная функция F_c является глобально точной, если эта функция ограничена снизу для некоторого $c \geqslant 0$ и множество

$$\Omega(\alpha) = \Big\{ x \in \mathcal{H} \mid f_0(x) < f_* + \alpha, \ f_i(x) < \alpha, \ i \in I, \ |f_j(x)| < \alpha, \ j \in J \Big\}$$

ограничено для некоторого $\alpha > 0$.

Доказательство. Пусть x_* — точка глобального минимума в задаче $(\mathcal{P}_{IJ})$. Заметим, что функция f_0 является локально липшицевой, как разность конечных выпуклых функций определённых на конечномерном пространстве (напомним, что в конечномерном случае выпуклая функция является локально липшицевой во внутренности своей эффективной области; см., например, [65, теорема 10.4]). Отсюда, учитывая выполнение неравенства (1.15), получаем, что штрафная функция F_c является локально точной в точке x_* по теореме 4.1.5, т. е. существуют $c_*(x_*) \geqslant 0$ и окрестность $U(x_*)$ точки x_* такие, что $F_c(x) \geqslant F_c(x_*)$ для всех $x \in U(x_*)$ и $c \geqslant c_*(x_*)$.

Таким образом, штрафная функция F_c является локально точной в каждой точке глобального минимума в задаче $(\mathcal{P}_{IJ})$. Поэтому согласно принципу локализации для линейных точных штрафных функций (теорема 4.1.4) функция F_c является глобально точной тогда и только тогда, когда существует $c \geqslant 0$ такое, что множество $\{x \in \mathcal{H} \mid F_c(x) < f_*\}$ ограничено.

Предположим, что функция F_{c_0} ограничена снизу для некоторого $c_0 \geqslant 0$ и множество $\Omega(\alpha)$ ограничено для некоторого $\alpha > 0$. Проверим, что в данном случае для любого достаточно большого $c \geqslant 0$ справедливо включение $\{x \mid F_c(x) < f_*\} \subset \Omega(\alpha)$. Тогда по первой части теоремы можно заключить, что функция F_c является глобально точной.

Действительно, если $x \notin \Omega(\alpha)$, то, либо $f_0(x) \geqslant f_* + \alpha$, либо $\varphi(x) \geqslant \alpha$. В первом случае будет $F_c(x) \geqslant f_0(x) > f_*$ для любого $c \geqslant 0$ в силу неотрицательности функции φ, в то время как во втором случае

$$F_c(x) = F_{c_0}(x) + (c - c_0)\varphi(x) \geqslant \eta + (c - c_0)\alpha > f_*$$

для всех $c > c_0 + (f_* - \eta)/\alpha$, где $\eta = \inf_{x \in \mathcal{H}} F_{c_0}(x)$. Таким образом, $\{x \mid F_c(x) < f_*\} \subset \Omega(\alpha)$ для всех $c > c_0 + (f_* - \eta)/\alpha$, что и требовалось доказать. □

Замечание 1.1.6. (i) Доказательство предыдущей теоремы основано на предположении о том, что в некоторой окрестности каждой точки глобального минимума выполняется неравенство (1.15), то есть функция φ допускает локальную оценку уклонения от допустимого множества.[1] Данное предположение может быть проверено с помощью большого числа общих результатов о метрической субрегулярности многозначных отображений и оценках уклонения от множества решений (см., например, [89, 230, 292]). В частности, если все функции f_i, $i \in I \cup J$, являются непрерывно дифференцируемыми в окрестности точки глобального минимума x_* в задаче $(\mathcal{P}_{IJ})$, то для выполнения неравенства (1.15) в некоторой окрестности x_* достаточно, чтобы в x_* выполнялось условие регулярности Мангасаряна-Фромовица. Заметим также, что в некоторых частных случаях возможно использовать свойства DC функций, чтобы доказать выполнение неравенства (1.15) без каких-либо дополнительных предположений. Подобного рода результаты и их приложения к доказательству точности штрафных функций изучались в статье [298] для задач с ограничениями-неравенствами.
(ii) Заметим, что теорема 1.1.6 существенно усиливает предложение 1 из недавней работы [378], поскольку в отличие от даннной работы мы не предполагаем, что функция f_0 является глобально липшицевой, и предполагаем, что неравенство (1.15) выполняется лишь в окретностях точек глобального минимума, а не на всём пространстве. Кроме того, теорема 1.1.6 содержит необходимые и достаточные условия глобальной точности штрафной функции F_c, в то время как в работе [378] получены лишь достаточные условия.

Применяя условия глобальной оптимальности из теоремы 1.1.4 к функции $F_c(x)$, нетрудно получить необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности в терминах глобальных кодифференциалов для задачи $(\mathcal{P}_{IJ})$, справедливые в предположениях

[1] В англоязычной литературе используется терминология «φ has a local error bound».

теоремы 1.1.6. Для краткости мы не приводим точную формулировку данного результата (см. теорему 4 в работе автора [197]).

Рассмотрим простой пример применения теоремы 1.1.6.

Пример 1.1.6. Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ и $x = (x^{(1)}, x^{(2)})^T \in \mathbb{R}^2$. Рассмотрим следующую задачу

$$f_0(x) = |x^{(1)} - 2| + 2|x^{(2)}| \to \min_{x \in \mathbb{R}^2}, \quad f_1(x) = |x^{(1)}| - |x^{(2)}| = 0. \tag{1.16}$$

Штрафная функция для данной задачи имеет вид

$$F_c(x) = |x^{(1)} - 2| + 2|x^{(2)}| + c\big||x^{(1)}| - |x^{(2)}|\big|.$$

Непосредственно проверяется, что функция $\varphi(x) = ||x^{(1)}| - |x^{(2)}||$ допускает оценку уклонения (1.15) в единственной точке глобального минимума $x_* = (0,0)^T$ в задаче (1.16). Отсюда, учитывая, что $f_0(x) \to +\infty$ при $\|x\| \to +\infty$, получаем, что штрафная функция F_c для задачи (1.16) является глобально точной по теореме 1.1.6. Оценим величину наименьшего точного штрафного параметра функции F_c.

Нетрудно видеть, что функция f_0 является глобально липшицевой с константой Липшица $L = \sqrt{5}$ и

$$\varphi^{\downarrow}(x) = \liminf_{y \to x} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{|y - x|} \leqslant -1 \quad \forall x \notin \Omega,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма. Величина $\varphi^{\downarrow}(x)$ называется *скоростью наискорейшего спуска* функции φ в точке x (см., например, [140, 186]). Отметим, что условие $f^{\downarrow}(x) \geqslant 0$ является необходимым условием локального минимума.

Для любых $c > \sqrt{5}$ и $x \notin \Omega$ будет $F_c^{\downarrow}(x) \leqslant L + c\varphi^{\downarrow}(x) < 0$. Следовательно, точки локального и глобального минимума функции F_c заведомо принадлежат допустимому множеству Ω при $c > \sqrt{5}$ и потому совпадают с точками локального и глобального минимума в задаче (1.16), так как $F_c(x) = f_0(x)$ для всех $x \in \Omega$. Отсюда можно сделать вывод, что наименьший точный штрафной параметр функции F_c не превосходит $\sqrt{5}$. Поэтому положим $c = 3$.

Проверим выполнение условий глобальной оптимальности для задачи (1.16) в точке $x_0 = (2,0)^T$, которая является точкой безусловного глобального минимума целевой функции f_0. Для этого применим условия оптимальности из теоремы 1.1.4 к функции F_c при $c = 3$.

Воспользовавшись теоремой 1.1.3, получим

$$\underline{d}f_0(x_0) = \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \overline{d}f_0(x_0) = \{0\},$$
$$\underline{d}f_1(x_0) = \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \overline{d}f_1(x_0) = \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Кроме того, $DF_3(x_0) = [\underline{d}f_0(x_0) + 3\underline{d}\varphi(x_0), \overline{d}f_0(x_0) + 3\overline{d}\varphi(x_0)]$, где

$$\underline{d}\varphi(x_0) = \operatorname{co}\left\{\underline{d}f_1(x_0) + \underline{d}f_1(x_0), \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - \overline{d}f_1(x_0) - \overline{d}f_1(x_0)\right\}$$

и $\overline{d}\varphi(x_0) = \overline{d}f_1(x_0) - \underline{d}f_1(x_0)$. Подставляя в данные выражения гипо- и гипер-дифференциалы функций f_0 и f_1 нетрудно вычислить глобальный кодифференциал штрафной функции. Гиподифференциал $\underline{d}F_3(x_0)$ представляет из себя выпуклую оболочку 20 точек и мы его здесь не приводим для краткости, а гипердифференциал имеет вид

$$\overline{d}F_3(x_0) = \operatorname{co}\left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 12 \\ 3 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)\right\}.$$

Выберем в качестве C множество крайних точек гипердифференциала $\overline{d}F_3(x_0)$. Решая задачу проектирования начала координат на множество $\underline{d}F_3(x_0) + z$ для каждого $z \in C$, получим:

1. $(a(z), v(z)) = (-1; 1,5; 0,5)$ для $z = (0, -3, 3)^T \in C$;
2. $(a(z), v(z)) = (-0,8; 1,6; 0)$ для $z = (12, 3, 3)^T \in C$ и $z = (12, 3, -3)^T \in C$;
3. $(a(z), v(z)) = (-1; 1,5; -0,5)$ для $z = (0, -3, -3)^T \in C$.

Таким образом, условия глобальной оптимальности из теоремы 1.1.4 не выполнены в точке x_0. Более того, для $z = (12, 3, 3)^T \in C$ и $z = (12, 3, -3)^T \in C$ будет $x_1 = x_0 + a(z)^{-1}v(z) = (0, 0)^T$. Точка x_1 является точкой глобального минимума в задаче (1.16). Таким образом, с помощью точной штрафной функции и условий глобальной оптимальности из теоремы 1.1.4 удалось за один шаг перейти из точки безусловного глобального минимума целевой функции в точку глобального минимума в рассматриваемой задаче.

1.2 Кодифференциальное исчисление в банаховых пространствах

Глобальный кодифференциал позволяет в удобной форме представить приращение DC функции в заданной точке и использовать данное представление для вывода необходимых и достаточных условий глобального экстремума. Однако, применение глобальных кодифференциалов к исследованию и решению различных классов негладких задач зачастую оказывается затруднительным из-за невозможности вычисления глобального кодифференциала в явном виде. Для преодоления этих трудностей естественно перейти от глобального представления исследуемой функции к локальной аппроксимации её приращения, то есть перейти от глобальных кодифференциалов DC функций к (локальным) кодифференциалам произвольных негладких функций. Данный переход позволяет не только качественно упростить вычисление кодифференциалов, но и применить теорию кодифференциалов к исследованию различных вопросов теории оптимизации.

Понятие кодифференциала негладкой функции было введено проф. В.Ф. Демьяновым [25, 37, 134, 135] в конечномерном случае. В данном разделе разрабатывается общая теория кодифференцируемых функций в банаховых пространствах и тесно связанная с ней теория квазидифференциалов негладких функций.

1.2.1 Непрерывность многозначных отображений по Хаусдорфу

Для полноты изложения в этом параграфе доказывается ряд хорошо известных вспомогательных результатов о непрерывных многозначных отображениях (см. [53]) необходимых для построения теории непрерывно кодифференцируемых функций.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Обозначим расстояние от точки $x \in X$ до множества $A \subseteq X$ через $\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{\rho(x, a) \mid a \in A\}$. Пусть также $B(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant r\}$ и $U(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$. Напомним, что *расстоянием Хаусдорфа* между множествами $A \subset X$ и $B \subset X$ называется величина

$$\rho_H(A, B) = \sup\left\{\sup_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B),\ \sup_{x \in B} \operatorname{dist}(x, A)\right\}.$$

Как хорошо известно, расстояние Хаусдорфа является метрикой на множестве всех непустых замкнутых подмножеств пространства X с конечным диаметром (см., например, [56, теорема 1.3.1]). Далее нам потребуется следующий вспомогательный результат, позволяющий переформулировать неравенство $\rho_H(A, B) < \varepsilon$ в более удобных терминах. Для любого множества $A \subset X$ и $t > 0$ обозначим через $A_t = \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x, A) < t\}$ t-окрестность множества A. В случае, когда X — нормированное пространство, справедливо равенство $A_t = A + U(0, t)$.

Лемма 1.2.1. *Пусть $A, B \subset X$ и $\varepsilon > 0$ фиксированы. Три следующих условия равносильны:*

1. $\rho_H(A, B) < \varepsilon$;
2. *существует $t \in (0, \varepsilon)$ такое, что $B \subseteq A_t$ и $A \subseteq B_t$;*
3. *существует $t \in (0, \varepsilon)$ такое, что для любого $x \in A$ найдётся $y \in B$, удовлетворяющее неравенству $\rho(x, y) < t$, и для любого $y \in B$ найдётся $x \in A$, удовлетворяющее неравенству $\rho(x, y) < t$.*

Доказательство. Докажем, что из первого условия вытекает второе. Выберем произвольное число t, удовлетворяющее неравенствам $\rho_H(A,B) < t < \varepsilon$. По определению метрики Хаусдорфа из неравенства $\rho_H(A,B) < t$ следует, что $\operatorname{dist}(x,B) < t$ для всех $x \in A$ и $\operatorname{dist}(y,A) < t$ для всех $y \in B$, то есть $A \subseteq B_t$ и $B \subseteq A_t$.

Покажем теперь, что из второго условия следует третье. Действительно, из включения $A \subseteq B_t$ следует, что для любого $x \in A$ будет $\operatorname{dist}(x,B) < t$, откуда следует, что найдётся $y \in B$ такое, что $\rho(x,y) < t$. Таким образом, для любого $x \in A$ существует $y \in B$ такое, что $\rho(x,y) < t$. Меняя местами множества A и B, получаем, что из включения $B \subseteq A_t$ следует, что для любого $y \in B$ существует $x \in A$ такое, что $\rho(x,y) < t$, то есть выполняется третье условие.

Докажем наконец, что из третьего условия следует первое. Поскольку для любого $x \in A$ существует $y \in B$ такое, что $\rho(x,y) < t < \varepsilon$, то для любого $x \in A$ будет $\operatorname{dist}(x,B) < t$, откуда следует, что $\sup\{\operatorname{dist}(x,B) \mid x \in A\} \leqslant t < \varepsilon$. Меняя местами множества A и B, получим, что справедливо неравенство $\sup\{\operatorname{dist}(y,A) \mid y \in B\} < \varepsilon$, откуда вытекает, что $\rho_H(A,B) < \varepsilon$. □

Пусть Y — вещественное нормированное пространство. Рассмотрим многозначное отображение $F\colon X \rightrightarrows Y$, то есть отображение, которое каждой точке $x \in X$ сопоставляет некоторое непустое множество $F(x) \subseteq Y$ (везде далее мы будем рассматривать только многозначные отображения с непустыми значениями). Напомним, что отображение F называется *непрерывным в метрике Хаусдорфа* (или *непрерывным по Хаусдорфу*) в точке x, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x' \in U(x,\delta)$ будет $\rho_H(F(x'),F(x)) < \varepsilon$. Покажем, что непрерывность по Хаусдорфу сохраняется при некоторых стандартных операциях над многозначными отображениями.

Лемма 1.2.2. *Пусть многозначные отображения $F,G\colon X \rightrightarrows Y$ непрерывны по Хаусдорфу в точке $x \in X$. Тогда многозначное отображение $T(\cdot) = F(\cdot) + G(\cdot)$ также непрерывно по Хаусдорфу в этой точке.*

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению непрерывности по Хаусдорфу существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x' \in U(x,\delta)$ будет $\rho_H(F(x'),F(x)) < \varepsilon/3$ и $\rho_H(G(x'),G(x)) < \varepsilon/3$.

Пусть $x' \in U(x,\delta)$ и $y \in T(x)$. Поскольку $T(x) = F(x) + G(x)$, существуют $y_1 \in F(x)$ и $y_2 \in G(x)$ такие, что $y = y_1 + y_2$. Согласно лемме 1.2.1 найдутся $z_1 \in F(x')$ и $z_2 \in G(x')$, удовлетворяющие неравенствам $\|y_1 - z_1\| < \varepsilon/3$ и $\|y_2 - z_2\| < \varepsilon/3$. Положим $z = z_1 + z_2$. Тогда

$z \in T(x')$ и

$$\|y - z\| \leqslant \|y_1 - z_1\| + \|y_2 - z_2\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Значит, для любого $y \in T(x)$ существует $z \in T(x')$ такое, что $\|y - z\| < 2\varepsilon/3$. Меняя местами множества $T(x)$ и $T(x')$ и вновь применяя лемму 1.2.1, получим, что для любого $z \in T(x')$ существует $y \in T(x)$ такое, что $\|y - z\| < 2\varepsilon/3$. Следовательно, $\rho_H(T(x'), T(x)) < \varepsilon$ в силу леммы 1.2.1. Поскольку $\varepsilon > 0$ и $x' \in U(x, \delta)$ были выбраны произвольно, можно заключить, что многозначное отображение T непрерывно по Хаусдорфу в точке x. □

Лемма 1.2.3. *Пусть многозначные отображения $F, G\colon X \rightrightarrows Y$ непрерывны по Хаусдорфу в точке $x \in X$. Тогда многозначное отображение $T(\cdot) = \mathrm{co}\{F(\cdot), G(\cdot)\}$ также непрерывно по Хаусдорфу в этой точке.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По предположению леммы найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого $x' \in U(x, \delta)$ будет $\rho_H(F(x'), F(x)) < \varepsilon$ и $\rho_H(G(x'), G(x)) < \varepsilon$.

Пусть $x' \in U(x, \delta)$ и $y \in T(x)$. Так как $T(x) = \mathrm{co}\{F(x), G(x)\}$, существуют $n \in \mathbb{N}$, $y_i \in F(x) \cup G(x)$ и $\alpha_i \in [0, 1]$, $i \in 1\colon n$ такие, что $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. По лемме 1.2.1 найдутся $z_i \in F(x') \cup G(x')$ такие, что $\|y_i - z_i\| < \varepsilon$ для всех $i \in 1\colon n$. Положим $z = \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n$. Тогда $z \in T(x')$ и

$$\|y - z\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \|y_i - z_i\| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $y \in T(x)$ найдётся $z \in T(x')$ такое, что $\|y - z\| < \varepsilon$. Меняя местами множества $T(x)$ и $T(x')$ и вновь пользуясь леммой 1.2.1, получим, что для любого $z \in T(x')$ найдётся $y \in T(x)$ такое, что $\|y - z\| < \varepsilon$. Отсюда, ещё раз воспользовавшись леммой 1.2.1, получим, что $\rho_H(T(x'), T(x)) < 2\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ и $x' \in U(x, \delta)$ были выбраны произвольно, можно заключить, что многозначное отображение T непрерывно по Хаусдорфу в точке x. □

Лемма 1.2.4. *Пусть многозначное отображение $F\colon X \rightrightarrows Y$ непрерывно по Хаусдорфу в точке $x \in X$, функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ непрерывна в этой точке и множество $F(x)$ ограничено. Тогда многозначное отображение $T(\cdot) = f(\cdot)F(\cdot) = \{f(\cdot)y \in Y \mid y \in F(\cdot)\}$ непрерывно по Хаусдорфу в точке x.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку функция f непрерывна в точке x, существуют $\delta_1 > 0$ и $M > 0$ такие, что $|f(x')| \leqslant M$ для всех $x \in U(x, \delta_1)$. Положим $C = \max\{\|y\| \mid y \in F(x)\} < +\infty$. В силу непрерывности функции f существует $\delta_2 > 0$ такое, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon/2C$ для всех $x' \in U(x, \delta_2)$. В свою очередь, по определению непрерывности по Хаусдорфу найдётся $\delta_3 > 0$ такое, что $\rho_H(F(x'), F(x)) < \varepsilon/2M$ для любого $x' \in U(x, \delta_3)$.

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Пусть $x' \in U(x, \delta)$ и $z \in T(x)$. По определению $z = f(x)y$ для некоторого $y \in F(x)$. По лемме 1.2.1 найдётся $y' \in F(x')$ такое, что $\|y' - y\| < \varepsilon/2M$. Определим $z' = f(x')y'$. Тогда $z' \in T(x')$ и

$$\|z' - z\| = \|f(x')y' - f(x)y\| \leqslant |f(x')|\|y' - y\| + |f(x') - f(x)|\|y\| < M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2C}C = \varepsilon$$

в силу того, что $\|x' - x\| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Значит, для любого $z \in T(x)$ существует $z' \in T(x')$ такое, что $\|z' - z\| < \varepsilon$. Аналогичным образом доказывается, что для любого $z' \in T(x')$ существует $z \in T(x)$ такое, что $\|z' - z\| < \varepsilon$. Отсюда, применяя лемму 1.2.1, получаем, что $\rho_H(T(x'), T(x)) < 2\varepsilon$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого $x' \in U(x, \delta)$ будет $\rho_H(T(x'), T(x)) < \varepsilon$, то есть многозначное отображение T непрерывно по Хаусдорфу в точке x. $\square$

Далее нам потребуется рассматривать непрерывность по Хаусдорфу для пар многозначных отображений, поскольку кодифференциал является парой выпуклых множеств. Предположим, что заданы многозначные отображения $F, G\colon X \rightrightarrows Y$. Будем говорить, что пара отображений $[F, G]$ *непрерывна по Хаусдорфу* в точке $x \in X$, если *каждое* из отображений F и G непрерывно по Хаусдорфу в этой точке.

Напомним, что операции сложения и умножения на число для пар подмножеств вещественного линейного пространства определяются следующим образом:

$$[A, B] + [C, D] = [A + C, B + D], \quad \lambda[A, B] = \begin{cases} [\lambda A, \lambda B], & \text{если } \lambda \geqslant 0, \\ [\lambda B, \lambda A], & \text{если } \lambda < 0. \end{cases}$$

Покажем, что эти операции сохраняют непрерывность.

Лемма 1.2.5. *Пусть многозначные отображения $F_1, F_2, G_1, G_2\colon X \rightrightarrows Y$ непрерывны по Хаусдорфу в точке $x \in X$. Тогда пара многозначных отображений $[F_1, G_1] + [F_2, G_2]$ непрерывна по Хаусдорфу в этой точке.*

Справедливость данного утверждения вытекает непосредственно из определения сложения для пар множеств и леммы 1.2.2. В случае с операцией умножения на число ситуация несколько усложняется, поскольку при смене знака скалярного множителя отображения в паре меняются местами.

Лемма 1.2.6. *Пусть многозначные отображения $F, G\colon X \rightrightarrows Y$ непрерывны по Хаусдорфу в точке $x \in X$, функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ непрерывна в этой точке и множества $F(x)$ и $G(x)$*

ограничены. Тогда пара многозначных отображений $f(\cdot)[F(\cdot), G(\cdot)]$ непрерывна по Хаусдорфу в точке x.

Доказательство. Понятно, что если $f(x) \neq 0$, то функция f не меняет знак в некоторой окрестности точки x и в данном случае непрерывность пары отображений $f(\cdot)[F(\cdot), G(\cdot)]$ вытекает непосредственно из леммы 1.2.4.

Предположим, что $f(x) = 0$. Определим $C = \max\{\|y\| \mid y \in F(x) \cup G(x)\} < +\infty$. В силу непрерывности по Хаусдорфу отображений F и G и леммы 1.2.1 существует $\delta_1 > 0$ такое, что $F(x') \subseteq F(x) + B(0,1)$ и $G(x') \subseteq G(x) + B(0,1)$ для любого $x' \in U(x, \delta_1)$. Поэтому $\|y\| \leqslant C + 1$ для всех $y \in F(x') \cup G(x')$ и $x' \in U(x, \delta_1)$.

Так как функция f непрерывна в точке x и $f(x) = 0$, существует $\delta_2 > 0$ такое, что для любого $x' \in U(x, \delta_2)$ выполняется неравенство $|f(x')| < \varepsilon/(C+1)$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для любого $x' \in U(x, \delta)$ будет $\|y\| < \varepsilon$ для всех $y \in f(x')F(x') \cup f(x')G(x')$. Отсюда, воспользовавшись леммой 1.2.1, получим

$$\rho_H(\{0\}, f(x')F(x')) < 2\varepsilon, \quad \rho_H(\{0\}, f(x')G(x')) < 2\varepsilon \quad \forall x' \in U(x, \delta).$$

Поскольку $f(x)F(x) = f(x)G(x) = \{0\}$, данные неравенства означают, что пара многозначных отображений $f(\cdot)[F(\cdot), G(\cdot)]$ непрерывна по Хаусдорфу в точке x. $\square$

1.2.2 Кодифференцируемые и квазидифференцируемые функции

Пусть X — вещественное банахово пространство, $U \subset X$ — открытое множество и $f \colon U \to \mathbb{R}$ — заданная функция. Воспользовавшись указанной выше идеей перехода от глобального представления DC функций к локальным аппроксимациям, мы можем дать следующее определение (локальной) кодифференцируемости.

Определение 1.2.1. Функция f называется *кодифференцируемой* в точке $x \in U$, если существуют замкнутые выпуклые функции $\Phi, \Psi \colon X \to \mathbb{R}$ такие, что $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ и для любого $\Delta x \in X$ будет

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x + \alpha\Delta x) - f(x) - \big(\Phi(\alpha\Delta x) - \Psi(\alpha\Delta x)\big) \Big| = 0. \tag{1.17}$$

Таким образом, функция f кодифференцируема в точке x, если её приращение в данной точке можно аппроксимировать с точностью до первого порядка малости с помощью разности выпуклых функций $\Phi(\cdot) - \Psi(\cdot)$. На первый взгляд может показаться, что естественно определить кодифференциал функции f в точке x как глобальный кодифференциал DC функции $\Phi - \Psi$. Однако, данное определение обладает существенными недостатками, связанными с тем, что глобальный кодифференциал DC функции зачастую невозможно вычислить в явном виде.

Заметим, что в определении кодифференцируемой функции поведение функций Φ и Ψ вне сколь угодно малой (но фиксированной) окрестности нуля не влияет на значение предела (1.17). Поэтому вместо глобального представления DC функций $\Phi - \Psi$, вычисляемого с помощью глобального кодифференциала, достаточно рассматривать лишь представление данной функции в некоторой окрестности нуля. Для того чтобы получить подобное представление, рассмотрим пространство $\mathbb{R} \times X$ и определим в нём норму следующим образом: $\|(a,x)\| = \sqrt{|a|^2 + \|x\|^2}$ для всех $(a,x) \in \mathbb{R} \times X$. Непосредственно проверяется, что сопряжённое пространство $(\mathbb{R} \times X)^*$, наделённое слабой* топологией, изоморфно (в категории топологических векторных пространств) пространству $\mathbb{R} \times X^*$, наделённому топологией произведения $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$, где $\tau_{\mathbb{R}}$ — каноническая топология вещественной прямой, а w^* — слабая* топология на X^*. Воспользовавшись данным изоморфизмом или рассуждая непосредственно, нетрудно проверить, что подмножество топологического векторного пространства $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$ и ограничено относительно нормы $\|(a,x^*)\| = \sqrt{|a|^2 + \|x^*\|^2}$, $(a,x^*) \in \mathbb{R} \times X^*$ (см. [179, теорема 2.1]). Отметим также, что для любого подмножества $A \subset \mathbb{R} \times X^*$ будет

$$\sup_{(a,x^*) \in A} (a + \langle x^*, x \rangle) = \sup_{(a,x^*) \in \operatorname{cl} A} (a + \langle x^*, x \rangle) \quad \forall x \in X,$$

где операция замыкания в правой части берётся в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$ (см. [179, лемма 4.2]) и $\langle x^*, x \rangle = x^*(x)$ для всех $x^* \in X^*$ и $x \in X$.

Лемма 1.2.7. *Пусть* $\Phi \colon X \to \mathbb{R}$ *— замкнутая выпуклая функция. Тогда существует* $r > 0$ *и выпуклое компактное подмножество* A *пространства* $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ *такое, что*

$$\Phi(x) = \max_{(a,x^*) \in A} (a + \langle x^*, x \rangle) \quad \forall x \in B(0,r). \tag{1.18}$$

Доказательство. Поскольку функция Φ выпукла и замкнута, а пространство X банахово, Φ непрерывна и субдифференцируема на X (см., например, [78, следствие 2.5 и предложение 5.2]). Поэтому существуют $r > 0$ и $C > 0$ такие, что

$$|\Phi(x)| \leqslant C \quad \forall x \in B(0, 2r). \tag{1.19}$$

Покажем, что субдифференциал функции Φ ограничен на множестве $B(0,r)$. Действительно, из (1.19) и определения субградиента вытекает, что

$$\langle x^*, y - x \rangle \leqslant \Phi(y) - \Phi(x) \leqslant 2C \quad \forall x \in B(0,r), \quad y \in B(0,2r), \quad x^* \in \partial\Phi(x).$$

Полагая $y = x + z$ для $z \in B(0,r)$, получаем, что $\langle x^*, z\rangle \leqslant 2C$ для всех $x^* \in \partial\Phi(x)$ и $x, z \in B(0,r)$ или, что эквивалентно,

$$\|x^*\| \leqslant 2C/r \quad \forall x^* \in \partial\Phi(x), \quad x \in B(0,r). \tag{1.20}$$

Как было указано выше, функция Φ субдифференцируема на X. Пусть $\ell(\cdot)$ — произвольное сечение многозначного отображения $\partial\Phi\colon B(0,r) \rightrightarrows X^*$ (то есть $\ell(x) \in \partial\Phi(x)$ для всех $x \in B(0,r)$). Введём множества

$$A_0 = \{(a, x^*) \in \mathbb{R} \times X^* \mid a = \Phi(x) - \langle \ell(x), x\rangle,\ x^* = \ell(x),\ x \in B(0,r)\}, \quad A = \operatorname{cl}\operatorname{co} A_0.$$

Здесь замыкание берётся в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$. Множество A очевидно выпукло и замкнуто в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$. Из неравенств (1.19) и (1.20) следует, что $A_0 \subset M := [-3C, 3C] \times B(0, 2C/r)$. В силу того, что шар $B(0, C/r) \subset X^*$ компактен в слабой* топологии по теореме Банаха–Алаоглу, множество M компактно в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$, как прямое произведение компактных множеств. Следовательно, $A \subset M$ и множество A также компактно в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$, как замкнутое подмножество компактного множества.

Докажем, что для определённого таким образом множества A выполняется равенство (1.18). Действительно, по определению субградиента $\Phi(y) \geqslant \Phi(x) - \langle \ell(x), x - y\rangle$ для всех $y \in X$ и $x \in B(0,r)$, причём это неравенство выполняется как равенство при $y = x$. Поэтому

$$\Phi(y) = \max_{x \in B(0,r)} \big(\Phi(x) - \langle \ell(x), x\rangle + \langle \ell(x), y\rangle\big) \quad \forall y \in B(0,r).$$

Остаётся только заметить, что из определения множества A вытекает, что

$$\max_{x \in B(0,r)} \big(\Phi(x) - \langle \ell(x), x\rangle + \langle \ell(x), y\rangle\big) = \max_{(a,x^*) \in A} \big(a + \langle x^*, y\rangle\big) \quad \forall y \in X$$

(максимум в правой части этого равенства достигается и конечен в силу компактности множества A в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$). $\square$

Предложение 1.2.1. *Для того чтобы функция f была кодифференцируема в точке $x \in U$ необходимо и достаточно, чтобы существовали непустые выпуклые компактные подмножества A, B пространства $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ такие, что*

$$\max_{(a,x^*) \in A} a = \min_{(b,y^*) \in B} b = 0 \tag{1.21}$$

и для любого $\Delta x \in X$ справедливо равенство

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x + \alpha\Delta x) - f(x) - \max_{(a,x^*) \in A} \big(a + \langle x^*, \alpha\Delta x\rangle\big) - \min_{(b,y^*) \in B} \big(b + \langle y^*, \alpha\Delta x\rangle\big) \Big| = 0. \tag{1.22}$$

Доказательство. Необходимость. По определению кодифференцируемости существуют замкнутые выпуклые функции $\Phi, \Psi \colon X \to \mathbb{R}$ такие, что $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ и справедливо равенство (1.17). Согласно лемме 1.2.7 существуют $r > 0$ и непустые выпуклые компактные подмножества A_1, A_2 пространства $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ такие, что

$$\Phi(\Delta x) = \max_{(a,x^*) \in A_1} (a + \langle x^*, \Delta x \rangle), \quad \Psi(\Delta x) = \max_{(b,y^*) \in A_2} (b + \langle y^*, \Delta x \rangle), \tag{1.23}$$

для всех $\Delta x \in B(0, r)$. Положим $A = A_1$ и $B = -A_2$. Тогда

$$\min_{(b,y^*) \in B} \big(b + \langle y^*, \Delta x \rangle \big) = -\Psi(\Delta x) \quad \forall \Delta x \in B(0, r).$$

Более того, из равенств $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ вытекает, что справедливы равенства (1.21), в то время как из равенства (1.17) следует, что для любого $\Delta x \in X$ выполняется (1.22).

Достаточность. Предположим, что существуют непустые выпуклые компактные подмножества A, B пространства $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$, удовлетворяющие условиям предложения. Полагая $A_1 = A$ и $A_2 = -B$ и определяя функции Φ и Ψ в соответствии с равенствами (1.23), получим, что $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ и для любого $\Delta x \in X$ справедливо равенство (1.17). Более того, функции Φ и Ψ замкнуты, как супремум некотых семейств аффинных функций, и всюду конечны в силу компактности множеств A и B в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$. Значит, функция f кодифференцируема в точке x. $\square$

Пара множеств $[A, B]$, фигурирующая в предыдущем предложении, называется *кодифференциалом* функции f в точке x и обозначается $Df(x) = [A, B]$. Множество A обозначается $\underline{d}f(x)$ и называется *гиподифференциалом* функции f в точке x, а множество B обозначается $\overline{d}f(x)$ и называется *гипердифференциалом* функции f в точке x. Таким образом, кодифференциал $Df(x) = [\underline{d}f(x), \overline{d}f(x)]$ — это пара непустых выпуклых компактных подмножеств пространства $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ таких, что $\max\{a \mid (a, x^*) \in \underline{d}f(x)\} = \min\{b \mid (b, y^*) \in \overline{d}f(x)\} = 0$ и

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x + \alpha\Delta x) - f(x) - \max_{(a,x^*) \in \underline{d}f(x)} \big(a + \langle x^*, \alpha\Delta x \rangle \big) - \min_{(b,y^*) \in \overline{d}f(x)} \big(b + \langle y^*, \alpha\Delta x \rangle \big) \Big| = 0. \tag{1.24}$$

для любого $\Delta x \in X$.

Замечание 1.2.1. В случае, когда пространство X рефлексивно, слабая* топология на X^* совпадает со слабой топологией и пространство $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ изоморфно сопряжённому пространству $(\mathbb{R} \times X)^*$, наделённому слабой топологией. Отсюда, учитывая тот факт, что выпуклое подмножество банахова пространства является слабо замкнутым тогда и только тогда, когда оно замкнуто в сильной топологии, получаем, что если пространство X рефлексивно, то кодифференциал $Df(x)$ — это пара выпуклых замкнутых и ограниченных подмножеств нормированного пространства $\mathbb{R} \times X^*$. Если, кроме того, X — гильбертово пространство (или $X = \mathbb{R}^d$), то, принимая во вниманию теорему Рисса о представлении линейных функционалов, определённых на гильбертовом пространстве, естественно считать, что кодифференциал — это пара выпуклых замкнутых ограниченных подмножеств пространства $\mathbb{R} \times X$.

Кодифференциал функции f в точке x определяется не единственным образом. В частности, для любого выпуклого компактного подмножества C пространства $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ пара $[\underline{d}f(x) + C, \overline{d}f(x) - C]$, как нетрудно проверить, также является кодифференциалом функции f в точке x. Заметим, что не все кодифференциалы функции f в точке x можно получить с помощью такого «сдвига» на компактное множество. Например, пользуясь конструкцией из леммы 1.2.7, можно показать, что для любого $r \geqslant 0$ пара $[D(r), \{0\}]$, где $D(r) = \operatorname{co}\{(-y^2, 2y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \in [-r, r]\}$, является кодифференциалом функции $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, в точке $x = 0$. Ясно, что $[D(r_1) + C, -C] \neq [D(r_2), \{0\}]$ ни при каком $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, если $r_1 \neq r_2$.

Функция f называется *гиподифференцируемой* (соотв. *гипердифференцируемой*) в точке $x \in U$, если она кодифференцируема в этой точке и существует кодифференциал функции f в точке x вида $Df(x) = [\underline{d}f(x), \{0\}]$ (соотв. $Df(x) = [\{0\}, \overline{d}f(x)]$).

Определение 1.2.2. Функция f называется *непрерывно кодифференцируемой* в точке $x \in U$, если она кодифференцируема в каждой точке некоторой окрестности $V_x \subset U$ точки x и существует *кодифференциальное отображение* $y \mapsto Df(y)$ функции f, определённое на V_x и непрерывное по Хаусдорфу в точке x. Функция f называется *непрерывно кодифференцируемой* на множестве $S \subset U$, если f кодифференцируема в каждой точке этого множестве и существует кодифференциальное отображение $Df(\cdot)$, определённое на S и непрерывное по Хаусдорфу в каждой точке множества S. Непрерывно гипо-/гипер-дифференцируемые функции определяются аналогичным образом.

Приведём несколько примеров кодифференцируемых функций.

Пример 1.2.1. Пусть функция f дифференцируема по Гато в точке x и $f'(x)$ — её производная Гато в этой точке. Тогда функция f кодифференцируема в точке x, а пары $[\{(0, f'(x))\}, \{0\}]$ и $[\{0\}, \{(0, f'(x))\}]$ являются её кодифференциалами в данной точке. Более того, если f непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x, то она непрерывно кодифференцируема в этой точке.

Пример 1.2.2. Пусть Y — банахово пространство и $f(x) = \|Ax + b\|$, где $A \colon X \to Y$ — линейный непрерывный оператор и $b \in Y$ фиксировано. Тогда для любых $x, \Delta x \in X$ справедливы равенства

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\max_{y^*\in B_{Y^*}}\big\langle y^*, A(x+\Delta x)+b\big\rangle-\|Ax+b\|=\max_{(a,x^*)\in \underline{d}f(x)}\big(a+\langle v,\Delta x\rangle\big),$$

где B_{Y^*} — единичный шар в пространстве Y^*,

$$\underline{d}f(x)=\Big\{\Big(\langle y^*, Ax+b\rangle-\|Ax+b\|, A^*y^*\Big)\in\mathbb{R}\times X^*\ \Big|\ y^*\in B_{Y^*}\Big\}$$

и $A^*\colon Y^*\to X^*$ — оператор сопряжённый к A. Введём аффинное отображение $\mathcal{T}_x$ из Y^* в $\mathbb{R}\times X^*$, положив $\mathcal{T}_x(y^*)=(\langle y^*, Ax+b\rangle-\|Ax+b\|, A^*y^*)$ для всех $y^*\in Y^*$. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{T}_x$ — непрерывное отображение из пространства $(Y^*,\sigma(Y^*,Y))$ в пространство $(\mathbb{R}\times X^*,\tau_{\mathbb{R}}\times\sigma(X^*,X))$ (здесь $\sigma(X^*,X)$ — слабая* топология в пространстве X^*). Поэтому множество $\underline{d}f(x)$ является выпуклым компактным подмножеством пространства $(\mathbb{R}\times X^*,\tau_{\mathbb{R}}\times\sigma(X^*,X))$, как непрерывный образ компактного подмножества B_{Y^*} пространства $(Y^*,\sigma(Y^*,Y))$ при аффинном отображении $\mathcal{T}_x$. Покажем, что многозначное отображение $\underline{d}f(\cdot)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа.

Действительно, зафиксируем $x'\in X$ и $y^*\in B_{Y^*}$. По определению $\mathcal{T}_{x'}(y^*)\in\underline{d}f(x')$ и

$$\operatorname{dist}\big(\mathcal{T}_{x'}(y^*),\underline{d}f(x)\big)\leqslant\Big|\langle y^*, A(x'-x)\rangle-\big(\|Ax'+b\|-\|Ax+b\|\big)\Big|\leqslant 2\|A\|\|x'-x\|.$$

Так как $\mathcal{T}_{x'}(B_{Y^*})=\underline{d}f(x')$, то беря супремум по всем $y^*\in B_{Y^*}$, получим $\sup\{\operatorname{dist}((a,x^*),\underline{d}f(x))\mid (a,x^*)\in\underline{d}f(x')\}\leqslant 2\|A\|\|x'-x\|$. Отсюда, меняя местами x' и x, получим, что $\rho_H(\underline{d}f(x'),\underline{d}f(x))\leqslant 2\|A\|\|x'-x\|$. Таким образом, многозначное отображение $\underline{d}f(\cdot)$ непрерывно по Хаусдорфу на всём пространстве X и, следовательно, функция $f(x)=\|Ax+b\|$ является непрерывно гиподифференцируемой на X.

Пример 1.2.3. Пусть

$$f(x)=\max_{s\in S} g(x,s)\quad\forall x\in U,$$

где S — компактное топологическое пространство, а $g\colon U\times S\to\mathbb{R}$ — заданная функция. Предположим, что функция $s\mapsto g(x,s)$ непрерывна при каждом $x\in U$, функция $x\mapsto g(x,s)$ дифференцируема по Гато на U при каждом $s\in S$, причём производная Гато $g'_x(\cdot)$ непрерывна по совокупности переменных на $U\times S$. Покажем, что при сделанных предположения функция f гиподифференцируема на U.

Зафиксируем произвольные $x\in U$ и $r>0$ такие, что $U(x,r)\subset U$. По теореме о среднем для любого $y\in U(x,r)$ и для всех $s\in S$ существует точка $\xi_s\in\operatorname{co}\{x,y\}$ такая, что $g(y,s)-g(x,s)=\langle g'_x(\xi_s,s),y-x\rangle$. Прибавляя и отнимая $\langle g'_x(x,s),y-x\rangle$, получим

$$\Big|g(y,s)-g(x,s)-\langle g'_x(x,s),y-x\rangle\Big|\leqslant\|g'_x(\xi_s,s)-g'_x(x,s)\|\|y-x\|. \tag{1.25}$$

В силу непрерывности g'_x по совокупности переменных для любых $\varepsilon > 0$ и $s \in S$ существуют $r_s > 0$ и окрестность $V_s \subset S$ точки s такие, что $\|g'_x(x,s) - g'_x(z,t)\| < \varepsilon/2$ для всех $z \in U(x, r_s)$ и $t \in V_s$. Пользуясь компактностью пространства S, можно выбрать конечное подпокрытие $V_{s_1}, \ldots, V_{s_n}$ этого пространства. Положим $r_0 = \min\{r_{s_1}, \ldots, r_{s_n}\}$ и выберем произвольные $s \in S$ и $z \in U(x, r_0)$. По построению существует $k \in 1\colon n$ такое, что $s \in V_{s_k}$. В свою очередь, по определениям V_{s_k} и r_0 будет

$$\|g'_x(x,s) - g'_x(z,s)\| \leqslant \|g'_x(x,s) - g'_x(x,s_k)\| + \|g'_x(x,s_k) - g'_x(z,s)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует $r(\varepsilon) > 0$ такое, что $\|g'_x(x,s) - g'_x(z,s)\| < \varepsilon$ для всех $s \in S$ и $z \in U(x, r(\varepsilon))$. Отсюда и из (1.25) следует, что

$$\Big| g(y,s) - g(x,s) - \langle g'_x(x,s), y - x\rangle \Big| \leqslant \varepsilon \|y - x\| \quad \forall s \in S,\ y \in B(x, r(\varepsilon)).$$

Поэтому

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \max_{s \in S} \big(g(x + \Delta x, s) - f(x) \big) \leqslant \max_{s \in S} \big(g(x,s) - f(x) + \langle g'_x(x,s), \Delta x\rangle \big) + \varepsilon \|\Delta x\|$$

для любого $\Delta x \in U(0, r(\varepsilon))$. Аналогичным образом оценивая разность $f(x+\Delta x) - f(x)$ снизу, получаем, что

$$\Big| f(x + \Delta x) - f(x) - \max_{s \in S} \big(g(x,s) - f(x) + \langle g'_x(x,s), \Delta x\rangle \big) \Big| \leqslant \varepsilon \|\Delta x\|$$

для всех $\Delta x \in U(0, r(\varepsilon))$, откуда вытекает, что

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x + \alpha \Delta x) - f(x) - \max_{(a, x^*) \in \underline{d} f(x)} (a + \langle x^*, \alpha \Delta x\rangle) \Big| = 0$$

для всех $\Delta x \in X$, где $\underline{d} f(x) = \operatorname{cl} \operatorname{co}\{(g(x,s) - f(x), g'_x(x,s)) \in \mathbb{R} \times X^* \mid s \in S\}$ (здесь замыкание берётся в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$). В силу непрерывности отображений $g(x, \cdot)$ и $g'_x(x, \cdot)$ и компактности S существует $C > 0$ такое, что $\{(g(x,s) - f(x), g'_x(x,s)) \in \mathbb{R} \times X^* \mid s \in S\} \subset M := [-C, C] \times C B_{X^*}$. Множество M компактно в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$, как прямое произведение компактных множеств. Поэтому $\underline{d} f(x) \subset M$ и множество $\underline{d} f(x)$ также компактно в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$. Кроме того, поскольку $\max_{s \in S}(g(x,s) - f(x)) = 0$ по определению $f(x)$, то $\max\{a \mid (a, x^*) \in \underline{d} f(x)\} = 0$. Таким образом, функция f гиподифференцируема в точке x, а множество $\underline{d} f(x)$ является её гиподифференциалом в данной точке.

Заметим, что в случае когда множество S конечно, операция замыкания в определении множества $\underline{d} f(x)$ может быть отброшена, поскольку выпуклая оболочка конечного числа точек топологического векторного пространства всегда компактна. Операция замыкания также может быть отброшена в случае, когда пространство X конечномерно, так как выпуклая оболочка компактного подмножества конечномерного пространства компактна и множество $\{(g(x,s) - f(x), g'_x(x,s)) \in \mathbb{R} \times X^* \mid s \in S\}$ компактно, как непрерывный образ компактного пространства S. В обоих случаях, воспользовавшись непрерывностью отображений $g(x,\cdot)$ и $g'_x(x,\cdot)$ и компактностью пространства S, нетрудно показать, что многозначное отображение $\underline{d}f(\cdot)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа и поэтому функция f непрерывно гиподифференцируема.

Пример 1.2.4. Рассуждая как и в предыдущем примере, нетрудно показать, что функция $f(x) = \min_{s \in S} g(x,s)$, $x \in U$, является гипердифференцируемой, а множество $\overline{d}f(x) = \operatorname{cl}\operatorname{co}\{(g(x,s) - f(x), g'_x(x,s)) \in \mathbb{R} \times X^* \mid s \in S\}$ является её гипердифференциалом (здесь замыкание берётся в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$).

Пример 1.2.5. Пусть X — пространство $\mathbb{S}^\ell$ вещественных симметричных матриц порядка ℓ, наделённое скалярным произведением $\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}(AB)$ и соответствующей нормой $\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{Tr}(A^2)}$, называемой нормой Фробениуса матрицы $A \in \mathbb{S}^\ell$. Здесь $\operatorname{Tr}(A)$ — след матрицы A. Рассмотрим функцию

$$f(A) = \lambda_{\max}(A) = \max_{s \in B_{\mathbb{R}^\ell}} \langle s, As \rangle \quad \forall A \in \mathbb{S}^\ell,$$

сопоставляющую каждой матрице $A \in \mathbb{S}^\ell$ её максимальное собственное число. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^\ell$, а $B_{\mathbb{R}^\ell}$ — единичный шар в евклидовой норме пространства $\mathbb{R}^\ell$.

Функция f является частным случаем функции из примера 1.2.3, если положить $S = B_{\mathbb{R}^\ell}$ и $g(A,s) = \langle s, As \rangle$. Таким образом, функция f гиподифференцируема на всём пространстве и её гиподифференциал в точке $A \in \mathbb{S}^\ell$ имеет вид

$$\underline{d}f(A) = \operatorname{co}\Big\{ \big(\langle s, As \rangle - \lambda_{\max}(A), ss^T \big) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^\ell \ \Big| \ s \in B_{\mathbb{R}^\ell} \Big\}.$$

Заметим, что поскольку $\mathbb{S}^\ell$ конечномерное гильбертово пространство, гиподифференциал $\underline{d}f(A)$ является выпуклым компактным подмножеством пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^\ell$. Покажем, что отображение $\underline{d}f(\cdot)$ непрерывно по Хаусдорфу, то есть что функция f непрерывно гиподифференцируема. Для этого докажем сначала, что функция f глобально липшицева.

Зафиксируем $A, B \in \mathbb{S}^\ell$. Пусть s_0 — собственный вектор матрицы A, соответствующий её максимальному собственному числу. Можно считать, что $|s_0| = 1$, где $|\cdot|$ — евклидова норма. Имеем

$$f(A) - f(B) = \langle s_0, As_0 \rangle - f(B) \leqslant \langle s_0, A, s_0 \rangle - \langle s_0, Bs_0 \rangle = \langle s_0, (A - B)s_0 \rangle \leqslant \|A - B\|_F.$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что для нормы Фробениуса справедливо неравенство $|Ax| \leqslant \|A\|_F |x|$. Аналогичным образом доказывается, что $f(B) - f(A) \leqslant \|B - A\|_F$. Таким образом, функция f является глобально липшицевой с константой Липшица $L = 1$.

Перейдём к доказательству непрерывности по Хаусдорфу. Выберем произвольный элемент $(a, V) \in \underline{d}f(A)$. По определению выпуклой оболочки существуют $n \in \mathbb{N}$, $s_i \in B_{\mathbb{R}^\ell}$ и $\alpha_i \geqslant 0$, $i \in 1\colon n$, такие, что

$$(a, V) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \big(\langle s_i, A s_i \rangle - \lambda_{\max}(A), s_i s_i^T \big), \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Положим

$$(b, W) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \big(\langle s_i, B s_i \rangle - \lambda_{\max}(B), s_i s_i^T \big).$$

Тогда по определению $\underline{d}f(\cdot)$ будет $(b, W) \in \underline{d}f(B)$ и

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\big((a, V), \underline{d}f(B)\big) \leqslant \|(a, V) - (b, W)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\big|\langle s_i, (A - B) s_i \rangle\big| + \big|f(A) - f(B)\big| \Big) \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\|A - B\|_F + \|A - B\|_F \Big) = 2\|A - B\|_F. \end{aligned}$$

Следовательно, $\sup\{\operatorname{dist}((a, V), \underline{d}f(B)) \mid (a, V) \in \underline{d}f(A)\} \leqslant 2\|A - B\|_F$. Отсюда, меняя местами A и B, получаем, что $\rho_H(\underline{d}f(A), \underline{d}f(B)) \leqslant 2\|A - B\|_F$, то есть многозначное отображение $\underline{d}f(\cdot)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа.

Важную роль при изучении кодифференцируемых функций играет класс квазидифференцируемых функций. В бесконечномерном случае существует несколько, вообще говоря, неэквивалентных подходов к определению квазидифференцируемости (см. [37, 50, 159, 340, 397]). Мы будем использовать следующее определение квазидифференцируемости, являющееся прямым обобщением определения квазидифференцируемости в конечномерном случае.

Определение 1.2.3. Функция f называется *квазидифференцируемой* в точке $x \in U$, если она дифференцируема по направлениям в данной точке, т. е. для любого $v \in X$ существует предел

$$f'(x, v) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x + \alpha v) - f(x)}{\alpha},$$

и функцию $f'(x, \cdot)$ можно представить в виде разности непрерывных сублинейных функций или, что эквивалентно, если существует пара выпуклых слабо* компактных множеств $\underline{\partial} f(x), \overline{\partial} f(x) \subset X^*$ таких, что

$$f'(x, v) = \max_{x^* \in \underline{\partial} f(x)} \langle x^*, v \rangle + \min_{y^* \in \overline{\partial} f(x)} \langle y^*, v \rangle \quad \forall v \in X.$$

Пара множеств $\mathscr{D} f(x) = [\underline{\partial} f(x), \overline{\partial} f(x)]$ называется *квазидифференциалом* функции f в точке x, множество $\underline{\partial} f(x)$ называется *субдифференциалом* f в точке x, а множество $\overline{\partial} f(x)$ называется *супердифференциалом* f в этой точке.

Покажем, что множества квазидифференцируемых и кодифференцируемых в данной точке функций совпадает.

Теорема 1.2.1. *Если функция f квазидифференцируема в точке $x \in U$, то она кодифференцируема в этой точке и для любого квазидифференциала $\mathscr{D} f(x) = [\underline{\partial} f(x), \overline{\partial} f(x)]$ пара $[\{0\} \times \underline{\partial} f(x), \{0\} \times \overline{\partial} f(x)]$ является кодифференциалом функции f в точке x. Обратно, если функция f кодифференцируема в точке x, то она квазидифференцируема в данной точке и для любого кодифференциала $Df(x) = [\underline{d} f(x), \overline{d} f(x)]$ пара*

$$\underline{\partial} f(x) = \Big\{ x^* \in X^* \mid (0, x^*) \in \underline{d} f(x) \Big\}, \quad \overline{\partial} f(x) = \Big\{ y^* \in X^* \mid (0, y^*) \in \overline{d} f(x) \Big\} \tag{1.26}$$

является квазидифференциалом функции f в точке x.

Доказательство. Пусть функция f квазидифференцируема в точке x, а $\mathscr{D} f(x)$ — её квазидифференциал в данной точке. По определению квазидифференцируемости для любого $\Delta x \in X$ будет

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x + \alpha \Delta x) - f(x)}{\alpha} = \max_{x^* \in \underline{\partial} f(x)} \langle x^*, \Delta x \rangle + \min_{y^* \in \overline{\partial} f(x)} \langle y^*, \Delta x \rangle,$$

откуда с учётом положительной однородности функции, стоящей в правой части данного равенства, следует, что

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x + \alpha \Delta x) - f(x) - \max_{x^* \in \underline{\partial} f(x)} \langle x^*, \alpha \Delta x \rangle - \min_{y^* \in \overline{\partial} f(x)} \langle y^*, \alpha \Delta x \rangle \Big| = 0.$$

Положим $\underline{d} f(x) = \{0\} \times \underline{\partial} f(x)$ и $\overline{d} f(x) = \{0\} \times \overline{\partial} f(x)$. Множества $\underline{d} f(x)$ и $\overline{d} f(x)$ компактны в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$, как прямое произведение компактных множеств. Кроме того, очевидным образом выполняются равенства (1.21) и (1.22) из определения кодифференциала. Отсюда можно заключить, что функция f кодифференцируема в точке x, а пара $Df(x) = [\underline{d} f(x), \overline{d} f(x)]$, определённая выше, является её кодифференциалом в данной точке.

Предположим теперь, что f кодифференцируема в точке x, а $Df(x)$ — её кодифференциал в данной точке. Положим

$$\Phi(v) = \max_{(a, x^*) \in \underline{d} f(x)} \big(a + \langle x^*, v \rangle \big), \quad \Psi(v) = \min_{(b, y^*) \in \overline{d} f(x)} \big(b + \langle y^*, v \rangle \big) \quad \forall v \in X$$

и $g(\cdot) = \Phi(\cdot) + \Psi(\cdot)$. Заметим, что по определению кодифференциала $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ и $g(0) = 0$ (см. (1.21)).

Предположим, что функция g дифференцируема по направлениям в нуле. Зафиксируем произвольные $v \in X$ и $\varepsilon > 0$. По определению дифференцируемости по направлениям существует $\alpha_1 > 0$ такое, что $|g(\alpha v)/\alpha - g'(0, v)| < \varepsilon/2$ для всех $\alpha \in (0, \alpha_1)$. В свою очередь, по определению кодифференцируемости существует $\alpha_2 > 0$ такое, что для всех $\alpha \in (0, \alpha_2)$ будет $|f(x+\alpha v) - f(x) - g(\alpha v)| < \varepsilon\alpha/2$ (см. (1.24)). Поэтому для любых $\alpha \in (0, \min\{\alpha_1, \alpha_2\})$ будет

$$\left|\frac{f(x+\alpha v) - f(x)}{\alpha} - g'(0,v)\right| \leqslant \frac{1}{\alpha}\big|f(x+\alpha v) - f(x) - g(\alpha v)\big| + \left|\frac{g(\alpha v)}{\alpha} - g'(0,v)\right| < \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора v и ε отсюда вытекает, что f дифференцируема по направлениям в точке x и $f'(x,\cdot) = g'(0,\cdot)$.

Докажем теперь, что функция g дифференцируема по направлениям в нуле и вычислим её производную по направлениям. Для этого достаточно доказать дифференцируемость по направлениям функций Φ и Ψ в нуле и вычислить их производные по направлениям. Тогда, воспользовавшись правилом вычисления суммы производных по направлениям (см., например, [37, предложение 3.1]), получим, что функция g дифференцируема по направлениям и $f'(x,v) = g'(0,v) = \Phi'(0,v) + \Psi'(0,v)$ для всех $v \in X$.

Рассмотрим функцию Φ. Эта функция выпукла и замкнута, как супремум некоторого семейства аффинных функций. Кроме того, функция Φ всюду конечна в силу компактности множества $\underline{d}f(x)$ в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$. Поэтому функция Φ непрерывна (см. [78, следствие 2.5]) и дифференцируема по направлениям в каждой точке по предложению 4.1.4 из [45]. Более того, согласно теореме о субдифференциале супремума произвольного семейства выпуклых функций [45, теорема 4.2.3] субдифференциал (в смысле выпуклого анализа) функции Φ в нуле имеет вид

$$\partial\Phi(0) = \Big\{x^* \in X^* \ \Big|\ a + \langle x^*, 0\rangle = \Phi(0),\ (a, x^*) \in \underline{d}f(x)\Big\} = \big\{x^* \in X^* \bigm| (0, x^*) \in \underline{d}f(x)\big\}.$$

Так как функция Φ всюду непрерывна, субдифференциал $\partial\Phi(0)$ является слабо* компактным подмножеством пространства X^* (см., например, [56, следствие 1.16.2]). Наконец, согласно [56, следствие 1.16.1] для любого $v \in X$ справедливо равенство $\Phi'(0,v) = \max_{x^* \in \partial\Phi(0)} \langle x^*, v\rangle$.

Аналогичным образом доказывается, что вогнутая функция Ψ дифференцируема по направлениям в нуле и

$$\Psi'(0,v) = \min_{y^* \in \partial\Psi(0)} \langle y^*, v\rangle \quad \forall v \in X, \quad \partial\Psi(0) = \{y^* \in X^* \mid (0, y^*) \in \overline{d}f(x)\},$$

где $\partial\Psi(0)$ супердифференциал вогнутой функции Ψ_f в смысле выпуклого анализа.

Таким образом, функция f дифференцируема по направлениям в точке x и

$$f'(x,v) = \max_{x^* \in \partial\Phi(0)} \langle x^*, v\rangle + \min_{y^* \in \partial\Psi(0)} \langle y^*, v\rangle \quad \forall v \in X,$$

то есть f квазидифференцируема в точке x и пара множеств (1.26) является её квазидифференциалом в данной точке. $\square$

Замечание 1.2.2. Квазидифференциал кодифференцируемой функции f вида (1.26) будем называть квазидифференциалом, соответствующим кодифференциалу $Df(x) = [\underline{d}f(x), \overline{d}f(x)]$. Везде далее при рассмотрении кодифференцируемых функций мы будем использовать только подобные квазидифференциалы.

С помощью предыдущей теоремы легко получить необходимые условия минимума для кодифференцируемых функций.

Предложение 1.2.2. *Пусть функция f кодифференцируема в точке $x_* \in U$, а $Df(x_*)$ — её кодифференциал в данной точке. Предположим, что x_* является точкой локального минимума функции f. Тогда*

$$0 \in \underline{d}f(x_*) + (0, y^*) \quad \forall (0, y^*) \in \overline{d}f(x_*). \tag{1.27}$$

Более того, условие (1.27) *выполняется тогда и только тогда, когда $f'(x_*, \cdot) \geqslant 0$, и поэтому необходимое условие минимума* (1.27) *не зависит от выбора кодифференциала, т. е. если оно выполнено для одного кодифференциала функции f в точке x_*, то оно выполняется и для всех других кодифференциалов функции f в данной точке.*

Доказательство. По теореме 1.2.1 функция f квазидифференцируема в точке x_*. Из определения производной по направлениям и того факта, что x_* — точка локального минимума функции f следует, что $f'(x_*, v) \geqslant 0$ для всех $v \in X$. Отсюда по определению квазидифференцируемой функции имеем

$$f'(x_*, v) = \max_{x^* \in \underline{\partial} f(x_*)} \langle x^*, v \rangle + \min_{y^* \in \overline{\partial} f(x_*)} \langle y^*, v \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in X.$$

Ясно, что данное неравенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\max_{x^* \in \underline{\partial} f(x_*)} \langle x^* + y^*, v \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in X \quad \forall y^* \in \overline{\partial} f(x_*).$$

В свою очередь, воспользовавшись теоремой об отделимости в локально выпуклом пространстве (X^*, w^*), нетрудно показать, что данное неравенство выполняется тогда и только тогда, когда $0 \in \underline{\partial} f(x_*) + y^*$ для всех $y^* \in \overline{\partial} f(x_*)$, что по теореме 1.2.1 эквивалентно условию (1.27). Таким образом, необходимое условие минимума (1.27) эквивалентно условию $f'(x_*, \cdot) \geqslant 0$, и поэтому оно не зависит от выбора кодифференциала функции f в точке x_*, так как производная по направлениям не зависит от выбора кодифференциала. □

Замечание 1.2.3. (i) Вопрос независимости условий экстремума от выбора квазидифференциалов в различных задачах с ограничениями рассматривался в статьях [314, 316, 408].

(ii) Заметим, что по определению кодифференциала $\min\{b \mid (b, y_*) \in \overline{d}f(x_*)\} = 0$. Поэтому в условии (1.27) всегда существует по крайней мере одна пара $(0, y^*) \in \overline{d}f(x_*)$.

Следствие 1.2.1. *Пусть функция f и точка x_* удовлетворяют условиям предыдущего предложения. Тогда необходимое условие минимума (1.27) выполняется тогда и только тогда, когда $0 \in \underline{d}f(x_*) + (0, y^*)$ для всех $(0, y^*) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$, где “$\operatorname{ext} A$” обозначает множество крайних точек выпуклого множества A.*

Доказательство. Если условие (1.27) выполнено, то $0 \in \underline{d}f(x_*) + (0, y^*)$ для всех $(0, y^*) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$, поскольку $\operatorname{ext} \overline{d}f(x_*) \subset \overline{d}f(x_*)$. Докажем обратное утверждение. Для этого покажем сначала, что $(0, y^*) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$ тогда и только тогда, когда $y^* \in \operatorname{ext} \overline{\partial} f(x_*)$.

Выберем произвольный элемент $y^* \in \operatorname{ext} \overline{\partial} f(x_*)$ и предположим, что $(0, y^*) \notin \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$. Так как $(0, y^*) \in \overline{d}f(x_*)$ по теореме 1.2.1, то из определения крайней точки следует, что существуют $(b_1, y_1^*), (b_2, y_2^*) \in \overline{d}f(x_*)$, $(b_1, y_1^*) \neq (b_2, y_2^*)$, и $\alpha \in (0, 1)$ такие, что $\alpha(b_1, y_1^*) + (1 - \alpha)(b_2, y_2^*) = (0, y^*)$. По определению кодифференциала $\min\{b \mid (b, y^*) \in \overline{d}f(x_*)\} = 0$, то есть $b \geqslant 0$ для всех $(b, y^*) \in \overline{d}f(x_*)$. Следовательно, $b_1 = b_2 = 0$ и по теореме 1.2.1 будет $y_1^*, y_2^* \in \overline{\partial} f(x_*)$. Однако, $\alpha y_1^* + (1 - \alpha) y_2^* = y^*$ и $y_1^* \neq y_2^*$, что противоречит условию $y^* \in \operatorname{ext} \underline{\partial} f(x_*)$. Значит для любого $y^* \in \operatorname{ext} \overline{\partial} f(x_*)$ будет $(0, y^*) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$.

Докажем обратное включение. Для этого выберем произвольный элемент $(0, y^*) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$ и предположим, что $y^* \notin \operatorname{ext} \overline{\partial} f(x_*)$. По теореме 1.2.1 $y^* \in \overline{\partial} f(x_*)$. Поэтому в силу определения крайней точки существуют $y_1^*, y_2^* \in \overline{\partial} f(x_*)$, $y_1^* \neq y_2^*$, и $\alpha \in (0, 1)$ такие, что $\alpha y_1^* + (1 - \alpha) y_2^*) = y^*$. По теореме 1.2.1 будет $(0, y_1^*), (0, y_2^*) \in \underline{d}f(x_*)$. Кроме того, $\alpha(0, y_1^*) + (1 - \alpha)(0, y_2^*) = (0, y^*)$, что противоречит определению $(0, y^*)$. Таким образом, $(0, y^*) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$ тогда и только тогда, когда $y^* \in \operatorname{ext} \overline{\partial} f(x_*)$. Отсюда, воспользовавшись теоремой Крейна-Мильмана и тем фактом, что множество $\overline{\partial} f(x_*)$ непусто, выпукло и слабо* компактно, получаем, что существует по крайней мере одна точка $(0, y^*) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$.

Рассуждая от противного, предположим, что $0 \in \underline{d}f(x_*) + (0, y^*)$ для всех $(0, y^*) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$, но условие (1.27) не выполнено. Тогда в силу теоремы 1.2.1 существует $y^* \in \overline{\partial} f(x_*)$ такое, что $0 \notin \underline{\partial} f(x_*) + y^*$. Множество $\underline{\partial} f(x_*) + y^*$ выпукло и компактно в слабой* топологии. Поэтому, воспользовавшись теоремой об отделимости в локально выпуклом пространстве (X^*, w^*), получим, что существуют $v \in X$ и $c > 0$ такие, что $\langle x^* + y^*, v \rangle \geqslant c$ для всех $x^* \in \underline{\partial} f(x_*)$. По теореме Крейна-Мильмана $\overline{\partial} f(x_*) = \operatorname{cl} \operatorname{co} \operatorname{ext} \overline{\partial} f(x_*)$, где операция замыкания берётся в слабой* топологии. Поэтому найдётся $y_0^* \in \operatorname{co} \operatorname{ext} \overline{\partial} f(x_*)$ такое, что $|\langle y^* - y_0^*, v \rangle| < c/2$. Следовательно, $\langle x^* + y_0^*, v \rangle \geqslant c/2$ для всех $x^* \in \underline{\partial} f(x_*)$, откуда вытекает, что

$$0 \notin \underline{\partial} f(x_*) + y_0^*. \tag{1.28}$$

С другой стороны, по нашему предположению $0 \in \underline{d}f(x_*)+(0,y^*)$ для всех $(0,y^*) \in \operatorname{ext}\overline{d}f(x_*)$ или, что эквивалентно, $0 \in \underline{\partial}f(x_*) + y^*$ для всех $y^* \in \operatorname{ext}\overline{\partial}f(x_*)$ (см. теорему 1.2.1). Отсюда, воспользовавшись выпуклостью множества $\underline{\partial}f(x_*)$ и тем фактом, что $y_0^* \in \operatorname{co}\operatorname{ext}\overline{\partial}f(x_*)$, нетрудно доказать справедливость включения $0 \in \underline{\partial}f(x_*) + y_0^*$, что противоречит (1.28). Значит условие (1.27) выполняется, что и требовалось доказать. □

Рассуждая как и при доказательстве предложения 1.2.2 и предыдущего следствия, нетрудно получить необходимое условие максимума в терминах кодифференциалов.

Предложение 1.2.3. *Пусть функция f кодифференцируема в точке $x_* \in U$, а $Df(x_*)$ — её кодифференциал в данной точке. Предположим, что x_* является точкой локального максимума функции f. Тогда*

$$0 \in (0,x^*) + \overline{d}f(x_*) \quad \forall (0,x^*) \in \underline{d}f(x_*). \tag{1.29}$$

Более того, условие (1.29) *выполняется тогда и только тогда, когда $f'(x_*,\cdot) \leqslant 0$, и поэтому необходимое условие максимума* (1.29) *не зависит от выбора кодифференциала, т. е. если оно выполнено для одного кодифференциала функции f в точке x_*, то оно выполняется и для всех других кодифференциалов функции f в данной точке. Наконец, условие* (1.29) *выполняется тогда и только тогда, когда $0 \in (0,x^*) + \overline{d}f(x_*)$ для всех $(0,x^*) \in \operatorname{ext}\underline{d}f(x_*)$.*

С помощью необходимых условий минимума и максимума в терминах кодифференциалов можно получить естественное обобщение теоремы о среднем на случай кодифференцируемых функций. Доказательство этого результата почти полностью повторяет доказательство теоремы о среднем для дифференцируемых функций.

Предложение 1.2.4 (теорема о среднем)**.** *Пусть функция f кодифференцируема на множестве $S \subseteq U$ (т. е. f кодифференцируема в каждой точке этого множества), а $Df(\cdot)$ — кодифференциальное отображение функции f, определённое на множестве S. Тогда для любых точек $x_1, x_2 \in S$, удовлетворяющих условию $\operatorname{co}\{x_1,x_2\} \subseteq S$, существуют $y \in \operatorname{co}\{x_1,x_2\}$, $(0,x^*) \in \underline{d}f(y)$ и $(0,y^*) \in \overline{d}f(y)$ такие, что $f(x_2) - f(x_1) = \langle x^* + y^*, x_2 - x_1\rangle$.*

Доказательство. Зафиксируем $\eta > 0$ и предположим, что функция $g\colon (-\eta, 1+\eta) \to \mathbb{R}$ кодифференцируема на отрезке $[0,1]$, а $Dg(\cdot)$ — кодифференциальное отображение функции g, определённое на $[0,1]$. Покажем, что функция g непрерывна на $[0,1]$.

Действительно, по определению кодифференцируемости для любого $t \in [0,1]$ существуют замкнутые выпуклые функции $\Phi_t, \Psi_t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $\Phi_t(0) = \Psi_t(0) = 0$ и для любых $\varepsilon > 0$ и $h \in \{-1, 1\}$ найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что

$$\left|g(t+\alpha h) - g(t) - \big(\Phi_t(\alpha h) - \Psi_t(\alpha h)\big)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\alpha \quad \forall \alpha \in (0, \delta_1).$$

Поскольку выпуклые функции Φ_t, Ψ_t всюду конечны, они непрерывна на $\mathbb{R}$ (см., например, [65, теорема 10.1]). Поэтому, в силу того, что $\Phi_t(0) = \Psi_t(0) = 0$, существует $\delta_2 > 0$ такое, что $|\Phi_t(\alpha h) - \Psi_t(\alpha h))| < \varepsilon/2$ для всех $\alpha \in (0, \delta_2)$ и $h \in \{-1, 1\}$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$. Тогда для всех $\alpha \in [0, \delta)$ и $h \in \{-1, 1\}$ будет

$$\big|g(t+\alpha h) - g(t)\big| \leqslant \left|g(t+\alpha h) - g(t) - \big(\Phi_t(\alpha h) - \Psi_t(\alpha h)\big)\right| + \big|\Phi_t(\alpha h) - \Psi_t(\alpha h)\big| < \frac{\varepsilon}{2}\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon,$$

откуда следует, что $|g(t') - g(t)| < \varepsilon$ для всех $t' \in (t - \delta, t + \delta)$. Значит функция g непрерывна в точке t, а следовательно и на отрезке $[0, 1]$.

Предположим, что $g(0) = g(1) = 0$. По теореме Вейерштрасса функция g достигает своих минимального и максимального значений на отрезке $[0, 1]$. Если $g(t) \neq 0$ для некоторого $t \in [0, 1]$, то функция g достигает, либо минимума, либо максимума на отрезке $[0, 1]$ в некоторой внутренней точке $\theta \in (0, 1)$. Если же $g(t) = 0$ для всех $t \in [0, 1]$, то в качестве θ можно выбрать произвольную точку из интервала $(0, 1)$. В обоих случаях θ является либо точкой локального минимума, либо точкой локального максимума функции g.

Если θ — точка локального минимума, то по предложению 1.2.2 для всех $(0, w) \in \overline{d}g(\theta)$ существует пара $(0, v) \in \underline{d}g(\theta)$ такая, что $v + w = 0$ (напомним, что поскольку функция g определена на $\mathbb{R}$, её кодифференциал является парой выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$). Если же θ — точка локального максимума, то по предложению 1.2.3 для любого $(0, v) \in \underline{d}g(\theta)$ существует $(0, w) \in \overline{d}g(\theta)$ такое, что $v + w = 0$. В обоих случаях существуют $(0, v) \in \underline{d}g(\theta)$ и $(0, w) \in \overline{d}g(\theta)$ для которых $v + w = 0$.

Предположим теперь, что значения $g(0)$ и $g(1)$ произвольны. Для всех $t \in (-\eta, 1 + \eta)$ определим $r(t) = g(t) - g(0) - t(g(1) - g(0))$. Как нетрудно проверить, функция r кодифференцируема на отрезке $[0, 1]$, а пара $Dr(t) = [\underline{d}g(t) + (0, g(0) - g(1)), \overline{d}g(t)]$ является её кодифференциалом в точке $t \in [0, 1]$. Кроме того, $r(0) = r(1) = 0$. Применяя доказанное для случая $g(0) = g(1) = 0$ утверждение к функции r, получим, что существуют $\theta \in (0, 1)$, $(0, v) \in \underline{d}g(\theta)$ и $(0, w) \in \overline{d}g(\theta)$ такие, что $g(1) - g(0) = v + w$.

Рассмотрим теперь функцию f из формулировки теоремы. Зафиксируем произвольные точки $x_1, x_2 \in S$ такие, что $\operatorname{co}\{x_1, x_2\} \subset S$. Поскольку множество U открыто и $S \subset U$, существует $\eta > 0$ такое, что для всех $t \in (-\eta, 1 + \eta)$ будет $x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \in U$. Положим $g(t) = f(x(t))$ для всех $t \in (-\eta, 1 + \eta)$. Непосредственно проверяется, что функция

g кодифференцируема на отрезке $[0,1]$ и пара

$$\underline{d}g(t) = \big\{(a, \langle x^*, x_2 - x_1\rangle) \in \mathbb{R}^2 \bigm| (a, x^*) \in \underline{d}f(x(t))\big\},$$
$$\overline{d}g(t) = \big\{(b, \langle y^*, x_2 - x_1\rangle) \in \mathbb{R}^2 \bigm| (b, y^*) \in \overline{d}f(x(t))\big\}.$$

является её кодифференциалом в точке $t \in [0,1]$ (см. следствие 1.2.6 ниже). Как было показано выше, существуют $\theta \in (0,1)$, $(0,v) \in \underline{d}g(\theta)$ и $(0,w) \in \overline{d}g(\theta)$ такие, что $g(1) - g(0) = v + w$. Переписывая данное равенство в терминах функции f и полагая $y = x(\theta)$, получим, что существуют $y \in \operatorname{co}\{x_1, x_2\}$, $(0,x^*) \in \underline{d}f(y)$ и $(0,y^*) \in \overline{d}f(y)$ такие, что $f(x_2) - f(x_1) = g(1) - g(0) = \langle x^* + y^*, x_2 - x_1\rangle$, что и требовалось доказать. □

Следствие 1.2.2. *Пусть функция f кодифференцируема на выпуклом множестве $S \subseteq U$ и $Df(\cdot)$ — кодифференциальное отображение функции f, определённое на множестве S. Предположим, что $R = \sup_{x \in S} \sup\{\|x^*\| \mid (0,x^*) \in \underline{d}f(x) + \overline{d}f(x)\} < +\infty$. Тогда функция f удовлетворяет условию Липшица на множестве S с константой Липшица $L = R$. В частности, если f непрерывно кодифференцируема в точке $x \in U$, то f удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности этой точки.*

Доказательство. Выберем произвольные точки $x_1, x_2 \in S$. Заметим, что $\operatorname{co}\{x_1, x_2\} \subset S$, поскольку множество S выпукло. По теореме о среднем существуют $y \in \operatorname{co}\{x_1, x_2\}$, $(0,x^*) \in \underline{d}f(y)$ и $(0,y^*) \in \overline{d}f(y)$ такие, что $f(x_2) - f(x_1) = \langle x^* + y^*, x_2 - x_1\rangle$. Поэтому

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \big|\langle x^* + y^*, x_2 - x_1\rangle\big| \leqslant \|x^* + y^*\|\|x_2 - x_1\| \leqslant R\|x_2 - x_1\|,$$

то есть f удовлетворяет условию Липшица на S с константой Липшица $L = R$.

Предположим, что f непрерывно кодифференцируема в точке $x \in U$. Тогда по определению непрерывной кодифференцируемости и лемме 1.2.1 существует $\delta > 0$ такое, что $\underline{d}f(x') \subset \underline{d}f(x) + B(0,1)$ и $\overline{d}f(x') \subset \overline{d}f(x) + B(0,1)$ для всех $x' \in B(x,\delta)$. Поскольку множества $\underline{d}f(x)$ и $\overline{d}f(x)$ компактны в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$, они ограничены относительно нормы в пространстве $\mathbb{R} \times X^*$ (см. [179, теорема 2.1]), откуда следует, что

$$\sup_{x' \in B(x,\delta)} \sup\big\{\|x^*\| \bigm| (0,x^*) \in \underline{d}f(x') + \overline{d}f(x')\big\} < +\infty.$$

Поэтому функция f удовлетворяет условию Липшица на множестве $B(x,\delta)$ по первой части следствия. □

Полученное выше свойство локальной липшицевости позволяет доказать, что непрерывно кодифференцируемые функции являются, в некотором смысле, кодифференцируемыми *равномерно* по Δx.

Предложение 1.2.5. *Пусть функция f непрерывно кодифференцируема в точке $x \in U$, а $Df(x)$ — произвольный кодифференциал функции f в этой точке. Тогда для любого $\Delta x \in X$ будет*

$$\lim_{[\alpha, \Delta x'] \to [+0, \Delta x]} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x + \alpha \Delta x') - f(x) - \max_{(a, x^*) \in \underline{d} f(x)} \big(a + \langle x^*, \alpha \Delta x \rangle \big) - \min_{(b, y^*) \in \overline{d} f(x)} \big(b + \langle y^*, \alpha \Delta x \rangle \big) \Big| = 0. \tag{1.30}$$

Более того, если пространство X конечномерно, то в окрестности точки x справедливо разложение

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \max_{(a, x^*) \in \underline{d} f(x)} (a + \langle x^*, \Delta x \rangle) + \min_{(b, y^*) \in \overline{d} f(x)} (b + \langle y^*, \Delta x \rangle) + o(\|\Delta x\|). \tag{1.31}$$

Доказательство. Выберем произвольные $\Delta x \in X$ и $\varepsilon > 0$. По определению кодифференцируемости существует $\delta_1 > 0$ такое, что для всех $\alpha \in (0, \delta_1)$ будет

$$\Big| f(x + \alpha \Delta x) - f(x) - \max_{(a, x^*) \in \underline{d} f(x)} \big(a + \langle x^*, \alpha \Delta x \rangle \big) - \min_{(b, y^*) \in \overline{d} f(x)} \big(b + \langle y^*, \alpha \Delta x \rangle \big) \Big| < \frac{\varepsilon}{2} \alpha. \tag{1.32}$$

По следствию 1.2.2 существуют $r > 0$ и $L > 0$ такие, что функция f удовлетворяет условию Липшица на множестве $B(x, r)$ с константой Липшица L. Заметим, что

$$\|\alpha \Delta x'\| \leqslant \alpha \|\Delta x' - \Delta x\| + \alpha \|\Delta x\| \leqslant r \quad \forall \Delta x' \in B\left(\Delta x, \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} \right), \ \alpha \in \left(0, \min\left\{ \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}, \frac{r}{2\|\Delta x\|} \right\} \right)$$

(если $\Delta x = 0$, то $\alpha \in (0, \sqrt{r}/\sqrt{2})$), т. е. для любых таких $\Delta x'$ и α будет $x + \alpha \Delta x' \in B(x, r)$ и $x + \alpha \Delta x \in B(x, r)$, и поэтому

$$\big| f(x + \alpha \Delta x') - f(x + \alpha \Delta x) \big| \leqslant \alpha L \|\Delta x' - \Delta x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \alpha,$$

если вдобавок $\Delta x' \in B(\Delta x, \varepsilon / 2L)$. Отсюда, воспользовавшись неравенством (1.32), получим, что для любых $\Delta x'$ и α, удовлетворяющих условиям

$$\Delta x' \in B\left(\Delta x, \min\left\{ \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{2L} \right\} \right), \quad \alpha \in \left(0, \min\left\{ \delta_1, \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}, \frac{r}{2\|\Delta x\|} \right\} \right)$$

(если $\Delta x = 0$, то $\alpha \in (0, \min\{\delta_1, \sqrt{r}/\sqrt{2}\})$), выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &\Big| f(x + \alpha \Delta x') - f(x) - \max_{(a, x^*) \in \underline{d} f(x)} \big(a + \langle x^*, \alpha \Delta x \rangle \big) - \min_{(b, y^*) \in \overline{d} f(x)} \big(b + \langle y^*, \alpha \Delta x \rangle \big) \Big| \leqslant \\ &\quad \leqslant \big| f(x + \alpha \Delta x') - f(x + \alpha \Delta x) \big| + \Big| f(x + \alpha \Delta x) - f(x) - \max_{(a, x^*) \in \underline{d} f(x)} \big(a + \langle x^*, \alpha \Delta x \rangle \big) - \\ &\qquad - \min_{(b, y^*) \in \overline{d} f(x)} \big(b + \langle y^*, \alpha \Delta x \rangle \big) \Big| < \varepsilon \alpha. \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ и $\Delta x \in X$ были выбраны произвольно, можно заключить, что выполняется равенство (1.30).

Предположим теперь, что пространство X конечномерно. Положим $\Phi(\Delta x) = \max_{(a,x^*)\in \underline{d}f(x)}(a + \langle x^*, \Delta x\rangle)$ и $\Psi(\Delta x) = \min_{(b,y^*)\in \overline{d}f(x)}(b + \langle y^*, \Delta x\rangle)$. Рассуждая от противного, допустим, что разложение (1.31) не выполняется. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и сходящаяся к нулю последовательность $\{\Delta x_n\} \subset X \setminus \{0\}$ такие, что

$$\frac{1}{\|\Delta x_n\|}\Big| f(x + \Delta x_n) - f(x) - \Phi(\Delta x_n) - \Psi(\Delta x_n)\Big| \geqslant \varepsilon. \tag{1.33}$$

Положим $h_n = \Delta x_n / |\Delta x_n|$ и $\alpha_n = \|\Delta x_n\|$. Так как пространство X конечномерно и $|h_n| = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, существует подпоследовательность $\{h_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторому вектору $h \in X$, $|h| = 1$. Заметим также, что $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, так как последовательность $\{\Delta x_n\}$ сходится к нулю.

По определению Φ замкнутая выпуклая функция. Кроме того, Φ всюду конечна в силу того, что множество $\underline{d}f(x)$ компактно в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$. Поэтому, в силу конечномерности пространства X, функция Φ удовлетворяет условию Липшица на ограниченных множествах (см., например, [56, лемма 1.7.1]). Вогнутая функция Ψ очевидно также удовлетворяет условию Липшица на ограниченных множествах.

По определению последовательность $\{\Delta x_n\}$ сходится к нулю. Поэтому последовательности $\{\Delta x_n\}$ и $\{\alpha_n h\}$ ограничены, то есть лежат внутри некоторого шара, в котором функции Φ и Ψ удовлетворяют условию Липшица с константой Липшица $L > 0$. Поэтому

$$\Big|\Phi(\Delta x_n) + \Psi(\Delta x_n) - \big(\Phi(\alpha_n h) + \Psi(\alpha_n h)\big)\Big| \leqslant 2L\|\Delta x_n - \alpha_n h\| = 2L\alpha_n \|h_n - h\|.$$

Отсюда и из неравенства (1.33) следует, что

$$\begin{aligned}\Big| f(x + \alpha_{n_k} h_{n_k}) - f(x) - \Phi(\alpha_{n_k} h) - \Psi(\alpha_{n_k} h)\Big| \geqslant \Big| f(x + \Delta x_{n_k}) - f(x) - \Phi(\Delta x_n) - \Psi(\Delta x_n)\Big| - \\ - \Big|\Phi(\Delta x_{n_k}) + \Psi(\Delta x_{n_k}) - \big(\Phi(\alpha_{n_k} h) + \Psi(\alpha_{n_k} h)\big)\Big| \geqslant \varepsilon\alpha_{n_k} - 2L\alpha_{n_k}\|h_{n_k} - h\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\alpha_{n_k}\end{aligned}$$

для всех достаточно больших k, поскольку $h_{n_k} \to h$ при $k \to \infty$. Однако, данное неравенство противоречит доказанному выше соотношению (1.30). Таким образом, в некоторой окрестности точки x справедливо разложение (1.31). $\square$

Локальная липшицевость непрерывно кодифференцируемых функций также позволяет показать, что для таких функций предел в определении производной по направлениям $f'(x, h)$, в некотором смысле, локально равномерен по h. Напомним, что функция f называется *дифференцируемой по направлениям в смысле Адамара* в точке $x \in U$, если для любого $h \in X$ существует конечный предел

$$f'_H(x, h) = \lim_{[\alpha, h'] \to [+0, h]} \frac{f(x + \alpha h') - f(x)}{\alpha} \tag{1.34}$$

(см. [231] по поводу обозначений под знаком предела). Очевидно, что если функция f дифференцируема по направлениям в смысле Адамара в точке x, то она дифференцируема по направлениям в этой точке и $f'_H(x, \cdot) = f'(x, \cdot)$. Поэтому везде далее мы будем использовать обозначение $f'(x, \cdot)$ для производной по направлениям в смысле Адамара.

Предложение 1.2.6. *Пусть функция f непрерывно кодифференцируема в точке $x \in U$. Тогда f дифференцируема по направлениям в смысле Адамара в этой точке.*

Доказательство. По следствию 1.2.2 существуют $r > 0$ и $L > 0$ такие, что $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L\|x_1 - x_2\|$ для всех $x_1, x_2 \in B(x, r)$. Кроме того, по теореме 1.2.1 функция f квазидифференцируема, а потому и дифференцируема по направлениям в точке x.

Зафиксируем произвольные $\varepsilon > 0$ и $h \in X$. Рассмотрим сначала случай $h = 0$. Заметим, что $x + \alpha h' \in B(x, r)$ для всех $\alpha \in (0, \sqrt{r})$ и $h' \in B(0, \sqrt{r})$. Поэтому, полагая $\delta = \min\{\sqrt{r}, \varepsilon/L\}$, имеем

$$\left|\frac{f(x + \alpha h') - f(x)}{\alpha}\right| \leqslant L\|h'\| < \varepsilon \quad \forall \alpha \in (0, \delta),\ h' \in B(0, \delta),$$

т. е. предел (1.34) существует при $h = 0$ и равен нулю.

Предположим теперь, что $h \neq 0$. По определению производной по направлениям существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\left|\frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha} - f'(x, h)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, 0 < \alpha < \delta_0.$$

Заметим, что если $0 < \alpha < r/(2\|h\|)$ и для некоторого $h' \in X$ справедливо неравенство $\|h' - h\| < \|h\|$, то $x + \alpha h \in B(x, r/2)$ и $\|\alpha h' - \alpha h\| = \alpha\|h' - h\| < r/2$, т. е. $x + \alpha h' \in B(x, r)$. Поэтому положим $\delta = \min\{\delta_0, \varepsilon/2L, r/(2\|h\|), \|h\|\}$. Тогда для всех $\alpha \in (0, \delta)$ и $h' \in B(h, \delta)$ будет $x + \alpha h' \in B(x, r)$ и

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x + \alpha h') - f(x)}{\alpha} - f'(x, h)\right| \leqslant \left|\frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha} - f'(x, h)\right| + \\ + \frac{1}{\alpha}\big|f(x + \alpha h') - f(x + \alpha h)\big| < \frac{\varepsilon}{2} + L\|h' - h\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

т. е. предел (1.34) существует и равен $f'(x, h)$. $\square$

1.2.3 Кодифференциальное исчисление

В данном параграфе мы докажем основные правила кодифференциального исчисления в бесконечномерном случае. Кроме того, поскольку в дальнейшем на потребуется использовать понятие т. н. *равномерной кодифференцируемости*, помимо самих правил кодифференциального исчисления мы также приведём оценки остаточного члена в разложении кодифференцируемой функции, которые позволяют судить о том, является ли функция равномерной кодифференцируемой или нет.

Напомним, что операции сложения и умножения на число для пар подмножеств вещественного линейного пространства определяются следующим образом:

$$[A,B]+[C,D]=[A+C,B+D],\quad \lambda[A,B]=\begin{cases}[\lambda A,\lambda B], & \text{если } \lambda \geqslant 0,\\ [\lambda B,\lambda A], & \text{если } \lambda < 0.\end{cases} \tag{1.35}$$

Нам также потребуется следующее хорошо известное вспомогательное утверждение [46].

Лемма 1.2.8. *Пусть Y — вещественное топологическое векторное пространство, а $A_1,\ldots,A_n \subset Y$ — выпуклые компактные множества. Тогда для любых $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ множества $\sum_{i=1}^n \alpha A_i$ и $\operatorname{co}\{A_i \mid i \in 1\colon n\}$ также являются выпуклыми и компактными.*

Доказательство. Множество $A_1 \times \ldots \times A_n$ является выпуклым компактным подмножеством пространства Y^n, как прямое произведение выпуклых компактных множеств. Поэтому множество $\sum_{i=1}^n \alpha A_i$ является выпуклым компактным подмножеством пространства Y, как образ выпуклого компактного множества $A_1 \times \ldots \times A_n$ при непрерывном линейном отображении $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$.

Обозначим через $S_n = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\}$, где $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$, стандартный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что множество $S \times A_1 \times \ldots \times A_n$ является компактным подмножеством пространства $\mathbb{R}^n \times Y^n$, как прямое произведение компактных множеств. Поэтому множество $\operatorname{co}\{A_i \mid i \in 1\colon n\}$ является компактным, как образ множества $S \times A_1 \times \ldots \times A_n$ при непрерывном отображении $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,x_1,\ldots,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ (тот факт, что этот образ действительно совпадает с выпуклой оболочкой множеств A_i проверяется непосредственно). Выпуклость данного множества следует из определения выпуклой оболочки. $\square$

Напомним, что X — вещественное банахово пространство, а $U \subset X$ — открытое множество. Пусть функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ кодифференцируема в точке $x \in U$, а $Df(x)$ — её кодифференциал в данной точке. Для всех $r > 0$ таких, что $B(x,r) \subset U$ и для любых $\Delta x \in B(0,r)$ и $\alpha \in [0,1]$ определим функцию

$$\begin{aligned}\varepsilon_f(\alpha,\Delta x,x,r) = \frac{1}{\alpha}\Big(f(x+\alpha\Delta x) - f(x) - \max_{(a,x^*)\in \underline{d}f(x)}(a+\langle x^*,\alpha\Delta x\rangle) -&\\ - \min_{(b,y^*)\in \overline{d}f(x)}(b+\langle y^*,\alpha\Delta x\rangle)\Big).&\end{aligned} \tag{1.36}$$

Функция ε_f очевидно зависит от выбора кодифференциала функции f. Однако, для того чтобы не перегружать обозначения, мы не будем явно указывать эту зависимость.

Заметим, что по определению кодифференцируемости $\varepsilon_f(\alpha, \Delta x, x, r) \to 0$ при $\alpha \to +0$. Функция ε_f позволяет оценить насколько хорошо разность выпуклых функций

$$\max_{(a,x^*) \in \underline{d}f(x)} (a + \langle x^*, \alpha \Delta x \rangle) + \min_{(b,y^*) \in \overline{d}f(x)} (b + \langle y^*, \alpha \Delta x \rangle),$$

построенная по кодифференциалу функции f, приближает приращение функции f в точке x. Наша цель — построить исчисление кодифференцируемых функций и одновременно получить оценки функции ε_f. Для краткости мы ограничимся случаем, когда все рассматриваемые функции непрерывно кодифференцируемы на всём множестве U. Однако, заметим, что все результаты данного параграфа без труда переносятся на случай функций, непрерывно кодифференцируемых на некотором (возможно замкнутом) подмножестве множества U.

Теорема 1.2.2. *Пусть функции $f_i \colon U \to \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$, непрерывно кодифференцируемы на множестве U, а $Df_i(\cdot)$, $i \in I$, — кодифференциальные отображения функций f_i, определённые и непрерывные по Хаусдорфу на U. Тогда функции $f = \max_{i \in I} f_i$ и $g = \min_{i \in I} f_i$ также непрерывно кодифференцируемы на множестве U, а многозначные отображения*

$$Df(\cdot) = \Big[\operatorname{co} \Big\{ \{(f_i(\cdot) - f(\cdot), 0)\} + \underline{d}f_i(\cdot) - \sum_{j \neq i} \overline{d}f_j(\cdot) \;\Big|\; i \in I \Big\}, \sum_{i \in I} \overline{d}f_i(\cdot) \Big], \tag{1.37}$$

$$Dg(\cdot) = \Big[\sum_{i \in I} \underline{d}f_i(\cdot), \operatorname{co} \Big\{ \{(f_i(\cdot) - g(\cdot), 0)\} + \overline{d}f_i(\cdot) - \sum_{j \neq i} \underline{d}f_j(\cdot) \;\Big|\; i \in I \Big\} \Big]$$

являются кодифференциальными отображениями функций f и g, определёнными и непрерывными по Хаусдорфу на множестве U. Более того, справедлива оценка

$$\max \big\{ \big|\varepsilon_f(\alpha, \Delta x, x, r)\big|, \big|\varepsilon_g(\alpha, \Delta x, x, r)\big| \big\} \leqslant \max_{i \in I} \big|\varepsilon_{f_i}(\alpha, \Delta x, x, r)\big|. \tag{1.38}$$

Доказательство. Мы докажем теорему только для функции f, поскольку доказательство теоремы для функции g почти дословно повторяет доказательство для f. Зафиксируем произвольные $x \in U$ и $r > 0$ такие, что $B(x, r) \subset U$ (напомним, что U — открытое множество). Для любого $h \in X$ определим

$$\Phi_i(h) = \max_{(a,x^*) \in \underline{d}f_i(x)} \big(a + \langle x^*, h \rangle\big), \quad \Psi_i(h) = \min_{(b,y^*) \in \overline{d}f_i(x)} \big(b + \langle y^*, h \rangle\big), \quad i \in I,$$

и положим

$$\Phi(h) = \max_{(a,x^*) \in \underline{d}f(x)} \big(a + \langle x^*, h \rangle\big), \quad \Psi(h) = \min_{(b,y^*) \in \overline{d}f(x)} \big(b + \langle y^*, h \rangle\big),$$

где пара $Df(x) = [\underline{d}f(x), \overline{d}f(x)]$ определена согласно (1.37). Заметим, что множества $\underline{d}f(x)$ и $\overline{d}f(x)$ являются выпуклыми компактными подмножествами пространства $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ по лемме 1.2.8. Кроме того, функции f_i, $i \in I$, локально липшицевы на множестве U по следствию 1.2.2. Поэтому функция f непрерывна на U, как функция максимума конечного числа непрерывных функций, и следовательно отображения $\underline{d}f(\cdot)$ и $\overline{d}f(\cdot)$ непрерывны по Хаусдорфу по леммам 1.2.2 и 1.2.3. Таким образом, остаётся доказать, что функция f кодифференцируема на U, пара (1.37) является её кодифференциальным отображением и справедлива оценка (1.38).

Выберем произвольные $\Delta x \in B(0, r)$ и $\alpha \in [0, 1]$. По определению имеем

$$f(x + \alpha\Delta x) - f(x) = \max_{i \in I} \big(f_i(x + \alpha\Delta x) - f(x) \big) =$$
$$= \max_{i \in I} \big(f_i(x) - f(x) + \Phi_i(\alpha\Delta x) + \Psi_i(\alpha\Delta x) + \alpha\varepsilon_{f_i}(\alpha, \Delta x, x, r) \big).$$

Прибавляя и отнимая $\sum_{i=1}^m \Psi_i(\alpha\Delta x)$, получим

$$f(x + \alpha\Delta x) - f(x) = \max_{i \in I} \big(f_i(x) - f(x) +$$
$$+ \Phi_i(\alpha\Delta x) - \sum_{j \neq i} \Psi_j(\alpha\Delta x) + \alpha\varepsilon_{f_i}(\alpha, \Delta x, x, r) \big) + \sum_{i=1}^m \Psi_i(\alpha\Delta x).$$

Отсюда, воспользовавшись очевидными неравенствами

$$\max_{i \in I} a_i - \max_{i \in I} |b_i| \leqslant \max_{i \in I}(a_i + b_i) \leqslant \max_{i \in I} a_i + \max_{i \in I} |b_i|,$$

справедливыми для любых вещественных чисел a_i и b_i, имеем

$$\Big| f(x + \alpha\Delta x) - f(x) - \max_{i \in I} \big(f_i(x) - f(x) + \Phi_i(\alpha\Delta x) - \sum_{j \neq i} \Psi_j(\alpha\Delta x) \big) + \sum_{i=1}^m \Psi_i(\alpha\Delta x) \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha \max_{i \in I} \big| \varepsilon_{f_i}(\alpha, \Delta x, x, r) \big|. \quad (1.39)$$

Преобразуем выражение, стоящее в левой части данного неравенства. Заметим, что по определению $\overline{d}f(x)$ (см. (1.37)) будет

$$\sum_{i=1}^m \Psi_i(h) = \sum_{i=1}^m \min_{(b, y^*) \in \overline{d}f_i(x)} \big(b + \langle y^*, h \rangle \big) = \min_{(b, y^*) \in \overline{d}f(x)} \big(b + \langle y^*, h \rangle \big) = \Psi(h) \quad \forall h \in X.$$

Аналогичным образом, по определению $\underline{d}f(x)$ (см. (1.37)) будет

$$\max_{i \in I} \big(f_i(x) - f(x) + \Phi_i(h) - \sum_{j \neq i} \Psi_j(h) \big) = \max_{(a, x^*) \in \underline{d}f(x)} \big(a + \langle x^*, h \rangle \big) = \Phi(h) \quad \forall h \in X.$$

Подставляя данные равенства в (1.39), получим

$$\Big| f(x + \alpha\Delta x) - f(x) - \Phi(\alpha\Delta x) - \Psi(\alpha\Delta x) \Big| \leqslant \alpha \max_{i \in I} \big| \varepsilon_{f_i}(\alpha, \Delta x, x, r) \big|.$$

Так как по определению кодифференцируемости $\varepsilon_{f_i}(\alpha, \Delta x, x, r) \to 0$ при $\alpha \to +0$, из данного неравенства следует, что функция f кодифференцируема в точке x, пара $Df(x)$, определённая согласно (1.37), является кодифференциалом функции f в данной точке и справедлива оценка (1.38). $\square$

Теорема 1.2.3. *Пусть функции $f_i\colon U \to \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$, непрерывно кодифференцируемы на множестве U, а $Df_i(\cdot)$, $i \in I$, — кодифференциальные отображения функций f_i, определённые и непрерывные по Хаусдорфу на U. Предположим также, что вещественнозначная функция $G = G(y)$ определена и непрерывно дифференцируема на открытом множестве $V \subseteq \mathbb{R}^m$, содержащем множество $\{f(x) \in \mathbb{R}^m \mid x \in U\}$, где $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T$. Тогда функция $g(\cdot) = G(f_1(\cdot), \ldots, f_m(\cdot))$ определена и непрерывно кодифференцируема на множестве U, а отображение*

$$Dg(\cdot) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial G(f(\cdot))}{\partial y_i} Df_i(\cdot) \tag{1.40}$$

является кодифференциальным отображением функции g, определённым и непрерывным по Хаусдорфу на U. Кроме того, для любого $r > 0$ такого, что $B(x, r) \subset U$ и $\operatorname{co} f(B(x, r)) \subset V$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \big|\varepsilon_g(\alpha, \Delta x, x, r)\big| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left|\frac{\partial G}{\partial y_i}(f(x))\right| \big|\varepsilon_{f_i}(\alpha, \Delta x, x, r)\big| + \\ + \frac{1}{\alpha} \sup_{t \in [0,1]} \Big|\big\langle \nabla G\big(y(t)\big) - \nabla G(f(x)), f(x + \alpha\Delta x) - f(x)\big\rangle\Big|, \end{aligned} \tag{1.41}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$ и $y(t) = tf(x) + (1 - t)f(x + \alpha\Delta x)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $x \in U$ и $r > 0$ такие, что $B(x, r) \subset U$ и $\operatorname{co} f(B(x, r)) \subset V$. Заметим, что для любого $x \in U$ существует $r > 0$, удовлетворяющее данным условиям. Действительно, так как функции f_i локально липшицевы по следствию 1.2.2, то, выбирая достаточно малое $r > 0$, можно гарантировать, что $f(B(x, r)) \subseteq B(f(x), Lr)$ для некоторого $L > 0$ и поэтому $\operatorname{co} f(B(x, r)) \subseteq B(f(x), Lr)$. В свою очередь, в силу открытости множества V, для любого достаточного малого $r > 0$ выполняется включение $B(f(x), Lr) \subset V$, из которого следует, что $\operatorname{co} f(B(x, r)) \subset V$.

Заметим, что множества $\underline{d}g(x)$ и $\overline{d}g(x)$, определённые в соответствии с равенством (1.40), являются выпуклыми компактными подмножествами пространства $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ по лемме 1.2.8. Кроме того, функции f_i локально липшицевы по следствию 1.2.2, откуда следует, что функции $\partial G(f(\cdot))/\partial y_i$ непрерывны на множестве U. Поэтому отображение (1.40) непрерывно по Хаусдорфу на U по леммам 1.2.5 и 1.2.6.

Перейдём к доказательству кодифференцируемости функции g. Для этого выберем произвольные $\Delta x \in B(0, r)$ и $\alpha \in [0, 1]$ и обозначим $y(t) = tf(x) + (1 - t)f(x + \alpha\Delta x)$ для всех $t \in [0, 1]$. По теореме о среднем для дифференцируемых функций существует $t \in (0, 1)$ такое, что

$$\begin{aligned}
&g(x+\alpha\Delta x)-g(x)=G(f(x+\alpha\Delta x))-G(f(x))=\\
&\quad=\langle\nabla G(f(x)),f(x+\alpha\Delta x)-f(x)\rangle+\big\langle\nabla G\big(y(t)\big)-\nabla G(f(x)),f(x+\alpha\Delta x)-f(x)\big\rangle=\\
&\quad=\sum_{i=1}^m\frac{\partial G}{\partial y_i}(f(x))\Big(\Phi_i(\alpha\Delta x)+\Psi_i(\alpha\Delta x)+\alpha\varepsilon_{f_i}(\alpha,\Delta x,x,r)\Big)+\\
&\quad+\big\langle\nabla G\big(y(t)\big)-\nabla G(f(x)),f(x+\alpha\Delta x)-f(x)\big\rangle, \qquad (1.42)
\end{aligned}$$

где функции Φ_i и Ψ_i определены также, как и в доказательстве теоремы 1.2.2. Преобразуем данное равенство. Воспользовавшись хорошо известными равенствами [32]

$$\max_{(a,x^*)\in A}(a+\langle x^*,h\rangle)+\max_{(b,y^*)\in B}(b+\langle x^*,h\rangle)=\max_{(a,x^*)\in A+B}(a+\langle x^*,h\rangle),\quad\forall h\in X$$

$$-\max_{(a,x^*)\in A}(a+\langle x^*,h\rangle)=\min_{(a,x^*)\in -A}(a+\langle x^*,h\rangle)\quad\forall h\in X,$$

справедливым для любых компактных подмножеств A,B пространства $(\mathbb{R}\times X^*,\tau_{\mathbb{R}}\times w^*)$, и аналогичными равенствами для операции минимума, получим, что

$$\sum_{i=1}^m\frac{\partial G}{\partial y_i}(f(x))\Big(\Phi_i(\alpha\Delta x)+\Psi_i(\alpha\Delta x)\Big)=\max_{(a,x^*)\in A}(a+\langle x^*,\alpha\Delta x\rangle)+\min_{(b,y^*)\in B}(b+\langle x^*,\alpha\Delta x\rangle),$$

где

$$A=\sum_{i\in I_+(x)}\frac{\partial G(f(x))}{\partial y_i}\underline{d}f_i(x)+\sum_{i\in I_-(x)}\frac{\partial G(f(x))}{\partial y_i}\overline{d}f_i(x),$$

$$B=\sum_{i\in I_+(x)}\frac{\partial G(f(x))}{\partial y_i}\overline{d}f_i(x)+\sum_{i\in I_-(x)}\frac{\partial G(f(x))}{\partial y_i}\underline{d}f_i(x),$$

$I_+(x)=\{i\in I\mid G'_{y_i}(f(x))\geqslant 0\}$ и $I_-(x)=\{i\in I\mid G'_{y_i}(f(x))<0\}$. Согласно (1.40) и определению операций сложения и умножения на число для пар выпуклых множеств (1.35) справедливы равенства $A=\underline{d}g(x)$ и $B=\overline{d}g(x)$. Подставляя полученные равенства в (1.42), имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha}\Big|g(x+\alpha\Delta x)-g(x)-\max_{(a,x^*)\in\underline{d}g(x)}(a+\langle x^*,\alpha\Delta x\rangle)-\min_{(b,y^*)\in\overline{d}g(x)}(b+\langle x^*,\alpha\Delta x\rangle)\Big|\leqslant\\
&\leqslant\sum_{i=1}^m\left|\frac{\partial G}{\partial y_i}(f(x))\right|\big|\varepsilon_{f_i}(\alpha,\Delta x,x,r)\big|+\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in[0,1]}\Big|\big\langle\nabla G\big(y(t)\big)-\nabla G(f(x)),f(x+\alpha\Delta x)-f(x)\big\rangle\Big|.
\end{aligned} \qquad (1.43)$$

Из данного неравенства следует выполнение оценки (1.41). Более того, по следствию 1.2.2 для некоторого $L>0$ и для всех достаточно малых $\alpha\geqslant 0$ будет $|f(x+\alpha\Delta x)-f(x)|\leqslant L\alpha\|\Delta x\|$, откуда следует, что $\sup_{t\in[0,1]}|\nabla G(y(t)) - \nabla G(f(x))| \to 0$ при $\alpha \to +0$ в силу непрерывной дифференцируемости функции G и

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in[0,1]}\Big|\big\langle \nabla G\big(y(t)\big) - \nabla G(f(x)), f(x+\alpha\Delta x) - f(x)\big\rangle\Big| = 0.$$

Таким образом, правая часть неравенства (1.43) стремится к нулю при $\alpha \to +0$, а это означает, что функция g кодифференцируема в точке x и пара $Dg(x)$, определённая в (1.40), является её кодифференциалом в данной точке. $\square$

Следствие 1.2.3. *Пусть функции $f_i \colon U \to \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$, непрерывно кодифференцируемы на множестве U, а $Df_i(\cdot)$, $i \in I$, — кодифференциальные отображения функций f_i, определённые и непрерывные по Хаусдорфу на U. Тогда для любых $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in I \cup \{0\}$, функция $f = \sum_{i\in I}\lambda_i f_i + \lambda_0$ непрерывно кодифференцируема на U, отображение $Df(\cdot) = \sum_{i\in I}\lambda_i Df_i(\cdot)$ является кодифференциальным отображением функции f, определённым и непрерывным на множестве U, и справедлива оценка: $|\varepsilon_f(\alpha, \Delta x, x, r)| \leqslant \sum_{i\in I}|\lambda_i|\cdot|\varepsilon_{f_i}(\alpha, \Delta x, x, r)|$.*

Следствие 1.2.4. *Пусть функции $f_1, f_2 \colon U \to \mathbb{R}$ непрерывно кодифференцируемы на множестве U, а $Df_1(\cdot), Df_2(\cdot)$ — кодифференциальные отображения функций f_1 и f_2 соответственно, определённые и непрерывные по Хаусдорфу на U. Тогда функция $f = f_1 \cdot f_2$ непрерывно кодифференцируема на U, отображение $Df(\cdot) = f_2(\cdot)Df_1(\cdot) + f_1(\cdot)Df_2(\cdot)$ является кодифференциальным отображением функции f, определённым и непрерывным на множестве U, и для любого достаточно малого $r = r(x) > 0$ справедлива оценка*

$$\big|\varepsilon_f(\alpha, \Delta x, x, r)\big| \leqslant |f_2(x)|\cdot\big|\varepsilon_{f_1}(\alpha, \Delta x, x, r)\big| + |f_1(x)|\cdot\big|\varepsilon_{f_2}(\alpha, \Delta x, x, r)\big| + 2\alpha L_1 L_2\|\Delta x\|^2,$$

где $L_i > 0$ — константа Липшица функции f_i на шаре $B(x, r)$.

Следствие 1.2.5. *Пусть функция $f \colon U \to \mathbb{R}$ непрерывно кодифференцируема на множестве U, а $Df(\cdot)$ — кодифференциальное отображение функции f определённое и непрерывное по Хаусдорфу на U. Предположим также, что $f(x) \neq 0$ для всех $x \in U$. Тогда функция $g = \dfrac{1}{f}$ непрерывно кодифференцируема на U, отображение $Dg(\cdot) = -\dfrac{1}{f(\cdot)^2}Df(\cdot)$ является кодифференциальным отображением функции f, определённым и непрерывным на множестве U, и для любого достаточно малого $r = r(x) > 0$ справедлива оценка*

$$\big|\varepsilon_g(\alpha, \Delta x, x, r)\big| \leqslant \frac{1}{f(x)^2}\big|\varepsilon_f(\alpha, \Delta x, x, r)\big| + \frac{2\alpha L^2\|\Delta x\|^2}{(f(x) - rL)^3},$$

где $L > 0$ — константа Липшица функции f на шаре $B(x, r)$.

Теорема 1.2.4. *Пусть функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ непрерывно кодифференцируема на множестве U, а $Df(\cdot)$ — кодифференциальное отображение функции f определённое и непрерывное по Хаусдорфу на U. Пусть также Y — вещественное банахово пространство, $V \subset Y$ — открытое множество, оператор $F\colon V \to X$ удовлетворяет условию $F(V) \subseteq U$ и непрерывно дифференцируем по Гато на множестве V. Тогда функция $g(\cdot) = f(F(\cdot))$ определена и непрерывно кодифференцируема на множестве V, а пара $Dg(\cdot) = [\underline{d}g(\cdot), \overline{d}g(\cdot)]$, где*

$$\begin{aligned} \underline{d}g(\cdot) &= \Big\{(a, x^* \circ F'(\cdot)) \in \mathbb{R} \times Y^* \;\Big|\; (a, x^*) \in \underline{d}f(F(\cdot))\Big\}, \\ \overline{d}g(\cdot) &= \Big\{(b, y^* \circ F'(\cdot)) \in \mathbb{R} \times Y^* \;\Big|\; (b, y^*) \in \overline{d}f(F(\cdot))\Big\}, \end{aligned} \tag{1.44}$$

является кодифференциальным отображением функции g, определённым и непрерывным на множестве V.

Доказательство. Функция $g = f \circ F$ корректно определена на множестве V в силу того, что $F(V) \subseteq U$. Зафиксируем произвольные $y \in V$ и $\Delta y \in Y$. Положим $x = F(y)$, $\Delta x = F'(y)\Delta y$ и для любого достаточно малого $\alpha > 0$ определим $\Delta x(\alpha) = (F(y + \alpha\Delta y) - F(y))/\alpha$. Заметим, что $\Delta x(\alpha) \to \Delta x$ при $\alpha \to +0$ по определению производной Гато функции F. Поэтому в силу предложения 1.2.5 справедливо равенство:

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}\Big| f(x + \alpha\Delta x(\alpha)) - f(x) - \max_{(a,x^*) \in \underline{d}f(x)} (a + \langle x^*, \alpha\Delta x\rangle) - \min_{(b,y^*) \in \overline{d}f(x)} (b + \langle y^*, \alpha\Delta x\rangle)\Big| = 0.$$

Подставляя выражения для x, Δx и $\Delta x(\alpha)$ в данное равенство, имеем

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}\Big| g(y + \alpha\Delta y) - g(y) - \max_{(a,x^*) \in \underline{d}g(y)} (a + \langle x^*, \alpha\Delta y\rangle) - \min_{(b,y^*) \in \overline{d}g(y)} (b + \langle y^*, \alpha\Delta y\rangle)\Big| = 0,$$

где множества $\underline{d}g(y)$ и $\overline{d}g(y)$ определены согласно (1.44). Таким образом, если множества $\underline{d}g(y)$ и $\overline{d}g(y)$ являются выпуклыми и компактными в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y)$, где $\sigma(Y^*, Y)$ — слабая* топология в пространстве Y^*, то можно заключить, что функция g является кодифференцируемой на V, а пара (1.44) является её кодифференциалом.

Для того чтобы доказать выпуклость и компактность множеств $\underline{d}g(y)$ и $\overline{d}g(y)$, введём линейный оператор $\mathcal{T}\colon \mathbb{R} \times X^* \to \mathbb{R} \times Y^*$, определив $\mathcal{T}(a, x^*) = (a, x^* \circ F'(y))$. Покажем, что $\mathcal{T}$ является непрерывным оператором из пространства $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(X^*, X))$ в пространство $(\mathbb{R} \times Y^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y))$. Тогда можно заключить, что множества $\underline{d}g(y)$ и $\overline{d}g(y)$ выпуклы и компактны в соответствующей топологии, как образы выпуклых компактных множеств $\underline{d}f(x)$ и $\overline{d}f(x)$ при непрерывном линейном отображении $\mathcal{T}$.

Для доказательства непрерывности оператора $\mathcal{T}$ зафиксируем произвольное открытое множество $\mathcal{V}$ пространства $(\mathbb{R} \times Y^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y))$ и покажем, что его прообраз $\mathcal{U} = \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{V})$

открыт в $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(X^*, X))$. Для этого зафиксируем произвольное $(a_0, x_0^*) \in \mathcal{U}$. По определению $\mathcal{T}(a, x_0^*) = (a_0, x_0^* \circ F'(y)) \in \mathcal{V}$. В силу открытости множества $\mathcal{V}$ в топологии $(\mathbb{R} \times Y^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y))$ существуют $\varepsilon > 0$ и $y_1, \ldots, y_n \in Y$ такие, что

$$\mathcal{V}_\varepsilon(y_1, \ldots, y_n) = \Big\{ (b, y^*) \in \mathbb{R} \times Y^* \ \Big| \ |b - a_0| < \varepsilon, \quad \max_{i \in 1:\, n} \big| \langle y^* - x_0^* \circ F'(y), y_i \rangle \big| < \varepsilon \Big\} \subseteq \mathcal{V}.$$

Положим $x_i = F'(y) y_i$, $i \in 1: n$, и заметим, что образ множества

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) = \Big\{ (a, x^*) \in \mathbb{R} \times X^* \ \Big| \ |a - a_0| < \varepsilon, \quad \max_{i \in 1:\, n} \big| \langle x^* - x_0^*, x_i \rangle \big| < \varepsilon \Big\}$$

при отображении $\mathcal{T}$ по определению содержится в $\mathcal{V}_\varepsilon(y_1, \ldots, y_n) \subseteq \mathcal{V}$. Следовательно, $\mathcal{U}_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathcal{U}$, т. е. точка (a_0, x_0^*) содержится в множестве $\mathcal{U}$ вместе со своей окрестностью $\mathcal{U}_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$, а значит множество $\mathcal{U}$ открыто в $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(X^*, X))$ и оператор $\mathcal{T}$ непрерывен в соответствующих топологиях.

Таким образом, остаётся доказать, что отображения (1.44) непрерывны в метрике Хаусдорфа. Докажем непрерывность по Хаусдорфу отображения $\underline{d}g(\cdot)$. Непрерывность по Хаусдорфу отображения $\overline{d}g(\cdot)$ доказывается аналогичным образом.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. По нашему предположению функция f непрерывно кодифференцируема. Следовательно, существует $\delta_0 > 0$ такое, что $\rho_H(\underline{d}f(x'), \underline{d}f(F(y))) < \varepsilon$ для всех $x' \in B(F(y), \delta_0)$. Поскольку оператор F непрерывно дифференцируем, он непрерывен и, следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что $\|F(y') - F(y)\| < \delta_0$ и $\|F'(y') - F'(y)\| < \varepsilon$ для всех $y' \in B(y, \delta)$. Поэтому для любого $y' \in B(y, \delta)$ будет $x' = F(y') \in B(F(y), \delta_0)$ и $\rho_H(\underline{d}f(F(y')), \underline{d}f(F(y))) < \varepsilon$. По лемме 1.2.1 отсюда следует, что существует $t \in (0, \varepsilon)$ такое, что для любой пары $(a, x^*) \in \underline{d}f(F(y))$ найдётся пара $(b, y^*) \in \underline{d}f(F(y'))$ такая, что $\|(a, x^*) - (b, y^*)\| < t$, а для любой пары $(b, y^*) \in \underline{d}f(F(y'))$ найдётся пара $(a, x^*) \in \underline{d}f(F(y))$ такая, что $\|(a, x^*) - (b, y^*)\| < t$. Следовательно, для любой пары $(a, x^* \circ F'(y)) \in \underline{d}g(y)$ существует пара $(b, y^* \circ F'(y')) \in \underline{d}g(y')$ такая, что

$$\begin{aligned} \|(a, x^* \circ F'(y)) - (b, y^* \circ F'(y'))\| &\leqslant |a - b| + \|x^* \circ F'(y) - y^* \circ F'(y')\| \leqslant \\ &\leqslant t + \|x^*\| \|F'(y') - F'(y)\| + \|x^* - y^*\| \|F'(y')\| < t + C_1 \varepsilon + (\|F'(y)\| + \varepsilon) t, \end{aligned}$$

где $C_1 = \sup\{\|x^*\| \mid (a, x^*) \in \underline{d}f(F(y))\} < +\infty$ (напомним, что множество $\underline{d}f(F(y))$ ограничено, поскольку оно компактно в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$). Аналогичным образом, для любой пары $(b, y^* \circ F'(y')) \in \underline{d}g(y')$ существует пара $(a, x^* \circ F'(y)) \in \underline{d}g(y)$ такая, что

$$\|(a, x^* \circ F'(y)) - (b, y^* \circ F'(y'))\| < t + C_1 \varepsilon + (\|F'(y)\| + \varepsilon) t.$$

Поэтому, воспользовавшись леммой 1.2.1, получаем, что

$$\rho_H(\underline{d}g(y'), \underline{d}g(y)) < \Big(1 + C_1 + \|F'(y)\| + \varepsilon \Big) \varepsilon \quad \forall y' \in B(y, \delta),$$

откуда в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ вытекает, что отображение $\underline{d}g(\cdot)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа. $\square$

Следствие 1.2.6. *Пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы 1.2.4, Y — вещественное банахово пространство, $V \subset Y$ — открытое множество и линейный непрерывный оператор $\mathcal{T} \colon Y \to X$ удовлетворяет условию $\mathcal{T}(V) + x_0 \subseteq U$ для некоторого $x_0 \in X$. Тогда функция $g(y) = f(\mathcal{T}y + x_0)$, $y \in V$, определена и непрерывно кодифференцируема на множестве V, пара $Dg(\cdot) = [\underline{d}g(\cdot), \overline{d}g(\cdot)]$, где*

$$\begin{aligned} \underline{d}g(y) &= \Big\{ (a, \mathcal{T}^* x^*) \in \mathbb{R} \times Y^* \ \Big| \ (a, x^*) \in \underline{d}f(\mathcal{T}y + x_0) \Big\} \quad \forall y \in V, \\ \overline{d}g(y) &= \Big\{ (b, \mathcal{T}^* y^*) \in \mathbb{R} \times Y^* \ \Big| \ (b, y^*) \in \overline{d}f(\mathcal{T}y + x_0) \Big\} \quad \forall y \in V, \end{aligned} \tag{1.45}$$

является кодифференциальным отображением функции g, определённым и непрерывным на множестве V, и для любых $y \in V$ и $r, s > 0$ таких, что $\mathcal{T}(B(y, r)) + x_0 \subset B(\mathcal{T}y + x_0, s) \subset U$, и для любого $\Delta y \in B(0, r)$ справедливо равенство $\varepsilon_g(\alpha, \Delta y, y, r) = \varepsilon_f(\alpha, \mathcal{T}\Delta y, \mathcal{T}y + x_0, s)$.

Доказательство. Полагая $F(y) = \mathcal{T}y + x_0$ и пользуясь теоремой 1.2.4 получаем, что функция g непрерывно кодифференцируема на множестве V, а пара (1.45) является непрерывным кодифференциальным отображением функции g. В свою очередь, формула для функции ε_g получается с помощью подстановки $x = \mathcal{T}y + x_0$ и $\Delta x = \mathcal{T}\Delta y$ в определение ε_f. $\square$

Замечание 1.2.4. Можно доказать, что суперпозиция двух кодифференцируемых функций также является кодифференцируемой функцией (см. [37, 416, 417] и работу автора [179]). Однако, очень громоздкая формула вычисления кодифференциала суперпозиции кодифференцируемых функций, насколько известно автору, никогда не используется при вычислении кодифференциалов негладких функций, возникающих в приложениях, и поэтому мы её здесь не приводим.

Таким образом, множество всех непрерывно кодифференцируемых на множестве U функций замкнуто относительно операций сложения, умножения на число, композиции с непрерывно дифференцируемыми функциями, а также операций взятия поточечного максимума и минимума конечных семейств функций.

Основные формулы кодифференциального исчисления, полученные в теоремах 1.2.2, 1.2.3 и 1.2.4 и следствиях 1.2.3–1.2.5 и 1.2.6 допускают простую алгоритмическую реализацию и могут быть использованы для создания программ по автоматическому кодифференцированию. Более подробно вопросы алгоритмической реализации аналитического кодифференцирования обсуждались в работах [5, 8].

Приведём простой пример применения теоремы 1.2.4.

Пример 1.2.6. В нелинейных задачах полуопределённого программирования [373] и задачах оптимизации собственных чисел [301] возникает необходимость рассматривать функции вида $\lambda_{\max}(F(\cdot))$, где $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{S}^\ell$ — отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in \mathbb{R}^d$ некоторую симметричную матрицу $F(x) \in \mathbb{S}^\ell$ порядка ℓ, а $\lambda_{\max}(F(x))$ — максимальное собственное число матрицы $F(x)$. Покажем, что функция $g(\cdot) = \lambda_{\max}(F(\cdot))$ является непрерывно кодифференцируемой.

Действительно, введём функцию $f\colon \mathbb{S}^\ell \to \mathbb{R}$, определив $f(A) = \lambda_{\max}(A)$. Данная функция непрерывно гиподифференцируема и её непрерывный гиподифференциал был вычислен в примере 1.2.5. Предположим, что функция F непрерывно дифференцируема. Тогда по теореме 1.2.4 функция g является непрерывно гиподифференцируемой на $\mathbb{R}^d$, $\overline{d}g(\cdot) \equiv \{0\}$ и

$$\underline{d}g(x) = \operatorname{co}\Big\{ \big(\langle s, F(x)s\rangle - \lambda_{\max}(F(x)), \operatorname{Tr}(ss^T F'_{x^{(1)}}(x)), \ldots, \operatorname{Tr}(ss^T F'_{x^{(d)}}(x))\big) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \;\Big|\; s \in B_{\mathbb{R}^\ell} \Big\}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^d$, где $B_{\mathbb{R}^\ell}$ единичный шар в $\mathbb{R}^\ell$ относительно евклидовой нормы.

1.2.4 Метрическая регулярность квазидифференцируемых отображений

При изучении задач негладкой оптимизации и выводе условий экстремума часто приходится использовать различные условия регулярности ограничений. Данный параграф посвящён изучению одного условия регулярности системы квазидифференцируемых равенств и неравенств, введённого автором в работе [195] и гарантирующего метрическую регулярность многозначного отображения, связанного с этой системой. Заметим, что при изучении различных теоретических вопросов негладкого анализа, таких как условия экстремума, условия регулярности и т. п., более удобным оказывается использование именно квазидифференциалов, в то время как при построении и исследовании численных методов удобнее использовать кодифференциалы. При этом теорема 1.2.1 позволяет легко переходить от условий в терминах квазидифференциалов к условиям в терминах кодифференциалов и обратно.

Пусть, как и ранее, X — вещественное банахово пространство, а Y — метрическое пространство. Напомним, что многозначное отображение $F\colon X \rightrightarrows Y$ называется *метрически регулярным* вблизи точки $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Graph} F$, где $\operatorname{Graph} F$ — график отображения F, если существуют $K > 0$ и $r > 0$ такие, что

$$\operatorname{dist}(x, F^{-1}(y)) \leqslant K \operatorname{dist}(y, F(x)) \quad \forall (x, y) \in B(\overline{x}, r) \times B(\overline{y}, r).$$

Точная нижняя грань всех таких K называется *нормой метрической регулярности* многозначного отображения F вблизи точки $(\overline{x}, \overline{y})$. См. [43, 89, 266] по поводу общей теории метрической регулярности.

Предположим теперь, что Y — вещественное банахово пространство, а (P, d) — метрическое пространство параметров. Пусть заданы некоторые функции $F\colon X \times P \to Y$ и $g_i\colon X \times P \to \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$. Для произвольных $y \in Y$ и $z_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$, рассмотрим следующую параметрическую систему равенств и неравенств:

$$F(x,p) = y, \quad g_i(x,p) \leqslant z_i \quad i \in I. \tag{1.46}$$

Обозначим через $\mathcal{S}(p, y, z) = \{x \in X \mid F(x,p) = y,\ g_i(x,p) \leqslant z_i,\ i \in I\}$ множество решений данной системы, где $z = (z_1, \ldots, z_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Также мы будем использовать обозначения $\mathcal{S}(p) = \mathcal{S}(p, 0_Y, 0_m)$ и $F_p(x) = F(x,p)$, где 0_Y и 0_m — нулевой вектор в Y и $\mathbb{R}^m$, соответственно.

В случае, когда функции $F(\cdot, p)$ и $g_i(\cdot, p)$ непрерывно дифференцируемы по Фреше, многозначное отображение $\Phi_p(x) = \{F(x,p)\} \times \prod_{i=1}^m [g_i(x,p), +\infty)$, соответствующее системе (1.46), является метрически регулярным вблизи заданной точки тогда и только тогда, когда в этой точке выполняется условие регулярности Мангасаряна-Фромовица (УРМФ), т. е. производная Фреше $F'_x(x,p)$ сюръективна и существует $h \in X$ такое, что $F'_x(x,p)[h] = 0$ и $\langle (g_i)'_x(x,p), h\rangle < 0$ для всех $i \in I$ таких, что $g_i(x,p) = z_i$ (см. [127, следствие 2.1]). В данном параграфе мы распространим этот результат на случай, когда отображения $F(\cdot,p)$ и $g_i(\cdot,p)$ являются лишь квазидифференцируемыми.

Для того чтобы распространить условие Мангасаряна-Фромовица на квазидифференцируемый случай, на потребуется следующее обобщение определения квазидифференцируемости на случай функций, принимающих значения в нормированном пространстве. Данное определение использовалось в работах [71, 234, 398].

Определение 1.2.4. Пусть $U \subset X$. Отображение $F\colon U \to Y$ называется *скалярно квазидифференцируемым* в точке $x \in U$, если отображение F дифференцируемо по направлениям в точке x, т. е. для всех $h \in X$ существует предел

$$F'(x,h) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}\big(F(x + \alpha h) - F(x)\big),$$

и для любого $y^* \in Y^*$ функция $\langle y^*, F'(x,\cdot)\rangle$ может быть представлена в виде разности непрерывных сублинейных функций или, что эквивалентно, если существует пара выпуклых слабо* компактных множеств $\underline{\partial} F(x; y^*), \overline{\partial} F(x; y^*) \subset X^*$ такая, что

$$\langle y^*, F'(x,h)\rangle = \max_{x^* \in \underline{\partial} F(x;y^*)} \langle v^*, h\rangle + \min_{u^* \in \overline{\partial} F(x;y^*)} \langle u^*, h\rangle \quad \forall h \in X.$$

Для каждого $y^* \in Y^*$ пара $\mathscr{D} F(x; y^*) = [\underline{\partial} F(x;y^*), \overline{\partial} F(x;y^*)]$ называется *скалярным квазидифференциалом* отображения F в точке x (соответствующим линейному непрерывному функционалу y^*).

Перейдём к формулировке условия регулярности. Для краткости далее мы будем предполагать, что $y = 0$ и $z = 0_m$, поскольку общий случай может быть легко сведён к случаю $y = 0$ и $z = 0_m$, если заменить $F(x,p)$ на $F(x,p) - y$, а $g_i(x,p)$ на $g_i(x,p) - z_i$.

Зафиксируем $\overline{p} \in P$. Предположим, что функции $g_i(\cdot, \overline{p})$, $i \in I$, квазидифференцируемы в точке $\overline{x}$ такой, что $\overline{x} \in \mathcal{S}(\overline{p})$, отображение $F(\cdot, \overline{p})$ скалярно квазидифференцируема в этой точке и обозначим соответствующие квазидифференциалы через $\mathscr{D}_x g_i(\overline{x}, \overline{p})$ и $\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)$, $y^* \in Y^*$. Введём множества

$$[\mathscr{D}_x g_i(\overline{x}, \overline{p})]^+ = \underline{\partial}_x g_i(\overline{x}, \overline{p}) + \overline{\partial}_x g_i(\overline{x}, \overline{p}), \quad [\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]^+ = \underline{\partial}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*) + \overline{\partial}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*).$$

Данные множества называются *квазидифференциальной суммой* соответствующих отображений в точке $(\overline{x}, \overline{p})$. Квазидифференциальная сумма рассматривалась в работах [71, 398].

Квазидифференциальная сумма является выпуклым слабой* компактным подмножеством пространства X^* по определению квазидифференциала. Заметим также, что квазидифференциальная сумма не является инвариантной по отношению к выбору квазидифференциала. Действительно, для функции $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, как пара $\mathscr{D}_1 f(0) = [[-1,1], \{0\}]$, так и пара $\mathscr{D}_2 f(0) = [[-2,2], [-1,1]]$ являются квазидифференциалами в точке $x = 0$. Однако, $[\mathscr{D}_1 f(0)]^+ = [-1,1] \neq [-3,3] = [\mathscr{D}_2 f(0)]^+$. Таким образом, все условия, основанные на квазидифференциальной сумме не являются инвариантными по отношению к выбору квазидифференциалов.

Для любых $x \in X$ и $p \in P$ обозначим $I(x,p) = \{i \in I \mid g_i(x,p) = 0\}$ и определим $S_X = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$.

Определение 1.2.5. Будем говорить, что в точке $(\overline{x}, \overline{p})$ выполняется *условие регулярности Мангасаряна-Фромовица* в терминах квазидифференциалов, если

$$\inf_{y^* \in S_{Y^*}} \inf\{\|v^*\| \colon v^* \in [\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]^+\} > 0, \tag{1.47}$$

и существует $\overline{h} \in X$ такое, что $\langle v^*, \overline{h} \rangle = 0$ для всех $v^* \in [\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]^+$ и $y^* \in Y^*$ и $\langle v^*, \overline{h} \rangle < 0$ для всех $v^* \in [\mathscr{D}_x g_i(\overline{x}, \overline{p})]^+$ и $i \in I(\overline{x}, \overline{p})$.

Укажем, как УРМФ в терминах квазидифференциалов связано со стандартным УРМФ. Напомним, что подмножества $A_1, \ldots, A_s$ вещественного линейного пространства E называются *линейно независимыми*, если включение $0 \in \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_s A_s$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda_i = 0$ для всех $i \in 1 \colon s$. Ясно, что множества A_i, $i \in 1 \colon s$ линейно независимы тогда и только тогда, когда для всех $x_i \in A_i$, $i \in 1 \colon s$, векторы $x_1, \ldots, x_s$ линейно независимы.

Предложение 1.2.7. *Пусть Y совпадает с пространством $\mathbb{R}^\ell$, наделённым евклидовой нормой $|\cdot|$, и $F(\cdot) = (f_1(\cdot), \ldots, f_\ell(\cdot))^T$, где функции $f_j \colon X \times P \to \mathbb{R}$ квазидифференцируемы по x в точке $(\overline{x}, \overline{p})$. Тогда отображение $F(\cdot, \overline{p})$ скалярно квазидифференцируемо в точке $\overline{x}$. Кроме того, УРМФ в терминах квазидифференциалов выполняется в точке $(\overline{x}, \overline{p})$ тогда и только тогда, когда множества $[\mathscr{D}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})]^+$, $j \in 1\colon \ell$, линейно независимы и найдётся $\overline{h} \in X$ такое, что $\langle v^*, \overline{h} \rangle = 0$ для всех $v^* \in [\mathscr{D}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})]^+$ и $j \in 1\colon \ell$ и $\langle v^*, \overline{h} \rangle < 0$ для всех $v^* \in [\mathscr{D}_x g_i(\overline{x}, \overline{p})]^+$ и $i \in I(\overline{x}, \overline{p})$.*

Доказательство. Функции $f_j(\cdot, \overline{p})$ дифференцируемы по направлениям в точке $\overline{x}$, поскольку они квазидифференцируемы в этой точке по нашему предположению. Поэтому отображение $F(\cdot, \overline{p})$ также является дифференцируемым по направлениям в точке $\overline{x}$ и

$$[F(\cdot, \overline{p})]'(\overline{x}, h) = \Big([f_1(\cdot, \overline{p})]'(\overline{x}, h), \ldots, [f_\ell(\cdot, \overline{p})]'(\overline{x}, h) \Big)^T \quad h \in X.$$

Следовательно, для любого $y^* = (y^{(1)}, \ldots, y^{(\ell)})^T \in \mathbb{R}^\ell$ будет

$$\langle y^*, [F(\cdot, \overline{p})]'(\overline{x}, h) \rangle = \sum_{j=1}^{\ell} y^{(j)} \Big(\max_{v^* \in \underline{\partial}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})} \langle v^*, h \rangle + \min_{u^* \in \overline{\partial}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})} \langle u^*, h \rangle \Big),$$

откуда следует, что отображение $F(\cdot, \overline{p})$ скалярно квазидифференцируемо в точке $\overline{x}$ и для любого y^* пара

$$\underline{\partial}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*) = \sum_{j=1}^{\ell} \Big(\max\{y^{(j)}, 0\} \, \underline{\partial}_x f_j(\overline{x}, \overline{p}) + \min\{y^{(j)}, 0\} \, \overline{\partial}_x f_j(\overline{x}, \overline{p}) \Big),$$
$$\overline{\partial}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*) = \sum_{j=1}^{\ell} \Big(\max\{y^{(j)}, 0\} \, \overline{\partial}_x f_j(\overline{x}, \overline{p}) + \min\{y^{(j)}, 0\} \, \underline{\partial}_x f_j(\overline{x}, \overline{p}) \Big)$$

является скалярным квазидифференциалом отображения $F(\cdot, \overline{p})$ в этой точке. Отсюда, в частности, следует, что для любого y^* будет

$$[\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]^+ = \sum_{j=1}^{\ell} y^{(j)} [\mathscr{D}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})]^+. \tag{1.48}$$

Следовательно, если выполняется условие (1.47), то множества $[\mathscr{D}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})]^+$, $j \in 1\colon \ell$, линейно независимы, т.к. в противном случае $0 \in [\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]$ для $y^* = \lambda / |\lambda|$, где вектор $\lambda \in \mathbb{R}^\ell$, $\lambda \neq 0_\ell$ удовлетворяет условию $0 \in \sum_{j=1}^{\ell} \lambda^{(j)} [\mathscr{D}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})]^+$, что противоречит (1.47).

Обратно, если множества $[\mathscr{D}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})]^+$, $j \in 1\colon \ell$, линейно независимы, то $0 \notin [\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]^+$ для любого $y^* \neq 0_\ell$. Воспользовавшись теоремой об отделимости и тем фактом, что множество $[\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]^+$ является выпуклым и слабо* компактным, получим, что существуют $h \in X$ и $\delta > 0$ такие, что $\langle v^*, h \rangle \geqslant \delta$ для всех $v^* \in [\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]^+$. Поэтому

$\inf\{\|v^*\| \mid v^* \in [\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]^+\} > 0$ для всех $y^* \neq 0_\ell$. Как нетрудно видеть, данный инфимум непрерывно зависит от y^* (см. (1.48)). Поэтому справедливо условие (1.47).

Остаётся заметить, что эквивалентность между вторыми условиями в данном предложении и УРМФ в терминах квазидифференциалов (условия существования $\overline{h}$) непосредственно вытекает из равенства (1.48). $\square$

Замечание 1.2.5. С помощью теоремы об отделимости нетрудно проверить, что в предположениях предыдущего утверждения вектор $\overline{h}$ из УРМФ в терминах квазидифференциалов существует тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{co}\left\{[\mathscr{D}_x g_i(\overline{x}, \overline{p})]^+ \mid i \in I(\overline{x}, \overline{p})\right\} \cap \operatorname{cl}\Big(\operatorname{span}\left\{[\mathscr{D}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})]^+ \mid j \in 1 \colon \ell\right\}\Big) = \varnothing,$$

где замыкание берётся в слабой* топологии и span означает линейную оболочку. Заметим также, что при $\ell = 1$ условие линейной независимости множеств $[\mathscr{D}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})]^+$ преобразуется в условие $0 \notin [\mathscr{D}_x f_1(\overline{x}, \overline{p})]^+$.

При доказательстве метрической регулярности системы равенств и неравенств с помощью УРМФ важную роль играет непрерывность производных ограничений. В негладком случае предположение о непрерывности необходимо заменить на естественное предположение о полунепрерывности соответствующих многозначных отображений. Напомним, что многозначное отображение $G \colon Z \rightrightarrows E$ между метрическими пространствами Z и E называется *полунепрерывным сверху* (пн. св.) в точке $z \in Z$, если для любого открытого множества $U \subset E$ такого, что $G(z) \subset U$ существует $\delta > 0$ такое, что $G(z') \subset U$ для всех $z' \in B(z, \delta)$. Для наших целей будет достаточно более слабого определения полунепрерывности. А именно, будем говорить, что отображение G *метрически пн. св.* в точке z, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $z' \in B(z, \delta)$ справедливо включение $G(z') \subset G(z)_\varepsilon = \{e \in E \mid \operatorname{dist}(e, G(z)) < \varepsilon\}$. Очевидно, что любое пн. св. многозначное отображение будет и метрически полунепрерывным сверху. Обратное утверждение в общем случае не верно, но, как нетрудно проверить, оно выполняется, если множество $G(z)$ компактно.

Пусть функция $f \colon X \to \mathbb{R}$ квазидифференцируема в некоторой окрестности точки $x \in X$, а $\mathscr{D} f(\cdot) = [\underline{\partial} f(\cdot), \overline{\partial} f(\cdot)]$ — квазидифференциальное отображение функции f, определённое в этой окрестности. Будем говорит, что отображение $\mathscr{D} f(\cdot)$ (*метрически*) *пн. св.* в точке x, если отображения $\underline{\partial} f(\cdot)$ и $\overline{\partial} f(\cdot)$ (метрически) пн. св. в этой точке. Заметим, что метрическая полунепрерывность сверху квазидифференциального отображения гарантирует метрическую полунепрерывность сверху квазидифференциальной суммы $[\mathscr{D} f(\cdot)]^+$.

Замечание 1.2.6. В статье [294] Кунцем было показано, что в случае $X = \mathbb{R}^d$ функция f

непрерывно кодифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда она квазидифференцируема в некоторой окрестности этой точки и существует квазидифференциальное отображение функции f, определённое в некоторой окрестности точки x и пн. св. в этой точке. Таким образом, в случае, когда $X = \mathbb{R}^d$, класс непрерывно кодифференцируемых функций совпадает с классом квазидифференцируемых функций, обладающих пн. св. квазидифференциальным отображением. Насколько известно автору, данный результат не допускает обобщения на бесконечномерный случай. Однако, воспользовавшись основными правилами квазидифференциального исчисления, нетрудно показать, что в общем случае множество всех квазидифференцируемых функций, для которых существует метрически пн. св. квазидифференциальное отображение, замкнуто относительно сложения, умножения, композиции с непрерывно дифференцируемыми функциями и операций взятия поточечного максимума и минимума конечных семейств функций.

В случае, когда квазидифференциалы ограничений метрически полунепрерывны сверху, мы можем показать, что УРМФ в терминах квазидифференциалов гарантирует метрическую регулярность системы квазидифференцируемых равенств и неравенств. Для упрощения доказательства мы будем предполагать, что функции F и g_i непрерывны на всём пространстве $X \times P$, хотя теорема 1.2.5 может быть доказана при менее ограничительных предположениях.

Пусть вещественнозначная функция ψ определена на метрическом пространстве (Z, ρ). Напомним, что величина

$$|\nabla \psi|(z) = \limsup_{u \to x, \psi(u) \to \psi(z)} \frac{\max\{\psi(z) - \psi(u), 0\}}{\rho(x, z)}.$$

называется *сильным наклоном* функции ψ в точке z. В терминах сильного наклона формулируются общие необходимые и достаточные условия метрической регулярности многозначных отображений [43, 89, 266].

Теорема 1.2.5. *Пусть функции F и g_i, $i \in I$, непрерывны. Пусть также точка $(\overline{x}, \overline{p}) \in X \times P$ удовлетворяет условию $\overline{x} \in \mathcal{S}(\overline{p})$ и существует окрестность U этой точки такая, что*

1. *для всех $(x, p) \in U$ отображение $F(\cdot, p)$ скалярно квазидифференцируемо в точке x, функции $g_i(\cdot, p)$, $i \in I(\overline{x}, \overline{p})$, квазидифференцируемы в точке x, а $\mathscr{D}_x g_i(\cdot)$ и $\mathscr{D}_x F(\cdot; y^*)$ — соответствующие квазидифференциальные отображения, определённые на множестве U;*

2. *отображения* $\mathscr{D}_x g_i(\cdot)$, $i \in I(\overline{x}, \overline{p})$, *метрически пн. св. в точке* $(\overline{x}, \overline{p})$, *а отображения* $(x, p) \mapsto [\mathscr{D}_x F(x, p; y^*)]^+$ *метрически пн. св. в точке* $(\overline{x}, \overline{p})$ *равномерно по* $y^* \in S_{Y^*}$, *т. е. для всех* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что* $[\mathscr{D}_x F(x, p; y^*)]^+ \subseteq [\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]^+ + B(0, \varepsilon)$ *для всех* $y^* \in S_{Y^*}$ *и* $(x, p) \in B(\overline{x}, \delta) \times B(\overline{p}, \delta)$;

3. *множество* $D(y) = \{[\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]^+ \mid y^* \in S_{Y^*} \colon \langle y^*, y\rangle = 1\}$ *слабо** *замкнуто и выпукло для всех* $y \in S_Y$ *(в частности, достаточно предполагать, что норма в пространстве* Y *дифференцируема по Гато вне нуля).*

Предположим наконец, что в точке $(\overline{x}, \overline{p})$ *выполняется условие регулярности Мангасаряна-Фромовица в терминах квазидифференциалов. Тогда существуют* $K > 0$, *окрестность* V *точки* $(\overline{x}, \overline{p})$, *и окрестность* W *нуля в пространстве* $Y \times \mathbb{R}^m$ *такие, что*

$$\operatorname{dist}(x, \mathcal{S}(p, y, z)) \leqslant K\Big(\|F(x, p) - y\| + \sum_{i=1}^m \max\{g_i(x, p) - z_i, 0\}\Big) \tag{1.49}$$

для всех $(x, p) \in V$ *и* $(y, z) \in W$. *Поэтому, в частности, многозначное отображение* $\Phi_p \colon X \rightrightarrows Y \times \mathbb{R}^m$, $\Phi_p(x) = \{F(x, p)\} \times \prod_{i=1}^m [g_i(x, p), +\infty)$ *является метрически регулярным вблизи точки* $(\overline{x}, (0_Y, 0_m))$ *с нормой метрической регулярности не превосходящей* K *для всех* p *из некоторой окрестности точки* $\overline{p}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\overline{r} > 0$ такое, что $B(\overline{x}, \overline{r}) \times B(\overline{p}, \overline{r}) \subset U$. Наша цель — доказать существование $r \in (0, \overline{r})$ и $K > 0$ таких, что $|\nabla \psi_{(y,z,p)}|(x) > K^{-1}$ для всех $p \in B(\overline{p}, r)$, $(y, z) \in B((0_Y, 0_m), r)$ и $x \in B(\overline{x}, r)$ таких, что $(y, z) \notin \Phi_p(x)$, где $\psi_{(y,z,p)}(x) = \operatorname{dist}((y, z), \Phi_p(x))$ и мы предполагаем, что пространство $Y \times \mathbb{R}^m$ наделено нормой $\|(y, z)\| = \|y\| + \sum_{i=1}^m |z_i|$. Тогда воспользовавшись общими необходимыми и достаточными условиями локально метрической регулярности в терминах сильного наклона [43, теорема 2b], получим, что $\operatorname{dist}(x, \Phi_p^{-1}(y, z)) \leqslant K \operatorname{dist}((y, z), \Phi_p(x))$ для всех $x \in B(\overline{x}, r)$, $p \in B(\overline{p}, r)$ и $(y, z) \in B((0_Y, 0_m), r)$, удовлетворяющих неравенству $K \operatorname{dist}((y, z), \Phi_p(x)) < r - \|x - \overline{x}\|$, т. е. неравенство (1.49) выполняется для всех таких x, p, y и z. Отсюда, воспользовавшись непрерывностью функций F и g_i и тем фактом, что $\overline{x} \in \mathcal{S}(\overline{p})$, т. е. $(0_Y, 0_m) \in \Phi_{\overline{p}}(\overline{x})$, получим, что существует $\delta < r$ такое, что $K \operatorname{dist}((y, z), \Phi_p(x)) < r - \|x - \overline{x}\|$ для всех $x \in B(\overline{x}, \delta)$, $p \in B(\overline{p}, \delta)$ и $(y, z) \in B((0_Y, 0_m), \delta)$, откуда следует, что неравенство (1.49) выполняется для всех таких x, p, y и z, что завершает доказательство теоремы.

Прежде чем перейти к доказательству неравенства $|\nabla \psi_{(y,z,p)}|(x) > K^{-1}$, вычислим производную по направлениям отображения $x \mapsto \|F(x, p) - y\|$. Обозначим $\omega(y) = \|y\|$. Напомним, что $\partial\omega(y) = \{y^* \in S_{Y^*} \mid \|y\| = \langle y^*, y\rangle\}$ для любого $y \neq 0$, где $\partial\omega(y)$ субдифференциал функции ω в точке y в смысле выпуклого анализа. Зафиксируем $(x,p) \in U$ и $y \in Y$. Из определения скалярной квазидифференцируемости следует, что для любого $h \in X$ будет

$$F_p(x+\alpha h) - F_p(x) = \alpha F_p'(x,h) + o(\alpha) \quad \forall \alpha \geqslant 0,$$

где $\|o(\alpha)\|/\alpha \to 0$ при $\alpha \to +0$ (напомним, что $F_p(x) = F(x,p)$). Поэтому

$$\begin{aligned}
&\Big| \|F_p(x+\alpha h) - y\| - \|F_p(x) - y\| - \alpha\omega'\big(F_p(x) - y, F_p'(x,h)\big)\Big| = \\
&\quad = \Big| \|F_p(x) - y + \alpha F_p'(x,h) + o(\alpha)\| - \|F_p(x) - y\| - \alpha\omega'\big(F_p(x) - y, F_p'(x,h)\big)\Big| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \Big| \|F_p(x) - y + \alpha F_p'(x,h)\| - \|F_p(x) - y\| - \alpha\omega'\big(F_p(x) - y, F_p'(x,h)\big)\Big| + \|o(\alpha)\|.
\end{aligned}$$

Поделив данное неравенство на α и перейдя к пределу при $\alpha \to +0$, получаем, что функция $\|F_p(\cdot) - y\|$ дифференцируема по направлениям в точке x и для всех $h \in X$ и $y \in Y$ будет

$$\begin{aligned}
\|F_p(\cdot) - y\|'(x,h) = \omega'(F_p(x) - y, F_p'(x,h)) &= \sup_{y^* \in \partial\omega(F_p(x)-y)} \langle y^*, F_p'(x,h)\rangle = \\
&= \sup_{y^* \in \partial\omega(F_p(x)-y)} \Big(\max_{v^* \in \underline{\partial}_x F(x,p;y^*)} \langle v^*, h\rangle + \min_{u^* \in \overline{\partial}_x F(x,p;y^*)} \langle u^*, h\rangle \Big) \leqslant \\
&\leqslant \sup_{y^* \in \partial\omega(F_p(x)-y)} \max_{v^* \in [\mathscr{D}_x F(x,p;y^*)]^+} \langle v^*, h\rangle,
\end{aligned} \tag{1.50}$$

если $F(x,p) \neq y$, в то время как

$$\|F_p(\cdot) - y)\|'(x,h) = \|F_p'(x,h)\| \leqslant \sup_{y^* \in S_{Y^*}} \max_{v^* \in [\mathscr{D}_x F(x,p;y^*)]^+} \langle v^*, h\rangle, \tag{1.51}$$

если $F(x,p) = y$, так как $\|y\| = \sup_{y^* \in S_{Y^*}} \langle y^*, y\rangle$.

Теперь мы можем воспользоваться УРМФ в терминах квазидифференциалов и полунепрерывностью сверху квазидифференциальных сумм, чтобы доказать выполнение неравенства $|\nabla\psi_{(y,z,p)}|(x) > K^{-1}$. Выберем произвольное число $\varkappa > 0$, меньшее, чем инфимум в (1.47). Рассмотрим множество $D(y)$ из предположения 3. Данное множество выпукло и слабо* замкнуто. Более того, $D(y) \cap B(0_{X^*}, \varkappa) = \varnothing$ согласно (1.47), и шар $B(0_{X^*}, \varkappa)$ слабо* компактен по теореме Банаха-Алаоглу. Следовательно, по теореме об отделимости для любого $y \in S_Y$ существует h_y такое, что $\|h_y\| = 1$ и $\langle v^*, h_y\rangle \leqslant -\varkappa$ для всех $v^* \in D(y)$.

Пусть $\overline{h}$ — вектор из УРМФ в терминах квазидифференциалов в точке $(\overline{x}, \overline{p})$. Тогда $\langle v^*, h_y + t\overline{h}\rangle \leqslant -\varkappa$ для всех $v^* \in D(y)$ и $t \geqslant 0$. Отсюда, воспользовавшись тем фактом, что отображение $(x,p) \mapsto [\mathscr{D}_x F(x,p;y^*)]^+$ метрически пн. св. в точке $(\overline{x}, \overline{p})$ равномерно по $y^* \in S_{Y^*}$, получаем, что для любого $t \geqslant 0$ существует $r_1(t) \in (0, \overline{r})$ такое, что для любого $y \in S_Y$ будет

$$\langle v^*, h_y + t\overline{h}\rangle \leqslant -\frac{\varkappa}{2} \quad \forall v^* \in [\mathscr{D}_x F(x,p;y^*)]^+ \quad \forall y^* \in \partial\|\cdot\|(y) \tag{1.52}$$

для всех $(x,p) \in B(\overline{x}, r_1(t)) \times B(\overline{p}, r_1(t))$. Кроме того, из второго условия в УРМФ в терминах квазидифференциалов (существование $\overline{h}$) и предположения 2 следует, что для любого $t \geqslant 0$ существует $r_2(t) \in (0, \overline{r})$ такое, что

$$\langle v^*, t\overline{h} \rangle \leqslant \frac{\varkappa}{4} \quad \forall v^* \in [\mathscr{D}_x F(x,p;y^*)]^+ \quad \forall y^* \in S_{Y^*} \tag{1.53}$$

для всех $(x,p) \in B(\overline{x}, r_2(t)) \times B(\overline{p}, r_2(t))$.

Вновь воспользовавшись вторым условием из УРМФ в терминах квазидифференциалов (существование $\overline{h}$), равенством $\|h_y\| = 1$ и тем фактом, что множества $[\mathscr{D}_x g_i(\overline{x}, \overline{p})]^+$ слабо* компактны и потому ограничены, можно найти $t_0 > 0$ такое, что $\langle v^*, h_y + t_0\overline{h} \rangle \leqslant -\varkappa$ для всех $v^* \in [\mathscr{D}_x g_i(\overline{x}, \overline{p})]^+$, $i \in I(\overline{x}, \overline{p})$ и $y \in S_Y$. Отсюда с помощью метрической полунепрерывности сверху отображений $\mathscr{D}_x g_i(\cdot)$ в точке $(\overline{x}, \overline{p})$ получаем, что существует $r_3 \in (0, \overline{r})$ такое, что

$$\langle v^*, h_y + t_0\overline{h} \rangle \leqslant -\frac{\varkappa}{2} \quad \forall v^* \in [\mathscr{D}_x g_i(x,p)]^+ \quad \forall i \in I(\overline{x}, \overline{p}) \quad \forall y \in S_Y \tag{1.54}$$

для всех $(x,p) \in B(\overline{x}, r_3) \times B(\overline{p}, r_3)$. Наконец, поскольку функции g_i непрерывны, существуют $r_4 \in (0, \overline{r})$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $g_i(x,p) < -\varepsilon$ для всех $(x,p) \in B(\overline{x}, r_4) \times B(\overline{p}, r_4)$ и $i \notin I(\overline{x}, \overline{p})$.

Положим $r = \min\{r_1(t_0), r_2(t_0), r_3, r_4, \varepsilon/2\}$ и зафиксируем произвольные $(x,p) \in B(\overline{x}, r) \times B(\overline{p}, r)$ и $(y,z) \in B((0_Y, 0_m), r)$ такие, что $(y,z) \notin \Phi_p(x)$. Заметим, что для всех $i \notin I(\overline{x}, \overline{p})$ будет $g_i(x,p) - z_i < 0$, так как $r \leqslant \min\{r_4, \varepsilon/2\}$, откуда следует, что $g_i(\cdot) - z_i < 0$ в некоторой окрестности точки (x,p). Следовательно, для любых (ξ, q) из некоторой окрестности точки (x,p) будет

$$\operatorname{dist}((y,z), \Phi_q(\xi)) = \|F(\xi,q) - y\| + \sum_{i \in I(\overline{x}, \overline{p})} \max\{g_i(\xi,q) - z_i, 0\},$$

т. е. индексы $i \notin I(\overline{x}, \overline{p})$ можно выбросить из рассмотрения. Заметим также, что по определениям

$$\max\{g_i(\cdot,p) - z_i, 0\}'(x,h) = \begin{cases} [g_i(\cdot,p)]'(x,h), & \text{если } g_i(x,p) > z_i, \\ \max\{[g_i(\cdot,p)]'(x,h), 0\}, & \text{если } g_i(x,p) = z_i, \\ 0, & \text{если } g_i(x,p) < z_i \end{cases} \tag{1.55}$$

и $[g_i(\cdot,p)]'(x,h) \leqslant \max_{v^* \in [\mathscr{D}_x g_i(x,p)]^+} \langle v^*, h \rangle$ для всех $h \in X$.

Если $F(x,p) \neq y$, то с помощью неравенств (1.50), (1.52), (1.54) и (1.55) получим, что

$$\psi'_{(y,z,p)}(x,\eta) = \|F(\cdot,p) - y\|'(x,\eta) + \sum_{i \in I(\overline{x}, \overline{p})} \max\{g_i(\cdot,p) - z_i, 0\}'(x,\eta), \leqslant -\frac{\varkappa}{2}$$

где $\eta = h_w + t_0\overline{h}$ и $w = (F(x,p) - y)/\|F(x,p) - y\|$ (здесь мы воспользовались тем фактом, что $\partial \| \cdot \|(F(x,p) - y) = \partial \| \cdot \|(w)$). Заметим, что $\|\eta\| \leqslant 1 + t_0\|\overline{h}\|$, поскольку $\|h_w\| = 1$.

С другой стороны, если $F(x,p) = y$, то существует $k \in I(\overline{x},\overline{p})$ такое, что $g_k(x,p) > z_k$. Поэтому, воспользовавшись неравенствами (1.51), (1.53), (1.54) и (1.55) получим, что

$$\psi'_{(y,z,p)}(x,\eta) = \|F(\cdot,p) - y\|'(x,\eta) + \max\{g_k(\cdot,p) - z_k, 0\}'(x,\eta)$$
$$+ \sum_{i \in I(\overline{x},\overline{p}) \setminus \{k\}} \max\{g_i(\cdot,p) - z_i, 0\}'(x,\eta) \leqslant \frac{\varkappa}{4} - \frac{\varkappa}{2} = -\frac{\varkappa}{4},$$

где $\eta = t_0\overline{h}$. Таким образом, для любых $(x,p) \in B(\overline{x},r) \times B(\overline{p},r)$ и $(y,z) \in B((0_Y,0_m),r)$ таких, что $(y,z) \notin \Phi_p(x)$, справедливы неравенства

$$|\nabla\psi_{(y,z,p)}|(x) \geqslant -\psi'_{(y,z,p)}\left(x, \frac{\eta}{\|\eta\|}\right) \geqslant \frac{\varkappa}{4(1 + t_0\|\overline{h}\|)},$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 1.2.7. Пусть $X = \mathbb{R}^d$ и отображение F имеет такой же вид, как и в предложении 1.2.7. В этом случае можно переформулировать достаточные условия метрической регулярности отображения F из предыдущей теоремы в более удобном виде. А именно, введём множество $\underline{\partial}_x F(\overline{x},\overline{p})$, состоящее из всех $\ell \times d$ матриц, j-я строка которых является вектором из субдифференциала $\underline{\partial}_x f_j(\overline{x},\overline{p})$ для всех $j \in 1\colon \ell$. Множество $\overline{\partial}_x F(\overline{x},\overline{p})$ определяется аналогичным образом. Пара $\mathscr{D}_x F(\overline{x},\overline{p}) = [\underline{\partial}_x F(\overline{x},\overline{p}), \overline{\partial}_x F(\overline{x},\overline{p})]$ является векторным квазидифференциалом отображения $F(\cdot,\overline{p})$ в точке $\overline{x}$ (см. [37, приложение III]). Из теоремы 1.2.5 следует, что для того чтобы отображение $F(\cdot,p)$ было метрически регулярным вблизи точки $(\overline{x}, F(\overline{x},p))$ с нормой метрической регулярности, не превосходящей некоторого $K > 0$ для всех p из окрестности точки $\overline{p}$, достаточно, чтобы $\ell \leqslant d$ и все матрицы из множества $[\mathscr{D}_x F(\overline{x},\overline{p})]^+ = \underline{\partial}_x F(\overline{x},\overline{p}) + \overline{\partial}_x F(\overline{x},\overline{p})$ имели полный ранг. Заметим, что схожее условие на множество $[\mathscr{D}_x F(\overline{x},\overline{p})]^+$ было введено В.Ф. Демьяновым [137] для изучения негладких вариантов теоремы о неявной функции и негладкого метода Ньютона для векторнозначных кодифференцируемых функций.

Замечание 1.2.8. Следует заметить, что в случае, когда $X = \mathbb{R}^d$ и $Y = \mathbb{R}^\ell$, теорема 1.2.5, по существу, является следствием к достаточным условиям метрической регулярности в терминах субдифференциала Кларка [88,109]. Действительно, если функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ квазидифференцируема в точке x, то, как легко видеть, $\min_{v^* \in [\mathscr{D}f(x)]^+} \langle v^*, h\rangle \leqslant f'(x,h) \leqslant \max_{v^* \in [\mathscr{D}f(x)]^+} \langle v^*, h\rangle$ для всех $h \in X$, т. е. квазидифференциальная сумма $[\mathscr{D}f(x)]^+$ является *конвексификатором* функции f в точке x (см. [139, 153, 273, 395]). С помощью этих неравенств и теоремы об отделимости нетрудно показать, что если функция f дифференцируема по Гато в точке x, то $f'(x) \in [\mathscr{D}f(x)]^+$ вне зависимости от выбора квазидифференциала. Воспользовавшись этим фактом, нетрудно показать, что если $X = \mathbb{R}^d$, функция f липшицева и квазидифференцируема в окрестности точки x и существует квазидифференциальное отображение $\mathscr{D}f$ являющееся метрически пн. св. в точке x, то справедливо включение $\partial_{Cl} f(x) \subseteq [\mathscr{D} f(x)]^+$, где $\partial_{Cl} f(x)$ — субдифференциал Кларка функции f в точке x (см. [48]).

Воспользовавшись теоремой 1.2.1 и следствием 1.2.2, можно проверить, что в предположениях теоремы 1.2.5 функции $F(\cdot, p)$ и $g_i(\cdot, p)$ являются липшицевыми в окрестности точки $\overline{x}$ с одной и той же константой Липшица для всех p из некоторой окрестности точки $\overline{p}$, если $Y = \mathbb{R}^\ell$. Поэтому, если $X = \mathbb{R}^d$, $Y = \mathbb{R}^\ell$ и $F = (f_1, \ldots, f_\ell)^T$, то $\partial_{Cl} g_i(\cdot, \overline{p})(\overline{x}) \subseteq [\mathscr{D}_x g_i(\overline{x}, \overline{p})]^+$ и точно такое же включение справедливо для функций $f_j(x, p)$. Из данных включений следует, что в рассматриваемом случае теорема 1.2.5 является следствием к достаточным условиям метрической регулярности в терминах субдифференциала Кларка [88, теорема 1.1] (см. также [109]). С другой стороны, если пространство X или пространство Y являются бесконечномерными, то указанные выше включения не имеют места и поэтому теорема 1.2.5 не является следствием основных результатов работ [88, 109].

Приведём простой пример, иллюстрирующий теорему 1.2.5 и замечание 1.2.7.

Пример 1.2.7. Пусть $X = Y = \mathbb{R}^2$ и $P = \mathbb{R}$. Рассмотрим следующую негладкую параметрическую систему уравнений

$$\begin{cases} \max\{2x^{(1)}, x^{(1)}\} - |\sin(px^{(2)})| = y^{(1)}, \\ \sin\big(p(x^{(1)} + x^{(2)})\big) + \min\{x^{(2)}, 2x^{(2)}\} = y^{(2)}. \end{cases} \tag{1.56}$$

Положим $f_1(x, p) = \max\{2x^{(1)}, x^{(1)}\} - |\sin(px^{(2)})|$ и $f_2(x, p) = \sin(p(x^{(1)} + x^{(2)})) + \min\{x^{(2)}, 2x^{(2)}\}$. Воспользуемся теоремой 1.2.5, для того чтобы найти значения параметра p, при которых отображения $x \mapsto F(x, p) = (f_1(x, p), f_2(x, p))^T$ является метрически регулярным вблизи точки $(0_2, 0_2)$.

Функции $f_1(x, p)$ и $f_2(x, p)$ являются квазидифференцируемым. С помощью стандартных формул квазидифференциального исчисления [37, параграф III.2], получаем

$$\underline{\partial}_x f_1(x, p) = \begin{cases} \{\binom{2}{0}\}, & \text{если } x^{(1)} > 0, \\ \operatorname{co}\{\binom{1}{0}, \binom{2}{0}\}, & \text{если } x^{(1)} = 0, \\ \{\binom{1}{0}\}, & \text{если } x^{(1)} < 0, \end{cases} \quad \overline{\partial}_x f_1(x, p) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -p\cos(px^{(2)}) \operatorname{Sign}\big(\sin(px^{(2)})\big) \end{pmatrix} \right\},$$

$$\underline{\partial}_x f_2(x, p) = \left\{ \begin{pmatrix} p\cos\big(p(x^{(1)} + x^{(2)})\big) \\ p\cos\big(p(x^{(1)} + x^{(2)})\big) \end{pmatrix} \right\}, \quad \overline{\partial}_x f_2(x, p) = \begin{cases} \{\binom{0}{1}\}, & \text{если } x^{(2)} > 0, \\ \operatorname{co}\{\binom{0}{1}, \binom{0}{2}\}, & \text{если } x^{(2)} = 0, \\ \{\binom{0}{2}\}, & \text{если } x^{(2)} < 0, \end{cases}$$

где $\mathrm{Sign}(t) = \mathrm{sign}(t)$ — знак числа $t \in \mathbb{R}$ при $t \neq 0$ и $\mathrm{Sign}(0) = [-1, 1]$. Элементарно проверяется, что квазидифференциальные отображения $(x, p) \mapsto \mathscr{D}_x f_1(x, p)$ и $(x, p) \mapsto \mathscr{D}_x f_2(x, p)$ являются полунепрерывными сверху.

Найдём значения p при которых УРМФ в терминах квазидифференциалов выполняется в точке $(0_2, p)$. Следуя идее, описанной в замечании 1.2.7, введём квазидифференциал $\mathscr{D}_x F(0_2, p) = [\underline{\partial}_x F(0_2, p), \overline{\partial}_x F(0_2, p)]$,

$$\underline{\partial}_x F(0_2, p) = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ p & p \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in [1, 2] \right\}, \quad \overline{\partial}_x F(0_2, p) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & pt \\ 0 & s \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in [-1, 1], s \in [1, 2] \right\},$$

отображения $x \mapsto F(x, p)$ в точке $x = 0_2$. Первая строка матриц из множества $\underline{\partial}_x F(0_2, p)$ соответствует векторам из субдифференциала $\underline{\partial}_x f_1(0_2, p)$, а вторая строка — векторам из субдифференциала $\underline{\partial}_x f_2(0_2, p)$. Множество $\overline{\partial}_x F(0_2, p)$ определяется аналогичным образом.

Квазидифференциальная сумма отображения $x \mapsto F(x, p)$ в точке $x = 0_2$ имеет вид

$$[\mathscr{D}_x F(0_2, p)]^+ = \left\{ \begin{pmatrix} t & ps \\ p & p + r \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in [1, 2],\ s \in [-1, 1],\ r \in [1, 2] \right\}.$$

Найдём значения $p \in \mathbb{R}$, для которых все матрицы из множества $[\mathscr{D}_x F(0_2, p)]^+$ невырождены. Определители матриц из этого множества, как нетрудно видеть, принимают значения из отрезка $\mathrm{co}\{1, 4\} + \mathrm{co}\{p, 2p\} + \mathrm{co}\{-p^2, p^2\}$. Отсюда и из того факта, что определитель матрицы $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -p \\ p & p+1 \end{smallmatrix}\right) \in [\mathscr{D}_x F(0_2, p)]^+$ равен $p^2 + p + 1$ и положителен для всех p следует, что $\det A \neq 0$ для всех $A \in [\mathscr{D}_x F(0_2, p)]^+$ тогда и только тогда, когда выполняются неравенства:

$$p^2 + 2p + 1 > 0, \quad -p^2 + p + 1 > 0, \quad -p^2 + 2p + 1 > 0.$$

Разрешая эту систему неравенств, получаем, что УРМФ в терминах квазидифференциалов выполняется в точке $(0_2, p)$ тогда и только тогда, когда $p \in (1 - \sqrt{2}, (1 + \sqrt{5})/2)$. Следовательно, по теореме 1.2.5 можно заключить, что для всех $\overline{p} \in (1 - \sqrt{2}, (1 + \sqrt{5})/2)$ существуют $K > 0$ и $r > 0$ такие, что $\mathrm{dist}(x, (F_p)^{-1}(y)) \leqslant K \| y - F(x, p) \|$ для всех $x, y \in B(0_2, r)$ и $p \in (\overline{p} - r, \overline{p} + r)$, откуда, в частности, следует, что для любых таких y и p существует решение $x(y, p)$ системы уравнений (1.56).

По поводу более подробного изучения метрической регулярности квазидифференцируемых отображений, в том числе необходимых и достаточных условий метрической регулярности в терминах квазидифференциалов, см. работу автора [195].

1.2.5 Описание касательных конусов к квазидифференцируемым множествам

Достаточные условия метрической регулярности параметрической системы квазидифференцируемых равенств и неравенств, полученные в теореме 1.2.5, нередко оказываются слишком ограничительными. Например, функция $F(x^{(1)}, x^{(2)}) = |x^{(1)}| - |x^{(2)}|$ является метрически регулярной вблизи нуля. Однако, воспользовавшись правилами квазидифференциального исчисления [37], получим, что $\mathscr{D}F(0_2) = [\operatorname{co}\{(\pm 1, 0)^T\}, \operatorname{co}\{(0, \pm 1)^T\}]$ и поэтому $0_2 \in [\mathscr{D}F(0_2)]^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x^{(1)}|, |x^{(2)}|\} \leqslant 1\}$, т. е. в нуле не выполняется УРМФ в терминах квазидифференциалов. Значит, метрическую регулярность данного отображения не удастся проверить с помощью теоремы 1.2.5.

Во многих приложениях вместо свойства метрической регулярности достаточно знать лишь простое описание некоторого касательного конуса к множеству решений заданной системы равенств и неравенств. В этом параграфе мы дадим подобное описание выпуклых подконусов контингентного конуса к множеству, задаваемому квазидифференцируемыми ограничениями равенствами и неравенствами, основываясь на идеях С. Ди [165, 166]. В его работах классические формулы для касательного конуса к множеству ограничений в задаче математического программирования были выведены без традиционного предположения о непрерывности производных ограничений.

Пусть, как и в предыдущем параграфе, X — вещественное банахово пространство. Напомним, что *контингентным конусом* (конусом Булигана) к непустому множеству $M \subset X$ в точке $x \in M$ называется множество $T_M(x) \subset X$, состоящее из всех векторов $v \in X$, для которых $\liminf_{\alpha \to +0} \operatorname{dist}(x + \alpha v, M)/\alpha = 0$. Иными словами, $v \in T_M(x)$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности $\{\alpha_n\} \subset (0, +\infty)$ и $\{v_n\} \subset X$ такие, что $\alpha_n \to +0$ и $v_n \to v$ при $n \to \infty$ и $x + \alpha_n v_n \in M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что контингентный конус $T_M(x)$ всегда является конусом (т. е. для любых $\lambda \geqslant 0$ и $v \in T_M(x)$ будет $\lambda v \in T_M(x)$), но конус $T_M(x)$ может и не быть выпуклым, если множество M не является выпуклым.

Наша цель — дать простое описание конуса $T_M(x)$ и/или его выпуклых подконусов, в случае, когда

$$M = \Big\{ x \in X \,\Big|\, f_j(x) = 0, \quad j \in J, \quad g_i(x) \leqslant 0, \quad i \in I \Big\},$$

где функций $f_j \colon X \to \mathbb{R}$ и $g_i \colon X \to \mathbb{R}$ — квазидифференцируемы (здесь $J = \{1, \ldots, \ell\}$ и $I = \{1, \ldots, m\}$). Для этого мы воспользуемся следующим вспомогательным результатом, который может быть легко доказан с помощью теоремы Борсука–Красносельского (см., например, [420, следствие 16.7]).

Лемма 1.2.9 (обобщённая теорема о промежуточном значении). *Пусть* $r^j\colon [-1,1]^\ell \to \mathbb{R}$, $j \in J = \{1,\ldots,\ell\}$ *— непрерывные функции такие, что для любого* $j \in J$ *и для всех* $\tau^{(k)} \in [-1,1]$, $k \neq j$, *выполняются неравенства*

$$r^j(\tau^{(1)},\ldots,\tau^{(j-1)},-1,\tau^{(j+1)},\ldots,\tau^{(\ell)}) < 0, \quad r^j(\tau^{(1)},\ldots,\tau^{(j-1)},1,\tau^{(j+1)},\ldots,\tau^{(\ell)}) > 0. \qquad (1.57)$$

Тогда существует $\widehat{\tau} \in (-1,1)^\ell$ *такое, что* $r^j(\widehat{\tau}) = 0$ *для всех* $j \in J$.

Для произвольного множества $C \subset X^*$ и вектора $v \in X$ обозначим через $s(C,v) = \sup_{x^* \in C}\langle x^*, v\rangle$ *опорную функцию* множества C. Положим также $I(x) = \{i \in I \mid g_i(x) = 0\}$ для любого $x \in X$.

Нам потребуется следующее определение. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой по направлениям в точке $x \in X$ *равномерно относительно конечномерных* подпространств, если f дифференцируема по направлениям в этой точке и для всех $v \in X$ и для любого конечномерного подпространства $X_0 \subset X$ справедливо соотношение

$$f'(x,v) = \lim_{[\alpha,v'] \to [+0,v],\, v' \in v + X_0} \frac{f(x+\alpha v') - f(x)}{\alpha},$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\alpha > 0$ и $v' \in v + X_0$, удовлетворяющих неравенствам $\alpha < \delta$ и $\|v' - v\| < \delta$, будет $|(f(x+\alpha v') - f(x))/\alpha - f'(x,v)| < \varepsilon$. Нетрудно видеть, что если функция f дифференцируема по направлениям в смысле Адамара в точке x или дифференцируема по направлениям в точке x и липшицева в некоторой окрестности это точки, то f дифференцируема по направлениям в точке x равномерно относительно конечномерных подпространств. Будем говорить, что функция f квазидифференцируема в точке x *равномерно относительно конечномерных подпространстве*, если она квазидифференцируема и дифференцируема равномерно относительно конечномерных подпространств в этой точке.

Следующая теорема указывает, как можно вычислять выпуклые подконусы контингентного конуса $T_M(x)$ в случае, когда *некоторые* элементы квазидифференциалов функций f_j и g_i удовлетворяют подходящему условию регулярности ограничений.

Теорема 1.2.6. *Пусть функции* f_j, $j \in J$, *непрерывны в окрестности точки* $\overline{x} \in M$, *функции* g_i, $i \notin I(\overline{x})$, *пн. св. в этой точке, и пусть функции* f_j, $j \in J$, *и* g_i, $i \in I(\overline{x})$, *квазидифференцируемы в точке* $\overline{x}$ *равномерно относительно конечномерных подпространств. Предположим также, что для некоторых векторов* $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, *и* $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$, *выполняются следующие условия регулярности:*

1. *для всех* $j \in J$ *существует* $v_j \in X$ *такое, что* $s(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, v_j) < 0$, $s(\underline{\partial} f_k(\overline{x}) + y_k^*, v_j) \leqslant 0$ *и* $s(-x_k^* - \overline{\partial} f_k(\overline{x}), v_j) \leqslant 0$ *при* $k \neq j$;

2. *для всех $j \in J$ существует $w_j \in X$ такое, что $s(-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}), w_j) < 0$ и для всех $k \neq j$ будет $s(-x_k^* - \overline{\partial} f_k(\overline{x}), w_j) \leqslant 0$ и $s(\underline{\partial} f_k(\overline{x}) + y_k^*, w_j) \leqslant 0$;*

3. *существует $v_0 \in X$ такое, что $s(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, v_0) < 0$ для всех $i \in I(\overline{x})$, а также $s(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, v_0) \leqslant 0$ и $s(-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}), v_0) \leqslant 0$ для всех $j \in J$.*

Тогда

$$\begin{gathered}\Big\{ v \in X \;\Big|\; s\big(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, v\big) \leqslant 0, \quad s\big(-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}), v\big) \leqslant 0 \quad \forall j \in J, \\ s\big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, v\big) \leqslant 0 \quad \forall i \in I(\overline{x}) \Big\} \subseteq T_M(\overline{x}).\end{gathered} \tag{1.58}$$

Доказательство. Для всех $\tau = (\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(\ell)}) \in [-1,1]^\ell$ определим

$$\eta(\tau) = \sum_{j=1}^{\ell} \Big(\max\{-\tau^{(j)}, 0\} v_j + \max\{\tau^{(j)}, 0\} w_j \Big).$$

Обозначим также $p_j(\cdot) = s(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, \cdot)$ и $q_j(\cdot) = s(-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}), \cdot)$, $j \in J$. Заметим, что из определения квазидифференциала следует, что для всех $v \in X$ справедливы неравенства $-q_j(v) \leqslant f_j'(\overline{x}, v) \leqslant p_j(v)$.

Пусть вектор $v \in X$ принадлежит множеству, стоящему в левой части включения (1.58). Пользуясь предположениями 1–3 и сублинейностью функций p_j, получаем, что для всех $j \in J$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$ и $\tau \in [-1,1]^\ell$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & f_j'\Big(\overline{x}, v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(j-1)}, -1, \tau^{(j+1)}, \ldots, \tau^{(\ell)})\Big) \leqslant \\ & \quad \leqslant p_j\Big(v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(j-1)}, -1, \tau^{(j+1)}, \ldots, \tau^{(\ell)})\Big) \leqslant p_j(v) + \gamma p_j(v_0) + \\ & \quad + \frac{1}{n} p_j(v_j) + \frac{1}{n} \sum_{k \neq j} \big(\max\{-\tau^{(k)}, 0\} p_j(v_k) + \max\{\tau^{(k)}, 0\} p_j(w_k) \big) \leqslant \frac{1}{n} p_j(v_j) < 0. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Аналогично, для всех $j \in J$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$ и $\tau \in [-1,1]^\ell$ будет

$$\begin{aligned} & f_j'\Big(\overline{x}, v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(j-1)}, 1, \tau^{(j+1)}, \ldots, \tau^{(\ell)})\Big) \geqslant \\ & \quad \geqslant -q_j\Big(\overline{x}, v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(j-1)}, 1, \tau^{(j+1)}, \ldots, \tau^{(\ell)})\Big) \geqslant -\frac{1}{n} q_j(w_j) > 0. \end{aligned} \tag{1.60}$$

Докажем, что из неравенств (1.59) и (1.60) вытекает, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$ существует $\alpha_n(\gamma) > 0$ такое, что для любых $0 < \alpha < \alpha_n(\gamma)$, $j \in J$ и $\tau \in [-1,1]^\ell$ справедливы следующие неравенства:

$$f_j\left(\overline{x} + \alpha\Big(v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(j-1)}, -1, \tau^{(j+1)}, \ldots, \tau^{(\ell)})\Big)\right) < 0, \tag{1.61}$$

$$f_j\left(\overline{x} + \alpha\Big(v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(j-1)}, 1, \tau^{(j+1)}, \ldots, \tau^{(\ell)})\Big)\right) > 0. \tag{1.62}$$

Действительно, зафиксируем произвольные $j \in J$, $\gamma > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Рассуждая от противного, предположим, что для любого $\alpha_n(\gamma) > 0$ существуют $\alpha \in (0, \alpha_n(\gamma))$ и $\tau \in [-1,1]^\ell$ такие, что, например, неравенство (1.61) не выполняется. Тогда существуют последовательность $\{\alpha_k\} \subset (0, +\infty)$, сходящаяся к нулю, и последовательность $\{\tau_k\} \subset [-1,1]^\ell$ такие, что

$$f_j\left(\overline{x} + \alpha_k\Big(v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau_k^{(1)}, \ldots, \tau_k^{(j-1)}, -1, \tau_k^{(j+1)}, \ldots, \tau_k^{(\ell)})\Big)\right) \geqslant 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Без ограничения общностей можно предполагать, что последовательность $\{\tau_k\}$ сходится к некоторому $\widehat{\tau} \in [-1,1]^\ell$. Напомним, что функции f_j дифференцируемы по направлениям в точке $\overline{x}$ равномерно относительно конечномерных подпространств. Кроме того, функция $\eta(\cdot)$ принимает значения в конечномерном подпространстве $X_0 = \operatorname{span}\{v_j, w_j \mid j \in J\}$ и непрерывна. Поэтому в силу равенства $f_j(\overline{x}) = 0$ имеем

$$f_j'\left(\overline{x}, v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\widehat{\tau}^{(1)}, \ldots, \widehat{\tau}^{(j-1)}, -1, \widehat{\tau}^{(j+1)}, \ldots, \widehat{\tau}^{(\ell)})\right) =$$
$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\alpha_k} f_j\left(\overline{x} + \alpha_k\Big(v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau_k^{(1)}, \ldots, \tau_k^{(j-1)}, -1, \tau_k^{(j+1)}, \ldots, \tau_k^{(\ell)})\Big)\right) \geqslant 0,$$

что противоречит неравенству (1.59).

Для всех $i \in I(\overline{x})$ обозначим $u_i(\cdot) = s(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, \cdot)$. По определению u_i — непрерывные сублинейные функции (напомним, что $\underline{\partial} g_i(\overline{x})$ — выпуклое слабо* компактное множество). Поэтому для всех $i \in I(\overline{x})$, $\gamma > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $\tau \in [-1,1]^\ell$ справедливы неравенства

$$g_i'\Big(\overline{x}, v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau)\Big) \leqslant u_i\Big(v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant u_i(v) + \gamma u_i(v_0) + \frac{1}{n} u_i(\eta(\tau)) \leqslant \gamma u_i(v_0) + \frac{1}{n} \max_{s \in [-1,1]^\ell} u_i(\eta(s))$$

(здесь мы воспользовались тем фактом, что $u_i(v) \leqslant 0$, поскольку v принадлежит множеству, стоящему в левой части включения (1.58)). По предположению 3 будет $u_i(v_0) < 0$. Следовательно, для всех $\gamma > 0$ существует $n_\gamma \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $i \in I(\overline{x})$ и $n \geqslant n_\gamma$ будет

$$g_i'\left(\overline{x}, v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau)\right) \leqslant \frac{\gamma}{2} u_j(v_0) < 0 \quad \forall \tau \in [-1,1]^\ell.$$

Отсюда, рассуждая как и при доказательстве неравенств (1.61) и (1.62), нетрудно показать, что для всех $\gamma > 0$ и $n \geqslant n_\gamma$ существует $\beta_n(\gamma) > 0$ такое, что

$$g_i\left(\overline{x} + \alpha\Big(v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau)\Big)\right) < 0 \tag{1.63}$$

для всех $i \in I(\overline{x})$, $\tau \in [-1,1]^\ell$ и $0 < \alpha < \beta_n(\gamma)$.

По нашему предположению функции f_j непрерывны в некоторой окрестности U точки $\overline{x}$. В силу компактности множества $\{\eta(\tau) \in X \mid \tau \in [-1,1]^\ell\}$, как образа компактного множества при непрерывном отображении, для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$ существует $\delta_n(\gamma) > 0$ такое,

что
$$\left\{\overline{x}+\alpha\Big(v+\gamma v_0+\frac{1}{n}\eta(\tau)\Big)\in X \;\Big|\; \alpha\in[0,\delta_n(\gamma)],\ \tau\in[-1,1]^\ell\right\}\subset U. \tag{1.64}$$
Кроме того, выбирая достаточно малое $\delta_n(\gamma)$, можно предполагать, что $g_i(x)<0$ для всех $i\notin I(\overline{x})$ и x из множества, стоящего в левой части включения (1.64), поскольку $g_i(\overline{x})<0$ для всех таких i и функции g_i пн. св. в точке $\overline{x}$.

Зафиксируем произвольное $\gamma>0$ и для всех $n\geqslant n_\gamma$ выберем $\alpha_n>0$ такие, что $\alpha_n<\min\{\alpha_n(\gamma),\beta_n(\gamma),\delta_n(\gamma)\}$ и $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$. Для любых $j\in J$ и $n\in\mathbb{N}$ положим
$$r_n^j(\tau)=f_j\left(\overline{x}+\alpha_n\Big(v+\gamma v_0+\frac{1}{n}\eta(\tau)\Big)\right)\quad\forall\tau\in[-1,1]^\ell.$$
Из включения (1.64) и определения окрестности U следует, что функции $r_n^j(\cdot)$, $j\in J$, непрерывны. Кроме того, согласно неравенствам (1.61) и (1.62) функции $r_n^j(\cdot)$, $j\in J$, удовлетворяют условию (1.57) обобщённой теоремы о промежуточном значении. Следовательно, по данной теореме для любого $n\geqslant n_\gamma$ существует $\widehat{\tau}_n\in(-1,1)^\ell$ такое, что $r_n^j(\widehat{\tau}_n)=0$ для всех $j\in J$, т. е. $f_j(\overline{x}+\alpha_n\overline{v}_n)=0$ для всех $j\in J$, где $\overline{v}_n=v+\gamma v_0+\eta(\widehat{\tau}_n)/n$. Более того, согласно неравенству (1.63) и выбору $\delta_n(\gamma)$ для всех $i\in I$ выполняется неравенство $g_i(\overline{x}+\alpha_n\overline{v}_n)<0$. Таким образом, $\overline{x}+\alpha_n\overline{v}_n\in M$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Отсюда, с учётом того, что $\overline{v}_n\to v+\gamma v_0$ при $n\to\infty$, получаем, что $v+\gamma v_0\in T_M(\overline{x})$ для всех $\gamma>0$. Следовательно, $v\in T_M(\overline{x})$, поскольку контингентный конус всегда замкнут. Значит, справедливо включение (1.58). $\square$

Заметим, что множество, стоящее в левой части включения (1.58) является непустым замкнутым выпуклым конусом (вектор v_0 принадлежит этому конусу). Таким образом, предыдущая теорема позволяет вычислять замкнутые выпуклые подконусы контингентного конуса $T_M(\overline{x})$ с помощью векторов из квазидифференциалов функций f_j и g_i, удовлетворяющих условиям регулярности 1–3. Приведём геометрическую переформулировку этих условий, позволяющую, в частности, указать их связь с УРМФ в терминах квазидифференциалов.

Обозначим через cl^* замыкание в слабой* топологии, а через
$$\operatorname{cone}A=\left\{\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i \;\Big|\; x_i\in A,\ \ \lambda_i\geqslant 0,\ \ i\in 1\colon n,\ \ n\in\mathbb{N}\right\}$$
выпуклую коническую оболочку множества $A\subset X$, то есть наименьший выпуклый конус содержащий множество A.

Предложение 1.2.8. *Пусть функции f_j, $j\in J$, и g_i, $i\in I(\overline{x})$, квазидифференцируемы в точке $\overline{x}\in M$ и заданы векторы $x_j^*\in\underline{\partial}f_j(\overline{x})$, $y_j^*\in\overline{\partial}f_j(\overline{x})$, $j\in J$, и $z_i^*\in\overline{\partial}g_i(\overline{x})$, $i\in I(\overline{x})$. Тогда* *предположения 1–3 теоремы 1.2.6 выполняются тогда и только тогда, когда*

$$C_j \cap \mathrm{cl}^* \,\mathrm{cone}\,\big\{ -C_k \bigm| k \neq j \big\} = \varnothing \quad \forall j \in J, \tag{1.65}$$

$$\mathrm{co}\,\big\{ \underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \bigm| i \in I(\overline{x}) \big\} \cap \mathrm{cl}^* \,\mathrm{cone}\,\big\{ -C_j \bigm| j \in J \big\} = \varnothing, \tag{1.66}$$

где $C_j = (\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*) \cup (-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}))$, $i \in I$.

Доказательство. Предположим, что выполнено предположение 3 теоремы 1.2.6. Тогда $\langle x^*, v_0 \rangle < 0$ для всех $x^* \in \mathrm{co}\{\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \mid i \in I(\overline{x})\}$, в то время как $\langle x^*, v_0 \rangle \geqslant 0$ для всех $x^* \in \mathrm{cl}^* \,\mathrm{cone}\{-C_j \mid i \in J\}$. Значит, выполняется условие (1.66). Обратно, если выполняется условие (1.66), то применяя теорему об отделимости в пространстве X^*, наделённом слабой* топологией, получим, что существует вектор v_0, удовлетворяющий предположению 3 теоремы 1.2.6. Таким образом, это предположение эквивалентно условию (1.66).

Предположим теперь, что выполнено условие 1 теоремы 1.2.6. Тогда $\langle x^*, v_j \rangle < 0$ для всех $x_* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*$, в то время как $\langle x^*, v_j \rangle \geqslant 0$ для всех $x^* \in \mathrm{cl}^* \,\mathrm{cone}\{-C_k \mid k \neq j\}$, откуда следует, что множества $\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*$ и $\mathrm{cl}^* \,\mathrm{cone}\{-C_k \mid k \neq j\}$ не пересекаются. Аналогичным образом из предположения 2 теоремы 1.2.6 следует, что множества $-x_j^* - \underline{\partial} f_j(\overline{x})$ и $\mathrm{cl}^* \,\mathrm{cone}\{-C_k \mid k \neq j\}$ не пересекаются. Таким образом, из предположений 1 и 2 теоремы 1.2.6 следует, что выполняется условие (1.65). Обратное утверждение легко доказывается с помощью применения теоремы об отделимости в пространстве (X^*, w^*). $\square$

Напомним, что подмножества $A_1, \ldots, A_s$ вещественного линейного пространства E называются линейно независимыми, если включение $0 \in \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_s A_s$ выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \ldots = \lambda_s = 0$. Будем говорить, что данные подмножества являются *сильно линейно независимыми*, если $A_i \cap \mathrm{span}\{A_k \mid k \neq i\} = \varnothing$ для всех $i \in 1\colon s$. Нетрудно видеть, что если множества являются сильно линейно независимыми, то они линейно независимы. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Если $E = \mathbb{R}^2$, $A_1 = \mathrm{co}\{(\pm 1, 1)^T\}$ и $A_2 = \{(1, 0)^T\}$, то множества A_1 и A_2 являются линейно независимыми, но не являются сильно линейно независимыми.

Будем говорить, что в точке $\overline{x} \in M$ выполняется *усиленное* условие регулярности Мангасаряна-Фромовица в терминах квазидифференциалов, если множества $[\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+$ *сильно* линейно независимы и существует $\overline{h} \in X$ такое, что $\langle v^*, \overline{h} \rangle = 0$ для всех $v^* \in [\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+$ и $j \in J$ и $\langle v^*, \overline{h} \rangle < 0$ для всех $v^* \in [\mathscr{D} g_i(\overline{x})]^+$ и $i \in I(\overline{x})$.

Предложение 1.2.9. *Пусть функции f_j, $j \in J$, и g_i, $i \in I(\overline{x})$, квазидифференцируемы в точке $\overline{x} \in M$. Для того чтобы предположения 1–3 теоремы 1.2.6 выполнялись для всех*

$x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, и $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$, достаточно, чтобы

$$[\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+ \cap \mathrm{cl}^* \operatorname{span} \big\{ [\mathscr{D} f_k(\overline{x})]^+ \bigm| k \neq j \big\} = \varnothing \quad \forall j \in J, \tag{1.67}$$

$$\operatorname{co} \big\{ [\mathscr{D} g_i(\overline{x})]^+ \bigm| i \in I(\overline{x}) \big\} \cap \mathrm{cl}^* \operatorname{span} \big\{ [\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+ \bigm| j \in J \big\} = \varnothing. \tag{1.68}$$

Более того, данные условия становятся необходимыми, если линейные оболочки в (1.68) и (1.67) слабо замкнуты (в частности, если X конечномерно). Наконец, если линейная оболочка в (1.67) слабо* замкнута для всех $j \in J$, то условия (1.68) и (1.67) выполняются тогда и только тогда, когда в точке $\overline{x}$ выполнено усиленное УРМФ в терминах квазидифференциалов.*

Доказательство. Пусть выполнены условия (1.68) и (1.67). Зафиксируем произвольные $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, и $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$. Обозначим $C_j = (\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*) \cup (-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}))$. Из определения квазидифференциальной суммы следует, что

$$\operatorname{cone} \big\{ -C_j \bigm| j \in J_0 \big\} \subseteq \operatorname{span} \big\{ [\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+ \bigm| j \in J_0 \big\},$$
$$\operatorname{co} \big\{ \underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \bigm| i \in I(\overline{x}) \big\} \subseteq \operatorname{co} \big\{ [\mathscr{D} g_i(\overline{x})]^+ \bigm| i \in I(\overline{x}) \big\}$$

для любого подмножества индексов $J_0 \subseteq J$. Поэтому из условия (1.67) вытекает условие (1.65), а из условия (1.68) вытекает условие (1.66). Отсюда, воспользовавшись предложением 1.2.8, получаем, что предположения 1–3 теоремы 1.2.6 выполняются для всех $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, и $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$.

Предположим теперь, что линейные оболочки в условиях (1.68) и (1.67) слабо* замкнуты и условия 1–3 теоремы 1.2.6 выполняются для всех $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, и $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$. Рассуждая от противного, допустим, что одно из условий (1.68) или (1.67) не выполняется. Рассмотрим сначала случай, когда не выполняется условие (1.68). Учитывая, что квазидифференциальная сумма является выпуклым множеством, нетрудно проверить справедливость следующего равенства:

$$\operatorname{span} \big\{ [\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+ \bigm| j \in J \big\} = \sum_{j \in J} \operatorname{cone} [\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+ + \sum_{j \in J} \operatorname{cone} \Big\{ -[\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+ \Big\}.$$

Отсюда и из невыполнения условия (1.68) следует, что для всех $i \in I(\overline{x})$ существуют $h_i^* \in \underline{\partial} g_i(\overline{x})$, $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$ и $\alpha_i \geqslant 0$, в то время как для всех $j \in J$ существуют $x_j^*, \widehat{x}_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^*, \widehat{y}_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$ и $\lambda_j, \mu_j \geqslant 0$ такие, что

$$\sum_{i \in I(\overline{x})} \alpha_i (h_i^* + z_i^*) = \sum_{j \in J} \lambda_j (x_j^* + \widehat{y}_j^*) - \sum_{j \in J} \mu_j (\widehat{x}_j^* + y_j^*)$$

и $\sum_{i\in I(\overline{x})}\alpha_i = 1$. Поэтому

$$\operatorname{co}\left\{\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \;\middle|\; i \in I(\overline{x})\right\} \cap \operatorname{cone}\left\{x_j^* + \overline{\partial} f_j(\overline{x}),\ -\underline{\partial} f_j(\overline{x}) - y_j^* \;\middle|\; j \in J\right\} \neq \varnothing,$$

что по предложению 1.2.8 противоречит выполнению условия 3 теоремы 1.2.6. Рассуждая аналогичным образом, легко проверить, что если условие (1.67) не выполняется, то существуют $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, для которых не выполняется условие (1.65), что по предложению 1.2.8 противоречит выполнению условий 1 и 2 теоремы 1.2.6.

Остаётся заметить, что если линейная оболочка в условии (1.67) является слабо* замкнутой для всех $j \in J$, то условие (1.67) является определением сильной линейной независимости множеств $[\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+$, $j \in J$. В свою очередь, воспользовавшись теоремой об отделимости и условием (1.68), получим, что существует $\overline{h}$, удовлетворяющее второму условию из УРМФ в терминах квазидифференциалов. Таким образом, из условий (1.67) и (1.68) вытекает справедливость усиленного УРМФ в терминах квазидифференциалов. Справедливость обратной импликации вытекает непосредственно из определений. □

Приведём несколько полезных следствий из теоремы 1.2.6. Во-первых, заметим, что данная теорема очевидно остаётся справедливой, если отсутствуют ограничения-равенства или ограничения-неравенства. Более того, в случае, когда отсутствуют ограничения-равенства, теорема 1.2.6 справедлива без предположения о квазидифференцируемости функций g_i равномерно относительно конечномерных подпространств, так как в этом случае можно определить $\eta(\cdot) \equiv 0$.

Следствие 1.2.7. *Пусть функции f_j, $j \in J$, непрерывны в некоторой окрестности точки $\overline{x} \in M$ и квазидифференцируемы в этой точке равномерно относительно конечномерных подпространств и пусть $I = \varnothing$. Предположим также, что векторы $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$ и $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, удовлетворяют условию* (1.65) *(в частности, в случае $\ell = 1$, достаточно предполагать, что $0 \notin \partial f_1(\overline{x}) + y_1^*$ и $0 \notin x_1^* + \overline{\partial} f_j(\overline{x})$). Тогда*

$$\left\{v \in X \;\middle|\; s\big(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, v\big) \leqslant 0,\ s\big(-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}), v\big) \leqslant 0,\ j \in J\right\} \subseteq T_M(\overline{x}).$$

Следствие 1.2.8. *Пусть $J = \varnothing$ и точка $\overline{x} \in M$ фиксирована. Предположим, что функции g_i, $i \in I(\overline{x})$, квазидифференцируемы в точке $\overline{x}$, а функции g_i, $i \notin I(\overline{x})$, пн. св. в этой точке. Пусть также векторы $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$, удовлетворяют условию регулярности вида $0 \notin \operatorname{co}\{\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \mid i \in I(\overline{x})\}$. Тогда $\left\{v \in X \;\middle|\; s\big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, v\big) \leqslant 0,\ i \in I(\overline{x})\right\} \subseteq T_M(\overline{x})$.*

Приведём простой пример, иллюстрирующий теорему 1.2.6.

Пример 1.2.8. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $\overline{x} = 0$ и

$$M = \Big\{ x = (x^{(1)}, x^{(2)})^T \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; f(x) = |x^{(1)}| - |x^{(2)}| = 0 \Big\}.$$

Как было указано в начале параграфа, квазидифференциал функции f в точке $\overline{x} = 0$ имеет вид $\mathscr{D}F(0) = [\operatorname{co}\{(\pm 1, 0)^T\}, \operatorname{co}\{(0, \pm 1)^T\}]$ и $0 \in [\mathscr{D}f(0)]^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x^{(1)}|, |x^{(2)}|\} \leqslant 1\}$, т. е. УРМФ в терминах квазидифференциалов не выполняется в точке $\overline{x}$. Тем не менее, теорема 1.2.6 позволяет вычислить контингентный конус $T_M(0)$ целиком. Действительно, обозначим $x^*_{\pm} = (\pm 1, 0)^T$ и $y^*_{\pm} = (0, \pm 1)^T$. Ясно, что $0 \notin \underline{\partial} f(0) + y^*_{\pm}$ и $0 \notin \overline{\partial} f(0) + x^*_{\pm}$. Отсюда, воспользовавшись следствием 1.2.7, получаем, что $K_i \subset T_M(0)$, $i \in 1\colon 4$, где

$$\begin{aligned}
K_1 &= \Big\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; s(\underline{\partial} f(0) + y^*_+, v) \leqslant 0,\ s(-x^*_+ - \overline{\partial} f(0), v) \leqslant 0 \Big\} = \\
&= \big\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid |v^{(1)}| + v^{(2)} \leqslant 0,\ -v^{(1)} + |v^{(2)}| \leqslant 0 \big\} = \big\{ (t, -t)^T \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; t \geqslant 0 \big\}, \\
K_2 &= \Big\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; s(\underline{\partial} f(0) + y^*_+, v) \leqslant 0,\ s(-x^*_- - \overline{\partial} f(0), v) \leqslant 0 \Big\} = \\
&= \big\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid |v^{(1)}| + v^{(2)} \leqslant 0,\ v^{(1)} + |v^{(2)}| \leqslant 0 \big\} = \big\{ (-t, -t)^T \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; t \geqslant 0 \big\}, \\
K_3 &= \Big\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; s(\underline{\partial} f(0) + y^*_-, v) \leqslant 0,\ s(-x^*_+ - \overline{\partial} f(0), v) \leqslant 0 \Big\} = \\
&= \big\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid |v^{(1)}| - v^{(2)} \leqslant 0,\ -v^{(1)} + |v^{(2)}| \leqslant 0 \big\} = \big\{ (t, t)^T \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; t \geqslant 0 \big\}, \\
K_4 &= \Big\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; s(\underline{\partial} f(0) + y^*_-, v) \leqslant 0,\ s(-x^*_- - \overline{\partial} f(0), v) \leqslant 0 \Big\} = \\
&= \big\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid |v^{(1)}| - v^{(2)} \leqslant 0,\ v^{(1)} + |v^{(2)}| \leqslant 0 \big\} = \big\{ (-t, t)^T \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; t \geqslant 0 \big\}.
\end{aligned}$$

Заметим, что $T_M(0) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v^{(1)}| - |v^{(2)}| = 0\} = \bigcup\limits_{i=1}^{4} K_i$.

1.2.6 Необходимые условия экстремума для негладких задач нелинейного программирования

Воспользуемся результатами двух предыдущих параграфов, чтобы получить необходимые условия экстремума для негладких задач нелинейного программирования в терминах квазидифференциалов. Рассмотрим следующую экстремальную задачу

$$f_0(x) \to \min, \quad f_j(x) = 0, \quad j \in J, \quad g_i(x) \leqslant 0, \quad i \in I, \tag{1.69}$$

где $f_0, f_j, g_i \colon X \to \mathbb{R}$ заданные функции, $J = \{1, \ldots, \ell\}$ и $I = \{1, \ldots, m\}$. Напомним, что $I(x) = \{i \in I \mid g_i(x) = 0\}$.

Сначала мы воспользуемся достаточными условиями метрической регулярности из теоремы 1.2.5, чтобы получить более сильные условия экстремума для задачи (1.69). Затем мы воспользуемся описанием выпуклых подконусов контингентного конуса к допустимому множеству задачи (1.69) из теоремы 1.2.6, чтобы получить несколько более слабые условия экстремума, но при гораздо менее ограничительных предположениях.

Введём функцию $\varphi(\cdot) = \sum_{j=1}^{\ell} |f_j(\cdot)| + \sum_{i=1}^{m} \max\{g_i(\cdot), 0\}$ и обозначим ℓ_1-штрафную функцию для задачи (1.69) через $\Psi_c(\cdot) = f_0(\cdot) + c\varphi(\cdot)$, $c \geqslant 0$. Заметим, что если функции f_0, f_j и g_i квазидифференцируемы, то функция Ψ_c также квазидифференцируема, поскольку множество квазидифференцируемых функций является векторной решёткой (см. [37]).

Обозначим через Ω допустимое множество задачи (1.69). Заметим, что по определению $\Omega = \{x \in X \mid \varphi(x) = 0\}$. Пусть $\overline{x}$ — точка локального минимума в задаче (1.69). Напомним, что если функция f_0 удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $\overline{x}$ и существует $\tau > 0$ такое, что $\varphi(x) \geqslant \tau \operatorname{dist}(x, \Omega)$ для всех x из окрестности точки $\overline{x}$, то штрафная функция Ψ_c является *локально точной* в этой точке, т. е. существуют окрестность U точки $\overline{x}$ и $c_* \geqslant 0$ такие, что $\Psi_c(x) \geqslant \Psi_c(\overline{x})$ для всех $x \in U$ и $c \geqslant c_*$ (см. теорему 4.1.5).

Если штрафная функция Ψ_c является локально точной в точке $\overline{x}$, то по определению $\overline{x}$ — точка безусловного локального минимума функции Ψ_c для всех достаточно больших $c \geqslant 0$. Поэтому, применяя стандартные необходимые условия минимума в терминах квазидифференциалов к функции Ψ_c, можно получить необходимые условия минимума для задачи (1.69).

Теорема 1.2.7. *Пусть $\overline{x}$ — точка локального минимума в задаче* (1.69), *функция f_0 удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки $\overline{x}$, а функции f_j, $j \in J$, и g_i, $i \in I$, непрерывны. Предположим также, что функции f_0 и g_i, $i \notin I(\overline{x})$, квазидифференцируемы в точке $\overline{x}$, функции f_j, $j \in J$, и g_i, $i \in I(\overline{x})$, квазидифференцируемы в некоторой окрестности этой точки и существуют квазидифференциальные отображения $\mathscr{D} f_j(\cdot)$, $j \in J$, и $\mathscr{D} g_i(\cdot)$, $i \in I(\overline{x})$, определённые в некоторой окрестности точки $\overline{x}$ и метрически пн. св. в этой точке. Пусть, наконец, в точке $\overline{x}$ выполняется УРМФ в терминах квазидифференциалов. Тогда существует $c_* \geqslant 0$ такое, что для всех $c \geqslant c_*$ справедливо включение*

$$0 \in \underline{\partial} \Psi_c(\overline{x}) + y^* \quad \forall y^* \in \overline{\partial} \Psi_c(\overline{x}), \tag{1.70}$$

где $\mathscr{D} \Psi_c(\overline{x}) = [\underline{\partial} \Psi_c(\overline{x}), \overline{\partial} \Psi_c(\overline{x})]$ — произвольный квазидифференциал штрафной функции Ψ_c в точке $\overline{x}$. Более того, для всех $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$, $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, и $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I$, существуют $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j, \lambda_i \geqslant 0$ такие, что $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$ для всех $i \in I$ и справедливо включение

$$0 \in \underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^* + \sum_{j=1}^{\ell} \underline{\mu}_j \Big(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^* \Big) - \sum_{j=1}^{\ell} \overline{\mu}_j \Big(x_j^* + \overline{\partial} f_j(\overline{x}) \Big) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \Big). \tag{1.71}$$

Кроме того, можно выбрать $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j$ и λ_i таким образом, что для всех $i \in I$ и $j \in J$ будет

$\max\{\underline{\mu}_j + \overline{\mu}_j, \lambda_i\} \leqslant c_*$, *то есть множители* $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j$ *и* λ_i *ограничены для всех* $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$, $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, *и* $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I$.

Доказательство. Покажем сначала, что в предположениях теоремы существует $\tau > 0$ такое, что $\varphi(x) \geqslant \tau \operatorname{dist}(x, \Omega)$ для всех x из некоторой окрестности точки $\overline{x}$. Действительно, предположим, что пространство $\mathbb{R}^\ell$ наделено евлкидовой нормой. Тогда, как нетрудно видеть, в точке $\overline{x}$ выполнены все предположения теоремы 1.2.5 и поэтому многозначное отображение $H \colon X \to \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$, $H(x) = \prod_{j=1}^{\ell} \{f_j(x)\} \times \prod_{i=1}^{m} [g_i(x), +\infty)$ является метрически регулярным вблизи точки $(\overline{x}, (0_\ell, 0_m))$. По определению метрической регулярности отсюда следует, что существуют $K > 0$ и окрестность U точки $\overline{x}$ такие, что

$$\operatorname{dist}(x, \Omega) = \operatorname{dist}\big(x, H^{-1}(0_\ell, 0_m)\big) \leqslant K \operatorname{dist}(0_{\ell+m}, H(x)) \leqslant K\varphi(x)$$

для всех $x \in U$, что и требовалось доказать.

Перейдём к доказательству условий экстремума. В предположениях теоремы штрафная функция Ψ_c является локально точной в точке $\overline{x}$ по теореме 4.1.5. Значит, существует $c_* \geqslant 0$ такое, что для всех $c \geqslant c_*$ точка $\overline{x}$ является точкой локального минимума функции Ψ_c. Как было замечено выше, штрафная функция Ψ_c квазидифференцируема в точке $\overline{x}$. Поэтому, воспользовавшись необходимыми условиями минимума в терминах кодифференциалов (предложение 1.2.2) и теоремой 1.2.1, получим, что для всех $c \geqslant c_*$ и для любого квазидифференциала $\mathscr{D}\Psi_c(\overline{x})$ будет $0 \in \underline{\partial}\Psi_c(\overline{x}) + y^*$ для всех $y^* \in \overline{\partial}\Psi_c(\overline{x})$, т. е. выполнено условие (1.70).

Для того чтобы доказать условие оптимальности (1.71) заметим, что по предложению 1.2.2 для всех $c \geqslant c_*$ и $h \in X$ будет

$$\Psi_c'(\overline{x}, h) = f_0'(\overline{x}, h) + c\Big(\sum_{j=1}^{\ell} \big|f_j'(\overline{x}, h)\big| + \sum_{i \in I(\overline{x})} \max\big\{g_j'(\overline{x}, h), 0\big\}\Big) \geqslant 0$$

(здесь мы воспользовались стандартными правилами исчисления производных по направлениям; см., например, [37, параграф. I.3]). Пусть y_0^*, x_j^*, y_j^*, z_i^* — векторы из формулировки теоремы. Введём функцию

$$\xi_c(h) = s(\underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^*, h) + c\sum_{j=1}^{\ell} \max\Big\{s(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, h), s(-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}), h)\Big\} + \\ + c\sum_{i \in I(\overline{x})} \max\Big\{s(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, h), 0\Big\} \quad \forall h \in X.$$

По определению квазидифференциала будет $\xi_c(h) \geqslant \Psi_c'(x, h) \geqslant 0$ для всех $c \geqslant c_*$ и $h \in X$. Кроме того, $\xi_c(0) = 0$. Поэтому 0 является точкой глобального минимума выпуклой функции

ξ_c, откуда следует, что $0 \in \partial\xi_c(0)$ для всех $c \geqslant c_*$, где $\partial\xi_c(0)$ — субдифференциал функции ξ_c в точке 0 в смысле выпуклого анализа. Воспользовавшись стандартными правилами исчисления субдифференциалов выпуклых функций (см., например, [45, 56]), получим, что

$$0 \in \partial\xi_c(0) = \underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^* + c\sum_{j=1}^{\ell} \operatorname{co}\Big\{\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, -x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x})\Big\} + c\sum_{i \in I(\overline{x})} \operatorname{co}\Big\{\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, 0\Big\}$$

для всех $c \geqslant c_*$. Следовательно, для всех $c \geqslant c_*$ существуют $\alpha_j \in [0,1]$, $j \in J$, и $\beta_i \in [0,1]$, $i \in I(\overline{x})$, такие, что

$$0 \in \underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^* + c\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j\Big(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*\Big) - c\sum_{j=1}^{\ell}(1-\alpha_j)\Big(x_j^* + \overline{\partial} f_j(\overline{x})\Big) + c\sum_{i=1}^{m} \beta_i\Big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*\Big).$$

Положим $\underline{\mu}_j = c\alpha_j$ и $\overline{\mu}_j = c(1-\alpha_j)$ для всех $j \in J$, $\lambda_i = c\beta_i$, если $i \in I(\overline{x})$, и $\lambda_i = 0$ если $i \in I \setminus I(\overline{x})$. Тогда $\lambda_i g_i(x) = 0$ для всех $i \in I$ и выполняется условие (1.71). Остаётся заметить, что, полагая $c = c_*$, мы получим требуемую оценку на множители $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j$ и λ_i. □

Замечание 1.2.9. (i) Вместо выполнения УРМФ в терминах квазидифференциалов, в предыдущей теореме достаточно предполагать, что существуют $\tau > 0$ и окрестность U точки $\overline{x}$ такие, что $\varphi(x) \geqslant \tau \operatorname{dist}(x, \Omega)$ для всех $x \in \Omega$. Более того, в данном случае предположение о существовании метрически пн. св. квазидифференциальных отображений также можно отбросить и достаточно предполагать лишь, что все рассматриваемые функции квазидифференцируемы в точке $\overline{x}$.

(ii) Следует заметить, что в условиях экстремумах (1.71) каждому ограничению-равенству $f_j(x) = 0$ соответствуют *два* множителя Лагранжа: $\underline{\mu}_i$ и $\overline{\mu}_i$. Более того, каждое ограничение-равенство входит в это условие как два ограничения неравенства: $f_j(x) \geqslant 0$ и $f_j(x) \leqslant 0$. Данный факт, являющийся отличительной особенностью условий экстремума для негладких задач математического программирования в терминах квазидифференциалов, связан с тем, что ограничения-неравенства $g(x) \leqslant 0$ и $h(x) \geqslant 0$ входят в условия экстремума в терминах квазидифференциалов различным образом, в то время как обычно при смене знака неравенства меняется лишь знак соответствующего множителя Лагранжа. Наконец, заметим, что множители Лагранжа λ_i, $\underline{\mu}_i$ и $\overline{\mu}_i$ очевидно зависят от выбора элементов квазидифференциалов x_j^*, y_j^* и z_i^* и, в общем случае, не могут быть выбраны одними и теми же для всех таких элементов (см. [314, 316, 408]).

(iii) Условия экстремума для задач нелинейного программирования в терминах квазидифференциалов, схожие с условием (1.70), но не эквивалентные ему, были впервые получены А. Шапиро в работах [367,368] в конечномерном случае (можно показать, что условия Шапиро являются следствием условия (1.70), но обратная импликация, в общем случае, не верна).

Однако, в работах [367,368] использовалось другое условие регулярности ограничений, основанное на предположениях о т. н. *контактных точках* множеств $\underline{\partial} f_j(\overline{x})$ и $\overline{\partial} f_j(\overline{x})$, т. е. таких векторах $x^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$ и $y^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, что $s(\underline{\partial} f_j(\overline{x}), h) = \langle x^*, h \rangle$ и $s(\overline{\partial} f_j(\overline{x}), h) = \langle y^*, h \rangle$ для заданного вектора $h \in X$. Заметим, что для проверки условия регулярности из [367,368] необходимо вычислить контактные точки множеств $\underline{\partial} f_j(\overline{x})$ и $\overline{\partial} f_j(\overline{x})$ для всех h из единичной сферы, что является невозможным в нетривиальных случаях. В свою очередь, условия экстремума, близкие к условию (1.71), но не эквивалентные ему, впервые были получены Л.Н. Поляковой в работе [348] в случае, когда пространство X конечномерно, ограничения-неравенства отсутствуют, $\ell = 1$ и выполняется равенство $T_\Omega(\overline{x}) = \{h \in X \mid f_1'(\overline{x}, h) = 0\}$. Можно показать, что условия экстремума из [348] являются следствием условия (1.71), но обратная импликация, в общем случае, не верна. Условия экстремума, аналогичные условиям из [348], для более общей задачи минимизации функции $f_0(x)$ при ограничении $F(x) = 0$, где отображение $F \colon X \to Y$ скалярно квазидифференцируемо, были получены А. Удерцо [71, 398], в случае, когда пространство Y допускает гладкую перенормировку и отображение F удовлетворяет некоторым условиям, гарантирующим его локальную метрическую регулярность. Наконец, близкие условия экстремума для задачи (1.69) в терминах ε-квазидифференциалов были получены В.В. Гороховиком [15, параграф 14]. Отметим, что условие экстремума (1.71) соответствует случаю, когда в Теоремах 14.5 и 14.7 из [15] $\varepsilon = 0$ и операция замыкания в правой части условий оптимальности может быть отброшена.

На первый взгляд может показать, что условие экстремума (1.70) является более сильным, чем условие (1.71). Покажем, что эти условия эквивалентны и, более того, не зависят от выбора соответствующих квазидифференциалов (ср. [314, 316]).

Предложение 1.2.10. *Пусть функции f_0, f_j, $j \in J$, и g_i, $i \in I$, квазидифференцируемы в допустимой точке $\overline{x}$ задачи* (1.69). *Тогда условие* (1.70) *выполняется для некоторого $c \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда для всех $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$, $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, и $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I$, существуют $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j, \lambda_i \geqslant 0$, удовлетворяющие условию* (1.71) *и условиям $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$ и $\max\{\underline{\mu}_j + \overline{\mu}_j, \lambda_i\} \leqslant c$ для всех $i \in I$ и $j \in J$. Более того, условия* (1.70) *и* (1.71) *не зависят от выбора соответствующих квазидифференциалов, т. е. если они выполнены для одного выбора квазидифференциалов, то они выполнены и для любого другого выбора квазидифференциалов соответствующих функций.*

Доказательство. Из предложения 1.2.2 и теоремы 1.2.1 следует, что условие (1.70) выполняется для некоторого $c \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\Psi_c'(\overline{x}, h) \geqslant 0$ для всех $h \in X$. Условие экстремума $\Psi_c'(\overline{x}, \cdot) \geqslant 0$ очевидно не зависит от выбора квазидифференциала функции Ψ_c, а потому условие экстремума (1.70) также не зависит от выбора квазидифференциала функции Ψ_c.

Покажем теперь, что условия (1.70) и (1.71) эквивалентны. Действительно, пусть условие (1.70) выполняется для некоторого квазидифференциала функции Ψ_c в точке $\overline{x}$ и для некоторого $c \geqslant 0$. Тогда $\Psi'_c(x, h) \geqslant 0$ для всех $h \in X$ и, рассуждая как и при доказательстве теоремы 1.2.7, получим, что для всех $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$, $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, и $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I$, существуют $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j, \lambda_i \geqslant 0$ такие, что выполняется условие (1.71), а также для всех $i \in I$ и $j \in J$ будет $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$ и $\max\{\underline{\mu}_j + \overline{\mu}_j, \lambda_i\} \leqslant c$. Заметим, что импликация (1.70) $\implies$ (1.71) справедлива для любых квазидифференциалов функций f_0, f_j и g_i.

Докажем обратную импликацию. Выберем некоторые квазидифференциалы функций f_0, f_j и g_i и предположим, что существует $c_0 \geqslant 0$ такое, что для всех $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$, $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, и $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I$, найдутся $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j, \lambda_i \geqslant 0$, удовлетворяющие условию (1.71), и такие, что $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$ и $\max\{\underline{\mu}_j + \overline{\mu}_j, \lambda_i\} \leqslant c_0$ для всех $i \in I$ и $j \in J$.

Рассуждая от противного, предположим, что условие экстремума (1.70) не выполняется при $c = c_0$. Тогда существует $h_0 \in X$ такое, что $\Psi'_{c_0}(\overline{x}, h_0) < 0$. Воспользовавшись стандартными правилами исчисления производных по направлениям (см., например, [37, параграф I.3]), получим, что

$$\Psi'_{c_0}(\overline{x}, h_0) = f'_0(\overline{x}, h_0) + c_0\Big(\sum_{j=1}^{\ell} \max\{f'_j(\overline{x}, h_0), -f'_j(\overline{x}, h_0)\} + \sum_{i \in I(\overline{x})} \max\big\{g'_j(\overline{x}, h_0), 0\big\}\Big) < 0. \quad (1.72)$$

По определению квазидифференциала существуют $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$, $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, и $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$, такие, что

$$f'_0(\overline{x}, h_0) = \max_{x^* \in \underline{\partial} f_0(\overline{x})} \langle x^*, h_0 \rangle + \langle y_0^*, h_0 \rangle, \quad f'_j(\overline{x}, h_0) = \max_{x^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})} \langle x^*, h_0 \rangle + \langle y_j^*, h_0 \rangle,$$

$$f'_j(\overline{x}, h_0) = \langle x_j^*, h_0 \rangle + \min_{y^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})} \langle y^*, h_0 \rangle, \quad g'_i(\overline{x}, h_0) = \max_{x^* \in \underline{\partial} g_i(\overline{x})} \langle x^*, h_0 \rangle + \langle z_i^*, h_0 \rangle$$

для всех $j \in J$ и $i \in I(\overline{x})$. Отсюда и из (1.72) следует, что $\xi_{c_0}(h_0) < 0$, где функция ξ_c определена как в доказательстве теоремы 1.2.7.

С другой стороны, из справедливости условия (1.71) для некоторых $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j, \lambda_i \geqslant 0$, удовлетворяющих условиям $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$ и $\max\{\underline{\mu}_j + \overline{\mu}_j, \lambda_i\} \leqslant c_0$, следует, что $0 \in \partial \xi_{c_0}(0)$ (см. доказательство теоремы 1.2.7). Поэтому $\xi_{c_0}(h) \geqslant \xi_{c_0}(0) = 0$ для всех $h \in X$, что противоречит неравенству $\xi_{c_0}(h_0) < 0$. Таким образом, условие (1.70) выполняется при $c = c_0$.

Докажем, наконец, независимость условия (1.71) от выбора соответствующих квазидифференциалов. Действительно, если условие (1.71) выполняется для одного выбора квазидифференциалов функций f_0, f_j и g_i, то, как мы доказали выше, выполняется условие экстремума (1.70). Отсюда и из справедливости импликации (1.70) $\Longrightarrow$ (1.71) для любого выбора квазидифференциалов функций f_0, f_j и g_i следует, что условие (1.71) не зависит от выбора квазидифференциалов функций f_0, f_j и g_i. $\square$

Воспользуемся теперь теоремой 1.2.6, чтобы получить необходимые условия экстремума для задачи (1.69) при значительно менее ограничительных предположениях, чем в теореме 1.2.7.

Теорема 1.2.8. *Пусть $\overline{x}$ — точка локального минимума в задаче* (1.69), *функция f_0 квазидифференцируема и дифференцируема по направлениям в смысле Адамара в точке $\overline{x}$, функции f_j, $j \in J$, непрерывны в некоторой окрестности точки $\overline{x}$ и квазидифференцируемы в этой точке равномерно относительно конечномерных подпространств, функции g_i, $i \notin I(\overline{x})$, пн. св. и квазидифференцируемы в точке $\overline{x}$, а функции g_i, $i \in I(\overline{x})$ квазидифференцируемы в точке $\overline{x}$ равномерно относительно конечномерных подпространств. Предположим, что векторы $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, и $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$, удовлетворяют условиям 1–3 теоремы 1.2.6. Тогда для всех $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$ и $y_j^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \notin I(\overline{x})$, существуют $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in I$, такие, что $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$ для всех $i \in I$ и выполняется включение*

$$0 \in \underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^* + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*\big) + \mathrm{cl}^* \operatorname{cone}\big\{C_j \mid j \in J\big\}, \tag{1.73}$$

где $C_j = (\underline{\partial} f_j(\overline{x} + y_j^*) \cup (-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}))$.

Доказательство. Воспользовавшись определениями контингентного конуса и производной по направлениям в смысле Адамара, нетрудно проверить, что $f_0'(\overline{x}, v) \geqslant 0$ для всех $v \in T_\Omega(\overline{x})$, поскольку $\overline{x}$ — точка локального минимума в задаче (1.69). Отсюда, в частности, следует, что $f_0'(\overline{x}, v) \geqslant 0$ для всех $v \in K$, где

$$K = \Big\{ v \in X \;\Big|\; s\big(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, v\big) \leqslant 0,\ s\big(-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}), v\big) \leqslant 0,\ \ j \in J,$$
$$s\big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, v\big) \leqslant 0,\ \ i \in I(\overline{x}) \Big\},$$

поскольку по теореме 1.2.6 выполняется включение $K \subseteq T_\Omega(\overline{x})$.

Выберем произвольное $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$. По определению квазидифференциала

$$p(v) := s\big(\underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^*, v\big) \geqslant f_0'(\overline{x}, v) \quad \forall v \in X.$$

Поэтому $p(v) \geqslant 0$ для всех $v \in K$, откуда следует, что 0 — точка глобального минимума в задаче выпуклого программирования

$$p(v) \to \min, \quad q_i(v) \leqslant 0, \quad i \in I(\overline{x}), \quad v \in H, \tag{1.74}$$

где $q_i(v) = s(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, v)$ и

$$H = \Big\{ v \in X \;\Big|\; s\big(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, v\big) \leqslant 0, \;\; s\big(- x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}), v\big) \leqslant 0, \;\; j \in J \Big\}.$$

Конус H очевидно является выпуклым и замкнутым. По предположению 3 теоремы 1.2.6 существует $v_0 \in H$ такое, что $q_i(v_0) < 0$ для всех $i \in I(\overline{x})$, т. е. для задачи (1.74) выполняется условие Слейтера. Следовательно, по необходимым и достаточным условиям экстремума для задач выпуклого программирования (см., например, [45, теорема 1.1.2′]) существуют $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in I(\overline{x})$, такие, что

$$0 \in \partial p(0) + \sum_{i \in I(\overline{x})} \lambda_i \partial q_j(0) + H^o \tag{1.75}$$

где $H^o = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, v \rangle \leqslant 0 \; \forall v \in H\}$ — поляра конуса H, а ∂, как и ранее, обозначает субдифференциал в смысле выпуклого анализа. Покажем, что справедливо равенство $H^o = \operatorname{cl}^* \operatorname{cone}\big\{C_j \mid j \in J\big\}$, где $C_j = (\underline{\partial} f_j(\overline{x} + y_j^*) \cup (-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}))$. Действительно, включение “$\supseteq$” следует непосредственно из определения конуса H. Рассуждая от противного, предположим, что противоположное включение не выполнено, то есть существует $x^* \in H^o$ такое, что $x^* \notin \operatorname{cl}^* \operatorname{cone}\{C_j \mid j \in J\}$. Тогда, воспользовавшись теоремой об отделимости в пространстве (X^*, w^*), получим, что существует $v \in X$ такое, что $\langle x^*, v \rangle > 0$ и $\langle y^*, v \rangle \leqslant 0$ для всех $y^* \in \operatorname{cl}^* \operatorname{cone}\{C_j \mid j \in J\}$. Из второго неравенства и определения множества H следует, что $v \in H$. Однако, включение $v \in H$ невозможно, поскольку $x^* \in H^o$ и $\langle x^*, v \rangle > 0$. Таким образом, $H^o = \operatorname{cl}^* \operatorname{cone}\big\{C_j \mid j \in J\big\}$. Отсюда, вычисляя субдифференциалы $\partial p(0)$ и $\partial q_j(0)$ с помощью теореме о субдифференциале супремума произвольного семейства выпуклых функций (см. [45, теорема 4.2.3]) и полагая $\lambda_i = 0$ для всех $i \notin I(\overline{x})$, получим, что условие экстремума (1.73) непосредственно вытекает из условия (1.75). □

Следствие 1.2.9. *Предположим, что выполнены все условия предыдущей теоремы и конус* $\operatorname{cone}\{C_j \mid j \in J\}$ *замкнут в слабой* топологии. Тогда для всех* $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$ *и* $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \notin I(\overline{x})$, *существуют* $\underline{\mu}_j \geqslant 0$, $\overline{\mu}_j \geqslant 0$, $j \in J$, *и* $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in I$, *такие, что* $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$ *для всех* $i \in I$ *и*

$$0 \in \underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^* + \sum_{j=1}^{\ell} \underline{\mu}_j \big(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*\big) - \sum_{j=1}^{\ell} \overline{\mu}_j \big(x_j^* + \overline{\partial} f_j(\overline{x})\big) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*\big). \tag{1.76}$$

Доказательство. По теореме 1.2.8 существуют $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in I$, и $x^* \in \underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^* + \sum_{i \in I} \lambda_i (\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*)$ такие, что $-x^* \in \operatorname{cone}\{C_j \mid j \in J\}$ и $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$ для всех $i \in I$. По определениям множеств C_j и выпуклой конической оболочки существуют $\underline{\mu}_j \geqslant 0$ и $\overline{\mu}_j \geqslant 0$, $j \in J$, такие, что

$$-x^* \in \sum_{j=1}^{\ell} \underline{\mu}_j \big(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*\big) - \sum_{j=1}^{\ell} \overline{\mu}_j \big(x_j^* + \overline{\partial} f_j(\overline{x})\big),$$

т. е. выполняется условие (1.76). □

Укажем простое достаточное условие слабой* замкнутости конуса $\operatorname{cone}\{C_j \mid j \in J\}$, выполняющееся в большинстве конечномерных приложений. Для этого напомним, что функция $f \colon X \to \mathbb{R}$ называется *полиэдрально квазидифференцируемой* в точке x, если она квазидифференцируема в этой точке и существует квазидифференциал функции f в точке x, такой, что множества $\underline{\partial} f(x)$ и $\overline{\partial} f(x)$ являются выпуклыми многогранниками или, что эквивалентно, если производная по направлениям $f'(x, \cdot)$ является кусочно-аффинной функцией (см. [18,239]). Квазидифференциал, являющийся парой выпуклых многогранников, мы будем называть *полиэдральным квазидифференциалом*.

Если в следствии 1.2.9 функции f_j, $j \in J$, полиэдрально квазидифференцируемы в точке $\overline{x}$ и множества $\underline{\partial} f_j(\overline{x})$ и $\overline{\partial} f_j(\overline{x})$ являются выпуклыми многогранниками, то конус $\operatorname{cone}\{C_j \mid j \in J\}$ является выпуклой конической оболочкой конечного числа выпуклых многогранников. Эти многогранники очевидно можно заменить на их крайние точки. Таким образом, в рассматриваемом случае конус $\operatorname{cone}\{C_j \mid j \in J\}$ является конечнопорождённым, т. е. является выпуклой конической оболочкой конечного числа точек. Как хорошо известно, конечно порождённый конус в локально выпуклом пространстве является замкнутым (см., например, [108, предложение 2.41]). Таким образом, если ограничения-равенства $f_j(x) = 0$ являются полиэдрально квазидифференцируемыми и в условиях экстремума используются полиэдральные квазидифференциалы этих функций, то конус $\operatorname{cone}\{C_j \mid j \in J\}$ слабо* замкнут и справедливо условие экстремума (1.76).

В случае, когда ограничения-равенства отсутствуют, условия экстремума для задачи (1.69) можно получить при ещё менее ограничительных предположениях, чем в теореме 1.2.8.

Теорема 1.2.9. *Пусть $\overline{x} \in X$ — точка локального минимума в задаче*

$$f_0(x) \to \min, \quad g_i(x) \leqslant 0, \quad i \in I. \tag{1.77}$$

Предположим, что функции f_0 и g_i, $i \in I$, квазидифференцируемы в точке $\overline{x}$, а векторы $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I$, удовлетворяют условию $0 \notin \operatorname{co}\{\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \mid i \in I(\overline{x})\}$. Тогда для всех $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$ существуют $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in I$, такие, что

$$0 \in \underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^* + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*\big), \quad \lambda_i g_i(\overline{x}) = 0 \quad \forall i \in I. \tag{1.78}$$

Доказательство. Введём функцию $h(\cdot) = \max_{i \in I}\{f_0(\cdot) - f_0(\overline{x}), g_i(\cdot)\}$. В предположения теоремы функция h дифференцируема по направлениям в точке $\overline{x}$ и согласно стандартным

правилами исчисления производных по направлениям (см., например, [37]) справедливо равенство
$$h'(x,v) = \max_{i \in I(\overline{x})} \{ f_0'(\overline{x}, v), g_i'(\overline{x}, v) \} \quad \forall v \in X. \tag{1.79}$$
Кроме того, поскольку $\overline{x}$ — точка локального минимума в задаче (1.77), то, как нетрудно видеть, $\overline{x}$ — точка локального минимума функции h. Поэтому $h'(\overline{x}, v) \geqslant 0$ для всех $v \in X$.

Зафиксируем произвольное $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$. По определению квазидифференциала $f_0'(x,v) \leqslant s(\underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^*, v)$ и $g_i'(x,v) \leqslant s(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, v)$ для всех $v \in X$ и $i \in I(\overline{x})$. Отсюда и из неравенства (1.79) следует, что
$$\eta(v) = \max_{i \in I(\overline{x})} \big\{ s(\underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^*, v), s(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, v) \big\} \geqslant h'(\overline{x}, v) \geqslant 0$$
для всех $v \in X$, т. е. 0 — точка глобального минимума функции η. Следовательно $0 \in \partial \eta(0)$. Применяя теорему о субдифференциале супремума произвольного семейства выпуклых функций [45, теорема 4.2.3], получим, что $\partial \eta(0) = \operatorname{co}_{i \in I(\overline{x})} \{ \underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^*, \underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \}$, откуда следует, что существуют $\alpha_0 \geqslant 0$ и $\alpha_j \geqslant 0$, $i \in I(\overline{x})$, такие, что $\alpha_0 + \sum_{i \in I(\overline{x})} \alpha_j = 1$, и
$$0 \in \alpha_0 \big(\underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^* \big) + \sum_{i \in I(\overline{x})} \alpha_j \big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \big).$$
Заметим, что если $\alpha_0 = 0$, то $0 \in \operatorname{co}\{ \underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \mid i \in I(\overline{x}) \}$, что противоречит нашему предположению. Значит, $\alpha_0 \neq 0$. Поделив на α_0 и обозначив $\lambda_i = \alpha_i / \alpha_0$ для всех $i \in I(\overline{x})$ и $\lambda_i = 0$ для всех $i \notin I(\overline{x})$, получим, что справедливо включение (1.78). □

Замечание 1.2.10. Различные условия экстремума и условия регулярности в терминах квазидифференциалов для задач оптимизации с ограничениями-неравенствами изучались в работах [15, 30, 34, 37, 295, 296, 316, 409]. Можно проверить, что ни одно из условий регулярности в терминах квазидифференциалов, изучавшихся в данных работах, не выполняется для ограничения $g(x) = \min\{x, x^3\} \leqslant 0$ в точке $\overline{x} = 0$. Более того, условие невырожденности $\operatorname{cl}\{ v \in X \mid g'(\overline{x}, v) < 0 \} = \{ v \in X \mid g'(\overline{x}, v) \leqslant 0 \}$ (см. монографии [15, 30, 37]) также не выполняется в точке $\overline{x}$. С другой стороны, поскольку квазидифференциал функции g в точке $\overline{x}$ имеет вид $\mathscr{D} g(\overline{x}) = [\{0\}, [0, 1]]$, для вектора $z^* = 1 \in \overline{\partial} g(\overline{x})$ выполняется условие регулярности $0 \notin \underline{\partial} g(\overline{x}) + z^*$ из теоремы 1.2.9.

Судя по всему, в негладких задачах математического программирования условия регулярности ограничений должны зависеть от отдельных элементов квазидифференциалов, как и множители Лагранжа. Насколько известно автору, такие условия регулярности (в том числе условие $0 \notin \operatorname{co}\{ \underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \mid i \in I(\overline{x}) \}$ из теоремы 1.2.9) ранее нигде не рассматривались. См. работу автора [198] по поводу более подробного сравнения различных условий регулярности в терминах квазидифференциалов.

Приведём простой пример, иллюстрирующий условия экстремума, полученные в данном параграфе. Этот пример показывает, что в некоторых случаях условия оптимальности в терминах квазидифференциалов оказываются лучше, чем условия оптимальности в терминах различных субдифференциалов.

Пример 1.2.9. Пусть $X = \mathbb{R}^2$. Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$f_0(x) = -x^{(1)} + x^{(2)} \to \min, \quad f_1(x) = |x^{(1)}| - |x^{(2)}| = 0. \tag{1.80}$$

Положим $\overline{x} = 0_2$. Заметим, что $\overline{x}$ не является точкой локального минимума в задаче (1.80), поскольку для любого $t > 0$ точка $x(t) = (t, -t)$ является допустимой для данной задачи и $f_0(x(t)) = -2t < 0 = f_0(\overline{x})$. Тем не менее, покажем, что условия экстремума в терминах различных субдифференциалов не позволяют проверить неоптимальность точки $\overline{x}$.

Рассмотрим сначала условия экстремума в терминах субдифференциала Мишеля-Пено [264]. Обозначим через $L(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda f_1(x)$ функцию Лагранжа для задачи (1.80). Для всех $h \in \mathbb{R}^2$ производная Мишеля-Пено $L(\cdot, \lambda)$ в точке $\overline{x}$ имеет вид

$$d_{MP}L(\cdot,\lambda)[\overline{x}, h] = \sup_{e \in \mathbb{R}^2} \limsup_{t \to +0} \frac{L(x + t(h+e)) - L(x+te)}{t}$$
$$= \sup_{e \in \mathbb{R}^2} \Big\{ -h^{(1)} + h^{(2)} + \lambda\Big(|h^{(1)} + e^{(1)}| - |e^{(1)}| - |h^{(2)} + e^{(2)}| + |e^{(2)}|\Big)\Big\} = -h^{(1)} + h^{(2)} + |\lambda|\Big(|h^{(1)}| + |h^{(2)}|\Big).$$

Поэтому субдифференциал Мишеля-Пено функции $L(\cdot, \lambda)$ в точке $\overline{x}$ имеет вид

$$\partial_{MP}L(\cdot,\lambda)(\overline{x}) = \partial\varphi(0_2) = \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} |\lambda|-1 \\ |\lambda|+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |\lambda|-1 \\ -|\lambda|+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -|\lambda|-1 \\ |\lambda|+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -|\lambda|-1 \\ -|\lambda|+1 \end{pmatrix} \right\},$$

где $\varphi(h) = d_{MP}L(\cdot,\lambda)[\overline{x}, h]$ и $\partial\varphi(0_2)$ — субдифференциал функции φ в нуле в смысле выпуклого анализа. Следовательно, для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ таких, что $|\lambda| \geqslant 1$ будет $0_2 \in \partial_{MP}L(\cdot,\lambda)(\overline{x})$, т. е. в точке $\overline{x}$ выполняется условие экстремума в терминах субдифференциала Мишеля-Пено [264]. Кроме того, нетрудно заметить, что субдифференциал Мишеля-Пено $\partial_{MP}L(\cdot,\lambda)(\overline{x})$ совпадает с субдифференциалом Кларка $\partial_{Cl}L(\cdot,\lambda)(\overline{x})$, и поэтому для любого λ, удовлетворяющего неравенству $|\lambda| \geqslant 1$, в точке $\overline{x}$ также выполнены условия экстремума в терминах субдифференциала Кларка [48, теорема 6.1.1].

Рассмотрим теперь условия экстремума в терминах субдифференциала Джеякумара-Люка. Согласно [407, пример 2.1] справедливо равенство $\partial_{JL}f_1(\overline{x}) = \{(1,-1)^T, (-1,1)^T\}$. Кроме того, $\partial_{JL}f_0(\overline{x}) = \{(-1,1)^T\}$. Следовательно, для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ такого, что $|\lambda| \geqslant 1$, справедливо включение $0_2 \in \partial_{JL}f_0(\overline{x}) + \lambda \operatorname{co} \partial_{JL}f_1(\overline{x})$, т. е. в точке $\overline{x}$ также выполняются условия экстремума в терминах субдифференциала Джеякумара-Люка [407, следствие 3.4].

Рассмотрим условия экстремума в терминах аппроксимативного субдифференциала (субдифференциала Иоффе). Для всех $x \in \mathbb{R}^2$ таких, что $x^{(1)}, x^{(2)} > 0$, справедливо равенство $L(x,1) = 0$, из которого следует, что $\partial_x^- L(x,1) = \{0_2\}$ для всех таких x, где $\partial_x^- L(x,1)$ — субдифференциал Дини функции $L(\cdot,1)$ в точке x. Поэтому, по определению субдифференциала Иоффе будет $0_2 \in \partial_a L(\cdot,1)(\overline{x}) = \limsup_{x \to \overline{x}} \partial_x^- L(x,1)$, т. е. в точке $\overline{x}$ выполняются условия экстремума в терминах субдифференциала Иоффе [260, предложение 12].

Рассмотрим, наконец, условия экстремума в терминах субдифференциала Мордуховича. Можно проверить (см. [332, с. 92–93]), что $\partial_M f_1(\overline{x}) = \operatorname{co}\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right\} \cup \operatorname{co}\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$. Поэтому $-\nabla f_0(\overline{x}) \in \partial_M f_1(\overline{x})$, т. е. в точке $\overline{x}$ также выполняются условия экстремума в терминах субдифференциала Мордуховича [333, теорема 5.19].

Покажем, однако, что в точке $\overline{x}$ не выполняются условия экстремума в терминах квазидифференциалов. Как было указано в предыдущем параграфе, квазидифференциал функции f_1 в точке $\overline{x} = 0$ имеет вид $\mathscr{D} f_1(\overline{x}) = [\operatorname{co}\{(\pm 1, 0)^T\}, \operatorname{co}\{(0, \pm 1)^T\}]$, т. е. функция f_1 полиэдрально квазидифференцируема в точке $\overline{x}$ и поэтому можно воспользоваться условиями экстремума из следствия 1.2.9. Рассуждая от противного, предположим, что эти условия выполнены. Тогда для $x_1^* = (1,0)^T \in \underline{\partial} f_1(\overline{x})$ и $y_1^* = (0,1)^T \in \overline{\partial} f_1(\overline{x})$ существуют $\underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1 \geqslant 0$ такие, что

$$0 \in \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{\mu}_1 \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} - \overline{\mu}_1 \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

или, что эквивалентно,

$$-1 - \underline{\mu}_1 - \overline{\mu}_1 \leqslant 0 \leqslant -1 + \underline{\mu}_1 - \overline{\mu}_1, \quad 1 + \underline{\mu}_1 - \overline{\mu}_1 \leqslant 0 \leqslant 1 + \underline{\mu}_1 + \overline{\mu}_1.$$

Из третьего неравенства следует, что $1 + \underline{\mu_1} \leqslant \overline{\mu}_1$, а из второго неравенства следует, что $1 + \overline{\mu}_1 \leqslant \underline{\mu}_1$. Поэтому $2 + \overline{\mu}_1 \leqslant \overline{\mu}_1$, что невозможно. Таким образом, условия экстремума из следствия 1.2.9 не выполнены.

Заметим, что $0 \notin \underline{\partial} f_1(\overline{x}) + y_1^*$ и $0 \notin \overline{\partial} f_1(\overline{x}) + x_1^*$, и поэтому в точке $\overline{x}$ выполнены условия регулярности ограничений из теоремы 1.2.6 (см. следствие 1.2.7). Значит, по следствию 1.2.9 можно заключить, что точка $\overline{x}$ не является точкой локального минимума в задаче (1.80), поскольку в ней не выполняются необходимые условия экстремума. Отметим, что условия экстремума в терминах субдифференциалов не позволяют прийти к такому же заключению.

Замечание 1.2.11. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ и «∂» обозначает некоторое субдифференциальное отображение, удовлетворяющему следующему условию: если функция $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема в окрестности последовательности точке $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$, сходящихся к некоторой точке $x \in \mathbb{R}^n$, и существует предел $v = \lim_{n \to \infty} \nabla f(x_n)$, то $v \in \partial f(x)$ (по существу, это ослабленное предположение о полунепрерывности сверху отображения $\partial f(\cdot)$). Тогда в предыдущем примере

$$0 \in \partial L(\cdot, 1)(\overline{x}), \quad 0 \in \nabla f_0(\overline{x}) + \partial f_1(\overline{x}), \tag{1.81}$$

поскольку для всех $x^{(1)}, x^{(2)} > 0$ будет $L(x, 1) = 0$, т. е. $\nabla_x L(x, 1) = 0$, и $\nabla f_1(x) = (1, -1)^T$, откуда с учётом ослабленного предположения о полунепрерывности сверху следует выполнение включений (1.81). Таким образом, в предыдущем примере неоптимальность точки $\overline{x}$ не может быть проверена с помощью условий экстремума в терминах произвольного полунепрерывного сверху/предельного субдифференциального отображения (см. [265, 343] по поводу общей теории таких субдифференциальных отображений). С другой стороны, условия экстремумах в терминах *квазидифференциалов* позволяют доказать неоптимальность точки $\overline{x}$.

1.3 Абстрактное кодифференциальное исчисление

Общая теория кодифференциалов негладких функций, изложенная в предыдущих параграфах, основана на фундаментальной теореме выпуклого анализа, утверждающей, что любую собственную замкнутую выпуклую функцию можно представить в виде супремума некоторого семейства аффинных функций. В рамках абстрактного выпуклого анализа [341, 360, 370] предлагается заменить множество аффинных функций на некоторое произвольное множество функций H и рассматривать функции, представимые в виде супремума и инфимума семейств функций из множества H. Такие функции называются *абстрактно выпуклыми* и *абстрактно вогнутыми* по отношению к множеству H или просто H-выпуклыми и H-вогнутыми функциями. В рамках теории кодифференциалов переход от выпуклых функций к абстрактно выпуклым приводит к естественному понятию абстрактной кодифференцируемости негладких функций. При этом оказывается возможным построение абстрактного кодифференциального исчисления и получение условий экстремума в терминах абстрактных кодифференциалов, обобщающих целый ряд известных результатов к негладком анализе. В этом параграфе мы кратко приведём основные идеи абстрактного кодифференциального исчисления. По поводу более подробного изложения теории абстрактно кодифференцируемых функций см. кандидатскую диссертацию [40] и статью [182] автора.

Пусть X — вещественное банахово пространство, а E — банахово K-пространство, то есть порядково полная банахова решётка с отношением порядка $\leqslant$ (см., например, [46]). Присоединим к пространству E два несобственных элемента: $+\infty$ и $-\infty$. Обозначим $\overline{E} = E \cup \{-\infty, +\infty\}$. Будем считать, что $+\infty$ — наибольший элемент, а $-\infty$ — наименьший элемент упорядоченного множества $\overline{E}$. Пусть также задано некоторое непустое множество H функций $h\colon X \to E$. Для любой функции $F\colon X \to \overline{E}$ определим $\operatorname{dom} F = \{x \in X \mid F(x) \in E\}$.

Определение 1.3.1. Функция $\Phi\colon X \to \overline{E}$ называется *абстрактно выпуклой* по отношению к множеству H (или H-*выпуклой*), если существует подмножество $V \subset H$ такое, что $\Phi(x) = \sup_{h\in V} h(x)$ для всех $x \in X$. При этом говорят, что H-выпуклая функция Φ порождается множеством V (или V является порождающим множеством функции Φ). Аналогично, функция $\Psi =\colon X \to \overline{E}$ называется *абстрактно вогнутой* по отношению к множеству H (или H-*вогнутой*), если существует подмножество $V \subset H$ такое, что $\Psi(x) = \inf_{h\in V} h(x)$ для всех $x \in X$. При этом говорят, что H-вогнутая функция Ψ порождается множеством V.

Определение 1.3.2. Пусть $U \subseteq X$ — открытое множество. Отображение $F\colon U \to E$ называется *абстрактно кодифференцируемым* по отношению к множеству H (или H-кодифференцируемым) в точке $x \in U$, если существуют H-выпуклая функция $\Phi\colon X \to \overline{E}$ и H-вогнутая функция $\Psi\colon X \to \overline{E}$ такие, что $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}\Phi \cap \operatorname{dom}\Psi)$, $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ и для любого $\Delta x \in X$ справедливо равенство

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\Big\|F(x+\alpha\Delta x) - F(x) - \Phi(\alpha\Delta x) - \Psi(\alpha\Delta x)\Big\| = 0. \tag{1.82}$$

Пара $\delta_H F(x) = [\Phi, \Psi]$ называется H-*производной Гато* функции F в точке x. Для любого множества V_Φ, порождающего функцию Φ, и для любого множества V_Ψ, порождающего функцию Ψ, пара $DF(x) = [V_\Phi, V_\Psi]$ называется H-*кодифференциалом* функции F в точке x, множество $\underline{d}_H F(x) = V_\Phi$ называется H-*гиподифференциалом* функции F в точке x, а множество $\overline{d}_H F(x) = V_\Psi$ называется H-*гипердифференциалом* функции F в этой точке.

Замечание 1.3.1. Предыдущее определение можно обобщить на случай, когда пространства X и E не наделены топологией. А именно, пусть X — вещественное линейное пространство, а E — K-пространство, $U \subset X$ — множество с непустой алгебраической внутренностью. Функция F называется *порядково H-кодифференцируемой* в точке $x \in \operatorname{core} U$, если существуют H-выпуклая функция $\Phi\colon X \to \overline{E}$ и H-вогнутая функция $\Psi\colon X \to \overline{E}$ такие, что $0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}\Phi \cap \operatorname{dom}\Psi)$, $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ и для любого $\Delta x \in X$ справедливо равенство

$$\operatorname*{o-lim}_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\Big|F(x+\alpha\Delta x) - F(x) - \Phi(\alpha\Delta x) - \Psi(\alpha\Delta x)\Big| = 0.$$

где core — алгебраическая внутренность, а o-lim — порядковый предел в K-пространстве E.

Если функция $h(\cdot) \equiv 0_E$ принадлежит множеству H и в точке $x \in U$ существует H-кодифференциал отображения F такой, что $\overline{d}_H F(x) = \{0\}$, то отображение F называется

H-гиподифференцируемым в точке x. H-гипердифференцируемые функции определяются аналогичным образом.

В случае, когда все функции из множества H являются положительно однородными, т. е. для всех $h \in H$, $x \in X$ и $\alpha > 0$ будет $h(\alpha x) = \alpha h(x)$, понятие H-кодифференцируемости тесно связано с представлениями производной по направлениям исследуемой функции. Пусть, как и выше, $U \subseteq X$ — открытое множество.

Предложение 1.3.1. *Пусть все функции из множества H положительно однородны и $F\colon U \to E$ — заданная функция. Тогда функция F является H-кодифференцируемой в точке $x \in U$ в том и только в том случае, когда она дифференцируема по направлениям в этой точке и существуют H-выпуклая функция $\Phi\colon X \to E$ и H-вогнутая функция $\Psi\colon X \to E$ такие, что $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ и*

$$F'(x, v) = \Phi(v) + \Psi(v) \quad \forall v \in X. \tag{1.83}$$

Более того, пара $[\Phi, \Psi]$ удовлетворяет данному равенству тогда и только тогда, когда она является H-производной Гато функции F в точке x.

Доказательство. Так как все функции из H положительно однородны, все H-выпуклые и H-вогнутые функции также положительно однородны. Поэтому, если функция $\Phi\colon X \to \overline{E}$ является H-выпуклой (или H-вогнутой) и $0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\Phi$, то $\operatorname{dom}\Phi = X$, т. е. функция Φ действует из X в E.

Таким образом, функция F является H-кодифференцируемой в точке x тогда и только тогда, когда существуют H-выпуклая функция $\Phi\colon X \to E$ и H-вогнутая функция $\Psi\colon X \to E$ такие, что $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ и для любого $\Delta x \in X$ справедливо равенство (1.82). Учитывая положительную однородность функций Φ и Ψ, данное равенство эквивалентно условию

$$\lim_{\alpha \to +0} \left\| \frac{1}{\alpha}\Big(F(x + \alpha\Delta x) - F(x)\Big) - \Phi(\Delta x) - \Psi(\Delta x) \right\| = 0,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно существованию предела $\lim\limits_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}\big(F(x + \alpha\Delta x) - F(x)\big)$ и выполнению равенства

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}\Big(F(x + \alpha\Delta x) - F(x)\Big) = \Phi(\Delta x) + \Psi(\Delta x) \quad \forall \Delta x \in X.$$

Значит, функция F является H-кодифференцируемой в точке x тогда и только тогда, когда она дифференцируема по направлениям в этой точке и существуют H-выпуклая функция $\Phi\colon X \to E$ и H-вогнутая функция $\Psi\colon X \to E$ такие, что $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ и выполняется равенство (1.83). Кроме того, пара $[\Phi, \Psi]$ удовлетворяет данному равенству тогда и только тогда, когда она является H-производной Гато функции F в точке x. $\square$

Если на множестве H определена некоторая метрика ρ, то можно ввести понятие *непрерывно* H-кодифференцируемой функции. А именно, функция F называется непрерывно H-кодифференцируемой в точке x, если она H-кодифференцируема в некоторой окрестности $\mathcal{O}(x)$ этой точки и существует H-кодифференциальное отображение $D_H F(\cdot)$, определённое в $\mathcal{O}(x)$ и такое, что отображения $\underline{d}_H F(\cdot)$ и $\overline{d}_H F(\cdot)$ непрерывны по Хаусдорфу в точке x.

При естественных предположениях на множество H и метрику ρ на этом множестве исчисление непрерывно кодифференцируемых функций допускает прямое обобщение на случай непрерывно H-кодифференцируемых функций. Например, если множество H замкнуто относительно сложения, а отображение $(h, p) \mapsto h + p$ равномерно непрерывно на $H \times H$, то сумма непрерывно H-кодифференцируемых функций также будет непрерывно H-кодифференцируемой и справедлива естественная формула для вычисления H-кодифференциала суммы. Исчисление непрерывно H-кодифференцируемых функций подробно изложено в работах автора [40, 182].

Приведём ряд примеров абстрактно кодифференцируемых функций для различных классов функций H.

Пример 1.3.1. Пусть $E = \mathbb{R}$ и $H = X^*$ — множество всех линейных непрерывных функционалов на пространстве X. Тогда, как хорошо известно, функция $\Phi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ является H-выпуклой (H-вогнутой) в том и только в том случае, когда Φ замкнутая сублинейная (суперлинейная) функция (см., например, [45, 250, 360]). Так как все функции из H очевидным образом являются положительно однородными, то по предложению 1.3.1 функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ является H-кодифференцируемой в точке $x \in U$ тогда и только тогда, когда она дифференцируема по направлениям в этой точке и её производная по направлениям в точке x представима в виде разности непрерывных сублинейных функций. Таким образом, в данном случае понятие H-кодифференцируемости эквивалентно квазидифференцируемости, а $D_H f(x)$ является H-кодифференциалом функции f в точке x тогда и только тогда, когда пара $[\operatorname{cl}\operatorname{co}\underline{d}_H f(x), \operatorname{cl}\operatorname{co}\overline{d}_H f(x)]$, где замыкание берётся в слабой* топологии, является квазидифференциалом функции f в точке x.

Предположим теперь, что E — произвольное банахово K-пространство, а H — множество линейных непрерывных операторов из X в E. Тогда функция $\Phi\colon X \to E$ является H-выпуклой (H-вогнутой) тогда и только тогда, когда Φ — сублинейный (суперлинейный) оператор с замкнутым надграфиком (подграфиком). Действительно, если $\Phi(x) = \sup_{T \in U} Tx$ для некоторого подмножества $U \subset H$, то непосредственно проверяется, что Φ сублинейный оператор. Кроме того, поскольку надграфик линейного непрерывного оператора $T\colon X \to E$

всегда замкнут в силу непрерывности решёточных операций, то надграфик оператора Φ также будет замкнут, как пересечение надграфиков операторов $T \in U$ (см. [49, пункт 1.3.6]).

Обратно, если $\Phi \colon X \to E$ сублинейный оператор, то $\Phi(x) = \sup_{T \in \partial_a \Phi(0)} Tx$, где $\partial_a \Phi(0)$ — алгебраический субдифференциал оператора Φ в нуле, то есть множество всех линейных (не обязательно непрерывных) операторов $T \colon X \to E$ таких, что $\Phi(x) - \Phi(0) \geqslant Tx$ для всех $x \in X$ (см., например, [66,159]). Если же, вдобавок, надграфик оператора Φ замкнут, то в силу того, что конус неотрицательных векторов нормированной решётки является нормальным (см., например, [345, предложение 2.1.5]), все линейные операторы из субдифференциала $\partial_a \Phi(0)$ будут непрерывными согласно [382, следствие 2.2]. Отсюда следует, что оператор Φ является H-выпуклой функцией. Более того, если конус неотрицательных векторов в пространстве E имеет непустую внутренность, то в силу [386, теоремы 2.1 и 3.5] функция $\Phi \colon X \to E$ является H-выпуклой тогда и только тогда, когда Φ — *непрерывный* сублинейный оператор.

Значит, по предложению 1.3.1 отображение $F \colon U \to E$ является H-кодифференцируемым в точке x тогда и только тогда, когда оно дифференцируемо по направлениям в этой точке и его производная по направлениям в точке x представима в виде разности сублинейных операторов с замкнутыми надграфиками. В данном случае случае понятие H-кодифференцируемости совпадает с понятием квазидифференцируемости нелинейных операторов, изучавшимся в [37, 159].

Заметим также, что в случае, когда пространства X и E не наделены топологией, а множество H состоит из всех линейных операторов из X в E, понятие порядковой H-кодифференцируемости, введённое в замечании 1.3.1, совпадает с понятием квазидифференцируемости нелинейных операторов, изучавшимся в работах [10, 50, 100].

Пример 1.3.2. Пусть $E = \mathbb{R}$ и H — множество всех аффиных функций $\ell \colon X \to \mathbb{R}$, то есть множество всех функций вида $\ell(x) = a + \langle x^*, x \rangle$ для некоторых $a \in \mathbb{R}$ и $x^* \in X^*$. Как хорошо известно, в данном случае функция $f \colon X \to \overline{R}$ является H-выпуклой (H-вогнутой) тогда и только тогда, когда она является замкнутой выпуклой (вогнутой) функцией (см., например, [78, предложение I.3.1]). Следовательно, в данном случае понятие H-кодифференцируемости совпадает с понятием кодифференцируемости, изучавшимся в предыдущих параграфах (по поводу подробного доказательства эквивалентности H-кодифференцируемости и кодифференцируемости в рассматриваемом случае см. [182, пример 3.10]).

В случае, когда E — произвольное банахово K-пространство, а H — множество всех непрерывных аффинных операторов из X в E, то есть множество всех операторов вида $\ell(x) = a + Tx$ для некоторого $a \in E$ и непрерывного линейного оператора $T \colon X \to E$, можно показать, что понятие H-кодифференцируемости совпадает с понятием кодифференцируемости нелинейных операторов, введённым А. Заффорони [416, 417].

Пример 1.3.3. Пусть $E = \mathbb{R}$ и множество H состоит из всех замкнутых сублинейных функций $h\colon X \to \mathbb{R}$. Поскольку сублинейная функция является положительно однородной, по предложению 1.3.1 функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ является H-гипердифференцируемой в точке $x \in U$ тогда и только тогда, когда она дифференцируема по направлениям в точке x и существует семейство $h_\lambda \in H$, $\lambda \in \Lambda$, сублинейных функций такое, что

$$f'(x, v) = \inf_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda(v) \quad \forall v \in X. \tag{1.84}$$

Заметим, что $h_\lambda(v) \geqslant f'(x, v)$ для всех $v \in X$, то есть h_λ является *верхней выпуклой аппроксимацией* Б.Н. Пшеничного [61] функции $f'(x, \cdot)$. Кроме того, любое семейство $h_\lambda \in H$, $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяющее равенству (1.84) называется *исчерпывающим семейством* верхних выпуклых аппроксимаций функции $f'(x, \cdot)$ (см. [37]). Таким образом, функция f является H-гипердифференцируемой в точке x в том и только в том случае, когда она дифференцируема по направлениям в этой точке и существует исчерпывающее семейство верхних выпуклых аппроксимаций функции $f'(x, \cdot)$.

Воспользовавшись представлением сублинейной функции в виде опорной функции её субдифференциала в нуле, получаем, что равенство (1.84) выполняется тогда и только тогда, когда существует семейство выпуклых слабо* компактных множеств $C_\lambda \subset X^*$, $\lambda \in \Lambda$, такое, что $f'(x, v) = \inf\limits_{\lambda \in \Lambda} \max\limits_{x^* \in C_\lambda} \langle x^*, v \rangle$ для всех $v \in X$. Напомним, что любое такое семейство называется *верхним экзостером* функции f в точке x (см. [17, 19, 138, 139, 238, 395]). Таким образом, функция f является H-гипердифференцируемой в точке x в том и только в том случае, когда она дифференцируема по направлениям в этой точке и существует верхний экзостер функции f в точке x.

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что в случае, когда множество H состоит из всех замкнутых суперлинейных функций $h\colon X \to \mathbb{R}$, функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ является H-гиподифференцируемой в точке x тогда и только тогда, когда она дифференцируема по направлениям в этой точке и существует т. н. исчерпывающее семейство нижних вогнутых аппроксимаций функции $f'(x, \cdot)$ или, что эквивалентно, если существует нижний экзостер функции f в точке x (см. [138, 139]).

Пример 1.3.4. Пусть $E = \mathbb{R}$ и множество H состоит из всех замкнутых выпуклых функций $h\colon X \to \mathbb{R}$. По определению функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ является H-гипердифференцируемой в точке $x \in U$ тогда и только тогда, когда существует семейство выпуклых функций $h_\lambda\colon X \to \mathbb{R}$,

$\lambda \in \Lambda$, такое, что $0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}(\inf_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda)$, $\inf\limits_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda(0) = 0$ и для любого $\Delta x \in X$ будет

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\Big| f(x+\alpha\Delta x) - f(x) - \inf_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda(\alpha\Delta x)\Big| = 0. \tag{1.85}$$

Заметим, что для любой функции h_λ будет $h_\lambda(0) \geqslant 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ и $\Delta x \in X$ существует $\alpha_0 > 0$ такое, что

$$f(x+\alpha\Delta x) - f(x) \leqslant h_\lambda(\alpha\Delta x) + \varepsilon\alpha \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_0).$$

Такие выпуклые функции h_λ называются *неоднородными верхними выпуклыми аппроксимациями* функции f в точке x, в то время как семейство $h_\lambda \in H$, $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяющее условию (1.85) называется *исчерпывающим семейство* неоднородных верхних выпуклых аппроксимаций функции f в точке x (такие семейства подробно изучались автором в статье [39]). Таким образом, в данном случае функция f является H-гипердифференцируемой тогда и только тогда, когда существует исчерпывающее семейство неоднородных верхних выпуклых аппроксимаций h_λ, $\lambda \in \Lambda$, функции f в точке x.

Воспользовавшись леммой 1.2.7 получим, что соотношение (1.85) выполняется тогда и только тогда, когда существует семейство C_λ, $\lambda \in \Lambda$, выпуклых компактных подмножеств пространства $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ такое, что $\inf\limits_{\lambda\in\Lambda} \max\limits_{(a,x^*)\in C_\lambda} a = 0$ и для любого Δx справедливо равенство:

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\Big| f(x+\alpha\Delta x) - f(x) - \inf_{\lambda\in\Lambda} \max_{(a,x^*)\in C_\lambda} (a + \langle x^*, \alpha\Delta x\rangle)\Big| = 0.$$

Напомним, что любое такое семейство C_λ, $\lambda \in \Lambda$, называется *верхним коэкзостером* функции f в точке x [1, 4, 138, 144]. Таким образом, в рассматриваемом случае функция f является H-гипердифференцируемой в точке x тогда и только тогда, когда существует верхний коэкзостер функции f в этой точке.

Рассуждая аналогичным образом, можно установить связь между H-гиподифференцируемостью, в случае когда множество H состоит из всех замкнутых вогнутых функций $h\colon X \to \mathbb{R}$, существованием исчерпывающего семейства неоднородных нижних вогнутых аппроксимаций и существованием нижнего коэкзостера функции f в точке x.

В терминах абстрактных кодифференциалов нетрудно получить условия экстремума, которые в различных частных случаях сводятся к известным условиям экстремума для негладких задач оптимизации. Напомним, что функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$, называется *субоднородной*, если $f(\alpha x) \leqslant \alpha f(x)$ для всех $x \in X$ и $\alpha \in (0, 1)$. Примерами субоднородных функций являются положительно однородные функции, выпуклые функции, а также т. н. функции *выпуклые вдоль лучей* [360], то есть такие функции $f\colon X \to \mathbb{R}$, что функции $\alpha \mapsto f(\alpha x)$, $\alpha \geqslant 0$, выпуклы для всех $x \in X$.

Для любой функции $\Phi\colon X \to \overline{E}$ и для любого $x \in \operatorname{dom}\Phi$ обозначим через

$$\underline{\partial}_H \Phi(x) = \Big\{ h \in H \;\Big|\; \Phi(y) \geqslant h(y) \;\; \forall y \in X, \;\; \Phi(x) = h(x) \Big\}$$

её H-субдифференциал в точке x, а через

$$\overline{\partial}_H \Phi(x) = \Big\{ h \in H \;\Big|\; \Phi(y) \leqslant h(y) \;\; \forall y \in X, \;\; \Phi(x) = h(x) \Big\}$$

обозначим её H-супердифференциал в этой точке. См. монографии [341, 360, 370] по поводу общей теории абстрактных суб-/супер-дифференциалов.

Предложение 1.3.2. *Пусть $E = \mathbb{R}$ и x_* — точка локального минимума в задаче*

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i \in I, \quad x \in A, \tag{1.86}$$

где функции $f_0, f_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i \in I = 1\colon m$ — H-кодифференцируемы в точке x_*, а $A \subset X$ — выпуклое множество. Пусть также пара $[\Phi_i, \Psi_i]$ является H-производной Гато функции f_i в точке x_*, $i \in I \cup \{0\}$. Тогда для любых $p_i \in \overline{\partial}_H \Psi_i(0)$, $i \in I \cup \{0\}$, таких, что функция

$$g(\cdot) = \sup_{i \in I} \Big\{ \Phi_0(\cdot) + p_0(\cdot), \Phi_i(\cdot) + p_i(\cdot) + f_i(x_*) \Big\}$$

является субоднородной, функция g достигает глобального минимума на множестве $A - x_*$ в нуле. Более того, если $A = X$ и $0 \in H$, то $0 \in \underline{\partial}_H g(0)$.

Доказательство. Введём функцию $F(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_*), f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$, $x \in X$. Нетрудно видеть, что x_* является точкой локального минимума данной функции на множестве A и $F(x_*) = 0$.

Зафиксируем произвольные $p_i \in \overline{\partial}_H \Psi_i(0)$, $i \in I \cup \{0\}$, такие, что функция $g(\cdot)$ является субоднородной. По определению H-кодифференцируемости для любых $\varepsilon > 0$ и $\Delta x \in X$ существует $\alpha_0 > 0$ такое, что

$$\Big| f_i(x_* + \alpha\Delta) - f_i(x_*) - \Phi_i(\alpha\Delta x) - \Psi_i(\alpha\Delta x) \Big| < \varepsilon\alpha \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_0)$$

для всех $i \in I \cup \{0\}$. Следовательно, по определению H-супердифференциала

$$f_i(x_* + \alpha\Delta x) \leqslant f_i(x_*) + \Phi_i(\alpha\Delta x) + p_i(\alpha\Delta x) + \varepsilon\alpha \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_0),$$

откуда по определениям функций F и g вытекает, что

$$F(x_* + \alpha\Delta x) - F(x_*) \leqslant g(\alpha\Delta x) + \varepsilon\alpha \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_0).$$

Воспользуемся данным неравенством, чтобы доказать требуемый результат.

Рассуждая от противного, предположим, что функция g не достигает глобального минимума на множестве $A - x_*$ в нуле. Тогда существует $x \in A$ такое, что $g(x - x_*) < 0$. Положим $\varepsilon = |g(x - x_*)|/2$ и $\Delta x = x - x_*$. Тогда существует $\alpha_0 > 0$ такое, что

$$F(x_* + \alpha\Delta x) - F(x_*) \leqslant g(\alpha\Delta x) + \varepsilon\alpha \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_0).$$

Отсюда, пользуясь субоднородностью функции g, имеем

$$F(x_* + \alpha\Delta x) - F(x_*) \leqslant \alpha g(\Delta x) + \frac{|g(\Delta x)|}{2}\alpha = \frac{g(\Delta x)}{2}\alpha < 0 \quad \forall \alpha \in \big[0, \min\{\alpha_0, 1\}\big),$$

что невозможно, поскольку x_* — точка локального минимума функции F на множестве A (заметим, что $x_* + \alpha\Delta x = \alpha x + (1 - \alpha)x_* \in A$ для всех $\alpha \in [0, 1]$ в силу выпуклости множества A). Таким образом, функция g достигает глобального минимума на множестве $A - x_*$ в точке $x = 0$. Если $A = X$, то это означает, что $g(x) \geqslant g(0) = 0$ для всех $x \in X$ (равенство $g(0) = 0$ вытекает из определений H-производной и H-супердифференциала). Следовательно, по определению H-субдифференциала будет $0 \in \underline{\partial}_H g(0)$, если $0 \in H$. $\square$

Замечание 1.3.2. В случае, когда ограничения отсутствуют, необходимые условия минимума из предыдущей теоремы являются, по существу, частным случаем необходимых условий минимума в терминах т. н. *непрерывных аппроксимаций* негладких функций, изучавшихся в работах [363, 417].

Приведём пример применения предыдущего предложения к конкретному классу абстрактно кодифференцируемых функций. А именно, получим с помощью этого предложения необходимые условия экстремума в терминах верхних экзостеров.

Пример 1.3.5. Пусть множество H состоит из всех замкнутых сублинейных функций $h\colon X \to \mathbb{R}$. Как было показано в примере 1.3.3, в данном случае функция $f : U \to \mathbb{R}$ является H-гипердифференцируемой в точке x тогда и только тогда, когда она дифференцируема по направлениям в этой точке и существует верхний экзостер функции f в точке x, то есть семейство $E^* f(x_*)$ выпуклых слабо* компактных подмножеств пространства X^* такое, что

$$f'(x, v) = \inf_{C \in E^* f(x_*)} \max_{x^* \in C} \langle x^*, v\rangle \quad \forall v \in X.$$

Предположим, что функции $f_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i \in I \cup \{0\}$, дифференцируемы по направлениям в точке x_* и существуют верхние экзостеры $E^* f_i(x_*)$ данных функций в точке x_*. H-производная функции f_i в данном случае имеет вид $[0, \Psi_i]$, где $\Psi_i(\cdot) = f_i'(x_*, \cdot)$, а H-супердифференциал $\overline{\partial}_H \Psi_i(0)$ состоит в точности из всех верхних выпуклых аппроксимаций функции $f_i'(x_*, \cdot)$. В частности, функции $h_i(v) = \max\limits_{x^* \in C_i} \langle x^*, v\rangle$, где $C_i \in E^* f_i(x_*)$, входят в $\overline{\partial}_H \Psi_i(0)$. Поэтому зафиксируем произвольные множества $C_i \in E^* f_i(x_*)$, $i \in I \cup \{0\}$.

Функция g из предложения 1.3.2 в данном случае имеет вид

$$g(x) = \max_{i \in I} \left\{ \max_{x_0^* \in C_0} \langle x_0^*, x\rangle, \max_{x_i^* \in C_i} \langle x_i^*, x\rangle + f_i(x_*) \right\} \quad \forall x \in X.$$

Эта функция очевидно выпукла и $g(0) = 0$, а потому g субоднородная функция. Следовательно, по предложению 1.3.2 для того чтобы точка x_* была точкой локального минимума в задаче (1.86) необходимо, чтобы ноль был точкой глобального минимума функции g на множестве $A - x_*$. Отсюда, воспользовавшись теоремой о субдифференциале супремума произвольного семейства выпуклых функций [45, теорема 4.2.3] и необходимым и достаточным условием минимума выпуклой функции на выпуклом множестве [45, теорема 1.1.2′], получим, что

$$0 \in \mathrm{co}\{C_0, C_i \mid i \in I(x_*)\} + N_A(x_*),$$

где $I(x_*) = \{i \in I \mid f_i(x_*) = 0\}$ и $N_A(x_*) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y - x_*\rangle \leqslant 0 \ \ \forall y \in A\}$ — *нормальный конус* к множеству A в точке x_*. По определению выпуклой оболочки найдутся $\alpha_i \geqslant 0$, $i \in I(x_*) \cup \{0\}$, такие, что

$$0 \in \alpha_0 C_0 + \sum_{i \in I(x_*)} \alpha_i C_i + N_A(x_*).$$

Если выполнено условие регулярности

$$0 \notin \mathrm{co}\{C_i \mid i \in I(x_*)\} + N_A(x_*), \tag{1.87}$$

то заведомо $\alpha_0 \neq 0$ и поэтому

$$0 \in C_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i C_i + N_A(x_*), \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \lambda_i f_i(x_*) = 0 \quad \forall i \in I, \tag{1.88}$$

где $\lambda_i = \alpha_i / \alpha_0$ для $i \in I(x_*)$ и $\lambda_i = 0$ для $i \notin I(x_*)$. Таким образом, для любых множеств $C_i \in E^* f_i(x_*)$, $i \in I \cup \{0\}$, удовлетворяющих условию регулярности (1.87), существуют $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in I$, такие, что $\lambda_i f_i(x_*) = 0$ для всех $i \in I$ и справедливо включение (1.88).

Глава 2

Негладкие задачи вариационного исчисления

Глава посвящена изучению негладких задач вариационного исчисления с помощью аппарата кодифференциального и квазидифференциального исчисления. Получены простые достаточные условия непрерывной кодифференцируемости негладкого интегрального функционала, определённого на пространстве Соболева, и явные формулы для вычисления его кодифференциала и квазидифференциала. С помощью общей теории условий экстремума для негладких задач оптимизации в терминах квазидифференциалов, изложенной в предыдущей главе, выведены новые условия экстремума для негладких многомерных задач вариационного исчисления, негладкой задачи Больцы с дополнительными ограничениями на границе и задач с негладкими изопериметрическими ограничениями. Основные результаты данной главы опубликованы в работах [180, 181, 199].

2.1 Кодифференцируемость интегрального функционала

В этом параграфе мы выведем явные формулы для кодифференциала и квазидифференциала негладкого интегрального функционала вида:

$$\mathcal{I}(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx, \quad u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m).$$

Здесь $f \colon \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \to \mathbb{R}$, $f = f(x, u, \xi)$ — заданная негладкая функция, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ — открытое (не обязательно ограниченное) множество, $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ — прямое произведение m копий пространства Соболева $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ и $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Пространство $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ наделено нормой $\|u\|_{1,p} = \big(\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p\big)^{1/p}$ в случае $1 \leqslant p < +\infty$ и $\|u\|_{1,\infty} = \max\{\|u\|_\infty, \|\nabla u\|_\infty\}$, где $\|\cdot\|_p$ — стандартная норма в $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^k)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, т. е. $\|u\|_p = (\int_\Omega |u(x)|^p\,dx)^{\frac{1}{p}}$ в случае $1 \leqslant p < +\infty$ и $\|u\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|$ (здесь, как и ранее, $|\cdot|$ — евклидова норма). Обозначим через через p' сопряжённый показатель к p, т. е. $1/p + 1/p' = 1$.

Мы будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ функция $(u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi)$ кодифференцируема, т. е. что для п.в. $x \in \Omega$ и для всех $(u,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ существуют выпуклые компактные множества $\underline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi), \overline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ такие, что для всех $(\Delta u, \Delta\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ существует предел

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\Big| f(x, u+\alpha\Delta u, \xi+\alpha\Delta\xi) - f(x,u,\xi) - \Phi_f(x,u,\xi;\alpha\Delta u,\alpha\Delta\xi) - \Psi_f(x,u,\xi;\alpha\Delta u,\alpha\Delta\xi)\Big| = 0$$

и $\Phi_f(x,u,\xi;0,0) = \Psi_f(x,u,\xi;0,0) = 0$, где

$$\Phi_f(x,u,\xi;\Delta u,\Delta\xi) = \max_{(a,v_1,v_2)\in\underline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi)} \big(a + \langle v_1, \Delta u\rangle + \langle v_2, \Delta\xi\rangle\big), \tag{2.1}$$

$$\Psi_f(x,u,\xi;\Delta u,\Delta\xi) = \min_{(b,w_1,w_2)\in\overline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi)} \big(b + \langle w_1, \Delta u\rangle + \langle w_2, \Delta\xi\rangle\big), \tag{2.2}$$

а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение $\mathbb{R}^k$. Мы будем обозначать данный кодифференциал в точке (x,u,ξ) через $D_{u,\xi} f(x,u,\xi) = [\underline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi), \overline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi)]$. Напомним также, что многозначное отображение $F\colon \Omega \times Y \rightrightarrows Z$, где Y и Z — метрические пространства, называется *отображением Каратеодори*, если для всех $y \in Y$ отображение $F(\cdot, y)$ измеримо и для почти всех $x \in \Omega$ отображение $F(x,\cdot)$ непрерывно (см. [87, Определение. 8.2.7]). Отметим, что в случае когда $Z = \mathbb{R}^k$ и значения многозначного отображения F компактны, отображение $F(x,\cdot)$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно по Хаусдорфу.

Следующее определение описывает естественные предположения на интегрант $f = f(x,u,\xi)$ и его кодифференциал, гарантирующие кодифференцируемость функционала $\mathcal{I}$.

Определение 2.1.1. Будем говорить, что интегрант f удовлетворяет *условиям кодифференцируемости* порядка $p \in [1,+\infty]$, если выполняются следующие предположения:
(i) f — отображение Каратеодори, удовлетворяющее *условию роста порядка* p, то есть существуют неотрицательная п.в. функция $\beta \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ и $C > 0$ такие, что

$$|f(x,u,\xi)| \leqslant \beta(x) + C\big(|u|^p + |\xi|^p\big)$$

для п.в. $x \in \Omega$ и всех $(u,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$, если $1 \leqslant p < +\infty$, и для любого $N > 0$ существует неотрицательная п.в. функция $\beta_N \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ такая, что $|f(x,u,\xi)| \leqslant \beta_N(x)$ для п.в. $x \in \Omega$ и всех $(u,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$, удовлетворяющих неравенству $\max\{|u|,|\xi|\} \leqslant N$, если $p = +\infty$;

(ii) для п.в. $x \in \Omega$ функция $(u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi)$ кодифференцируема на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ и её кодифференциальное отображение $D_{u,\xi} f(\cdot)$ является отображением Каратеодори (т. е. многозначные отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ и $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ являются отображениями Каратеодори), удовлетворяющим *условию роста порядка* p, т. е. существуют $C > 0$ и неотрицательные п.в. функции $\beta \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ и $\gamma \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ такие, что для п.в. $x \in \Omega$ и для всех $(u,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$, $(a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi)$ и $(b, w_1, w_2) \in \overline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi)$ выполняются неравенства

$$\max\big\{|a|,|b|\big\} \leqslant \beta(x) + C\big(|u|^p + |\xi|^p\big), \quad \max\big\{|v_1|,|v_2|,|w_1|,|w_2|\big\} \leqslant \gamma(x) + C\big(|u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\big),$$

если $1 \leqslant p < +\infty$, и для всех $N > 0$ существует неотрицательная п.в. функция $\beta_N \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ такая, что $\max\big\{|a|,|v_1|,|v_2|,|b|,|w_1|,|w_2|\big\} \leqslant \beta_N(x)$ для п.в. $x \in \Omega$ и всех $(a,v_1,v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi)$, $(b,w_1,w_2) \in \overline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi)$ и $(u,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ таких, что $\max\{|u|,|\xi|\} \leqslant N$, если $p = +\infty$.

Замечание 2.1.1. В случае $1 \leqslant p < +\infty$ условия роста в предыдущем определении могут быть ослаблены с помощью теоремы вложения Соболева (ср. [131, параграф 3.4.2]). В частности, если $d = 1$, то достаточно предполагать, что для любого $N > 0$ существуют $C_N > 0$ и неотрицательные п.в. функции $\beta_N \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ и $\gamma_N \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ такие, что для п.в. $x \in \Omega$, для любых $(u,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих неравенству $|u| \leqslant N$, и для всех $(a,v_1,v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi) \cup \overline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi)$ будет $\max\{|f(x,u,\xi)|,|a|\} \leqslant \beta_N(x) + C_N|\xi|^p$ и $\max\{|v_1|,|v_2|\} \leqslant \gamma_N(x) + C_N|\xi|^{p-1}$.

Наша цель — доказать, что условия кодифференцируемости порядка p являются достаточными условиями кодифференцируемости функционала $\mathcal{I}$ на пространстве $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$. В случае $p = 1$ нам дополнительно придётся предполагать, что множество Ω удовлетворяет *условию сегмента* [82, с. 53–54], то есть что для любой граничной точки x множества Ω существуют окрестность $U_x \subset \mathbb{R}^d$ точки x и ненулевой вектор $y_x \in \mathbb{R}^d$ такие, что для всех $z \in \operatorname{cl}\Omega \cap U_x$ и $t \in (0,1)$ будет $z + ty_x \in \Omega$. Условие сегмента гарантирует, что граница множества Ω является $(d-1)$-мерной и Ω не лежит одновременно с двух сторон любой части своей границы (т. е. отсутствуют разрезы). Кроме того, для любого множества Ω, удовлетворяющего данному свойству, пространство непрерывно дифференцируемых функций является всюду плотным в $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ (см, например, [82, теорема 3.18]).

Теорема 2.1.1. *Пусть интегрант f удовлетворяет условиям кодифференцируемости порядка $p \in [1,+\infty]$ и предположим, что либо $1 < p \leqslant +\infty$, либо множество Ω ограничено и удовлетворяет условию сегмента. Тогда функционал $\mathcal{I}$ корректно определён на $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, кодифференцируем в каждой точке $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ и можно положить*

$D\mathcal{I}(u) = [\underline{d}\mathcal{I}(u), \overline{d}\mathcal{I}(u)]$, *где*

$$\underline{d}\mathcal{I}(u) = \Big\{ (A, x^*) \in \mathbb{R} \times (W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m))^* \Bigm| A = \int_\Omega a(x)\, dx,$$

$$\langle x^*, h \rangle = \int_\Omega \big(\langle v_1(x), h(x) \rangle + \langle v_2(x), \nabla h(x) \rangle \big)\, dx \qquad \forall h \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m),$$

$$(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \text{ — измеримое сечение отображения } \underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot)) \Big\}, \quad (2.3)$$

$$\overline{d}\mathcal{I}(u) = \Big\{ (B, y^*) \in \mathbb{R} \times (W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m))^* \Bigm| B = \int_\Omega b(x)\, dx,$$

$$\langle y^*, h \rangle = \int_\Omega \big(\langle w_1(x), h(x) \rangle + \langle w_2(x), \nabla h(x) \rangle \big)\, dx \qquad \forall h \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m),$$

$$(b(\cdot), w_1(\cdot), w_2(\cdot)) \text{ — измеримое сечение отображения } \overline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot)) \Big\}.$$

Кроме того, многозначные отображения $\underline{d}\mathcal{I}(\cdot)$ *и* $\overline{d}\mathcal{I}(\cdot)$ *непрерывны по Хаусдорфу, т. е. функционал* $\mathcal{I}$ *непрерывно кодифференцируем на* $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, *если* $1 < p \leqslant +\infty$ *или многозначные отображения* $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ *и* $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ *имеют вид*

$$\begin{aligned} \underline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi) &= \operatorname{co} \big\{ (f_i(x, u, \xi), v_{1i}, v_{2i}) \mid i \in I \big\}, \\ \overline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi) &= \operatorname{co} \big\{ (g_j(x, u, \xi), w_{1j}, w_{2j}) \mid j \in J \big\} \end{aligned} \qquad (2.4)$$

для некоторых векторов $v_{1i}, w_{1j} \in \mathbb{R}^m$, $v_{2i}, w_{2j} \in \mathbb{R}^{m \times d}$ *и отображений Каратеодори* $f_i, g_j \colon \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \to \mathbb{R}$, *где* $i \in I = \{1, \ldots, \ell\}$ *и* $j \in J = \{1, \ldots, r\}$.

Замечание 2.1.2. Воспользовавшись основными правилами кодифференциального исчисления из предыдущей главы нетрудно показать, что предположение о том, что в случае $p = 1$ многозначные отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ и $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ имеют вид (2.4), сохраняется при сложении, умножении на число, а также взятии максимума и минимума конечных семейств функций. Кроме того, оно выполняется для любой кусочно-аффинной функции f.

Мы разделим достаточно громоздкое доказательство предыдущей теоремы на несколько частей, каждая из которых будет сформулирована в виде отдельной леммы. Мы начнём с леммы о гиподифференцируемости функции Φ_f, определённой согласно равенству (2.1). Данная лемма является простым следствием к примеру 1.2.3.

Лемма 2.1.1. *Пусть для п.в.* $x \in \Omega$ *и всех* $(u, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$ *функция* $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ *кодифференцируема, а функция* Φ_f *определена согласно* (2.1). *Тогда для любых* $u, h \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, *для п.в.* $x \in \Omega$, *и для всех* $t \in \mathbb{R}$ *функция* $g(t) = \Phi_f(x, u(x), \nabla u(x); th(x), t\nabla h(x))$ *является гиподифференцируемой для всех* $t \in \mathbb{R}$ *и можно положить* $Dg(t) = [\underline{d}g(t), \{0\}]$, *где*

$$\underline{d}g(t) = \Big\{ (a_g, v_g) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Bigm| a_g = a + \langle v_1, th(x) \rangle + \langle v_2, t\nabla h(x) \rangle - g(t),$$

$$v_g = \langle v_1, h(x) \rangle + \langle v_2, \nabla h(x) \rangle, \ \ (a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x)) \Big\}.$$

Покажем теперь, что приращение $\mathcal{I}(u+\alpha h)-\mathcal{I}(u)$ функционала $\mathcal{I}$ в точке u может быть аппроксимировано с помощью DC функции, определяемой по множествам $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ и $\overline{d}\mathcal{I}(u)$ из теоремы 2.1.1.

Лемма 2.1.2. *Пусть функция f удовлетворяет условиям кодифференцируемости порядка $p \in [1, +\infty]$, а множества $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ и $\overline{d}\mathcal{I}(u)$ определены как в теореме 2.1.1. Тогда функционал $\mathcal{I}$ корректно определён на пространстве $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $\underline{d}\mathcal{I}(u), \overline{d}\mathcal{I}(u) \subset \mathbb{R} \times (W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m))^*$ и*

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| \mathcal{I}(u + \alpha h) - \mathcal{I}(u) - \max_{(A, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)} (A + \langle x^*, \alpha h \rangle) - \min_{(B, y^*) \in \overline{d}\mathcal{I}(u)} (B + \langle y^*, \alpha h \rangle) \Big| = 0. \tag{2.5}$$

для всех $u, h \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. По нашему предположению f — отображение Каратеодори, удовлетворяющее условию роста порядка p (см. определение 2.1.1). Поэтому, как хорошо известно, функция $f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ измерима и принадлежит $\mathrm{L}^1(\Omega)$, откуда следует, что функционал $\mathcal{I}$ корректно определён на пространстве $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ и всюду конечен (см., например, [87, лемма 8.2.3]).

Проверим, что множества $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ и $\overline{d}\mathcal{I}(u)$ также корректно определены. Действительно, зафиксируем произвольное измеримое сечение $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$. Заметим, что данное многозначное отображение является измеримым в силу теоремы 8.2.8 из [87] и того факта, что по нашему предположению многозначное отображение $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ является отображением Каратеодори. Поэтому множество измеримых сечений многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ непусто (см. [87, теорема 8.1.3]).

По условию роста на кодифференциальное отображение $D_{u,\xi} f(\cdot)$ (см. определение 2.1.1) существуют $C > 0$ и неотрицательные п.в. функции $\beta \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ и $\gamma \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ такие, что

$$|a(x)| \leqslant \beta(x) + C\big(|u(x)|^p + |\nabla u(x)|^p\big), \quad \max\big\{|v_1(x)|, |v_2(x)|\big\} \leqslant \gamma(x) + C\big(|u(x)|^{p-1} + |\nabla u(x)|^{p-1}\big)$$

для п.в. $x \in \Omega$, если $1 \leqslant p < +\infty$, и существует неотрицательная п.в. функция $\beta_N \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ такая, что для п.в. $x \in \Omega$ выполняется неравенство $\max\{|a(x)|, |v_1(x)|, |v_2(x)|\} \leqslant \beta_N(x)$, если $p = +\infty$ (здесь $N = \|u\|_{1,\infty}$). Отсюда, воспользовавшись неравенством Гёльдера, получаем, что $a(\cdot) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, $v_1(\cdot) \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ и $v_2(\cdot) \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d})$. Поэтому интеграл $A = \int_\Omega a(x) dx$ корректно определён и конечен, а функционал x^*, определённый по правилу

$$\langle x^*, h \rangle = \int_\Omega \big(\langle v_1(x), h(x) \rangle + \langle v_2(x), \nabla h(x) \rangle \big)\, dx \quad \forall h \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m),$$

является линейным непрерывным функционалом на пространстве $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, т. е. множество $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ корректно определено, непусто и $\underline{d}\mathcal{I}(u) \subset \mathbb{R} \times (\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m))^*$. Справедливость включения $\overline{d}\mathcal{I}(u) \subset \mathbb{R} \times (\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)^*$ доказывается аналогичным образом.

Выберем произвольное $h \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ и последовательность $\{\alpha_n\} \subset (0,+\infty)$, сходящуюся к нулю. Докажем, что

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_n}\Big|\mathcal{I}(u+\alpha_n h)-\mathcal{I}(u)-\int_\Omega \Phi_f\big(x,u(x),\nabla u(x);\alpha_n h(x),\alpha_n\nabla h(x)\big)\,dx-\\ -\int_\Omega \Psi_f\big(x,u(x),\nabla u(x);\alpha_n h(x),\alpha_n\nabla h(x)\big)\,dx\Big|=0,\end{aligned} \tag{2.6}$$

где функции Φ_f и Ψ_f определены согласно (2.1) и (2.2). Действительно, для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \Omega$ определим

$$\begin{aligned}g_n(x)=\frac{1}{\alpha_n}\Big(f(x,u(x)+\alpha_n h(x),\nabla u(x)+\alpha_n\nabla h(x))-f(x,u(x),\nabla u(x))-\\ -\Phi_f\big(x,u(x),\nabla u(x);\alpha_n h(x),\alpha_n\nabla h(x)\big)-\Psi_f\big(x,u(x),\nabla u(x);\alpha_n h(x),\alpha_n\nabla h(x)\big)\Big).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Наша цель — доказать соотношение (2.6), применив теорему Лебега о мажорируемой сходимости к последовательности $\{g_n\}$. Для этого первым делом заметим, что по определению кодифференцируемости $g_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для п.в. $x \in \Omega$. Покажем, что $g_n \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Из того факта, что интегрант f удовлетворяет условию роста порядка p очевидно следует, что первые два слагаемых в определении функции g_n принадлежат $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Покажем, что функция $\eta_n(x) = \Phi_f\big(x,u(x),\nabla u(x);\alpha_n h(x),\alpha_n\nabla h(x)\big)$, $x \in \Omega$, также принадлежит $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Тот факт, что последнее слагаемое в определении функции g_n принадлежит $\mathrm{L}^1(\Omega)$ доказывается аналогичным образом.

По условиям кодифференцируемости $\underline{d}_{u,\xi}f(\cdot)$ — отображение Каратеодори, откуда в силу теоремы 8.2.8 из [87] следует, что многозначное отображение $\underline{d}_{u,\xi}f(\cdot,u(\cdot),\nabla u(\cdot))$ измеримо. Отображение $(x,(a,v_1,v_2)) \mapsto \langle a+\alpha_n\langle v_1,h(x)\rangle+\alpha_n\langle v_2,\nabla h(x)\rangle$, как нетрудно видеть, также является отображением Каратеодори. Поэтому по теореме 8.2.11 из [87] и определениям функций Φ_f (см. (2.1)) и η_n функция η_n измерима. Более того, по условию роста на кодифференциальное отображение $D_{u,\xi}f(\cdot)$ (см. определение 2.1.1) существует $C > 0$ и неотрицательные п.в. функции $\beta \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ и $\gamma \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ такие, что

$$\begin{aligned}|\eta_n(x)|=\big|\Phi_f(x,u(x),\nabla u(x);\alpha_n h(x),\alpha_n\nabla h(x))\big|\leqslant\beta(x)+C\big(|u(x)|^p+|\nabla u(x)|^p\big)+\\ +\alpha_n\big(\gamma(x)+C(|u(x)|^{p-1}+|\nabla u(x)|^{p-1})\big)\big(|h(x)|+|\nabla h(x)|\big)\end{aligned}$$

для п.в. $x \in \Omega$, если $1 \leqslant p < +\infty$, и существует неотрицательная п.в. функция $\beta_N \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ такая, что

$$|\eta_n(x)|\leqslant\beta_N(x)\big(1+\alpha_n|h(x)|+\alpha_n|\nabla h(x)|\big)\quad\text{для п.в. } x\in\Omega,$$

если $p = +\infty$ (здесь $N = \|u\|_{1,\infty}$). Напомним, что $u, h \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Поэтому, воспользовавшись неравенством Гёльдера, получаем, что $\eta_n \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $g_n \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Докажем теперь, что последовательность $\{g_n\}$ мажорируется некоторой интегрируемой функцией. Действительно, по теореме о среднем в терминах кодифференциалов (см. предложение 1.2.4 в предыдущей главе) для всех $n \in \mathbb{N}$ и п.в. $x \in \Omega$ существуют $\theta_n \in (0, \alpha_n)$, $(0, v_{1n}(x), v_{2n}(x)) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x) + \theta_n h(x), \nabla u(x) + \theta_n \nabla h(x))$ и $(0, w_{1n}(x), w_{2n}(x)) \in \overline{d}_{u,\xi} f(x, u(x) + \theta_n h(x), \nabla u(x) + \theta_n \nabla h(x))$ такие, что

$$\frac{1}{\alpha_n}\big(f(x, u(x) + \alpha_n h(x), \nabla u(x) + \alpha_n \nabla h(x)) - f(x, u(x), \nabla u(x))\big) =$$
$$= \langle v_{1n}(x) + w_{1n}(x), h(x)\rangle + \langle v_{2n}(x) + w_{2n}(x), \nabla h(x)\rangle.$$

Следовательно, по условию роста на $D_{u,\xi} f(\cdot)$ (см. определение 2.1.1) существуют $C > 0$ и неотрицательная п.в. функция $\gamma \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ такая, что

$$\frac{1}{\alpha_n}\big|f(x, u(x) + \alpha_n h(x), \nabla u(x) + \alpha_n \nabla h(x)) - f(x, u(x), \nabla u(x))\big| \leqslant$$
$$\leqslant 2\big(\gamma(x) + C(|u(x) + \theta_n h(x)|^{p-1} + |\nabla u(x) + \theta_n \nabla h(x)|^{p-1})\big)\big(|h(x)| + |\nabla h(x)|\big)$$

для п.в. $x \in \Omega$, если $1 \leqslant p < +\infty$, и существует неотрицательная п.в. функция $\beta_N \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ такая, что

$$\frac{1}{\alpha_n}\big|f(x, u(x) + \alpha_n h(x), \nabla u(x) + \alpha_n \nabla h(x)) - f(x, u(x), \nabla u(x))\big| \leqslant 2\beta_N(x)\big(|h(x)| + |\nabla h(x)|\big)$$

для п.в. $x \in \Omega$, если $p = +\infty$ (здесь $N = \|u\|_{1,\infty} + \alpha_* \|h\|_{1,\infty}$, где $\alpha_* = \max_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$). Отсюда, воспользовавшись условием $u, h \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ и неравенством Гёльдера в случае $1 < p < +\infty$, получаем, что первые два слагаемых в (2.7) мажорируется интегрируемой функцией, не зависящей от n.

Рассмотрим теперь третье слагаемое в (2.7). Тот факт, что последнее слагаемое в (2.7) мажорируется интегрируемой функцией, не зависящей от n, доказывается аналогично. По теореме о среднем для кодифференцируемых функций и лемме 2.1.1 для всех $n \in \mathbb{N}$ и п.в. $x \in \Omega$ найдутся $\theta_n \in (0, \alpha_n)$ и $(a_n(x), v_{1n}(x), v_{2n}(x)) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))$ такие, что

$$\Phi_f(x, u(x), \nabla u(x); \theta_n h(x), \theta_n \nabla h(x)) = a_n(x) + \langle v_{1n}(x), \theta_n h(x)\rangle + \langle v_{2n}(x), \theta_n \nabla h(x)\rangle,$$
$$\frac{1}{\alpha_n}\Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big) = \langle v_{1n}(x), h(x)\rangle + \langle v_{2n}(x), \nabla h(x)\rangle$$

(здесь мы воспользовавшись тем фактом, что $\Phi_f(x, u(x), \nabla u(x); 0, 0) = 0$ по определению кодифференциала). Воспользовавшись данными равенствами и условием роста на кодифференциальное отображение $D_{u,\xi} f(\cdot)$, легко показать, что третье слагаемое в (2.7) также мажорируемо некоторой интегрируемой функцией не зависящей от n. Следовательно, по теореме

Лебега о мажорируемой сходимости $\int_\Omega g_n(x)\,dx \to 0$ при $n \to \infty$ или, что эквивалентно, справедливо соотношение (2.6) (см. определение g_n, формула (2.7)).

Проверим, что

$$\int_\Omega \Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big)\,dx = \max_{(A,x^*)\in \underline{d}\mathcal{I}(u)} (A + \langle x^*, \alpha_n h\rangle) \tag{2.8}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, где множество $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ определено согласно теореме 2.1.1. Справедливость схожего равенства для Ψ_f и $\overline{d}\mathcal{I}(u)$ доказывается аналогичным образом. Воспользовавшись этими равенствами и соотношением (2.6), получим, что выполняется равенство (2.5) и лемма доказана.

По определению Φ_f для любого измеримого сечения $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ для п.в. $x \in \Omega$ и всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$a(x) + \alpha_n \langle v_1(x), h(x)\rangle + \alpha_n \langle v_2(x), \nabla h(x)\rangle \leqslant \Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big),$$

из которого очевидным образом вытекает, что неравенство

$$\sup_{(A,x^*)\in \underline{d}\mathcal{I}(u)} (A + \langle x^*, \alpha_n h\rangle) \leqslant \int_\Omega \Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big)\,dx$$

выполняется для всех $n \in \mathbb{N}$ (см. (2.3)). С другой стороны, заметим, что определению

$$\Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big) \in \Big\{ a + \alpha_n \langle v_1, h(x)\rangle + \alpha_n \langle v_2, \nabla h(x)\rangle \in \mathbb{R} \;\Big|\; (a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x)) \Big\}$$

для п.в. $x \in \Omega$ и для всех $n \in \mathbb{N}$. Как отмечалось выше, из условий кодифференцируемости следует, что многозначное отображение $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ является измеримым. Следовательно, по теореме Филиппова [87, теорема 8.2.10] для любого $n \in \mathbb{N}$ существует измеримое сечение $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ такое, что

$$\Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big) = a(x) + \alpha_n \langle v_1(x), h(x)\rangle + \alpha_n \langle v_2(x), \nabla h(x)\rangle$$

для п.в. $x \in \Omega$. Поэтому для соответствующего элемента $(A, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)$ (см. (2.3)) справедливо равенство

$$\int_\Omega \Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big)\,dx = A + \langle x^*, \alpha_n h\rangle,$$

т. е. выполняется равенство (2.8), что и требовалось доказать. □

Покажем теперь, что пара $D\mathcal{I}(u) = [\underline{d}\mathcal{I}(u), \overline{d}\mathcal{I}(u)]$ определённая в теореме 2.1.1 действительно является кодифференциалом функционала $\mathcal{I}$ в точке u. Для этого по определению кодифференциала (см. предложение 1.2.1) необходимо доказать, что множества $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ и

$\overline{d}\mathcal{I}(u)$ выпуклы и компактны в соответствующей топологии. Мы подробно приведём достаточно простое доказательство этого факта в случае $1 < p \leqslant +\infty$. Гораздо более сложное и громоздкое доказательство случая $p = 1$ имеется в работе автора [181].

Лемма 2.1.3. *Пусть функция f удовлетворяет условиям кодифференцируемости порядка $p \in [1, +\infty]$ и пусть, либо $1 < p \leqslant +\infty$, либо множество Ω ограничено и удовлетворяет условию сегмента. Тогда для любого $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ множества $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ и $\overline{d}\mathcal{I}(u)$, определённые в теореме 2.1.1, являются выпуклыми и компактными в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$. Более того,* $\max\{A \colon (A, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)\} = \min\{B \colon (B, y^*) \in \overline{d}\mathcal{I}(u)\} = 0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Мы докажем данную лемму только для гиподифференциала $\underline{d}\mathcal{I}(u)$, поскольку справедливость леммы для гипердифференциала $\overline{d}\mathcal{I}(u)$ доказывается совершенно аналогичным образом.

Выберем произвольные $(A_1, x_1^*), (A_2, x_2^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)$, и пусть $z_i(\cdot) = (a_i(\cdot), v_{1i}(\cdot), v_{2i}(\cdot))$ — измеримые сечения многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$, соответствующие парам (A_i, x_i^*), $i \in \{1, 2\}$. Множество $\underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))$ является выпуклым для п.в. $x \in \Omega$ по определению. Следовательно, для любого $\alpha \in [0, 1]$ отображение $\alpha z_1(\cdot) + (1 - \alpha) z_2(\cdot)$ является измеримым сечением многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$, которое очевидным образом соответствует паре $Z_\alpha = (\alpha A_1 + (1-\alpha) A_2, \alpha x_1^* + (1-\alpha) x_2^*)$. Поэтому $Z_\alpha \in \underline{d}\mathcal{I}(u)$ для всех $\alpha \in [0, 1]$, то есть множество $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ является выпуклым.

По определению кодифференциала для п.в. $x \in \Omega$ и для всех $(a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))$ будет $a \leqslant 0$, откуда следует, что для всех $(A, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)$ выполняется неравенство $A \leqslant 0$. Кроме того, по определению $\max\{a \mid (a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))\} = 0$ для п.в. $x \in \Omega$, т. е. для п.в. $x \in \Omega$ справедливо включение $0 \in \{a \mid (a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))\}$. Как было замечено в доказательстве леммы 2.1.2, при сделанных предположениях многозначное отображение $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ является измеримым. Следовательно, по теореме Филиппова [87, теорема 8.2.10] существует измеримое сечение $(a_0(\cdot), v_{10}(\cdot), v_{20}(\cdot))$ многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ такое, что $a_0(x) = 0$ для п.в. $x \in \Omega$. Поэтому $(0, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)$, где

$$\langle x^*, h \rangle = \int_\Omega \big(\langle v_{10}(x), h(x) \rangle + \langle v_{20}(x), \nabla h(x) \rangle \big)\, dx \quad \forall h \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m).$$

Таким образом, $\max\{A \colon (A, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)\} = 0$.

Перейдём к доказательству компактности множества $\underline{d}\mathcal{I}(u)$. Мы рассмотрим два случая.

Случай $1 < p < +\infty$. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех измеримых сечений многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$. По условиям кодифференцируемости (см. определение 2.1.1) существуют $C > 0$ и неотрицательные п.в. функции $\beta \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ и $\gamma \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ такие, что для любого $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \in \mathcal{F}$ и для п.в. $x \in \Omega$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered} |a(x)| \leqslant \beta(x) + C\big(|u(x)|^p + |\nabla u(x)|^p\big), \\ \max\{|v_1(x)|, |v_2(x)|\} \leqslant \gamma(x) + C\big(|u(x)|^{p-1} + |\nabla u(x)|^{p-1}\big). \end{gathered} \tag{2.9}$$

Правая часть первого неравенства очевидно принадлежит $\mathrm{L}^1(\Omega)$, в то время как правая часть второго неравенства принадлежит $\mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ в силу того, что $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ и $p'(p-1) = p$. Таким образом, $\mathcal{F}$ является ограниченным подмножеством нормированного пространства $X = \mathrm{L}^1(\Omega) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d})$.

Для любого $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \in X$ обозначим через $\mathcal{T}(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ пару $(A, x^*) \in \mathbb{R} \times (\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m))^*)$ такую, что $A = \int_\Omega a(x)\, dx$ и

$$\langle x^*, h\rangle = \int_\Omega \big(\langle v_1(x), h(x)\rangle + \langle v_2(x), \nabla h(x)\rangle\big)\, dx \quad \forall h \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m).$$

Ясно, что $\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \underline{d}\mathcal{I}(u)$ (см. (2.3)). Более того, нетрудно проверить, что $\mathcal{T}$ является непрерывным линейным оператором из пространства $X = \mathrm{L}^1(\Omega) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d})$, наделённого слабой топологией, в локально выпуклое пространство $(\mathbb{R} \times Y^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y))$, где $Y = \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ и $\sigma(Y^*, Y)$ — слабая* топология в пространстве Y^*.

Действительно, зафиксируем произвольное открытое подмножество $\mathcal{V}$ пространства $(\mathbb{R} \times Y^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y))$ и покажем, что его прообраз $\mathcal{U} = \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{V})$ открыт в слабой топологии пространства X. Для этого зафиксируем произвольную тройку $(a, v_1, v_2) \in \mathcal{U}$ и обозначим $(A, x^*) = \mathcal{T}(a, v_1, v_2) \in \mathcal{V}$. В силу открытости множества $\mathcal{V}$ в соответствующей топологии найдутся $\varepsilon > 0$ и функции $h_1, \ldots, h_n \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ такие, что

$$\mathcal{V}_\varepsilon(h_1, \ldots, h_n) = \Big\{(B, y^*) \in \mathbb{R} \times Y^* \;\Big|\; |B - A| < \varepsilon, \quad \max_{i \in 1:\, n} \big|\langle y^* - x^*, h_i\rangle\big| < \varepsilon\Big\} \subseteq \mathcal{V}.$$

Введём множество

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\varepsilon(h_1, \ldots, h_n) = \Bigg\{(b, w_1, w_2) \in X \;\Bigg|\; \Big|\int_\Omega (b(x) - a(x))\, dx\Big| < \varepsilon,& \\ \max_{i \in 1:\, n} \Big|\int_\Omega \langle w_1(x) - v_1(x), h_i(x)\rangle\, dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \max_{i \in 1:\, n} \Big|\int_\Omega \langle w_2(x) - v_2(x), \nabla h_i(x)\rangle\, dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}&\Bigg\}. \end{aligned}$$

Это множество очевидно является окрестностью точки (a, v_1, v_2) в слабой топологии пространства X и, кроме того, его образ при отображении $\mathcal{T}$ содержится в $\mathcal{V}_\varepsilon(h_1, \ldots, h_n) \subseteq \mathcal{V}$. Поэтому $\mathcal{U}_\varepsilon(h_1, \ldots, h_n) \subseteq \mathcal{U}$, т. е. для каждой точки множества $\mathcal{U}$ существует окрестность этой точки в слабой топологии, содержащаяся в $\mathcal{U}$. Следовательно, множество $\mathcal{U}$ открыто в слабой топологии пространства X, а оператор $\mathcal{T}$ является непрерывным в соответствующих топологиях. Поэтому достаточно доказать, что множество $\mathcal{F}$ является слабо компактным. Тогда множество $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ будет компактно в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y)$, как образ слабо компактного множества $\mathcal{F}$ при непрерывном отображении $\mathcal{T}$.

По теореме Эберлейна-Шмульяна достаточно доказать, что множество $\mathcal{F}$ является слабо секвенциально компактным. Выберем произвольную последовательность $z_n(\cdot) = (a_n(\cdot), v_{1n}(\cdot), v_{2n}(\cdot)) \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$. В силу второго неравенства в (2.9) последовательность $\{(v_{1n}(\cdot), v_{2n}(\cdot))\}$ ограничена в $\mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d})$. Поскольку пространство $\mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ рефлексивно (напомним, что $1 < p' < +\infty$, так как $1 < p < +\infty$), существует подпоследовательность $\{(v_{1n_k}(\cdot), v_{2n_k}(\cdot))\}$ слабо сходящаяся к функции $(v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ в пространстве $\mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d})$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{a_n(\cdot)\}$. Введём функцию $g(\cdot) = \beta(\cdot) + C(|u(\cdot)|^p + |\nabla u(\cdot)|^p)$ (см. (2.9)). Ясно, что $g \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ и $\int_{|a_{n_k}| > g} |a_{n_k}(x)| dx = 0 < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и для всех $k \in \mathbb{N}$. Поэтому, по критерию слабой компактности в пространстве L^1 (см. [107, теорема 4.7.20]) замыкание множества $\{a_{n_k}(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ в слабой топологии является слабо компактным подмножеством пространства $\mathrm{L}^1(\Omega)$. По теореме Эберлейна-Шмульяна оно является слабо секвенциально компактным в $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Следовательно, найдётся подпоследовательность последовательности $\{a_{n_k}(\cdot)\}$, которую мы вновь обозначим через $\{a_{n_k}(\cdot)\}$, слабо сходящаяся к некоторой функции $a \in \mathrm{L}^1(\Omega)$.

По построению последовательность $z_{n_k}(\cdot) = (a_{n_k}(\cdot), v_{1n_k}(\cdot), v_{2n_k}(\cdot))$, $k \in \mathbb{N}$, слабо сходится к функции $z(\cdot) = (a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ в пространстве $X = \mathrm{L}^1(\Omega) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d})$. По лемме Мазура существует последовательность $\widehat{z}_k(\cdot)$ конечных выпуклых комбинаций последовательности $z_{n_k}(\cdot)$ сильно сходящаяся к $z(\cdot)$. Поэтому, как хорошо известно (см., например, [218, Упр. 6.9]), можно извлечь подпоследовательность $\{\widehat{z}_{k_l}(\cdot)\}$, сходящуюся к $z(\cdot)$ почти всюду. Из выпуклости гиподифференциала $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ следует, что функция $\widehat{z}_k(\cdot)$ является измеримым сечением многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Поэтому в силу замкнутости гиподифференциала $\underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))$ для п.в. $x \in \Omega$ функция $z(\cdot)$ также будет измеримым сечением многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$, т. е. $z(\cdot) \in \mathcal{F}$. Таким образом, мы построили подпоследовательность исходной последовательности $\{z_n(\cdot)\} \subset \mathcal{F}$, слабо сходящуюся к элементу множества $\mathcal{F}$. Иными словами, множество $\mathcal{F}$ слабо секвенциально компактно, что и требовалось доказать.

Случай $p = +\infty$. Пусть, как и выше, $\mathcal{F}$ — множество всех измеримых сечений многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$. По условиям кодифференцируемости (см. определение 2.1.1) существует неотрицательная п.в. функция $\beta_N \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ такая, что для всех

$(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \in \mathcal{F}$ выполняется неравенство:

$$\max\big\{|a(x)|, |v_1(x)|, |v_2(x)|\big\} \leqslant \beta_N(x) \quad \text{для п.в. } x \in \Omega \tag{2.10}$$

(здесь $N = \|u\|_{1,\infty}$). Таким образом, $\mathcal{F}$ — ограниченное подмножество нормированного пространства $X = \mathrm{L}^1(\Omega; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d})$.

Пусть $\mathcal{T}$ — оператор, определённый как и в случае $1 < p < +\infty$. Тогда $\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \underline{d}\mathcal{I}(u)$. Более того, как нетрудно проверить, $\mathcal{T}$ — непрерывный линейный оператор из пространства X, наделённого слабой топологией, в топологическое векторное пространство $(\mathbb{R} \times Y^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y))$, где $Y = \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Следовательно, достаточно доказать, что $\mathcal{F}$ — слабо компактное подмножество пространства $X = \mathrm{L}^1(\Omega; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d})$. Тогда можно заключить, что множество $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ компактно в топологии $\tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y)$, как образ компактного множества при непрерывном отображении $\mathcal{T}$.

Из неравенства (2.10) следует, что для всех $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \in \mathcal{F}$ будет

$$\int_{|a| > \beta_N} |a| \, d\mu = 0 < \varepsilon, \quad \int_{|v_1| > \beta_N} |v_1| \, d\mu = 0 < \varepsilon, \quad \int_{|v_2| > \beta_N} |v_2| \, d\mu = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

где μ — мера Лебега. Следовательно, по критерию слабой компактности в пространстве L^1 (см. [107, теорема 4.7.20]) замыкание множества $\mathcal{F}$ в слабой топологии пространства X является слабо компактным. По теореме Эберлейна-Шмульяна отсюда следует, что замыкание $\mathcal{F}$ в слабой топологии является слабо секвенциально компактным. Проверим, что множество $\mathcal{F}$ само является слабо секвенциально компактным. Тогда вновь воспользовавшись теоремой Эберлейна-Шмульяна можно заключить, что множество $\mathcal{F}$ слабо компактно, что и требовалось доказать.

Выберем произвольную последовательность $\{z_n\} \subset \mathcal{F}$. В силу слабой секвенциальной компактности замыкания множества $\mathcal{F}$ в слабой топологии существует подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$ слабо сходящаяся к некоторому $z \in X$. По лемме Мазура существует последовательность конечных выпуклых комбинаций $\{\widehat{z}_k\}$ элементов последовательности $\{z_{n_k}\}$, сильно сходящаяся к z. Из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $\{\widehat{z}_{k_l}\}$, сходящуюся к z почти всюду. Каждая функция $\widehat{z}_{k_l}(\cdot)$ является измеримым сечением многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ в силу определения $\mathcal{F}$ и выпуклости гиподифференциала, откуда следует, что функция $z(\cdot)$ является измеримым сечением многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ в силу замкнутости гиподифференциала. Таким образом, $z \in \mathcal{F}$, т. е. подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$ слабо сходится к некотором элементу множества $\mathcal{F}$, а это и означает, что данное множество является слабо секвенциально компактным. $\square$

Замечание 2.1.3. Заметим, что доказательства случаев $1 < p < +\infty$ и $p = +\infty$ невозможно перенести на случай $p = 1$ в силу того, что в данном случае множество $\mathcal{F}$ является подмножество пространства $X = \mathrm{L}^1(\Omega) \times \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m) \times \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d})$ и необходимо доказывать его компактность не в слабой, а в более грубой топологии (сомножители L^∞ в определении X необходимо наделить слабой* топологией, т. е. топологией $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$), вследствие чего теорема Эбейрлейна-Шмульяна и лемма Мазура оказываются неприменимыми. Поэтому доказательство компактности гиподифференциала $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ в случае $p = 1$ должно опираться на другие технические приёмы (подробнее см. работу автора [181]).

Покажем наконец, что функционал $\mathcal{I}$ является *непрерывно* кодифференцируемым. Пусть, как и ранее, $\operatorname{dist}(x, C) = \inf_{y \in C} \rho(x, y)$ для любого подмножества C метрического пространства (M, ρ) и любой точки $x \in M$.

Лемма 2.1.4. *Пусть интегрант f удовлетворяет условиям кодифференцируемости порядка $p \in [1, +\infty]$ и предположим, что либо $1 < p \leqslant +\infty$, либо многозначные отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ и $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ имеют вид (2.4) для некоторых векторов $v_{1i}, w_{1j} \in \mathbb{R}^m$, $v_{2i}, w_{2j} \in \mathbb{R}^{m \times d}$ и отображений Каратеодори f_i и g_j, $i \in I = \{1, \ldots, \ell\}$, $j \in J = \{1, \ldots, r\}$. Тогда многозначные отображения $\underline{d}\mathcal{I}(\cdot)$ и $\overline{d}\mathcal{I}(\cdot)$, определённые в теореме 2.1.1, являются непрерывными по Хаусдорфу.*

Доказательство. Мы докажем утверждение леммы только для гиподифференциального отображения $\underline{d}\mathcal{I}(\cdot)$, поскольку утверждение для гипердифференциального отображения $\overline{d}\mathcal{I}(\cdot)$ доказывается аналогичным образом.

Рассуждая от противного, предположим, что отображение $\underline{d}\mathcal{I}(\cdot)$ не является непрерывным по Хаусдорфу в некоторой точке $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. По определению найдутся $\theta > 0$ и последовательность $\{u_n\} \subset \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, сходящаяся к u, такие, что $\rho_H(\underline{d}\mathcal{I}(u_n), \underline{d}\mathcal{I}(u)) > \theta$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Заменяя при необходимости последовательность $\{u_n\}$ на её подпоследовательность, можно предполагать, что u_n сходится к u почти всюду и ∇u_n сходится к ∇u почти всюду.

По определению метрики Хаусдорфа возможно два случая. А именно, существует подпоследовательность последовательности $\{u_n\}$, которую мы вновь обозначим через $\{u_n\}$, удовлетворяющая одному из двух следующих неравенств:

$$\sup_{(B, y^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u_n)} \inf_{(A, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)} \sqrt{|B - A|^2 + \|y^* - x^*\|^2} > \theta \tag{2.11}$$

$$\sup_{(A, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)} \inf_{(B, y^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u_n)} \sqrt{|B - A|^2 + \|y^* - x^*\|^2} > \theta.$$

Для краткости мы рассмотрим только случай, когда выполняется первое неравенство, поскольку доказательство случая, когда выполняется второе неравенство, почти дословно повторяет доказательство первого случая (подробнее см. работу автора [199]).

Из неравенства (2.11) следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $(A_n, x_n^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u_n)$, удовлетворяющее неравенству $\operatorname{dist}((A_n, x_n^*), \underline{d}\mathcal{I}(u)) \geqslant \theta$. Обозначим через $z_n(\cdot) = (a_n(\cdot), v_{1n}(\cdot), v_{2n}(\cdot))$ измеримое сечение многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_n(\cdot), \nabla u_n(\cdot))$, соответствующее паре (A_n, x_n^*) (см. (2.3)). Мы рассмотрим случаи $p > 1$ и $p = 1$ отдельно.

Случай $1 < p \leqslant +\infty$**.** Напомним, что по определению кодифференциала значения многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ выпуклы и компактны. Кроме того, как было показано в доказательстве леммы 2.1.2, условия кодифференцируемости гарантируют, что это многозначное отображение является измеримым. Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ и для п.в. $x \in \Omega$ множество

$$R_n(x) = \Big\{ (a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x)) \ \Big| \\ \operatorname{dist}\big(z_n(x), \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))\big)^2 = |a_n(x) - a|^2 + |v_{1n}(x) - v_1|^2 + |v_{2n}(x) - v_2|^2 \Big\},$$

состоящее из всех тех точек на которых достигается инфимум в определении расстояния от $z_n(x)$ до множества $\underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))$, является непустым, а многозначное отображение $R_n(\cdot)$ измеримо по теореме 8.2.11 из [87].

Обозначим через $z_n^0(\cdot)$ произвольное измеримое сечение многозначного отображения $R_n(\cdot)$, существующее в силу измеримости этого отображения (см. [87, теорема 8.1.3]). Определим функцию $\widehat{z}_n(\cdot) = (\widehat{a}_n(\cdot), \widehat{v}_{1n}(\cdot), \widehat{v}_{2n}(\cdot))$ следующим образом:

$$\widehat{z}_n(x) = \begin{cases} z_n^0(x), & \text{если } z_n(x) \notin \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x)), \\ z_n(x), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что $\widehat{z}_n(\cdot)$ — сечение многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$. Более того, это сечение измеримо в силу того, что множество всех тех $x \in \Omega$, для которых $z_n(x) \notin \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))$, измеримо по второй части следствия 8.2.13 из [87].

По условиям кодифференцируемости (см. определение 2.1.1) многозначное отображение $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ является отображением Каратеодори. По определению это означает, что для п.в. $x \in \Omega$ отображение $(u, \xi) \mapsto \underline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi)$ непрерывно. Поэтому для п.в. $x \in \Omega$ будет

$$\lim_{n \to \infty} \rho_H(\underline{d}_{u,\xi} f(x, u_n(x), \nabla u_n(x)), \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))) = 0.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $\operatorname{dist}(z_n(x), \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x)) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, последовательность $\{z_n - \widehat{z}_n\}$ сходится к нулю почти всюду. Покажем, что эта последовательность сходится к нулю в пространстве $\mathrm{L}^1(\Omega) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d})$. Для этого мы воспользуемся теоремой Витали о сходимости в пространствах L^p при $1 \leqslant p < +\infty$ (см., например, [21, теорема III.6.15]). Заметим, что $1 \leqslant p' < +\infty$, поскольку мы рассматриваем случай $1 < p \leqslant +\infty$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По условию роста на кодифференциальное отображение $D_{u,\xi} f$ (см. определение 2.1.1) существуют $C > 0$ и неотрицательная почти всюду функция $\beta \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ такие, что

$$|a_n(x) - \widehat{a}_n(x)| \leqslant 2\beta(x) + C\big(|u(x)|^p + |u_n(x)|^p + |\nabla u(x)|^p + |\nabla u_n(x)|^p\big) \tag{2.12}$$

для п.в. $x \in \Omega$, если $1 < p < +\infty$, и существует неотрицательная п.в. функция $\beta_N \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ такая, что $|a_n(x) - \widehat{a}_n(x)| \leqslant 2\beta_N(x)$ для п.в. $x \in \Omega$, если $p = +\infty$ (здесь $N = \max_{n \in \mathbb{N}}\{\|u\|_{1,\infty}, \|u_n\|_{1,\infty}\}$). Если $p = +\infty$, то последовательность $\{a_n - \widehat{a}_n\}$ сходится к нулю в $\mathrm{L}^1(\Omega)$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Поэтому рассмотрим случай $1 < p < +\infty$.

По свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует $\delta_1 > 0$ такое, что для любого измеримого множества $D \subseteq \Omega$, удовлетворяющего условию $\mu(D) < \delta_1$ (здесь μ — мера Лебега), справедливы следующие неравенства:

$$\int_D \beta d\mu < \frac{\varepsilon}{10}, \quad \int_D |u|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{5C}, \quad \int_D |\nabla u|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{5C}.$$

Кроме того, по необходимому условию из теоремы Витали о сходимости в L^p, из сходимости последовательности u_n к u в $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ следует, что существует $\delta_2 > 0$ такое, что для любого измеримого множества $D \subseteq \Omega$, удовлетворяющего неравенству $\mu(D) < \delta_2$, будет

$$\int_D |u_n|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{5C}, \quad \int_D |\nabla u_n|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{5C} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, воспользовавшись неравенством (2.12), получаем, что для любого измеримого множества $D \subseteq \Omega$, удовлетворяющего неравенству $\mu(D) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, будет $\int_D |a_n - \widehat{a}_n| d\mu < \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим $\Omega_N = \{x \in \Omega \mid |x| \leqslant N\}$. Так как $\beta \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ и $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, то найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_N} \beta d\mu < \frac{\varepsilon}{10}, \quad \int_{\Omega \setminus \Omega_N} |u|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{5C}, \quad \int_{\Omega \setminus \Omega_N} |\nabla u|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{5C}$$

(см, например, [107, предложение 2.6.2]). Кроме того, по необходимому условию из теоремы Витали существует измеримое множество $E_\varepsilon \subseteq \Omega$ такое, что $\mu(E_\varepsilon) < +\infty$ и

$$\int_{\Omega \setminus E_\varepsilon} |u_n|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{5C}, \quad \int_{\Omega \setminus E_\varepsilon} |\nabla u_n|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{5C} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, с помощью неравенства (2.12) получаем, что $\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} |a_n - \widehat{a}_n| d\mu < \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где $\Omega_\varepsilon = \Omega_N \cup E_\varepsilon$. Таким образом, выполнены достаточные условия теоремы Витали о сходимости в L^p и поэтому последовательность $\{a_n - \widehat{a}_n\}$ сходится к нулю в $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{v_{1n} - \widehat{v}_{1n}\}$. По условию роста на кодифференциальное отображение $D_{u,\xi} f$ найдутся $C > 0$ и неотрицательная п.в. функция $\gamma \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ такие, что

$$\begin{aligned}|v_{1n}(x) - \widehat{v}_{1n}(x)|^{p'} &\leqslant 2^{p'}\big(|v_{1n}(x)|^{p'} + |\widehat{v}_{2n}(x)|^{p'}\big) \leqslant \\ &\leqslant 2^{p'} 3^{p'} \Big(2|\gamma(x)|^{p'} + C^{p'}\big(|u(x)|^p + |\nabla u(x)|^p + |u_n(x)|^p + |\nabla u_n(x)|^p\big)\Big)\end{aligned}$$

для п.в. $x \in \Omega$, если $1 < p < +\infty$, и существует неотрицательная п.в. функция $\beta_N \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ такая, что $|v_{1n}(x) - \widehat{v}_{1n}(x)| \leqslant 2\beta_N(x)$ для п.в. $x \in \Omega$, если $p = +\infty$. Пользуясь данными оценками, теоремой Витали о сходимости в L^p в случае $1 < p < +\infty$ и теоремой Лебега о мажорируемой сходимости в случае $p = +\infty$, нетрудо показать, что последовательность $\{v_{1n} - \widehat{v}_{1n}\}$ сходится к нулю в $\mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Аналогичным образом доказывается сходимость к нулю последовательности $\{v_{2n} - \widehat{v}_{2n}\}$ в пространстве $\mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d})$.

Обозначим через $(\widehat{A}_n, \widehat{x}_n^*)$ элемент гиподифференциала $\underline{d}\mathcal{I}(u)$, соответствующий измеримому сечению $\widehat{z}_n(\cdot) = (\widehat{a}_n(\cdot), \widehat{v}_{1n}(\cdot), \widehat{v}_{2n}(\cdot))$ многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ (см. (2.3)). Покажем, что $|A_n - \widehat{A}_n| + \|x_n^* - \widehat{x}_n^*\| \to 0$ при $n \to \infty$. Действительно, для любого $n \in \mathbb{N}$ будет

$$|A_n - \widehat{A}_n| \leqslant \int_\Omega |a_n(x) - \widehat{a}_n(x)|\, dx = \|a_n - \widehat{a}_n\|_1,$$

откуда следует, что $|A_n - \widehat{A}_n| \to 0$ при $n \to \infty$. С помощью неравенства Гёльдера также имеем, что для любого $h \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned}\big|\langle x_n^* - \widehat{x}_n^*, h\rangle\big| &\leqslant \int_\Omega \big|\langle v_{1n}(x) - \widehat{v}_{1n}(x), h(x)\rangle\big|\, dx + \int_\Omega \big|\langle v_{2n}(x) - \widehat{v}_{2n}(x), \nabla h(x)\rangle\big|\, dx \leqslant \\ &\leqslant \Big(\|v_{1n} - \widehat{v}_{1n}\|_{p'} + \|v_{2n} - \widehat{v}_{2n}\|_{p'}\Big)\|h\|_{1,p}.\end{aligned}$$

Поэтому $\|x_n^* - \widehat{x}_n^*\| \leqslant \|v_{1n} - \widehat{v}_{1n}\|_{p'} + \|v_{2n} - \widehat{v}_{2n}\|_{p'}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\|x_n^* - \widehat{x}_n^*\| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда, учитывая тот факт, что $(\widehat{A}_n, \widehat{x}_n^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, получаем, что $\operatorname{dist}((A_n, x_n^*), \underline{d}\mathcal{I}(u)) \to 0$ при $n \to \infty$, что противоречит неравенству $\operatorname{dist}((A_n, x_n^*), \underline{d}\mathcal{I}(u)) \geqslant \theta$. Таким образом, соотношение (2.11) не выполняется, что и требовалось доказать.

Случай $p = 1$. Обозначим через S^ℓ стандартный симплекс в $\mathbb{R}^\ell$, т. е.

$$S^\ell = \Big\{\alpha = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(\ell)}) \in \mathbb{R}^\ell \;\Big|\; \alpha^{(1)} + \ldots + \alpha^{(\ell)} = 1,\ \alpha^{(i)} \geqslant 0\ \ \forall i \in \{1, \dots, \ell\}\Big\}.$$

Для любых $\alpha \in \mathbb{R}^\ell$, $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}^m$ и $\xi \in \mathbb{R}^{m\times d}$ положим

$$g(x, u, \xi, \alpha) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha^{(i)}(f_i(x, u, \xi), v_{1i}, v_{2i}). \tag{2.13}$$

Легко видеть, что g — отображение Каратеодори и $g(x,u,\xi,S^\ell) = \underline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi)$ для всех (x,u,ξ) по определению выпуклой оболочки (см. (2.4)).

Напомним, что $z_n(\cdot) = (a_n(\cdot), v_{1n}(\cdot), v_{2n}(\cdot))$ — измеримое сечение многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_n(\cdot), \nabla u_n(\cdot))$ такое, что для соответствующего ему элемента $(A_n, x_n^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u_n)$ выполняется неравенство $\operatorname{dist}((A_n, x_n^*), \underline{d}\mathcal{I}(u)) \geqslant \theta$. По определению для любого $n \in \mathbb{N}$ и для п.в. $x \in \Omega$ будет $z_n(x) \in g(x, u_n(x), \nabla u_n(x), S^\ell)$. Следовательно, по теореме Филиппова [87, теорема 8.2.10] для любого $n \in \mathbb{N}$ существует измеримая функция $\alpha_n \colon \Omega \to S^\ell$ такая, что $z_n(x) = g(x, u_n(x), \nabla u_n(x), \alpha_n(x))$ для п.в. $x \in \Omega$. Положим

$$\widehat{z}_n(\cdot) = (\widehat{a}_n(\cdot), \widehat{v}_{1n}(\cdot), \widehat{v}_{2n}(\cdot)) = g(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot), \alpha_n(\cdot)).$$

Ясно, что $\widehat{z}_n$ — измеримое сечение многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$. Обозначим через $(\widehat{A}_n, \widehat{x}_n^*)$, соответствующий ему элемент гиподифференциала $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ (см. (2.3)).

Из определения функции g (см. (2.13)) и определения $\widehat{z}_n$ следует, что $x_n^* = \widehat{x}_n^*$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, для всех $n \in \mathbb{N}$ и п.в. $x \in \Omega$ выполняется неравенство

$$|a_n(x) - \widehat{a}_n(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{\ell} \alpha^{(i)}(x) \big| f_i(x, u_n(x), \nabla u_n(x)) - f_i(x, u(x), \nabla u(x)) \big|.$$

Отсюда, в частности, следует, что $|a_n(x) - \widehat{a}_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$ для п.в. $x \in \Omega$, поскольку по нашим предположениям $u_n \to u$ и $\nabla u_n \to \nabla u$ почти всюду, а функции f_i являются отображениями Каратеодори, т. е. они непрерывны по (u,ξ).

По условию роста на кодифференциальное отображение $D_{u,\xi} f(\cdot)$ (см. определение 2.1.1) существуют $C > 0$ и неотрицательная п.в. функция $\beta \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ такие, что

$$|a_n(x) - \widehat{a}_n(x)| \leqslant \beta(x) + C\big(|u(x)| + |\nabla u(x)| + |u_n(x)| + |\nabla u_n(x)|\big)$$

для п.в. $x \in \Omega$. Воспользовавшись этим неравенством и теоремой Витали о сходимости в L^p, как и при рассмотрении случая $1 < p \leqslant +\infty$, нетрудно показать, что $|a_n - \widehat{a}_n|$ сходится к нулю в $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Следовательно, $|A_n - \widehat{A}_n| \leqslant \int_\Omega |a_n - \widehat{a}_n| d\mu$ также сходится к нулю при $n \to \infty$, т. е. $|A_n - \widehat{A}_n| + \|x_n^* - \widehat{x}_n^*\| \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\operatorname{dist}((A_n, x_n^*), \underline{d}\mathcal{I}(u)) \to 0$ при $n \to \infty$, что вновь противоречит неравенству $\operatorname{dist}((A_n, x_n^*), \underline{d}\mathcal{I}(u)) \geqslant \theta$. $\square$

Из теорем 2.1.1 и 1.2.1, следствия 1.2.2 и предложения 1.2.6 вытекает справедливость следующего утверждения о квазидифференцируемости функционала $\mathcal{I}$.

Следствие 2.1.1. *Пусть интегрант f удовлетворяет условиям кодифференцируемости порядка $p \in [1, +\infty]$ и предположим, что либо $1 < p \leqslant +\infty$, либо множество Ω ограничено и удовлетворяет условию сегмента, а многозначные отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ и $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ имеют* *вид* (2.4). *Тогда функционал $\mathcal{I}$ является локально липшицевым, квазидифференцируемым и дифференцируемым по направлениям в смысле Адамара в каждой точке $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, а пара $\mathscr{D}\mathcal{I}(u) = [\underline{\partial}\mathcal{I}(u), \overline{\partial}\mathcal{I}(u)]$, где*

$$\underline{\partial}\mathcal{I}(u) = \{x^* \in X^* \mid (0, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)\}, \quad \overline{\partial}\mathcal{I}(u) = \{y^* \in X^* \mid (0, y^*) \in \overline{d}\mathcal{I}(u)\},$$

$X = W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, *а множества $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ и $\overline{d}\mathcal{I}(u)$ определены в теореме 2.1.1, является квазидифференциалом функционала $\mathcal{I}$ в точке u.*

Замечание 2.1.4. Напомним, что по определению кодифференциала $a \leqslant 0$ для всех $(a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi)$. Поэтому по теореме 2.1.1 и предыдущему следствию $x^* \in \underline{\partial}\mathcal{I}(u)$ тогда и только тогда, когда найдётся измеримое сечение $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ такое, что $a(x) = 0$ для п.в. $x \in \Omega$ и

$$\langle x^*, h\rangle = \int_\Omega \big(\langle v_1(x), h(x)\rangle + \langle v_2(x), \nabla h(x)\rangle\big)\, dx \quad \forall h \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m).$$

Аналогичным образом можно охарактеризовать элементы множества $\overline{\partial}\mathcal{I}(u)$.

Обозначим через $\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^m)$ замыкание пространства $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega;\mathbb{R}^m)$ бесконечно непрерывно дифференцируемых функций $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ с компактным носителем в пространстве Соболева $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Для того чтобы получить условия экстремума для негладких задач вариационного исчисления с заданными граничными условиями, нам потребуется рассматривать квазидифференциал сужения функционала $\mathcal{I}$ на пространство $\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Для полноты изложения приведём очевидные формулы для данного квазидифференциала. Они могут быть строго получены с помощью вычисления кодифференциала сужения функционала $\mathcal{I}$ на пространство $\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^m)$ по следствию 1.2.6 и последующего применения теоремы 1.2.1, следствия 1.2.2 и предложения 1.2.6.

Следствие 2.1.2. *Пусть интегрант f удовлетворяет условия кодифференцируемости порядка $p \in [1, +\infty]$, функция $u_0 \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ фиксирована, и предположим, что либо $1 < p \leqslant +\infty$, либо множество Ω ограничено и удовлетворяет условию сегмента, а многозначные отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ и $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ имеют вид* (2.4). *Тогда функционал $\mathcal{J} \colon W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$, $\mathcal{J}(u) = \mathcal{I}(u_0 + u)$ является локального липшицевым, а также квазидифференцируемым и дифференцируемым по направлениям в смысле Адамара в каждой точке $u \in W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Более того, пара $\mathscr{D}\mathcal{J}(u) = [\underline{\partial}\mathcal{J}(u), \overline{\partial}\mathcal{J}(u)]$, где*

$$\underline{\partial}\mathcal{J}(u) = \Big\{x^* \in X^* \;\Big|\; \langle x^*, h\rangle = \int_\Omega \big(\langle v_1(x), h(x)\rangle + \langle v_2(x), \nabla h(x)\rangle\big)\, dx \ \ \forall h \in W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^m),$$
$$(0, v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \text{ — измеримое сечение отображения } \underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, \widehat{u}(\cdot), \nabla\widehat{u}(\cdot))\Big\}$$

$$\overline{\partial}\mathcal{J}(u) = \Big\{ y^* \in X^* \;\Big|\; \langle y^*, h\rangle = \int_\Omega \big(\langle w_1(x), h(x)\rangle + \langle w_2(x), \nabla h(x)\rangle\big)\, dx \;\; \forall h \in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m),$$
$$(0, w_1(\cdot), w_2(\cdot)) \text{ — измеримое сечение отображения } \overline{d}_{u,\xi} f(\cdot, \widehat{u}(\cdot), \nabla\widehat{u}(\cdot))\Big\},$$

$X = W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ и $\widehat{u} = u_0 + u$, является квазидифференциалом функционала $\mathcal{J}$ в точке u.

Замечание 2.1.5. Без предположения о том, что в случае $p = 1$ многозначные отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ и $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ имеют вид (2.4), функционал $\mathcal{J}$ из предыдущего следствия корректно определён на $\mathrm{W}_0^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ и квазидифференцируем, поскольку данное предположение необходимо только для доказательства непрерывности по Хаусдорфу многозначных отображений $\underline{d}\mathcal{I}(\cdot)$ и $\overline{d}\mathcal{I}(\cdot)$ и дифференцируемости функционалов $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ по направлениям в смысле Адамара в случае $p = 1$ (см. теорему 1.2.1 и предложение 1.2.6).

2.2 Условия экстремума для негладких задач вариационного исчисления

Данный параграф посвящён изучению условий экстремума для негладких задач вариационного исчисления в терминах кодифференциалов. Мы получим эти условия с помощью общих необходимых условий экстремума для негладких задач математического программирования в банаховых пространствах из предыдущей главы. Для краткости мы рассмотрим только классическую задачу вариационного исчисления, негладкую задачу Больцы с дополнительными ограничениями и негладкую изопериметрическую задачу, хотя полученные в данной главе результаты могут быть распространены и на случай более общих задач вариационного исчисления.

2.2.1 Негладкая классическая задача вариационного исчисления

Рассмотрим следующую задачу вариационного исчисления:

$$\mathcal{I}(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \to \min, \quad u \in u_0 + \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m). \tag{2.14}$$

Здесь, как и в предыдущем параграфе, $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$, $f = f(x, u, \xi)$, — заданная негладкая функция, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ — произвольное открытое множество, а $u_0 \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ некоторая фиксированная функция, определяющая граничные условия.

По существу, задача (2.14) представляет из себя задачу минимизации функционала $\mathcal{I}(u)$ на множестве всех функций $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющих граничному условию $u|_{\partial\Omega} = \psi$ для некоторой заданной функции ψ, где $\partial\Omega$ — граница множества Ω. А именно,

$\psi = u_0|_{\partial\Omega}$. Однако, для того чтобы избежать использование оператора следа, необходимого для рассмотрения граничных значений функций из пространства Соболева, мы будем рассматривать классическую задачу вариационного исчисления в более общей форме (2.14).

Напомним, что функция $v \in \mathrm{L}^1_{loc}(\Omega)$ называется обобщённой дивергенцией вектор-функции $u \in \mathrm{L}^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$, если

$$\int_\Omega v\varphi dx = -\int_\Omega \langle u, \nabla\varphi \rangle dx \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega).$$

Функция v при этом обозначается через $\operatorname{div} u$. Обозначим через $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d}; \operatorname{div})$ пространство всех функций $u \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d})$, для которых существует обобщённая дивергенция $\operatorname{div} u = (\operatorname{div}(u_{11}, \ldots, u_{1d}), \ldots, \operatorname{div}(u_{m1}, \ldots, u_{md}))^T$ и $\operatorname{div} u \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Заметим, что в одномерном случае (т. е. когда $d = 1$) обобщённая дивергенция $\operatorname{div} u$ совпадает со слабой производной u', откуда следует, что в этом случае пространство $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^{m\times 1}; \operatorname{div})$ совпадает с пространством Соболева $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Теорема 2.2.1. *Пусть интегрант f удовлетворяет условиям кодифференцируемости порядка $p \in [1, +\infty]$ и пусть либо $1 < p \leqslant +\infty$, либо множество Ω ограничено и удовлетворяет условию сегмента. Пусть также u_* — точка локального минимума в задаче* (2.14). *Тогда для любого измеримого сечения $(b(\cdot), w_1(\cdot), w_2(\cdot))$ многозначного отображения $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_*(\cdot), \nabla u_*(\cdot))$ такого, что $b(x) = 0$ для п.в. $x \in \Omega$, существует функция $\zeta \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d}; \operatorname{div})$, удовлетворяющая включению Эйлера-Лагранжа:*

$$(0, \operatorname{div}(\zeta)(x), \zeta(x)) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u_*(x), \nabla u_*(x)) + (b(x), w_1(x), w_2(x)) \quad \text{для п.в. } x \in \Omega. \tag{2.15}$$

Доказательство. Обозначим $\mathcal{J}(h) = \mathcal{I}(u_* + h)$ для любого $h \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. По следствию 2.1.2 и замечанию 2.1.5 функционал $\mathcal{J}$ квазидифференцируем при $h = 0$. Эта функция очевидно является точкой локального минимума функционала $\mathcal{J}$. Поэтому в силу необходимого условия минимума в терминах квазидифференциалов $0 \in \underline{\partial}\mathcal{J}(0) + y^*$ для всех $y^* \in \overline{\partial}\mathcal{J}(0)$ (см. теорему 1.2.1 и предложение 1.2.2).

Выберем произвольное измеримое сечение $(b(\cdot), w_1(\cdot), w_2(\cdot))$ многозначного отображения $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_*(\cdot), \nabla u_*(\cdot))$ такое, что $b(x) = 0$ для п.в. $x \in \Omega$, и положим

$$\langle y_0^*, h \rangle = \int_\Omega \big(\langle w_1(x), h(x) \rangle + \langle w_2(x), \nabla h(x) \rangle \big)\, dx \quad \forall h \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m).$$

Заметим, что $y_0^* \in \overline{\partial}\mathcal{J}(0)$ по следствию 2.1.2. Поэтому существует $x_0^* \in \underline{\partial}\mathcal{J}(0)$ такое, что $x_0^* + y_0^* = 0$. Отсюда, воспользовавшись следствием 2.1.2 ещё раз, получим, что существует измеримое сечение $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_*(\cdot), \nabla u_*(\cdot))$ такое

$a(x) = 0$ для п.в. $x \in \Omega$ и

$$\int_\Omega \big(\langle v_1(x) + w_1(x), h(x)\rangle + \langle v_2(x) + w_2(x), \nabla h(x)\rangle\big)\, dx = 0 \quad \forall h \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m).$$

Положим $\zeta = v_2 + w_2$. Предыдущее равенство означает, что существует обобщённая дивергенция функции ζ и $\operatorname{div} \zeta = v_1 + w_1$. Из условий роста на кодифференциальное отображение $D_{u,\xi} f(\cdot)$ (см. определение 2.1.1) очевидным образом следует, что $v_2 + w_2 \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d})$ и $v_1 + w_1 \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Таким образом, функция ζ принадлежит пространству $\mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d}; \operatorname{div})$ и удовлетворяет включению Эйлера-Лагранжа (2.15), что и требовалось доказать. $\square$

Приведём простой пример применения условий экстремума из предыдущей теоремы.

Пример 2.2.1. Пусть $d = 2$, $m = 1$, $p = 1$ и $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\mathcal{I}(u) = \int_\Omega \big(|u'_{x^{(1)}}(x)| - |u'_{x^{(2)}}(x)|\big)\, dx \to \min_{u \in \mathrm{W}^{1,1}(\Omega)}, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.16}$$

В данном случае $f(x, u, \xi) = |\xi^{(1)}| - |\xi^{(2)}|$ и можно положить $u_0 = 0$ (см. задачу (2.14)). Проверим, является ли функция $u_* = 0$ точкой локального минимума в задаче (2.16).

Для этого сначала воспользуемся необходимыми условиями экстремума в терминах субдифференциала Кларка [48, теорема 4.6.1]. Обозначим $L(u, \xi) = |\xi^{(1)}| - |\xi^{(2)}|$. Субдифференциал Кларка данной функции в нуле имеет вид:

$$\partial_{Cl} L(0, 0) = \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Поэтому для функции $\zeta = 0$ будет $(\operatorname{div} \zeta(x), \zeta(x)) \in \partial_{Cl} L(u_*(x), \nabla u_*(x))$ для всех $x \in \Omega$, то есть в точке $u_* = 0$ выполнены необходимые условия экстремума в терминах субдифференциала Кларка [48, теорема 4.6.1]. Нетрудно проверить, что в точке u_* также выполняются необходимые условия экстремума в терминах т.н. K-субдифференциалов [336, теорема 3.3].

Воспользуемся теперь условиями экстремума из теоремы 2.2.1. Применяя правила кодифференциального исчисления из предыдущей главы, получим

$$\underline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi) = \operatorname{co}\big\{(\pm\xi^{(1)} - |\xi^{(1)}|, 0, \pm 1, 0)\big\}, \quad \overline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi) = \operatorname{co}\big\{(\pm\xi^{(2)} + |\xi^{(2)}|, 0, 0, \pm 1)\big\}$$

(здесь первая координата — a, вторая — v_1, а третья и четвёртая — v_2, в обозначениях предыдущего параграфа). Следовательно, интегрант f удовлетворяет условиям кодифференцируемости порядка $p = 1$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$w_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \left[-1 + \frac{k-1}{n}, -1 + \frac{2k-1}{2n}\right), k \in \{1, \ldots, 2n\}, \\ -1, & \text{если } t \in \left[-1 + \frac{2k-1}{2n}, -1 + \frac{k}{n}\right), k \in \{1, \ldots, 2n\}. \end{cases} \tag{2.17}$$

Ясно, что отображение $(0, w_1(\cdot), w_2^n(\cdot))$, где $w_1(x) = 0$ и $w_2^n = (0, w_n(x^{(2)}))$ для всех $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$, является измеримым сечением многозначного отображения $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_*(\cdot), \nabla u_*(\cdot))$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Предположим, что условия экстремума из теоремы 2.2.1 выполняются в точке u_*. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует функция $\zeta \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{2\times 1}; \mathrm{div})$ такая, что

$$(0, \mathrm{div}(\zeta)(x), \zeta(x)) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u_*(x), \nabla u_*(x)) + (0, w_1(x), w_2^n(x)) = \mathrm{co}\left\{(0, 0, \pm 1, w_n(x^{(2)}))\right\}$$

для п.в. $x \in \Omega$. Отсюда следует, что $\mathrm{div}(\zeta)(x) = 0$, $|\zeta_1(x)| \leqslant 1$, и $\zeta_2(x) = w_n(x^{(2)})$ для п.в. $x \in \Omega$. Поэтому по определению обобщённой дивергенции

$$\int_\Omega \big(\zeta_1(x)\varphi'_{x^{(1)}}(x) + w_n(x^{(2)})\varphi'_{x^{(2)}}(x)\big) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega). \tag{2.18}$$

Заметим, что данное равенство выполняется для всех $\varphi \in \mathrm{W}_0^{1,1}(\Omega)$, поскольку w_n и ζ_1 принадлежат $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Положим $\psi_n(t) = 2n\int_{-1}^t w_n(\tau)\,d\tau$ для всех $t \in (-1, 1)$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ определим $\varphi_n(x) = (-(x^{(1)})^2 + 1)\psi_n(x^{(2)})$. Заметим, что $\varphi_n \in \mathrm{W}_0^{1,1}(\Omega)$ в силу того, что $\varphi_n(x) = 0$ для всех $x \in \partial\Omega$. Поэтому с учётом (2.18) имеем

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega \langle \zeta(x), \nabla\varphi_n(x)\rangle\,dx &= \int_\Omega \big(-2\zeta_1(x)x^{(1)}\psi_n(x^{(2)}) + 2n(-(x^{(1)})^2 + 1)\big)\,dx = \\ &= -\int_\Omega 2\zeta_1(x)x^{(1)}\psi_n(x^{(2)})\,dx + \frac{16n}{3} \geqslant -4 + \frac{16n}{3} > 0 \quad \forall n \geqslant 1, \end{aligned}$$

что невозможно (справедливость предпоследнего неравенства следует из того, что для всех $x \in \Omega$ будет $|\zeta_1(x)| \leqslant 1$ и $\psi_n(x^{(2)}) \in [0, 1]$; см. (2.17)). Таким образом, условия экстремума из теоремы 2.2.1 не выполняются в точке $u_* = 0$, в отличие от условий экстремума в терминах субдифференциала Кларка.

Значит, $u_* = 0$ не является точкой локального минимума в задаче (2.16). Поскольку функционал $\mathcal{I}$ в задаче (2.16) положительно однороден, отсюда следует, что он не ограничен снизу на $\mathrm{W}_0^{1,1}(\Omega)$ и глобальный минимум в задаче (2.16) не достигается.

2.2.2 Негладкая задача Больцы с ограничениями

Рассмотрим теперь задачу с дополнительными ограничениями на границе множества Ω. Для простоты изложения мы ограничимся одномерным случаем (т. е. $d = 1$). А именно, рассмотрим следующую вариационную задачу:

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}(u) = \int_\alpha^\beta f(x, u(x), u'(x))\,dx + g_0(u(\alpha), u(\beta)) \to \min, \quad u \in \mathrm{W}^{1,p}((\alpha, \beta); \mathbb{R}^m), \\ &g_i(u(\alpha), u(\beta)) \leqslant 0, \quad i \in I, \quad g_j(u(\alpha), u(\beta)) = 0, \quad j \in J. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Здесь $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ (т. е. $\Omega = (\alpha, \beta)$), $f\colon (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, и $g_i\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i \in I \cup J \cup \{0\}$ — заданные негладкие функции, $I = \{1, \ldots, \ell\}$ и $J = \{\ell + 1, \ldots, \ell_2\}$ для некоторых $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Заметим также, что множество $\Omega = (\alpha, \beta)$ очевидно ограничено и удовлетворяет условию сегмента. Обозначим $I(u) = \{i \in I \mid g_i(u(\alpha), u(\beta)) = 0\}$.

Теорема 2.2.2. *Пусть интегрант f удовлетворяет условиям кодифференцируемости порядка $p \in [1, +\infty]$, многозначные отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ и $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ имеют вид (2.4) в случае $p = 1$ и функция u_* является точкой локального минимума в задаче (2.19). Предположим также, что функции g_i, $i \in I \cup J \cup \{0\}$, непрерывно кодифференцируемы в точке $(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, а множества $\underline{d} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))$ и $\overline{d} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, $j \in J$, являются выпуклыми многогранниками. Предположим наконец, что векторы $(0, s_{1i}, s_{2i}) \in \overline{d} g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, $i \in I$, $(0, s_{1j}, s_{2j}) \in \overline{d} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, и $(0, r_{1j}, r_{2j}) \in \underline{d} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, $j \in J$, удовлетворяют следующим условиям регулярности ограничений:*

$$C_j \cap \operatorname{cone}\big\{ -C_k \bigm| k \in J \setminus \{j\}\big\} = \varnothing \quad \forall j \in J, \tag{2.20}$$

$$\operatorname{co}\big\{\underline{\partial} g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta)) + (s_{1i}, s_{2i}) \bigm| i \in I(u_*)\big\} \cap \operatorname{cone}\big\{ -C_j \bigm| j \in J\big\} = \varnothing, \tag{2.21}$$

где $C_j = \{\underline{\partial} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta)) + (s_{1j}, s_{2j})\} \cup \{-(r_{1j}, r_{2j}) - \overline{\partial} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))\}$.

Тогда для всех $(0, s_{10}, s_{20}) \in \overline{d} g_0(u_*(\alpha), u_*(\beta))$ и для любого измеримого сечения $(b(\cdot), w_1(\cdot), w_2(\cdot))$ многозначного отображения $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_*(\cdot), u_*'(\cdot))$ такого, что $b(x) = 0$ для п.в. $x \in (\alpha, \beta)$, существуют абсолютно непрерывная функция $\zeta \in W^{1,p'}((\alpha, \beta); \mathbb{R}^m)$ и множители $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in I$, и $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j \geqslant 0$, $j \in J$, такие, что $\lambda_i g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta)) = 0$ для всех $i \in I$, включение Эйлера-Лагранжа

$$(0, \zeta'(x), \zeta(x)) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u_*(x), u_*'(x)) + (0, w_1(x), w_2(x)) \tag{2.22}$$

выполняется для п.в. $x \in (\alpha, \beta)$ и справедливо следующее условие трансверсальности:

$$\begin{gathered}(0, \zeta(\alpha), -\zeta(\beta)) \in \underline{d} g_0(u_*(\alpha), u_*(\beta)) + (0, s_{10}, s_{20}) + \sum_{i=1}^{\ell_1} \lambda_i \big(\underline{d} g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta)) + (0, s_{1i}, s_{2i})\big) \\ + \sum_{j=\ell_1+1}^{\ell_2} \underline{\mu}_j \big(\underline{d} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta)) + (0, s_{1j}, s_{2j})\big) - \sum_{j=\ell_1+1}^{\ell_2} \overline{\mu}_j \big((0, r_{1j}, r_{2j}) + \overline{d} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))\big).\end{gathered} \tag{2.23}$$

Доказательство. Преобразуем задачу (2.19). Напомним, что $u \in \mathrm{W}^{1,p}((\alpha, \beta); \mathbb{R}^m))$ тогда и только тогда, когда существует $h \in \mathrm{L}^p((\alpha, \beta); \mathbb{R}^m)$ такое, что $u(x) = u(\alpha) + \int_\alpha^x h(\tau) d\tau$ для п.в. $x \in (\alpha, \beta)$ (см., например, [300]). Поэтому линейный оператор $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}^m \times \mathrm{L}^p((\alpha, \beta); \mathbb{R}^m) \to \mathrm{W}^{1,p}((\alpha, \beta); \mathbb{R}^m))$, определённый по правилу $\mathcal{T}(\eta, h)(x) = \eta + \int_\alpha^x h(\omega)\, d\omega$ является изоморфизмом между $\mathbb{R}^m \times \mathrm{L}^p((\alpha,\beta);\mathbb{R}^m)$ и $\mathrm{W}^{1,p}((\alpha,\beta);\mathbb{R}^m))$ (непрерывность $\mathcal{T}$ проверяется непосредственно). Следовательно, пара $(u_*(\alpha), u_*')$ является точкой локального минимума в задаче

$$\mathcal{J}_0(\eta, h) \to \min_{(\eta,h)\in\mathbb{R}^m \times \mathrm{L}^p((\alpha,\beta);\mathbb{R}^m))}, \quad \mathcal{J}_i(\eta,h) \leqslant 0,\ i \in I, \quad \mathcal{J}_j(\eta,h) = 0,\ j \in J,$$

где $\mathcal{J}_0(\eta,h) = \mathcal{I}(\mathcal{T}(\eta,h))$ и $\mathcal{J}_i(\eta,h) = g_i(\eta, \mathcal{T}(\eta,h)(\beta))$, $i \in I \cup J$.

По нашему предположению функции g_i, $i \in I \cup \{0\}$ непрерывно кодифференцируемы в точке $(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, а функционал $\int_\alpha^\beta f(x, u(x), u'(x))\,dx$ является непрерывно кодифференцируемым по теореме 2.1.1. Следовательно, по теореме 1.2.4 функционалы $\mathcal{J}_i$, $i \in I \cup J \cup \{0\}$, являются непрерывно кодифференцируемыми в точке $(u_*(\alpha), u_*')$, множество

$$\begin{gathered}\Big\{(A, x^*) \in \mathbb{R} \times \big(\mathbb{R}^m \times \mathrm{L}^p((\alpha,\beta);\mathbb{R}^m)\big)^* \Bigm| A = \int_\alpha^\beta a(x)\,dx + a_0, \quad \forall (\eta,h) \in \mathbb{R}^m \times \mathrm{L}^p((\alpha,\beta);\mathbb{R}^m) \\ \langle x^*, (\eta,h)\rangle = \Big\langle \int_\alpha^\beta v_1(x)\,dx + r_1 + r_2, \eta \Big\rangle + \int_\alpha^\beta \Big\langle \int_x^\beta v_1(\tau) d\tau + v_2(x) + r_2, h(x) \Big\rangle\,dx, \\ (a_0, r_1, r_2) \in \underline{d} g_0(u_*(\alpha), u_*(\beta)),\ \ (a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \text{ — измеримое сечение } \underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_*(\cdot), u_*'(\cdot))\Big\}\end{gathered} \tag{2.24}$$

является гиподифференциалом функционала $\mathcal{J}_0$ в точке $(u_*(\alpha), u_*')$, а множество

$$\begin{aligned}\Big\{(a, x^*) \in \mathbb{R} \times \big(\mathbb{R}^m \times \mathrm{L}^p((\alpha,\beta);\mathbb{R}^m)\big)^* \Bigm| \langle x^*, (\eta,h)\rangle = \langle r_1 + r_2, \eta\rangle + \int_\alpha^\beta \langle r_2, h(x)\rangle dx \\ \forall (\eta,h) \in \mathbb{R}^m \times \mathrm{L}^p((\alpha,\beta);\mathbb{R}^m), \quad (a, r_1, r_2) \in \underline{d} g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta))\Big\}\end{aligned} \tag{2.25}$$

является гиподифференциалом функционала $\mathcal{J}_i$ в точке $(u_*(\alpha), u_*')$, $i \in I \cup J$. Гипердифференциалы $\overline{d}\mathcal{J}_i(u_*(\alpha), u_*')$ вычисляются аналогичным образом. Отсюда получаем, что функционалы $\mathcal{J}_i$, $i \in I \cup J \cup \{0\}$, квазидифференцируемы и дифференцируемы по направлениям в смысле Адамара в точке $(u_*(\alpha), u_*')$ по теореме 1.2.1 и предложению 1.2.6. Кроме того, легко видеть, что если гиподифференциал $\underline{d} g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta))$ является выпуклым многогранником, то гиподифференциал (2.25) и соответствующий ему субдифференциал $\underline{\partial}\mathcal{J}_i(u_*(\alpha), u_*')$ также являются выпуклыми многогранниками. Поэтому в силу нашего предположения функционалы $\mathcal{J}_j$, $j \in J$, являются полиэдрально квазидифференцируемыми в точке $(u_*(\alpha), u_*')$.

Воспользуемся необходимым условиям экстремума в терминах квазидифференциалов из следствия 1.2.9. Согласно этим условиям, если векторы $x_j^* \in \underline{\partial}\mathcal{J}_j(u_*(\alpha), u_*')$, $j \in J$, и $y_i^* \in \overline{\partial}\mathcal{J}_i(u_*(\alpha), u_*')$, $i \in I \cup J$, удовлетворяют условиям регулярности

$$\begin{gathered} D_j \cap \operatorname{cone}\{-D_k \mid k \in J \setminus \{j\}\} = \varnothing \quad \forall j \in J, \\ \operatorname{co}\big\{\underline{\partial}\mathcal{J}_i(u_*(\alpha), u_*') + y_i^* \bigm| i \in I(u_*)\big\} \cap \operatorname{cone}\{-D_j \mid j \in J\} = \varnothing \end{gathered} \tag{2.26}$$

(здесь $D_j = \{\underline{\partial}\mathcal{J}_j(u_*(\alpha), u'_*) + y_j^*\} \cup \{-x_j^* - \underline{\partial}\mathcal{J}_j(u_*(\alpha), u'_*)\}$ для всех $j \in J$), то для любого $y_0^* \in \overline{\partial}\mathcal{J}_0(u_*(\alpha), u'_*)$ существуют $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in I$, и $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j \geqslant 0$, $j \in J$, такие, что $\lambda_i \mathcal{J}_i(u_*(\alpha), u'_*) = 0$ для всех $i \in I$ и

$$\begin{gathered} 0 \in \underline{\partial}\mathcal{J}_0(u_*(\alpha), u'_*) + y_0^* + \sum_{i \in I} \lambda_i \big(\underline{\partial}\mathcal{J}_j(u_*(\alpha), u'_*) + y_i^*\big) + \\ + \sum_{j \in J} \underline{\mu}_j \big(\underline{\partial}\mathcal{J}_j(u_*(\alpha), u'_*) + y_j^*\big) - \sum_{j \in J} \overline{\mu}_j \big(x_j^* + \overline{\partial}\mathcal{J}_j(u_*(\alpha), u'_*)\big). \end{gathered} \tag{2.27}$$

Перепишем эти условия в терминах исходной задачи (2.19).

Для любой пары $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ определим линейный непрерывный функционал $\Theta(s_1, s_2)$ по следующему правилу:

$$\langle \Theta(s_1, s_2), (\eta, h) \rangle = \langle s_1 + s_2, \eta \rangle + \int_\alpha^\beta \langle s_2, h(x) \rangle dx \quad \forall (\eta, h) \in \mathbb{R}^m \times \mathrm{L}^p((\alpha, \beta); \mathbb{R}^m). \tag{2.28}$$

Зафиксируем произвольные $(0, s_{1i}, s_{2i}) \in \overline{d}g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, $i \in I \cup J$, и $(0, r_{1j}, r_{2j}) \in \underline{d}g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, $j \in J$, удовлетворяющие условиям регулярности (2.20) и (2.21), и положим $y_i^* = \Theta(s_{1i}, s_{2i})$, $i \in I \cup J$, и $x_j^* = \Theta(r_{1j}, r_{2j})$, $j \in J$. Тогда $y_i^* \in \overline{\partial}\mathcal{J}_i(u_*(\alpha), u'_*)$ для всех $i \in I \cup J$ и $x_j^* \in \underline{\partial}\mathcal{J}_j(u_*(\alpha), u'_*)$ для всех $j \in J$ согласно равенству (2.25) и теореме 1.2.1. Проверим, что эти функционалы y_i^* и x_j^* удовлетворяют условию регулярности (2.26).

Действительно, в силу теоремы 1.2.1 и равенства (2.25) будет $\Theta(\underline{\partial}g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta)) = \underline{\partial}\mathcal{J}_j(u_*(\alpha), u'_*)$. Аналогичное равенство выполняется для супердифференциалов. Отсюда, учитывая тот факт, что Θ линейный оператор (см. (2.28)), получаем, что $\Theta(C_j) = D_j$, $j \in J$, и $\Theta(\operatorname{cone}\{C_k \mid k \in J \setminus \{j\}\}) = \operatorname{cone}\{D_k \mid k \in J \setminus \{j\}\}$ для всех $j \in J$. Легко проверить, что оператор Θ инъективен. Поэтому из (2.20) вытекает справедливость первого условия в (2.26), в то время как из (2.21) следует справедливость второго условия в (2.26).

Таким образом, выполняется условие регулярности (2.26). Поэтому, воспользовавшись условием экстремума (2.27), явными формулами для кодифференциалов (2.24) и (2.25) и теоремой 1.2.1, получим, что для любого вектора $(0, s_{10}, s_{20}) \in \overline{d}g_0(u_*(\alpha), u_*(\beta))$ и для любого измеримого сечения $(b(\cdot), w_1(\cdot), w_2(\cdot))$ многозначного отображения $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_*(\cdot), u'_*(\cdot))$ такого, что $b(x) = 0$ для п.в. $x \in (\alpha, \beta)$, существуют $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in I$, $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j \geqslant 0$, $j \in J$, векторы $(0, r_{1i}, r_{2i}) \in \underline{d}g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, $i \in I \cup \{0\}$, $(0, \xi_{1j}, \xi_{2j}) \in \underline{d}g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, $j \in J$, и $(0, y_{1j}, y_{2j}) \in \overline{d}g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, $j \in J$, а также измеримое сечение $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_*(\cdot), u'_*(\cdot))$ такие, что $a(x) = 0$ для п.в. $x \in (\alpha, \beta)$, $\lambda_i g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta)) = 0$ для всех $i \in I$,

$$\left\langle \int_\alpha^\beta (v_1(x) + w_1(x))\,dx + r_{10} + r_{20} + s_{10} + s_{20} + \sum_{i\in I} \lambda_i \big(r_{1i} + r_{2i} + s_{1i} + s_{2i}\big) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j\in J} \underline{\mu}_j \big(\xi_{1j} + \xi_{2j} + s_{1j} + s_{2j}\big) - \sum_{j\in J} \overline{\mu}_j \big(r_{1j} + r_{2j} + y_{1j} + y_{2j}\big), \eta \right\rangle = 0 \quad (2.29)$$

для всех $\eta \in \mathbb{R}^m$ и

$$\int_\alpha^\beta \left\langle \int_x^\beta (v_1(\tau) + w_1(\tau))\,d\tau + v_2(x) + w_2(x) + r_{20} + s_{20} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i\in I} \lambda_i \big(r_{2i} + s_{2i}\big) + \sum_{j\in J} \underline{\mu}_j \big(\xi_{2j} + s_{2j}\big) - \sum_{j\in J} \overline{\mu}_j \big(r_{2j} + y_{2j}\big), h(x) \right\rangle dx = 0 \quad (2.30)$$

для всех $h \in \mathrm{L}^p((\alpha,\beta);\mathbb{R}^m)$. Для любого $x \in [\alpha,\beta]$ положим

$$\zeta(x) = -\int_x^\beta (v_1(\tau) + w_1(\tau))\,d\tau - r_{20} - s_{20} - \sum_{i\in I} \lambda_i \big(r_{2i} + s_{2i}\big) - \sum_{j\in J} \underline{\mu}_j \big(\xi_{2j} + s_{2j}\big) + \sum_{j\in J} \overline{\mu}_j \big(r_{2j} + y_{2j}\big).$$

Функция ζ абсолютно непрерывна. Кроме того, она удовлетворяет условию

$$(0, \zeta'(x), \zeta(x)) = (0, v_1(x) + w_1(x), v_2(x) + w_2(x)) \quad \text{для п.в. } x \in (\alpha,\beta) \quad (2.31)$$

в силу (2.30), $\zeta \in \mathrm{W}^{1,p'}((\alpha,\beta);\mathbb{R}^m)$ в силу условия роста на кодифференциальное отображение $D_{u,\xi} f(\cdot)$ (см. определение 2.1.1) и

$$(0, \zeta(\alpha), -\zeta(\beta)) = (0, r_{10} + s_{10}, r_{20} + s_{20}) + \sum_{i\in I} \lambda_i \big(0, r_{1i} + s_{1i}, r_{2i} + s_{2i}\big) +$$

$$+ \sum_{j\in J} \underline{\mu}_j \big(0, \xi_{1j} + s_{1j}, \xi_{2j} + s_{2j}\big) - \sum_{j\in J} \overline{\mu}_j \big(0, r_{1j} + y_{1j}, r_{2j} + y_{2j}\big)$$

согласно (2.29). Остаётся заметить, что последнее равенство эквивалентно выполнению условия трансверсальности (2.23), а равенство (2.31) эквивалентно включению (2.22). $\square$

Рассмотрим пример применения условий экстремума из предыдущей теоремы. Для краткости мы рассмотрим только пример негладкой задачи Больцы без ограничений. Аналогичный пример задачи с ограничениями имеется в работе автора [199].

Пример 2.2.2 (пример 2 из [268])**.** Пусть $\alpha = 0$ и $\beta = 1$. Рассмотрим следующую задачу Больцы:

$$\mathcal{I}(u) = u(0) - \gamma u(1) + \int_0^1 \max\{|u'(x)| - |u(x)|, 0\}\,dx \to \min, \quad u \in \mathrm{W}^{1,1}(0,1). \quad (2.32)$$

В данном случае $g_0(u(0), u(1)) = u(0) - \gamma u(1)$ и $f(x,u,\xi) = \max\{|\xi| - |u|, 0\}$. Проверим, является ли функция $u_\alpha(x) = \alpha e^x$ точкой локального минимума функционала $\mathcal{I}$ для каких-либо значений параметров $\alpha \geqslant 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$.

Воспользуемся сначала условиями экстремума в терминах различных субдифференциалов. Рассмотрим условия в терминах субдифференциала Кларка [120, теорема 2.4]. Положим $L(u,\xi) = \max\{|\xi| - |u|, 0\}$. Субдифференциал Кларка этой функции имеет вид:

$$\partial_{Cl} L(u,\xi) = \begin{cases} [-1,1] \times [-1,1], & \text{если } u = \xi = 0, \\ \mathrm{co}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}, & \text{если } u = \xi > 0. \end{cases}$$

Поэтому включение Эйлера-Лагранжа принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \zeta'(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} \in \partial_{Cl} L(u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) = \begin{cases} [-1,1] \times [-1,1], & \text{если } \alpha = 0, \\ \mathrm{co}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}, & \text{если } \alpha > 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

Условие трансверсальности в данном случае имеет вид $(\zeta(0), -\zeta(1)) = \nabla g_0(u_\alpha(0), u_\alpha(1)) = (1, -\gamma)$, т. е. $\zeta(0) = 1$ и $\zeta(1) = \gamma$. Отсюда с помощью (2.33) получаем, что $\gamma \in [0,1]$, т.к. $\zeta(x) \in [0,1]$ для всех $x \in [0,1]$ при $\alpha > 0$, а также $|\zeta(x)| \leqslant 1$ и $|\zeta'(x)| \leqslant 1$ при $\alpha = 0$. Если $\alpha = 0$ и $\gamma \in [0,1]$, то функция $\zeta(x) = 1 - (1-\gamma)x$ удовлетворяет включению Эйлера-Лагранжа и условию трансверсальности. Если же $\alpha > 0$, то из (2.33) следует, что $\zeta'(x) = -\zeta(x)$ для п.в. $x \in [0,1]$, откуда получаем, что условия экстремума не выполняются при $\gamma \neq e^{-1}$. В противном случае они выполняются для $\zeta(x) = e^{-x}$. Таким образом, условия экстремума в терминах субдифференциала Кларка из [120] выполняются при $\alpha = 0$ и $\gamma \in [0,1]$ или при $\alpha > 0$ и $\gamma = e^{-1}$.

Проверим также другие необходимые условия экстремума в терминах субдифференциала Кларка [48, теорема 4.4.3]. Субдифференциалы Кларка функции $L(u,\xi)$ по переменным u и ξ имеют вид:

$$\partial_{Cl,u} L(u,\xi) = \begin{cases} [-1,0], & \text{если } u = \xi > 0, \\ \{0\}, & \text{если } u = \xi = 0, \end{cases} \qquad \partial_{Cl,\xi} L(u,\xi) = \begin{cases} [0,1], & \text{если } u = \xi > 0, \\ [-1,1], & \text{если } u = \xi = 0. \end{cases}$$

Поэтому включение Эйлера-Лагранжа из [48, теорема 4.4.3] принимает вид:

$$\zeta'(x) \in \partial_{Cl,u} L(u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) = \begin{cases} [-1,0], & \text{если } \alpha > 0, \\ \{0\}, & \text{если } \alpha = 0, \end{cases}$$

$$\zeta(x) \in \partial_{Cl,\xi} L(u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) = \begin{cases} [0,1], & \text{если } \alpha > 0, \\ [-1,1], & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Отсюда с помощью условия трансверсальности $\zeta(0) = 1$, $\zeta(1) = \gamma$ получаем, что $\zeta(x) \equiv 1$ и $\gamma = 1$ при $\alpha = 0$, в то время как $\gamma \in [0,1]$ при $\alpha > 0$. Более того, при $\alpha > 0$ функция

$\zeta(x) = 1-(1-\gamma)x$ удовлетворяет включению Эйлера-Лагранжа и условию трансверсальности. Кроме того, указанные функции ζ удовлетворяют условию Вейерштрасса

$$L(u_\alpha(x), \xi) - L(u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) - \zeta(x)(\xi - u'_\alpha(x)) \geqslant 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\,. \tag{2.34}$$

при всех $\alpha \geqslant 0$. Таким образом, условия экстремума из [48, теорема 4.4.3] выполняются при $\alpha = 0$ и $\gamma = 1$ или при $\alpha > 0$ и $\gamma \in [0, 1]$.

Воспользуемся также условиями экстремума в терминах предельного проксимального субдифференциала, полученными Иоффе и Рокафелларом [268]. Обозначим предельный проксимальный субдифференциал через ∂_p^∞ (по поводу исчисления данного субдифференциала см. монографии [126, 400]). Имеем

$$\partial_p^\infty L(u,\xi) = \begin{cases} \operatorname{co}\left\{\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\}, & \text{если } u = \xi > 0,\\ \operatorname{co}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right\} \cup \operatorname{co}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}, & \text{если } u = \xi = 0. \end{cases}$$

Поэтому включение Эйлера-Лагранжа из [268] принимает вид

$$\zeta'(x) \in \operatorname{co}\left\{w \in \mathbb{R} \;\middle|\; (w, \zeta(x)) \in \partial_p^\infty L(u_\alpha(x), u'_\alpha(x))\right\} = \begin{cases} \{-\zeta(x)\}, & \text{если } \alpha > 0,\\ \operatorname{co}\{\zeta(x), -\zeta(x)\}, & \text{если } \alpha = 0, \end{cases}$$

Кроме того $\zeta(x) \in [0, 1]$, если $\alpha > 0$, и $\zeta(x) \in [-1, 1]$, если $\alpha = 0$

С учётом условия трансверсальности $\zeta(0) = 1$ и $\zeta(1) = \gamma$ получаем, что в случае $\alpha > 0$ будет $\zeta(x) = e^{-x}$ и $\gamma = e^{-1}$. В случае $\alpha = 0$ будет $|\zeta'(x)| \leqslant 1$ и поэтому $\zeta(x) \geqslant 0$. Следовательно, $-\zeta(x) \leqslant \zeta'(x) \leqslant \zeta(x)$, откуда вытекает, что $e^{-x} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1$ и $\gamma \in [e^{-1}, 1]$. Для любого такого γ функция $\zeta(x) = e^{(\ln\gamma)x}$ удовлетворяет включению Эйлера-Лагранжа и условию трансверсальности. Более того, указанные функции ζ также удовлетворяют условию Вейерштрасса (2.34). Таким образом, условия экстремума в терминах предельного проксимального субдифференциала [268] выполняются при $\alpha = 0$ и $\gamma \in [e^{-1}, 1]$ или $\alpha > 0$ и $\gamma = e^{-1}$.

Проверим наконец условия экстремума в терминах кодифференциалов из теоремы 2.2.2. Условие трансверсальности в данном случае имеет вид $\zeta(0) = 1$, $\zeta(1) = \gamma$. Воспользовавшись правилами кодифференциального исчисления из предыдущей главы, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \underline{d}_{u,\xi} f(x, u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) &= \operatorname{co}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\alpha e^x\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\alpha e^x\\-1\\0\end{pmatrix}\right\},\\ \overline{d}_{u,\xi} f(x, u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) &= \operatorname{co}\left\{\begin{pmatrix}2\alpha e^x\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Если $\alpha > 0$, то единственным измеримым сечением $(b(x), w_1(x), w_2(x))$ многозначного отображения $\overline{d}_{u,\xi} f(x, u_\alpha(x), u'_\alpha(x))$ таким, что $b(x) = 0$ для п.в. $x \in (0, 1)$ является отображение

$(b(x), w_1(x), w_2(x)) \equiv (0, -1, 0)$. Включение Эйлера-Лагранжа для данного сечения принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \zeta'(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{co} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\alpha e^x \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\alpha e^x \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Откуда $\zeta' = -\zeta$ п.в. и поэтому с учётом условия трансверсальности $\zeta(x) = e^{-x}$ и $\gamma = e^{-1}$.

Рассмотрим теперь случай $\alpha = 0$. Для сечения $(b(x), w_1(x), w_2(x)) \equiv (0, -1, 0)$ многозначного отображения $\overline{d}_{u,\xi} f(x, u_\alpha(x), u'_\alpha(x))$ включение Эйлера-Лагранжа имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \zeta'(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{co} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(см. (2.35)). Отсюда $\zeta'(x) \leqslant 0$ для почти всех $x \in (0, 1)$ и $\zeta(1) \leqslant \zeta(0) = 1$. Поэтому необходимое условие минимума не выполнено для любого $\gamma > 1$. Аналогично, для сечения $(b(x), w_1(x), w_2(x)) \equiv (0, 1, 0)$ многозначного отображения $\overline{d}_{u,\xi} f(x, u_\alpha(x), u'_\alpha(x))$ включение Эйлера-Лагранжа имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \zeta'(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{co} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{2.36}$$

(см. (2.35)). Отсюда $\zeta'(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in [0, 1]$ и $\zeta(1) \geqslant \zeta(0) = 1$. Покажем, что $\zeta(1) > 1$. Действительно, если $\zeta'(x) > 0$ на множестве положительной меры, то $\zeta(1) > \zeta(0) = 1$. Если же $\zeta'(x) = 0$ почти всюду, то $\zeta(x) = 0$ на $[0, 1]$ (см. (2.36)), что противоречит условию трансверсальности $\zeta(0) = 1$. Поэтому $\zeta(1) > 1$ и, следовательно, необходимое условие минимума не выполнено для всех $\gamma \leqslant 1$. Таким образом, условия экстремума в терминах кодифференциалов выполнены только в случае $\alpha > 0$ и $\gamma = e^{-1}$, в то время как условия экстремума в терминах различных субдифференциалов выполнены и при других значениях параметров.

Заметим, что поскольку функционал $\mathcal{I}$ в рассматриваемой задаче очевидно является положительно однородным и, как было показано выше, функция $u \equiv 0$ не является точкой локального минимума в данной задаче ни при каком γ, можно сделать вывод, что функционал $\mathcal{I}$ не ограничен снизу на $\mathrm{W}^{1,1}(0, 1)$ и в задаче (2.32) нет точек глобального минимума. Вопрос о том, является ли функция $u_\alpha(x) = \alpha e^x$ точкой локального минимума функционала $\mathcal{I}$ при $\gamma = e^{-1}$ и $\alpha > 0$ остаётся открытым и, судя по всему, требует изучения достаточных условий минимума первого порядка для негладких вариационных задач.

2.2.3 Негладкая задача с изопериметрическими ограничениями

Рассмотрим теперь задачу с изопериметрическими ограничениями. Для простоты изложения мы изучим только случай задач с ограничениями-неравенствами. А именно, рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}_0(u) = \int_\Omega f_0(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \to \min, \\ &\mathcal{I}_i(u) = \int_\Omega f_i(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \leqslant \theta_i \quad i \in I, \quad u \in u_0 + \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество, $f_i \colon \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$, $f_i = f_i(x, u, \xi)$, — заданные негладкие функции, $\theta_i \in \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, \ldots, \ell\}$ и $u_0 \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ — фиксированная функция. Обозначим $I(u) = \{i \in I \mid \mathcal{I}_i(u) = \theta_i\}$.

Теорема 2.2.3. *Пусть функции f_i, $i \in I \cup \{0\}$, удовлетворяют условиям кодифференцируемости порядка $p \in [1, +\infty]$, и предположим, что либо $1 < p \leqslant +\infty$, либо множество Ω удовлетворяет условию сегмента. Предположим также, что u_* — точка локального минимума в задаче* (2.37)*, а $(b_i(\cdot), w_{1i}(\cdot), w_{2i}(\cdot))$ — измеримые сечения многозначных отображений $\overline{d}_{u,\xi} f_i(\cdot, u_*(\cdot), \nabla u_*(\cdot))$, $i \in I$, такие, что $b_i(x) = 0$ для п.в. $x \in \Omega$ и выполняется следующее условие регулярности: не существует функции $\zeta \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d}; \operatorname{div})$ такой, что*

$$(0, \operatorname{div}(\zeta)(x), \zeta(x)) \in \operatorname{co}\left\{ \underline{d}_{u,\xi} f_i(x, u_*(x), \nabla u_*(x)) + (b_i(x), w_{1i}(x), w_{2i}(x)) \;\middle|\; i \in I(u_*) \right\} \tag{2.38}$$

для п.в. $x \in \Omega$. Тогда для любого измеримого сечения $(b_0(\cdot), w_{10}(\cdot), w_{20}(\cdot))$ многозначного отображения $\overline{d}_{u,\xi} f_0(\cdot, u_*(\cdot), \nabla u_*(\cdot))$ такого, что $b_0(x) = 0$ для п.в. $x \in \Omega$ существуют $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in I$, и функция $\zeta \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d}; \operatorname{div})$ такие, что $\lambda_i(\mathcal{I}_i(u_*) - \theta_i) = 0$ для всех $i \in I$ и для п.в. $x \in \Omega$ выполняется включение Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{aligned} (0, \operatorname{div}(\zeta)(x), \zeta(x)) \in \underline{d}_{u,\xi} f_0(x, u_*(x), \nabla u_*(x)) + (b_0(x), w_{10}(x), w_{20}(x)) + \\ + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \Big(\underline{d}_{u,\xi} f_i(x, u_*(x), \nabla u_*(x)) + (b_i(x), w_{1i}(x), w_{2i}(x)) \Big). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Доказательство. Положим $\mathcal{J}_0(h) = \mathcal{I}_0(u_* + h)$ и $\mathcal{J}_i(h) = \mathcal{I}_i(u_* + h) - \theta_i$, $i \in I$, для любого $h \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. По следствию 2.1.2 и замечанию 2.1.5 функционалы $\mathcal{J}_i$ квазидифференцируемы в точке $h = 0$. Кроме того, $h = 0$ является точкой локального минимума в задаче

$$\mathcal{J}_0(h) \to \min, \quad \mathcal{J}_i(h) \leqslant 0, \quad i \in I, \quad h \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m),$$

так как u_* — точка локального минимума в задаче (2.37). Следовательно, по теореме 1.2.9 если векторы $y_i^* \in \overline{\partial} \mathcal{J}_i(0)$, $i \in I$, удовлетворяют условию регулярности

$$0 \notin \operatorname{co}\{\underline{\partial} \mathcal{J}_i(0) + y_i^* \mid i \in I(u_*)\}, \tag{2.40}$$

то для любого $y_0^* \in \overline{\partial} \mathcal{J}_0(0)$ существуют $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in I$, такие, что $\lambda_i \mathcal{J}_i(0) = 0$ для всех $i \in I$ и

$$0 \in \underline{\partial} \mathcal{J}_0(0) + y_0^* + \sum_{i \in I} \lambda_i \big(\underline{\partial} \mathcal{J}_i(0) + y_i^* \big). \tag{2.41}$$

Переформулируем эти условия экстремума в терминах исходной задачи (2.37).

Пусть функции $(b_i(\cdot), w_{1i}(\cdot), w_{2i}(\cdot))$, $i \in I$, удовлетворяют условиям теоремы. Положим

$$\langle y_i^*, h\rangle = \int_\Omega \big(\langle w_{1i}(x), h(x)\rangle + \langle w_{2i}(x), \nabla h(x)\rangle\big)\, dx \quad \forall h \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m). \tag{2.42}$$

Тогда $y_i^* \in \overline{\partial}\mathcal{J}_i(0)$ для всех $i \in I$ по следствию 2.1.2. Проверим, что эти функционалы удовлетворяют условию регулярности (2.40). Действительно, рассуждая от противного предположим, что условие (2.40) не выполнено. Тогда для всех $i \in I$ существуют $x_i^* \in \underline{\partial}\mathcal{J}_i(0)$ и $\alpha_i \geqslant 0$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i(x_i^* + y_i^*) = 0, \quad \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1.$$

Отсюда с помощью следствия 2.1.2 получаем, что для любого $i \in I$ существует измеримое сечение $(a_i(\cdot), v_{1i}(\cdot), v_{2i}(\cdot))$ многозначного отображения $\underline{d}_{u,\xi} f_i(\cdot, u_*(\cdot), \nabla u_*(\cdot))$ такое, что $a_i(x) = 0$ для п.в. $x \in \Omega$ и

$$\int_\Omega \big(\langle \xi_1(x), h(x)\rangle + \langle \xi_2(x), \nabla h(x)\rangle\big)\, dx = 0 \quad \forall h \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m), \tag{2.43}$$

$$\xi_1(x) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i(v_{1i}(x) + w_{1i}(x)), \quad \xi_2(x) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i(v_{12}(x) + w_{12}(x)).$$

Равенство (2.43) означает, что существует обобщённая дивергенция функции $\zeta = \xi_2$ и $\operatorname{div}\zeta = \xi_1$. Заметим, что $\xi_2 \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d})$ и $\xi_1 \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ в силу условия роста на кодифференциальные отображения $D_{u,\xi} f_i(\cdot)$ (напомним, что функции f_i удовлетворяют условию кодифференцируемости порядка p). Таким образом, мы нашли функцию $\zeta \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d}; \operatorname{div})$ такую, что

$$(0, \operatorname{div}(\zeta)(x), \zeta(x)) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i\big((a_i(x), v_{1i}(x), v_{2i}(x)) + (b_i(x), w_{1i}(x), w_{2i}(x))\big) \quad \text{для п.в. } x \in \Omega,$$

что противоречит условию (2.38). Значит, справедливо условие регулярности (2.40).

Выберем произвольное измеримое сечение $(b_0(\cdot), w_{10}(\cdot), w_{20}(\cdot))$ многозначного отображения $\overline{d}_{u,\xi} f_0(\cdot, u_*(\cdot), \nabla u_*(\cdot))$ такое, что $b_0(x) = 0$ для п.в. $x \in \Omega$. Определим линейный функционал y_0^* точно таким же образом, как и функционалы y_i^* (см. (2.42)). Тогда $y_0 \in \overline{\partial}\mathcal{J}_0(0)$ по следствию 2.1.2. Следовательно, существуют $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in I$, такие, что $\lambda_i \mathcal{J}_i(0) = \lambda_i(\mathcal{I}_i(u_*) - \theta_i) = 0$ для всех $i \in I$ и выполняется условие (2.41). Рассуждая как и при доказательстве теоремы 2.2.1, нетрудно проверить, что условие экстремума (2.41) эквивалентно условию (2.39). $\square$

Приведём пример применения условий экстремума из предыдущей теоремы.

Пример 2.2.3. Пусть $d = m = p = 1$ и $\Omega = (0,1)$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}_0(u) = \int_0^1 \max\big\{ -|u(x)|, -|u'(x)|\big\}\, dx \to \min, \\ &\mathcal{I}_1(u) = \int_0^1 u(x)\, dx \leqslant 0, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad u \in \mathrm{W}^{1,1}(0,1). \end{aligned} \tag{2.44}$$

В данном случае $f_0(x,u,\xi) = \max\{-|u|, -|\xi|\}$, $I = \{1\}$, $f_1(x,u,\xi) = u$ и $\theta_1 = 0$. Проверим, выполняются ли условия экстремума для функции $u_* \equiv 0$. Заметим, что данная функция не является точкой локального минимума в задаче (2.44), поскольку для всех $\alpha > 0$ для функции $u_\alpha(x) = \alpha x(x-1)$ выполняются неравенства $\mathcal{I}_0(u_\alpha) < 0$ и $\mathcal{I}_1(u_\alpha) = -\alpha/6 < 0$. В действительности, u_* является точкой глобального максимума функционала $\mathcal{I}_0$.

Насколько известно автору, необходимые условия экстремума для негладких задач вариационного исчисления с изопериметрическими ограничениями были получены ранее только в работе [101]. Проверим выполнение условий экстремума из этой работы в точке u_*. Предельный субдифференциал Фреше функции $u \mapsto f_0(x,u,\xi)$ по отношению к переменной ξ в точке $(x,0,0)$ (по поводу определения данного субдифференциала см. [279]) имеет вид $\partial^\infty_{F,u} f_0(x,\cdot)(0,0) = [-1,1]$. Следовательно, функция $\zeta(\cdot) \equiv 0$ удовлетворяет включению Эйлера-Лагранжа $\zeta'(x) \in \operatorname{co} \partial^\infty_{F,u} f_0(x,\cdot)(u_*(x), u_*'(x))$ и условию Вейерштрасса

$$\zeta(x)u_*'(x) - f_0(x, u_*(x), u_*'(x)) = 0 = \max_{v \in \mathbb{R}} \big(\zeta(x)v - f_0(x, u_*(x), v)\big),$$

из [101, Теорема 3.5.1] при $\lambda = 1$ и $\gamma = 0$.

Для того чтобы применить к задаче (2.44) условия экстремума в терминах других субдифференциалов, эту задачу нужно тем или иным образом переформулировать. Следуя примеру 4.5.4 из монографии [48], задачу (2.44) можно переписать как задачу Майера с неголономными ограничениями вида:

$$\begin{aligned} &f(x(1)) = x_3(1) \to \min, \quad x(0) = 0, \quad x_1(1) = 0, \quad x_2(1) \leqslant 0, \\ &\varphi_1(x(t), \dot{x}(t)) = x_1(t) - \dot{x}_2(t) \leqslant 0, \\ &\varphi_2(x(t), \dot{x}(t)) = \max\{-|x_1(t)|, -|\dot{x}_1(t)|\} - \dot{x}_3(t) \leqslant 0, \quad t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Проверим, что условия экстремума для данной задачи в терминах субдифференциала Кларка [48, Следствие 4.5.1] выполняются в точке $x_* \equiv 0$, соответствующей точке $u_* \equiv 0$ в задаче (2.44). Действительно, субдифференциалы Кларка функций φ_i в нуле имеет вид:

$$\partial_{Cl}\varphi_1(0) = \{(1,0,0,0,-1,0)\}, \quad \partial_{Cl}\varphi_2(0) = \operatorname{co}\Big\{\big(\pm 1, 0,0,0,0,-1\big), \big(0,0,0,\pm 1, 0, -1\big)\Big\}.$$

Отсюда легко видеть, что условие регулярности из [48, Следствие 4.5.1] выполняется в точке x_*. Нормальный конус Кларка в точке 0 к множеству $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0, x_2 \leqslant 0\}$, задаваемому ограничениями на правом конце, имеет вид $N_S(0) = \{(t,s,0) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}, s \geqslant 0\}$. Поэтому для функций $p(t) \equiv (0,0,-1)$, $\lambda_1(t) \equiv 0$, $\lambda_2(t) \equiv 1$ и $\lambda_0 = 1$ выполняется включение Эйлера-Лагранжа

$$(\dot{p}(t), p(t)) \in \lambda_1(t)\varphi_1(x_*(t), \dot{x}_*(t)) + \lambda_2(t)\varphi_2(x_*(t), \dot{x}_*(t)) \quad \forall t \in [0,1]$$

и условие трансверсальности $-p(1) \in \lambda_0 \partial_{Cl} f(x_*(1)) + N_S(x_*(1))$. Таким образом, условия экстремума для задачи (2.45) в терминах субдифференциала Кларка [48, Следствие 4.5.1] выполняются в точке $x_*(\cdot) = 0$.

Задача (2.44) может быть также переписана как негладкая задач оптимального управления вида:

$$\mathcal{J}(x,u) = \int_0^1 \max\big\{ -|x_1(t)|, -|u(t)|\big\}\, dt \to \min, \quad \dot{x}_1(t) = u(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t),$$
$$u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,1], \quad x_1(0) = x_1(1) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2(1) \leqslant 0.$$

Можно проверить, что пара $(x_*, u_*) \equiv (0,0)$ удовлетворяем известным условиям экстремума для предыдущей задачи в терминах различных субдифференциалов и нормальных конусов (см., например, [44,48,53,278,307,333,400]). Для краткости мы эту проверку опускаем. Вместо этого, мы проверим, выполняются ли условия экстремума для задачи (2.44) из теоремы 2.2.3 в точке u_*.

Воспользовавшись правилами кодифференциального исчисления из предыдущей главы, получим:

$$\underline{d}_{u,\xi} f_0(x,u,\xi) = \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} \pm u - g(u,x) \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm\xi - g(u,x) \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\overline{d}_{u,\xi} f_0(x,u,\xi) = \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} (-1)^i u + (-1)^j \xi + |u| + |\xi| \\ (-1)^i \\ (-1)^j \end{pmatrix} \;\middle|\; i,j \in \{1,2\} \right\},$$

где $g(u,\xi) = \max\{|u|, |\xi|\}$. Также имеем $\underline{d}_{u,\xi} f_1(x,u,\xi) = \{(0,1,0)\}$ и $\overline{d}_{u,\xi} f_1(x,u,\xi) = \{0\}$. Легко видеть, что функции f_0 и f_1 удовлетворяют условиям кодифференцируемости порядка $p = 1$. Множество $\Omega = (0,1)$ очевидно ограничено и удовлетворяет условию сегмента. Заметим также, что если для некоторой функции $\zeta \in \mathrm{L}^\infty((0,1); \mathbb{R}, \mathrm{div}) = \mathrm{W}^{1,\infty}(0,1)$ для п.в. $x \in (0,1)$ выполняется включение $(0, \zeta'(x), \zeta(x)) \in \underline{d}_{u,\xi} f_1(x, u_*'(x), u_*(x)) = \{(0,1,0)\}$, то $\zeta(x) = 0$, но $\zeta'(x) = 1$ для п.в. $x \in (0,1)$, что невозможно. Таким образом, в точке u_* выполняется условие регулярности (2.38).

Предположим, что в точке u_* выполняются условия экстремума из теоремы 2.2.3. Положим $(b_0(x), w_{10}(x), w_{20}(x)) = (0,1,1) \in \overline{d} f_0(x,0,0)$, если $x \in [0, 0.5]$, и $(b_0(x), w_{10}(x), w_{20}(x)) = (0,1,-1) \in \overline{d} f_0(x,0,0)$, если $x \in (0.5, 1]$. Тогда по теореме 2.2.3 существуют $\lambda_1 \geqslant 0$ и

$\zeta \in \mathrm{W}^{1,\infty}(0,1)$, удовлетворяющие включению Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \zeta'(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} \in \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2+\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\lambda_1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{для п.в. } x \in [0, 0.5], \tag{2.46}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \zeta'(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} \in \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2+\lambda_1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\lambda_1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{для п.в. } x \in [0.5, 1]. \tag{2.47}$$

Следовательно, $\zeta'(x) \geqslant 0$ для п.в. $x \in (0,1)$, $\zeta(x) \geqslant 0$ для п.в. $x \in (0, 0.5)$ и $\zeta(x) \leqslant 0$ для п.в. $x \in (0.5, 1)$. Поскольку $\zeta \in \mathrm{W}^{1,\infty}(0,1)$, то, переопределяя при необходимости данную функцию на множестве меры ноль, можно предполагать, что она абсолютно непрерывна (см., например, [300, Теорема 7.17]). Поэтому из неравенства $\zeta'(\cdot) \geqslant 0$ следует, что функция ζ не убывает на отрезке $[0,1]$. Отсюда, с учётом того, что $\zeta(x) \geqslant 0$ для п.в. $x \in (0, 0.5)$ и $\zeta(x) \leqslant 0$ для п.в. $x \in (0.5, 1)$, получаем, что $\zeta(\cdot) \equiv 0$ и $\zeta'(\cdot) \equiv 0$, а это противоречит тому факту, что нулевой вектор не принадлежит множествам, стоящим в правой части включений (2.46) и (2.47). Значит, условия экстремума из теоремы 2.2.3 не выполнены в точке u_*. Таким образом, условия экстремума в терминах кодифференциалов позволяют доказать неоптимальность функции u_*, в отличие от условий экстремума в терминах различных субдифференциалов.

Глава 3

Метод кодифференциального спуска и его модификации

Глава посвящена изучению различных модификаций предложенного В.Ф. Демьяновым численного метода минимизации негладких кодифференцируемых функций — метода кодифференциального спуска. Исследуется сходимость метода, предложена его модификация для решения задач с выпуклыми ограничениями. В выпуклом случае приведена оценка скорости сходимости. Также предложена модификация метода кодифференциального спуска для глобальной минимизации невыпуклых кусочно-аффинных функций и доказана его сходимость к точке глобального минимума за конечное число шагов. Основные результаты этой главы опубликованы в работах [31, 188, 189, 193, 194].

3.1 Метод кодифференциального спуска

Рассмотрим задачу минимизации негладкой функции f. Для простоты изложения мы будем предполагать, что f определена на вещественном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, хотя основные результаты этого параграфа можно распространить на случай функций, определённых на рефлексивных нормированных пространств со строго выпуклой нормой (ср. [31]).

В случае когда функция f определена на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, она является кодифференцируемой в точке x тогда и только тогда, когда существует пара выпуклых слабо компактных множеств $\underline{d}f(x), \overline{d}f(x) \subset \mathbb{R} \times \mathcal{H}$ таких, что

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x + \alpha\Delta x) - f(x) - \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x)} (a + \langle v, \alpha\Delta x \rangle) - \min_{(b,w) \in \overline{d}f(x)} (b + \langle w, \alpha\Delta x \rangle) \Big| = 0$$

для любого $\Delta x \in \mathcal{H}$ и

$$\max_{(a,v) \in \underline{d}f(x)} a = \min_{(b,w) \in \overline{d}f(x)} b = 0. \tag{3.1}$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$.

Напомним, что согласно предложению 1.2.2 и следствию 1.2.1 условие

$$0 \in \underline{d}f(x) + (0, w) \quad \forall (0, w) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x) \tag{3.2}$$

является необходимым условием локального минимума, не зависящим от выбора кодифференциала. Здесь и далее $\operatorname{ext} A$ обозначает множество крайних точек выпуклого множества A. Точка x, удовлетворяющая условию (3.2), называется *inf-стационарной* точкой функции f. Наша цель — исследовать метод нахождения inf-стационарных точек кодифференцируемых функций, метод кодифференциального спуска.

3.1.1 Описание метода

Везде далее мы будем предполагать, что функция f кодифференцируема на $\mathcal{H}$ и задано некоторое кодифференциальное отображение $Df(\cdot)$ функции f и соответствующее ему квазидифференциальное отображение $\mathscr{D}f(\cdot)$ (см. теорему 1.2.1). Пусть также для всех $\nu, \mu \in [0, +\infty]$ определены некоторые многозначные отображения $\underline{d}_\nu f, \overline{d}_\mu f \colon \mathcal{H} \rightrightarrows \mathbb{R} \times \mathcal{H}$, удовлетворяющие следующим условиям для всех $x \in \mathcal{H}$:

$$\begin{gathered} \big\{ (a, v) \in \operatorname{ext} \underline{d}f(x) \bigm| a \geqslant -\nu \big\} \subseteq \underline{d}_\nu f(x) \subseteq \underline{d}f(x), \\ \big\{ (b, w) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x) \bigm| b \leqslant \mu \big\} \subseteq \overline{d}_\mu f(x) \subseteq \overline{d}f(x). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Любая такая пара $[\underline{d}_\nu f(x), \overline{d}_\mu f(x)]$ называется *усечённым кодифференциалом* функции f в точке x. Усечённый кодифференциал является своего рода аппроксимацией квазидифференциала $\mathscr{D}f(x)$ и кодифференциала $Df(x)$ функции f в точке x в зависимости от значений параметров ν и μ. В частности, справедливы следующие включения (см. следствие 1.2.1):

$$\{0\} \times \operatorname{ext} \underline{\partial} f(x) \subseteq \underline{d}_0 f(x), \quad \operatorname{ext} \underline{d}f(x) \subseteq \underline{d}_\infty f(x) \subseteq \underline{d}f(x),$$

Аналогичные включения выполняются для $\overline{d}_\mu f(x)$. В приложениях гиподифференциал $\underline{d}f(x)$ чаще всего представляет из себя выпуклую оболочку некоторого конечного семейства точек (a_i, v_i). В этом случае естественно определить $\underline{d}_\nu f(x)$, как множество всех тех (a_i, v_i), для которых $a_i \geqslant -\nu$. Множество $\overline{d}_\mu f(x)$ определяется аналогичным образом.

Замечание 3.1.1. На первый взгляд может показаться, что естественно определить множества $\underline{d}_\nu f(x)$ и $\overline{d}_\mu f(x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{d}_\nu f(x) &= \big\{ (a, v) \in \operatorname{ext} \underline{d}f(x) \bigm| a \geqslant -\nu \big\}, \\ \overline{d}_\mu f(x) &= \big\{ (b, w) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x) \bigm| b \leqslant \mu \big\}. \end{aligned}$$

Однако, для того что воспользоваться таким определением при численной реализации метода кодифференциального спуска, на каждой итерации необходимо находить крайние точки множеств $\underline{d}f(x_n)$ и $\overline{d}f(x_n)$, что является крайне трудоёмкой процедурой для задач большой размерности. Поэтому часто эффективнее включать в множества $\underline{d}_{\nu}f(x)$ и $\overline{d}_{\mu}f(x)$ не только крайние точки, избегая при этом трудоёмкой процедуры нахождения этих точек.

Мы предполагаем, что пространство $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$ наделено скалярным произведением $\langle (a,v),(b,w) \rangle = ab + \langle v, w \rangle$ и соответствующей нормой. Теоретическая схема метода кодифференциального спуска представлена в виде алгоритма 1.

Алгоритм 1: Метод кодифференциального спуска.

Шаг 1. Выберем начальное приближение $x_0 \in \mathcal{H}$, верхнюю границу на величину шага $\alpha_* \in (0, +\infty]$, последовательности $\{\nu_n\}, \{\mu_n\} \subset [0, +\infty]$ и положим $n := 0$.

Шаг 2. Вычислим $\underline{d}_{\nu_n}f(x_n)$ и $\overline{d}_{\mu_n}f(x_n)$.

Шаг 3. Для каждого $z = (b, w) \in \overline{d}_{\mu_n}f(x_n)$ найдём оптимальный план $(a_n(z), v_n(z)) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}$ следующей задачи:

$$\|(a,v)\|^2 \to \min, \quad (a,v) \in \operatorname{cl}\left\{ \operatorname{co} \underline{d}_{\nu_n}f(x_n) \right\} + z. \tag{3.4}$$

Шаг 4. Для каждого $z \in \overline{d}_{\mu_n}f(x_n)$ найдём точку глобального минимума $\alpha_n(z) \geqslant 0$ в задаче:

$$f(x_n - \alpha v_n(z)) \to \min_{\alpha}, \quad \alpha \in [0, \alpha_*].$$

Шаг 5. Найдём $z_n \in \overline{d}_{\mu_n}f(x_n)$, на котором достигается минимум в задаче:

$$f(x_n - \alpha_n(z)v_n(z)) \to \min_{z}, \quad z \in \overline{d}_{\mu_n}f(x_n).$$

Положим $x_{n+1} = x_n - \alpha_n(z_n)v_n(z_n)$, $n := n + 1$ и перейдём на **Шаг 2**.

Замечание 3.1.2. В случае $\alpha_* = +\infty$ мы полагаем $[0, \alpha_*] = [0, +\infty)$ на четвёртом шаге алгоритма. Замыкание множества $\underline{d}_{\nu_n}f(x_n)$ на третьем шаге берётся относительно сильной (или, что в данном случае эквивалентно, слабой) топологии. Заметим, что множество $\operatorname{cl}\operatorname{co}\underline{d}_{\nu_n}f(x_n) \subseteq \underline{d}f(x_n)$ является слабо компактным в силу слабой компактности гиподифференциала $\underline{d}f(x_n)$. Отсюда, учитывая тот факт, что пространство $\mathcal{H}$ гильбертово, следует, что существует единственный оптимальный план $(a_n(z), v_n(z))$ задачи (3.4). Кроме того, везде далее мы будем предполагать, что величины $\alpha_n(z)$ и z_n корректно определены на каждой итерации метода. Вектор z_n корректно определён, в частности, если множества $\overline{d}_{\mu_n}f(x_n)$ конечны для всех $n \in \mathbb{N}$ (данное предположение выполняет в подавляющем большинстве прикладных задач). В свою очередь, величина шага $\alpha_n(z)$ корректно определена, если функция

f полунепрерывна снизу и в случае $\alpha_* = +\infty$ множество $\{x \in \mathcal{H} \mid f(x) \leqslant f(x_0)\}$ ограничено.

На каждой итерации метода кодифференциального спуска линейный поиск осуществляется сразу вдоль нескольких направлений, что является отличительной чертой данного метода. Далее будет показано, что по крайней мере одно из этих направлений является направлением спуска функции f (т. е. $f'(x_n, -v_n(z)) < 0$), если x_n не является inf-стационарной точкой функции f. Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$, либо x_n является inf-стационарной точкой функции f, либо $f(x_{n+1}) < f(x_n)$. С другой стороны, некоторые из направлений $-v_n(z)$ могут и не быть направлениями спуска функции f, то есть f может сначала возрастать, а затем убывать вдоль этих направлений. Данный факт позволяет методу кодифференциального спуска «выпрыгивать» из некоторых точек локального минимума функции f, если параметры ν_n и μ_n достаточно велики (конкретный пример подобного поведения метода приведён в работе [145]; см. также параграф 3.4 ниже). Однако, тот факт, что некоторые из направлений $-v_n(z)$ могут не быть направлениями спуска, вынуждает определять величину шага $\alpha_n(z)$ с помощью точного линейного поиска, а не с помощью более традиционных правил выбора шага, таких как правила Армихо, Голдштейна и т.д.

Замечание 3.1.3. С помощью теории глобальных кодифференциалов разности выпуклых функций, разработанной в главе 1, можно дать следующую содержательную интерпретацию работы метода кодифференциального спуска. Данный метод основан на вычислении локальной аппроксимации негладкой функции с помощью разности выпуклых функций, к которой применяются условия глобальной оптимальности из теоремы 1.1.4. С помощью данных условий вычисляются направления глобального спуска $-v_n(z)$ локальной аппроксимации (см. замечание 1.1.4), которые затем используются в качестве направлений спуска для исходной функции f.

Параметры $\nu_n, \mu_n \geqslant 0$ включены в метод кодифференциального спуска для того, чтобы гарантировать его сходимость. Если исходить из необходимых условий экстремума (3.2), выбор $\nu_n \equiv \mu_n \equiv 0$ может показаться наиболее естественным. Однако, метод кодифференциального спуска с $\nu_n \equiv \mu_n \equiv 0$ может сходиться к точке, не являющейся inf-стационарной точкой функции f (см. [32, параграф III.5] и [250, параграф VIII.2.2]). Заметим также, что выбор параметров ν_n и μ_n представляет из себя компромисс между трудоёмкостью каждой итерации и общей эффективностью метода. Во многих приложениях уменьшение параметров ν_n и μ_n позволяет существенно снизить трудоёмкость каждой итерации, а увеличение этих параметров позволяет находить более глубокие локальные минимумы и гарантирует более высокую скорость сходимости. Зависимость этих параметров от номера итерации позволяет изменять их динамически по ходу процесса вычислений.

Замечание 3.1.4. Исходный вариант метода кодифференциального спуска, предложенный В.Ф. Демьяновым (см., например, [37]), соответствует случаю $\alpha_* = +\infty$, $\mu_n \equiv \mu > 0$, $\underline{d}_{\nu_n} f(x_n) \equiv \underline{d} f(x_n)$ и $\overline{d}_{\mu_n} f(x_n) \equiv \{(b, w) \in \overline{d} f(x_n) \mid b \leqslant \mu\}$ для некоторого $\mu > 0$. Однако, прямая программная реализация исходного метода невозможна, так как множество $\{(b, w) \in \overline{d} f(x) \mid b \leqslant \mu\}$, вообще говоря, состоит из бесконечного числа точек, если функция f не является гиподифференцируемой. Прямая реализация метода усечённого кодифференциала из работы [145] невозможна по аналогичным причинам. С другой стороны, алгоритм 1, предложенный автором в [189], допускает простую практическую реализацию и, по существу, представляет из себя строгое математическое описание алгоритмической реализации исходного метода кодифференциального спуска и метода усечённого кодифференциала.

3.1.2 Вспомогательные результаты

Для доказательства сходимости метода кодифференциального спуска нам потребуется несколько вспомогательных результатов.

Лемма 3.1.1. *Пусть последовательность $\{x_n\}$ построена по методу кодифференциального спуска. Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ и $z = (0, w) \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ таких, что $0 \notin \operatorname{cl} \operatorname{co} \underline{d}_{\nu_n} f(x_n) + z$ выполняется неравенство $f'(x_n, -v_n(z)) \leqslant -\|(a_n(z), v_n(z))\|^2$, из которого следует, что $v_n(z) \neq 0$. Кроме того, если x_n не является inf-стационарной точкой функции f, то $f(x_{n+1}) < f(x_n)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные $n \in \mathbb{N}$ и $z = (0, w_0) \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ такие, что $0 \notin \operatorname{cl} \operatorname{co} \underline{d}_{\nu_n} f(x_n) + z$. По необходимому и достаточному условию минимума выпуклой функции на выпуклом множестве (см., например [78, предложение II.2.1])

$$a a_n(z) + \langle v, v_n(z) \rangle \geqslant \big\|(a_n(z), v_n(z))\big\|^2 > 0 \quad \forall (a, v) \in \operatorname{cl} \operatorname{co} \underline{d}_{\nu_n} f(x_n) + z.$$

По определениям $\{0\} \times \underline{\partial} f(x_n) \subseteq \operatorname{cl} \operatorname{co} \underline{d}_{\nu_n} f(x_n)$ и $w_0 \in \overline{\partial} f(x_n)$. Поэтому

$$f'(x_n, -v_n(z)) = \max_{v \in \underline{\partial} f(x_n)} \langle v, -v_n(z) \rangle + \min_{w \in \overline{\partial} f(x_n)} \langle w, -v_n(z) \rangle \leqslant$$
$$\leqslant \max_{v \in \underline{\partial} f(x_n) + w_0} \langle v, -v_n(z) \rangle \leqslant -\big\|(a_n(z), v_n(z))\big\|^2 < 0$$

и $v_n(z) \neq 0$. Наконец, заметим, что если x_n не является inf-стационарной точкой функции f, то по определению существует $z = (0, w) \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ такое, что $0 \notin \operatorname{cl} \operatorname{co} \underline{d}_{\nu_n} f(x_n) + z$, откуда следует, что $f'(x_n, -v_n(z)) \leqslant -\|(a_n(z), v_n(z))\|^2 < 0$, а поэтому $f(x_n - \alpha_n(z) v_n(z)) < f(x_n)$ и $f(x_{n+1}) < f(x_n)$. □

Лемма 3.1.2. *Пусть X — конечномерное нормированное пространство и $\{A_n\} \subset X$ — последовательность выпуклых компактных подмножеств, сходящаяся к некоторому выпуклому компактному множеству $A \subset X$ в метрике Хаусдорфа. Тогда для любой подпоследовательности $\{A_{n_k}\}$ справедливо включение*

$$\operatorname{ext} A \subseteq \limsup_{k\to\infty} \big(\operatorname{ext} A_{n_k} \big) := \Big\{ x \in X \;\Big|\; \liminf_{k\to\infty} \Big(\operatorname{dist}(x, \operatorname{ext} A_{n_k}) \Big) = 0 \Big\},$$

где $\limsup$ *— внешний предел.*

Доказательство. Проверим, что $A = \operatorname{co}(\limsup\limits_{k\to\infty}(\operatorname{ext} A_{n_k}))$. Тогда, воспользовавшись теоремой «обратной» к теореме Крейна-Мильмана (если K — выпуклое компактное множество и $K = \operatorname{cl}\operatorname{co} B$, то $\operatorname{ext} K \subseteq \operatorname{cl} B$; см., например, [77, предложение 10.1.3]) и тем фактом, что внешний предел последовательности множеств всегда замкнут, получим, что $\operatorname{ext} A \subseteq \limsup\limits_{k\to\infty}(\operatorname{ext} A_{n_k})$.

Зафиксируем произвольную точку $x \in \limsup\limits_{k\to\infty}(\operatorname{ext} A_{n_k})$. По определению внешнего предела существуют подпоследовательность, которую мы вновь обозначим через $\{A_{n_k}\}$, и точки $x_k \in A_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что $x_k \to x$ при $k \to \infty$. Положим $\theta_k = \rho_H(A_{n_k}, A)$. В силу сходимости A_n к A в метрике Хаусдорфа $\theta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Кроме того, по лемме 1.2.1 для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $y_k \in A$ такое, что $\|y_k - x_k\| < 2\theta_k$. Ясно, что $y_k \to x$ при $k \to \infty$. Следовательно, $x \in A$, так как множество A компактно и потому замкнуто. Таким образом, $\limsup\limits_{k\to\infty}(\operatorname{ext} A_{n_k}) \subseteq A$, откуда в силу выпуклости A следует, что $\operatorname{co}(\limsup\limits_{k\to\infty}(\operatorname{ext} A_{n_k})) \subseteq A$.

Докажем обратное включение. Зафиксируем $x \in A$. Из сходимости A_n к A в метрике Хаусдорфа вытекает, что для всех $k \in \mathbb{N}$ найдутся точки $x_k \in A_{n_k}$ такие, что $x_k \to x$ при $k \to \infty$. По теоремам Крейна-Мильмана и Каратеодори для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют $y_k^i \in \operatorname{ext} A_{n_k}$ и $\alpha_k^i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$ (здесь m — размерность пространства X) такие, что

$$x_k = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_k^i y_k^i, \qquad \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_k^i = 1. \tag{3.5}$$

Последовательность $\{A_n\}$ лежит в некотором ограниченном множестве, поскольку множество A компактно и $A_n \to A$ в метрике Хаусдорфа (см. лемму 1.2.1). Следовательно, последовательности $\{y_k^i\}$, $i \in \{1, \ldots m+1\}$ ограничены. Заменяя их и последовательности $\{\alpha_k^i\}$ на сходящиеся подпоследовательности (напомним, что пространство X конечномерно) и переходя к пределу в (3.5) при $k \to \infty$, получим, что существуют $y^i \in \limsup\limits_{k\to\infty}(\operatorname{ext} A_{n_k})$ и $\alpha^i \geqslant 0$ такие, что

$$x = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha^i y^i, \qquad \sum_{i=1}^{m+1} \alpha^i = 1.$$

Таким образом, $x \in \operatorname{co}(\limsup\limits_{k\to\infty}(\operatorname{ext} A_{n_k}))$, что и требовалось доказать. $\square$

Нам потребуется вспомогательное определение равномерной кодифференцируемости. А именно, будем говорить, что кодифференциальное отображение $Df(\cdot)$ *равномерно аппроксимирует* функцию f (или что функция f *равномерно кодифференцируема*) на непустом множестве $C \subseteq \mathcal{H}$, если величина

$$\varepsilon_f(\alpha, \Delta x, x) = \frac{1}{\alpha}\Big| f(x + \alpha\Delta x) - f(x) - \max_{(a,v)\in\underline{d}f(x)} (a + \langle v, \alpha\Delta x\rangle) - \min_{(b,w)\in\overline{d}f(x)} (b + \langle w, \alpha\Delta x\rangle) \Big|$$

стремится к нулю при $\alpha \to +0$ равномерно по Δx из единичного шара и $x \in C$. Как следует из оценок величины $\varepsilon_f(\alpha, \Delta x, x)$, полученных в параграфе 1.2.3, множество всех функций равномерно кодифференцируемых на заданном множестве C замкнуто относительно сложения, умножения на вещественное число, а также взятия поточечного максимума и минимума конечных семейств функций. Множество всех функций равномерно кодифференцируемых в некоторой окрестности заданной точки, кроме того, замкнуто относительно умножения, деления и внешней суперпозиции с непрерывно дифференцируемыми функциями.

Лемма 3.1.3. *Пусть заданы последовательности $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ и $\{\nu_n\}, \{\mu_n\} \subset [0, +\infty]$ такие, что кодифференциальное отображение Df равномерно аппроксимирует функцию f на множестве $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, последовательности $\{\underline{d}f(x_n)\}$ и $\{\overline{d}f(x_n)\}$ лежат в некотором ограниченном множестве и $\liminf_{n\to\infty} \nu_n = \nu_* > 0$. Предположим также, что $\{h_n\} \subset \mathcal{H}$ — ограниченная последовательность, удовлетворяющая неравенствам*

$$\sup_{(a,v)\in\underline{d}_{\nu_n}f(x_n)+z_n} (a + \langle v, h_n\rangle) \leqslant -\theta \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.6}$$

$$f(x_{n+1}) \leqslant \inf_{\alpha\in[0,\alpha_0]} f(x_n + \alpha h_n) + \delta_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.7}$$

для некоторых $z_n = (b_n, w_n) \in \overline{d}_{\mu_n}f(x_n)$, $\theta > 0$, $\alpha_0 \in (0, +\infty]$ и δ_n таких, что $\delta_n \to 0$ и $b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $f(x_n) \to -\infty$ при $n \to \infty$.

Доказательство. По определению для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} f(x_n + \alpha h_n) - f(x_n) &= \max_{(a,v)\in\underline{d}f(x_n)} \big(a + \alpha\langle v, h_n\rangle\big) + \min_{(b,w)\in\overline{d}f(x_n)} \big(b + \alpha\langle w, h_n\rangle\big) + \alpha\varepsilon_n(\alpha) \leqslant \\ &\leqslant \max_{(a,v)\in\underline{d}f(x_n)+z_n} \big(a + \alpha\langle v, h_n\rangle\big) + \alpha\varepsilon_n(\alpha), \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\varepsilon_n(\alpha) = \varepsilon_f(\alpha, h_n, x_n)$. Покажем, что найдутся $n_1 \in \mathbb{N}$ и $\alpha_1 > 0$ такие, что для всех $n \geqslant n_1$ и $\alpha \in (0, \alpha_1]$ множество $\underline{d}f(x_n) + z_n$ в (3.8) может быть заменено на $\underline{d}_{\nu_n}f(x_n) + z_n$, то есть

$$f(x_n + \alpha h_n) - f(x_n) \leqslant \sup_{(a,v)\in\underline{d}_{\nu_n}f(x_n)+z_n} \big(a + \alpha\langle v, h_n\rangle\big) + \alpha\varepsilon_n(\alpha) \tag{3.9}$$

для всех $n \geqslant n_1$ и $\alpha \in (0, \alpha_1]$.

Прежде чем перейти к доказательству неравенства (3.9), покажем, что справедливость утверждения леммы вытекает непосредственно из этого неравенства. Действительно, обозначим

$$\eta_n(\alpha) = \sup_{(a,v)\in \underline{d}_{\nu_n} f(x_n)+z_n} \big(a + \alpha\langle v, h_n\rangle\big).$$

Воспользовавшись неравенством (3.9) и выпуклостью функции $\eta_n(\alpha)$, получим, что

$$f(x_n + \alpha h_n) - f(x_n) \leqslant \alpha\eta(1) + (1-\alpha)\eta(0) + \alpha\varepsilon_n(\alpha) =$$
$$= \alpha \sup_{(a,v)\in \underline{d}_{\nu_n} f(x_n)+z_n} \big(a + \langle v, h_n\rangle\big) + (1-\alpha)\eta(0) + \alpha\varepsilon_n(\alpha)$$

для всех $n \geqslant n_1$ и $\alpha \in (0, \alpha_1]$. Отсюда, учитывая неравенство (3.6) и тот факт, что $\eta_n(0) = b_n$ в силу равенств (3.1) и включений (3.3), следует, что

$$f(x_n + \alpha h_n) - f(x_n) \leqslant -\alpha\theta + (1-\alpha)b_n + \alpha\varepsilon_n(\alpha)$$

для всех $n \geqslant n_1$ и $\alpha \in (0, \alpha_1]$. По нашему предположению кодифференциальное отображение Df равномерно аппроксимирует функцию f на множестве $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Поэтому найдётся $\alpha_2 > 0$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in (0, \alpha_2]$ выполняется неравенство $|\varepsilon_n(\alpha)| < \theta/3$. Поэтому для всех $n \geqslant n_1$ будет

$$f(x_n + \gamma h_n) - f(x_n) \leqslant -\gamma\frac{2\theta}{3} + (1-\gamma)b_n, \quad \gamma := \min\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}.$$

По нашему предположению $b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому для любого достаточно большого $n \in \mathbb{N}$ будет

$$f(x_n + \gamma h_n) - f(x_n) \leqslant -\gamma\frac{\theta}{3},$$

откуда с учётом (3.7) получаем, что $f(x_{n+1}) \leqslant f(x_n) - \gamma\theta/3 + \delta_n$ для всех достаточно больших n. Следовательно, $f(x_n) \to -\infty$ при $n \to \infty$, в силу того, что $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, остаётся только доказать неравенство (3.9). Обозначим

$$g_n(\alpha) = \max_{(a,v)\in \underline{d} f(x_n)+z_n} \big(a + \alpha\langle v, h_n\rangle\big).$$

Докажем, что существуют $n_1 \in \mathbb{N}$ и $\alpha_1 > 0$ такие, что $g_n(\alpha) = \eta_n(\alpha)$ для всех $n \geqslant n_1$ и $\alpha \in [0, \alpha_1]$. Тогда неравенство (3.9) непосредственно вытекает из (3.8).

По определению $\underline{d}_{\nu_n} f(x_n) \subseteq \underline{d} f(x_n)$. Поэтому $g_n(\alpha) \geqslant \eta_n(\alpha)$ для всех $\alpha \geqslant 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Проверим справедливость обратного неравенства для всех достаточно малых $\alpha \geqslant 0$ и достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Из теоремы Крейна-Мильмана следует, что

$$\max_{(a,v)\in \underline{d} f(x_n)} \big(a + \alpha\langle v, h_n\rangle\big) = \sup_{(a,v)\in \operatorname{ext} \underline{d} f(x_n)} \big(a + \alpha\langle v, h_n\rangle\big). \tag{3.10}$$

По нашему предположению множества $\underline{d}f(x_n)$ и $\overline{d}f(x_n)$ содержатся в некотором ограниченном множестве K. Положим $C_1 = \sup_{z\in K}\|z\|$, $C_2 = \sup_{n\in\mathbb{N}}\|h_n\|$ и $\alpha_1 = \nu_*/4C_1C_2$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0, \alpha_1]$ и $(a, v) \in \operatorname{ext}\underline{d}f(x_n)$ будет $|\alpha\langle v, h_n\rangle| \leqslant \nu_*/4$, откуда следует, что

$$a + \alpha\langle v, h_n\rangle \begin{cases} \geqslant -0.5\,\nu_*, & \text{если } a \geqslant -0.25\,\nu_*, \\ < -0.5\,\nu_*, & \text{если } a < -0.75\,\nu_*. \end{cases}$$

Поэтому для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in [0, \alpha_1]$ справедливо равенство

$$\sup_{(a,v)\in\operatorname{ext}\underline{d}f(x_n)}\big(a + \alpha\langle v, h_n\rangle\big) = \sup_{(a,v)\in\operatorname{ext}\underline{d}f(x_n)\colon\, a\geqslant -0.75\nu_*}\big(a + \alpha\langle v, h_n\rangle\big) \geqslant -\frac{\nu_*}{2}.$$

По определению ν_* существует $n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $\nu_n \geqslant 0.75\nu_*$ для всех $n \geqslant n_1$. Следовательно, $g_n(\alpha) = \eta_n(\alpha)$ для всех $\alpha \in [0, \alpha_1]$ и $n \geqslant n_1$ в силу определения усечённого гиподифференциала $\underline{d}_{\nu_n}f(x_n)$ (см. (3.3)) и равенства (3.10). □

3.1.3 Исследование сходимости

Теперь мы можем сформулировать и доказать теорему о сходимости метода кодифференциального спуска.

Теорема 3.1.1. *Пусть $x_* \in \mathcal{H}$ — предельная точка последовательности $\{x_n\}$, построенной по методу кодифференциального спуска для функции f, а кодифференциальное отображение Df непрерывно по Хаусдорфу в точке x_* и равномерно аппроксимирует функцию f в некоторой окрестности этой точки. Пусть также функция f ограничена снизу на $\mathcal{H}$, $\liminf_{n\to\infty}\nu_n > 0$, $\liminf_{n\to\infty}\mu_n > 0$, и выполнено одно из двух следующих предположений:*

1. *пространство $\mathcal{H}$ конечномерно;*

2. *$\{(b, w) \in \overline{d}f(x_n) \mid b \leqslant \widehat{\mu}\} \subseteq \overline{d}_{\mu_n}f(x_n)$ для некоторого $\widehat{\mu} > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$.*

Тогда x_* является inf-стационарной точкой функции f. Если, кроме того, функция f выпукла, то x_* — точка глобального минимума функции f.

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что x_* не является inf-стационарной точкой функции f. Тогда существует $z_* = (0, w_*) \in \operatorname{ext}\overline{d}f(x_*)$ такое, что $\theta = \min\{\|(a, v)\|^2 \mid (a, v) \in \underline{d}f(x_*) + z_*\} > 0$. Наша цель — воспользоваться леммой 3.1.3.

Поскольку x_* предельная точка последовательности $\{x_n\}$, существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к x_*. Поэтому $\overline{d}f(x_{n_k}) \to \overline{d}f(x_*)$ при $k \to \infty$ в метрике Хаусдорфа в силу непрерывности кодифференциального отображения Df в точке x_*. Воспользовавшись леммой 3.1.2, неравенством $\liminf_{n\to\infty}\mu_n > 0$ в конечномерном случае и предположением 2 в бесконечномерном случае, получим, что существуют подпоследовательность последовательности $\{x_{n_k}\}$, которую мы вновь обозначим через $\{x_{n_k}\}$, и последовательность $z_{n_k} = (b_{n_k}, w_{n_k}) \in \overline{d}_{\mu_{n_k}} f(x_{n_k})$ такие, что $z_{n_k} \to z_*$, т. е. $b_{n_k} \to 0$ и $w_{n_k} \to w_*$ при $k \to \infty$. Отсюда, с учётом того, что многозначное отображение $\underline{d} f(\cdot)$ непрерывно по Хаусдорфу в точке x_*, вытекает, что $\|(a_{n_k}(z_{n_k}), v_{n_k}(z_{n_k}))\|^2 > \theta/2$ для всех k больше некоторого $k_1 \in \mathbb{N}$.

Обозначим $a_k = a_{n_k}(z_{n_k})$ и $v_k = v_{n_k}(z_{n_k})$. Из определения (a_k, v_k) и необходимого и достаточного условия минимума выпуклой функции на выпуклом множестве следует, что

$$-(a + b_{n_k})a_k - \langle v + w_{n_k}, v_k \rangle \leqslant -\|(a_k, v_k)\|^2 < -\frac{\theta}{2} \tag{3.11}$$

для всех $(a, v) \in \operatorname{cl} \operatorname{co} \underline{d}_{\nu_{n_k}} f(x_{n_k})$ и $k \geqslant k_1$. Поэтому

$$\sup_{(a,v) \in \underline{d}_{\nu_{n_k}} f(x_{n_k}) + z_{n_k}} (a + \alpha \langle v, -v_k \rangle) \leqslant -\alpha \frac{\theta}{2} + \sup_{(a,v) \in \underline{d}_{\nu_{n_k}} f(x_{n_k})} \big((a + b_{n_k})(1 + \alpha a_k) \big).$$

для всех $\alpha \geqslant 0$ и $k \geqslant k_1$. Так как кодифференциальное отображение Df непрерывно по Хаусдорфу в точке x_* и $x_{n_k} \to x_*$ при $k \to \infty$, последовательности $\{\underline{d} f(x_{n_k})\}$ и $\{\overline{d} f(x_{n_k})\}$ лежат в некотором ограниченном множестве, откуда, в частности, следует, что последовательности $\{a_k\}$ и $\{v_k\}$ ограничены. Следовательно, существует $\gamma > 0$ такое, что $1 + \gamma a_k > 0$ для всех $k \geqslant k_1$. Поэтому

$$\sup_{(a,v) \in \underline{d}_{\nu_{n_k}} f(x_{n_k}) + z_{n_k}} (a + \langle v, -\gamma v_k \rangle) \leqslant -\gamma \frac{\theta}{2} + (1 + \gamma a_k) b_{n_k} \qquad \forall k \geqslant k_1$$

(здесь мы воспользовались равенствами (3.1)). По определению $b_{n_k} \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому существует $k_2 \geqslant k_1$ такое, что $(1 + \gamma a_k) b_{n_k} < \gamma \theta / 4$ для всех $k \geqslant k_2$.

Из того, что кодифференциальное отображение Df равномерно аппроксимирует функцию f в окрестности точки x_* и $x_{n_k} \to x_*$ при $k \to \infty$, следует, что Df равномерно аппроксимирует f на множестве $\{x_{n_k}\}_{k \geqslant k_3}$ для некоторого $k_3 \in \mathbb{N}$. Следовательно, можно применить лемму 3.1.3 с $\alpha_0 = \alpha_* / \gamma$ (напомним, что α_* — верхняя граница величины шага в методе кодифференциального спуска), последовательностью $\{x_n\}$, определённой как $\{x_{n_k}\}_{k \geqslant m}$, и последовательностью $\{h_n\}$, определённой как $\{-\gamma v_k\}_{k \geqslant m}$, где $m = \max\{k_2, k_3\}$. Заметим, что справедливость условия (3.7) с $\delta_n \equiv 0$ в данном случае вытекает из определений $\alpha_n(z)$ и x_{n+1} (см. шаги 4 и 5 алгоритма 1). По лемме 3.1.3 получим, что $f(x_{n_k}) \to -\infty$ при $k \to \infty$, что противоречит предположению об ограниченности снизу функции f. Таким образом, x_* — inf-стационарная точка функции f.

Остаётся заметить, что в случае когда функция f выпукла, x_* является inf-стационарной точкой этой функции тогда и только тогда, когда x_* — точка глобального минимума функции f, в силу того, что по предложению 1.2.2 точка x_* inf-стационарна тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $f'(x_*, \cdot) \geqslant 0$, которое в выпуклом случае является необходимым и достаточным условием глобального минимума. $\square$

Замечание 3.1.5. Нетрудно видеть, что для справедливости предыдущей теоремы достаточно предполагать, что $\{0\} \times \operatorname{ext} \overline{\partial} f(x_*) \subseteq \limsup_{k\to\infty}(\operatorname{ext} \overline{d} f(x_{n_k}))$, где $x_{n_k} \to x_*$ при $k \to \infty$. Согласно лемме 3.1.2 данное включение выполняется в конечномерном случае без каких либо дополнительных предположений. Для того чтобы гарантировать справедливость этого включения в бесконечномерном случае мы воспользовались предположением 2. Заметим, что в некоторых частных случаях справедливость данного включения можно проверить непосредственно, без использования предположения 2.

Хорошо известно, что при естественных предположениях для любого градиентного метода выполняется равенство $\liminf_{n\to\infty} \|\nabla f(x_n)\| = 0$, где $\{x_n\}$ — последовательность построенная по данному методу (см., например, [342, теорема 2.5]). Распространим этот результат на случай метода кодифференциального спуска. Для этого для всех $\nu \geqslant 0$ введём функцию

$$\omega(x,\nu) = \sup_{(0,w)\in\overline{d}f(x)} \min_{(a,v)\in \operatorname{cl}\operatorname{co}\underline{d}_\nu f(x)+(0,w)} \|(a,v)\|^2 = \sup_{(0,w)\in\overline{d}f(x)} \operatorname{dist}(0, \operatorname{cl}\operatorname{co}\underline{d}_\nu f(x) + (0,w)),$$

которая является мерой нестационарности точки x. В частности, точка x является inf-стационарной точкой функции f тогда и только тогда, когда $\omega(x,\nu) = 0$ для некоторого $\nu \geqslant 0$. Следует однако заметить, что функция $\omega(x,\nu)$ не является непрерывной (или даже пн.сн.) по x в общем случае, даже если функция f непрерывно кодифференцируема. Функция ω является непрерывной по x, если функция f непрерывно гиподифференцируема и $\nu = +\infty$, поскольку в этом случае $\omega(x,+\infty) = \operatorname{dist}(0, \underline{d} f(x))$.

Теорема 3.1.2. *Пусть функция f ограничена снизу на $\mathcal{H}$, последовательность $\{x_n\}$ построена по методу кодифференциального спуска для функции f, а последовательности $\{\underline{d} f(x_n)\}$ и $\{\overline{d} f(x_n)\}$ лежат в некотором ограниченном множестве. Предположим также, что $\liminf_{n\to\infty} \nu_n = \nu_* > 0$ и кодифференциальное отображение Df равномерно аппроксимирует функцию f на множестве $\{x_n\}_{n\geqslant m}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ (в частности, достаточно предполагать, что Df равномерно аппроксимирует функцию f на множестве $\{x \in \mathcal{H} \mid f(x) \leqslant f(x_0)\}$). Тогда $\omega(x_n,\nu_n) \to 0$ при $n \to \infty$. В частности, если функция f гиподифференцируема, т. е. $Df(\cdot) = [\underline{d} f(\cdot), \{0\}]$, и $\nu_n \equiv +\infty$, то $\operatorname{dist}(0, \underline{d} f(x_n)) \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существуют подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ и $\theta > 0$ такие, что $\omega(x_{n_k},\nu_{n_k}) > \theta$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что супремум в определении $\omega(x,\nu)$ можно брать только по крайним точкам множества $\overline{d} f(x)$ вида $(0,w)$, поскольку функция расстояния в определении $\omega(x,\nu)$ выпукла по w. Следовательно, воспользовавшись определением усечённого гипердифференциала (3.3), получим, что для всех $k \in \mathbb{N}$ существует $z_{n_k} = (0, w_{n_k}) \in \overline{d}_{\mu_{n_k}} f(x_{n_k})$ такое, что $\|(a_{n_k}(z_{n_k}), v_{n_k}(z_{n_k}))\|^2 \geqslant \theta$. Отсюда, учитывая, что последовательности $\{\underline{d} f(x_n)\}$ и $\{\overline{d} f(x_n)\}$ лежат в ограниченном множестве, и рассуждая аналогично доказательству теоремы 3.1.1, нетрудно проверить, что существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\sup_{(a,v) \in \underline{d}_{\nu_{n_k}} f(x_{n_k}) + z_{n_k}} (a + \langle v, -\gamma v_{n_k}(z_{n_k}) \rangle) \leqslant -\gamma\theta \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому, воспользовавшись леммой 3.1.3, получим, что $f(x_{n_k}) \to -\infty$ при $k \to \infty$, что противоречит ограниченности снизу функции f. □

Замечание 3.1.6. Теоремы 3.1.1 и 3.1.2 остаются справедливыми в случае, когда направления спуска $v_n(z_n)$ вычисляются лишь приближённо, то есть заменяются на некоторые $\widetilde{v}_n(z_n) \in \mathcal{H}$, удовлетворяющие неравенству

$$\big\|\widetilde{v}_n(z_n) - v_n(z_n)\big\| \leqslant \varepsilon_n, \tag{3.12}$$

где $\varepsilon_n \to +0$ при $n \to \infty$. Действительно, в этом случае будет

$$-(a + b_{n_k}) a_{n_k}(z_{n_k}) - \big\langle v + w_{n_k}, \widetilde{v}_{n_k}(z_{n_k}) \big\rangle \leqslant -\frac{\theta}{2} + \varepsilon_{n_k} C$$

для достаточно большого $C > 0$ и для всех $(a, v) \in \underline{d}_{\nu_{n_k}} f(x_{n_k})$ и $k \geqslant k_1$ (см. (3.11)). Воспользовавшись данной оценкой и равенством $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_{n_k} = 0$, нетрудно доказать справедливость утверждений теорем 3.1.1 и 3.1.2. В частности, данные теоремы можно распространить на случай, когда гиподифференциал $\underline{d} f(x_n)$ и гипердифференциал $\overline{d} f(x_n)$ вычисляются неточно, при условии, что неравенства (3.12) выполняются для всех соответствующих направлений.

Аналогичным образом, теоремы 3.1.1 и 3.1.2 остаются справедливыми, если величины шага спуска $\alpha_n(z)$ вычисляются приближённо. А именно, достаточно предполагать, что

$$f(x_n - \alpha_n(z) v_n(z)) \leqslant \inf_{\alpha \in [0, \alpha_*]} f(x_n - \alpha v_n(z)) + \delta_n,$$

где $\delta_n \to +0$ при $n \to \infty$. Таким образом, можно заключить, что метод кодифференциального спуска является в некоторой степени устойчивым по отношению к ошибкам вычислений.

3.2 Квадратичная регуляризация метода кодифференциального спуска

В этом параграфе мы рассмотрим другой метод минимизации кодифференцируемых функций, предложенный автором в работе [189] и представляющий из себя прямое обобщение метода линеаризации Б.Н. Пшеничного [63, 64] на случай негладких кодифференцируемых функций. Данный метод, в отличие от метода кодифференциального спуска, может быть применён к задачам минимизации кодифференцируемых функций на множествах, задаваемых выпуклыми ограничениями.

Пусть $A \subseteq \mathcal{H}$ — замкнутое выпуклое множество. Рассмотрим задачу минимизации функции f на множестве A. Для любых $x \in \mathcal{H}$ и $z \in \overline{d} f(x)$ введём выпуклую функцию

$$\varphi(h, z, x, \nu) = \max_{(a,v) \in \operatorname{cl} \operatorname{co} \underline{d}_\nu f(x) + z} \big(a + \langle v, h \rangle \big) + \frac{1}{2} \|h\|^2 \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

В случае, когда заданы некоторые последовательности $\{\nu_n\} \subset [0, +\infty]$ и $\{x_n\} \subset A$, мы будем обозначать $\varphi_n(h, z) = \varphi(h, z, x_n, \nu_n)$. С помощью функции φ можно выписать необходимые условия минимума функции f на множестве A.

Предложение 3.2.1. *Пусть $x_* \in A$ — точка локального минимума функции f на множестве A. Тогда для всех $\nu \geqslant 0$ будет*

$$\{0\} = \operatorname*{arg\,min}_{h \in A - x_*} \varphi(h, z, x_*, \nu) \qquad \forall z = (0, w) \in \operatorname{ext} \overline{d} f(x_*). \tag{3.13}$$

Более того, условие (3.13) *выполняется тогда и только тогда, когда $f'(x_*, h) \geqslant 0$ для всех $h \in A - x_*$ и, таким образом, условие экстремума* (3.13) *не зависит от выбора кодифференциала и параметра $\nu \geqslant 0$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $z = (0, w) \in \operatorname{ext} \overline{d} f(x_*)$. Согласно [181, теорема 2.8] (см. также [39, теорема 5] и предложение 1.3.2 в предыдущей главе) точка 0 является точкой глобального минимума функции $\varphi(\cdot, z, x_*, \nu) - \|\cdot\|^2/2$ на множестве $A - x_*$. Отсюда, учитывая, что субдифференциал этой функции в нуле очевидно совпадает с субдифференциалом функции $\varphi(\cdot, z, x_*, \nu)$ в нуле, получаем, что справедливо условие (3.13).

Пользуясь теоремой о субдифференциале супремума произвольного семейства функций (см., например, [45, теорема 4.2.3]), определением $\underline{d}_\nu f(x)$ и равенством (3.1), нетрудно проверить, что $\partial_h \varphi(0, z, x_*, \nu) = \underline{\partial} f(x_*) + w$, где $\partial_h \varphi(0, z, x_*, \nu)$ — субдифференциал функции $\varphi(\cdot, z, x_*, \nu)$ в нуле в смысле выпуклого анализа. Отсюда, с помощью стандартного необходимого и достаточного условия минимума выпуклой функции на выпуклой множестве имеем

$$\max_{v \in \underline{\partial} f(x_*) + w} \langle v, h \rangle \geqslant 0 \quad \forall h \in A - x_* \quad \forall (0, w) \in \operatorname{ext} \overline{d} f(x_*). \tag{3.14}$$

Как было показано в доказательстве следствия 1.2.1, справедливо равенство $\operatorname{ext} \overline{\partial} f(x_*) = \{w \in \mathcal{H} \mid (0, w) \in \operatorname{ext} \overline{d} f(x_*)\}$. Поэтому, беря инфимум в (3.14) по всем $w \in \operatorname{ext} \overline{\partial} f(x_*)$ и применяя теорему Крейна-Мильмана, получим, что

$$f'(x_*, h) = \max_{v \in \underline{\partial} f(x_*)} \langle v, h \rangle + \min_{w \in \overline{\partial} f(x_*)} \langle w, h \rangle \geqslant 0 \quad \forall h \in A - x_*. \tag{3.15}$$

Повторяя данное рассуждение в обратном направлении, легко видеть, что из справедливости неравенства (3.15) вытекает, что выполняется условие экстремума (3.13). Таким образом, данные условия эквивалентны. □

Точка $x_* \in A$, удовлетворяющая необходимым условиям экстремума из предыдущего предложения, называется inf-стационарной точкой функции f на множестве A. Воспользовавшись данными условиями экстремума, можно предложить метод нахождения inf-стационарных точек функции f на множестве A, который мы называем квадратичной регуляризацией метода кодифференциального спуска. Теоретическая схема этого метода представлена в виде алгоритма 2.

Алгоритм 2: Квадратичная регуляризация метода кодифференциального спуска.

Шаг 1. Выберем начальное приближение $x_0 \in A$, последовательности $\{\nu_n\} \subset [0, +\infty]$ и $\{\mu_n\} \subset [0, +\infty]$ и верхнюю границу на величину шага $\alpha_* \in (0, +\infty]$ и положим $n := 0$.

Шаг 2. Вычислим $\underline{d}_{\nu_n} f(x_n)$ и $\overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$.

Шаг 3. Для каждого $z = (b, w) \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ найдём оптимальный план $h_n(z)$ задачи:

$$\varphi_n(h, z) \to \min_h, \quad h \in A - x_n. \tag{3.16}$$

Шаг 4. Для каждого $z \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ найдём

$$\alpha_n(z) \in \arg\min_\alpha \Big\{ f(x_n + \alpha h_n(z)) \Bigm| \alpha \in [0, \alpha_*] \colon x_n + \alpha h_n(z) \in A \Big\}.$$

Шаг 5. Найдём $z_n \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$, на котором достигается минимум в задаче:

$$f(x_n + \alpha_n(z) h_n(z)) \to \min_z, \quad z \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n).$$

Положим $x_{n+1} = x_n + \alpha_n(z_n) h_n(z_n)$, $n := n + 1$ и перейдём на **Шаг 2**.

Замечание 3.2.1. Мы предполагаем, что величины шага $\alpha_n(z)$ и векторы z_n корректно определены на всех итерациях алгоритма. Заметим, что функция $\varphi_n(\cdot, z)$ строго выпукла, непрерывна (так как она очевидно ограничена сверху на ограниченных множествах) и $\varphi_n(h, z) \to +\infty$ при $\|h\| \to +\infty$. Отсюда, учитывая, что $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и A — замкнутое выпуклое множество, получаем, что для любых n и z существует единственный оптимальный план $h_n(z)$ задачи (3.16). Нетрудно видеть, что в случае когда множества $\underline{d}_{\nu_n} f(x_n)$ и $\overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ состоят из конечного числа точек (то есть когда кодифференциал является парой выпуклых многогранников), а множество A задаётся линейными ограничениями, задачу (3.16) можно легко свести к задаче квадратичного программирования. Кроме того, заметим, что точка x_n

является inf-стационарной точкой функции f на множестве A тогда и только тогда, когда $h_n(z) = 0$ для всех $z = (0, w) \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$.

Замечание 3.2.2. При естественных предположениях можно доказать сходимость квадратичной регуляризации метода кодифференциального спуска к inf-стационарной точке функции f на множестве A. Доказательство этого результата, схожее с доказательством теоремы 3.1.1 и основанное на применении леммы 3.1.3, имеется в работе автора [189]. Теорема 3.1.2 и замечание 3.1.6 также допускают естественное обобщение на случай квадратичной регуляризации метода кодифференциального спуска. Более того, для некоторых классов невыпуклых негладких функций возможно оценить скорость сходимости данного метода. А именно, при выполнении в предельной точке x_* естественных достаточных условий минимума второго порядка метод сходится с линейной скоростью, а при выполнении достаточных условий минимума *первого* порядка метод имеет квадратичную скорость сходимости. Подробнее см. статью автора [189].

3.3 Метод гиподифференциального спуска для выпуклых функций

В этом параграфе мы изучим поведение метода кодифференциального спуска в выпуклом случае. Пусть $f \colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ — замкнутая выпуклая функция. Как было отмечено в главе 1, функция является кодифференцируемой в заданной точке тогда и только тогда, когда её приращение в этой точке можно аппроксимировать с помощью разности выпуклых функций. В выпуклом случае естественно предполагать, что приращение кодифференцируемой функции можно аппроксимировать с помощью выпуклой функции. Иными словами, естественно предполагать, что функция f *гиподифференцируема*, то есть существует её кодифференциальное отображение вида $Df(\cdot) = [\underline{d}f(\cdot), \{0\}]$.

Везде далее мы будем предполагать, что функция f непрерывно гиподифференцируема на $\mathcal{H}$, а $\underline{d}f(\cdot)$ — её непрерывное гиподифференциальное отображение. По предложению 1.2.2 условие $0 \in \underline{d}f(x_*)$ является необходимым и достаточным условие глобального минимума функции f, поскольку в выпуклом случае $f'(x_*, \cdot) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда x_* — точка глобального минимума функции f.

В случае когда метод кодифференциального спуска применяется к гиподифференцируемой функции, его естественно называть *методом гиподифференциального спуска*. Кроме того, в этом случае естественно заменить трудоёмкую операцию точного линейного поиска на правило выбора шага Армихо. Теоретическая схема метода гиподифференциального спуска с таким правилом выбора шага представлена в виде алгоритма 3.

Алгоритм 3: Метод гиподифференциального спуска.

Шаг 1. Выберем начальное приближение $x_0 \in \mathcal{H}$, параметры $\sigma \in (0,1)$ и $\gamma \in (0,1)$ и положим $n := 0$.

Шаг 2. Вычислим $\underline{d}f(x_n)$.

Шаг 3. Найдём оптимальный план $(a_n, v_n) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}$ задачи

$$\|(a,v)\|^2 \to \min, \quad (a,v) \in \underline{d}f(x_n).$$

Шаг 4. Найдём наименьшее $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, удовлетворяющее неравенству

$$f(x_n - \gamma^k v_n) - f(x_n) \leqslant -\gamma^k \sigma \|(a_n, v_n)\|^2,$$

и положим $\alpha_n = \gamma^k$.

Шаг 5. Определим $x_{n+1} = x_n - \alpha_n v_n$, $n := n+1$ и перейдём на **Шаг 2**.

По лемме 3.1.1 будет $f'(x_n, -v_n) \leqslant -\|(a_n, v_n)\|^2$ для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Следовательно, по определению производной по направлениям для любого достаточно малого $\alpha > 0$ выполняется неравенство

$$f(x_n - \alpha v_n) - f(x_n) \leqslant \alpha\sigma f'(x_n, -v_n) \leqslant -\alpha\sigma \|(a_n, v_n)\|^2, \tag{3.17}$$

если $\|(a_n, v_n)\| > 0$, т. е. $0 \notin \underline{d}f(x_n)$. Поэтому величина шага α_n (см. шаг 4) корректно определена и $f(x_{n+1}) < f(x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, если x_n не является точкой глобального минимума функции f.

Наша цель — оценить скорость сходимости метода гиподифференциального спуска. Для этого мы будем предполагать, что гиподифференциальное отображение $\underline{d}f(\cdot)$ определённым образом согласовано со свойством выпуклости функции f.

Определение 3.3.1. Пусть $C \subseteq \mathcal{H}$ — непустое выпуклое множество. Будем называть гиподифференциальное отображение $\underline{d}f(\cdot)$ функции f *согласованным* на множестве C, если для всех $x, y \in C$ и $(a, v) \in \underline{d}f(x)$ выполняется неравенство $f(y) - f(x) \geqslant a + \langle v, y - x\rangle$.

Если функция f непрерывно дифференцируема, то отображение $\underline{d}f(\cdot) = \{(0, \nabla f(\cdot))\}$ является согласованным гиподифференциальным отображением функции f на каждом выпуклом множестве C, поскольку $f(y) - f(x) \geqslant \langle \nabla f(x), y - x\rangle$ для всех $x, y \in \mathcal{H}$ в силу выпуклости функции f. Данное свойство также сохраняется при сложении выпуклых функций, умножении на неотрицательное число и взятии поточечного максимума (подробное доказательство этого утверждения имеет в работе автора [194]).

Предложение 3.3.1. *Пусть замкнутые выпуклые функции $f_i\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ гиподифференцируемы на $\mathcal{H}$, а $\underline{d}f_i(\cdot)$ их гиподифференциальные отображения, являющиеся согласованными на множестве $C \subseteq \mathcal{H}$, $i \in 1\colon k$. Тогда отображение*

$$\underline{d}g(\cdot) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{d}f_i(\cdot) \tag{3.18}$$

является гиподифференциальным отображением функции $g = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$ согласованным на множестве C (здесь $\lambda_i \geqslant 0$), а отображние

$$\underline{d}u(\cdot) = \operatorname{co}\Big\{ (f_i(\cdot) - u(\cdot), 0) + \underline{d}f_i(\cdot) \Bigm| i \in 1\colon k \Big\} \tag{3.19}$$

является гиподифференциальным отображением функции $u = \max\limits_{i \in 1\colon k} f_i$ согласованным на множестве C.

В гладком случае скорость сходимости градиентных методов оценивается, как правило, в предположении глобальной липшицевости градиента исследуемой функции (ср. [334]). Поэтому естественно использовать аналогичное предположение при анализе сходимости метода гиподифференциального спуска.

Напомним, что если функция f дифференцируема и её градиент является глобально липшицевым с константой Липшица $L \geqslant 0$, то

$$\big| f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle \big| \leqslant \frac{L}{2} \|y - x\|^2 \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

(см., например [334, Лемма 1.2.3]). Опираясь на данное неравенство, можно предположить следующее обобщение определения липшицевости градиента на негладкий случай.

Определение 3.3.2. Пусть $C \subseteq \mathcal{H}$ — непустое множество. Будем говорить, что гиподифференциальное отображение $\underline{d}f(\cdot)$ является *липшицевой аппроксимацией* функции f на множестве C с константой Липшица $L \geqslant 0$, если

$$\Big| f(y) - f(x) - \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x)} \big(a + \langle v, y - x \rangle \big) \Big| \leqslant \frac{L}{2} \|y - x\|^2 \quad \forall x, y \in C.$$

Свойство липшицевости аппроксимации сохраняется при сложении, умножении на число и взятии поточечного максимума выпуклых функций. Подробное доказательство этого утверждения имеется в работе автора [194].

Предложение 3.3.2. *Пусть выпуклые функции $f_i\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ гиподифференцируемы на $\mathcal{H}$, а $\underline{d}f_i(\cdot)$ — их гиподифференциальные отображения, $i \in I = \{1, \ldots, k\}$. Предположим, что для каждого $i \in I$ отображение $\underline{d}f_i(\cdot)$ является липшицевой аппроксимацией функции f_i на множестве $C \subseteq \mathcal{H}$ с константой Липшица $L_i \geqslant 0$. Тогда гиподифференциальное отображение (3.18) является липшицевой аппроксимацией функции $g = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$ на множестве C с константой Липшица $L \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i L_i$ (здесь $\lambda_i \geqslant 0$), а гиподифференциальное отображение (3.19) является липшицевой аппроксимацией функции $u = \max\limits_{i \in I} f_i$ на множестве C с константой Липшица $L \leqslant \max\limits_{i \in I} L_i$.*

Воспользовавшись введёнными определениями, мы можем получить оценку скорости сходимости метода гиподифференциального спуска, совпадающую с оценкой скорости сходимости градиентного метода в выпуклом случае (см., например, [334, Теорема 2.1.14]). Данный результат вполне ожидаем, поскольку в гладком случае метод гиподифференциального спуска сводится к градиентном методу с правилом выбора шага Армихо. Заметим, что доказательство этого результата представляет из себя прямое обобщение доказательства соответствующей теоремы для градиентного метода на негладкий случай.

Теорема 3.3.1. *Пусть f — замкнутая выпуклая функция, а непрерывное гиподифференциальное отображение $\underline{d}f(\cdot)$ функции f является согласованным и ограниченным на множестве $S_0 = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) \leqslant f(x_0)\}$. Предположим также, что множество S_0 ограничено, отображение $\underline{d}f(\cdot)$ является липшицевой аппроксимацией функции f на множестве $S_\varepsilon = \{x \in \mathcal{H} \mid \operatorname{dist}(x, S_0) \leqslant \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, а последовательность $\{x_n\}$ построена по методу гиподифференциального спуска. Тогда существует $\widehat{\alpha} > 0$ такое, что $\alpha_n \geqslant \widehat{\alpha}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и справедлива следующая оценка:*

$$f(x_n) - f(x_*) \leqslant \frac{(f(x_0) - f(x_*))R^2}{R^2 + (f(x_0) - f(x_*))\widehat{\alpha}\sigma n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

Здесь x_* — точка глобального минимума функции f и $R = 1 + \sup_{n \geqslant 0} \|x_n - x_*\| < +\infty$.

Доказательство. Заметим сначала, что функция f достигает глобального минимума по предложению II.1.2 из [78], так как функция f замкнута, множество S_0 ограничено, а $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Отметим также, что величина $R = 1 + \sup_{n \geqslant 0} \|x_n - x_*\|$ конечна, в силу того что множество S_0 ограничено и $\{x_n\} \subset S_0$ (справедливость данного включения следует из неравенства $f(x_{n+1}) < f(x_n)$; см. (3.17)).

Обозначим $\Phi_n(y) = \max\limits_{(a,v) \in \underline{d}f(x_n)} (a + \langle v, y \rangle)$. По необходимому и достаточному условию минимума выпуклой функции на выпуклом множестве и определению (a_n, v_n) (см. шаг 3 метода гиподифференциального спуска) выполняется следующее неравенство:

$$a_n a + \langle v_n, v \rangle \geqslant \|(a_n, v_n)\|^2 \quad \forall (a, v) \in \underline{d} f(x_n). \tag{3.21}$$

Если $a_n = 0$, то, учитывая, что $a \leqslant 0$ для всех $(a, v) \in \underline{d} f(x_n)$, имеем

$$\Phi_n(-v_n) \leqslant \max_{(a,v) \in \underline{d} f(x_n)} \langle v, -v_n \rangle \leqslant -\|(a_n, v_n)\|^2.$$

Отсюда, воспользовавшись выпуклостью функции Φ_n и равенством $\Phi_n(0) = 0$, выполняемым по определению кодифференциала, получаем, что

$$\Phi_n(-\alpha v_n) \leqslant \alpha \Phi_n(-v_n) + (1 - \alpha)\Phi_n(0) \leqslant -\alpha \|(a_n, v_n)\|^2 \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \tag{3.22}$$

С другой стороны, если $a_n < 0$, то, поделив (3.21) на a_n и взяв максимум по всем $(a, v) \in \underline{d} f(x_n)$, получим

$$\Phi_n \left(\frac{1}{a_n} v_n \right) \leqslant -\frac{1}{|a_n|} \|(a_n, v_n)\|^2.$$

Вновь воспользовавшись выпуклостью функции Φ_n и равенством $\Phi_n(0) = 0$, получим

$$\Phi_n \left(\frac{\alpha}{a_n} v_n \right) \leqslant \alpha \Phi_n \left(\frac{1}{a_n} v_n \right) \leqslant -\frac{\alpha}{|a_n|} \|(a_n, v_n)\|^2 \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Отсюда и из (3.22) следует, что вне зависимости от значения a_n выполняется следующее неравенство:

$$\Phi_n(-\alpha v_n) \leqslant -\alpha \|(a_n, v_n)\|^2 \quad \forall \alpha \in \left[0, \frac{1}{|a_n|}\right] \tag{3.23}$$

(здесь $1/0 = 1$ по определению). Заметим, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена, так как $\{x_n\} \subset S_0$ по построению, а гиподифференциальное отображение $\underline{d} f(\cdot)$ ограничено на S_0 по нашему предположению. Следовательно, существует $\varkappa \in (0, 1]$ такое, что $|a_n|^{-1} > \varkappa > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, из ограниченности $\underline{d} f(\cdot)$ на S_0 также следует, что существует $K > 0$ такое, что $\|v_n\| \leqslant K$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда, в частности, вытекает, что $x_n - \alpha v_n \in S_\varepsilon = \{x \in \mathcal{H} \mid \operatorname{dist}(x, S_0) \leqslant \varepsilon\}$ для всех $\alpha \in [0, \varepsilon/K]$ и $n \in \mathbb{N}$.

Напомним, что $\underline{d} f(\cdot)$ — липшицевая аппроксимация функции f на множестве S_ε. Поэтому существует $L > 0$ такое, что

$$f(x_n - \alpha v_n) - f(x_n) - \Phi_n(-\alpha v_n) \leqslant \frac{L\alpha^2}{2} \|v_n\|^2 \quad \forall \alpha \in \left[0, \frac{\varepsilon}{K}\right].$$

Отсюда с помощью неравенства (3.23) получаем следующее неравенство:

$$f(x_n - \alpha v_n) - f(x_n) \leqslant \left(-\alpha + \frac{L\alpha^2}{2} \right) \|(a_n, v_n)\|^2 \quad \forall \alpha \in \left[0, \min\left\{\varkappa, \frac{\varepsilon}{K}\right\}\right].$$

Следовательно, для любого $\widehat{\alpha} \leqslant \min\{2(1 - \sigma)/L, \varkappa, \varepsilon/K\}$ будет

$$f(x_n - \widehat{\alpha} v_n) - f(x_n) \leqslant -\widehat{\alpha} \sigma \|(a_n, v_n)\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

В частности, можно положить $\widehat{\alpha} = \gamma^k$ для достаточно большого $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \leqslant -\widehat{\alpha}\sigma\|(a_n, v_n)\|^2, \quad \alpha_n \geqslant \widehat{\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.24}$$

где $x_{n+1} = x_n - \alpha_n v_n$, а α_n вычисляется на шаге 4 метода гиподифференциального спуска.

Положим $\Delta_n = f(x_n) - f(x_*)$, где x_* — точка глобального минимума функции f. Поскольку $(a_n, v_n) \in \underline{d}f(x_n)$ (см. шаг 3 метода гиподифференциального спуска) и гиподифференциальное отображение $\underline{d}f(\cdot)$ является согласованным, выполняется следующее неравенство:

$$\Delta_n \leqslant -a_n + \langle v_n, x_n - x_* \rangle \leqslant \|(a_n, v_n)\|\big(1 + \|x_n - x_*\|\big) \leqslant R\|(a_n, v_n)\|$$

(напомним, что $R = 1 + \sup_{n \geqslant 0} \|x_n - x_*\|$). Прибавляя и отнимая $f(x_*)$ в левой части неравенства (3.24) и оценивая $\|(a_n, v_n)\|^2$ с помощью предыдущего неравенства, получим, что

$$\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n - \frac{\widehat{\alpha}\sigma}{R^2}\Delta_n^2.$$

Отсюда, поделив на $\Delta_n \cdot \Delta_{n+1}$, имеем

$$\frac{1}{\Delta_{n+1}} \geqslant \frac{1}{\Delta_n} + \frac{\widehat{\alpha}\sigma}{R^2}\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} \geqslant \frac{1}{\Delta_n} + \frac{\widehat{\alpha}\sigma}{R^2}$$

(заметим, что $\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n$ в силу того, что $f(x_{n+1}) \leqslant f(x_n)$). Суммируя эти неравенства от 0 до $n+1$, окончательно получаем

$$\frac{1}{\Delta_{n+1}} \geqslant \frac{1}{\Delta_0} + \frac{\widehat{\alpha}\sigma}{R^2}(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

т. е. справедлива оценка (3.20). □

Замечание 3.3.1. Можно показать, что если множество $S_0 = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) \leqslant f(x_0)\}$ ограничено и существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция f удовлетворяет условию Липшица на множестве S_ε, то существует гиподифференциальное отображение функции f, удовлетворяющее всем предположениям теоремы 3.3.1 (это отображение приведено в явном виде в замечании 3.3 в работе автора [194]). В частности, если пространство $\mathcal{H}$ конечномерно, то ограниченность множества S_0 является достаточным условием существования гиподифференциального отображения функции f, удовлетворяющего всем условиям теоремы 3.3.1. Таким образом, по крайней мере с теоретической точки зрения предположения данной теоремы не являются ограничительными. С другой стороны, предложения 3.3.1 и 3.3.2 позволяют вычислять гиподифференциальные отображения, удовлетворяющие всем условиям теоремы 3.3.1, для достаточно широкого класса негладких выпуклых функций, возникающих в приложениях.

Замечание 3.3.2. Отметим, что скорость сходимости метода гиподифференциального спуска превосходит оптимальную скорость сходимости $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$ субградиентных методов минимизации негладких выпуклых функций (см. [334, Параграф 3.2]). Данный факт очевидно связан с тем, что метод гиподифференциального спуска использует на каждой итерации гораздо больше информации о целевой функции, чем субградиентные методы, которые на каждой итерации вычисляют лишь один субградиент. С другой стороны, каждое вычисление гиподифференциала является намного более трудоёмкой процедурой, чем вычисление отдельного субградиента и поэтому для задач большой размерности со сложно устроенной целевой функцией метод гиподифференциального спуска может оказаться ощутимо медленнее субградиентных методов, несмотря на более высокую скорость сходимости.

3.4 Метод глобального кодифференциального спуска для кусочно-аффинных функций

Как было указано выше, метод кодифференциального спуска тесно связан с условиями глобальной оптимальности в терминах глобальных кодифференциалов и в некоторых случаях позволяет выходить из точек локального минимума исследуемой функции. Конкретный пример подобного поведения метода кодифференциального спуска был приведёт в работе [145]. Основная цель данного параграфа — дать теоретической обоснование способности метода кодифференциального спуска выходить из точек локального минимума в случае, когда целевая функция является кусочно-аффинной. Для этого мы рассмотрим естественную модификацию метода кодифференциального спуска для глобальной минимизации кусочно-аффинных функций.

Напомним, что подмножество Q пространства $\mathbb{R}^d$ называется *полиэдральным*, если оно представимо в виде пересечения конечного числа замкнутых полупространств. *Полиэдральным разбиением* пространства $\mathbb{R}^d$ называется конечный набор $\sigma = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$ полиэдральных подмножеств Q_i пространства $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющий следующим условиям: каждое из множеств Q_i имеет непустую внутренность, внутренности множеств Q_i попарно не пересекаются и σ является разбиением пространства $\mathbb{R}^d$, т. е. $\mathbb{R}^d = \bigcup_{k=1}^n Q_i$. Наконец, функция $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется *кусочно-аффинной* (см. [239, 290]), если существует такое полиэдральное разбиение $\sigma = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$ пространства $\mathbb{R}^d$, что на каждом множестве Q_i функция f является аффинной, то есть для любого i найдутся $a_i \in \mathbb{R}$ и $v_i \in \mathbb{R}^d$ такие, что $f(x) = a_i + \langle v_i, x\rangle$ для всех $x \in Q_i$. Заметим, что множество кусочно-аффинных функций является векторной решёткой относительно поточечных операций (см. [237, 239]).

При исследовании экстремальных задач удобнее иметь дело с аналитическим представлением кусочно-аффинной функции, чем с её определением через полиэдральное разбиение. В статье [239] (см. также [237]) было доказано, что функция f является кусочно-аффинной тогда и только тогда, когда найдутся конечные наборы $(a_i, v_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $i \in I = \{1, \ldots, \ell\}$, и $(b_j, w_j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $j \in J = \{1, \ldots, s\}$, такие, что

$$f(x) = \max_{i \in I}(a_i + \langle v_i, x \rangle) + \min_{j \in J}(b_j + \langle w_j, x \rangle) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.25}$$

Методы построения некоторого аналитического представления кусочно-аффинной функции по заданному полиэдральному разбиению изучались в работе [290]. Методы вычисления представления (3.25) по произвольному аналитическому представлению кусочно-аффинной функции исследовались в [6].

Пусть задана кусочно-аффинная функция $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ и известно её представление вида (3.25). Положим

$$\underline{f}(x) = \max_{i \in I}(a_i + \langle v_i, x \rangle), \quad \overline{f}(x) = \min_{j \in J}(b_j + \langle w_j, x \rangle). \tag{3.26}$$

Тогда $f = \underline{f} - (-\overline{f})$ является представлением функции f в виде разности выпуклых функций. Множество $S_{\underline{f}} = \operatorname{co}\{(a_i, v_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mid i \in I\}$ очевидно является аффинным опорным множеством функции $\underline{f}$, а множество $S_{-\overline{f}} = \operatorname{co}\{(-b_j, -w_j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mid j \in J\}$ является аффинным опорным множеством функции $-\overline{f}$ (см. параграф 1.1.1). Поэтому пара $Df = [\underline{d}f, \overline{d}f]$, где

$$\begin{aligned} \underline{d}f(x) &= \operatorname{co}\big\{(a_i - \underline{f}(x) + \langle v_i, x \rangle, v_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \bigm| i \in I\big\}, \\ \overline{d}f(x) &= \operatorname{co}\big\{(b_j - \overline{f}(x) + \langle w_j, x \rangle, w_j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \bigm| j \in J\big\} \end{aligned} \tag{3.27}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^d$, является глобальным кодифференциалом кусочно-аффинной функции f (см. параграф 1.1.2). Отметим, что глобальный кодифференциал кусочно-аффинной функции впервые был неявно введён проф. Л.Н. Поляковой в [349].

Замечание 3.4.1. Воспользовавшись основными правилами вычисления глобальных кодифференциалов разности выпуклых функций из теоремы 1.1.3, нетрудно вывести исчисление глобальных кодифференциалов кусочно-аффинных функций, подробно изложенное в работе автора [194]. См. [6] по поводу алгоритмической реализации данного исчисления.

Полагая $C = \{(b_j - \overline{f}(x) + \langle w_j, x_* \rangle, w_j) \mid j \in J\}$ в теореме 1.1.4 о необходимых и достаточных условиях глобального минимума для разности выпуклых функций в терминах глобальных кодифференциалов, получаем следующее необходимое и достаточное условие глобального минимума для кусочно-аффинных функций.

Теорема 3.4.1. *Пусть f — ограниченная снизу кусочно-аффинная функция вида (3.25), а Df — её глобальный кодифференциал. Для произвольной точки $x_* \in \mathbb{R}^d$ и всех $j \in J$ положим $z_j = (b_j - \overline{f}(x_*) + \langle w_j, x_* \rangle, w_j) \in \overline{d}f(x_*)$ и*

$$\big\{(a_j^*, v_j^*)\big\} = \arg\min\big\{\|(a,v)\|^2 \bigm| (a,v) \in \underline{d}f(x_*) + z_j\big\},$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Для того чтобы точка x_* была точкой глобального минимума функции f необходимо и достаточно, чтобы $a_j^* \geqslant 0$ для любого $j \in J$.

С помощью данных необходимых и достаточных условий глобального минимума можно предложить естественную модификацию метода кодифференциального спуска для минимизации кусочно-аффинных функций. Для этого зафиксируем произвольную кусочно-аффинную функцию f вида (3.25) и обозначим через Df её глобальный кодифференциал. Для всех $x \in \mathbb{R}^d$ и $j \in J$ положим

$$z_j(x) = (b_j - \overline{f}(x) + \langle w_j, x \rangle, w_j) \in \overline{d}f(x), \tag{3.28}$$
$$\big\{(a_j(x), v_j(x))\big\} = \arg\min\big\{\|(a,v)\|^2 \bigm| (a,v) \in \underline{d}f(x) + z_j(x)\big\}.$$

Заметим, что из равенства (3.25) и определения глобального кодифференциала следует, что

$$f(y) - f(x) = \min_{j \in J} \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x) + z_j(x)} (a + \langle v, y - x \rangle) \quad \forall y, x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.29}$$

Предположим, что точка x не является точкой глобального минимума функции f, и зафиксируем произвольное $j \in J$. Из определения $(a_j(x), v_j(x))$ и необходимого и достаточного условия минимума выпуклой функции на выпуклом множестве следует, что

$$a_j(x)(a - a_j(x)) + \langle v_j(x), v - v_j(x) \rangle \geqslant 0 \quad \forall (a,v) \in \underline{d}f(x) + z_j(x).$$

Если $a_j(x) < 0$, то, поделив это неравенство на $a_j(x)$ и взяв максимум по всем $(a,v) \in \underline{d}f(x) + z_j(x)$, получим

$$f\left(x + \frac{1}{a_j(x)} v_j(x)\right) - f(x) \leqslant -\frac{1}{|a_j(x)|}\|(a_j(x), v_j(x))\|^2 < 0. \tag{3.30}$$

(см. (3.29)). Если $a_j(x) = 0$, но $v_j(x) \neq 0$, то $\langle v, -v_j(x) \rangle \leqslant -\|v_j(x)\|^2$ для всех $(a,v) \in \underline{d}f(x) + z_j(x)$. Отсюда и из (3.29) следует, что

$$f(x - \alpha v_j(x)) - f(x) \leqslant \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x) + z_j(x)} a - \alpha\|v_j(x)\|^2 \quad \forall \alpha \geqslant 0, \tag{3.31}$$

т. е. функция f не ограничена снизу. Таким образом, если $a_j(x) = 0$ и f ограничена снизу, то $v_j(x) = 0$. Наконец, если $a_j(x) > 0$, то индекс j можно отбросить. Действительно, по теореме 1.1.2 будет

$$\max_{(a,v) \in \underline{d}f(x) + z_j(x)} (a + \langle v, y \rangle) \geqslant 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^d. \tag{3.32}$$

Согласно (3.29) имеем

$$f(y) - f(x) = \min_{k \in J} \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x) + z_k(x)} (a + \langle v, y - x \rangle) \quad \forall y \in \mathbb{R}^d .$$

Из неравенства (3.32) следует, что для любого y такого, что $f(y) < f(x)$ минимум в данном равенстве не может достигаться при $k = j$. Поэтому

$$f(y) - f(x) = \min_{k \in J \setminus \{j\}} \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x) + z_i(x)} (a + \langle v, y - x \rangle)$$

для всех $y \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $f(y) < f(x)$. Другими словами, индекс j и соответствующий ему вектор (b_j, w_j) не нужны для вычисления $f(y)$, если $f(y) < f(x)$. Отсюда, в частности, следует, что для любого y, удовлетворяющего неравенству $f(y) < f(x)$, также будет $a_j(y) \geqslant 0$. Докажем этот результат строго.

Лемма 3.4.1. *Предположим, что функция f ограничена снизу, и для некоторых $j \in J$ и $x \in \mathbb{R}^d$ выполняется неравенство $a_j(x) \geqslant 0$. Тогда $a_j(y) \geqslant 0$ для всех $y \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяющих неравенству $f(y) \leqslant f(x)$.*

Доказательство. Для любых $\Delta y, y \in \mathbb{R}^d$ положим $g_j(\Delta y, y) = \max_{(a,v) \in \underline{d}f(y) + z_j(y)} (a + \langle v, \Delta y \rangle)$. Воспользовавшись определением глобального кодифференциала (см. (1.12)) и равенствами (3.27), получим

$$f(y + \Delta y) - f(y) = \max_{(a,v) \in \underline{d}f(y)} (a + \langle v, \Delta y \rangle) + \min_{(b,w) \in \overline{d}f(y)} (b + \langle w, \Delta y \rangle) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{(a,v) \in \underline{d}f(y)} (a + \langle v, \Delta y \rangle) + b_j - \overline{f}(y) + \langle w_j, y \rangle + \langle w_j, \Delta y \rangle = g_j(\Delta y, y).$$

для всех $\Delta y, y \in \mathbb{R}^d$. Следовательно, $g_j(\cdot, y) \geqslant \inf_{z \in \mathbb{R}^d} f(z) - f(y)$ для любого $y \in \mathbb{R}^d$, то есть полиэдральная функция $g_j(\cdot, y)$ ограничена снизу. Заметим также, что по определениям $\underline{d}f(\cdot)$ и $z_j(\cdot)$ (см. (3.27) и (3.28)) будет

$$g_j(\Delta y, y) = \max_{i \in I} \big(a_i + \langle v_i, y \rangle - \underline{f}(y) + \langle v_i, \Delta y \rangle + b_j + \langle w_j, y \rangle - \overline{f}(y) + \langle w_j, \Delta y \rangle \big) \tag{3.33}$$

для всех $\Delta y, y \in \mathbb{R}^d$.

Из неравенства $a_j(x) \geqslant 0$ и теоремы 1.1.2 (см. замечание 1.1.2) вытекает, что функция $g(\cdot, x)$ неотрицательна. Поэтому, согласно равенству (3.33) для любого $\Delta x \in \mathbb{R}^d$ существует $i \in I$ такое, что

$$a_i + \langle v_i, x \rangle - \underline{f}(x) + \langle v_i, \Delta x \rangle + b_j + \langle w_j, x \rangle - \overline{f}(x) + \langle w_j, \Delta x \rangle \geqslant 0.$$

Полагая $\Delta x = y - x + \Delta y$ и пользуясь равенством $f(x) = \underline{f}(x) + \overline{f}(x)$ (см. (3.25) и (3.26)), получаем, что для всех $\Delta y, y \in \mathbb{R}^d$ найдётся такой индекс $i \in I$, что

$$a_i + \langle v_i, y \rangle + \langle v_i, \Delta y \rangle + b_j + \langle w_j, y \rangle + \langle w_j, \Delta y \rangle \geqslant f(x).$$

Вычитая $f(y) = \underline{f}(y) + \overline{f}(y)$, приходим к неравенству

$$a_i + \langle v_i, y \rangle - \underline{f}(y) + \langle v_i, \Delta y \rangle + b_j + \langle w_j, y \rangle - \overline{f}(y) + \langle w_j, \Delta y \rangle \geqslant f(x) - f(y).$$

Беря максимум по всем $i \in I$, получаем, что $g_j(\Delta y, y) \geqslant f(x) - f(y)$ для всех $\Delta y, y \in \mathbb{R}^d$ (см. (3.33)). Следовательно, функция $g_j(\cdot, y)$ неотрицательна для любого y, удовлетворяющего неравенству $f(y) \leqslant f(x)$. Отсюда $a_j(y) \geqslant 0$ для любого такого y по теореме 1.1.2. □

Опираясь на необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности из теоремы 3.4.1, а также лемму 3.4.1, можно предложить следующую модификацию метода кодифференциального спуска для минимизации кусочно-аффинных функций, которую мы называем *методом глобального кодифференциального спуска* (алгоритм 4).

Алгоритм 4: Метод глобального кодифференциального спуска (МГКС).

Шаг 1. Выберем начальную точку $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Положим $n := 0$ и $M_n = J = \{1, \ldots, s\}$.

Шаг 2. Вычислим $\underline{d}f(x_n)$ и $z_j(x_n)$ для всех $j \in M_n$.

Шаг 3. Для каждого $j \in M_n$ найдём оптимальный план $(a_j(x_n), v_j(x_n)) \in \mathbb{R}^{d+1}$ задачи

$$\|(a, v)\|^2 \to \min, \quad (a, v) \in \underline{d}f(x_n) + z_j(x_n).$$

Если $a_j(x_n) \geqslant 0$, то $M_n := M_n \setminus \{j\}$.

Шаг 4. Если $M_n = \varnothing$, то **Стоп**. Иначе, найдём $j(n) \in M_n$ такое, что

$$j(n) \in \operatorname*{arg\,min}_{j \in M_n} f\left(x_n + \frac{1}{a_j(x_n)} v_j(x_n) \right).$$

Положим $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{a_{j(n)}(x_n)} v_{j(n)}(x_n)$, $M_{n+1} = M_n$, $n := n + 1$ и перейдём на **Шаг 2**.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ построена по методу глобального кодифференциального спуска (МГКС). Заметим, что из неравенства (3.30) следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$, либо $f(x_{n+1}) < f(x_n)$, либо $M_n = \varnothing$. Поэтому, если для некоторых $j \in J$ и $n \in \mathbb{N}$ будет $a_j(x_n) \geqslant 0$ (в этом случае МГКС отбрасывает индекс j из индексного множества M_n), то $a_j(x_k) \geqslant 0$ для всех $k \geqslant n$ по лемме 3.4.1. Следовательно, если МГКС заканчивает свою работу на n-й итерации (т. е. на n-й итерации оказалось, что $M_n = \varnothing$), то $a_j(x_n) \geqslant 0$ для всех $j \in J$, откуда с помощью теоремы 3.4.1 можно сделать вывод, что x_n является точкой глобального минимума функции f. Ниже мы покажем, что МГКС всегда заканчивает свою работу за конечное число шагов, то есть всегда находит точку глобального минимума невыпуклой кусочно-аффинной функции за конечное число шагов.

Прежде чем перейти к доказательству этого результата, приведём геометрическую ин-

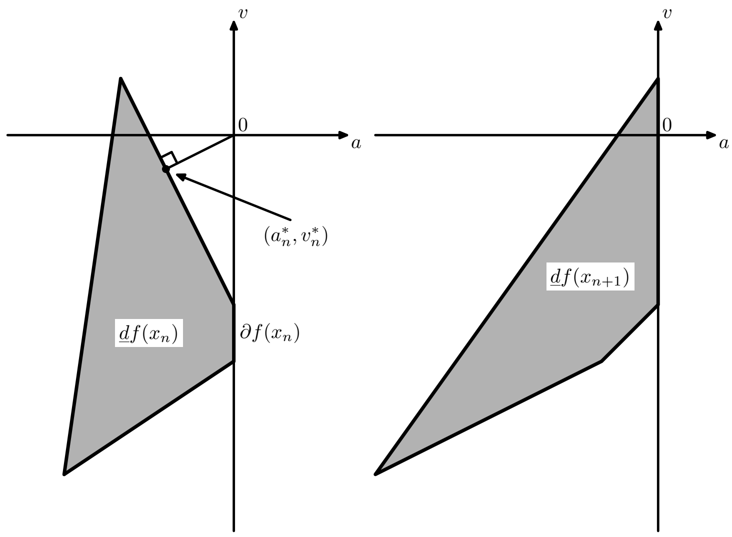


Рис. 3.1: Преобразование глобального кодифференциала на каждой итерации МГКС: $\underline{d}f(x_n)$ (левый рис.) и $\underline{d}f(x_{n+1})$ (правый рис.). Заметим, что все точки сдвигаются только горизонтально, т. е. только вдоль оси a (см. (3.27)).

терпретацию каждой итерации метода глобального кодифференциального спуска, на основании которой и будет строиться доказательство. Предположим для простоты, что функция f выпукла, т. е. $\overline{f}(x) \equiv \{0\}$ (см. (3.26)). Пусть точка x_n была получена на n-й итерации МГКС. Гиподифференциал $\underline{d}f(x_n)$ функции f в точке x_n является выпуклым многогранником в $\mathbb{R}^{d+1}$. По определению глобального кодифференциала $a \leqslant 0$ для всех $(a, v) \in \underline{d}f(x_n)$ и $\max_{(a,v)\in \underline{d}f(x_n)} a = 0$. Таким образом, множество $\{(a, v) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid a = 0\} \cap \underline{d}f(x_n)$ является непустой гранью[1] многогранника $\underline{d}f(x_n)$. Заметим, что согласно неравенству (3.31) данная грань будет собственной, то есть она не совпадает с $\underline{d}f(x_n)$, поскольку в противном случае функция f была бы не ограничена снизу. Мы называем данную грань *активной гранью* многогранника $\underline{d}f(x_n)$. Нетрудно заметить, что субдифференциал $\partial f(x_n)$ выпуклой функции f в точке x_n состоит в точности из всех таких векторов v, что пара $(0, v)$ принадлежит активной грани гиподифференциала $\underline{d}f(x_n)$.

Точка $\{(a_n^*, v_n^*)\} = \arg\min\{\|(a, v)\|^2 \mid (a, v) \in \underline{d}f(x_n)\}$ лежит на некоторой грани G многогранника $\underline{d}f(x_n)$, которая не является активной, так как иначе функция f была бы неограниченной снизу в соответствии с (3.31). При совершении одной итерации МГКС многогранник $\underline{d}f(x_n)$ преобразуется, согласно формуле (3.27). Как будет показано в доказательстве ниже, он преобразуется таким образом, что грань G становится активной грань многогранника $\underline{d}f(x_{n+1})$. Таким образом, точка (a_n^*, v_n^*) с наименьшей нормой принадлежит той грани

[1]Гранью выпуклого многогранника $P \subset \mathbb{R}^d$ называется множество вида $G = P \cap \{x \in \mathbb{R}^d \colon \langle c, x\rangle = c_0\}$, где $c \in \mathbb{R}^d$ и $c_0 \in \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенству $\langle c, x\rangle \leqslant c_0$ для всех $x \in P$ (см., например, [421]).

гиподифференциала, которая станет активной на следующей итерации (см. рисунок 3.1).

Учитывая данное наблюдение, конечную сходимость МГКС в выпуклом случае можно показать следующим образом. Если доказано, что на n-й итерации пара (a_n^*, v_n^*) с минимальной нормой принадлежит грани $\underline{d}f(x_n)$, пересекающейся с осью $\{(a,0) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid a \in \mathbb{R}\}$, то $0 \in \partial f(x_{n+1})$ и, значит, x_{n+1} — точка глобального минимума функции f.

В невыпуклом случае с помощью похожих рассуждений можно доказать, что за конечное число итераций МГКС отбросит по крайней мере один индекс j. Повторяя данное рассуждение s раз получим, что за конечное число шагов все индексы будут отброшены и МГКС прекратит свою работу.

Теорема 3.4.2. *Пусть кусочно-аффинная функция f ограничена снизу. Тогда f достигает глобального минимума и МГКС сходится к точке глобального минимума этой функции за конечное число шагов.*

Доказательство. Пусть конечная или бесконечная последовательность точек $\{x_n\}$ построена по МГКС для функции f. Обозначим $a_n^* = a_{j(n)}(x_n)$ и $v_n^* = v_{j(n)}(x_n)$, где индекс $j(n)$ вычисляется на шаге 4 МГКС. Из теоремы 3.4.1 следует, что если x_n не является точкой глобального минимума функции f, то существует $j \in J$ такое, что $a_j(x_n) < 0$ и

$$f(x_{n+1}) \leqslant f\left(x_n + \frac{1}{a_j(x_n)} v_j(x_n)\right) \leqslant f(x_n) - \frac{1}{|a_j(x_n)|}\big\|(a_j(x_n), v_j(x_n))\big\|^2 = \\ = f(x_n) - |a_j(x_n)| - \frac{1}{|a_j(x_n)|}\|v_j(x_n)\|^2 \tag{3.34}$$

(см. (3.30) и шаг 4 МГКС). Заметим, что

$$-|a_j(x_n)| - \frac{1}{|a_j(x_n)|}\|v_j(x_n)\|^2 \leqslant \begin{cases} -1, & \text{если } |a_j(x_n)| \geqslant 1, \\ -\|v_j(x_n)\|^2, & \text{если } |a_j(x_n)| < 1. \end{cases}$$

Следовательно, если x_n не является точкой глобального минимума функции f, то справедливы следующие неравенства:

$$f(x_{n+1}) - f(x_0) \leqslant -\sum_{k=0}^{n}\left(|a_k^*| + \frac{1}{|a_k^*|}\big\|v_k^*\big\|^2\right) \leqslant -\sum_{k=0}^{n} \min\big\{1, \|v_k^*\|^2\big\}. \tag{3.35}$$

Обозначим через $\mathcal{E}$ совокупность всех выпуклых множеств $C \subset \mathbb{R}^d$ таких, что $0 \notin C$ и $C = \operatorname{co}\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} + w_j$ для некоторых $i_1, \ldots, i_k \in I$, $k \in 1\colon \ell$, и $j \in J$, где векторы v_i и w_j входят в представление функции f в виде разности выпуклых функций (3.25). Понятно, что $\mathcal{E}$ — это конечное семейство выпуклых компактных множеств и $\theta = \min\limits_{C \in \mathcal{E}} \min\limits_{v \in C} \|v\|^2 > 0$.

Обозначим $f_* = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) > -\infty$ и $n^* = \lfloor (f(x_0) - f_*)/\min\{\theta, 1\} \rfloor + 1$ (здесь $\lfloor t \rfloor$ — наибольшее целое число не превосходящее $t \in \mathbb{R}$). Из неравенства (3.35) следует, что найдётся $n \leqslant n^*$ такое, что, либо МГКС прекращает свою работу на шаге n, либо $a_n^* < 0$ и $\|v_n^*\|^2 < \theta$. Как было замечено выше, в первом случае точка x_n является точкой глобального минимума функции f.

Предположим, что x_n не является точкой глобального минимума функции f. По определению, пара (a_n^*, v_n^*) принадлежит выпуклому многограннику $\underline{d}f(x_n) + z_{j(n)}(x_n)$ (см. шаг 3 МГКС). Как известно, любой выпуклый многогранник является объединением относительных внутренностей своих граней (см., например, [421], с. 61). Поэтому пара (a_n^*, v_n^*) принадлежит относительной внутренности $\operatorname{ri} G$ некоторой грани G многогранника $\underline{d}f(x_n) + z_{j(n)}(x_n)$.

Из определения (a_n^*, v_n^*) и необходимого и достаточного условия минимума выпуклой функции на выпуклом множестве следует, что

$$a_n^* a + \langle v_n^*, v \rangle \geqslant \|(a_n^*, v_n^*)\|^2 \quad \forall (a, v) \in \underline{d}f(x_n) + z_{j(n)}(x_n), \tag{3.36}$$

Ясно, что это неравенство выполняется как равенство при $(a, v) = (a_n^*, v_n^*)$. Согласно [421, Предложение 2.3] грань выпуклого многогранника сама является выпуклым многогранником. Отсюда, воспользовавшись леммой 2.9 из [421] о свойствах относительной внутренности выпуклого многогранника и условием $(a_n^*, v_n^*) \in \operatorname{ri} G$, получим

$$a_n^* a + \langle v_n^*, v \rangle = \|(a_n^*, v_n^*)\|^2 \quad \forall (a, v) \in G. \tag{3.37}$$

Вершины грани G, как выпуклого многогранника, также являются вершинами многогранника $\underline{d}f(x_n) + z_{j(n)}(x_n)$ по предложению 2.3 из [421]. Поэтому

$$G = \operatorname{co}\Big\{ (a_{i_r} + \langle v_{i_r}, x_n \rangle - \underline{f}(x_n), v_{i_r}) \;\Big|\; r \in 1\colon k \Big\} + z_{j(n)}(x_n)$$

для некоторых $i_1, \ldots, i_k \in I$ и $k \in 1\colon \ell$ (см. (3.27)). Заметим, что из определения θ и условий $(a_n^*, v_n^*) \in G$ и $\|v_n^*\|^2 < \theta$ следует, что $G \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \neq \varnothing$.

Введём выпуклую функцию

$$g_n(x) = \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x_{n+1}) + z_{j(n)}(x_{n+1})} (a + \langle v, x \rangle). \tag{3.38}$$

Покажем, что $0 \in \partial g_n(0)$. Действительно, по определению $z_j(x)$ (см. (3.28)) имеем

$$\begin{aligned} z_{j(n)}(x_{n+1}) &= \big(b_{j(n)} - \overline{f}(x_{n+1}) + \langle w_{j(n)}, x_{n+1} \rangle, w_{j(n)}\big) = \\ &= z_{j(n)}(x_n) + \big(\overline{f}(x_n) - \overline{f}(x_{n+1}) + \langle w_{j(n)}, x_{n+1} - x_n \rangle, 0\big). \end{aligned}$$

Из определения глобального кодифференциала (3.27) также следует, что

$$\underline{d}f(x_{n+1}) = \big\{ (a + \underline{f}(x_n) - \underline{f}(x_{n+1}) + \langle v, x_{n+1} - x_n \rangle, v) \in \mathbb{R}^{d+1} \;\big|\; (a, v) \in \underline{d}f(x_n) \big\}.$$

Следовательно, воспользовавшись равенством $f(x) = \underline{f}(x) + \overline{f}(x)$, получим

$$\underline{d}f(x_{n+1}) + z_{j(n)}(x_{n+1}) =$$
$$= \Big\{ (a + \langle v, x_{n+1} - x_n \rangle - f(x_{n+1}) + f(x_n), v) \ \Big| \ (a, v) \in \underline{d}f(x_n) + z_{j(n)}(x_n) \Big\}.$$

Поэтому

$$g_n(0) = \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x_n) + z_{j(n)}(x_n)} (a + \langle v, x_{n+1} - x_n \rangle) - f(x_{n+1}) + f(x_n).$$

Отсюда, учитывая (3.36), (3.37), равенство $x_{n+1} - x_n = [a_n^*]^{-1} v_n^*$ и неравенство $a_n^* < 0$, получаем следующее неравенство:

$$g_n(0) = \frac{1}{a_n^*} \|(a_n^*, v_n^*)\|^2 - f(x_{n+1}) + f(x_n) \geqslant 0 \qquad (3.39)$$

(справедливость последнего неравенства следует из (3.34)). Более того, максимум в определении $g_n(0)$ достигается в точках вида $(a + \langle v, x_{n+1} - x_n \rangle - f(x_{n+1}) + f(x_n), v)$ для всех $(a, v) \in G$. Поэтому $\{ v \in \mathbb{R}^d \mid \exists a \in \mathbb{R} \colon (a, v) \in G \} \subseteq \partial g_n(0)$ согласно формуле для субдифференциала супремума бесконечного семейства выпуклых функций [45, Теорема 4.2.3]. Таким образом, $0 \in \partial g_n(0)$, поскольку $G \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \neq \varnothing$, и 0 является точкой глобального минимума выпуклой функции $g_n(x)$. Следовательно, функция g_n неотрицательна, так как $g_n(0) \geqslant 0$ по неравенству (3.39). Отсюда, учитывая определение функции g_n (см. (3.38)) и пользуясь теоремой 1.1.2 (см. также замечание 1.1.2), получаем, что $a_{j(n)}(x_{n+1}) \geqslant 0$. Значит, индекс $j(n)$ отбрасывается методом на $(n+1)$-й итерации и по лемме 3.4.1 для всех $k \geqslant n+1$ справедливо неравенство $a_{j(n)}(x_k) \geqslant 0$.

Таким образом, найдётся $n_1 \leqslant n^* := \lfloor (f(x_0) - f_*)/\min\{\theta, 1\} \rfloor + 1$ такое, что МГКС отбрасывает индекс $j(n_1)$ на $(n_1 + 1)$-й итерации. Из определения n^* и неравенства (3.35) следует, что найдётся $n_2 \leqslant n_1 + n^* \leqslant 2n^*$ такое, что либо МГКС заканчивает свою работу n_2-й итерации, либо $a_{n_2}^* < 0$ и выполняется неравенство $\|v_{n_2}^*\|^2 < \theta$. Повторяя рассуждение, приведённое выше, нетрудно показать, что МГКС отбрасывает индекс $j(n_2)$ на $(n_2 + 1)$-й итерации, и $a_{j(n_2)}(x_k) \geqslant 0$ для всех $k \geqslant n_2 + 1$. Повторяя то же самое рассуждение s раз, получаем что МГКС отбрасывает все индексы $j \in J$ не более чем за sn^* итераций, и, тем самым, заканчивает свою работу за конечное число шагов. Более того, если МГКС заканчивает свою работу на n-й итерации, то как было указано выше, по лемме 3.4.1 будет $a_j(x_n) \geqslant 0$ для всех $j \in J$. Отсюда в силу теоремы 3.4.1 следует, что x_n является точкой глобального минимума функции f. Теорема доказана. □

Замечание 3.4.2. Рассуждая как и при доказательстве предыдущей теоремы, можно показать, что метод кодифференциального спуска с $\mu_n \equiv \nu_n \equiv +\infty$ также сходится к точке глобального минимума кусочно-аффинной функции за конечное число шагов (подробнее см. [194, замечание 4.3]).

Приведём простой пример работы метода глобального кодифференциального спуска.

Пример 3.4.1. Пусть $d = 2$ и

$$f(x) = \min\big\{\max\{|x^{(1)}|, |x^{(2)}|\}, 1 + \max\{2|x^{(1)} - 2|, |x^{(2)} - 2|\}\big\}.$$

В качестве начального приближения выберем точку $x_0 = (2, 2)^T$. Нетрудно заметить, что x_0 — точка локального минимума функции f, в то время как глобальный минимум достигается в точке $x_* = (0, 0)^T$.

Вместо того, чтобы находить DC разложение функции f в точке x и затем пользоваться определением глобального кодифференциала (3.27) для того чтобы вычислить $Df(x_0)$, мы вычислим кодифференциал с помощью основных правил исчисления глобальных кодифференциалов из теоремы 1.1.3.

Положим $f_1(x) = \max\{|x^{(1)}|, |x^{(2)}|\}$ и $f_2(x) = 1 + \max\{2|x^{(1)} - 2|, |x^{(2)} - 2|\}$. Тогда $f(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$. Воспользовавшись пунктами 1 и 4 теоремы 1.1.3, получим

$$\begin{aligned}
\underline{d}f_1(x_0) &= \operatorname{co}\left\{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-4\\-1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-4\\0\\-1\end{smallmatrix}\right)\right\}, \quad \overline{d}f_1(x_0) = \{0\},\\
\underline{d}f_2(x_0) &= \operatorname{co}\left\{\left(\begin{smallmatrix}0\\2\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\-2\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\-1\end{smallmatrix}\right)\right\}, \quad \overline{d}f_2(x_0) = \{0\}.
\end{aligned}$$

Теперь применяя пункт 5 теоремы 1.1.3, получим, что $\underline{d}f(x_0) = \underline{d}f_1(x_0) + \underline{d}f_2(x_0)$, т. е.

$$\begin{aligned}
\underline{d}f(x_0) = \operatorname{co}\Big\{ &\left(\begin{smallmatrix}0\\3\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-4\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\2\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-4\\2\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-4\\-3\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\-2\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-4\\-2\\-1\end{smallmatrix}\right),\\
&\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-4\\-1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-4\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-4\\-1\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-4\\0\\-2\end{smallmatrix}\right)\Big\},\\
\overline{d}f(x_0) = \operatorname{co}&\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) + \overline{d}f_1(x_0) - \underline{d}f_2(x_0), \overline{d}f_2(x_0) - \underline{d}f_1(x_0)\right\} =\\
= \operatorname{co}&\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\-2\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}4\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}4\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Воспользуемся методом глобального кодифференциального спуска (детали опущены для краткости). Для $z_1(x_0) = (1, 2, 0)^T \in \overline{d}f(x_0)$ точкой множества $\underline{d}f(x_0) + z_1(x_0)$ с минимальной нормой является вектор

$$(a_1(x_0), v_1(x_0)) \approx (-0.1111, 0.2222, 0.2222).$$

Поскольку $a_1(x_0) < 0$, по теореме 3.4.1 можно заключить, что x_0 не является точкой глобального минимума функции f. Более того, определив согласно шагу 4 МГКС $x_1 = x_0 + [a_1(x_0)]^{-1} v_1(x_0)$, получим $x_1 = (0, 0)^T = x_*$, т. е. метод глобального кодифференциального спуска «перепрыгнул» из точки локального минимума x_0 в точку глобального минимума x_* функции f всего за один шаг.

Глава 4

Точные штрафные функции и модифицированные функции Лагранжа

Глава посвящена построению единой теории глобальной точности штрафных функций и модифицированных функций Лагранжа для задач оптимизации в конечномерных пространствах. Для этого разрабатывается общая теория точных отделяющих функций и рассматриваются её приложения к различным классам штрафных функций и модифицированных функций Лагранжа. Также рассмотрены вопросы глобальной точности штрафных функций для бесконечномерных задач и их приложения к задачам оптимального управления линейными эволюционными уравнениями. Основные результаты данной главы опубликованы в работах [183–187, 190–192, 196, 200].

4.1 Параметрическая точность отделяющих функций

Пусть X — конечномерное нормированное пространства, $M, A \subset X$ непустые множества. В данной главе мы будем изучать следующую экстремальную задачу:

$$f(x) \to \min, \quad x \in M, \quad x \in A. \tag{$\mathcal{P}$}$$

Здесь $f \colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — заданная функция. Обозначим $\Omega = M \cap A$. Везде далее мы будем предполагать, что существует $x \in \Omega$ такое, что $f(x) < +\infty$ и функция f достигает глобального минимума на Ω.

Мы хотим «избавиться» от ограничения $x \in M$, включив его тем или иным образом в целевую функцию, но не изменив при этом точки глобального (и возможно локального) минимума в рассматриваемой задачи. Для этого мы будем рассматривать новую целевую функцию $F(\cdot)$, точки глобального минимума на множестве A которой определённым образом связаны с точками глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$. Заметим, что ограничение $x \in A$ при этом остаётся без изменений. Данный подход позволяет выбирать, какие ограничения включать в функцию $F(\cdot)$, а какие учитывать в явном виде.

Пусть Λ — непустое множество параметров λ, а $c > 0$ *штрафной параметр*. Предположим, что задана некоторая функция $F\colon X \times \Lambda \times (0, +\infty) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $F = F(x, \lambda, c)$. Связь данной функции с задачей $(\mathcal{P})$ будет указана ниже.

Функция F может быть, например, штрафной функцией. В этом случае Λ является пустым множеством. Функция F также может быть модифицированной функцией Лагранжа. Тогда λ представляет из себя множитель Лагранжа. В общем случае мы будем называть функцию $F(x, \lambda, c)$ *отделяющей функцией*[1] для задачи $(\mathcal{P})$, не налагая никаких предположений на её структуру. Вместо этого, естественные предположения на функцию F появятся в виде необходимых и достаточных условий соответствующих теорем.

Точки глобального минимума функции $F(x, \lambda, c)$ могут быть связаны с точками глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$ несколькими различными образами. В этом параграфе мы будем рассматривать случай, когда параметр λ фиксируется и рассматривается задача минимизации функции $F(x, \lambda, c)$ по переменной x. В этом случае возникает естественное определение параметрической точности функции F.

Определение 4.1.1. Отделяющая функция $F(x, \lambda, c)$ называется *глобально параметрически точной*, если существуют $\lambda_* \in \Lambda$ и $c_* > 0$ такие, что для любого $c \geqslant c_*$ справедливо равенство $\arg\min\limits_{x \in A} F(x, \lambda_*, c) = \arg\min\limits_{x \in \Omega} f(x)$. Точная нижняя грань всех таких c_* называется *наименьшим точным штрафным параметром* функции $F(x, \lambda_*, c)$ и обозначается $c_*(\lambda_*)$, а любое такое λ_* называется *точным настроечным параметром.*

Таким образом, если функция $F(x, \lambda, c)$ является глобально параметрически точной и известен её точный настроечный параметр λ_*, то выбирая достаточно большое $c > 0$ и минимизируя функцию $x \mapsto F(x, \lambda_*, c)$ на множестве A можно найти точку глобального минимума в исходной задаче $(\mathcal{P})$. Другими словами, если функция $F(x, \lambda, c)$ является глобально параметрически точной, то можно избавиться от ограничения $x \in M$, заменив целевую функцию f на отделяющую функцию $F(x, \lambda, c)$, не изменив при этом точки глобального минимума в рассматриваемой задаче.

[1] Данный термин связан с известной интерпретацией точных штрафных функций и модифицированных функций Лагранжа, как нелинейных функций, отделяющих некоторые множества в т. н. пространстве образов задачи $(\mathcal{P})$. См., например, монографию [232].

4.1.1 Принцип локализации в параметрической форме

Наша цель — доказать, что изучение глобальной параметрической точности отделяющей функции $F(x, \lambda, c)$ может быть без труда сведено к изучению локального поведения функции $x \mapsto F(x, \lambda, c)$ вблизи точек глобального минимума функции $(\mathcal{P})$. Мы будем называть этот процесс сведения *принципом локализации.*

Опишем желаемое поведение функции $F(\cdot, \lambda, c)$ вблизи точек минимума.

Определение 4.1.2. Пусть x_* — точка локального минимума в задаче $(\mathcal{P})$. Будем говорить, что функция $F(x, \lambda, c)$ является *локально параметрически точной в точке* x_*, если существуют $\lambda_* \in \Lambda$, $c_* > 0$ и окрестность U точки x_* такие, что для любых $c \geqslant c_*$ и $x \in U \cap A$ выполняется неравенство $F(x, \lambda_*, c) \geqslant F(x_*, \lambda_*, c)$. Точная нижняя грань всех таких $c_* > 0$ называется *наименьшим точным штрафным параметром* функции $F(x, \lambda_*, c)$ в точке x_* и обозначается через $c_*(x_*, \lambda_*)$, а любое такое λ_* называется *точным настроечным параметром* в точке x_*.

Таким образом, отделяющая функция $F(x, \lambda, c)$ является локально параметрически точной в точке x_* с точным настроечным параметром λ_* тогда и только тогда, когда существует $c_* > 0$ такое, что точка x_* является точкой локального (равномерно по $c \in [c_*, +\infty)$) минимума функции $F(\cdot, \lambda_*, c)$ на множестве A.

Напомним, что параметр $c > 0$ в функции $F(x, \lambda, c)$ называется *штрафным параметром.* Однако, в определении функции $F(x, \lambda, c)$ не указано никакой связи между параметром c и штрафными функциями. Следующее определение обосновывает использование термина «штрафной параметр».

Определение 4.1.3. Пусть $\lambda_* \in \Lambda$ фиксировано. Будем говорить, что функция $F(x, \lambda, c)$ является отделяющей функцией *штрафного типа* при $\lambda = \lambda_*$, если существует $c_0 > 0$ такое, что для любой неограниченно возрастающей последовательности $\{c_n\} \subset [c_0, +\infty)$ и для любой последовательности $x_n \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c_n)$, $n \in \mathbb{N}$, любая предельная точка x_* последовательности $\{x_n\}$ является точкой глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$.

Грубо говоря, $F(x, \lambda, c)$ является отделяющей функцией штрафного типа при $\lambda = \lambda_*$ тогда и только тогда, когда точки глобального минимума функции $F(\cdot, \lambda_*, c)$ на множестве A стремятся к точкам глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$ при $c \to +\infty$. Таким образом, если $F(x, \lambda, c)$ отделяющая функция штрафного типа, то параметр c играет такую же роль, как и штрафной параметр штрафной функции, поскольку его увеличение приближает точки глобального минимума функции $F(\cdot, \lambda_*, c)$ к точкам глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$.

Заметим, что если функция $F(\cdot, \lambda_*, c)$ не достигает глобального минимума на множестве A ни при каких значениях параметра c, то, формально, $F(x, \lambda, c)$ является отделяющей функцией штрафного типа при $\lambda = \lambda_*$. Аналогично, если у последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c_n)$, $n \in \mathbb{N}$, где $c_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, нет предельных точек (т. е. точки глобального минимума функции $F(\cdot, \lambda_*, c)$ убегают на бесконечность при $c \to +\infty$), то $F(x, \lambda, c)$ также формально является отделяющей функцией при $\lambda = \lambda_*$. Для того чтобы исключить из рассмотрения такие патологические случаи, нам потребуется следующее дополнительное определение невырожденности отделяющей функции.

Определение 4.1.4. Пусть $\lambda_* \in \Lambda$ фиксировано. Отделяющая функция $F(x, \lambda, c)$ называется *невырожденной* при $\lambda = \lambda_*$, если существуют $c_0 > 0$ и $R > 0$ такие, что для любого $c \geqslant c_0$ функция $F(\cdot, \lambda_*, c)$ достигает глобального минимума на множестве A и существует точка глобального минимума $x(c) \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c)$ такая, что $\|x(c)\| \leqslant R$.

Грубо говоря, условие невырожденности гарантирует, что точки глобального минимума функции $F(\cdot, \lambda_*, c)$ на множестве A не убегают на бесконечности при $c \to \infty$. Заметим, что если множество A ограничено, то функция $F(x, \lambda, c)$ является невырожденной при $\lambda = \lambda_*$ тогда и только тогда, когда она достигает глобального минимума на множестве A при всех достаточно больших c.

Теперь мы можем сформулировать принцип локализации. Напомним, что $\Omega = M \cap A$ — множество допустимых точек задачи $(\mathcal{P})$. Обозначим через $\Omega_* = \operatorname*{arg\,min}_{x \in \Omega} f(x)$ множество точек глобального минимума этой задачи.

Теорема 4.1.1 (принцип локализации в параметрической форме I)**.** *Пусть множество Ω замкнуто, а функция f полунепрерывна снизу (пн. сн.) на Ω. Предположим также, что из справедливости условия*

$$\Omega_* \cap \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c) \neq \varnothing \tag{4.1}$$

для некоторых $\lambda_* \in \Lambda$ и $c > 0$ вытекает, что функция $F(x, \lambda, c)$ является глобально параметрически точной с точным настроечным параметром λ_*. Тогда отделяющая функция $F(x, \lambda, c)$ является глобально параметрически точной тогда и только тогда, когда существует $\lambda_* \in \Lambda$ такое, что $F(x, \lambda, c)$ является отделяющей функцией штрафного типа при $\lambda = \lambda_*$, эта функция невырождена при $\lambda = \lambda_*$ и локально параметрически точна в каждой точке глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$ с точным настроечным параметром λ_*.

Доказательство. Пусть $F(x, \lambda, c)$ является глобально параметрически точной с точным настроечным параметром λ_*. Тогда для любого $c > c_*(\lambda_*)$ будет $\operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c) = \Omega_*$. Другими словами, для любого $c > c_*(\lambda_*)$ каждая точка x_* глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$

является точкой глобального (а потому и локального равномерно по $c \in (c_*(\lambda_*), +\infty)$) минимума функции $F(\cdot, \lambda_*, c)$ на множестве A. Таким образом, функция $F(x, \lambda, c)$ является локально параметрически точной в каждой точке глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$ с точным настроечным параметром λ_*.

Зафиксируем произвольное $x_* \in \Omega_*$. Для любого $c > c(\lambda_*)$ точка x_* является точкой глобального минимума функции $F(\cdot, \lambda_*, c)$ на множестве A, откуда следует, что функция $F(x, \lambda, c)$ невырождена при $\lambda = \lambda_*$. Наконец, если последовательность $\{x_n\} \subset A$ удовлетворяет условию $x_n \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c_n)$ для всех $n \in N$, где $c_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, то в силу глобальной точности функции F для всех достаточно больших n точка x_n совпадает с одной из точек глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$, то есть $x_n \in \Omega$ и $f(x_n) = \min_{x \in \Omega} f(x)$. Отсюда, учитывая, что множество Ω замкнуто, а функция f пн. сн. на Ω, получаем, что любая предельная точка последовательности $\{x_n\}$, является точкой глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$. Таким образом, $F(x, \lambda, c)$ — отделяющая функция штрафного типа при $\lambda = \lambda_*$.

Докажем обратное утверждение. Покажем, что найдутся $c > 0$ и $x_* \in \Omega_*$ такие, что

$$\inf_{x \in A} F(x, \lambda_*, c) = F(x_*, \lambda_*, c). \tag{4.2}$$

Тогда выполнено условие (4.1), из которого по нашему предположению следует, что отделяющая функция $F(x, \lambda, c)$ является глобально параметрически точной. Рассуждая от противного, предположим, что равенство (4.2) не выполняется. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство:

$$\inf_{x \in A} F(x, \lambda_*, n) < F(x_*, \lambda_*, n) \quad \forall x_* \in \Omega_*. \tag{4.3}$$

В силу невырожденности функции $F(x, \lambda, c)$ при $\lambda = \lambda_*$ существуют $n_0 \in \mathbb{N}$ и $R > 0$ такие, что для любого $n \geqslant n_0$ найдётся точка глобального минимума $x_n \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, n)$, удовлетворяющая неравенству $\|x_n\| \leqslant R$.

Напомним, что пространство X конечномерно, а последовательность $\{x_n\} \subset X$ ограничена. Поэтому существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке x_*. Поскольку $F(x, \lambda, c)$ является отделяющей функцией штрафного типа при $\lambda = \lambda_*$, точка x_* является точкой глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$. По нашему предположению функция $F(x, \lambda, c)$ является локально параметрически точной в точке x_* с точным настроечным параметром λ_*. Поэтому существуют $c_0 > 0$ и окрестность U точки x_* такие, что для любого $c \geqslant c_0$ справедливо следующее неравенство:

$$F(x, \lambda_*, c) \geqslant F(x_*, \lambda_*, c) \quad \forall x \in U \cap A. \tag{4.4}$$

Так как последовательность $\{x_{n_k}\} \subset A$ сходится к x_*, найдётся k_0 такое, что $x_{n_k} \in U$ для всех

$k \geqslant k_0$. Не ограничивая общности можно предполагать, что $n_k \geqslant c_0$ для всех $k \geqslant k_0$. Следовательно, воспользовавшись неравенством (4.4), получаем, что $F(x_{n_k}, \lambda_*, n_k) \geqslant F(x_*, \lambda_*, n_k)$ для всех $k \geqslant k_0$, что противоречит неравенству (4.3) и условию $x_{n_k} \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, n_k)$. Таким образом, функция $F(x, \lambda, c)$ является глобально параметрически точной. □

Замечание 4.1.1. Условие (4.1) означает, что для проверки глобальной параметрической точности функции $F(x, \lambda, c)$ достаточно проверить, что *по крайней мере одна* точка глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$ является точкой глобального минимума функции $F(\cdot, \lambda_*, c)$ на множестве A, вместо того, чтобы проверять, что множества $\operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c)$ и $\operatorname*{arg\,min}_{x \in \Omega} f(x)$ совпадают. Как будет показано ниже, в большинстве частных случаев справедливость условия (4.1) эквивалентна глобальной параметрической точности без каких либо дополнительных предположений.

Предыдущая теорема может быть нестрого переформулирована следующим образом. Отделяющая функция $F(x, \lambda, c)$ является глобально параметрически точной тогда и только тогда, когда она является невырожденной отделяющей функцией штрафного типа и локально точна в каждой точке глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$. Таким образом, при естественных предположениях функция $F(x, \lambda, c)$ является глобально точной тогда и только тогда, когда она является локально точной в точках глобального минимума исходной задачи. Именно поэтому теорему 4.1.1 естественно называть *принципом локализации*. Переформулируем этот принцип в несколько иной форме, более удобной для приложений.

Теорема 4.1.2 (принцип локализации в параметрической форме II)**.** *Пусть множества A и Ω замкнуты, функция f пн. сн. на множестве Ω, а функция $F(\cdot, \lambda, c)$ пн. сн. на множестве A для всех $\lambda \in \Lambda$ и $c > 0$. Предположим также, что из справедливости условия* (4.1) *для некоторых $\lambda_* \in \Lambda$ и $c > 0$ следует, что функция $F(x, \lambda, c)$ является глобально параметрически точной с точным настроечным параметром λ_*. Тогда отделяющая функция $F(x, \lambda, c)$ является глобально параметрически точной тогда и только тогда, когда существует $\lambda_* \in \Lambda$ такое, что $F(x, \lambda, c)$ является отделяющей функцией штрафного типа при $\lambda = \lambda_*$, локально параметрически точной в каждой точке глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$ с точным настроечным параметром λ_* и существуют $c_0 > 0$, $x_* \in \Omega_*$ и ограниченное множество $K \subset A$ такие, что*

$$S(c, x_*) := \Big\{ x \in A \mid F(x, \lambda_*, c) < F(x_*, \lambda_*, c) \Big\} \subseteq K \quad \forall c \geqslant c_0. \tag{4.5}$$

Доказательство. Предположим, что функция $F(x, \lambda, c)$ является глобально параметрически точной с точным настроечным параметром λ_*. Тогда по теореме 4.1.1, $F(x, \lambda, c)$ является отделяющей функцией штрафного типа при $\lambda = \lambda_*$, локально параметрически точной в каждой точке глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$ с точным настроечным параметром λ_*. Более того, из определения глобальной точности следует, что для всех $c > c_*(\lambda_*)$ и $x_* \in \Omega_*$ будет $S(c, x_*) = \varnothing$. Значит, условие (4.5) выполняется для всех $c_0 > c_*(\lambda_*)$, $x_* \in \Omega_*$ и любого ограниченного множества K.

Докажем обратное утверждение. По нашему предположению существуют $c_0 > 0$ и $x_* \in \Omega_*$ такие, что для всех $c \geqslant c_0$ множество $S(c, x_*)$ содержится в ограниченном множестве K. Отсюда с учётом того, что функция $F(\cdot, \lambda_*, c)$ пн. сн. на множестве A и множество $S(c, x_*)$ ограничено, следует, что функция $F(\cdot, \lambda_*, c)$ достигает глобального минимума на множестве A в точке $x(c) \in K$ (если $S(c, x_*) = \varnothing$ для некоторого $c \geqslant c_0$, то можно положить $x(c) = x_*$). Из ограниченности множества K следует, что $\|x(c)\| \leqslant R$ для всех $c \geqslant c_0$ и некоторого $R > 0$. Таким образом, функция $F(x, \lambda, c)$ является невырожденной при $\lambda = \lambda_*$. Остаётся только воспользоваться теоремой 4.1.1. $\square$

В некоторых частных случаях (см. параграф 4.1.3 ниже) важно установить связь не только между точками глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$ и функции $F(\cdot, \lambda, c)$ на множестве A, но и между оптимальными значениями соответствующих экстремальных задач. Укажем, каким именно образом это можно сделать.

Определение 4.1.5. Будем говорить, что отделяющая функция $F(x, \lambda, c)$ является *строго* глобально параметрически точной, если $F(x, \lambda, c)$ является глобально параметрически точной и существуют $c_0 > 0$ и точный настроечный параметр $\lambda_* \in \Lambda$ такие, что равенство $\inf_{x \in A} F(x, \lambda_*, c) = f_*$ выполняется для всех $c \geqslant c_0$, где $f_* = \inf_{x \in \Omega} f(x)$ — оптимальное значение задачи $(\mathcal{P})$. Любой такой параметр λ_* называется строго точным настроечным параметром.

Рассуждая как и при доказательстве теорем 4.1.1 и 4.1.2, нетрудно обобщить принцип локализации в параметрической форме на случай строгой глобальной точности. Для краткости мы приведём только обобщение теоремы 4.1.2 на этот случай.

Теорема 4.1.3 (усиленный принцип локализации в параметрической форме)**.** *Пусть множество Ω замкнуто, а функция f пн. сн. на Ω. Предположим также, что из справедливости условия*

$$\Omega_* \cap \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c) \neq \varnothing, \quad \min_{x \in A} F(x, \lambda_*, c) = f_*$$

для некоторых $\lambda_* \in \Lambda$ и $c > 0$ следует, что $F(x, \lambda, c)$ является строго глобально параметрически точной отделяющей функцией со строго точным настроечным параметром λ_*. Тогда отделяющая функция $F(x, \lambda, c)$ является строго параметрически точной тогда *и только тогда, когда существует $\lambda_* \in \Lambda$ такое, что функция $F(x, \lambda, c)$ является отделяющей функцией штрафного типа при $\lambda = \lambda_*$, локально точной во всех точках глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$ с точным настроечным параметром λ_* и существуют $c_0 > 0$ и ограниченное множество K такие, что $F(x_*, \lambda_*, c) = f_*$ для всех $x_* \in \Omega_*$ и $c \geqslant c_0$ и включение $\{x \in A \mid F(x, \lambda_*, c) < f_*\} \subseteq K$ выполняется для всех $c \geqslant c_0$.*

В следующих параграфах мы рассмотрим приложения принципа локализации в параметрической форме к линейным точным штрафным функциям и модифицированным функциям Лагранжа-Рокафеллара-Ветса. По поводу приложений этого принципа к нелинейным точным штрафным функциям [361, 362] и непрерывно дифференцируемым точным штрафным функциям Флетчера [129, 167, 171, 173, 216, 217, 225, 244, 313] см. работу автора [191].

4.1.2 Линейные точные штрафные функции

Пусть задана функция $\varphi\colon X \to [0, +\infty]$ такая, что $\varphi(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in M$. В частности, если $M = \{x \in X \mid G(x) \in K\}$ для некоторого отображения $G\colon X \to Y$ в метрическое пространство Y и замкнутого множества $K \subset Y$, то можно определить $\varphi(x) = \operatorname{dist}(G(x), K)$. Положим $F(x, c) = f(x) + c\varphi(x)$. Функция $F(x, c)$ называется *линейной штрафной функцией* для задачи $(\mathcal{P})$. Данная функция является простейшим примером отделяющей функцией для задачи $(\mathcal{P})$. Так как эта функция не зависит от дополнительного параметра λ, для того чтобы формально включить её в общую теорию, можно положить $\Lambda = \{0\}$ и определить $F(x, 0, c) = F(x, c)$. Поскольку $F(x, c)$ не зависит от параметра λ, далее мы будем опускать термин «параметрически» и говорить, что $F(x, c)$ является локально/глобально точной.

С помощью принципа локализации можно легко получить необходимые и достаточные условия глобальной точности функции $F(x, c)$, впервые сформулированные автором в работе [183]. Прежде чем сформулировать эти условия, заметим, что $F(x_*, c) = f_*$ для любой точки глобального минимума x_* в задаче $(\mathcal{P})$ и для всех $c > 0$. Поэтому для линейной штрафной функции $F(x, c)$ понятия глобальной точности и строгой глобальной точности совпадают.

Теорема 4.1.4 (принцип локализации для линейных штрафных функций)**.** *Пусть множества A и Ω замкнуты, а функции f и φ пн. сн. на A. Тогда линейная штрафная функция $F(x, c)$ является глобально точной тогда и только тогда, когда она является локально точной во всех точках глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$ и существует $c_0 > 0$ такое, что множество $\{x \in A \mid F(x, c_0) < f_*\}$ ограничено.*

Доказательство. Так как $F(x_*, c) = f(x_*) = f_*$ для всех $x_* \in \Omega_*$ и $c > 0$, то

$$\Omega_* \cap \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, c) \neq \varnothing \implies \Omega_* \subseteq \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, c).$$

Заметим также, что если $x \notin M$, то $\varphi(x) \neq 0$ и поэтому либо функция $F(x, c)$ строго возрастает по c, либо $F(x, c) = +\infty$ для всех $c > 0$. С другой стороны, если $x \in M$, то $\varphi(x) = 0$ и $F(x, c) = f(x)$. Следовательно, если для некоторого $c_0 > 0$ выполняется включение $\Omega_* \subseteq \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, c_0)$, то для любого $c > c_0$ справедливо равенство $\Omega_* = \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, c)$. Таким образом, из справедливости условия $\Omega_* \cap \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, c) \neq \varnothing$ для некоторого $c > 0$ вытекает, что штрафная функция $F(x, c)$ является глобально точной.

Проверим, что F является отделяющей функцией штрафного типа. Тогда, воспользовавшись теоремой 4.1.2, получим требуемый результат. Пусть $\{c_n\} \subset (0, +\infty)$ неограниченно возрастающая последовательность, $x_n \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, c)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и пусть x_* — предельная точка последовательности $\{x_n\}$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность x_n сходится к x_*. По предложению 3.5 из [183] будет $\lim_{n \to \infty} \varphi(x_n) = 0$. Отсюда, учитывая, что множество A замкнуто, а функция φ пн. сн. на множестве A, получаем, что $x_* \in A$ и $\varphi(x_*) = 0$, то есть x_* — допустимая точка задачи $(\mathcal{P})$.

Как было замечено выше, $F(y_*, c) = f(y_*) = f_*$ для всех $y_* \in \Omega_*$ и $c > 0$. Кроме того, функция φ неотрицательна. Поэтому $f(x_n) \leqslant F(x_n, c) \leqslant f_*$ по определению точки x_n. По нашему предположению функция f пн. сн. на A. Следовательно, $f(x_*) \leqslant f_*$, откуда вытекает, что x_* — точка глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$. Таким образом, $F(x, c)$ отделяющая функция штрафного типа, что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 4.1.1. *Пусть множества A и Ω замкнуты, а функции f и φ пн. сн. на A. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

1. *множество $\{x \in A \mid f(x) < f_*\}$ ограничено;*
2. *существуют $c_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что функция $F(\cdot, c_0)$ ограничена снизу на множестве A и множество $\{x \in A \mid f(x) < f_*,\ \varphi(x) < \delta\}$ ограничено;*
3. *множество $\{x \in A \mid F(x, c_0) \leqslant f(x_0)\}$ ограничено для некоторой допустимой точки x_0 задачи $(\mathcal{P})$ и некоторого $c_0 > 0$;*
4. *функция f коэрцитивна на множестве A, т. е. $f(x_n) \to +\infty$ при $n \to \infty$ для любой последовательности $\{x_n\} \subset A$ такой, что $\|x_n\| \to +\infty$ при $n \to \infty$;*
5. *существует $c_0 > 0$ такое, что функция $F(\cdot, c_0)$ коэрцитивна на A;*

6. *функция φ коэрцитивна на множестве A и существует $c_0 > 0$ такое, что функция $F(\cdot, c_0)$ ограничена снизу на A.*

Тогда линейная штрафная функция $F(x, c)$ является глобально точной тогда и только тогда, когда она локально точна в каждой точке глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что из справедливости одного из указанных предположений вытекает, что множество $\{x \in A \mid F(x, c_0) < f_*\}$ ограничено для некоторого $c_0 > 0$. Отсюда, воспользовавшись принципом локализации для линейных штрафных функций, получаем требуемый результат. $\square$

Для полноты изложения приведём также хорошо известное достаточное условие локальной точности штрафной функции F (см., например, [183, теорема 2.4 и предложение 2.7]).

Теорема 4.1.5. *Пусть x_* — точка локального минимума в задаче $(\mathcal{P})$, а функция f удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\alpha \in (0, 1]$ с константой $L > 0$ в окрестности точки x_*. Предположим также, что существуют $\tau > 0$ и $r > 0$ такие, что $\varphi(x) \geqslant \tau\big[\operatorname{dist}(x, \Omega)\big]^\alpha$ для всех $x \in A \cap B(x_*, r)$. Тогда линейная штрафная функция $F(x, c)$ является локально точной в точке x_* и $c(x_*) \leqslant L/\tau$.*

4.1.3 Модифицированные функции Лагранжа-Рокафеллара-Ветса

Приведём пример параметрически точной отделяющей функции, зависящей от дополнительного параметра λ. А именно, применим общую теорию отделяющих функций к модифицированной функции Лагранжа, предложенной Рокафелларом и Ветсом в монографии [358] (см. также [255, 256, 369, 429]).

Пусть P — топологическое векторное пространство параметров. Функция $\Phi\colon X \times P \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ называется *двойственной параметризующей функцией* для f, если $\Phi(x, 0) = f(x)$ для любой допустимой точки задачи $(\mathcal{P})$. Функция $\sigma\colon P \to [0, +\infty]$ такая, что $\sigma(0) = 0$ и $\sigma(p) > 0$ для всех $p \neq 0$, называется *модифицирующей* функцией. Пусть, наконец, Λ — векторное пространство *множителей* Лагранжа, и предположим, что пара (Λ, P) наделена некоторой билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon \Lambda \times P \to \mathbb{R}$.

Следуя идеям Рокафеллара и Ветса [358], введём следующую модифицированную функцию Лагранжа для задачи $(\mathcal{P})$:

$$\mathscr{L}(x, \lambda, c) = \inf_{p \in P} \Big(\Phi(x, p) - \langle \lambda, p \rangle + c\sigma(p) \Big). \tag{4.6}$$

Мы будем предполагать, что $\mathscr{L}(x, \lambda, c) > -\infty$ для всех $x \in X$, $\lambda \in \Lambda$ и $c > 0$. С помощью принципа локализации можно получить простые необходимые и достаточные условия строгой глобальной параметрической точности модифицированной функции Лагранжа $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$. Эти условия впервые были получены автором в работе [187].

Замечание 4.1.2. В теории модифицированных функций Лагранжа вектор $\lambda_* \in \Lambda$ является строго точным настроечным параметром для отделяющей функции $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ тогда и только тогда, когда λ_* *допускает точное штрафное представление задачи* $(\mathcal{P})$ (см. [358, определение 11.60]). Более того, если инфимум в определении (4.6) достигается для всех x, λ и c, то строгая глобальная параметрическая точность модифицированной функции Лагранжа $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ эквивалентна существованию т. н. *модифицированного множителя Лагранжа* (см. [358, теорема 11.61] и [187, предложение 4 и следствие 1]). Кроме того, λ_* является точным настроечным параметром тогда и только тогда, когда λ_* — модифицированный множитель Лагранжа функции $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$.

Будем говорить, что у модифицирующей функции σ *лакуна в нуле*, если для любой окрестности нуля $U \subset P$ существует $\delta > 0$ такое, что $\sigma(p) \geqslant \delta$ для всех $p \in P \setminus U$. Предположение о том, что у функции σ лакуна в нуле, является стандартным в работах по теории модифицированных функций Лагранжа (см., например, [115, 427–429]).

Теорема 4.1.6 (принцип локализации для модифицированных функций Лагранжа)**.** *Предположим, что множества A и Ω замкнуты, функции f и $\mathscr{L}(\cdot, \lambda, c)$ пн. сн. на A при всех $\lambda \in \Lambda$ и $c > 0$, а функция Φ пн. сн. на множестве $A \times \{0\}$. Предположим также, что у функции σ лакуна в нуле и существует $r > 0$ такое, что для всех $c \geqslant r$, $x \in A$ и $\lambda \in \Lambda$ выполняется условие*

$$\operatorname*{arg\,min}_{p \in P} \Big(\Phi(x, p) - \langle \lambda, p \rangle + c\sigma(p) \Big) \neq \varnothing,$$

т. е. инфимум в определении (4.6) достигается. Тогда модифицированная функция Лагранжа $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ является строго глобально параметрически точной со строго точным настроечным параметром λ_* тогда и только тогда, когда существует $c_0 > 0$ такое, что функция $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ является локально параметрически точной в каждой точке глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$ с точным настроечным параметром λ_*, $\mathscr{L}(x_*, \lambda_*, c) = f_*$ для всех $x_* \in \Omega_*$ и $c \geqslant c_0$ и множество $\Big\{x \in A \;\Big|\; \mathscr{L}(x, \lambda_*, c_0) < f_* \Big\}$ ограничено.

Доказательство. При сделанных предположениях из справедливости условия

$$\Omega_* \cap \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} \mathscr{L}(x, \lambda_*, c) \neq \varnothing, \quad \min_{x \in A} \mathscr{L}(x, \lambda_*, c) = f_*$$

для некоторых $\lambda_* \in \Lambda$ и $c > 0$ следует, что функция $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ является строго глобально параметрически точной со строго точным настроечным параметром λ_* (см. [187, предложение 4 и следствие 1]. Более того, при сделанных предположениях функция $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ является отделяющей функцией штрафного типа для любого $\lambda \in \Lambda$ по предложению 8 из [187]. Поэтому, воспользовавшись теоремой 4.1.3, мы получаем требуемый результат. $\square$

Замечание 4.1.3. Локальная параметрическая точность модифицированной функции Лагранжа $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ чаще всего доказывается с помощью достаточных условий минимума второго порядка. См., например [380, теорема 2.1], [429, предложение 3.1], [423, теорема 2.3].

Приведём простой пример, поясняющий теорему 4.1.6. Другие примеры применения этой теоремы, как и гораздо более подробное теоретическое исследование модифицированной функции Лагранжа $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$, в том числе в бесконечномерном случае, имеется в работе автора [187].

Пусть $X = \mathbb{R}^d$. Рассмотрим задачу нелинейного программирования:

$$f(x) \to \min, \quad g_i(x) \leqslant 0, \quad i \in I, \quad g_j(x) = 0, \quad j \in J. \tag{4.7}$$

Здесь $g_s \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $s \in I \cup J$ — заданные функции, $I = \{1, \ldots, m_1\}$, $J = \{m_1 + 1, \ldots, m_2\}$. Положим $A = \mathbb{R}^d$ и обозначим через M множество допустимых точек задачи (4.7). Тогда эта задача совпадает с задачей $(\mathcal{P})$.

Пусть $\Lambda = P = \mathbb{R}^{m_2}$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^s$. Определим $\sigma(p) = \|p\|^2/2$. Очевидно, что у данной функции σ лакуна в нуле. Положим $\Phi(x, p) = f(x)$, если $g_i(x) + p_i \leqslant 0$ для всех $i \in I$ и $g_j(x) + p_j = 0$ для всех $j \in J$, и пусть $\Phi(x, p) = +\infty$ в противном случае. Тогда, как нетрудно видеть, для всех $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}^{m_2}$ и $c > 0$ справедливо равенство:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(x, \lambda, c) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_1} \left(\lambda^{(i)} \max\left\{ g_i(x), -\frac{\lambda^{(i)}}{c} \right\} + \frac{c}{2} \max\left\{ g_i(x), -\frac{\lambda^{(i)}}{c} \right\}^2 \right) + \\ + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} \left(\lambda^{(j)} g_j(x) + \frac{c}{2} g_j(x)^2 \right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Данная модифицированная функция Лагранжа была впервые введена Хестенсом [246] и Пауэллом [350] и подробно изучена в [105, 356, 357].

Получим простые достаточные условия локальной параметрической точности функции $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ в случае, когда f и g_s являются $C^{1,1}$ функциями, то есть они непрерывно дифференцируемы и их частные производные являются локально липшицевыми. Обозначим через $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{s=1}^{m_2} \lambda^{(s)} g_s(x)$ стандартную функцию Лагранжа для задачи (4.7).

Зафиксируем допустимую точку x_*. Будем говорить, что f и g_s являются $C^{1,1}$ *функциями* в точке x_*, если они дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_* и их градиенты удовлетворяют условия Липшица в окрестности этой точки. По теореме Радемахера для почти всех x из окрестности точки x_* существуют частные производные второго порядка функций f и g_s в точке x. Напомним, что если функция h является $C^{1,1}$ функцией в точке x_*, то *обобщённым гессианом* $\partial^2 h(x_*)$ функции h в точке x_* называется выпуклая оболочка всех тех матриц $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ для которых существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_n \to x_*$, для всех $n \in \mathbb{N}$ в точке x_n существуют все частные производные второго порядка функции h и $\nabla^2 h(x_n) \to M$ при $n \to \infty$ (см., например, [252,286]). Можно доказать, что $\partial^2 h(x_*)$ является непустым компактным множеством симметричных матриц.

Предположим, что пара (x_*, λ_*), где $\lambda_* \in \mathbb{R}^{m_2}$, удовлетворяет условиям Куна-Таккера, т. е. $\lambda_*^{(i)} g_i(x_*) = 0$ и $\lambda_*^{(i)} \geqslant 0$ для всех $i \in I$ и $\nabla_x L(x_*, \lambda_*) = 0$. Далее мы будем предполагать, что выполнено условие *строгой дополнительности*, т. е. $\lambda_*^{(i)} > 0$, если $g_i(x_*) = 0$, $i \in I$. Будем говорить, что пара (x_*, λ_*) удовлетворяет *обобщённому* достаточному условию минимума второго порядка, если все матрицы $M \in \partial^2_{xx} L(x_*, \lambda_*)$ являются положительно определёнными на подпространстве $\{v \in \mathbb{R}^d \mid \langle \nabla g_s(x_*), v \rangle = 0, \ s \in I(x_*) \cup J\}$, где $I(x_*) = \{i \in I \mid g_i(x_*) = 0\}$ (см. [286]). Здесь $\partial^2_{xx} L(x_*, \lambda_*)$ — обобщённый гессиан функции $L(\cdot, \lambda_*)$ в точке x_*.

Теорема 4.1.7. *Пусть x_* — точка локального минимума в задаче* (4.7)*, f и g_s, $s \in I \cup J$, являются $C^{1,1}$ функциями в точке x_*. Предположим также, что пара (x_*, λ_*) удовлетворяет условиям Куна-Таккера, условию строгой дополнительности и обобщённому достаточному условию минимума второго порядка. Тогда модифицированная функция Лагранжа $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ является локально параметрически точной в точке x_* с точным настроечным параметром λ_*.*

Доказательство. Так как при сделанных предположениях функции g_s непрерывны в точке x_* и выполняется условие строгой дополнительности, то по определению функции $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ (см. (4.8)) существует окрестность U точки x_* такая, что

$$\mathscr{L}(x, \lambda_*, c) = L(x_*, \lambda_*) + \frac{c}{2} \sum_{s \in I(x_*) \cup J} g_s(x)^2 \quad \forall x \in U \quad \forall c > 0.$$

Отсюда, воспользовавшись правилом вычисления обобщённых гессианов суммы функций [252, теорема 2.2], получаем, что множесто $\partial^2_{xx} \mathscr{L}(x_*, \lambda_*, c)$ содержится в множестве $H(x_*, \lambda_*, c) = \partial^2_{xx} L(x_*, \lambda_*) + c \sum\limits_{s \in I(x_*) \cup J} \nabla g_s(x_*) \nabla g_s(x_*)^T$. Учитывая, что пара (x_*, λ_*) удовлетворяет обобщённому достаточному условию минимума второго порядка, нетрудно проверить, что существует $c_0 > 0$ такое, что для всех $c \geqslant c_0$ все матрицы $M \in H(x_*, \lambda_*, c)$ положительно определены. Следовательно, по достаточному условию минимума для $C^{1,1}$ функций [286, теорема 1] точка x_* является точкой локального минимума функции $\mathscr{L}(\cdot, \lambda_*, c)$ для всех $c \geqslant c_0$ (равномерно по $c \in [c_0, +\infty)$ в силу того, что функция $\mathscr{L}(\cdot, \lambda_*, c)$ не убывает по c). Таким образом, функция $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ является локально параметрически точной в точке x_* с точным настроечным параметром λ_*. $\square$

Теперь мы можем воспользоваться теоремой 4.1.6, чтобы получить простые достаточные условия глобальной параметрической точности модифицированной функции Лагранжа-Хестенса-Пауэлла.

Теорема 4.1.8. *Пусть функция f пн. сн., а функции g_s, $s \in I \cup J$, непрерывны. Предположим также, что функции f и g_s, $s \in I \cup J$, являются $C^{1,1}$ функциями в каждой точке $x_* \in \Omega_*$ и существует множитель Лагранжа $\lambda_* \in \mathbb{R}^{m_2}$ такой, что для любого $x_* \in \Omega_*$ пара (x_*, λ_*) удовлетворяет условиям Куна-Таккера, условию строгой дополнительности и обобщённому достаточному условию минимума второго порядка. Тогда модифицированная функция Лагранжа $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ является глобально параметрически точной с точным настроечным параметром λ_* тогда и только тогда, когда существует $c_0 > 0$ такое, что множество $\{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathscr{L}(x, \lambda_*, c_0) < f_*\}$ ограничено. В частности, достаточно предполагать, что функция $f(\cdot) + c_0 \sum\limits_{i \in I} \max\{0, g_i(x)\}^2 + c_0 \sum\limits_{j \in J} g_j(x)^2$ коэрцитивна.*

Доказательство. По теореме 4.1.7 функция $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ является локально параметрически точной в каждой точке $x_* \in \Omega_*$ с точным настроечным параметром λ_*. Нетрудно проверить, что при сделанных предположения выполняются все условия теоремы 4.1.6. Поэтому, воспользовавшись этой теоремой, мы получаем требуемый результат. $\square$

Замечание 4.1.4. Можно проверить, что для того чтобы модифицированная функция Лагранжа $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ являлась глобально параметрически точной с точным настроечным параметром λ_* *необходимо*, чтобы для любого $x_* \in \Omega_*$ пара (x_*, λ_*) удовлетворяла условиям Куна-Таккера и естественным *необходимым* условиям второго порядка в терминах обобщённых гессианов. Таким образом, условия предыдущей теоремы близки к необходимым.

4.2 Расширенная точность отделяющих функций

Напомним, что мы рассматриваем теорию отделяющих функций $F(x, \lambda, c)$ для задачи

$$f(x) \to \min, \quad x \in M, \quad x \in A. \tag{$\mathcal{P}$}$$

В предыдущих параграфах было изучено понятие параметрической точности функции $F(x, \lambda, c)$. При рассморении параметрической точности, фиксируется некоторый параметр $\lambda \in \Lambda$ и изучается задача минимизации функции $F(\cdot, \lambda, c)$ на множестве A. Если для выбранного значения параметра λ точки глобального минимума в этой задаче совпадают с точками глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$, то отделяющая функция $F(x, \lambda, c)$ называется глобально параметрически точной, а любой такой параметр λ называется точным настроечным параметр. В ряде случаев данный подход оказывается неудобным, ибо он не указывает, каким именно образом находить точный настроечный параметр λ.

Для того чтобы преодолеть указанные трудности, можно воспользоваться иным подходом к определению глобальной точности функции $F(x, \lambda, c)$. А именно, следует рассмотреть λ не как параметр, который необходимо определённым образом подбирать, а как дополнительную переменную. Тогда можно рассмотреть *расширенную* задачу

$$F(x, \lambda, c) \to \min_{x, \lambda}, \quad (x, \lambda) \in A \times \Lambda, \tag{4.9}$$

заключающуюся в минимизации функции $F(x, \lambda, c)$ по переменным x и λ одновременно. Если оказалось, что для каждой точки глобального минимума (x_*, λ_*) в расширенной задаче вектор x_* является точкой глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$, то отделяющая функция называется *расширенно* точной.

4.2.1 Принцип локализации в расширенной форме

Для того чтобы получить необходимые и достаточные условия глобальной расширенной точности функции $F(x, \lambda, c)$ мы сделаем два предположения относительно множества параметров Λ. А именно, мы будем предполагать, что множество Λ является замкнутым подмножеством некоторого конечномерного нормированного пространства. Данное предположение гарантирует, что из любой ограниченной последовательности $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Второе предположение связано с точками глобального минимума в расширенной задаче (4.9). А именно, мы предполагаем, что можно выбирать какие именно значения параметра λ_* должны соответствовать точкам глобального минимума (x_*, λ_*) в задаче (4.9). Мы будем предполагать, что правила выбора таких значений параметров задано в виде равенства $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$ для некоторой функции $\eta(x, \lambda)$.

Дадим точное определение. Предположим, что задана функция $\eta \colon X \times \Lambda \to \mathbb{R}$. Мы предполагаем, что для каждой точки глобального минимума x_* в задаче $(\mathcal{P})$ существует $\lambda_* \in \Lambda$ такое, что $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$.

Определение 4.2.1. Отделяющая функция $F(x, \lambda, c)$ называется глобально *расширенно точной* (по отношению к функции η), если существует $c_0 > 0$ такое, что для всех $c \geqslant c_0$ выполняется два следующих условия:

1. если (x_*, λ_*) — точка глобального минимума в расширенной задаче (4.9), то x_* — точка глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$ и $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$;

2. для любой точки глобального минимума x_* в задаче $(\mathcal{P})$ и для всех $\lambda_* \in \Lambda$ таких, что $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$ пара (x_*, λ_*) является точкой глобального минимума в задаче (4.9).

Точная нижняя грань всех таких c_0 обозначается через c^*_{ext} и называется *наименьшим точным штрафным параметром* (в расширенном смысле) отделяющей функции $F(x, \lambda, c)$.

Предположение $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$ естественным образом появляется во всех конкретных примера глобально расширенно точных отделяющих функций (см. примеры ниже). В частности, если $F(x, \lambda, c)$ — модифицированная функция Лагранжа, а λ — множитель Лагранжа, то естественно требовать, что точки глобального минимума функции $F(x, \lambda, c)$ по переменным (x, λ) удовлетворяют условиям Куна-Таккера. Данное предположение может быть легко переформулировано в виде равенства $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$ для некоторой функции η.

Принцип локализации в параметрической форме может быть легко распространён на случай расширенной точности отделяющих функций. Для этого нам потребуются следующие определения, представляющие из себя прямые обобщения соответствующих определений из параграфа 4.1.1.

Определение 4.2.2. Пусть x_* — точка локального минимума в задаче $(\mathcal{P})$. Отделяющая функция $F(x, \lambda, c)$ называется *локально расширенно точной* в точке x_*, если для всех $\lambda_* \in \Lambda$ таких, что $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$ существуют $c_0 > 0$ и окрестность U точки (x_*, λ_*) такая, что

$$F(x, \lambda, c) \geqslant F(x_*, \lambda_*, c) \quad \forall (x, \lambda) \in U \cap (A \times \Lambda) \quad \forall c \geqslant c_0.$$

Точная нижняя грань всех таких c_0 обозначается через $c^*_{ext}(x_*, \lambda_*)$ и называется *наименьшим точным штрафным параметром* отделяющей функции $F(x, \lambda, c)$ в точке (x_*, λ_*).

Определение 4.2.3. Функция $F(x, \lambda, c)$ называется отделяющей функцией *штрафного типа* (по отношению к функции η), если существует $c_0 > 0$ такое, что для любой неограниченно возрастающей последовательности $\{c_n\} \subset [c_0, +\infty)$, для любой последовательности $(x_n, \lambda_n) \in \operatorname*{arg\,min}_{(x,\lambda) \in A \times \Lambda} F(x, \lambda, c_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и для любой предельной точки (x_*, λ_*) последовательности $\{(x_n, \lambda_n)\}$ вектор x_* является точкой глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$ и выполняется равенство $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$.

Определение 4.2.4. Отделяющая функция $F(x, \lambda, c)$ называется *невырожденной*, если существуют $c_0 > 0$ и $R > 0$ такие, что для всех $c \geqslant c_0$ функция $(x, \lambda) \mapsto F(x, \lambda, c)$ достигает глобального минимума на множестве $A \times \Lambda$ и существует точка глобального минимума $(x(c), \lambda(c)) \in \operatorname*{arg\,min}_{(x,\lambda) \in A \times \Lambda} F(x, \lambda, c)$ такая, что $\|x(c)\| + \|\lambda(c))\| \leqslant R$.

Напомним, что Ω_* — это множество точек глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$. Рассуждая как и при доказательстве теорем 4.1.1 и 4.1.2, нетрудно распространить принцип локализации на случай расширенной точности отделяющих функций. Подробное доказательство этого результата имеется в работе автора [192].

Теорема 4.2.1 (принцип локализации в расширенной форме)**.** *Пусть Λ — замкнутое подмножество конечномерного нормированного пространства, функция $F(\cdot, \cdot, c)$ пн. сн. на $A \times \Lambda$ для всех $c > 0$, а множества A и $\{(x, \lambda) \in \Omega_* \times \Lambda \mid \eta(x, \lambda) = 0\}$ замкнуты. Предположим также, что из справедливости условий*

$$\eta(x_*, \lambda_*) = 0, \quad (x_*, \lambda_*) \in \operatorname*{arg\,min}_{(x,\lambda) \in A \times \Lambda} F(x, \lambda, c)$$

для некоторых $x_* \in \Omega_*$, $\lambda_* \in \Lambda$ и $c > 0$ вытекает, что отделяющая функция $F(x, \lambda, c)$ является глобально расширенно точной. Тогда для того чтобы отделяющая функция $F(x, \lambda, c)$ была глобально расширенно точной необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1. *для всех $x_* \in \Omega_*$ существует $\lambda_* \in \Lambda$ такое, что $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$;*
2. *$F(x, \lambda, c)$ является отделяющей функцией штрафного типа;*
3. *$F(x, \lambda, c)$ является локально расширенно точной во всех точках глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$;*
4. *либо $F(x, \lambda, c)$ невырождена, либо существуют $c_0 > 0$, $x_* \in \Omega_*$, $\lambda_* \in \Lambda$ и ограниченное множество K такие, что $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$ и*

$$S_c(x_*, \lambda_*) := \Big\{(x, \lambda) \in A \times \Lambda \ \Big| \ F(x, \lambda, c) < F(x_*, \lambda_*, c)\Big\} \subseteq K \quad \forall c \geqslant c_0.$$

Замечание 4.2.1. Нетрудно видеть, что множество $\{(x, \lambda) \in \Omega_* \times \Lambda \mid \eta(x, \lambda) = 0\}$ замкнуто, в частности, если множество Ω замкнуто, функция f пн. сн. на Ω, а функция η непрерывна на $\Omega \times \Lambda$.

4.2.2 Сингулярные точные штрафные функции

Применим принцип локализации в расширенной форме к штрафной функции, впервые рассмотренной в статье [257]. Мы будем называть подобные штрафные функции *сингулярными*. Сингулярные штрафные функции подробно изучались в [184–186, 404]. В статьях [274, 303, 305] рассматривались их приложения к различным задачам оптимального управления.

Пусть множество M имеет вид $M = \{x \in X \mid 0 \in G(x)\}$ для некоторого многозначного отображения $G \colon X \rightrightarrows Y$ с замкнутыми значениями (здесь Y — нормированное пространство). Пусть также $\Lambda = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Для того чтобы отличать элементы этого множества от множителей Лагранжа, в этом подразделе мы будем обозначать их через p.

Зафиксируем произвольный вектор $w \in Y$ и неубывающие функции $\omega \colon \mathbb{R}_+ \to [0, +\infty]$ и $\phi \colon [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ такие, что $\omega(t) = 0$ тогда и только тогда, когда $t = 0$, и $\phi(t) = 0$ тогда и только тогда, когда $t = 0$. Введём сингулярную точную штрафную функцию для рассматриваемой задачи следующим образом:

$$F(x, p, c) = \begin{cases} f(x) + \dfrac{c}{p}\phi\Big(\operatorname{dist}^2\big(0, G(x) - pw\big)\Big) + c\omega(p), & \text{если } p > 0, \\ f(x), & \text{если } p = 0,\ x \in \Omega, \\ +\infty, & \text{если } p = 0,\ x \notin \Omega. \end{cases}$$

Заметим, что $F(x, 0, c) = f(x)$, если точка x допустима, а $F(x, 0, c) = +\infty$, в противном случае. Значит, задача минимизации функции $F(x, 0, c)$ на множестве A эквивалентна задаче $(\mathcal{P})$. Более того, можно проверить, что при естественных предположениях будет $F(x, p, c) \to F(x, 0, c)$ при $p \to +0$ для всех $x \in X$ и $c > 0$. Наконец, если функции f, ϕ и ω непрерывно дифференцируемы на своих эффективных множествах, а отображение G является однозначным и непрерывно дифференцируемым, то сингулярная штрафная функция $F(x, p, c)$ непрерывно дифференцируема в каждой точке $(x, p) \in \operatorname{dom} F(\cdot, \cdot, c)$ такой, что $p > 0$. Таким образом, для любого $p > 0$ функцию $F(x, p, c)$ можно рассматривать, как непрерывно дифференцируемую аппроксимацию функции $F(x, 0, c)$. Отметим также, что вектор w включён в определение функции $F(x, p, c)$ для того, чтобы эта штрафная функция была в некотором смысле похожа на модифицированную функцию Лагранжа-Хестенса-Пауэлла (см. обсуждение в [257]). В работе автора [185] была изучена зависимость наименьшего точного штрафного параметра функции $F(x, p, c)$ от выбора вектора w. Его правильный выбор позволяет существенно уменьшить наименьший точный штрафной параметр.

При естественных предположениях сингулярная штрафная функция $F(x, p, c)$ является глобально расширенно точной относительно функции $\eta(x,p) = p$, то есть для любого достаточно большого значения штрафного параметра c функция $(x,p) \mapsto F(x,p,c)$ достигает глобального минимума на множестве $A \times \mathbb{R}_+$ и пара (x_*, p_*) является точкой глобального минимума $F(x,p,c)$ на множестве $A \times \mathbb{R}_+$ тогда и только тогда, когда $p_* = 0$, а x_* — точка глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$.

Теорема 4.2.2 (принцип локализации для сингулярных точных штрафных функций)**.** *Пусть множество A замкнуто, функция f пн. сн. на A, функции ϕ и ω пн. сн., а многозначное отображение G полунепрерывно сверху на множестве A. Тогда для того чтобы сингулярная штрафная функция $F(x,p,c)$ являлась глобально расширенно точной относительно функции $\eta(x,p) = p$ необходимо и достаточно, чтобы она была локально точной в каждой точке глобального минимума в задаче $(\mathcal{P})$ и существовало $c_0 > 0$ такое, что множество $\{(x,p) \in A \times \mathbb{R}_+ \mid F(x,p,c_0) < f_*\}$ ограничено.*

Замечание 4.2.2. Доказательство предыдущей теоремы приведено в работе автора [192]. Локальная точной штрафной функции $F(x,p,c)$ может быть доказана при условиях, аналогичных условиям теоремы 4.1.5. Отметим также, что сингулярные штрафные функции были подробно изучены автором, в том числе в бесконечномерном случае, в работах [184–186]. В частности, в [185] было доказано, что при некоторых предположениях на функции ϕ и ω сингулярная штрафная функция $F(x,p,c)$ является глобально расширенно точной тогда и только тогда, когда классическая штрафная функция $\Phi(x,c) = f(x) + c\,\mathrm{dist}(0, G(x))$является глобально точной и была установлена связь между наименьшими точными штрафными параметрами этих функций.

4.2.3 Точные модифицированные функции Лагранжа

Рассмотрим приложение общей теории точных отделяющих функций к т. н. *точным модифицированным функция Лагранжа.* Такие функции были впервые введены Ди Пилло и Гриппо в работе [169] для задач нелинейного программирования и подробно изучены в [169,170,174–178,224,312,320]. Общая теория точных модифицированных функций Лагранжа для задач с коническим ограничением была разработана автором в статье [190].

В этом подразделе мы рассмотрим *непрерывно дифференцируемую* точную модифицированную функцию Лагранжа для нелинейных задач полуопределённого программирования и с помощью принципа локализации получим простые необходимые и достаточные условия глобальной точности этой функции. Отметим, что эта модифицированная функция Лагранжа была впервые введена автором в работе [190]. Там же были впервые введены точные модифицированные функции Лагранжа для задач с ограничением в виде конуса Лоренца и новые классы точных модифицированных функций Лагранжа для задач нелинейного программирования.

Пусть $X = A = \mathbb{R}^d$ и $M = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |G(x) \preceq 0,\ h(x) = 0\}$ для некоторых функций $G \colon X \to \mathbb{S}^\ell$ и $h \colon X \to \mathbb{R}^s$, где $\mathbb{S}^\ell$ — пространство вещественных симметричных матриц размерности $\ell \times \ell$, а отношение $G(x) \preceq 0$ означает, что матрица $G(x)$ является отрицательно полуопределённой. Мы предполагаем, что пространство $\mathbb{S}^\ell$ наделено скалярным произведением $\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}(AB)$ и соответствующей нормой $\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{Tr}(A^2)}$, называемой нормой Фробениуса. Задача $(\mathcal{P})$ в рассматриваемом случае является нелинейной задачей полуопределённого программирования вида:

$$f(x) \to \min, \quad G(x) \preceq 0, \quad h(x) = 0. \tag{4.10}$$

Предположим, что функции f, G и h непрерывно дифференцируемы. Для любых $\lambda \in \mathbb{S}^\ell$ и $\mu \in \mathbb{R}^s$ обозначим через $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \operatorname{Tr}(\lambda G(x)) + \langle \mu, h(x) \rangle$ функцию Лагранжа для рассматриваемой задачи.

Введём модифицированную функцию Лагранжа $\mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c)$ для задачи (4.10) являющуюся глобально расширенно точной по отношению к функции $\eta(x, \lambda, \mu)$ такой, что $\eta(x_*, \lambda_*, \mu_*) = 0$ для некоторого $x_* \in \Omega_*$ тогда и только тогда, когда тройка (x_*, λ_*, μ_*) удовлетворяет условиям Куна-Таккера для задачи (4.10). Положим

$$\eta(x, \lambda, \mu) = \big\|\nabla_x L(x, \lambda, \mu)\big\|^2 + \operatorname{Tr}(\lambda^2 G(x)^2). \tag{4.11}$$

Для того чтобы равенство $\eta(x_*, \lambda_*, \mu_*) = 0$ выполнялось тогда и только тогда, когда тройка (x_*, λ_*, μ_*) удовлетворяет условиям Куна-Таккера для задачи (4.10), нам потребуется условие регулярности ограничений.

Пусть x_* — точка локального минимума в задаче (4.10). Напомним, что точка x_* называется *невырожденной* (см. [108, определение 4.70]), если

$$\begin{bmatrix} DG(x_*) \\ \nabla h(x_*) \end{bmatrix} \mathbb{R}^d + \begin{bmatrix} \operatorname{lin} T_{\mathbb{S}^\ell_-}\big(G(x_*)\big) \\ \{0\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{S}^\ell \\ \mathbb{R}^s \end{bmatrix},$$

где $DG(x_*)$ — производная Фреше отображения $G(\cdot)$ в точке x_*, а $T_{\mathbb{S}^\ell_-}(G(x_*))$ — контингентный конус к множеству $\mathbb{S}^\ell_-$ всех отрицательно полуопределённых матриц порядка ℓ в точке $G(x_*)$. Отметим, что условие невырожденности может быть переписано в виде условия линейной независимости некоторых векторов, определяемых по частным производным ограничений (см. [108, предложение 5.71]).

Условие невырожденности гарантирует, что в точке x_* существует *единственный* множитель Лагранжа [108, предложение 4.75]) и равенство $\eta(x_*, \lambda_*, \mu_*) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда тройка (x_*, λ_*, μ_*) удовлетворяет условиям Куна-Таккера [190, лемма 4].

Зафиксируем произвольные числа $\alpha > 0$ и $\varkappa \geqslant 1$ и введём функции

$$p(x, \lambda) = \frac{a(x)}{1 + \operatorname{Tr}(\lambda^2)}, \quad q(x, \mu) = \frac{b(x)}{1 + \|\mu\|^2},$$

где

$$a(x) = \alpha - \operatorname{Tr}\left([G(x)]_+^2\right)^{\varkappa}, \quad b(x) = \alpha - \|h(x)\|^2,$$

а $[\cdot]_+$ — оператор проектирования матрицы на конус вещественных положительно полуопределённых матриц. Положим $\Omega_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a(x) > 0, \ b(x) > 0\}$ и определим

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c) = f(x) + \frac{1}{2cp(x, \lambda)} \Big(\operatorname{Tr}\left([cG(x) + p(x, \lambda)\lambda]_+^2\right) - p(x, \lambda)^2 \operatorname{Tr}(\lambda^2) \Big) + \\ + \langle \mu, h(x) \rangle + \frac{c}{2q(x, \mu)} \|h(x)\|^2 + \eta(x, \lambda, \mu) \end{aligned} \tag{4.12}$$

для всех $x \in \Omega_\alpha$, и $\mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c) = +\infty$, в противном случае. Можно проверить, что функция $\mathscr{L}(\cdot, c)$ пн. сн. для всех $c > 0$ и непрерывно дифференцируема на своей эффективной области, если функции f, G и h дважды непрерывно дифференцируемы.

С помощью принципа локализации в расширенной форме можно показать, что при естественных предположения модифицированная функции Лагранжа (4.12) является глобально точной относительно функции (4.11). Глобальная точность в данном случае означает, что для любого достаточно большого значения штрафного параметра $c > 0$ вектор (x_*, λ_*, μ_*) является точкой глобального минимума функции $\mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c)$ на множестве $\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^\ell \times \mathbb{R}^s$ тогда и только тогда когда x_* — точка глобального минимума в задаче (4.10), а тройка (x_*, λ_*, μ_*) удовлетворяет условиям Куна-Таккера. Иными словами, решая задачу *безусловной* минимизации функции $\mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c)$ по (x, λ, μ), можно найти точки глобального минимума исходной задачи с ограничениями и соответствующие им множители Лагранжа, для которых выполнены условия Куна-Таккера.

Теорема 4.2.3 (принцип локализации для точных модифицированных функций Лагранжа)**.** *Пусть функции f, G и h непрерывно дифференцируемы. Предположим также, что каждая точка глобального минимума в задаче* (4.10) *невырождена. Тогда модифицированная функция Лагранжа $\mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c)$ является глобально расширенно точной тогда и только тогда, когда она является локально расширенно точной в каждой точке глобального минимума в задаче* (4.10) *и множество $\{(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^\ell \times \mathbb{R}^s \mid \mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c_0) < f_*\}$ ограничено для некоторого $c_0 > 0$.*

Доказательство этой теоремы приведено в работе автора [190].

Замечание 4.2.3. Можно проверить, что модифицированная функция Лагранжа $\mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c)$ является локально расширенно точной в точке локального минимума x_* в задаче (4.10), если точка x_* невырождена и в ней выполняется достаточное условие минимума второго порядка (см. [190]). Заметим также, что множество $\{(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^d \times \Lambda \mid \mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c_0) < f_*\}$ в теореме 4.2.3 ограничено при некотором $c_0 > 0$, в частности, если существует $\gamma > 0$, для которого множество $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < f_* + \gamma,\ a(x) > 0,\ b(x) > 0\}$ ограничено (см. [190]).

4.3 Точные штрафные функции в бесконечномерных пространствах

В предыдущих параграфах были рассмотрены необходимые и достаточные условия для глобальной точности штрафных функций и модифицированных функций Лагранжа основанные на принципе локализации. Однако, данный принцип справедлив только в конечномерном случае (см. примеры в работах автора [183, 187]). Для того чтобы доказать глобальную точность штрафной функции в бесконечномерном случае, необходимо налагать гораздо более жёсткие предположения на ограничения и целевую функцию, чем в конечномерном случае. Общая теория точных линейных штрафных функций для бесконечномерных задач оптимизации изучалась автором в статьях [183, 186, 196, 200]. В этом параграфе мы приведём один из основных результатов этой теории и рассмотрим пример его применения к задачам оптимального управления линейными эволюционными уравнениями с терминальным ограничением.

4.3.1 Вполне точные штрафные функции

В этом разделе мы рассматриваем следующую экстремальную задачу:

$$f(x) \to \min_{x \in X}, \quad x \in M, \quad x \in A. \qquad (\mathcal{P})$$

Здесь $f \colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — заданная функция, а $M, A \subset X$ — непустые, пересекающиеся множества. В этом параграфе мы будем предполагать, что X — произвольное метрическое пространство, наделённое метрикой d.

Рассмотрим линейную штрафную функцию для задачи $(\mathcal{P})$. Для этого предположим, что задана функция $\varphi \colon X \to [0, +\infty]$ такая, что $\varphi(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in M$, и введём штрафную функцию $F(x, c) = f(x) + c\varphi(x)$. Далее нам будет удобнее использовать обозначением $F_c(x)$.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$F_c(x) \to \min_{x \in X}, \quad x \in A. \tag{4.13}$$

Напомним, что штрафная функция F_c называется *глобально точной*, если существует $c_* \geqslant 0$ такое, что для все $c \geqslant c_*$ множество точек глобального минимума в задаче (4.13) совпадает с множеством точек глобального минимума в исходной задаче $(\mathcal{P})$. Если штрафная функция F_c является глобально точной, то оптимальные значения задач (4.13) и $(\mathcal{P})$ также совпадают, поскольку $F_c(x) = f(x)$ для любого $x \in \Omega = M \cap A$.

С практической точки зрения очень важен вопрос о том, совпадают ли точки локального минимума (стационарные точки) в задачах (4.13) и $(\mathcal{P})$, так как традиционные алгоритмы оптимизации зачастую способны находить только точки локального минимума (или стационарные точки) исследуемых функций. Оказывается, что в бесконечномерном случае наиболее общие достаточные условия для глобальной точности штрафной функции F_c также являются достаточными условиями для совпадения точек локального минимума (стационарных точек) в задачах (4.13) и $(\mathcal{P})$. Для того чтобы дать точную формулировку этих условий, нам потребуются вспомогательные определения *скорости наискорейшего спуска* [29, 140, 143, 399] и *inf-стационарной точки* [29, 140, 143] функции, определённой на метрическом пространстве.

Пусть $K \subset X$ — непустое множество и $f(x) < +\infty$ для некоторого $x \in K$. Величина

$$f_K^{\downarrow}(x) = \liminf_{y \to x, y \in K} \frac{f(y) - f(x)}{d(y, x)}$$

называется скоростью наискорейшего спуска функции f на множестве K в точке x. Если x — изолированная точка множества K, то по определению $f_K^{\downarrow}(x) = +\infty$. Заметим, что скорость наискорейшего спуска функции f в точке x тесно связана с т. н. *сильным наклоном* $|\nabla f|(x)$ функции f в точке x, впервые введённым в работе [133]. См. [89, 186, 292] по поводу некоторых правил вычисления и оценивания скорости наискорейшего спуска/сильного наклона в различных частных случаях.

Точка $x \in K$ называется *inf-стационарной точкой* функции f на множестве K, если $f_K^{\downarrow}(x) \geqslant 0$. Заметим, что неравенство $f_K^{\downarrow}(x) \geqslant 0$ является необходимым условием минимума в задаче минимизации функции f на множестве K. В случае, когда X — нормированное пространство, K — выпуклое множество, а функция f дифференцируема по Фреше в точке x, неравенство $f_K^{\downarrow}(x) \geqslant 0$ сводится к стандартному условию экстремума: $f'(x)[y - x] \geqslant 0$ для всех $y \in K$, где $f'(x)$ — производная Фреше функции f в точке x.

Теперь мы можем сформулировать достаточные условия глобальной точности линейной штрафной функции F_c в общем случае. Для любых $c \geqslant 0$ и $t \in \mathbb{R}$ обозначим $S_c(\gamma) = \{x \in A \mid F_c(x) < \gamma\}$. Напомним также, что $\Omega = M \cap A$, и для любого $\delta > 0$ обозначим $\Omega_\delta = \{x \in A \mid \varphi(x) < \delta\}$.

Теорема 4.3.1. *Пусть X — полное метрическое пространство, множество A замкнуто, функции f и φ пн. сн. на множестве A и функция φ непрерывна в каждой точке множества Ω. Предположим также, что существуют $\gamma > f_* = \inf_{x \in \Omega} f(x)$, $c_0 > 0$ и $\delta > 0$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. *существует открытое множество V такое, что $S_{c_0}(\gamma) \cap \Omega_\delta \subset V$ и функция f удовлетворяет условию Липшица на V;*

2. *существует $a > 0$ такое, что $\varphi_A^{\downarrow}(x) \leqslant -a$ для всех $x \in S_{c_0}(\gamma) \cap (\Omega_\delta \setminus \Omega)$;*

3. *функция F_{c_0} ограничена снизу A.*

Тогда существует $c_* \geqslant 0$ такое, что для всех $c \geqslant c_*$ выполняются следующие утверждения:

1. *оптимальные значения задач $(\mathcal{P})$ и (4.13) совпадают;*

2. *точки глобального минимума в задачах $(\mathcal{P})$ и (4.13) совпадают;*

3. *$x_* \in S_c(\gamma)$ является точкой локального минимума в задаче (4.13) тогда и только тогда, когда x_* — точка локального минимума в задаче $(\mathcal{P})$;*

4. *$x_* \in S_c(\gamma)$ является inf-стационарной точкой функции F_c на множестве A тогда и только тогда, когда x_* — inf-стационарная точка функции f на Ω.*

Штрафная функция F_c, удовлетворяющая всем четырём утверждениям предыдущей теоремы, называется *вполне точной* на множестве $S_c(\gamma)$. Грубо говоря, если штрафная функция F_c является вполне точной, то задача её минимизации на множестве A полностью эквивалентна (в смысле совпадения оптимального значения, локальных/глобальных минимумов и стационарных точек) задаче $(\mathcal{P})$.

Замечание 4.3.1. Теорема 4.3.1 является усовершенствованной версией теоремы 3.4.1 из монографии [29]. Заметим, что теорема 4.3.1 существенно усиливает теорему 3.4.1 из [29], поскольку мы не предполагаем, что штрафная функция достигает глобального минимума для всех достаточно больших c, требуем выполнения условия Липшица для функции f и неравенства $\varphi_A^{\downarrow}(x) \leqslant -a$ на меньших множествах, чем в [29], и доказываем не только глобальную точность штрафной функции, как в [29, теорема 3.4.1], но и совпадение соответствующих множеств точек локального минимума и inf-стационарных точек.

Мы разобьём доказательство теоремы 4.3.1 на четыре части, соответствующие каждому из утверждений этой теоремы.

Доказательство утверждения 1. Напомним, что функция φ неотрицательна и $\varphi(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in M$. Поэтому

$$F_c(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega = M \cap A, \tag{4.14}$$

откуда следует, что $\inf\limits_{x \in A} F_c(x) \leqslant f_* = \inf\limits_{x \in \Omega} f(x)$ для всех $c \geqslant 0$. Кроме того, $\inf\limits_{x \in A} F_c(x) > -\infty$ для всех $c \geqslant c_0$, в силу того, что функция F_c не убывает по c и ограничена снизу на множестве A при $c = c_0$.

Рассуждая от противного, предположим, что оптимальные значения задач $(\mathcal{P})$ и (4.13) не совпадают ни при каком $c \geqslant 0$ (заметим, что если они совпадают при некотором $c_* \geqslant 0$, то они совпадают и при всех $c \geqslant c_*$, поскольку функция $F_c(x)$ не убывает по c). Таким образом, $\inf\limits_{x \in A} F_c(x) < f_*$ для всех $c \geqslant 0$. Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $x_n \in A$ такое, что $F_n(x_n) < f_*$.

Положим $\varepsilon_n = F_n(x_n) - \inf\limits_{x \in A} F_n(x) + 1/n > 0$. По вариационному принципу Экланда [210] для любых $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant c_0$ и $t > 0$ существует $y_n \in A$ такое, что $F_n(y_n) \leqslant F_n(x_n)$ и выполняются следующие неравенства:

$$d(y_n, x_n) \leqslant t, \quad F_n(y) - F_n(y_n) > -\frac{\varepsilon_n}{t} d(y, y_n) \quad \forall y \in A \setminus \{y_n\}.$$

Положим $t = \varepsilon_n$, поделим последнее неравенство на $d(y, y_n)$ и перейдём к нижнему пределу при $y \to y_n$, $y \in A$. Получим

$$(F_n)^{\downarrow}_A(y_n) \geqslant -1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \colon n \geqslant c_0 \tag{4.15}$$

(если y_n изолированная точка множества A, то по определению $(F_n)^{\downarrow}_A(y_n) = +\infty$).

По определениям $F_n(y_n) \leqslant F_n(x_n) < f_* < \gamma$ и $F_n(x) = f(x)$ для всех $x \in \Omega$. Поэтому $y_n \in S_n(\gamma)$ и $y_n \notin \Omega$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant c_0$. Заметим также, что для любых $n \geqslant c_0$, $m \in \mathbb{N}$ и $x \in A$ таких, что $x \notin \Omega_\delta = \{x \in A \mid \varphi(x) < \delta\}$, будет

$$F_{n+m}(x) = f(x) + (n+m)\varphi(x) = F_n(x) + m\varphi(x) \geqslant \inf_{x \in A} F_{c_0}(x) + m\delta.$$

Следовательно, для всех $x \in A \setminus \Omega_\delta$ и для любого достаточно большого n (зависящего только от δ и $\inf\limits_{x \in A} F_{c_0}(x)$) выполняется неравенство $F_n(x) \geqslant f_*$. Поэтому существует $n_0 \geqslant c_0$ такое, что $y_n \in \Omega_\delta$ для всех $n \geqslant n_0$.

Таким образом, $y_n \in S_{c_0}(\gamma) \cap (\Omega_\delta \setminus \Omega)$ для всех $n \geqslant n_0$ (здесь мы воспользовались включением $S_n(\gamma) \subseteq S_{c_0}(\gamma)$, справедливым для всех $n \geqslant c_0$ в силу неубывания функции F_c по c). Следовательно, по нашему предположению $\varphi^{\downarrow}_A(y_n) \leqslant -a$ для всех $n \geqslant n_0$. По определению скорости наискорейшего спуска для всех $n \geqslant n_0$ существует последовательность $\{y_n^k\} \subset A$, $k \in \mathbb{N}$, сходящаяся к y_n, такая, что $\varphi(y_n^k) - \varphi(y_n) \leqslant -0.5ad(y_n^k, y_n)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда, учитывая что функция f удовлетворяет условию Липшица на открытом множестве V, содержащем множество $S_{c_0}(\gamma) \cap \Omega_\delta$, с константой Липшица $L \geqslant 0$, получаем, что для любого $n \geqslant n_0$ существует $k(n) \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $k \geqslant k(n)$ будет $y_n^k \in V$ и

$$\begin{aligned} F_n(y_n^k) - F_n(y_n) = f(y_n^k) - f(y_n) + n\big(\varphi(y_n^k) - \varphi(y_n)\big) \leqslant \\ \leqslant Ld(y_n^k, y_n) - \frac{na}{2} d(y_n^k, y_n) = \Big(L - \frac{na}{2}\Big) d(y_n^k, y_n). \end{aligned}$$

Поделив данное неравенство на $d(y_n^k, y_n)$ и перейдя к нижнему пределу при $k \to +\infty$, получаем, что $(F_n)^{\downarrow}_A(y_n) \leqslant L - 0.5na < -1$ для всех достаточно больших n, что противоречит неравенству (4.15). □

Доказательство утверждения 2. По первой части доказательства существует $c_* \geqslant 0$ такое, что для всех $c \geqslant c_*$ справедливы равенства $\inf_{x \in A} F_c(x) = f_* = \inf_{x \in \Omega} f(x)$. Поэтому $\operatorname*{arg\,min}_{x \in \Omega} f(x) \subseteq \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F_c(x)$ для всех $c \geqslant c_*$ в силу равенства (4.14). С другой стороны, если $x \in A \setminus \Omega$, то $\varphi(x) > 0$, и поэтому для всех $c > c_*$ будет $F_c(x) > F_{c_*}(x) \geqslant f_*$. Поэтому для любого $c > c_*$ справедливо включение $\operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F_c(x) \subset \Omega$, из которого согласно равенству (4.14) вытекает, что $\operatorname*{arg\,min}_{x \in \Omega} f(x) = \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F_c(x)$. □

Для доказательства двух оставшихся утверждений теоремы нам потребуются локальные оценки снизу функций f и φ, доказательство которых имеется в работе автора [200].

Лемма 4.3.1. *Пусть выполняются все предположения теоремы 4.3.1. Тогда для всех* $x_0 \in S_{c_0}(\gamma) \cap \Omega$ *существует* $r > 0$ *такое, что* $\varphi(x) \geqslant a \operatorname{dist}(x, \Omega)$ *для всех* $x \in B(x_0, r) \cap A$, *где* $B(x_0, r) = \{y \in X \mid d(x_0, y) \leqslant r\}$.

Лемма 4.3.2. *Пусть выполняются все предположения теоремы 4.3.1 и пусть* L *— константа Липшица функции* f *на множестве* V. *Предположим также, что* $x_* \in S_{c_0}(\gamma) \cap \Omega$ *— inf-стационарная точка функции* f *на множестве* Ω. *Тогда для всех* $L' > L$ *существует* $r > 0$ *такое, что* $f(x) - f(x_*) \geqslant -L' \operatorname{dist}(x, \Omega) - (L' - L)d(x, x_*)$ *для всех* $x \in B(x_*, r)$. *Более того, если* x_* *является точкой локального минимума в задаче* $(\mathcal{P})$, *то можно положить* $L' = L$.

Доказательство утверждения 3. Покажем, что без ограничения общности можно считать, что $\delta = +\infty$. Действительно, обозначим $\eta = \inf_{x \in A} F_{c_0}(x) > -\infty$. Тогда для всех $x \in A \setminus \Omega_\delta$

и $c > \widehat{c} := c_0 + (\gamma - \eta)/\delta$ выполняется неравенство

$$F_c(x) = F_{c_0}(x) + (c - c_0)\varphi(x) \geqslant \eta + (c - c_0)\delta \geqslant \gamma,$$

откуда следует, что $S_c(\gamma) \subseteq S_{c_0}(\gamma) \cap \Omega_\delta$ для всех $c > \widehat{c}$. Поэтому, увеличивая при необходимости c_0, можно полагать, что $\delta = +\infty$, т. е. в формулировке теоремы 4.3.1 можно заменить множество $S_{c_0}(\gamma) \cap \Omega_\delta$ на $S_{c_0}(\gamma)$. Заметим также, что

$$S_c(\gamma) \subseteq S_{c_0}(\gamma) \quad \forall c \geqslant c_0, \tag{4.16}$$

так как функция F_c не убывает по c.

Пусть $L > 0$ — константа Липшица функции f на открытом множестве V, содержащем множество $S_{c_0}(\gamma)$. По нашему предположению для всех $x \in S_{c_0}(\gamma) \setminus \Omega$ выполняется неравенство $\varphi^{\downarrow}_A(x) \leqslant -a$. По определению скорости наискорейшего спуска для любого такого x найдётся последовательность $\{x_n\} \subset A$, сходящаяся к x, такая, что

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\varphi(x_n) - \varphi(x)}{d(x_n, x)} \leqslant -a.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\{x_n\} \subset V$. Поэтому для любого $c > 0$ будет

$$\begin{aligned}(F_c)^{\downarrow}_A(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{F_c(x_n) - F_c(x)}{d(x_n, x)} = \liminf_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x) + c(\varphi(x_n) - \varphi(x))}{d(x_n, x)} \leqslant \\ \leqslant L + c \liminf_{n\to\infty} \frac{\varphi(x_n) - \varphi(x)}{d(x_n, x)} \leqslant L - ca.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (4.16), получаем, что

$$(F_c)^{\downarrow}_A(x) < 0 \quad \forall x \in S_c(\gamma) \setminus \Omega \quad \forall c > \max\left\{\frac{L}{a}, c_0\right\}. \tag{4.17}$$

Зафиксируем произвольное $c > \max\{c_0, L/a\}$. Пусть $x_* \in S_c(\gamma)$ — точка локального минимума в задаче (4.13). Тогда, как легко видеть, $(F_c)^{\downarrow}_A(x) \geqslant 0$, откуда с учётом неравенства (4.17) следует, что $x_* \in \Omega$. Следовательно, x_* — точка локального минимума в задаче $(\mathcal{P})$, поскольку $F_c(x) = f(x)$ для всех $x \in \Omega$.

Предположим теперь, что $x_* \in S_c(\gamma)$ — точка локального минимума в задаче $(\mathcal{P})$. Тогда, воспользовавшись леммами 4.3.1 и 4.3.2, получим, что существует $r > 0$ такое, что для всех $c \geqslant L/a$ и $x \in B(x_*, r) \cap A$ будет

$$F_c(x) - F_c(x_*) = f(x) - f(x_*) + c(\varphi(x) - \varphi(x_*)) \geqslant -L \operatorname{dist}(x, \Omega) + ca \operatorname{dist}(x, \Omega) \geqslant 0,$$

т. е. x_* — точка локального минимума в задаче (4.13). $\square$

Доказательство утверждения 4. Зафиксируем произвольное $c > \max\{L/a, c_0\}$. Пусть $x_* \in S_c(\gamma)$ — inf-стационарная точка функции F_c на множестве A. Тогда $x_* \in \Omega$ в силу определения inf-стационарной точки и неравенства (4.17). Отсюда, учитывая, что для всех $x \in \Omega$

справедливо равенство $F_c(x) = f(x)$, нетрудно проверить, что x_* является inf-стационарной точкой функции f на множестве Ω.

Предположим теперь, что $x_* \in S_c(\gamma) \cap \Omega$ — inf-стационарная точка функции f на множестве Ω. Можно предполагать, что x_* не является изолированной точкой множества A, так как в противном случае $(F_c)^{\downarrow}_A(x_*) = +\infty$, т. е. x_* — inf-стационарная точка функции F_c на множестве A.

По определению скорости наискорейшего спуска найдётся последовательность $\{x_n\} \subset A$, сходящаяся к точке x_*, такая, что

$$(F_c)^{\downarrow}_A(x_*) = \lim_{n\to\infty} \frac{F_c(x_n) - F_c(x_*)}{d(x_n, x_*)}.$$

Если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \Omega$, то, учитывая, что $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in \Omega$, имеем

$$(F_c)^{\downarrow}_A(x_*) = \lim_{k\to\infty} \frac{F_c(x_{n_k}) - F_c(x_*)}{d(x_{n_k}, x_*)} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_{n_k}) - f(x_*)}{d(x_{n_k}, x_*)} \geqslant f^{\downarrow}_{\Omega}(x_*) \geqslant 0.$$

Значит x_* — inf-стационарная точка функции F_c на множестве A. Таким образом, можно предполагать, что $\{x_n\} \subset A \setminus \Omega$ и, более того, $F_c(x_n) < \gamma$ для всех $n \in \mathbb{N}$, так как в противном случае найдётся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $F_c(x_{n_k}) \geqslant \gamma > F_c(x_*)$, откуда очевидно следует, что $(F_c)^{\downarrow}_A(x_*) \geqslant 0$.

Таким образом, $\{x_n\} \subset S_{c_0}(\gamma) \setminus \Omega$. Зафиксируем произвольное $L' \in (L, ca)$. Воспользовавшись леммами 4.3.1 и 4.3.2, получим

$$\begin{aligned} F_c(x_n) - F_c(x_*) &= f(x_n) - f(x_*) + c\big(\varphi(x_n) - \varphi(x_*)\big) \geqslant \\ &\geqslant -L' \operatorname{dist}(x_n, \Omega) - (L' - L)d(x_n, x_*) + ca \operatorname{dist}(x_n, \Omega) \geqslant -(L' - L)d(x_n, x_*) \end{aligned}$$

для всех достаточно больших n. Поделив данное неравенство на $d(x_n, x_*)$ и перейдя к пределу при $n \to \infty$, получим, что $(F_c)^{\downarrow}_A(x_*) \geqslant -(L' - L)$. Следовательно $(F_c)^{\downarrow}_A(x_*) \geqslant 0$, так как $L' \in (L, ca)$ было выбрано произвольным образом. Таким образом, x_* — inf-стационарная точка функции F_c на множестве A, что и требовалось доказать. □

4.3.2 Точные штрафные функции для задач управления линейными эволюционными уравнениями

Рассмотрим пример применения теоремы 4.3.1 к одному классу задач оптимального управления. Другие приложения этой теоремы к различным задачам оптимального управления, включая задачи с фазовыми ограничениями, изложены в работах автора [196, 200].

В этом подразделе мы будем использовать стандартные определения и обозначения из теории операторных полугрупп и линейных эволюционных уравнений, подробно изложенные, например, в монографии [387]. Пусть $\mathscr{H}$ и $\mathscr{U}$ — комплексные гильбертовы пространства, $\{\mathbb{T}_t\}_{t\geqslant 0}$ — сильно непрерывная полугруппа в $\mathscr{H}$ с генератором $\mathcal{A}\colon \mathcal{D}(\mathcal{A})\to\mathscr{H}$ и пусть $\mathcal{B}$ — допустимый оператор управления для $\mathbb{T}_t$ (см. [387, определение 4.2.1]). Рассмотрим следующую задачу оптимального управления с закреплёнными концами:

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}(x,u)=\int_0^T \theta(x(t),u(t),t)\,dt\to\min_{(x,u)},\\ &\dot{x}(t)=\mathcal{A}x(t)+\mathcal{B}u(t),\quad t\in[0,T],\quad u\in U,\quad x(0)=x_0,\quad x(T)=x_T. \end{aligned}\tag{4.18}$$

Здесь $\theta\colon \mathscr{H}\times\mathscr{U}\times[0,T]\to\mathbb{R}$ заданная функция, $T>0$ и $x_0,x_T\in\mathscr{H}$ фиксированы, а U — замкнутое выпуклое подмножество пространства $L^2((0,T);\mathscr{U})$, состоящего из всех измеримых функций $u\colon(0,T)\to\mathscr{U}$ таких, что $\|u\|_{L^2((0,T);\mathscr{U})}=\int_0^T\|u(t)\|^2_{\mathscr{U}}dt<+\infty$.

Мы хотим избавиться от терминального ограничения $x(T)=x_T$, включив его в штрафную функцию. Для любого $t\geqslant 0$ обозначим через $G_tu=\int_0^t\mathbb{T}_{t-\sigma}\mathcal{B}u(\sigma)\,d\sigma$ т. н. *оператор входа*, соответствующий паре $(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Согласно предложению 4.2.2 из [387] G_t — ограниченный линейный оператор из $L^2((0,T);\mathscr{U})$ в $\mathscr{H}$. Более того, по предложению 4.2.5 из [387] для любого управления $u\in L^2((0,T);\mathscr{U})$ задача Коши

$$\dot{x}(t)=\mathcal{A}x(t)+\mathcal{B}u(t),\quad x(0)=x_0\tag{4.19}$$

имеет единственное решение $x\in C([0,T];\mathscr{H})$, определяемое по формуле

$$x(t)=\mathbb{T}_tx_0+G_tu\quad\forall t\in[0,T].\tag{4.20}$$

Положим $X=C([0,T];\mathscr{H})\times L^2((0,T);\mathscr{U})$, $M=\{(x,u)\in X\mid x(T)=x_T\}$ и

$$A=\Big\{(x,u)\in X\;\Big|\;x(0)=x_0,\ u\in U,\ x(t)=\mathbb{T}_tx_0+G_tu\quad\forall t\in[0,T]\Big\}.$$

Тогда задача (4.18) может быть переписана как задача минимизации функционала $\mathcal{I}(x,u)$ при ограничениях $(x,u)\in M$ и $(x,u)\in A$. Положим $\varphi(x,u)=\|x(T)-x_T\|_{\mathscr{H}}$. Тогда $M=\{(x,u)\in X\mid\varphi(x,u)=0\}$ и можно рассмотреть задачу минимизации штрафной функции $F_c(x,u)=\mathcal{I}(x,u)+c\varphi(x,u)$ при ограничении $(x,u)\in A$, которая представляет из себя задачу оптимального управления со свободным правым концом вида:

$$\begin{aligned} &F_c(x,u)=\mathcal{I}(x,u)+c\varphi(x,u)=\int_0^T\theta(x(t),u(t),t)\,dt+c\|x(T)-x_T\|_{\mathscr{H}}\to\min_{(x,u)},\\ &\dot{x}(t)=\mathcal{A}x(t)+\mathcal{B}u(t),\quad t\in[0,T],\quad u\in U,\quad x(0)=x_0. \end{aligned}\tag{4.21}$$

Обозначим через $\mathcal{R}(x_0, T)$ *множество достижимости* из точки x_0 за время T, т. е. множество всех тех $\xi \in \mathscr{H}$ для которых существует $u \in U$ такое, что $x(T) = \xi$, где траектория системы $x(\cdot)$ опеделена по формуле (4.20). Заметим, что по определению $\mathcal{R}(x_0, T) = G_T(U) + \mathbb{T}_T x_0$, откуда следует, что множество достижимости $\mathcal{R}(x_0, T)$ выпукло в силу выпуклости множества допустимых управлений U.

Воспользуемся теоремой 4.3.1, чтобы получить простые достаточные условия полной точности штрафной функции $F_c(x, u)$, гарантирующие, что при всех достаточно больших c задача со свободным правым концом (4.21) полностью эквивалентна задаче с закреплённым правым концом (4.18). Естественные достаточные условия глобальной точности функции $F_c(x, u)$ формулируются в терминах *относительной внутренности* множества достижимости $\mathcal{R}(x_0, T)$. Напомним, что относительной внутренностью $\operatorname{ri} C$ выпуклого подмножества C банахова пространства Y называется внутренность множества C относительно *замкнутой* аффинной оболочки множества C. Заметим при этом, что в бесконечномерном случае относительная внутренность выпуклого множества может быть пустой (см. [111, 112]).

Теорема 4.3.2. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

1. *функция θ непрерывна и для всех $R > 0$ существуют $C_R > 0$ и неотрицательная п.в. функция $\omega_R \in L^1(0, T)$ такие, что $|\theta(x, u, t)| \leqslant C_R \|u\|^2_{\mathscr{U}} + \omega_R(t)$ для всех $x \in \mathscr{H}$, $u \in \mathscr{U}$ и $t \in (0, T)$, удовлетворяющих неравенству $\|x\|_{\mathscr{H}} \leqslant R$;*

2. *либо множество U ограничено в $L^2((0, T), \mathscr{U})$, либо существуют $C_1 > 0$ и $\omega \in L^1(0, T)$ такие, что $\theta(x, u, t) \geqslant C_1 \|u\|^2_{\mathscr{U}} + \omega(t)$ для всех $x \in \mathscr{H}$, $u \in \mathscr{U}$ и $t \in [0, T]$;*

3. *функция θ дифференцируема по x и u, функции $\nabla_x \theta$ и $\nabla_u \theta$ непрерывны и для всех $R > 0$ существуют $C_R > 0$ и неотрицательные п.в. функции $\omega_R \in L^1(0, T)$ и $\eta_R \in L^2(0, T)$ такие, что*

$$\|\nabla_x \theta(x, u, t)\|_{\mathscr{H}} \leqslant C_R \|u\|^2_{\mathscr{U}} + \omega_R(t), \quad \|\nabla_u \theta(x, u, t)\|_{\mathscr{U}} \leqslant C_R \|u\|_{\mathscr{U}} + \eta_R(t)$$

   для всех $x \in \mathscr{H}$, $u \in \mathscr{U}$ и $t \in (0, T)$, удовлетворяющих неравенству $\|x\|_{\mathscr{H}} \leqslant R$;

4. *в задаче (4.18) достигается глобальный минимум, относительная внутренность множества $\mathcal{R}(x_0, T)$ не пуста и $x_T \in \operatorname{ri} \mathcal{R}(x_0, T)$.*

Тогда для всех $\gamma \in \mathbb{R}$ существует $c_*(\gamma) \geqslant 0$ такое, что для любого $c \geqslant c_*(\gamma)$ штрафная функция F_c для задачи (4.18) является вполне точной на множестве $S_c(\gamma)$.

Доказательство. Проверим, что при сделанных предположениях выполняются все предположения теоремы 4.3.1. Действительно, в силу предположения 1 функционал $\mathcal{I}(x,u)$ корректно определён и конечен для всех $(x,u) \in X$. В свою очередь, из предположения 2 следует, что для всех $\gamma \in \mathbb{R}$ и $c \geqslant 0$ существует $K > 0$ такое, что $\|u\|_{L^2((0,T);\mathscr{U})} \leqslant K$ для всех $(x,u) \in S_c(\gamma)$. Заметим, что $\|G_t\| \leqslant \|G_T\|$ для всех $t \leqslant T$ (см. [387, формула (4.2.5)]) и $\|\mathbb{T}_t\| \leqslant M_\omega e^{\omega t}$ для всех $t \geqslant 0$ и для некоторых $\omega \in \mathbb{R}$ и $M_\omega \geqslant 1$ по предложению 2.1.2 из [387]. Следовательно, согласно (4.20) для всех $(x,u) \in S_c(\gamma)$ справедлива оценка $\|x\|_{C([0,T];\mathscr{H})} \leqslant M_\omega \max_{t\in[0,T]} e^{\omega t}\|x_0\| + \|G_T\|K$. Таким образом, множество $S_c(\gamma)$ ограничено в X для всех $c \geqslant 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, откуда в силу предположения 1 следует, что штрафная функция F_c ограничена снизу на множестве A для всех $c \geqslant 0$.

Заметим, что функция φ непрерывна на X, поскольку

$$|\varphi(x,u) - \varphi(y,v)| = \big|\|x(T) - x_T\|_{\mathscr{H}} - \|y(T) - x_T\|_{\mathscr{H}}\big| \leqslant \|x(T) - y(T)\|_{\mathscr{H}} \leqslant \|x - y\|_{C([0,T];\mathscr{H})}$$

для всех $(x,u),(y,v) \in X$. Кроме того, из формулы (4.20), замкнутости множества U и того факта, что оператор G_t непрерывно отображает $L^2((0,T);\mathscr{U})$ в $\mathscr{H}$ по предложению 4.2.2 из [387], следует, что множество A замкнуто.

Воспользовавшись предположением 3, можно доказать, что функционал $\mathcal{I}$ удовлетворяет условию Липшица на ограниченных подмножествах пространства X (см. доказательство теоремы 8 в [196]). В частности, функционал $\mathcal{I}$ удовлетворяет условию Липшица на любом открытом ограниченном множестве V, содержащем множество $S_c(\gamma)$. Такое множество V существует в силу ограниченности множества $S_c(\gamma)$.

Таким образом, остаётся проверить, что для любых $c \geqslant 0$ и $\gamma > \inf\limits_{(x,u)\in\Omega} \mathcal{I}(x,u)$ существует $a > 0$ такое, что $\varphi_A^{\downarrow}(x,u) \leqslant -a$ для всех $(x,u) \in S_c(\gamma) \setminus \Omega$, где $\Omega = M \cap A$. Для этого зафиксируем любые такие c, γ и $(x,u) \in S_c(\gamma)$ и выберем произвольную пару $(\widehat{x},\widehat{u}) \in \Omega$. Заметим, что $x(T) \neq x_T$ в силу того, что $(x,u) \notin \Omega$. Положим

$$\Delta x = \frac{1}{\sigma}(\widehat{x} - x), \quad \Delta u = \frac{1}{\sigma}(\widehat{u} - u), \quad \sigma := \|\widehat{x} - x\|_{C([0,T];\mathscr{H})} + \|\widehat{u} - u\|_{L^2((0,T);\mathscr{U})} > 0.$$

Тогда $\|(\Delta x, \Delta u)\|_X = \|\Delta x\|_{C([0,T];\mathscr{H})} + \|\Delta u\|_{L^2((0,T);\mathscr{U})} = 1$. Так как рассматриваемая система линейна и множество допустимых управлений U выпукло, для всех $\alpha \in [0,\sigma]$ справедливы включение $(x + \alpha\Delta x, u + \alpha\Delta x) \in A$ и равенство $(x + \alpha\Delta x)(T) = x(T) + \alpha\sigma^{-1}(x_T - x(T))$ (заметим, что $\widehat{x}(T) = x_T$ по определению). Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}\varphi_A^{\downarrow}(x,u) &\leqslant \lim_{\alpha\to+0} \frac{\varphi(x+\alpha\Delta x, u+\alpha\Delta u) - \varphi(x,u)}{\alpha\|(\Delta x,\Delta u)\|_X} = \\ &= \lim_{\alpha\to+0} \frac{(1-\alpha\sigma^{-1})\|x(T) - x_T\|_{\mathscr{H}} - \|x(T) - x_T\|_{\mathscr{H}}}{\alpha} = -\frac{1}{\sigma}\|x(T) - x_T\|_{\mathscr{H}}.\end{aligned}$$

Таким образом, остаётся проверить, что найдётся $C > 0$ такое, что для любых $(x,u) \in S_c(\gamma) \setminus \Omega$ существует пара $(\widehat{x},\widehat{u}) \in \Omega$, удовлетворяющая неравенству

$$\|x-\widehat{x}\|_{C([0,T];\mathscr{H})} + \|u-\widehat{u}\|_{L^2((0,T);\mathscr{U})} \leqslant C\|x(T)-x_T\|_{\mathscr{H}}.$$

Тогда $\varphi_A^{\downarrow}(x,u) \leqslant -1/C$ для всех $(x,u) \in S_c(\gamma) \setminus \Omega$ и остаётся применить теорему 4.3.1.

Из формулы (4.20) и неравенства $\|G_t\| \leqslant \|G_T\|$, $t \in [0,T]$ (см. [387, формула (4.2.5)]) следует, что $\|x-\widehat{x}\|_{C([0,T];\mathscr{H})} \leqslant \|G_T\|\|u-\widehat{u}\|_{L^2((0,T);\mathscr{U})}$ для всех $(x,u) \in A$ и $(\widehat{x},\widehat{u}) \in A$. Поэтому достаточно проверить, что найдётся $C > 0$ такое, что для всех $(x,u) \in S_c(\gamma) \setminus \Omega$ существует пара $(\widehat{x},\widehat{u}) \in \Omega$, удовлетворяющая неравенству

$$\|u-\widehat{u}\|_{L^2((0,T);\mathscr{U})} \leqslant C\|x(T)-x_T\|_{\mathscr{H}}. \tag{4.22}$$

Для того чтобы доказать существование такого $C > 0$, зафиксируем произвольную пару $(x_*,u_*) \in \Omega$ и введём линейный оператор $\mathcal{E}\colon \operatorname{cl}\operatorname{span}(U-u_*) \to \operatorname{cl}\operatorname{span} G_T(U-u_*)$ по следующему правилу: $\mathcal{E}(u) = G_T(u)$ для всех $u \in \operatorname{cl}\operatorname{span}(U-u_*)$. Заметим, что оператор $\mathcal{E}$ корректно определён, поскольку оператор входа G_T отображает $\operatorname{cl}\operatorname{span}(U-u_*)$ в $\operatorname{cl}\operatorname{span} G_T(U-u_*)$. Действительно, по определению $G_T(\operatorname{span}(U-u_*)) \subseteq \operatorname{cl}\operatorname{span} G_T(U-u_*)$. Если же $u_0 \in \operatorname{cl}\operatorname{span}(U-u_*)$, то существует последовательность $\{u_n\} \subset \operatorname{span}(U-u_*)$, сходящаяся к u_0. В силу непрерывности оператора G_T последовательность $\{G_T u_n\}$ сходится $G_T u_0$. Поэтому $G_T u_0 \in \operatorname{cl}\operatorname{span} G_T(U-u_*)$.

Оператор $\mathcal{E}$ является непрерывным линейным оператором между банаховыми пространствами, поскольку оператор G_T непрерывен. Более того, воспользовавшись формулой (4.20), получим, что $G_T(u-u_*) = x(T)-x_T$ для всех $u \in U$, откуда следует, что $\mathcal{E}(U-u_*) = G_T(U-u_*) = \mathcal{R}(x_0,T)-x_T$. Следовательно, $0 \in \operatorname{int}\mathcal{E}(U-u_*)$ по предположению 4, так как замыкание аффинной оболочки множества $\mathcal{R}(x_0,T)$ совпадает с $\operatorname{cl}\operatorname{span} G_T(U-u_*)+x_T$ в силу того, что $0 \in G_T(U-u_*) = \mathcal{R}(x_0,T)-x_T$. Поэтому, воспользовавшись нелокальной версией теоремы Робинсона-Урсеску (см. теоремы 1 и 2 в оригинальной работе Робинсона [352]), получим, что существует $\varkappa > 0$ такое, что

$$\operatorname{dist}\big(u-u_*, \mathcal{E}^{-1}(0)\cap(U-u_*)\big) \leqslant \varkappa\big(1+\|u-u_*\|_{L^2((0,T);\mathscr{H})}\big)\big\|\mathcal{E}(u-u_*)\big\|_{\mathscr{H}} \quad \forall u \in U. \tag{4.23}$$

Зафиксируем произвольную пару $(x,u) \in S_c(\gamma) \setminus \Omega$ (т. е. $x(T) \neq x_T$). Воспользовавшись равенством $\mathcal{E}(u-u_*) = x(T)-x_T$ и неравенством (4.23), получим, что существует $v \in U-u_*$ такое, что $\mathcal{E}(v) = 0$ и

$$\|u-u_*-v\|_{L^2((0,T);\mathscr{H})} \leqslant 2\varkappa\big(1+\|u-u_*\|_{L^2((0,T);\mathscr{H})}\big)\big\|x(T)-x_T\big\|_{\mathscr{H}}. \tag{4.24}$$

Положим $\widehat{u} = u_* + v \in U$ и пусть $\widehat{x}$ — траектория системы (4.19), соответствующая управлению $\widehat{u}$. Тогда $\widehat{x}(T) - x_T = \mathcal{E}(\widehat{u} - u_*) = \mathcal{E}(v) = 0$, т. е. $(\widehat{x}, \widehat{u}) \in \Omega$. Заметим также, что $C := \sup_{(x,u) \in S_c(\gamma)} 2\kappa(1 + \|u - u_*\|_{L^2((0,T);\mathscr{H})}) < +\infty$ в силу ограниченности множества $S_c(\gamma)$. Поэтому согласно неравенству (4.24) для любых $(x,u) \in S_c(\gamma) \setminus \Omega$ существует $(\widehat{x}, \widehat{u}) \in \Omega$ такое, что $\|u - \widehat{u}\|_{L^2((0,T);\mathscr{H})} \leqslant C\|x(T) - x_T\|_{\mathscr{H}}$, т. е. выполняется неравенство (4.22), что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 4.3.2. В случае, когда $\operatorname{Im}(G_T) = \mathscr{H}$ предположение $x_T \in \operatorname{ri}\mathcal{R}(x_0, T)$ выполняется, в частности, если x_T принадлежит внутренности множества достижимости $\mathcal{R}(x_0, T)$. В случае $U = L^2((0,T);\mathscr{U})$ (т.е. когда ограничения на управление отсутствуют) это предположение выполняется тогда и только тогда, когда образ оператора G_T замкнут.

Замечание 4.3.3. Напомним, что система (4.19) называется *точно управляемой* с помощью L^2-управлений за время T, если для всех начальный состояний $x_0 \in \mathscr{H}$ и конечных состояний $x_T \in \mathscr{H}$ существует управление $u \in L^2((0,T), \mathscr{U})$ такое, что соответствующая траектория x системы (4.19) удовлетворяет условию $x(T) = x_T$. Нетрудно видеть, что система (4.19) является *точно управляемой* с помощью L^2-управлений за время T тогда и только тогда, когда оператор входа G_T сюръективен, т. е. $\operatorname{Im}(G_T) = \mathscr{H}$. Поэтому, в частности, в теореме 4.3.2 достаточно предполагать, что система (4.19) точно управляема и $x_T \in \operatorname{int}\mathcal{R}(x_0, T)$. Если, кроме того, $\operatorname{int} U \neq \varnothing$, то достаточно предполагать, что система (4.19) точно управляема и существует допустимая точка (x_*, u_*) задачи (4.18) такая, что $u_* \in \operatorname{int} U$.

Точность штрафной функции F_c для задачи (4.18) в случае, когда $\theta(x,u,t) = \|u\|^2_{\mathscr{U}}/2$ и $U = L^2((0,T);\mathscr{U})$, изучалась в работе Гуга и Зуазуа [241] в предположении, что система (4.19) точно управляема и управление u из определения точной управляемости удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{L^2((0,T);\mathscr{U})} \leqslant C\big(\|x_0\| + \|x_T\|\big) \tag{4.25}$$

для некоторого $C > 0$, не зависящего от x_0 и x_T. Заметим, что теорема 4.3.2 существенно усиливает теорему 1 из [241], поскольку мы рассматриваем более общую целевую функцию и выпуклые ограничения на управление, налагаем ощутимо менее ограничительные предположения на оператор входа G_T (вместо сюръективности этого оператора достаточно предполагать, что его образ замкнут) и не предполагаем выполнения неравенства (4.25).

Глава 5

Приложения к задачам управления

Глава посвящена приложениям результатов негладкого анализа и алгоритмов скоростного градиента к некоторым задачам теории управления. Изучено негладкое обобщение метода скоростного градиента и рассмотрены его приложения к задаче стабилизации интегратора Брокетта и синхронизации двух осцилляторов Дуффинга. Также изучены задача граничного управления энергией в нелинейной модели Клейна-Гордона и задача управления энергией в модели синус-Гордона при наличии только граничных измерений. Основные результаты данной главы опубликованы в работах [201–208].

5.1 Негладкие алгоритмы скоростного градиента

Раздел посвящён изучению обобщений алгоритмов скоростного градиента, разработанных проф. А.Л. Фрадковым [9, 51, 73, 74, 220], на случай негладких систем управления и негладких целевых функций. Рассматриваются различные варианты негладких алгоритмов скоростного градиента, приводятся теоремы о достижимости цели управления и примеры применения разработанных алгоритмов к решению конкретных задач.

5.1.1 Конечный и дифференциальный алгоритмы скоростного градиента

Пусть объект управления задан уравнением

$$\dot{x} = F(x, u, t), \quad t \geqslant 0, \tag{5.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния объекта, а $u \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления. Мы будем предполагать, что функция $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Каратеодори, т. е. отображение $(u,x)\mapsto F(x,u,t)$ непрерывно для п.в. $t\geqslant 0$, а отображение $t\mapsto F(x,u,t)$ измеримо для всех $x\in\mathbb{R}^n$ и $u\in\mathbb{R}^m$. Если не оговорено противное, под решением системы дифференциальных уравнений (5.1), даже в случае разрывного алгоритма управления $u(\cdot)$, будет пониматься локально абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$, удовлетворяющая уравнению (5.1) для п.в. t из своей области определения.

Обозначим $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$ и предположим, что задана некоторая неотрицательная *целевая функция* $Q\colon\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $Q=Q(x,t)$. Мы будем рассматривать следующую задачу: определить алгоритм управления $u(\cdot)$ так, чтобы в замкнутой системе достигалась *цель управления*

$$\lim_{t\to\infty} Q(x(t),t))=0.$$

Таким образом, цель управления — стабилизировать систему (5.1) по отношению к целевой функции Q. Данная цель управления включает в себя многие другие конкретные задачи (частичная стабилизация, управление энергией, синхронизация, идентификация и т.д.) в качестве частных случаев (подробнее см. [9, 51, 73, 74, 220]).

Для определения требуемого алгоритма управления предположим, что функция Q локально липшицева и дифференцируема по направлениям в смысле Адамара, то есть для всех $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+$ и $(h,s)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ существует конечный предел

$$Q'(x,t;h,s)=\lim_{[h',s',\alpha]\to[h,s,+0]}\frac{Q(x+\alpha h',t+\alpha s')-Q(x,t)}{\alpha}$$

(в случае $t=0$ необходимо предполагать, что $s\geqslant 0$). Предположим также, что задана некоторая выпуклая по u функция $\omega\colon\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $\omega=\omega(x,u,t)$, такая, что

$$Q'(x,t;F(x,u,t),1)\leqslant\omega(x,u,t)\quad\forall(x,u,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}_+\,. \tag{5.2}$$

В частности, если функция F аффинна по u, а $p(x,t;\cdot)$ — верхняя выпуклая аппроксимация [37, 61] функции $Q'(x,t;\cdot)$, то можно положить $\omega(x,u,t)=p(x,t;F(x,u,t),1)$.

Замечание 5.1.1. Поясним неравенство в определении функции $\omega(x,u,t)$. В гладком случае (см. [9, 51, 73]) функция ω определяется как скорость изменения целевой функции $Q(x,t)$ в силу системы (5.1), т. е.

$$\omega(x,u,t)=\frac{d}{dt}Q(x,t)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)^TF(x,u,t)+\frac{\partial Q}{\partial t}(x,t). \tag{5.3}$$

Данная функция используется затем для определения классических алгоритмов скоростного градиента. Для того чтобы распространить это определение ω на негладкий случай, предположим, что $x(t)$ — решение уравнения (5.1) для некоторого заданного управления u. Тогда по правилу вычисления производной по направлениям сложной функции [37, Теорема I.3.3] будет

$$\frac{d}{dt}Q(x(t),t) = Q'(x(t),t;\dot{x}(t),1),$$

где $Q'(x(t),t;\dot{x}(t),t)$ — производная по направлениям функции Q в точке $(x(t),t)$ по направлению $(\dot{x}(t),1)$. Заменяя $\dot{x}(t)$ на правую часть системы (5.1), мы получаем выражение в левой части неравенства (5.2). Однако, для того чтобы сохранить свойство выпуклости функции $\omega(x,u,t)$ по u, играющее ключевую роль при анализе алгоритмов скоростного градиента, в негладком случае необходимо заменить знак равенства в определении функции ω (5.3) на знак неравенства.

Следуя классическим определениям алгоритмов скоростного градиента в случае, когда функции Q и F непрерывно дифференцируемы [9, 51, 73, 220], рассмотрим следующий алгоритм управления:

$$\dot{u} \in -\Gamma\partial_u\omega(x,u,t). \tag{5.4}$$

Здесь Γ — некоторая положительно определённая матрица, а $\partial_u\omega(x,u,t)$ — субдифференциал выпуклой функции $u \mapsto \omega(x,u,t)$ в точке (x,u,t). Закон управления (5.4) назовём *негладким алгоритмом скоростного градиента в дифференецииальной форме*. Также мы будем рассматривать негладкий алгоритм скоростного градиента в *конечной форме* вида

$$u \in u_0 - \Gamma\partial_u\omega(x,u,t), \tag{5.5}$$

где Γ — положительно определённая матрица, а u_0 — начальное значение переменной u. Наконец, можно рассмотреть более общий алгоритм управления вида

$$u = u_0 + \gamma\psi(x,u,t), \tag{5.6}$$

где $\gamma > 0$ — коэффициент усиления, а вектор-функция ψ удовлетворяет т. н. условию *острого угла*: для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и $t \geqslant 0$ существует $v \in \partial_u\omega(x,u,t)$ такое, что $v^T\psi(x,u,t) \leqslant 0$. Алгоритм управления (5.6) представляет из себя обобщение *алгоритма скоростного псевдоградиента* [51] на негладкий случай.

Замечание 5.1.2. Соотношение (5.6) является *уравнением* относительно переменной u, т. е. это соотношение определяет закон управления $u = u(x,t,\gamma)$ в *неявной* форме. Заметим, однако, что в большинстве приложений либо функция ψ не зависит от u, либо решение уравнения (5.6) может быть легко найдено аналитически.

Отметим также, что по определению субдифференциала соотношение (5.5) может быть переписано следующим образом:

$$\omega(x,v,t) - \omega(x,u,t) \geqslant (-\Gamma^{-1}u + \Gamma^{-1}u_0)^T(v-u) \quad \forall v \in \mathbb{R}^m$$

или, что эквивалентно,

$$(Mu+q)^T(v-u)+\omega(x,v,t)-\omega(x,u,t)\geqslant 0 \quad \forall v\in\mathbb{R}^m, \tag{5.7}$$

где $M=\Gamma^{-1}$ и $q=-\Gamma^{-1}u_0$. Неравенство (5.7) является линейным вариационным неравенством по отношению к переменной u. Нетрудно проверить, что для этого вариационного неравенства выполнены все условия известных теорем существования решений (см., например, [83, следствие 3, часть (a)]). Поэтому для всех $x\in\mathbb{R}^n$, $u_0\in\mathbb{R}^m$ и $t\geqslant 0$ существует по меньшей мере один вектор $u=u(x,u_0,t)\in\mathbb{R}^m$, удовлетворяющий соотношению (5.5).

Исследуем свойства сходимости негладких алгоритмов скоростного градиента. Приведённые ниже результаты являются прямым обобщением соответствующих теорем для гладких алгоритмов скоростного градиента на негладкий случай (ср. [51, параграф 3.2]). Сначала мы рассмотрим алгоритм в дифференциальной форме. Обозначим через $\mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ множество всех локально интегрируемых по Лебегу функций $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$. Пусть, как и ранее, $|\cdot|$ — евклидова норма и $B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n \mid |y-x|\leqslant r\}$.

Теорема 5.1.1. *Пусть выполняются следующие предположения:*

1. *функция F удовлетворяет условию Каратеодори и для всех $r>0$ существует $m_r>0$ такое, что $|F(x,u,t)|\leqslant m_r$ для всех $x\in B(0,r)$, $u\in B(0,r)$ и $t\geqslant 0$;*

2. *многозначное отображение $(x,u)\mapsto \partial_u\omega(x,u,t)$ полунепрерывно сверху для п.в. $t\geqslant 0$, многозначное отображение $t\mapsto\partial_u\omega(x,u,t)$ измеримо для всех x и u, и для всех $r>0$ существует неотрицательная п.в. функция $s_r\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ такая, что $|v|\leqslant s_r(t)$ для всех $v\in\partial_u\omega(x,u,t)$, $x\in B(0,r)$, $u\in B(0,r)$ и $t\geqslant 0$;*

3. *функция $Q(x,t)$ дифференцируема по направлениям в смысле Адамара, локально липшицева, равномерно непрерывна на множествах вида $\{(x,t)\colon |x|\leqslant r, t\geqslant 0\}$ и радиально неограничена, т. е. $\inf\limits_{t\geqslant 0} Q(x,t)\to+\infty$ при $|x|\to+\infty$;*

4. *существуют вектор $u_*\in\mathbb{R}^m$ и непрерывная функция $\rho\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ такие, что $\rho(x,Q(x,t))=0$ тогда и только тогда, когда $Q(x,t)=0$, и $\omega(x,u_*,t)\leqslant -\rho(x,Q(x,t))$ для всех $t\geqslant 0$ и $x\in\mathbb{R}^n$.*

Тогда для любых начальных условий $x(0)\in\mathbb{R}^n$ и $u(0)\in\mathbb{R}^m$ все решения $(x(t),u(t))$ системы (5.1), (5.4) *определены и ограничены на $\mathbb{R}_+$ и*

$$\lim_{t\to\infty} Q(x(t),t))=0. \tag{5.8}$$

Доказательство. Предположения 1 и 2 гарантируют, что для любых начальных условий $(x(0), u(0))$ существует локально абсолютно непрерывное решение $(x(t), u(t))$ системы (5.1), (5.4), определённое на конечном или бесконечном полуинтервале $[0, t_0)$, причём $|x(t)| + |u(t)| \to +\infty$ при $t \to t_0$, если t_0 конечно. Более того, каждое решение дифференциального включения (5.1), (5.4) (их может быть бесконечно много) либо определено на $\mathbb{R}_+$, либо на полуинтервале $[0, t_0)$, причём во втором случае норма решения неограниченно возрастает при $t \to t_0$ (см. [72, теоремы 2.7.5 и 2.7.6]). Зафиксируем любое такое решение $(x(t), u(t))$ и предположим, что оно определено на некотором полуинтервале $[0, t_0)$, $t_0 \in (0, +\infty]$.

Введём функцию Ляпунова

$$V(x, u, t) = Q(x, t) + \frac{1}{2}(u - u_*)^T \Gamma^{-1}(u - u_*) \tag{5.9}$$

и обозначим $V_0(t) = V(x(t), u(t), t)$. По нашему предположению функция Q дифференцируема по направлениям в смысле Адамара, а функции $x(t)$, $u(t)$ дифференцируемы для п.в. $t \in [0, t_0)$, как решение дифференциального включения. Поэтому по теореме о дифференцируемости по направлениям сложной функции [37, теорема I.3.3] для п.в. $t \in [0, t_0)$ существует правосторонняя производная $D_+V_0(t)$ функции V_0 и

$$D_+V_0(t) = V_0'(t; 1) = Q'(x(t), t; \dot{x}(t), 1) + (u(t) - u_*)^T \Gamma^{-1} \dot{u}(t).$$

Поскольку $(x(t), u(t))$ — решение системы (5.1), (5.4), для п.в. $t \in [0, t_0)$ будет

$$D_+V_0(t) = Q'(x(t), t; F(x(t), u(t), t), 1) - (u(t) - u_*)^T v(t),$$

где $v(t) = -\Gamma^{-1}\dot{u}(t)$. Заметим, что $v(t) \in \partial_u \omega(x(t), u(t), t)$ для п.в. $t \in [0, t_0)$ по определению $u(t)$ (см. (5.4)). Воспользовавшись определением субдифференциала функции ω по u и предположением 4, получим, что для п.в. $t \in [0, t_0)$ выполняется неравенство

$$D_+V_0(t) \leqslant \omega(x(t), u(t), t) - (u(t) - u_*)^T v(t) \leqslant \omega(x(t), u_*, t) \leqslant -\rho(x(t), Q(x(t), t)) \leqslant 0. \tag{5.10}$$

Заметим, что функция $V_0(t)$ локально абсолютно непрерывна, как сумма локально абсолютно непрерывной функции $(u(t) - u_*)^T \Gamma^{-1}(u(t) - u_*)/2$ и суперпозиции локально липшицевой функции $Q(\cdot)$ с локально абсолютно непрерывной функцией $t \mapsto (x(t), t)$. Поэтому из (5.10) следует, что функция $V_0(t) = V(x(t), u(t), t)$ не возрастает. Поэтому функции $V(x(t), u(t), t)$, $Q(x(t), t)$ и $(u(t) - u_*)^T \Gamma^{-1}(u(t) - u_*)/2$ ограничены (см. (5.9)). Отсюда в силу радиальной неограниченности функции Q вытекает, что решение $(x(t), u(t))$ ограничено и, значит, определено для всех $t \geqslant 0$. Таким образом, остаётся доказать соотношение (5.8).

Напомним, что функция $V_0(t)$ локально абсолютно непрерывна, в то время как функция $\rho(x(t), Q(x(t), t))$ непрерывна, как суперпозиция непрерывных функций. Проинтегрировав неравенство (5.10) от 0 до t, получим

$$\int_0^t \rho(x(\tau), Q(x(\tau), \tau))\, d\tau \leqslant V_0(0) - V_0(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ .$$

Отсюда, учитывая, что функция V_0 не возрастает, имеем

$$\int_0^\infty \rho(x(t), Q(x(t), t))\, dt < +\infty. \tag{5.11}$$

По определению $x(t) - x(s) = \int_s^t F(x(\tau), u(\tau), \tau)\, d\tau$ для всех $s, t \in \mathbb{R}_+$. В силу ограниченности решения $(x(t), u(t))$ по предположению 1 существует $m_r > 0$ такое, что $|x(t) - x(s)| \leqslant \int_s^t m_r d\tau = m_r |t - s|$ для всех $t, s \in \mathbb{R}_+$. Таким образом, функция $x(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Отсюда с учётом предположений 3 и 4 получаем, что функция $\rho(x(t), Q(x(t), t))$ также равномерно непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Поэтому по лемме Барбалата (см., например, [51, лемма 2.2]) из (5.11) следует, что $\rho(x(t), Q(x(t), t)) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Проверим, что $Q(x(t), t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Действительно, рассуждая от противного, предположим, что существуют $\varepsilon > 0$ и неограниченно возрастающая последовательность $\{t_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такие, что $Q(x(t_k), t_k) \geqslant \varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Поскольку функция $x(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{R}_+$, по предположению 3 найдутся $r > 0$ и $c > 0$ такие, что $|x(t)| \leqslant r$ и $Q(x(t), t) \leqslant c$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Положим

$$\rho_0 = \inf \big\{ \rho(x, s) \mid |x| \leqslant r,\ s \in [\varepsilon, c] \big\}.$$

По предположению 4 будет $\rho_0 > 0$. Кроме того, по определению $\{t_k\}$ для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\rho\big(x(t_k), Q(x(t_k), t_k)\big) \geqslant \rho_0$, противоречащее равенству $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(x(t), Q(x(t), t)) = 0$. Таким образом, справедливо соотношение (5.8). □

Замечание 5.1.3. В некоторых приложениях многозначное отображение $(x, u) \mapsto \partial_u \omega(x, u, t)$ не является полунепрерывным сверху. В этом случае можно рассмотреть следующее естественное обобщение негладкого алгоритма скоростного градиента в дифференциальной форме. Предположим, что задано некоторое многозначное отображение $\Phi(x, u, t)$ с компактными значениями такое, что $\Phi(x, \cdot, t) = \partial_u \omega(x, \cdot, t)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих неравенству $Q(x, t) > 0$. Тогда можно рассмотреть алгоритм управления вида

$$\dot{u} \in -\Gamma \Phi(x, u, t). \tag{5.12}$$

Пусть выполняются все предположения теоремы 5.1.1 с заменой субдифференциала $\partial_u \omega(x, u, t)$ на отображение $\Phi(x, u, t)$. Тогда можно проверить, что для любых начальных условий $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и $u(0) \in \mathbb{R}^m$ все решения $(x(t), u(t))$ системы (5.1), (5.12) определены на конечном или бесконечном полуинтервале $[0, t_0)$ и либо $t_0 = +\infty$, соответствующее решение ограничено и $\lim\limits_{t \to t_0} Q(x(t), t)) = 0$, либо существует $T \in [0, t_0)$ такое, что $Q(x(T), T) = 0$, то есть цель управления достигается за конечное время.

Действительно, предположения 1 и 2 теоремы 5.1.1 гарантируют существование и продолжимость решений дифференциального включения (5.1), (5.12) для произвольных начальных условий $(x(0), u(0))$. Зафиксируем произвольное решение $(x(\cdot), u(\cdot))$, определённое на конечном или бесконечном полуинтервала $[0, t_0)$. Если $Q(x(t), t) > 0$ для всех t, то $\Phi(x(t), u(t), t) = \partial_u \omega(x(t), u(t), t)$ для всех $t \in [0, t_0)$ и, повторяя доказательство теоремы 5.1.1, мы получаем требуемый результат. В противном случае найдётся $T \in [0, t_0)$ такое, что $Q(x(T), T) = 0$. Заметим, однако, что в этом случае решение может и не быть ограниченным (норма $|u(t)|$ может неограниченно возрастать при $t \to t_0$). Кроме того, в общем случае из равенства $Q(x(T), T) = 0$ не следует, что $Q(x(t), t) = 0$ для всех $t \in [T, t_0)$. Для доказательства этого утверждения необходимо налагать дополнительные предположения на функцию Φ.

Самым ограничительным предположением теоремы 5.1.1 очевидно является предположение 4. Данное предположение, по существу, означает, что существует некоторое «идеальное» значение u_* переменной u, для которого достигается цель управления (5.17). В приложениях вектор u_*, чаще всего, является вектором неизвестных параметров и поэтому не может быть использован для решения рассматриваемой задачи. Проиллюстрируем это утверждение на простом примере.

Пример 5.1.1. Рассмотрим задачу идентификации нелинейной системы, представляющей из себя математический маятник, движение которого описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{y} = a \sin(y) + b f(t).$$

Здесь y — обобщённая координата, $f(t)$ — некоторая измеримая внешняя сила, а параметры a и b предполагаются неизвестными. Зададим уравнение эталонной модели в виде

$$\ddot{y}_m = d_1(y - y_m) + d_2(\dot{y} - \dot{y}_m) + a_m \sin(y) + b_m f(t),$$

где параметры $d_1, d_2 > 0$ введены для того, чтобы гарантировать устойчивость рассматриваемой системы. Положим $x_1 = y - y_m$, $x_2 = \dot{y} - \dot{y}_m$, $u_1 = a_m$ и $u_2 = b_m$. Тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -d_1 x_1 - d_2 x_2 + (a - u_1)\sin(y) + (b - u_2) f(t). \end{cases} \tag{5.13}$$

Введём негладкую целевую функцию $Q(x) = \sqrt{x^T H x}$, где H — заданная положительно определённая матрица. Воспользуемся негладким алгоритмом скоростного градиента в дифференциальной форме для решения этой задачи. Для всех $x \neq 0$ определим

$$\omega(x,u) = Q'\big(x; F(x,u)\big) = \frac{1}{2Q(x)}\Big(x^T HAx + x^T A^T Hx + \\ + 2(h_{12}x_1 + h_{22}x_2)(a-u_1)\sin(y) + 2(h_{12}x_1 + h_{22}x_2)(b-u_2)f(t)\Big),$$

где $F(x,u)$ — правая часть системы (5.13) и $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -d_1 & -d_2 \end{smallmatrix}\right)$. Если $x = 0$, то положим

$$\omega(0,u) = Q'\big(0; F(0,u)\big) = \sqrt{F(0,u)^T HF(0,u)} = \sqrt{h_{22}} \cdot \big|(a-u_1)\sin(y) + (b-u_2)f(t)\big|.$$

Нетрудно проверить, что многозначное отображение $(x,u) \mapsto \partial_u \omega(x,u,t)$ не является полунепрерывным сверху. Поэтому мы воспользуемся алгоритмом управления из замечания 5.1.3. А именно, определим следующий закон управления:

$$\dot{u}_1 \in \begin{cases} \{(h_{12}x_1 + h_{22}x_2)\sin(y)/Q(x)\}, & \text{если } x \neq 0, \\ \mathrm{co}\{-K\sin(y), K\sin(y)\}, & \text{если } x = 0, \end{cases} \qquad K := \max_{|x|=1} \frac{h_{12}x_1 + h_{22}x_2}{Q(x)}, \tag{5.14}$$

$$\dot{u}_2 \in \begin{cases} \{(h_{12}x_1 + h_{22}x_2)f(t)/Q(x)\}, & \text{если } x \neq 0, \\ \mathrm{co}\{-Kf(t), Kf(t)\}, & \text{если } x = 0. \end{cases} \tag{5.15}$$

Проверим выполнение условий теоремы 5.1.1 и замечания 5.1.3. Предположения 1 и 3 этой теоремы выполняются очевидным образом. Кроме того, нетрудно видеть, что многозначные отображения, стоящие в правых частях (5.14) и (5.15) полунепрерывны сверху и ограничены. Поэтому остаётся проверить существование «идеального» значения u_* управления u.

Нетрудно видеть, что матрица A — гурвицева. Поэтому матрицу H можно выбрать как решение матричного уравнения Ляпунова $HA + A^T H = -R$, где R — произвольная заданная положительно определённая матрица. Положим $u_* = (a,b)^T$. Тогда $\omega(0,u_*) = 0$ и для всех $x \neq 0$ выполняется неравенство

$$\omega(x,u_*) = -\frac{1}{2Q(x)} x^T Rx \leqslant -\rho_0 Q(x), \quad \rho_0 = \frac{\lambda_{min}(R)}{2\lambda_{max}(H)},$$

где $\lambda_{min}(R)$ — минимальное собственное число матрицы R, а $\lambda_{max}(H)$ — максимальное собственное число матрицы H. Таким образом, предположение 4 теоремы 5.1.1 выполняется для $\rho(s) \equiv \rho_0 s$. Значит выполнены все предположения теоремы 5.1.1, откуда можно сделать вывод, что либо $Q(x(t)) \to 0$ при $t \to \infty$, либо существует $T > 0$ такое, что $Q(x(T),T) = 0$. Иными словами, либо $|y(t) - y_m(t)| \to 0$ и $|\dot{y}(t) - \dot{y}_m(t)| \to 0$ при $t \to \infty$, либо $y(T) = y_m(T)$ и $\dot{y}(T) = \dot{y}_m(T)$ для некоторого $T > 0$. Более того, при некоторых дополнительных предположениях в первом случае можно доказать, что $\lim\limits_{t \to +\infty} u_1(t) = a$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} u_2(t) = b$ (см. [51, параграф 3.3]).

Рассмотрим теперь негладкую версию алгоритма скоростного псевдоградиента (5.6).

Теорема 5.1.2. *Пусть выполняются следующие предположения:*

1. *для всех* $\gamma > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ *и* $t \geqslant 0$ *существует решение* $u = \kappa(x, u_0, t, \gamma)$ *уравнения* (5.6) *такое, что функция* κ *локально ограничена по* x *равномерно по* $t \in \mathbb{R}_+$*;*

2. *решение системы* (5.1), (5.6) *существует для всех* $t \geqslant 0$, $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *и* $u_0 \in \mathbb{R}^m$*;*

3. *функция* $Q(x, t)$ *дифференцируема по направлениям в смысле Адамара, локально липшицева и радиально неограничена;*

4. *существуют локально ограниченная по* x *равномерно по* $t \in \mathbb{R}_+$ *функция* $u_* = u_*(x, t)$, $u_*\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$, *и непрерывная функция* $\rho\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такие, что* $\rho(s) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $s = 0$, *и* $\omega(x, u_*(x, t), t) \leqslant -\rho(Q(x, t))$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+$*;*

5. *существует* $\beta > 0$ *такое, что для всех* $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ *и* $t \geqslant 0$ *найдётся вектор* $v \in \partial_u\omega(x, u, t)$, *удовлетворяющий неравенству*

$$v^T\psi(x, u, t) \leqslant -\beta|v|. \tag{5.16}$$

Тогда для всех $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *и* $u_0 \in \mathbb{R}^m$ *существует* $\overline{\gamma} > 0$ *такое, что для всех* $\gamma > \overline{\gamma}$ *все решения* $(x(t), u(t))$ *системы* (5.1), (5.6) *ограничены на* $\mathbb{R}_+$ *и*

$$\lim_{t\to+\infty} Q(x(t), t)) = 0. \tag{5.17}$$

Доказательство. Рассмотрим в качестве функции Ляпунова целевую функцию $Q(x, t)$ и положим $V_0(t) = Q(x(t), t)$, где $(x(\cdot), u(\cdot))$ решение системы (5.1), (5.6). По теореме о дифференцируемости по направлениям сложной функции [37, теорема I.3.3] для п.в. $t \in \mathbb{R}_+$ существует правосторонняя производная $D_+V_0(t)$ функции V_0 в точке t и

$$D_+V_0(t) = Q'(x(t), t; \dot{x}(t), 1) = Q'(x(t), t; F(x(t), u, t), 1) \leqslant \omega(x(t), u, t).$$

Воспользовавшись выпуклостью функции ω по u и предположениями 4 и 5, получим, что

$$\begin{aligned} D_+V_0(t) \leqslant \omega(x(t), u_*(x(t), t), t) + \big[u_0 - u_*(x(t), t) + \gamma\psi(x(t), u, t)\big]^T v \leqslant \\ \leqslant -\rho(Q(x(t), t)) + \big[|u_0 - u_*(x(t), t)| - \gamma\beta\big]|v| \end{aligned} \tag{5.18}$$

для всех $v \in \partial_u\omega(x(t), u, t)$, удовлетворяющих неравенству (5.16). По предположению 5 по крайней мере один такой вектор v существует.

Обозначим $\Omega_0 = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid Q(x,t) < V_0(0)+1\big\}$ и $d = \sup\limits_{(x,t)\in\Omega_0} |u_0 - u_*(x,t)|$. Заметим, что $d < +\infty$ в силу того, что функция Q радиально неограничена, а функция $u_*(x,t)$ локально ограничена по x равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$. Положим $\overline{\gamma} = d/\beta$. Покажем, что для всех $\gamma > \overline{\gamma}$ и $t \in \mathbb{R}_+$ будет $(x(t),t) \in \Omega_0$.

Действительно, зафиксируем произвольное $\gamma > d/\beta$ и предположим, что существует $t_0 > 0$ такое, что $(x(t_0),t_0) \notin \Omega_0$ или, что эквивалентно, $V_0(t_0) = Q(x(t_0),t_0) \geqslant V_0(0)+1$. Положим $\tau = \inf\big\{t > 0 \mid V_0(t) \geqslant V_0(0)+1\big\}$. Заметим, что $\tau > 0$, поскольку функция V_0 очевидно непрерывна. Поэтому $(x(t),t) \in \Omega_0$ для всех $t \in [0,\tau)$. Отсюда, воспользовавшись неравенством (5.18), получим, что $D_+V_0(t) \leqslant -\rho(Q(x(t),t)) \leqslant 0$ для всех $t \in [0,\tau)$. Значит, функция V_0 не возрастает на $[0,\tau)$ и $V_0(\tau) \leqslant V_0(0)$, что противоречит определению τ.

Таким образом, для всех $\gamma > \overline{\gamma}$ и $t \in \mathbb{R}_+$ будет $(x(t),t) \in \Omega_0$. Поэтому в силу неравенства (5.18) для п.в. $t \in \mathbb{R}_+$ будет

$$D_+V_0(t) \leqslant -\rho(Q(x(t),t)) \leqslant 0 \quad \forall \gamma > \overline{\gamma}, \tag{5.19}$$

откуда, в частности, вытекает, что функция $V_0(t) = Q(x(t),t)$ не возрастает. Следовательно, решение $(x(\cdot),u(\cdot))$ ограничено в силу радиальной неограниченности функции Q и ограниченности функции $u = \kappa(x,u_0,t,\gamma)$ локально по x равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$.

Выберем произвольное $\Delta > 0$ и положим $T_\Delta = \{t \geqslant 0 \colon Q(x(t),t) \geqslant \Delta\}$. Поскольку функция $V_0(t) = Q(x(t),t)$ не возрастает, множество T_Δ связно, т. е. либо имеет вид $T_\Delta = [0,t_1]$ для некоторого $t_1 > 0$, либо $T_\Delta = \mathbb{R}_+$. Воспользовавшись неравенством (5.19) и определением T_Δ, получим, что $D_+V_0(t) \leqslant -\rho_\Delta$ для всех $t \in T_\Delta$, где $\rho_\Delta = \min\{\rho(s) \mid s \in [\Delta, V_0(0)]\} > 0$. Следовательно, $\sup T_\Delta \leqslant V_0(0)/\rho_\Delta < +\infty$ и $V_0(t) = Q(x(t),t) < \Delta$ для всех $t > \sup T_\Delta$, поскольку функция $V_0(t)$ не возрастает. Так как $\Delta > 0$ было выбрано произвольно, можно заключить, что цель управления (5.17) достигается. □

В случае, когда функция ω линейна по u, предыдущую теорему можно усилить. А именно, предположим, что функция ω имеет вид $\omega(x,u,t) = g(x,t)^T u$ для некоторой функции $g(x,t) \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m$. Заметим, что по определению $g(x,t) = \nabla_u \omega(x,u,t)$, где $\nabla_u\omega(x,u,t)$ — градиент функции $u \mapsto \omega(x,u,t)$.

Замечание 5.1.4. Следует отметить, что функция ω вида $\omega(x,u,t) = g(x,t)^T u$ существует, если правые части системы (5.1) линейны по u (т. е. $F(x,u,t) \equiv f(x,t)u$ для некоторой функции f), а целевая функция Q не зависит от t и является супердифференцируемой по Адамару в смысле Демьянова-Рубинова, то есть она дифференцируема по направлениям в смысле Адамара в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ и её производная по направлениям в этой точке представима в виде $Q'(x,h) = \min\limits_{v\in\overline{\partial}Q(x)} \langle v,h\rangle$, где $\overline{\partial}Q(x)$ — выпуклое компактное множество, называемое *супердифференциалом* функции Q в точке x. При сделанных предположениях можно положить $\omega(x,u,t) = v(x)^T f(x,t)u$ для произвольного сечения $v(\cdot)$ многозначного отображения $\overline{\partial}Q(\cdot)$ (см. неравенство (5.2) из определения функции ω).

В рассматриваемом случае негладкий алгоритм скоростного градиента в конечной форме принимает вид $u = -\Gamma g(x,t)$, где Γ — положительно определённая матрица, а негладкий алгоритм скоростного псевдоградиента принимает вид

$$u = \gamma\psi(x,u,t), \tag{5.20}$$

где $\gamma > 0$ — коэффициента усиления, а функция $\psi\colon\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет неравенству $g(x,t)^T\psi(x,u,t) \leqslant 0$ для всех $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$ и $t\in\mathbb{R}_+$. Заметим, что если в качестве целевой функции $Q(x,t)$ взять управляющую функцию Ляпунова $V(x)$ для системы (5.1), то негладкий алгоритм скоростного псевдоградиента (5.20) будет т. н. *обратной связью типа наискорейшего спуска* для V (см. [124]).

Приведём достаточные условия достижимости цели управления.

Теорема 5.1.3. *Пусть $C\subset\mathbb{R}^n$ — некоторое заданное множество и выполняются следующие предположения:*

1. *для всех $\gamma > 0$, $x\in\mathbb{R}^n$ и $t \geqslant 0$ существует решение $u = \kappa(x,t,\gamma)$ уравнения* (5.20) *такое, что функция κ локально ограничена по x равномерно по $t\in\mathbb{R}_+$;*

2. *локально абсолютно непрерывно решение системы* (5.1), (5.20) *существует для всех $t \geqslant 0$ и $x(0)\in\mathbb{R}^n\setminus C$, причём $x(t)\notin C$ для всех $t\in\mathbb{R}_+$;*

3. *функция $Q(x,t)$ дифференцируема по направлениям в смысле Адамара, локально липшицева и радиально неограничена;*

4. *для всех $\Delta > 0$ и $r > 0$ существуют $A > 0$ и $a > 0$ такие, что $a \leqslant |g(x,t)| \leqslant A$ для всех $x\in\mathbb{R}^n\setminus C$ и $t\in\mathbb{R}_+$, удовлетворяющих неравенствам $Q(x,t)\geqslant\Delta$ и $|x|\leqslant r$;*

5. *существует непрерывная функция $\rho\colon\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ такая, что $\rho(s) = 0$ тогда и только тогда, когда $s = 0$, и $g(x,t)^T\psi(x,u,t) \leqslant -\rho(|g(x,t)|)$ для всех $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$ и $t\in\mathbb{R}_+$.*

Тогда для всех $x(0)\in\mathbb{R}^n\setminus C$ и $\gamma > 0$ решение системы (5.1), (5.20) *ограничено на $\mathbb{R}_+$ и $\lim\limits_{t\to\infty} Q(x(t),t)) = 0$.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ — траектория системы (5.1), (5.20). Рассмотрим в качестве функции Ляпунова целевую функцию $Q(x,t)$ и положим $V_0(t) = Q(x(t),t)$. По теореме о дифференцируемости по направлениям сложной функции [37, теорема I.3.3]) для п.в. $t \in \mathbb{R}_+$ существует правосторонняя производная $D_+V_0(t)$ функции V_0 в точке t и

$$D_+V_0(t) = Q'(x(t),t; F(x(t),u,t),1) \leqslant \omega(x(t),u,t).$$

Подставляя выражения для функции ω и управления u и пользуясь предположением 5, получим

$$D_+V_0(t) \leqslant \gamma g(x,t)^T \psi(x,u,t) \leqslant -\gamma\rho(|g(x,t)|) \leqslant 0 \quad \text{для п.в. } t \geqslant 0. \tag{5.21}$$

Функция V_0 локально абсолютно непрерывна, как суперпозиция локально липшицевой функции Q и локально абсолютно непрерывной функции $t \mapsto (x(t),t)$. Поэтому из неравенства (5.21) вытекает, что функция $V_0(\cdot) = Q(x(\cdot),\cdot)$ не возрастает и поэтому ограничена. В силу радиальной неограниченности функции Q отсюда следует что траектория $x(\cdot)$ также ограничена, а поэтому ограничено управление $u = \kappa(x,t,\gamma)$, так как по нашему предположению функция $\kappa(x,t,\gamma)$ локально ограничена по x равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$.

Выберем произвольное $\Delta > 0$ и обозначим $T_\Delta = \{t \geqslant 0\colon Q(x(t),t) \geqslant \Delta\}$. Множество T_Δ связно, поскольку функция $V_0(\cdot) = Q(x(\cdot),\cdot)$ не возрастает. По предположению 4 существуют $A > a > 0$ такие, что $a \leqslant |g(x(t),t)| \leqslant A$ для всех $t \in T_\Delta$. Поэтому для п.в. $t \in T_\Delta$ будет $D_+V_0(t) \leqslant -\gamma\rho_\Delta$, где $\rho_\Delta = \min\limits_{s\in[a,A]} \rho(s) > 0$ (см. (5.21)). Следовательно, $\sup T_\Delta \leqslant V_0(0)/\gamma\rho_\Delta$ и $V_0(t) = Q(x(t),t) < \Delta$ для всех $t > \sup T_\Delta$. Так $\Delta > 0$ было выбрано произвольно, можно заключить, что $\lim\limits_{t\to\infty} Q(x(t),t)) = 0$. □

Замечание 5.1.5. Пусть выполняются все предположения предыдущей теоремы и функция $\psi(x,u,t)$ ограничена для все $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда цель управления $\lim\limits_{t\to\infty} Q(x(t),t)) = 0$ может быть достигнута с помощью сколь угодно малого (по норме) управляющего воздействия, так как выбирая достаточно малое $\gamma > 0$ можно добиться выполнения неравенства $|u| = \gamma|\psi(x,u,t)| < \varepsilon$ для любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$.

Следующая лемма позволяет немного ослабить предположения теоремы 5.1.3.

Лемма 5.1.1. *Пусть выполняются предположения 1–3 теоремы 5.1.3 и* $g(x,t)^T\psi(x,u,t) \leqslant 0$ *для всех* $u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ *и* $t \in \mathbb{R}_+$ *таких, что* $Q(x,t) > 0$. *Предположим также, что для решения* $x(t)$ *замкнутой системы* (5.1), (5.20) *с начальным условием* $x(0) \in \mathbb{R}^n \setminus C$ *существует* $T \geqslant 0$ *такое, что* $Q(x(T),T) = 0$. *Тогда* $Q(x(t),t) = 0$ *для всех* $t \geqslant T$.

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что существует $t_0 > T$ такое, что $Q(x(t_0),t_0) > 0$. Обозначим $\tau = \sup\big\{t \in [T,t_0]\colon Q(x(t),t) = 0\big\}$. Тогда $T \leqslant \tau < t_0$,

$Q(x(\tau),\tau)=0$ и для любого $t\in(\tau,t_0]$ будет $Q(x(t),t)>0$. Следовательно, для п.в. $t\in(\tau,t_0]$ выполняется неравенство

$$D_+V_0(t)=Q'(x(t),t;F(x(t),u,t),1)\leqslant\omega(x(t),u,t):=\gamma g(x,t)^T\psi(x,u,t)\leqslant 0,$$

где $V_0(t)=Q(x(t),t)$. Значит, функция V_0 не возрастает на $[\tau,t_0]$, т. е. $Q(x(t_0),t_0)\leqslant Q(x(\tau),\tau)=0$, что противоречит определению t_0. □

Замечание 5.1.6. Из предыдущей леммы следует, что теорема 5.1.3 остаётся справедливой, если неравенство

$$Q'(x,t;F(x,u,t),1)\leqslant\omega(x,u,t)\quad\forall u\in\mathbb{R}^m$$

из определения функции ω (см (5.2)) выполняется только для таких $x\in\mathbb{R}^n$ и $t\in\mathbb{R}_+$, что $Q(x,t)>0$. Действительно, если $Q(x(t),t)>0$ для всех $t\in\mathbb{R}_+$, то, рассуждая в точности как и при доказательстве теоремы 5.1.3, получаем, что $\lim\limits_{t\to+\infty}Q(x(t),t)=0$. Если же $Q(x(T),T)=0$ для некоторого $T\geqslant 0$, то рассуждая как и при доказательстве предыдущей леммы получаем, что $Q(x(t),t)=0$ для всех $t\geqslant T$.

5.1.2 Стабилизация интегратора Брокетта

Применим негладкий алгоритм скоростного градиента в конечной форме к задаче стабилизации интегратора Брокетта

$$\dot x_1=u_1,\quad \dot x_2=u_2,\quad \dot x_3=x_1u_2-x_2u_1. \tag{5.22}$$

Как хорошо известно (см. [113]), для интегратора Брокетта не существует непрерывного закона обратной связи $u=u(x)$, делающего начало координат асимптотически устойчивым положением равновесия. Поэтому задача стабилизации для интегратора Брокетта не может быть решена с помощью классического алгоритма скоростного градиента, вследствие чего возникает необходимость использовать негладкие алгоритмы скоростного градиента.

Рассмотрим задачу построения обратной связи $u=u(x)$, делающей нулевой решение системы (5.22) глобально асимптотически устойчивым. Мы будем также налагать дополнительное ограничение на управление: $u_1^2(x)+u_2^2(x)\leqslant\varepsilon$ для всех $x\in\mathbb{R}^3$, где $\varepsilon>0$ — произвольное заданное число. Для решения этой задачи введём следующую целевую функцию:

$$Q(x)=\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-|x_3|\right)^2+x_3^2=x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2|x_3|\sqrt{x_1^2+x_2^2}.$$

Данная функция рассматривалась в работе Кларка [124], где было показать, что эта функция является управляющей функцией Ляпунова для интегратора Брокетта. Заметим, что функция Q радиально неограничена и $Q(x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся алгоритмом (5.20). Обозначим $\sigma(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Функция Q очевидно является локально липшицевой и дифференцируемой по направлениям в смысле Адамара. Её производная по направлениям имеет вид

$$Q'(x;h) = 2x_1h_1 + 2x_2h_2 + 4x_3h_3 - 2|x_3|\frac{(x_1h_1 + x_2h_2)}{\sigma(x)} - 2\operatorname{sign}(x_3)\sigma(x)h_3,$$

если $x_3 \neq 0$ и $\sigma(x) \neq 0$, и

$$Q'(x,h) = \begin{cases} 2x_1h_1 + 2x_2h_2 - 2|h_3|\sigma(x), & \text{если } x_3 = 0, \ \ \sigma(x) \neq 0, \\ 4x_3h_3 - 2|x_3|\sqrt{h_1^2 + h_2^2}, & \text{если } \sigma(x) = 0, \ \ x_3 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Предположим, что $x_3 \neq 0$ и $\sigma(x) \neq 0$. Тогда функция $Q'(x;\cdot)$ дифференцируема в точке x и можно положить

$$\omega(x,u) = \nabla Q(x)^T F(x,u) = 2x_1u_1 + 2x_2u_2 + 4x_3(x_1u_2 - x_2u_1) - \\ - 2|x_3|(x_1u_1 + x_2u_2)/\sigma(x) - 2\operatorname{sign}(x_3)\sigma(x)(x_1u_2 - x_2u_1),$$

где $F(x,u)$ — правые части системы (5.22).

Пусть теперь $x_3 = 0$. Тогда функция Q супердифференцируема по Адамару в точке x и её супердифференциал Адамара в этой точке имеет вид

$$\overline{\partial}Q(x) = \operatorname{co}\Big\{(2x_1, 2x_2, 2\sigma(x))^T, (2x_1, 2x_2, -2\sigma(x))^T\Big\}.$$

Заметим, что $(2x_1, 2x_2, 0) \in \overline{\partial}Q(x)$ и поэтому можно положить

$$\omega(x,u) = (2x_1, 2x_2, 0)^T F(x,u) = 2x_1u_1 + 2x_2u_2 \geqslant Q'(x; F(x,u)). \tag{5.23}$$

Предположим, наконец, что $\sigma(x) = 0$. Тогда функция Q также супердифференцируема по Адамару в точке x и

$$\overline{\partial}Q(x) = \Big\{(-2|x_3|v_1, -2|x_3|v_2, 4x_3)^T \colon v_1^2 + v_2^2 \leqslant 1\Big\}.$$

Поэтому зафиксируем произвольное $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ такое, что $|v| = 1$, и положим

$$\omega(x,u) = (-2|x_3|v_1, -2|x_3|v_2, 4x_3)^T F(x,u) = -2|x_3|(v_1u_1 + v_2u_2) \geqslant Q'(x; F(x,u)) \tag{5.24}$$

(напомним, что $\sigma(x) = 0$, т. е. $x_1 = x_2 = 0$). Заметим, что вектор v можно выбирать зависящим от координаты x_3, т. е. можно выбрать некоторую функцию $v = v(x_3)$.

Определим закон управления следующим образом: $u(0) = 0$ и

$$u(x) = \gamma\psi(x), \quad \psi(x) = -\frac{1}{|\nabla_u \omega(x,u)|}\nabla_u \omega(x,u) \quad \forall x \neq 0. \tag{5.25}$$

Имеем

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ -\gamma \dfrac{1}{\sigma(x)}(x_1, x_2)^T, & \text{если } x_3 = 0, \sigma(x) \neq 0, \\ \gamma v(x_3), & \text{если } \sigma(x) = 0, x_3 \neq 0, \\ -\gamma \dfrac{1}{|\nabla_u \omega(x,u)|} \nabla_u \omega(x,u), & \text{если } \sigma(x) \neq 0, x_3 \neq 0, \end{cases} \tag{5.26}$$

где $\nabla_u \omega(x,u) = (\omega'_{u_1}, \omega'_{u_2})^T$ и

$$\frac{\partial \omega}{\partial u_1}(x,u) = 2x_1 - 4x_2x_3 - 2\frac{|x_3|x_1}{\sigma(x)} + 2\operatorname{sign}(x_3)x_2\sigma(x), \tag{5.27}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial u_2}(x,u) = 2x_2 + 4x_1x_3 - 2\frac{|x_3|x_2}{\sigma(x)} - 2\operatorname{sign}(x_3)x_1\sigma(x). \tag{5.28}$$

в случае $\sigma(x) \neq 0$ и $x_3 \neq 0$.

Покажем, что $|\nabla_u \omega(x,u)| \neq 0$ для всех x таких, что $\sigma(x) \neq 0$ и $x_3 \neq 0$. Действительно, домножая правую часть равенства (5.27) на $\sigma(x)$, получим, что

$$\sigma(x)\frac{\partial \omega}{\partial u_1}(x,u) = 2\operatorname{sign}(x_3)x_2\sigma^2(x) + (2x_1 - 4x_2x_3)\sigma(x) - 2|x_3|x_1 \neq 0,$$

в силу того, что дискриминант квадратного уравнения

$$\ell(s) = 2\operatorname{sign}(x_3)x_2s^2 + (2x_1 - 4x_2x_3)s - 2|x_3|x_1 = 0$$

имеет вид $D = 4x_1^2 + 16x_2^2x_3^2 > 0$ и поэтому $l(s) > 0$ для всех $s \in \mathbb{R}$. Аналогичным образом доказывается, что $\omega'_{u_2} \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$ таких, что $x_2 \neq 0$ и $x_3 \neq 0$. Значит, для всех таких x будет $|\nabla_u \omega(x,u)| \neq 0$, т. е. закон управления (5.26) корректно определён.

Замечание 5.1.7. Как было указано выше, не существует непрерывной обратной связи, делающей нулевое решение асимптотически устойчивым положением равновесия системы (5.22). В работе [365] этот результат был распространён на широкий класс разрывных (многозначных) законов управления в виде обратной связи. Заметим, что отображение (5.26) не является полунепрерывным сверху многозначным отображением и поэтому оно не входит в общий класс разрывных управлений, указанных в работе [365].

Нетрудно видеть, что для закона управления (5.26) выполняется неравенство

$$Q'(x; F(x,u(x))) \leqslant \omega(x,u(x)) = -\gamma|\nabla_u \omega(x,u(x))| \leqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \tag{5.29}$$

откуда следует, что нулевой решение замкнутой системы (5.22), (5.26) является устойчивым по Ляпунову. Поэтому остаётся доказать, что $|x(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$ или, что эквивалентно, $Q(x(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$. Для этого мы воспользуемся теоремой 5.1.3. А именно, проверим, что условия этой теоремы выполняются для множества $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \sigma(x) = 0, x_3 \neq 0\}$, т. е. что для любых начальных условий не лежащих на оси x_3 будет $|x(t)| \to 0$. Тогда можно заключить, что закон управления (5.26) решает поставленную задачу для п.в. начальных данных. Более того, заметим, что для $\gamma = \sqrt{\varepsilon}$ будет $|u(x)|^2 = \gamma^2 = \varepsilon$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$ (см. (5.25)), т. е. предложенный закон управления удовлетворяет ограничению $u_1(x)^2 + u_2(x)^2 \leqslant \varepsilon$.

Перейдём к проверке условий теоремы 5.1.3. Предположения 1 и 3 этой теоремы выполняются очевидным образом. Кроме того, так как $\psi(x) = -|\nabla_u \omega(x,u)|^{-1} \nabla_u \omega(x,u)$, то предположение 5 этой теоремы выполняется для $\rho(s) \equiv s$.

Предложение 5.1.1. *В рассматриваемом примере справедливо предположение 4 теоремы 5.1.3.*

Доказательство. Введём многозначное отображение $G \colon \mathbb{R}^3 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ следующим образом. Положим $G(x) = \nabla_u \omega(x,u)$, если $\sigma(x) \neq 0$ и $x_3 \neq 0$,

$$G(x) = \Big\{ (2x_1, 2x_2)^T, (2x_1 + 2x_2\sigma(x), 2x_2 - 2x_1\sigma(x))^T, (2x_1 - 2x_2\sigma(x), 2x_2 + 2x_1\sigma(x))^T \Big\},$$

если $x_3 = 0$, и $G(x) = \{-2|x_3|w \colon |w| = 1\}$, если $\sigma(x) = 0$. По определению (см. (5.23) и (5.24)) для всех $x \in \mathbb{R}^3$ выполняется включение $\nabla_u \omega(x,u) \in G(x)$. Кроме того, $0 \in G(x)$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Также непосредственно проверяется, что многозначное отображение $G(x)$ полунепрерывно сверху на $\mathbb{R}^3$, т. е. для любого $x \in \mathbb{R}^3$ и для любого открытого множества V такого, что $G(x) \subset V$, существует $\delta > 0$ такое, что $G(y) \subset V$ для всех $y \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих неравенству $|y - x| < \delta$. Поэтому, в частности, отображение G ограничено на ограниченных множествах и для любого $r > 0$ существует $A > 0$ такое, что $|\nabla_u \omega(x,u)| \leqslant A$ для всех $x \in B(0,r)$.

Рассуждая от противного, допустим, что предположение 4 теоремы 5.1.3 не выполняется. Тогда существуют $\Delta > 0$, $r > 0$ и последовательность $\{x_n\}$ такие, что

$$Q(x_n) \geqslant \Delta, \quad |x_n| \leqslant r, \quad |\nabla_u \omega(x_n,u)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке $x_* \in \mathbb{R}^3$. Заметим, что $Q(x_*) \geqslant \Delta$ и $x_* \neq 0$, поскольку функция Q непрерывна и $Q(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Поэтому $0 \notin G(x_*)$ и в силу полунепрерывности сверху многозначного отображения G существуют $a > 0$ и $\delta > 0$ такие, что $\inf\limits_{y \in G(x)} |y| > a$ для всех $x \in B(x_*, \delta)$. Следовательно, для всех достаточно больших k будет $\inf\limits_{y \in G(x_{n_k})} |y| > a$, что противоречит соотношению $\lim\limits_{n \to \infty} |\nabla_u \omega(x_n,u)| = 0$, т.к. $\nabla_u \omega(x_n,u) \in G(x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Таким образом, остаётся проверить справедливость предположения 2 теоремы 5.1.3, т. е. проверить, что для любого $x(0) \in \mathbb{R}^n \backslash C$ решение замкнутой системы (5.22), (5.26) определено на $\mathbb{R}_+$ и $x(t) \notin C$ для всех $t \geqslant 0$. Мы докажем более сильное утверждение, из которого, в частности, следует, что для любого $x(0) \notin C$ закон обратной связи $u(x)$, определённый согласно (5.26), непрерывен вдоль траекторий $x(t)$ замкнутой системы для всех $t \geqslant 0$ таких, что $x(t) \neq 0$.

Предложение 5.1.2. *Предположим, что $\sigma(x(0)) \neq 0$. Тогда решение $x(t)$ замкнутой системы (5.22), (5.26) определено на $\mathbb{R}_+$ и $x(t) \notin C$ для всех $t \geqslant 0$. Более того, либо функция $u(x(\cdot))$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$ и $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, либо существует $t_0 < +\infty$ такое, что $x(t) \to 0$ при $t \to t_0$ и функция $u(x(\cdot))$ непрерывна на множестве $\mathbb{R}_+ \setminus \{t_0\}$.*

Доказательство. При $x_3 = 0$ уравнение замкнутой системы принимает вид

$$\dot{x}_1 = -\gamma x_1/\sigma(x), \quad \dot{x}_2 = -\gamma x_2/\sigma(x), \quad \dot{x}_3 = 0.$$

Отсюда очевидно следует, что если $x_3(0) = 0$, то решение $x(t)$ замкнутой системы определено на $\mathbb{R}_+$, $x_3(t) \equiv 0$, $x(t) \to 0$ при $t \to \sigma(x(0))/\gamma$ и функция $u(x(\cdot))$ непрерывна на $\mathbb{R}_+ \setminus \{\sigma(x(0))/\gamma\}$.

Предположим теперь, что $x_3(0) \neq 0$. Уравнение замкнутой системы в этом случае имеет вид

$$\dot{x}_1 = -\gamma \frac{1}{|\nabla_u \omega(x,u)|} \frac{\partial \omega}{\partial u_1}(x,u), \quad \dot{x}_2 = -\gamma \frac{1}{|\nabla_u \omega(x,u)|} \frac{\partial \omega}{\partial u_2}(x,u), \tag{5.30}$$

$$\dot{x}_3 = -\gamma \frac{1}{|\nabla_u \omega(x,u)|} \left(x_1 \frac{\partial \omega}{\partial u_2}(x,u) - x_2 \frac{\partial \omega}{\partial u_1}(x,u) \right), \tag{5.31}$$

где функция $\nabla_u \omega(x,u)$ определена согласно (5.27) и (5.28). Поскольку правые части этой системы локально липшицевы на открытом множестве $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \neq 0, \sigma(x) \neq 0\}$, решение $x(t)$ этой системы существует по крайней мере на некотором конечном полуинтервале. Обозначим через $[0, t_0)$ максимальный интервал существования этого решения. Так как целевая функция Q радиально неограничена и по определению (см. (5.29)) будет

$$\frac{d}{dt} Q(x(t), t) \leqslant -\gamma |\nabla_u \omega(x,u)| < 0 \quad \forall t \in [0, t_0),$$

то функция $x(\cdot)$ ограничена $[0, t_0)$. Поэтому, либо $t_0 = +\infty$ и $x(t)$ — непрерывно дифференцируемое решение замкнутой системы, определённое на $\mathbb{R}_+$ (в этом случае функция $u(x(\cdot))$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$), либо одна из функций $x_3(\cdot)$ или $\sigma(x(\cdot))$ стремится к нулю при $t \to t_0$.

Покажем, что $x_3(t) \to 0$ при $t \to t_0$ тогда и только тогда, когда $\sigma(x(t)) \to 0$ при $t \to t_0$. Иными словами, t_0 конечно тогда и только тогда, когда $x(t) \to 0$ при $t \to t_0$. В этом случае, функция $\widehat{x}(t) = x(t)$ при $t \in [0, t_0)$ и $\widehat{x}(t) = 0$ при $[t_0, +\infty)$ будет абсолютно непрерывным решением замкнутой системы, а функция $u(x(t))$ будет непрерывна на множестве $\mathbb{R}_+ \setminus \{t_0\}$.

Предположим, что $x_3(0) > 0$ и $x_3(t) \to 0$ при $t \to t_0$. Случаи, когда $x_3(0) < 0$ или $\sigma(x(t)) \to 0$ при $t \to t_0$ рассматриваются совершенно аналогичным образом.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Из нашего предположения следует, что $x_3(t) > 0$ для всех $t \in [0, t_0)$ и существует $\delta > 0$ такое, что $0 < x_3(t) < \varepsilon/2$ для всех $t \in [t_0 - \delta, t_0)$. Заметим, что для решения $x(t)$ системы (5.30), (5.31) (см. (5.27) и (5.28)) выполняются следующие соотношения:

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{2\gamma\sigma^2(x(t))}{|\nabla_u \omega(x(t), u)|}(2x_3(t) - \sigma(x(t))), \quad \frac{d}{dt}\sigma(x(t)) = -\frac{2\gamma}{|\nabla_u \omega(x(t), u)|}(\sigma(x(t)) - x_3(t)). \tag{5.32}$$

Поэтому существует $s \in [t_0 - \delta, t_0)$ такое, что $\sigma(s) < \varepsilon$, так как в противном случае из (5.32) следует, что $\dot{x}_3(t) > 0$ для всех $t \in [t_0 - \delta, t_0)$, т. е. функция $x_3(\cdot)$ строго возрастает на полуинтервале $[t_0 - \delta, t_0)$, что противоречит соотношению $\lim\limits_{t \to t_0} x_3(t) = 0$.

Проверим, что $\sigma(x(t)) < \varepsilon$ для всех $t \in [s, t_0)$. Рассуждая от противного, предположим, что существует $\overline{t} \in (s, t_0)$ такое, что $\sigma(x(\overline{t})) \geqslant \varepsilon$. Обозначим $\tau = \inf\big\{t \in (s, t_0] \colon \sigma(x(t)) = \varepsilon\big\}$. По определению $\tau > s$, $\sigma(x(\tau)) = \varepsilon$ и для всех $t \in [s, \tau)$ будет $\sigma(x(t)) < \varepsilon$. Отсюда, в силу непрерывности функции $\sigma(x(t))$, следует, что существует $\xi \in [s, \tau)$ такое, что $\frac{\varepsilon}{2} < \sigma(x(t)) < \varepsilon$ для всех $t \in (\xi, \tau)$. Поэтому согласно (5.32) для всех $t \in (\xi, \tau)$ выполняется неравенство $\dot{\sigma}(x(t)) < 0$. Значит, функция $\sigma(x(t))$ строго убывает на интервала (ξ, τ) и $\sigma(x(\tau)) < \varepsilon$, что противоречит определению τ. Таким образом $\sigma(x(t)) < \varepsilon$ для всех $t \in [s, t_0)$. Так как $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, отсюда вытекает, что $\sigma(x(t)) \to 0$ при $t \to t_0$. $\square$

Таким образом, справедливы все предположения теоремы 5.1.3 и согласно этой теореме можно заключить, что закон управления (5.26) решает поставленную задачу, при условии, что $x(0)$ не лежит на оси x_3. Более того, закон управление $u(\cdot)$, определённый согласно (5.26), *непрерывен* вдоль траекторий замкнутой системы, за исключением, быть может, момента времени t_0, в который траектория попадает в начало координат. Заметим, что данный результат не противоречит теореме Брокетта, поскольку сама функция $x \mapsto u(x)$ не является непрерывной. Непрерывна лишь композиция $t \mapsto u(x(t))$.

Замечание 5.1.8. В случае, когда начальные условия лежит на оси x_3, согласно (5.26) необходимо положить $u(x(0)) = \gamma v$ для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^2$ такого, что $|v| = 1$. Уравнение замкнутой системы в этой точке принимает вид

$$\dot{x}_1 = \gamma v_1, \quad \dot{x}_2 = \gamma v_2, \quad \dot{x}_3 = 0.$$

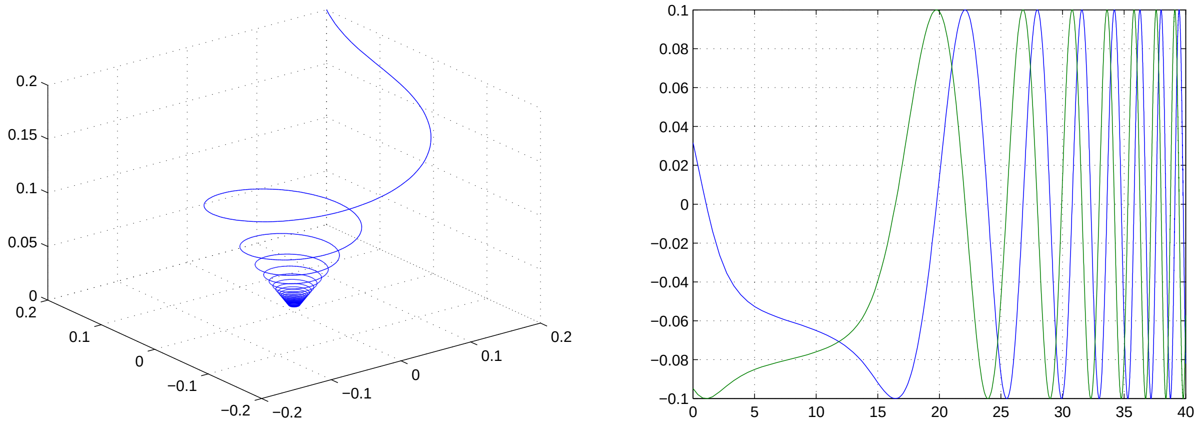


Рис. 5.1: Траектория замкнутой системы (5.22), (5.26) (график слева) и графики функций $u_1(x(t))$ и $u_2(x(t))$ (график справа)

Грубо говоря, управление «сталкивает» траекторию с оси x_3, после чего происходит переключение алгоритма. Однако, в данном случае существование абсолютно непрерывного решения замкнутой системы (5.22), (5.26) требует нетривиального обоснования. Вместо этого, можно переопределить закон управления (5.26) при $\sigma(x) = 0$, $x_3 \neq 0$ следующим образом: $u(x) = \{\gamma v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| = 1\}$ (управление становится многозначным). Тогда, воспользовавшись стандартными теоремами существования решений дифференциальных включений (см., например, [72, 86]), можно показать, что для всех $x(0) \in \mathbb{R}^3$ абсолютно непрерывно решение замкнутой системы существует и для него также выполняется соотношение $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

На рисунке 5.1 представлены результаты численного моделирования замкнутой системы (5.22), (5.26) при $\gamma = 0,1$ и $x(0) = (0,2; 0,2; 0,2)^T$, демонстрирующие сходимость траектории к началу координат, ограниченность управления (по модулю) параметром γ и его непрерывность вдоль траекторий замкнутой системы.

5.1.3 Конечно-дифференциальные алгоритмы скоростного градиента

В этом разделе мы исследуем версию негладкого алгоритма скоростного градиента, представляющую из себя комбинацию алгоритмов в конечной и дифференциальной формах и предложенную в гладком случае в работе проф. А.Л. Фрадкова [74] (см. также [9]).

Пусть, как и ранее, объект управления задан уравнением

$$\dot{x} = F(x, u, t), \quad t \geqslant 0, \tag{5.33}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния объекта, а $u \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления. Как и ранее, мы предполагаем, что задана некоторая неотрицательная целевая функция $Q\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $Q = Q(x,t)$ и рассматриваем следующую задачу: определить алгоритм управления $u(\cdot)$ так, чтобы в замкнутой системе достигалась цель управления $\lim\limits_{t\to\infty} Q(x(t),t)) = 0$. Предположим также, что функция Q дифференцируема по направлениям в смысле Адамара и локально липшицева и задана некоторая выпуклая по u функция $\omega\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\omega = \omega(x,u,t)$ такая, что

$$Q'\big(x,t; F(x,u,t),1\big) \leqslant \omega(x,u,t) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \geqslant 0.$$

Следуя определению конечно-дифференциального алгоритма скоростного градиента в гладком случае [9, 74], определим

$$\frac{d(u + \gamma\psi(x,u,t))}{dt} \in -\Gamma\partial_u\omega(x,u,t), \quad t \geqslant 0, \tag{5.34}$$

где $\psi(x,u,t)$ — локально липшицевая функция, удовлетворяющая *условию псевдоградиентности*: для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $t \geqslant 0$ и $v \in \partial_u\omega(x,u,t)$ выполняется неравенство $\langle v, \psi(x,u,t)\rangle \geqslant 0$. Закон управления (5.34) является комбинацией негладких алгоритмов скоростного градиента в конечной и дифференциальной формах и поэтому называется *конечно-дифференциальным негладким алгоритмом скоростного градиента.*

Изучим работоспособность замкнутой системы (5.33), (5.34). Для этого сначала получим простые достаточные условия существования и продолжимости локально абсолютно непрерывных решений этой системы. Теорема существования решений для системы (5.33), (5.34) может быть доказана при различных предположениях на функции $F(x,u,t)$ и $\psi(x,u,t)$ и многозначное отображение $\partial_u\omega(x,u,t)$. Здесь мы приведём лишь простейшую теорему такого типа, которая может быть применена в случае, когда система (5.33) аффинна по управлению, а функция $Q(x,t)$ непрерывно дифференцируема.

Теорема 5.1.4. *Предположим, что функция $\psi(x,u,t)$ не зависит от u и пусть*

$$F(x,u,t) = f(x,t) + g(x,t)u, \quad \omega(x,u,t) = \eta(x,t)^T u + \theta(x,t)$$

для некоторых функций $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, $g\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $\eta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ и $\theta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Пусть также выполняются следующие предположения:

1. *функции $t \mapsto f(x,t)$, $t \mapsto g(x,t)$ и $t \mapsto \eta(x,t)$ измеримы для всех $x \in \mathbb{R}^n$;*

2. *для всех $r > 0$ существует неотрицательная п.в. функция $m_r \in L^1_{loc}[0,+\infty)$ такая, что $|f(x,t)| \leqslant m_r(t)$, $|g(x,t)| \leqslant m_r(t)$ и $|\eta(x,t)| \leqslant m_r(t)$ для п.в. $t \in \mathbb{R}_+$ и для всех $x \in B(0,r)$;*

3. *для всех $r > 0$ существует неотрицательная п.в. функция $L_r \in L^1_{loc}[0, +\infty)$ такая, что для п.в. $t \in \mathbb{R}_+$ и для всех $x_1, x_2 \in B(0, r)$ выполняются следующие неравенства:*

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| \leqslant L_r(t)|x_1 - x_2|, \quad |g(x_1, t) - g(x_2, t)| \leqslant L_r(t)|x_1 - x_2|,$$
$$|\eta(x_1, t) - \eta(x_2, t)| \leqslant L_r(t)|x_1 - x_2|;$$

4. *функция $\psi(x, t)$ локально липшицева.*

Тогда для любых начальных условий $(x(0), u(0))$ существует единственное локально абсолютно непрерывно решение $(x(t), u(t))$ системы (5.33), (5.34)*, определённое на свой максимальном интервале существования $[0, T_{\max})$ и $T_{\max} = +\infty$, если решение ограничено.*

Доказательство. Формально интегрируя равенство (5.34) от 0 до t, имеем

$$u(t) = u(0) + \gamma\psi(x(0), 0) - \gamma\psi(x(t), t) - \Gamma \int_0^t \eta(x(\tau), \tau)\, d\tau. \tag{5.35}$$

Подставляя это выражение в (5.33), получим

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + g(x(t), t)\Big(u(0) + \gamma\psi(x(0), 0) - \gamma\psi(x(t), t) - \Gamma \int_0^t \eta(x(\tau), \tau)\, d\tau\Big). \tag{5.36}$$

Если для любого $x(0)$ существует единственное абсолютно-непрерывное решение $x(t)$ уравнение (5.36) определённое на своём максимальном интервале существования $[0, T_{\max})$ и $T_{\max} = +\infty$ в случае, когда решение ограничено, то, определяя $u(t)$ согласно равенству (5.35) и учитывая, что функция $\psi(x, t)$ локально липшицева, мы получаем требуемый результат.

Уравнение (5.36) является интегро-дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t), t) + g_0(x(t), t) \int_0^t \eta(x(\tau), \tau) d\tau, \tag{5.37}$$

в котором функции f_0 и g_0 удовлетворяют точно таким же предположениям, как функции f и g соответственно. Поэтому достаточно доказать существование и продолжимость решений уравнения (5.37).

Введём новую переменную y и рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f_0(x, t) + g_0(x, t)y, \quad \dot{y} = \eta(x, t) \tag{5.38}$$

Ясно, что пара $(x(t), y(t))$, удовлетворяющая условию $y(0) = 0$, является решением данной системы тогда и только тогда, когда $x(t)$ является решением уравнения (5.37) и справедливо равенство $y(t) = \int_0^t \eta(x(\tau), \tau) d\tau$. Поэтому, применяя стандартную теорему существования и продолжимости решений к системе (5.38), мы получаем требуемый результат. $\square$

Следующая теорема содержит достаточные условия достижимости цели управления $\lim_{t\to+\infty} Q(x(t),t) = 0$. Заметим, что условия этой теоремы схожи с условиями теоремы 5.1.1 о достижимости цели управления в случае негладкого алгоритма скоростного градиента в дифференциальной форме.

Теорема 5.1.5. *Пусть справедливы следующие предположения:*

1. *для любых начальных условий* $(x(0), u(0))$ *локально абсолютно непрерывное решение* $(x(t), u(t))$ *системы* (5.33), (5.34) *определено по крайней мере на конечном полуинтервале; более того, все локально абсолютно непрерывные решения этой системы с начальным условием* $(x(0), u(0))$ *определены на своих максимальных интервалах существования* $[0, T_{\max})$ *и* $T_{\max} = +\infty$, *если соответствующее решение ограничено;*

2. *для всех* $r > 0$ *существует* $m_r > 0$ *такое, что* $|F(x,u,t)| \leqslant m_r$ *для всех* $x \in B(0,r)$, $u \in B(0,r)$ *и п.в.* $t \geqslant 0$*;*

3. *функция* $\psi(x,u,t)$ *локально липшицева, удовлетворяет условию псевдоградиентности и ограничена на множествах вида* $\{(x,u,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \mid |x| \leqslant r\}$*;*

4. *функция* $Q(x,t)$ *дифференцируема по направлениям, локально липшицева, радиально неограничена и равномерно непрерывна на множествах вида* $\{(x,t)\colon |x| \leqslant r, t \geqslant 0\}$*;*

5. *существуют вектор* $u_* \in \mathbb{R}^m$ *и непрерывная функция* $\rho\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такие, что* $\rho(s) = 0$ *тогда и только тогда* $s = 0$, *и неравенство* $\omega(x, u_*, t) \leqslant -\rho\big(Q(x,t)\big)$ *выполняется для всех* $t \geqslant 0$ *и* $x \in \mathbb{R}^n$.

Тогда для любых начальных условий $(x(0), u(0))$, *для всех* $\gamma > 0$ *и для любой положительно определённой матрицы* Γ *все решения системы* (5.33), (5.34) *определены и ограничены на* $\mathbb{R}_+$ *и*

$$\lim_{t\to+\infty} Q(x(t),t) = 0. \tag{5.39}$$

Доказательство. Пусть $(x(t), u(t))$ — решение системы (5.33), (5.34) с начальным условием $(x(0), u(0))$, определённое на своём максимальном интервале существования $[0, T_{\max})$. Введём функцию Ляпунова

$$V(t) = Q(x(t),t) + \frac{1}{2}\big(u(t) - u_* + \gamma\psi(x(t),u(t),t)\big)^T \Gamma^{-1}\big(u(t) - u_* + \gamma\psi(x(t),u(t),t)\big). \tag{5.40}$$

Функция V неотрицательна, поскольку целевая функция $Q(x,t)$ неотрицательна, а матрица Γ положительно определена.

Воспользовавшись теоремой о производной по направлениям сложной функции [37, теорема I.3.3] и определением $\omega(x,u,t)$, получим, что для п.в. $t \in [0, T_{\max})$ существует правосторонняя производная $D_+V(t)$ функции V в точке t и

$$D_+V(t) \leqslant \omega(x(t),u(t),t) + \big(u(t) - u_* + \gamma\psi(x(t),u(t),t)\big)^T \Gamma^{-1} \frac{d}{dt}\big(u(t) + \gamma\psi(x(t),u(t),t)\big).$$

Обозначим $w(t) = d(u(t) + \gamma\psi(x(t),u(t),t))/dt$. По определению (см. (5.34)) для п.в. $t \in [0, T_{\max})$ найдётся вектор $v(t) \in \partial_u \omega(x(t),u(t),t)$ такой, что $w(t) = -\Gamma v(t)$. Поэтому, пользуясь условием псевдоградиентности ($\langle v, \psi(x,u,t)\rangle \geqslant 0$ для всех $v \in \partial_u\omega(x,u,t)$), получаем, что

$$D_+V(t) \leqslant \omega(x(t),u(t),t) - \big(u(t) - u_*\big)^T v(t).$$

Отсюда с помощью определения субдифференциала и предположения 5 имеем

$$D_+V(t) \leqslant \omega(x(t),u_*,t) \leqslant -\rho\big(Q(x(t),t)\big) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T_{\max}). \tag{5.41}$$

Функция V локально абсолютно непрерывна, так как по предположению теоремы функции Q и ψ локально липшицевы, а функции $x(t)$ и $u(t)$ локально абсолютно непрерывны (см. (5.40)). Поэтому из неравенства (5.41) вытекает, что функция V не возрастает и

$$V(t) - V(0) \leqslant -\int_0^t \rho\big(Q(x(t),t)\big)\,dt \leqslant 0 \quad \forall t \in [0, T_{\max}). \tag{5.42}$$

Следовательно, функция V ограничена, а поэтому ограничена и функция $Q(x(\cdot),\cdot)$ (см. (5.40)). Воспользовавшись радиальной неограниченностью функции Q, получаем, что траектория $x(\cdot)$ ограничена и функция $\psi(x(\cdot),u(\cdot),\cdot)$ также ограничена по предположению 3. Поэтому из ограниченности функций $Q(x(\cdot),\cdot)$ и $V(\cdot)$ и положительной определённости матрицы Γ следует, что управление $u(\cdot)$ также ограничено (см. (5.40)). Таким образом, траектория $(x(\cdot),u(\cdot))$ ограничена на $[0,T_{\max})$. По предположению 1 это означает, что решение $(x(\cdot),u(\cdot))$ определено и ограничено на $\mathbb{R}_+$.

Докажем теперь, что цель управления (5.39) достигается. Так как функция V неотрицательна, из неравенства (5.42) следует, что $\int_0^{+\infty} \rho(Q(x(t),t))\,dt < +\infty$. Поскольку траектория $(x(\cdot),u(\cdot))$ ограничена, $\dot{x} \in \mathrm{L}^\infty[0,+\infty)$ в силу предположения 2, откуда следует, что функция $x(\cdot)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Учитывая, что функция ρ непрерывна, а функция Q равномерно непрерывна на множествах вида $\{(x,t) \colon |x| \leqslant r, t \geqslant 0\}$, отсюда вытекает, что функция $t \mapsto \rho(Q(x(t),t))$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Следовательно, по лемме Барбалата (см., например, [75, лемма 8.2]) будет $\rho(Q(x(t),t)) \to 0$ при $t \to +\infty$. Воспользовавшись тем, что функция ρ непрерывна, $\rho(s) = 0$ тогда и только тогда, когда $s = 0$, и функция $Q(x(\cdot),\cdot)$ ограничена, нетрудно проверить, что из соотношения $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(Q(x(t),t)) = 0$ вытекает, что $Q(x(t),t) \to 0$ при $t \to +\infty$, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 5.1.9. Ясно, что самым ограничительным предположением предыдущей теоремы является предположение 5. Заметим, что его можно несколько ослабить следующим образом. А именно, предположим, что существуют $u_* \in \mathbb{R}^m$ и непрерывная функция $\rho\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ такие, что $\omega(x, u_*, t) \leqslant -\rho(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \geqslant 0$. Тогда рассуждая как и при доказательстве предыдущей теоремы можно проверить, что для любых начальных условий $(x(0), u(0))$, для всех $\gamma > 0$ и для любой положительно определённой матрицы Γ все решения системы (5.33), (5.34) определены и ограничены на $\mathbb{R}_+$ и $\rho(x(t)) \to 0$ при $t \to +\infty$. В некоторых частных случаях, пользуясь особенностями конкретной задачи и соотношением $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(x(t)) = 0$, можно доказать, что цель управления (5.39) достигается.

Замечание 5.1.10. При некоторых дополнительных предположениях можно распространить теорему 5.1.5 на случай, когда функция $\psi(x, u, t)$ является многозначной. Например, предположим, что функция Q непрерывно дифференцируема, функция $\psi(x, u, t)$ является многозначной и не зависит от u, а функция $F(x, u, t)$ аффинна по управлению, то есть имеет вид $F(x, u, t) = f(x, t) + g(x, t)u$. В этом случае $\nabla_u \omega(x, u, t) = g(x, t)^T \nabla_x Q(x, t)$. Формально интегрируя соотношение (5.34) можно переписать конечно-дифференциальный негладкий алгоритм скоростного градиента следующим образом:

$$u(t) \in u(0) - \gamma\psi(x(t), t) - \Gamma \int_0^t g(x(\tau), \tau)^T \nabla_x Q(x(\tau), \tau)\, d\tau. \tag{5.43}$$

Теорема 5.1.5 без труда распространяется на случай данного закона управления. Для этого необходимо лишь заменить функцию (5.40) на следующую функцию:

$$\begin{aligned} V(t) = Q(x(t), t) + \frac{1}{2}\Big(u(0) - u_* - \Gamma \int_0^t g(x(\tau), \tau)^T \nabla_x Q(x(\tau), \tau)\, d\tau\Big)^T \times \\ \times \Gamma^{-1}\Big(u(0) - u_* - \Gamma \int_0^t g(x(\tau), \tau)^T \nabla_x Q(x(\tau), \tau)\, d\tau\Big). \end{aligned}$$

Воспользовавшись теоремой о производной по направлениям сложной функции и формулой (5.43) получим, что существует сечение $\eta(t)$ многозначного отображения $\psi(x(t), t)$ такое, что

$$D_+ V(t) \leqslant \omega(x(t), u(t), t) - \big(u(t) - u_* + \gamma v(t)\big)^T \nabla_u \omega(x(t), u(t), t).$$

Рассуждая далее как и при доказательстве теоремы 5.1.5, нетрудно показать, что цель управления (5.39) достигается.

5.1.4 Задача синхронизации двух осцилляторов Дуффинга

Рассмотрим пример применения конечно-дифференциального алгоритма скоростного градиента к задаче синхронизации двух осцилляторов Дуффинга (ср. [220]). Напомним, что осциллятор Дуффинга описывается уравнением

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = q\cos(\omega_0 t).$$

Как хорошо известно, поведение решений этой системы существенно зависит от выбора параметров. Например, если $\delta = 0,4$, $\alpha = -1,1$, $\beta = 1$ и $\omega_0 = 1,8$, то при $q = 1,8$ система является хаотической, в то время как при $q = 0,62$ её поведение является периодическим (см. [119]). Мы ставим задачу синхронизировать осциллятор Дуффинга с хаотическим поведением с эталонной моделью, обладающей периодическими решениями. Мы сформулируем эту задачу, как задачу синхронизации типа «ведущий–ведомый» [411].

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 - \beta x_1^3 - \delta x_2 + q\cos(\omega_0 t) + u, \end{cases} \tag{5.44}$$

где u — управление, а параметр q предполагается неизвестным. Введём уравнение эталонной модели, которое отличается от уравнения (5.44) только значением параметра q:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1m} = x_{2m} \\ \dot{x}_{2m} = -\alpha x_{1m} - \beta x_{1m}^3 - \delta x_{2m} + q_m\cos(\omega_0 t). \end{cases} \tag{5.45}$$

Мы будем рассматривать следующую задачу: определить закон управления $u(\cdot)$ так, чтобы в замкнутой системе достигалась цель управления

$$|x_1(t) - x_{1m}(t)| \to 0, \quad |x_2(t) - x_{2m}(t)| \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty. \tag{5.46}$$

Заметим, что если параметры q и q_m выбраны таким образом, что поведение системы (5.44) является хаотическим, а системы (5.45) — периодическим, то цель управления, по существу, заключается в качественном изменении поведения решений осциллятора Дуффинга с помощью адаптивного управления.

Положим $e_1 = x_1 - x_{1m}$ и $e_2 = x_2 - x_{2m}$. Вычитая из уравнения (5.45) уравнение (5.44), получим следующие уравнения для ошибки e:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -\alpha e_1 - \beta e_1^3 - 3x_1 x_{1m} e_1 - \delta e_2 + (q - q_m)\cos(\omega_0 t) + u. \end{cases} \tag{5.47}$$

Для того чтобы воспользоваться конечно-дифференциальным алгоритмом скоростного градиента, предположим сначала, что параметр q известен. Тогда, следуя работам [119, 220], можно определить $u = -Ke_1 + 3x_1x_{1m}e_1 + (q_m - q)\cos(\omega_0 t)$, где $K > 0$ — коэффициент усиления. Нетрудно проверить, что для функции Ляпунова

$$V(e) = \frac{1}{2}\left((K+\alpha)e_1^2 + \frac{\beta}{2}e_1^4 + e_2^2\right)$$

(см. [119, 220]) выполняется неравенство

$$\dot{V}(e) = (K+\alpha)e_1e_2 + \beta e_1^3 e_2 + e_2\big(-(K+\alpha)e_1 - \beta e_1^3 - \delta e_2\big) = -\delta e_2^2,$$

из которого с помощью теоремы Барбашина-Красовского-Ла-Салля нетрудно показать, что $e_1(t) \to 0$ и $e_2(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, если $\alpha > -K$, $\beta \geqslant 0$ и $\delta > 0$.

Предположим теперь, что параметр q неизвестен и введём алгоритм управления

$$u = -Ke_1 + 3x_1x_{1m}e_1 + \theta\cos(\omega_0 t), \tag{5.48}$$

где θ — новый вход системы. Тогда уравнения ошибки преобразуются к виду

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -(K+\alpha)e_1 - \beta e_1^3 - \delta e_2 + (\theta + q - q_m)\cos(\omega_0 t). \end{cases} \tag{5.49}$$

Воспользуемся конечно-дифференциальным алгоритмом скоростного градиента для построения алгоритма адаптации $\theta(\cdot)$. Для этого рассмотрим систему (5.49) и введём гладкую целевую функцию $Q(e) = V(e)$. Положим

$$\omega(e,\theta,t) = \dot{Q}(e) = -\delta e_2^2 + (\theta + q - q_m)e_2\cos(\omega_0 t), \quad \psi(e,\theta,t) = \nabla_\theta \omega(e,\theta,t) = e_2\cos(\omega_0 t)$$

Тогда в соответствии с конечно-дифференциальным алгоритмом скоростного градиента можно положить

$$\frac{d\big(\theta + \gamma\psi(e,\theta,t)\big)}{dt} = -\Gamma\nabla_\theta\omega(e,\theta,t)$$

или, что эквивалентно,

$$\theta(t) = \theta(0) - \gamma e_2(t)\cos(\omega_0 t) - \Gamma\int_0^t e_2(s)\cos(\omega_0 s)\,ds. \tag{5.50}$$

Данный закон управления был впервые предложен в [220].

Воспользуемся теоремой 5.1.5 и замечанием 5.1.9, чтобы проверить, достигается ли цель управления (5.46) в замкнутой системе (5.44), (5.48), (5.50). Учитывая теорему 5.1.4, получаем, что справедливы предположения 1–4 теоремы 5.1.5 справедливы для системы (5.49), (5.50). Более того, для $\theta_* = q_m - q$ (заметим, что θ_* — неизвестный параметр) имеем $\omega(e,\theta_*,t) = -\delta e_2^2$. Поэтому из замечания 5.1.9 следует, что $e_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$, если $\alpha > -K$

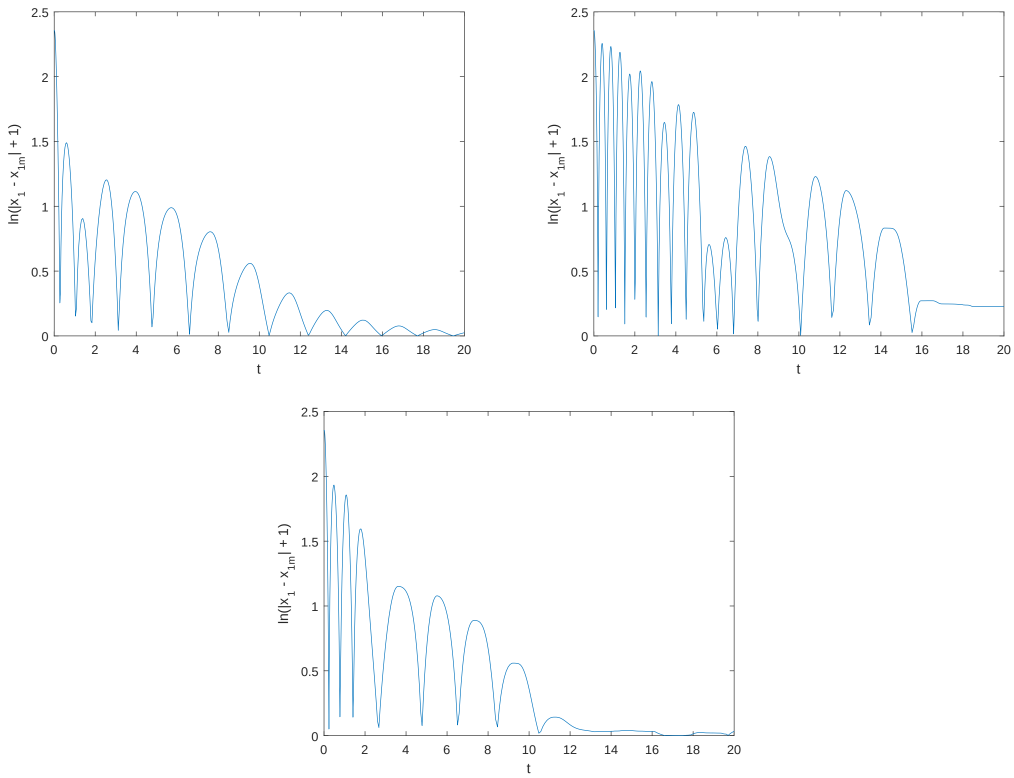


Рис. 5.2: Графики ошибки $|e_1(t)| = |x_1(t) - x_{1m}(t)|$ для гладкого алгоритма адаптации (5.50) (верхний левый график), негладкого алгоритма (5.51) (верхний правый график) и комбинированного алгоритма (5.52) (нижний график).

и $\delta > 0$. Сходимость ошибки $e_1(t)$ к нулю мы продемонстрируем с помощью численного моделирования (см. рис. 5.2).

Заметим, что также можно воспользоваться негладким законом адаптации

$$\theta(t) \in \theta(0) - \gamma \,\mathrm{Sign}\,\big(e_2(t)\cos(\omega_0 t)\big) - \Gamma \int_0^t e_2(s)\cos(\omega_0 s)\,ds, \tag{5.51}$$

соответствующим случаю $\psi(e,\theta,t) = \mathrm{Sign}(\nabla_\theta \omega(e,\theta,t))$, и комбинированным алгоритмом

$$\theta(t) \in \theta(0) - \gamma \,\mathrm{Sign}\,\big(e_2(t)\cos(\omega_0 t)\big) - \gamma e_2(t)\cos(\omega_0 t) - \Gamma \int_0^t e_2(s)\cos(\omega_0 s)\,ds, \tag{5.52}$$

который соответствует случаю $\psi(e,\theta,t) = \mathrm{Sign}(\nabla_\theta \omega(e,\theta,t)) + \nabla_\theta \omega(e,\theta,t)$. Здесь $\mathrm{Sign}(s) = \mathrm{sign}(s)$, если $s \neq 0$, и $\mathrm{Sign}(0) = [-1,1]$. Алгоритмы адаптации (5.51) и (5.52) являются конечно-дифференциальными негладкими алгоритмами скоростного градиента с многозначной функцией $\psi(e,\theta,t)$. С помощью замечания 5.1.10 можно проверить, что для алгоритмов (5.51) и (5.52) также будет $\lim\limits_{t\to+\infty} e_2(t) = 0$.

Работоспособность предложенных алгоритмов управления была проверена с помощью численного моделирования. Следующие значения параметров системы использовались при моделировании: $\delta = 0,4$, $\alpha = -1,1$, $\beta = 1$, $\omega_0 = 1,8$, $q = 1,8$ и $q_m = 0,62$. Начальные условия

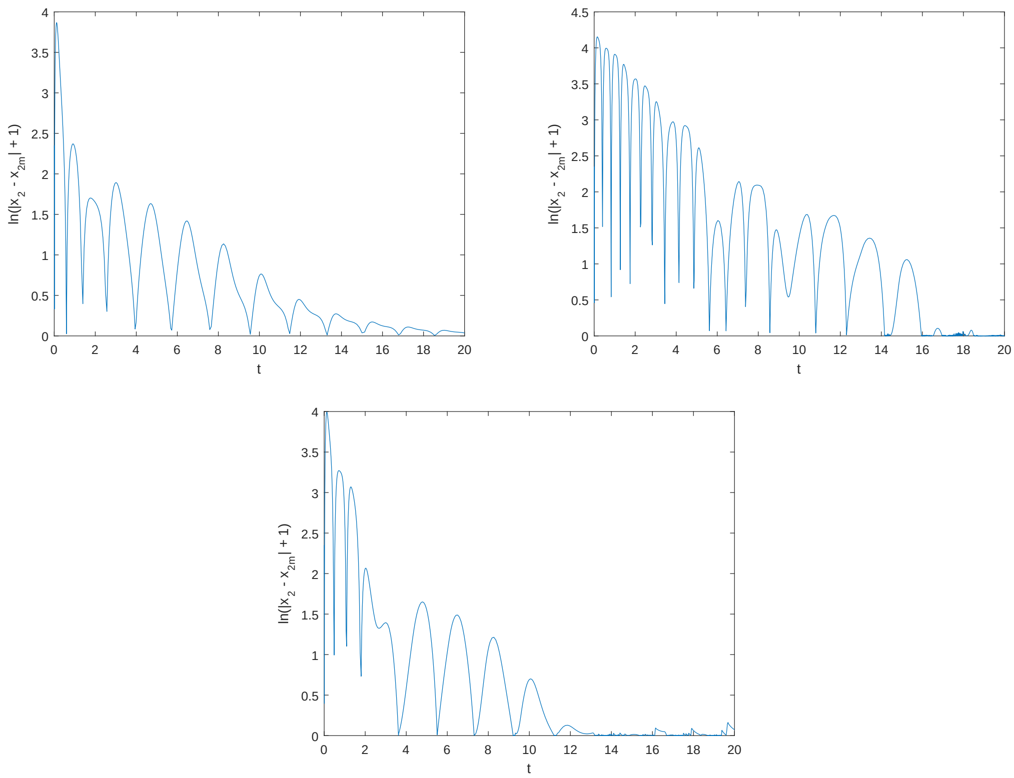


Рис. 5.3: График ошибки $|e_2(t)| = |x_2(t) - x_{2m}(t)|$ для гладкого алгоритма адаптации (верхний левый график), негладкого алгоритма (верхний правый график) и комбинированного алгоритма (нижний график).

были выбраны следующим образом: $(x_1(0); x_2(0)) = (10; 10)$, $(x_{1m}(0); x_{2m}(0)) = (0,5; 0,5)$ и $\theta(0) = 0$. Коэффициенты усиления были выбраны равными $K = 4$, $\Gamma = 2$, $\gamma = 5$ в случае гладкого (5.50) и негладкого (5.51) алгоритмов адаптации и $\gamma = 2,5$ в случае комбинированного алгоритма адаптации (5.52). Таким образом, комбинированный алгоритм представляет из себя полусумму гладкого и негладкого алгоритмов.

Результаты численного моделирования, представленные на рисунках 5.2–5.4, демонстрируют сходимость ошибки $|e_2| = |x_2 - x_{2m}|$ к нулю для всех предложенных алгоритмов (см. рис. 5.3), в то время как ошибка $|e_1| = |x_1 - x_{1m}|$ сходится к нулю только в случае гладкого и комбинированного алгоритмов (рис. 5.2). Таким образом, гладкий и комбинированный конечно-дифференциальные алгоритмы скоростного градиента решают поставленную задачу синхронизации осцилляторов Дуффинга. Заметим также, что как ошибка e_1, так и ошибка e_2 сходятся к нулю быстрее в случае комбинированного алгоритма адаптации (5.52) (см. рисунки 5.2 и 5.3).

Траектории замкнутой системы и эталонной модели представлены на рис. 5.4. Дадим неформальные пояснения к этому рисунку. Ясно, что ограниченность слагаемого

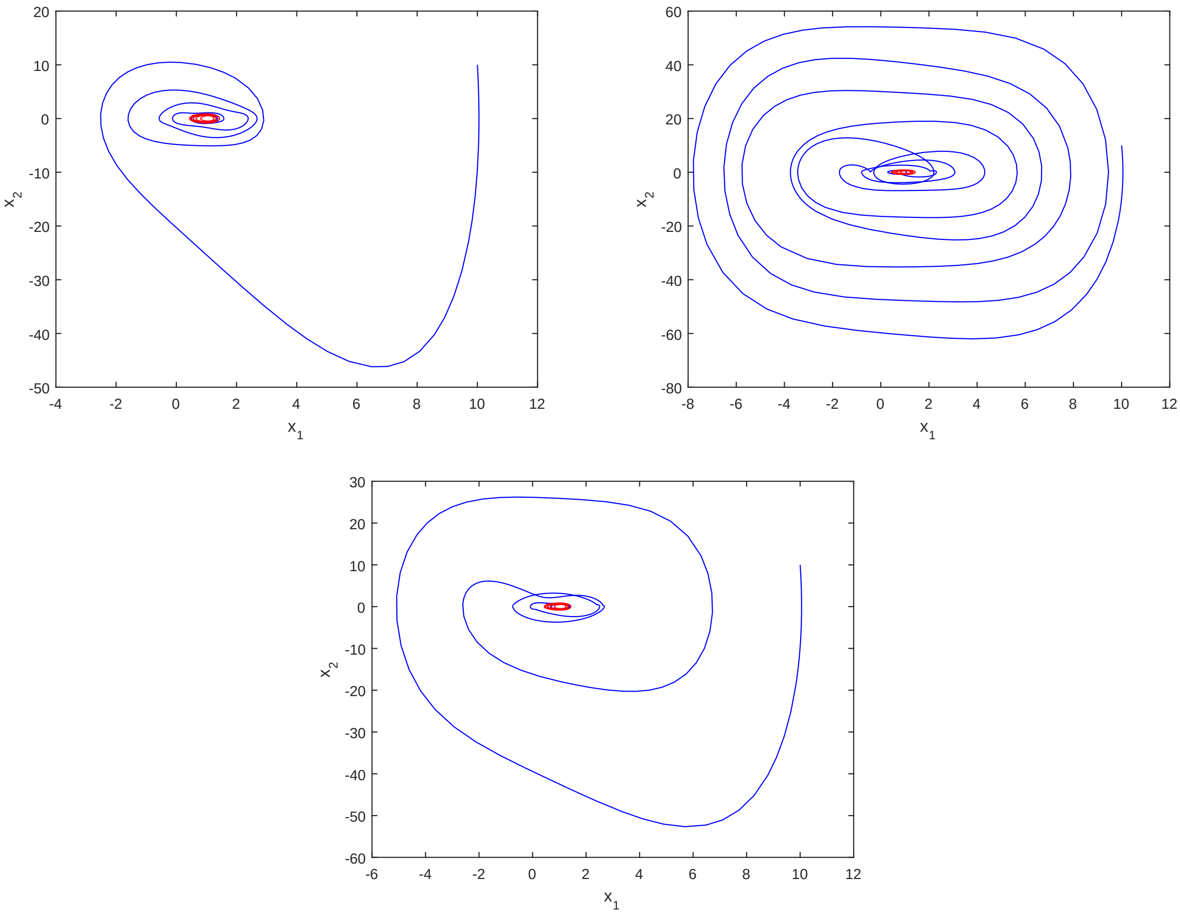


Рис. 5.4: Синхронизация двух систем Дуффинга с помощью гладкого алгоритма (верхний левый график), негладкого алгоритма (верхний правый график) и комбинированного алгоритма (нижний график).

$\operatorname{sign}(e_2 \cos(\omega_0 t))$ по модулю единицей приводит к тому, что для негладкого алгоритма адаптации ошибка синхронизации сходится к нулю ощутимо медленнее, чем в гладком случае, когда величина $e_2(t)$ достаточно велика. Иными словами, негладкому алгоритму требуется больше времени, чтобы привести траекторию исходной системы в малую окрестность траектории эталонной модели. С другой стороны, при $|e_2(t)| < 1$, ошибка $e_2(t)$ убывает быстрее для негладкого алгоритма, поскольку $|\operatorname{sign}(e_2 \cos(\omega_0 t))| = 1$, если $e_2 \cos(\omega_0 t) \neq 0$. В свою очередь, комбинированный алгоритм (5.52) обладает достоинствами, как гладкого так и негладкого алгоритмов, что приводит к сокращению времени переходных процессов.

5.2 Задачи управления гиперболическими уравнениями

В данном разделе мы рассмотрим применения гладких и негладких алгоритмов скоростного градиента к нескольким задачам граничного управления энергией в распределённых системах, описываемых одномерным нелинейным уравнением Клейна-Гордона или одномерным уравнением синус-Гордона.

5.2.1 Управление энергией в нелинейной модели Клейна-Гордона

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для одномерного полулинейного уравнения Клейна-Гордона:

$$z_{tt}(t,x) - kz_{xx}(t,x) + \Pi'(z(t,x)) = 0, \quad t \geqslant 0, \quad x \in [0,1], \tag{5.53}$$

$$z(0,x) = z^0(x), \quad z_t(0,x) = z^1(x), \quad x \in [0,1], \tag{5.54}$$

$$z(t,0) = 0, \quad z_x(t,1) = u(t), \quad y(t) = \big(z_t(t,1), H(z(t))\big), \quad t \geqslant 0. \tag{5.55}$$

Здесь $\Pi \in C^1(\mathbb{R})$ — неотрицательная функция, $k > 0$ — заданное число, $u(t)$ — управление, $y(t)$ — измерения, $z^0, z^1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — заданные начальные условия,

$$H(z) = \int_0^1 \left(\frac{z_t^2}{2} + k\frac{z_x^2}{2} + \Pi(z)\right) dx$$

гамильтониан уравнения (5.53). Для того чтобы указать зависимость $H(z)$ от t мы будем использовать обозначение $H(z(t))$. Нетрудно проверить, что $H(z(t)) \equiv \mathrm{const}$, если $u(t) \equiv 0$. Кроме того, функция $H(z)$ неотрицательна и $H(z(t)) = 0$ тогда и только тогда, когда $z(t) = 0$, так как из равенства $H(z(t)) = 0$ следует, что $z_x(t) = 0$, откуда с учётом граничного условия $z(t,0) = 0$ получаем, что $z(t) = 0$. Таким образом, величину $H(z(t))$ можно рассматривать как *энергию* решения $z(t,x)$ уравнения (5.53) (или *энергию системы*) в момент времени t.

Рассмотрим задачу достижения заданного уровня энергии в системе (5.53)–(5.55), которая заключается в построении закона управления $u(t)$, гарантирующего достижения следующей цели управления:

$$H(z(t)) \to H_* \text{ при } t \to +\infty. \tag{5.56}$$

Здесь $z(t)$ — решение начально-краевой задачи (5.53)–(5.55), а $H_* \geqslant 0$ — заданное число.

Воспользуемся алгоритмом скоростного градиента для решения поставленной задачи. Для этого введём целевую функцию $Q_1(z(t)) = \frac{1}{2}(H(z(t)) - H_*)^2$, $t \geqslant 0$. Формально вычисляя производную этой функции в силу системы (5.53)–(5.55), имеем

$$\frac{d}{dt}Q_1(z(t)) = (H(z(t)) - H_*)\int_0^1 \Big(z_t z_{tt} + kz_x z_{xt} + \Pi'(z)z_t\Big)\, dx.$$

Заменяя z_{tt} на $kz_{xx}(t,x) - \Pi'(z(t,x))$, интегрируя слагаемое $z_x z_{xt}$ по частям и пользуясь граничным условием $z(t,0) = 0$, окончательно получаем следующее выражение для полной производной функции $Q_1(z(t))$ вдоль траекторий системы (5.53)–(5.55):

$$\frac{d}{dt}Q_1(z(t)) = (H(z(t)) - H_*)ku(t)z_t(t,1).$$

Воспользовавшись алгоритмом скоростного градиента в конечной форме, можно определить следующий алгоритм управления:

$$u(t) = -\gamma \frac{\partial}{\partial u} \frac{dQ_1(z)}{dt} = -\gamma(H(z(t)) - H_*)kz_t(t, 1).$$

Здесь $\gamma > 0$ — коэффициент усиления. Естественно рассматривать более общий алгоритм управления вида

$$u(t) = -\gamma\psi(H(z(t)) - H_*)z_t(t, 1), \tag{5.57}$$

где $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция такая, что $\psi(0) = 0$ и $\psi(s)s > 0$ для всех $s \neq 0$. Мы также будем рассматривать разрывный закон управления

$$u(t) = -\gamma \operatorname{sign}(H(z(t)) - H_*)z_t(t, 1), \tag{5.58}$$

соответствующий функции $\psi(s) = \operatorname{sign}(s)$. Данный закон управления может быть получен с помощью негладкого алгоритма скоростного градиента с негладкой целевой функцией $Q_2(z(t)) = |H(z(t)) - H_*|$.

Замечание 5.2.1. Так как закон управления (5.58) разрывный, возникает вопрос о том, что понимать под решениями начально-краевой задачи (5.53)–(5.55), (5.58). Мы будем пользоваться определением решения разрывных бесконечномерных систем, подробно изучавшемся в монографии [335]. Везде далее мы будем предполагать, что достаточно регулярное (т. е. гарантирующее корректность всех выкладок) решение рассматриваемых начально-краевых задач существует для всех $t \geqslant 0$.

Заметим, что для любого решения замкнутой системы (5.53)–(5.55), (5.57) (или (5.53)–(5.55), (5.58)) справедливо равенство:

$$\frac{d}{dt}H(z(t)) = -\gamma k\psi(H(z(t)) - H_*)z_t^2(t, 1) \quad \forall t \geqslant 0 \colon H(z(t)) \neq H_*.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}H(z(t)) \begin{cases} \leqslant 0, & \text{если} \quad H(z(t)) > H_*, \\ \geqslant 0, & \text{если} \quad H(z(t)) < H_*. \end{cases} \tag{5.59}$$

Таким образом, если $H(z(t)) > H_*$, то величина $H(z(t))$ не возрастает, в то время как в случае $H(z(t)) < H_*$, энергия системы $H(z(t))$ не убывает. Поэтому $H(z(t)) \in \operatorname{co}\{H_*, H(z(0))\}$ для всех $t \geqslant 0$. Изучим вопрос достижимости цели управления (5.56).

Теорема 5.2.1. *Предположим, что* $\Pi \in C^2(\mathbb{R})$ *— неотрицательная функция,* $\Pi'(0) = 0$ *и существует* $\eta \geqslant 2$ *такое, что* $z\Pi'(z) \geqslant \eta\Pi(z)$ *для всех* $z \in \mathbb{R}$*. Пусть также* $H(z(0)) \neq 0$

(т. е. начальные условия отличны от нуля). Тогда для всех $H_* \geqslant 0$, $\gamma > 0$ *и* $k > 0$ *будет* $\lim\limits_{t\to+\infty} H(z(t)) = H_*$, *где* $z(t,x)$ *— решение системы* (5.53)–(5.55), (5.57). *Кроме того, в случае разрывного закона управления* (5.58) *для всех* $H_* > 0$, $\gamma > 0$ *и* $k > 0$ *существует* $T > 0$ *такое, что* $H(z(t)) \to H_*$ *при* $t \to T$, *где* $z(t,x)$ *— решение системы* (5.53)–(5.55), (5.58).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай непрерывного закона управления (5.57). Для всех $\varepsilon > 0$ и $c > 0$ введём функцию типа Ляпунова $V(t) = H(z(t)) + \varepsilon \operatorname{sign}(H(z(t)) - H_*)g(t)$, где z — решение начально-краевой задачи (5.53)–(5.55), (5.57), $g(t) = \int_0^1 xz_tz_x\,dx + c\int_0^1 zz_t\,dx$, $c > 0$ и $\operatorname{sign}(0) = 0$. Получим сначала некоторые оценки функции $V(t)$.

Так как $z(t,0) = 0$ для всех $t \geqslant 0$, то для всех $x \in [0,1]$ будет

$$|z(t,x)| = \left|\int_0^x z_x\,dx\right| \leqslant \int_0^1 |z_x|\,dx \leqslant \sqrt{\int_0^1 z_x^2\,dx}, \quad \int_0^1 z^2\,dx \leqslant \int_0^1 z_x^2\,dx. \tag{5.60}$$

Поэтому

$$c\int_0^1 zz_t\,dx \leqslant \frac{c}{2}\int_0^1 z^2\,dx + \frac{c}{2}\int_0^1 z_t^2\,dx \leqslant \frac{c}{2}\int_0^1 \left(z_t^2 + z_x^2\right)dx \leqslant \max\left\{c, \frac{c}{k}\right\} H(z(t)).$$

Заметим также, что

$$\Big|\int_0^1 xz_tz_x\,dx\Big| \leqslant \int_0^1 |z_tz_x|\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 z_t^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 z_x^2\,dx \leqslant \max\left\{1, \frac{1}{k}\right\} H(z(t)).$$

Положим $K_0 = \max\left\{1, \frac{1}{k}\right\} + \max\left\{c, \frac{c}{k}\right\}$. Тогда

$$0 \leqslant (1 - \varepsilon K_0)H(z(t)) \leqslant V(t) \leqslant (1 + \varepsilon K_0)H(z(t)) \tag{5.61}$$

для всех $t \geqslant 0$ и любого $\varepsilon \in (0, 1/K_0)$.

Как было указано ранее, $H(z(t)) \in \operatorname{co}\{H_*, H(z(0))\}$ для всех $t \geqslant 0$ (см. (5.59)). Поэтому $\int_0^1 z_x^2\,dx \leqslant (2/k)\max\{H_*, H(z(0))\}$. Отсюда, воспользовавшись неравенством (5.60), получим, что функция $z(t,x)$ равномерно ограничена для всех $t \geqslant 0$ и $x \in [0,1]$. По нашему предположению $\Pi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\Pi'(0) = 0$. Поэтому существует $L > 0$ такое, что

$$|\Pi'(z(t,x))| \leqslant L|z(t,x)| \quad \forall t \geqslant 0 \quad \forall x \in [0,1]. \tag{5.62}$$

Для любого $t \geqslant 0$ такого, что $H(z(t)) \neq H_*$, имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_0^1 xz_xz_t\,dx = \int_0^1 xz_{tx}z_t\,dx + \int_0^1 xz_x(kz_{xx} - \Pi'(z))\,dx = \\
&\quad = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(z_t^2 + kz_x^2\right)dx + \frac{1}{2}\Big(z_t^2(t,1) + kz_x^2(t,1)\Big) + \int_0^1 \left(-\frac{d}{dx}\Big(x\Pi(z)\Big) + \Pi(z)\right)dx = \\
&\quad = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(z_t^2 + kz_x^2\right)dx + \frac{1}{2}\Big(z_t^2(t,1) + kz_x^2(t,1)\Big) + \int_0^1 \Pi(z)\,dx - \Pi(z(t,1)) \leqslant \\
&\quad \leqslant -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(z_t^2 + kz_x^2\right)dx + \int_0^1 \Pi(z)\,dx + \frac{1}{2}\Big(z_t^2(t,1) + kz_x^2(t,1)\Big).
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Также с помощью неравенства $z\Pi'(z) \geqslant \eta\Pi(z)$ получаем

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 zz_t\,dx = \int_0^1 z_t^2\,dx + \int_0^1 z(kz_{xx} - \Pi'(z))\,dx =$$
$$= \int_0^1 z_t^2\,dx + kz(t,1)z_x(t,1) - k\int_0^1 z_x^2\,dx - \left(1+\frac{k}{2L}\right)\int_0^1 z\Pi'(z)\,dx + \frac{k}{2L}\int_0^1 z\Pi'(z)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 z_t^2\,dx + kz(t,1)z_x(t,1) - k\int_0^1 z_x^2\,dx - \eta\left(1+\frac{k}{2L}\right)\int_0^1 \Pi(z)\,dx + \frac{k}{2L}\int_0^1 z\Pi'(z)\,dx.$$

Заметим, что

$$|kz(t,1)z_x(t,1)| \leqslant \frac{k}{2}z^2(t,1) + \frac{k}{2}z_x^2(t,1) \leqslant \frac{k}{2}\int_0^1 z_x^2\,dx + \frac{k}{2}z_x^2(t,1).$$

(см. (5.60)). Поэтому

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 zz_t\,dx \leqslant \int_0^1 z_t^2\,dx - \frac{k}{2}\int_0^1 z_x^2\,dx - \eta\left(1+\frac{k}{2L}\right)\int_0^1 \Pi(z)\,dx + \frac{k}{2L}\int_0^1 z\Pi'(z)\,dx + \frac{k}{2}z_x^2(t,1).$$

Отсюда с помощью неравенств (5.62) и (5.60) получаем, что

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 zz_t\,dx \leqslant \int_0^1 z_t^2\,dx - \eta\left(1+\frac{k}{2L}\right)\int_0^1 \Pi(z)\,dx + \frac{k}{2}z_x^2(t,1). \tag{5.64}$$

Напомним, что $\eta \geqslant 2$. Поэтому $c\eta(1+k/2L) > 1$ для некоторого $c \in (0,1/2)$ и из неравенств (5.63) и (5.64) следует, что

$$\frac{d}{dt}g(t) \leqslant -\left(\frac{1}{2}-c\right)\int_0^1 z_t^2\,dx - \frac{k}{2}\int_0^1 z_x^2\,dx - \left(c\eta\Big(1+\frac{k}{2L}\Big) - 1\right)\int_0^1 \Pi(z)\,dx +$$
$$+\frac{k}{2}(1+c)z_x^2(t,1) + \frac{1}{2}z_t^2(t,1) \leqslant -C_0H(z(t)) + \frac{1}{2}z_t^2(t,1) + \frac{k}{2}(1+c)z_x^2(t,1)$$

для всех $t \geqslant 0$ таких, что $H(z(t)) \neq H_*$, где $C_0 = \min\big\{1-2c, c\eta(1+k/(2L)) - 1\big\} > 0$. Воспользовавшись неравенством (5.61), окончательно получаем, что

$$\frac{d}{dt}V(t) \leqslant -C_\varepsilon V(t) - ku(t)z_t(t,1) + \frac{\varepsilon}{2}z_t^2(t,1) + \frac{\varepsilon}{2}(1+c)ku^2(t) \tag{5.65}$$

для всех $t \geqslant 0$ таких, что $H(z(t)) > H_*$, и

$$\frac{d}{dt}V(t) \geqslant C_\varepsilon V(t) - ku(t)z_t(t,1) - \frac{\varepsilon}{2}z_t^2(t,1) - \frac{\varepsilon}{2}(1+c)ku^2(t)$$

для всех $t \geqslant 0$ таких, что $H(z(t)) < H_*$, где $C_\varepsilon = \varepsilon C_0/(1+\varepsilon K_0)$.

Предположим, что $H(z(0)) > H_*$ (случай $0 < H(z(0)) < H_*$ рассматривается аналогичным образом). Зафиксируем произвольное $\Delta \in (0, H(z(0)) - H_*)$. Ясно, что существует $T_\Delta \in (0,+\infty]$ такое, что $H(z(t)) > H_* + \Delta$ для всех $t \in [0, T_\Delta)$ и $H(z(t)) \leqslant H_* + \Delta$ для всех $t \in [T_\Delta, +\infty)$ (см. (5.59)). Покажем, что T_Δ конечно.

Рассуждая от противного, предположим, что $T_\Delta = +\infty$. Положим

$$\psi_\Delta := \min\Big\{\psi(s)\ \Big|\ s \in \big[\Delta, H(z(0)) - H_*\big]\Big\} > 0,\ \ \Psi_\Delta := \max\Big\{\psi(s)\ \Big|\ s \in \big[\Delta, H(z(0)) - H_*\big]\Big\} > 0.$$

Тогда $\Psi_\Delta \geqslant \psi(H(z(t)) - H_*) \geqslant \psi_\Delta$ для всех $t \geqslant 0$. Отсюда, подставляя выражение (5.57) в оценку производной (5.65), получаем, что

$$\frac{d}{dt}V(t) \leqslant -C_\varepsilon V(t) - \gamma k \psi_\Delta z_t^2(t,1) + \frac{\varepsilon}{2} z_t^2(t,1) + +\frac{\varepsilon}{2}(1+c)k\gamma^2\Psi_\Delta^2 z_t^2(t,1)$$

для всех $t \geqslant 0$. Следовательно, для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и всех $t \geqslant 0$ справедлива оценка $dV(t)/dt \leqslant -C_\varepsilon V(t)$, из которой вытекает, что $V(t) \leqslant V(0)e^{-C_\varepsilon t}$ для всех $t \geqslant 0$. Значит, $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} H(z(t)) = 0$ в силу неравенств (5.61), что противоречит нашему предположению о том, что $T_\Delta = +\infty$, т. е. $H(z(t)) > H_* + \Delta > 0$ для всех $t \geqslant 0$. Таким образом, $T_\Delta < +\infty$ и $H(z(t)) < H_* + \Delta$ для всех $t > T_\Delta$. Заметим, что $H(z(t)) \geqslant H_*$ для всех $t \geqslant 0$ в силу неравенств (5.59). Поэтому $H(z(t)) \to H_*$ при $t \to +\infty$ в силу произвольности выбора $\Delta > 0$.

Рассмотрим теперь случай негладкого закона управления (5.58). Предположим, что $H(z(0)) > H_* > 0$. Случай когда $H(z(0)) < H_*$ доказывается аналогичным образом. Рассуждая от противного, предположим, что $H(z(t)) > H_*$ для всех $t \geqslant 0$. Тогда, воспользовавшись неравенством (5.65), получим, что

$$\frac{d}{dt}V(t) \leqslant -C_\varepsilon V(t) - \gamma k z_t^2(t,1) + \frac{\varepsilon}{2} z_t^2(t,1) + \frac{\varepsilon}{2}(1+c)k\gamma^2 z_t^2(t,1) \quad \forall t \geqslant 0.$$

Поэтому для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и для всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство $\frac{dV(t)}{dt} \leqslant -C_\varepsilon V(t)$, из которого следует, что $V(t) \leqslant V(0)e^{-C_\varepsilon t}$ для всех $t \geqslant 0$. Отсюда в силу неравенства (5.61) имеем

$$H(z(t)) \leqslant \frac{(1+\varepsilon K_0)}{1-\varepsilon K_0} H(z(0)) e^{-C_\varepsilon t} \quad \forall t \geqslant 0.$$

Следовательно, $H(z(t)) < H_*$ для любого достаточно большого t, что противоречит нашему предположению. Таким образом, существует $T > 0$ такое, что $H(z(t)) \to H_*$ при $t \to T$. $\square$

Замечание 5.2.2. В случае, когда $H(z(0)) = 0$, т. е. начальные условия z^0 и z^1 равны нулю, можно на конечном интервале времени применить любой алгоритм управления, увеличивающий энергию системы (например, $u(t) \equiv u_0 \neq 0$), после чего воспользоваться алгоритмами управления (5.57) или (5.58).

Замечание 5.2.3. Укажем конкретные примеры функций $\Pi(z)$, для которых выполняются предположения теоремы 5.2.1. Нетрудно проверить, что предположения этой теоремы выполнятся для функции $\Pi(z) = \beta z^{2\kappa}$, где $\beta \geqslant 0$ и $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (случай $\beta = 0$ соответствует волновому уравнению, а случай $\kappa = 1$ соответствует уравнению Клейна-Гордона). Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора, легко видеть, что теорема 5.2.1 также применима к уравнению гиперболический синус-Гордона, для которого $\Pi(z) = \beta(\cosh(z) - 1)$, где $\beta > 0$.

Теорема 5.2.1 не применима к уравнению синус-Гордона, т.к. для $\Pi(z) = \beta(1 - \cos z)$, $\beta > 0$, будет $\liminf_{z\to\infty} z\Pi'(z) = \liminf_{z\to\infty} \Big(\beta z \sin z\Big) = -\infty$, в то время как $\Pi(z) \geqslant 0$ для всех $z \in \mathbb{R}$. Таким образом условие $z\Pi'(z) \geqslant \eta\Pi(z)$ не выполняется ни для какого $\eta \geqslant 0$. Тем не менее, теорема 5.2.1 допускает естественное обобщение на случай уравнения синус-Гордона.

Теорема 5.2.2. *Пусть* $\Pi(z) = \beta(1 - \cos(z))$ *и* $H(z(0)) \neq 0$. *Тогда для всех* $H_* \geqslant 0$, $k > 0$, $0 \leqslant \beta < k\pi^2/4$ *и* $\gamma > 0$ *будет* $\lim_{t\to+\infty} H(z(t)) = H_*$, *где* z *— решение начально-краевой задачи* (5.53)–(5.55), (5.57). *Кроме того, в случае разрывного закона управления* (5.58), *для любых* $H_* > 0$, $k > 0$, $0 \leqslant \beta < k\pi^2/4$ *и* $\gamma > 0$ *существует* $T > 0$ *такое, что* $H(z(t)) \to H_*$ *при* $t \to T$, *где* z *— решение начально-краевой задачи* (5.53)–(5.55), (5.58).

Доказательство этой теоремы, аналогичное доказательству теоремы 5.2.1 и основанное на анализе поведения функции типа Ляпунова вида

$$V(t) = H(z(t)) + \varepsilon\,\mathrm{sign}(H(z(t)) - H_*) \int_0^1 x z_t z_x\, dx, \quad \varepsilon > 0,$$

приведено в совместных работах автора, А.Л. Фрадкова и Б.Р. Андриевского [206, 207]. Отметим, что данная функция типа Ляпунова без множителя $\mathrm{sign}(H(z(t)) - H_*)$ впервые была рассмотрена для уравнения синус-Гордона в работах Кобаяши [287, 288]. Функция типа Ляпунова $V(t)$ для полулинейного уравнения Клейна-Гордона из доказательства теоремы 5.2.1 также была впервые рассмотрена Кобаяши [287].

На рисунках 5.5 и 5.6 приведены результаты численного моделирования замкнутой системы (5.53)–(5.55), (5.57) в случае, когда рассматриваемое уравнение является уравнением синус-Гордона (т. е. $\Pi(z) = \beta(1 - \cos z)$). Параметры системы были выбраны следующим образом: $k = 0,12$, $\beta = 1$, $\gamma = 0,25$, $H_* = 20$. В качестве начального состояния системы были выбраны функции $z^0(x) = 0,05\big(1 - \cos(2\pi x)\big)$ и $z^1(x) \equiv 0$. В данном случае $H(z(0)) \approx 0,0048 < H_*$. Были рассмотрены гладкий алгоритм с $\psi(s) = s$ (рис. 5.5) и негладкий алгоритм с $\psi(s) = \mathrm{sign}(s)$ (рис. 5.6). В обоих случаях заданный уровень энергии был достигнут за конечное время. В случае негладкого алгоритма численное моделирование демонстрирует значительные осцилляции управляющего параметра $u(t)$ и значения энергии $H(z(t))$, связанные с разрывностью рассматриваемого алгоритма. Представленные здесь результаты численного моделирования были получены проф. Б.Р. Андриевским.

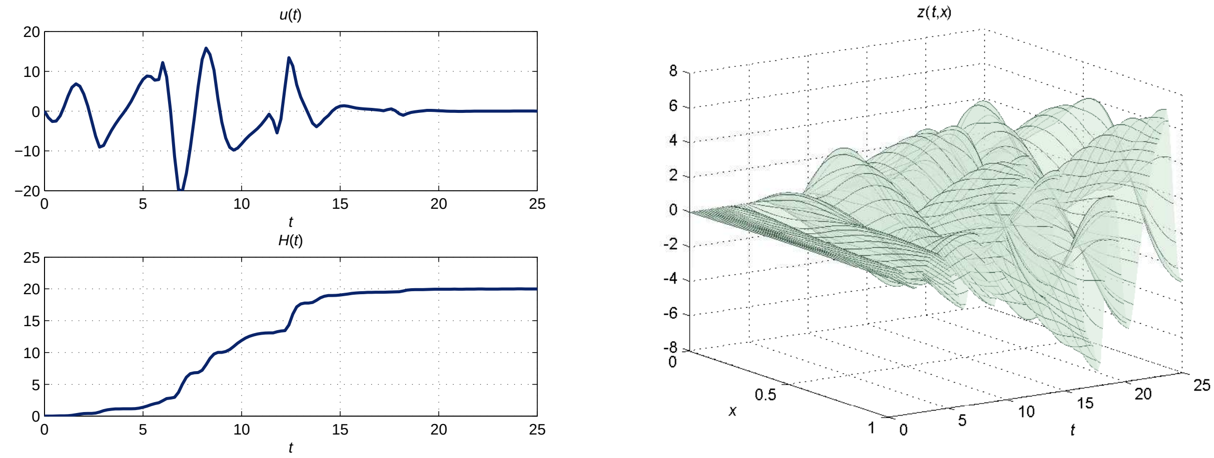


Рис. 5.5: Управление энергией с помощью гладкого алгоритма (5.57) с $\psi(s) = s$. Графики управления $u(t)$ (верхний график слева), энергии системы $H(z(t))$ (нижний график слева) и решения $z(t, x)$ (график справа).

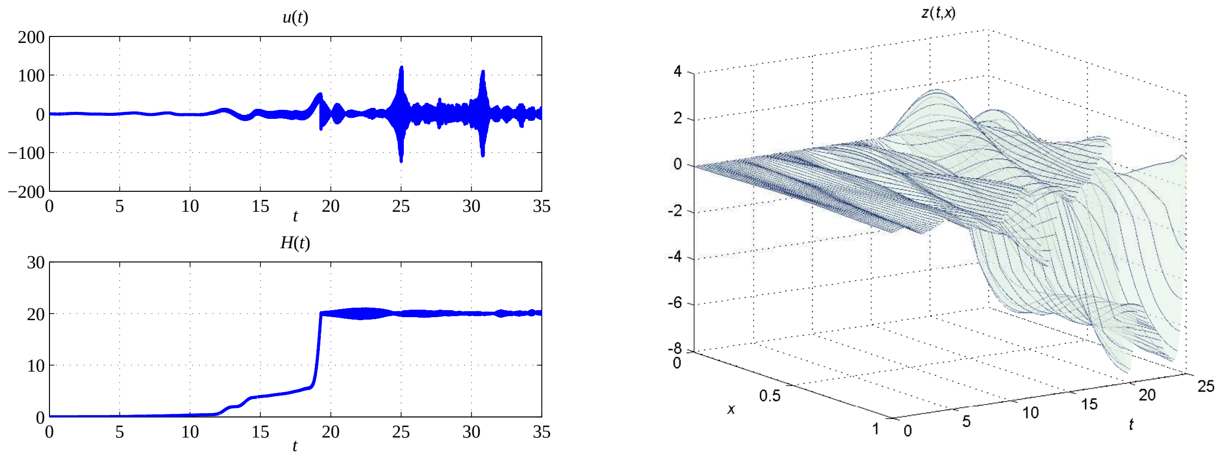


Рис. 5.6: Управление энергией с помощью негладкого алгоритма (5.58). Графики управления $u(t)$ (верхний график слева), энергии системы $H(z(t))$ (нижний график слева) и решения $z(t, x)$ (график справа).

Замечание 5.2.4. Результаты данного параграфа могут быть распространены на случай задачи слежения за заданным переменным во времени уровнем энергии $H_*(t)$. При некоторых предположениях на параметры системы можно показать, что при использовании естественного обобщения алгоритма управления (5.57) вида

$$u(t) = -\gamma\psi(H(z(t)) - H_*(t))z_t(t, 1)$$

будет справедлива следующая оценка ошибки слежения:

$$\big|H(z(t)) - H_*(t)\big| \leqslant \theta \sup_{s\geqslant\tau} \left|\frac{dH_*}{dt}(s)\right| \quad \forall t \geqslant \tau,$$

где $\theta > 0$ — константа, не зависящая от функции $H_*(t)$ и её производной. Более того, если $\frac{dH_*(t)}{dt} \to 0$ при $t \to +\infty$, то $|H(z(t)) - H_*(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$. Подробное доказательство этого результата имеется в совместной работе автора и проф. А.Л. Фрадкова [204].

5.2.2 Управление энергией в модели синус-Гордона при наличии только граничных измерений

В предыдущем параграфе мы предполагали, что измерениям доступны, как скорость $z_t(t,1)$ на правом конце интервала, так и энергия системы $H(z(t))$. Однако, в физических системах, моделируемых полулинейным уравнением Клейна-Гордона, непосредственное измерение энергии зачастую невозможно. Поэтому рассмотрим модификацию задачи, подставленной в предыдущем параграфе, в которой предполагается, что измерению доступна лишь скорость $z_t(t,1)$. Для определённости мы будем рассматривать уравнение синус-Гордона, хотя результаты этого параграфа допускают обобщение на случай других полулинейных гиперболических уравнений.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения синус-Гордона:

$$z_{tt}(t,x) - kz_{xx}(t,x) + \beta \sin z(t,x) = 0, \quad t \geqslant 0, \quad x \in [0,1], \tag{5.66}$$

$$z(0,x) = z^0(x), \quad z_t(0,x) = z^1(x), \quad x \in [0,1], \tag{5.67}$$

$$z(t,0) = 0, \quad z_x(t,1) = u(t), \quad y(t) = z_t(t,1), \quad t \geqslant 0. \tag{5.68}$$

Здесь $k > 0$ и $\beta > 0$ — заданные параметры, $u(t)$ — управление, $y(t)$ — измерение, $z^0, z^1\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — начальные условия. Обозначим через

$$H(z) = \int_0^1 \left(\frac{z_t^2}{2} + k\frac{z_x^2}{2} + \beta(1 - \cos z) \right) dx$$

гамильтониан уравнения синус-Гордона. Как и в предыдущем параграфе будем рассматривать задачу достижения заданного уровня энергии $H_* \geqslant 0$ в системе (5.66)–(5.68), которая заключается в построении закона управления $u(t)$ такого, что $H(z(t)) \to H_*$ при $t \to +\infty$, где z — решение начально-краевой задачи (5.66)–(5.68).

Для решения рассматриваемой задачи мы воспользуемся наблюдателем состояния типа Люенбергера следующего вида:

$$\widehat{z}_{tt}(t,x) - k\widehat{z}_{xx}(t,x) + \beta \sin \widehat{z}(t,x) = 0, \tag{5.69}$$

$$\widehat{z}(0,x) = \widehat{z}^0(x), \quad \widehat{z}_t(0,x) = \widehat{z}^1(x), \tag{5.70}$$

$$\widehat{z}(t,0) = 0, \quad \widehat{z}_x(t,1) = u(t) + \alpha\big(y(t) - \widehat{z}_t(t,1)\big), \tag{5.71}$$

Здесь $\widehat{z}^0, \widehat{z}^1\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — заданные начальные условия, а $\alpha > 0$ — коэффициент усиления наблюдателя. Данный наблюдатель был предложен в работах Э. Фридман и др. [221, 222]. Однако, в этих работах его анализ сводился к рассмотрению некоторой системы линейных матричных неравенств, разрешимость которой предполагается проверять численно. Мы же получим явные неравенства на параметры системы и коэффициент усиления наблюдателя, гарантирующие экспоненциальное убывание ошибки наблюдения.

Замечание 5.2.5. Как и в предыдущем параграфе, мы предполагаем, что существуют достаточно регулярные решения всех рассматриваемых начально-краевых задач, т. е. такие решения, для которых остаются справедливыми доказательства основных результатов. В частности, мы предполагаем, что отображения $t \mapsto H(z(t))$ и $t \mapsto H(\widehat{z}(t))$ по крайней мере абсолютно непрерывны.

Положим $e = z - \widehat{z}$. Ошибка наблюдения e, как нетрудно видеть, является решением следующей начально-краевой задачи:

$$e_{tt}(t,x) - ke_{xx}(t,x) + \beta\Big(\sin z(t,x) - \sin \widehat{z}(t,x)\Big) = 0, \tag{5.72}$$

$$e(0,x) = z^0(x) - \widehat{z}^0(x), \quad e_t(0,x) = z^1(x) - \widehat{z}^1(x), \tag{5.73}$$

$$e(t,0) = 0, \quad e_x(t,1) = -\alpha e_t(t,1). \tag{5.74}$$

Обозначим через $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(e_t^2 + ke_x^2\Big)\,dx$ взвешенную среднеквадратичную ошибку наблюдения. Покажем, что при некоторых предположения $E(t)$ убывает экспоненциально.

Теорема 5.2.3. *Пусть параметры $k > 0$ и $\beta > 0$ системы* (5.66)–(5.68) *удовлетворяют следующему неравенству:*

$$0 < \beta < \frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{2}k \approx 0,65k. \tag{5.75}$$

Тогда для всех

$$\alpha \in \left(\frac{k - \sqrt{k^2 - k\eta(\beta,k)^2}}{k\eta(\beta,k)}, \frac{k + \sqrt{k^2 - k\eta(\beta,k)^2}}{k\eta(\beta,k)}\right), \tag{5.76}$$

где $\eta(\beta,k) = 2\beta/\sqrt{\pi^2 k - 4\pi\beta} > 0$, существуют $\delta > 0$ и $M > 0$ (зависящие только k, β и α) такие, что

$$E(t) \leqslant ME(0)e^{-\delta t} \quad \forall t \geqslant 0. \tag{5.77}$$

Более того, для любого такого $\alpha > 0$ и для всех $t \geqslant 0$ будет

$$\int_0^1 e^2 dx \leqslant \frac{2M}{k}E(0)e^{-\delta t}, \quad \max_{x\in[0,1]} |e(t,x)| \leqslant \sqrt{\frac{2M}{k}E(0)}e^{-\delta t/2}. \tag{5.78}$$

Доказательство. Для всех $\varepsilon > 0$ введём функцию Ляпунова $V(t) = E(t) + \varepsilon \int_0^1 x e_t e_x \, dx$, предложенную в работах [222, 288]. Заметим, что для любого $\mu > 0$ выполняется следующее неравенство:

$$\Big| \int_0^1 x e_t e_x \, dx \Big| \leqslant \int_0^1 |e_t||e_x| \, dx \leqslant \frac{\mu}{2} \int_0^1 e_t^2 \, dx + \frac{1}{2\mu} \int_0^1 e_x^2 \, dx \leqslant \max\left\{\mu, \frac{1}{k\mu}\right\} E(t).$$

Полагая $\mu = 1/\sqrt{k}$, получим, что для любого $\varepsilon < \sqrt{k}$ будет

$$0 \leqslant (1 - k_0\varepsilon)E(t) \leqslant V(t) \leqslant (1 + k_0\varepsilon)E(t) \tag{5.79}$$

и $(1 - k_0\varepsilon) > 0$, где $k_0 = 1/\sqrt{k}$. Кроме того, по определению

$$\frac{d}{dt}V(t) = \int_0^1 \Big(e_t e_{tt} + k e_x e_{tx}\Big) \, dx + \varepsilon \int_0^1 \Big(x(e_{tt} e_x + e_t e_{tx})\Big) \, dx. \tag{5.80}$$

Пользуясь равенствами (5.72) и (5.74) и интегрируя по частям, имеем

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_0^1 \Big(e_t e_{tt} + k e_x e_{tx}\Big) \, dx = \int_0^1 \Big(e_t\big(k e_{xx} - \beta \sin z + \beta \sin \widehat{z}\big) - k e_t e_{xx}\Big) \, dx +$$
$$+ k e_x(t,1) e_t(t,1) - k e_x(t,0) e_t(t,0) = -\alpha k e_t(t,1)^2 + \beta \int_0^1 e_t\big(\sin \widehat{z} - \sin z\big) \, dx.$$

Функция $\sin(\cdot)$ глобально липшицева с константой Липшица $L = 1$. Поэтому

$$\Big| \int_0^1 e_t\big(\sin \widehat{z} - \sin z\big) \, dx \Big| \leqslant \int_0^1 |e_t| \cdot |e| \, dx \leqslant \frac{\mu}{2} \int_0^1 e_t^2 \, dx + \frac{1}{2\mu} \int_0^1 e^2 \, dx$$

для любого $\mu > 0$. Отсюда, воспользовавшись неравенством Виртингера (см., например, [76]), получим, что

$$\frac{d}{dt}E(t) \leqslant -\alpha k e_t(t,1)^2 + \frac{\beta\mu}{2} \int_0^1 e_t^2 \, dx + \frac{2\beta}{\pi^2 \mu} \int_0^1 e_x^2 \, dx. \tag{5.81}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в (5.80). Во-первых, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^1 x e_t e_{tx} \, dx = \frac{1}{2} e_t(t,1)^2 - \frac{1}{2} \int_0^1 e_t^2 \, dx. \tag{5.82}$$

Во-вторых, с помощью (5.72) и (5.74) получаем, что

$$\int_0^1 x e_x e_{tt} \, dx = \int_0^1 x e_x \Big(k e_{xx} - \beta \sin z + \beta \sin \widehat{z}\Big) \, dx \leqslant \frac{k}{2} \int_0^1 \Big(\frac{d}{dx}\big(x e_x^2\big) - e_x^2\Big) \, dx +$$
$$+ \beta \int_0^1 x |e_x||e| \, dx \leqslant -\frac{k}{2} \int_0^1 e_x^2 \, dx + \frac{k}{2} e_x^2(t,1) + \frac{\beta\lambda}{2} \int_0^1 e_x^2 \, dx + \frac{\beta}{2\lambda} \int_0^1 e^2 \, dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(-\frac{k}{2} + \frac{\beta\lambda}{2} + \frac{2\beta}{\pi^2 \lambda}\right) \int_0^1 e_x^2 \, dx + \frac{k}{2} \alpha^2 e_t^2(t,1). \tag{5.83}$$

для всех $\lambda > 0$. Минимизируя правую часть этого неравенства по λ, получаем, что $\lambda_* = 2/\pi$ оптимально. Для данного значения λ с помощью неравенств (5.80)–(5.83) получаем, что для всех $t \geqslant 0$ и $\mu > 0$ справедлива следующая оценка:

$$\frac{d}{dt}V(t) \leqslant \delta_1(\varepsilon, \mu) \int_0^1 e_t^2 \, dx + \delta_2(\varepsilon, \mu) \int_0^1 e_x^2 \, dx + \delta_3(\varepsilon, \alpha) e_t^2(t,1).$$

Здесь

$$\delta_1(\varepsilon,\mu) = -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\beta\mu}{2}, \quad \delta_2(\varepsilon,\mu) = -\frac{\varepsilon k}{2} + \frac{2\beta}{\pi^2\mu} + \frac{2\varepsilon\beta}{\pi}, \quad \delta_3(\varepsilon,\alpha) = -\alpha k + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon k}{2}\alpha^2.$$

Покажем, что в предположениях теоремы (i) $\eta(\beta,k) < \sqrt{k}$, (ii) для любого $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего неравенству $\eta(\beta,k) < \varepsilon < \sqrt{k}$, будет $\delta_1(\varepsilon,\mu) < 0$ и $\delta_2(\varepsilon,\mu) < 0$ для некоторого $\mu > 0$ и (iii) существует $\alpha > 0$ такое, что $\delta_3(\varepsilon,\alpha) \leqslant 0$. Тогда для всех таких ε, μ и α будет

$$\frac{d}{dt}V(t) \leqslant -\min\left\{2|\delta_1(\varepsilon,\mu)|, \frac{2|\delta_2(\varepsilon,\mu)|}{k}\right\} E(t).$$

Отсюда с помощью неравенства (5.79) получим, что $\dot{V}(t) \leqslant -\delta(\varepsilon,\mu)V(t)$, где

$$\delta(\varepsilon,\mu) = \min\left\{\frac{2|\delta_1(\varepsilon,\mu)|}{1+k_0\varepsilon}, \frac{2|\delta_2(\varepsilon,\mu)|}{k(1+k_0\varepsilon)}\right\} > 0.$$

Следовательно, $V(t) \leqslant V(0)e^{-\delta(\varepsilon,\mu)t}$ для всех $t \geqslant 0$. Вновь пользуясь неравенством (5.79), окончательно получаем, что

$$E(t) \leqslant \frac{1+k_0\varepsilon}{1-k_0\varepsilon}E(0)e^{-\delta(\varepsilon,\mu)t} \quad \forall t \geqslant 0, \tag{5.84}$$

т. е. справедлива оценка (5.77). Более того, в силу граничного условия $e(t,0) = 0$ (см. (5.74)) для всех $x \in [0,1]$ и $t \geqslant 0$ будет $e(t,x) = \int_0^x e_x(t,\xi)\,d\xi$. Поэтому для всех $t \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$\int_0^1 e^2 dx \leqslant \int_0^1 e_x^2 dx \leqslant \frac{2}{k}E(t), \quad \max_{x\in[0,1]} |e(t,x)| \leqslant \sqrt{\int_0^1 e_x^2\,dx} \leqslant \sqrt{\frac{2}{k}E(t)},$$

из которых вытекает справедливость оценок (5.78).

Таким образом, остаётся проверить, что (i) $\eta(\beta,k) < \sqrt{k}$, (ii) для любого $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего неравенству $\eta(\beta,k) < \varepsilon < \sqrt{k}$, будет $\delta_1(\varepsilon,\mu) < 0$ и $\delta_2(\varepsilon,\mu) < 0$ для некоторого $\mu > 0$ и (iii) существует $\alpha > 0$ такое, что $\delta_3(\varepsilon,\alpha) \leqslant 0$. Действительно, по определению $\eta(\beta,k)$ неравенство $\eta(\beta,k) < \sqrt{k}$ выполняется для некоторых $k > 0$ и $\beta > 0$ тогда и только тогда, когда $4\beta^2 + 4\pi k\beta - \pi^2k^2 < 0$ и $\pi^2k - 4\pi\beta > 0$. Разрешая эти квадратичные относительно β, получим, что величина $\eta(\beta,k)$ корректно определена и неравенства $k,\beta > 0$ и $\eta(\beta,k) < \sqrt{k}$ справедливы тогда и только тогда, когда выполняется предположение (5.75).

Рассмотрим теперь неравенства $\delta_1(\varepsilon,\mu) < 0$ и $\delta_2(\varepsilon,\mu) < 0$. Легко видеть, что они выполняются для некоторых $\varepsilon \in (0,\sqrt{k})$ и $\mu > 0$ тогда и только тогда, когда

$$-k + \frac{4\beta}{\pi} < 0, \quad \sqrt{k} > \varepsilon > \max\left\{\beta\mu, \frac{4\beta}{\mu\pi(\pi k - 4\beta)}\right\}.$$

Минимизируя последнее выражение по $\mu > 0$, с учётом неравенства (5.75) получаем, что $\mu_* = 2/\sqrt{\pi^2 k - 4\pi\beta}$ оптимально и неравенства $\delta_1(\varepsilon, \mu_*) < 0$ и $\delta_2(\varepsilon, \mu_*) < 0$ выполняются для некоторого $\varepsilon \in (0, \sqrt{k})$ тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{k} > \varepsilon > \frac{2\beta}{\sqrt{\pi^2 k - 4\pi\beta}} = \eta(\beta, k).$$

Наконец, легко проверить, что $\delta_3(\varepsilon, \alpha) \leqslant 0$, в частности, если $\alpha = 1/\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \in (0, \sqrt{k})$.

Остаётся проверить, что коэффициент усиления наблюдателя α можно выбрать из интервала (5.76). Действительно, разрешая квадратичное неравенство $\delta_3(\varepsilon, \alpha) \leqslant 0$ относительно α, получаем, что $\alpha \in (\alpha_-(\varepsilon), \alpha_+(\varepsilon))$, где

$$\alpha_\pm(\varepsilon) = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - \varepsilon^2 k}}{\varepsilon k} > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \sqrt{k}).$$

Легко проверить, что $\alpha'_-(\varepsilon) > 0$ и $\alpha'_+(\varepsilon) < 0$ для всех $\varepsilon \in (0, \sqrt{k})$, т. е. интервал $(\alpha_-(\varepsilon), \alpha_+(\varepsilon))$ сужается при увеличении ε. Поэтому для любого α, удовлетворяющего условию (5.76), существует $\eta(\beta, k) < \varepsilon < \sqrt{k}$ такое, что $\alpha \in (\alpha_-(\varepsilon), \alpha_+(\varepsilon))$, т. е. $\delta_3(\varepsilon, \alpha) \leqslant 0$, что и требовалось доказать. □

Покажем, что, заменив в алгоритме управления $u(t) = -\gamma\psi(H(z(t)) - H_*)y(t)$, изученном в предыдущем параграфе, энергию $H(z(t))$ на оценку энергии $H(\widehat{z}(t))$, вычисленную с помощью наблюдателя (5.69)–(5.71), мы получим алгоритм управления, решающий поставленную задачу. Для этого докажем сначала, что энергия решения замкнутой системы будет ограниченной.

Лемма 5.2.1. *Пусть выполняются неравенства* (5.75). *Рассмотрим систему* (5.66)–(5.68) *с алгоритмом управления*

$$u(t) = -\gamma\psi\Big(H(\widehat{z}(t)) - H_*\Big)y(t) \tag{5.85}$$

и наблюдателем (5.69)–(5.71), *где* $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— непрерывная функция такая, что* $\psi(0) = 0$ *и* $\psi(s)s > 0$ *для всех* $s \neq 0$. *Тогда для всех* $\alpha > 0$, *удовлетворяющих* (5.76), *и для всех* $\gamma > 0$ *существует* $H_{\max} > 0$ *такое, что* $H(z(t)) \leqslant H_{\max}$ *и* $H(\widehat{z}(t)) \leqslant H_{\max}$ *для всех* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Обозначим через $\|\cdot\|$ стандартную норму в $\mathrm{L}_2(0,1)$ и пусть $(z(t,x), \widehat{z}(t,x))$ — решение начально-краевой задачи (5.66)–(5.68), (5.69)–(5.71), (5.85). По определениям $E(t)$ и $H(z)$ для всех $t \geqslant 0$ будет

$$\|z_t(t)\| \leqslant \|z_t(t) - \widehat{z}_t(t)\| + \|\widehat{z}_t(t)\| \leqslant \sqrt{2E(t)} + \sqrt{2H(\widehat{z}(t))}.$$

Аналогичное неравенство выполняется для $z_x(t)$. Отсюда, воспользовавшись оценкой для $E(t)$ из теоремы 5.2.3, получим, что существуют $M > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\|z_t(t)\|^2 \leqslant 4ME(0)e^{-\delta t} + 4H(\widehat{z}(t)), \quad \|z_x(t)\|^2 \leqslant \frac{4}{k}ME(0)e^{-\delta t} + \frac{4}{k}H(\widehat{z}(t)).$$

для всех $t \geqslant 0$. Поэтому

$$H(z(t)) \leqslant \frac{1}{2}\|z_t(t)\|^2 + \frac{k}{2}\|z_x(t)\|^2 + 2\beta \leqslant C_1 + C_2 H(\widehat{z}(t)) \tag{5.86}$$

для всех $t \geqslant 0$, где $C_1 = 2\beta + 4ME(0)$ и $C_2 = 4$. Рассуждая аналогичным образом нетрудно проверить, что

$$H(\widehat{z}(t)) \leqslant C_1 + C_2 H(z(t)) \quad \forall t \geqslant 0. \tag{5.87}$$

Зафиксируем произвольное $t_0 \geqslant 0$. Если $H(\widehat{z}(t_0)) \leqslant H_*$, то $H(z(t_0)) \leqslant C_1 + C_2 H_*$ в силу (5.86). Предположим теперь, что $H(\widehat{z}(t_0)) > H_*$. Если $H(\widehat{z}(t)) > H_*$ для всех $t \in [0, t_0]$, то $H(z(t)) \leqslant H(z(0))$ для всех $t \in [0, t_0]$ и $H(\widehat{z}(t_0)) \leqslant C_1 + C_2 H(z(0))$ в силу неравенства (5.87) и того факта, что

$$\frac{d}{dt}H(z(t)) = -\gamma k \psi(H(\widehat{z}(t)) - H_*) z_t(t,1)^2 \leqslant 0 \quad t \in [0, t_0). \tag{5.88}$$

Если $H(\widehat{z}(t_0)) > H_*$, но существует $t \in [0, t_0]$ такое, что $H(\widehat{z}(t)) \leqslant H_*$, то обозначим $\tau = \sup\{t \in [0, t_0] \mid H(\widehat{z}(t)) = H_*\}$. Для всех $t \in (\tau, t_0]$ будет $H(\widehat{z}(t)) > H_*$. Из неравенств (5.86), (5.88) и определения τ следует, что $H(z(t)) \leqslant H(z(\tau)) \leqslant C_1 + C_2 H_*$ для всех $t \in (\tau, t_0]$. Отсюда, воспользовавшись неравенством (5.87), получим, что

$$H(\widehat{z}(t_0)) \leqslant C_1 + C_2 H(z(t_0)) \leqslant C_1 + C_1 C_2 + C_2^2 H_*.$$

Так как $t_0 \geqslant 0$ было выбрано произвольным образом, можно заключить, что $H(z(t)) \leqslant H_{\max}$ и $H(\widehat{z}(t)) \leqslant H_{\max}$ для всех $t \geqslant 0$, где

$$H_{\max} = \max\Big\{H_*, H(z(0)), C_1 + C_2 H_*, C_1 + C_2 H(z(0)), C_1 + C_1 C_2 + C_2^2 H_*\Big\},$$

что и требовалось доказать. $\square$

Предыдущая лемма позволяет доказать экспоненциальную сходимость оценки энергии $H(\widehat{z}(t))$ к энергии исходной системы $H(z(t))$.

Следствие 5.2.1. *Пусть выполняются предположения леммы 5.2.1. Тогда для всех $\alpha > 0$, удовлетворяющих условию (5.76), и для всех $\gamma > 0$ существуют C и $\delta > 0$ такие, что*

$$\big|H(z(t)) - H(\widehat{z}(t))\big| \leqslant C\sqrt{E(0)}e^{-\delta t/2} \quad \forall t \geqslant 0. \tag{5.89}$$

Доказательство. По определению $H(z)$ для всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\max\left\{\|z_t(t)\|, \|z_x(t)\|, \|\widehat{z}_t(t)\|, \|\widehat{z}_x(t)\|\right\} \leqslant C_1 := \sqrt{\max\left\{2, \frac{2}{k}\right\} H_{\max}},$$

где величина $H_{\max} > 0$ определена в лемме 5.2.1. Заметим, что функция $f(s) = s^2/2$ удовлетворяет условию Липшица на интервале $[-C_1, C_1]$ с константой Липшица $L = C_1$. Поэтому для всех $t \geqslant 0$ справедливы следующие неравенства:

$$\left|\frac{1}{2}\|z_t(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|\widehat{z}_t(t)\|^2\right| \leqslant C_1\sqrt{2E(t)}, \quad \left|\frac{k}{2}\|z_x(t)\|^2 - \frac{k}{2}\|\widehat{z}_x(t)\|^2\right| \leqslant kC_1\sqrt{\frac{2}{k}E(t)}. \tag{5.90}$$

Воспользовавшись граничными условиями $z(t, 0) = \widehat{z}(t, 0) = 0$, получим

$$|z(t, x) - \widehat{z}(t, x)| = \left|\int_0^x \big(z_x(t, y) - \widehat{z}_x(t, y)\big)\, dy\right| \leqslant \|z_x(t) - \widehat{z}_x(t)\|$$

для всех $x \in (0, 1)$. Поэтому

$$\left|\int_0^1 \big(\beta(1 - \cos z(t, x)) - \beta(1 - \cos \widehat{z}(t, x))\big)\, dx\right| \leqslant \beta \int_0^1 |z(t, x) - \widehat{z}(t, x)|\, dx \leqslant \beta\sqrt{\frac{2}{k}E(t)}.$$

в силу того, что функция $1 - \cos(\cdot)$ глобально липшицева с константой Липшица $L = 1$. Из предыдущего неравенства и неравенств (5.90) следует, что существует $C_2 > 0$ такое, что $|H(z(t)) - H(\widehat{z}(t))| \leqslant C_2\sqrt{E(t)}$ для всех $t \geqslant 0$. Отсюда с помощью оценки для $E(t)$ из теоремы 5.2.3 мы получаем требуем результат. ☐

Теперь мы можем доказать, что алгоритм управления (5.85) решает поставленную задачу управления энергией в модели синус-Гордона.

Теорема 5.2.4. *Пусть выполняются неравенства* (5.75). *Рассмотрим систему* (5.66)–(5.68) *с алгоритмом управления* (5.85) *и наблюдателем* (5.69)–(5.71), *где* $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— непрерывная функция такая, что* $\psi(0) = 0$ *и* $\psi(s)s > 0$ *для всех* $s \neq 0$. *Предположим, что* $H(z(t)) > 0$ *для всех* $t \geqslant 0$. *Тогда для всех* $H_* > 0$, $\gamma > 0$ *и* $\alpha > 0$, *удовлетворяющих условию* (5.76), *будет* $H(z(t)) \to H_*$ *при* $t \to +\infty$.

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ введём функцию типа Ляпунова

$$V(t) = H(z(t)) + \varepsilon \operatorname{sign}(H(z(t)) - H_*) \int_0^1 x z_t z_x\, dx.$$

Воспользовавшись неравенством $\left|\int_0^1 x z_t z_x\, dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 z_t^2\, dx + \frac{1}{2}\int_0^1 z_x^2\, dx$, получим, что

$$0 \leqslant (1 - \varepsilon k_0)H(z(t)) \leqslant V(t) \leqslant (1 + \varepsilon k_0)H(z(t)) \tag{5.91}$$

для всех $t \geqslant 0$ и $\varepsilon < \min\{1, k\}$, где $k_0 = \max\{1, 1/k\}$.

Для любого $t \geqslant 0$ такого, что $H(z(t)) \neq H_*$, будет

$$\frac{d}{dt}V(t) = -\gamma k\psi(H(\widehat{z}(t)) - H_*)z_t^2(t,1) + \varepsilon\,\mathrm{sign}(H(z(t)) - H_*)\frac{d}{dt}g(t). \tag{5.92}$$

Кроме того, можно показать (см. [207, приложение A]), что

$$\frac{d}{dt}g(t) \leqslant -C_0H(z(t)) + \frac{1}{2}z_t^2(t,1) + \frac{k}{2}z_x^2(t,1) \tag{5.93}$$

для некоторого $C_0 > 0$.

Зафиксируем произвольное $\Delta > 0$. Проверим сначала, что для любого $T > 0$ существует $t \geqslant T$ такое, что $|H(z(t)) - H_*| < \Delta$. Действительно, рассуждая от противного предположим, что существует $T > 0$ такое, что для всех $t \geqslant T$ выполняется неравенство $|H(z(t)) - H_*| \geqslant \Delta$. Предположим, что $H(z(t)) \geqslant H_* + \Delta$ для всех $t \geqslant T$. Справедливость утверждения в случае, когда $H(z(t)) \leqslant H_* - \Delta$ для всех $t \geqslant T$, доказывается аналогичным образом.

По следствию 5.2.1 найдётся $\tau \geqslant T$ такое, что $|H(z(t)) - H(\widehat{z}(t))| \leqslant \Delta/2$ для всех $t \geqslant \tau$, откуда следует, что $H(\widehat{z}(t)) \geqslant H_* + \Delta/2$ для всех $t \geqslant \tau$. Положим

$$\psi_\Delta = \min\left\{\psi(s)\;\middle|\; s \in \left[\frac{\Delta}{2}, K\right]\right\} > 0, \quad \Psi_\Delta = \max\left\{\psi(s)\;\middle|\; s \in \left[\frac{\Delta}{2}, K\right]\right\} < +\infty,$$

где число $K > 0$ таково, что $H(\widehat{z}(t)) \leqslant H_* + K$ для всех $t \geqslant 0$ (такое K существует по лемме 5.2.1). По определениям τ, ψ_Δ и Ψ_Δ будет $0 < \psi_\Delta \leqslant \psi(H(\widehat{z}(t)) - H_*) \leqslant \Psi_\Delta < +\infty$ для всех $t \geqslant \tau$. Отсюда, воспользовавшись неравенствами (5.93) и (5.92), получаем, что

$$\frac{d}{dt}V(t) \leqslant -\varepsilon C_0H(z(t)) - \gamma k\psi_\Delta z_t^2(t,1) + \frac{\varepsilon}{2}z_t^2(t,1) + \frac{\varepsilon k}{2}\gamma^2\Psi_\Delta^2 z_t^2(t,1) \quad \forall t \geqslant \tau.$$

Поэтому для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ будет

$$\frac{d}{dt}V(t) \leqslant -\varepsilon C_0H(z(t)) \leqslant -C_\varepsilon V(t) \quad \forall t \geqslant \tau,$$

где $C_\varepsilon = \varepsilon C_0/(1+\varepsilon k_0)$ (здесь мы воспользовались неравенствами (5.91)). Следовательно, для всех $t \geqslant \tau$ будет $V(t) \leqslant V(\tau)e^{-C_\varepsilon(t-\tau)}$, откуда в силу (5.91) вытекает, что

$$H(z(t)) \leqslant \frac{1+\varepsilon k_0}{1-\varepsilon k_0}H(z(\tau))e^{-C_\varepsilon(t-\tau)} \quad \forall t \geqslant \tau.$$

Таким образом, $H(z(t)) \to 0$ при $t \to \infty$, что противоречит нашему предположению о том, что $H(z(t)) \geqslant H_* + \Delta$ для всех $t \geqslant T$. Таким образом, для всех $T > 0$ существует $t \geqslant T$ такое, что $|H(z(t)) - H_*| < \Delta$.

По следствию 5.2.1 существует $\tau > 0$ такое, что $|H(z(t)) - H(\widehat{z}(t))| \leqslant \Delta/2$ для всех $t \geqslant \tau$. По только что доказанному утверждению существует $t_0 \geqslant \tau$, для которого выполняется неравенство $|H(z(t_0)) - H_*| < \Delta$. Проверим, что

$$\bigl|H(z(t)) - H_*\bigr| \leqslant \Delta \quad \forall t \geqslant t_0. \tag{5.94}$$

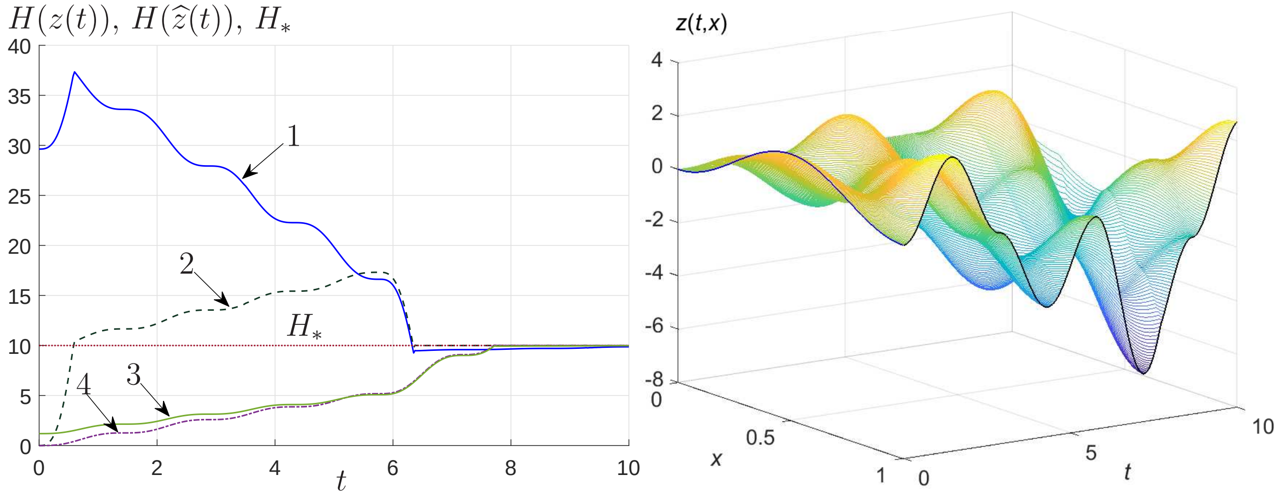


Рис. 5.7: Графики энергии $H(z(t))$, оценки энергии $H(\widehat{z}(t))$ и заданного значения $H_* = 10$ (график слева): 1) $H(z(t))$ при $A = 5$, 2) $H(\widehat{z}(t))$ при $A = 5$, 3) $H(z(t))$ при $A = 1$, 4) $H(\widehat{z}(t))$ при $A = 1$. График справа: $z(t,x)$.

Тогда в силу произвольности выбора $\Delta > 0$ можно заключить, что $H(z(t)) \to H_*$ при $t \to \infty$. Рассуждая от противного, предположим, что $|H(z(T)) - H_*| > \Delta$ для некоторого $T \geqslant t_0$. Предположим также, что $H(z(T)) > H_* + \Delta$. Случай, когда $H(z(T)) < H_* - \Delta$, рассматривается аналогичным образом.

Положим $\theta = \sup\big\{t \in [t_0, T] \;\big|\; H(z(t)) = H_* + \Delta\big\}$. Из определений τ и θ следует, что $H(\widehat{z}(t)) \geqslant H_* + \Delta/2$ для всех $t \in [\theta, T]$. Поэтому

$$\frac{d}{dt}H(z(t)) = -\gamma k \psi\big(H(\widehat{z}(t)) - H_*\big) z_t^2(t,1) \leqslant 0$$

для всех $t \in [\theta, T]$. Следовательно, $H(z(T)) \leqslant H(z(\theta)) = H_* + \Delta$, что противоречит определению T. Таким образом, справедливо неравенство (5.94), из которого следует, что $H(z(t)) \to H_*$ при $t \to +\infty$. $\square$

На рисунке 5.7 приведены результаты численного моделирования системы (5.66)–(5.68) с алгоритмом управления (5.85) и наблюдателем (5.69)–(5.71). В качестве функции ψ в алгоритме управления (5.85) была выбрана функция насыщения $\psi(s) = \mathrm{sat}(100s)$, где $\mathrm{sat}(s) = s$, если $|s| \leqslant 1$, и $\mathrm{sat}(s) = \mathrm{sign}(s)$ в противном случае. Параметры системы были выбраны следующим образом: $k = 0,12$, $\beta = 0,02$, $\gamma = 1$, $\alpha = 3$ и $H_* = 10$. Начальные условия (5.68) были выбраны в виде $z^0(x) = A\big(1 - \cos(2\pi x)\big)$, $z^1(x) = 0$ с $A = 5$ и $A = 1$. Отметим, что $H(z(0)) > H_*$ в случае $A = 5$ и $H(z(0)) < H_*$ при $A = 1$. Начальные условия для наблюдателя (5.69)–(5.71) были выбраны равными нулю. Представленные здесь результаты численного моделирования были получены проф. Б.Р. Андриевским.

Заключение

Приведём краткий обзор результатов, полученных в данной работе. Во введении даётся обзор литературы по теме работы, обсуждается актуальность исследования, его теоретическая и практическая значимость.

В первой главе исследуются глобальные кодифференциалы функций, представимых в виде разности выпуклых функций, и выводятся необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности в терминах глобальных кодифференциалов. Далее разрабатывается исчисление (локальных) кодифференциалов негладких функций, определённых на банаховых пространствах, и исследуются различные свойства кодифференцируемых и квазидифференцируемых функций. Также в этой главе получены достаточные условия метрической регулярности негладких отображений в терминах квазидифференциалов, новое описание выпуклых подконусов контингентного конуса (конуса Булигана) к множеству, заданному квазидифференцируемыми ограничениями равенствами и неравенства, и новые необходимые условия экстремума для негладких задач математического программирования в терминах квазидифференциалов. Здесь же представлена общая теория абстрактно кодифференцируемых отображений между бесконечномерными пространствами, приведены примеры основных конкретных классов абстрактно кодифференцируемых функций, используемых в негладком анализе, и получены условия экстремума в терминах абстрактных кодифференциалов.

Во второй главе исследуются негладкие задачи вариационного исчисления, выводятся легко проверяемые достаточные условия кодифференцируемости негладкого интегрального функционала, определённого на пространстве Соболева, и вычисляются его кодифференциал и квазидифференциал. Далее исследуются условия экстремума для негладких задач вариационного исчисления в терминах кодифференциалов. Получены необходимые условия экстремума для негладкой многомерной классической задачи вариационного исчисления, негладкой задачи Больцы с дополнительными ограничениями на границе и негладкой вариационной задачи с изопериметрическими ограничениями неравенствами. Здесь же приведён ряд примеров, демонстрирующих преимущество необходимых условий экстремума в терминах кодифференциалов, по сравнению с существующими условиями экстремума в терминах различных субдифференциалов.

В третьей главе исследуется метод кодифференциального спуска и его модификации, приводится новая схема метода кодифференциального спуска, доказывается его сходимость к стационарным точкам и сходимость по мере нестационарности. Здесь же рассмотрена квадратичная регуляризация метода кодифференциального спуска для минимизации кодифференцируемых функций на выпуклых множествах. Далее изучается метод гиподифференциального спуска для минимизации выпуклых функций и приводится оценка его скорости сходимости. Наконец, в этой главе также предложен метод глобального кодифференциального спуска для глобальной минимизации кусочно-аффинных функций и показано, что данный метод сходится к точке глобального минимума невыпуклой кусочно-аффинной функции за конечное число шагов.

В главе 4 исследуются вопросы глобальной и локальной точности штрафных функций и модифицированных функций Лагранжа и разрабатывается общий метод доказательства глобальной точности таких функций для конечномерных задач оптимизации, называемый принципом локализации. Затем принцип локализации применяется к изучению глобальной точности различных конкретных классов вспомогательных функций: линейных штрафных функций, модифицированной функции Лагранжа-Рокафеллара-Ветса, сингулярных штрафных функций и точных модифицированных функций Лагранжа-Ди Пилло-Гриппо. Наконец, в данной главе получена общая теорема о полной точности штрафной функции для задач оптимизации в метрических пространствах и рассмотрено применение этой теоремы к задачам управления линейными эволюционными уравнениями с терминальным ограничением.

В главе 5 изучаются негладкие обобщения метода скоростного градиента и приводятся теоремы о сходимости негладких методов скоростного градиента. Здесь же рассматриваются примеры применения этих алгоритмов к задаче стабилизации интегратора Брокетта и задаче синхронизации двух осцилляторов Дуффинга. Наконец, в этой главе изучаются задачи граничного управления энергией в распределённых системах, описываемых полулинейным уравнением Клейна-Гордона, в том числе при наличии только граничных измерений. Рассматриваются гладкие и негладкие алгоритмы скоростного градиента для решения данных задач, исследуется сходимость наблюдателя состояния для уравнения синус-Гордона и приводятся достаточные условия достижимости цели управления.

Дальнейшие теоретические исследования по конструктивному негладкому анализу могут быть посвящены распространению условий экстремума в терминах квазидифференциалов на различные классы негладких задач с коническими ограничениями (в частности, задач с бесконечным числом ограничений и матричными ограничениями) и негладких задач оптимального управления, сравнительному анализу условий экстремума в терминах квазидифференциалов и различных субдифференциалов, а также изучению чувствительности и устойчивости негладких задач оптимизации по отношению к внешним возмущениям.

Дальнейшие прикладные исследования могут вестись в направлении развития численных методов решения негладких задач оптимизации с различными типами невыпуклых ограничений и совершенствовании метода кодифференциального спуска и его модификаций для решения конкретных классов негладких задач. Также представляет интерес подробное исследование эффективных численных методов решения задач условной оптимизации (в том числе задач вариационного исчисления и оптимального управления), основанных на изученных в данной работе штрафных функциях и модифицированных функциях Лагранжа. В частности, необходимо исследовать различные правила автоматической регулировки штрафного параметра, так как в прикладных задачах величина наименьшего точного штрафного параметра чаще всего является неизвестной.

Список обозначений

МГКС — метод глобального кодифференциального спуска;

пн. св. — полунепрерывная сверху;

пн. сн. — полунепрерывная снизу;

УРМФ — условие регулярности Мангасаряна-Фромовица;

DC функция — функция, представимая в виде разности двух собственных замкнутых выпуклых функций

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ — множество неотрицательных вещественных чисел;

$\overline{\mathbb{R}}$ — расширенная вещественная прямая;

0_d — нулевой вектор в пространстве $\mathbb{R}^d$;

$|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^d$;

$\tau_{\mathbb{R}}$ — каноническая топология вещественной прямой;

$\operatorname{cl} A$ — замыкание множества A;

$\operatorname{cl}^* A$ — замыкание подмножества A сопряжённого пространства в слабой* топологии;

$\operatorname{int} A$ — внутренность множества A;

$\operatorname{ri} A$ — относительная внутренность множества A;

$\operatorname{core} A$ — алгебраическая внутренность множества A;

o-lim — порядковый предел в векторной решётке;

$B(x, r)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке x;

$U(x, r)$ — открытый шар радиуса r с центром в точке x;

B_X — замкнутый единичный шар в нормированном пространстве X;

S_X — единичная сфера в нормированном пространстве X;

$\operatorname{dist}(x, A)$ — расстояние от точки x до множества A;

$\rho_H(A, B)$ — расстояние Хаусдорфа между множествами A и B;

0_X — нулевой вектор линейного пространства X;

X^* — пространство, топологически сопряжённое к нормированному пространству X;

w^* — слабая* топология в пространстве, сопряжённом к нормированному;

$\sigma(X^*, X)$ — слабая* топология в пространстве, сопряжённом к пространству X;

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве или билинейная форма на пространстве $X^* \times X$, определённая как $\langle x^*, x\rangle = x^*(x)$;

$\|\cdot\|$ — норма;

$\operatorname{Im}\mathcal{T}$ — образ линейного оператора $\mathcal{T}$;

$\mathcal{T}^*$ — оператор, сопряжённый к линейному оператору $\mathcal{T}$;

$\operatorname{co} A$ — выпуклая оболочка множества A;

$\operatorname{cone} A$ — выпуклая коническая оболочка множества A;

$\operatorname{ext} A$ — множество крайних точек выпуклого множества A;

$\operatorname{span} A$ — линейная оболочка множества A;

$\operatorname{lin} K$ — линейное подмножество выпуклого конуса K (наибольшее линейное подпространство, содержащееся в K);

$s(A, v) = \sup\limits_{x^*\in A}\langle x^*, v\rangle$ — опорная функция подмножества A сопряжённого пространства;

$T_A(x)$ — контингентный конус (конус Булигана) к множеству A в точке x;

$N_A(x)$ — нормальный конус к выпуклому множеству A в точке x;

$\mathbb{S}^\ell$ — множество вещественных симметричных матриц порядка ℓ;

$\operatorname{Tr}(A)$ — след матрицы A;

$\det(A)$ — определитель матрицы A;

$\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{Tr}(A^2)}$ — норма Фробениуса квадратной матрицы A;

$\lambda_{\max}(A)$ — максимальное собственное число симметричной матрицы A;

$\lambda_{\min}(A)$ — минимальное собственное число симметричной матрицы A;

$A \preceq 0$ — матрица A является отрицательно полуопределённой;

$[\cdot]_+$ — оператор проектирования симметричной матрицы на конус вещественных положительно полуопределённых матриц;

$\operatorname{dom} f$ — эффективное множество функции f;

$\operatorname{Graph} F$ — график многозначного отображения F;

$\operatorname*{arg\,min}\limits_{x\in C} f(x)$ — множество точек глобального минимума функции f на множестве C;

S_f — аффинное опорное множество выпуклой функции f;

f^* — преобразование Юнга-Фенхеля функции f (функция, сопряжённая с функцией f);

$\partial f(x)$ — субдифференциал выпуклой функции в точке x;

$\partial_x f(x, y)$ — субдифференциал выпуклой функции $x \mapsto f(x, y)$;

$\partial_\varepsilon f(x)$ — ε-субдифференциал выпуклой функции в точке x;

$D_+V(t)$ — правосторонняя производная функции V в точке t;

$\nabla f(x)$ — градиент функции f в точке x;

$\operatorname{div} f(x)$ — обобщённая дивергенция вектор-функции f в точке x;

$f'(x)$ — производная Гато функции f в точке x;

$f'(x, v)$ — производная по направлениям функции f в точке x по направлению v;

$f^{\downarrow}(x)$ — скорость наискорейшего спуска функции f в точке x;

$f^{\downarrow}_{A}(x)$ — скорость наискорейшего спуска функции f на множестве A в точке x;

$|\nabla f|(x)$ — сильный наклон функции f в точке x;

$Df(x)$ — кодифференциал функции f в точке x;

$\underline{d}f(x)$ — гиподифференциал функции f в точке x;

$\overline{d}f(x)$ — гипердифференциал функции f в точке x;

$\underline{d}_{\nu}f(x)$ — усечённый гиподифференциал функции f в точке x ($\nu \geqslant 0$);

$\overline{d}_{\mu}f(x)$ — усечённый гипердифференциал функции f в точке x ($\mu \geqslant 0$);

$D_x f(x, y)$ — кодифференциал функции $x \mapsto f(x, y)$;

$\underline{d}_x f(x, y)$ — гиподифференциал функции $x \mapsto f(x, y)$;

$\overline{d}_x f(x, y)$ — гипердифференциал функции $x \mapsto f(x, y)$;

$D_H f(x)$ — H-кодифференциал функции f в точке x;

$\underline{d}_H f(x)$ — H-гиподифференциал функции f в точке x;

$\overline{d}_H f(x)$ — H-гипердифференциал функции f в точке x;

$\underline{\partial}_H f(x)$ — H–субдифференциал функции f в точке x;

$\overline{\partial}_H f(x)$ — H–супердифференциал функции f в точке x;

$\mathscr{D}f(x)$ — квазидифференциал функции f в точке x;

$\underline{\partial}f(x)$ — субдифференциал квазидифференцируемой функции f в точке x;

$\overline{\partial}f(x)$ — супердифференциал квазидифференцируемой функции f в точке x;

$[\mathscr{D}f(x)]^{+} = \underline{\partial}f(x) + \overline{\partial}f(x)$ — квазидифференциальная сумма квазидифференцируемой функции f в точке x;

$\mathscr{D}F(x; y^{*})$ — скалярный квазидифференциал вектор-функции F в точке x по отношению к линейному функционалу y^{*};

$\underline{\partial}F(x; y^{*})$ — скалярный субдифференциал скалярно квазидифференцируемой вектор-функции F в точке x по отношению к линейному функционалу y^{*};

$\overline{\partial}F(x; y^{*})$ — скалярный супердифференциал скалярно квазидифференцируемой вектор-функции F в точке x по отношению к линейному функционалу y^{*};

$\partial_{Cl} f(x)$ — субдифференциал Кларка функции f в точке x;

$\partial_{MP} f(x)$ — субдифференциал Мишеля-Пено функции f в точке x;

$\partial^{-} f(x)$ — субдифференциал Дини функции f в точке x;

$\partial_{a} f(x)$ — аппроксимативный субдифференциал функции f в точке x;

$\partial_M f(x)$ — субдифференциал Мордуховича функции f в точке x;

$\partial_{JL} f(x)$ — субдифференциал Джеякумара-Люка функции f в точке x;

$\partial_p^\infty f(x)$ — предельный проксимальный субдифференциал функции f в точке x;

$\partial_F^\infty f(x)$ — предельный субдифференциал Фреше функции f в точке x;

$E^* f(x)$ — верхний экзостер функции f в точке x;

$\partial^2 f(x)$ — обобщённый гессиан $C^{1,1}$ функции f в точке x;

$\mathrm{L}^p(\Omega)$ — пространство измеримых функций, суммируемых со степенью p на Ω при $1 \leqslant p < \infty$ и существенно ограниченных на Ω при $p = \infty$;

$\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ — пространство измеримых вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^m$, каждая компонента которых принадлежит $\mathrm{L}^p(\Omega)$;

$\mathrm{L}^1_{loc}(\Omega)$ — пространство измеримых функций, локально суммируемых на Ω;

$\mathrm{L}^2((0,T); X)$ — пространство, состоящее из всех измеримых функций $u\colon [0,T] \to X$ (здесь X — нормированное пространство) таких, что $\int_0^T \|u(t)\|^2\, dt < +\infty$;

$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ — пространство Соболева ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$);

$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ — пространство функций со значениями в $\mathbb{R}^m$, каждая компонента которых принадлежит $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$;

$\mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbb{R}^m)$ — пространство бесконечно непрерывно дифференцируемых вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^m$ с компактным носителем;

$\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbb{R}^m)$ — замыкание пространства $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbb{R}^m)$ в пространстве Соболева $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$;

$\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d}; \mathrm{div})$ — пространство всех таких функций $u \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d})$, для которых существует обобщённая дивергенция, принадлежащая пространству $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$;

$C^{1,1}$ функция — непрерывно дифференцируемая функция, производные которой являются локально липшицевыми;

$\mathcal{R}(x_0, T)$ — множество достижимости управляемой системы из точки x_0 за время T;

$\mathrm{sign}(x)$ — знак числа x;

$\mathrm{Sign}(\cdot)$ — многозначный аналог функции $\mathrm{sign}(\cdot)$ ($\mathrm{Sign}(0) = [-1, 1]$ и $\mathrm{Sign}(x) = \mathrm{sign}(x)$ при $x \neq 0$);

$\mathrm{sat}(\cdot)$ — функция насыщения со значениями в интервале $[-1, 1]$.

Список литературы

[1] Абанькин, А.Е. Безусловная минимизация H–гипердифференцируемых функций / А.Е. Абанькин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1998. — Т. 38. — № 9. — С. 1500–1508.

[2] Аббасов, М.Э. Условия экстремума в терминах несобственных экзостеров / М.Э. Аббасов // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. — 2011. — Вып. 2. — С. 3–8.

[3] Аббасов, М.Э. Условия экстремума с ограничениями в терминах собственных и несобственных коэкзостеров / М.Э. Аббасов // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. — 2019. — Т. 15. — Вып. 2. — С. 160–172.

[4] Аббасов, М.Э. Условия экстремума негладкой функции в терминах экзостеров и коэкзостеров / М.Э. Аббасов, В.Ф. Демьянов // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2009. — Т. 1. — № 4. — С. 10–19.

[5] Ангелов, Т.А. О вычислении кодифференциалов / Т.А. Ангелов // Вычислительные методы и программирование. — 2013. — Т. 14. — Вып. 1. — С. 113–122.

[6] Ангелов, Т.А. Представление кусочно-аффинных функций в виде разности полиэдральных / Т.А. Ангелов // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. — 2016. — Вып. 1. — С. 4–18.

[7] Андрамонов, М.Ю. Метод доверительных окрестностей для минимизации кодифференцируемых функций / М.Ю. Андрамонов // Известия вузов. Математика. — 2004. — № 1. — С. 3–9.

[8] Андрамонов М.Ю. Реализация аналитического кодифференцирования в пакете MATLAB / М.Ю. Андрамонов, Г.Ш. Тамасян // Вычислительные методы и программирование. — 2007. — Т. 8. — Вып. 1. — С. 1–5.

[9] Андриевский, Б.Р. Алгоритмы скоростного градиента в задачах управления и адаптации / Б.Р. Андриевский, А.А. Стоцкий, А.Л. Фрадков // Автомат. и телемех. — 1988. — Т. 49. — Вып. 12. — С. 3–39.

[10] Басаева, Е.К. Квазидифференциалы в K-пространствах / Е.К. Басаева // Владикавк. матем. журн. — 2003. — Т. 5. — № 3. — С. 14–30.

[11] Басаева, Е.К. Необходимые условия экстремума в векторных квазидифференцируемых программах / Е.К. Басаева // Владикавк. матем. журн. — 2004. — Т. 6. — № 1. — С. 13–25.

[12] Басаева Е.К. Необходимые условия экстремума в векторных квазидифференцируемых экстремальных задачах / Е.К. Басаева // Владикавк. матем. журн. — 2008. — Т. 10. — № 3. — С. 3–10.

[13] Гороховик, В.В. О квазидифференцируемости вещественнозначных функций / В.В. Гороховик // Доклады АН СССР. — 1982. — Т. 266. — № 6. — С. 1294–1298.

[14] Гороховик, В.В. Квазидифференцируемость вещественнозначных функций и условия локального экстремума / В.В. Гороховик // Сибирский матем. журн. — 1984. — Т. 25. — № 3. — С. 62–70.

[15] Гороховик, В.В. Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации / В.В. Гороховик. — Минск: Навука i тэхнiка, 1990. — 239 с.

[16] Гороховик, В.В. Условия оптимальности первого порядка в задачах векторной оптимизации с квазидифференцируемым целевым отображением и нетранзитивным отношением предпочтения / В.В. Гороховик // Доклады АН Беларуси. — 2013. — Т. 47. — № 6. — С. 13–19.

[17] Гороховик, В.В. О представлении полунепрерывных сверху функций, определённых на бесконечномерных нормированных пространствах, в виде нижних огибающих семейств выпуклых функций / В.В. Гороховик // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2017. — Т. 23. — № 1. — С. 88–102.

[18] Гороховик, В.В. Полиэдральная квазидифференцируемость вещественнозначных функций / В.В. Гороховик, О.И. Зорько // Доклады АН Беларуси. — 1992. — Т. 36. — № 5. — С. 393–397.

[19] Гороховик, В.В. Характеристические свойства прямых экзостеров различных классов положительно однородных функций / В.В. Гороховик, М.А. Старовойтова // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2011. — Т. 19. — № 2. — С. 12–25.

[20] Данскин, Дж.М. Теория максимина и её приложения к задачам распределения вооружений / Дж.М. Данскин. — М.: Советское радио, 1970. — 200 с.

[21] Данфорд, Н. Линейные операторы: Общая теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. — М.: Едиториал УРСС, 2010. — 896 с.

[22] Демьянов, В.Ф. К минимизации максимального уклонения / В.Ф. Демьянов // Вестник ЛГУ. Сер. 1. — 1966. — Вып. 2. — № 7. — С. 21–27.

[23] Демьянов, В.Ф. К решению некоторых минимаксных задач. ч. 1 / В.Ф. Демьянов // Кибернетика. — 1966. — № 6. — С. 56–66.

[24] Демьянов, В.Ф. Минимакс: дифференцируемость по направлениям / В.Ф. Демьянов. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. — 112 с.

[25] Демьянов, В.Ф. О кодифференцируемых функциях / В.Ф. Демьянов // Вестник ЛГУ. Сер. 1. — 1988. — Вып. 2. — № 8. — С. 22–26.

[26] Демьянов, В.Ф. Кодифференцируемость и кодифференциалы негладких функций / В.Ф. Демьянов // Доклады АН СССР. — 1988. — Т. 303. — № 5. — С. 1038–1042.

[27] Демьянов, В.Ф. Точные штрафные функции в задачах негладкой оптимизации / В.Ф. Демьянов // Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер. 1. — 1994. — Вып. 4. — № 22. — С. 21–27.

[28] Демьянов, В.Ф. Точные штрафные функции и задачи вариационного исчисления / В.Ф. Демьянов // Автомат. и телемех. — 2004. — Вып. 2. — С. 136–147.

[29] Демьянов, В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление / В.Ф. Демьянов. — М.: Высшая школа, 2005. — 335 с.

[30] Демьянов, В.Ф. Недифферецируемая оптимизация / В.Ф. Демьянов, Л.В. Васильев. — М.: Наука, 1981. — 384 с.

[31] Демьянов, В.Ф. Кодифференцируемые функции в банаховых пространствах: методы и приложения к задачам вариационного исчисления / В.Ф. Демьянов, М.В. Долгополик

// Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. — 2013. — Вып. 3. — С. 48-67.

[32] Демьянов, В.Ф. Введение в минимакс / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малозёмов. — М: Наука, 1972. — 368 с.

[33] Демьянов, В.Ф. Задача оптимального управления с негладкими дифференциальными связями / В.Ф. Демьянов, В.Н. Никулина, И.Р. Шаблинская // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21. — № 8. — С. 1324–1330.

[34] Демьянов, В.Ф. Условия минимума квазидифференцируемой функции на квазидифференцируемом множестве / В.Ф. Демьянов, Л.Н. Полякова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1980. — Т. 20. — № 4. — С. 849–856.

[35] Демьянов, В.Ф. Об одном обобщении понятия субдифференциала / В.Ф. Демьянов, Л.Н. Полякова, А.М. Рубинов // Всесоюзная конференция «Динамическое управление»: тезисы докладов. — Свердловск, 1979. — С. 79–84.

[36] Демьянов, В.Ф. О квазидифференцируемых функционалах / В.Ф. Демьянов, А.М. Рубинов // Доклады АН СССР. — 1980. — Т. 250. — № 1. — С. 21–25.

[37] Демьянов, В.Ф. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление / В.Ф. Демьянов, А.М. Рубинов. — М.: Наука, 1990. — 432 с.

[38] Демьянов, В.Ф. Задачи двухуровневой оптимизации и штрафные функции / В.Ф. Демьянов, Ф. Факкиней // Известия вузов. Математика. — 2003. — № 12. — С. 49–61.

[39] Долгополик, М.В. Неоднородные выпуклые аппроксимации негладких функций / М.В. Долгополик // Известия вузов. Математика. — 2012. — № 12. — С. 34–50.

[40] Долгополик, М.В. Абстрактное кодифференциальное исчисление в нормированных пространствах и его приложения к негладкой оптимизации: дис. на соискание учёной степени канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / Долгополик Максим Владимирович — СПб., 2014. — 140 с.

[41] Евтушенко, Ю.Г. Точные вспомогательные функции в задачах оптимизации / Ю.Г. Евтушенко, В.Г. Жадан // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1990. – Т. 30. — № 1. — С. 43–57.

[42] Ерёмин, И.И. Метод «штрафов» в выпуклом программировании / И.И. Ерёмин // Доклады АН СССР. — 1967. — Т. 173. — № 4. — С. 748–751.

[43] Иоффе, А.Д. Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление / А.Д. Иоффе // Успехи математических наук. — 2000. — Т. 55. — Вып. 3(333). — С. 103–162.

[44] Иоффе, А.Д. О необходимых условиях минимума / А.Д. Иоффе // Фундаментальная и прикладная математика. — 2014. — Т. 19. — Вып. 4. — С. 121–152.

[45] Иоффе, А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. — М.: Наука, 1974. — 481 с.

[46] Кантарович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — СПб: Невский Диалект, 2004. — 816 с.

[47] Карелин, В.В. Штрафные функции в одной задаче управления / В.В. Карелин // Автомат. и телемех. – 2004. — Вып. 3. — С. 137–147.

[48] Кларк, Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. — М.: Наука, 1988. — 280 с.

[49] Кусраев, А.Г. Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. 1. / А.Г. Кусраев, С.С. Кутателадзе. — Новосибирск: Наука, 1992. — 270 с.

[50] Кусраев, А.Г. Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. 2 / А.Г. Кусраев, С.С. Кутателадзе. — Новосибирск: Изд–во Ин–та математики, 2003. — 421 с.

[51] Мирошник, И.В. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами / И.В. Мирошник, В.О. Никифоров, А.Л. Фрадков. — СПб.: Наука, 2000. — 549 с.

[52] Мордухович, Б.Ш. Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления / Б.Ш. Мордухович. — М.: Наука, 1988. — 360 с.

[53] Половинкин, Е.С. Многозначный анализ и дифференциальные включения / Е.С. Половинкин. — М.: Физматлит, 2014. — 522 с.

[54] Половинкин, Е.С. Дифференциальные включения с неограниченной правой частью и необходимые условия оптимальности / Е.С. Половинкин // Труды МИАН. — 2015. — Т. 291. — С. 249–265.

[55] Половинкин, Е.С. Прямой метод Понтрягина для оптимизационных задач с дифференциальными включениями / Е.С. Половинкин // Труды МИАН. — 2019. — Т. 304. — С. 257–272.

[56] Половинкин, Е.С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е.С. Половинкин, М.В. Балашов. — М.: Физматлит, 2007. — 440 с.

[57] Полякова, Л.Н. Необходимые условия экстремума квазидифференцируемых функций / Л.Н. Полякова // Вестник ЛГУ. Сер. 1. — 1980. — № 13. — С. 57–62.

[58] Полякова, Л.Н. Необходимые условия экстремума квазидифференцируемой функции при квазидифференцируемом ограничении / Л.Н. Полякова // Вестник ЛГУ. — 1982. — № 7. — С. 75–80.

[59] Полякова, Л.Н. Достаточное условие локального экстремума квазидифференцируемой функции при квазидифференцируемом ограничении / Л.Н. Полякова // Вестник ЛГУ. — 1985. — № 22. — С. 26–30.

[60] Полякова, Л.Н. О методе точных штрафных квазидифференцируемых функций / Л.Н. Полякова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2001. — Т. 41. — № 2. — С. 225–238.

[61] Пшеничный, Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б.Н. Пшеничный. — М.: Наука, 1980. — 320 с.

[62] Пшеничный, Б.Н. Необходимые условия экстремума / Б.Н. Пшеничный. — М.: Наука, 1982. — 143 с.

[63] Пшеничный, Б.Н. Метод линеаризации / Б.Н. Пшеничный. — М.: Наука, 1983. – 136 с.

[64] Пшеничный, Б.Н. Численные методы в экстремальных задачах / Б.Н. Пшеничный, Ю.М. Данилин. — М.: Наука, 1975. — 320 с.

[65] Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. — М.: Мир, 1973. — 472 с.

[66] Рубинов, А.М. Сублинейные операторы и их приложения / А.М. Рубинов // Успехи математических наук. — 1977. — Т. 32. — № 4. — С. 113–174.

[67] Стрекаловский, А.С. Элементы невыпуклой оптимизации / А.С. Стрекаловский. — Новосибирск: Наука, 2003. — 356 с.

[68] Стрекаловский, А.С. О минимизации разности выпуклых функций на допустимом множестве / А.С. Стрекаловский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2003. — Т. 43. — № 3. — С. 399–409.

[69] Стрекаловский, А.С. Глобальный поиск в задаче оптимального управления с целевым терминальным функционалом, представленным разностью двух выпуклых функций / А.С. Стрекаловский, М.В. Янулевич // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. — Т. 48. — № 7 — С. 1187–1201.

[70] Тамасян, Г.Ш. Нахождение расстояния между эллипсоидами / Г.Ш. Тамасян, А.А. Чумаков // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2014. — Т. 21. — № 3. — С. 87–102.

[71] Удерцо, А. Свойства устойчивости для квазидифференцируемых систем / А. Удерцо // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. — 2006. — Вып. 3. — С. 70–84.

[72] Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1985. — 255 с.

[73] Фрадков, А.Л. Схема скоростного градиента и её применение в задачах адаптивного управления / А.Л. Фрадков // Автомат. и телемех. — 1979. — Т. 40. — Вып. 9. — С. 90–101.

[74] Фрадков, А.Л. Интегродифференцирующие алгоритмы скоростного градиента / А.Л. Фрадков // Доклады АН СССР. — 1986. — Т. 286. — №4. — С. 832–835.

[75] Халил, Х.К. Нелинейные системы / Х.К. Халил. — М.: Ин-т компьютерных исследований, 2009. — 812 с.

[76] Харди, Г.Г. Неравенства / Г.Г. Харди, Д.Е. Литтлвуд, Г. Полиа. — М.: УРСС, 2006. — 456 с.

[77] Эдвардс, Р. Функциональный анализ. Теория и приложения / Р. Эдвардс. — М.: Мир, 1969. — 1072 с.

[78] Экланд, И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. — М.: Мир, 1979. — 400 с.

[79] Abbasov, M.E. Optimality conditions for an exhausterable function on an exhausterable set / M.E. Abbasov // J. Glob. Optim. — 2020. — Vol. 76. — No. 1. — pp. 57–67.

[80] Abbasov, M.E., Demyanov V.F. Proper and adjoint exhauster in nonsmooth analysis: optimality conditions / M.E. Abbasov // J. Glob. Optim. — 2013. — Vol. 56. — No. 2. — pp. 569–585.

[81] Abbasov, M.E. Adjoint coexhausters in nonsmooth analysis and extremality conditions / M.E. Abbasov, V.F. Demyanov // J. Optim. Theory Appl. — 2013. — Vol. 156. — No. 3. — pp. 535–553.

[82] Adams, R.A. Sobolev Spaces / R.A. Adams. — New York: Academic Press, 1975. — 268 p.

[83] Addi, K. A qualitative mathematical analysis of a class of linear variational inequalities via semi-complementarity problem: applications in electronics / K. Addi, B. Brogliato, D. Goeleven // Math. Program. — 2011. — Vol. 126. — No. 1. — pp. 31–67.

[84] Alanis, A.Y. Inverse optimal control with speed gradient for a power electric system using a neural reduced model / A.Y. Alanis, E.A. Lastire, N. Arana-Daniel, C. Lopez-Franco // Mathematical Problems In Engineering. — 2014. — Vol. 2014. — Article ID: 514608. — pp. 1–21.

[85] Antczak, T. Optimality conditions in quasidifferentiable vector optimization / T. Antczak // J. Optim. Theory Appl. — 2016. — Vol. 171. — No. 2. — pp. 708–725.

[86] Aubin, J.–P. Differential Inclusions / J.-P. Aubin, A. Cellina. — Berlin: Springer–Verlag, 1984. — 364 p.

[87] Aubin, J.–P. Set–Valued Analysis / J.-P. Aubin, H. Frankowska. — Boston: Birkhauser, 1990. — 461 p.

[88] Auslender, A. Stability in mathematical programming with non-differentiable data / A. Auslender // SIAM J. Control Optim. — 1984. — Vol. 22. — No. 2. — pp. 239–254.

[89] Azé, D. A unified theory for metric regularity of multifunctions / D. Azé // J. Convex Anal. — 2006. — Vol. 13. — No. 2. — pp. 225–252.

[90] Bagriov, A.M. Numerical methods for minimizing quasidifferentiable functions: a survey and comparison / A.M. Bagirov // Quasidifferentiability and Related Topics / V.F. Demyanov, A.M. Rubinov. — Dordrecht, 2000. — pp. 33–71.

[91] Bagirov, A. A method for minimization of quasidifferentiable functions / A. Bagirov // Optim. Methods Softw. — 2002. — Vol. 17. — No. 1. — pp. 31-60.

[92] Numerical Nonsmooth Optimization / editors A.M. Bagirov, M. Gaudioso, N. Karmitsa, M.M. Mäkelä, S. Taheri. — Cham: Springer, 2020. — 715 p.

[93] Bagirov, A.M. Discrete gradient method: derivative-free method for nonsmooth optimization / A.M. Bagirov, B. Karasözen, M. Sezer // J. Optim. Theory Appl. — 2008. — Vol. 137. — No. 2. — pp. 317–334.

[94] Bagirov, A. Introduction to Nonsmooth Optimization / A. Bagirov, N. Karmitsa, M.M. Mäkelä. — Cham: Springer, 2014. — 390 p.

[95] Bagirov, A. M. Truncated codifferential method for nonsmooth convex optimization / A.M. Bagirov, A. Nazari Ganjehlou, J. Ugon, A.H. Tor // Pacific J. Optim. — 2010. — Vol. 6. — No. 3. — pp. 483–496.

[96] Bagirov, A.M. A multidimensional descent method for global optimization / A.M. Bagirov, A.M. Rubinov, J. Zhang // Optim. — 2009. — Vol. 58. — No. 5. pp. 611–625.

[97] Bagirov, A.M. Codifferential method for minimizing DC functions / A.M. Bagirov, J. Ugon // J. Glob. Optim. — 2011. — Vol. 50. — No. 1. — pp. 3–22.

[98] Baier, R. Directed subdifferentiable functions and the directed subdifferential without delta-convex structure / R. Baier, E. Farkhi, V. Roshchina // J. Optim. Theory Appl. — 2014. — Vol. 160. — No. 2. — pp. 391–414.

[99] Baier, R. From quasidifferentiable to directed subdifferentiable functions: exact calculus rules / R. Baier, E. Farkhi, V. Roshchina // J. Optim. Theory Appl. — 2016. — Vol. 171. — No. 2. — pp. 384–401.

[100] Basaeva, E.K. Quasidifferentials in Kantorovich Spaces / E.K. Basaeva, A.G. Kusraev, S.S. Kutateladze // J. Optim. Theory Appl. — 2016. — Vol. 171. — No. 2. — pp. 365–383.

[101] Bellaassali, S. Contributions à l'optimisation multicretère: PhD thesis. Université de Bourgogne, Laboratoire Analyse Appliquée et Optimisation / S. Bellaassali. — Dijon, France, 2003. — 108 p.

[102] Bertsekas, D.P. Necessary and sufficient conditions for a penalty method to be exact / D.P. Bertsekas // Math. Program. — 1975. — Vol. 9. — No. 1. — pp. 87–99.

[103] Bigi, G. Outer approximation algorithms for canonical DC problems / G. Bigi, A. Frangioni, Q. Zhang // J. Glob. Optim. — 2010. — Vol. 46. — No. 2. — pp. 163–189.

[104] Bigi, G. Approximate optimality conditions and stopping criteria in canonical DC programming / G. Bigi, A. Frangioni, Q. Zhang // Optim. Methods Softw. — 2010. — Vol. 25. — No. 1. — pp. 19–27.

[105] Birgin, E.G. Practical Augmented Lagrangian Methods for Constrained Optimization / E.G. Birgin, J.M. Martinez. — Philadelphia: SIAM, 2014. — 234 p.

[106] Blanquero, R. On covering methods for D.C. optimization / R. Blanquero, E. Carrizosa // J. Glob. Optim. — 2000. — Vol. 18. — No. 3. — pp. 265–274.

[107] Bogachev, V.I. Measure Theory. Volume I / V.I. Bogachev. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. — 517 p.

[108] Bonnans, J.F. Perturbation Analysis of Optimization Problems / J.F. Bonnans, A. Shapiro. — New York: Springer, 2000. — 618 p.

[109] Borwein, J.M. Stability and regular points of inequality systems / J.M. Borwein // J. Optim. Theory Appl. — 1986. — Vol. 48. — No. 1. — pp. 9–52.

[110] Borwein, J.M. The differentiability of real functions on normed linear space using generalized subgradients / J.M. Borwein, S.P. Fitzpatrick, J.R. Giles // J. Math. Anal. Appl. — 1987. — Vol. 128. — No. 2. — pp. 512–534.

[111] Borwein, J. Notions of relative interior in Banach spaces / J. Borwein, R. Goebel // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 115. — No. 4. — pp. 2542–2553.

[112] Borwein, J.M. Partially finite convex programming, Part I: Quasi relative interiors and duality theory / J.M. Borwein, A.S. Lewis // Math. Program. — 1992. — Vol. 57. — No. 1–3. — pp. 15–48.

[113] Brockett, R.W. Asymptotic stability and feedback stabilization / R.W. Brockett // Differential Geometric Control Theory / R.W. Brockett, R.S. Millman, H.J. Sussmann. — Boston, 1983. — pp. 181–191.

[114] Burachik, R.S. Duality and exact penalization for general augmented Lagrangians / R.S. Burachik, A.N. Iusem A.N., J.G. Melo // J. Optim. Theory Appl. — 2010. — Vol. 147. — No. 1. — pp. 125–140.

[115] Burachik, R.S. Abstract convexity and augmented Lagrangians / R.S. Burachik, A. Rubinov // SIAM J. Optim. — 2007. — Vol. 18. — No. 2. — pp. 413–436.

[116] Burachik, R.S. Existence of augmented Lagrange multipliers for semi-infinite programming problems / R.S. Burachik, X.Q. Yang, Y.Y. Zhou // J. Optim. Theory Appl. — 2017. — Vol. 173. — No. 2. — pp. 471–503.

[117] Burke, J.V. An exact penalization viewpoint on constrained optimization / J.V. Burke // SIAM J. Control Optim. — 1991. — Vol. 29. — No. 4. — pp. 968–998.

[118] Burke, J.V. A robust gradient sampling algorithm for nonsmooth, nonconvex optimization / J.V. Burke, A.S. Lewis, M.L. Overton // SIAM J. Optim. — 2005. — Vol. 15. — No. 3. — pp. 751–779.

[119] Cheng, G. On feedback control of chaotic continuous-time systems / G. Cheng, X. Dong // IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundam. Theory Appl. — 1993. — Vol. 40. — No. 9. — pp. 591-601.

[120] Clarke, F.H. The Euler–Lagrange differential inclusion / F.H. Clarke // J. Differ. Equ. — 1975. — Vol. 19. — No. 1. — pp. 80–90.

[121] Clarke, F.H. The generalized problem of Bolza / F.H. Clarke // SIAM J. Control Optim. — 1976. — Vol. 14. — No. 4. — pp. 682–699.

[122] Clarke, F.H. The Erdmann condition and Hamiltonian inclusions in optimal control and the calculus of variations / F.H. Clarke // Canadian J. Math. — 1980. — Vol. 32. — No. 2. — pp. 494–509.

[123] Clarke, F. Necessary Conditions in Dynamic Optimization / F.H. Clarke. — Providence, Rhode Island: AMS, 2005. — 113 p.

[124] Clarke, F. Discontinuous feedback and nonlinear systems / F. Clarke // IFAC Proc. Vol. — 2010. — Vol. 43. — No. 14. — pp. 1–29.

[125] Clarke, F.H. The nonsmooth maximum principle / F.H. Clarke, M.R. de Pinho // Control and Cybernetics. — 2009. — Vol. 38. — No. 4A. — pp. 1151–1167.

[126] Clarke, F.H. Nonsmooth Analysis and Control Theory / F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski. — New York: Springer–Verlag, 1998. — 278 p.

[127] Cominetti, R. Metric regularity, tangent sets, and second-order optimality conditions / R. Cominetti // Appl. Math. Optim. — 1990. — Vol. 21. — No. 1. — pp. 265–287.

[128] Conn, A.R. Introduction to Derivative-Free Optimization / A.R. Conn, K. Scheinberg, L.N. Vicente. — Philadelphia: SIAM, 2009. — 276 p.

[129] Contaldi, G. A continuously differentiable exact penalty function for nonlinear programming problems with unbounded feasible set / G. Contaldi, G. Di Pillo, S. Lucidi // Oper. Res. Lett. — 1993. — Vol. 14. — No. 3. — pp. 153–161.

[130] Curtis, F.E. An adaptive gradient sampling algorithm for non-smooth optimization / F.E. Curtis, X. Que // Optim. Methods Softw. — 2013. — Vol. 28. — No. 6. — pp. 1302–1324.

[131] Dacorogna, B. Direct Methods in the Calculus of Variations / B. Dacorogna. — New York: Springer, 2008. — 634 p.

[132] Danskin, J.M. The theory of max-min, with applications / J.M. Danskin // SIAM J. Appl. Math. — 1966. — Vol. 14. — No. 4. — pp. 641–664.

[133] De Giorgi, E. Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza / E. De Giorgi, A. Marino, M. Tosques // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisische, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Series 8. — 1980. — Vol. 68. — No. 3. — pp. 180-187.

[134] Demyanov, V.F. Continuous generalized gradients for nonsmooth functions / V.F. Demyanov // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 304 / A. Kurzhanski, K. Neumann and D. Pallaschke. — Berlin, 1988. — pp. 24–27.

[135] Demyanov, V.F. Smoothness of nonsmooth functions / V.F. Demyanov // Nonsmooth Optimization and Related Topics / F.H. Clarke, V.F. Demyanov, F. Giannessi. — Boston, 1989. — pp. 79–88.

[136] Demyanov, V.F. Nonsmooth problems in calculus of variations / V.F. Demyanov // Advances in Optimization / W. Oettli, D. Pallaschke. — Berlin, Heidelberg, 1992. — pp. 227–238.

[137] Demyanov, V.F. Fixed point theorem in nonsmooth analysis and its applications / V.F. Demyanov // Numer. Funct. Anal. Optim. — 1995. — Vol. 16. — No. 1–2. pp. 53–109.

[138] Demyanov, V.F. Exhausters of a positively homogeneous function / V.F. Demyanov // Optim. — 1999. — Vol. 45. — Nos. 1–4. — pp. 13–29.

[139] Demyanov, V.F. Exhausters and convexificators — new tools in nonsmooth analysis / V.F. Demyanov // Quasidifferentiability and Related Topics / V.F. Demyanov, A.M. Rubinov. — Dordrecht, 2000. — pp. 85–137.

[140] Demyanov, V.F. Conditions for an extremum in metric spaces / V.F. Demyanov // J. Glob. Optim. — 2000. — Vol. 17. — Nos. 1–4. — pp. 55–63.

[141] Demyanov, V.F. Constrained problems of calculus of variations via penalization technique / V.F. Demyanov // Equilibrium Problems and Variational Models / P. Daniele, F. Giannessi, A. Maugeri. — Boston, 2003. — pp. 79–108.

[142] Demyanov, V.F. An old problem and new tools / V.F. Demyanov // Optim. Methods Softw. — 2005. — Vol. 20. — No. 1. — pp. 53–70.

[143] Demyanov, V.F. Nonsmooth optimization / V.F. Demyanov // Nonlinear optimization / G. Di Pillo, F. Schoen. — Berlin, 2010. — pp. 55–163

[144] Demyanov, V.F. Proper exhausters and coexhausters in nonsmooth analysis / V.F. Demyanov // Optim. — 2012. — Vol. 61. — No. 11. — pp. 1347–1368.

[145] Demyanov, V.F. A method of truncated codifferential with application to some problems of cluster analysis / V.F. Demyanov, A.M. Bagirov, A.M. Rubinov // J. Glob. Optim. — 2002. — Vol. 23. — No. 1. — pp. 63–80.

[146] Demyanov, V.F. Exact penalization via Dini and Hadamard conditional derivatives / V.F. Demyanov, G. Di Pillo, F. Facchinei // Optim. Methods Softw. — 1998. — Vol. 9. — No. 1–3. — pp. 19–36.

[147] Quasidifferential Calculus / editors V.F. Demyanov, L.C.W. Dixon. — Berlin, Heidelberg: Springer, 1986. — 222 p.

[148] Demyanov, V.F. Variational problems with constraints involving higher-order derivatives / V.F. Demyanov, F. Giannessi // Equilibrium Problems and Variational Models / P. Daniele, F. Giannessi, A. Maugeri. — Boston, 2003. — pp. 109–134.

[149] Demyanov, V.F. Optimal control problems via exact penalty functions / V.F. Demyanov, F. Giannessi, V.V. Karelin // J. Glob. Optim. — 1998. — Vol. 12. — No. 3. — pp. 215–223.

[150] Demyanov, V.F. Optimal control problems and penalization / V.F. Demyanov, F. Giannessi, V.V. Karelin // Nonlinear Optimization and Related Topics / G. Di Pillo, F. Giannessi. — Boston, 2000. — pp. 67–78.

[151] Demyanov, V.F. On the penalization approach to optimal control problems / V.F. Demyanov, F. Giannessi, V. Karelin // IFAC Proc. Vol. — 2000. — Vol. 33. — No. 16. — pp. 71–74.

[152] Demyanov, V.F. Variational control problems with constraints via exact penalization / V.F. Demyanov, F. Giannessi, G.Sh. Tamasyan // Variational Analysis and Applications / F. Giannessi, A. Maugeri. — Boston, 2005. — pp. 301–342.

[153] Demyanov, V.F. Hunting for a smaller convex subdifferential / V.F. Demyanov, V. Jeyakumar // J. Glob. Optim. — 1997. — Vol. 10. — No. 3. — pp. 305–326.

[154] Demyanov, V.F. Quasidifferentiable functions in optimal control / V.F. Demyanov, V.N. Nikulina, I.R. Shablinskaya // Quasidifferential Calculus / V.F. Demyanov, L.C.W. Dixon. — Berlin, 1986. — pp. 160–175.

[155] Demyanov, V.F. Constrained optimality conditions in terms of upper and lower exhausters / V.F. Demyanov, V.A. Roshchina // Appl. Comput. Math. — 2005. — Vol. 4. — No. 2. — pp. 25–35.

[156] Demyanov, V.F. Optimality conditions in terms of upper and lower exhausters / V.F. Demyanov, V.A. Roshchina // Optim. — 2006. — Vol. 55. — Nos. 5–6. — pp. 525–540.

[157] Demyanov, V.F. Exhausters, optimality conditions and related problems / V.F. Demyanov, V.A. Roshchina // J. Glob. Optim. — 2008. — Vol. 40. — Nos. 1–3. — pp. 71–85.

[158] Demyanov, V.F. Exhausters and subdifferentials in non-smooth analysis / V.F. Demyanov, V. Roshchina // Optim. — 2008. — Vol. 57. — No. 1. — pp. 41–56.

[159] Demyanov, V.F. On quasidifferentiable mappings / V.F. Demyanov, A.M. Rubinov // Mathematische Operationforschung und Statistik, Series Optimization. — 1983. — Vol. 14. — No. 1. — pp. 3–21.

[160] Quasidifferentiability and Related Topics / editors V.F. Demyanov, A.M. Rubinov. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. — 414 p.

[161] Demyanov, V.F. Exhausters, coexhausters and converters in nonsmooth analysis / V.F. Demyanov, J.A. Ryabova // Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2011. — Vol. 31. — No. 4. — pp. 1273–1292.

[162] Demyanov, V.F. Quasidifferentiability and nonsmooth modelling in mechanics, engineering and economics / V.F. Demyanov, G. Stavroulakis, L.N. Polyakova, P.D. Panagiotopoulos. — Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers, 1996. — 348 p.

[163] Demyanov, V.F. Exact penalty functions in isoperimetric problems / V.F. Demyanov, G.Sh. Tamasyan // Optim. — 2011. — Vol. 60. — No. 8. — pp. 1-25.

[164] Demyanov, V.F. Direct methods in the parametric moving boundary variational problem / V.F. Demyanov, G.Sh. Tamasyan // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2014. — Vol. 35. — No. 7–9. — pp. 934–961.

[165] Di, S. Classical optimality conditions under weaker assumptions / S. Di // SIAM J. Optim. — 1996. — Vol. 6. — No. 1. — pp. 178–197.

[166] Di, S. Contingent cone to a set defined by equality and inequality constraints at a Fréchet differentiable point / S. Di, R. Poliquin // J. Optim. Theory Appl. — 1994. — Vol. 81. — No. 3. — pp. 469–478.

[167] Di Pillo, G. Exact penalty methods / G. Di Pillo // Algorithms for Continuous Optimization: the State of the Art / E. Spedicato. — Boston, 1994. — pp. 1–45.

[168] Di Pillo, G. Exact barrier function methods for Lipschitz programs / G. Di Pillo, F. Facchinei // Appl. Math. Optim. — 1995. — Vol. 32. — No. 1. — pp. 1–31.

[169] Di Pillo, G. A new class of augmented Lagrangians in nonlinear programming / G. Di Pillo, L. Grippo // SIAM J. Control Optim. — 1979. — Vol. 17. — No. 5. — pp. 618–628.

[170] Di Pillo, G. A new augmented Lagrangian function for inequality constraints in nonlinear programming problems / G. Di Pillo, L. Grippo // J. Optim. Theory Appl. — 1982. — Vol. 36. — No. 4. — pp. 495–519.

[171] Di Pillo, G. A continuously differentiable exact penalty function for nonlinear programming problems with inequality constraints / G. Di Pillo, L. Grippo // SIAM J. Control Optim. — 1985. — Vol. 23. — No. 1. — pp. 72–84.

[172] Di Pillo, G. On the exactness of a class of nondifferentiable penalty functions / G. Di Pillo, L. Grippo // J. Optim. Theory Appl. — 1988. — Vol. 57. — No. 3. — pp. 399–410.

[173] Di Pillo, G. Exact penalty functions in constrained optimization / G. Di Pillo, L. Grippo // SIAM J. Control Optim. — 1989. — Vol. 27. — No. 6. — pp. 1333-1360.

[174] Di Pillo, G. An exact penalty-Lagrangian approach for large-scale nonlinear programming / G. Di Pillo, G. Liuzzi, S. Lucidi // Optim. — 2011. — Vol. 60. — Nos. 1–2. — pp. 223–252.

[175] Di Pillo, G. An exact augmented Lagrangian function for nonlinear programming with two-sided constraints / G. Di Pillo, G. Liuzzi, S. Lucidi, L. Palagi // Comput. Optim. Appl. — 2003. — Vol. 25. — Nos. 1–3. — pp. 57–83.

[176] Di Pillo, G. On exact augmented Lagrangian functions in nonlinear programming / G. Di Pillo, S. Lucidi // Nonlinear Optimization and Applications / G. Di Pillo, F. Giannessi. — New York, 1996. — pp. 85–100.

[177] Di Pillo, G. An augmented Lagrangian function with improved exactness properties / G. Di Pillo, S. Lucidi // SIAM J. Optim. — 2001. — Vol. 12. — No. 2. — pp. 376–406.

[178] Di Pillo, G. An exact penalty-Lagrangian approach for a class of constrained optimization problems with bounded variables / G. Di Pillo, S. Lucidi, L. Palagi // Optim. — 1993. — Vol. 28. — No. 2. — pp. 129–148.

[179] Dolgopolik, M.V. Codifferential calculus in normed spaces / M.V. Dolgopolik // J. Math. Sci. — 2011. — Vol. 173. — No. 5. — pp. 441–462.

[180] Dolgopolik, M.V. Nonsmooth problems of calculus of variations with a codifferentiable integrand / M.V. Dolgopolik // Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы: тезисы докладов международной конференции. — СПб., 2012. — С.46–48.

[181] Dolgopolik, M.V. Nonsmooth problems of calculus of variations via codifferentiation / M.V. Dolgopolik // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. — 2014. — Vol. — 20. — No. 4. — pp. 1153–1180.

[182] Dolgopolik, M.V. Abstract convex approximations of nonsmooth functions / M.V. Dolgopolik // Optim. — 2014. — Vol. 64. — No. 7. — pp. 1439–1469.

[183] Dolgopolik, M.V. A unifying theory of exactness of linear penalty functions / M.V. Dolgopolik // Optim. — 2016. — Vol. 65. — No. 6. — pp. 1167–1202.

[184] Dolgopolik, M.V. Smooth exact penalty functions: a general approach / M.V. Dolgopolik // Optim. Lett. — 2016. — Vol. 10. — No. 3. — pp. 635–648.

[185] Dolgopolik, M.V. Smooth exact penalty functions II: a reduction to standard exact penalty functions / M.V. Dolgopolik // Optim. Lett. — 2016. — Vol. 10. — No. 7. — pp. 1541–1560.

[186] Dolgopolik, M.V. A unifying theory of exactness of linear penalty functions II: parametric exact penalty functions / M.V. Dolgopolik // Optim. — 2017. — Vol. 66. — No. 10. — pp. 1577–1622.

[187] Dolgopolik, M.V. Existence of augmented Lagrange multipliers: reduction to exact penalty function and localization principle // Math. Program. — 2017. — Vol. 166. — No. 1–2. — pp. 297–326.

[188] Dolgopolik, M. Convergence analysis of the method of codifferential descent / M. Dolgopolik // Тезисы докладов международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвящённой памяти профессора В.Ф. Демьянова. Часть II. — СПб., 2017. — С. 17–21.

[189] Dolgopolik, M.V. A convergence analysis of the method of codifferential descent / M.V. Dolgopolik // Comput. Optim. Appl. — 2018. — Vol. 71. — No. 3. — pp. 879–913.

[190] Dolgopolik, M.V. Augmented Lagrangian functions for cone constrained optimization: the existence of global saddle points and exact penalty property / M.V. Dolgopolik // J. Glob. Optim. — 2018. — Vol. 71. — No. 2. — pp. 237–296.

[191] Dolgopolik, M.V. A unified approach to the global exactness of penalty and augmented Lagrangian functions I: parametric exactness / M.V. Dolgopolik // J. Optim. Theory Appl. — 2018. — Vol. 176. — No. 3. — pp. 728–744.

[192] Dolgopolik, M.V. A unified approach to the global exactness of penalty and augmented Lagrangian functions II: extended exactness / M.V. Dolgopolik // J. Optim. Theory Appl.. — 2018. — Vol. 176. — No. 3. — pp. 744–762.

[193] Dolgopolik, M.V. Method of codifferential descent for global d.c. optimization / M.V. Dolgopolik // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация. Материалы международной научной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина. — Минск, 2018. — С. 14-15.

[194] Dolgopolik, M.V. The method of codifferential descent for convex and global piecewise affine optimization / M.V. Dolgopolik // Optim. Methods Softw. — 2020. — Vol. 35. — No. 6. — pp. 1191–1222.

[195] Dolgopolik, M.V. Metric regularity of quasidifferentiable mappings and optimality conditions for nonsmooth mathematical programming problems / M.V. Dolgopolik // Set-Valued and Variational Analysis. — 2020. — Vol. 28. — No. 3. — pp. 427–449.

[196] Dolgopolik, M.V. Exact penalty functions for optimal control problems II: exact penalization of terminal and pointwise state constraints / M.V. Dolgopolik // Optim. Control. Appl. Methods. — 2020. — Vol. 41. — No. 3. — pp. 898–947.

[197] Dolgopolik, M.V. New global optimality conditions for nonsmooth DC optimization problems / M.V. Dolgopolik // J. Glob. Optim. — 2020. — Vol. 76. — No. 1. — pp. 25–55.

[198] Dolgopolik, M.V. A new constraint qualification and sharp optimality conditions for nonsmooth mathematical programming problems in terms of quasidifferentials / M.V. Dolgopolik // SIAM J. Optim. — 2020. — Vol. 30. — No. 3. — pp. 2603–2627.

[199] Dolgopolik, M.V. Constrained nonsmooth problems of the calculus of variations / M.V. Dolgopolik // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. — 2021. — Vol. 27. — Article number 79. — pp. 1–35.

[200] Dolgopolik, M.V. Exact penalty functions for optimal control problems I: main theorem and free-endpoint problems / M.V. Dolgopolik, A.V. Fominyh // Optim. Control. Appl. Methods. — 2019. — Vol. 40. — No. 6. — pp. 1018–1044.

[201] Dolgopolik, M.V. Nonsmooth speed-gradient algorithms / M.V. Dolgopolik, A.L. Fradkov // Proceedings of the European Control Conference (ECC 2015). — Austria, Linz, 2015. — pp. 998–1002.

[202] Dolgopolik, M.V. Speed-gradient control of the Brockett integrator / M.V. Dolgopolik, A.L. Fradkov // SIAM J. Control Optim. — 2016. — Vol. 54. — No. 4. — pp. 2116–2131.

[203] Dolgopolik, M.V. Nonsmooth and discontinuous speed-gradient algorithms / M.V. Dolgopolik, A.L. Fradkov // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. — 2017. — Vol. 25. — pp. 99–113.

[204] Dolgopolik, M.V. Energy tracking for the sine-Gordon equation with dissipation via boundary control / M.V. Dolgopolik, A.L. Fradkov // Proceedings of the 2018 European Control Conference (ECC 2018). — Cyprus, Limassol, 2018. — pp. 3025–3030.

[205] Dolgopolik, M.V. Finite-differential nonsmooth speed-gradient control: stability, passivity, robustness / M.V. Dolgopolik, A.L. Fradkov // SIAM J. Control Optim. — 2021. — Vol. 59. — No. 2. — pp. 1370–1392.

[206] Dolgopolik, M.V. Boundary energy control of the sine-Gordon equation / M.V. Dolgopolik, A.L. Fradkov, B.R. Andrievsky // IFAC-PapersOnLine. — 2016. — Vol. 49. — No. 14. — pp. 148–153.

[207] Dolgopolik, M.V. Boundary energy control of a system governed by the nonlinear Klein-Gordon equation / M.V. Dolgopolik, A.L. Fradkov, B. Andrievsky // Math. Control, Signals, Syst. — 2018. — Vol. 30. — No. 1. — Article number: 7. — pp. 1–21.

[208] Dolgopolik, M. Observer-based boundary control of the sine-Gordon model energy / M. Dolgopolik, A.L. Fradkov, B. Andrievsky // Automatica. — 2020. — Vol. 113. — Article ID: 108682. — pp. 1–9.

[209] Dür, M. Necessary and sufficient global optimality conditions for convex maximization revisited / M. Dür, R. Horst, M. Locatelli // J. Math. Anal. Appl. — 1998. — Vol. 217. — No. 2. — pp. 637–649.

[210] Ekeland, I. On the variational principle / I. Ekeland // J. Math. Anal. Appl. — 1974. — Vol. 47. — No. 2. — pp. 324–353.

[211] Evans, J.P. Exact penalty functions in nonlinear programming / J.P. Evans, F.J. Gould, J.W. Tolle // Math. Program. — 1973. — Vol. 4. — No. 1. — pp. 72–97.

[212] Evtushenko, Yu.G. General lagrange-type functions in constrained global optimization Part I: auxiliary functions and optimality conditions / Yu.G. Evtushenko, A.M. Rubinov, V.G. Zhadan // Optim. Methods Softw. — 2001. — Vol. 16. — No. 1–4. — pp. 193–230.

[213] Evtushenko, Yu.G. General lagrange-type functions in constrained global optimization Part II: Exact auxiliary functions / Yu.G. Evtushenko, A.M. Rubinov, V.G. Zhadan // Optim. Methods Softw. — 2001. — Vol. 16. — No. 1–4. — pp. 231–256.

[214] Evtushenko, Y.G. Exact auxiliary functions in non-convex optimization / Y.G. Evtushenko, V.G. Zhadan // Advances in Optimization / W. Oettli, D. Pallaschke. — Berlin, Heidelberg, 1992. — pp. 217–226.

[215] Ferrer, A. Improving the efficiency of DC global optimization methods by improving the DC representation of the objective function / A. Ferrer, J.E. Martínez-Legaz // J. Glob. Optim. — 2009. — Vol. 43. — No. 4. — pp. 513–531.

[216] Fletcher, R. A class of methods for nonlinear programming with termination and convergence properties / R. Fletcher // Integer and nonlinear programming / J. Abadie. — Amsterdam, 1970. — pp. 157–173.

[217] Fletcher, R. An exact penalty function for nonlinear programming with inequalities / R. Fletcher // Math. Program. — 1973. — Vol. 5. — No. 1. — pp. 129–150.

[218] Folland, G.B. Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications / G.B. Folland. — New York: Interscience Publishers, 1984. — 364 p.

[219] Fominyh, A.V. Application of the hypodifferential descent method to the problem of constructing an optimal control / A.V. Fominyh, V.V. Karelin, L.N. Polyakova // Optim. Lett. — 2018. — Vol. 12. — No. 8. — pp. 1825–1839.

[220] Fradkov, A.L. Speed gradient control of chaotic continuous-time systems / A.L. Fradkov, A.Yu. Pogromsky // IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundam. Theory Appl. — 1996. — Vol. 43. — No. 11. — pp. 907-913.

[221] Fridman, E. Observers and initial state recovering for a class of hyperbolic systems via Lyapunov method / E. Fridman // Automatica. — 2013. — Vol. 49. — No. 7. — pp. 2250–2260.

[222] Fridman, E. New stability and exact observability conditions for semilinear wave equations / E. Fridman, M. Terushkin // Automatica. — 2016. — Vol. 63. — pp. 1–10.

[223] Fuduli, A. A splitting bundle approach for non-smooth non-convex minimization / A. Fuduli, M. Gaudioso, E.A. Nurminski // Optim. — 2015. — Vol. 64. — No. 5. — pp. 1131–1151.

[224] Fukuda, E.H. Exact augmented Lagrangian functions for nonlinear semidefinite programming / E.H. Fukuda, B.F. Lourenco // Comput. Optim. Appl. — 2018. — Vol. 71. — No. 2. — pp. 457–482.

[225] Fukuda, E.H. Differentiable exact penalty functions for nonlinear second-order cone programs / E.H. Fukuda, P.J.S. Silva, M. Fukushima // SIAM J. Optim. — 2012. — Vol. 22. — No. 4. — pp. 1607–1633.

[226] Gao, Y. Optimality conditions with Lagrange multipliers for inequality constrained quasidifferentiable optimization / Y. Gao // Quasidifferentiability and Related Topics / V.F. Demyanov, A.M. Rubinov. — Dordrecht, 2000. — pp. 151–162.

[227] Gao, Y. Demyanov difference of two sets and optimality conditions of Lagrange multiplier type for constrained quasidifferentiable optimization / Y. Gao // J. Optim. Theory Appl. — 2000. — Vol. 104. — No. 2. — pp. 377–394.

[228] Gao, Y. New Lagrange multipliers rule for constrained quasidifferentiable optimization / Y. Gao // Vietnam J. of Math. — 2002. — Vol. 30. — No. 1. — pp. 55–69.

[229] Gaudioso, M., Minimizing nonsmooth DC functions via successive DC piecewise-affine approximations / M. Gaudioso, G. Giallombardo, G. Miglionico, A.M. Bagirov // J. Glob. Optim. — 2018. — Vol. 71. — No. 1. — pp. 37–55.

[230] Gfrerer, H. First order and second order characterizations of metric subregularity and calmness of constraint set mappings / H. Gfrerer // SIAM J. Optim. — 2011. — Vol. 21. — No. 4. — pp. 1439–1474.

[231] Giannessi, F. A common understanding or a common misunderstanding? / F. Giannessi // Numer. Funct. Anal. Optim. — 1995. — Vol. 16. — Nos. 9–10. — pp. 1359–1363.

[232] Giannessi, F. Constrained Optimization and Image Space Analysis. Volume 1: Separation of Sets and Optimality Conditions. / F. Giannessi. — New York: Springer, 2005. — 395 p.

[233] Ginchev, I. Directional subdifferentials and optimality conditions / I. Ginchev, B.S. Mordukhovich // Positivity. — 2012. — Vol. 16. — No. 4. — pp. 707–737.

[234] Glover, B.M. On quasidifferentiable functions and non-differentiable programming / B.M. Glover // Optim. — 1992. — Vol. 24. — Nos. 3–4. — pp. 253–268.

[235] Glover, B.M. A Farkas lemma for difference sublinear systems and quasidifferentiable programming / B.M. Glover, V. Jeyakumar, W. Oettli // Math. Program. — 1994. — Vol. 63. — Nos. 1–3. — pp. 109–125.

[236] Gorokohovik, V.V. ε-Quasidifferentiability of real-valued functions and optimality conditions in extremal problems / V.V. Gorokohovik // Quasidifferential Calculus / V.F. Demyanov, L.C.W. Dixon. — Berlin, Heidelberg, 1986. — pp. 203–218.

[237] Gorokhovik, V.V. Geometrical and analytical characteristic properties of piecewise affine mappings / V.V. Gorokohovik // arXiv: 1111.1389. — 2011. — pp. 1–12.

[238] Gorokhovik, V.V. Minimal convex majorants of functions and Demyanov-Rubinov exhaustive super(sub)differentials / V.V. Gorokohovik // Optim. — 2019. — Vol. 68. — No. 10. — pp. 1933–1961.

[239] Gorokohovik, V.V., Piecewise affine functions and polyhedral sets / V.V. Gorokohovik, O.I. Zorko // Optim. — 1994. — Vol. 31. — No. 3. — pp. 209–221.

[240] Gugat, M. Penalty techniques for state constrained optimal control problems with the wave equation / M. Gugat // SIAM J. Control Optim. — 2009. — Vol. 48. — No. 5. — pp. 3026–3051.

[241] Gugat, M. Exact penalization of terminal constraints for optimal control problems / M. Gugat, E. Zuazua // Optimal Control. Appl. Methods. — 2016. — Vol. 37. — No. 6. — pp. 1329–1354.

[242] Haarala, N. Globally convergent limited memory bundle method for large-scale nonsmooth optimization / N. Haarala, K. Miettinen, M. Mäkelä // Math. Program. — 2007. — Vol. 109. — No. 1. — pp. 181–205.

[243] Han, S.P. Exact penalty functions in nonlinear programming / S.P. Han, O.L. Mangasarian // Math. Program. — 1979. — Vol. 17. — No. 1. — pp. 251–269.

[244] Han, S.P. A dual differentiable exact penalty function / S.P. Han, O.L. Mangasarian // Math. Program. — 1983. — Vol. 25. — No. 3. — pp. 293–306.

[245] Hare, W. A redistributed proximal bundle method for nonconvex optimization / W. Hare, C. Sagastizábal // SIAM J. Optim. — 2010. — Vol. 20. — No. 5. — pp. 2442–2473.

[246] Hestenes, M.R. Multiplier and gradient methods / M.R. Hestenes // J. Optim. Theory Appl. — 1969. — Vol. 4. — No. 5. — pp. 303–320.

[247] Hiriart-Urruty, J.-B. From convex optimization to nonconvex optimization. Necessary and sufficient conditions for global optimality / J.-B. Hiriart-Urruty // Nonsmooth Optimization and Related Topics / F.N. Clarke, V.F. Demyanov, F. Giannessi. — Boston, MA, 1989. — pp. 219–239.

[248] Hiriart-Urruty, J.-B. Conditions for global optimality / J.-B. Hiriart-Urruty // Handbook of Global Optimization / R. Horst, P.M. Pardalos. — Dordrecht, 1995. — pp. 1–26.

[249] Hiriart-Urruty, J.-B. Conditions for global optimality 2 / J.-B. Hiriart-Urruty // J. Global Optim. — 1998. — Vol. 13. — No. 4. — pp. 349–367.

[250] Hiriart–Urruty, J.-B. Convex Analysis and Minimization Algorithms. Volume I / J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal. — Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag, 1993. — 417 p.

[251] Hiriart–Urruty, J.-B. Convex Analysis and Minimization Algorithms. Volume II / J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal. — Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag, 1993. — 347 p.

[252] Hiriart-Urruty, J.-B. Generalized Hessian matrix and second-order optimality conditions for problems with $C^{1,1}$ data / J.-B. Hiriart-Urruty, J.-J. Strodiot, V. Hien Nguyen // Appl. Math. Optim. — 1984. — Vol. 11. — No. 1. — pp. 43–56.

[253] Horst, R. Introduction to Global Optimization / / R. Horst, P.M. Pardalos, N.V. Thoai. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. — 368 p.

[254] Horst, R. DC programming: overview / R. Horst, N.V. Thoai // J. Optim. Theory Appl. — 1999. — Vol. 103. — No. 1. — pp. 1–43.

[255] Huang, X.X. A unified augmented Lagrangian approach to duality and exact penalization / X.X. Huang, X.Q. Yang // Math. Oper. Res. — 2003. — Vol. 28. — No. 3. — pp. 533-552.

[256] Huang, X.X. Further study on augmented Lagrangian duality theory / X.X. Huang, X.Q. Yang // J. Glob. Optim. — 2005. — Vol. 31. — No. 2. — pp. 193–210.

[257] Huyer, W. A new exact penalty function / W. Huyer, A. Neumaier // SIAM J. Optim. — 2003. — Vol. 13. — No. 4. — pp. 1141–1158.

[258] Ioffe, A.D. Necessary and sufficient conditions for a local minimum. 1: a reduction theorem and first order conditions / A.D. Ioffe // SIAM J. Control Optim. — 1979. — Vol. 17. — No. 2. — pp. 245–250.

[259] Ioffe, A.D. Nonsmooth analysis: differential calculus of nondifferentiable functions / A.D. Ioffe // Trans. Amer. Math. Soc. — 1981. — Vol. 266. — No. 1. — pp. 1–55.

[260] Ioffe, A.D. Approximate subdifferentials and applications I: the finite dimensional theory / A.D. Ioffe // Trans. Amer. Math. Soc. — 1984. — Vol. 281. — No. 1. — pp. 389–416.

[261] Ioffe, A.D. Calculus of Dini subdifferentials of functions and contingent coderivatives of set-valued maps / A.D. Ioffe // Nonlinear Anal. — 1984. — Vol. 8. — No. 5. — pp. 517–539.

[262] Ioffe, A.D. Approximate subdifferentials and applications II / A.D. Ioffe // Mathematika. — 1986. — Vol. 33. — No. 1. — pp. 111–128.

[263] Ioffe, A.D. Approximate subdifferentials and applications 3: the metric theory / A.D. Ioffe // Mathematika. — 1989. — Vol. 36. — No. 1. — pp. 1–38.

[264] Ioffe, A. A Lagrange multiplier rule with small convex-valued subdifferentials for nonsmooth problems of mathematical programming involving equality and nonfunctional constraints / A. Ioffe // Math. Program. — 1993. — Vol. 58. — Nos. 1–3. — pp. 137–145.

[265] Ioffe, A.D. On the theory of subdifferentials / A.D. Ioffe // Advances in Nonlinear Analysis. — 2012. — Vol. 1. — No. 1. — pp. 47–120.

[266] Ioffe, A.D. Variational Analysis of Regular Mappings / A.D. Ioffe. — Cham: Springer International Publishing, 2017. — 516 pp.

[267] Ioffe A.D. On generalized Bolza problems and its application to dynamic optimization / A.D. Ioffe // J. Optim. Theory Appl. — 2019. — Vol. 182. — No. 1. — pp. 285–309.

[268] Ioffe, A.D. The Euler and Weierstrass conditions for nonsmooth variational problems / A.D. Ioffe, R.T. Rockafellar // Calc. Var. Partial Differ. Equ. — 1996. — Vol. 4. — No. 1. — pp. 59–87.

[269] Ishizuka, Yo. Optimality conditions for quasidifferentiable programs with application to two–level optimization / Yo. Ishizuka // SIAM J. Control Optim. — 1988. — Vol. 26. — No. 6. — pp. 1388–1398.

[270] Jayswal, A. An exact l_1 penalty function method for multi-dimensional first-order PDE constrained control optimization problem / A. Jayswal, Preeti // Eur. J. Control. — 2020. — Vol. 52. — pp. 34–41.

[271] Jeyakumar, V. Characterizing global optimality for DC optimization problems under convex inequality constraints / V. Jeyakumar, B.M. Glover // J. Glob. Optim. — 1996. — Vol. 8. — No. 2. — pp. 171–187.

[272] Jeyakumar, V. Approximate Jacobian matrices for nonsmooth continuous maps and C^1-optimization / V. Jeyakumar, D.T. Luc // SIAM J. Control Optim. — 1998. — Vol. 36. — No. 5. — pp. 1815–1832.

[273] Jeyakumar, V. Nonsmooth calculus, minimality, and monotonicity of convexificators/ V. Jeyakumar, D.T. Luc // J. Optim. Theory Appl. — 1999. — Vol. 101. — No. 3. — pp. 599–621.

[274] Jiang, C. An exact penalty method for free terminal time optimal control problem with continuous inequality constraints / C. Jiang, Q. Lin, C. Yu, K.L. Teo, G.-R. Duan // J. Optim. Theory Appl. — 2012. — Vol. 154. — No. 1. — pp. 30–53.

[275] Joki, K. A proximal bundle method for nonsmooth DC optimization utilizing nonconvex cutting planes / K. Joki, A.M. Bagirov, N. Karmitsa, M. Mäkelä // J. Glob. Optim. — 2017. — Vol. 68. — No. 3. — pp. 501–535.

[276] Joki, K. Double bundle method for finding Clarke stationary points in nonsmooth DC programming / K. Joki, A.M. Bagirov, N. Karmitsa, M. Mäkelä, S. Taheri // SIAM J. Optim. — 2018. — Vol. 28. — No. 2. — pp. 1892–1919.

[277] Jordan, M.A. A speed-gradient adaptive control with state/disturbance observer for autonomous subaquatic vehicles / M.A. Jordan, J.L. Bustamante // Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. — San Diego, CA, 2006. — pp. 2008-2013.

[278] Jourani, A. Lagrangian and Hamiltonian necessary conditions for the generalized Bolza problem and applications / A. Jourani // J. Nonlinear Convex Anal. — 2009. — Vol. 10. — No. 3. — pp. 437–454.

[279] Jourani, A. Approximate subdifferential and metric regularity: the finite-dimensional case / A. Jourani, L. Thibault // Math. Program. — 1990. — Vol. 47. — Nos. 1–3. — pp. 203–218.

[280] Kan, C. Augmented Lagrangian duality for composite optimization problems / C. Kan, W. Song // J. Optim Theory Appl. — 2015. — Vol. 165. — No. 3. — pp. 763–784.

[281] Kan, C. Second-order conditions for existence of augmented Lagrange multipliers for eigenvalue composite optimization problems / C. Kan, W. Song // J. Glob. Optim. — 2015. — Vol. 63. — No. 1. — pp. 77–97.

[282] Karmitsa, N. Comparing different nonsmooth minimization methods and software / N. Karmitsa, A. Bagirov, M. Mäkelä // Optim. Methods Softw. — 2012. — Vol. 27. — No. 1. — pp. 131–153.

[283] Keskar, N. A limited-memory quasi-Newton algorithm for bound-constrained non-smooth optimization / N. Keskar, A. Wächter // Optim. Methods Softw. — 2019. — Vol. 34. — No. 1. — pp. 150–171.

[284] Kiwiel, K.C. Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization / K.C. Kiwiel. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1985. — 372 p.

[285] Kiwiel, K.C. A nonderivative version of the gradient sampling algorithm for nonsmooth nonconvex optimization / K.C. Kiwiel // SIAM J. Optim. — 2010. — Vol. 20. — No. 4. — pp. 1983–1994,

[286] Klatte, D. On second-order sufficient optimality conditions for $C^{1,1}$-optimization problems / D. Klatte, K. Tammer // Optim. — 1988. — Vol. 19. — No. 2. — pp. 169–179.

[287] Kobayashi, T. Adaptive stabilization of infinite-dimensional semilinear second-order systems / T. Kobayashi // IMA J. Math. Control Inf. — 2003. — Vol. 20. — No. 2. — pp. 137–152.

[288] Kobayashi, T. Adaptive stabilization of the sine-Gordon equation by boundary control / T. Kobayashi // Math. Methods Appl. Sci. — 2004. — Vol. 27. — No. 8. — pp. 957–970.

[289] Kolmanovsky, I.V. Speed-gradient approach to torque and air-to-fuel ratio control in DISC engines / I.V. Kolmanovsky, M. Druzhinina, J. Sun // IEEE Trans. Control Syst. Technol. — 2002. — Vol. 10. — No. 5. — pp. 671–678.

[290] Kripfgang, A. Piecewise affine functions as a difference of two convex functions / A. Kripfgang, R. Schulze // Optim. — 1987. — Vol. 18. — No. 1. — pp. 23–29.

[291] Kruger A.Ya. On Fréchet subdifferentials / A.Ya. Kruger // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 116. — No. 3. — pp. 3325–3358

[292] Kruger, A.Y. Error bounds and metric subregularity / A.Y. Kruger // Optim. — 2015. — Vol. 64. — No. 1. — pp. 49–79.

[293] Kumar, D. Computation of the epsilon-subdifferential of convex piecewise linear-quadratic functions in optimal worst-case times / D. Kumar, Y. Lucet // Set-Valued and Variational Analysis. — 2019. — Vol. 27. — No. 3. — pp. 623–641.

[294] Kuntz, L. A characterization of continuously codifferentiable functions and some consequences / L. Kuntz // Optim. — 1991. — Vol. 22. — No. 4. — pp. 539–547.

[295] Kuntz, L. A note on constraint qualifications in quasidifferentiable programming / L. Kuntz, S. Scholtes // Advances in Optimization / W. Oettli, D. Pallaschke. — Berlin, Heidelberg, 1992. — pp. 525–527.

[296] Kuntz, L. Constraint qualifications in quasidifferentiable optimization / L. Kuntz, S. Scholtes // Math. Program. — 1993. — Vol. 60. — Nos. 1–3. — pp. 339–347.

[297] Lasserre, J.B. An approach to optimal control problems via exact penalty functions / J.B. Lasserre // IFAC Proceedings Volumes. — 1981. — Vol. 14. — No. 2. — pp. 543–546.

[298] Le Thi, H.A. Exact penalty and error bounds in DC programming / H.A. Le Thi, T.P. Dinh, H. Van Ngai // J. Glob. Optim. — 2012. — Vol. 52. — No. 3. — pp. 509–532.

[299] Le Thi, H.A. DC programming and DCA: thirty years of development / H.A. Le Thi, T.P. Dinh // Math. Program. — 2018. — Vol. 169. — No. 1. — pp. 5–68.

[300] Leoni, G. A First Course in Sobolev spaces / G. Leoni. — Providence, RI: AMS, 2009. — 623 p.

[301] Lewis, A.S. Eigenvalue optimization / A.S. Lewis, M.L. Overton // Acta Numerica. — 1996. — Vol. 5. — No. 1. — pp. 149–190.

[302] Lewis, A.S. Nonsmooth optimization via quasi-Newton methods / A.S. Lewis, M.L. Overton // Math. Program. — 2013. — Vol. 141. — No. 1–2. — pp. 135–163.

[303] Li, B. An exact penalty function method for continuous inequality constrained optimal control problem / B. Li, C.J. Yu, K.L. Teo, G.R. Duan // J. Optim. Theory Appl. — 2011. — Vol. 151. — No. 2. — pp. 260–291.

[304] Li, J. A unified approach for constrained extremum problems: image space analysis / J. Li, S.Q. Feng, Z. Zhang // J. Optim. Theory Appl. — 2013. — Vol. 159. — No. 1. — pp. 69–92.

[305] Lin, Q. Optimal feedback control for dynamic systems with state constraints: an exact penalty approach / Q. Lin, R. Loxton, K.L. Teo, Y.H. Wu // Optim. Lett. — 2014. — Vol. 8. — No. 4. — pp. 1535–1551.

[306] Liu, Q. Zero duality and saddle points of a class of augmented Lagrangian functions in constrained non-convex optimization / Q. Liu, X. Yang // Optim. — 2008. — Vol. 57. — No. 5. — pp. 655–667.

[307] Loewen, P.D. Optimal Control via Nonsmooth Analysis / P.D. Loewen. — Providence, Rhode Island: AMS, 1993. — 153 p.

[308] Loewen, P.D. The adjoint arc in nonsmooth optimization / P.D. Loewen, R.T. Rockafellar // Trans. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 325. — No. 1. — pp. 39–72.

[309] Loewen, P.D. Optimal control of unbounded differential inclusions / P.D. Loewen, R.T. Rockafellar // SIAM J. Control Optim. — 1994. — Vol. 32. — No. 2. — pp. 442–470.

[310] Loewen, P.D. New necessary conditions for the generalized problem of Bolza / P.D. Loewen, R.T. Rockafellar // SIAM J. Control Optim. — 1996. — Vol. 34. — No. 5. — pp. 1496–1511.

[311] Loewen, P.D. Bolza problem with general time constraints / P.D. Loewen, R.T. Rockafellar // SIAM J. Control Optim. — 1997. — Vol. 35. — No. 6. — pp. 2050-2069.

[312] Lucidi, S. New results on a class of exact augmented Lagrangians / S. Lucidi // J. Optim. Theory Appl. — 1988. — Vol. 58. — No. 2. — pp. 259–282.

[313] Lucidi, S. New results on a continuously differentiable exact penalty function / S. Lucidi // SIAM J. Optim. — 1992. — Vol. 2. — No. 4. — pp. 558–574.

[314] Luderer, B. Does the special choice of quasidifferentials influence necessary minimum conditions? / B. Luderer // Advances in Optimization / W. Oettli, D. Pallaschke. — Berlin, Heidelberg, 1992. — pp. 256–266.

[315] Luderer, B. On Shapiro's results in quasidifferential calculus / B. Luderer, R. Rösiger // Math. Program. — 1990. — Vol. 46. — Nos. 1–3. — pp. 403–407.

[316] Luderer, B. On necessary minimum conditions in quasidifferential calculus: independence on the specific choice of quasidifferential / B. Luderer, R. Rösiger, U. Wurker // Optim. — 1991. — Vol. 22. — No. 5. — pp. 643–660.

[317] Luderer, B. A solution method for a special class of nondifferentiable unconstrained optimization problems / B. Luderer, J. Weigelt // Comput. Optim. Appl. — 2003. — Vol. 24. — No. 1. — pp. 83-93.

[318] Luenberger, D. Control problems with kinks / D. Luenberger // IEEE Trans. Autom. Control. — 1970. — Vol. 15. — No. 5. — pp. 570–575.

[319] Luo, H.Z. Separation approach for augmented Lagrangians in constrained nonconvex optimization / H.Z. Luo, G. Mastroeni, H.X. Wu // J. Optim. Theory Appl. — 2010. — Vol. 144. — No. 2. — pp. 275–290.

[320] Luo, H. Some results on augmented Lagrangians in constrained global optimization via image space analysis / H.Z. Luo, H. Wu, J. Liu // J. Optim. Theory Appl. — 2013. — Vol. 159. — No. 2. — pp. 360–385.

[321] Luo, H. On saddle points in semidefinite optimization via separation scheme/ H. Luo, H. Wu, J. Liu // J. Optim. Theory Appl. — 2015. — Vol. 165. — No. 1. — pp. 113–150.

[322] Mäkelä, M. Survey of bundle methods for nonsmooth optimization / M. Mäkelä // Optim. Methods Softw. — 2002. — Vol. 17. — No. 1. — pp. 1–29.

[323] Mäkelä, M.M. Nonsmooth Optimization. Analysis and Algorithms with Applications to Optimal Control / M.M. Mäkelä, P. Neittaanmäki. — Singapore: World Scientific, 1992. — 268 p.

[324] Mangasarian, O.L. Sufficiency of exact penalty minimization / O.L. Mangasarian // SIAM J. Contol Optim. — 1985. — Vol. 23. — No. 1. — pp. 30–37.

[325] Maratos, N. Exact Penalty Function Algorithms for Finite Dimensional and Control Optimization Problems: PhD thesis, University of London / N. Maratos. — London, UK, 1978. — 193 p.

[326] Mastroeni, G. Nonlinear separation in the image space with applications to penalty methods / G. Mastroeni // Appl. Anal. — 2012. — Vol. 91. — No. 10. — pp. 1901–1914.

[327] Mayne, D.Q. An exact penalty function algorithm for optimal control problems with control and terminal equality constraints, part 1 / D.Q. Mayne, E. Polak // J. Optim. Theory Appl. — 1980. — Vol. 32. — No. 2. — pp. 211–246.

[328] Mayne, D. An exact penalty function algorithm for control problems with state and control constraints / D. Mayne, E. Polak // IEEE Trans. Autom. Control. — 1987. — Vol. 32. — No. 5. — pp. 380–387.

[329] Michel, P. Calcul souls-différentiel pour les founctions Lipschitzienne et non Lipschitzienne / P. Michel, J.-P. Penot // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences — Series I — Mathematics. — 1984. — Vol. 298. — pp. 269–272.

[330] Michel, P. A generalized derivative for calm and stable functions / P. Michel, J.-P. Penot // Differ. Integral Equ. — 1992. — Vol. 5. — No. 2. — pp. 433–454.

[331] Mordukhovich, B.S. Discrete approximations and refined Euler-Lagrange conditions for nonconvex differential inclusions / B.S. Mordukhovich // SIAM J. Control Optim. — 1995. — Vol. 33. — No. 3. — pp. 882–915.

[332] Mordukhovich, B.S. Variational Analysis and Generalized Differentiation I. Basic Theory / B.S. Mordukhovich. — Berlin, Heidelber: Springer, 2006. — 582 p.

[333] Mordukhovich, B.S. Variational Analysis and Generalized Differentiation II. Applications / B.S. Mordukhovich. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. — 612 p.

[334] Nesterov, Y. Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course / Y. Nesterov. — London: Kluwer Academic Publishers, 2004. — 236 p.

[335] Orlov, Yu. V. Discontinuous Systems: Lyapunov Analysis and Robust Synthesis Under Uncertainty Conditions / Yu.V. Orlov. — London: Springer, 2009. — 339 p.

[336] Orlov, I.V. Multidimensional variational functionals with subsmooth integrands / I.V. Orlov, A.V. Tsygankova // Eurasian Math. J. — 2015. — Vol. 6. — No. 3. — pp. 54–75.

[337] Outrata, J.V. On a class of nonsmooth optimal control problems / J.V. Outrata // Appl. Math. Optim. — 1983. — Vol. 10. — No. 1. — pp. 287–306.

[338] Outrata, J.V. On the usage of bundle methods in optimal control of nondifferentiable systems / J.V. Outrata // Trends in Mathematical Optimization / K.H. Hoffmann, J. Zowe, J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemarechal. — Basel, 1988. — pp. 233–245.

[339] Outrata, J.V. On some nondifferentiable problems in optimal control / J.V. Outrata, Z. Schindler // Nondifferentiable Optimization: Motivations and Applications / V.F. Demyanov, D. Pallaschke. Berlin, Heidelberg, 1985. — pp. 118–128.

[340] Pallaschke, D. On locally-Lipschitz quasi-differentiable functions in Banach spaces / D. Pallaschke, P. Recht, R. Urbański // Optim. — 1986. — Vol. 17. — No. 3. — pp. 287–295.

[341] Pallaschke, D. Foundations of Mathematical Optimization. Convex Analysis without Linearity / D. Pallaschke, S. Rolewicz. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. — 582 p.

[342] Penot, J.-P. On the convergence of descent algorithms / J.-P. Penot // Comput. Optim. Appl. — 2002. — Vol. 23. — No. 3. — pp. 279–284.

[343] Penot, J.-P. Calculus Without Derivatives / J.-P. Penot. — New York: Springer, 2013. — 544 p.

[344] Penot, J.-P. Multipliers and general Lagrangians / J.-P. Penot, A.M. Rubinov // Optim. — 2005. — Vol. 54. — Nos. 4–5. — pp. 443–467.

[345] Peressini, A.L. Ordered Topological Vector Spaces / A.L. Peressini. — New York: Harper & Row Publishers, 1967. —- 228 p.

[346] Pietrzykowski, T. An exact potential method for constrained maxima / T. Pietrzykowski // SIAM J. Numer. Anal. — 1969. — Vol. 6. — No. 2. — pp. 299–304.

[347] Polak, E. Optimization: Algorithms and Consistent Approximations / E. Polak. — New York: Springer-Verlag, 1997. — 802 p.

[348] Polyakova, L.N. On the minimization of a quasidifferentiable function subject to equality-type quasidifferentiable constraints / L.N. Polyakova // Quasidifferential Calculus / V.F. Demyanov, L.C.W. Dixon. — Berlin, 1986. — pp. 44–55.

[349] Polyakova, L.N. On global unconstrained minimization of the difference of polyhedral functions / L.N. Polyakova // J. Glob. Optim. — 2011. — Vol. 50. — No. 2. — pp. 179–195.

[350] Powell, M.J.D. A method for nonlinear constraints in minimization problems / M.J.D. Powell // Optimization / R. Fletcher. — London, 1969. — pp. 283–298.

[351] Rios, L.M. Derivative-free optimization: a review of algorithms and comparison of software implementations / L.M. Rios, N.V. Sahinidis // J. Glob. Optim. — 2013. — Vol. 56. — No. 3. — pp. 1247–1293.

[352] Robinson, S.M. Regularity and stability for convex multivalued functions / S.M. Robinson // Math. Oper. Res. — 1976. — Vol. 1. — No. 2. — pp. 130–143.

[353] Rockafellar, R.T. Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations / R.T. Rockafellar // J. Math. Anal. Appl. — 1970. — Vol. 32. — No. 1. — pp. 174–222.

[354] Rockafellar, R.T. Generalized Hamiltonian equations for convex problems of Lagrange / R.T. Rockafellar // Pacific J. Math. — 1970. — Vol. 33. — No. 2. — pp. 411–427.

[355] Rockafellar, R.T. Existence and duality theorems for convex problems of Bolza / R.T. Rockafellar // Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 159. — No. 1. — pp. 1–40.

[356] Rockafellar, R.T. Augmented Lagrange multiplier functions and duality in nonconvex programming / R.T. Rockafellar // SIAM J. Control. — 1974. — Vol. 12. — No. 2. — pp. 268–285.

[357] Rockafellar, R.T. Lagrange multipliers and optimality / R.T. Rockafellar // SIAM Review. — 1993. — Vol. 35. — No. 2. — pp. 183–238.

[358] Rockafellar, R.T. Variational Analysis / R.T. Rockafellar, R.J.B. Wets. — Berlin: Springer, 1998. — 734 p.

[359] Rosenberg, E. Exact penalty functions and stability in locally Lipschitz programming / E. Rosenberg // Math. Program. — 1984. — Vol. 30. — No. 3. — pp. 340–356.

[360] Rubinov, A.M. Abstract Convexity and Global Optimization / A.M. Rubinov. — Boston: Springer, 2000. — 511 p.

[361] Rubinov, A.M. Lagrange-Type Functions in Constrained Non-Convex Optimization / A.M. Rubinov, X.Q. Yang. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. — 300 p.

[362] Rubinov, A.M. Penalty functions with a small penalty parameter / A.M. Rubinov, X.Q. Yang, A.M. Bagirov // Optim. Methods Softw. — 2002. — Vol. 17. — No. 5. — pp. 931–964.

[363] Rubinov, A.M. Continuous approximation of nonsmooth mappings / A.M. Rubinov, A. Zaffaroni / Progress in optimization: contributions from Australia / A. Eberhard, R. Hill, D. Ralph, B. Glover. — Dordrecht, 1999. — pp. 57–86.

[364] Rückmann, J.-J. Augmented Lagrangians in semi-infinite programming / J.-J. Rückmann, A. Shapiro // Math. Program. — 2009. — Vol. 116. — No. 1–2. — pp. 499–512.

[365] Ryan, E.P. On Brockett's condition for smooth stabilizability and its necessity in a context of nonsmooth feedback / E.P. Ryan // SIAM J. Control Optim. — 1994. — Vol. 32. — No. 6. — pp. 1597–1604.

[366] Schirotzek, W. Nonsmooth Analysis / W. Schirotzek. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. — 373 p.

[367] Shapiro, A. On optimality conditions in quasidifferentiable optimization / A. Shapiro // SIAM J. Control Optim. — 1984. — Vol. 22. — No. 4. — pp. 610–617.

[368] Shapiro, A. Quasidifferential calculus and first-order optimality conditions in nonsmooth optimization / A. Shapiro // Quasidifferential Calculus / V.F. Demyanov, L.C.W. Dixon. — Berlin, Heidelberg, 1986. — pp. 56–68.

[369] Shapiro, A. Some properties of the augmented Lagrangian in cone constrained optimization / A. Shapiro, J. Sun // Math. Oper. Res. — 2004. — Vol. 29. — No. 3. — pp. 479–491.

[370] Singer, I. Abstract Convex Analysis / I. Singer. — New York: Wiley–Interscience Publication, 1997. — 491 p.

[371] Singer, I. Duality for Nonconvex Approximation and Optimization / I. Singer. — New York: Springer, 2006. — 376 p.

[372] Smith, S. Exact penalty algorithm for optimal control problems with control and terminal constraints / S. Smith, D.Q. Mayne // Int. J. Control. — 1988. — Vol. 48. — No. 1. — pp. 257–271.

[373] Stingl, M. On the Solution of Nonlinear Semidefinite Programs by Augmented Lagrangian Methods: PhD thesis. Institute of Applied Mathematics II, Friedrech-Alexander University of Erlangen-Nuremberg / M. Stingl. — Erlangen, Germany, 2006. — 154 p.

[374] Song, C.-L. An optimality condition for quasidifferentiable programming with an abstract constraint / C.-L. Song, Z.-Q. Xia, L.-M. Zhang // Int. J. Pure Appl. Math. — 2006. — Vol. 27. — No. 3. — pp. 293–298

[375] Strekalovsky, A.S. Global optimality conditions for nonconvex optimization / A.S. Strekalovsky // J. Glob. Optim. — 1998. — Vol. 12. — No. 4. — pp. 415–434.

[376] Strekalovsky, A.S. On local search in d.c. optimization problems / A.S. Strekalovsky // Appl. Math. Comput. — 2015. — Vol. 255. — pp. 73–83.

[377] Strekalovsky, A.S. Global optimality conditions in nonconvex optimization / A.S. Strekalovsky // J. Optim. Theory Appl. — 2017. — Vol. 173. — No. 3. — pp. 770–792.

[378] Strekalovsky, A.S. Global optimality conditions and exact penalization / A.S. Strekalovsky // Optim. Lett. — 2019. — Vol. 13. — No. 3. — pp. 597–615.

[379] Strekalovsky, A.S. On global search in nonconvex optimal control problems / A.S. Strekalovsky, M.V. Yanulevich // J. Glob. Optim. — 2016. — Vol. 65. — No. 1. — pp. 119–135.

[380] Sun, X.L. On saddle points of augmented Lagrangians for constrained nonconvex optimization / X.L. Sun, D. Li, K.I.M. McKinnon // SIAM J. Optim. — 2005. — Vol. 15. — No. 4. — pp. 1128–1146.

[381] Sutti, C. Optimality conditions in quasidifferentiable mathematical programming / C. Sutti // J. Inf. Optim. Sci. — 1992. — Vol. 13. — No. 3. — pp. 375–381.

[382] Thera, M. Subdifferential calculus for convex operators / M. Thera // J. Math. Anal. Appl. — 1981. — Vol. 80. — No. 1. — pp. 78–91.

[383] Tor, A.H. Aggregate codifferential method for nonsmooth DC optimization / A.H. Tor, A. Bagirov, B. Karasözen // J. Comput. Appl. Math. — 2014. — Vol. 259, Part B. — pp. 851–867.

[384] Treiman, J.S. The linear nonconvex generalized gradient and Lagrange multipliers / J.S. Treiman // SIAM J. Optim. — 1995. — Vol. 5. — No. 3. — pp. 670–680.

[385] Treiman, J.S. Lagrange multipliers for nonconvex generalized gradients with equality, inequality, and set constraints / J.S. Treiman // SIAM J. Control Optim. — 1999. — Vol. 37. — No. 5. — pp. 1313–1329.

[386] Trudzik, L.I. Continuity properties of vector-valued convex functions / L.I. Trudzik // J. Australian Math Soc. — 1984. — Vol. 36. — No. 3. — pp. 404–415.

[387] Tucsnak M. Observation and Control for Operator Semigroups / M. Tucsnak, G. Weiss. — Basel: Birkhäuser, 2009. — 494 p.

[388] Tuy, H. Convex programs with an additional reverse convex constraint / H. Tuy // J. Optim. Theory Appl. — 1987. — Vol. 52. — No. 3. — pp. 463–486.

[389] Tuy, H. Global minimization of a difference of two convex functions / H. Tuy // Nonlinear Analysis and Optimization / B. Cornet, V.H. Nguyen, J.P. Vial. — Berlin, Heidelberg, 1987. — pp. 150–182.

[390] Tuy, H. Canonical DC programming problem: outer approximation methods revisited / H. Tuy // Oper. Res. Lett. — 1995. — Vol. 18. — No. 2. — pp. 99–106.

[391] Tuy, H. D.C. Optimization: Theory, Methods and Algorithms / H. Tuy // Handbook of Global Optimization / R. Horst, P.M. Pardalos. — Dordrecht, 1995. — pp. 149–216.

[392] Tuy, H. Convex Analysis and Global Optimization / H. Tuy. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. — 340 p.

[393] Tuy H. On some recent advances and applications of D.C. optimization / H. Tuy // Optimization / V.H. Nguyen, J.-J. Strodiot, P. Tossings. — Berlin, Heidelberg, 2000. — pp. 473–497.

[394] Tuy, H. On global optimality conditions and cutting plane algorithms / H. Tuy // J. Optim. Theory Appl. — 2003. — Vol. 118. — No. 1. — pp. 201–216.

[395] Uderzo, A. Convex approximators, convexificators and exhausters: applications to constrained extremum problem / A. Uderzo // Quasidifferentiability and related Topics / V.F. Demyanov, A.M. Rubinov. — Dordrecht, 2000. — pp. 297–327.

[396] Uderzo, A. Quasi-multiplier rules for quasidifferentiable extremum problems / A. Uderzo // Optim. — 2002. — Vol. 51. — No. 6. — pp. 761–795.

[397] Uderzo, A. Fréchet quasidifferential calculus with applications to metric regularity of continuous maps / A. Uderzo // Optim. — 2005. — Vol. 54. — Nos. 4–5. — pp. 469–493.

[398] Uderzo, A. Convex difference criteria for the quantitative stability of parametric quasidifferentiable systems / A. Uderzo // Set-Valued Analysis. — 2007. — Vol. 15. — No. 1. — pp. 81–104.

[399] Uderzo, A. A strong metric subregularity analysis of nonsmooth mappings via steepest displacement rate / A. Uderzo // J. Optim. Theory Appl. — 2016. — Vol. 171. — No. 2. — pp. 573–599.

[400] Vinter, R.B. Optimal Control / R.B. Vinter. — Boston: Birkhäuser, 2000. — 527 p.

[401] Vinter, R. The extended Euler-Lagrange condition for nonconvex variational problems / R.B. Vinter, H. Zheng // SIAM J. Control Optim. — 1997. — Vol. 35. — No. 1. — pp. 56–77.

[402] Wang, C.-Y. Unified theory of augmented Lagrangian methods for constrained global optimization / C.-Y. Wang, D. Li // J. Glob. Optim. — 2009. — Vol. 44. — No. 3. — pp. 433–458.

[403] Wang, C. Global saddle points of nonlinear augmented Lagrangian functions / C. Wang, Q. Liu, B. Qu // J. Glob. Optim. — 2017. — Vol. 68. — No. 1. — pp. 125–146.

[404] Wang, C. A new class of exact penalty functions and penalty algorithms / C. Wang, C. Ma, J. Zhou // J. Glob. Optim. — 2014. — Vol. 58. — No. 1. — pp. 51–73.

[405] Wang, C.Y. Unified nonlinear Lagrangian approach to duality and optimal paths / C.Y. Wang, X.Q. Yang, X.M. Yang // J. Optim. Theory Appl. — 2007. — Vol. 135. — No. 1. — pp. 85–100.

[406] Wang, C.Y. Nonlinear augmented Lagrangian and duality theory / C.Y. Wang, X.Q. Yang, X.M. Yang // Math. Oper. Res. — 2012. — Vol. 38. — No. 4. — pp. 740–760.

[407] Wang, X. A sharp Lagrange multiplier rule for nonsmooth mathematical programming problems involving equality constraints / X. Wang, V. Jeyakumar // SIAM J. Optim. — 2000. — Vol. 10. — No. 4. — pp. 1136–1148.

[408] Wang, Z. Necessary minimum conditions and steepest descent directions in quasidifferentiable calculus: independence of the specific forms of quasidifferentials / Z. Wang, R. Mortensen // Optim. — 1994. — Vol. 31. — No. 3. — pp. 223–232.

[409] Ward, D.E. A constraint qualification in quasidifferentiable programming / D.E. Ward // Optim. — 1991. — Vol. 22. — No. 5. — pp. 661–668.

[410] Wong, K.H. An exact penalty function algorithm for time-lag control problems with control and terminal equality constraints / K.H. Wong, K.L. Teo // Comput. Math. Appl. — 1990. — Vol. 19. — No. 12. — pp. 79–94.

[411] Wu, C. A unified framework for synchronization and control of dynamical systems / C. Wu, L. Chua // Int. J. Bifurc. Chaos. — 1994. — Vol. 4. — No. 4. — pp. 979–998.

[412] Wu, H.X. Saddle points of general augmented Lagrangians for constrained nonconvex optimization / H.X. Wu, H.Z. Luo // J. Glob. Optim. — 2012. — Vol. 53. — No. 4. — pp. 683–697.

[413] Wu, H.X. Nonlinear separation approach for the augmented Lagrangian in nonlinear semidefinite programming / H.X. Wu, H.Z. Luo, J.F. Yang // J. Glob. Optim. — 2014. — Vol. 59. — No. 4. — pp. 695–727.

[414] Wu, Z.Y. An exact lower order penalty function and its smoothing in nonlinear programming / Z.Y. Wu, F.S. Bai, X.Q. Yang, L.S. Zhang // Optim. — 2004. — Vol. 53. — No. 1. — pp. 51–68.

[415] Xing, A.Q. Exact penalty function approach to constrained optimal control problems / A.Q. Xing, Z.H. Cheng, C.L. Wang, Y.Y. Yao // Optim. Control Appl. Methods. — 1989. — Vol. 10. — No. 2. — pp. 173–180.

[416] Zaffaroni, A. Codifferentiable mappings with applications to vector optimality / A. Zaffaroni // Pilska Studia Mathematica Bulgarica. — 1998. — Vol. 12. — No. 1. — pp. 255–266.

[417] Zaffaroni, A. Continuous approximations, codifferentiable functions and minimization methods / A. Zaffaroni // Quasidifferentiability and related Topics / V.F. Demyanov, A.M. Rubinov. — Dordrecht, 2000. — pp. 361–391.

[418] Zangwill, W.I. Nonlinear programming via penalty functions / W.I. Zangwill // Management Sci. — 1967. — Vol. 13. — No. 4. — pp. 344–358.

[419] Zaslavski, A.J. Optimization on Metric and Normed Spaces / A.J. Zaslavski. — New York: Springer, 2010. — 448 p.

[420] Zeidler, E. Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems / E. Zeidler. — New York: Springer-Verlag, 1986. — 932 p.

[421] Zeigler, G.M. Lectures on Polytopes / G.M. Zeigler. — New York: Springer Verlag, 1995. — 382 p.

[422] Zhang, Q. A new necessary and sufficient global optimality condition for canonical DC problems / Q. Zhang // J. Glob. Optim. — 2013. — Vol. 55. — No. 3. — pp. 559–577.

[423] Zhou, J. On the existence of saddle points for nonlinear second-order cone programming problems / J. Zhou, J.S. Cheng // J. Glob. Optim. — 2015. — Vol. 62. — No. 3. — pp. 459–480.

[424] Zhou, J. Saddle point and exact penalty representation for generalized proximal Lagrangians / J. Zhou, N. Xiu, C. Wang // J. Glob. Optim. — 2012. — Vol. 54. — No. 4. — pp. 669–687.

[425] Zhou, Y.Y. Some results about duality and exact penalization / Y.Y. Zhou, X.Q. Yang // J. Glob. Optim. — 2004. — Vol. 29. — No. 4. — pp. 497–509.

[426] Zhou, Y.Y. Augmented Lagrangian function, non-quadratic growth condition and exact penalization / Y.Y. Zhou, X.Q. Yang // Oper. Res. Lett. — 2006. — Vol. 34. — No. 2. — pp. 127–134.

[427] Zhou, Y.Y. Duality and penalization in optimization via an augmented Lagrangian function with applications / Y.Y. Zhou, X.Q. Yang // J. Optim. Theory Appl. — 2009. — Vol. 140. — No. 1. — pp. 171–188.

[428] Zhou, Y.Y. Augmented Lagrangian functions for constrained optimization problems / Y.Y. Zhou, X.Q. Yang // J. Glob. Optim. — 2012. — Vol. 52. — No. 1. — pp. 95–108

[429] Zhou, Y.Y. Existence of augmented Lagrange multipliers for cone constrained optimization problems / Y.Y. Zhou, J.C. Zhou, X.Q. Yang // J. Glob. Optim. — 2014. — Vol. 58. — No. 2. — pp. 243–260.

[430] Zhu, S.K. Unified duality theory for constrained extremum problems. Part I: image space analysis / S.K. Zhu, S.J. Li // J. Optim. Theory Appl. — 2014. — Vol. 161. — No. 3. — pp. 738–762.

[431] Zhu, S.K. Unified duality theory for constrained extremum problems. Part II: special duality schemes / S.K. Zhu, S.J. Li // J. Optim. Theory Appl. — 2014. — Vol. 161. — No. 3. — pp. 763–782.

Institute of Problems of Mechanical Engineering
of the Russian Academy of Sciences

Translation from Russian

Dolgopolik Maksim Vladimirovich

Constructive Nonsmooth Analysis and its Applications to Optimization, Calculus of Variations, and Control Theory

Scientific specialization 1.1.1. Real, Complex, and Functional Analysis

The dissertation is submitted in fulfillment of the requirements
for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences

Academic advisor:
doctor of technical sciences,
professor A.L. Fradkov

Saint Petersburg — 2021

Contents

Introduction **4**

Chapter 1 Constructive Nonsmooth Analysis **17**

1.1 Global Codifferentials of DC Functions . . . 17

1.1.1 Affine Support Sets of Convex Functions . . . 17

1.1.2 Global Codifferentials and Global Optimality Conditions . . . 25

1.2 Codifferential Calculus in Banach Spaces . . . 37

1.2.1 Hausdorff Continuity of Multifunctions . . . 37

1.2.2 Codifferentiable and Quasidifferentiable Functions . . . 41

1.2.3 Codifferential Calculus . . . 57

1.2.4 Metric Regularity of Quasidifferentiable Mappings . . . 66

1.2.5 A Description of Tangent Cones to Quasidifferentiable Sets . . . 76

1.2.6 Necessary Optimality Conditions for Nonsmooth Mathematical Programming Problems . . . 84

1.3 Abstract Codifferential Calculus . . . 95

Chapter 2 Nonsmooth Problems of the Calculus of Variations **104**

2.1 Codifferentiability of Nonsmooth Integral Functionals . . . 104

2.2 Optimality Conditions for Nonsmooth Problems of the Calculus of Variations . . . 120

2.2.1 Nonsmooth Classical Problem of the Calculus of Variations . . . 120

2.2.2 Nonsmooth Problem of Bolza with Additional Constraints . . . 123

2.2.3 Nonsmooth Problem with Isoperimetric Constraints . . . 130

Chapter 3 The Method of Codifferential Descent and its Modifications **135**

3.1 The Method of Codifferential Descent . . . 135

3.1.1 A Description of the Method . . . 136

3.1.2 Auxiliary Results . . . 138

3.1.3 A Convergence Analysis . . . 142

3.2 The Quadratic Regularization of the Method of Codifferential Descent 146

3.3 The Method of Hypodifferential Descent for Convex Functions 148

3.4 The Method of Global Codifferential Descent for Piecewise Affine Functions . . . 153

Chapter 4 Exact Penalty and Augmented Lagrangian Functions **163**

4.1 Parametric Exactness of Separating Functions 163

4.1.1 The Localization Principle in the Parametric Form 164

4.1.2 Linear Exact Penalty Functions 169

4.1.3 Rockafellar-Wets' Augmented Lagrangians 171

4.2 Extended Exactness of Separating Functions 175

4.2.1 The Localization Principle in the Extended Form 175

4.2.2 Singular Exact Penalty Functions 178

4.2.3 Exact Augmented Lagrangians 179

4.3 Exact Penalty Functions in Infinite Dimensional Spaces 182

4.3.1 Completely Exact Penalty Functions 182

4.3.2 Exact Penalty Functions for Optimal Control Problems for Linear Evolution Equations 187

Chapter 5 Applications to Control Theory **193**

5.1 Nonsmooth Speed Gradient Algorithms 193

5.1.1 Finite and Differential Nonsmooth Speed Gradient Algorithms 193

5.1.2 Stabilization of the Brockett Integrator 204

5.1.3 Finite-Differential Nonsmooth Speed-Gradient Algorithms 210

5.1.4 Synchronization of Two Duffing Oscillators 215

5.2 Control Problems for Hyperbolic Equations 220

5.2.1 Energy Control of a Semilinear Klein-Gordon Model 220

5.2.2 Energy Control of the Sine-Gordon Model with Boundary Measurements . 227

Conclusions **236**

Notation **239**

Bibliography **243**

Introduction

Modern nonsmooth analysis [25, 57, 61, 231, 303, 361] and closely related variational analysis [240, 313, 314, 352] are based on the use of various subdifferentials of nonconvex functions and related notions of generalised derivatives and normal cones. By this moment, more than ten nonequivalent approaches to the definition of convex and nonconvex subdifferentials of nonconvex functions have been proposed. Among them are the Clarke subdifferential [57], the Michel-Penot subdifferential [44,236,309,310], the Mordukhovich and the Fréchet subdifferentials [269,312–314], approximate subdifferential (Ioffe's subdifferential) [232,234,235], Treiman's linear subdifferential, [383,384], the Jeyakumar-Luc subdifferential [247,407], the Dini subdifferential [233], the proximal subdifferential [61, 400], the directed subdifferential [29, 30, 197], etc. Attempts to unite scattered results on various types of subdifferentials into a general theory were made in Penot's monograph [324] and Ioffe's paper [238].

An alternative approach to the analysis of nonsmooth functions, not based on the use of subdifferentials, is the so-called constructive nonsmooth analysis developed by prof. V.F. Demyanov. The main difference between constructive nonsmooth analysis and general theory of subdifferentials of nonsmooth nonconvex functions is the fact that the former aims at obtaining computationally viable (i.e. "constructive") formulae and results and development of optimization methods for nonsmooth extremal problems.

The central tool of constructive nonsmooth analysis is directional derivative, while its main goal is to find various classes of nonsmooth functions for which one can (1) construct a simple and exhaustive calculus, (2) obtain easily verifiable ("constructive") optimality conditions, and (3) develop efficient methods for computing descent directions, which can be used within general nondifferentiable optimization methods.

The starting point of constructive nonsmooth analysis was the theorem on the directional derivative of the max-function proved by Danskin [67] and Demyanov [70, 71] in 1966. Towards the early 1970s a general theory of minimax problems was developed. It was presented in the monographs by Danskin [68], Demyanov [72], and Demyanov and Malozemov [100] and servered as a foundation for further developments in constructive nonsmooth analysis.

One of the main tools of constructive nonsmooth analysis is *quasidifferential calculus*. The definition of quasidifferential was first given in the late 1970s by Demyanov, Polyakova, and Rubinov [104, 109]. Since then, several collections of papers [91, 112] and monographs [111, 114, 117] were devoted both to theoretical problems of quasidifferential calculus as well as its applications. Infinite dimensional generalization of the quasidifferential calculus were studied by Demyanov and Rubinov [110], Pallaschke, Recht, and Urbański [321], Uderzo [396], and Basaeva, Kusraev and Kutateladze [31, 34, 276]. A generalization of the notion of quasidifferentiability, called *ε-quasidifferentiability*, was introduced and thoroughly investigated by Gorokhovik [200–203] in the 1980s.

Further generalizations of the quasidifferential calculus were made in two different directions. On the one hand, in the late 1980s Demyanov [73–76] introduced the notion of *codifferential* of a nonsmooth function. The main difference between codifferentials and subdifferentials/quasidifferentials/other tools used in nonsmooth analysis consists in the fact that codifferential are continuous in the Hausdorff metric. However, codifferential calculus has not found many theoretical applications and was used mainly for the development and analysis of various numerical methods. [79, 111, 115, 116, 180, 380]. Infinite dimensional extensions of codifferential calculus were studied by Zaffaroni [416, 417].

On the other hand, in the late 1990s Demyanov [80, 81] (see also Abankin's paper [1]) introduced the notions of *exhauster* and *coexhauster* of nonsmooth functions, which allowed one to extend the main ideas of constructive nonsmooth analysis to a much more general class of nonsmooth functions than the class of quasidifferentiable functions. Various properties of exhausters and coexhausters were studied in the works of Demyanov, Ryabova, and Roschina [88, 108, 113], as well as Gorokhovik and Starovoytova [208]. Infinite dimensional generalizations of exhausters were studied by Uderzo [394] and Gorokhovik [206, 207]. Let us also note a generalized notion of quasidifferentiability introduced by Ishizuka [244], which can be viewed as a further extension of the notion of exhauster.

Optimality conditions for various classes of nonsmooth optimization problems is one of the central theoretical problems of nonsmooth analysis. Within the framework of constructive nonsmooth analysis, more attention has been paid to optimality conditions in terms of quasidifferentials. Geometric optimality conditions in terms of quasidifferentials were first obtained by Polyakova and Demyanov [103, 333–336]. Kuhn-Tucker-type conditions for quasidifferentiable optimization were studied by Shapiro [362,363], Luderer and Rosiger [295], Kuntz and Scholtes [274], and Sutti [379]. Optimality conditions for quasidifferentiable optimization in terms of a nonlinear

Lagrangian function (which is unknown in the general case) were obtained by Uderzo [395]. Constraint qualifications for quasidifferentiable programming were studied by Ward [409] and Kuntz and Scholtes [273, 274], while the independent of optimality conditions in terms of quasidifferentials on the choise of corresponding quasidifferentials were analysed in the workds of Luderer, Rosiger and Würker [294, 296], as well as Wang and Mortensen. [408].

Necessary optimality conditions for nonsmooth optimization problems with constraints of the form $F(x) = 0$ or $F(x) \leq 0$, where F is a *scalarly quasidifferentiable* mapping between infinite dimensional spaces were studied by Glober, Jeyakumar and Oettli [198,199], and Uderzo [397,398]. Optimality conditions for nonsmooth mathematical programming problem in terms of quasidifferentials of the objective function and inequality constraints, and the Clarke subdifferentials of the equality constraints were obtained by [190]. Optimality conditions for quaisidfferentiable optimization in terms of the so-called *Demyanov difference* of quaisidfferentials were studied by Gao [191, 192], Song, Xia, and Zhang [369]. Optimality conditions in terms of quasidifferential for vector (multicriteria) optimization problems were studied by Glover, Jeyakumar, and Oettli [199], Basaeva [32, 33] (see also the works of Basaeva, Kusraev, and Kutateladze [34, 276]), Antczak [16] and Gorokhovik [205]. Finally, optimality conditions for nonsmooth optimization problems in terms of exhausters and coexhausters were studied by Abbasov [2–4], Abbasov and Demyanov [5–7], Demyanov and Roschina [105–107].

In the recent years, DC optimization problems [225, 226, 279, 390–392] has been one of the most popular areas of nonconvex optimization. The importance of this class of problems consists of the fact that (1) one can apply the well-developed apparatus of convex analysis and convex optimization to their solution, and (2) obtain global optimality conditions and develop deterministic global optimization methods for solving DC optimization problems. By now, multiple local search [28, 193, 250, 251, 279, 382] and global search [37, 38, 40, 175, 389, 393] methods were developed for various classes of DC optimization problems. Global search methods for these problems are usually based on various global optimality conditions that were analysed in detailes in the works of Tuy [387, 388, 393], Hirriart-Urruty [219–221], Jeyakumar and Glober [246], Dur, Horst, Locatelli [165], Singer [366], Zhang [422] and many others. One should especially note the research on global optimization methods for DC optimization problems of the scientific school of prof. A.S. Strekalovsky [370–377].

Despite the abundance of publications on DC optimization problems, these problems has not been properly investigated within the framework of constructive nonsmooth analysis. Only in the paper by Polyakova [338], the apparatus of codifferential calculus was applied to obtain boundedness conditions and global optimality conditions for nonconvex piecewise affine functions.

One of the traditional theoretical applications of the methods of nonsmooth and variational analysis has been nonsmooth problems of the calculus of variations, nonsmooth optimal control problems, and nonsmooth variational problems for differential inclusions. First general results on nonsmooth variational problems were obtained by Rockafellar [347–349] in the convex case in the early 1970. In the late 1970s — early 1980s Clarke [54–57] generalized these results to the case of nonsmooth variational problems with locally Lipschitz continuous integrand and constraints. In the early 1990s, the Clarke's results were further extended by Loewen and Rockafellar [288, 289] to the case of more general nonsmooth variational problems, including problems involving differential inclusions.

First optimality conditions for nonsmooth variational problems in terms of *nonconvex* subdifferential were obtained by Mordukhovich [311, 312] (see also [313, 314]) in the late 1980s — early 1990s. Later, similar optimality conditions in terms of various nonconvex subdifferentials were obtained by Loewen and Rockafellar [287, 290, 291], Ioffe and Rockafellar [242], Vinter and Zheng [400, 401], Bellaassali [35], and Jourani [253].

Optimality conditions in terms of various subdifferentials for nonsmooth optimal control problems, including problems involving differential inclusions were studied in details by Clarke [57, 58], Mordukhovich [311, 312, 314], Ioffe [239, 241], Jourani [253], Loewen [287], Vinter [400], Clark and de Pinho [60], and Polovinkin [329–331].

Nonsmooth variational and optimal control problems has received very little attention within nonsmooth analysis. Minimax variational problems were considered by Demyanov [77]. Optimality conditions formulated as the condition of nonnegativity of the directional derivative on the cone of feasible variations were obtained for some nonsmooth optimal control problems by Demyanov, Nikulina, and Shablinskaya [101, 102].

Modern nonsmooth nonconvex optimization methods are usually based on the use of the Clarke subdifferential and its various approximations. One of the most widely used general nonsmooth optimization methods are various versions of the bundle methods [187,213,217,262,302,303], gradient sampling mehtods [52, 65, 263], nonsmooth quasinewton methods [260, 282], discrete gradient methods [24, 27] and various zero order methods [63, 344]. A detailed comparative analysis of existing nonsmooth optimization methods and software was presented in the works of Bagirov, Karmitsa, and Mäkela [25, 259] (see also the recent collection [23]).

Despite the fact that the quasidifferential calculus is one of the central tools of constructive nonsmooth analysis, quasidifferentials, as well as exhausters and coexhausters turned out to be inefficient for solving nondifferentiable optimization problems. Convergent numerical methods based on the use of quasidifferentials were developed only for some particular classes of nonsmooth functions [21, 22, 297]. In contrast, codifferentials turned out to be quite effective for the development and analysis of numerical methods. The first numerical methods for minimizing nonsmooth functions, called *the method of codifferential descent*, was developed by Demyanov [111]. A modification of this method aimed at reducing its complexity and based on the use of the so-called truncated codifferential was proposed by Demyanov, Bagirov, and Rubinov [89]. Optimization methods for minimizing nonsmooth convex or DC functions combining the ideas of bundle methods and the method of codifferential descent were studied by Bagirov et al. [26, 28, 382]. Trust region methods for minimizing codifferentiable functions were proposed by Andramonov [11].

Most research on nonsmooth optimization methods is devoted to the development and analysis of method for unconstrained or inequality-constrained optimization problems. These methods can be extended to the case of more general constrained optimization problems with the use of general approaches of constrained optimization. One of such approaches is based on the reduction of a constrained optimization problems to an unconstrained one with the use of penalty or augmented Lagrangian functions. By now, several nonequivalent approached to theoretical analysis of such functions have been developed. A general approach towards duality theory for augmented Lagrangian functions for nonconvex optimization problems was proposed by Rockafellar and Wets [352] and further investigated in [227, 228, 425]. The approach of Rockafellar and Wets was further studied in the papers [48, 49, 406, 426–428], where various generalization of the theory of augmented Lagrangian functions from [352], aiming at including some nonlinear Lagrangian functions and nonlinear penalty functions into the framework of Rockafellar-Wets' augmented Lagrangian, were proposed. General duality theory for nonlinear Lagrangian functions and nonlinear penalty functions were studied by Rubinov and Yang et al. [325,355,356,405]. A different approach towards duality theory for augmented Lagrangian and penalty functions, based on the so-called image space analysis, was systematically studied by Evtushenko, Rubinov and Zhadan [171], Giannessi [196], Mastroeni [306], and others [284, 430, 431].

General theory of the global exactness of merit functions have recieved much less attention. Several attempts to unite and generalize existing results were presented in the papers of Evtushenko, Zhadan, and Rubinov [172–174], and Di Pillo and Grippo [120, 126]. However, the approaches developed in the aforementioned papers cannot be applied to many existing penalty and augmented Lagrangian functions.

Recall that a penalty function is called (globally) exact, if for any sufficiently large value of the penalty parameter its global minimizers are globally optimal solutions of the original constrained optimization problems. The notion of exactness of a penalty functions was first introduced by Eremin [169] and Zangwill [418] in the late 1960s. Various results on exact penalty functions were obtained by Pietrzykowski [327], Evans, Gould, and Tolle [170], Bertsekas [36], Hand and Magasarian [214, 304], Ioffe [230], Rosenberg [353], Burke [51], Demyanov et al. [78, 85, 87, 90, 93], Di Pillo, Grippo, and Facchinei [121, 125, 126], Polyakova [337] and many others [414, 419].

Continuously differentiable exact penalty functions were first introduced by Fletcher [177, 178] in 1970. Fletcher's penalty functions was studied in details in the works of Di Pillo and Grippo [120, 124, 126], Han and Magasarian [215], Lucidi, Cntaldi, and Di Pillo [64, 293] and many other researchers.

In 1979, Di Pillo and Grippo [122] introduced the so-called *exact augmented Lagrangian functions* for nonlinear programming problems. These augmented Lagrangians were thoroughly investigated by Di Pillo, Grippo, Lucidi, Palagi, and Liuzzi [123, 127–131, 292], as well as Lou, Wu, and Liu [300]? and Fukuda and Lourenco [188].

A general theory of nonlinear penalty functions was developed by Rubinov and Yang et al. [356, 357] in the late 1990s early 2000s. Finally, a new class of exact penalty functions depnding on an additional parameter was introduced by Huyer and Neumaier [229] in 2003. This class of penalty functions was studied in [249, 283, 285, 404].

The problem of existence of global saddle points of augmented Lagrangians and the so-called *augmented Lagrange multipliers* of Rockafellar-Wets' augmented Lagrangian is closely related to the theory of exact penalty functions. Various theorems on the existence of global saddle points of augmented Lagrangians were obtained for cone constrained optimization problems [364, 429], nonlinear programming problems [286, 299, 378, 402, 403, 412, 424], second order cone programming problems [423], nonlinear semidefinite programming problems [301, 413], and nonlinear semi-infinite programming problems [50, 359]. The existence of augmented Lagrange multipliers was studied in [50, 255, 256, 359, 364, 429].

Most existing results on exact penalty functions were devoted to the analysis of such functions in the finite dimensional case. The theory of exact penalty functions for optimization problems in metric and normed spaces was systematically studied in the papers of Demyanov [85, 87] and Zaslavski [419]. Applications of this theory to variational problems were considered by Demyanov, Tamasyan, and Giannessi [83, 84, 86, 94, 98, 115, 116], while its applications to optimal control problems were studied by Demyanov, Karelin, and Giannessi [95–97, 258], Luenberge [298], Lasserre [277], and Xia, Cheng, Wang, and Yao [415]. Exact penalty functions for optimal control problems involving partial differential equations were studied by Gugat and Zuazua [211, 212], and by Jayswal and Preeti [245]. Numerical methods for solving optimal control problems, based on exact penalty functions, were developed by Maratos [305], Mayne, Polak, and Smith [307, 308, 328, 367], Wong and Teo [410], Outrata nd Schindler [318–320], and Fominyh, Karelin, and Polyakova [180]. Numerical methods for optimal control problems based on the use of Huyer and Neumaier's penalty functions were studied in [249, 283, 285].

A general approach to control synthesis, called *the speed-gradient algorithm*, was proposed by prof. A.L. Fradkov in the late 1970s [181]. Since then, speed-gradient algorithms have been successfully applied to various adaptive and nonlinear control problems [13, 182–184] and have found many practical applications (see, e.g. [10, 252, 267]). However, these algorithms have never been analysed in the nonsmooth case.

The main **goal** of this disseration is the development of new modern methods of constructive nonsmooth analysis and their applications to theoretical analysis of various nonsmooth optimization problems, nonsmooth variational problems and nonsmooth control problems, and to the development of new numerical methods for solving these classes of problems. In particular, we develop a new approach towards analysis of nonsmooth constrained DC optimization problems and obtained new global optimality conditions for these problems. We also develop the codifferential calculus for nonsmooth functions defined on Banach spaces, and abstract codifferential calculus for nonsmooth mappings between infinite dimensional spaces, that allows one to subsume and unify many different results of constructive nonsmooth analysis into one general theory of local approximations of nonsmooth functions.

The dissertation is also devoted to the analysis of optimality conditions in terms of quasi- and co-differentials for nonsmooth nonlinear programming problems and nonsmooth problems of the calculus of variations, as well as the development of theoretical tools that are needed for the derivation of optimality conditions. In particular, we study sufficient conditions for the metric regularity of quasidifferentiable mappings and give a new description of tangent cones to the sets defined by quasidifferentiable constraints. We also develop general optimization methods for nonsmooth codifferentiable function, study their convergence and obtain some estimates of the rate of convergenc of the corresponding methods.

Another goal of the dissertation is the development of a unified theory of the global exactness of penalty and augmented Lagrangian functions for various classes of constrained optimization problems, which allows one to easily analyses existing penalty and augmented Lagrangian, as well as introduced new exact penalty and augmented Lagrangian functions for constrained optimization problems.

In addition, the dissertation is devoted to the development of nonsmooth speed-gradient algorithms for solving various control problems, analysis of their properties and their applications towards various particular problems, including control problems for distributed control systems.

The theoretical significance of the research presented in the dissertation consists in the development of new tools for the analysis of DC optimization problems and derivation of global optimality conditions for these problems in terms of global codifferentials. In addition, we developed the codifferential calculus for nonsmooth functions defined on Banach space, studied various properties of codifferentiable functions, and obtained simple sufficient conditions for the codifferentiability of nonsmooth integral functionals defined on the Sobolev space and derive explicitly formulae for their codifferentials. These results can be applied to the analysis of various classes of nonsmooth optimization problems in infinite dimensional space, including nonsmooth problems of the calculus of variations and nonsmooth optimal control problems.

We also obtained new optimality conditions in terms of quasi- and co-differential for nonsmooth nonlinear programming problems and constrained nonsmooth problems of the calculus of variations, including the problem of Bolza with additional constraints at the boundary and nonsmooth variational problems with isoperimetric inequality constraints. Via multiple examples, we demonstrated that the optimality conditions obtained in the dissertation are often better than corresponding optimality conditions in terms of various subdifferentials of nonsmooth functions, including the Clarke subdifferential, the Michel-Penot subdifferential, the Ioffe subdifferential, the Jeyakumar-Luc subdifferential, the limiting proximal subdifferential and the limiting Fréchet subdifferential. The optimality conditions obtained in the dissertation are based on new constraint qualifications in terms of quasidifferentials, introduced by the author. These constraint qualifications allowed us to obtained new sufficient conditions for the local metric regularity of systems of quasidifferentiable equality and inequality constraints, as well as obtain a completely new description of convex subcones of the contingent cone to the set defined by such quasidifferentiable systems.

In addition, we developed the abstract codifferential calculus of nonsmooth mappings between infinite dimensional spaces, that allows one to generalize and unify into coherent theory many separate results from constructive nonsmooth analysis. The abstract codifferential calculus allows one to include various notions of quasidifferentiability and codifferentiability, as well as the notions of exhausters, coexhausters and exhaustive families of upper convex and lower concave approximations into a unified theory of local approximations of nonsmooth functions.

The theoretical significance of the dissertation also consists in the development of the unified theory of global exactness of penalty and augmented Lagrangian functions. This theory allows one to subsume and unify many existing results on such functions and present a simple general approach to the analysis of such functions based on the localization principle proposed by the author. The localization principle allows one to reduce a global analysis of penalty and augmented Lagrangian functions for finite dimensional optimization problem to a local analysis of such functions with constraint qualifications and optimality conditions. In the infinite dimensional case the author proved a new theorem on the so-called complete exactness of penalty functions and showed how it can be applied to optimal control problems for linear evolution equations with terminal constraints.

The practical significance of the research presented in the dissertation consists of the development of new nonsmooth optimization methods based on the use of codifferentials, which can be applied to a wide variety of nonsmooth optimization problems appearing in applications. In particular, we developed a new version of the method of codifferential descent, which is significantly more convenient for practical realization, that the earlier known versions of this method. We also proposed a new method for minimizing nonsmooth functions on convex sets and an efficient global optimization methods for nonconvex piecewise affine functions converging in a finite number of steps.

In addition, we developed a unified theory of exact penalty and augmented Lagrangian functions, which can be applied to the design and analysis of efficient numerical methods for solving various constrained optimization problems. In particular, the author proposed a new globally exact augmented Lagrangian for nonlinear semidefinite programming problems (problems with matrix constraints), which can be used to develop efficient superlinearly convergent numerical methods for solving this class of problems.

Finally, we also developed general nonsmooth speed-gradient algorithm, which can be applied to a wide variety of applied control problems. In particular, we consider applications of these algorithms to the problem of stabilizing the Brockett integrator and the problem of synchronizing two Duffing systems, as well as study applications of speed-gradient methods to the boundary energy control of distributed systems.

Novelty of the research. All main results of the dissertation are completely new. In particular, the author developed a new approach to the analysis of nonsmooth constrained DC optimization problems in terms of global codifferentials and obtained new necessary and sufficient global optimality conditions for this class of problems. The author also developed the codifferential calculus for nonsmooth functions defined on Banach spaces, obtained new easily verifiable sufficient conditions for the continuous codifferentiability of nonsmooth integral functionals defined on the Sobolev spaces and obtained new explicit formulae for the computation of codifferentials and quasidifferentials of such functionals.

We also obtained new sufficient conditions for the local metric regularity of quasidifferentiable mappings and presented a completely new description of convex subcones of the contingent cone to sets defined by quasidifferentiable constraints. With the use of these results we obtained new optimality conditions in terms of quasi- and co-differentials for nonsmooth mathematical programming problems and nonsmooth problems of the calculus of variations.

The author also developed a completely new theory of abstract codifferentials of nonsmooth mappings, that allows one to subsume and unify many separate results from constructive nonsmooth analysis into a one coherent theory of local approximations of nonsmooth functions. This theory includes quasidifferential calculus, codifferential calculus, as well as calculus of exhausters, coexhausters and exhaustive families of upper convex and lower concave approximations of nonsmooth functions as particular cases.

In addition, we presented new numerical methods for minimizing nonsmooth codifferentiable functions, obtained an earlier unknown results on the convergence of a certain inf-stationarity measure for such methods and for the first time obtained an upper estimate of the rate of convergence. The author also developed a completely new global optimization methods for nonconvex piecewise affine functions, based on the use of codifferentials, and prove its convergence to a global minimizer in a finite number of steps, which was earlier observed only via numerical experiments.

We also proposed a completely new approach to the analysis of exact penalty and augmented Lagrangian functions for finite dimensional optimization problems based on the localization principle proposed by the author. With the use of this approach the author presented completely new augmented Lagrangian functions for various cone constrained optimization problems (in particular, nonlinear semidefinite programming problems) and proved their global exactness.

Finally, in this dissertation we presented new nonsmooth versions of speed-gradient algorithm and applied them to design new control laws for the problem of stabilizing the Brockett integrator and the problem of synchronizing two Duffing systems. We also proved the applicability of speed-gradient algorithms to problems of boundary energy control of distributed parameter systems.

Methods of research. The main methods of research used in this dissertation are modern methods of the theory of optimality conditions, nonsmooth analysis, variational analysis, convex analysis, nondifferentiable optimization, control theory, functional analysis. In particular, we used calculus of various subdifferentials of nonconvex functions (namely, the Clarke subdifferential, the Michel-Penot subdifferential, the Mordukhovich subdifferential, the Ioffe subdifferential, the Jeyakumar-Luc subdifferential, the limiting proximal subdifferential, the limiting Fréchet subdifferential, and generalized Hessian), Demyanov-Rubinov quasidifferential calculus, general theory of metric regularity of multifunctions, methods of the theory of exact penalty and augmented Lagrangian functions, as well as speed-gradient methods for nonlinear control synthesis.

Main results of the dissertation:

- the concept of global codifferential of a DC function was introduced and used to obtain new necessary and sufficient global optimality conditions for constrained DC optimization problems;

- codifferential calculus for nonsmooth functions defined on Banach spaces was developed, mean value theorem for codifferentiable functions was proved, the local Lipschitz continuity of continuously codifferentiable functions was proved, and some new properties of codifferentiable functions were obtained;

- new constraint qualifications for quasidifferentiable systems of equalities and inequalities were introduced, sufficient conditions for the local metric regularity of such systems were obtained, and a completely new description of convex subcones of the contingent cone to quasidifferentiable sets was presented;

- new optimality conditions for nonsmooth mathematical programming problems in terms of quasidifferentials were obtained and under some additional assumptions their independence on the choice of corresponding quasidifferentials was proved;

- the abstract codifferential calculus of nonsmooth mappings, allowing one to unify many different concepts of nonsmooth analysis (quasidifferential, codifferential, exhauster, coexhauster, etc.) into a general theory, was developed;

- new simple sufficient conditions for the continuous codifferentiability of a general integral functional defined on the Sobolev space were obtained and explicit formulae for a continuous codifferential mapping and a quasidifferential mapping of this functional were derived;

- new optimality conditions for various constrained nonsmooth problems of the calculus of variations (in particular, nonsmooth problem of Bolza and nonsmooth isoperimetric problems) in terms of codifferentials were obtained;

- several new modifications of the method of codifferential descent were proposed, their convergence analysis was presented, and a completely new estimate of the rate of convergence of this method was presented; furthermore, the finite convergence of the method of global codifferential descent to a global minimizer of a nonconvex piecewise affine function was proved;

- with the use of the localization principle a general theory of the global exactness of penalty and augmented Lagrangian function was developed and a new exact augmented Lagrangian function for nonlinear semidefinite programming problems was introduced and studied;

- a new theorem on complete exactness of penalty functions for optimization problems in metric spaces was proved and its applications to optimal control problems for linear evolution equations was presented;

- speed-gradient algorithms were extended to the nonsmooth case and their applications to the stabilization of the Brockett integrator and the synchronization of two Duffing systems were considered;

- the boundary energy control problem for the semilinear Klein-Gordon equation and the output boundary energy control problem for the sine-Gordon equation with the use of boundary measurement only was solved with the use of speed-gradient algorithms.

Approbation of research. The main results of this dissertation were presented and discussed on the seminar on constructive nonsmooth analysis and nondifferentiable optimization (the Faculty of Mathematics and Mechanics of the Saint Petersburg State University, http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/), the seminar of the Laboratory "Control of Complex Systems" of the Institute for Problems in Mechanical Engineering and the following all-russian and international conferences:

- International conference "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (CNSA-2012)" (Saint Petersburg, June 18–23, 2012);

- 17th Saratov Winter School "Modern Problems of the Theory of Functions and their Applications" (Saratov, January 27 – February 3, 2014);

- European Control Conference 2015 (Linz, Austria, July 15–17, 2015);

- 6th IFAC International Workshop on Periodic Control Systems (PSYCO 2016) (Eindhoven, the Netherlands, June 29 – July 1, 2016);

- International conference "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (CNSA-2017)" dedicated to the memory of professor V.F. Demyanov (Saint Petersburg, May 22–27, 2017);

- Conference "Nonlinear and Adaptive Control with Applications to Physics and Technology" dedicated to the 70th anniversary of prof. A.L. Fradkov (Saint Petersburg, May 22, 2018);

- European Control Conference 2018 (Limasso, Cyprus, June 12–15, 2018);

- International conference “Dynamical Systems: Stability, Control, Optimization” dedicated to the 100th anniversary of academician E. A. Barbashin (Minsk, Belarus, Seprember 24–29, 2018).

The results presented in this dissertation were published in 32 papers [92,132–134,136–163], 25 of which [132, 136–142, 144–147, 149–155, 157, 158, 160–163] in academic journals indexed in Scopus and Web of Science, and two of which [92, 133] in academic journals recommended by Higher Attestation Commission of the Russian Federation. Papers [92,155–163] were written with coauthors. In [92], the author proposed the formulation of the method of codifferential descent in the infinite dimensional case and performed its convergence analysis; prof. V.F. Demyanov obtained the rest of the results. In [155], A.V. Fominyh proved the exactness of the penalty functions for variational problems involving differential inclusions, while the author obtained the rest of the results. In [156–160] A.L. Fradkov proposed formulations of the problems, while the author proved main theoretical results. Finally, in [161–163] A.L. Fradkov proposed formulations of the problems and the idea to apply speed-gradient methods, the author obtained main theoretical results, while B.R. Andrievsky performed numerical simulation.

The dissertation consists of the introduction, five chapters, conclusions, the list of notation, and the bibliography. Definitions, propositions, theorems, lemmas, corollaries, and examples are numbered in accordance with the chapter and the section they are located in. Formulae are numbered in accordance with the chapter they are located in. The dissertation consists of 279 pages and contains 21 figures. The bibliography consists of 431 items.

Acknowledgements. The author is sincerely grateful to his teacher and the creator of the constructive nonsmooth analysis prof. $\boxed{\text{V.F. Demyanov}}$. Without his help and encouragement I would have never become a mathematician and eventually written this dissertation, which is largely a continuation of the researches of V.F. Demyanov and his colleagues in nonsmooth analysis and its applications.

The author wishes to express his gratitude to prof. V.N. Malozemov and prof. A.L. Fradkov for their help in employment, for the creation of a productive workplace atmosphere, for valuable comments and guidance, as well as their help and encouragement over the years. The author also thanks his colleagues prof. B.R. Andrievsky, G.Sh. Tamasyan, A.V. Fominyh, and T.A. Angelov, under whose influence many results of this dissertation were obtained. Finally, the author wishes to to express his sincere thanks and gratitude to Elena Zakharov and Gregory Feehan for their help in mastering English, as well as an incredible support without which I would not be able to find my place in the international science.

Chapter 1

Constructive Nonsmooth Analysis

This chapter is devoted to a development of the theory of global codifferentials of DC function and derivation of global optimality conditions for DC optimization problems. We also study the codifferential calculus in Banach spaces and the abstract codifferential calculus of nonlinear operators that allows one to unify and generalize many existing approaches in constructive nonsmooth analysis. Then we apply constructive nonsmooth analysis to the study of the metric regularity of set-valued mappings, contingent cones to sets defined by nonsmooth equality and inequality constraints, and optimality conditions for nonsmooth mathematical programming problems. The main results of this chapter were published in [92, 132, 133, 137, 144, 150, 152, 153].

1.1 Global Codifferentials of DC Functions

In this section we study global codifferentials of nonsmooth DC function. With the use of these codifferentials we obtain new necessary and sufficient global optimality conditions for nonsmooth DC optimization problems. Some results of this section will be used in Chapter 3 to prove the convergence of the method of codifferential to a point of *global* minimum of a nonconvex piecewise affine function in a finite number of steps.

1.1.1 Affine Support Sets of Convex Functions

Let $\mathcal{H}$ be a real Hilbert space, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, and $f \colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ be a proper closed convex function. As is well known (see, e.g. [168, Prp. I.3.1]), the function f can be represented as the supremum of a family of affine functions. Taking, if necessary, the closed convex hull of this set, and identifying an affine function $l(x) = a + \langle v, x \rangle$ with the point $(a, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}$, one gets that there exists a closed convex set $S_f \subset \mathbb{R} \times \mathcal{H}$ such that

$$f(x) = \sup_{(a,v) \in S_f} \big(a + \langle v, x\rangle\big) \quad \forall x \in \mathcal{H}, \tag{1.1}$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the inner product in $\mathcal{H}$. Any such set S_f is called *an affine support set* of the function f. At first, let us demonstrate how affine support sets are connected with the ε-subdifferential of the function f.

Theorem 1.1.1. *For any affine support set S_f of f and for all $\varepsilon \geq 0$ and $x \in \operatorname{dom} f$ one has*

$$\partial_\varepsilon f(x) = \big\{ v \in \mathcal{H} \bigm| \exists a \in \mathbb{R} \colon (a, v) \in S_f, \ a + \langle v, x \rangle \geq f(x) - \varepsilon \big\}. \tag{1.2}$$

Proof. Fix arbitrary $\varepsilon \geq 0$ and $x \in \operatorname{dom} f$, and denote by $D_\varepsilon(x)$ the set on the right-hand side of (1.2). Observe that for any $(a, v) \in S_f$ such that $a + \langle v, x \rangle \geq f(x) - \varepsilon$ one has

$$f(y) - f(x) \geq a + \langle v, y \rangle - \big(a + \langle v, x\rangle\big) - \varepsilon = \langle v, y - x \rangle - \varepsilon \quad \forall y \in \mathcal{H},$$

which implies that $v \in \partial_\varepsilon f(x)$. Thus, $D_\varepsilon(x) \subseteq \partial_\varepsilon f(x)$.

Arguing by reductio ad absurdum, suppose that $\partial_\varepsilon f(x) \neq D_\varepsilon(x)$. Then there exists $v_0 \in \partial_\varepsilon f(x)$ such that $v_0 \notin D_\varepsilon(x)$. Hence $(a, v_0) \notin S_f$ for any $a \geq f(x) - \langle v_0, x \rangle - \varepsilon$, since otherwise $v_0 \in D_\varepsilon(x)$.

Denote $C_f = \{(b, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \mid \exists a \geq b \colon (a, v) \in S_f\}$. It is clear that the set C_f is convex, and $(f(x) - \langle v_0, x \rangle - \varepsilon, v_0) \notin C_f$. To apply the separation theorem, let us check that the set C_f is closed. To this end, introduce a function $g \colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ as follows: $g(v) = \sup\{a \mid (a, v) \in S_f\}$. Observe that $(g(v), v) \in S_f$ for any $v \in \operatorname{dom} g$ due to the fact that the set S_f is closed. Moreover, it is easy to see that C_f is the hypograph of the function g. Therefore, it is sufficient to check that the function g is upper semicontinuous (u.s.c.).

At first, note that g is a proper concave function, since its hypograph is a convex set, and if $g(v) = +\infty$ for some v (i.e. $(a, v) \in S_f$ for any sufficiently large a), then $f(\cdot) \equiv +\infty$, which contradicts the assumption that the function f is proper. Note also that $g(\cdot) \not\equiv -\infty$, since otherwise $S_f = \emptyset$ and $f(\cdot) \equiv -\infty$, which contradicts our assumption. Furthermore, g is bounded above on any bounded set. Indeed, for any bounded set $Q \subset \mathcal{H}$ and $v \in Q$ either $(\mathbb{R} \times \{v\}) \cap S_f = \emptyset$ and $g(v) = -\infty$ or $(a, v) \in S_f$ for some $a \in \mathbb{R}$, and

$$\begin{aligned} g(v) = \sup\{a \mid (a, v) \in S_f\} &= \sup_{a \colon (a,v) \in S_f} \big(a + \langle v, x \rangle - \langle v, x \rangle\big) \\ &\leq \sup_{(a,v) \in S_f} \big(a + \langle v, x\rangle\big) - \langle v, x \rangle \leq f(x) + q\|x\|, \end{aligned}$$

where $q = \sup_{v \in Q} \|v\|$ (recall that $x \in \operatorname{dom} f$, i.e. $f(x) < +\infty$).

Arguing by reductio ad absurdum suppose that g is not u.s.c. at a point $v \in \mathcal{H}$. Let $v \in \operatorname{dom} g$. Then there exists $\theta > 0$ such that for any $n \in \mathbb{N}$ one can find $v_n \in \operatorname{dom} g$ for which $g(v_n) > g(v) + \theta$ and $\|v_n - v\| < 1/n$. Taking into account the fact that g is bounded above on bounded sets one gets that the sequence $\{g(v_n)\}$ is bounded. Therefore, there exists a subsequence $\{v_{n_k}\}$ such that the corresponding subsequence $\{g(v_{n_k})\}$ converges to some $g_* \geq g(v) + \theta$. As was poited out above, $(g(v_{n_k}), v_{n_k}) \in S_f$ for all $k \in \mathbb{N}$. Hence passing to the limit as $k \to \infty$ and applying the closedness of the set S_f one obtains that $(g_*, v) \in S_f$. Consequently, $g(v) \geq g_* \geq g(v) + \theta$, which is impossible.

Let now $v \notin \operatorname{dom} g$. Then there exist $M \in \mathbb{R}$ and a sequence $\{v_n\} \subset \operatorname{dom} g$ converging to v such that $g(v_n) \geq M$ for all $n \in \mathbb{N}$. Applying, as above, the fact that the sequence $\{g(v_n)\}$ is bounded one can extract a subsequence $\{v_{n_k}\}$ such that the sequence $\{g(v_{n_k})\}$ converges to some $g_* \geq M > -\infty$. Therefore $(g_*, v) \in S_f$, and $g(v) \geq g_* > -\infty$, which is impossible. Thus, g is u.s.c., and the set C_f is closed.

Recall that $(f(x) - \langle v_0, x\rangle - \varepsilon, v_0) \notin C_f$, and C_f is a closed convex set. Applying the separation theorem one obtains that there exist $(b, y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}$ and $\delta > 0$ such that

$$b(f(x) - \langle v_0, x\rangle - \varepsilon) + \langle v_0, y\rangle \geq ba + \langle v, y\rangle + \delta \quad \forall (a, v) \in C_f. \tag{1.3}$$

By definition for any $(a, v) \in S_f$ one has $(-\infty, a] \times \{v\} \subset C_f$, which implies that $b \geq 0$.

If $b > 0$, then dividing (1.3) by b and taking the supremum over all $(a, v) \in S_f$ one obtains

$$f(x) + \left\langle v_0, \frac{1}{b}y - x \right\rangle - \varepsilon \geq f\left(\frac{1}{b}y\right) + \frac{\delta}{b}.$$

Recall that $v_0 \in \partial_\varepsilon f(x)$. Therefore

$$f\left(\frac{1}{b}y\right) \geq f(x) + \left\langle v_0, \frac{1}{b}y - x \right\rangle - \varepsilon \geq f\left(\frac{1}{b}y\right) + \frac{\delta}{b},$$

which is impossible. Thus, $\partial_\varepsilon f(x) = D_\varepsilon(x)$.

Suppose now that $b = 0$. Then (1.3) implies that

$$\begin{aligned}\frac{f(x + \alpha y) - f(x)}{\alpha} &= \frac{1}{\alpha}\Big(\sup_{(a,v) \in S_f} \big(a + \langle v, x + \alpha y\rangle\big) - f(x)\Big) \\ &\leq \frac{1}{\alpha}\Big(\sup_{(a,v) \in S_f} \big(a + \langle v, x\rangle\big) + \alpha\langle v_0, y\rangle - \alpha\delta - f(x)\Big) = \langle v_0, y\rangle - \delta \quad (1.4)\end{aligned}$$

for any $\alpha > 0$. On the other hand, by the definition of ε-subgradient for any $\alpha > \varepsilon/\delta$ one has

$$\frac{f(x + \alpha y) - f(x)}{\alpha} \geq \langle v_0, y\rangle - \frac{\varepsilon}{\alpha} > \langle v_0, y\rangle - \delta,$$

which contradicts (1.4). Thus, $\partial_\varepsilon f(x) = D_\varepsilon(x)$, and the proof is complete. $\square$

Remark 1.1.1. By the theorem above the supremum in the definition of affine support set (1.1) is attained for some $x \in \operatorname{dom} f$ if and only if f is subdifferentiable at x. In particular, if f is finite-valued, then the supremum in the definition of affine support set is attained for any $x \in \mathcal{H}$ by [168, Proposition I.5.2 and Corollary I.2.5].

Let S_f be any affine support set of f. Our aim now is to show that several important properties of the function f, such as boundedness below and the attainment of minimum, can be described in terms of simple geometric properties of the set S_f.

Observe that if f attains a global minimum at a point x_*, then $0 \in \partial f(x_*)$, and $(f(x_*), 0) \in S_f$ by Theorem 1.1.1. Thus, the sets $\mathbb{R} \times \{0\}$ and S_f intersect. In the general case, define $a_f = \sup_{(a,0) \in S_f} a$. By definition $a_f = -\infty$, if the sets $\mathbb{R} \times \{0\}$ and S_f do not intersect. Note also that if they do intersect, then $(a_f, 0) \in S_f$ due to the facts that (i) this intersection is obviously closed, and (ii) if $a_f = +\infty$, then $f(\cdot) \equiv +\infty$, which contradicts the assumption that the function f is proper.

Denote by $N_f = \{(b, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \mid b(a - a_f) + \langle w, v \rangle \leq 0 \ \forall (a, v) \in S_f\}$ the normal cone to the set S_f at the point $(a_f, 0)$, if the sets $\mathbb{R} \times \{0\}$ and S_f intersect, and define $N_f = \emptyset$ otherwise. From this point onwards we suppose that the space $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$ is endowed with the norm $\|(a, v)\| = \sqrt{a^2 + \|v\|^2}$.

Theorem 1.1.2. *The following statements hold true:*

1. *f is bounded below if and only if $S_f \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \neq \emptyset$;*

2. *if f is bounded below, then $a_f = \inf_{x \in \mathcal{H}} f(x)$;*

3. *f attains a global minimum if and only if there exists $(b, w) \in N_f$ such that $b > 0$; furthermore, $\operatorname{arg\,min}_{x \in \mathcal{H}} f(x) = \{b^{-1} w \in \mathcal{H} \mid (b, w) \in N_f \colon b > 0\}$;*

4. *if $f(x) \geq 0$ for all $x \in \mathcal{H}$, then either $0 \in S_f$ or $a_* > 0$, where (a_*, v_*) is a globally optimal solution of the problem*

$$\min_{(a,v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}} \|(a, v)\|^2 \quad \textit{subject to} \quad (a, v) \in S_f;$$

conversely, if f is bounded below and either $0 \in S_f$ or $a_* > 0$, then $f(x) \geq 0$ for all $x \in \mathcal{H}$. Moreover, in the case $a_* > 0$ one has $a_f > 0$, i.e. $\inf_{x \in \mathcal{H}} f(x) > 0$.

Proof. **1.** If $S_f \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \neq \emptyset$, then there exists $a_0 \in \mathbb{R}$ such that $(a_0, 0) \in S_f$. By the definition of S_f for all $x \in \mathcal{H}$ one has $f(x) \geq a_0$, i.e. f is bounded below.

Suppose, now, that f is bounded below. Denote $f_* = \inf_{x\in\mathcal{H}} f(x)$. Then for any $\varepsilon > 0$ there exists $x_\varepsilon \in \mathcal{H}$ such that $f(x_\varepsilon) \le f_* + \varepsilon$. Hence $0 \in \partial_\varepsilon f(x_\varepsilon)$, which with the use of Theorem 1.1.1 implies that there exists $a \ge f(x_\varepsilon) - \varepsilon$ such that $(a, 0) \in S_f$, i.e. $S_f \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \ne \emptyset$.

2. As was just proved, for any $\varepsilon > 0$ there exists $a \ge f(x_\varepsilon) - \varepsilon \ge f_* - \varepsilon$ such that $(a, 0) \in S_f$. Therefore $a_f \ge f_*$. On the other hand, for any $(a, 0) \in S_f$ and $x \in \mathcal{H}$ one obviously has $f(x) \ge a$, which implies that $a_f \le f_*$. Thus, $a_f = f_*$.

3. Let f attain a global minimum at a point $x_* \in \mathcal{H}$. By definition $f(x_*) = \sup_{(a,v)\in S_f}(a + \langle v, x_*\rangle) = f_*$ or, equivalently,

$$(a - f_*) + \langle v, x_*\rangle \le 0 \quad \forall (a, v) \in S_f,$$

which implies that $(1, x_*) \in N_f$ (note that $(f_*, 0) \in S_f$ and $a_f = f_*$ by the second part of the theorem).

Suppose, now, that $N_f \ne \emptyset$, and there exists $(b, w) \in N_f$ with $b > 0$. By the definition of N_f and the second part of the theorem one has

$$b(a - f_*) + \langle w, v\rangle \le 0 \quad \forall (a, v) \in S_f.$$

Dividing by b and taking the supremum over all $(a, v) \in S_f$ one obtains

$$f\left(\frac{1}{b}w\right) = \sup_{(a,v)\in S_f}\left(a + \left\langle v, \frac{1}{b}w\right\rangle\right) \le f_*,$$

which implies that $b^{-1}w$ is a global minimizer of f. Thus, $\arg\min_{x\in\mathcal{H}} f(x) = \{b^{-1}w \in \mathcal{H} \mid (b, w) \in N_f \colon b > 0\}$.

4. Let $f(x) \ge 0$ for all $x \in \mathcal{H}$. Arguing by reductio ad absurdum, suppose that $0 \notin S_f$ and $a_* \le 0$. From the definition of (a_*, v_*) and the necessary condition for a minimum of a differentiable function on a convex set it follows that

$$a_*(a - a_*) + \langle v_*, v - v_*\rangle \ge 0 \quad \forall (a, v) \in S_f. \tag{1.5}$$

If $a_* = 0$, then one gets that $\langle v, -v_*\rangle \le -\|v_*\|^2 < 0$ for all $(a, v) \in S_f$ (note that $v_* \ne 0$, since otherwise $0 \in S_f$). Therefore for any $\alpha > 0$ and $x \in \operatorname{dom} f$ one has

$$f(x - \alpha v_*) = \sup_{(a,v)\in S_f}(a + \langle v, x\rangle + \alpha\langle v, -v_*\rangle) \le f(x) - \alpha\|v_*\|^2.$$

Consequently, $f(x - \alpha v_*) \to -\infty$ as $\alpha \to +\infty$, which is impossible.

If $a_* < 0$, then dividing (1.5) by a_* and taking the supremum over all $(a, v) \in S_f$ one obtains that

$$f\left(\frac{1}{a_*}v_*\right) = \sup_{(a,v)\in S_f}\left(a + \left\langle v, \frac{1}{a_*}v_*\right\rangle\right) \le a_* + \frac{1}{a_*}\|v_*\|^2 < 0,$$

which contradicts the assumption that f is nonnegative.

Let us prove the converse statement. If $0 \in S_f$, then, obviously, one has $f(x) \geq 0$ for all $x \in \mathcal{H}$. Therefore, let $0 \notin S_f$ and $a_* > 0$. Arguing by reductio ad absurdum, suppose that $f_* = \inf_{x \in \mathcal{H}} f(x) < 0$ (note that $f_* > -\infty$ due to the assumption that f is bounded below). By the second part of the theorem one has $(f_*, 0) \in S_f$. Consequently, for any $\alpha \in [0,1]$ one has $\alpha(a_*, v_*) + (1-\alpha)(f_*, 0) \in S_f$. Setting $\alpha = |f_*|/(|f_*| + a_*) \in (0,1)$ one obtains that $(0, \alpha v_*) \in S_f$, which is impossible due to the definition of (a_*, v_*) and the obvious inequality $\|(0, \alpha v_*)\|^2 < \|(a_*, v_*)\|^2$. Thus, the function f is nonnegative. It remains to note that $a_f > 0$ in the case when $a_* > 0$ by virtue of the facts that $a_f \geq 0$ due to the nonnegativity of the function f, and $a_f \neq 0$, since otherwise $0 \in S_f$ and $a_* = 0$. $\square$

Remark 1.1.2. (i) Let us note that the assumption on the boundedness below of the function f cannot be dropped from the last part of the proposition above. Indeed, if $f(x) \equiv a + \langle v, x \rangle$ with $a > 0$ and $v \neq 0$, then defining $S_f = (a, v)$ one obtains that $a_* > 0$, but the function f is not nonnegative.

(ii) From the proof of the last part of the proposition above it follows that if $0 \notin S_f$, but $a_* = 0$, then f is not bounded below. Consequently, if f is bounded below, then f is nonnegative if and only if $a_* \geq 0$. Furthermore, note that if $a_* < 0$, then $f(\frac{1}{a_*} v_*) < 0$.

Let us give a simple example illustrating the proposition above.

Example 1.1.1. Let $\mathcal{H} = \mathbb{R}$, and $S_f = \{(a, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (a+1)^2 + (v-1)^2 \leq 1\}$. Then according to Theorem 1.1.2 one has $f_* = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -1$. Furthermore, it is easy to check that $N_f = \{(a, v) \in \mathbb{R}^2 \mid a = 0,\ v \leq 0\}$, which by Theorem 1.1.2 implies that the function f does not attain a global minimum. Let us verify this directly. Indeed, for any $x \in \mathbb{R}$ one has

$$f(x) = \max_{(a,v) \in S_f} (a + vx) = \max\{(a-1) + (v+1)x \mid a^2 + v^2 \leq 1\} = \sqrt{1 + x^2} + x - 1.$$

Thus, $f_* = -1$, and f does not attain a global minimum.

With the use of Theorem 1.1.2 we can point out a direct connection between affine support sets of f and the Frenchel conjugate function f^*.

Proposition 1.1.1. *Let S_f be any affine support set of f. Then*

$$\sup\{a \mid (a, v) \in S_f\} = -f^*(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}. \tag{1.6}$$

In particular, any affine support set of f is contained in the set $\{(a, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \mid a \leq -f^*(v)\}$.

Furthermore, the set

$$\begin{aligned} S_f &= \operatorname{cl}\operatorname{co}\{(-f^*(v), v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \mid v \in \operatorname{dom} f^*\} \\ &= \operatorname{cl}\operatorname{co}\{(f(y) - \langle v, y\rangle, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \mid y \in \operatorname{dom} \partial f, \ v \in \partial f(y)\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

is the smallest (by inclusion) affine support set of the function f.

Proof. Fix $v \in \mathcal{H}$, and consider the function $g(x) = f(x) - \langle v, x\rangle$. Note that this function is bounded below if and only if $v \in \operatorname{dom} f^*$. On the other hand, from the fact that the set $S_f - (0, v)$ is an affine support set of this function and the first part of Theorem 1.1.2 it follows that g is bounded below if and only if there exists $a \in \mathbb{R}$ such that $(a, v) \in S_f$. Furthermore, if $v \in \operatorname{dom} f^*$, then applying the second part of Theorem 1.1.2 one obtains that

$$-f^*(v) = \inf_{x \in \mathcal{H}} (f(x) - \langle v, x\rangle) = \sup\{a \mid (a, 0) \in S_f - (0, v)\} = \sup\{a \mid (a, v) \in S_f\},$$

i.e. (1.6) holds true, and $S_f \subseteq \{(a, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \mid a \le -f^*(v)\}$. Hence and from the fact that

$$f(x) = f^{**}(x) = \sup_{v \in \operatorname{dom} f^*} \big(\langle v, x\rangle - f^*(v)\big) \quad \forall x \in \mathcal{H} \tag{1.8}$$

it follows that set (1.7) is the smallest affine support set of the function f. It remains to note that the second equality in (1.7) follows directly from the facts that (i) one can take the supremum in (1.8) over all $v \in \operatorname{dom} \partial f^*$ (since if $v \in \operatorname{dom} f^* \setminus \operatorname{dom} \partial f^*$, then for any $x \in \mathcal{H}$ by definition there exists $w \in \operatorname{dom} f^*$ such that $\langle w, x\rangle - f^*(w) > \langle v, x\rangle - f^*(v)$), and (ii) $v \in \operatorname{dom} \partial f^*$ if and only if $v \in \partial f(y)$ for some $y \in \operatorname{dom} \partial f$ if and only if $f^*(v) = \langle v, y\rangle - f(y)$ by [332, Theorem 1.16.4]. ☐

Remark 1.1.3. The proposition above demonstrates that there is a direct connection between affine support sets and conjugate functions. Note, in particular, that the function $g(v)$ defined in the proof of Theorem 1.1.1 is, in fact, the negative of the conjugate function f^*. Furthermore, Theorem 1.1.1 itself is a reformulation of the standard characterization of ε-subgradients via the conjugate function (see, e.g. [223, Proposition XI.1.2.1]) in terms of affine support sets. In the light of Proposition 1.1.1 we can also give a simple interpretation of Theorem 1.1.2. The first two statements of this proposition is nothing but the obvious equality $\inf_{x \in \mathcal{H}} f(x) = -f^*(0)$. The third one is a combination of the equality $\arg\min_{x \in \mathcal{H}} f(x) = \partial f^*(0)$ and the well-known geometric interpretation of the subdifferential in terms of the normal cone to the epigraph of a convex function (see, e.g. [222, Proposition VI.1.3.1]). However, to the best of author's knowledge, the last statement of Theorem 1.1.2 is completely new. Furthermore, the last statement of this propostion is a basis of new global optimality conditions for DC optimization problems derived in the next section.

Denote by $\operatorname{co} C$ the convex hull of subset C of a real topological vector space and denote by $\operatorname{cl} C$ the topological closure of C. Here in after we denote by $A + B$ the Minkowski addition of sets A and B. Let us present some simple calculus rules for affine support sets. Their proofs are straightforward and are omitted for the sake of shortness.

Proposition 1.1.2 (linear combination). *Let $f_i \colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in I = \{1, \ldots, l\}$ be proper closed convex functions, and let S_{f_i} be any affine support set of f_i, $i \in I$. Then for any $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$, the set $S_f = \operatorname{cl}(\sum_{i \in I} \lambda_i S_{f_i})$ is an affine support set of the function $f = \sum_{i \in I} \lambda_i f_i$.*

Proposition 1.1.3 (affine transformation). *Let $g \colon \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ be a proper closed convex function, and S_g be any affine support set of g. Suppose also that X is a Hilber space, $T \colon X \to \mathcal{H}$ is a bounded linear operator, and $f(x) = g(Tx + b)$ for some $b \in \mathcal{H}$. Then the set*

$$S_f = \operatorname{cl}\Big\{(a + \langle v, b\rangle, T^* v) \in \mathbb{R} \times X \;\Big|\; (a, v) \in S_g\Big\} \tag{1.9}$$

is an affine support set of f. Moreover, the closure operator in (1.9) *can be dropped, if S_g is bounded or T is invertible.*

Proposition 1.1.4 (supremum). *Let Y be a nonempty set, and a function $f \colon \mathcal{H} \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ be such that for any $y \in Y$ the function $f(\cdot, y)$ is proper, closed, and convex. Suppose also that $S(y)$ is an affine support set of the function $f(\cdot, y)$, and the function $g(\cdot) = \sup_{y \in Y} f(\cdot, y)$ is proper. Then $S_g = \operatorname{cl} \operatorname{co}\{S(y) \mid y \in Y\}$ is an affine support set of the function g.*

In the end of this section, let us give several simple examples demonstrating how one can compute affine support sets of convex functions with the use of Proposition 1.1.1 and some other well-known results.

Example 1.1.2. If f is a proper closed positively homogeneous convex function, then the set $S_f = \{0\} \times \partial f(0)$ is an affine support set of f (see, e.g. [222, Theorem V.3.1.1]).

Example 1.1.3. If $\mathcal{H} = \mathbb{R}^d$, and f is a finite polyhedral convex function, then $f(x) = \max_{1 \leq i \leq n}(a_i + \langle v_i, x\rangle)$ for some $n \in \mathbb{N}$ and $(a_i, v_i) \in \mathbb{R}^{d+1}$ (see [346, Sect. 19]). Consequently, the set $S_f = \operatorname{co}\{(a_i, v_i) \mid i \in I\}$ is an affine support set of f. Therefore, a finite convex function f is polyhedral if and only if there exists an affine support set of this function that is a convex polytope.

Example 1.1.4. If f is Gâteaux differentiable on its effective domain, then

$$S_f = \operatorname{cl} \operatorname{co}\Big\{\big(f(x) - \langle \nabla f(x), x\rangle, \nabla f(x)\big) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \;\Big|\; x \in \operatorname{dom} f\Big\}$$

is an affine support set of f. Here $\nabla f(x)$ is the gradient of f at x In particular, if f has the form $f(x) = 0.5\langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle$, where the linear operator $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ is positive semidefinite, then $S_f = \operatorname{cl}\operatorname{co}\{(-0.5\langle x, Ax\rangle, Ax + b) \mid x \in \mathcal{H}\}$ is an affine support set of f. Note that in this case it is easier to describe the affine support set with the use of the gradient rather than the conjugate function (cf. (1.7)), since the conjugate function is defined via the pseudoinverse operator of A.

1.1.2 Global Codifferentials and Global Optimality Conditions

In this section we apply the main results on affine support sets of convex functions obtained above to DC optimization problems. In particular, with the use of Theorem 1.1.2 we obtain new necessary and sufficient conditions for global optimality in DC optimization. Hereinafter we consider only finite-valued DC functions $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ defined on the entire space $\mathcal{H}$.

Let f be a DC function, i.e. let $f = g - h$, where $g, h\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ are closed convex functions. Suppose also that S_g and S_h are any affine support sets of the functions g and h respectively. Introduce the set-valued mappings

$$\underline{d}f(x) = \big\{(a - g(x) + \langle v, x\rangle, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \mid (a, v) \in S_g\big\}, \tag{1.10}$$

$$\overline{d}f(x) = \big\{(-b + h(x) - \langle w, x\rangle, -w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \mid (b, w) \in S_h\big\}. \tag{1.11}$$

Then for any $x, \Delta x \in \mathcal{H}$ the following equality holds true:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sup_{(a,v)\in \underline{d}f(x)} (a + \langle v, \Delta x\rangle) + \inf_{(b,w)\in \overline{d}f(x)} (b + \langle w, \Delta x\rangle) \tag{1.12}$$

(in actuality, the supremum and the infimum are attained by Remark 1.1.1). Indeed, by definition one has

$$\begin{aligned} g(x + \Delta x) - g(x) &= \sup_{(a,v)\in S_g} (a + \langle v, x + \Delta x\rangle) - g(x) = \sup_{(a,v)\in S_g} (a - g(x) + \langle v, x\rangle + \langle v, \Delta x\rangle) \\ &= \sup_{(a,v)\in \underline{d}f(x)} (a + \langle v, \Delta x\rangle). \end{aligned}$$

Subtracting from this equality the same one for the function $h(x)$ one obtains that (1.12) is valid. Furthermore, for any $x \in \mathcal{H}$ one has

$$\sup_{(a,v)\in \underline{d}f(x)} a = \sup_{(a,v)\in S_g} (a + \langle v, x\rangle) - g(x) = 0,$$

and, similarly, $\inf_{(b,w)\in \overline{d}f(x)} b = 0$. Finally, observe that the sets $\underline{d}f(x)$ and $\overline{d}f(x)$ are convex and closed due to the fact that the map $(a, v) \mapsto (a - g(x) + \langle v, x\rangle, v)$ is a homeomorphism of $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$. Thus, the pair $[\underline{d}f(x), \overline{d}f(x)]$ has similar properties to codifferential of the function

f at x [73–76, 111].Therefore, it is natural to call the pair $Df = [\underline{d}f, \overline{d}f]$ *a global codifferential mapping* (or simply *a global codifferential*) of the function f associated with the DC decomposition $f = g - h$. The multifunction $\underline{d}f$ is called *a global hypodifferential* of f, while the multifunction $\overline{d}f$ is called *a global hyperdifferential* of f. Note that global codifferential mappings are obviously not unique, since there exist infinitely many DC decompositions of a DC function (for any convex function z one can use the DC decomposition $f = (g + z) - (h + z)$).

Let us prove several simple rules for computing global codifferentials.

Theorem 1.1.3. *Let f_i, $i \in I = \{1, \dots k\}$, be DC functions and let Df_i be a global codifferential mapping of f_i associated with a DC decomposition $f_i = g_i - h_i$, $i \in I$. The following statements hold true:*

1. *if $f = f_1 + c$ for some $c \in \mathbb{R}$, then $Df = Df_1$;*

2. *if $f = \sum_{i=1}^k f_i$, then $Df = [\operatorname{cl}(\sum_{i=1}^k \underline{d}f_i), \operatorname{cl}(\sum_{i=1}^k \overline{d}f_i)]$ is a global codifferential mapping of the function f associated with the DC decomposition $f = \sum_{i=1}^k g_i - \sum_{i=1}^k h_i$;*

3. *if $f = \lambda f_1$, then $Df = [\lambda \underline{d}f_1, \lambda \overline{d}f_1]$ is a global codifferential mapping of f associated with the DC decomposition $f = \lambda g_1 - \lambda h_1$ in the case $\lambda \geq 0$, and $Df = [\lambda \overline{d}f_1, \lambda \underline{d}f_1]$ is a global codifferential mapping of f associated with the DC decomposition $f = |\lambda| h_1 - |\lambda| g_1$ in the case $\lambda < 0$;*

4. *if $f = \max_{i \in I} f_i$, then*
$$Df(\cdot) = \left[\operatorname{cl}\operatorname{co}\left\{ (f_i(\cdot) - f(\cdot), 0) + \underline{d}f_i(\cdot) - \sum_{j \neq i} \overline{d}f_j(\cdot) \;\middle|\; i \in I \right\}, \operatorname{cl}\left(\sum_{i=1}^k \overline{d}f_i(\cdot) \right) \right]$$
is a global codifferential mapping of the function f associated with the DC decomposition $f = \max_{i \in I}\{g_i + \sum_{j \neq i} h_j\} - \sum_{i=1}^k h_i$;

5. *if $f = \min_{i \in I} f_i$, then*
$$Df(\cdot) = \left[\operatorname{cl}\left(\sum_{i=1}^k \underline{d}f_i(\cdot) \right), \operatorname{cl}\operatorname{co}\left\{ (f_i(\cdot) - f(\cdot), 0) + \overline{d}f_i(\cdot) - \sum_{j \neq i} \underline{d}f_j(\cdot) \;\middle|\; i \in I \right\} \right]$$
is a global codifferential mapping of the function f associated with the DC decomposition $f = \sum_{i=1}^k g_i - \max_{i \in I}\{h_i + \sum_{j \neq i} g_j\}$.

Proof. Let global codifferentials Df_i be defined via affine support sets S_{g_i} and S_{h_i} of the functions g_i and h_i, $i \in I$, respectively.

1. Define $g = g_1 + c$ and $h = h_1$. Then $f = g - h$ is a DC decomposition of f. Hence, in particular, $\overline{d}f = \overline{d}f_1$ (see (1.11)). Clearly, the set $S_g = S_{g_1} + (c, 0)$ is an affine support set of g. Consequently, by equality (1.10) one has $\underline{d}f = \underline{d}f_1$.

2. Define $g = \sum_{i \in I} g_i$ and $h = \sum_{i \in I} h_i$. Since the sume of convex functions is a convex function, the expression $f = g - h$ is a DC decomposition of f. By Proposition 1.1.2 the set $S_g = \operatorname{cl}(\sum_{i \in I} S_{g_i})$ is an affine support set of g, while the set $S_h = \operatorname{cl}(\sum_{i \in I} S_{h_i})$ is an affine support set of h.

For the sake of shortness we prove only the statement for $\underline{d}f$. Fix any $x \in \mathcal{H}$ and choose any $z_i \in \underline{d}f_i(x)$. By definition $z_i = (a_i - g_i(x) + \langle v_i, x \rangle, v_i)$ for some $(a_i, v_i) \in S_{g_i}$, $i \in I$, and $(a, v) = \sum_{i \in I}(a_i, v_i) \in S_g$. Therefore

$$\underline{d}f(x) \ni (a - g(x) + \langle v, x \rangle, v) = \sum_{i=1}^{k}(a_i - g_i(x) + \langle v_i, x \rangle, v_i) = \sum_{i=1}^{k} z_i,$$

which implies that $\operatorname{cl}(\sum_{i=1}^{k} \underline{d}f_i(x)) \subseteq \underline{d}f(x)$, since the set $\underline{d}f(x)$ is closed.

Fix now any $z \in \underline{d}f(x)$. By (1.10) there exists $(a, v) \in S_g$ such that $z = (a - g(x) + \langle v, x \rangle, v)$. By the definition of S_g for any $\varepsilon > 0$ there exist $(a_i, v_i) \in S_{g_i}$ for which $\|(a, v) - \sum_{i \in I}(a_i, v_i)\| < \varepsilon$. Define $z_i = (a_i - g_i(x) + \langle v_i, x \rangle, v_i)$, $i \in I$. By definition $z_i \in \underline{d}f_i(x)$ and

$$\Big\| z - \sum_{i=1}^{k} z_i \Big\| \le \Big\| (a, v) - \sum_{i=1}^{k} (a_i, v_i) \Big\| + \Big\| v - \sum_{i=1}^{k} v_i \Big\| \|x\| \le \varepsilon(1 + \|x\|).$$

Thus, for any $\varepsilon > 0$ and $z \in \underline{d}f(x)$ there exist $z_i \in \underline{d}f_i(x)$, $i \in I$, such that $\|z - \sum_{i=1}^{k} z_i\| < \varepsilon$, which implies that $\underline{d}f(x) \subseteq \operatorname{cl}(\sum_{i=1}^{k} \underline{d}f_i(x))$. Thus, the equality $\underline{d}f(x) = \operatorname{cl}(\sum_{i=1}^{k} \underline{d}f_i(x))$ holds true.

3. Let $\lambda \ge 0$. Put $g = \lambda g_1$ and $h = \lambda h_1$. Clearly, $f = g - h$ is a DC decomposition of f, the set $S_g = \lambda S_{g_1}$ is an affine support set of g, while the set $S_h = \lambda S_{h_1}$ is an affine support set of h.

Fix any $x \in \mathcal{H}$. Let us show that $\underline{d}f(x) = \lambda \underline{d}f_1(x)$. Indeed, by definitions

$$\begin{aligned}
\underline{d}f(x) &= \big\{(a - g(x) + \langle v, x \rangle, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \bigm| (a, v) \in \lambda S_{g_1}\big\} = \\
&= \big\{\lambda(a - g_1(x) + \langle v, x \rangle, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \bigm| (a, v) \in S_{g_1}\big\} = \\
&= \lambda \big\{(a - g_1(x) + \langle v, x \rangle, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \bigm| (a, v) \in S_{g_1}\big\} = \lambda \underline{d}f(x).
\end{aligned}$$

The equality $\overline{d}f(x) = \lambda \overline{d}f_1(x)$ is proved in the same way.

Let now $\lambda < 0$. Define $g = |\lambda| h_1$ and $h = |\lambda| g_1$. Then the expression $f = -|\lambda| f_1 = g - h$ is a DC decomposition of f. Clearly, the set $S_g = |\lambda| S_{h_1}$ is an affine support set of g, while the set $S_h = |\lambda| S_{g_1}$ is an affine support set of h.

Fix $x \in \mathcal{H}$. Let us show that $\underline{d} f(x) = \lambda \overline{d} f_1(x)$. Indeed, by definitions

$$\begin{aligned}
\underline{d} f(x) &= \big\{ (a - g(x) + \langle v, x \rangle, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \bigm| (a, v) \in |\lambda| S_{h_1} \big\} = \\
&= \big\{ |\lambda| (b - h_1(x) + \langle w, x \rangle, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \bigm| (b, w) \in S_{h_1} \big\} = \\
&= \lambda \big\{ (-b + h_1(x) - \langle w, x \rangle, -w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H} \bigm| b, w) \in S_{h_1} \big\} = \lambda \overline{d} f_1(x).
\end{aligned}$$

The equality $\overline{d} f(x) = \lambda \underline{d} f_1(x)$ is proved in exactly the same way.

4. Define $g = \max_{i \in I} \{ g_i + \sum_{j \neq i} h_j \}$ and $h = \sum_{i=1}^k h_i$. The functions g and h are convex, since the sum and the maximum of convex function are convex functions. Moreover, adding and subtracting $\sum_{i \in I} h_i$ one obtains that

$$f(x) = \max_{i \in I} (g_i(x) - h_i(x)) = \max_{i \in I} \Big\{ g_i + \sum_{j \neq i} h_j \Big\} - \sum_{i=1}^{k} h_i = g - h$$

for all $x \in \mathcal{H}$, that is, $f = g - h$ is a DC decomposition f. Let us compute the global codifferential of f corresponding to this DC decomposition.

Bearing in mind the fact that $h = \sum_{i \in I} h_i$ and arguing in the same way as in the proof of part 2 one obtains that $\overline{d} f(\cdot) = \operatorname{cl}(\sum_{i \in I} \overline{d} f_i(\cdot))$. Therefore it remains to prove the formula for $\underline{d} f$.

Fix any $x \in \mathcal{H}$, $i \in I$, $z_i \in \underline{d} f_i(x)$ and $u_j \in \overline{d} f_j(x)$, $j \neq i$. By definition there exist $(a_i, v_i) \in S_{g_i}$ and $(b_j, w_j) \in S_{h_j}$, $j \neq i$ such that $z_i = (a_i - g_i(x) + \langle v_i, x \rangle, v_i)$ and $u_j = (-b_j + h_j(x) - \langle w_j, x \rangle, -w_j)$. Note that by Propositions 1.1.2 and 1.1.4 the set $S_g = \operatorname{cl} \operatorname{co} \{ S_{g_i} + \sum_{j \neq i} S_{h_j} \mid i \in I \}$ is an affine support set of g. Therefore $(a, v) = (a_i, v_i) + \sum_{j \neq i} (b_j, w_j) \in S_g$ and $z = (a - g(x) + \langle v, x \rangle, v) \in \underline{d} f(x)$. Adding and subracting $\sum_{i \in I} h_i(x)$, and then $g_i(x)$, one gets

$$\begin{aligned}
g(x) &= \max_{i \in I} \Big(g_i(x) + \sum_{j \neq i} h_j(x) \Big) = \max_{i \in I} (g_i(x) - h_i(x)) + \sum_{i \in I} h_i(x) = \\
&= f(x) + g_i(x) - g_i(x) + \sum_{i \in I} h_i(x) = f(x) - f_i(x) + \Big(g_i(x) + \sum_{j \neq i} h_j(x) \Big).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Consequently,

$$z = \Big(a_i + \sum_{j \neq i} b_j - g(x) + \Big\langle v_i + \sum_{j \neq i} w_j, x \Big\rangle, v_i + \sum_{j \neq i} w_j \Big) = (f_i(x) - f(x), 0) + z_i - \sum_{j \neq i} u_j,$$

that is, $(f_i(x) - f(x), 0) + \underline{d} f_i(x) + \sum_{j \neq i} \overline{d} f_j(x) \subseteq \underline{d} f(x)$. Since $i \in I$ was chosen arbitrarily and the set $\underline{d} f(x)$ is closed and convex by definition, one has

$$\operatorname{cl} \operatorname{co} \Big\{ (f_i(x) - f(x), 0) + \underline{d} f_i(x) - \sum_{j \neq i} \overline{d} f_j(x) \Bigm| i \in I \Big\} \subseteq \underline{d} f(x).$$

Let us prove the converse inclusion. To this end, denote the set on the left-hand side of this inclusion by $D(x)$.

Fix any $z \in \underline{d}f(x)$. By definition there exists $(a, v) \in S_g$ such that $z = (a - g(x) + \langle v, x\rangle, v)$. In turn, by the definition of S_g fo any $\varepsilon > 0$ there exist $\alpha_i \ge 0$, $i \in I$, $(a_i, v_i) \in S_{g_i}$ and $(b_{ij}, w_{ij}) \in S_{h_j}$, $i \in I$, $j \ne i$, such that $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$ and $\|(a, v) - (\widehat{a}, \widehat{v})\| < \varepsilon$, where

$$(\widehat{a}, \widehat{v}) = \sum_{i \in I} \alpha_i \Big((a_i, v_i) + \sum_{j \ne i} (b_{ij}, w_{ij}) \Big).$$

Define $z_i = (a_i - g_i(x) + \langle v_i, x\rangle, v_i) \in \underline{d}f_i(x)$, $u_{ij} = (-b_{ij} + h_j(x) - \langle w_{ij}, x\rangle, -w_{ij}) \in \overline{d}f_j(x)$ and

$$\widehat{z} = \sum_{i \in I} \alpha_i \Big((f_i(x) - f(x), 0) + z_i - \sum_{j \ne i} u_{ij} \Big) \in D(x).$$

Applying equalities (1.13) one can easily check that $\widehat{z} = (\widehat{a} - g(x) + \langle \widehat{v}, x\rangle, \widehat{v})$. Therefore

$$\|z - \widehat{z}\| \le \|(a, v) - (\widehat{a}, \widehat{v})\| + \|v - \widehat{v}\| \|x\| \le \varepsilon(1 + \|x\|).$$

Thus, for all $\varepsilon > 0$ and $z \in \underline{d}f(x)$ there exists $\widehat{z} \in D(x)$ such that $\|z - \widehat{z}\| < \varepsilon$. Hence taking into account the fact that the set $D(x)$ is closed one obtains that $\underline{d}f(x) \subseteq D(x)$. Thus, the equality $\underline{d}f(x) = D(x)$ holds true.

5. This statement can be proved by applying part 3 of this theorem with $\lambda = -1$, then part 4 and then again part 3 with $\lambda = -1$ to the equality $f = -\max_{i \in I}(-f_i)$. □

Let us now turn to the derivation of global optimality conditions for DC optimization problems.

Theorem 1.1.4. *Let f be a bounded below DC function, Df be its global codifferential and $x_* \in \mathcal{H}$ be a given point. Let also $C \subseteq \overline{d}f(x_*)$ be a nonempty set such that $\overline{d}f(x_*) = \operatorname{cl} \operatorname{co} C$. Then x_* is a point of global minimum of f if and only if for any $z \in C$ the equalities $a(z) \ge 0$ hold true, where $(a(z), v(z))$ is an optimal solution of the problem*

$$\|(a, v)\|^2 \to \min_{(a,v) \in \underline{d}f(x_*) + z}.$$

Proof. From the definition of global codifferential mapping and the fact that $\overline{d}f(x_*) = \operatorname{cl} \operatorname{co} C$ it follows that

$$f(x) - f(x_*) = \sup_{(a,v) \in \underline{d}f(x_*)} (a + \langle v, x - x_*\rangle) + \inf_{z \in C} (b + \langle w, x - x_*\rangle).$$

Consequently, x_* is a point of global minimum of f if and only if for any $z \in C$ one has

$$\sup_{(a,v) \in \underline{d}f(x_*) + z} (a + \langle v, x - x_*\rangle) \ge 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Note that the function on the left hand side of this inequality is bounded below by $\inf_{x \in \mathcal{H}} f(x) - f(x_*) > -\infty$. Hence applying the last part of Theorem 1.1.2 one obtains the desired result (see also Remark 1.1.2). □

Remark 1.1.4. (i) From the proofs of Theorems 1.1.2 and 1.1.4 (see also Remark 1.1.2) it follows that if x_* is not a point of global minimum of the function f, then there exists $z \in C$ such that $a(z) < 0$, and for any such $z \in C$ one has $f(x_* + a(z)^{-1}v(z)) < f(x_*)$. Thus, the necessary and sufficient global optimality conditions from the theorem above not only allow one to verify whether a given point is a global minimizer, but also provide a way to compute "better" points, if the optimality conditions are not satisfied. Thus, it is fair to say that the global optimality conditions in terms of global codifferentials are somewhat constructive. Furthermore, it seems possible to propose a numerical method for general DC optimization problems based on the global optimality conditions from Theorem 1.1.4 and utilising a certain approximation of global codifferential (cf. numerical methods from [28, 382]).

(ii) It is obvious that in many particular cases the global optimality conditions from Theorem 1.1.4 are of theoretical value only, since it is extremely difficult to compute a global codifferential of a DC function. However, the same statement is true for many other general global optimality conditions. In particular, it is true for the well-known global optimality condition in terms of ε-subdifferentials [219–221], due to the fact that ε-subdifferentials can be efficiently computed only in few particular cases (see, e.g. [271]). Let us note that in the case when the function f is piecewise affine, there always exists a global codifferential of the function f such that both sets $\underline{d}f(x)$ and $\overline{d}f(x)$ are convex polytopes [210]. In this case, a global codifferential of the function f can be computed with the aid of Theorem 1.1.3 and with the use of global optimality conditions from Theorem 1.1.4 one can propose an efficient numerical method for global minimization of nonconvex piecewise affine functions (see Section 3.4).

Let us now study constrained DC optimization problems. First we consider the inequality constrained problem of the form:

$$f_0(x) \to \min_{x \in \mathcal{H}}, \quad f_i(x) \le 0, \quad i \in I, \tag{$\mathcal{P}_I$}$$

where f_i, $i \in 0 \cup I$, $I = \{1, \ldots, l\}$, are DC functions. Denote by Ω the feasible region of this problem. To obtain global optimality conditions for this problem we need to impose a regularity assumption on the constraints. Namely, one says that *the interior point constraint qualification* (IPCQ) holds at a point $x_0 \in \Omega$, if $x_0 \in \operatorname{cl}\{x \in \mathcal{H} \mid f_i(x) < 0 \; i \in I\}$ or, equivalently, if for any $\varepsilon > 0$ there exists $y \in \Omega$ such that $\|y - x\| < \varepsilon$, and $f_i(y) < 0$ for all $i \in I$. It is easy to see that in the case when the functions f_i, $i \in I$, are convex, IPCQ is equivalent to Slater's condition. Note also that IPCQ holds at x_0, in particular, if a nonsmooth Mangasarian-Fromovitz constraint qualification (MFCQ) holds true at this point, i.e. if there exists $v \in \mathcal{H}$ such that $f_i'(x_0, v) < 0$ for all $i \in I$ such that $f_i(x_0) = 0$, where $f_i'(x_0, v)$ is the directional derivative of f_i at x_0 in the direction v. Finally, it should be noted that IPCQ is a generalization of the robustness condition from [226].

Theorem 1.1.5. *Let there exist a globally optimal solution of the problem* $(\mathcal{P}_I)$ *such that IPCQ holds true at this solution, and let* x_* *be a feasible point of* $(\mathcal{P}_I)$*. Let also the function* f_0 *be bounded below on* Ω*, and* Df_i *be a global codifferential of* f_i*,* $i \in I \cup \{0\}$*. Suppose, finally, that* $C_i \subseteq \overline{d} f_i(x_*)$ *is a nonempty set such that* $\overline{d} f_i(x_*) = \operatorname{cl} \operatorname{co} C_i$*,* $i \in I \cup \{0\}$*. Then* x_* *is a globally optimal solution of the problem* $(\mathcal{P}_I)$ *if and only if for any* $z_i \in C_i$*,* $i \in I \cup \{0\}$*, one has* $a(z) \ge 0$*, where* $(a(z), v(z))$ *with* $z = (z_0, z_1, \ldots, z_l)$ *is a globally optimal solution of the problem*

$$\min_{(a,v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}} \|(a,v)\|^2 \quad \textit{subject to} \quad (a,v) \in L(z)$$

and $L(z) = \operatorname{cl} \operatorname{co}\{\underline{d} f_0(x_*) + z_0,\ \underline{d} f_i(x_*) + z_i + (f_i(x_*), 0) \mid i \in I\}$*.*

Proof. Let us utilise a global version of the standard trick proposed by B.N. Pshenichnyi [340] to transform the problem $(\mathcal{P}_I)$ into an unconstrained optimization problem. Introduce the function

$$F(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_*), f_1(x), \ldots, f_l(x)\}.$$

Note that $F(x_*) = 0$, since x_* is a feasible point of $(\mathcal{P}_I)$. Let us check that x_* is a globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P}_I)$ if and only if it is a point of global minimum of the function F.

Indeed, suppose that x_* is a globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P}_I)$. Observe that if $F(x) < 0$ for some $x \in \mathcal{H}$, then $x \in \Omega$ and $f_0(x) < f_0(x_*)$, which is impossible. Thus, $F(x) \ge F(x_*) = 0$ for any $x \in \mathcal{H}$, i.e. x_* is a point of global minimum of the function F. Conversely, let x_* be a point of global minimum of F. By definition $F(x) \ge F(x_*) = 0$ for all $x \in \mathcal{H}$. Hence, in particular, for any x such that $f_i(x) < 0$ for all $i \in I$ one has $f_0(x) \ge f_0(x_*)$. Thus, x_* is a globally optimal solution of the problem

$$\min_{x \in \mathcal{H}} f_0(x) \quad \text{subject to} \quad x \in \{x_*\} \cup \{y \in \mathcal{H} \mid f_i(y) < 0 \,\forall i \in I\}.$$

Note that the function f_0 is continuous as the difference of finite closed convex functions that are continuous due to the fact that $\mathcal{H}$ is a Hilbert space (see, e.g. [168, Corollary I.2.5]). Therefore, taking into account the fact that by our assumption IPCQ holds true at some globally optimal solution y_* of the problem $(\mathcal{P}_I)$ one obtains that $f_0(x_*) \le f_0(y_*)$, which implies that x_* is a globally optimal solution of $(\mathcal{P}_I)$ as well. Thus, x_* is a globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P}_I)$ if and only if x_* is a point of global minimum of the function F.

From the definition of global codifferential it follows that

$$F(x) = \max_{i \in I} \Big\{ \sup_{(a,v) \in \underline{d} f_0(x_*)} (a + \langle v, x - x_* \rangle) + \inf_{(b,w) \in \overline{d} f_0(x_*)} (b + \langle w, x - x_* \rangle),$$

$$f_i(x_*) + \sup_{(a,v) \in \underline{d} f_i(x_*)} (a + \langle v, x - x_* \rangle) + \inf_{(b,w) \in \overline{d} f_i(x_*)} (b + \langle w, x - x_* \rangle) \Big\}.$$

Therefore, as is easy to see, x_* is a point of global minimum of the function F if and only if for any $z_i \in C_i$, $i \in I \cup \{0\}$ the function

$$F_z(x) = \max_{i \in I} \Big\{ \sup_{(a,v) \in \underline{d} f_0(x_*) + z_0} (a + \langle v, x - x_* \rangle), f_i(x_*) + \sup_{(a,v) \in \underline{d} f_i(x_*) + z_i} (a + \langle v, x - x_* \rangle) \Big\}$$

is nonnegative. Note that $F_z(x) \ge F(x) \ge f_0(x) - f_0(x_*) \ge \inf_{x \in \Omega} f_0(x) - f_0(x_*) > -\infty$ for any $x \in \Omega$, and $F_z(x) \ge F(x) > 0$ for any $x \notin \Omega$, i.e. the function F_z is bounded below. Consequently, taking into account the fact that the set $L(z)$ from the formulation of the theorem is an affine support set of F_z, and applying the last part of Theorem 1.1.2 one obtains the desired result. $\square$

Remark 1.1.5. As in the case of Theorem 1.1.4, the global optimality conditions from the theorem above are somewhat constructive. Namely, one can easily verify that if x_* is not a globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P}_I)$, then for any $z_i \in C_i$, $i \in I \cup \{0\}$ such that $a(z) < 0$ (note that such z_i exist by Theorem 1.1.5) one has $f_0(x_* + a(z)^{-1} v(z)) < f_0(x_*)$ and $f_i(x_* + a(z)^{-1} v(z)) < 0$ for all $i \in I$. Thus, if x_* is not a globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P}_I)$, then with the use of the global optimality conditions from Theorem 1.1.5 one can find a "better" point in the interior of the feasible region (see Example 1.1.5 below).

Let us give a simple example illustrating Theorem 1.1.5.

Example 1.1.5. Let $\mathcal{H} = \mathbb{R}$, and the problem $(\mathcal{P}_I)$ have the form

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f_0(x) = |x - 4| \quad \text{subject to} \quad f_1(x) = \min\{|x-2|, |x+2|\} - 1 \le 0. \tag{1.14}$$

Let also $x_0 = -1$. It is easily seen that $\Omega = [-3, -1] \cup [1, 3]$, IPCQ holds true at the unique globally optimal solution $x_* = 3$ of problem (1.14), and x_0 is a locally optimal solution of this problem. Let us check the global optimality conditions at the point x_0.

With the use of Theorem 1.1.3 one obtains that

$$\underline{d} f_0(x_0) = \operatorname{co} \left\{ \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \overline{d} f_0(x_0) = \{0\},$$

$$\underline{d} f_1(x_0) = \operatorname{co} \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \overline{d} f_1(x_0) = \operatorname{co} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Let $C_0 = \{0\}$, and C_1 be the set of extreme points of $\overline{d} f_1(x_0)$. Then applying Theorem 1.1.5 one can check that

1. $0 \in L(z)$ for $z = (z_0, z_1)$ with $z_0 = (0,0) \in C_0$, $z_1 = (4,1) \in C_1$, $z_1 = (6,-1) \in C_1$, and $z_1 = (0,1) \in C_1$;

2. $(a(z), v(z)) = (-0.1, -0.3)$ for $z = (z_0, z_1)$ with $z_0 = (0,0) \in C_0$ and $z_1 = (2,-1) \in C_1$.

Thus, the global optimality conditions from Theorem 1.1.5 are not satisfied. Furthermore, note that in the case $z_1 = (2,-1)$ one has $x_1 = x_0 + a(z)^{-1}v(z) = 2$, $f_0(x_1) = 2 < 5 = f_0(x_0)$ and $f_1(x_1) = -1 < 0$.

Now we turn to the general constrained optimization problem of the form

$$\min_{x \in \mathcal{H}} f_0(x) \quad \text{s.t.} \quad f_i(x) \le 0, \quad i \in I, \quad f_j(x) = 0, \quad j \in J, \tag{$\mathcal{P}_{IJ}$}$$

where f_i, $i \in 0 \cup I \cup J$, $I = \{1, \ldots, l\}$, $J = \{l+1, \ldots, m\}$, are DC functions. Denote by Ω the feasible region of the problem ($\mathcal{P}_{IJ}$), and introduce the function

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{l} \max\{0, f_i(x)\} + \sum_{j=l+1}^{m} |f_j(x)|.$$

Observe that $\Omega = \{x \in \mathcal{H} \mid \varphi(x) = 0\}$.

Introduce the penalty function $F_c(x) = f_0(x) + c\varphi(x)$ for the problem ($\mathcal{P}_{IJ}$). The function F_c is DC. Indeed, if $f_i = g_i - h_i$ for some convex functions g_i and h_i, $i \in \{0\} \cup I \cup J$, then

$$F_c(x) = g_0(x) - h_0(x) + c\Big(\sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x) - h_i(x)\} + \sum_{j=m+1}^{m+\ell} |g_j(x) - h_j(x)|\Big) = G_c(x) - H_c(x),$$

where

$$G_c(x) = g_0(x) + c\Big(\sum_{i=1}^{m} \max\{g_i(x), h_i(x)\} + 2\sum_{j=m+1}^{m+\ell} \max\{g_j(x), h_j(x)\}\Big),$$

$$H_c(x) = h_0(x) + c\Big(\sum_{i=1}^{m} h_i(x) + \sum_{j=m+1}^{m+\ell} (g_j(x) + h_j(x))\Big).$$

The expression $F_c = G_c - H_c$ is a DC decomposition of F_c.

Let us show that under some additional assumptions the penalty function F_c is *globally exact*, that is, there exists $c_* \ge 0$ such that for all $c \ge c_*$ the set of points of global minimum of the function F_c coincides with the set of globally optimal solutions of the problem ($\mathcal{P}_{IJ}$). The greatest lower bound of all such c_* is called *the least exact penalty parameter* of the function F_c. The global exactness of the function F_c allow one not only to obtain global optimality conditions for the problem ($\mathcal{P}_{IJ}$) with the use of Theorem 1.1.4, but also apply general methods for solving unconstrained DC optimization problem to DC problems with equality and inequality constraints.

For the sake of simplicity here we present the proof of the global exactness of the penalty function F_c in the finite dimensional case only. This result can be extended to the infinite dimensional case with the use of Theorem 4.3.1 or general results on exact penalty functions for infinite dimensional problems from the author's papers [138, 141].

Theorem 1.1.6. *Let $\mathcal{H}$ be finite dimensional. Suppose that φ has a local error bound at every globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P}_{IJ})$, i.e. for any globally optimal solution x_* of this problem there exist $\tau > 0$ and a neighbourhood U of x_* such that*

$$\varphi(x) \geq \tau \operatorname{dist}(x, \Omega) \quad \forall x \in U. \tag{1.15}$$

Then F_c is globally exact if and only if there exists $\lambda \geq 0$ such that the set $\{x \in \mathcal{H} \mid F_c(x) < f_*\}$ is either bounded or empty, where f_* is the optimal value of the problem $(\mathcal{P}_{IJ})$. In particular, F_c is globally exact, provided this function is bounded below for some $c \geq 0$ and the set

$$\Omega(\alpha) = \Big\{ x \in \mathcal{H} \mid f_0(x) < f_* + \alpha, \ f_i(x) < \alpha, \ i \in I, \ |f_j(x)| < \alpha, \ j \in J \Big\}$$

is bounded for some $\alpha > 0$.

Proof. Let x_* be a globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P}_{IJ})$. Note that the function f_0 is locally Lipschitz continuous as the difference of convex functions defined on a finite dimensional normed space (recall that in the finite dimensional case any convex function is locally Lipschitz continuous on the interior of its effective domain; see, e.g. [346, Thrm. 10.4]). Hence taking into accoun inequality (1.15) one obtains that the penalty function F_c is locally exact at x_* by Theorem 4.1.5, that is, there exist $c_*(x_*) \geq 0$ and a neighbourhood $U(x_*)$ of x_* such that $F_c(x) \geq F_c(x_*)$ for all $x \in U(x_*)$ and $c \geq c_*(x_*)$.

Thus, the penalty function F_c is locally exact at every globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P}_{IJ})$. Therefore, by the localization principle for linear penalty functions (Theorem 4.1.4) the penalty function F_c is globally exact if and only if there exists $c \geq 0$ such that the set $\{x \in \mathcal{H} \mid F_c(x) < f_*\}$ is bounded.

Suppose that F_{c_0} is bounded below for some $c_0 \geq 0$ and the set $\Omega(\alpha)$ is bounded for some $\alpha > 0$. Let us check that in this case $\{x \mid F_c(x) < f_*\} \subset \Omega(\alpha)$ for any sufficiently large $c \geq 0$. Then F_c is globally exact by the first part of the theorem.

Indeed, if $x \notin \Omega(\alpha)$, then either $f_0(x) \geq f_* + \alpha$ or $\varphi(x) \geq \alpha$. In the form caseone has $F_c(x) \geq f_0(x) > f_*$ for all $c \geq 0$ due to the nonnegativity of φ, while in the latter case

$$F_c(x) = F_{c_0}(x) + (c - c_0)\varphi(x) \geq \eta + (c - c_0)\alpha > f_*$$

for all $c > c_0 + (f_* - \eta)/\alpha$, where $\eta = \inf_{x \in \mathcal{H}} F_{c_0}(x)$. Thus, $\{x \mid F_c(x) < f_*\} \subset \Omega(\alpha)$ for all $c > c_0 + (f_* - \eta)/\alpha$, and the proof is complete. □

Remark 1.1.6. (i) Our proof of the global exactness of the ℓ_1 penalty function is based on the assumption that the penalty term $\varphi(x)$ has a local error bound. This assumption can be verified with the use of general results on metric subregularity and local error bounds (see, e.g. [20, 194, 270]). In particular, in the case when the functions f_i are continuously differentiable at a globally optimal solution x_* of $(\mathcal{P}_{IJ})$, the function $\varphi(x)$ has a local error bound at this optimal solution, provided Mangasarian-Fromivitz constraint qualifications holds at x_*. Let us note that in some cases it is possible to prove the existence of a local error bound with the use of the DC structure of the problem alone (i.e. without any constraint qualifications). See [278] for this kind of results on exact penalty functions and error bounds for DC optimization problems with inequality constraints.
(ii) Note that Theorem 1.1.6 significantly improves [375, Proposition 1], since we do not assume that the objective function f_0 is globally Lipschitz continuous and utilise a local error bound instead of the global one in [375]. Furthermore, we obtained necessary and sufficient conditions for the global exactness of the function $F_c(x)$, while only sufficient conditions were considered in [375].

Applying global optimality conditions from Theorem 1.1.4 to the function $F_c(x)$ one can easily obtain necessary and sufficient global optimality conditions for the problem $(\mathcal{P}_{IJ})$ in terms of global codifferentials that are valid under the assumptions of Theorem 1.1.6. For the sake of shortness we do note give a precise statment of this result (see Theorem 4 in the author's paper [152]).

Let us give a simple example illustrating Theorem 1.1.6.

Example 1.1.6. Let $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ and $x = (x^{(1)}, x^{(2)})^T \in \mathbb{R}^2$. Consider the following problem:

$$f_0(x) = |x^{(1)} - 2| + 2|x^{(2)}| \to \min_{x \in \mathbb{R}^2}, \quad f_1(x) = |x^{(1)}| - |x^{(2)}| = 0. \tag{1.16}$$

The penalty function for this problem has the form

$$F_c(x) = |x^{(1)} - 2| + 2|x^{(2)}| + c\big||x^{(1)}| - |x^{(2)}|\big|.$$

One can easily verify that the penalty term $\varphi(x) = ||x^{(1)}| - |x^{(2)}||$ admits a local error bound (1.15) at the unique point of global minimum $x_* = (0,0)^T$ of the problem (1.16). Hence taking into account the fact that $f_0(x) \to +\infty$ as $\|x\| \to +\infty$ one obtains that the penatly function F_c for problem (1.16) is globally exact by Theorem 1.1.6. Let us estimate the least exact penalty parameter of the function F_c.

Clearly, the function f_0 is globally Lipschitz continuous with Lipschitz constat $L = \sqrt{5}$ and

$$\varphi^{\downarrow}(x) = \liminf_{y \to x} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{|y - x|} \le -1 \quad \forall x \notin \Omega,$$

where $|\cdot|$ is the Euclidean norm. The quantity $\varphi^{\downarrow}(x)$ is called *the rate of steepest descent* of φ at x (see, e.g. [82, 141]). Let us note that the inequality $f^{\downarrow}(x) \ge 0$ is a necessary condition for a minimum.

For any $c > \sqrt{5}$ and $x \notin \Omega$ one has $F_c^{\downarrow}(x) \le L + c\varphi^{\downarrow}(x) < 0$. Therefore, local/global minimizers of the function F_c do not belong to the set $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ for any $c > \sqrt{5}$, since $F_c^{\downarrow}(x) \ge 0$ is a necessary optimality condition. Thus, one can conclude that the least exact penalty parameter of F_c does not exceed $\sqrt{5}$. That is why we set $c = 3$.

Let us verify global optimality conditions for problem (1.16) at the point $x_0 = (2, 0)^T$, which is infisible for problem (1.16) and is a point of unconstrained global minimum of the objective function f_0. To this end, let us apply global optimality conditions from Theorem 1.1.4 to the function F_c with $c = 3$.

Applying Theorem 1.1.3 one obtains

$$\begin{aligned} \underline{d} f_0(x_0) &= \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \overline{d} f_0(x_0) = \{0\}, \\ \underline{d} f_1(x_0) &= \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \overline{d} f_1(x_0) = \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Moreover, $DF_3(x_0) = [\underline{d} f_0(x_0) + 3\underline{d}\varphi(x_0), \overline{d} f_0(x_0) + 3\overline{d}\varphi(x_0)]$, where

$$\underline{d}\varphi(x_0) = \operatorname{co}\left\{ \underline{d} f_1(x_0) + \underline{d} f_1(x_0), \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \overline{d} f_1(x_0) - \overline{d} f_1(x_0) \right\}$$

and $\overline{d}\varphi(x_0) = \overline{d} f_1(x_0) - \underline{d} f_1(x_0)$. Utilising these expressions for global codifferentials one can easily compute $\underline{d} F_3(x_0)$, which is the convex hull of 20 points and we do not present it here for the sake of shortness, and check that

$$\overline{d} F_3(x_0) = \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Let C be the set of extreme points of $\overline{d} F_3(x_0)$. Then finding the point of the set $\underline{d} F_3(x_0) + z$ closest to the origin for all $z \in C$ one obtains that

1. $(a(z), v(z)) = (-1; 1,5; 0,5)$ for $z = (0, -3, 3)^T \in C$;

2. $(a(z), v(z)) = (-0,8; 1,6; 0)$ for $z = (12, 3, 3)^T \in C$ and $z = (12, 3, -3)^T \in C$;

3. $(a(z), v(z)) = (-1; 1,5; -0,5)$ for $z = (0, -3, -3)^T \in C$.

Thus, the global optimality conditions from Theorem 1.1.4 are not satisfeid at x_0. Moreover, observe that for $z = (12, 3, 3)^T \in C$ and $z = (12, 3, -3)^T \in C$ one has $x_1 = x_0 + a(z)^{-1}v(z) = (0, 0)$ and x_1 is a globally optimal solution of problem (1.16). Thus, with the use of the penalty function and global optimality conditions from Theorem 1.1.4 we were able to escape a point of unconstrained global minimum of the objective function and find a globally optimal solution of problem (1.16) in one step.

1.2 Codifferential Calculus in Banach Spaces

Global codifferential allows one to obtain a convenient expression the increment of a DC function at a given point and utilise this expression to obtain necessary and sufficient global optimality conditions. However, application of global codifferentials to particular classes of optimization is often hampered by the fact that it is usually impossible to compute global codifferential explicitly. To overcome this difficulty it is natural to move from global representations of functions to local approximations of their increment, that is, to move from global codifferential of DC function to (local) codifferentials of arbitrary nonsmooth functions. This transition allows one not only to drastically simplify computation of codifferential, but also apply codifferential calculus to analysis of various optimization problems.

The definition of codifferentiable function was first given by professor V.F. Demyanov in [73, 75, 76, 111] in the finite dimensional case. In this section we extend this definition to the infinite dimensional case, develop a general theory of codifferentiable functions in Banach space and a closely related theory of quasidifferentials of nonsmooth functions.

1.2.1 Hausdorff Continuity of Multifunctions

For the sake of completeness, in this section we prove a number of auxiliary results on continuous multifunctions (see [329]) that will be necessary for analysis of continuously codifferentiable functions.

Let (X, ρ) be a metric space. Denote the distance between a point $x \in X$ and a set $A \subseteq X$ by $\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{\rho(x, a) \mid a \in A\}$. Let also $B(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\}$ and denote $U(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$. Recall that *the Hausdorff distance* between sets $A \subset X$ and $B \subset X$ is defined as follows:

$$\rho_H(A, B) = \sup\left\{\sup_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B), \ \sup_{x \in B} \operatorname{dist}(x, A)\right\}.$$

As is well-known, the Hausdorff distance is a metric on the set of all nonempty closed subsets of X with finite diameter (cf. [332, Theorem 1.3.1]). In what follows we would require the following auxiliary lemma that allows one to reformulate the inequality $\rho_H(A, B) < \varepsilon$ in more convenient terms. For any set $A \subset X$ and all $t > 0$ denote by $A_t = \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x, A) < t\}$ the t-neighbourhood (or t-fattening) of the set A. In the case when X is a normed space X the equality $A_t = A + U(0, t)$ holds true.

Lemma 1.2.1. *Let $A, B \subset X$ and $\varepsilon > 0$ be fixed. The following conditions are equivalent:*

1. *$\rho_H(A, B) < \varepsilon$;*
2. *there exists $t \in (0, \varepsilon)$ such that $B \subseteq A_t$ and $A \subseteq B_t$;*
3. *there exists $t \in (0, \varepsilon)$ such that for all $x \in A$ one can find $y \in B$ for which $\rho(x, y) < t$, and for all $y \in B$ one can find $x \in A$ for which $\rho(x, y) < t$.*

Proof. Let us first show that the first condition implies the second one. Choose any t satisfying the inequalities $\rho_H(A, B) < t < \varepsilon$. By the definition of the Hausdorff metric from the inequality $\rho_H(A, B) < t$ it follows $\operatorname{dist}(x, B) < t$ for all $x \in A$ and $\operatorname{dist}(y, A) < t$ for all $y \in B$, that is, $A \subseteq B_t$ and $B \subseteq A_t$.

Let us check now that the second conditions implies the third one. Indeed, from the inclusion $A \subseteq B_t$ it follows that for all $x \in A$ one has $\operatorname{dist}(x, B) < t$, which implies that there exists $y \in B$ such that $\rho(x, y) < t$. Thus, for all $x \in A$ there exists $y \in B$ such that $\rho(x, y) < t$. Swapping A and B one obtains that the inclusion $B \subseteq A_t$ implies that for all $y \in B$ there exists $x \in A$ such that $\rho(x, y) < t$, i.e. the third condition holds true.

Let us finally prove that third condition implies the first one. Since for all $x \in A$ there exists $y \in B$ such that $\rho(x, y) < t < \varepsilon$, for any $x \in A$ one has $\operatorname{dist}(x, B) < t$, which implies that $\sup\{\operatorname{dist}(x, B) \mid x \in A\} \leq t < \varepsilon$. Swapping A and B one obtains that the inequalities $\sup\{\operatorname{dist}(y, A) \mid y \in B\} < \varepsilon$, which implies that $\rho_H(A, B) < \varepsilon$. □

Let Y be a normed space. Let $F \colon X \rightrightarrows Y$ be a given multifunction (hereinafter we consider only multifunctions with nonempty values). Recall that the set-valued map F is called *continuous in the Hausdorff metric* (or *Hausdorff continuous*) at a point x, if for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that for all $x' \in U(x, \delta)$ one has $\rho_H(F(x'), F(x)) < \varepsilon$. Let us show that Hausdorff continuity is preserved under some standard operations on multifunctions.

Lemma 1.2.2. *Let multifunctions $F, G \colon X \rightrightarrows Y$ be Hausdorff continuous at a point $x \in X$. Then the multifunction $T(\cdot) = F(\cdot) + G(\cdot)$ is Hausdorff continuous at this point as well.*

Proof. Choose any $\varepsilon > 0$. By the definition of Hausdorff continuity there exists $\delta > 0$ such that for all $x' \in U(x, \delta)$ one has $\rho_H(F(x'), F(x)) < \varepsilon/3$ and $\rho_H(G(x'), G(x)) < \varepsilon/3$.

Let $x' \in U(x, \delta)$ and $y \in T(x)$. Since $T(x) = F(x) + G(x)$, there exist $y_1 \in F(x)$ and $y_2 \in G(x)$ such that $y = y_1 + y_2$. By Lemma 1.2.1 there exist $z_1 \in F(x')$ and $z_2 \in G(x')$ satisfying the inequalities $\|y_1 - z_1\| < \varepsilon/3$ and $\|y_2 - z_2\| < \varepsilon/3$. Put $z = z_1 + z_2$. Then $z \in T(x')$ and

$$\|y - z\| \le \|y_1 - z_1\| + \|y_2 - z_2\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Thus, for any $y \in T(x)$ there exists $z \in T(x')$ such that $\|y - z\| < 2\varepsilon/3$. Swapping sets $T(x)$ and $T(x')$ and applying Lemma 1.2.1 again one obtains that for any $z \in T(x')$ there exists $y \in T(x)$ such that $\|y - z\| < 2\varepsilon/3$. Consequently, $\rho_H(T(x'), T(x)) < \varepsilon$ by Lemma 1.2.1. Since $\varepsilon > 0$ and $x' \in U(x, \delta)$ were chosen arbitrarily, one can conclude that the multifunction T is Hausdorff continuous at x. $\square$

Lemma 1.2.3. *Let multifunctions $F, G \colon X \rightrightarrows Y$ be Hausdorff continuous at a point $x \in X$. Then the multifunction $T(\cdot) = \operatorname{co}\{F(\cdot), G(\cdot)\}$ is Hausdorff continuous at this point as well.*

Proof. Fix $\varepsilon > 0$. By our assumption there exists $\delta > 0$ such that for all $x' \in U(x, \delta)$ one has $\rho_H(F(x'), F(x)) < \varepsilon$ and $\rho_H(G(x'), G(x)) < \varepsilon$.

Let $x' \in U(x, \delta)$ and $y \in T(x)$. Since $T(x) = \operatorname{co}\{F(x), G(x)\}$, there exist $n \in \mathbb{N}$, $y_i \in F(x) \cup G(x)$ and $\alpha_i \in [0, 1]$, $i \in 1\colon n$ such that $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$ and $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. By Lemma 1.2.1 one can find $z_i \in F(x') \cup G(x')$ such that $\|y_i - z_i\| < \varepsilon$ for all $i \in 1\colon n$. Put $z = \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n$. Then $z \in T(x')$ and

$$\|y - z\| \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \|y_i - z_i\| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \varepsilon.$$

Thus, for any $y \in T(x)$ one can find $z \in T(x')$ such that $\|y - z\| < \varepsilon$. Swapping sets $T(x)$ and $T(x')$ and applying Lemma 1.2.1 again one gets that for any $z \in T(x')$ one can find $y \in T(x)$ such that $\|y - z\| < \varepsilon$. Hence applying Lemma 1.2.1 once again one obtains that $\rho_H(T(x'), T(x)) < 2\varepsilon$, which implies the required result. $\square$

Lemma 1.2.4. *Let multifunction $F \colon X \rightrightarrows Y$ be Hausdorff continuous at a point $x \in X$, function $f \colon X \to \mathbb{R}$ be continuous at this point and the set $F(x)$ be bounded. Then the multifunction $T(\cdot) = f(\cdot)F(\cdot) = \{f(\cdot)y \in Y \mid y \in F(\cdot)\}$ is Hausdorff continuous at x.*

Proof. Fix $\varepsilon > 0$. Since f is continuous at x, there exist $\delta_1 > 0$ and $M > 0$ such that $|f(x')| \le M$ for all $x \in U(x, \delta_1)$. Define $C = \max\{\|y\| \mid y \in F(x)\} < +\infty$. Due to the continuity of f there also exists $\delta_2 > 0$ such that $|f(x') - f(x)| < \varepsilon/2C$ for all $x' \in U(x, \delta_2)$. In turn, by the definition of the Hausdorff distnace one can find $\delta_3 > 0$ such that $\rho_H(F(x'), F(x)) < \varepsilon/2M$ for any $x' \in U(x, \delta_3)$.

Define $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Let $x' \in U(x, \delta)$ and $z \in T(x)$. By definition $z = f(x)y$ for some $y \in F(x)$. By Lemma 1.2.1 one can find $y' \in F(x')$ such that $\|y' - y\| < \varepsilon/2M$. Let $z' = f(x')y'$. Then $z' \in T(x')$ and

$$\|z' - z\| = \|f(x')y' - f(x)y\| \le |f(x')|\|y' - y\| + |f(x') - f(x)|\|y\| < M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2C}C = \varepsilon$$

due to the fact that $\|x' - x\| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Thus, for any $z \in T(x)$ there exists $z' \in T(x')$ such that $\|z' - z\| < \varepsilon$. Arguing in the same way one can check that for any $z' \in T(x')$ one can find $z \in T(x)$ such that $\|z' - z\| < \varepsilon$. Hence applying Lemma 1.2.1 one obtains that $\rho_H(T(x'), T(x)) < 2\varepsilon$. Thus, for any $\varepsilon > 0$ one can find $\delta > 0$ such that for any $x' \in U(x, \delta)$ one has $\rho_H(T(x'), T(x)) < \varepsilon$, i.e. the multifunction T is Hausdorff continuous at x. $\square$

In the following sections we will consider Hausdorff continuous pairs of set-valued mappings, since a codifferential is a pair of convex compact sets. Suppose that some set-valued mapping $F, G \colon X \rightrightarrows Y$ are given. One says that the pair $[F, G]$ is *Hausdorff continuous* at $x \in X$, if *both* F and G are Hausdorff continuous at this point.

Recall that multiplication by scalar and addition operations for pairs of subsets of real vector space are defined in the following way:

$$[A, B] + [C, D] = [A + C, B + D], \quad \lambda[A, B] = \begin{cases} [\lambda A, \lambda B], & \text{if } \lambda \ge 0, \\ [\lambda B, \lambda A], & \text{if } \lambda < 0. \end{cases}$$

Let us check that these operations preserve continuity.

Lemma 1.2.5. *Let multifunctions $F_1, F_2, G_1, G_2 \colon X \rightrightarrows Y$ be Hausdorff continuous at a point $x \in X$. Then the pair $[F_1, G_1] + [F_2, G_2]$ is Hausdorff continuous at this point.*

The validity of this statement follows direction from definition and Lemma 1.2.2. In the case of multiplication by scalar, things are slightly more complicated, since the multifunctions in pair switch places, when the scalar factor changes its sign.

Lemma 1.2.6. *Let multifunctions $F, G \colon X \rightrightarrows Y$ be Hausdorff continuous at a point $x \in X$, function $f \colon X \to \mathbb{R}$ be continuous at this point, and sets $F(x)$ and $G(x)$ be bounded. Then the pair $f(\cdot)[F(\cdot), G(\cdot)]$ is Hausdorff continuous at x.*

Proof. Clearly, if $f(x) \neq 0$, then f has the same sign in a neighbourhood of zero and in this case the Hausdorff continuity of $f(\cdot)[F(\cdot), G(\cdot)]$ follows directly from Lemma 1.2.4.

Suppose that $f(x) = 0$. Define $C = \max\{\|y\| \mid y \in F(x) \cup G(x)\} < +\infty$. Due to the Hausdorff continuity of the multifunctions F and G, and Lemma 1.2.1 there exists $\delta_1 > 0$ such that $F(x') \subseteq F(x)+B(0,1)$ and $G(x') \subseteq G(x)+B(0,1)$ for any $x' \in U(x,\delta_1)$. Therefore $\|y\| \leq C+1$ for all $y \in F(x') \cup G(x')$ and $x' \in U(x,\delta_1)$.

Since f is continuous at x and $f(x) = 0$, there exists $\delta_2 > 0$ such that for any $x' \in U(x,\delta_2)$ the inequality $|f(x')| < \varepsilon/(C+1)$ holds true. Let $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Then for any $x' \in U(x,\delta)$ one has $\|y\| < \varepsilon$ for all $y \in f(x')F(x') \cup f(x')G(x')$. Hence applying Lemma 1.2.1 one gets that

$$\rho_H(\{0\}, f(x')F(x')) < 2\varepsilon, \quad \rho_H(\{0\}, f(x')G(x')) < 2\varepsilon \quad \forall x' \in U(x,\delta).$$

Therefore, bearing in mind the fact that $f(x)F(x) = f(x)G(x) = \{0\}$ one can conclude that the pair $f(\cdot)[F(\cdot), G(\cdot)]$ is Hausdorff continuous at x. □

1.2.2 Codifferentiable and Quasidifferentiable Functions

Let X be a real Banach space, $U \subset X$ be an open set, and $f \colon U \to \mathbb{R}$ be a given function. Following the discussion above about transition from global representations of DC functions to local approximations, we can give a natural definition of (local) codifferentiability.

Definition 1.2.1. The function f is called *codifferentiable* at a point $x \in U$, if there exists closed convex functions $\Phi, \Psi \colon X \to \mathbb{R}$ such that $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ and for any $\Delta x \in X$ one has

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x + \alpha\Delta x) - f(x) - \big(\Phi(\alpha\Delta x) - \Psi(\alpha\Delta x)\big) \Big| = 0. \tag{1.17}$$

Thus, the function f is codifferentiable a point x if and only if its increment at this point can be approximated up to the first order with the use of the DC function $\Phi(\cdot) - \Psi(\cdot)$. At first glance, it might seem natural to define a codifferential of f at x to be a global codifferential of the DC function $\Phi - \Psi$. However, this definition of codifferential has many drawback connected with the fact that a global codifferential of a DC function is often very difficult to compute explicitly.

Note that in the definition of codifferentiable function, behaviour of Φ and Ψ outside of an arbitrarily small (but fixed) neighbourhood of zero does not changes the value of the limit in (1.17). Therefore, instead of using global representation of the DC function $\Phi - \Psi$ based on a global codifferential, it is sufficient to consider a representation of this function in a neighbourhood of zero. To obtain such representation consider the space $\mathbb{R} \times X$ endowed with the norm $\|(a,x)\| = \sqrt{|a|^2 + \|x\|^2}$ for all $(a,x) \in \mathbb{R} \times X$. One can readily check that the topological dual space $(\mathbb{R} \times X)^*$, equipped with the weak* topology is isomorphic (in the category of topological vector spaces) to the space $\mathbb{R} \times X^*$ equipped with the product topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$, where $\tau_{\mathbb{R}}$ is the canonical topology on $\mathbb{R}$, while w^* is the weak* topology on X^*. Utilising this fact or arguing directly one can verify that a subset of the locally convex space $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ is compact if and only if it is closed in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$ and bounded with respect to the norm $\|(a, x^*)\| = \sqrt{|a|^2 + \|x^*\|^2}$, $(a, x^*) \in \mathbb{R} \times X^*$ (see [132, Thrm. 2.1]). Let us also note that for any subset $A \subset \mathbb{R} \times X^*$ one has

$$\sup_{(a,x^*)\in A} (a + \langle x^*, x\rangle) = \sup_{(a,x^*)\in \operatorname{cl} A} (a + \langle x^*, x\rangle) \quad \forall x \in X,$$

where the closure is taken in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$ (see [132, Lemma 4.2]) and $\langle x^*, x\rangle = x^*(x)$ for all $x^* \in X^*$ and $x \in X$.

Lemma 1.2.7. *Let $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$ be a closed convex function. Then there exist $r > 0$ and a convex compact subset A of the space $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ such that*

$$\Phi(x) = \max_{(a,x^*)\in A} (a + \langle x^*, x\rangle) \quad \forall x \in B(0, r). \tag{1.18}$$

Proof. Since the function Φ is closed and convex, and X is a Banach space, Φ is continuous and subdifferentiable on X (see, e.g. [168, Crlr. 2.5 and Prp. 5.2]). Therefore there exist $r > 0$ and $C > 0$ such that

$$|\Phi(x)| \leqslant C \quad \forall x \in B(0, 2r). \tag{1.19}$$

Let us show that the subdifferential of Φ is bounded on $B(0, r)$. Indeed, from (1.19) and the definition of subgradient it follows that

$$\langle x^*, y - x\rangle \le \Phi(y) - \Phi(x) \le 2C \quad \forall x \in B(0, r), \quad y \in B(0, 2r), \quad x^* \in \partial\Phi(x).$$

Setting $y = x+z$ for $z \in B(0, r)$ one obtains that $\langle x^*, z\rangle \le 2C$ for all $x^* \in \partial\Phi(x)$ and $x, z \in B(0, r)$ or, equivalently,

$$\|x^*\| \le 2C/r \quad \forall x^* \in \partial\Phi(x), \quad x \in B(0, r). \tag{1.20}$$

As was noted above, the function Φ is subdifferentiable on X. Let $\ell(\cdot)$ be an arbitrary selection of the set-valued mapping $\partial\Phi\colon B(0, r) \rightrightarrows X^*$ (that is, $\ell(x) \in \partial\Phi(x)$ for all $x \in B(0, r)$). Introduce the sets

$$A_0 = \{(a, x^*) \in \mathbb{R} \times X^* \mid a = \Phi(x) - \langle \ell(x), x\rangle,\ x^* = \ell(x),\ x \in B(0, r)\}, \quad A = \operatorname{cl} \operatorname{co} A_0.$$

Here the closure is taken in the topolog $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$. The set A is obviously convex and closed in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$. From inequalities (1.19) and (1.20) it follows that $A_0 \subset M := [-3C, 3C] \times B(0, 2C/r)$. Since the ball $B(0, C/r) \subset X^*$ is compact in the weak* topology by the Banach-Alaoglu theorem, the set M is compact in the product topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$, as the direct product of compact sets. Consequently, $A \subset M$ and the set A is also compact in the product topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$, as a closed subset of a compact set.

Let us check that the set A satisfies equality (1.18). Indeed, by the definition of subgradient $\Phi(y) \geq \Phi(x) - \langle \ell(x), x - y \rangle$ for all $y \in X$ and $x \in B(0, r)$. Moreover, this inequality turn into an equality for $y = x$. Therefore

$$\Phi(y) = \max_{x \in B(0,r)} (\Phi(x) - \langle \ell(x), x \rangle + \langle \ell(x), y \rangle) \quad \forall y \in B(0, r).$$

It remains to note that from the definition of A it follows that

$$\max_{x \in B(0,r)} (\Phi(x) - \langle \ell(x), x \rangle + \langle \ell(x), y \rangle) = \max_{(a,x^*) \in A} (a + \langle x^*, y \rangle) \quad \forall y \in X$$

(the maximum in the right-hand side of this equality is attained and finite due to the compactness of the set A in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$). $\square$

Proposition 1.2.1. *The function f is codifferentiable at a point $x \in U$ if and only if there exists nonempty convex compact subsets A and B of the locally convex space $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ such that*

$$\max_{(a,x^*) \in A} a = \min_{(b,y^*) \in B} b = 0 \tag{1.21}$$

and for any $\Delta x \in X$ the following equality holds true

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x + \alpha \Delta x) - f(x) - \max_{(a,x^*) \in A} \big(a + \langle x^*, \alpha \Delta x \rangle \big) - \min_{(b,y^*) \in B} \big(b + \langle y^*, \alpha \Delta x \rangle \big) \Big| = 0. \tag{1.22}$$

Proof. By the definition of codifferentiability there exist closed convex functions $\Phi, \Psi \colon X \to \mathbb{R}$ such that $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ and equality (1.17) holds true. According to Lemma 1.2.7 there exist $r > 0$ and nonempty convex compact subsets A_1, A_2 of the space $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ such that

$$\Phi(\Delta x) = \max_{(a,x^*) \in A_1} (a + \langle x^*, \Delta x \rangle), \quad \Psi(\Delta x) = \max_{(b,y^*) \in A_2} (b + \langle y^*, \Delta x \rangle), \tag{1.23}$$

for all $\Delta x \in B(0, r)$. Put $A = A_1$ and $B = -A_2$. Then

$$\min_{(b,y^*) \in B} \big(b + \langle y^*, \Delta x \rangle \big) = -\Psi(\Delta x) \quad \forall \Delta x \in B(0, r).$$

Moreover, from the equalities $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ it follows that equalities (1.21) hold true, while from (1.17) it follows that for any $\Delta x \in X$ equality (1.22) is satisfied.

Conversely, suppose that that there exists nonempty convex compact subsets A, B of the space $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ satisfying the assumptions of the proposition. Setting $A_1 = A$ and $A_2 = -B$, and defining function Φ and Ψ as in (1.23), one obtains that $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ and for any $\Delta x \in X$ equality (1.17) holds true. Moreover, the functions Φ and Ψ are closed as the supremum of a family of affine functions, and everywhere finite due to the compactness of the set A and B in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$. Thus, the function f is codifferentiable at x. $\square$

The pair $[A, B]$ from the previous proposition is called a *codifferential* of f at x and is denoted by $Df(x) = [A, B]$. The set A is denoted by $\underline{d}f(x)$ and referred to as a *hypodifferential* of f at x, while the set B is denoted by $\overline{d}f(x)$ and referred to as a *hyperdifferential* of f at x. Thus, a codifferential $Df(x) = [\underline{d}f(x), \overline{d}f(x)]$ is a pair of nonempty convex compact subsets of the locally convex space $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ such that $\max\{a \mid (a, x^*) \in \underline{d}f(x)\} = \min\{b \mid (b, y^*) \in \overline{d}f(x)\} = 0$ and

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x + \alpha\Delta x) - f(x) - \max_{(a,x^*) \in \underline{d}f(x)} \big(a + \langle x^*, \alpha\Delta x\rangle\big) - \min_{(b,y^*) \in \overline{d}f(x)} \big(b + \langle y^*, \alpha\Delta x\rangle\big) \Big| = 0. \quad (1.24)$$

for any $\Delta x \in X$.

Remark 1.2.1. In the case when the space X is reflexive, the weak* topology on X^* coincides with the weak one and the space $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ is isomorphic to the space $(\mathbb{R} \times X)^*$, endowed with the weak topology. Hence taking into account the fact that a convex subset of a Banach space is weakly closed if and only if it is closed, one obtains that if the space X is reflexive, then a codifferential $Df(x)$ is a pair of bounded closed sets of the normed space $\mathbb{R} \times X^*$. If, in addition, X is a Hilbert space (or $X = \mathbb{R}^d$), then taking into account the Riesz representation theorem it is natural to suppose that a codifferential is a pair of bounded closed subsets of the normed space $\mathbb{R} \times X$.

A codifferential of f at x is obviously not unique. In particular, for any convex compact subset C of $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ the pair $[\underline{d}f(x) + C, \overline{d}f(x) - C]$, as is easily seen, is a codifferential of f at x as well. Note, however, that not all codifferentials of f at x can be obtained with the use of this "shift" on a compact set. For instance, utilising the construction from the proof of Lemma 1.2.7 one can verify that for any $r \geq 0$ the pair $[D(r), \{0\}]$ with $D(r) = \operatorname{co}\{(-y^2, 2y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \in [-r, r]\}$, is a codifferential of the function $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, at the point $x = 0$. Clearly, $[D(r_1) + C, -C] \neq [D(r_2), \{0\}]$ for any set $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, if $r_1 \neq r_2$.

A function f is called *hypodifferentiable* (respectively *hyperdifferentiable*) at a point $x \in U$, if f is codifferentiable at this point and there exists a codifferential of f at x of the form $Df(x) = [\underline{d}f(x), \{0\}]$ (respectively $Df(x) = [\{0\}, \overline{d}f(x)]$).

Definition 1.2.2. A function f is called *continuously codifferentiable* at a point $x \in U$, if f is codifferentiable at every point of a neighbourhood $V_x \subset U$ of x and there exists a *codifferential mapping* $y \mapsto Df(y)$ of f defined on V_x and Hausdorff continuous at x. The function f is called *continuously codifferentiable* on a set $S \subset U$, if f is codifferentiable at every point of this set and there exists a codifferential mapping $Df(\cdot)$ of f defined on S and Hausdorff continuous at every point of the set S. Continuously hypo-/hyper-differentiable functions are defined in exactly the same way.

Let us give several example of continuously codifferentiable functions.

Example 1.2.1. Let f be Gâteaux differentiable at a point x and $f'(x)$ be its Gâteaux derivative at this point. Then f is codifferentiable at x and both pairs $[\{(0, f'(x))\}, \{0\}]$ and $[\{0\}, \{(0, f'(x))\}]$ are codifferentials of f at this point. Furthermore, if f is continuously differentiable in a neighbourhood of x, then f is continuously codifferentiable at x.

Example 1.2.2. Let Y be a Banach space and $f(x) = \|Ax + b\|$, where $A \colon X \to Y$ is a bounded linear operator and $b \in Y$ is fixed. Then for all $x, \Delta x \in X$ the following equalities hold true:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \max_{y^* \in B_{Y^*}} \big\langle y^*, A(x + \Delta x) + b \big\rangle - \|Ax + b\| = \max_{(a, x^*) \in \underline{d} f(x)} \big(a + \langle v, \Delta x \rangle \big).$$

Here B_{Y^*} is the unit ball in Y^*,

$$\underline{d} f(x) = \Big\{ \Big(\langle y^*, Ax + b \rangle - \|Ax + b\|, A^* y^* \Big) \in \mathbb{R} \times X^* \ \Big| \ y^* \in B_{Y^*} \Big\}$$

and $A^* \colon Y^* \to X^*$ is the adjoint operator of A. Introduce the affine map $\mathcal{T}_x$ from Y^* to $\mathbb{R} \times X^*$ as follows: $\mathcal{T}_x(y^*) = (\langle y^*, Ax + b \rangle - \|Ax + b\|, A^* y^*)$ for all $y^* \in Y^*$. One can easily check that $\mathcal{T}_x$ is a continuous mapping from $(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ to $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(X^*, X))$ (here $\sigma(X^*, X)$ is the weak* topology on X^*). Therefore the set $\underline{d} f(x)$ is a convex compact subset of $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(X^*, X))$, as the continuous image of the compact subset B_{Y^*} of the space $(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ under the affine map $\mathcal{T}_x$. Let us show that the set-valued mapping $\underline{d} f(\cdot)$ is Hausdorff continuous.

Indeed, fix any $x' \in X$ and $y^* \in B_{Y^*}$. By definition $\mathcal{T}_{x'}(y^*) \in \underline{d} f(x')$ and

$$\operatorname{dist}\big(\mathcal{T}_{x'}(y^*), \underline{d} f(x) \big) \le \Big| \langle y^*, A(x' - x) \rangle - \big(\|Ax' + b\| - \|Ax + b\| \big) \Big| \le 2 \|A\| \|x' - x\|.$$

Bearing in mind the equality $\mathcal{T}_{x'}(B_{Y^*}) = \underline{d} f(x')$ and taking the supremum over all $y^* \in B_{Y^*}$, one gets that $\sup\{ \operatorname{dist}((a, x^*), \underline{d} f(x)) \mid (a, x^*) \in \underline{d} f(x') \} \le 2\|A\|\|x' - x\|$. Hence swapping x' and x one gets that $\rho_H(\underline{d} f(x'), \underline{d} f(x)) \le 2\|A\|\|x' - x\|$. Thus, the multifunction $\underline{d} f(\cdot)$ is Hausdorff continuous on X and, therefore, the function $f(x) = \|Ax + b\|$ is continuously hypodifferentiable on X.

Example 1.2.3. Let

$$f(x) = \max_{s \in S} g(x, s) \quad \forall x \in U,$$

where S is a compact topological space and $g \colon U \times S \to \mathbb{R}$ is a given function. Suppose that the function $s \mapsto g(x, s)$ is continuous for every $x \in U$, the function $x \mapsto g(x, s)$ is Gâteaux differentiable on U for all $s \in S$ and the derivative $g'_x(\cdot)$ is continuous jointly in x and s on $U \times S$. Let us verify that under these assumptions the function f is hypodifferentiable on U.

Fix any $x \in U$ and $r > 0$ such that $U(x,r) \subset U$. By the mean value theorem for any $y \in U(x,r)$ and for all $s \in S$ one can find $\xi_s \in \operatorname{co}\{x,y\}$ such that $g(y,s) - g(x,s) = \langle g'_x(\xi_s,s), y-x \rangle$. Adding and subtracting $\langle g'_x(x,s), y-x \rangle$, one gets

$$\Big| g(y,s) - g(x,s) - \langle g'_x(x,s), y-x \rangle \Big| \le \|g'_x(\xi_s,s) - g'_x(x,s)\| \|y-x\|. \tag{1.25}$$

Due to the continuity of g'_x jointly in x and s, for any $\varepsilon > 0$ and $s \in S$ there exist $r_s > 0$ and a neighbourhood $V_s \subset S$ of s such that $\|g'_x(x,s) - g'_x(z,t)\| < \varepsilon/2$ for all $z \in U(x,r_s)$ and $t \in V_s$. With the use of the compactness of the space S one can find a finite subcover $V_{s_1}, \ldots, V_{s_n}$ of this space. Put $r_0 = \min\{r_{s_1}, \ldots, r_{s_n}\}$ and choose any $s \in S$ and $z \in U(x,r_0)$. By definition there exists $k \in 1\colon n$ such that $s \in V_{s_k}$. In turn, by the definitions of V_{s_k} and r_0 one has

$$\|g'_x(x,s) - g'_x(z,s)\| \le \|g'_x(x,s) - g'_x(x,s_k)\| + \|g'_x(x,s_k) - g'_x(z,s)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Thus, for any $\varepsilon > 0$ there exists $r(\varepsilon) > 0$ such that $\|g'_x(x,s) - g'_x(z,s)\| < \varepsilon$ for all $s \in S$ and $z \in U(x,r(\varepsilon))$. Hence applying (1.25) one obtains

$$\Big| g(y,s) - g(x,s) - \langle g'_x(x,s), y-x \rangle \Big| \le \varepsilon \|y-x\| \quad \forall s \in S,\ y \in B(x,r(\varepsilon)).$$

Therefore

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \max_{s \in S} \big(g(x+\Delta x,s) - f(x) \big) \le \max_{s \in S} \big(g(x,s) - f(x) + \langle g'_x(x,s), \Delta x \rangle \big) + \varepsilon \|\Delta x\|$$

for any $\Delta x \in U(0,r(\varepsilon))$. Estimating the difference $f(x+\Delta x) - f(x)$ from below in a similar way, one gets that

$$\Big| f(x+\Delta x) - f(x) - \max_{s \in S} \big(g(x,s) - f(x) + \langle g'_x(x,s), \Delta x \rangle \big) \Big| \le \varepsilon \|\Delta x\|$$

for all $\Delta x \in U(0,r(\varepsilon))$, which implies that

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x+\alpha\Delta x) - f(x) - \max_{(a,x^*) \in \underline{d}f(x)} (a + \langle x^*, \alpha\Delta x \rangle) \Big| = 0$$

for all $\Delta x \in X$, where $\underline{d}f(x) = \operatorname{cl}\operatorname{co}\{(g(x,s) - f(x), g'_x(x,s)) \in \mathbb{R} \times X^* \mid s \in S\}$ (here the closure is taken in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$). Due to the continuity of the mappings $g(x,\cdot)$ and $g'_x(x,\cdot)$ and the compactness of S there exists $C > 0$ such that $\{(g(x,s) - f(x), g'_x(x,s)) \in \mathbb{R} \times X^* \mid s \in S\} \subset M := [-C,C] \times CB_{X^*}$. The set M is compact in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$, as the direct product of compact sets. Therefore $\underline{d}f(x) \subset M$ and the set $\underline{d}f(x)$ is compact in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$ as well. Moreover, since $\max_{s \in S}(g(x,s) - f(x)) = 0$ by the definition of $f(x)$, one has $\max\{a \mid (a,x^*) \in \underline{d}f(x)\} = 0$. Thus, the function f is hypodifferentiable at the point x and the set $\underline{d}f(x)$ is its hypodifferential at this point.

Let us note that in the case when the set S is finite the closure operator in the definition of the set $\underline{d}f(x)$ is redundant, since the convex hull of a finite number of points from a topological vectors space is always compact. The closure operator is also redundant in the case when the space X is finite dimensional, since the convex hull of a compact subset of a finite dimensional normed space is compact and the set $\{(g(x,s) - f(x), g'_x(x,s)) \in \mathbb{R} \times X^* \mid s \in S\}$ is compact as the continuous image of the compact space S. In both cases, applying the continuity of $g(x, \cdot)$ and $g'_x(x, \cdot)$ and the compactness of S, one can readily verify that the multifunction $\underline{d}f(\cdot)$ is Hausdorff continuous and, therefore the function f is continuously hypodifferentiable.

Example 1.2.4. Arguing in the same way as in the previous example one can show that the function $f(x) = \min_{s \in S} g(x,s)$, $x \in U$, is hyperdifferentiable and the set $\overline{d}f(x) = \operatorname{cl}\operatorname{co}\{(g(x,s) - f(x), g'_x(x,s)) \in \mathbb{R} \times X^* \mid s \in S\}$ is its hyperdifferential (here the closure is taken in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$).

Example 1.2.5. Let X be the space $\mathbb{S}^\ell$ of real symmetric matrices of order ℓ endowed with the inner product $\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}(AB)$ and the corresponding norm $\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{Tr}(A^2)}$, which is called the Frobenius norm of a matrix $A \in \mathbb{S}^\ell$. Here $\operatorname{Tr}(A)$ is the trace of A. Consider the function

$$f(A) = \lambda_{\max}(A) = \max_{s \in B_{\mathbb{R}^\ell}} \langle s, As \rangle \quad \forall A \in \mathbb{S}^\ell,$$

mapping each matrix $A \in \mathbb{S}^\ell$ to its maximal eigenvalue. Here $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the inner product in $\mathbb{R}^\ell$ and $B_{\mathbb{R}^\ell}$ is the unit ball in the Euclidean norm in $\mathbb{R}^\ell$.

The function f is a particular case of the function f from example 1.2.3, if one sets $S = B_{\mathbb{R}^\ell}$ and $g(A,s) = \langle s, As \rangle$. Thus, the function f is hypodifferentiable on $\mathbb{S}^\ell$ and its hypodifferentiable at a point $A \in \mathbb{S}^\ell$ has the form

$$\underline{d}f(A) = \operatorname{co}\Big\{ \big(\langle s, As \rangle - \lambda_{\max}(A), ss^T \big) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^\ell \Bigm| s \in B_{\mathbb{R}^\ell} \Big\}.$$

Let us note that since $\mathbb{S}^\ell$ is a finite dimensional Hilbert space, the hypodifferential $\underline{d}f(A)$ is a compact convex subset of the space $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^\ell$. Let us show that the multifunction $\underline{d}f(\cdot)$ is Hausdorff continuous, that is, the function f is continuously hypodifferentiable. To this end, let us first check that f is globally Lipschitz continuous.

Fix any $A, B \in \mathbb{S}^\ell$. Let s_0 be a nonzero eigenvector of A corresponding to its maximal eigenvalue. One can obviously suppose that $|s_0| = 1$, where $|\cdot|$ is the Euclidean norm. One has

$$f(A) - f(B) = \langle s_0, As_0 \rangle - f(B) \le \langle s_0, A, s_0 \rangle - \langle s_0, Bs_0 \rangle = \langle s_0, (A - B)s_0 \rangle \le \|A - B\|_F.$$

Here we used the fact that the Frobenius norm satisfies the inequality $|Ax| \le \|A\|_F |x|$. Switching A and B one gets that $f(B) - f(A) \le \|B - A\|_F$. Therefore f is globally Lipschitz continuous with constant $L = 1$.

Now we can prove the Hausdorff continuity of $\underline{d}f(\cdot)$. Pick any $(a, V) \in \underline{d}f(A)$. By the definition of convex hull there exist $n \in \mathbb{N}$, $s_i \in B_{\mathbb{R}^\ell}$ and $\alpha_i \geq 0$, $i \in 1\colon n$, such that

$$(a, V) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \big(\langle s_i, A s_i \rangle - \lambda_{\max}(A), s_i s_i^T \big), \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Put

$$(b, W) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \big(\langle s_i, B s_i \rangle - \lambda_{\max}(B), s_i s_i^T \big).$$

Then by the definition of $\underline{d}f(\cdot)$ one has $(b, W) \in \underline{d}f(B)$ and

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\big((a, V), \underline{d}f(B)\big) \leq \|(a, V) - (b, W)\| &\leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\big|\langle s_i, (A - B) s_i \rangle\big| + \big|f(A) - f(B)\big| \Big) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\|A - B\|_F + \|A - B\|_F \Big) = 2\|A - B\|_F. \end{aligned}$$

Consequently, $\sup\{\operatorname{dist}((a, V), \underline{d}f(B)) \mid (a, V) \in \underline{d}f(A)\} \leq 2\|A - B\|_F$. Switching A and B one gets that $\rho_H(\underline{d}f(A), \underline{d}f(B)) \leq 2\|A - B\|_F$, i.e. the multifunction $\underline{d}f(\cdot)$ is Hausdorff continuous.

An important role in the study of codifferentiable function is played by the class of quasidifferentiable function. In the infinite dimensional case, there exists several nonequivalent approaches to the definition of quasidifferentiable functions (cf. [110, 111, 276, 321, 396]). We will use the following one, which is a direct generalization of the definition of quasidifferentiable function in the finite dimensional case.

Definition 1.2.3. A function f is called *quasidifferentiable* at a point $x \in U$, if this function is directionally differentiable at x, that is, for any $v \in X$ there exists the finite limit

$$f'(x, v) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x + \alpha v) - f(x)}{\alpha},$$

and the function $f'(x, \cdot)$ can be represented as the difference of continuous sublinear functions or, equivalently if there exists a pair of weak* compact sets $\underline{\partial} f(x), \overline{\partial} f(x) \subset X^*$ such that

$$f'(x, v) = \max_{x^* \in \underline{\partial} f(x)} \langle x^*, v \rangle + \min_{y^* \in \overline{\partial} f(x)} \langle y^*, v \rangle \quad \forall v \in X.$$

The pair $\mathscr{D} f(x) = [\underline{\partial} f(x), \overline{\partial} f(x)]$ is called a *quasidifferential* of f at x, the set $\underline{\partial} f(x)$ is called a *subdifferential* of f at x, while the set $\overline{\partial} f(x)$ is referred to as a *superdifferential* of f at this point.

Let us show that the classes of quasidifferentiable and codifferentiable functions coincide.

Theorem 1.2.1. *If a function f is quasidifferentiable at a point $x \in U$, then f is codifferentiable at x and for any quasidifferential $\mathscr{D} f(x) = [\underline{\partial} f(x), \overline{\partial} f(x)]$ of f at x the pair* $[\{0\} \times \underline{\partial} f(x), \{0\} \times$

$\overline{\partial} f(x)]$ *is a codifferential of* f *at* x*. Conversely, if the function* f *is codifferentiable at* x*, then* f *is quasidifferentiable at this point and for any codifferential* $Df(x) = [\underline{d} f(x), \overline{d} f(x)]$ *of* f *at* x *the pair*

$$\underline{\partial} f(x) = \Big\{ x^* \in X^* \mid (0, x^*) \in \underline{d} f(x) \Big\}, \quad \overline{\partial} f(x) = \Big\{ y^* \in X^* \mid (0, y^*) \in \overline{d} f(x) \Big\} \tag{1.26}$$

is a quasidifferential of f *at* x*.*

Proof. Let f be quasidifferentiable at x and $\mathscr{D} f(x)$ be its quasidifferential at this point. By the definition of quasidifferential for any $\Delta x \in X$ one has

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x + \alpha \Delta x) - f(x)}{\alpha} = \max_{x^* \in \underline{\partial} f(x)} \langle x^*, \Delta x \rangle + \min_{y^* \in \overline{\partial} f(x)} \langle y^*, \Delta x \rangle.$$

Hence with the use of the fact that the function on the right-hand side of this equality is positively homogeneous one obtains that

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x + \alpha \Delta x) - f(x) - \max_{x^* \in \underline{\partial} f(x)} \langle x^*, \alpha \Delta x \rangle - \min_{y^* \in \overline{\partial} f(x)} \langle y^*, \alpha \Delta x \rangle \Big| = 0.$$

Define $\underline{d} f(x) = \{0\} \times \underline{\partial} f(x)$ and $\overline{d} f(x) = \{0\} \times \overline{\partial} f(x)$. The set $\underline{d} f(x)$ and $\overline{d} f(x)$ are compact in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$ as the direct product of compact sets. Note also that the equalities (1.21) and (1.22) from the definition of codifferential are trivially satisfied. Therefore, one can conclude that the function f is codifferentiable at the point x and the pair $Df(x) = [\underline{d} f(x), \overline{d} f(x)]$, defined above, is its codifferential at x.

Suppose now that f is codifferentiable at x and $Df(x)$ is its codifferential at this point. Define

$$\Phi(v) = \max_{(a, x^*) \in \underline{d} f(x)} \big(a + \langle x^*, v \rangle \big), \quad \Psi(v) = \min_{(b, y^*) \in \overline{d} f(x)} \big(b + \langle y^*, v \rangle \big) \quad \forall v \in X$$

and $g(\cdot) = \Phi(\cdot) + \Psi(\cdot)$. Note that by the definition of codifferential $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ and $g(0) = 0$ (see (1.21)).

Suppose that the function g is directionally differentiable at zero. Pick any $v \in X$ and $\varepsilon > 0$. By the definition of directional derivative there exists $\alpha_1 > 0$ such that $|g(\alpha v)/\alpha - g'(0, v)| < \varepsilon/2$ for all $\alpha \in (0, \alpha_1)$. In turn, by the definition of codifferentiability there exists $\alpha_2 > 0$ such that for all $\alpha \in (0, \alpha_2)$ one has $|f(x + \alpha v) - f(x) - g(\alpha v)| < \varepsilon\alpha/2$ (see (1.24)). Therefore for any $\alpha \in (0, \min\{\alpha_1, \alpha_2\})$ one has

$$\left| \frac{f(x + \alpha v) - f(x)}{\alpha} - g'(0, v) \right| \le \frac{1}{\alpha} \big| f(x + \alpha v) - f(x) - g(\alpha v) \big| + \left| \frac{g(\alpha v)}{\alpha} - g'(0, v) \right| < \varepsilon.$$

Since v and ε were chosen arbitrarily, one can conclude that f is directionally differentiable at x and $f'(x, \cdot) = g'(0, \cdot)$.

Let us now prove that the function f is directionally differentiable at zero and compute its directional derivative at this point. To this end, it is sufficient to prove that the functions Φ and Ψ are directionally differentiable at zero and compute their directional derivatives. Then applying standard calculus rules for directional derivatives (see, e.g. [111, Proposition 3.1]) one gets that the function g is directionally differentiable and $f'(x, v) = g'(0, v) = \Phi'(0, v) + \Psi'(0, v)$ for all $v \in X$.

Consider the function Φ. This function is convex and closed, as the supremum of a family of affine function. Furthermore, the function Φ is finite-valued due to the compactness of the set $\underline{d}f(x)$ in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$. Therefore, the function Φ is continuous (see [168, Corollary 2.5]) and everywhere directionally differentiable by Proposition 4.1.4 from [243]. Moreover, applying the theorem on the subdifferential of the supremum an infinite family of convex functions [243, Theorem 4.2.3] one obtains that the subdifferential (in the sense of convex analysis) of the function Φ at zero has the form

$$\partial\Phi(0) = \Big\{ x^* \in X^* \Bigm| a + \langle x^*, 0 \rangle = \Phi(0), \ (a, x^*) \in \underline{d}f(x) \Big\} = \big\{ x^* \in X^* \bigm| (0, x^*) \in \underline{d}f(x) \big\}.$$

Since Φ is everywhere continuous, the subdifferential $\partial\Phi(0)$ is a weak* compact subset of the space X^* (see, e.g. [332, Corollary 1.16.2]). Finally, by [332, Corollary 1.16.1] for any $v \in X$ one has $\Phi'(0, v) = \max_{x^* \in \partial\Phi(0)} \langle x^*, v \rangle$.

Arguing in the same way one can check that the function Ψ is directionally differentiable at zero and

$$\Psi'(0, v) = \min_{y^* \in \partial\Psi(0)} \langle y^*, v \rangle \quad \forall v \in X, \quad \partial\Psi(0) = \{ y^* \in X^* \mid (0, y^*) \in \overline{d}f(x) \},$$

where $\partial\Psi(0)$ is the superdifferential of the concave function Ψ_f in the sense of convex analysis.

Thus, the function f is directionally differentiable at x and

$$f'(x, v) = \max_{x^* \in \partial\Phi(0)} \langle x^*, v \rangle + \min_{y^* \in \partial\Psi(0)} \langle y^*, v \rangle \quad \forall v \in X,$$

i.e. f is quasidifferentiable at x and the pair (1.26) is a quasidifferential of f at this point. $\square$

Remark 1.2.2. The quasidifferential of a codifferentiable function f of the form (1.26) is called the quasidifferential corresponding to the codifferential $Df(x) = [\underline{d}f(x), \overline{d}f(x)]$. Hereinafter, we will use only such quasidifferentials of codifferentiable functions.

With the use of the previous theorem one can easily obtain necessary optimality conditions for codifferentiable functions.

Proposition 1.2.2. *Let f be codifferentiable at a point $x_* \in U$ and $Df(x_*)$ be its codifferential at this point. Suppose that x_* is a point of local minimum of the function f. Then*

$$0 \in \underline{d}f(x_*) + (0, y^*) \quad \forall (0, y^*) \in \overline{d}f(x_*). \tag{1.27}$$

Moreover, condition (1.27) *is satisfied if and only if $f'(x_*, \cdot) \geq 0$ and, therefore, the necessary optimality condition* (1.27) *does not depend on the choice of codifferential, that is, if it is satisfied for one codifferential of f at x_*, then it is satisfies for all other codifferentials of f at this point.*

Proof. By theorem 1.2.1 the function f is quasidifferentiable at x_*. From the definition of directional derivative and local optimality of x_* it obviously follows that $f'(x_*, v) \geq 0$ for all $v \in X$. Hence by the definition of quasidifferential one has

$$f'(x_*, v) = \max_{x^* \in \underline{\partial} f(x_*)} \langle x^*, v \rangle + \min_{y^* \in \overline{\partial} f(x_*)} \langle y^*, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in X.$$

Clearly, this condition is satisfied if and only if

$$\max_{x^* \in \underline{\partial} f(x_*)} \langle x^* + y^*, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in X \quad \forall y^* \in \overline{\partial} f(x_*).$$

In turn, applying the separation theorem in the locally convex space (X^*, w^*) one can readily check that this condition is satisfied if and only if $0 \in \underline{\partial} f(x_*) + y^*$ for all $y^* \in \overline{\partial} f(x_*)$, which by Theorem 1.2.1 is equivalent to condition (1.27). Thus, necessary optimality condition (1.27) is equivalent to condition $f'(x_*, \cdot) \geq 0$, which implies that it does not depend on the choice of codifferential of f at x_*, since the directional derivative does not depend on the choice of codifferential. □

Remark 1.2.3. (i) The independence of optimality conditions on the choice of quasidifferential for various constrained optimization problems was studied in [294, 296, 408].
(ii) Note that by the definition of codifferential $\min\{b \mid (b, y_*) \in \overline{d}f(x_*)\} = 0$. Therefore in condition (1.27) there always exists at least one pair $(0, y^*) \in \overline{d}f(x_*)$.

Corollary 1.2.1. *Let f and x_* satisfy the assumptions of the previous proposition. Then the necessary optimality condition* (1.27) *is satisfied if and only if $0 \in \underline{d}f(x_*) + (0, y^*)$ for all $(0, y^*) \in$ $\operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$, where "$\operatorname{ext} A$" is the set of extreme points of a convex set A.*

Proof. If condition (1.27) is satisfied, then $0 \in \underline{d}f(x_*) + (0, y^*)$ for all $(0, y^*) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$, since $\operatorname{ext} \overline{d}f(x_*) \subset \overline{d}f(x_*)$. Let us prove the converse statement. To this end, let us first show that $(0, y^*) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$ if and only if $y^* \in \operatorname{ext} \overline{\partial} f(x_*)$.

Chose any$y^* \in \operatorname{ext} \overline{\partial} f(x_*)$ and suppose that $(0, y^*) \notin \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$. Since $(0, y^*) \in \overline{d}f(x_*)$ by Theorem 1.2.1, by the definition of extreme point there exist $(b_1, y_1^*), (b_2, y_2^*) \in \overline{d}f(x_*)$,

$(b_1, y_1^*) \neq (b_2, y_2^*)$, and $\alpha \in (0,1)$ such that $\alpha(b_1, y_1^*) + (1-\alpha)(b_2, y_2^*) = (0, y^*)$. By the definition of codifferential $\min\{b \mid (b, y^*) \in \overline{d}f(x_*)\} = 0$, i.e. $b \geq 0$ for all $(b, y^*) \in \overline{d}f(x_*)$. Consequently, $b_1 = b_2 = 0$ and by Theorem 1.2.1 one has $y_1^*, y_2^* \in \overline{\partial}f(x_*)$. However, $\alpha y_1^* + (1-\alpha)y_2^* = y^*$ and $y_1^* \neq y_2^*$, which contradicts the inclusion $y^* \in \operatorname{ext} \underline{\partial}f(x_*)$. Thus, for any $y^* \in \operatorname{ext} \overline{\partial}f(x_*)$ one has $(0, y^*) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$.

Let us prove the converse inclusion. Pick any $(0, y^*) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$ and suppose that $y^* \notin \operatorname{ext} \overline{\partial}f(x_*)$. By Theorem 1.2.1 one has $y^* \in \overline{\partial}f(x_*)$. Therefore, by the definition of extreme point there exist $y_1^*, y_2^* \in \overline{\partial}f(x_*)$, $y_1^* \neq y_2^*$, and $\alpha \in (0,1)$ such that $\alpha y_1^* + (1-\alpha)y_2^*) = y^*$. By Theorem 1.2.1 one has $(0, y_1^*), (0, y_2^*) \in \underline{d}f(x_*)$. Moreover, $\alpha(0, y_1^*) + (1-\alpha)(0, y_2^*) = (0, y^*)$, which contradicts the definition of $(0, y^*)$. Thus, $(0, y^*) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$ if and only if $y^* \in \operatorname{ext} \overline{\partial}f(x_*)$. Therefore, applying the Krein-Milman theorem and the fact that the set $\overline{\partial}f(x_*)$ is nonempty, convex, and weak* compact one obtains that there exists at least one point $(0, y^*) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$.

Arguing by reductio ad absurdum, suppose that $0 \in \underline{d}f(x_*) + (0, y^*)$ for all $(0, y^*) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$, bu the condition (1.27) does not hold true. Then by virtue of Theorem 1.2.1 there exists $y^* \in \overline{\partial}f(x_*)$ such that $0 \notin \underline{\partial}f(x_*) + y^*$. The set $\underline{\partial}f(x_*) + y^*$ is convex and compact in the weak* topology. Therefore applying the separation theorem in the locally convex space (X^*, w^*) one gets that there exist $v \in X$ and $c > 0$ such that $\langle x^* + y^*, v \rangle \geq c$ for all $x^* \in \underline{\partial}f(x_*)$. By the Krein-Milman theorem $\overline{\partial}f(x_*) = \operatorname{cl} \operatorname{co} \operatorname{ext} \overline{\partial}f(x_*)$, where the closure is taken in the weak* topology. Consequently, there exists $y_0^* \in \operatorname{co} \operatorname{ext} \overline{\partial}f(x_*)$ such that $|\langle y^* - y_0^*, v \rangle| < c/2$. Therefore $\langle x^* + y_0^*, v \rangle \geq c/2$ for all $x^* \in \underline{\partial}f(x_*)$, which implies that

$$0 \notin \underline{\partial}f(x_*) + y_0^*. \tag{1.28}$$

On the other hand, by our assumption $0 \in \underline{d}f(x_*) + (0, y^*)$ for all $(0, y^*) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x_*)$ or, equivalently, $0 \in \underline{\partial}f(x_*) + y^*$ for all $y^* \in \operatorname{ext} \overline{\partial}f(x_*)$ (see Theorem 1.2.1). Hence applying the convexity of the set $\underline{\partial}f(x_*)$ and the fact that $y_0^* \in \operatorname{co} \operatorname{ext} \overline{\partial}f(x_*)$ one can easily verify that $0 \in \underline{\partial}f(x_*) + y_0^*$, which contradicts (1.28). Thus, condition (1.27) is satisfied, and the proof is complete. $\square$

Arguing in the same way as in the proof of Proposition 1.2.2 and the corollary above one can easily obtain the following necessary condition for a maximum in terms of codifferentials

Proposition 1.2.3. *Let f be codifferentiable at a point $x_* \in U$ and $Df(x_*)$ be its codifferential at this point. Assume that x_* is a point of local maximum of the function f. Then*

$$0 \in (0, x^*) + \overline{d}f(x_*) \quad \forall (0, x^*) \in \underline{d}f(x_*). \tag{1.29}$$

Moreover, condition (1.29) *is satisfied if and only if $f'(x_*, \cdot) \leq 0$ and therefore, necessary optimality condition* (1.29) *is invariant with respect to the choice of codifferential, that is, if this condition* *is satisfied for one codifferential of f at x_*, then it is satisfied for all other codifferentials of f at this point. Furthermore, condition* (1.29) *is satisfied if and only if* $0 \in (0, x^*) + \overline{d}f(x_*)$ *for all* $(0, x^*) \in \operatorname{ext} \underline{d}f(x_*)$.

With the use of necessary conditions for minimum and maximum in term of codifferential one can prove a natural extension of the mean value theorem to the case of codifferentiable function. The proof of this result almost literally repeats the proof of the mean value theorem in the smooth case.

Proposition 1.2.4 (Mean Value Theorem)**.** *Let f be codifferentiable on a set $S \subseteq U$ (i.e. f is codifferentiable at every point of this set) and $Df(\cdot)$ be a codifferential mappin of f defined on the set S. Then for all points $x_1, x_2 \in S$, satisfying the condition* $\operatorname{co}\{x_1, x_2\} \subseteq S$ *one can find* $y \in \operatorname{co}\{x_1, x_2\}$, $(0, x^*) \in \underline{d}f(y)$ *and* $(0, y^*) \in \overline{d}f(y)$ *such that* $f(x_2) - f(x_1) = \langle x^* + y^*, x_2 - x_1 \rangle$.

Proof. Fix any $\eta > 0$ and suppose that a function $g \colon (-\eta, 1 + \eta) \to \mathbb{R}$ is codifferentiable on the segment $[0, 1]$ and $Dg(\cdot)$ is a codifferential mapping of g defined on $[0, 1]$. Let us check that g is continuous on $[0, 1]$.

Indeed, by the definition of codifferentiability for any $t \in [0, 1]$ there exist closed convex function $\Phi_t, \Psi_t \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $\Phi_t(0) = \Psi_t(0) = 0$ and for all $\varepsilon > 0$ and $h \in \{-1, 1\}$ one can find $\delta_1 > 0$ satisfying the inequality

$$\Big| g(t + \alpha h) - g(t) - \big(\Phi_t(\alpha h) - \Psi_t(\alpha h)\big) \Big| < \frac{\varepsilon}{2}\alpha \quad \forall \alpha \in (0, \delta_1).$$

Since the functions Φ_t, Ψ_t are finite-valued, they are continuous on $\mathbb{R}$ (see, e.g. [346, Theorem 10.1]). Therefore due to equalities $\Phi_t(0) = \Psi_t(0) = 0$ there exists $\delta_2 > 0$ such that $|\Phi_t(\alpha h) - \Psi_t(\alpha h))| < \varepsilon/2$ for all $\alpha \in (0, \delta_2)$ and $h \in \{-1, 1\}$. Put $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$. Then for all $\alpha \in [0, \delta)$ and $h \in \{-1, 1\}$ one has

$$\big| g(t + \alpha h) - g(t) \big| \le \big| g(t + \alpha h) - g(t) - \big(\Phi_t(\alpha h) - \Psi_t(\alpha h)\big) \big| + \big| \Phi_t(\alpha h) - \Psi_t(\alpha h) \big| < \frac{\varepsilon}{2}\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon,$$

which implies that $|g(t') - g(t)| < \varepsilon$ for all $t' \in (t - \delta, t + \delta)$. Thus, the function g is continuous at t and, therefore, on the entire segment $[0, 1]$.

Suppose that $g(0) = g(1) = 0$. Then g attains either a local minimum or a local maximum at a point $\theta \in (0, 1)$. If g attains a local minimum at θ, then applying Proposition 1.2.2 one obtains that for all $(0, w) \in \overline{d}g(\theta)$ there exists $(0, v) \in \underline{d}g(\theta)$ such that $v + w = 0$. If g attains a local maximum at θ, then applying Proposition 1.2.3 one gets that for all $(0, v) \in \underline{d}g(\theta)$ there exists $(0, w) \in \overline{d}g(\theta)$ such that $v + w = 0$. In either case there exist $(0, v) \in \underline{d}g(\theta)$ and $(0, w) \in \overline{d}g(\theta)$ such that $v + w = 0$.

Suppose, now, that $g(0)$ and $g(1)$ are arbitrary. For any $t \in (-\eta, 1+\eta)$ define $r(t) = g(t) - g(0) - t(g(1) - g(0))$. Then $r(0) = r(1) = 0$ and, as it is easily seen, the function r is codifferentiable on $[0,1]$, and one can define $Dr(t) = [\underline{d}g(t) + (0, g(0) - g(1)), \overline{d}g(t)]$. Hence by the first part of the proof there exist $\theta \in (0,1)$, $(0,v) \in \underline{d}g(\theta)$, and $(0,w) \in \overline{d}g(\theta)$ such that $g(1) - g(0) = v + w$.

Let us now return to the function f. Let points $x_1, x_2 \in S$ be such that $\operatorname{co}\{x_1, x_2\} \subset S$. Since U is open and $S \subseteq U$, there exists $\eta > 0$ such that for any $t \in (-\eta, 1+\eta)$ one has $x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \in U$. Define $g(t) = f(x(t))$ for all $t \in (-\eta, 1+\eta)$. One can easily verify that the function g is codifferentiable on $[0,1]$, and for any $t \in [0,1]$ one can define

$$\underline{d}g(t) = \big\{(a, \langle x^*, x_2 - x_1\rangle) \in \mathbb{R}^2 \bigm| (a, x^*) \in \underline{d}f(x(t))\big\},$$
$$\overline{d}g(t) = \big\{(b, \langle y^*, x_2 - x_1\rangle) \in \mathbb{R}^2 \bigm| (b, y^*) \in \overline{d}f(x(t))\big\}.$$

(see Corollary 1.2.6 below). Hence by the second part of the proof there exist $\theta \in (0,1)$, $(0,v) \in \underline{d}g(\theta)$ and $(0,w) \in \overline{d}g(\theta)$ such that $g(1) - g(0) = v + w$. Rewriting this equality in terms of the function f and setting $y = x(\theta)$ one obtains that there exist $y \in \operatorname{co}\{x_1, x_2\}$, $(0, x^*) \in \underline{d}f(y)$ and $(0, y^*) \in \overline{d}f(y)$ such that $f(x_2) - f(x_1) = g(1) - g(0) = \langle x^* + y^*, x_2 - x_1\rangle$, which completes the proof. $\square$

Corollary 1.2.2. *Let f be codifferentiable on a convex set $S \subseteq U$ and $Df(\cdot)$ be a codifferential mapping of f defined on the set S. Suppose that $R = \sup_{x \in S} \sup\{\|x^*\| \mid (0, x^*) \in \underline{d}f(x) + \overline{d}f(x)\} < +\infty$. Then f is Lipschitz continuous on S with constant $L = R$. In particular, if f is continuously codifferentiable at a point $x \in U$, then f is Lipschitz continuous near this point.*

Proof. Choose any point $x_1, x_2 \in S$. Note that $\operatorname{co}\{x_1, x_2\} \subset S$, since the set S is convex. By the mean value theorem there exist $y \in \operatorname{co}\{x_1, x_2\}$, $(0, x^*) \in \underline{d}f(y)$ and $(0, y^*) \in \overline{d}f(y)$ such that $f(x_2) - f(x_1) = \langle x^* + y^*, x_2 - x_1\rangle$. Therefore

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \big|\langle x^* + y^*, x_2 - x_1\rangle\big| \le \|x^* + y^*\| \|x_2 - x_1\| \le R\|x_2 - x_1\|,$$

that is, f is Lipschitz continuous on S with constant $L = R$.

Suppose now that f is continuously codifferentiable at a point $x \in U$. Then by the definition of codifferentiability and Lemma 1.2.1 there exists $\delta > 0$ such that $\underline{d}f(x') \subset \underline{d}f(x) + B(0,1)$ and $\overline{d}f(x') \subset \overline{d}f(x) + B(0,1)$ for all $x' \in B(x, \delta)$. Since the sets $\underline{d}f(x)$ and $\overline{d}f(x)$ are compact in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$, they are norm bounded in $\mathbb{R} \times X^*$ (see [132, Theorem 2.1]), which implies that

$$\sup_{x' \in B(x,\delta)} \sup\big\{\|x^*\| \bigm| (0, x^*) \in \underline{d}f(x') + \overline{d}f(x')\big\} < +\infty.$$

Therefore the function f is Lipschitz continuous on $B(x, \delta)$ by the first part of the corollary. $\square$

With the use of local Lipschitz continuity of continuously codifferentiable functions one can show that such functions are, in a sense, codifferentiable *uniformly* with respect to Δx.

Proposition 1.2.5. *Let f be continuously differentiable at a point $x \in U$ and $Df(x)$ be any codifferential of f at this point. Then for any $\Delta x \in X$ one has*

$$\lim_{[\alpha,\Delta x'] \to [+0,\Delta x]} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x + \alpha\Delta x') - f(x) - \max_{(a,x^*) \in \underline{d}f(x)} \big(a + \langle x^*, \alpha\Delta x\rangle\big) - \min_{(b,y^*) \in \overline{d}f(x)} \big(b + \langle y^*, \alpha\Delta x\rangle\big) \Big| = 0. \tag{1.30}$$

Moreover, if the space X is finite dimensional, then

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \max_{(a,x^*) \in \underline{d}f(x)} (a + \langle x^*, \Delta x\rangle) + \min_{(b,y^*) \in \overline{d}f(x)} (b + \langle y^*, \Delta x\rangle) + o(\|\Delta x\|). \tag{1.31}$$

Proof. Choose any $\Delta x \in X$ and $\varepsilon > 0$. By the definition of codifferential there exists $\delta_1 > 0$ such that for all $\alpha \in (0, \delta_1)$ one has

$$\Big| f(x + \alpha\Delta x) - f(x) - \max_{(a,x^*) \in \underline{d}f(x)} \big(a + \langle x^*, \alpha\Delta x\rangle\big) - \min_{(b,y^*) \in \overline{d}f(x)} \big(b + \langle y^*, \alpha\Delta x\rangle\big) \Big| < \frac{\varepsilon}{2}\alpha. \tag{1.32}$$

By Corollary 1.2.2 there exist $r > 0$ and $L > 0$ such that the function f is Lipschitz continuous on $B(x, r)$ with constant $L > 0$. Note that

$$\|\alpha\Delta x'\| \le \alpha\|\Delta x' - \Delta x\| + \alpha\|\Delta x\| \le r \quad \forall \Delta x' \in B\left(\Delta x, \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}\right), \quad \alpha \in \left(0, \min\left\{\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}, \frac{r}{2\|\Delta x\|}\right\}\right)$$

(if $\Delta x = 0$, then $\alpha \in (0, \sqrt{r}/\sqrt{2})$), that is, for any such $\Delta x'$ and α one has $x + \alpha\Delta x' \in B(x, r)$ and $x + \alpha\Delta x \in B(x, r)$, and therefore

$$\big| f(x + \alpha\Delta x') - f(x + \alpha\Delta x) \big| \le \alpha L\|\Delta x' - \Delta x\| \le \frac{\varepsilon}{2}\alpha,$$

provided $\Delta x' \in B(\Delta x, \varepsilon/2L)$. Hence applying inequality (1.32) one gets that for all $\Delta x'$ and α satisfying the following conditions

$$\Delta x' \in B\left(\Delta x, \min\left\{\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{2L}\right\}\right), \quad \alpha \in \left(0, \min\left\{\delta_1, \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}, \frac{r}{2\|\Delta x\|}\right\}\right)$$

(if $\Delta x = 0$, then $\alpha \in (0, \min\{\delta_1, \sqrt{r}/\sqrt{2}\})$) the following inequalities hold true:

$$\begin{aligned}
&\Big| f(x + \alpha\Delta x') - f(x) - \max_{(a,x^*) \in \underline{d}f(x)} \big(a + \langle x^*, \alpha\Delta x\rangle\big) - \min_{(b,y^*) \in \overline{d}f(x)} \big(b + \langle y^*, \alpha\Delta x\rangle\big) \Big| \le \\
&\le \big| f(x + \alpha\Delta x') - f(x + \alpha\Delta x) \big| + \Big| f(x + \alpha\Delta x) - f(x) - \max_{(a,x^*) \in \underline{d}f(x)} \big(a + \langle x^*, \alpha\Delta x\rangle\big) - \\
&\qquad - \min_{(b,y^*) \in \overline{d}f(x)} \big(b + \langle y^*, \alpha\Delta x\rangle\big) \Big| < \varepsilon\alpha.
\end{aligned}$$

Since $\varepsilon > 0$ and $\Delta x \in X$ were chosen arbitrarily, one can conclude that equality (1.30) hold true.

Suppose now that the space X is finite dimensional. Put $\Phi(\Delta x) = \max_{(a,x^*)\in \underline{d}f(x)}(a + \langle x^*, \Delta x\rangle)$ and $\Psi(\Delta x) = \min_{(b,y^*)\in \overline{d}f(x)}(b + \langle y^*, \Delta x\rangle)$. Aruing by reductio ad absurdum, suppose that equality (1.31) is not valid. Then there exist $\varepsilon > 0$ and a sequence $\{\Delta x_n\} \subset X \setminus \{0\}$ converging to zero such that

$$\frac{1}{\|\Delta x_n\|}\Big| f(x + \Delta x_n) - f(x) - \Phi(\Delta x_n) - \Psi(\Delta x_n)\Big| \geq \varepsilon. \tag{1.33}$$

Put $h_n = \Delta x_n / |\Delta x_n|$ and $\alpha_n = \|\Delta x_n\|$. Since X if is finite dimensional and $|h_n| = 1$ for all $n \in \mathbb{N}$, one can extract a subsequence $\{h_{n_k}\}$ converging to some $h \in X$ with $|h| = 1$. Note that $\alpha_n \to 0$ as $n \to \infty$, since the sequence $\{\Delta x_n\}$ converges to zero.

By definition Φ is a closed convex function. Furthermore, Φ is finite-valued due to the fact that the set $\underline{d}f(x)$ is compact in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$. Hence taking into account the fact that the space X is finite dimensional one can conclude that Φ is Lipschitz continuous on bounded sets (see, e.g. [332, Lemma 1.7.1]). Clearly, the concave function Ψ is Lipschitz continuous on bounded sets as well.

Recall that by definition the sequence $\{\Delta x_n\}$ converges to zero. Therefore, the sequences $\{\Delta x_n\}$ and $\{\alpha_n h\}$ are bounded, that is, they lie within some ball and the functions Φ and Ψ are Lipschitz continuous on this ball with constant $L > 0$. Consequently, one has

$$\Big|\Phi(\Delta x_n) + \Psi(\Delta x_n) - \big(\Phi(\alpha_n h) + \Psi(\alpha_n h)\big)\Big| \leq 2L\|\Delta x_n - \alpha_n h\| = 2L\alpha_n \|h_n - h\|.$$

Hence applying inequality (1.33) one gets that

$$\begin{aligned}\Big| f(x + \alpha_{n_k} h_{n_k}) - f(x) - \Phi(\alpha_{n_k} h) - \Psi(\alpha_{n_k} h)\Big| \geq \Big| f(x + \Delta x_{n_k}) - f(x) - \Phi(\Delta x_n) - \Psi(\Delta x_n)\Big| - \\ - \Big|\Phi(\Delta x_{n_k}) + \Psi(\Delta x_{n_k}) - \big(\Phi(\alpha_{n_k} h) + \Psi(\alpha_{n_k} h)\big)\Big| \geq \varepsilon\alpha_{n_k} - 2L\alpha_{n_k}\|h_{n_k} - h\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\alpha_{n_k}\end{aligned}$$

for all sufficiently large k, since $h_{n_k} \to h$ as $k \to \infty$. However, this inequality contradicts (1.30). Thus, one can conclude that equality (1.31) holds true. $\square$

The fact that continuously codifferentiable functions are locally Lipschitz continuous also allows one to prove that for such function the limit in the definition of the directional derivative $f'(x, h)$ is, in a sense, locally uniform in h. Recall that f is called *Hadamard directionally differentiable* at a point $x \in U$, if for any $h \in X$ there exists the finite limit

$$f'_H(x, h) = \lim_{[\alpha, h'] \to [+0, h]} \frac{f(x + \alpha h') - f(x)}{\alpha} \tag{1.34}$$

(see [195] the definition of this limit). Clearly, if f is Hadamard directionally differentiable at a point x, then f is directionally differentiable at this point and $f'_H(x, \cdot) = f'(x, \cdot)$. Therefore, below we use the notation $f'(x, \cdot)$ for the Hadamard directional derivative.

Proposition 1.2.6. *Let f be continuously codifferentiable at a point $x \in U$. Then f is Hadamard directionally differentiable at this point*

Proof. By Corollary 1.2.2 there exist $r > 0$ and $L > 0$ such that $|f(x_1) - f(x_2)| \le L\|x_1 - x_2\|$ for all $x_1, x_2 \in B(x, r)$. Furthermore, by Theorem 1.2.1 the function f is quasidifferentiable and, therefore, directionally differentiable at the point x.

Pick any $\varepsilon > 0$ and $h \in X$. Consider the case $h = 0$ first. Note that $x + \alpha h' \in B(x, r)$ for all $\alpha \in (0, \sqrt{r})$ and $h' \in B(0, \sqrt{r})$. Therefore, setting $\delta = \min\{\sqrt{r}, \varepsilon/L\}$ one gets that

$$\left| \frac{f(x + \alpha h') - f(x)}{\alpha} \right| \le L\|h'\| < \varepsilon \quad \forall \alpha \in (0, \delta),\ h' \in B(0, \delta),$$

that is, the limit in (1.34) exists for $h = 0$ and is equal to zero.

Suppose now that $h \ne 0$. By the definition of directional derivative there exists $\delta_0 > 0$ such that

$$\left| \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha} - f'(x, h) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, 0 < \alpha < \delta_0.$$

Note that if $0 < \alpha < r/(2\|h\|)$ and for some $h' \in X$ one has $\|h' - h\| < \|h\|$, then $x + \alpha h \in B(x, r/2)$ and $\|\alpha h' - \alpha h\| = \alpha\|h' - h\| < r/2$, that is, $x + \alpha h' \in B(x, r)$. Therefore, define $\delta = \min\{\delta_0, \varepsilon/2L, r/(2\|h\|), \|h\|\}$. Then for all $\alpha \in (0, \delta)$ and $h' \in B(h, \delta)$ one has $x + \alpha h' \in B(x, r)$ and

$$\left| \frac{f(x + \alpha h') - f(x)}{\alpha} - f'(x, h) \right| \le \left| \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha} - f'(x, h) \right| + \\ + \frac{1}{\alpha}\big| f(x + \alpha h') - f(x + \alpha h) \big| < \frac{\varepsilon}{2} + L\|h' - h\| < \varepsilon,$$

that is, the limit in (1.34) exists and is equal to $f'(x, h)$. □

1.2.3 Codifferential Calculus

In this section we derive the main rule of the codifferential calculus in the infinite dimensional case. Furthermore, since in the following section we will use the notion of *uniform codifferentiability,* apart from the calculus rules we will also obtain some estimates of the remainder in the expansion of a codifferentiable function, which allow one to prove uniform codifferentiability of many functions appearing in applications.

Recall that the addition and multiplication by scalar operations for pairs of sets of a vector space are defined in the following way:

$$[A, B] + [C, D] = [A + C, B + D], \quad \lambda[A, B] = \begin{cases} [\lambda A, \lambda B], & \text{if } \lambda \ge 0, \\ [\lambda B, \lambda A], & \text{if } \lambda < 0. \end{cases} \tag{1.35}$$

Below we will also need the following well-known result [257].

Lemma 1.2.8. *Let Y be real topological vector space and $A_1, \ldots, A_n \subset Y$ be convex compact set. Then for all $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ the sets $\sum_{i=1}^n \alpha A_i$ and $\operatorname{co}\{A_i \mid i \in 1\colon n\}$ are convex and compact.*

Proof. The set $A_1 \times \ldots \times A_n$ is a convex compact subset of the space Y^n as the direct product of a finite number of convex compact sets. Therefore the set $\sum_{i=1}^n \alpha A_i$ is a convex compact subset of the space Y as the image of the set $A_1 \times \ldots \times A_n$ under the continuous linear map $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$.

Denote by $S_n = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\}$, where $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, the standard (probability) simplex in $\mathbb{R}^n$. Note that the set $S \times A_1 \times \ldots \times A_n$ is a compact subset of $\mathbb{R}^n \times Y^n$ as the direct product of a finite number of compact sets. Therefore the set $\operatorname{co}\{A_i \mid i \in 1\colon n\}$ is compact as the image of the set $S \times A_1 \times \ldots \times A_n$ under the continuous mapping $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ (the fact that this image coincides with the convex hull of the sets A_i can be verified directly). The convexity of this set follows directly from the definition of convex hull. $\square$

Recall that X is a real Banach space and $U \subset X$ is an open set. Let a function $f \colon U \to \mathbb{R}$ be codifferentiable at a point $x \in U$ and $Df(x)$ be its codifferential at this point. For all $r > 0$ such that $B(x, r) \subset U$ and for all $\Delta x \in B(0, r)$ and $\alpha \in [0, 1]$ define the function

$$\begin{aligned} \varepsilon_f(\alpha, \Delta x, x, r) = \frac{1}{\alpha}\Big(f(x + \alpha\Delta x) - f(x) - \max_{(a, x^*) \in \underline{d} f(x)} (a + \langle x^*, \alpha\Delta x\rangle) - \\ - \min_{(b, y^*) \in \overline{d} f(x)} (b + \langle y^*, \alpha\Delta x\rangle)\Big). \end{aligned} \tag{1.36}$$

The function ε_f obviously depends on the choice of a codifferential of f. However, in order to not overload the notation, we do not include $Df(x)$ into the notation for ε_f.

Note that by the definition of codifferential one has $\varepsilon_f(\alpha, \Delta x, x, r) \to 0$ as $\alpha \to +0$. The function ε_f allows one to estimate how well the DC function

$$\max_{(a, x^*) \in \underline{d} f(x)} (a + \langle x^*, \alpha\Delta x\rangle) + \min_{(b, y^*) \in \overline{d} f(x)} (b + \langle y^*, \alpha\Delta x\rangle),$$

defined via a codifferential of the function f, approximates the increment of the function f near the point x. Our goal is to derive main rules of codifferential calculus and, at the same time, to obtain corresponding estimates of the function ε_f. For the sake of shortness, below we consider only the case when all functions are continuously codifferentiable on the open set U. However, one can easily extent all results of this subsection to the case of functions that are continuously codifferentiable on a certain (possibly closed) subset of the set U.

Theorem 1.2.2. *Let functions $f_i \colon U \to \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$, be continuously codifferentiable on the set U and $Df_i(\cdot)$, $i \in I$ be codifferential mappings of the functions f_i, defined and Hausdorff* *continuous on U. Then the functions $f = \max_{i \in I} f_i$ and $g = \min_{i \in I} f_i$ are also continuously codifferentiable on the set U, and the set-valued maps*

$$Df(\cdot) = \Big[\operatorname{co} \Big\{ \{(f_i(\cdot) - f(\cdot), 0)\} + \underline{d} f_i(\cdot) - \sum_{j \neq i} \overline{d} f_j(\cdot) \Bigm| i \in I \Big\}, \sum_{i \in I} \overline{d} f_i(\cdot) \Big], \tag{1.37}$$

$$Dg(\cdot) = \Big[\sum_{i \in I} \underline{d} f_i(\cdot), \operatorname{co} \Big\{ \{(f_i(\cdot) - g(\cdot), 0)\} + \overline{d} f_i(\cdot) - \sum_{j \neq i} \underline{d} f_j(\cdot) \Bigm| i \in I \Big\} \Big]$$

are codifferentiable mappings of the functions f and g, defined and Hausdorff continuous on the set U. Moreover, the following inequality holds true.

$$\max \big\{ \big|\varepsilon_f(\alpha, \Delta x, x, r)\big|, \big|\varepsilon_g(\alpha, \Delta x, x, r)\big| \big\} \le \max_{i \in I} \big|\varepsilon_{f_i}(\alpha, \Delta x, x, r)\big|. \tag{1.38}$$

Proof. We will prove the theorem only for the function f, since the proof for the function g almost literally repeats the proof for the function f. Fix any $x \in U$ and $r > 0$ such that $B(x, r) \subset U$ (recall that U is an open set). For any $h \in X$ define

$$\Phi_i(h) = \max_{(a, x^*) \in \underline{d} f_i(x)} \big(a + \langle x^*, h \rangle \big), \quad \Psi_i(h) = \min_{(b, y^*) \in \overline{d} f_i(x)} \big(b + \langle y^*, h \rangle \big), \quad i \in I,$$

and put

$$\Phi(h) = \max_{(a, x^*) \in \underline{d} f(x)} \big(a + \langle x^*, h \rangle \big), \quad \Psi(h) = \min_{(b, y^*) \in \overline{d} f(x)} \big(b + \langle y^*, h \rangle \big),$$

where the pair $Df(x) = [\underline{d} f(x), \overline{d} f(x)]$ is defined according to (1.37). Observe that the sets $\underline{d} f(x)$ and $\overline{d} f(x)$ are convex compact subsets of the space $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ by Lemma 1.2.8. Moreover, the function f_i, $i \in I$, are locally Lipschitz continuous on U by Corollary 1.2.2. Therefore the function f is continuous on U as the maximum of a finite number of continuous functions, which implies that the multifunctions $\underline{d} f(\cdot)$ and $\overline{d} f(\cdot)$ are Hausdorff continuous by Lemmas 1.2.2 and 1.2.3. Thus, it remains to prove that f is codifferentiable on U, the pair (1.37) is its codifferential mapping, and inequality (1.38) holds true.

Choose any $\Delta x \in B(0, r)$ and $\alpha \in [0, 1]$. By definition one has

$$\begin{aligned} f(x + \alpha \Delta x) - f(x) &= \max_{i \in I} \big(f_i(x + \alpha \Delta x) - f(x) \big) = \\ &= \max_{i \in I} \big(f_i(x) - f(x) + \Phi_i(\alpha \Delta x) + \Psi_i(\alpha \Delta x) + \alpha \varepsilon_{f_i}(\alpha, \Delta x, x, r) \big). \end{aligned}$$

Adding and subtracting $\sum_{i=1}^m \Psi_i(\alpha \Delta x)$ one gets that

$$\begin{aligned} f(x + \alpha \Delta x) - f(x) = \max_{i \in I} \big(& f_i(x) - f(x) + \\ & + \Phi_i(\alpha \Delta x) - \sum_{j \neq i} \Psi_j(\alpha \Delta x) + \alpha \varepsilon_{f_i}(\alpha, \Delta x, x, r) \big) + \sum_{i=1}^m \Psi_i(\alpha \Delta x). \end{aligned}$$

Hence applying the obvious inequalities

$$\max_{i\in I} a_i - \max_{i\in I} |b_i| \le \max_{i\in I}(a_i + b_i) \le \max_{i\in I} a_i + \max_{i\in I} |b_i|,$$

that are satisfied for all real a_i and b_i, one obtains that

$$\Big| f(x+\alpha\Delta x) - f(x) - \max_{i\in I}\big(f_i(x) - f(x) + \Phi_i(\alpha\Delta x) - \sum_{j\ne i}\Psi_j(\alpha\Delta x)\big) + \sum_{i=1}^m \Psi_i(\alpha\Delta x)\Big| \le$$
$$\le \alpha \max_{i\in I}\big|\varepsilon_{f_i}(\alpha,\Delta x,x,r)\big|. \quad (1.39)$$

Let us transform the left-hand side of this inequality. Note that by the definition of $\overline{d}f(x)$ (see (1.37)) one has

$$\sum_{i=1}^m \Psi_i(h) = \sum_{i=1}^m \min_{(b,y^*)\in\overline{d}f_i(x)}\big(b + \langle y^*, h\rangle\big) = \min_{(b,y^*)\in\overline{d}f(x)}\big(b + \langle y^*, h\rangle\big) = \Psi(h) \quad \forall h \in X.$$

Similarly, by the definition of $\underline{d}f(x)$ (see (1.37)) one has

$$\max_{i\in I}\big(f_i(x) - f(x) + \Phi_i(h) - \sum_{j\ne i}\Psi_j(h)\big) = \max_{(a,x^*)\in\underline{d}f(x)}\big(a + \langle x^*, h\rangle\big) = \Phi(h) \quad \forall h \in X.$$

Combining these equalities with (1.39) one gets that

$$\Big| f(x+\alpha\Delta x) - f(x) - \Phi(\alpha\Delta x) - \Psi(\alpha\Delta x)\Big| \le \alpha \max_{i\in I}\big|\varepsilon_{f_i}(\alpha,\Delta x,x,r)\big|.$$

Since by the definition of codifferentiability $\varepsilon_{f_i}(\alpha,\Delta x,x,r) \to 0$ as $\alpha \to +0$, this inequality implies that the function f is codifferentiable at the point x, the pair $Df(x)$, defined in (1.37), is a codifferential of f at x, and the estimate (1.38) holds true. $\square$

Theorem 1.2.3. *Let functions $f_i \colon U \to \mathbb{R}$, $i \in I = \{1,\dots,m\}$, be continuously codifferentiable on the set U and $Df_i(\cdot)$, $i \in I$ be codifferential mappings of the functions f_i, defined and Hausdorff continuous on U. Suppose also that a real-valued function $G = G(y)$ is defined and continuously differentiable on an open set $V \subseteq \mathbb{R}^m$, containing the set $\{f(x) \in \mathbb{R}^m \mid x \in U\}$, where $f(x) = (f_1(x),\dots,f_m(x))^T$. Then the function $g(\cdot) = G(f_1(\cdot),\dots,f_m(\cdot))$ is continuously codifferentiable on U and the multifunction*

$$Dg(\cdot) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial G(f(\cdot))}{\partial y_i} Df_i(\cdot) \qquad (1.40)$$

is a codifferential mapping of the function g, defined and continuous on U. Moreover, for any $r > 0$ such that $B(x,r) \subset U$ and $\operatorname{co} f(B(x,r)) \subset V$ the following estimate holds true:

$$\begin{aligned}\big|\varepsilon_g(\alpha,\Delta x,x,r)\big| \le \sum_{i=1}^m \Big|\frac{\partial G}{\partial y_i}(f(x))\Big|\,\big|\varepsilon_{f_i}(\alpha,\Delta x,x,r)\big| + \\ + \frac{1}{\alpha}\sup_{t\in[0,1]}\Big|\big\langle \nabla G\big(y(t)\big) - \nabla G(f(x)), f(x+\alpha\Delta x) - f(x)\big\rangle\Big|.\end{aligned} \qquad (1.41)$$

Here $\langle\cdot,\cdot\rangle$ is the inner product in $\mathbb{R}^m$ and $y(t) = tf(x) + (1-t)f(x+\alpha\Delta x)$.

Proof. Fix any $x \in U$ and $r > 0$ such that $B(x,r) \subset U$ and $\operatorname{co} f(B(x,r)) \subset V$. Note that for any $x \in U$ there exists $r > 0$ satisfying these conditions. Indeed, since the functions f_i are locally Lipschitz continuous by Corollary 1.2.2, then choosing sufficiently small $r > 0$ one can ensure that $f(B(x,r)) \subseteq B(f(x), Lr)$ for some $L > 0$ and, therefore, $\operatorname{co} f(B(x,r)) \subseteq B(f(x), Lr)$. In turn, from the fact that the set V is open it follows that for any sufficiently small $r > 0$ the inclusion $B(f(x), Lr) \subset V$ holds true, which implies that $\operatorname{co} f(B(x,r)) \subset V$.

Note that the sets $\underline{d}g(x)$ and $\overline{d}g(x)$, defined in (1.40), are convex compact subsets of the space $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ by Lemma 1.2.8. Moreover, the functions f_i are locally Lipschitz continuous by Corollary 1.2.2, which implies that the functions $\partial G(f(\cdot))/\partial y_i$ are continuous on U. Therefore, the multifunction (1.40) is Hausdorff continuous on U by Lemmas 1.2.5 and 1.2.6.

Let us now turn to the proof of the codifferentiability of the function g. To this end, choose arbitrary $\Delta x \in B(0,r)$ and $\alpha \in [0,1]$, and denote $y(t) = tf(x) + (1-t)f(x + \alpha\Delta x)$ for all $t \in [0,1]$. By the mean value theorem for differentiable functions there exists $t \in (0,1)$ such that

$$
\begin{aligned}
g(x + \alpha\Delta x) - g(x) &= G(f(x + \alpha\Delta x)) - G(f(x)) = \\
&= \langle \nabla G(f(x)), f(x + \alpha\Delta x) - f(x) \rangle + \big\langle \nabla G\big(y(t)\big) - \nabla G(f(x)), f(x + \alpha\Delta x) - f(x) \big\rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial G}{\partial y_i}(f(x)) \Big(\Phi_i(\alpha\Delta x) + \Psi_i(\alpha\Delta x) + \alpha\varepsilon_{f_i}(\alpha, \Delta x, x, r) \Big) + \\
&+ \big\langle \nabla G\big(y(t)\big) - \nabla G(f(x)), f(x + \alpha\Delta x) - f(x) \big\rangle,
\end{aligned} \tag{1.42}
$$

where the functions Φ_i and Ψ_i in the same way as in the proof of Theorem 1.2.2. Let us transform this equality. Applying the well-known equalities [100]

$$
\max_{(a,x^*) \in A} (a + \langle x^*, h \rangle) + \max_{(b,y^*) \in B} (b + \langle x^*, h \rangle) = \max_{(a,x^*) \in A+B} (a + \langle x^*, h \rangle), \quad \forall h \in X
$$
$$
- \max_{(a,x^*) \in A} (a + \langle x^*, h \rangle) = \min_{(a,x^*) \in -A} (a + \langle x^*, h \rangle) \quad \forall h \in X,
$$

satisfied for any compact subsets A, B of the space $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$, and similar equalities for the min-operator, one obtains that

$$
\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial G}{\partial y_i}(f(x)) \Big(\Phi_i(\alpha\Delta x) + \Psi_i(\alpha\Delta x) \Big) = \max_{(a,x^*) \in A} (a + \langle x^*, \alpha\Delta x \rangle) + \min_{(b,y^*) \in B} (b + \langle x^*, \alpha\Delta x \rangle),
$$

where

$$
A = \sum_{i \in I_+(x)} \frac{\partial G(f(x))}{\partial y_i} \underline{d} f_i(x) + \sum_{i \in I_-(x)} \frac{\partial G(f(x))}{\partial y_i} \overline{d} f_i(x),
$$
$$
B = \sum_{i \in I_+(x)} \frac{\partial G(f(x))}{\partial y_i} \overline{d} f_i(x) + \sum_{i \in I_-(x)} \frac{\partial G(f(x))}{\partial y_i} \underline{d} f_i(x),
$$

$I_+(x) = \{i \in I \mid G'_{y_i}(f(x)) \geq 0\}$ and $I_-(x) = \{i \in I \mid G'_{y_i}(f(x)) < 0\}$. Due to (1.40) and the definitions of addition and multiplication by scalar operations for pairs of sets (1.35) the equalities $A = \underline{d}g(x)$ and $B = \overline{d}g(x)$ hold true. With the use of these equalities and (1.42) one gets that

$$\frac{1}{\alpha}\Big| g(x+\alpha\Delta x) - g(x) - \max_{(a,x^*)\in \underline{d}g(x)} (a + \langle x^*, \alpha\Delta x\rangle) - \min_{(b,y^*)\in \overline{d}g(x)} (b + \langle x^*, \alpha\Delta x\rangle)\Big| \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^m \left|\frac{\partial G}{\partial y_i}(f(x))\right| \big|\varepsilon_{f_i}(\alpha, \Delta x, x, r)\big| + \frac{1}{\alpha}\sup_{t\in[0,1]} \Big|\big\langle \nabla G\big(y(t)\big) - \nabla G(f(x)), f(x+\alpha\Delta x) - f(x)\big\rangle\Big|. \tag{1.43}$$

This inequality implies the validity of the estimate (1.41). Moreover, by Corollary 1.2.2 for some $L > 0$ and for any sufficiently small $\alpha \geq 0$ one has $|f(x+\alpha\Delta x) - f(x)| \leq L\alpha\|\Delta x\|$, which implies that $\sup_{t\in[0,1]} |\nabla G(y(t)\big) - \nabla G(f(x))| \to 0$ as $\alpha \to +0$ due to the fact that G is continuously codifferentiable, and

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in[0,1]} \Big|\big\langle \nabla G\big(y(t)\big) - \nabla G(f(x)), f(x+\alpha\Delta x) - f(x)\big\rangle\Big| = 0.$$

Thus, the right-hand side of the inequality (1.43) tend to zero as $\alpha \to +0$, which implies that g is codifferentiable at x and the pair $Dg(x)$, defined in (1.40), is its codifferential at this point. $\square$

Corollary 1.2.3. *Let functions $f_i \colon U \to \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$, be continuously codifferentiable on the set U and $Df_i(\cdot)$, $i \in I$ be codifferential mappings of the functions f_i, defined and Hausdorff continuous on U. Then for all $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in I \cup \{0\}$, the function $f = \sum_{i\in I} \lambda_i f_i + \lambda_0$ is continuously codifferentiable on U, the multifunction $Df(\cdot) = \sum_{i\in I} \lambda_i Df_i(\cdot)$ is a codifferential mapping of the function f, defined and continuous on U, and the following estimate holds true: $|\varepsilon_f(\alpha, \Delta x, x, r)| \leq \sum_{i\in I} |\lambda_i| \cdot |\varepsilon_{f_i}(\alpha, \Delta x, x, r)|$.*

Corollary 1.2.4. *Let functions $f_1, f_2 \colon U \to \mathbb{R}$ be continuously codifferentiable on the set U and $Df_1(\cdot), Df_2(\cdot)$ be codifferential mappings of the functions f_1 and f_2 respectively, defined and Hausdorff continuous on U. Then the function $f = f_1 \cdot f_2$ is continuously codifferentiable on U, the multifunction $Df(\cdot) = f_2(\cdot)Df_1(\cdot) + f_1(\cdot)Df_2(\cdot)$ is a codifferential mapping of the function f, defined and continuous on U, and for any sufficiently small $r = r(x) > 0$ the following inequality holds true:*

$$\big|\varepsilon_f(\alpha, \Delta x, x, r)\big| \leq |f_2(x)| \cdot \big|\varepsilon_{f_1}(\alpha, \Delta x, x, r)\big| + |f_1(x)| \cdot \big|\varepsilon_{f_2}(\alpha, \Delta x, x, r)\big| + 2\alpha L_1 L_2 \|\Delta x\|^2,$$

where $L_i > 0$ is a Lipschitz constant of f_i on the ball $B(x, r)$.

Corollary 1.2.5. *Let a function $f \colon U \to \mathbb{R}$ be continuously codifferentiable on the set U and $Df(\cdot)$ be a codifferential mapping of f, defined and Hausdorff continuous on U. Suppose also* *that $f(x) \neq 0$ for all $x \in U$. Then the function $g = \dfrac{1}{f}$ is continuously codifferentiable on U, the multifunction $Dg(\cdot) = -\dfrac{1}{f(\cdot)^2} Df(\cdot)$ is a codifferential mapping of the function f, defined and Hausdorff continuous on U, and for any sufficiently small $r = r(x) > 0$ the following inequality holds true:*

$$\big|\varepsilon_g(\alpha, \Delta x, x, r)\big| \leq \frac{1}{f(x)^2}\big|\varepsilon_f(\alpha, \Delta x, x, r)\big| + \frac{2\alpha L^2 \|\Delta x\|^2}{(f(x) - rL)^3},$$

where $L > 0$ is a Lipschitz constant of f on the ball $B(x, r)$.

Theorem 1.2.4. *Let a function $f \colon U \to \mathbb{R}$ be continuously codifferentiable on the set U and $Df(\cdot)$ be a codifferential mapping of f, defined and Hausdorff continuous on U. Let also Y be a real Banach space, $V \subset Y$ be an open set, nonlinear operator $F \colon V \to X$ satisfy the inclusion $F(V) \subseteq U$ and be continuously Fréchet differentiable on V. Then the function $g(\cdot) = f(F(\cdot))$ is defined and continuously codifferentiable on V, while the pair $Dg(\cdot) = [\underline{d}g(\cdot), \overline{d}g(\cdot)]$, where*

$$\begin{aligned} \underline{d}g(\cdot) &= \Big\{(a, x^* \circ F'(\cdot)) \in \mathbb{R} \times Y^* \;\Big|\; (a, x^*) \in \underline{d}f(F(\cdot))\Big\}, \\ \overline{d}g(\cdot) &= \Big\{(b, y^* \circ F'(\cdot)) \in \mathbb{R} \times Y^* \;\Big|\; (b, y^*) \in \overline{d}f(F(\cdot))\Big\}, \end{aligned} \tag{1.44}$$

is a codifferential mapping of g, defined and continuous on the set V.

Proof. The function $g = f \circ F$ is correctly defined on the set V due to the inclusion $F(V) \subseteq U$. Fix any $y \in V$ and $\Delta y \in Y$. Put $x = F(y)$, $\Delta x = F'(y)\Delta y$ and for any sufficiently small $\alpha > 0$ defined $\Delta x(\alpha) = (F(y + \alpha \Delta y) - F(y))/\alpha$. Note that $\Delta x(\alpha) \to \Delta x$ as $\alpha \to +0$ by the definition of the Fréchet derivative of the function F. Therefore, by Proposition 1.2.5 the following equality holds true:

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}\Big| f(x + \alpha \Delta x(\alpha)) - f(x) - \max_{(a, x^*) \in \underline{d}f(x)} (a + \langle x^*, \alpha \Delta x\rangle) - \min_{(b, y^*) \in \overline{d}f(x)} (b + \langle y^*, \alpha \Delta x\rangle)\Big| = 0.$$

Substituting the expressions for x, Δx and $\Delta x(\alpha)$ into this equality one gets that

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}\Big| g(y + \alpha \Delta y) - g(y) - \max_{(a, x^*) \in \underline{d}g(y)} (a + \langle x^*, \alpha \Delta y\rangle) - \min_{(b, y^*) \in \overline{d}g(y)} (b + \langle y^*, \alpha \Delta y\rangle)\Big| = 0,$$

where the sets $\underline{d}g(y)$ and $\overline{d}g(y)$ are defined in (1.44). Thus, if the sets $\underline{d}g(y)$ and $\overline{d}g(y)$ are convex and compact in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y)$, where $\sigma(Y^*, Y)$ is the weak* topology in Y^*, then one can conclude that the function g is codifferentiable on V and the pair (1.44) is its codifferential mapping.

To prove the convexity and compactness of the sets $\underline{d}g(y)$ and $\overline{d}g(y)$, introduce a linear operator $\mathcal{T} \colon \mathbb{R} \times X^* \to \mathbb{R} \times Y^*$ as follows: $\mathcal{T}(a, x^*) = (a, x^* \circ F'(y))$. Let us check that $\mathcal{T}$ is a continuous linear operator from $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(X^*, X))$ to $(\mathbb{R} \times Y^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y))$. Then one can conclude that the sets $\underline{d}g(y)$ and $\overline{d}g(y)$ are convex and compact in the corresponding topology, as the images of the convex compact sets $\underline{d}f(x)$ and $\overline{d}f(x)$ under the continuous linear map $\mathcal{T}$.

To prove the continuity of the operator $\mathcal{T}$, fix any open subset $\mathcal{V}$ of the space $(\mathbb{R} \times Y^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y))$ and let us check that its preimage $\mathcal{U} = \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{V})$ is open in $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(X^*, X))$. To this end, pick any $(a_0, x_0^*) \in \mathcal{U}$. By definition $\mathcal{T}(a, x_0^*) = (a_0, x_0^* \circ F'(y)) \in \mathcal{V}$. Since the set $\mathcal{V}$ is open in the topological product $(\mathbb{R} \times Y^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y))$, there exist $\varepsilon > 0$ and $y_1, \ldots, y_n \in Y$ such that

$$\mathcal{V}_\varepsilon(y_1, \ldots, y_n) = \Big\{(b, y^*) \in \mathbb{R} \times Y^* \;\Big|\; |b - a_0| < \varepsilon, \quad \max_{i \in 1:\, n} \big|\langle y^* - x_0^* \circ F'(y), y_i\rangle\big| < \varepsilon\Big\} \subseteq \mathcal{V}.$$

Put $x_i = F'(y)y_i$, $i \in 1\colon n$, and note that the image of the set

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) = \Big\{(a, x^*) \in \mathbb{R} \times X^* \;\Big|\; |a - a_0| < \varepsilon, \quad \max_{i \in 1:\, n} \big|\langle x^* - x_0^*, x_i\rangle\big| < \varepsilon\Big\}$$

under the operator $\mathcal{T}$ is contained in $\mathcal{V}_\varepsilon(y_1, \ldots, y_n) \subseteq \mathcal{V}$. Consequently, $\mathcal{U}_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathcal{U}$, that is, the point (a_0, x_0^*) is contained in the set $\mathcal{U}$ along with its neighbourhood $\mathcal{U}_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$. Thus, the set $\mathcal{U}$ is open in $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(X^*, X))$ and the operator $\mathcal{T}$ is continuous with respect to corresponding topologies.

Thus, it remains to prove that the multifunctions (1.44) are Hausdorff continuous. Let us prove the continuity of the map $\underline{d}g(\cdot)$. The continuity of the map $\overline{d}g(\cdot)$ is proved in exactly the same way.

Choose any $\varepsilon > 0$. By our assumption the function f is continuously codifferentiable. Consequently, one can find $\delta_0 > 0$ such that $\rho_H(\underline{d}f(x'), \underline{d}f(F(y))) < \varepsilon$ for all $x' \in B(F(y), \delta_0)$. Since the operator F is continuously differentiable, it is continuous and, therefore, there exists $\delta > 0$ such that $\|F(y') - F(y)\| < \delta_0$ and $\|F'(y') - F'(y)\| < \varepsilon$ for all $y' \in B(y, \delta)$. Hence for any $y' \in B(y, \delta)$ one has $x' = F(y') \in B(F(y), \delta_0)$ and $\rho_H(\underline{d}f(F(y')), \underline{d}f(F(y))) < \varepsilon$. By Lemma 1.2.1 one can conclude that there exists $t \in (0, \varepsilon)$ such that for any $(a, x^*) \in \underline{d}f(F(y))$ one can find $(b, y^*) \in \underline{d}f(F(y'))$ such that $\|(a, x^*) - (b, y^*)\| < t$, while for any pair $(b, y^*) \in \underline{d}f(F(y'))$ one can find $(a, x^*) \in \underline{d}f(F(y))$ such that $\|(a, x^*) - (b, y^*)\| < t$. Consequently, for any $(a, x^* \circ F'(y)) \in \underline{d}g(y)$ there exists $(b, y^* \circ F'(y')) \in \underline{d}g(y')$ such that

$$\begin{aligned}\|(a, x^* \circ F'(y)) - (b, y^* \circ F'(y'))\| &\le |a - b| + \|x^* \circ F'(y) - y^* \circ F'(y')\| \le \\ &\le t + \|x^*\|\|F'(y') - F'(y)\| + \|x^* - y^*\|\|F'(y')\| < t + C_1\varepsilon + (\|F'(y)\| + \varepsilon)t,\end{aligned}$$

where $C_1 = \sup\{\|x^*\| \mid (a, x^*) \in \underline{d}f(F(y))\} < +\infty$ (recall that the set $\underline{d}f(F(y))$ is norm-bounded, since it is compact in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$). Similarly, for any $(b, y^* \circ F'(y')) \in \underline{d}g(y')$ there exists

$(a, x^* \circ F'(y)) \in \underline{d}g(y)$ such that

$$\|(a, x^* \circ F'(y)) - (b, y^* \circ F'(y'))\| < t + C_1\varepsilon + (\|F'(y)\| + \varepsilon)t.$$

Hence applying Lemma 1.2.1 one gets that

$$\rho_H(\underline{d}g(y'), \underline{d}g(y)) < \Big(1 + C_1 + \|F'(y)\| + \varepsilon\Big)\varepsilon \quad \forall y' \in B(y, \delta),$$

which implies that the multifunction $\underline{d}g(\cdot)$ is Haudroff continuous, due to the fact that $\varepsilon > 0$ was chosen arbitrarily. □

Corollary 1.2.6. *Let function f satisfy assumptions of Theorem 1.2.4, Y be a real Banach space $V \subset Y$ be and open set, and a bounded linear operator $\mathcal{T} \colon Y \to X$ satisfy the condition $\mathcal{T}(V) + x_0 \subseteq U$ for some $x_0 \in X$. Then the function $g(y) = f(\mathcal{T}y + x_0)$, $y \in V$, is defined and continuously codifferentiable on V, the pair $Dg(\cdot) = [\underline{d}g(\cdot), \overline{d}g(\cdot)]$, where*

$$\begin{aligned} \underline{d}g(y) &= \Big\{(a, \mathcal{T}^* x^*) \in \mathbb{R} \times Y^* \Bigm| (a, x^*) \in \underline{d}f(\mathcal{T}y + x_0)\Big\} \quad \forall y \in V, \\ \overline{d}g(y) &= \Big\{(b, \mathcal{T}^* y^*) \in \mathbb{R} \times Y^* \Bigm| (b, y^*) \in \overline{d}f(\mathcal{T}y + x_0)\Big\} \quad \forall y \in V, \end{aligned} \tag{1.45}$$

is a codifferential of g, defined and Hausdorff continuous on V, and for any $y \in V$ and $r, s > 0$ such that $\mathcal{T}(B(y, r)) + x_0 \subset B(\mathcal{T}y + x_0, s) \subset U$, and for all $\Delta y \in B(0, r)$ one has $\varepsilon_g(\alpha, \Delta y, y, r) = \varepsilon_f(\alpha, \mathcal{T}\Delta y, \mathcal{T}y + x_0, s)$.

Proof. Setting $F(y) = \mathcal{T}y + x_0$ and applying Theorem 1.2.4 one gets that g is continuously codifferentiable on V and the pair (1.45) is a continuous codifferential mapping of this function. In turn, the expression for ε_g is obtained via by substituting $x = \mathcal{T}y + x_0$ and $\Delta x = \mathcal{T}\Delta y$ into the definition of ε_f. □

Remark 1.2.4. One can show that the composition of two codifferentiable functions is codifferentiable as wel (see [111,416,417] and the author's paper [132]). However, to the best of the author's knowledge, the cumbersome expression for the codifferential of the composition of two codifferentiable function is never used for computing codifferentials of nonsmooth functions appearing in applications. Therefore, we do not present this formula here.

Thus, the set of all continuously codifferentiable on U functions is closed under addition, multiplication by scalar, composition with continuously differentiable functions, as well as the pointwise maximum and minimum of finite families of functions.

The main rule of codifferential calculus obtained in Theorems 1.2.2, 1.2.3 and 1.2.4 and Corollaries 1.2.3–1.2.5 and 1.2.6 allows a simple algorithmic realization and can be used to create software for automatic codifferentiation. For more details on such software see [12, 14].

Let us present a simple application of Theorem 1.2.4.

Example 1.2.6. In nonlinear semidefinite programming [368] and eigenvalue optimization problems [281] one often considers functions of the form $\lambda_{\max}(F(\cdot))$, where $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{S}^\ell$ is a function mapping each point $x \in \mathbb{R}^d$ to a symmetric matrix $F(x) \in \mathbb{S}^\ell$ of order ℓ, and $\lambda_{\max}(F(x))$ is the maximal eigenvalue of the matrix $F(x)$. Let us show that the function $g(\cdot) = \lambda_{\max}(F(\cdot))$ is continuously codifferentiable.

Indeed, introduce the function $f\colon \mathbb{S}^\ell \to \mathbb{R}$ as follows: $f(A) = \lambda_{\max}(A)$. This function is continuously hypodifferentiable and its hypodifferential was computed in Example 1.2.5. Suppose that F is continuously differentiable. Then by Theorem 1.2.4 the function g is continuously hypodifferentiable on $\mathbb{R}^d$, $\overline{d}g(\cdot) \equiv \{0\}$ and

$$\underline{d}g(x) = \operatorname{co}\Big\{ \big(\langle s, F(x)s \rangle - \lambda_{\max}(F(x)), \operatorname{Tr}(ss^T F'_{x(1)}(x)), \ldots, \operatorname{Tr}(ss^T F'_{x(d)}(x)) \big) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \Bigm| s \in B_{\mathbb{R}^\ell} \Big\}$$

for all $x \in \mathbb{R}^d$, where $B_{\mathbb{R}^\ell}$ is the unit ball in $\mathbb{R}^\ell$ with respect to the Euclidean norm.

1.2.4 Metric Regularity of Quasidifferentiable Mappings

Various constraint qualifications are often need for theoretical analysis of nonsmooth optimization problems and derivation of optimality conditions for such problems. This section is devoted an analysis of one constraint qualification for a system of quasidifferentiable equality and inequality constraints, introduced by the author in [150] and ensuring the metric regularity of a multifunction corresponding to this system. Let us note that quasidifferentials are usually more convenient for theoretical analysis of nonsmooth optimization problems, derivation of optimality conditions, study of constraint qualifications, etc., while codifferentials are more convenient for design and analysis of numerical methods. Theorem 1.2.1 allows one to easily transform conditions in terms of quasidifferentials into equivalent conditions in terms of codifferentials and vice versa.

Let, as earlier, X be a real Banach space and Y be a metric space. Recall that a multifunction $F\colon X \rightrightarrows Y$ is called *metrically regular* near a point $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Graph} F$, where $\operatorname{Graph} F$ is the graph of F, if there exist $K > 0$ and $r > 0$ such that

$$\operatorname{dist}(x, F^{-1}(y)) \le K \operatorname{dist}(y, F(x)) \quad \forall (x, y) \in B(\overline{x}, r) \times B(\overline{y}, r).$$

The greatest lower bound of all K for which the inequality above is satisfied with some $r > 0$ is called the *norm of metric regularity* of F near $(\overline{x}, \overline{y})$. See [20, 237, 240] for more details on the general theory of metric regularity.

Suppose now that Y is a real Banach space and (P, d) is a metric space of parameters. Let also $F\colon X \times P \to Y$ and $g_i\colon X \times P \to \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$, be given functions. For any $y \in Y$

and $z_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$, consider the following parametric system

$$F(x,p) = y, \quad g_i(x,p) \leq z_i \quad i \in I. \tag{1.46}$$

Denote by $\mathcal{S}(p,y,z) = \{x \in X \mid F(x,p) = y,\ g_i(x,p) \leq z_i,\ i \in I\}$ the solution set of this system, where $z = (z_1, \ldots, z_m)^T \in \mathbb{R}^m$. We also denote $\mathcal{S}(p) = \mathcal{S}(p, 0_Y, 0_m)$ and sometimes use the notation $F_p(x) = F(x,p)$, where 0_Y and 0_m are zero vectors in Y and $\mathbb{R}^m$, respectively.

In the case when the functions $F(\cdot,p)$ and $g_i(\cdot,p)$ are continuously Fréchet differentiable, the multifunction $\Phi_p(x) = \{F(x,p)\} \times \prod_{i=1}^m [g_i(x,p), +\infty)$ associated with system (1.46) is metrically regular near a given point if and only if the Mangasarian-Fromovitz constrain qualification (MFCQ) holds at this point, i.e. the Fréchet derivative $D_x F(x,p)$ is a surjective mapping, and there exists $h \in X$ such that $D_x F(x,p)[h] = 0$, while $D_x g_i(x,p)[h] < 0$ for any $i \in I$ such that $g_i(x,p) = z_i$ (see [62, Corollary 2.1]). Our aim is to extend this results to the case when the functions $F(\cdot,p)$ and $g_i(\cdot,p)$ are only quasidifferentiable.

To extend the Mangasarian-Fromovitz constrain qualification to the quasidifferentiable case, we will use the following extension of the definition of quasidifferentiability to the case of functions taking values in a normed space. This definition was utilised in [198, 397, 398].

Definition 1.2.4. Let $U \subset X$. A function $F \colon U \to Y$ is called *scalarly quasidifferentible* at a point $x \in U$, if F is Dini directionally differentiable at x, i.e. for any $h \in X$ there exists the limit

$$F'(x,h) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}\big(F(x + \alpha h) - F(x)\big),$$

and for any $y^* \in Y^*$ the function $\langle y^*, F'(x,\cdot)\rangle$ can be represented as the difference of continuous sublinear functions, i.e. there exists a pair of convex weak* compact sets $\underline{\partial} F(x; y^*), \overline{\partial} F(x; y^*) \subset X^*$ such that

$$\langle y^*, F'(x,h)\rangle = \max_{v^* \in \underline{\partial} F(x;y^*)} \langle v^*, h\rangle + \min_{w^* \in \overline{\partial} F(x;y^*)} \langle w^*, h\rangle \quad \forall v \in X.$$

For any $y^* \in Y^*$ the pair $\mathscr{D} F(x; y^*) = [\underline{\partial} F(x; y^*), \overline{\partial} F(x; y^*)]$ is called a *scalar quasidifferential* of F at x (corresponding to y^*).

Now we can turn to the formulation of a constraint qualification. For the sake of shortness we consider the case $y = O$ and $z = 0_m$ only, since the general case can be easily reduced to this one by replacing $F(x,p)$ with $F(x,p) - y$, and $g_i(x,p)$ with $g_i(x,p) - z_i$.

Fix any $\overline{p} \in P$. Suppose that the functions $g_i(\cdot, \overline{p})$, $i \in I$, are quasidifferentiable at a point $\overline{x}$ such that $\overline{x} \in \mathcal{S}(\overline{p})$, and the mapping $F(\cdot, \overline{p})$ is scalarly quasidifferentiable at this point, and denote their quasidifferentials at this point by $\mathscr{D}_x g_i(\overline{x}, \overline{p})$ and $\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)$, $y^* \in Y^*$, respectively.

Introduce the sets

$$[\mathscr{D}_x g_i(\overline{x},\overline{p})]^+ = \underline{\partial}_x g_i(\overline{x},\overline{p}) + \overline{\partial}_x g_i(\overline{x},\overline{p}), \quad [\mathscr{D}_x F(\overline{x},\overline{p};y^*)]^+ = \underline{\partial}_x F(\overline{x},\overline{p};y^*) + \overline{\partial}_x F(\overline{x},\overline{p};y^*).$$

These sets are called a *quasidifferential sum* of the corresponding mappings at the point $(\overline{x},\overline{p})$. Quasidifferential sum was considered in [397, 398].

Quasidifferential sum is a convex weak* compact subset of the space X^* by the definition of quasidifferential. Note that quasidifferential sums are *not* invariant with respect to the choice of the corresponding quasidifferentials. For example, for the function $f(x) = |x|$ both $\mathscr{D}_1 f(0) = [[-1,1],\{0\}]$ and $\mathscr{D}_2 f(0) = [[-2,2],[-1,1]]$ are quasidifferentials of f at x, and $[\mathscr{D}_1 f(0)]^+ = [-1,1] \neq [-3,3] = [\mathscr{D}_2 f(0)]^+$. Thus, all conditions below are not invariant with respect to the choise of quasidifferentials.

For any $x \in X$ and $p \in P$ denote $I(x,p) = \{i \in I \mid g_i(x,p) = 0\}$ and define $S_X = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$.

Definition 1.2.5. One says that *the Mangasarian-Fromovitz constraint qualification in terms of quasidifferentials* (q.d.-MFCQ) holds at $(\overline{x},\overline{p})$, if

$$\inf_{y^* \in S_{Y^*}} \inf\{\|v^*\| \colon v^* \in [\mathscr{D}_x F(\overline{x},\overline{p};y^*)]^+\} > 0, \tag{1.47}$$

and there exists $\overline{h} \in X$ such that $\langle v^*, \overline{h}\rangle = 0$ for all $v^* \in [\mathscr{D}_x F(\overline{x},\overline{p};y^*)]^+$ and $y^* \in Y^*$, while $\langle v^*, \overline{h}\rangle < 0$ for all $v^* \in [\mathscr{D}_x g_i(\overline{x},\overline{p})]^+$ and $i \in I(\overline{x},\overline{p})$.

Let us point out how q.d.-MFCQ is connected with the standard MFCQ. To this end, recall that nonempty subsets $A_1,\ldots,A_s$ of a linear space E are said to be *linearly independent* (or to have *full rank*), if the inclusion $0 \in \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n$ with $\lambda_i \in \mathbb{R}$ is valid only for $\lambda_i = 0$, $i \in \{1,\ldots,s\}$. Clearly, the sets A_i, $i \in \{1,\ldots,s\}$ are linearly independent if and only if for any $x_i \in A_i$, $i \in \{1,\ldots,s\}$, the vectors $x_1,\ldots,x_s$ are linearly independent.

Proposition 1.2.7. *Let Y be the space $\mathbb{R}^\ell$ equipped with the Euclidean norm $|\cdot|$, and $F(\cdot) = (f_1(\cdot),\ldots,f_\ell(\cdot))^T$, where the functions $f_j \colon X \times P \to \mathbb{R}$ are quasidifferentiable in x at $(\overline{x},\overline{p})$. Then the mapping $F(\cdot,\overline{p})$ is scalarly quasidifferentiable at $\overline{x}$. Moreover, q.d.-MFCQ holds at $(\overline{x},\overline{p})$ if and only if the sets $[\mathscr{D}_x f_j(\overline{x},\overline{p})]^+$, $j \in 1\colon \ell$, are linearly independent, and there exists $\overline{h} \in X$ such that $\langle v^*, \overline{h}\rangle = 0$ for all $v^* \in [\mathscr{D}_x f_j(\overline{x},\overline{p})]^+$ and $j \in 1\colon \ell$, while $\langle v^*, \overline{h}\rangle < 0$ for all $v^* \in [\mathscr{D}_x g_i(\overline{x},\overline{p})]^+$ and $i \in I(\overline{x},\overline{p})$.*

Proof. From the fact that the functions $f_j(\cdot,\overline{p})$ are quasidifferentiable at $\overline{x}$ it follows that the mapping $F(\cdot,\overline{p})$ is directionally differentiable at this point, and

$$[F(\cdot,\overline{p})]'(\overline{x},h) = \Big([f_1(\cdot,\overline{p})]'(\overline{x},h),\ldots,[f_\ell(\cdot,\overline{p})]'(\overline{x},h)\Big)^T$$

for any $h \in X$. Therefore, for any $y^* = (y_1, \ldots, y_\ell)^T \in \mathbb{R}^l$ one has

$$\langle y^*, [F(\cdot, \overline{p})]'(\overline{x}, h)\rangle = \sum_{j=1}^{\ell} y_j \Big(\max_{v^* \in \underline{\partial}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})} \langle v^*, h\rangle + \min_{w^* \in \overline{\partial}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})} \langle w^*, h\rangle \Big),$$

which implies that $F(\cdot, \overline{p})$ is scalarly quasidifferentiable at $\overline{x}$, and for any y^* one can define

$$\underline{\partial}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*) = \sum_{j=1}^{\ell} \Big([y_j]_+ \underline{\partial}_x f_j(\overline{x}, \overline{p}) - [-y_j]_+ \overline{\partial}_x f_j(\overline{x}, \overline{p}) \Big),$$
$$\overline{\partial}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*) = \sum_{j=1}^{\ell} \Big([y_j]_+ \overline{\partial}_x f_j(\overline{x}, \overline{p}) - [-y_j]_+ \underline{\partial}_x f_j(\overline{x}, \overline{p}) \Big),$$

where $[t]_+ = \max\{t, 0\}$ for any $t \in \mathbb{R}$. Hence for any y^* one has

$$[\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]^+ = \sum_{j=1}^{\ell} y_j [\mathscr{D}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})]^+. \tag{1.48}$$

Consequently, if (1.47) holds true, then the sets $[\mathscr{D}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})]^+$, $j \in 1\colon \ell$, are linearly independent, since otherwise $0 \in [\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]$ for $y^* = \lambda/|\lambda|$, where $\lambda \in \mathbb{R}^\ell$, $\lambda \neq 0_\ell$ is such that $O \in \sum_{j=1}^{\ell} \lambda^{(j)} [\mathscr{D}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})]^+$, which contradicts (1.47).

Conversely, if the sets $[\mathscr{D}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})]^+$, $j \in 1\colon \ell$, are linearly independent, then $0 \notin [\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]^+$ for any $y^* \neq 0_\ell$. Applying the separation theorem and the fact that the set $[\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]^+$ is weak* compact one obtains that there exist $h \in X$ and $\delta > 0$ such that $\langle v^*, h\rangle \geq \delta$ for all $v^* \in [\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]^+$. Therefore $\inf\{\|v^*\| \mid v^* \in [\mathscr{D}_x F(\overline{x}, \overline{p}; y^*)]^+\} > 0$ for any $y^* \neq 0_\ell$. Hence taking into account the facts that this infimum is obviously continuous with respect to y^* (see (1.48)), and the unit sphere in $\mathbb{R}^l$ is compact one gets that (1.47) holds true.

It remains to note that the equivalence between the second conditions from q.d.-MFCQ and the proposition (the existence of $\overline{h}$) follows directly from (1.48). □

Remark 1.2.5. With the use of the separation theorem one can easily check that under the assumptions of the proposition above the vector $\overline{h}$ from q.d.-MFCQ exists if and only if

$$\operatorname{co}\Big\{[\mathscr{D}_x g_i(\overline{x}, \overline{p})]^+ \mid i \in I(\overline{x}, \overline{p})\Big\} \cap \operatorname{cl}\operatorname{span}\Big\{[\mathscr{D}_x f_j(\overline{x}, \overline{p})]^+ \mid j \in 1\colon \ell\Big\} = \emptyset,$$

where the closure is taken in the weak* topology. Note also that in the case when $\ell = 1$ the "linear independence condition" from q.d.-MFCQ is reduced to $0 \notin [\mathscr{D}_x f_1(\overline{x}, \overline{p})]^+$.

The continuity of the derivatives plays an imporant role in the proof of the metric regularity of a system of equality and inequality constraints with the use of MFCQ. In the nonsmooth case, the continuity assumption must be replaced by a natural assumptions of semicontinuity of corresponding set-valued mappings. Recall that a multifunction $G\colon Z \rightrightarrows E$ between metric spaces Z and E is called *upper semicontinuous* (u.s.c.) at a point $z \in Z$, if for any open set $U \subset E$ such that $G(z) \subset U$ one can find $\delta > 0$ such that $G(z') \subset U$ for all $z' \in B(z, \delta)$. The main results below can be proved with the use of a slightly less restrictive notion of upper semicontinuity. Namely, one says that the multifunction G is *metrically u.s.c.* at a point z, if for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that for all $z' \in B(z, \delta)$ the following inclusion holds true $G(z') \subset G(z)_\varepsilon = \{e \in E \mid \operatorname{dist}(e, G(z)) < \varepsilon\}$. Clearly, any u.s.c. multifunction is metrically upper semicontinuous. The converse implication is not true in the general case, but, as one can readily verify, it is true, provided the set $G(z)$ is compact.

Let a function $f \colon X \to \mathbb{R}$ be quasidifferentiable in a neighbourhood of a point $x \in X$ and $\mathscr{D} f(\cdot) = [\underline{\partial} f(\cdot), \overline{\partial} f(\cdot)]$ be a quasidifferential mapping of f defined in this neighbourhood. One says that the multifunction $\mathscr{D} f(\cdot)$ is (*metrically*) *u.s.c.* at the point x, if the set-valued maps $\underline{\partial} f(\cdot)$ and $\overline{\partial} f(\cdot)$ are (metrically) u.s.c. at this point. Note that if a quasidifferential mapping $\mathscr{D} f(\cdot)$ is metrically u.s.c., they the corresponding quasidifferential sum $[\mathscr{D} f(\cdot)]^+$ is metrically u.s.c. as well.

Remark 1.2.6. In [272] Kuntz showed that in the case $X = \mathbb{R}^d$ a function f is continuously codifferentiable at a point x if and only if f is quasidifferentiable in a neighbourhood of this point and there exists a quasidifferential mapping of f defined in a neighbourhood of x and u.s.c. at this point. Thus, in the case $X = \mathbb{R}^d$, the class of continuously codifferentiable functions coincides with the class of quasidifferentiable functions with u.s.c. quasidifferential mapping. To the best of the authors knowledge, this result cannot be extended to the infinite dimensional case. However, with the use of quasidifferential calculus one can show that the set of all quasidifferentiable functions with metrically u.s.c. quasidifferential mapping is closed under addition, multiplication, the composition with differentiable functions, as well the pointwise maximum and minimum of finite families of functions.

In the case when quasidifferentials of constraints are metrically u.s.c., we can prove that q.d.-MFCQ guarantees the metric regularity of the corresponding system of equality and inequality constraints. For the sake of simplicity below we suppose that the functions F and g_i are continuous on the entire space $X \times P$, although Theorem 1.2.5 can be proved under less restrictive assumptions.

Let a real-valued function ψ be defined on a metric space (Z, ρ). Recall that the quantity
$$|\nabla \psi|(z) = \limsup_{u \to x, \psi(u) \to \psi(z)} \frac{\max\{\psi(z) - \psi(u), 0\}}{\rho(x, z)}.$$
is called *the strong slope* of ψ at z. The strong slope is used in general necessary and sufficient conditions for the metric regularity of multifunctions [20, 237, 240].

Theorem 1.2.5. *Suppose that the functions F and g_i, $i \in I$, are continuous. Let also a point $(\overline{x}, \overline{p}) \in X \times P$ be such that $\overline{x} \in \mathcal{S}(\overline{p})$, and there exist a neighbourhood U of $(\overline{x}, \overline{p})$ such that*

1. *for any $(x,p) \in U$ the mapping $F(\cdot,p)$ is scalarly quasidifferentiable at x, the functions $g_i(\cdot,p)$, $i \in I(\overline{x},\overline{p})$, are quasidifferentiable at x, and $\mathscr{D}_x g_i(\cdot)$ and $\mathscr{D}_x F(\cdot;y^*)$ are corresponding quasidifferential mappings defined on U;*

2. *the multifunctions $\mathscr{D}_x g_i(\cdot)$, $i \in I(\overline{x},\overline{p})$, are metrically u.s.c. at $(\overline{x},\overline{p})$, while the multifunction $(x,p) \mapsto [\mathscr{D}_x F(x,p;y^*)]^+$ is metrically u.s.c. at $(\overline{x},\overline{p})$ uniformly with respect to $y^* \in S_{Y^*}$, i.e. for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that $[\mathscr{D}_x F(x,p;y^*)]^+ \subseteq [\mathscr{D}_x F(\overline{x},\overline{p};y^*)]^+ B(0,\varepsilon)$ for all $y^* \in S_{Y^*}$ and $(x,p) \in B(\overline{x},\delta) \times B(\overline{p},\delta)$;*

3. *the set $D(y) = \{[\mathscr{D}_x F(\overline{x},\overline{p};y^*)]^+ \mid y^* \in S_{Y^*} \colon \langle y^*, y\rangle = \|y\|\}$ is weak* closed and convex for any $y \in S_Y$ (in particular, it is sufficient to suppose that the norm in Y is Gâteaux differentiable away from zero).*

Suppose, finally, that q.d.-MFCQ holds at $(\overline{x},\overline{p})$. Then there exist $K > 0$, a neighbourhood V of $(\overline{x},\overline{p})$, and a neighbourhood W of zero in $Y \times \mathbb{R}^m$ such that

$$\operatorname{dist}(x, \mathcal{S}(p,y,z)) \le K\Big(\|F(x,p) - y\| + \sum_{i=1}^m \max\{g_i(x,p) - z_i, 0\}\Big) \tag{1.49}$$

for all $(x,p) \in V$ and $(y,z) \in W$. Therefore, in particular, the map $\Phi_p \colon X \rightrightarrows Y \times \mathbb{R}^m$ defined as $\Phi_p(x) = \{F(x,p)\} \times \prod_{i=1}^m [g_i(x,p), +\infty)$ is metrically regular near the point $(\overline{x},(0_Y,0_m))$ with the norm of metric regularity not exceeding K for all p in a neighbourhood of $\overline{p}$.

Proof. Let $\overline{r} > 0$ be such that $B(\overline{x},\overline{r}) \times B(\overline{p},\overline{r}) \subset U$. Our aim is to prove that there exist $r \in (0,\overline{r})$ and $K > 0$ such that for any $p \in B(\overline{p},r)$ one has $|\nabla \psi_{(y,z,p)}|(x) > K^{-1}$ for all $(y,z) \in B((0_Y,0_m),r)$ and $x \in B(\overline{x},r)$ such that $(y,z) \notin \Phi_p(x)$, where $\psi_{(y,z,p)}(x) = d((y,z),\Phi_p(x))$, and the space $Y \times \mathbb{R}^m$ is equipped with the norm $\|(y,z)\| = \|y\| + \sum_{i=1}^m |z_i|$. Then applying [237, Theorem 2b] one obtains that $d(x, \Phi_p^{-1}(y,z)) \le K d((y,z),\Phi_p(x))$ for all $x \in B(\overline{x},r)$, $p \in B(\overline{p},r)$, and $(y,z) \in B((0_Y,0_m),r)$ such that $K d((y,z),\Phi_p(x)) < r - \|x - \overline{x}\|$, i.e. (1.49) holds true for all such x, p, y, and z. With the use of the continuity of the functions F and g_i and the fact that $\overline{x} \in \mathcal{S}(\overline{p})$, i.e. $(0_Y,0_m) \in \Phi_{\overline{p}}(\overline{x})$, one can find $\delta < r$ such that $K d((y,z),\Phi_p(x)) < r - \|x - \overline{x}\|$ for all $x \in B(\overline{x},\delta)$, $p \in B(\overline{p},\delta)$ and $(y,z) \in B((0_Y,0_m),\delta)$, which implies that (1.49) holds true for all such x, p, y, and z, and the proof is complete.

Before we proceed to the proof of the inequality $|\nabla \psi_{(y,z,p)}|(x) > K^{-1}$, let us first compute the directional derivative of the mapping $\|F(\cdot,p) - y\|$. Denote $\omega(y) = \|y\|$. Recall that $\partial\omega(y) = \{y^* \in S_{Y^*} \mid \|y\| = \langle y^*, y\rangle\}$ for any $y \neq 0$, where $\partial\omega(y)$ is the subdifferential of ω at y in the sense of convex analysis. Fix $(x,p) \in U$ and $y \in Y$. From the definition of scalar quasidifferentiability it follows that for any $h \in X$ one has

$$F_p(x+\alpha h) - F_p(x) = \alpha F_p'(x,h) + o(\alpha) \quad \forall \alpha \ge 0,$$

where $\|o(\alpha)\|/\alpha \to 0$ as $\alpha \to +0$ (recall that $F_p(x) = F(x,p)$). Hence

$$\begin{aligned}
&\Big| \|F_p(x+\alpha h) - y\| - \|F_p(x) - y\| - \alpha\omega'\big(F_p(x) - y, F_p'(x,h)\big) \Big| \\
&\quad = \Big| \|F_p(x) - y + \alpha F_p'(x,h) + o(\alpha)\| - \|F_p(x) - y\| - \alpha\omega'\big(F_p(x) - y, F_p'(x,h)\big) \Big| \\
&\qquad \le \Big| \|F_p(x) - y + \alpha F_p'(x,h)\| - \|F_p(x) - y\| - \alpha\omega'\big(F_p(x) - y, F_p'(x,h)\big) \Big| + \|o(\alpha)\|.
\end{aligned}$$

Dividing this inequality by α and passing to the limit as $\alpha \to +0$ one gets that the function $\|F_p(\cdot) - y\|$ is directionally differentiable at x, and for any $h \in X$ and $y \in Y$ one has

$$\begin{aligned}
\|F_p(\cdot) - y\|'(x,h) = \omega'(F_p(x) - y, F_p'(x,h)) &= \sup_{y^* \in \partial\omega(F_p(x) - y)} \langle y^*, F_p'(x,h)\rangle \\
&= \sup_{y^* \in \partial\omega(F_p(x) - y)} \Big(\max_{v^* \in \underline{\partial}_x F(x,p;y^*)} \langle v^*, h\rangle + \min_{w^* \in \overline{\partial}_x F(x,p;y^*)} \langle w^*, h\rangle \Big) \\
&\le \sup_{y^* \in \partial\omega(F_p(x) - y)} \max_{v^* \in [\mathscr{D}_x F(x,p;y^*)]^+} \langle v^*, h\rangle, \quad (1.50)
\end{aligned}$$

if $F(x,p) \ne y$, while

$$\|F_p(\cdot) - y)\|'(x,h) = \|F_p'(x,h)\| \le \sup_{y^* \in S_{Y^*}} \max_{v^* \in [\mathscr{D}_x F(x,p;y^*)]^+} \langle v^*, h\rangle, \tag{1.51}$$

in the case $F(x,p) = y$, since $\|y\| = \sup_{y^* \in S_{Y^*}} \langle y^*, y\rangle$.

Now we can utilize q.d.-MFCQ and the outer semicontinuity of the quasidifferential mappings to prove the inequality $|\nabla\psi_{(y,z,p)}|(x) > K^{-1}$. Let $\varkappa > 0$ be any number smaller than the infimum in (1.47). From assumption 3, the fact that the set $D(y)$ is convex, and the separation theorem it follows that for any $y \in S_Y$ there exists h_y with $\|h_y\| = 1$ such that $\langle v^*, h_y\rangle \le -\varkappa$ for all $v^* \in D(y)$. With the use of the second condition in q.d.-MFCQ one obtains that $\langle v^*, h_y + t\overline{h}\rangle \le -\varkappa$ for all $v^* \in D(y)$ and $t \ge 0$, where the vector $\overline{h}$ is from q.d.-MFCQ. Hence applying the fact that the mapping $(x,p) \mapsto [\mathscr{D}_x F(x,p;y^*)]^+$ is o.s.c. at $(\overline{x}, \overline{p})$ uniformly with respect to $y^* \in S_{Y^*}$, one gets that for any $t \ge 0$ there exists $r_1(t) \in (0, \overline{r})$ such that for any $y \in S_Y$ one has

$$\langle v^*, h_y + t\overline{h}\rangle \le -\frac{\varkappa}{2} \quad \forall v^* \in [\mathscr{D}_x F(x,p;y^*)]^+ \quad \forall y^* \in \partial\|\cdot\|(y) \tag{1.52}$$

for all $(x,p) \in B(\overline{x}, r_1(t)) \times B(\overline{p}, r_1(t))$. Furthermore, from the second condition in q.d.-MFCQ and assumption 2 it follows that for any $t \ge 0$ there exists $r_2(t) \in (0, \overline{r})$ such that

$$\langle v^*, t\overline{h}\rangle \le \frac{\varkappa}{4} \quad \forall v^* \in [\mathscr{D}_x F(x,p;y^*)]^+ \quad \forall y^* \in S_{y^*} \tag{1.53}$$

for all $(x,p) \in B(\overline{x}, r_2(t)) \times B(\overline{p}, r_2(t))$.

Applying the second condition in q.d.-MFCQ, and the facts that $\|h_y\| = 1$ for any $y \in S_Y$ and the sets $[\mathscr{D}_x g_i(\overline{x},\overline{p})]^+$ are obviously weak* compact (and thus bounded) one can find $t_0 > 0$ such that $\langle v^*, h_y + t_0 \overline{h} \rangle \le -\varkappa$ for all $v^* \in [\mathscr{D}_x g_i(\overline{x},\overline{p})]^+$, $i \in I(\overline{x},\overline{p})$, and $y \in S_Y$. Hence with the use of the outer semicontinuity of the mappings $\mathscr{D}_x g_i(\cdot)$ at $(\overline{x},\overline{p})$ one obtains that there exists $r_3 \in (0, \overline{r})$ such that

$$\langle v^*, h_y + t_0 \overline{h} \rangle \le -\frac{\varkappa}{2} \quad \forall v^* \in [\mathscr{D}_x g_i(x,p)]^+ \, \forall i \in I(\overline{x},\overline{p}) \, \forall y \in S_Y. \tag{1.54}$$

for all $(x,p) \in B(\overline{x}, r_3) \times B(\overline{p}, r_3)$. Finally, since g_i are continuous, there exists $r_4 \in (0, \overline{r})$ and $\varepsilon > 0$ such that $g_i(x,p) < -\varepsilon$ for any $(x,p) \in B(\overline{x}, r_4) \times B(\overline{p}, r_4)$ and $i \notin I(\overline{x},\overline{p})$.

Define $r = \min\{r_1(t_0), r_2(t_0), r_3, r_4, \varepsilon/2\}$, and fix any $(x,p) \in B(\overline{x}, r) \times B(\overline{p}, r)$ and $(y,z) \in B((0_Y, 0_m), r)$ such that $(y,z) \notin \Phi_p(x)$. Note that $g_i(x,p) - z_i < 0$ for any $i \notin I(\overline{x},\overline{p})$, since $r \le \min\{r_4, \varepsilon/2\}$, which implies that $g_i(\cdot) - z_i < 0$ in a neighbourhood of (x,p) for any such i. Hence

$$d((y,z), \Phi_q(\xi)) = \|F(\xi, q) - y\| + \sum_{i \in I(\overline{x},\overline{p})} \max\{g_i(\xi, q) - z_i, 0\}$$

for any (ξ, q) in a neighbourhood of (x,p), i.e. the indices $i \notin I(\overline{x},\overline{p})$ can be discarded from consideration. Observe also that

$$\max\{g_i(\cdot,p) - z_i, 0\}'(x,h) = \begin{cases} [g_i(\cdot,p)]'(x,h), & \text{if } g_i(x,p) > z_i, \\ \max\{[g_i(\cdot,p)]'(x,h), 0\}, & \text{if } g_i(x,p) = z_i, \\ 0, & \text{if } g_i(x,p) < z_i, \end{cases} \tag{1.55}$$

and $[g_i(\cdot,p)]'(x,h) \le \max_{v^* \in [\mathscr{D}_x g_i(x,p)]^+} \langle v^*, h \rangle$ for any $h \in X$.

If $F(x,p) \ne y$, then with the use of (1.50), (1.52), (1.54), and (1.55) one obtains that

$$\psi'_{(y,z,p)}(x, \eta) = \|F(\cdot,p) - y\|'(x,\eta) + \sum_{i \in I(\overline{x},\overline{p})} \max\{g_i(\cdot,p) - z_i, 0\}'(x,\eta) \le -\frac{\varkappa}{2}$$

where $\eta = h_w + t_0 \overline{h}$ and $w = (F(x,p) - y)/\|F(x,p) - y\|$ (here we used the obvious equality $\partial \| \cdot \| (F(x,p) - y) = \partial \| \cdot \| (w)$). Note that $\|\eta\| \le 1 + t_0 \|\overline{h}\|$, since $\|h_w\| = 1$.

On the other hand, if $F(x,p) = y$, then there exists $k \in I(\overline{x},\overline{p})$ such that $g_k(x,p) > z_k$. Consequently, applying (1.51), (1.53), (1.54), and (1.55) one gets that

$$\begin{aligned} \psi'_{(y,z,p)}(x,\eta) &= \|F(\cdot,p) - y\|'(x,\eta) + \max\{g_k(\cdot,p) - z_k, 0\}'(x,\eta) \\ &+ \sum_{i \in I(\overline{x},\overline{p}) \setminus \{k\}} \max\{g_i(\cdot,p) - z_i, 0\}'(x,\eta) \le \frac{\varkappa}{4} - \frac{\varkappa}{2} = -\frac{\varkappa}{4}, \end{aligned}$$

where $\eta = t_0\overline{h}$. Thus, for any $(x,p) \in B(\overline{x},r) \times B(\overline{p},r)$ and $(y,z) \in B((0_Y,0_m),r)$ such that $(y,z) \notin \Phi_p(x)$ one has

$$|\nabla\psi_{(y,z,p)}|(x) \geq -\psi'_{(y,z,p)}\left(x, \frac{\eta}{\|\eta\|}\right) \geq \frac{\varkappa}{4(1+t_0\|\overline{h}\|)},$$

and the proof is complete. $\square$

Remark 1.2.7. Let F be as in Proposition 1.2.7 and $X = \mathbb{R}^n$. In this case one can reformulate the sufficient conditions for the metric regularity of the mapping F from the theorem above in a different way. Namely, let the set $\underline{\partial}_x F(\overline{x},\overline{p})$ consists of all $l \times n$ matrices whose j-th row is a vector from $\underline{\partial}_x f_j(\overline{x},\overline{p})$. The set $\overline{\partial}_x F(\overline{x},\overline{p})$ is defined in a similar way. Then the pair $\mathscr{D}_x F(\overline{x},\overline{p}) = [\underline{\partial}_x F(\overline{x},\overline{p}), \overline{\partial}_x F(\overline{x},\overline{p})]$ is, in fact, a quasidifferential of the mapping $F(\cdot,\overline{p})$ at $\overline{x}$ (see [111, Appendix III]). From Theorem 1.2.5 it follows that for the mapping $F(\cdot,p)$ to be metrically regular near $(\overline{x}, F(\overline{x},p))$ with the norm of metric regularity not exceeding some $K > 0$ for all p in a neighbourhood of $\overline{p}$ it is sufficient that $\ell \leq n$, and all matrices from the set $[\mathscr{D}_x F(\overline{x},\overline{p})]^+ = \underline{\partial}_x F(\overline{x},\overline{p}) + \overline{\partial}_x F(\overline{x},\overline{p})$ have full rank. Note that a similar condition on the set $[\mathscr{D}_x F(\overline{x},\overline{p})]^+$ was introduced by Demyanov in [79] for the analysis of nonsmooth implicit functions and a nonsmooth Newton method for codifferentiable vector-valued functions.

Remark 1.2.8. It should be noted that in the case when $X = \mathbb{R}^n$ and $Y = \mathbb{R}^\ell$, Theorem 1.2.5 is, in essence, reduced to the sufficient conditions for metric regularity in terms of the Clarke subdifferential [19,43]. Indeed, if a function $f \colon X \to \mathbb{R}$ is quasidifferentiable at a point x, then, as it easy to see,

$$\min_{v^* \in [\mathscr{D}f(x)]^+} \langle v^*, h\rangle \leq f'(x,h) \leq \max_{v^* \in [\mathscr{D}f(x)]^+} \langle v^*, h\rangle \quad \forall h \in X,$$

i.e. the quasidifferential sum $[\mathscr{D}f(x)]^+$ is a *convexificator* of f at x (see [81,99,248,394]). With the use of the separation theorem and the inequalities above one can easily check that if f is Gâteaux differentiable at x, then $f'(x) \in [\mathscr{D}f(x)]^+$ regardless of the choice of quasidifferential. Consequently, if $X = \mathbb{R}^n$, f is Lipschitz continuous and quasidifferentiable near x, and a quasidifferential mapping $\mathscr{D}f$ is o.s.c. at x, then $\partial_{Cl} f(x) \subseteq [\mathscr{D}f(x)]^+$, where $\partial_{Cl} f(x)$ is the Clarke subdifferential of f at x [57].

With the use of Theorem 1.2.1 and Corollary 1.2.2 one can verify that under the assumptions of Theorem 1.2.5 the functions $F(\cdot,p)$ and $g_i(\cdot,p)$ are Lipschitz continuous near $\overline{x}$ with the same Lipschitz constant for all p in a neighbourhood of $\overline{p}$, provided F has the same form as in Proposition 1.2.7. Therefore, if $X = \mathbb{R}^n$, then $\partial_{Cl} g_i(\cdot,\overline{p})(\overline{x}) \subseteq [\mathscr{D}_x g_i(\overline{x},\overline{p})]^+$, and the same inclusion holds true for $f_j(x,p)$. Thus, if $X = \mathbb{R}^n$ and $Y = \mathbb{R}^l$, then Theorem 1.2.5 is a corollary to the sufficient conditions for metric regularity in terms of the Clarke subdifferential [19, Theorem 1.1] (see also [43]). On the other hand, if either X or Y is infinite dimensional, then Theorem 1.2.5 does not follow from the main results of [19, 43].

Let us give a simple example illustrating Theorem 1.2.5 and Remark 1.2.7.

Example 1.2.7. Let $X = Y = \mathbb{R}^2$ and $P = \mathbb{R}$. Consider the following parametric system of equality constraints

$$\begin{cases} \max\{2x^{(1)}, x^{(1)}\} - |\sin(px^{(2)})| = y^{(1)}, \\ \sin\big(p(x^{(1)} + x^{(2)})\big) + \min\{x^{(2)}, 2x^{(2)}\} = y^{(2)}. \end{cases} \tag{1.56}$$

Put $f_1(x,p) = \max\{2x^{(1)}, x^{(1)}\} - |\sin(px^{(2)})|$ and $f_2(x,p) = \sin(p(x^{(1)} + x^{(2)})) + \min\{x^{(2)}, 2x^{(2)}\}$. Let us apply Theorem 1.2.5 to find those values of p for which the mapping $x \mapsto F(x,p) = (f_1(x,p), f_2(x,p))^T$ is metrically regular near $(0_2, 0_2)$.

The functions $f_1(x,p)$ and $f_2(x,p)$ are quasidifferentiable. With the use of standard rules of quasidifferential calculus [111, Section III.2] one gets that

$$\underline{\partial}_x f_1(x,p) = \begin{cases} \{\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}, & \text{if } x^{(1)} > 0, \\ \operatorname{co}\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}, & \text{if } x^{(1)} = 0, \\ \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}, & \text{if } x^{(1)} < 0, \end{cases} \quad \overline{\partial}_x f_1(x,p) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -p\cos(px^{(2)}) \operatorname{Sign}\big(\sin(px^{(2)})\big) \end{pmatrix} \right\},$$

$$\underline{\partial}_x f_2(x,p) = \left\{ \begin{pmatrix} p\cos\big(p(x^{(1)} + x^{(2)})\big) \\ p\cos\big(p(x^{(1)} + x^{(2)})\big) \end{pmatrix} \right\}, \quad \overline{\partial}_x f_2(x,p) = \begin{cases} \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}, & \text{if } x^{(2)} > 0, \\ \operatorname{co}\{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\}, & \text{if } x^{(2)} = 0, \\ \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\}, & \text{if } x^{(2)} < 0, \end{cases}$$

where $\operatorname{Sign}(t) = \operatorname{sign}(t)$ is the sign of $t \in \mathbb{R}$, when $t \neq 0$, and $\operatorname{Sign}(0) = [-1, 1]$. One can readily verify the quasidifferential mappings $(x,p) \mapsto \mathscr{D}_x f_1(x,p)$ and $(x,p) \mapsto \mathscr{D}_x f_2(x,p)$ are upper semicontinuous.

Let us find those valued of p for which q.d.-MFCQ holds true at $(0_2, p)$. Following the idea described in Remark 1.2.7 introduce the quasidifferential $\mathscr{D}_x F(0_2, p) = [\underline{\partial}_x F(0_2, p), \overline{\partial}_x F(0_2, p)]$,

$$\underline{\partial}_x F(0_2, p) = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ p & p \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in [1, 2] \right\}, \overline{\partial}_x F(0_2, p) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & pt \\ 0 & s \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in [-1, 1], s \in [1, 2] \right\},$$

of the map $x \mapsto F(x,p)$ at the point $x = 0_2$. The first row of the set $\underline{\partial}_x F(0_2, p)$ correspond to the vectors from the subdifferential $\underline{\partial}_x f_1(0_2, p)$, while the second row corresponds to the vectors from the subdifferential $\underline{\partial}_x f_2(0_2, p)$. The set $\overline{\partial}_x F(0_2, p)$ is defined in the same way.

The quasidifferential sum of the map $x \mapsto F(x,p)$ at the point $x = 0_2$ has the from

$$[\mathscr{D}_x F(0_2, p)]^+ = \left\{ \begin{pmatrix} t & ps \\ p & p + r \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in [1, 2],\ s \in [-1, 1],\ r \in [1, 2] \right\}.$$

Let us find those values of $p \in \mathbb{R}$ for which all matrices from the set $[\mathscr{D}_x F(0_2, p)]^+$ are nondegenerate. One can easily check that the determinants of the matrices from this set take the values from the set $\operatorname{co}\{1, 4\} + \operatorname{co}\{p, 2p\} + \operatorname{co}\{-p^2, p^2\}$. Hence taking into account the fact that the determinant of the matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -p \\ p & p+1 \end{smallmatrix}\right) \in [\mathscr{D}_x F(0_2, p)]^+$ is equal to $p^2 + p + 1$ and positive for all p one gets that $\det A \neq 0$ for all $A \in [\mathscr{D}_x F(0_2, p)]^+$ if and only if the following inequalities holds true:

$$p^2 + 2p + 1 > 0, \quad -p^2 + p + 1 > 0, \quad -p^2 + 2p + 1 > 0.$$

Resolving this system of inequalities one gets that q.d.-MFCQ is satisfied at $(0_2, p)$ if and only if $p \in (1 - \sqrt{2}, (1 + \sqrt{5})/2)$. Consequently, by Theorem 1.2.5 one can conclude that for all $\overline{p} \in (1 - \sqrt{2}, (1 + \sqrt{5})/2)$ there exist $K > 0$ and $r > 0$ such that $\operatorname{dist}(x, (F_p)^{-1}(y)) \leq K\|y - F(x, p)\|$ for all $x, y \in B(0_2, r)$ and $p \in (\overline{p} - r, \overline{p} + r)$. Hence, in particular, for any such y and p there exists a solution $x(y, p)$ of the system (1.56).

A more detailed analysis of the metric regularity of quasidifferential mappings, including necessary and sufficient conditions for metric regularity in terms of quasidifferentials was presented in the author's paper [150].

1.2.5 A Description of Tangent Cones to Quasidifferentiable Sets

Sufficient conditions for the metric regularity of a parametric system of quasidifferentiable equality and inequality constraints from Theorem 1.2.5 are quire restrictive. For example, the function $F(x^{(1)}, x^{(2)}) = |x^{(1)}| - |x^{(2)}|$ is metrically regular near zero; however, with the use of the quasidifferential calculus [111], one gets that $\mathscr{D}F(0_2) = [\operatorname{co}\{(\pm 1, 0)^T\}, \operatorname{co}\{(0, \pm 1)^T\}]$, and therefore $0_2 \in [\mathscr{D}F(0_2)]^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x^{(1)}|, |x^{(2)}|\} \leq 1\}$, that is, q.d.-MFCQ is not satisfied at zero. Thus, the metric regularity of F cannot be verified with the use of Theorem 1.2.5.

In many applications, instead of metric regularity it is sufficient to know only a simple description of a tangent cone to the solution set of a given system of equality and inequality constraints. In this section, we give a detailed description of convex subcones of the contingent cone to the set defined by quasidifferentiable equality and inequality constraints, based on the results of S. Di [118,119]. In the papers of Di standard formulas for the tangent cone to the feasible region of mathematical programming problem were obtained without the traditional assumption on the continuity of the derivatives of constraints.

Let, as in the previous section, X be a real Banach space. Recall that the *contingent* cone (the Bouligand tangent cone) to a nonempty set $M \subset X$ at a point $x \in M$ is the set $T_M(x) \subset X$ consisting of all those vectors $v \in X$ for which $\liminf_{\alpha \to +0} \operatorname{dist}(x + \alpha v, M)/\alpha = 0$. In other words,

$v \in T_M(x)$ if and only if there exist sequences $\{\alpha_n\} \subset (0, +\infty)$ and $\{v_n\} \subset X$ such that $\alpha_n \to +0$ and $v_n \to v$ as $n \to \infty$, and $x + \alpha_n v_n \in M$ for all $n \in \mathbb{N}$. Note that the contingent cone $T_M(x)$ is a cone (i.e. for all $\lambda \geq 0$ and $v \in T_M(x)$ one has $\lambda v \in T_M(x)$), but in the general case $T_M(x)$ is not a convex cone, if the set M is nonconvex.

Our aim is to give a simple description of the cone $T_M(x)$ and/or its convex subcones in the case when

$$M = \Big\{ x \in X \Bigm| f_j(x) = 0, \quad j \in J, \quad g_i(x) \leq 0, \quad i \in I \Big\},$$

where functions $f_j \colon X \to \mathbb{R}$ and $g_i \colon X \to \mathbb{R}$ are quasidifferentiable (here $J = \{1, \ldots, \ell\}$ and $I = \{1, \ldots, m\}$). To this end, we will use the following auxiliary result, which can be easily derived from the Borsuk-Krasnoselskii antipodal theorem (see, e.g., [420, Corollary 16.7]).

Lemma 1.2.9 (generalized intermediate value theorem)**.** *Let $r^j \colon [-1, 1]^\ell \to \mathbb{R}$, $j \in J = \{1, \ldots, \ell\}$ be continuous functions such that for any $j \in J$ and for all $\tau^{(k)} \in [-1, 1]$, $k \neq j$, one has*

$$r^j(\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(j-1)}, -1, \tau^{(j+1)}, \ldots, \tau^{(\ell)}) < 0, \quad r^j(\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(j-1)}, 1, \tau^{(j+1)}, \ldots, \tau^{(\ell)}) > 0. \qquad (1.57)$$

Then there exists $\widehat{\tau} \in (-1, 1)^\ell$ such that $r^j(\widehat{\tau}) = 0$ for all $j \in J$.

Fo any set $C \subset X^*$ and vector $v \in X$ denote by $s(C, v) = \sup_{x^* \in C} \langle x^*, v \rangle$ *the support function* of the set C. Define $I(x) = \{i \in I \mid g_i(x) = 0\}$ for any $x \in X$.

Below we will need the following auxiliary definition. A function $f \colon X \to \mathbb{R}$ is called directionally differentiable (d.d.) at a point $x \in X$ *uniformly along finite dimensional spaces*, if f is directionally differentiable at this point and for all $v \in X$ and for any finite dimensional subspace $X_0 \subset X$ the following equality holds true

$$f'(x, v) = \lim_{[\alpha, v'] \to [+0, v], v' \in v + X_0} \frac{f(x + \alpha v') - f(x)}{\alpha},$$

i.e. for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that for all $\alpha > 0$ and $v' \in v + X_0$ with $\alpha < \delta$ and $\|v' - v\| < \delta$ one has $|(f(x + \alpha v') - f(x))/\alpha - f'(x, v)| < \varepsilon$. It is easily seen that if f is Hadamard directionally differentiable at x or directionally differentiable at x and Lipschitz continuous near this point, then f is directionally differentiable at x uniformly along finite dimensional spaces. One says that f is quasidifferentiable at x *uniformly along finite dimensional spaces*, if f is quasidifferentiable and directionally differentiable uniformly along finite dimensional spaces at this point.

The following theorem describes how one can compute a convex subcone of $T_M(x)$, if a certain constraint qualification is satisfied for *some* elements of quasidifferentials of the functions f_j and g_i.

Theorem 1.2.6. *Let the functions f_j, $j \in J$, be continuous in a neighbourhood of $\overline{x} \in M$, the functions g_i, $i \notin I(\overline{x})$, be u.s.c. at this point, and the functions f_j, $j \in J$, and g_i, $i \in I(\overline{x})$, be quasidifferentiable at $\overline{x}$ uniformly along finite dimensional spaces. Suppose also that for some vectors $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, and $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$, the following constraint qualification holds true:*

1. *for all $j \in J$ there exists $v_j \in X$ such that $s(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, v_j) < 0$, $s(\underline{\partial} f_k(\overline{x}) + y_k^*, v_j) \le 0$ and $s(-x_k^* - \overline{\partial} f_k(\overline{x}), v_j) \le 0$ for $k \ne j$;*

2. *for all $j \in J$ there exists $w_j \in X$ such that $s(-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}), w_j) < 0$ and for all $k \ne j$ one has $s(-x_k^* - \overline{\partial} f_k(\overline{x}), w_j) \le 0$ and $s(\underline{\partial} f_k(\overline{x}) + y_k^*, w_j) \le 0$;*

3. *there exists $v_0 \in X$ such that $s(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, v_0) < 0$ for all $i \in I(\overline{x})$, and $s(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, v_0) \le 0$ and $s(-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}), v_0) \le 0$ for all $j \in J$.*

Then

$$\Big\{ v \in X \;\Big|\; s\big(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, v\big) \le 0, \quad s\big(-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}), v\big) \le 0 \quad \forall j \in J, \\ s\big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, v\big) \le 0 \quad \forall i \in I(\overline{x}) \Big\} \subseteq T_M(\overline{x}). \tag{1.58}$$

Proof. For all $\tau = (\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(\ell)}) \in [-1,1]^\ell$ define

$$\eta(\tau) = \sum_{j=1}^{\ell} \Big(\max\{-\tau^{(j)}, 0\} v_j + \max\{\tau^{(j)}, 0\} w_j \Big).$$

Denote $p_j(\cdot) = s(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, \cdot)$ and $q_j(\cdot) = s(-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}), \cdot)$, $j \in J$. Note that by the definition of quasidifferential for all $v \in X$ one has $-q_j(v) \le f_j'(\overline{x}, v) \le p_j(v)$.

Let $v \in X$ belong to the set on the left-hand side of (1.58). Taking into account assumptions 1–3 and the fact that the functions p_i are sublinear one obtains that for any $j \in J$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$, and $\tau \in [-1,1]^\ell$ the following inequalities hold true:

$$f_j'\Big(\overline{x}, v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(j-1)}, -1, \tau^{(j+1)}, \ldots, \tau^{(\ell)})\Big) \le \\ \le p_j\Big(v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(j-1)}, -1, \tau^{(j+1)}, \ldots, \tau^{(\ell)})\Big) \le p_j(v) + \gamma p_j(v_0) + \\ + \frac{1}{n} p_j(v_j) + \frac{1}{n} \sum_{k \ne j} \big(\max\{-\tau^{(k)}, 0\} p_j(v_k) + \max\{\tau^{(k)}, 0\} p_j(w_k) \big) \le \frac{1}{n} p_j(v_j) < 0. \tag{1.59}$$

Similarly, for all $j \in J$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$, and $\tau \in [-1,1]^\ell$ one has

$$f_j'\Big(\overline{x}, v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(j-1)}, 1, \tau^{(j+1)}, \ldots, \tau^{(\ell)})\Big) \ge \\ \ge -q_j\Big(\overline{x}, v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(j-1)}, 1, \tau^{(j+1)}, \ldots, \tau^{(\ell)})\Big) \ge -\frac{1}{n} q_j(w_j) > 0. \tag{1.60}$$

Let us check that inequalities (1.59) and (1.60) imply that for all $n \in \mathbb{N}$ and $\gamma > 0$ there exists $\alpha_n(\gamma) > 0$ such that for all $0 < \alpha < \alpha_n(\gamma)$, $j \in J$ and $\tau \in [-1, 1]^\ell$ the following inequalities hold true:

$$f_j\left(\overline{x} + \alpha\Big(v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(j-1)}, -1, \tau^{(j+1)}, \ldots, \tau^{(\ell)})\Big)\right) < 0, \tag{1.61}$$

$$f_j\left(\overline{x} + \alpha\Big(v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(j-1)}, 1, \tau^{(j+1)}, \ldots, \tau^{(\ell)})\Big)\right) > 0. \tag{1.62}$$

Indeed, fix any $j \in J$, $\gamma > 0$, and $n \in \mathbb{N}$. Arguing by reductio ad absurdum, suppose that for any $\alpha_n(\gamma) > 0$ there exist $\alpha \in (0, \alpha_n(\gamma))$ and $\tau \in [-1, 1]^\ell$ such that, say, (1.61) is not valid. Then there exist a sequence $\{\alpha_k\} \subset (0, +\infty)$ converging to zero and a sequence $\{\tau_k\} \subset [-1, 1]^\ell$ such that

$$f_j\left(\overline{x} + \alpha_k\Big(v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau_k^{(1)}, \ldots, \tau_k^{(j-1)}, -1, \tau_k^{(j+1)}, \ldots, \tau_k^{(\ell)})\Big)\right) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Without loss of generality one can suppose that $\{\tau_k\}$ converges to some $\widehat{\tau} \in [-1, 1]^\ell$. Therefore, utilizing the facts that f_j is d.d. at $\overline{x}$ uniformly along finite dimensional spaces, the function $\eta(\cdot)$ is continuous and takes values in the finite dimensional space $X_0 = \operatorname{span}\{v_j, w_j \mid j \in J\}$, and $f_J(\overline{x}) = 0$ one obtains that

$$\begin{aligned} f_j'\left(\overline{x}, v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\widehat{\tau}^{(1)}, \ldots, \widehat{\tau}^{(j-1)}, -1, \widehat{\tau}^{(j+1)}, \ldots, \widehat{\tau}^{(\ell)})\right) = \\ = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\alpha_k} f_j\left(\overline{x} + \alpha_k\Big(v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau_k^{(1)}, \ldots, \tau_k^{(j-1)}, -1, \tau_k^{(j+1)}, \ldots, \tau_k^{(\ell)})\Big)\right) \geq 0, \end{aligned}$$

which contradicts (1.59).

For all $i \in I(\overline{x})$ denote $u_i(\cdot) = s(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, \cdot)$. By definition u_i are continuous sublinear functions (recall that $\underline{\partial} g_i(\overline{x})$ is a convex weak* compact set). Therefore for all $i \in I(\overline{x})$, $\gamma > 0$, $n \in \mathbb{N}$ and $\tau \in [-1, 1]^\ell$ one has

$$\begin{aligned} g_i'\Big(\overline{x}, v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau)\Big) \leq u_i\Big(v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau)\Big) \leq \\ \leq u_i(v) + \gamma u_i(v_0) + \frac{1}{n} u_i(\eta(\tau)) \leq \gamma u_i(v_0) + \frac{1}{n} \max_{s \in [-1,1]^\ell} u_i(\eta(s)) \end{aligned}$$

(here we used the fact that $u_i(v) \leq 0$, since v belongs to the set on the left-hand side of (1.58)). By assumption 3 one has $u_i(v_0) < 0$. Consequently, for any $\gamma > 0$ one can find $n_\gamma \in \mathbb{N}$ such that for all $i \in I(\overline{x})$ and $n \geq n_\gamma$ one has

$$g_i'\left(\overline{x}, v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau)\right) \leq \frac{\gamma}{2} u_j(v_0) < 0 \quad \forall \tau \in [-1, 1]^\ell.$$

Hence arguing in the same way as in the proof of inequlities (1.61) and (1.62) one can show that for all $\gamma > 0$ and $n \geq n_\gamma$ there exists $\beta_n(\gamma) > 0$ such that

$$g_i\left(\overline{x} + \alpha\Big(v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau)\Big)\right) < 0 \tag{1.63}$$

for all $i \in I(\overline{x})$, $\tau \in [-1,1]^{\ell}$ and $0 < \alpha < \beta_n(\gamma)$.

By our assumptions the functions f_j are continuous in a neighbourhood U of $\overline{x}$. By virtue of the fact that the set $\{\eta(\tau) \in X \mid \tau \in [-1,1]^{\ell}\}$ is compact, for any $n \in \mathbb{N}$ and $\gamma > 0$ one can find $\delta_n(\gamma) > 0$ such that

$$\left\{ \overline{x} + \alpha\Big(v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau)\Big) \in X \;\Big|\; \alpha \in [0, \delta_n(\gamma)],\ \tau \in [-1,1]^{\ell} \right\} \subset U. \tag{1.64}$$

Furthermore, choosing $\delta_n(\gamma)$ small enough one can suppose that $g_i(x) < 0$ for any $i \notin I(\overline{x})$ and x from the set on the left-hand side of (1.64), since $g_i(\overline{x}) < 0$ for any such i and these functions are u.s.c. at $\overline{x}$.

Fix $\gamma > 0$, and for any $n \geq n_\gamma$ choose $0 < \alpha_n < \min\{\alpha_n(\gamma), \beta_n(\gamma), \delta_n(\gamma)\}$ such that $\alpha_n \to 0$ as $n \to \infty$. For any $j \in J$ and $n \geq n_\gamma$ define

$$r_n^j(\tau) = f_j\left(\overline{x} + \alpha_n\Big(v + \gamma v_0 + \frac{1}{n}\eta(\tau)\Big)\right) \quad \forall \tau \in [-1,1]^{\ell}.$$

From (1.64) and the definition of U it follows that the functions $r_n^j(\cdot)$, $j \in J$, are continuous. Furthermore, inequalities (1.61) and (1.62) imply that the functions $r_n^j(\cdot)$, $j \in J$, satisfy inequalities (1.57) from the generalized intermediate value theorem. Therefore, by this theorem for any $n \geq n_\gamma$ there exists $\widehat{\tau}_n \in (-1,1)^{\ell}$ such that $r_n^j(\widehat{\tau}_n) = 0$ for all $j \in J$, i.e. $f_j(\overline{x} + \alpha_n v_n) = 0$ for any $j \in J$, where $v_n = v + \gamma v_0 + \eta(\widehat{\tau}_n)/n$. Moreover, by (1.63) and the choice of $\delta_n(\gamma)$ one has $g_j(\overline{x} + \alpha_n v_n) < 0$ for all $i \in I$. Thus, $\overline{x} + \alpha_n v_n \in M$ for any $n \geq n_\gamma$. Hence with the use of the fact that $v_n \to v + \gamma v_0$ as $n \to \infty$ one obtains that $v + \gamma v_0 \in T_M(\overline{x})$ for any $\gamma > 0$, which implies that $v \in T_M(\overline{x})$, since the contingent cone is always closed. Thus, inclusion (1.58) holds true. $\square$

Observe that the set on the left-hand side of (1.58) is a nontrivial closed convex cone (v_0 belongs to this cone). Thus, the theorem above provides one with a way to compute convex subcones of the contingent cone $T_M(\overline{x})$ with the use of those vectors from quasidifferentials of the functions f_j and g_i that satisfy assumptions 1–3. Let us give a simple geometric description of these assumptions, which sheds some light on the way they are connected with well-known constraint qualifications.

Denote by cl^* the closure in the weak* topology and by

$$\operatorname{cone} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;\Big|\; x_i \in A,\ \ \lambda_i \geq 0,\ \ i \in 1\colon n,\ \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

the convex conic hull of a set $A \subset X$, that is, the smallest convex cone containing the set A.

Proposition 1.2.8. *Let the functions f_j, $j \in J$, and g_i, $i \in I(\overline{x})$, be quasidifferentiable at a point $\overline{x} \in M$ and vectors $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, and $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$ be given. Then* *assumptions 1–3 of Theorem 1.2.6 are satisfied if and only if*

$$C_j \cap \mathrm{cl}^* \operatorname{cone}\big\{ -C_k \bigm| k \neq j\big\} = \emptyset \quad \forall j \in J, \tag{1.65}$$

$$\operatorname{co}\big\{\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \bigm| i \in I(\overline{x})\big\} \cap \mathrm{cl}^* \operatorname{cone}\big\{ -C_j \bigm| j \in J\big\} = \emptyset, \tag{1.66}$$

where $C_j = (\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*) \cup (-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}))$, $i \in I$.

Proof. Let assumption 3 from Theorem 1.2.6 be valid. Then, as is easy to see, $\langle x^*, v_0\rangle < 0$ for any $x^* \in \operatorname{co}\{\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \mid i \in I(\overline{x})\}$, while $\langle x^*, v_0\rangle \geq 0$ for any $x^* \in \mathrm{cl}^* \operatorname{cone}\{-C_j \mid j \in J\}$. Hence (1.66) holds true. Conversely, if (1.66) holds true, then applying the separation theorem in the space X^* endowed with weak* topology one can find v_0 satisfying assumption 3. Thus, this assumption is equivalent to (1.66).

Let now assumption 1 of Theorem 1.2.6 be satisfied. Then $\langle x^*, v_j\rangle < 0$ for any $x_* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*$, while $\langle x^*, v_j\rangle \geq 0$ for any $x^* \in \mathrm{cl}^* \operatorname{cone}\{-C_k \mid k \neq j\}$, which implies that the sets $\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*$ and $\mathrm{cl}^* \operatorname{cone}\{-C_k \mid k \neq j\}$ do not intersect. Conversely, if these sets do not intersect, then applying the separation theorem in the space X^* endowed with weak* topology one can find v_j satisfying assumption 1.

Arguing in the same way one can check that assumption 2 of Theorem 1.2.6 is satisfied if and only if the sets $-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x})$ and $\mathrm{cl}^* \operatorname{cone}\{-C_k \mid k \neq j\}$ do not have common points. Thus, assumptions 1 and 2 are equivalent to (1.65). $\square$

Recall that subsets $A_1, \ldots, A_s$ of a real vector space E are said to be *linearly independent*, if the inclusion $0 \in \lambda_1 A_1 + \ldots \lambda_s A_s$ is valid if and only if $\lambda_1 = \ldots = \lambda_s = 0$. We say that these sets are *strongly linearly independent*, if $A_i \cap \operatorname{span}\{A_k \mid k \neq i\} = \emptyset$ for all $i \in \{1, \ldots, s\}$. Clearly, if the sets A_i are strongly linearly independent, they are linearly independent; however the converse implication does not hold true in the general case (take $E = \mathbb{R}^2$, $A_1 = \operatorname{co}\{(\pm 1, 1)^T\}$, and $A_2 = \{(1, 0)^T\}$). In the case $s = 1$, (strong) linear independence is reduced to the assumption that $0 \notin A_1$.

One says that the strong q.d.-MFCQ holds true at a point $\overline{x} \in M$, if the sets $[\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+$ are *strongly* linearly independent and there exists $\overline{h} \in X$ such that $\langle v^*, \overline{h}\rangle = 0$ for all $v^* \in [\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+$ and $j \in J$ and $\langle v^*, \overline{h}\rangle < 0$ for all $v^* \in [\mathscr{D} g_i(\overline{x})]^+$ and $i \in I(\overline{x})$.

Proposition 1.2.9. *Let the functions f_j, $j \in J$, and g_i, $i \in I(\overline{x})$, be quasidifferentiable at a point $\overline{x} \in M$. Then for assumptions 1–3 of Theorem 1.2.6 to be satisfied for all $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, and $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$ it is sufficient that*

$$[\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+ \cap \mathrm{cl}^* \operatorname{span}\big\{[\mathscr{D} f_k(\overline{x})]^+ \bigm| k \neq j\big\} = \emptyset \quad \forall j \in J, \tag{1.67}$$

$$\operatorname{co}\big\{[\mathscr{D} g_i(\overline{x})]^+ \bigm| i \in I(\overline{x})\big\} \cap \mathrm{cl}^* \operatorname{span}\big\{[\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+ \bigm| j \in J\big\} = \emptyset. \tag{1.68}$$

Moreover, these conditions become necessary, if the linear spans in (1.68) *and* (1.67) *are weak* closed (in particular, if X is finite dimensional). Finally, if the linear span in* (1.67) *is weak* closed for all $j \in J$, then conditions* (1.68) *and* (1.67) *are satisfied if and only if the strong q.d.-MFCQ holds true at $\overline{x}$.*

Proof. Let conditions (1.68) and (1.67) be satisfied. Fix any $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, and $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$, and denote $C_j = (\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*) \cup (-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}))$. From the definition of quasidifferential sum it follows that

$$\operatorname{cone}\big\{ - C_j \bigm| j \in J_0 \big\} \subseteq \operatorname{span}\big\{ [\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+ \bigm| j \in J_0 \big\},$$
$$\operatorname{co}\big\{ \underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \bigm| i \in I(\overline{x}) \big\} \subseteq \operatorname{co}\big\{ [\mathscr{D} g_i(\overline{x})]^+ \bigm| i \in I(\overline{x}) \big\}$$

for any $J_0 \subseteq J$. Therefore, (1.67) implies (1.65), while (1.68) implies (1.66). Hence applying Proposition 1.2.8 one obtains that assumptions 1–3 of Theorem 1.2.6 are satisfied for all $x_i^* \in \underline{\partial} f_i(\overline{x})$, $y_i^* \in \overline{\partial} f_i(\overline{x})$, $i \in I$, and $z_j^* \in \overline{\partial} g_j(\overline{x})$, $j \in J(\overline{x})$.

Suppose now that the spans in (1.68) and (1.67) are weak* closed, and assumptions 1–3 of Theorem 1.2.6 are satisfied for all $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, and $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$. Arguing by reductio ad absurdum, suppose that either (1.68) or (1.67) does not hold true. Suppose at first that (1.68) is not valid. Applying the definitions of linear span and convex conic hull one can verify that

$$\operatorname{span}\big\{ [\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+ \bigm| j \in J \big\} = \sum_{j \in J} \operatorname{cone}[\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+ + \sum_{j \in J} \operatorname{cone}\Big\{ - [\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+ \Big\}.$$

Hence taking into account the fact that condition (1.68) is not valid one obtains that for all $i \in I(\overline{x})$ there exist $h_i^* \in \underline{\partial} g_i(\overline{x})$, $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$ and $\alpha_i \ge 0$, while for all $j \in J$ there exist $x_j^*, \widehat{x}_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^*, \widehat{y}_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$ and $\lambda_j, \mu_j \ge 0$ such that

$$\sum_{i \in I(\overline{x})} \alpha_i (h_i^* + z_i^*) = \sum_{j \in J} \lambda_j (x_j^* + \widehat{y}_j^*) - \sum_{j \in J} \mu_j (\widehat{x}_j^* + y_j^*)$$

and $\sum_{i \in I(\overline{x})} \alpha_i = 1$. Therefore

$$\operatorname{co}\big\{ \underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \bigm| i \in I(\overline{x}) \big\} \cap \operatorname{cone}\big\{ x_j^* + \overline{\partial} f_j(\overline{x}),\ -\underline{\partial} f_j(\overline{x}) - y_j^* \bigm| j \in J \big\} \ne \emptyset,$$

which by Proposition 1.2.8 contradicts assumption 3 of Theorem 1.2.6. Arguing in a similar way one can check that if (1.67) is not valid, then there exists $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$ for which (1.65) does not holds true, which is, once again, impossible by Proposition 1.2.8..

It remains to note that if the span in (1.67) is weak* closed for all $j \in J$, then by definition (1.67) means that the sets $[\mathscr{D} f_j(\overline{x})]^+$, $j \in J$, are strongly linearly independent. In turn, (1.68) implies the validity of the second condition of q.d.-MFCQ (the existence of $\overline{h}$) by the separation theorem, while the validity of the converse implication follows directly from definitions. $\square$

Let us give several simple corollaries to Theorem 1.2.6. At first, note that this theorem obviously remains valid if there are no equality or there are no inequality constraints. Furthermore, an analysis of the proof of Theorem 1.2.6 indicates that when there are no equality constraints the assumption that g_i are d.d. uniformly along finite dimensional spaces is unnecessary (in this case one defines $\eta(\cdot) \equiv 0$).

Corollary 1.2.7. *Let the functions f_j, $j \in J$, be continuous in a neighbourhood of a point $\overline{x} \in M$ and quasidifferentiable at this point uniformly along finite dimensional spaces, and let $I = \emptyset$. Let also $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$ and $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, be such that (1.65) holds true (in particular, if $\ell = 1$, then it is sufficient to suppose that $0 \notin \partial f_1(\overline{x}) + y_1^*$ and $0 \notin x_1^* + \overline{\partial} f_1(\overline{x})$). Then*

$$\Big\{ v \in X \;\Big|\; s\big(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, v\big) \le 0,\ s\big(-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}), v\big) \le 0,\ j \in J \Big\} \subseteq T_M(\overline{x}).$$

Corollary 1.2.8. *Let $J = \emptyset$ and $\overline{x} \in M$ be a given point. Suppose that the functions g_i, $i \in I(\overline{x})$, are quasidifferentiable at $\overline{x}$, while the functions g_i, $i \notin I(\overline{x})$, are u.s.c. at this point. Let vectors $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$, satisfy the condition $0 \notin \operatorname{co}\{\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \mid i \in I(\overline{x})\}$. Then one has $\Big\{ v \in X \;\Big|\; s\big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, v\big) \le 0,\ i \in I(\overline{x}) \Big\} \subseteq T_M(\overline{x})$.*

Let us give a simple example illustrating 1.2.6.

Example 1.2.8. Let $X = \mathbb{R}^2$, $\overline{x} = 0$ and

$$M = \Big\{ x = (x^{(1)}, x^{(2)})^T \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; f(x) = |x^{(1)}| - |x^{(2)}| = 0 \Big\}.$$

As was pointed out at the beginning of this section, a quasidifferential of f at $\overline{x} = 0$ has the form $\mathscr{D}F(0) = [\operatorname{co}\{(\pm 1, 0)^T\}, \operatorname{co}\{(0, \pm 1)^T\}]$ and $0 \in [\mathscr{D}f(0)]^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x^{(1)}|, |x^{(2)}|\} \le 1\}$, i.e. MFCQ it terms of quasidifferential does not hold true $\overline{x}$. Nevertheless, Theorem 1.2.6 allows one to compute the entire contingent cone $T_M(0)$. Indeed, denote $x_{\pm}^* = (\pm 1, 0)^T$ and $y_{\pm}^* = (0, \pm 1)^T$. Clearly, $0 \notin \underline{\partial} f(0) + y_{\pm}^*$ and $0 \notin \overline{\partial} f(0) + x_{\pm}^*$. Therefore by Corollary 1.2.7 one has $K_i \subset T_M(0)$,

$i \in 1\colon 4$, where

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \Big\{v \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; s(\underline{\partial} f(0) + y_+^*, v) \le 0,\ s(-x_+^* - \overline{\partial} f(0), v) \le 0\Big\} = \\
&= \big\{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v^{(1)}| + v^{(2)} \le 0,\ -v^{(1)} + |v^{(2)}| \le 0\big\} = \big\{(t, -t)^T \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; t \ge 0\big\}, \\
K_2 &= \Big\{v \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; s(\underline{\partial} f(0) + y_+^*, v) \le 0,\ s(-x_-^* - \overline{\partial} f(0), v) \le 0\Big\} = \\
&= \big\{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v^{(1)}| + v^{(2)} \le 0,\ v^{(1)} + |v^{(2)}| \le 0\big\} = \big\{(-t, -t)^T \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; t \ge 0\big\}, \\
K_3 &= \Big\{v \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; s(\underline{\partial} f(0) + y_-^*, v) \le 0,\ s(-x_+^* - \overline{\partial} f(0), v) \le 0\Big\} = \\
&= \big\{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v^{(1)}| - v^{(2)} \le 0,\ -v^{(1)} + |v^{(2)}| \le 0\big\} = \big\{(t, t)^T \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; t \ge 0\big\}, \\
K_4 &= \Big\{v \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; s(\underline{\partial} f(0) + y_-^*, v) \le 0,\ s(-x_-^* - \overline{\partial} f(0), v) \le 0\Big\} = \\
&= \big\{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v^{(1)}| - v^{(2)} \le 0,\ v^{(1)} + |v^{(2)}| \le 0\big\} = \big\{(-t, t)^T \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; t \ge 0\big\}.
\end{aligned}
$$

Note that $T_M(0) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v^{(1)}| - |v^{(2)}| = 0\} = \bigcup_{i=1}^{4} K_i$.

1.2.6 Necessary Optimality Conditions for Nonsmooth Mathematical Programming Problems

Let us utilise the results of the two previous sections to obtain optimality conditions for nonsmooth nonlinear programming problems in terms of quasidifferentials. Consider the following optimization problem:

$$
f_0(x) \to \min, \quad f_j(x) = 0, \quad j \in J, \quad g_i(x) \le 0, \quad i \in I, \tag{1.69}
$$

where $f_0, f_j, g_i \colon X \to \mathbb{R}$ are given function, $J = \{1, \ldots, \ell\}$ and $I = \{1, \ldots, m\}$. Recall that $I(x) = \{i \in I \mid g_i(x) = 0\}$.

We will first applying sufficient conditions for metric regularity from Theorem 1.2.5 to obtain stronger optimality conditions for problem (1.69). Then we will use the explicit description of convex subcones of the contingent cone to the feasible region of problem (1.69) from Theorem 1.2.6 to obtain slightly weak optimality conditions under much less restrictive assumptions.

Introduce the function $\varphi(\cdot) = \sum_{j=1}^{\ell} |f_j(\cdot)| + \sum_{i=1}^{m} \max\{g_i(\cdot), 0\}$ and denote the ℓ_1-penalty function for problem (1.69) by $\Psi_c(\cdot) = f_0(\cdot) + c\varphi(\cdot)$, $c \ge 0$. Note that if the functions f_0, f_j and g_i are quasidifferentiable, then the penalty function Ψ_c is quasidifferentiable as well, since the set of quasidifferentiable functions is a vector lattice (see [111]).

Let Ω be the feasible region of the problem (1.69), and $\overline{x}$ be a locally optimal solution of this problem. Observe that $x \in \Omega$ if and only if $\varphi(x) = 0$. Recall also that if f_0 is Lipschitz continuous near $\overline{x}$, and the penalty term φ has a *local error bound* at $\overline{x}$, i.e. there exists $\tau > 0$ such that

$\varphi(x) \geq \tau d(x, \Omega)$ for any x in a neighbourhood of $\overline{x}$, then the penalty function Ψ_c is *locally exact* at $\overline{x}$, i.e. there exist a neighbourhood U of $\overline{x}$ and $c^* \geq 0$ such that $\Psi_c(x) \geq \Psi_c(\overline{x})$ for all $x \in U$ and $c \geq c_*$ (see Theorem 4.1.5).

If Ψ_c is locally exact at $\overline{x}$, then by definition $\overline{x}$ is a point of unconstrained local minimum of Ψ_c for any sufficiently large $c \geq 0$. In this case one can apply standard necessary conditions for a minimum in terms of quasidifferentials to Ψ_c to obtain necessary optimality conditions for the problem (1.69).

Theorem 1.2.7. *Let $\overline{x}$ be a locally optimal solution of problem* (1.69)*, f_0 be Lipschitz continuous in a neighbourhood of $\overline{x}$, while functions f_j, $j \in J$, and g_i, $i \in I$, be continuous. Suppose also that the functions f_0 and g_i, $i \notin I(\overline{x})$, are quasidifferentiable at $\overline{x}$, the functions f_j, $j \in J$, and g_i, $i \in I(\overline{x})$, are quasidifferentiable in a neighbourhood of this point and there exist quasidifferentiable mappings $\mathscr{D} f_j(\cdot)$, $j \in J$, and $\mathscr{D} g_i(\cdot)$, $i \in I(\overline{x})$ defined in a neighbourhood of $\overline{x}$ and metrically u.s.c. at this point. Suppose finally that q.d.-MFCQ holds at $\overline{x}$. Then there exists $c_* \geq 0$ such that for all $c \geq c_*$ one has*

$$0 \in \underline{\partial} \Psi_c(\overline{x}) + y^* \quad \forall y^* \in \overline{\partial} \Psi_c(\overline{x}), \tag{1.70}$$

where $\mathscr{D} \Psi_c(\overline{x}) = [\underline{\partial} \Psi_c(\overline{x}), \overline{\partial} \Psi_c(\overline{x})]$ is any quasidifferential of Ψ_c at $\overline{x}$. Moreover, for all $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$, $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, and $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I$, there exist $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j, \lambda_i \geq 0$ such that $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$ for all $i \in I$ one has

$$0 \in \underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^* + \sum_{j=1}^{\ell} \underline{\mu}_j \Big(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^* \Big) - \sum_{j=1}^{\ell} \overline{\mu}_j \Big(x_j^* + \overline{\partial} f_j(\overline{x}) \Big) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \Big). \tag{1.71}$$

In addition, one can choose $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j$ and λ_i in such a way that for all $i \in I$ and $j \in J$ one has $\max\{\underline{\mu}_j + \overline{\mu}_j, \lambda_i\} \leq c_*$*, that is, multipliers $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j$ and λ_i are bounded for all $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$, $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, and $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I$.*

Proof. Let us show at first that q.d.-MFCQ guarantees that φ has a local error bound. Suppose that $\mathbb{R}^\ell$ is endowed with the Euclidean norm. If q.d.-MFCQ holds at $\overline{x}$, then by Theorem 1.2.5 the multifunction $H \colon X \to \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$, $H(x) = \prod_{j=1}^{\ell} \{f_j(x)\} \times \prod_{i=1}^{m} [g_i(x), +\infty)$ is metrically regular near the point $(\overline{x}, (\mathbf{0}_l, \mathbf{0}_m))$. Hence, in particular, there exist $K > 0$ and a neighbourhood U of $\overline{x}$ such that

$$\operatorname{dist}(x, \Omega) = d\big(x, H^{-1}(0_\ell, 0_m)\big) \leq K \operatorname{dist}((0_\ell, 0_m), H(x)) \leq K \varphi(x)$$

for all $x \in U$, i.e. φ has a local error bound at $\overline{x}$.

Now we can turn to the proof of (1.70). Under the assumptions of the theorem the penalty function Ψ_c is locally exact at $\overline{x}$ by Theorem 4.1.5. Thus, there exists $c^* \geq 0$ such that for any

$c \geq c^*$ the point $\overline{x}$ is a local minimizer of Ψ_c. Consequently, applying the necessary conditions for a minimum in terms of codifferentials (Proposition 1.2.2) and Theorem 1.2.1 one gets that $0 \in \underline{\partial}\Psi_c(\overline{x}) + y^*$ for all $y^* \in \overline{\partial}\Psi_c(\overline{x})$, i.e. condition (1.70) holds true.

To prove the validity of (1.71) note that by Proposition 1.2.2 for all $c \geq c_*$ and $h \in X$ one has

$$\Psi_c'(\overline{x}, h) = f_0'(\overline{x}, h) + c\Big(\sum_{j=1}^{\ell} \big|f_j'(\overline{x}, h)\big| + \sum_{i \in I(\overline{x})} \max\big\{g_j'(\overline{x}, h), 0\big\}\Big) \geq 0$$

(here we used standard calculus rules for directional derivatives; see, e.g. [111, Section I.3]). Let y_0^*, x_j^*, y_j^*, z_i^* be as in the formulation of the theorem. Define

$$\xi_c(h) = s(\underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^*, h) + c \sum_{j=1}^{\ell} \max\Big\{ s(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, h), s(-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}), h)\Big\} +$$
$$+ c \sum_{i \in I(\overline{x})} \max\Big\{ s(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, h), 0\Big\} \quad \forall h \in X.$$

Applying the definition of quasidifferential it is easy to see that $\xi_c(h) \geq \Psi_c'(x, h) \geq 0$ for all $c \geq c^*$ and $h \in X$. Therefore, 0 is a point of global minimum of the function ξ_c, since $\xi_c(0) = 0$, which implies that $0 \in \partial\xi_c(0)$ for any $c \geq c^*$, where $\partial\xi_c(0)$ is the subdifferential of ξ_c at 0 in the sense of convex analysis. Applying standard calculus rules for subdifferentials of convex functions one obtains that

$$0 \in \partial\xi_c(0) = \underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^* + c \sum_{j=1}^{\ell} \operatorname{co}\Big\{\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, -x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x})\Big\} + c \sum_{i \in I(\overline{x})} \operatorname{co}\Big\{\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, 0\Big\}$$

for all $c \geq c_*$. Consequently, for all $c \geq c_*$ there exist $\alpha_j \in [0, 1]$, $j \in J$, and $\beta_i \in [0, 1]$, $i \in I(\overline{x})$, such that

$$0 \in \underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^* + c \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \Big(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*\Big) - c \sum_{j=1}^{\ell} (1 - \alpha_j)\Big(x_j^* + \overline{\partial} f_j(\overline{x})\Big) + c \sum_{i=1}^{m} \beta_i \Big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*\Big).$$

Put $\underline{\mu}_j = c\alpha_j$ and $\overline{\mu}_j = c(1-\alpha_j)$ for all $j \in J$, $\lambda_i = c\beta_i$, if $i \in I(\overline{x})$, and $\lambda_i = 0$ if $i \in I \setminus I(\overline{x})$. Then $\lambda_i g_i(x) = 0$ for all $i \in I$ and condition (1.71) hold true. It remains to note that setting $c = c^*$ one gets the required upper bound on multipliers $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j$, and λ_i. □

Remark 1.2.9. (i) Note that in the theorem above instead of q.d.-MFCQ it is sufficient to suppose that the penalty term φ has a local error bound at $\overline{x}$. Moreover, in this case the assumption on the existence of metrically u.s.c. quasidifferential mappings becomes redundant, and it is sufficient to suppose that all functions are merely quasidifferentiable at $\overline{x}$.

(ii) Note that in optimality conditions (1.71) there are *two* Lagrange multipliers $\underline{\mu}_i$ and $\overline{\mu}_i$ corresponding to each equality constraint $f_j(x) = 0$. Moreover, each equality constraint enters the

optimality conditions as two inequality constraints: $f_j(x) \geq 0$ and $f_j(x) \leq 0$. This peculiarity of optimality conditions for nonsmooth mathematical programming problems in terms of quasidifferentials is connected to the fact that inequality constraints $g(x) \leq 0$ and $h(x) \geq 0$ enter optimality conditions in terms of quasidifferential differently, while usually the change of the inequality sign results only in the sign of the Lagrange multiplier corresponding to this constraint. Finally, let us note that Lagrange multipliers λ_i, $\underline{\mu}_i$ and $\overline{\mu}_i$ obviously depend on the choice of the elements x_j^*, y_j^*, and z_i^* of corresponding quasidifferentials and, in the general case, cannot be chosen the same for all of such elements (see [294, 296, 408]).
(iii) Optimality conditions similar to but weaker than (1.70) were first obtained By A. Shapiro in [362, 363] in the finite dimensional case under a different constraint qualification that involves some assumptions on so-called *contact points* of the sets $\underline{\partial} f_j(\overline{x})$ and $\overline{\partial} f_j(\overline{x})$, i.e. such points v^* of a convex set $C \subset X^*$ that $s(C, h) = \langle v^*, h \rangle$ for a given direction h. Note that one has to compute contact points of the sets $\underline{\partial} f_j(\overline{x})$ and $\overline{\partial} f_j(\overline{x})$ for *all* feasible directions in order to check the validity of the constraint qualification from [362,363], which is impossible in nontrivial cases. In contrast, q.d.-MFCQ is formulated in terms of problem data directly. In turn, optimality conditions similar to but weaker than (1.71) were derived in [336] in the case when X is finite dimensional, there are no inequality constraints, $\ell = 1$, and the following nondegeneracy condition holds true $T_\Omega(\overline{x}) = \{h \in X \mid f_1'(\overline{x}, h) = 0\}$. Optimality conditions similar to conditions from [336] for the more general problem of minimizing a function $f_0(x)$ subject to the constraint $F(x) = 0$, where the operator $F \colon X \to Y$ is scalarly quasidifferentiable, were obtained by A. Uderzo [397, 398], in the case when the space Y admits a Fréchet smooth renorming and the map F satisfies some assumptions ensuring its local metric regularity. Finally, similar optimality conditions for problem (1.69) in terms of ε-quasidifferentials were obtained by V.V. Gorohivik [203, Section 14]. Let us note that optimality condition (1.71) corresponds to the case when in Theorems 14.5 and 14.7 from [203] $\varepsilon = 0$ and the closure operator in the right-hand side of optimality conditions can be removed.

At the first glance optimality condition (1.70) might seem sharper than condition (1.71). Let us show that these conditions are in fact equivalent and independent of the choice of quasidifferentials (cf. [294, 296]).

Proposition 1.2.10. *Let the functions u, f_j, $j \in J$, and g_i, $i \in I$, be quasidifferentiable at a feasible point $\overline{x}$ of the problem* (1.69)*. Then* (1.70) *is satisfied for some $c \geq 0$ if and only if for all $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$, $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, and $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I$, there exist $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j, \lambda_i \geq 0$, satisfying inclusion* (1.71) *and conditions $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$ and $\max\{\underline{\mu}_j + \overline{\mu}_j, \lambda_i\} \leq c$ for all $i \in I$*

and $j \in J$. Moreover, optimality conditions (1.70) *and* (1.71) *these conditions are independent of the choice of corresponding quasidifferentials, that is, if they are satisfied for one choice of quasidifferentials of the corresponding functions, then they are satisfied for any other choice of quasidifferentials of these functions.*

Proof. From Proposition 1.2.2 and Theorem 1.2.1 it follows that optimality condition (1.70) is satisfied for some $c \geq 0$ if and only if $\Psi_c'(\overline{x}, h) \geq 0$ for all $h \in X$. The condition $\Psi_c'(\overline{x}, \cdot) \geq 0$ is obviously independent of the choice of a quasidifferential of Ψ_c, which implies that optimality condition (1.70) is independent of the choice of a quasidifferential of Ψ_c as well.

Let us now show that optimality conditions (1.70) and (1.71) are equivalent. Indeed, let (1.70) be valid for some quasidifferential of Ψ_c at $\overline{x}$ and $c \geq 0$. Then $\Psi_c'(x, h) \geq 0$ for all $h \in X$. Hence arguing in the same way as in the proof of Theorem 1.2.7 one obtains that for all $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$, $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, and $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I$, there exist $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j, \lambda_i \geq 0$ such that condition (1.71) holds true, and for all $i \in I$ and $j \in J$ one has $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$ and $\max\{\underline{\mu}_j + \overline{\mu}_j, \lambda_i\} \leq c$. Note that the implication (1.70) $\implies$ (1.71) is valid for any quasidifferentials of the functions f_0, f_i, and g_j.

Let us prove the converse implication. Fix any quasidifferentials of the functions f_0, f_i, and g_j, and suppose that there exists $c_0 \geq 0$ such that for any $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$, $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, and $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I$, one can find $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j, \lambda_i \geq 0$ satisfying optimality condition (1.71) and such that $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$ and $\max\{\underline{\mu}_j + \overline{\mu}_j, \lambda_i\} \leq c_0$ for all $i \in I$ and $j \in J$.

Arguing by reductio ad absurdum, suppose that (1.70) does not hold true for $c = c_0$. Then there exists $h_0 \in X$ such that $\Psi_{c_0}'(\overline{x}, h_0) < 0$. Applying standard calculus rules for directional derivatives (see, e.g. [111, Section I.3]) one obtains that

$$\Psi_{c_0}'(\overline{x}, h_0) = f_0'(\overline{x}, h_0) + c_0 \Big(\sum_{j=1}^{\ell} \max\{f_j'(\overline{x}, h_0), -f_j'(\overline{x}, h_0)\} + \sum_{i \in I(\overline{x})} \max\big\{g_j'(\overline{x}, h_0), 0\big\} \Big) < 0. \quad (1.72)$$

By the definition of quasidifferential there exist $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$, $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, and $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$, such that

$$f_0'(\overline{x}, h_0) = \max_{x^* \in \underline{\partial} f_0(\overline{x})} \langle x^*, h_0 \rangle + \langle y_0^*, h_0 \rangle, \quad f_j'(\overline{x}, h_0) = \max_{x^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})} \langle x^*, h_0 \rangle + \langle y_j^*, h_0 \rangle,$$

$$f_j'(\overline{x}, h_0) = \langle x_j^*, h_0 \rangle + \min_{y^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})} \langle y^*, h_0 \rangle, \quad g_i'(\overline{x}, h_0) = \max_{x^* \in \underline{\partial} g_i(\overline{x})} \langle x^*, h_0 \rangle + \langle z_i^*, h_0 \rangle$$

for all $j \in J$ and $i \in I(\overline{x})$. Hence with the use of (1.72) one gets that $\xi_{c_0}(h_0) < 0$, where the function ξ_c is defined as in the proof of Theorem 1.2.7.

On the other hand, from the validity of (1.71) with $\max\{\underline{\mu}_j + \overline{\mu}_j, \lambda_i\} \leq c_0$ it follows that $O \in \partial \xi_{c_0}(\mathbb{O})$ (see the proof of Theorem 1.2.7). Therefore $\xi_{c_0}(h) \geq \xi_{c_0}(0) = 0$ for all $h \in X$, which contradicts the inequality $\xi_{c_0}(h_0) < 0$. Thus, (1.70) holds true for $c = c_0$.

Let us finally show the independence of (1.71) on the choice of quasidifferentials. Indeed, if (1.71) is valid for one choice of quasidifferentials of the functions f_0, f_j, and g_i, then, as we have just proved, optimality condition (1.70) is satisfied. Hence with the use of the implication (1.70) $\implies$ (1.71) one obtains that (1.71) is valid for any other choice of quasidifferentials of the functions f_0, f_j, and g_i. □

Let us now apply Theorem 1.2.6 to obtain optimality conditions for problem (1.69) under much less restrictive assumptions than in Theorem 1.2.7.

Theorem 1.2.8. *Let $\overline{x}$ be a locally optimal solution of problem* (1.69), *f_0 be Hadamard quasidifferentiable at $\overline{x}$, the functions f_j, $j \in J$, be continuous in a neighbourhood of $\overline{x}$ and quasidifferentiable at this point uniformly along finite dimensional spaces, the functions g_i, $i \notin I(\overline{x})$, be u.s.c. and quasidifferentiable at $\overline{x}$, while the functions g_i, $i \in I(\overline{x})$ be quasidifferentiable at $\overline{x}$ uniformly along finite dimensional spaces. Suppose that vectors $x_j^* \in \underline{\partial} f_j(\overline{x})$, $y_j^* \in \overline{\partial} f_j(\overline{x})$, $j \in J$, and $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \in I(\overline{x})$, satisfy assumptions 1–3 of Theorem 1.2.6. Then for all $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$ and $y_j^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \notin I(\overline{x})$, there exist $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$, such that $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$ for all $i \in I$ and the following inclusion holds true:*

$$0 \in \underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^* + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \big) + \operatorname{cl}^* \operatorname{cone} \big\{ C_j \mid j \in J \big\}, \tag{1.73}$$

where $C_j = (\underline{\partial} f_j(\overline{x} + y_j^*) \cup (-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}))$.

Proof. With the use of the definitions of contingent cone and Hadamard directional derivative one can easily verify that the local optimality of the point $\overline{x}$ implies that $f_0'(\overline{x}, v) \geq 0$ for any $v \in T_M(\overline{x})$, where M is the feasible region of problem (1.69). Hence, in particular, $f_0'(\overline{x}, v) \geq 0$ for any $v \in K$, where

$$\begin{aligned} K = \Big\{ v \in X \;\Big|\; & s\big(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, v\big) \leq 0, \quad s\big(- x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}), v\big) \leq 0, \;\; j \in J, \\ & s\big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, v\big) \leq 0, \;\; i \in I(\overline{x}) \Big\}, \end{aligned}$$

since by Theorem 1.2.6 one has $K \subseteq T_M(\overline{x})$.

Choose any $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$. By the definition of quasidifferential one has

$$p(v) := s\big(\underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^*, v\big) \geq f_0'(\overline{x}, v) \quad \forall v \in X.$$

Therefore $p(v) \geq 0$ for any $v \in K$, which, as is readily seen, implies that 0 is a globally optimal solution of the convex programming problem

$$p(v) \to \min, \quad q_i(v) \leq 0, \quad i \in I(\overline{x}), \quad v \in H, \tag{1.74}$$

where $q_i(v) = s(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, v)$ and

$$H = \Big\{ v \in X \;\Big|\; s\big(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^*, v\big) \le 0, \;\; s\big(- x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}), v\big) \le 0, \;\; j \in J \Big\}.$$

Note that the cone H is obviously closed and convex. By assumption 3 of Theorem 1.2.6 there exists $v_0 \in H$ such that $q_i(v_0) < 0$ for any $i \in I(\overline{x})$, i.e. Slater's condition for problem (1.74) holds true. Consequently, applying the necessary and sufficient optimality conditions for convex programming problems (see, e.g. [243, Theorem 1.1.2′]) one obtains that there exists $\lambda_i \ge 0$, $i \in I(\overline{x})$, such that

$$0 \in \partial p(0) + \sum_{i \in I(\overline{x})} \lambda_i \partial q_j(0) + H^o \tag{1.75}$$

where $H^o = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, v \rangle \le 0 \, \forall v \in H\}$ is the polar cone of H, while ∂, as above, is the subdifferential in the sense of convex analysis. Let us check that $H^o = \mathrm{cl}^* \operatorname{cone} \big\{ C_j \mid j \in J \big\}$, where $C_j = (\underline{\partial} f_j(\overline{x} + y_j^*) \cup (-x_j^* - \overline{\partial} f_j(\overline{x}))$. Indeed, the inclusion "$\supseteq$" follows directly from the definition of H. Arguing by reductio ad absurdum, suppose that the opposite inclusion does not hold true, i.e. that there exists $x^* \in H^o$ such that $x^* \notin \mathrm{cl}^* \operatorname{cone}\{C_j \mid j \in J\}$. Then applying the separation theorem in the space X^* equipped with the weak* topology one gets that there exists $v \in X$ such that $\langle x^*, v \rangle > 0$, while $\langle y^*, v \rangle \le 0$ for any $y^* \in \mathrm{cl}^* \operatorname{cone}\{C_j \mid j \in J\}$. From the second inequality it follows that $v \in H$ by the definition of H, which is impossible, since $x^* \in H^o$ and $\langle x^*, v \rangle > 0$. Thus, $H^o = \mathrm{cl}^* \operatorname{cone} \big\{ C_j \mid j \in J \big\}$. Consequently, computing the subdifferentials $\partial p(0)$ and $\partial q_i(0)$ with the use of the theorem on the subdifferential of the supremum of a family of convex functions (see, e.g. [243, Theorem 4.2.3]), setting $\lambda_i = 0$ for any $i \notin I(\overline{x})$, and applying (1.75) one obtains that optimality condition (1.73) holds true. $\square$

Corollary 1.2.9. *Let all assumptions of the theorem above be valid and suppose that the set* $\operatorname{cone}\{C_j \mid j \in J\}$ *is weak* closed. Then for all* $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$ *and* $z_i^* \in \overline{\partial} g_i(\overline{x})$, $i \notin I(\overline{x})$, *there exist* $\underline{\mu}_j \ge 0$, $\overline{\mu}_j \ge 0$, $j \in J$, *and* $\lambda_i \ge 0$, $i \in I$, *such that* $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$ *for all* $i \in I$ *and*

$$0 \in \underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^* + \sum_{j=1}^{\ell} \underline{\mu}_j \big(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^* \big) - \sum_{j=1}^{\ell} \overline{\mu}_j \big(x_j^* + \overline{\partial} f_j(\overline{x}) \big) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \big). \tag{1.76}$$

Proof. By Theorem 1.2.8 there exist $\lambda_i \ge 0$, $i \in I$, and $x^* \in \underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^* + \sum_{i \in I} \lambda_i (\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*)$ such that $-x^* \in \operatorname{cone}\{C_j \mid j \in J\}$ and $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$ for all $i \in I$. By the definitions of C_j and the convex conic hull there exist $\underline{\mu}_j \ge 0$ and $\overline{\mu}_j \ge 0$, $j \in J$, such that

$$-x^* \in \sum_{j=1}^{\ell} \underline{\mu}_j \big(\underline{\partial} f_j(\overline{x}) + y_j^* \big) - \sum_{j=1}^{\ell} \overline{\mu}_j \big(x_j^* + \overline{\partial} f_j(\overline{x}) \big),$$

that is, optimality condition (1.76) holds true. $\square$

Let us point out a simple sufficient condition for the weak* closedness of the convex conic hull $\operatorname{cone}\{C_j \mid j \in J\}$ from the corollary above, which is satisfied in almost all finite dimensional applications. To this end, recall that a function $f \colon X \to \mathbb{R}$ is called *polyhedrally quasidifferentiable* at a point x, if f is quasidifferentiable at this point and there exists a quasidifferential of f at x such that the sets $\underline{\partial} f(x)$ and $\overline{\partial} f(x)$ are polytopes or, equivalently, if the directionally derivative $f'(x, \cdot)$ is a piecewise-linear function (see [209, 210]). Quasidifferential consisting of two polytopes is caled *polyhedral quasidifferential*.

If in Corollary 1.2.9 the functions f_j, $j \in J$, are polyhedrally quasidifferentiable at $\overline{x}$ and the sets $\underline{\partial} f_j(\overline{x})$ and $\overline{\partial} f_j(\overline{x})$ are polytopes, then the cone $\operatorname{cone}\{C_j \mid j \in J\}$ is a convex conic hull of a finite number of polytopes. These polytopes can obviously be replaced by their extreme points. Thus, in the case under consideration the cone $\operatorname{cone}\{C_j \mid j \in J\}$ is finitely generated. As is well known, finitely generated cones in locally convex spaces are always closed (see, e.g. [42, Proposition 2.41]). Thus, if the equality constraints $f_j(x) = 0$ are polyhedrally quasidifferentiable and their polyhedral quasidifferentials are used in optimality conditions, then the conic hull $\operatorname{cone}\{C_j \mid j \in J\}$ is weak* closed and optimality condition (1.76) holds true.

In the case when there are no equality constraints one can obtain optimality conditions for problem (1.69) under even less restrictive assumptions than in Theorem 1.2.8.

Theorem 1.2.9. *Let $\overline{x} \in X$ be a locally optimal solution of the problem*

$$f_0(x) \to \min, \quad g_i(x) \le 0, \quad i \in I. \tag{1.77}$$

Suppose that the functions f_0 and g_j, $j \in J$ are quasidifferentiable at $\overline{x}$, and let $z_j^* \in \overline{\partial} g_j(\overline{x})$, $j \in J$, be such that $0 \notin \operatorname{co}\{\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \mid i \in I(\overline{x})\}$. Then for all $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$ there exist $\lambda_i \ge 0$, $i \in I$, such that

$$0 \in \underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^* + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*\big), \quad \lambda_i g_i(\overline{x}) = 0 \quad \forall i \in I. \tag{1.78}$$

Proof. Define $h(\cdot) = \max_{i \in I}\{f_0(\cdot) - f_0(\overline{x}), g_i(\cdot)\}$. Under the assumptions of the theorem the function h is directionally differentiable at $\overline{x}$ and applying standard calculus rules for directional derivatives (see, e.g., [111]) one gets that

$$h'(x, v) = \max_{i \in I(\overline{x})}\{f_0'(\overline{x}, v), g_i'(\overline{x}, v)\} \quad \forall v \in X. \tag{1.79}$$

Moreover, since $\overline{x}$ is a locally optimal solution of problem (1.77), then, as is easily see, $\overline{x}$ is a point of local minimum of h. Therefore $h'(\overline{x}, v) \ge 0$ for all $v \in X$.

Fix any $y_0^* \in \overline{\partial} f_0(\overline{x})$. By the definition of quasidifferential $f_0'(x, v) \le s(\underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^*, v)$ and $g_i'(x, v) \le s(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, v)$ for all $v \in X$ and $i \in I(\overline{x})$. Hence with the use of (1.79) one gets that

$$\eta(v) = \max_{i \in I(\overline{x})} \big\{ s(\underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^*, v), s(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*, v) \big\} \ge h'(\overline{x}, v) \ge 0$$

for all $v \in X$, i.e. 0 is a point of global minimum of the function η. Consequently, $0 \in \partial\eta(0)$. Applying the theorem on the subdifferential of the supremum of a family of convex functions [243, Theorem 4.2.3] one gets that $\partial\eta(0) = \operatorname{co}_{i \in I(\overline{x})}\{\underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^*, \underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*\}$, which implies that there exist $\alpha_0 \ge 0$ and $\alpha_j \ge 0$, $i \in I(\overline{x})$, such that $\alpha_0 + \sum_{i \in I(\overline{x})} \alpha_j = 1$, and

$$0 \in \alpha_0\big(\underline{\partial} f_0(\overline{x}) + y_0^*\big) + \sum_{i \in I(\overline{x})} \alpha_j\big(\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^*\big).$$

Note that if $\alpha_0 = 0$, then $0 \in \operatorname{co}\{\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \mid i \in I(\overline{x})\}$, which contradicts our assumptions. Thus, $\alpha_0 \ne 0$. Dividing by α_0 and denoting $\lambda_i = \alpha_i/\alpha_0$ for all $i \in I(\overline{x})$ and $\lambda_i = 0$ for all $i \notin I(\overline{x})$, one finally obtains that inclusion (1.78) holds true. $\square$

Remark 1.2.10. Various optimality conditions and constraint qualifications for quasidifferentiable programming problems with inequality constraints were analysed in [103,111,117,203,273,274,296, 409]. One can check that none of the constraint qualifications from these papers are satisfied for the constraint $g(x) = \min\{x, x^3\} \le 0$ at the point $\overline{x} = 0$. Moreover, even the nondegeneracy condition $\operatorname{cl}\{v \in X \mid g'(\overline{x}, v) < 0\} = \{v \in X \mid g'(\overline{x}, v) \le 0\}$ (see monographs [111, 117, 203]) is not satisfied at $\overline{x}$. On the other hand, since a quasidifferential of g at $\overline{x}$ has the form $\mathscr{D}g(\overline{x}) = [\{0\}, [0, 1]]$, for the vector $z^* = 1 \in \overline{\partial} g(\overline{x})$ the constraint qualification from Theorem 1.2.9 ($0 \notin \underline{\partial} g(\overline{x}) + z^*$) holds true.

Thus, it seems that in the case of quasidifferentiable programming problems constraint qualifications must depend on individual elements of quasidifferentials just like Lagrange multipliers in quasidifferentiable programming depend on individual elements of quasidifferentials. To the best of the author's knowledge, such constraint qualifications (including the condition $0 \notin \operatorname{co}\{\underline{\partial} g_i(\overline{x}) + z_i^* \mid i \in I(\overline{x})\}$ from Theorem 1.2.9) have never been analysed before. See the authors paper [153] for a more detailed discussion of various constraint qualifications in terms of quasidifferentials.

Let us give a simple example illustrating optimality conditions obtained in this section. This example demonstrates that in some cases optimality conditions in terms of quasidifferential are better than optimality conditions in terms of various subdifferentials.

Example 1.2.9. Let $X = \mathbb{R}^2$, and consider the following optimization problem:

$$\min f_0(x) = -x_1 + x_2 \quad \text{subject to} \quad f_1(x) = |x_1| - |x_2| = 0. \tag{1.80}$$

Put $\overline{x} = \mathbf{0}_2$. Observe that $\overline{x}$ is not a locally optimal solution of problem (1.80), since for any $t > 0$ the point $x(t) = (t, -t)$ is feasible for this problem and $f_0(x(t)) = -2t < 0 = f_0(\overline{x})$. Nevertheless, let us verify that several subdifferential-based optimality conditions fail to disqualify $\overline{x}$ as a non-optimal solution.

We start with necessary optimality conditions in terms of the subdifferential of Michel-Penot [236], which we denote by ∂_{MP}. Let $L(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda f_1(x)$ be the Lagrangian function for problem (1.80). For any $h \in \mathbb{R}^2$ the Michel-Penot directional derivative of $L(\cdot, \lambda)$ at $\overline{x}$ has the form

$$d_{MP}L(\cdot,\lambda)[\overline{x}, h] = \sup_{e \in \mathbb{R}^2} \limsup_{t \to +0} \frac{L(x + t(h+e)) - L(x + te)}{t}$$
$$= \sup_{e \in \mathbb{R}^2} \Big\{ -h^{(1)} + h^{(2)} + \lambda \Big(|h^{(1)} + e^{(1)}| - |e^{(1)}| - |h^{(2)} + e^{(2)}| + |e^{(2)}| \Big) \Big\} = -h^{(1)} + h^{(2)} + |\lambda| \Big(|h^{(1)}| + |h^{(2)}| \Big).$$

Hence the Michel-Penot subdifferential of $L(\cdot, \lambda)$ at $\overline{x}$ has the form

$$\partial_{MP}L(\cdot,\lambda)(\overline{x}) = \partial\varphi(0_2) = \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} |\lambda|-1 \\ |\lambda|+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |\lambda|-1 \\ -|\lambda|+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -|\lambda|-1 \\ |\lambda|+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -|\lambda|-1 \\ -|\lambda|+1 \end{pmatrix} \right\},$$

where $\varphi(h) = d_{MP}L(\cdot, \lambda)[\overline{x}, h]$ and $\partial\varphi(0_2)$ is the subdifferential of φ at zero in the sense of convex analysis. Consequently, for any $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $|\lambda| \geq 1$ one has $0_2 \in \partial_{MP}L(\cdot,\lambda)(\overline{x})$, which implies that the optimality conditions from [236] are satisfied at $\overline{x}$. Furthermore, note that the Michel-Penot subdifferential $\partial_{MP}L(\cdot,\lambda)(\overline{x})$ coincides with the Clarke subdifferential $\partial_{Cl}L(\cdot,\lambda)(\overline{x})$, which implies that the optimality conditions in terms of the Clarke subdifferential [57, Theorem 6.1.1] are satisfied at $\overline{x}$ for any λ with $|\lambda| \geq 1$ as well.

Next, we consider optimality conditions in term of the Jeyakumar-Luc subdifferential [407], which we denote by ∂_{JL}. By [407, Example 2.1] one has $\partial_{JL}f_1(\overline{x}) = \{(1,-1)^T, (-1,1)^T\}$, and clearly $\partial_{JL}f_0(\overline{x}) = \{(-1,1)^T\}$. Hence for any $\lambda \in \mathbb{R}$ with $|\lambda| \geq 1$ one has $0_2 \in \partial_{JL}u(\overline{x}) + \lambda \operatorname{co} \partial_{JL}f_1(\overline{x})$, i.e. the optimality conditions in terms of the Jeyakumar-Luc subdifferential [407, Corollary 3.4] are satisfied at $\overline{x}$.

Let us now consider optimality conditions in terms of approximate (graded, Ioffe) subdifferentials (see [232,238,324]), which we denote by ∂_a. Observe that for any $x \in \mathbb{R}^2$ such that $x_1, x_2 > 0$ one has $L(x, 1) = 0$, which obviously implies that $\partial_x^- L(x,1) = \{0_2\}$ for any such x, where $\partial_x^- L(x,1)$ is the Dini subdifferential of $L(\cdot, 1)$ at x. Therefore, $0_2 \in \partial_a L(\cdot,1)(\overline{x}) = \limsup_{x \to \overline{x}} \partial_x^- L(x,1)$, i.e. the optimality conditions in terms of approximate subdifferential [232, Proposition 12] are satisfied at $\overline{x}$.

Let us also consider optimality conditions in terms of the Mordukhovich basic subdifferential [314], which we denote by ∂_M. One can check (see [313, p. 92–93]) that $\partial_M f_1(\overline{x}) = \operatorname{co}\big\{ \big(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\big), \big(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\big) \big\} \cup \operatorname{co}\big\{ \big(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\big) \big(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\big) \big\}$. Therefore $-\nabla f_0(\overline{x}) \in \partial_M f_1(\overline{x})$, i.e. the optimality conditions in terms of the Mordukhovich basic subdifferential [314, Theorem 5.19] hold true at $\overline{x}$.

Finally, let us verify that optimality conditions in terms of quasidifferentials are not satisfied at $\overline{x}$. As was pointed out in the previous section, a quasidifferential of f_1 at the point $\overline{x} = 0$ has the form $\mathscr{D} f_1(\overline{x}) = [\operatorname{co}\{(\pm 1, 0)^T\}, \operatorname{co}\{(0, \pm 1)^T\}]$, i.e. the function f_1 is polyhedrally quasidifferentiable at $\overline{x}$ and, therefore, one can apply optimality conditions from Corollary 1.2.9. Arguing by reductio ad absurdum, suppose that these conditions are not satisfed. Then for $x_1^* = (1, 0)^T \in \underline{\partial} f_1(\overline{x})$ and $y_1^* = (0, 1)^T \in \overline{\partial} f_1(\overline{x})$ there exist $\underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1 \geq 0$ such that

$$0 \in \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{\mu}_1 \operatorname{co} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} - \overline{\mu}_1 \operatorname{co} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

or, equivalently,

$$-1 - \underline{\mu}_1 - \overline{\mu}_1 \leq 0 \leq -1 + \underline{\mu}_1 - \overline{\mu}_1, \quad 1 + \underline{\mu}_1 - \overline{\mu}_1 \leq 0 \leq 1 + \underline{\mu}_1 + \overline{\mu}_1.$$

From the third inequality it follows that $1 + \underline{\mu_1} \leq \overline{\mu}_1$, while from the second inequality it follows that $1 + \overline{\mu}_1 \leq \underline{\mu}_1$. Therefore, $2 + \overline{\mu}_1 \leq \overline{\mu}_1$, which is impossible. Thus, optimality conditions from Corollary 1.2.9 are not satisfied.

Note that $0 \notin \underline{\partial} f_1(\overline{x}) + y_1^*$ and $0 \notin \overline{\partial} f_1(\overline{x}) + x_1^*$. Thus, the constraint qualifiction from Theorem 1.2.6 (see Corollary 1.2.7) are satisfied at $\overline{x}$. Thus, by Corollary 1.2.9 one can conclude that optimality conditions (1.71) are not satisfied at $\overline{x}$ due to the non-optimality of this point, unlike optimality conditions in terms of various subdifferentials

Remark 1.2.11. Let $X = \mathbb{R}^n$ and ¡¡∂¿¿ be any subdifferential mapping that satisfies the following assumption: if a function $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is continuously differentiable at a sequence of points $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ converging to some $x \in \mathbb{R}^n$ and there exists the limit $v = \lim_{n \to \infty} \nabla f(x_n)$, then $v \in \partial f(x)$. Then in the previous example one has

$$0 \in \partial L(\cdot, 1)(\overline{x}), \quad 0 \in \nabla f_0(\overline{x}) + \partial f_1(\overline{x}), \tag{1.81}$$

since for all $x^{(1)}, x^{(2)} > 0$ one has $L(x, 1) = 0$, that is, $\nabla_x L(x, 1) = 0$, and $\nabla f_1(x) = (1, -1)^T$, which with the use of the semicontinuity assumptions implies the validity of (1.81). Thus, roughly speaking, no outer semicontinuous/limiting subdifferential can detect the non-optimality of the point $\overline{x}$ in the previous example (see [238, 324] for more details on the general theory of such subdifferentials). On the other hand, optimality conditions in terms of quasidifferentials allow one to prove the non-optimality of the point $\overline{x}$.

1.3 Abstract Codifferential Calculus

The general theory of codifferentiable nonsmooth functions, developed in the previous sections, is based on the fundamental theorem of convex analysis stating that any proper convex function can be represented as the supremum of a family of affine functions. In the so-called *abstract* convex analysis [322,355,365] one replaces the set of affine function with an arbitrary set of functions H and considers functions that can be represented as the supremum and the infimum of families of functions from H. Such functions are called *abstract convex* and *abstract concave* with respect to the set H or simple H-convex and H-concave. Replacing convex functions with abstract convex function within the theory of codifferentiable functions one arrives at a natural definition of abstract codifferentiable functions. It turns out that many results for codifferentiable functions can be extended to the case of abstract codifferentiable functions. In particular, one can develop abstract codifferentiable calculus and obtain optimality conditions in terms of abstract codifferentials that unify and subsume many existing results from nonsmooth analysis. In this section we briefly present some main ideas of the theory of abstract codifferentiable functions. A more detailed exposition of this theory can be found in the author's PhD thesis [135] and the author's paper [137].

Let X be a real Banach space and E be a Kantorovich space, i.e. an order complete Banach lattice with ordering relation $\leq$ (see, e.g. [257]). Let us add two improper elements $+\infty$ and $-\infty$ to E. Denote $\overline{E} = E \cup \{-\infty, +\infty\}$. By definition $+\infty$ is the greatest element and $-\infty$ is the smallest element of the ordered set $\overline{E}$. Suppose also that a nonempty set H of functions $h \colon X \to E$ is given. For any function $F \colon X \to \overline{E}$ denote $\operatorname{dom} F = \{x \in X \mid F(x) \in E\}$.

Definition 1.3.1. A function $\Phi \colon X \to \overline{E}$ is called *abstract convex* with respect to the set H (or *H-convex*), if there exists a subset $V \subset H$ such that $\Phi(x) = \sup_{h \in V} h(x)$ for all $x \in X$. In this case one says that the H-convex function Φ is generated by the set V (or V is an infimal generator of Φ). Similarly, a function $\Psi =\colon X \to \overline{E}$ is called *abstract concave* with respect to the set H (or *H-concave*), if there exists a subset $V \subset H$ such that $\Psi(x) = \inf_{h \in V} h(x)$ for all $x \in X$. In the case one says that the H-concave function Ψ is generated by the set V.

Definition 1.3.2. Let $U \subseteq X$ be an open set. A mapping $F \colon U \to E$ is called *abstract codifferentiable* with respect to the set H (or H-codifferentiable) at a point $x \in U$, if there exist H-convex function $\Phi \colon X \to \overline{E}$ and H-concave function $\Psi \colon X \to \overline{E}$ such that $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} \Phi \cap \operatorname{dom} \Psi)$, $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ and for all $\Delta x \in X$ one has

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big\| F(x + \alpha \Delta x) - F(x) - \Phi(\alpha \Delta x) - \Psi(\alpha \Delta x) \Big\| = 0. \tag{1.82}$$

The pair $\delta_H F(x) = [\Phi, \Psi]$ is called a *Gâteaxus H-derivative* of F at x. For any setV_Φ generating the function Φ and for any set V_Ψ generating the function Ψ the pair $DF(x) = [V_\Phi, V_\Psi]$ is called an *H-codifferential* of F at x, the set $\underline{d}_H F(x) = V_\Phi$ is referred to as an *H-hypodifferential* of F at x, while the set $\overline{d}_H F(x) = V_\Psi$ is called an *H-hyperdifferential* of F at this point.

Remark 1.3.1. The definition above can be extended to the more general case when the space X and E are now equipped with topology. Namely, let X be a real Banach space, E be an order complete vector lattice, and $U \subset X$ be a set with nonempty algebraic interior. Then the function F is called *order H-codifferentiable* at a point $x \in \operatorname{core} U$, if there exist H-convex function $\Phi\colon X \to \overline{E}$ and H-concave function $\Psi\colon X \to \overline{E}$ such that $0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}\Phi \cap \operatorname{dom}\Psi)$, $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ and for all $\Delta x \in X$ the following equality holds true

$$\operatorname*{o-lim}_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}\Big| F(x + \alpha\Delta x) - F(x) - \Phi(\alpha\Delta x) - \Psi(\alpha\Delta x)\Big| = 0.$$

Here core is the algebraic interior and o-lim is the order limit in E.

If the function $h(\cdot) \equiv 0_E$ belongs to H and there exists an H-codifferential of F at $x \in U$ such that $\overline{d}_H F(x) = \{0\}$, then the function F is called *H-hypodifferentiable* at x. H-hyperdifferentiable functions are defined in the same way.

In the case when all function from H are positively homogeneous, i.e. for all $h \in H$, $x \in X$, and $\alpha > 0$ one has $h(\alpha x) = \alpha h(x)$, H-codifferentiability is closely related to representation of directional derivatives of a function under consideration. Let, as above, $U \subseteq X$ be an open set.

Proposition 1.3.1. *Let all functions from H be positively homogeneous and $F\colon U \to E$ be a given function. Then F is H-codifferentiable at a point $x \in U$ if and only if F is directionally differentiable at x and there exist H-convex function $\Phi\colon X \to E$ and H-concave function $\Psi\colon X \to E$ such that $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ and*

$$F'(x, v) = \Phi(v) + \Psi(v) \quad \forall v \in X. \tag{1.83}$$

Moreover, a pair $[\Phi, \Psi]$ satisfies this inequality if and only if it is a Gâteaux H-derivative of the function F at x.

Proof. Since all functions from H are positively homogeneous, all H-convex and H-concave functions are positively homogeneous as well. Therefore, if a function $\Phi\colon X \to \overline{E}$ is H-convex (or H-concave) and $0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\Phi$, then $\operatorname{dom}\Phi = X$, i.e. Φ maps X to E.

Thus, a function F is H-codifferentiable at x if and only if there exist an H-convex function $\Phi\colon X \to E$ and H-concave function $\Psi\colon X \to E$ such that $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ and for all $\Delta x \in$

X equality (1.82) holds true. Taking into account the fact that both Φ and Ψ are positively homogeneous one gets that equality (1.82) is satisfied if and only if

$$\lim_{\alpha \to +0} \left\| \frac{1}{\alpha}\Big(F(x + \alpha\Delta x) - F(x)\Big) - \Phi(\Delta x) - \Psi(\Delta x) \right\| = 0,$$

In turn, this condition is satisfied if and only if there exists the limit $\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}\big(F(x+\alpha\Delta x) - F(x)\big)$ and the following equality holds true

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}\Big(F(x + \alpha\Delta x) - F(x)\Big) = \Phi(\Delta x) + \Psi(\Delta x) \quad \forall \Delta x \in X.$$

Thus, the function F is H-codifferentiable at x if and only if F is directionally differentiable at x and there exist H-convex function $\Phi \colon X \to E$ and H-concave function $\Psi \colon X \to E$ such that $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ and equality (1.83) holds true. Moreover, a pair $[\Phi, \Psi]$ satisfies this equality if and only if it is a Gâteaux H-derivative of F at x. □

If the set H is endowed with metric ρ, one can introduce the following definition of continuous H-codifferentiability. Namely, a function f is called continuously H-codifferentiable at a point x, if f is H-codifferentiable in a neighbourhood $\mathcal{O}(x)$ of x and there exists an H-codifferentiable mapping $D_H F(\cdot)$ defined on $\mathcal{O}(x)$ and such that the multifunctions $\underline{d}_H F(\cdot)$ and $\overline{d}_H F(\cdot)$ are Hausdorff continuous at x.

Under some natural assumptions on the set H and metric ρ on H codifferential calculus can be extended to the case of H-codifferentiable functions. In particular, if the set H is closed under addition and the mapping $(h, p) \mapsto h + p$ is uniformly continuous on $H \times H$, then the sum of continuously H-codifferentiable function is also continuously H-codifferentiable and the natural formula for an H-codifferential of the sum holds true. A general calculus of H-codifferentiable functions was studied in details in the author's papers [135, 137].

Let us give several particular examples of abstract codifferentiable functions.

Example 1.3.1. Let $E = \mathbb{R}$ and $H = X^*$ be the set of all continuous linear functionals on X. Then, as is well-known, a function $\Phi \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ is H-convex (H-concave) if and only if Φ is a closed sublinear (superlinear) function (see, e.g. [222, 243, 355]). Since all functions from H are positively homogeneous, by Proposition 1.3.1 a function $f \colon U \to \mathbb{R}$ is H-codifferentiable at a $x \in U$ if and only if f is directionally differentiable at this point and its directional derivative at x can be expressed as the difference of sublinear functions. Thus, in this case a function is H-codifferentiable if and only if it is quasidifferentiable, and $D_H f(x)$ is an H-codifferential of f at x if and only if the pair $[\operatorname{cl}\operatorname{co} \underline{d}_H f(x), \operatorname{cl}\operatorname{co} \overline{d}_H f(x)]$, where the closure taken in the weak* topology, is a quasidifferential of f at x.

Suppose now that E is an order complete Banach lattice, while H is the set of all continuous linear operators from x and E. Then a function $\Phi\colon X \to E$ is H-convex (H-concave) if and only if Φ is a sublinear (superlinear) operator with closed epigraph (hypograph). Indeed, if $\Phi(x) = \sup_{T \in U} Tx$ for some subset $U \subset H$, then, as one can verify directly, Φ is a sublinear operator. Furthermore, since the hypograph of a bounded linear operator $T\colon X \to E$, the epigraph of Φ is closed as well as the intersection of the epigraphs of operators $T \in U$ (see [275, Section 1.3.6]).

Conversely, if $\Phi\colon X \to E$ is a sublinear operator, then $\Phi(x) = \sup\limits_{T \in \partial_a \Phi(0)} Tx$, where $\partial_a \Phi(0)$ is the algebraic subdifferential of Φ at zero, i.e. the set of all linear (not necessarily bounded) operators $T\colon X \to E$ such that $\Phi(x) - \Phi(0) \geq Tx$ for all $x \in X$ (see, e.g. [110,354]). If, in addition, the epigraph of Φ is closed, then taking into account the fact that the cone of nonnegative elements of a vector lattice is a normal cone (see, e.g. [326, Prp. 2.1.5]) one obtains that all linear operators from the algebraic subdifferential $\partial_a \Phi(0)$ are continuous by [381, Corollary 2.2]. Therefore the operator Φ is H-convex. Moreover, if the cone of nonnegative vectors in E has nonempty interior, then by [385, Theorems 2.1 and 3.5] a function $\Phi\colon X \to E$ is H-convex if and only if Φ is a *continuous* sublinear operator.

Thus, by Proposition 1.3.1 a function $F\colon U \to E$ is H-codifferentiable at x if and only if F is directionally differentiable at this point and its directional derivative at x can be expressed as the difference of sublinear operators with closed epigraphs. Thus, in this case the H-codifferentiability is reduced to the concept of quasidifferentiability of nonlinear operators analysed in [110, 111].

Let us also note that in the case when the spaces X and E are not endowed with topology and the set H consists of all linear operators from X and E, order H-codifferentiability introduced in Remark 1.3.1 is reduced to the concept of quasidifferentiability of nonlinear operators introduced in [31, 34, 276].

Example 1.3.2. Let $E = \mathbb{R}$ and H consists of all affine function $\ell\colon X \to \mathbb{R}$, i.e. of all functions of the form $\ell(x) = a + \langle x^*, x\rangle$ for some $a \in \mathbb{R}$ and $x^* \in X^*$. As is well-known, in this case a function $f\colon X \to \overline{R}$ is H-convex (H-concave) if and only if f is a convex (concave) function (see, e.g. [168, Prp. I.3.1]). Consequently, in this case H-codifferentiability coincides with codifferentiability, which was studied in details earlier in this chapter (a detailed proof of this result can be found in the author's paper [137, Example 3.10]).

In the case when E is an arbitrary order complete Banach lattice and H is the set of all continuous affine operators from X to E (that is, all operators of the form $\ell(x) = a + Tx$ for some $a \in E$ and a bounded linear operator $T\colon X \to E$) one can check that H-codifferentiability coincides with the concept of codifferentiability of nonlinear nonsmooth operators introduce by

Zaffaroni [416, 417].

Example 1.3.3. Let $E = \mathbb{R}$ and the set H consist of all closed sublinear function $h \colon X \to \mathbb{R}$. Since any sublinear function is positively homogeneous, by Proposition 1.3.1 a function $f : U \to \mathbb{R}$ is H-hyperdifferentiable at $x \in U$ if and only if f is directionally differentiable at x and there exists a famliy $h_\lambda \in H$, $\lambda \in \Lambda$, of closed sublinear functions such that

$$f'(x, v) = \inf_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda(v) \quad \forall v \in X. \tag{1.84}$$

Note that $h_\lambda(v) \geq f'(x, v)$ for all $v \in X$, that is, h_λ is an *upper convex approximation* (u.c.a.) of prof. B.N. Pschenchny [341] of the function $f'(x, \cdot)$. Moreover, any such famliy $h_\lambda \in H$, $\lambda \in \Lambda$, is called an *exhaustive family* of u.c.s. of the function $f'(x, \cdot)$ (see [111]). Thus, a function f is H-hyperdifferentiable at a point x if and only if f is directionally differentiable at this points and there exists an exhaustive family of u.c.a. of its directional derivative $f'(x, \cdot)$.

Applying the well-known representation of a sublinear function as the support function of its subdifferential at zero one obtains that equality (1.84) holds true if and only if there exists a family of convex weak* compact sets $C_\lambda \subset X^*$, $\lambda \in \Lambda$, such that $f'(x, v) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \max_{x^* \in C_\lambda} \langle x^*, v \rangle$ for all $v \in X$. Recall that any such family is called *an upper exhauster* of f at x (see [80, 81, 206–208, 394]). Thus, a function f is H-hyperdifferentiable at a point x if and only if f is directionally differentiable at this point and there exists an upper exhauster of f at x.

Arguing in similar way one can show that in the case when the set H consists of all close superlinear functions $h \colon X \to \mathbb{R}$, a function $f : U \to \mathbb{R}$ is H-hypodifferentiable at a point x if and only if f is directionally differentiable at x and there exists the so-called exhaustive family of lower concave approximations of the directional derivative $f'(x, \cdot)$ or, equivalently, if there exists a lower exhauster of f at x (see [80, 81]).

Example 1.3.4. Let $E = \mathbb{R}$ and the set H consist of all closed convex functions $h \colon X \to \mathbb{R}$. By definition a function $f : U \to \mathbb{R}$ is H-hyperdifferentiable at a point $x \in U$ if and only if there exists a family of convex functions $h_\lambda \colon X \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \Lambda$, such that $0 \in \operatorname{int} \operatorname{dom}(\inf_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda)$, $\inf_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda(0) = 0$, and for all $\Delta x \in X$ one has

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x + \alpha \Delta x) - f(x) - \inf_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda(\alpha \Delta x) \Big| = 0. \tag{1.85}$$

Note that for any function h_λ one has $h_\lambda(0) \geq 0$ and for all $\varepsilon > 0$ and $\Delta x \in X$ there exists $\alpha_0 > 0$ such that

$$f(x + \alpha \Delta x) - f(x) \leq h_\lambda(\alpha \Delta x) + \varepsilon \alpha \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_0).$$

Such convex functions h_λ are called *nonhomogeneous upper convex approximations* (nonhom. u.c.a.) of the function f at x, while any family of convex functions $h_\lambda \in H$, $\lambda \in \Lambda$, satisfying

(1.85) is called *an exhaustive family* of nonhom. u.c.a. of f at x (such families were studied in detailed by the author in [133]). Thus, a function f is H-hyperdifferentiable if and only if there exists an exhaustive family of nonhom. u.c.a h_λ, $\lambda \in \Lambda$, of f at x.

Applying Lemma 1.2.7 one obtains that equality (1.85) holds true if and only if there exists a family C_λ, $\lambda \in \Lambda$, of convex compact subsets of the space $(\mathbb{R} \times X^*, \tau_{\mathbb{R}} \times w^*)$ such that $\inf_{\lambda \in \Lambda} \max_{(a,x^*) \in C_\lambda} a = 0$ and for all Δx the following equality holds true:

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x + \alpha \Delta x) - f(x) - \inf_{\lambda \in \Lambda} \max_{(a,x^*) \in C_\lambda} (a + \langle x^*, \alpha \Delta x \rangle) \Big| = 0.$$

Recall that any such family C_λ, $\lambda \in \Lambda$, is called *an upper coexhauster* of f at x [1,5,80,88]. Thus, in this case f is H-hyperdifferentiable at a point x if and only if there exists an upper coexhauster of f at this point.

Arguing in a similar way one can show a direction connection among the concept of H-hypodifferentiability in the case when H consists of all closed concave functions $h \colon X \to \mathbb{R}$, the existence of exhaustive families of nonhomogeneous lower concave approximations, and the existence of a lower coexhauster of the function f.

One can formulate necessary optimality conditions in terms of abstract codifferential, which in various particular cases are reduced to well-known optimality conditions for nonsmooth optimization problems. Recall that a function $f \colon X \to \mathbb{R}$ satisfying the equality $f(0) = 0$ is called *subhomogeneous*, if $f(\alpha x) \le \alpha f(x)$ for all $x \in X$ and $\alpha \in (0, 1)$. Note that convex function, positively homogeneous functions, and the so-called convex-along-rays function (i.e. such functions $f \colon X \to \mathbb{R}$ that the functions $\alpha \mapsto f(\alpha x)$, $\alpha \ge 0$, are convex for all $x \in X$; see [355]) are all subhomogeneous.

For any function $\Phi \colon X \to \overline{E}$ and for all $x \in \operatorname{dom} \Phi$ denote by

$$\underline{\partial}_H \Phi(x) = \Big\{ h \in H \Bigm| \Phi(y) \ge h(y) \ \ \forall y \in X, \ \ \Phi(x) = h(x) \Big\}$$

its H-subdifferential at x, and denote by

$$\overline{\partial}_H \Phi(x) = \Big\{ h \in H \Bigm| \Phi(y) \le h(y) \ \ \forall y \in X, \ \ \Phi(x) = h(x) \Big\}$$

its H-superdifferential at this point. For a general theory of abstract sub-/super-differentials see [322, 355, 365]

Proposition 1.3.2. *Let $E = \mathbb{R}$ and x_* be a point of local minimum of the problem*

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) \le 0, \quad i \in I, \quad x \in A, \tag{1.86}$$

where the functions $f_0, f_i \colon X \to \mathbb{R}$, $i \in I = 1\colon m$ *are* H*-codifferentiable at* x_*, *and* $A \subset X$ *is a convex set. Let pairs* $[\Phi_i, \Psi_i]$ *be Gâteaux* H*-derivatives of* f_i *at* x_*, $i \in I \cup \{0\}$. *Then for all* $p_i \in \overline{\partial}_H \Psi_i(0)$, $i \in I \cup \{0\}$, *such that the function*

$$g(\cdot) = \sup_{i \in I} \Big\{ \Phi_0(\cdot) + p_0(\cdot), \Phi_i(\cdot) + p_i(\cdot) + f_i(x_*) \Big\}$$

is subhomogeneous, the function g *attains a global minimum on the set* $A - x_*$ *at the origin. Moreover, if* $A = X$ *and* $0 \in H$, *then* $0 \in \underline{\partial}_H g(0)$.

Proof. Introduce the function $F(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_*), f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$, $x \in X$. One can easiy check that x_* is a point of local minimum of this function on the set A and $F(x_*) = 0$.

Fix any $p_i \in \overline{\partial}_H \Psi_i(0)$, $i \in I \cup \{0\}$, such that the function $g(\cdot)$ is subhomogeneous. By the definition of H-codifferentiability for all $\varepsilon > 0$ and $\Delta x \in X$ there exists $\alpha_0 > 0$ such that

$$\Big| f_i(x_* + \alpha \Delta) - f_i(x_*) - \Phi_i(\alpha \Delta x) - \Psi_i(\alpha \Delta x) \Big| < \varepsilon \alpha \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_0)$$

for all $i \in I \cup \{0\}$. Consequently, by the definition of H-superdifferential

$$f_i(x_* + \alpha \Delta x) \le f_i(x_*) + \Phi_i(\alpha \Delta x) + p_i(\alpha \Delta x) + \varepsilon \alpha \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_0),$$

which by the definitions of F and g implies that

$$F(x_* + \alpha \Delta x) - F(x_*) \le g(\alpha \Delta x) + \varepsilon \alpha \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_0).$$

Let us use this inequality to prove th proposition.

Arguing by reductio ad absurdum, suppose that the function g does not attain a global minimum on the set $A - x_*$ at zero. Then there exists $x \in A$ such that $g(x - x_*) < 0$. Put $\varepsilon = |g(x - x_*)|/2$ and $\Delta x = x - x_*$. Then there exists $\alpha_0 > 0$ such that

$$F(x_* + \alpha \Delta x) - F(x_*) \le g(\alpha \Delta x) + \varepsilon \alpha \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_0).$$

Hence applying the fact that g is subhomogeneous one obtains that

$$F(x_* + \alpha \Delta x) - F(x_*) \le \alpha g(\Delta x) + \frac{|g(\Delta x)|}{2} \alpha = \frac{g(\Delta x)}{2} \alpha < 0 \quad \forall \alpha \in \big[0, \min\{\alpha_0, 1\}\big),$$

which is impossible, since x_* is a point of local minimum of F on A (note that $x_* + \alpha \Delta x = \alpha x + (1 - \alpha) x_* \in A$ for all $\alpha \in [0, 1]$ due to the convexity of A). Thus, the function g attains a global minimum on $A - x_*$ at $x = 0$. If $A = X$, then $g(x) \ge g(0) = 0$ for all $x \in X$ (the equality $g(0) = 0$ follows from the definitions of H-derivative and H-superdifferential). Consequently, by the definition of H-subdifferential one has $0 \in \underline{\partial}_H g(0)$, provided $0 \in H$. $\square$

Remark 1.3.2. In the case of unconstrained problems, optimality conditions from the previous theorem are, in essence, a particular case of optimality conditions in terms of the so-called *continuous approximations* of nonsmooth functions that were analysed in [358, 417].

Let us consider an application of the previous proposition to a particular class of abstract codifferentiable functions. Namely, let us obtain optimality conditions in terms of upper exhausters.

Example 1.3.5. Let the set H consist of all sublinear functions $h\colon X \to \mathbb{R}$. As was shown in Example 1.3.3, in this case a function $f\colon U \to \mathbb{R}$ is H-hyperdifferentiable at a point x if and only if f is directionally differentiable at this point and there exists an upper exhauster of f at x, i.e. there exists a family $E^* f(x_*)$ of convex weak* compact subsets of X^* such that

$$f'(x, v) = \inf_{C \in E^* f(x_*)} \max_{x^* \in C} \langle x^*, v \rangle \quad \forall v \in X.$$

Let functions $f_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i \in I \cup \{0\}$, be directionally differentiable at a point x_* and let there exist upper exhausters $E^* f_i(x_*)$ of these functions at x_*. H-derivative of f_i in this case has the form $[0, \Psi_i]$, where $\Psi_i(\cdot) = f_i'(x_*, \cdot)$, while H-superdifferential $\overline{\partial}_H \Psi_i(0)$ consist precisely of all upper convex approximations of the function $f_i'(x_*, \cdot)$. In particular, functions $h_i(v) = \max_{x^* \in C_i} \langle x^*, v \rangle$, where $C_i \in E^* f_i(x_*)$, belong to $\overline{\partial}_H \Psi_i(0)$. Therefore, fix any such sets $C_i \in E^* f_i(x_*)$, $i \in I \cup \{0\}$.

The function g from Proposition 1.3.2 in this case has the form:

$$g(x) = \max_{i \in I} \Big\{ \max_{x_0^* \in C_0} \langle x_0^*, x \rangle, \max_{x_i^* \in C_i} \langle x_i^*, x \rangle + f_i(x_*) \Big\} \quad \forall x \in X.$$

This function is obviously convex and $g(0) = 0$, which implies that g is subhomogeneous. Hence by Proposition 1.3.2 for a point x_* to be a locally optimal solution of problem (1.86) it is necessary that zero is a point of global minimum of the function g on the set $A - x_*$. Hence applying the theorem on the subdifferential of the supremum of an infinite family of convex functions [243, Theorem 4.2.3] and necessary and sufficient optimality conditions for a convex function on a convex set [243, Theorem 1.1.2$'$] one obtains that

$$0 \in \operatorname{co}\{C_0, C_i \mid i \in I(x_*)\} + N_A(x_*),$$

where $I(x_*) = \{i \in I \mid f_i(x_*) = 0\}$ and $N_A(x_*) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y - x_* \rangle \le 0 \ \forall y \in A\}$ is *the normal cone* to the set A at x_*. By the definition of convex hull there exist $\alpha_i \ge 0$, $i \in I(x_*) \cup \{0\}$, such that

$$0 \in \alpha_0 C_0 + \sum_{i \in I(x_*)} \alpha_i C_i + N_A(x_*).$$

If the constraint qualification

$$0 \notin \operatorname{co}\{C_i \mid i \in I(x_*)\} + N_A(x_*), \tag{1.87}$$

is satisfied, then $\alpha_0 \neq 0$ and

$$0 \in C_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i C_i + N_A(x_*), \quad \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i f_i(x_*) = 0 \quad \forall i \in I, \tag{1.88}$$

where $\lambda_i = \alpha_i/\alpha_0$ for $i \in I(x_*)$ and $\lambda_i = 0$ for $i \notin I(x_*)$. Thus, for any sets $C_i \in E^* f_i(x_*)$, $i \in I \cup \{0\}$, satisfying (1.87), there exist $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$, such that $\lambda_i f_i(x_*) = 0$ for all $i \in I$ and (1.88) holds true.

Chapter 2

Nonsmooth Problems of the Calculus of Variations

This chapter is devoted to an analysis of nonsmooth problems of the calculus of variations with the use of codifferential and quasidifferential calculus. We obtain simple sufficient conditions for the continuous codifferentiability of a nonsmooth integral functional defined on the Sobolev space and present explicit formulae for its codifferential and quasidifferential. With the use of the general theory of optimality conditions for nonsmooth mathematical programming problems in terms of quasidifferentials developed in the previous chapter we obtain new optimality conditions for nonsmooth multidimensional problems of the calculus of variations, nonsmooth problems of Bolza with additional constraints at the boundary, and nonsmooth problems with isoperimetric constraints. The main results of this chapter were published in [134, 136, 154].

2.1 Codifferentiability of Nonsmooth Integral Functionals

In this section we present simple sufficient conditions for the codifferentiability of integral functional

$$\mathcal{I}(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx, \quad u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$$

and compute its codifferential and quasidifferential. Here $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ is an open set (not necessarily bounded), $f \colon \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \to \mathbb{R}$, $f = f(x, u, \xi)$, is a given function, $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ is the Cartesian product of m copies of the Sobolev space $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ with $1 \le p \le +\infty$. The space $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ is endowed with the norm $\|u\|_{1,p} = \big(\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p\big)^{1/p}$ in the case $1 \le p < +\infty$ and $\|u\|_{1,\infty} = \max\{\|u\|_\infty, \|\nabla u\|_\infty\}$, where $\| \cdot \|_p$ is the standard norm in $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^k)$ for any $k \in \mathbb{N}$, that is,

$\|u\|_p = (\int_\Omega |u(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}$ in the case $1 \le p < +\infty$, and $\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$ (here $|\cdot|$ is the Euclidean norm). Denote by p' the conjugate exponent of p, i.e. $1/p + 1/p' = 1$.

Below we assume that for a.e. $x \in \Omega$ the function $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ is codifferentiable, i.e. for a.e. $x \in \Omega$ and for all $(u, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$ there exist compact convex sets $\underline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi), \overline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$ such that for any $(\Delta u, \Delta\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$ one has

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x, u + \alpha\Delta u, \xi + \alpha\Delta\xi) - f(x, u, \xi) - \Phi_f(x, u, \xi; \alpha\Delta u, \alpha\Delta\xi) - \Psi_f(x, u, \xi; \alpha\Delta u, \alpha\Delta\xi) \Big| = 0$$

and $\Phi_f(x, u, \xi; 0, 0) = \Psi_f(x, u, \xi; 0, 0) = 0$, where

$$\Phi_f(x, u, \xi; \Delta u, \Delta\xi) = \max_{(a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi)} \big(a + \langle v_1, \Delta u \rangle + \langle v_2, \Delta\xi \rangle \big), \tag{2.1}$$

$$\Psi_f(x, u, \xi; \alpha\Delta u, \alpha\Delta\xi) = \min_{(b, w_1, w_2) \in \overline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi)} \big(b + \langle w_1, \Delta u \rangle + \langle w_2, \Delta\xi \rangle \big), \tag{2.2}$$

and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the inner product in $\mathbb{R}^k$. We denote the codifferential of this function at a point (x, u, ξ) by $D_{u,\xi} f(x, u, \xi) = [\underline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi), \overline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi)]$. Finally, recall that a multifunction $F \colon \Omega \times Y \rightrightarrows Z$, where Y and Z are metric spaces, is called *a Carathéodory map*, if for every $y \in Y$ the map $F(\cdot, y)$ is measurable and for every $x \in \Omega$ the map $F(x, \cdot)$ is continuous (see [18, Def. 8.2.7]). As is well-known, in the case when $Z = \mathbb{R}^k$ and F is compact-valued, the map $F(x, \cdot)$ is continuous if and only if it is Hausdorff continuous.

The following definition describes natural assumptions on the integrand $f = f(x, u, \xi)$ ensuring the codifferentiability of the functional $\mathcal{I}$.

Definition 2.1.1. We say that f satisfies *the codifferentiability conditions* of order p, if
(i) f is a Carathéodory function satisfying *the growth condition* of order p, i.e. there exist an a.e. nonnegative function $\beta \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ and $C > 0$ such that

$$|f(x, u, \xi)| \le \beta(x) + C\big(|u|^p + |\xi|^p\big)$$

for a.e. $x \in \Omega$ and for all $(u, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$ in the case $1 \le p < +\infty$, and for any $N > 0$ there exists an a.e. nonnegative function $\beta_N \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ such that $|f(x, u, \xi)| \le \beta_N(x)$ for a.e. $x \in \Omega$ and all $(u, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$ with $\max\{|u|, |\xi|\} \le N$ in the case $p = +\infty$;
(ii) for a.e. $x \in \Omega$ the function $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ is codifferentiable on $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$ and its codifferential mapping $D_{u,\xi} f(\cdot)$ is a Carathéodory map (i.e. both $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ and $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ are Carathéodory maps) satisfying *the growth condition* of order p, i.e. there exist $C > 0$ and a.e. nonnegative functions $\beta \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ and $\gamma \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ such that for a.e. $x \in \Omega$ and for all $(u, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$, $(a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi)$, and $(b, w_1, w_2) \in \overline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi)$ one has

$$\max\big\{|a|, |b|\big\} \le \beta(x) + C\big(|u|^p + |\xi|^p\big), \quad \max\big\{|v_1|, |v_2|, |w_1|, |w_2|\big\} \le \gamma(x) + C\big(|u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\big)$$

in the case $1 \le p < +\infty$, and for any $N > 0$ there exists an a.e. nonnegative function $\beta_N \in L^1(\Omega)$ such that $\max\big\{|a|, |v_1|, |v_2|, |b|, |w_1|, |w_2|\big\} \le \beta_N(x)$ for a.e. $x \in \Omega$ and for all $(a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi)$, $(b, w_1, w_2) \in \overline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi)$, and $(u, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$ with $\max\{|u|, |\xi|\} \le N$ in the case $p = +\infty$.

Remark 2.1.1. In the case $1 \le p < +\infty$ the growth conditions from the previous definition can be weakened with the use of the Sobolev imbedding theorem (cf. [66, Sect. 3.4.2]). In particular, if $d = 1$, then it is sufficient to suppose that for any $N > 0$ there exists $C_N > 0$ and a.e. nonnegative functions $\beta_N \in L^1(\Omega)$ and $\gamma_N \in L^{p'}(\Omega)$ such that for a.e. $x \in \Omega$, for all $(u, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ with $|u| \le N$ and for all $(a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi) \cup \overline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi)$ one has $|a| \le \beta_N(x) + C_N |\xi|^p$ and $\max\{|v_1|, |v_2|\} \le \gamma_N(x) + C_N |\xi|^{p-1}$.

Our aim is to prove that the codifferentiability conditions from the definition above guarantee that the functional $\mathcal{I}$ is codifferentiable on $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Due to some technical difficulties, in the case $p = 1$ we need to assume that the set Ω has *the segment property* [8, p. 53–54], i.e. that for every x from the boundary of Ω there exist a neighbourhood $U_x \subset \mathbb{R}^d$ of x and a nonzero vector $y_x \in \mathbb{R}^d$ such that for any $z \in \operatorname{cl}\Omega \cap U_x$ one has $z + t y_x \in \Omega$ for all $t \in (0, 1)$. The segment property ensures that the set Ω has a $(d-1)$-dimensional boundary and cannot simultaneously lie on both sides of any given part of its boundary (i.e. there are no cuts). Furthermore, it ensures that the space of continuously differentiable functions is dense in $W^{1,p}(\Omega)$ (see, e.g. [8, Thrm. 3.18]).

Theorem 2.1.1. *Let f satisfy the codifferentiability conditions of order $p \in [1, +\infty]$ and let either $1 < p \le +\infty$ or the set Ω be bounded and have the segment property. Then the functional $\mathcal{I}$ is correctly defined on $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, codifferentiable at every $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, and one can define $D\mathcal{I}(u) = [\underline{d}\mathcal{I}(u), \overline{d}\mathcal{I}(u)]$ with*

$$\begin{aligned}\underline{d}\mathcal{I}(u) = \Big\{ (A, x^*) \in \mathbb{R} \times (W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m))^* \;\Big|\; & A = \int_\Omega a(x)\, dx, \\ & \langle x^*, h \rangle = \int_\Omega \big(\langle v_1(x), h(x) \rangle + \langle v_2(x), \nabla h(x) \rangle \big)\, dx \qquad \forall h \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m), \\ & (a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \text{ is a measurable selection of the map } \underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot)) \Big\}\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\overline{d}\mathcal{I}(u) = \Big\{ (B, y^*) \in \mathbb{R} \times (W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m))^* \;\Big|\; & B = \int_\Omega b(x)\, dx, \\ & \langle y^*, h \rangle = \int_\Omega \big(\langle w_1(x), h(x) \rangle + \langle w_2(x), \nabla h(x) \rangle \big)\, dx \qquad \forall h \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m), \\ & (b(\cdot), w_1(\cdot), w_2(\cdot)) \text{ is a measurable selection of the map } \overline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot)) \Big\}.\end{aligned}$$

Furthermore, the multifunctions $\underline{d}\mathcal{I}(\cdot)$ and $\overline{d}\mathcal{I}(\cdot)$ are Hausdorff continuous, i.e. the functional $\mathcal{I}$ is continuously codifferentiable on $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, provided either $1 < p \le +\infty$ or the set-valued maps

$\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ and $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ have the form

$$\begin{aligned} \underline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi) &= \operatorname{co}\big\{ (f_i(x,u,\xi), v_{1i}, v_{2i}) \mid i \in I \big\}, \\ \overline{d}_{u,\xi} f(x,u,\xi) &= \operatorname{co}\big\{ (g_j(x,u,\xi), w_{1j}, w_{2j}) \mid j \in J \big\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

for some Carathéodory functions $f_i, g_j \colon \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \to \mathbb{R}$ and vectors $v_{1i}, w_{1j} \in \mathbb{R}^m$ and $v_{2i}, w_{2j} \in \mathbb{R}^{m \times d}$, where $i \in I = \{1, \ldots, \ell\}$ and $j \in J = \{1, \ldots, r\}$.

Remark 2.1.2. With the use of the codifferential calculus from the previous chapter one can easily verify that the assumption that in the case $p = 1$ the multifunctions $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ and $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ have the form (2.4) is preserved under addition, multiplication by scalar, and pointwise maximum, and pointwise minimum. Moreover, this assumption is satisfied for any piecewise-affine function f.

We split the proof of this theorem into three parts, each of which is formulated as a separate lemma. We start with a simple lemma on the hypodifferentiability of the function Φ_f defined in (2.1). This lemma is a simple corollary to Example 1.2.3.

Lemma 2.1.1. *Suppose that for a.e. $x \in \Omega$ and for all $(u, \xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$ the function $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ is codifferentiable and let Φ_f be defined as in* (2.1)*. Then for any $u, h \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, for a.e. $x \in \Omega$, and for all $t \in \mathbb{R}$ the function $g(t) = \Phi_f(x, u(x), \nabla u(x); th(x), t\nabla h(x))$ is codifferentiable and for any $t \in \mathbb{R}$ one can define $Dg(t) = [\underline{d} g(t), \{0\}]$, where*

$$\begin{aligned} \underline{d} g(t) = \Big\{ (a_g, v_g) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\Big|\; & a_g = a + \langle v_1, th(x) \rangle + \langle v_2, t\nabla h(x) \rangle - g(t), \\ & v_g = \langle v_1, h(x) \rangle + \langle v_2, \nabla h(x) \rangle, \;\; (a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x)) \Big\}. \end{aligned}$$

Next we show that the increment $\mathcal{I}(u + \alpha h) - \mathcal{I}(u)$ of the functional $\mathcal{I}$ can be approximated by a DC function defined via the sets $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ and $\overline{d}\mathcal{I}(u)$ from Theorem 2.1.1.

Lemma 2.1.2. *Let f satisfy the codifferentiability conditions of order $p \in [1, +\infty]$ and the sets $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ and $\overline{d}\mathcal{I}(u)$ be defined as in Theorem 2.1.1. Then the functional $\mathcal{I}$ is correctly defined on $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $\underline{d}\mathcal{I}(u), \overline{d}\mathcal{I}(u) \subset \mathbb{R} \times (W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m))^*$, and*

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| \mathcal{I}(u + \alpha h) - \mathcal{I}(u) - \max_{(A, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)} (A + \langle x^*, \alpha h \rangle) - \min_{(B, y^*) \in \overline{d}\mathcal{I}(u)} (B + \langle y^*, \alpha h \rangle) \Big| = 0. \tag{2.5}$$

for all $u, h \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Proof. Fix any $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. By our assumption f is a Carathéodory function satisfying the growth condition (see Def. 2.1.1). Therefore, as is well-known, the function $f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ is measurable and belongs to $\mathrm{L}^1(\Omega)$, which implies that $\mathcal{I}(u)$ is correctly defined and finite.

Let us check that the sets $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ and $\overline{d}\mathcal{I}(u)$ are correctly defined as well. Indeed, fix any measurable selection $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ of the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$. Note that this multifunction is measurable due to [18, Theorem 8.2.8] and the function that by our assumption the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ is a Carathéodory map. Therefore the set of measurable selection of the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ is nonempty (see [18, Theorem 8.1.3]).

By the growth condition on $D_{u,\xi} f(\cdot)$ (see Def. 2.1.1) there exist $C > 0$ and a.e. nonnegative functions $\beta \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ and $\gamma \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ such that

$$|a(x)| \le \beta(x) + C\big(|u(x)|^p + |\nabla u(x)|^p\big), \quad \max\big\{|v_1(x)|, |v_2(x)|\big\} \le \gamma(x) + C\big(|u(x)|^{p-1} + |\nabla u(x)|^{p-1}\big)$$

for a.e. $x \in \Omega$ in the case $1 \le p < +\infty$, and there exists $\beta_N \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ such that for a.e. $x \in \Omega$ one has $\max\{|a(x)|, |v_1(x)|, |v_2(x)|\} \le \beta_N(x)$ in the case $p = +\infty$ (here $N = \|u\|_{1,\infty}$). Hence with the use of Hölder's inequality one obtains that $a(\cdot) \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, $v_1(\cdot) \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, and $v_2(\cdot) \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d})$. Therefore the integral $A = \int_\Omega a(x) dx$ is correctly defined and finite, while the functional x^* defined as

$$\langle x^*, h \rangle = \int_\Omega \big(\langle v_1(x), h(x) \rangle + \langle v_2(x), \nabla h(x) \rangle\big)\, dx \quad \forall h \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$$

is a continuous linear functional on $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, i.e. $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ is a subset of $\mathbb{R} \times (\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m))^*$. The fact that $\overline{d}\mathcal{I}(u) \subset \mathbb{R} \times (\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)^*$ is proved in the same way.

Choose any $h \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ and a sequence $\{\alpha_n\} \subset (0, +\infty)$ converging to zero. Let us prove that

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\alpha_n} \Big| \mathcal{I}(u + \alpha_n h) - \mathcal{I}(u) - \int_\Omega \Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big)\, dx \\ - \int_\Omega \Psi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big)\, dx \Big| = 0, \quad (2.6)$$

where the functions Φ_f and Ψ_f are defined in (2.1), (2.2). Indeed, for any $n \in \mathbb{N}$ and $x \in \Omega$ denote

$$g_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}\Big(f(x, u(x) + \alpha_n h(x), \nabla u(x) + \alpha_n \nabla h(x)) - f(x, u(x), \nabla u(x)) \\ - \Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big) - \Psi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big)\Big). \quad (2.7)$$

Our aim is to prove (2.6) by applying Lebesgue's dominated convergence theorem to the sequence of functions $\{g_n\}$. Firstly, note that by the definition of codifferential $g_n(x) \to 0$ as $n \to \infty$ for a.e. $x \in \Omega$. Next, we show that $g_n \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ for all $n \in \mathbb{N}$.

From the fact that the integrand f satisfied the growth condition it follows that the first two terms in the definition of g_n belong to $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Let us check that the function $\eta_n(x) = \Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big)$, $x \in \Omega$, belongs to $\mathrm{L}^1(\Omega)$ as well. The proof of this fact for the function Ψ_f is exactly the same.

By the codifferentiability conditions $\underline{d}_{u,\xi}f(\cdot)$ is a Carathéodory map, which by [18, Thrm. 8.2.8] implies that the multifunction $\underline{d}_{u,\xi}f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ is measurable. Note also that the mapping $(x, (a, v_1, v_2)) \mapsto \langle a + \alpha_n \langle v_1, h(x)\rangle + \alpha_n \langle v_2, \nabla h(x)\rangle$ is obviously a Carathéodory function. Hence by the definitions of Φ_f (see (2.1)) and η_n and the theorem on the measurability of marginal functions [18, Thrm. 8.2.11] one obtains that the function η_n is measurable. Moreover, by the growth condition on the codifferential mapping $D_{u,\xi}f(\cdot)$ (see Def. 2.1.1) there exist $C > 0$ and a.e. nonnegative functions $\beta \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ and $\gamma \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ such that

$$|\eta_n(x)| = \big|\Phi_f(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x))\big| \le \beta(x) + C\big(|u(x)|^p + |\nabla u(x)|^p\big) \\ + \alpha_n\big(\gamma(x) + C(|u(x)|^{p-1} + |\nabla u(x)|^{p-1})\big)\big(|h(x)| + |\nabla h(x)|\big)$$

for a.e. $x \in \Omega$ in the case $1 \le p < +\infty$, and there exists an a.e. nonnegative function $\beta_N \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ such that

$$|\eta_n(x)| \le \beta_N(x)\big(1 + \alpha_n|h(x)| + \alpha_n|\nabla h(x)|\big)$$

for a.e. $x \in \Omega$ in the case $p = +\infty$ (here $N = \|u\|_{1,\infty}$). Hence taking into account the fact that $u, h \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ and applying Hölder's inequality in the case $1 < p < +\infty$ one obtains that $\eta_n \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ for all $n \in \mathbb{N}$, which implies that $g_n \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ for all $n \in \mathbb{N}$ as well.

Now we prove that the sequence $\{g_n\}$ is dominated by some integrable function. Indeed, by the mean value theorem (see Proposition 1.2.4 from the previous chapter) for any $n \in \mathbb{N}$ and for a.e. $x \in \Omega$ there exist $\theta_n \in (0, \alpha_n)$, $(0, v_{1n}(x), v_{2n}(x)) \in \underline{d}_{u,\xi}f(x, u(x) + \theta_n h(x), \nabla u(x) + \theta_n \nabla h(x))$ and $(0, w_{1n}(x), w_{2n}(x)) \in \overline{d}_{u,\xi}f(x, u(x) + \theta_n h(x), \nabla u(x) + \theta_n \nabla h(x))$ such that

$$\frac{1}{\alpha_n}\big(f(x, u(x) + \alpha_n h(x), \nabla u(x) + \alpha_n \nabla h(x)) - f(x, u(x), \nabla u(x))\big) \\ = \langle v_{1n}(x) + w_{1n}(x), h(x)\rangle + \langle v_{2n}(x) + w_{2n}(x), \nabla h(x)\rangle.$$

Hence by the growth condition on $D_{u,\xi}f(\cdot)$ (see Def. 2.1.1) there exist $C > 0$ and a.e. nonnegative function $\gamma \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ such that

$$\frac{1}{\alpha_n}\big|f(x, u(x) + \alpha_n h(x), \nabla u(x) + \alpha_n \nabla h(x)) - f(x, u(x), \nabla u(x))\big| \\ \le 2\big(\gamma(x) + C(|u(x) + \theta_n h(x)|^{p-1} + |\nabla u(x) + \theta_n \nabla h(x)|^{p-1})\big)\big(|h(x)| + |\nabla h(x)|\big)$$

for a.e. $x \in \Omega$ in the case $1 \le p < +\infty$, and there exists an a.e. nonnegative function $\beta_N \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ such that

$$\frac{1}{\alpha_n}\big|f(x, u(x) + \alpha_n h(x), \nabla u(x) + \alpha_n \nabla h(x)) - f(x, u(x), \nabla u(x))\big| \le 2\beta_N(x)\big(|h(x)| + |\nabla h(x)|\big)$$

for a.e. $x \in \Omega$ in the case $p = +\infty$, where $N = \|u\|_{1,\infty} + \alpha_* \|h\|_{1,\infty}$ and $\alpha_* = \max_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$. Now, taking into account the fact that $u, h \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ and applying Hölder's inequality in the case $1 < p < +\infty$ one gets that the first two terms in (2.7) are dominated by an integrable function independent of n.

Let us now turn to the third term in (2.7). The fact that the last term is dominated by an integrable function can be proved in exactly the same way. By applying the mean value theorem for codifferentiable functions and Lemma 2.1.1 one obtains that for any $n \in \mathbb{N}$ and for a.e. $x \in \Omega$ there exist $\theta_n \in (0, \alpha_n)$ and $(a_n(x), v_{1n}(x), v_{2n}(x)) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))$ such that

$$\Phi_f(x, u(x), \nabla u(x); \theta_n h(x), \theta_n \nabla h(x)) = a_n(x) + \langle v_{1n}(x), \theta_n h(x) \rangle + \langle v_{2n}(x), \theta_n \nabla h(x) \rangle$$
$$\frac{1}{\alpha_n} \Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big) = \langle v_{1n}(x), h(x) \rangle + \langle v_{2n}(x), \nabla h(x) \rangle$$

(here we used the fact that $\Phi_f(x, u(x), \nabla u(x); 0, 0) = 0$ by the definition of codifferential). Hence utilising the growth condition on $D_{u,\xi} f(\cdot)$ in the same way as above one can easily verify that the third term in (2.7) is dominated by an integrable function independent of n as well. Consequently, applying Lebesgue's dominated convergence theorem one obtains that $\int_\Omega g_n(x)\, dx \to 0$ as $n \to \infty$ or, equivalently, (2.6) holds true (see the definition g_n, formula (2.7)).

Let us check that

$$\int_\Omega \Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big)\, dx = \max_{(A, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)} (A + \langle x^*, \alpha_n h \rangle) \tag{2.8}$$

for all $n \in \mathbb{N}$, where $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ is defined in Theorem 2.1.1. The validity of a similar equality involving Ψ_f and $\overline{d}\mathcal{I}(u)$ can be proved in the same way. Then applying (2.6) one obtains that equality (2.5) holds true and the proof is complete.

By the definition of Φ_f for any measurable selection $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ of the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ one has

$$a(x) + \alpha_n \langle v_1(x), h(x) \rangle + \alpha_n \langle v_2(x), \nabla h(x) \rangle \le \Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big)$$

for a.e. $x \in \Omega$ and for all $n \in \mathbb{N}$, which obviously implies that the inequality

$$\sup_{(A, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)} (A + \langle x^*, \alpha_n h \rangle) \le \int_\Omega \Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big)\, dx$$

holds true for all $n \in \mathbb{N}$ (see (2.3)). On the other hand, observe that by definition

$$\Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big) \in \Big\{ a + \alpha_n \langle v_1, h(x) \rangle + \alpha_n \langle v_2, \nabla h(x) \rangle \in \mathbb{R} \Bigm| (a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x)) \Big\}$$

for a.e. $x \in \Omega$ and for all $n \in \mathbb{N}$. As was noted above, from the codifferentiability conditions in follows that the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ is measurable. Therefore, by Filippov's theorem [18, Thrm. 8.2.10] for any $n \in \mathbb{N}$ there exists a measurable selection $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ of the set-valued map $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ such that

$$\Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big) = a(x) + \alpha_n \langle v_1(x), h(x) \rangle + \alpha_n \langle v_2(x), \nabla h(x) \rangle$$

for a.e. $x \in \Omega$, which implies that for the corresponding element $(A, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)$ (see (2.3)) one has

$$\int_\Omega \Phi_f\big(x, u(x), \nabla u(x); \alpha_n h(x), \alpha_n \nabla h(x)\big)\, dx = A + \langle x^*, \alpha_n h \rangle.$$

Thus, equality (2.8) holds true and the proof is complete. □

Next we prove that the pair $D\mathcal{I}(u) = [\underline{d}\mathcal{I}(u), \overline{d}\mathcal{I}(u)]$ defined in Theorem 2.1.1 is indeed a codifferential of $\mathcal{I}$ at u. According to the definition of codifferential (see Proposition 1.2.1), we need to prove that both sets $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ and $\overline{d}\mathcal{I}(u)$ are convex and compact in the corresponding product topology. We will present a relatively simple proof of this results in the case $1 < p \le +\infty$. A much more cumbersome and technically involved proof in the case $p = 1$ can be found in [136].

Lemma 2.1.3. *Let f satisfy the codifferentiability conditions of order $p \in [1, +\infty]$ and let either $1 < p \le +\infty$ or the set Ω be bounded and have the segment property. Then for any $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ the sets $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ and $\overline{d}\mathcal{I}(u)$ defined in Theorem 2.1.1 are convex and compact in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times w^*$. Furthermore,* $\max\{A \colon (A, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)\} = \min\{B \colon (B, y^*) \in \overline{d}\mathcal{I}(u)\} = 0$.

Proof. Fix any $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. We prove this lemma only for the hypodifferential $\underline{d}\mathcal{I}(u)$, since the proof for the hyperdifferential $\overline{d}\mathcal{I}(u)$ is exactly the same.

Choose any $(A_1, x_1^*), (A_2, x_2^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)$, and let $z_i(\cdot) = (a_i(\cdot), v_{1i}(\cdot), v_{2i}(\cdot))$ be a measurable selection of the set-valued mapping $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ corresponding to (A_i, x_i^*), $i \in \{1, 2\}$. For a.e. $x \in \Omega$ the set $\underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))$ is convex by definition. Consequently, for any $\alpha \in [0, 1]$ the map $\alpha z_1(\cdot) + (1 - \alpha) z_2(\cdot)$ is a measurable selection of the set-valued map $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$, which obviously corresponds to the pair $Z_\alpha = (\alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2, \alpha x_1^* + (1 - \alpha) x_2^*))$. Therefore, $Z_\alpha \in \underline{d}\mathcal{I}(u)$ for any $\alpha \in [0, 1]$ and one can conclude that the set $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ is convex.

By the definition of codifferential for a.e. $x \in \Omega$ and for all $(a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))$ one has $a \le 0$, which obviously implies that for any $(A, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)$ one has $A \le 0$. Furthermore, by definition $\max\{a \mid (a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))\} = 0$ for a.e. $x \in \Omega$, that is, for a.e. $x \in \Omega$ one has $0 \in \{a \mid (a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))\}$. As was noted in the proof of Lemma 2.1.2, the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ is measurable. Therefore, by Filippov's theorem [18, Thrm. 8.2.10] there exists a measurable selection $(a_0(\cdot), v_{10}(\cdot), v_{20}(\cdot))$ of $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$

such that $a_0(x) = 0$ for a.e. $x \in \Omega$. Consequently, one has $(0, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)$ for x^* defined as

$$\langle x^*, h\rangle = \int_\Omega \big(\langle v_{10}(x), h(x)\rangle + \langle v_{20}(x), \nabla h(x)\rangle\big)\, dx \quad \forall h \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m),$$

which yields $\max\{A \colon (A, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)\} = 0$.

Now we turn to the proof of the compactness of $\underline{d}\mathcal{I}(u)$. We consider two cases.

Case $1 < p < +\infty$**.** Denote by $\mathcal{F}$ the set of all measurable selections of the set-valued map $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$. By the codifferentiability conditions (see Def. 2.1.1) there exist $C > 0$ and a.e. nonnegative functions $\beta \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ and $\gamma \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ such that for any $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \in \mathcal{F}$ and for a.e. $x \in \Omega$ one has

$$\begin{gathered} |a(x)| \le \beta(x) + C\big(|u(x)|^p + |\nabla u(x)|^p\big), \\ \max\{|v_1(x)|, |v_2(x)|\} \le \gamma(x) + C\big(|u(x)|^{p-1} + |\nabla u(x)|^{p-1}\big). \end{gathered} \tag{2.9}$$

Observe that the right-hand side of the first inequality belongs to $\mathrm{L}^1(\Omega)$, while the right-hand side of the second inequality belongs to $\mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ by virtue of the facts that $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ and $p'(p-1) = p$. Thus, $\mathcal{F}$ is a bounded subset of the space $X = \mathrm{L}^1(\Omega) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d})$.

For any $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \in \mathcal{F}$ denote by $\mathcal{T}(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ the pair $(A, x^*) \in \mathbb{R} \times (\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m))^*)$ such that $A = \int_\Omega a(x)\, dx$ and

$$\langle x^*, h\rangle = \int_\Omega \big(\langle v_1(x), h(x)\rangle + \langle v_2(x), \nabla h(x)\rangle\big)\, dx \quad \forall h \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m).$$

Clearly, $\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \underline{d}\mathcal{I}(u)$ (see (2.3)). Furthermore, one can easily verify that $\mathcal{T}$ is a continuous linear operator from the vector space $X = \mathrm{L}^1(\Omega) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d})$ endowed with the weak topology to the space $(\mathbb{R} \times Y^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y))$ with $Y = \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Indeed, fix any open subset $\mathcal{V}$ of the space $(\mathbb{R} \times Y^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y))$. Let us check that its preimage $\mathcal{U} = \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{V})$ is weakly open in X. To this end, fix any triplet $(a, v_1, v_2) \in \mathcal{U}$ and denote $(A, x^*) = \mathcal{T}(a, v_1, v_2) \in \mathcal{V}$. From the fact that $\mathcal{V}$ is open in the corresponding topology it follows that there exist $\varepsilon > 0$ and functions $h_1, \ldots, h_n \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ such that

$$\mathcal{V}_\varepsilon(h_1, \ldots, h_n) = \Big\{(B, y^*) \in \mathbb{R} \times Y^* \;\Big|\; |B - A| < \varepsilon, \quad \max_{i \in 1:\, n} \big|\langle y^* - x^*, h_i\rangle\big| < \varepsilon\Big\} \subseteq \mathcal{V}.$$

Define

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\varepsilon(h_1, \ldots, h_n) = \bigg\{(b, w_1, w_2) \in X \;\bigg|\; & \Big|\int_\Omega (b(x) - a(x))\, dx\Big| < \varepsilon, \\ & \max_{i \in 1:\, n} \Big|\int_\Omega \langle w_1(x) - v_1(x), h_i(x)\rangle\, dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \max_{i \in 1:\, n} \Big|\int_\Omega \langle w_2(x) - v_2(x), \nabla h_i(x)\rangle\, dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}\bigg\}. \end{aligned}$$

Clearly, this set is a neighbourhood of (a, v_1, v_2) in the weak topology on X and, moreover, its image under the operator $\mathcal{T}$ is contained in $\mathcal{V}_\varepsilon(h_1, \ldots, h_n) \subseteq \mathcal{V}$. Hence $\mathcal{U}_\varepsilon(h_1, \ldots, h_n) \subseteq \mathcal{U}$, that is, for any point of the set $\mathcal{U}$ there exists a weakly open neighbourhood of this point contained in $\mathcal{U}$. Consequently, the set $\mathcal{U}$ is weakly open in X and the operator $\mathcal{T}$ is continuous with respect to the chosen topologies. Therefore, it is sufficient to check that the set $\mathcal{F}$ is weakly compact. Then one can conclude that the set $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ is compact in the topology $\tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y)$ as the image of the compact set $\mathcal{F}$ under the continuous map $\mathcal{T}$.

By the by the Eberlein-Šmulian theorem it suffice to verify that $\mathcal{F}$ is weakly sequentially compact. Choose any sequence $z_n(\cdot) = (a_n(\cdot), v_{1n}(\cdot), v_{2n}(\cdot)) \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$. From the second inequality in (2.9) it follows that the sequence $\{(v_{1n}(\cdot), v_{2n}(\cdot))\}$ is bounded in $\mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d})$. Hence taking into account the fact that the space $\mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ is reflexive (recall that $1 < p < +\infty$, which yields $1 < p' < +\infty$) one obtains that there exists a subsequence $\{(v_{1n_k}(\cdot), v_{2n_k}(\cdot))\}$ weakly converging to some $(v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ in $\mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d})$.

Let us now turn to the sequence $\{a_n(\cdot)\}$. Denote $g(\cdot) = \beta(\cdot) + C(|u(\cdot)|^p + |\nabla u(\cdot)|^p)$ (see (2.9)). Clearly, $g \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ and $\int_{|a_{n_k}| > g} |a_{n_k}(x)| dx = 0 < \varepsilon$ for any $\varepsilon > 0$ and all $k \in \mathbb{N}$. Therefore, by [41, Thrm. 4.7.20] the closure of the set $\{a_{n_k}(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ in the weak topology is weakly compact in $\mathrm{L}^1(\Omega)$ or, equivalently, weakly sequentially compact in $\mathrm{L}^1(\Omega)$ by the Eberlein-Šmulian theorem. Consequently, one can extract a subsequence of the sequence $\{a_{n_k}(\cdot)\}$, which we denote again by $\{a_{n_k}(\cdot)\}$, weakly converging to some $a \in \mathrm{L}^1(\Omega)$.

Observe that the subsequence $z_{n_k}(\cdot) = (a_{n_k}(\cdot), v_{1n_k}(\cdot), v_{2n_k}(\cdot))$, $k \in \mathbb{N}$, weakly converges to the function $z(\cdot) = (a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ in $X = \mathrm{L}^1(\Omega) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d})$. By Mazur's lemma there exists a sequence $\widehat{z}_k(\cdot)$ of convex combinations of elements of the sequence $z_{n_k}(\cdot)$ strongly converging to $z(\cdot)$. As is well-known (see, e.g. [179, Exercise 6.9]), one can extract a subsequence $\{\widehat{z}_{k_l}(\cdot)\}$ that converges to $z(\cdot)$ almost everywhere. From the convexity of the hypodifferential $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ it follows that $\widehat{z}_k(\cdot)$ is a measurable selection of the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ for any $k \in \mathbb{N}$. Hence bearing in mind the fact that the hypodifferential $\underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))$ is closed for a.e. $x \in \Omega$ one obtains that $z(\cdot)$ is a measurable selection of $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$, i.e. $z(\cdot) \in \mathcal{F}$. Thus, we found a subsequence of the original sequence $\{z_n(\cdot)\} \subset \mathcal{F}$ weakly converging to an element of $\mathcal{F}$. In other words, $\mathcal{F}$ is weakly sequentially compact.

Case $p = +\infty$. Let, as above, $\mathcal{F}$ be the set of all measurable selections of the map $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$. By the codifferentiability conditions (Def. 2.1.1) there there exists an a.e. nonnegative function $\beta_N \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ such that for any $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \in \mathcal{F}$ one has

$$\max\Big\{|a(x)|, |v_1(x)|, |v_2(x)|\Big\} \le \beta_N(x) \tag{2.10}$$

for a.e. $x \in \Omega$ (here $N = \|u\|_{1,\infty}$). Thus, $\mathcal{F}$ is a bounded subset of the space $X = \mathrm{L}^1(\Omega; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d})$.

Let the operator $\mathcal{T}$ be defined as in the case $1 < p < +\infty$. Then $\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \underline{d}\mathcal{I}(u)$ and, as is easily seen, $\mathcal{T}$ is a continuous linear operator from the space X equipped with the weak topology to the space $(\mathbb{R} \times Y^*, \tau_{\mathbb{R}} \times \sigma(Y^*, Y))$ with $Y = \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Therefore, it suffice to check that the set $\mathcal{F}$ is weakly compact in X. Then one can conclude that the set $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ is compact as a continuous image of a compact set.

From (2.10) it follows that for any $\varepsilon > 0$ and for all $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \in \mathcal{F}$ one has

$$\int_{|a|>\beta_N} |a|\, d\mu = 0 < \varepsilon, \quad \int_{|v_1|>\beta_N} |v_1|\, d\mu = 0 < \varepsilon, \quad \int_{|v_2|>\beta_N} |v_2|\, d\mu = 0 < \varepsilon,$$

where μ is the Lebesgue measure. Consequently, by [41, Thrm. 4.7.20] the closure of the set $\mathcal{F}$ in the weak topology is weakly compact in X, which by the Eberlein-Šmulian theorem implies that it is weakly sequentially compact. Let us verify that the set $\mathcal{F}$ itself is weakly sequentially compact. Then by applying the Eberlein-Šmulian theorem once again we arrive at the desired result.

Indeed, let $\{z_n\} \subset \mathcal{F}$ be an arbitrary sequence. By the weak sequential compactness of the weak closure of $\mathcal{F}$ there exists a subsequence $\{z_{n_k}\}$ weakly converging to some $z \in X$. By Mazur's lemma there exists a sequence of convex combinations $\{\widehat{z}_k\}$ of elements of the sequence $\{z_{n_k}\}$ strongly converging to z, which implies that there exists a subsequence $\{\widehat{z}_{k_l}\}$ converging to z almost everywhere. Observe that each triplet $\widehat{z}_{k_l}(\cdot)$ is a measurable selection of $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ due to the definition of $\mathcal{F}$ and the fact that this multifunction is convex-valued. Therefore, bearing in mind the fact that the set $\underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))$ is closed for a.e. $x \in \Omega$ one obtains that $z(\cdot)$ is a measurable selection of the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$. Thus, $z \in \mathcal{F}$, i.e. the subsequence $\{z_{n_k}\}$ weakly converges to an element of the set $\mathcal{F}$, which means that this set is weakly sequentially compact. $\square$

Remark 2.1.3. Let us note that the proofs of the cases $1 < p < +\infty$ and $p = +\infty$ cannot be extended to the case $p = 1$ due to the fact that in this case $\mathcal{F}$ is a subset of the space $X = \mathrm{L}^1(\Omega) \times \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m) \times \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d})$ and one has to prove its compactness not in the weak, but in a coarser topology (the terms L^∞ from the definition of X must be endowed with the weak* topology, i.e. the topology $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$), which makes the Eberlein-Šmulian theorem and Mazur's lemma inapplicable. Therefore the proof of the compatness of the hypodifferential $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ in the case $p = 1$ should be based on different ideas (see the author's paper [136] for more details).

Let us finally prove that the functional $\mathcal{I}$ is, in fact, *continuously* codifferentiable. For any subset C of a metric space (M, d) and a point $x \in M$ denote, as above, $\operatorname{dist}(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$.

Lemma 2.1.4. *Let f satisfy the codifferentiability conditions of order $p \in [1, +\infty]$ and suppose that either $1 < p \leq +\infty$ or the set-valued maps $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ and $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ have the form* (2.4) *for some* *vectors* $v_{1i}, w_{1j} \in \mathbb{R}^m$, $v_{2i}, w_{2j} \in \mathbb{R}^{m \times d}$, *and Carathéodory functions* f_i *and* g_j, $i \in I = \{1, \ldots, \ell\}$ *and* $j \in J = \{1, \ldots, r\}$. *Then the set-valued mappings* $\underline{d}\mathcal{I}(\cdot)$ *and* $\overline{d}\mathcal{I}(\cdot)$ *defined in Theorem 2.1.1 are Hausdorff continuous.*

Proof. We prove the statement of the lemma only for the hypodifferential mapping $\underline{d}\mathcal{I}(\cdot)$, since the proof of the lemma for $\overline{d}\mathcal{I}(\cdot)$ is exactly the same.

Arguing by reductio ad absurdum, suppose that the multifunction $\underline{d}\mathcal{I}(\cdot)$ is not Hausdorff continuous at a point $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Then there exist $\theta > 0$ and a sequence $\{u_n\} \subset \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ converging to u such that $d_H(\underline{d}\mathcal{I}(u_n), \underline{d}\mathcal{I}(u)) > \theta$ for all $n \in \mathbb{N}$. Replacing, if necessary, the sequence $\{u_n\}$ with its subsequence, one can suppose that u_n converges to u almost everywhere and ∇u_n converges to ∇u almost everywhere.

By the definition Hausdorff distance two cases are possible. Namely, there exists a subsequence, which we denote again by $\{u_n\}$, such that one of the following inequalities hold true:

$$\sup_{(B,y^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u_n)} \inf_{(A,x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)} \sqrt{|B - A|^2 + \|y^* - x^*\|^2} > \theta \tag{2.11}$$

$$\sup_{(A,x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)} \inf_{(B,y^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u_n)} \sqrt{|B - A|^2 + \|y^* - x^*\|^2} > \theta.$$

For the sake of shortness we will consider only the case when the first inequality holds true, since the proof of the case when the second inequality holds true almost literally repeats the proof of the first case (see the author's paper [154] for more details).

From (2.11) it follows that for any $n \in \mathbb{N}$ there exists $(A_n, x_n^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u_n)$ satisfying the inequality $\operatorname{dist}((A_n, x_n^*), \underline{d}\mathcal{I}(u)) \ge \theta$. Denote by $z_n(\cdot) = (a_n(\cdot), v_{1n}(\cdot), v_{2n}(\cdot))$ a measurable selection of the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_n(\cdot), \nabla u_n(\cdot))$ corresponding to the pair (A_n, x_n^*) (see (2.3)). We consider the cases $p > 1$ and $p = 1$ separately

Case $1 < p = +\infty$**.** Recall that $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ is a convex and compact-valued multifunction. Furthermore, as was shown in the proof of Lemma 2.1.2, the codifferentiability conditions guarantee that this multifunction is measurable. Therefore, for any $n \in \mathbb{N}$ and for a.e. $x \in \Omega$ the set

$$R_n(x) = \Big\{ (a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x)) \;\Big|\; \operatorname{dist}\big(z_n(x), \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))\big)^2 = |a_n(x) - a|^2 + |v_{1n}(x) - v_1|^2 + |v_{2n}(x) - v_2|^2 \Big\}$$

(i.e. $R_n(x)$ is the set of points at which the infimum in the definition of the distance between $z_n(x)$ and the set $\underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))$ is attained) is nonempty and the set-valued mapping $R_n(\cdot)$ is measurable by [18, Thrm. 8.2.11].

Let $z_n^0(\cdot)$ be any measurable selection of the multifunction $R_n(\cdot)$, which exists by [18, Thrm. 8.1.3]. Define a function $\widehat{z}_n(\cdot) = (\widehat{a}_n(\cdot), \widehat{v}_{1n}(\cdot), \widehat{v}_{2n}(\cdot))$ as follows:

$$\widehat{z}_n(x) = \begin{cases} z_n^0(x), & \text{if } z_n(x) \notin \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x)), \\ z_n(x), & \text{othwerwise.} \end{cases}$$

Clearly, $\widehat{z}_n(\cdot)$ is a selection of the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$. Furthermore, it is measurable due to the fact that the set of all those $x \in \Omega$ for which $z_n(x) \notin \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))$ is measurable by [18, Crlr. 8.2.13, part 2].

By the codifferentiability conditions (see Def. 2.1.1) the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ is a Carathéodory map. Thus, for a.e. $x \in \Omega$ the set-valued map $(u, \xi) \mapsto \underline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi)$ is continuous. Therefore, for a.e. $x \in \Omega$ one has

$$\lim_{n \to \infty} d_H(\underline{d}_{u,\xi} f(x, u_n(x), \nabla u_n(x)), \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x))) = 0.$$

Hence, in particular, $\operatorname{dist}(z_n(x), \underline{d}_{u,\xi} f(x, u(x), \nabla u(x)) \to 0$ as $n \to \infty$, which implies that the sequence $\{z_n - \widehat{z}_n\}$ converges to zero almost everywhere. Let us prove that this sequence converges to zero in $\mathrm{L}^1(\Omega) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d})$. To this end, we shall utilise Vitali's theorem characterising convergence in L^p-spaces with $1 \le p < +\infty$ (see, e.g. [164, Theorem III.6.15]). Note that $1 \le p' < +\infty$, since we consider the case $1 < p \le +\infty$.

Fix any $\varepsilon > 0$. By the growth condition on the codifferential mapping $D_{u,\xi} f$ (see Def. 2.1.1) there exist $C > 0$ and an a.e. nonnegative function $\beta \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ such that

$$|a_n(x) - \widehat{a}_n(x)| \le 2\beta(x) + C\big(|u(x)|^p + |u_n(x)|^p + |\nabla u(x)|^p + |\nabla u_n(x)|^p\big) \tag{2.12}$$

for a.e. $x \in \Omega$ in the case $1 < p < +\infty$, and there exists an a.e. nonnegative function $\beta_N \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ such that $|a_n(x) - \widehat{a}_n(x)| \le 2\beta_N(x)$ for a.e. $x \in \Omega$ in the case $p = +\infty$ (here $N = \max_{n \in \mathbb{N}}\{\|u\|_{1,\infty}, \|u_n\|_{1,\infty}\}$). If $p = +\infty$, then the sequence $\{a_n - \widehat{a}_n\}$ converges to zero in $\mathrm{L}^1(\Omega)$ by Lebesgue's dominated convergence theorem. Therefore, let us consider the case $1 < p < +\infty$.

By the absolute continuity of the Lebesgue integral there exists $\delta_1 > 0$ such that for any measurable set $D \subseteq \Omega$ with $\mu(D) < \delta_1$ (here μ is the Lebesgue measure) one has

$$\int_D \beta d\mu < \frac{\varepsilon}{10}, \quad \int_D |u|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{5C}, \quad \int_D |\nabla u|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{5C}.$$

Moreover, by the "only if" part of the Vitali convergence theorem, the convergence of u_n to u in $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ implies that there exists $\delta_2 > 0$ such that for any measurable set $D \subseteq \Omega$ with $\mu(D) < \delta_2$ one has

$$\int_D |u_n|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{5C}, \quad \int_D |\nabla u_n|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{5C} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Hence with the use of (2.12) one obtains that for any measurable set $D \subseteq \Omega$ with $\mu(D) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ one has $\int_D |a_n - \widehat{a}_n| d\mu < \varepsilon$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Denote $\Omega_N = \{x \in \Omega \mid |x| \le N\}$. From the fact that $\beta \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ and $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ it follows that there exists $N \in \mathbb{N}$ such that

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_N} \beta d\mu < \frac{\varepsilon}{10}, \quad \int_{\Omega \setminus \Omega_N} |u|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{5C}, \quad \int_{\Omega \setminus \Omega_N} |\nabla u|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{5C}$$

(see, e.g. [41, Prp. 2.6.2]). Furthermore, by the "only if" part of the Vitali convergence theorem there exists a measurable set $E_\varepsilon \subseteq \Omega$ such that $\mu(E_\varepsilon) < +\infty$ and

$$\int_{\Omega \setminus E_\varepsilon} |u_n|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{5C}, \quad \int_{\Omega \setminus E_\varepsilon} |\nabla u_n|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{5C} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Therefore, by applying (2.12) one obtains that $\int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} |a_n - \widehat{a}_n| d\mu < \varepsilon$ for all $n \in \mathbb{N}$, where $\Omega_\varepsilon = \Omega_N \cup E_\varepsilon$. Hence with the use of the "if" part of the Vitali convergence theorem one concludes that the sequence $\{a_n - \widehat{a}_n\}$ converges to zero in $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

Let us now consider the sequence $\{v_{1n} - \widehat{v}_{1n}\}$. By the growth condition on the codifferential mapping $D_{u,\xi} f$ (see Def. 2.1.1) there exist $C > 0$ and a.e. nonnegative function $\gamma \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ such that

$$\begin{aligned} |v_{1n}(x) - \widehat{v}_{1n}(x)|^{p'} &\le 2^{p'} \left(|v_{1n}(x)|^{p'} + |\widehat{v}_{2n}(x)|^{p'} \right) \\ &\le 2^{p'} 3^{p'} \Big(2|\gamma(x)|^{p'} + C^{p'} \left(|u(x)|^p + |\nabla u(x)|^p + |u_n(x)|^p + |\nabla u_n(x)|^p \right) \Big) \end{aligned}$$

for a.e. $x \in \Omega$ in the case $1 < p < +\infty$, and there exists an a.e. nonnegative function $\beta_N \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ such that $|v_{1n}(x) - \widehat{v}_{1n}(x)| \le 2\beta_N(x)$ for a.e. $x \in \Omega$ in the case $p = +\infty$. Now, arguing in the same way as above and applying Vitali's convergence theorem in the case $1 < p < +\infty$ and Lebesgue's dominated convergence theorem in the case $p = +\infty$ one can readily verify that $\{v_{1n} - \widehat{v}_{1n}\}$ converges to zero in $\mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. The convergence of $\{v_{2n} - \widehat{v}_{2n}\}$ to zero in $\mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d})$ is proved in exactly the same way.

Denote by $(\widehat{A}_n, \widehat{x}_n^*)$ an element of $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ corresponding to the selection $\widehat{z}_n(\cdot) = (\widehat{a}_n(\cdot), \widehat{v}_{1n}(\cdot), \widehat{v}_{2n}(\cdot))$ of the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ (see (2.3)). Let us now verify that $|A_n - \widehat{A}_n| + \|x_n^* - \widehat{x}_n^*\| \to 0$ as $n \to \infty$. Indeed, for any $n \in \mathbb{N}$ one has

$$|A_n - \widehat{A}_n| \le \int_\Omega |a_n(x) - \widehat{a}_n(x)| \, dx = \|a_n - \widehat{a}_n\|_1,$$

which implies that $|A_n - \widehat{A}_n| \to 0$ as $n \to \infty$. Similarly, with the use of Hölder's inequality for any $h \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ one has

$$\begin{aligned} \big| \langle x_n^* - \widehat{x}_n^*, h \rangle \big| &\le \int_\Omega \big| \langle v_{1n}(x) - \widehat{v}_{1n}(x), h(x) \rangle \big| \, dx + \int_\Omega \big| \langle v_{2n}(x) - \widehat{v}_{2n}(x), \nabla h(x) \rangle \big| \, dx \\ &\le \Big(\|v_{1n} - \widehat{v}_{1n}\|_{p'} + \|v_{2n} - \widehat{v}_{2n}\|_{p'} \Big) \|h\|_{1,p}, \end{aligned}$$

which implies that $\|x_n^* - \widehat{x}_n^*\| \leq \|v_{1n} - \widehat{v}_{1n}\|_{p'} + \|v_{2n} - \widehat{v}_{2n}\|_{p'}$ for all $n \in \mathbb{N}$, and $\|x_n^* - \widehat{x}_n^*\| \to 0$ as $n \to \infty$. Consequently, bearing in mind the fact that $(\widehat{A}_n, \widehat{x}_n^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)$ for all $n \in \mathbb{N}$ one obtains that $\operatorname{dist}((A_n, x_n^*), \underline{d}\mathcal{I}(u)) \to 0$ as $n \to \infty$, which contradicts the inequality $\operatorname{dist}((A_n, x_n^*), \underline{d}\mathcal{I}(u)) \geq \theta$. Thus, the proof of the proof of the first case for $1 < p \leq +\infty$ is complete.

Case $p = 1$. Let S^ℓ be the standard (probability) simplex in $\mathbb{R}^\ell$, i.e.

$$S^\ell = \Big\{ \alpha = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(\ell)}) \in \mathbb{R}^l \;\Big|\; \alpha^{(1)} + \ldots + \alpha^{(\ell)} = 1,\ \alpha^{(i)} \geq 0\ \ \forall i \in \{1, \ldots, \ell\} \Big\}.$$

For any $\alpha \in \mathbb{R}^\ell$, $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}^m$, and $\xi \in \mathbb{R}^{m \times d}$ define

$$g(x, u, \xi, \alpha) = \sum_{i=1}^{l} \alpha^{(i)} (f_i(x, u, \xi), v_{1i}, v_{2i}). \tag{2.13}$$

It is easily seen that g is a Carathéodory map and $g(x, u, \xi, S^\ell) = \underline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi)$ for all (x, u, ξ) by the definition of convex hull (see (2.4)).

Recall that $z_n(\cdot) = (a_n(\cdot), v_{1n}(\cdot), v_{2n}(\cdot))$ is a measurable selection of the set-valued map $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_n(\cdot), \nabla u_n(\cdot))$ such that for the corresponding element $(A_n, x_n^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u_n)$ one has $\operatorname{dist}((A_n, x_n^*), \underline{d}\mathcal{I}(u)) \geq \theta$ for all $n \in \mathbb{N}$. By definition for any $n \in \mathbb{N}$ and a.e. $x \in \Omega$ one has $z_n(x) \in g(x, u_n(x), \nabla u_n(x), S^\ell)$, which by Filippov's theorem [18, Thrm. 8.2.10] implies that for any $n \in \mathbb{N}$ there exists a measurable function $\alpha_n \colon \Omega \to S^\ell$ such that $z_n(x) = g(x, u_n(x), \nabla u_n(x), \alpha_n(x))$ for a.e. $x \in \Omega$. Define

$$\widehat{z}_n(\cdot) = (\widehat{a}_n(\cdot), \widehat{v}_{1n}(\cdot), \widehat{v}_{2n}(\cdot)) = g(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot), \alpha_n(\cdot)).$$

Clearly, $\widehat{z}_n$ is a measurable selection of the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$. Denote by $(\widehat{A}_n, \widehat{x}_n^*)$ an element of $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ corresponding to this selection (see (2.3)).

From the definition of g (see (2.13)) and the definition of $\widehat{z}_n$ it follows that $x_n^* = \widehat{x}_n^*$ for all $n \in \mathbb{N}$. Furthermore, for all $n \in \mathbb{N}$ and a.e. $x \in \Omega$ one has

$$|a_n(x) - \widehat{a}_n(x)| \leq \sum_{i=1}^{\ell} \alpha^{(i)}(x) \big| f_i(x, u_n(x), \nabla u_n(x)) - f_i(x, u(x), \nabla u(x)) \big|.$$

Hence $|a_n(x) - \widehat{a}_n(x)| \to 0$ as $n \to \infty$ for a.e. $x \in \Omega$, since by our assumptions $u_n \to u$ and $\nabla u_n \to \nabla u$ almost everywhere and f_i are Carathéodory functions.

By the growth condition on $D_{u,\xi} f(\cdot)$ (see Def. 2.1.1) there exist $C > 0$ and an a.e. nonnegative function $\beta \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ such that

$$|a_n(x) - \widehat{a}_n(x)| \leq \beta(x) + C\big(|u(x)| + |\nabla u(x)| + |u_n(x)| + |\nabla u_n(x)|\big)$$

for a.e. $x \in \Omega$. With the use of this inequality and Vitali's convergence theorem one can check that $|a_n - \widehat{a}_n|$ converges to zero in $\mathrm{L}^1(\Omega)$ as in the case $1 < p < +\infty$. Hence the sequence

$|A_n - \widehat{A}_n| \le \int_\Omega |a_n - \widehat{a}_n| d\mu$ converges to zero as $n \to \infty$, i.e. $|A_n - \widehat{A}_n| + \|x_n^* - \widehat{x}_n^*\| \to 0$ as $n \to \infty$. Therefore, $\operatorname{dist}((A_n, x_n^*), \underline{d}\mathcal{I}(u)) \to 0$ as $n \to \infty$, which once again contradicts the inequality $\operatorname{dist}((A_n, x_n^*), \underline{d}\mathcal{I}(u)) \ge \theta$. $\square$

Applying Theorems 2.1.1 and 1.2.1, Corollary 1.2.2, and Proposition 1.2.6 one obtains the following result on the quasidifferentiability of the functional $\mathcal{I}$.

Corollary 2.1.1. *Let f satisfy the codifferentiability conditions of order $p \in [1, +\infty]$, and let either $1 < p \le +\infty$ or the set Ω be bounded and have the segment property, and the set-valued maps $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ and $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ have the form* (2.4)*. Then the functional $\mathcal{I}$ is locally Lipschitz continuous, Hadamard quasidifferentiable at every $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, and one can define $\mathscr{D}\mathcal{I}(u) = [\underline{\partial}\mathcal{I}(u), \overline{\partial}\mathcal{I}(u)]$ with*

$$\underline{\partial}\mathcal{I}(u) = \{x^* \in X^* \mid (0, x^*) \in \underline{d}\mathcal{I}(u)\}, \quad \overline{\partial}\mathcal{I}(u) = \{y^* \in X^* \mid (0, y^*) \in \overline{d}\mathcal{I}(u)\},$$

where $X = W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ and the sets $\underline{d}\mathcal{I}(u)$ and $\overline{d}\mathcal{I}(u)$ are defined in Theorem 2.1.1.

Remark 2.1.4. Recall that by the definition of codifferential one has $a \le 0$ for any $(a, v_1, v_2) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi)$. Hence with the use of Theorem 2.1.1 and the corollary above one obtains that $x^* \in \underline{\partial}\mathcal{I}(u)$ if and only if there exists a measurable selection $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ of the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot))$ such that $a(x) = 0$ for a.e. $x \in \Omega$ and

$$\langle x^*, h \rangle = \int_\Omega \big(\langle v_1(x), h(x) \rangle + \langle v_2(x), \nabla h(x) \rangle \big)\, dx \quad \forall h \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m).$$

A similar statement holds true for $\overline{\partial}\mathcal{I}(u)$ as well.

As usual, denote by $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ the closure of the space $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ of infinitely differentiable functions $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ with compact support in the Sobolev space $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. To derive optimality conditions for problems with prescribed boundary conditions we will utilise the following corollary on the quasidifferentiability of the restriction of $\mathcal{I}$ to the space $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. This corollary can be proved by computing the codifferential of the restriction of $\mathcal{I}$ onto the space $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ with the use of Corollary 1.2.6 and then applying Theorem 1.2.1, Corollary 1.2.2, and Proposition 1.2.6.

Corollary 2.1.2. *Let f satisfy the codifferentiability conditions of order $p \in [1, +\infty]$, $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ be fixed, and let either $1 < p \le +\infty$ or the set Ω be bounded and have the segment property, and the set-valued maps $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ and $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ have the form* (2.4)*. Then the functional $\mathcal{J} \colon \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$, $\mathcal{J}(u) = \mathcal{I}(u_0 + u)$ is correctly defined, locally Lipschitz continuous, and Hadamard quasidifferentiable at every $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Furthermore, one can define*

$\mathscr{D}\mathcal{J}(u) = [\underline{\partial}\mathcal{J}(u), \overline{\partial}\mathcal{J}(u)]$ *with*

$$\underline{\partial}\mathcal{J}(u) = \Big\{ x^* \in X^* \;\Big|\; \langle x^*, h\rangle = \int_\Omega \big(\langle v_1(x), h(x)\rangle + \langle v_2(x), \nabla h(x)\rangle\big)\, dx \;\; \forall h \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m),$$
$$(0, v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \text{ is a measurable selection of } \underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_0(\cdot) + u(\cdot), \nabla u_0(\cdot) + \nabla u(\cdot)) \Big\}$$

$$\overline{\partial}\mathcal{J}(u) = \Big\{ y^* \in X^* \;\Big|\; \langle y^*, h\rangle = \int_\Omega \big(\langle w_1(x), h(x)\rangle + \langle w_2(x), \nabla h(x)\rangle\big)\, dx \;\; \forall h \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m),$$
$$(0, w_1(\cdot), w_2(\cdot)) \text{ is a measurable selection of } \overline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_0(\cdot) + u(\cdot), \nabla u_0(\cdot) + \nabla u(\cdot)) \Big\},$$

where $X = W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Remark 2.1.5. Note that without the assumption that the set-valued mappings $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ and $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ have the form (2.4) the functional $\mathcal{J}$ from the previous corollary is still correctly defined and quasidifferentiable (but not necessarily *Hadamard* quasidifferentiable) in the case $p = 1$, since this assumption is only needed to ensure the continuity of the multifunctions $\underline{d}\mathcal{I}(\cdot)$ and $\overline{d}\mathcal{I}(\cdot)$ in the case $p = 1$, which, in turn, is only needed to ensure that both $\mathcal{I}$ and $\mathcal{J}$ are *Hadamard* directionally differentiable (see Theorem 1.2.1 and Proposition 1.2.6).

2.2 Optimality Conditions for Nonsmooth Problems of the Calculus of Variations

This section is devoted to an analysis of optimality conditions for nonsmooth problems of the calculus of variations in terms of codifferentials. Our aim is to obtain these conditions with the use of general necessary optimality conditions for nonsmooth mathematical programming problems from the previous chapter. For the sake of shortness we will consider only the classical problem of the calculus of variations, a nonsmooth problem of Bolza with additional constraints at the boundary, and a nonsmooth isoperimetric problem, although the main results of this chapter can be easily extended to the case of more general variational problems.

2.2.1 Nonsmooth Classical Problem of the Calculus of Variations

We start with an unconstrained problem of the form

$$\min \mathcal{I}(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx, \quad u \in u_0 + \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m). \tag{2.14}$$

Here, as in the previous section, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ is an open set, $f \colon \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \to \mathbb{R}$, $f = f(x, u, \xi)$, is a nonsmooth function, while $u_0 \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ is a fixed function.

In essence, problem (2.14) can be viewed as the classical problem of minimising $\mathcal{I}(u)$ over the set of all those $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ for which $u|_{\partial\Omega} = \psi$ for some prespecified function ψ, where $\partial\Omega$ is the boundary of Ω (simply put $\psi = u_0|_{\partial\Omega}$). However, to avoid the usage of trace operators and corresponding assumptions on the domain Ω, we pose this classical "boundary value problem" in the abstract form (2.14).

Recall that a function $v \in \mathrm{L}^1_{loc}(\Omega)$ is called a weak divergence of a vector field $u \in \mathrm{L}^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$, provided

$$\int_\Omega v\varphi dx = -\int_\Omega \langle u, \nabla\varphi\rangle dx \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega).$$

In this case we write $v = \operatorname{div} u$. Denote by $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d}; \operatorname{div})$ the space of all those functions $u \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d})$ for which there exists the weak divergence $\operatorname{div} u = (\operatorname{div}(u_{11}, \ldots, u_{1d}), \ldots, \operatorname{div}(u_{m1}, \ldots, u_{md}))$ and $\operatorname{div} u \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Note that in the one-dimensional case (i.e. when $d = 1$) the weak divergence $\operatorname{div} u$ coincides with the weak derivative u', which implies that the space $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^{m\times 1}; \operatorname{div})$ coincides with the Sobolev space $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Theorem 2.2.1. *Let f satisfy the codifferentiability conditions of order $p \in [1, +\infty]$ and let either $1 < p \le +\infty$ or the set Ω be bounded and have the segment property. Let also u_* be a locally optimal solution of problem* (2.14). *Then for any measurable selection $(b(\cdot), w_1(\cdot), w_2(\cdot))$ of the set-valued map $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_*(\cdot), \nabla u_*(\cdot))$ such that $b(x) = 0$ for a.e. $x \in \Omega$ there exists $\zeta \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d}; \operatorname{div})$ satisfying the Euler-Lagrange inclusion*

$$(0, \operatorname{div}(\zeta)(x), \zeta(x)) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u_*(x), \nabla u_*(x)) + (b(x), w_1(x), w_2(x)) \quad \text{for a.e. } x \in \Omega. \qquad (2.15)$$

Proof. Define $\mathcal{J}(h) = \mathcal{I}(u_* + h)$ for any $h \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbb{R}^m)$. By Corollary 2.1.2 and Remark 2.1.5 the functional $\mathcal{J}$ is quasidifferentiable at $h = 0$. This function is obviously a point of local minimum of the functional $\mathcal{J}$. Therefore by the necessary optimality conditions in terms of quasidifferentials one has $0 \in \underline{\partial}\mathcal{J}(0) + y^*$ for all $y^* \in \overline{\partial}\mathcal{J}(0)$ (see Theorem 1.2.1 and Proposition 1.2.2).

Fix any measurable selection $(b(\cdot), w_1(\cdot), w_2(\cdot))$ of the set-valued mapping $x \mapsto \overline{d}_{u,\xi} f(x, u_*(x), \nabla u_*(x))$ such that $b(x) = 0$ for a.e. $x \in \Omega$ and define a linear functional y_0^* as follows:

$$\langle y_0^*, h\rangle = \int_\Omega \big(\langle w_1(x), h(x)\rangle + \langle w_2(x), \nabla h(x)\rangle\big)\, dx \quad \forall h \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbb{R}^m).$$

Observe that $y_0^* \in \overline{\partial}\mathcal{J}(0)$ by Corollary 2.1.2. Therefore there exists $x_0^* \in \underline{\partial}\mathcal{J}(0)$ such that $x_0^* + y_0^* = 0$. Hence by Corollary 2.1.2 there exists a measurable selection $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ of the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_*(\cdot), \nabla u_*(\cdot))$ such that $a(x) = 0$ for a.e. $x \in \Omega$ and

$$\int_\Omega \big(\langle v_1(x) + w_1(x), h(x)\rangle + \langle v_2(x) + w_2(x), \nabla h(x)\rangle\big)\, dx = 0 \quad \forall h \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbb{R}^m).$$

Define $\zeta = v_2 + w_2$. Then the equality above implies that there exists the weak divergence of ζ and $\operatorname{div}\zeta = v_1 + w_1$. From the growth condition on the codifferential mapping $D_{u,\xi} f(\cdot)$ (see the definition of codifferentiability conditions, Def. 2.1.1) it obviously follows that $v_2 + w_2 \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d})$ and $v_1 + w_1 \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Thus, $\zeta \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d}; \operatorname{div})$, and the Euler-Lagrange inclusion (2.15) holds true by the definition of ζ. □

Let us give an example illustrating optimality conditions from the theorem above.

Example 2.2.1. Let $d = 2$, $m = 1$, $p = 1$, and $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$. Consider the following problem:

$$\min_{u \in \mathrm{W}^{1,1}(\Omega)} \mathcal{I}(u) = \int_\Omega \Big(|u'_{x^{(1)}}(x)| - |u'_{x^{(2)}}(x)| \Big)\, dx, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.16}$$

In this case $f(x, u, \xi) = |\xi^{(1)}| - |\xi^{(2)}|$, and we define $u_0 = 0$ (see problem (2.14)). We want to know whether the function $u_* = 0$ is an optimal solution of problem (2.16).

Let us apply optimality conditions in term of the Clarke subdifferential first [57, Thrm. 4.6.1]. Denote $L(u, \xi) = |\xi^{(1)}| - |\xi^{(2)}|$. As is easily seen, the Clarke subdifferential of this function at the origin has the form:

$$\partial_{Cl} L(0, 0) = \operatorname{co}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\}.$$

Therefore, for the function $\zeta = 0$ one has $(\operatorname{div}\zeta(x), \zeta(x)) \in \partial_{Cl} L(u_*(x), \nabla u_*(x))$ for all $x \in \Omega$, i.e. optimality conditions in terms of the Clarke subdifferential [57, Thrm. 4.6.1] are satisfied at $u_* = 0$. One can redily verify that u_* also satisfied optimality conditions in terms of the so-called K-subdifferential [317, Thrm. 3.3].

Let us now check optimality conditions from Theorem 2.2.1. With the use of the codifferential calculus from the previous section one gets

$$\underline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi) = \operatorname{co}\big\{ (\pm\xi^{(1)} - |\xi^{(1)}|, 0, \pm 1, 0) \big\}, \quad \overline{d}_{u,\xi} f(x, u, \xi) = \operatorname{co}\big\{ (\pm\xi^{(2)} - |\xi^{(2)}|, 0, 0, \pm 1) \big\}$$

(here the first coordinate is a, the second is v_1, while the third and fourth ones are v_2 in the notation of the previous section). Therefore, as is readily seen, the integrand f satisfies the codifferentiability conditions of order $p = 1$.

For any $n \in \mathbb{N}$ define

$$w_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t \in \left[-1 + \frac{k-1}{n}, -1 + \frac{2k-1}{2n}\right), k \in \{1, \ldots, 2n\} \\ -1, & \text{if } t \in \left[-1 + \frac{2k-1}{2n}, -1 + \frac{k}{n}\right), k \in \{1, \ldots, 2n\}. \end{cases} \tag{2.17}$$

Clearly, the mapping $(0, w_1(\cdot), w_2(\cdot))$ with $w_1(x) = 0$ and $w_2 = (0, w_n(x^{(2)}))$ for all $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$ is a measurable selection of the multifunction $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_*(\cdot), \nabla u_*(\cdot))$ for all $n \in \mathbb{N}$.

To verify whether the optimality conditions from Theorem 2.2.1 hold true, suppose that there exists $\zeta \in \mathrm{L}^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^{2\times 1}; \mathrm{div})$ such that

$$(0, \mathrm{div}(\zeta)(x), \zeta(x)) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u_*(x), \nabla u_*(x)) + (0, w_1(x), w_2(x)) = \mathrm{co}\left\{(0, 0, \pm 1, w_n(x^{(2)}))\right\}$$

for a.e. $x \in \Omega$. Hence $\mathrm{div}(\zeta)(x) = 0$, $|\zeta_1(x)| \le 1$, and $\zeta_2(x) = w_n(x^{(2)})$ for a.e. $x \in \Omega$. Consequently, by the definition of weak divergence one has

$$\int_\Omega \left(\zeta_1(x)\varphi'_{x^{(1)}}(x) + w_n(x^{(2)})\varphi'_{x^{(2)}}(x)\right) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}_c^{\infty}(\Omega). \tag{2.18}$$

Since both w_n and ζ_1 belong to $\mathrm{L}^{\infty}(\Omega)$, the equality above holds true for all $\varphi \in \mathrm{W}_0^{1,1}(\Omega)$. Define $\psi_n(t) = 2n\int_{-1}^t w_n(\tau)\,d\tau$ for all $t \in (-1, 1)$, and for any $n \in \mathbb{N}$ put $\varphi_n(x) = (-(x^{(1)})^2 + 1)\psi_n(x^{(2)})$. Observe that $\varphi_n \in \mathrm{W}_0^{1,1}(\Omega)$ due to the fact that $\varphi_n(x) = 0$ for all $x \in \partial\Omega$, which due to (2.18) implies that

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega \langle \zeta(x), \nabla\varphi_n(x)\rangle\,dx &= \int_\Omega \Big(-2\zeta_1(x)x^{(1)}\psi_n(x^{(2)}) + 2n(-(x^{(1)})^2 + 1)\Big)\,dx \\ &= -\int_\Omega 2\zeta_1(x)x^{(1)}\psi_n(x^{(2)})\,dx + \frac{16n}{3} \ge -4 + \frac{16n}{3} > 0 \quad \forall n \ge 1, \end{aligned}$$

which is impossible (the penultimate inequality follows from the fact that $|\zeta_1(x)| \le 1$ and $\psi_n(x^{(2)}) \in [0, 1]$ for any $x \in \Omega$; see (2.17)). Thus, the optimality conditions from Theorem 2.2.1 are not satisfied at $u_* = 0$, unlike optimality conditions in terms of the Clarke subdifferential.

Let us finally note that from the facts that $u_* = 0$ is not an optimal solution of problem (2.16) and the functional $\mathcal{I}$ is positively homogeneous of degree one it follows that $\mathcal{I}$ is unbounded below on $\mathrm{W}_0^{1,1}(\Omega)$.

2.2.2 Nonsmooth Problem of Bolza with Additional Constraints

Next we turn to problems with additional constraints at the boundary. For the sake of simplicity we study only the one dimensional case (i.e. $d = 1$). Our aim is to obtain optimality conditions for the problem

$$\begin{aligned} &\min \mathcal{I}(u) = \int_\alpha^\beta f(x, u(x), u'(x))\,dx + g_0(u(\alpha), u(\beta)), \quad u \in \mathrm{W}^{1,p}((\alpha,\beta); \mathbb{R}^m) \\ &\text{subject to} \quad g_i(u(\alpha), u(\beta)) \le 0,\ i \in I, \quad g_j(u(\alpha), u(\beta)) = 0,\ j \in J. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Here $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ (i.e. $\Omega = (\alpha, \beta)$), $f\colon (\alpha,\beta) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, and $g_i\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i \in I \cup J \cup \{0\}$ are given nonsmooth functions, $I = \{1, \ldots, \ell_1\}$ and $J = \{\ell_1 + 1, \ldots, \ell_2\}$ for some $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Observe also that the set $\Omega = (\alpha, \beta)$ is obviously bounded and has the segment property. Denote $I(u) = \{i \in I \mid g_i(u(\alpha), u(\beta)) = 0\}$.

Theorem 2.2.2. *Let f satisfy the codifferentiability conditions of order $p \in [1, +\infty]$, the set-valued maps $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ and $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot)$ have the form (2.4) in the case $p = 1$, and u_* be a locally optimal solution of problem (2.19). Suppose also that the functions g_i, $i \in I \cup J \cup \{0\}$, are continuously codifferentiable at the point $(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, and the sets $\underline{d} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))$ and $\overline{d} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, $j \in J$, are polytopes. Let finally vectors $(0, s_{1i}, s_{2i}) \in \overline{d} g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, $i \in I$, $(0, s_{1j}, s_{2j}) \in \overline{d} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, and $(0, r_{1j}, r_{2j}) \in \underline{d} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, $j \in J$, be such that the following constraint qualification holds true:*

$$C_j \cap \operatorname{cone}\big\{ - C_k \bigm| k \in J \setminus \{j\}\big\} = \emptyset \quad \forall j \in J \tag{2.20}$$

$$\operatorname{co}\big\{\underline{\partial} g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta)) + (s_{1i}, s_{2i}) \bigm| i \in I(u_*)\big\} \cap \operatorname{cone}\big\{ - C_j \bigm| j \in J\big\} = \emptyset, \tag{2.21}$$

where $C_j = \{\underline{\partial} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta)) + (s_{1j}, s_{2j})\} \cup \{-(r_{1j}, r_{2j}) - \overline{\partial} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))\}$.

Then for all $(0, s_{10}, s_{20}) \in \overline{d} g_0(u_*(\alpha), u_*(\beta))$ and for any measurable selection $(b(\cdot), w_1(\cdot), w_2(\cdot))$ of the multifunction $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_*(\cdot), u_*'(\cdot))$ such that $b(x) = 0$ for a.e. $x \in (\alpha, \beta)$ there exist an absolutely continuous function $\zeta \in W^{1,p'}((\alpha, \beta); \mathbb{R}^m)$, $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$, and $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j \geq 0$, $j \in J$, such that $\lambda_i g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta)) = 0$ for all $i \in I$, the Euler-Lagrange inclusion

$$(0, \zeta'(x), \zeta(x)) \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u_*(x), u_*'(x)) + (0, w_1(x), w_2(x)) \tag{2.22}$$

is satisfied for a.e. $x \in (\alpha, \beta)$, and the following transversality condition holds true:

$$\begin{aligned}(0, \zeta(\alpha), -\zeta(\beta)) \in \underline{d} g_0(u_*(\alpha), u_*(\beta)) + (0, s_{10}, s_{20}) + \sum_{i=1}^{\ell_1} \lambda_i \big(\underline{d} g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta)) + (0, s_{1i}, s_{2i})\big) \\ + \sum_{j=\ell_1+1}^{\ell_2} \underline{\mu}_j \big(\underline{d} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta)) + (0, s_{1j}, s_{2j})\big) - \sum_{j=\ell_1+1}^{\ell_2} \overline{\mu}_j \big((0, r_{1j}, r_{2j}) + \overline{d} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))\big).\end{aligned} \tag{2.23}$$

Proof. Let us transform problem (2.19). To this end, recall that $u \in \mathrm{W}^{1,p}((\alpha, \beta); \mathbb{R}^m))$ if and only if there exists $h \in \mathrm{L}^p((\alpha, \beta); \mathbb{R}^m)$ such that $u(x) = u(\alpha) + \int_\alpha^x h(\tau) d\tau$ for a.e. $x \in (\alpha, \beta)$ (see, e.g. [280]). Therefore, the linear operator $\mathcal{T} \colon \mathbb{R}^m \times \mathrm{L}^p((\alpha, \beta); \mathbb{R}^m) \to \mathrm{W}^{1,p}((\alpha, \beta); \mathbb{R}^m))$ defined as $\mathcal{T}(\eta, h)(x) = \eta + \int_\alpha^x h(\omega)\, d\omega$ is a continuous one-to-one correspondence. Consequently, the pair $(u_*(\alpha), u_*')$ is a point of local minimum of the problem

$$\min_{(\eta, h) \in \mathbb{R}^m \times \mathrm{L}^p((\alpha, \beta); \mathbb{R}^m))} \mathcal{J}_0(\eta, h) \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{J}_i(\eta, h) \leq 0, \ i \in I, \quad \mathcal{J}_j(\eta, h) = 0, \ j \in J. \tag{2.24}$$

where $\mathcal{J}_0(\eta, h) = \mathcal{I}(\mathcal{T}(\eta, h))$ and $\mathcal{J}_i(\eta, h) = g_i(\eta, \mathcal{T}(\eta, h)(\beta))$, $i \in I \cup J$.

By our assumption the functions g_i, $i \in I \cup \{0\}$ are continuously codifferentiable at $(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, while the functional $\int_\alpha^\beta f(x, u(x), u'(x))\, dx$ is continuously codifferentiable by 2.1.1. Consequently, by Theorem 1.2.4 the functions $\mathcal{J}_i$, $i \in I \cup J \cup \{0\}$ are continuously codifferentiable at the point $(u_*(\alpha), u_*')$, the set

$$\Big\{(A, x^*) \in \mathbb{R} \times \big(\mathbb{R}^m \times \mathrm{L}^p((\alpha,\beta);\mathbb{R}^m)\big)^* \;\Big|\; A = \int_\alpha^\beta a(x)\,dx + a_0, \quad \forall (\eta, h) \in \mathbb{R}^m \times \mathrm{L}^p((\alpha,\beta);\mathbb{R}^m)$$
$$\langle x^*, (\eta, h)\rangle = \Big\langle \int_\alpha^\beta v_1(x)\,dx + r_1 + r_2, \eta \Big\rangle + \int_\alpha^\beta \Big\langle \int_x^\beta v_1(\tau) d\tau + v_2(x) + r_2, h(x) \Big\rangle\, dx,$$
$$(a_0, r_1, r_2) \in \underline{d} g_0(u_*(\alpha), u_*(\beta)),$$
$$(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \text{ is a measurable selection of } \underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_*(\cdot), u_*'(\cdot))\Big\} \tag{2.25}$$

is a hypodifferential of $\mathcal{J}_0$ at $(u_*(\alpha), u_*')$, while the set

$$\Big\{(a, x^*) \in \mathbb{R} \times \big(\mathbb{R}^m \times \mathrm{L}^p((\alpha,\beta);\mathbb{R}^m)\big)^* \;\Big|\; \langle x^*, (\eta, h)\rangle = \langle r_1 + r_2, \eta\rangle + \int_\alpha^\beta \langle r_2, h(x)\rangle dx$$
$$\forall (\eta, h) \in \mathbb{R}^m \times \mathrm{L}^p((\alpha,\beta);\mathbb{R}^m), \quad (a, r_1, r_2) \in \underline{d} g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta))\Big\} \tag{2.26}$$

is a hypodifferential of $\mathcal{J}_i$ at $(u_*(\alpha), u_*')$, $i \in I \cup J$. The hyperdifferentials $\overline{d}\mathcal{J}_i(u_*(\alpha), u_*')$ are defined in the same way. Therefore the functionals $\mathcal{J}_i$, $i \in I \cup J \cup \{0\}$, are quasidifferentiable and Hadamard directionally differentiable at the point $(u_*(\alpha), u_*')$ by Theorem 1.2.1 and Proposition 1.2.6. Moreover, it is easily seen that if the hypodifferential $\underline{d} g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta))$ is a polytope, then hypodifferential (2.26) and the corresponding subdifferential $\underline{\partial}\mathcal{J}_i(u_*(\alpha), u_*')$ are polytopes as well. Thus, under our assumption the functionals $\mathcal{J}_j$, $j \in J$ are polyhedrally quasidifferentiable at $(u_*(\alpha), u_*')$.

Let us apply optimality conditions from Corollary 1.2.9. By this corollary if for some $x_j^* \in \underline{\partial}\mathcal{J}_j(u_*(\alpha), u_*')$, $j \in J$, and $y_i^* \in \overline{\partial}\mathcal{J}_i(u_*(\alpha), u_*')$, $i \in I \cup J$, one has

$$\begin{gathered} D_j \cap \operatorname{cone}\{-D_k \mid k \in J \setminus \{j\}\} = \emptyset \ \forall j \in J, \\ \operatorname{co}\big\{\underline{\partial}\mathcal{J}_i(u_*(\alpha), u_*') + y_i^* \bigm| i \in I(u_*)\big\} \cap \operatorname{cone}\{-D_j \mid j \in J\} = \emptyset \end{gathered} \tag{2.27}$$

(here $D_j = \{\underline{\partial}\mathcal{J}_j(u_*(\alpha), u_*') + y_j^*\} \cup \{-x_j^* - \underline{\partial}\mathcal{J}_j(u_*(\alpha), u_*')\}$ for any $j \in J$), then for any $y_0^* \in \overline{\partial}\mathcal{J}_0(u_*(\alpha), u_*')$ there exist $\lambda_i \ge 0$, $i \in I$, and $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j \ge 0$, $j \in J$, such that $\lambda_i \mathcal{J}_i(u_*(\alpha), u_*') = 0$ for any $i \in I$ and

$$\begin{aligned} 0 \in \underline{\partial}\mathcal{J}_0(u_*(\alpha), u_*') + y_0^* + \sum_{i \in I} \lambda_i \big(\underline{\partial}\mathcal{J}_j(u_*(\alpha), u_*') + y_i^*\big) \\ + \sum_{j \in J} \underline{\mu}_j \big(\underline{\partial}\mathcal{J}_j(u_*(\alpha), u_*') + y_j^*\big) - \sum_{j \in J} \overline{\mu}_j \big(x_j^* + \overline{\partial}\mathcal{J}_j(u_*(\alpha), u_*')\big). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Let us rewrite these optimality conditions in terms of the original problem (2.19).

For any $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ define a linear functional $\Theta(s_1, s_2)$ as follows:

$$\langle \Theta(s_1, s_2), (\eta, h)\rangle = \langle s_{1i} + s_{2i}, \eta\rangle + \int_\alpha^\beta \langle s_{2i}, h(x)\rangle dx \quad \forall (\eta, h) \in \mathbb{R}^m \times \mathrm{L}^p((\alpha,\beta);\mathbb{R}^m). \tag{2.29}$$

Fix any $(0, s_{1i}, s_{2i}) \in \overline{d} g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, $i \in I \cup J$, and $(0, r_{1j}, r_{2j}) \in \underline{d} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, $j \in J$ satisfying (2.20) and (2.21), and put $y_i^* = \Theta(s_{1i}, s_{2i})$, $i \in I \cup J$, and $x_j^* = \Theta(r_{1j}, r_{2j})$, $j \in J$. Then $y_i^* \in \overline{\partial} \mathcal{J}_i(u_*(\alpha), u_*')$ for all $i \in I \cup J$ and $x_j^* \in \underline{\partial} \mathcal{J}_j(u_*(\alpha), u_*')$ for all $j \in J$ according to (2.26) and Theorem 1.2.1. Let us check that these functionals y_i^* and x_j^* satisfy constraint qualification (2.27).

Indeed, by virtue of (2.26) and Theorem 1.2.1 one has $\Theta(\underline{\partial} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta)) = \underline{\partial} \mathcal{J}_j(u_*(\alpha), u_*')$ and the same equality holds true for the superdifferentials. Hence taking into account the fact that Θ is a linear operator (see (2.29)) one obtains that $\Theta(C_j) = D_j$, $j \in J$, and the equality $\Theta(\operatorname{cone}\{C_k \mid k \in J \setminus \{j\}\}) = \operatorname{cone}\{D_k \mid k \in J \setminus \{j\}\}$ holds true for all $j \in J$. One can readily verify that Θ is an injective mapping (see (2.29)). Therefore (2.20) implies the first condition in (2.27). Similarly, (2.21) implies the second condition in (2.27).

Thus, constraint qualification (2.27) is satisfied. Consequently, with the use of (2.28), (2.25), (2.26), and Theorem 1.2.1 one gets that for all $(0, s_{10}, s_{20}) \in \overline{d} g_0(u_*(\alpha), u_*(\beta))$ and for any measurable selection $(b(\cdot), w_1(\cdot), w_2(\cdot))$ of the multifunction $\overline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_*(\cdot), u_*'(\cdot))$ such that $b(x) = 0$ for a.e. $x \in (\alpha, \beta)$ there exist $\lambda_i \ge 0$, $i \in I$, $\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j \ge 0$, $j \in J$, vectors $(0, r_{1i}, r_{2i}) \in \underline{d} g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, $i \in I \cup \{0\}$, $(0, \xi_{1j}, \xi_{2j}) \in \underline{d} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, $j \in J$, and $(0, y_{1j}, y_{2j}) \in \overline{d} g_j(u_*(\alpha), u_*(\beta))$, $j \in J$, and a measurable selection $(a(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ of the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f(\cdot, u_*(\cdot), u_*'(\cdot))$ such that $a(x) = 0$ for a.e. $x \in (\alpha, \beta)$, $\lambda_i g_i(u_*(\alpha), u_*(\beta)) = 0$ for all $i \in I$,

$$\begin{aligned}\Big\langle \int_\alpha^\beta (v_1(x) + w_1(x))\, dx + r_{10} + r_{20} + s_{10} + s_{20} + \sum_{i \in I} \lambda_i \big(r_{1i} + r_{2i} + s_{1i} + s_{2i} \big) \\ + \sum_{j \in J} \underline{\mu}_j \big(\xi_{1j} + \xi_{2j} + s_{1j} + s_{2j} \big) - \sum_{j \in J} \overline{\mu}_j \big(r_{1j} + r_{2j} + y_{1j} + y_{2j} \big), \eta \Big\rangle = 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

for any $\eta \in \mathbb{R}^m$, and

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \Big\langle \int_x^\beta (v_1(\tau) + w_1(\tau))\, d\tau + v_2(x) + w_2(x) + r_{20} + s_{20} \\ + \sum_{i \in I} \lambda_i \big(r_{2i} + s_{2i} \big) + \sum_{j \in J} \underline{\mu}_j \big(\xi_{2j} + s_{2j} \big) - \sum_{j \in J} \overline{\mu}_j \big(r_{2j} + y_{2j} \big), h(x) \Big\rangle \, dx = 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

for any $h \in L^p((\alpha, \beta); \mathbb{R}^m)$. Denote

$$\zeta(x) = -\int_x^\beta (v_1(\tau) + w_1(\tau))\, d\tau - r_{20} - s_{20} - \sum_{i \in I} \lambda_i \big(r_{2i} + s_{2i} \big) - \sum_{j \in J} \underline{\mu}_j \big(\xi_{2j} + s_{2j} \big) + \sum_{j \in J} \overline{\mu}_j \big(r_{2j} + y_{2j} \big)$$

for any $x \in [\alpha, \beta]$. Then ζ is an absolutely continuous function such that

$$(0, \zeta'(x), \zeta(x)) = (0, v_1(x) + w_1(x), v_2(x) + w_2(x)) \quad \text{for a.e. } x \in (\alpha, \beta)$$

due to (2.31), $\zeta \in \mathrm{W}^{1,p'}((\alpha,\beta);\mathbb{R}^m)$ due to the growth condition on the codifferential mapping $D_{u,\xi}f(\cdot)$ (see Def. 2.1.1), and

$$(0,\zeta(\alpha),-\zeta(\beta)) = (0, r_{10}+s_{10}, r_{20}+s_{20}) + \sum_{i\in I}\lambda_i\big(0, r_{1i}+s_{1i}, r_{2i}+s_{2i}\big)$$
$$+\sum_{j\in J}\underline{\mu}_j\big(0,\xi_{1j}+s_{1j},\xi_{2j}+s_{2j}\big) - \sum_{j\in J}\overline{\mu}_j\big(0, r_{1j}+y_{1j}, r_{2j}+y_{2j}\big)$$

due to (2.30). It remains to note that the first equality above is equivalent to (2.22), while the second one is equivalent to the transversality condition (2.23). □

Let us present an example illustrating optimality conditions from the previous theorem. For the sake of shortness we only consider a nonsmooth problem of Bolza without additional constraints. A similar example with additional constraints at the boundary can be found in [154].

Example 2.2.2 (Example 2 from [242]). Let $\alpha = 0$ and $\beta = 1$. Consider the following problem of Bolza:

$$\mathcal{I}(u) = u(0) - \gamma u(1) + \int_0^1 \max\{|u'(x)| - |u(x)|, 0\}\,dx \to \min, \quad u \in \mathrm{W}^{1,1}(0,1). \tag{2.32}$$

In this case $g_0(u(0),u(1)) = u(0) - \gamma u(1)$ and $f(x,u,\xi) = \max\{|\xi| - |u|, 0\}$. Let us check whether the function $u_\alpha(x) = \alpha e^x$ is a point of local minimum of $\mathcal{I}$ for some $\alpha \ge 0$ and $\gamma \in \mathbb{R}$.

Let us apply optimality conditions in terms of various subdifferentials first. Consider optimality conditions in terms of the Clarke subdifferential [54, Thrm. 2.4]. Put $L(u,\xi) = \max\{|\xi| - |u|, 0\}$. The Clarke subdifferential of this function has the form:

$$\partial_{Cl}L(u,\xi) = \begin{cases} [-1,1]\times[-1,1], & \text{if } u = \xi = 0,\\ \operatorname{co}\left\{\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\}, & \text{if } u = \xi > 0.\end{cases}$$

Therefore the Euler-Lagrange inclusion takes the form:

$$\begin{pmatrix}\zeta'(x)\\ \zeta(x)\end{pmatrix} \in \partial_{Cl}L(u_\alpha(x), u_\alpha'(x)) = \begin{cases} [-1,1]\times[-1,1], & \text{if } \alpha = 0,\\ \operatorname{co}\left\{\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\}, & \text{if } \alpha > 0.\end{cases} \tag{2.33}$$

The transversality condition has the form $(\zeta(0), -\zeta(1)) = \nabla g_0(u_\alpha(0), u_\alpha(1)) = (1, -\gamma)$, i.e. $\zeta(0) = 1$ and $\zeta(1) = \gamma$. Hence with the use of (2.33) one obtains that $\gamma \in [0,1]$, since $\zeta(x) \in [0,1]$ for all $x \in [0,1]$ when $\alpha > 0$, while $|\zeta(x)| \le 1$ and $|\zeta'(x)| \le 1$ when $\alpha = 0$. If $\alpha = 0$ and $\gamma \in [0,1]$, then the function $\zeta(x) = 1 - (1-\gamma)x$ satisfies the Euler-Lagrange inclusion and the transversality condition. If $\alpha > 0$, then from (2.33) it follows that $\zeta'(x) = -\zeta(x)$ for a.e. $x \in [0,1]$, which implies that the optimality conditions are no satisfied in the case $\gamma \ne e^{-1}$. If $\gamma = e^{-1}$, then the optimality conditions are satisfied for $\zeta(x) = e^{-x}$. Thus, the optimality conditions in terms of the Clarke subdifferential from [54] are satisfied when $\alpha = 0$ and $\gamma \in [0,1]$ or when $\alpha > 0$ and $\gamma = e^{-1}$.

Let us check different optimality conditions in terms of the Clarke subdifferential [57, Theorem 4.4.3]. The Clarke subdifferential of $L(u,\xi)$ with respect to u and ξ have the form:

$$\partial_{Cl,u} L(u,\xi) = \begin{cases} [-1,0], & \text{if } u = \xi > 0, \\ \{0\}, & \text{if } u = \xi = 0, \end{cases} \qquad \partial_{Cl,\xi} L(u,\xi) = \begin{cases} [0,1], & \text{if } u = \xi > 0, \\ [-1,1], & \text{if } u = \xi = 0. \end{cases}$$

Therefore the Euler-Lagrange inclusion from [57, Theorem 4.4.3] have the form:

$$\zeta'(x) \in \partial_{Cl,u} L(u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) = \begin{cases} [-1,0], & \text{if } \alpha > 0, \\ \{0\}, & \text{if } \alpha = 0, \end{cases}$$

$$\zeta(x) \in \partial_{Cl,\xi} L(u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) = \begin{cases} [0,1], & \text{if } \alpha > 0, \\ [-1,1], & \text{if } \alpha = 0. \end{cases}$$

Hence with the use of the transversality condition $\zeta(0) = 1$, $\zeta(1) = \gamma$ one gets that $\zeta(x) \equiv 1$ and $\gamma = 1$ in the case $\alpha = 0$, while $\gamma \in [0,1]$ in the case $\alpha > 0$. Moreover, if $\alpha > 0$, then the function $\zeta(x) = 1-(1-\gamma)x$ satisfied the Euler-Lagrange inclusion and the transversality condition. Furthermore, the chosen functions ζ satisfy the Weierstrass condition

$$L(u_\alpha(x), \xi) - L(u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) - \zeta(x)(\xi - u'_\alpha(x)) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\,. \tag{2.34}$$

for all $\alpha \geq 0$. Thus, the optimality conditions from [57, Theorem 4.4.3] are satisfied in the case $\alpha = 0$, $\gamma = 1$ and in the case $\alpha > 0$, $\gamma \in [0,1]$.

Let us now apply optimality conditions in terms of the limiting proximal subdifferential obtained by Ioffe and Rockafellar in [242]. Denote this subdifferential by ∂_p^∞ (the limiting proximal subdifferential was studied in detail in [61, 400]). It is easily seen that

$$\partial_p^\infty L(u,\xi) = \begin{cases} \operatorname{co}\left\{\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}, & \text{if } u = \xi > 0, \\ \operatorname{co}\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right\} \cup \operatorname{co}\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}, & \text{if } u = \xi = 0. \end{cases}$$

Hence the Euler-Lagrange inclusion from [242] takes the form

$$\zeta'(x) \in \operatorname{co}\left\{w \in \mathbb{R} \;\middle|\; (w, \zeta(x)) \in \partial_p^\infty L(u_\alpha(x), u'_\alpha(x))\right\} = \begin{cases} \{-\zeta(x)\}, & \text{if } \alpha > 0, \\ \operatorname{co}\{\zeta(x), -\zeta(x)\}, & \text{if } \alpha = 0, \end{cases}$$

Furthermore, $\zeta(x) \in [0,1]$, if $\alpha > 0$, and $\zeta(x) \in [-1,1]$, if $\alpha = 0$

With the use of the transversality conditions $\zeta(0) = 1$ and $\zeta(1) = \gamma$ one obtains that $\zeta(x) = e^{-x}$ and $\gamma = e^{-1}$ in the case $\alpha > 0$. In the case $\alpha = 0$ one has $|\zeta'(x)| \leq 1$, which implies that $\zeta(x) \geq 0$. Consequently, $-\zeta(x) \leq \zeta'(x) \leq \zeta(x)$, which yields $e^{-x} \leq \zeta(x) \leq 1$ and $\gamma \in [e^{-1}, 1]$. For any such γ the function $\zeta(x) = e^{(\ln \gamma)x}$ satisfied the Euler-Lagrange inclusion and the transversality conditions. Moreover, the chosen functions ζ also satisfy the Weierstrass condition (2.34). Thus, the optimality conditions in terms of the limiting proximal subdifferential from [242] are satisfied in the case $\alpha = 0$, $\gamma \in [e^{-1}, 1]$ and in the case $\alpha > 0$, $\gamma = e^{-1}$.

Let us finally apply optimality conditions from Theorem 2.2.2. The transversality conditions have the form $\zeta(0) = 1$, $\zeta(1) = \gamma$. With the use of the codifferential calculus from the the previous chapter one can easily check that

$$\begin{aligned} \underline{d}_{u,\xi} f(x, u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) &= \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\alpha e^x \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\alpha e^x \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ \overline{d}_{u,\xi} f(x, u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) &= \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha e^x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

If $\alpha > 0$, then the only measurable selection $(b(x), w_1(x), w_2(x))$ of the set-valued map $\overline{d}_{u,\xi} f(x, u_\alpha(x), u'_\alpha(x))$ such that $b(x) = 0$ for a.e. $x \in (0,1)$ is the mapping $(b(x), w_1(x), w_2(x)) \equiv (0, -1, 0)$. Therefore the Euler-Lagrange inclusion takes the form:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \zeta'(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\alpha e^x \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\alpha e^x \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Hence $\zeta' = -\zeta$ a.e., which with the use of the transversality conditions implies that $\zeta(x) = e^{-x}$ and $\gamma = e^{-1}$.

Let us now consider the case $\alpha = 0$. For the measurable selection $(b(x), w_1(x), w_2(x)) \equiv (0, -1, 0)$ of the multifunction $\overline{d}_{u,\xi} f(x, u_\alpha(x), u'_\alpha(x))$ the Euler-Lagrange inclusion has the form:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \zeta'(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(see (2.35)). Therefore $\zeta'(x) \leq 0$ for a.e. $x \in (0,1)$ and $\zeta(1) \leq \zeta(0) = 1$. Consequently, the optimality conditions are not satisfied for any $\gamma > 1$. Similarly, for the selection $(b(x), w_1(x), w_2(x)) \equiv (0, 1, 0)$ of the multifunction $\overline{d}_{u,\xi} f(x, u_\alpha(x), u'_\alpha(x))$ the Euler-Lagrange inclusion has the form:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \zeta'(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} \in \underline{d}_{u,\xi} f(x, u_\alpha(x), u'_\alpha(x)) + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{2.36}$$

(see (2.35)). Hence $\zeta'(x) \geq 0$ for a.e. $x \in [0,1]$ and $\zeta(1) \geq \zeta(0) = 1$. Let us check that $\zeta(1) > 1$. Indeed, if $\zeta'(x) > 0$ on a set of positive measure, then $\zeta(1) > \zeta(0) = 1$. On the other hand, if $\zeta'(x) = 0$ a.e., then $\zeta(x) = 0$ for all $x \in [0,1]$ (see (2.36)), which contradicts the transversality condition $\zeta(0) = 1$. Therefore $\zeta(1) > 1$ and the optimality conditions are not satisfied for all $\gamma \leq 1$. Thus, the optimality conditions in terms of codifferentials are satisfied only in the case $\alpha > 0$, $\gamma = e^{-1}$, while optimality conditions in terms of various subdifferential are satisfied for other values of the parameter α and γ as well.

Let us note that since the functional $\mathcal{I}$ from the problem under consideration is positively homogeneous and, as was shown above, the function $u \equiv 0$ is not a point of local minimum of $\mathcal{I}$ for any value of γ, one can conclude that the functional $\mathcal{I}$ is unbounded below $\mathrm{W}^{1,1}(0,1)$ and there are no global minima in problem (2.32). The question of whether the function $u_\alpha(x) = \alpha e^x$ is a point of local minimum of $\mathcal{I}$ in the case $\gamma = e^{-1}$ and $\alpha > 0$ remains an open problem. Apparently, its solution requires a derivation of first order sufficient optimality conditions for nonsmooth variational problems.

2.2.3 Nonsmooth Problem with Isoperimetric Constraints

Let us now consider problems with isoperimetic constraints. For the sake of simplicity, we consider only problems with inequality constraints. Namely, consider isoperimetric problem of the form

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0(u) &= \int_\Omega f_0(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \to \min, \\ \mathcal{I}_i(u) &= \int_\Omega f_i(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \le \theta_i \quad i \in I, \quad u \in u_0 + \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Here $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is an open set, $f_i \colon \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \to \mathbb{R}$, $f_i = f_i(x, u, \xi)$, are nonsmooth functions, $\theta_i \in \mathbb{R}$, $i \in I \cup \{0\}$, $I = \{1, \ldots, \ell\}$, and $u_0 \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ is a fixed function. For any $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ denote $I(u) = \{i \in I \mid \mathcal{I}_i(u) = \theta_i\}$.

Theorem 2.2.3. *Let f_i, $i \in I \cup \{0\}$, satisfy the codifferentiability conditions of order $p \in [1, +\infty]$, and let either $1 < p \le +\infty$ or the set Ω be bounded and have the segment property. Suppose also that u_* is a locally optimal solution of problem* (2.37)*. Let finally $(b_i(\cdot), w_{1i}(\cdot), w_{2i}(\cdot))$ be measurable selections of the multifunction $\overline{d}_{u,\xi} f_i(\cdot, u_*(\cdot), \nabla u_*(\cdot))$, $i \in I$ such that $b_i(x) = 0$ for a.e. $x \in \Omega$ and there does not exist $\zeta \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d}; \operatorname{div})$ such that for a.e. $x \in \Omega$ one has*

$$(0, \operatorname{div}(\zeta)(x), \zeta(x)) \in \operatorname{co}\left\{ \underline{d}_{u,\xi} f_i(x, u_*(x), \nabla u_*(x)) + (b_i(x), w_{1i}(x), w_{2i}(x)) \,\middle|\, i \in I(u_*) \right\}. \tag{2.38}$$

Then for any measurable selection $(b_0(\cdot), w_{10}(\cdot), w_{20}(\cdot))$ of the set-valued map $\overline{d}_{u,\xi} f_0(\cdot, u_*(\cdot), \nabla u_*(\cdot))$ such that $b_0(x) = 0$ for a.e. $x \in \Omega$ one can find $\lambda_i \ge 0$, $i \in I$, and $\zeta \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d}; \operatorname{div})$ such that $\lambda_i(\mathcal{I}_i(u_*) - \theta_i) = 0$ for any $i \in I$, and for a.e. $x \in \Omega$ one has

$$\begin{aligned} (0, \operatorname{div}(\zeta)(x), \zeta(x)) &\in \underline{d}_{u,\xi} f_0(x, u_*(x), \nabla u_*(x)) + (b_0(x), w_{10}(x), w_{20}(x)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \Big(\underline{d}_{u,\xi} f_i(x, u_*(x), \nabla u_*(x)) + (b_i(x), w_{1i}(x), w_{2i}(x)) \Big). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Proof. For any $h \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ define $\mathcal{J}_0(h) = \mathcal{I}_0(u_* + h)$, and $\mathcal{J}_i(h) = \mathcal{I}_i(u_* + h) - \theta_i$, $i \in I$. By Corollary 2.1.2 and Remark 2.1.5 the functions $\mathcal{J}_i$ are correctly defined and quasidifferentiable at $h = 0$. Moreover, the point $h = 0$ is a locally optimal solution of the problem

$$\min_{h \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)} \mathcal{J}_0(h) \quad \text{subject to} \quad \mathcal{J}_i(h) \le 0, \quad i \in I,$$

since u_* is a locally optimal solution of problem (2.37). Consequently, by Theorem 1.2.9 one obtains that if $y_i^* \in \overline{\partial} \mathcal{J}_i(0)$, $i \in I$, are such that

$$0 \notin \operatorname{co}\{\underline{\partial} \mathcal{J}_i(0) + y_i^* \mid i \in I(u_*)\}, \tag{2.40}$$

then for any $y_0^* \in \overline{\partial} \mathcal{J}_0(0)$ one can find $\lambda_i \ge 0$, $i \in I$, such that $\lambda_i \mathcal{J}_i(0) = 0$ for any $i \in I$ and

$$0 \in \underline{\partial} \mathcal{J}_0(0) + y_0^* + \sum_{i \in I} \lambda_i \big(\underline{\partial} \mathcal{J}_i(0) + y_i^* \big). \tag{2.41}$$

Let us reformulate these optimality conditions in term of problem (2.37).

Let $(b_i(\cdot), w_{1i}(\cdot), w_{2i}(\cdot))$, $i \in I$, satisfy the assumptions of the theorem. Define

$$\langle y_i^*, h \rangle = \int_\Omega \big(\langle w_{1i}(x), h(x) \rangle + \langle w_{2i}(x), \nabla h(x) \rangle \big)\, dx \quad \forall h \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m). \tag{2.42}$$

Then by Corollary 2.1.2 one has $y_i^* \in \overline{\partial} \mathcal{J}_i(0)$, $i \in I$. Let us check that constraint qualification (2.40) holds true. Indeed, arguing by reductio ad absurdum suppose that (2.40) is not satisfied. Then for any $i \in I$ there exist $x_i^* \in \underline{\partial} \mathcal{J}_i(0)$ and $\alpha_i \ge 0$ such that

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i (x_i^* + y_i^*) = 0, \quad \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1.$$

Hence with the use of Corollary 2.1.2 one obtains that for any $i \in I$ there exists a measurable selection $(a_i(\cdot), v_{1i}(\cdot), v_{2i}(\cdot))$ of the multifunction $\underline{d}_{u,\xi} f_i(\cdot, u_*(\cdot), \nabla u_*(\cdot))$ such that $a_i(x) = 0$ for a.e. $x \in \Omega$ and

$$\int_\Omega \big(\langle \xi_1(x), h(x) \rangle + \langle \xi_2(x), \nabla h(x) \rangle \big)\, dx = 0 \quad \forall h \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m), \tag{2.43}$$

where

$$\xi_1(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (v_{1i}(x) + w_{1i}(x)), \quad \xi_2(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (v_{12}(x) + w_{12}(x)).$$

Equality (2.43) implies that there exists the weak divergence of the function $\zeta = \xi_2$, and $\operatorname{div} \zeta = \xi_1$. By the growth condition on the codifferential mapping $D_{u,\xi} f(\cdot)$ (see Def. 2.1.1) one has $\xi_2 \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d})$ and $\xi_1 \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Thus, there exists $\zeta \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d}; \operatorname{div})$ such that

$$(0, \operatorname{div}(\zeta)(x), \zeta(x)) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \big((a_i(x), v_{1i}(x), v_{2i}(x)) + (b_i(x), w_{1i}(x), w_{2i}(x)) \big)$$

for a.e. $x \in \Omega$, which contradicts (2.38). Thus, constraint qualification (2.40) holds true.

Choose any measurable selection $(b_0(\cdot), w_{10}(\cdot), w_{20}(\cdot))$ of the set-valued mapping $\overline{d}_{u,\xi} f_0(\cdot, u_*(\cdot), \nabla u_*(\cdot))$ such that $b_0(x) = 0$ for a.e. $x \in \Omega$. Define a linear functional y_0^* in the same way as in (2.42). Then by Corollary 2.1.2 one has $y_0 \in \overline{\partial} \mathcal{J}_0(0)$. Consequently, there exist $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$, such that $\lambda_i \mathcal{J}_i(0) = \lambda_i(\mathcal{I}_i(u_*) - \theta_i) = 0$ for any $i \in I$ and (2.41) holds true. Now, arguing in the same way as in the proof of Theorem 2.2.1 one can readily verify that optimality condition (2.41) is equivalent to (2.39). $\square$

Let us give an example illustrating optimality conditions for isoperimetric problems from the theorem above.

Example 2.2.3. Let $d = m = p = 1$ and $\Omega = (0,1)$. Consider the following problem:

$$\begin{aligned} &\min \mathcal{I}_0(u) = \int_0^1 \max\big\{ -|u(x)|, -|u'(x)|\big\}\, dx \\ &\text{subject to } \mathcal{I}_1(u) = \int_0^1 u(x)\, dx \leq 0, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad u \in \mathrm{W}^{1,1}(0,1). \end{aligned} \tag{2.44}$$

In this case $f_0(x, u, \xi) = \max\{-|u|, -|\xi|\}$, $I = \{1\}$, $f_1(x, u, \xi) = u$, and $\theta_1 = 0$. Let us check whether optimality conditions are satisfied at $u_* \equiv 0$. It is easily seen that this function is not a locally optimal solution of problem (2.44), since for the function $u_\alpha(x) = \alpha x(x-1)$ one obviously has $\mathcal{I}_0(u_\alpha) < 0$ and $\mathcal{I}_1(u_\alpha) = -\alpha/6 < 0$ for any $\alpha > 0$. In actuality, u_* is a point of unconstrained global maximum of $\mathcal{I}_0(u)$.

To the best of the author's knowledge, optimality conditions for nonsmooth variational problems with isoperimetric constraints have been obtained earlier only in [35, Thrm. 3.5.1]. Let us verify whether these optimality conditions hold true at u_*. The limiting Fréchet subdifferential of the function $u \mapsto f_0(x, u, \xi)$ with respect to ξ (see [254]) at the point $(x, 0, 0)$, which we denote by $\partial^\infty_{F,u} f_0(x, \cdot)(0,0)$, is equal to $[-1, 1]$. Therefore, for the function $p(\cdot) \equiv 0$ and for all $x \in [0,1]$ one has $\dot{p}(x) \in \partial^\infty_{F,u} f_0(x, \cdot)(u_*(x), u_*'(x))$ and

$$p(x)u_*'(x) - f_0(x, u_*(x), u_*'(x)) = 0 = \max_{v \in \mathbb{R}} \big(p(x)v - f_0(x, u_*(x), v)\big),$$

that is, the optimality conditions from [35, Thrm. 3.5.1] are satisfied with $p(\cdot) \equiv 0$, $\lambda = 1$, and $\gamma = 0$.

To apply other optimality condition to problem (2.44), one needs to transform this problem to an equivalent one without isoperimetric constraints. Such transformation can be done in many different ways. Following [57, Example 4.5.4] we can reformulate problem (2.44) as the following

Mayer problem with nonholonomic inequality constraints:

$$\begin{aligned}
&\min f(x(1)) = x_3(1) \quad \text{subject to} \quad x(0) = 0, \quad x_1(1) = 0, \quad x_2(1) \le 0, \\
&\varphi_1(x(t), \dot{x}(t)) = x_1(t) - \dot{x}_2(t) \le 0, \\
&\varphi_2(x(t), \dot{x}(t)) = \max\{-|x_1(t)|, -|\dot{x}_1(t)|\} - \dot{x}_3(t) \le 0, \quad t \in [0,1].
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Let us verify optimality conditions for this problem [57, Corollary 4.5.1] at the point $x_* \equiv 0$, which corresponds to the point $u_* \equiv 0$ in problem (2.44). Indeed, the Clarke subdifferentials of the functions φ_i at the origin have the form:

$$\partial_{Cl}\varphi_1(0) = \{(1,0,0,0,-1,0)\}, \quad \partial_{Cl}\varphi_2(0) = \operatorname{co}\Big\{\big(\pm 1, 0, 0, 0, 0, -1\big), \big(0,0,0,\pm 1, 0, -1\big)\Big\}.$$

As is readily seen, the constraint qualification from [57, Corollary 4.5.1] is satisfied at x_*. Note also that the Clarke normal cone to the set $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0, x_2 \le 0\}$ at the origin has the form $N_S(0) = \{(t, s, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}, s \ge 0\}$. Therefore, for $p(t) \equiv (0,0,-1)$, $\lambda_1(t) \equiv 0$, $\lambda_2(t) \equiv 1$, and $\lambda_0 = 1$ one has

$$(\dot{p}(t), p(t)) \in \lambda_1(t)\varphi_1(x_*(t), \dot{x}_*(t)) + \lambda_2(t)\varphi_2(x_*(t), \dot{x}_*(t)) \quad \forall t \in [0,1]$$

and $-p(1) \in \lambda_0 \partial_{Cl} f(x_*(1)) + N_S(x_*(1))$. Thus, optimality conditions for problem (2.45) in terms of the Clarke subdifferential [57, Corollary 4.5.1] are satisfied at the point $x_*(\cdot) = 0$.

Problem (2.44) can be also rewritten as the following nonsmooth optimal control problem:

$$\begin{aligned}
&\min \mathcal{J}(x,u) = \int_0^1 \max\big\{-|x_1(t)|, -|u(t)|\big\}\, dt \quad \text{s.t.} \quad \dot{x}_1(t) = u(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t), \\
&u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,1], \quad x_1(0) = x_1(1) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2(1) \le 0.
\end{aligned}$$

One can verify that the pair $(x_*, u_*) \equiv (0,0)$ satisfies various existing optimality conditions for this problem in terms of subdifferentials and normal cones (see, e.g. [57,239,253,287,314,329,400]). For the sake of shortness we we leave the laborious task of verifying these conditions to the interested reader. Instead, let us check here whether optimality conditions from Theorem 2.2.3 are satisfied at u_*.

Applying the main rules of the codifferential calculus from the previous chapter one obtains:

$$\begin{aligned}
\underline{d}_{u,\xi} f_0(x,u,\xi) &= \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} \pm u - g(u,x) \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \xi - g(u,x) \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\}, \\
\overline{d}_{u,\xi} f_0(x,u,\xi) &= \operatorname{co}\left\{ \begin{pmatrix} (-1)^i u + (-1)^j \xi + |u| + |\xi| \\ (-1)^i \\ (-1)^j \end{pmatrix} \;\middle|\; i,j \in \{1,2\} \right\},
\end{aligned}$$

where $g(u,\xi) = \max\{|u|, |\xi|\}$. Moreover, $\underline{d}_{u,\xi} f_1(x,u,\xi) = \{(0,1,0)\}$ and $\overline{d}_{u,\xi} f_1(x,u,\xi) = \{0\}$. Therefore, as one can readily see, both functions f_0 and f_1 satisfy the codifferentiability conditions of order $p = 1$. The set $\Omega = (0,1)$ is obviously bounded and has the segment-property.

Moreover, observe that if for some $\zeta \in \mathrm{L}^\infty((0,1);\mathbb{R},\mathrm{div}) = \mathrm{W}^{1,\infty}(0,1)$ one has $(0,\zeta'(x),\zeta(x)) \in \underline{d}_{u,\xi} f_1(x,u_*'(x),u_*(x)) = \{(0,1,0)\}$ for a.e. $x \in (0,1)$, then $\zeta(x) = 0$, while $\zeta'(x) = 1$ for a.e. $x \in (0,1)$, which is impossible. Thus, constraint qualification (2.38) holds true at u_*.

Suppose that optimality conditions from Theorem 2.2.3 are satisfied at u_*. Then for any measurable selection $(b_0(\cdot), w_{10}(\cdot), w_{20}(\cdot))$ of the set-valued map $\overline{d}_{u,\xi} f_0(\cdot,u_*(\cdot),u_*'(\cdot))$ such that $b_0(x) = 0$ for a.e. $x \in (0,1)$ there exist $\lambda_1 \geq 0$ and $\zeta \in \mathrm{W}^{1,\infty}(0,1)$ such that for a.e. $x \in (0,1)$ one has

$$(0,\zeta'(x),\zeta(x)) \in \underline{d}_{u,\xi} f_0(x,u_*(x),u_*'(x)) + (b_0(x),w_{10}(x),w_{20}(x)) + \lambda_1 \underline{d}_{u,\xi} f_1(x,u_*(x),u_*'(x)).$$

Define $z_0(x) = (b_0(x),w_{10}(x),w_{20}(x)) = (0,1,1) \in \overline{d} f_0(x,0,0)$, if $x \in [0,0.5]$ and $z_0(x) = (0,1,-1) \in \overline{d} f_0(x,0,0)$, if $x \in (0.5,1]$. Then there exist $\lambda_1 \geq 0$ and $\zeta \in \mathrm{W}^{1,\infty}(0,1)$ such that

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \zeta'(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} \in \mathrm{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2+\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\lambda_1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{for a.e. } x \in [0,0.5], \tag{2.46}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \zeta'(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} \in \mathrm{co}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2+\lambda_1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\lambda_1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{for a.e. } x \in (0.5,1]. \tag{2.47}$$

Consequently, $\zeta'(x) \geq 0$ for a.e. $x \in (0,1)$, $\zeta(x) \geq 0$ for a.e. $x \in (0,0.5)$, and $\zeta(x) \leq 0$ for a.e. $x \in (0.5,1)$. Redefining, if necessary, the function ζ on a set of measure zero one can suppose that ζ is Lipschitz continuous (see, e.g. [280, Thrm. 7.17]). Therefore, from the inequality $\zeta'(\cdot) \geq 0$ it follows that the function ζ is non-decreasing. Hence with the use of the inequalities $\zeta(x) \geq 0$ for a.e. $x \in (0,0.5)$ and $\zeta(x) \leq 0$ for a.e. $x \in (0.5,1)$ one obtains that $\zeta(x) \equiv 0$ and $\zeta'(x) \equiv 0$, which contradicts the fact that the zero vector does not belong to the right-hand sides of (2.46) and (2.47). Thus, optimality conditions from Theorem 2.2.3 are not satisfied at u_*, and once again optimality conditions in terms of codifferentials were able to detect the non-optimality of the point u_*, when subdifferential-based optimality conditions failed to do so.

Chapter 3

The Method of Codifferential Descent and its Modifications

This chapter is devoted to an analysis of various modifications of a numerical method for minimizing nonsmooth codifferentiable functions proposed by prof. V.F. Demyanov and called the method of codifferential descent. We study a convergence of the method and propose its modification for solving problems with convex constraints. In the convex case we obtain an upper estimate of the rate of convergence. Finally, we propose a modification of the method for global minimization of nonconvex piecewise affine function and prove its convergence to a point of global minimum in a finite number of steps. The main results of this chapter were published in [92, 143, 144, 148, 149].

3.1 The Method of Codifferential Descent

Consider the problem of minimizing a nonsmooth function f. For the sake of simplicity we suppose that f is defined on a real Hilbert space; however, the main results of section can be extended to the case of functions defined on strictly convex reflexive normed spaces (see [92]).

In the case when f is defined on a Hilbert space $\mathcal{H}$, it is codifferentiable at a point x if and only if there exists a pair of weakly compact convex sets $\underline{d}f(x), \overline{d}f(x) \subset \mathbb{R} \times \mathcal{H}$ such that

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \Big| f(x + \alpha \Delta x) - f(x) - \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x)} (a + \langle v, \alpha \Delta x \rangle) - \min_{(b,w) \in \overline{d}f(x)} (b + \langle w, \alpha \Delta x \rangle) \Big| = 0$$

for all $\Delta x \in \mathcal{H}$ and

$$\max_{(a,v) \in \underline{d}f(x)} a = \min_{(b,w) \in \overline{d}f(x)} b = 0. \tag{3.1}$$

Here $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the inner product in $\mathcal{H}$.

Recall that by Proposition 1.2.2 and Corollary 1.2.1 the inclusion

$$0 \in \underline{d}f(x) + (0, w) \quad \forall (0, w) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x) \tag{3.2}$$

is a necessary optimality condition independent of the choice of a codifferential. Hereinafter $\operatorname{ext} A$ stands for the set of extreme points of a convex set A. A point x satisfying condition (3.2) is called an *inf-stationary* point of the function f. Our aim is to analyse a method for finding inf-stationary points of codifferentiable functions called the method of codifferential descent.

3.1.1 A Description of the Method

Below we suppose that a function f is defined and codifferentiable on $\mathcal{H}$ and a codifferential mapping $Df(\cdot)$ of the function f and the corresponding quasidifferentiable mapping $\mathscr{D}f(\cdot)$ (see Theorem 1.2.1) are given. For any $\nu, \mu \in [0, +\infty]$ let set-valued mappings $\underline{d}_\nu f(\cdot), \overline{d}_\mu f(\cdot) \colon U \rightrightarrows \mathbb{R} \times \mathcal{H}$ be such that for any $x \in U$ one has

$$\begin{aligned} \big\{(a, v) \in \operatorname{ext} \underline{d}f(x) \bigm| a \ge -\nu\big\} \subseteq \underline{d}_\nu f(x) \subseteq \underline{d}f(x), \\ \big\{(b, w) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x) \bigm| b \le \mu\big\} \subseteq \overline{d}_\mu f(x) \subseteq \overline{d}f(x). \end{aligned} \tag{3.3}$$

The pair $[\underline{d}_\nu f(x), \overline{d}_\mu f(x)]$ is called *a truncated codifferential* of f at x, and it can be viewed as a kind of approximation of both quasidifferential $\mathscr{D}f(x)$ and codifferential $Df(x)$ of f at x, depending on the values of the parameters ν and μ. Namely, one has

$$\{0\} \times \operatorname{ext} \underline{\partial} f(x) \subseteq \underline{d}_0 f(x), \quad \operatorname{ext} \underline{d}f(x) \subseteq \underline{d}_\infty f(x) \subseteq \underline{d}f(x),$$

and similar relations hold true for $\overline{d}_\mu f(x)$. Let us note that in applications the set $\underline{d}f(x)$ is typically a convex hull of a finite set of points (a_i, v_i). In this case one usually defines $\underline{d}_\nu f(x)$ as the set of all those (a_i, v_i) for which $a_i \ge -\nu$. The set $\overline{d}_\mu f(x)$ is defined in a similar way.

Remark 3.1.1. In theory, the best possible choice of the sets $\underline{d}_\nu f(x)$ and $\overline{d}_\mu f(x)$ is

$$\begin{aligned} \underline{d}_\nu f(x) &= \big\{(a, v) \in \operatorname{ext} \underline{d}f(x) \bigm| a \ge -\nu\big\}, \\ \overline{d}_\mu f(x) &= \big\{(b, w) \in \operatorname{ext} \overline{d}f(x) \bigm| b \le \mu\big\}. \end{aligned}$$

However, in order to define the truncated codifferential this way in practice, one has to find all extreme points of the sets $\underline{d}f(x)$ and $\overline{d}f(x)$, which is a very computationally expensive procedure. That is why in some application it might be more efficient to use larger sets $\underline{d}_\nu f(x)$ and $\overline{d}_\mu f(x)$, but avoid the search of extreme points. The main goal of this article is to analyse the convergence of the MCD in the general case. That is why we do not specify the way the truncated codifferential is defined, and only impose assumptions (3.3) that are somewhat necessary to ensure convergence.

Let the space $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$ be equipped with the inner product $\langle (a, v), (b, w) \rangle = ab + \langle v, w \rangle$ and the corresponding norm. The scheme of the method of codifferential descent (MCD) is given in Algorithm 1.

Algorithm 1: The Method of Codifferential Descent (MCD).

Step 1. Choose an initial guess $x_0 \in \mathcal{H}$, the upper bound for the step size $\alpha_* \in (0, +\infty]$, and sequences $\{\nu_n\}, \{\mu_n\} \subset [0, +\infty]$, and set $n := 0$.

Step 2. Compute $\underline{d}_{\nu_n} f(x_n)$ and $\overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$.

Step 3. For all $z = (b, w) \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ find a globally optimal solution $(a_n(z), v_n(z)) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}$ of the problem:

$$\min \|(a, v)\|^2 \quad \text{subject to} \quad (a, v) \in \operatorname{cl} \Big\{ \operatorname{co} \underline{d}_{\nu_n} f(x_n) \Big\} + z. \tag{3.4}$$

Step 4. For all $z \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ find a globally optimal solution $\alpha_n(z) \geq 0$ of the problem:

$$\min_{\alpha \in [0, \alpha_*].} f(x_n - \alpha v_n(z)).$$

Step 5. Compute $z_n \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ such that:

$$z_n \in \arg\min \Big\{ f(x_n - \alpha_n(z) v_n(z)) \Bigm| z \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n) \Big\},$$

Define $x_{n+1} = x_n - \alpha_n(z_n) v_n(z_n)$, $n := n + 1$ and go to **Step 2**.

Remark 3.1.2. In the case $\alpha_* = +\infty$ we suppose that $[0, \alpha_*] = [0, +\infty)$ on Step 4 of the algorithm. The closure of the set $\underline{d}_{\nu_n} f(x_n)$ on Step 3 is taken in the strong (or, equivalently, weak) topology. Note that the set $\operatorname{cl} \operatorname{co} \underline{d}_{\nu_n} f(x_n) \subseteq \underline{d} f(x_n)$ is weakly compact due to the weak compactness of the hypodifferential $\underline{d} f(x_n)$. Hence bearing in mind the fact that $\mathcal{H}$ is a Hilbert space one gets that there exists a unique globally optimal solution of problem (3.4). Below we suppose that the step sizes $\alpha_n(z)$ and the vectors z_n are correctly defined on every interation of the method. The vector z_n is well-defined, provided the sets $\overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ are finite, which is the case in almost all applications. In turn, the step sizes $\alpha_n(z)$ are well-defined, if f is l.s.c. and $\alpha_* < +\infty$. In the case $\alpha_* = +\infty$, one must impose an additional assumption on the function f such as the boundedness of the sublevel set $\{x \in \mathcal{H} \mid f(x) < f(x_0)\}$.

Observe that at each iteration of the MCD one must perform line search in *several* directions. As we will show below, at least one of those directions is a descent direction (that is, $f'(x_n, -v_n(z)) < 0$), provided x_n is not an inf-stationary point of the function f. Therefore, for any $n \in \mathbb{N}$ either x_n is an inf-stationary point of f or $f(x_{n+1}) < f(x_n)$. On the other hand, some of the search directions $-v_n(z)$ might not be descent directions of the function f, i.e. f may first increase and then decrease in these directions. This interesting feature of the MCD allows it to "jump over" some points of local minimum, provided the parameters ν_n and μ_n are sufficiently large (for a particular example of this phenomenon see [89, Sect. 4]; see also Section 3.4 below). Note that the fact that some of the search directions $v_n(z)$ are not descent direction forces one to define step sizes via the minimization of the function f along the directions $v_n(z)$ instead of utilizing some more widespread step size rules, such as the Armijo and the Goldstein rules.

Remark 3.1.3. With the use of the theory of global codifferentials of DC functions developed in Chapter 1 one can give the following interpretation of the method of codifferential descent. This method is based on the use of a local approximation of a nonsmooth function via a DC function. On every iteration of the method one applies global optimality conditions from Theorem 1.1.4 to a local DC approximation and computes global descent directions $-v_n(z)$ of this approximation (cf. Remark 1.1.4). These directions then used as search directions for the original function f.

The parameters $\nu_n, \mu_n \geq 0$ are introduced into the MCD in order to ensure convergence. If one looks at the form of the necessary optimality condition (3.2), then it might seem natural to utilize the MCD with $\nu_n \equiv \mu_n \equiv 0$. However, the MCD with $\nu_n \equiv \mu_n \equiv 0$ might converge to a non-stationary point of the function f (cf. [100, Sect. III.5], and [222, Sect. VIII.2.2]). Let us also note that the choice of parameters ν_n and μ_n is a tradeoff between the complexity of every iteration and the overall performance of the method. In many application, a decrease of the parameters ν_n and μ_n reduces the cost of an iteration, while an increase of these parameters might allow one to find a better local solution.

Remark 3.1.4. Let us note that the original version of the MCD proposed by prof V.F. Demyanov (see, e.g. [111]) corresponds to the case when $\alpha_* = +\infty$, $\mu_n \equiv \mu > 0$, $\underline{d}_{\nu_n} f(x_n) \equiv \underline{d} f(x_n)$ and $\overline{d}_{\mu_n} f(x_n) \equiv \{(b, w) \in \overline{d} f(x_n) \mid b \leq \mu\}$ for some $\mu > 0$. However, a direct practical implementation of the original method is impossible, since the set $\{(b, w) \in \overline{d} f(x) \mid b \leq \mu\}$ almost always has the cardinality of the continuum (unless f is hypodifferentiable). Note also that a direct implementation of the method of truncated codifferential [89] is impossible for a similar reason. In turn, Algorithm 1, proposed by the author in [144], admits a simple implementation and, in essence, can be viewed as a rigorous mathematical description of the way the original method and the method of truncated codifferential are implemented in practice.

3.1.2 Auxiliary Results

Before we proceed to the convergence analysis of the MCD, let us first prove a simple result about descent directions in the MCD, and two useful auxiliary lemmas that will be utilized throughout the rest of the article.

Lemma 3.1.1. *Let a sequence $\{x_n\} \subset U$ be generated by the MCD. Then for any $n \in \mathbb{N}$ and $z = (0, w) \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ such that $0 \notin \operatorname{cl}\operatorname{co} \underline{d}_{\nu_n} f(x_n) + z$ one has $f'(x_n, -v_n(z)) \le -\|(a_n(z), v_n(z))\|^2$, which implies that $v_n(z) \neq 0$. Moreover, if x_n is not an inf-stationary point of the function f, then $f(x_{n+1}) < f(x_n)$.*

Proof. Fix arbitrary $n \in \mathbb{N}$ and $z = (0, w_0) \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ such that $0 \notin \operatorname{cl}\operatorname{co} \underline{d}_{\nu_n} f(x_n) + z$. Applying the necessary condition for a minimum of a convex function on a convex set (see, e.g. [168, Prp. II.2.1]) one obtains that

$$aa_n(z) + \langle v, v_n(z) \rangle \ge \left\|(a_n(z), v_n(z))\right\|^2 \quad \forall (a, v) \in \operatorname{cl}\operatorname{co} \underline{d}_{\nu_n} f(x_n) + z. \tag{3.5}$$

Note that by definition one has $\{0\} \times \underline{\partial} f(x_n) \subseteq \operatorname{cl}\operatorname{co} \underline{d}_{\nu_n} f(x_n)$ and $w_0 \in \overline{\partial} f(x_n)$. Therefore

$$\begin{aligned} f'(x_n, -v_n(z)) &= \max_{v \in \underline{\partial} f(x_n)} \langle v, -v_n(z) \rangle + \min_{w \in \overline{\partial} f(x_n)} \langle w, -v_n(z) \rangle \\ &\le \max_{v \in \underline{\partial} f(x_n) + w_0} \langle v, -v_n(z) \rangle \le -\left\|(a_n(z), v_n(z))\right\|^2. \end{aligned}$$

Finally, note that if x_n is not an inf-stationary point of f, then by definition there exists $z = (0, w) \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ such that $0 \notin \operatorname{cl}\operatorname{co} \underline{d}_{\nu_n} f(x_n) + z$, which implies that $f(x_n - \alpha_n(z) v_n(z)) < f(x_n)$, and hence $f(x_{n+1}) < f(x_n)$. □

Lemma 3.1.2. *Let X be a finite dimensional normed space, and let a sequence $\{A_n\}$ of convex compact subsets of X converge to a convex compact set $A \subset X$ in the Hausdorff metric. Then for any subsequence $\{A_{n_k}\}$ one has*

$$\operatorname{ext} A \subseteq \limsup_{k \to \infty} \big(\operatorname{ext} A_{n_k} \big) := \Big\{ x \in X \;\Big|\; \liminf_{k \to \infty} \Big(\operatorname{dist}(x, \operatorname{ext} A_{n_k}) \Big) = 0 \Big\},$$

where lim sup *is the outer limit.*

Proof. Let us verify that $A = \operatorname{co}(\limsup_{k \to \infty} \operatorname{ext} A_{n_k})$. Then applying a partial converse to the Krein-Milman theorem (if K is a compact convex set, and $K = \operatorname{cl}\operatorname{co} B$, then $\operatorname{ext} K \subseteq \operatorname{cl} B$; see, e.g., [166, Prp. 10.1.3]), and the fact that the outer limit set is always closed we arrive at the required result.

Fix any $x \in \limsup_{k \to \infty}(\operatorname{ext} A_{n_k})$. By the definition of outer limit there exist a subsequence, which we denote again by $\{A_{n_k}\}$, and points $x_k \in A_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, such that $x_k \to x$ as $k \to \infty$. Put $\theta_k = \rho_H(A_{n_k}, A)$. Observe that $\theta_k \to 0$ as $k \to \infty$, since $A_n \to A$ in the Hausdorff metric. Moreover, by Lemma 1.2.1 for any $k \in \mathbb{N}$ there exists $y_k \in A$ such that $\|y_k - x_k\| < 2\theta_k$. Clearly,

$y_k \to x$ as $k \to \infty$. Therefore $x \in A$, since the set A is compact. Thus, $\limsup\limits_{k\to\infty}(\operatorname{ext} A_{n_k}) \subseteq A$, which with the use of the convexity of A implies that $\operatorname{co}(\limsup\limits_{k\to\infty}(\operatorname{ext} A_{n_k})) \subseteq A$.

Let us prove the converse inclusion. Fix an arbitrary $x \in A$. Clearly, for any $k \in \mathbb{N}$ there exists $x_k \in A_{n_k}$ such that $x_k \to x$ as $k \to \infty$. Applying the Krein-Milman and the Carathéodory theorems one obtains that for any $k \in \mathbb{N}$ there exist $y_k^i \in \operatorname{ext} A_{n_k}$, and $\alpha_k^i \geq 0$, $1 \leq i \leq m+1$ (here m is the dimension of X) such that

$$x_k = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_k^i y_k^i, \qquad \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_k^i = 1. \tag{3.6}$$

Note that the sequence $\{A_n\}$ lies within a bounded set by virtue of the fact that A is compact and $A_n \to A$ in the Hausdorff metric (see Lemma 1.2.1). Hence the sequences $\{y_k^i\}$, $i \in \{1, \ldots m+1\}$ are bounded. Replacing them as well as the sequences $\{\alpha_k^i\}$ with convergent subsequences, and passing to the limit in (3.6) one obtains that there exists $y^i \in \limsup_{k\to\infty} \operatorname{ext} A_{n_k}$ and $\alpha^i \geq 0$ such that

$$x = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha^i y^i, \qquad \sum_{i=1}^{m+1} \alpha^i = 1.$$

Thus, $x \in \operatorname{co}(\limsup_{k\to\infty} \operatorname{ext} A_{n_k})$, and the proof is complete. $\square$

We need an auxiliary definition of uniform codifferentiability. Namely, one says that a codifferential mapping $Df(\cdot)$ *uniformly approximates* the function f (or that f is *uniformly codifferentiable*) on a nonempty set $C \subseteq \mathcal{H}$, if the function

$$\varepsilon_f(\alpha, \Delta x, x) = \frac{1}{\alpha}\Big| f(x + \alpha\Delta x) - f(x) - \max_{(a,v)\in \underline{d} f(x)} (a + \langle v, \alpha\Delta x\rangle) - \min_{(b,w)\in \overline{d} f(x)} (b + \langle w, \alpha\Delta x\rangle)\Big|$$

converges to zero as $\alpha \to +0$ uniformly for all $\Delta x \in B(0,1)$ and $x \in C$. The estimates of the function $\varepsilon_f(\alpha, \Delta x, x)$ obtained in Section 1.2.3 imply that the set of all functions that are uniformly codifferentiable on a given set C is closed under addition, multiplication by scalar, as well as pointwise maximum and minimum of finite families of functions. Moreover, the set of all locally uniformly codifferentiable functions (i.e. uniformly codifferentiable in a neighbourhood of every point) is also closed under multiplication, division and composition with continuously differentiable functions.

Lemma 3.1.3. *Let sequences $\{x_n\} \subset U$ and $\{\nu_n\}, \{\mu_n\} \subset [0, +\infty]$ be such that the codifferential mapping Df uniformly approximates f on the set $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, the sequences $\{\underline{d} f(x_n)\}$ and $\{\overline{d} f(x_n)\}$ lie within a bounded set, and* $\liminf_{n\to\infty} \nu_n = \nu^* > 0$. *Suppose also that $\{h_n\} \subset \mathcal{H}$ is a bounded* *sequence satisfying the inequalities*

$$\sup_{(a,v)\in\underline{d}_{\nu_n}f(x_n)+z_n}(a+\langle v,h_n\rangle)\le-\theta\quad\forall n\in\mathbb{N},\tag{3.7}$$

$$f(x_{n+1})\le\inf_{\alpha\in[0,\alpha_0]}f(x_n+\alpha h_n)+\varepsilon_n\quad\forall n\in\mathbb{N}\tag{3.8}$$

for some $z_n=(b_n,w_n)\in\overline{d}_{\mu_n}f(x_n)$, $\theta>0$, $\alpha_0>0$ *and* ε_n *such that* $\varepsilon_n\to0$ *and* $b_n\to0$ *as* $n\to\infty$. *Then* $f(x_n)\to-\infty$ *as* $n\to\infty$.

Proof. By definition for any $n\in\mathbb{N}$ one has

$$f(x_n+\alpha h_n)-f(x_n)=\max_{(a,v)\in\underline{d}f(x_n)}\big(a+\alpha\langle v,h_n\rangle\big)+\min_{(b,w)\in\overline{d}f(x_n)}\big(b+\alpha\langle w,h_n\rangle\big)$$
$$+\alpha\varepsilon_n(\alpha)\le\max_{(a,v)\in\underline{d}f(x_n)+z_n}\big(a+\alpha\langle v,h_n\rangle\big)+\alpha\varepsilon_n(\alpha),\tag{3.9}$$

where $\varepsilon_n(\alpha)=\varepsilon_f(\alpha,h_n,x_n)$. Our aim is to prove that there exist $n_1\in\mathbb{N}$ and $\alpha_1\in(0,\widehat{\alpha}]$ such that for all $n\ge n_1$ and $\alpha\in[0,\alpha_1]$ the set $\underline{d}f(x_n)+z_n$ in (3.9) can be replaced by the smaller set $\underline{d}_{\nu_n}f(x_n)+z_n$, i.e.

$$f(x_n+\alpha h_n)-f(x_n)\le\sup_{(a,v)\in\underline{d}_{\nu_n}f(x_n)+z_n}\big(a+\alpha\langle v,h_n\rangle\big)+\alpha\varepsilon_n(\alpha)\tag{3.10}$$

for all $n\ge n_1$ and $\alpha\in(0,\alpha_1]$.

Before we turn to the proof of inequality (3.10), let us first demonstrate that the validity of the lemma follows directly from this inequality. Indeed, denote

$$\eta_n(\alpha)=\sup_{(a,v)\in\underline{d}_{\nu_n}f(x_n)+z_n}\big(a+\alpha\langle v,h_n\rangle\big).$$

From (3.10) and the convexity of $\eta_n(\alpha)$ it follows that

$$f(x_n+\alpha h_n)-f(x_n)\le\alpha\eta_n(1)+(1-\alpha)\eta_n(0)+\alpha\varepsilon_n(\alpha)$$
$$=\alpha\sup_{(a,v)\in\underline{d}_{\nu_n}f(x_n)+z_n}\big(a+\langle v,h_n\rangle\big)+(1-\alpha)\eta_n(0)+\alpha\varepsilon_n(\alpha)$$

for all $n\ge n_1$ and $\alpha\in[0,\alpha_1]$. Hence applying (3.7) and taking into account the fact that $\eta_n(0)=b_n$ due to (3.1) one obtains that

$$f(x_n+\alpha h_n)-f(x_n)\le-\alpha\theta+(1-\alpha)b_n+\alpha\varepsilon_n(\alpha)$$

for all $n\ge n_1$ and $\alpha\in[0,\alpha_1]$. Recall that the codifferential mapping Df uniformly approximates the function f on the set $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Therefore there exists $\alpha_2>0$ such that for all $n\in\mathbb{N}$ and $\alpha\in[0,\alpha_2]$ one has $|\varepsilon_n(\alpha)|<\theta/3$. Hence for any $n\ge n_1$ one has

$$f(x_n+\gamma h_n)-f(x_n)\le-\gamma\frac{2\theta}{3}+(1-\gamma)b_n,\quad\gamma=\min\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\}.$$

By our assumption $b_n \to 0$ as $n \to \infty$. Therefore for any sufficiently large $n \in \mathbb{N}$ one has

$$f(x_n + \gamma h_n) - f(x_n) \le -\gamma \frac{\theta}{3},$$

which with the use of (3.8) implies that $f(x_{n+1}) \le f(x_n) - \gamma\theta/3 + \varepsilon_n$ for all n large enough. Consequently, taking into account the fact that $\varepsilon_n \to 0$ as $n \to \infty$ one obtains that $f(x_n) \to -\infty$ as $n \to \infty$.

Thus, it remains to verify that inequality (3.10) holds true. Denote

$$g_n(\alpha) = \max_{(a,v) \in \underline{d} f(x_n) + z_n} \big(a + \alpha \langle v, h_n \rangle \big).$$

Let us prove that there exist $n_1 \in \mathbb{N}$ and $\alpha_1 > 0$ such that $g_n(\alpha) = \eta_n(\alpha)$ for all $n \ge n_1$ and $\alpha \in [0, \alpha_1]$. Then (3.10) follows directly from (3.9).

From the inclusion $\underline{d}_{\nu_n} f(x_n) \subseteq \underline{d} f(x_n)$ it follows that $g_n(\alpha) \ge \eta_n(\alpha)$ for all $\alpha \ge 0$ and $n \in \mathbb{N}$. We need to check that the converse inequality holds true for any sufficiently small $\alpha \ge 0$ and for all $n \in \mathbb{N}$ large enough. By the Krein-Milman theorem one has

$$\max_{(a,v) \in \underline{d} f(x_n)} \big(a + \alpha \langle v, h_n \rangle \big) = \sup_{(a,v) \in \operatorname{ext} \underline{d} f(x_n)} \big(a + \alpha \langle v, h_n \rangle \big). \tag{3.11}$$

By our assumption the sets $\underline{d} f(x_n)$ and $\overline{d} f(x_n)$ lie within a bounded set K. Define $C_1 = \sup_{z \in K} \|z\|$, $C_2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|h_n\|$ and $\alpha_1 = \nu^*/4C_1C_2$. Then for any $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0, \alpha_1]$ and $(a, v) \in \operatorname{ext} \underline{d} f(x_n)$ one has $|\alpha \langle v, h_n \rangle| \le \nu^*/4$, which implies that

$$a + \alpha \langle v, h_n \rangle \begin{cases} \ge -0.5\,\nu^*, & \text{if } a \ge -0.25\,\nu^*, \\ < -0.5\,\nu^*, & \text{if } a < -0.75\,\nu^*. \end{cases}$$

Therefore, for any $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in [0, \alpha_1]$ one has

$$\sup_{(a,v) \in \operatorname{ext} \underline{d} f(x_n)} \big(a + \alpha \langle v, h_n \rangle \big) = \sup_{(a,v) \in \operatorname{ext} \underline{d} f(x_n) \colon a \ge -0.75 \nu^*} \big(a + \alpha \langle v, h_n \rangle \big) \ge -\frac{\nu^*}{2}.$$

By the definition of ν^* there exists $n_1 \in \mathbb{N}$ such that $\nu_n \ge 0.75\nu^*$ for all $n \ge n_1$. Consequently, taking into account the definition of $\underline{d}_\nu f(x)$ and equality (3.11) one obtains that $g_n(\alpha) = \eta_n(\alpha)$ for all $\alpha \in [0, \alpha_1]$ and $n \ge n_1$, and the proof is complete. □

3.1.3 A Convergence Analysis

Now we can prove the global convergence of the MCD.

Theorem 3.1.1. *Suppose that x_* is a cluster point of a sequence $\{x_n\}$ generated by the MCD, the codifferential mapping Df is continuous at x_*, and uniformly approximates the function f in a neighbourhood of this point. Let also f be bounded below on $\mathcal{H}$,* $\liminf_{n \to \infty} \nu_n > 0$ *and* $\liminf_{n \to \infty} \mu_n > 0$. *Suppose finally that one of the two following assumptions holds true:*

1. $\mathcal{H}$ is finite dimensional;

2. $\{(b, w) \in \overline{d} f(x_n) \mid b \le \widehat{\mu}\} \subseteq \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ for some $\widehat{\mu} > 0$, and for all sufficiently large $n \in \mathbb{N}$.

Then x_* is an inf-stationary point of the function f. If, in addition, f is convex, then x_* is a point of global minimum of the function f.

Proof. Arguing by reductio ad absurdum, suppose that x_* is not an inf-stationary point of the function f. Then there exists $z^* = (0, w^*) \in \operatorname{ext} \overline{d} f(x_*)$ such that $\theta = \min\{\|(a, v)\|^2 \mid (a, v) \in \underline{d} f(x_*) + z^*\} > 0$. Our aim is to apply Lemma 3.1.3.

Since x_* is a cluster point of the sequence $\{x_n\}$, there exists a subsequence $\{x_{n_k}\}$ converging to x_*. Therefore $\overline{d} f(x_{n_k}) \to \overline{d} f(x_*)$ as $k \to \infty$ in the Hausdorff metric due to the continuity of the codifferential mapping Df at x_*. Hence applying Lemma 3.1.2 and the fact that $\liminf_{n\to\infty} \mu_n > 0$ in the case when $\mathcal{H}$ is finite dimensional or assumption 2 in the case when $\mathcal{H}$ is infinite dimensional one obtains that there exists a subsequence of the sequence $\{x_{n_k}\}$, which we denote again by $\{x_{n_k}\}$, and there exists $z_{n_k} = (b_{n_k}, w_{n_k}) \in \overline{d}_{\mu_{n_k}} f(x_{n_k})$ such that $z_{n_k} \to z^*$, i.e. $b_{n_k} \to 0$ and $w_{n_k} \to w^*$, as $k \to \infty$. Consequently, taking into account the fact that the multifunction $\underline{d} f(\cdot)$ is Hausdorff continuous at x_* by our assumption one obtains that $\|(a_{n_k}(z_{n_k}), v_{n_k}(z_{n_k}))\|^2 > \theta/2$ for all k greater than some $k_1 \in \mathbb{N}$.

Denote $a_k = a_{n_k}(z_{n_k})$ and $v_k = v_{n_k}(z_{n_k})$. From the definition of (a_k, v_k), and the necessary and sufficient conditions for a minimum of a convex function on a convex set it follows that

$$-(a + b_{n_k}) a_k - \langle v + w_{n_k}, v_k \rangle \le -\big\|(a_k, v_k)\big\|^2 < -\frac{\theta}{2} \tag{3.12}$$

for all $(a, v) \in \underline{d}_{\nu_{n_k}} f(x_{n_k})$ and $k \ge k_1$. Therefore

$$\sup_{(a,v) \in \underline{d}_{\nu_{n_k}} f(x_{n_k}) + z_{n_k}} (a + \alpha \langle v, -v_k \rangle) \le -\alpha \frac{\theta}{2} + \sup_{(a,v) \in \underline{d}_{\nu_{n_k}} f(x_{n_k})} \big((a + b_{n_k})(1 + \alpha a_k) \big).$$

for all $\alpha \ge 0$ and $k \ge k_1$. Taking into account the facts that the codifferential mapping Df is continuous at x_* and $x_{n_k} \to x_*$ as $k \to \infty$ one obtains that the sequences $\{\underline{d} f(x_{n_k})\}$ and $\{\overline{d} f(x_{n_k})\}$ lie within a bounded set, which, in particular, implies that the sequences $\{a_k\}$ and $\{v_k\}$ are bounded. Consequently, there exists $\gamma > 0$ such that $1 + \gamma a_k > 0$ for all $k \ge k_1$, which implies that

$$\sup_{(a,v) \in \underline{d}_{\nu_{n_k}} f(x_{n_k}) + z_{n_k}} (a + \langle v, -\gamma v_k \rangle) \le -\gamma \frac{\theta}{2} + (1 + \gamma a_k) b_{n_k} \qquad \forall k \ge k_1$$

(here we used equalities (3.1)). By definition $b_{n_k} \to 0$ as $k \to \infty$. Therefore there exists $k_2 \ge k_1$ such that $b_{n_k} < \gamma\theta/4$ for all $k \ge k_2$.

Furthermore, from the fact that the codifferential mapping Df uniformly approximates the function f in a neighbourhood of x_* it follows that Df uniformly approximates f on the set $\{x_{n_k}\}_{k \ge k_4}$ for some $k_4 \in \mathbb{N}$. Therefore one can apply Lemma 3.1.3 with $\alpha_0 = \alpha_*/\gamma$ (recall that α_* is the upper bound on the step size in the MCD), the sequence $\{x_n\}$ defined as $\{x_{n_k}\}_{k \ge m}$, and the sequence $\{h_n\}$ defined as $\{-\gamma v_k\}_{k \ge m}$, where $m = \max\{k_2, k_3, k_4\}$. Note that in this case the validity of the condition (3.8) with $\delta_n \equiv 0$ follows direction from the definition of $\alpha_n(z)$ and x_{n+1} (see Steps 4 and 5 of Algorithm 1). Thus, by Lemma 3.1.3 one obtains that $f(x_{n_k}) \to -\infty$ as $k \to \infty$, which is impossible due to the fact that f is bounded below. Therefore, x_* is an inf-stationary point of f.

It remains to note that if f is convex, then x_* is an inf-stationary point of f if and only if x_* is a point of global minimum of f, since by Proposition 1.2.2 the point x_* is inf-stationary if and only if the inequality $f'(x_*, \cdot) \ge 0$ holds true, which in the convex case is a necessary and sufficient global optimality condition. $\square$

Remark 3.1.5. For the validity of the theorem above it is sufficient to suppose that $\{0\} \times \operatorname{ext} \overline{\partial} f(x^*) \subseteq \limsup_{k \to \infty} \operatorname{ext} \overline{d} f(x_{n_k})$, where $x_{n_k} \to x^*$ as $k \to \infty$. Lemma 3.1.2 guarantees that this inclusion always holds true in the finite dimensional case. In order to ensure the validity of this inclusion in the infinite dimensional case we utilized assumption 2, but it should be noted that in some particular cases the validity of this inclusion can be verified directly.

It is well-known that under some natural assumptions for any gradient method one has $\lim_{n \to \infty} \|\nabla f(x_n)\| = 0$, where $\{x_n\}$ is a sequence generated by this method (see, e.g. [323, Thrm. 2.5]). Let us extend this result to the case of the MCD. To this end, for any $\nu \ge 0$ introduce the function

$$\omega(x, \nu) = \sup_{(0,w) \in \overline{d} f(x)} \min_{u \in \operatorname{cl} \operatorname{co} \underline{d}_\nu f(x) + (0,w)} \|u\|^2$$

that, in a sense, measures how far a point x is from being an inf-stationary point of the function f. In particular, x is an inf-stationary point of f if and only if $\omega(x, \nu) = 0$ for some $\nu \ge 0$. It should be noted that the function $\omega(x, \nu)$ is not continuous (or even l.s.c.) in x in the general case, even if the function f is continuously codifferentiable. But ω is continuous in x, if f is continuously hypodifferentiable, and $\nu = +\infty$, since in this case $\omega(x, +\infty) = \operatorname{dist}(0, \underline{d} f(x))$.

Theorem 3.1.2. *Let f be bounded below, a sequence $\{x_n\}$ be generated by the MCD, and the sequences $\{\underline{d} f(x_n)\}$ and $\{\overline{d} f(x_n)\}$ be bounded. Suppose also that $\liminf_{n \to \infty} \nu_n = \nu^* > 0$ and the codifferential mapping Df uniformly approximates the function f on the set $\{x_n\}_{n \ge m}$ for some $m \in \mathbb{N}$ (in particular, one can suppose that Df uniformly approximates the function f on the set*

$\{x \in \mathcal{H} \mid f(x) \le f(x_0)\}$). *Then* $\omega(x_n, \nu_n) \to 0$ *as* $n \to \infty$. *In particular, if* f *is hypodifferentiable, i.e.* $Df(\cdot) = [\underline{d}f(\cdot), \{0\}]$, *and* $\nu_n \equiv +\infty$, *then* $\operatorname{dist}(0, \underline{d}f(x_n)) \to 0$ *as* $n \to \infty$.

Proof. Arguing by reductio ad absurdum, suppose that the theorem is false. Then there exist a subsequence $\{x_{n_k}\}$ and $\theta > 0$ such that $\omega(x_{n_k}, \nu_{n_k}) > \theta$ for all $k \in \mathbb{N}$. Observe that the supremum in the definition of $\omega(x, \nu)$ can be taken only over extreme points of the set $\overline{d}f(x)$ of the form $(0, w)$, since the distance function in the definition of $\omega(x, \nu)$ is convex in ν. Therefore, by the definition of ω for any $k \in \mathbb{N}$ there exists $z_{n_k} = (0, w_{n_k}) \in \overline{d}_{\mu_{n_k}} f(x_{n_k})$ such that $\|(a_{n_k}(z_{n_k}), v_{n_k}(z_{n_k}))\|^2 \ge \theta$. Then taking into account the fact that the sequences $\{\underline{d}f(x_n)\}$ and $\{\overline{d}f(x_n)\}$ are bounded, and arguing in the same way as in the proof of Theorem 3.1.1 one can easily check that there exists $\gamma > 0$ such that

$$\sup_{(a,v) \in \underline{d}_{\nu_{n_k}} f(x_{n_k}) + z_{n_k}} \big(a + \langle v, -\gamma v_{n_k}(z_{n_k}) \rangle\big) \le -\gamma\theta \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Consequently, applying Lemma 3.1.3 one obtains that $f(x_{n_k}) \to -\infty$ as $k \to \infty$, which contradicts the assumption that f is bounded below. $\square$

Remark 3.1.6. It is easy to verify that Theorems 3.1.1 and 3.1.2 remain to hold true in the case when the search directions $v_n(z_n)$ are replaced by some approximations $\widetilde{v}_n(z_n)$ such that

$$\big\|\widetilde{v}_n(z_n) - v_n(z_n)\big\| \le \varepsilon_n, \tag{3.13}$$

where $\varepsilon_n \to +0$ as $n \to \infty$. Namely, note that in this case one has

$$-(a + b_{n_k})a_{n_k}(z_{n_k}) - \big\langle v + w_{n_k}, \widetilde{v}_{n_k}(z_{n_k}) \big\rangle \le -\frac{\theta}{2} + \varepsilon_{n_k} C$$

for a sufficiently large $C > 0$, and for all $(a, v) \in \underline{d}_{\nu_{n_k}} f(x_{n_k})$ and $k \ge k_1$ (see (3.12)). With the use of this estimate and the fact that $\varepsilon_{n_k} \to 0$ one can easily obtain the required results. In particular, one can extend Theorems 3.1.1 and 3.1.2. to the case when instead of the sets $\underline{d}f(x_n)$ and $\overline{d}f(x_n)$ one uses their approximations, provided these approximations are "good enough", i.e. provided inequality (3.13) holds true for the corresponding approximate search directions.

Similarly, Theorems 3.1.1 and 3.1.2 remain to hold true if the step sizes $\alpha_n(z)$ are computed only approximately. Namely, it is sufficient to suppose that

$$f(x_n - \alpha_n(z) v_n(z)) \le \inf_{\alpha \in [0, \alpha_*]} f(x_n - \alpha v_n(z)) + \delta_n,$$

where $\delta_n \to +0$ as $n \to \infty$. Thus, one can say that the MCD is somewhat robust with respect to computational errors.

3.2 The Quadratic Regularization of the Method of Codifferential Descent

In this section we study a different method for minimizing codifferentiable functions proposed by the author in [144]. This method can be viewed as a direct generalization of Pshenichny's linearization method [342, 343] to the case of nonsmooth codifferentiable functions. This method, unlike the method of codifferential descent, can be applied to problems of minimizing codifferentiable functions subject to convex constraints.

Let $A \subseteq \mathcal{H}$ be a closed convex set. Let us consider the problem of minimizing f over the set A. For all $x \in \mathcal{H}$ and $z \in \overline{d} f(x)$ introduce the convex function

$$\varphi(h, z, x, \nu) = \max_{(a,v) \in \operatorname{cl} \operatorname{co} \underline{d}_\nu f(x) + z} \big(a + \langle v, h \rangle\big) + \frac{1}{2}\|h\|^2 \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

In the case when some sequences $\{\nu_n\} \subset [0, +\infty]$ and $\{x_n\} \subset U$ are given, we denote $\varphi_n(h, z) = \varphi(h, z, x_n, \nu_n)$. One can formulate necessary optimality conditions for the function f on the set A in terms of the function φ.

Proposition 3.2.1. *Let $x^* \in A$ be a point of local minimum of the function f on the set A. Then for any $\nu \geq 0$ one has*

$$\{0\} = \operatorname*{arg\,min}_{h \in A - x_*} \varphi(h, z, x_*, \nu) \qquad \forall z = (0, w) \in \operatorname{ext} \overline{d} f(x_*). \tag{3.14}$$

Furthermore, (3.14) *holds true if and only if $f'(x_*, h) \geq 0$ for all $h \in A - x^*$, which implies that optimality condition* (3.14) *is independent of the choice of a codifferential and parameter $\nu \geq 0$.*

Proof. Let $z = (0, w) \in \operatorname{ext} \overline{d} f(x^*)$ be arbitrary. Applying [136, Thrm. 2.8] (see also [133, Thrm. 5] and Proposition 1.3.2 from the previous chapter) one obtains that 0 is a point of global minimum of the function $\varphi(\cdot, z, x^*, \nu) - \| \cdot \|^2/2$ on the set $A - x^*$. Hence taking into account the fact that the subdifferential of this convex function at the origin coincides with the subdifferential of the function $\varphi(\cdot, z, x^*, \nu)$ at the origin one obtains that (3.14) holds true.

Applying the theorem about the subdifferential of the supremum of a family of convex functions (see, e.g., [243, Thm. 4.2.3]), the definition of $\underline{d}_\nu f(x)$ and the first equality in (3.1) one obtains that $\partial_h \varphi(0, z, x^*, \nu) = \underline{\partial} f(x^*) + w$, where $\partial_h \varphi(0, z, x^*, \nu)$ is the subdifferential (in the sense of convex analysis) of the function $\varphi(\cdot, z, x^*, \nu)$ at the origin. Hence with the use of the standard necessary and sufficient condition for a minimum of a convex function on a convex set one obtains that

$$\max_{v \in \underline{\partial} f(x^*) + w} \langle v, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in A - x^* \quad \forall (0, w) \in \operatorname{ext} \overline{d} f(x^*).$$

Taking the infimum over all $w \in \operatorname{ext} \overline{\partial} f(x^*)$ (clearly, $\operatorname{ext} \overline{\partial} f(x^*) = \{w \in \mathcal{H} \mid (0, w) \in \operatorname{ext} \overline{d} f(x^*)\}$), and applying the Krein-Milman theorem one finds that

$$f'(x^*, h) = \max_{v \in \underline{\partial} f(x^*)} \langle v, h \rangle + \min_{w \in \overline{\partial} f(x^*)} \langle w, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in A - x^*. \tag{3.15}$$

Arguing backwards one can check that if (3.15) is valid, then optimality condition (3.14) holds true as well. □

A point $x^* \in A$ satisfying optimality conditions from the previous proposition is called an inf-stationary point of the function f on the set A. With the use of these optimality conditions we can propose the quadratic regularization of the MCD (QR-MCD). The scheme of this method is given in Algorithm 2.

Algorithm 2: The Quadratic Regularization of the Method of Codifferential Descent.

Step 1. Choose an initial guess $x_0 \in A$, sequences $\{\nu_n\} \subset [0, +\infty]$ and $\{\mu_n\} \subset [0, +\infty]$, and the upper bound for the step size $\alpha_* \in (0, +\infty]$, and set $n := 0$.

Step 2. Compute $\underline{d}_{\nu_n} f(x_n)$ and $\overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$.

Step 3. For all $z = (b, w) \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ find a globally optimal solution $h_n(z)$ of the convex problem:

$$\varphi_n(h, z) \to \min_h, \quad h \in A - x_n. \tag{3.16}$$

Step 4. For all $z \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ find

$$\alpha_n(z) \in \operatorname*{arg\,min}_{\alpha} \Big\{ f(x_n + \alpha h_n(z)) \;\Big|\; \alpha \in [0, \alpha_*] \colon x_n + \alpha h_n(z) \in A \Big\}.$$

Step 5. Compute $z_n \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ such that:

$$z_n \in \operatorname{arg\,min} \Big\{ f(x_n - \alpha_n(z) h_n(z)) \;\Big|\; z \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n) \Big\},$$

Define $x_{n+1} = x_n + \alpha_n(z_n) h_n(z_n)$, $n := n + 1$ and go to **Step 2**.

Remark 3.2.1. We suppose that the step sizes $\alpha_n(z)$ and the vectors z_n are correctly defined on all iterations of the method. Note that the function $\varphi_n(\cdot, z)$ is strictly convex, continuous (since it is obviously bounded above on bounded sets), and $\varphi_n(h, z) \to +\infty$ as $\|h\| \to +\infty$. Hence taking into account the fact that $\mathcal{H}$ is a Hilbert space and A is a closed convex set one obtains that for all n and z there exists a unique globally optimal solution $h_n(z)$ of convex problem (3.16). One can easily see that when the sets $\underline{d}_{\nu_n} f(x_n)$ and $\overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$ consist of a finite number of points (i.e. when the codifferential $Df(x_n)$ is a pair of polytopes), and the set A is defined by linear constraints, then problem (3.16) can be reformulated as a quadratic programming problem. Finally, note that x_n is an inf-stationary point of f on A if and only if $h_n(z) = 0$ for all $z = (0, w) \in \overline{d}_{\mu_n} f(x_n)$.

Remark 3.2.2. Under some natural assumptions one can prove a convergence of the quadratic regularization of the method of codifferential descent to an inf-stationary point of f on A. A proof of this results, which is very similar to the proof of Theorem 3.1.1, can be found in the author's paper [144]. Theorem 3.1.2 and Remark 3.1.6 can also be extended to the case of the quadratic regularization of the MCD. Moreover, for some particular classes of nonsmooth functions one can estimate the rate of convergence of this method. Namely, if a certain second order sufficient optimality condition is satisfied at the limit point x_*, then QR-MCD converges to this point with linear rate. In turn, if a *first* order optimality condition is satisfied at x_*, then the rate of convergence is quadratic. See the author's paper [144] for more details.

3.3 The Method of Hypodifferential Descent for Convex Functions

In this section, we study the performance of the method of codifferential descent in the convex case. Let $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ be a convex function. As it was noted above, a function is codifferentiable if and only if its increment can be locally approximated by the difference of convex function (i.e. a DC function). If a codifferentiable function under consideration is convex, then it is natural to assume that its increment can be approximated by a convex function. In other words, it is natural to suppose that f is *hypodifferentiable*, i.e. that there exists a codifferential mapping of the function f of the form $Df(\cdot) = [\underline{d}f(\cdot), \{0\}]$.

Below we suppose that the function f is continuously hypodifferentiable on $\mathcal{H}$ and consider only its continuous hypodifferential mapping $\underline{d}f(\cdot)$. Note that by Proposition 1.2.2 a point x^* is a global minimizer of f if and only if $0 \in \underline{d}f(x^*)$, since in the convex case $f'(x^*, \cdot) \geq 0$ if and only if x^* is a global minimizer of f.

When the MCD is applied to a hypodifferentiable convex function, one calls it *the method of hypodifferential descent* (MHD). Moreover, in the convex case one can utilise Armijo's step-size rule. The scheme of the MHD for minimizing the function f is given in Algorithm 3.

By Lemma 3.1.1 one has $f'(x_n, -v_n) \leq -\|(a_n, v_n)\|^2$. Hence by the definition of directional derivative for any sufficiently small $\alpha > 0$ one has

$$f(x_n - \alpha v_n) - f(x_n) \leq \alpha\sigma f'(x_n, -v_n) \leq -\alpha\sigma\|(a_n, v_n)\|^2, \tag{3.17}$$

if $\|(a_n, v_n)\| > 0$, i.e. $0 \notin \underline{d}f(x_n)$. Therefore, the step sizes α_n (see Step 4 of the MHD) are correctly defined, and $f(x_{n+1}) < f(x_n)$ for all $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, provided x_n is not a point of global minimum of the function f.

Algorithm 3: The method of hypodifferential descent (MHD).

Step 1. Choose a starting point $x_0 \in \mathcal{H}$, $\sigma \in (0,1)$ and $\gamma \in (0,1)$, and set $n := 0$.

Step 2. Compute $\underline{d}f(x_n)$.

Step 3. Compute $(a_n, v_n) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}$ by solving

$$\min \|(a,v)\|^2 \quad \text{subject to} (a,v) \in \underline{d}f(x_n).$$

Step 4. Compute $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ by solving

$$\max_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \gamma^k \quad \text{s.t. } f(x_n - \gamma^k v_n) - f(x_n) \leq -\gamma^k \sigma \|(a_n, v_n)\|^2,$$

and set $\alpha_n = \gamma^k$.

Step 5. Set $x_{n+1} = x_n - \alpha_n v_n$, $n := n+1$, and go to Step 2.

Our aim is to estimate a rate of convergence of the MHD for the function f. To this end, we will assume that the chosen hypodifferential mapping $\underline{d}f(\cdot)$ somehow agrees with the convexity of the function f. The following definition provides a precise and natural formulation of this assumption.

Definition 3.3.1. Let $C \subseteq \mathcal{H}$ be a nonempty convex set. A hypodifferential mapping $\underline{d}f(\cdot)$ of the function f is called *amenable* on the set C, if for all $x, y \in C$ and $(a,v) \in \underline{d}f(x)$ one has $f(y) - f(x) \geq a + \langle v, y - x \rangle$.

Clearly, if f is continuously differentiable, then $\underline{d}f(\cdot) = \{(0, \nabla f(\cdot))\}$ is an amenable continuous hypodifferential mapping of the function f on any convex set C, since for all $x, y \in \mathcal{H}$ one has $f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ due to the convexity of the function f. Moreover, the amenability of hypodifferential mapping is preserved under convex conic combinations and pointwise maximum (a detailed proof of this result can be found in the author's paper [149]).

Proposition 3.3.1. *Let convex functions $f_i \colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ be hypodifferentiable and $\underline{d}f_i(\cdot)$ be their hypodifferential mappings that are amenable on a convex set $C \subseteq \mathcal{H}$, $i \in I = \{1, \ldots, k\}$. Then*

$$\underline{d}g(\cdot) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{d}f_i(\cdot) \tag{3.18}$$

is a hypodifferential mapping of the function $g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$ that is amenable on C (here $\lambda_i \geq 0$), and

$$\underline{d}u(\cdot) = \operatorname{co}\left\{ (f_i(\cdot) - u(\cdot), 0) + \underline{d}f_i(\cdot) \;\middle|\; 1 \leq i \leq k \right\} \tag{3.19}$$

is a hypodifferential mapping of the function $u = \max_{i \in I} f_i$ that is amenable on C as well.

In the smooth case the rate of convergence of gradient methods for convex minimization is typically estimated under the assumption that the gradient of the objective function is globally Lipschitz continuous (cf. [315]). Therefore, it is natural to expect that in order to estimate the rate of convergence of the MHD in the nonsmooth case we have to utilise a generalization of this assumption.

Recall that if a function f is differentiable, and its gradient is globally Lipschitz continuous with Lipschitz constant L, then

$$\big|f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x\rangle\big| \le \frac{L}{2}\|y - x\|^2 \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

(see, e.g., [315, Lemma 1.2.3]). We use this inequality as a basis for the generalization of the Lipschitz continuity assumption to the nonsmooth case.

Definition 3.3.2. Let $C \subseteq \mathcal{H}$ be a nonempty set. One says that a hypodifferential mapping $\underline{d}f(\cdot)$ is a *Lipschitzian approximation* of the function f on the set C with Lipschitz constant $L > 0$, if

$$\Big|f(y) - f(x) - \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x)} \big(a + \langle v, y - x\rangle\big)\Big| \le \frac{L}{2}\|y - x\|^2.$$

for all $x, y \in C$.

The property of being a Lipschitzian approximation is preserved under convex conic combinations and pointwise maximum. A detailed proof of this result can be found in the author's paper [149].

Proposition 3.3.2. *Let convex functions $f_i \colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ be hypodifferentiable, and $\underline{d}f_i(\cdot)$ be their hypodifferential mappings, $i \in I = \{1, \ldots, k\}$. Suppose that for any $i \in I$ the mapping $\underline{d}f_i(\cdot)$ is a Lipschitzian approximation of the function f_i on a set $C \subseteq \mathcal{H}$ with Lipschitz constant $L_i > 0$. Then the hypodifferential mapping* (3.18) *is a Lipschitzian approximation of the function $g = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i$ on the set C with Lipschitz constant $L \le \sum_{i=1}^k |\lambda_i| L_i$ (here $\lambda_i \in \mathbb{R}$), and* (3.19) *is a Lipschitzian approximation of the function $u = \max_{1 \le i \le k} f_i$ on the set C with Lipschitz constant $L \le \max_{1 \le i \le k} L_i$.*

Now, we can obtain an upper estimate of the rate of convergence of the MHD that coincides with the upper estimate of the rate of convergence of the standard gradient method in the convex case (see, e.g., [315, Theorem 2.1.14]). This result is not surprising since in the smooth case the MHD is reduced to the gradient method with Armijo's step-size rule. Let us note that the proof of the following theorem is a straightforward modification of the proof of the corresponding result for gradient methods to the nonsmooth case.

Theorem 3.3.1. *Let f be a closed convex function, the set $S_0 = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) \leq f(x_0)\}$ be bounded, and let the continuous hypodifferential mapping $\underline{d}f(\cdot)$ be amenable and bounded on the set S_0. Suppose also that $\underline{d}f(\cdot)$ a Lipschitzian approximation of f on the set $S_\varepsilon = \{x \in \mathcal{H} \mid$ $\operatorname{dist}(x, S_0) \leq \varepsilon\}$ for some $\varepsilon > 0$, and a sequence $\{x_n\}$ is generated by the MHD. Then there exists $\widehat{\alpha} > 0$ such that $\alpha_n \geq \widehat{\alpha}$ for all $n \in \mathbb{N}$, and the following inequality holds true:*

$$f(x_n) - f(x^*) \leq \frac{(f(x_0) - f(x^*))R^2}{R^2 + (f(x_0) - f(x^*))\widehat{\alpha}\sigma n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.20}$$

Here x^* is a point of global minimum of f, and $R = 1 + \sup_{n \geq 0} \|x_n - x^*\| < +\infty$.

Proof. At first, let us note that f attains a global minimum by [168, Prp. II.1.2], since f is closed, the set S_0 is bounded, and $\mathcal{H}$ is a Hilbert space. Note also that $R = 1 + \sup_{n \geq 0} \|x_n - x^*\|$ is finite due to the facts that $\{x_n\} \subset S_0$, and S_0 is bounded (the validity of the inclusion follows from the inequality $f(x_{n+1}) < f(x_n)$; see (3.17)).

Denote $\Phi_n(y) = \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x_n)}(a + \langle v, y \rangle)$. Applying the necessary and sufficient condition for a minimum of a convex function on a convex set [168, Proposition II.2.1] one obtains that

$$a_n a + \langle v_n, v \rangle \geq \|(a_n, v_n)\|^2 \quad \forall (a, v) \in \underline{d}f(x_n), \tag{3.21}$$

where the pair (a_n, v_n) is computed on Step 3 of the MHD. If $a_n = 0$, then taking into account the fact that $a \leq 0$ for all $(a, v) \in \underline{d}f(x_n)$ by the definition of codifferential one gets that

$$\Phi_n(-v_n) \leq \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x_n)} \langle v, -v_n \rangle \leq -\|(a_n, v_n)\|^2,$$

which with the use of the convexity of Φ_n and the equality $\Phi_n(0) = 0$ (the validity of this equality follows from the definition of codifferential) implies that

$$\Phi_n(-\alpha v_n) \leq \alpha \Phi_n(-v_n) + (1 - \alpha)\Phi_n(0) \leq -\alpha\|(a_n, v_n)\|^2 \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \tag{3.22}$$

On the other hand, if $a_n < 0$, then dividing (3.21) by a_n, and taking the maximum over all $(a, v) \in \underline{d}f(x_n)$ one obtains

$$\Phi_n\left(\frac{1}{a_n} v_n\right) \leq -\frac{1}{|a_n|}\|(a_n, v_n)\|^2.$$

Applying the convexity of Φ_n and the equality $\Phi_n(0) = 0$ again one obtains that

$$\Phi_n\left(\frac{\alpha}{a_n} v_n\right) \leq \alpha \Phi_n\left(\frac{1}{a_n} v_n\right) \leq -\frac{\alpha}{|a_n|}\|(a_n, v_n)\|^2 \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Combining this inequality with (3.22) one gets that in either case

$$\Phi_n(-\alpha v_n) \leq -\alpha\|(a_n, v_n)\|^2 \quad \forall \alpha \in \left[0, \frac{1}{|a_n|}\right], \tag{3.23}$$

where $1/0 = 1$ by definition. Observe that the sequence $\{a_n\}$ is bounded by virtue of the facts that $\{x_n\} \subset S_0$, and the hypodifferential mapping $\underline{d}f(\cdot)$ is bounded on S_0. Therefore, there exists $\varkappa \in (0, 1]$ such that $|a_n|^{-1} > \varkappa > 0$ for all $n \in \mathbb{N}$. Furthermore, from the boundedness of $\underline{d}f(\cdot)$ on S_0 it follows that there exists $K > 0$ such that $\|v_n\| \le K$ for all $n \in \mathbb{N}$. Hence, in particular, $x_n - \alpha v_n \in S_\varepsilon = \{x \in \mathcal{H} \mid \operatorname{dist}(x, S_0) \le \varepsilon\}$ for any $\alpha \in [0, \varepsilon/K]$ and $n \in \mathbb{N}$.

Recall that $\underline{d}f(\cdot)$ is a Lipschitzian approximation of f on S_ε. Therefore there exists $L > 0$ such that

$$f(x_n - \alpha v_n) - f(x_n) - \Phi_n(-\alpha v_n) \le \frac{L\alpha^2}{2}\|v_n\|^2 \quad \forall \alpha \in \left[0, \frac{\varepsilon}{K}\right].$$

Hence and from (3.23) it follows that

$$f(x_n - \alpha v_n) - f(x_n) \le \left(-\alpha + \frac{L\alpha^2}{2}\right)\|(a_n, v_n)\|^2 \quad \forall \alpha \in \left[0, \min\left\{\varkappa, \frac{\varepsilon}{K}\right\}\right].$$

Consequently, as it is easy to see, there exists $\widehat{\alpha} > 0$ such that

$$f(x_n - \widehat{\alpha} v_n) - f(x_n) \le -\widehat{\alpha}\sigma\|(a_n, v_n)\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(one can choose any $\widehat{\alpha} \le \min\{2(1-\sigma)/L, \varkappa, \varepsilon/K\}$), which implies that

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \le -\widehat{\alpha}\sigma\|(a_n, v_n)\|^2, \quad \alpha_n \ge \widehat{\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.24}$$

where $x_{n+1} = x_n - \alpha_n v_n$, and α_n is computed on Step 4 of the MHD. Note that one can set $\widehat{\alpha} = \gamma^k$ for a sufficiently large $k \in \mathbb{N}$. Then $\alpha_n = \gamma^{k_n}$ with $k_n \le k$.

Denote $\Delta_n = f(x_n) - f(x^*)$, where x^* is a point of global minimum of the function f. From the facts that the hypodifferential mapping $\underline{d}f(\cdot)$ is amenable, and $(a_n, v_n) \in \underline{d}f(x_n)$ (see Step 3 of the MHD) it follows that

$$\Delta_n \le -a_n + \langle v_n, x_n - x^* \rangle \le \|(a_n, v_n)\|\big(1 + \|x_n - x^*\|\big) \le R\|(a_n, v_n)\|$$

(recall that $R = 1 + \sup_{n \ge 0}\|x_n - x^*\|$). Adding and subtracting $f(x^*)$ in (3.24), and estimating $\|(a_n, v_n)\|^2$ with the use of the inequality above one gets that

$$\Delta_{n+1} \le \Delta_n - \frac{\widehat{\alpha}\sigma}{R^2}\Delta_n^2.$$

Dividing this inequality by $\Delta_n \cdot \Delta_{n+1}$ one obtains

$$\frac{1}{\Delta_{n+1}} \ge \frac{1}{\Delta_n} + \frac{\widehat{\alpha}\sigma}{R^2}\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} \ge \frac{1}{\Delta_n} + \frac{\widehat{\alpha}\sigma}{R^2}$$

(note that $\Delta_{n+1} \le \Delta_n$ due to the fact that $f(x_{n+1}) \le f(x_n)$). Summing up these inequalities one gets

$$\frac{1}{\Delta_{n+1}} \ge \frac{1}{\Delta_0} + \frac{\widehat{\alpha}\sigma}{R^2}(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

which implies that (3.20) is valid. □

Remark 3.3.1. One can verify that if the set $S_0 = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) \le f(x_0)\}$ is bounded and there exists $\varepsilon > 0$ such that the function f is Lipschitz continuous on S_ε, then there exists a hypodifferential mapping of the function f satisfying all assumptions of Theorem 3.3.1 (an explicit formula for this mapping is given in Remark 3.3 in the author's paper [149]). In particular, if the space $\mathcal{H}$ is finite dimensional, then the boundedness of the set S_0 is a sufficient conditions for the existence of a hypodifferential mapping of the function f satisfying all assumptions of Theorem 3.3.1. Thus, at least from the theoretical point of view the assumptions of this theorem are not very restrictive. On the other hand, Propositions 3.3.1 and 3.3.2 allow one to compute hypodifferential mappings satisfying all assumptions of Theorem 3.3.1 for a sufficiently large class of nonsmooth convex functions.

Remark 3.3.2. Note that the rate of convergence of the MHD is better than the optimal rate of convergence of subgradient methods $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$ [315, Sect. 3.2]. This is obviously due to the fact the oracle utilised by the MHD provides much more information about the objective function than just a single subgradient. On the other hand, each call of this oracle is significantly more expensive than the call of the oracle used in subgradient methods. As a result, the MHD might turn out to be much slower than subgradient methods in numerical experiments on large scale problems or problems whose objective function has a complicated structure.

3.4 The Method of Global Codifferential Descent for Piecewise Affine Functions

As was noted above, the method of codifferential descent is closely related to global optimality conditions in terms of global codifferentials and in some particular cases this method allows one to "jump off" from points of local minimum of the objective function to find a deeper local minimum or even a globally optimal solution. A particular example of this phenomenon was first given in [89]. The main goal of this section is to give a rigorous theoretical justification of the ability of the method of codifferential descent to find a point of global minimum in the case when the objective function is piecewise affine. To this end, we will consider a natural modification of this method for global optimization of piecewise affine functions.

Recall that a convex set $Q \subset \mathbb{R}^d$ is referred to as *polyhedral*, if it can be represented as the intersection of a finite family of closed halfspaces. A finite family $\sigma = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, of polyhedral sets is said to be a *polyhedral partition* of $\mathbb{R}^d$, if $\mathbb{R}^d = \cup_{i=1}^k Q_i$, $\operatorname{int} Q_i \ne \emptyset$ for $1 \le i \le k$, and the interiors of the sets Q_i are mutually disjoint. Finally, a function $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ is called *piecewise affine* (see [210,268]), if there exists a polyhedral partition $\sigma = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ of $\mathbb{R}^d$ such that the restriction of f to each Q_i is an affine function, i.e. for all i there exist $a_i \in \mathbb{R}$ and $v_i \in \mathbb{R}^d$ such that $f(x) = a_i + \langle v_i, x\rangle$ for all $x \in Q_i$. Note that the set of piecewise affine function is a vector lattice under pointwise operations (see [204, 210]).

Usually, it is more convenient to deal with an analytic expression of a given piecewise affine function, than with its definition in terms of a polyhedral partition. In [210] (see also [204]) it was shown that a function f is piecewise affine if and only if there exist $(a_i, v_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $i \in I = \{1, \ldots, \ell\}$, and $(b_j, w_j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $j \in J = \{1, \ldots, s\}$, such that

$$f(x) = \max_{i \in I}(a_i + \langle v_i, x\rangle) + \min_{j \in J}(b_j + \langle w_j, x\rangle) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d . \tag{3.25}$$

Methods for constructing an analytic expression of a piecewise affine function from its definition in terms of a polyhedral partition were studied in [268]. In turn, methods for computing expression (3.25) from an arbitrary analytic expression of a piecewise affine function were considered in [15].

Let a piecewise affine function $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ be given and suppose that its representation of the form (3.25) is known. Define

$$\underline{f}(x) = \max_{i \in I}(a_i + \langle v_i, x\rangle), \quad \overline{f}(x) = \min_{j \in J}(b_j + \langle w_j, x\rangle). \tag{3.26}$$

Then the expression $f = \underline{f} - (-\overline{f})$ is a DC decomposition of the function f. Observe that the set $S_{\underline{f}} = \operatorname{co}\{(a_i, v_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mid i \in I\}$ is an affine support set of the function $\underline{f}$, while the set $S_{-\overline{f}} = \operatorname{co}\{(-b_j, -w_j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mid j \in J\}$ is an affine support set of the function $-\overline{f}$ (see Section 1.1.1). Therefore the pair $Df = [\underline{d}f, \overline{d}f]$, where

$$\begin{aligned} \underline{d}f(x) &= \operatorname{co}\big\{(a_i - \underline{f}(x) + \langle v_i, x\rangle, v_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \bigm| i \in I\big\}, \\ \overline{d}f(x) &= \operatorname{co}\big\{(b_j - \overline{f}(x) + \langle w_j, x\rangle, w_j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \bigm| j \in J\big\} \end{aligned} \tag{3.27}$$

for all $x \in \mathbb{R}^d$, is a global codifferential of the function f (see Section 1.1.2). Let us note that a global codifferential of a piecewise affine function was first introduced by prof. L.N. Polyakova in [338].

Remark 3.4.1. With the use of the calculus of global codifferentials of DC functions from Theorem 1.1.3 one can easily develop a calculus of global codifferentials of piecewise affine functions (see the author's paper [149] for more details). An algorithmic implementation of this calculus was discussed in [15].

Putting $C = \{(b_j - \overline{f}(x) + \langle w_j, x_*\rangle, w_j) \mid j \in J\}$ in Theorem 1.1.4 on global optimality conditions for DC functions in terms of global codifferentials one obtains the following necessary and sufficient global optimality conditions for piecewise affine functions.

Theorem 3.4.1. *Let f be a bounded below piecewise affine function of the form* (3.25) *and Df be its corresponding global codifferential. For any $x_* \in \mathbb{R}^d$ and for all $j \in J$ let $z_j = (b_j - \overline{f}(x_*) + \langle w_j, x_* \rangle, w_j) \in \overline{d}f(x_*)$ and*

$$\big\{(a_j^*, v_j^*)\big\} = \arg\min \big\{ \|(a, v)\|^2 \bigm| (a, v) \in \underline{d}f(x_*) + z_j \big\},$$

where $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm. Then a point x_* is a global minimizer of the function f if and only if $a_j^* \geq 0$ for all $j \in J$.

With the use of the global optimality conditions from the previous theorem one can propose a natural modification of the method of codifferential descent for minimizing piecewise affine function. To this end, fix any piecewise affine function f of the form (3.25) and denote by Df its global codifferential. For all $x \in \mathbb{R}^d$ and $j \in J$ define

$$\begin{gathered} z_j(x) = (b_j - \overline{f}(x) + \langle w_j, x \rangle, w_j) \in \overline{d}f(x), \\ \big\{(a_j(x), v_j(x))\big\} = \arg\min \big\{ \|(a, v)\|^2 \bigm| (a, v) \in \underline{d}f(x) + z_j(x) \big\}. \end{gathered} \tag{3.28}$$

Note that from equality (3.25) and the definition of global codifferential it follows that

$$f(y) - f(x) = \min_{j \in J} \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x) + z_j(x)} (a + \langle v, y - x \rangle) \quad \forall y, x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.29}$$

Suppose that x is not a point of global minimum of the function f, and choose an arbitrary $j \in J$. Applying the necessary and sufficient condition for a minimum of a convex function on a convex set [168, Proposition II.2.1] one obtains that

$$a_j(x)(a - a_j(x)) + \langle v_j(x), v - v_j(x) \rangle \geq 0 \quad \forall (a, v) \in \underline{d}f(x) + z_j(x).$$

If $a_j(x) < 0$, then dividing this inequality by $a_j(x)$, taking the maximum over all $(a, v) \in \underline{d}f(x) + z_j(x)$, and applying (3.29) one obtains

$$f\left(x + \frac{1}{a_j(x)} v_j(x) \right) - f(x) \leq -\frac{1}{|a_j(x)|} \|(a_j(x), v_j(x))\|^2 < 0. \tag{3.30}$$

(see (3.29)). If $a_j(x) = 0$, but $v_j(x) \neq 0$, then $\langle v, -v_j(x) \rangle \leq -\|v_j(x)\|^2$ for any $(a, v) \in \underline{d}f(x) + z_j(x)$, which with the use of (3.29) implies that

$$f(x - \alpha v_j(x)) - f(x) \leq \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x) + z_j(x)} a - \alpha \|v_j(x)\|^2 \quad \forall \alpha \geq 0, \tag{3.31}$$

and the function f is unbounded below. Thus, if $a_j(x) = 0$, and f is bounded below, then $v_j(x) = 0$.

Finally, if $a_j(x) > 0$, then the set $\underline{d}f(x) + z_j(x)$ is of no use to the optimization process. Indeed, by Theorem 3.4.1 one has

$$\max_{(a,v) \in \underline{d}f(x) + z_j(x)} (a + \langle v, y \rangle) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^d. \tag{3.32}$$

Applying (3.29) one gets that

$$f(y) - f(x) = \min_{k \in J} \max_{(a,v) \in \underline{d} f(x) + z_k(x)} (a + \langle v, y - x \rangle) \quad \forall y \in \mathbb{R}^d .$$

From (3.32) it follows that for any y such that $f(y) < f(x)$ the minimum in this equality cannot be achieved for $k = j$. Therefore

$$f(y) - f(x) = \min_{k \in J \setminus \{j\}} \max_{(a,v) \in \underline{d} f(x) + z_i(x)} (a + \langle v, y - x \rangle)$$

for any $y \in \mathbb{R}$ such that $f(y) < f(x)$. In other words, the index j and the corresponding vector (b_j, w_j) are not needed to compute $f(y)$ for any $y \in \mathbb{R}^d$ satisfying the inequality $f(y) < f(x)$. Let us prove an even stronger statement. Namely, let us show that if $a_j(x) \geq 0$ for some $x \in \mathbb{R}^d$, then the index j can be discarded from consideration.

Lemma 3.4.1. *Let f is bounded below and suppose that for some $j \in J$ and $x \in \mathbb{R}^d$ one has $a_j(x) \geq 0$. Then $a_j(y) \geq 0$ for any $y \in \mathbb{R}^d$ such that $f(y) \leq f(x)$.*

Proof. For any $\Delta y, y \in \mathbb{R}^d$ denote $g_j(\Delta y, y) = \max_{(a,v) \in \underline{d} f(y) + z_j(y)} (a + \langle v, \Delta y \rangle)$. Applying the definition of global codifferential (see (1.12)) and equalities (3.27) one gets that

$$\begin{aligned} f(y + \Delta y) - f(y) &= \max_{(a,v) \in \underline{d} f(y)} (a + \langle v, \Delta y \rangle) + \min_{(b,w) \in \overline{d} f(y)} (b + \langle w, \Delta y \rangle) \\ &\leq \max_{(a,v) \in \underline{d} f(y)} (a + \langle v, \Delta y \rangle) + b_j - \overline{f}(y) + \langle w_j, y \rangle + \langle w_j, \Delta y \rangle = g_j(\Delta y, y). \end{aligned}$$

for any $\Delta y, y \in \mathbb{R}^d$. Hence taking into account the fact that f is bounded below one obtains that the function $g(\cdot, y)$ is bounded below for any $y \in \mathbb{R}^d$. Furthermore, note that by the definition of $\underline{d} f(\cdot)$ and $z_j(\cdot)$ (see (3.27) and (3.28)) one has

$$g_j(\Delta y, y) = \max_{i \in I} \big(a_i + \langle v_i, y \rangle - \underline{f}(y) + \langle v_i, \Delta y \rangle + b_j + \langle w_j, y \rangle - \overline{f}(y) + \langle w_j, \Delta y \rangle \big) \tag{3.33}$$

for all $\Delta y, y \in \mathbb{R}^d$.

From the inequality $a_j(x) \geq 0$ and Theorem 1.1.2 (see Remark 1.1.2) it follows that the function $g(\cdot, x)$ is nonnegative. Hence with the use of (3.33) one obtains that for any $\Delta x \in \mathbb{R}^d$ there exists $i \in I$ such that

$$a_i + \langle v_i, x \rangle - \underline{f}(x) + \langle v_i, \Delta x \rangle + b_j + \langle w_j, x \rangle - \overline{f}(x) + \langle w_j, \Delta x \rangle \geq 0.$$

Setting $\Delta x = y - x + \Delta y$ and taking into account the fact that $f(x) = \underline{f}(x) + \overline{f}(x)$ by definition (see (3.25) and (3.26)), one gets that for any $\Delta y, y \in \mathbb{R}^d$ there exists $i \in I$ such that

$$a_i + \langle v_i, y \rangle + \langle v_i, \Delta y \rangle + b_j + \langle w_j, y \rangle + \langle w_j, \Delta y \rangle \geq f(x).$$

Subtracting $f(y) = \underline{f}(y) + \overline{f}(y)$ from both sides of this inequality one obtains that for any $y, \Delta y \in \mathbb{R}^d$ there exists $i \in I$ such that

$$a_i + \langle v_i, y \rangle - \underline{f}(y) + \langle v_i, \Delta y \rangle + b_j + \langle w_j, y \rangle - \overline{f}(y) + \langle w_j, \Delta y \rangle \geq f(x) - f(y).$$

Taking the maximum over all $i \in I$ and applying (3.33) one gets that $g_j(\Delta y, y) \geq f(x) - f(y)$ for all $\Delta y, y \in \mathbb{R}^d$. Hence the function $g_j(\cdot, y)$ is nonnegative for any y such that $f(y) \leq f(x)$, which by Theorem 1.1.2 implies that $a_j(y) \geq 0$ for any such y. □

With the use of the global optimality conditions from Theorem 3.4.1 and Lemma 3.4.1 one can propose the following modification of the method of codifferential descent for minimizing piecewise affine functions, which we call *the method of global codifferential descent* (MGCD) (Algorithm 4).

Algorithm 4: The method of global codifferential descent (MGCD).

Step 1. Choose a starting point $x_0 \in \mathbb{R}^d$, and set $M = J = \{1, \ldots, s\}$ and $n := 0$.

Step 2. Compute $\underline{d}f(x_n)$ and $z_j(x_n)$ for all $j \in M$.

Step 3. For any $j \in M$ compute $(a_j(x_n), v_j(x_n)) \in \mathbb{R}^{d+1}$ by solving

$$\min \|(a, v)\|^2 \quad \text{s.t. } (a, v) \in \underline{d}f(x_n) + z_j(x_n).$$

If $a_j(x_n) \geq 0$, then $M := M \setminus \{j\}$.

Step 4. If $M = \emptyset$, then *stop*. Otherwise, compute $j(n) \in M$ by solving

$$\min_{j \in M} f\left(x_n + \frac{1}{a_j(x_n)} v_j(x_n) \right).$$

Set $x_{n+1} = x_n + [a_{j(n)}(x_n)]^{-1} v_{j(n)}(x_n)$, and $n := n + 1$, and go to Step 2.

Let a sequence $\{x_n\}$ be generated by the MGCD. Observe that from (3.30) it follows that for any $n \in \mathbb{N}$ either $f(x_{n+1}) < f(x_n)$ or $M = \emptyset$. Hence, in particular, if $a_j(x_n) \geq 0$ for some $j \in J$ and $n \in \mathbb{N}$, then $a_j(x_k) \geq 0$ for all $k \geq n$ by Lemma 3.4.1. Therefore, if the MGCD terminates in an iteration n (i.e. $M = \emptyset$ for some $n \in \mathbb{N}$), then $a_j(x_n) \geq 0$ for all $j \in J$, which by Theorem 3.4.1 implies that x_n is a point of global minimum of the function f. Below, we prove that the MGCD always terminates in a finite number of steps, i.e. it finds a global minimizer of a nonconvex piecewise affine function in a finite number of steps.

At first, let us explain the idea behind the proof of this result, which also illuminates the way each step of the MGCD is performed. Suppose for the sake of simplicity that the function f is convex (i.e. $\overline{f}(x) \equiv \{0\}$, see (3.26)). The hypodifferential $\underline{d}f(x_n)$ is a polytope in $\mathbb{R}^{d+1}$. By the

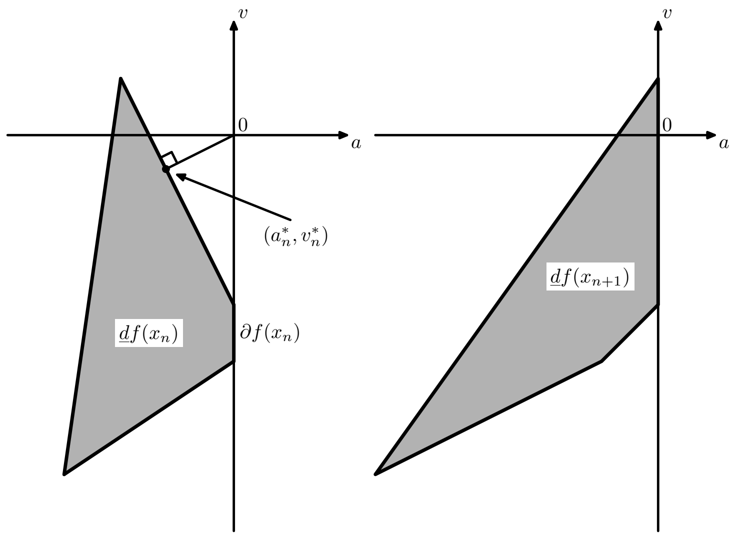


Figure 3.1: The transformation of the global codifferential over one step of the MGCD: $\underline{d}f(x_n)$ (left figure) and $\underline{d}f(x_{n+1})$ (right figure). Note that all points shift only horizontally, i.e. along the a-axis (see (3.27)).

definition of global codifferential one has $a \le 0$ for any $(a, v) \in \underline{d}f(x_n)$, and $\max_{(a,v)\in\underline{d}f(x_n)} a = 0$. Thus, the set $\{(a, v) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid a = 0\} \cap \underline{d}f(x_n)$ is a nonempty face[1] of $\underline{d}f(x_n)$ (by (3.31) this face is proper, i.e. it does not coincide with $\underline{d}f(x_n)$, since otherwise f is unbounded below). We call it *the active face* of the polytope $\underline{d}f(x_n)$. It is easy to see that the subdifferential $\partial f(x_n)$ is exactly the set of those v for which $(0, v)$ belongs to the active face of $\underline{d}f(x_n)$.

The point

$$\{(a_n^*, v_n^*)\} = \arg\min \left\{ \|(a, v)\|^2 \;\middle|\; (a, v) \in \underline{d}f(x_n) \right\}$$

lies on a face F of $\underline{d}f(x_n)$, which is not active, since otherwise, f is unbounded below by (3.31). When one performs one iteration of the MGCD, the polytope $\underline{d}f(x_n)$ transforms according to equalities (3.27). As we will show in the proof below, after this transformation the face F becomes the active face of the polytope $\underline{d}f(x_{n+1})$. Thus, the projection (a_n, v_n) belongs to a face of the hypodifferential, which becomes active on the next iteration (see Figure 3.1).

Bearing these observations in mind one can prove the finite convergence of the MGCD by showing that in a finite number of iterations the projection (a_n, v_n) belongs to a face of $\underline{d}f(x_n)$ that intersects the axis $\{(a, 0) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid a \in \mathbb{R}\}$. Then $0 \in \partial f(x_{n+1})$, and the proof is complete. In the case, when the function f is nonconvex, a similar argument allows one to prove that in a finite number of iterations an index $j(n)$ is discarded. Repeating the same argument s times one can verify that in a finite number of iterations all indices are discarded, and the MGCD terminates.

[1]Recall that a face of a polytope $P \subset \mathbb{R}^d$ is a set of the form $G = P \cap \{x \in \mathbb{R}^d : \langle c, x\rangle = c_0\}$, where $c \in \mathbb{R}^d$ and $c_0 \in \mathbb{R}$ satisfy the inequality $\langle c, x\rangle \le c_0$ for all $x \in P$ (see, e.g. [421]).

Theorem 3.4.2. *Let $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ be a bounded below piecewise affine function. Then f attains a global minimum and the MGCD finds a point of global minimum of this function in a finite number of steps.*

Proof. Let $\{x_n\}$ be a possibly infinite sequence generated by the MGCD for the function f. Denote $a_n^* = a_{j(n)}(x_n)$ and $v_n^* = v_{j(n)}(x_n)$, where the index $j(n)$ is computed on Step 4 of the MGCD. From Theorem 3.4.1 it follows that if x_n is not a global minimizer of f, then there exists $j \in J$ such that $a_j(x_n) < 0$, and

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) \le f\left(x_n + \frac{1}{a_j(x_n)} v_j(x_n)\right) &\le f(x_n) - \frac{1}{|a_j(x_n)|}\big\|(a_j(x_n), v_j(x_n))\big\|^2 = \\ &= f(x_n) - |a_j(x_n)| - \frac{1}{|a_j(x_n)|}\|v_j(x_n)\|^2 \end{aligned} \tag{3.34}$$

(see (3.30) and Step 4 of the MGCD). Note that

$$-|a_j(x_n)| - \frac{1}{|a_j(x_n)|}\|v_j(x_n)\|^2 \le \begin{cases} -1, & \text{if } |a_j(x_n)| \ge 1, \\ -\|v_j(x_n)\|^2, & \text{if } |a_j(x_n)| < 1. \end{cases}$$

Hence, if x_n is a not a point of global minimum of f, then

$$f(x_{n+1}) - f(x_0) \le -\sum_{k=0}^{n} \left(|a_k^*| + \frac{1}{|a_k^*|}\big\|v_k^*\big\|^2 \right) \le -\sum_{k=0}^{n} \min\big\{1, \|v_k^*\|^2\big\}. \tag{3.35}$$

Denote by $\mathcal{E}$ the family of all convex sets $C \subset \mathbb{R}^d$ such that $0 \notin C$ and $C = \operatorname{co}\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} + w_j$ for some $i_1, \ldots, i_k \in I$, $k \in 1\colon \ell$ and $j \in J$, where the vectors v_i and w_j are from the DC decomposition of the function f (3.25). Clearly, $\mathcal{E}$ is a finite family of compact convex sets, and $\theta = \min_{C \in \mathcal{E}} \min_{v \in C} \|v\|^2 > 0$.

Denote $f^* = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) > -\infty$, and $n^* = \lfloor (f(x_0) - f^*)/\min\{\theta, 1\} \rfloor + 1$ (here $\lfloor t \rfloor$ is the greatest integer less than or equial to $t \in \mathbb{R}$). From (3.35) it follows that there exists $n \le n^*$ such that either the MGCD terminates at the step n or $a_n^* < 0$ and $\|v_n^*\|^2 < \theta$.

Suppose that x_n is not a global minimizer of f. By definition (a_n^*, v_n^*) belongs to the convex polytope $\underline{d}f(x_n) + z_{j(n)}(x_n)$ (see Step 3 of the MGCD). Any convex polytope is equal to the disjoint union of the relative interiors of its faces, i.e. the relative interiors of all faces of a convex polytope are pairwise disjoint, and the polytope is equal to the union of these relative interiors (see, e.g. [421, p. 61]). Therefore, (a_n^*, v_n^*) belongs to the relative interior $\operatorname{ri} F$ of a face F of $\underline{d}f(x_n) + z_{j(n)}(x_n)$.

With the use of the necessary and sufficient condition for a minimum of a convex function on a convex set one obtains that

$$a_n^* a + \langle v_n^*, v \rangle \ge \|(a_n^*, v_n^*)\|^2 \quad \forall (a, v) \in \underline{d}f(x_n) + z_{j(n)}(x_n), \tag{3.36}$$

and this inequality turns into an equality when $(a,v) = (a_n^*, v_n^*)$. By [421, Prp. 2.3] the face F is itself a polytope. Consequently, applying the characterization of relative interior points of a convex polytope [421, Lemma 2.9] and the fact that $(a_n^*, v_n^*) \in \operatorname{ri} F$ one gets that

$$a_n^* a + \langle v_n^*, v \rangle = \|(a_n^*, v_n^*)\|^2 \quad \forall (a,v) \in F. \tag{3.37}$$

Note also that the face F is a polytope whose vertices are vertices of $\underline{d}f(x_n) + z_{j(n)}(x_n)$ as well [421, Prp. 2.3]. Therefore

$$F = \operatorname{co}\{(a_{i_r} + \langle v_{i_r}, x_n \rangle - \underline{f}(x_n), v_{i_r}) \mid 1 \le r \le k\} + z_{j(n)}(x_n)$$

for some $i_1, \ldots, i_k \in I$ and $1 \le k \le l$ (see (3.27)). From the definition of θ and the facts that $(a_n^*, v_n^*) \in F$ and $\|v_n^*\|^2 < \theta$ it follows that $F \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \neq \emptyset$.

Introduce the convex function

$$g_n(x) = \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x_{n+1}) + z_{j(n)}(x_{n+1})} (a + \langle v, x \rangle). \tag{3.38}$$

Let us verify that $0 \in \partial g_n(0)$. Indeed, by the definition of $z_j(x)$ (see (3.28)) one has

$$\begin{aligned} z_{j(n)}(x_{n+1}) &= \big(b_{j(n)} - \overline{f}(x_{n+1}) + \langle w_{j(n)}, x_{n+1} \rangle, w_{j(n)}\big) = \\ &= z_{j(n)}(x_n) + \big(\overline{f}(x_n) - \overline{f}(x_{n+1}) + \langle w_{j(n)}, x_{n+1} - x_n \rangle, 0\big). \end{aligned}$$

Similarly, by (3.27) one has

$$\underline{d}f(x_{n+1}) = \Big\{(a + \underline{f}(x_n) - \underline{f}(x_{n+1}) + \langle v, x_{n+1} - x_n \rangle, v) \in \mathbb{R}^{d+1} \Bigm| (a,v) \in \underline{d}f(x_n)\Big\}.$$

Consequently, applying the equality $f(x) = \underline{f}(x) + \overline{f}(x)$ one finally gets that

$$\begin{aligned} &\underline{d}f(x_{n+1}) + z_{j(n)}(x_{n+1}) = \\ &\qquad = \Big\{(a + \langle v, x_{n+1} - x_n \rangle - f(x_{n+1}) + f(x_n), v) \Bigm| (a,v) \in \underline{d}f(x_n) + z_{j(n)}(x_n)\Big\}. \end{aligned}$$

Therefore

$$g_n(0) = \max_{(a,v) \in \underline{d}f(x_n) + z_{j(n)}(x_n)} (a + \langle v, x_{n+1} - x_n \rangle) - f(x_{n+1}) + f(x_n).$$

Hence taking into account (3.36), (3.37), the equality $x_{n+1} - x_n = [a_n^*]^{-1} v_n^*$, and the inequality $a_n^* < 0$, one obtains

$$g_n(0) = \frac{1}{a_n^*} \|(a_n^*, v_n^*)\|^2 - f(x_{n+1}) + f(x_n) \ge 0 \tag{3.39}$$

(the validity of the last inequality follows from (3.34)). Furthermore, the maximum in the definition of $g_n(0)$ is attained at the points $(a + \langle v, x_{n+1} - x_n \rangle - f(x_{n+1}) + f(x_n), v)$ with $(a,v) \in F$. Consequently, by the theorem on the subdifferential of the supremum of an infinite family of convex functions [243, Thrm. 4.2.3] one has $\{v \mid \exists (a, v) \in F\} \subseteq \partial g_n(0)$, which implies that $0 \in \partial g_n(0)$ (since $F \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \neq \emptyset$), i.e. 0 is the point of global minimum of the function $g_n(x)$. Consequently, the function g_n is nonnegative, since $g_n(0) \geq 0$ due to inequality (3.39). Hence bearing in mind the definition of g_n (see (3.38)) and applying Theorem 1.1.2 (see also Remark 1.1.2) one obtains that $a_{j(n)}(x_{n+1}) \geq 0$. Thus, the index $j(n)$ is discarded by the MGCD on $(n+1)$-th iteration and by Lemma 3.4.1 for all $k \geq n+1$ the inequality $a_{j(n)}(x_k) \geq 0$ holds true.

Thus, there exists $n_1 \leq n^*$ such that the MGCD discards the index $j(n_1)$ in the (n_1+1)th iteration. Recall that $n^* = \lfloor (f(x_0) - f^*)/\min\{\theta, 1\} \rfloor + 1$. Taking into account (3.35) one obtains that there exists $n_2 \leq n_1 + n^* \leq 2n^*$ such that either the MGCD terminates at the n_2th iteration or $a^*_{n_2} < 0$, and $\|v^*_{n_2}\|^2 < \theta$. Arguing in the same way as above one can easily verify that the MGCD discards the index $j(n_2)$ in the (n_2+1)th iteration, and $a_{j(n_2)}(x_k) \geq 0$ for all $k \geq n_2 + 1$. Repeating the same argument s times one obtains that the MGCD discards all indices from the set M in at most sn^* iterations, and, thus, terminates in a finite number of steps. Furthermore, if MGCD terminates at an nth iteration, then, as it was pointed out above (see Lemma 3.4.1 one has $a_j(x_n) \geq 0$ for all $j \in J$, which with the use of Theorem 3.4.1 implies that x_n is a point of global minimum of the function f, and the proof is complete. $\square$

Remark 3.4.2. Arguing in a similar way to the proof of the previous theorem one can prove that the method of codifferential descent with $\mu_n \equiv \nu_n \equiv +\infty$ also converges to a point of global minimum of a piecewise affine function in a finite number of steps (see [149, Remark 4.3] for more details).

Let us give an example illustrating how the method of global codifferential descent works.

Example 3.4.1. Let $d = 2$ and

$$f(x) = \min\big\{ \max\{|x^{(1)}|, |x^{(2)}|\}, 1 + \max\{2|x^{(1)} - 2|, |x^{(2)} - 2|\}\big\}.$$

Choose the point $x_0 = (2, 2)^T$ as initial guess. It is easy to see that x_0 is a point of local minimum of the function f, while a global minimum is attained at $x_* = (0, 0)^T$.

Instead of computing a DC decomposition of the function f of the form (3.25), and then applying (3.27) in order to compute a global codifferential $Df(x_0)$, we will compute $Df(x_0)$ directly with the use of the global codifferential calculus from Theorem 1.1.3.

Put $f_1(x) = \max\{|x^{(1)}|, |x^{(2)}|\}$ and $f_2(x) = 1 + \max\{2|x^{(1)} - 2|, |x^{(2)} - 2|\}$. Then $f(x) =$

$\min\{f_1(x), f_2(x)\}$. Applying parts 1 and 4 of Theorem 1.1.3 one obtains that

$$\begin{aligned} \underline{d}f_1(x_0) &= \operatorname{co}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}, \quad \overline{d}f_1(x_0) = \{0\}, \\ \underline{d}f_2(x_0) &= \operatorname{co}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}, \quad \overline{d}f_2(x_0) = \{0\}. \end{aligned}$$

Now, applying part 5 of theorem 1.1.3 one gets that $\underline{d}f(x_0) = \underline{d}f_1(x_0) + \underline{d}f_2(x_0)$, that is,

$$\begin{aligned} \underline{d}f(x_0) = \operatorname{co}\Big\{ &\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-2\\-1\end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\0\\-2\end{pmatrix}\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{d}f(x_0) &= \operatorname{co}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \overline{d}f_1(x_0) - \underline{d}f_2(x_0), \overline{d}f_2(x_0) - \underline{d}f_1(x_0)\right\} = \\ &= \operatorname{co}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Let us apply the MGCD (we omit some details for the sake of shortness). Solving the problem

$$\min \|(a, v)\|^2 \quad \text{subject to} \quad (a, v) \in \underline{d}f(x_0) + z_i(x_0)$$

(Step 3 of the MGCD), one can check that for $z_1(x_0) = (1, 2, 0)^T \in \overline{d}f(x_0)$ one has

$$(a_1(x_0), v_1(x_0)) \approx (-0.1111, 0.2222, 0.2222).$$

Thus, $a_1(x_0) < 0$, which implies that x_0 is not a point of global minimum of f by Theorem 3.4.1. Furthermore, one has $x_1 = x_0 + [a_1(x_0)]^{-1} v_1(x_0) = (0, 0) = x^*$, i.e. the MGCD finds a point of global minimum of the function f in just one step.

Chapter 4

Exact Penalty and Augmented Lagrangian Functions

In this chapter we develop a unifying theory of the global exactness of penalty and augmented Lagrangian functions for finite dimensional optimization problems. To this end, we present a unified theory of exact separating (merit) functions for constrained optimization problems and apply it to various particular classes of penalty and augmented Lagrangian functions. We also study global exactness of penalty functions for infinite dimensional problems and consider an application of exact penalty functions to an optimal control problem for linear evolution equations. The main results of this chapter were published in [138–142, 145–147, 151, 155].

4.1 Parametric Exactness of Separating Functions

Let X be a finite dimensional normed space and $M, A \subset X$ be nonempty sets. Throughout this article, we study the following optimization problem

$$\min f(x) \quad \text{subject to} \quad x \in M, \quad x \in A, \tag{$\mathcal{P}$}$$

where $f \colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is a given function. Denote by $\Omega = M \cap A$ the set of feasible points of this problem. From this point onwards, we suppose that there exists $x \in \Omega$ such that $f(x) < +\infty$, and that there exists a globally optimal solution of $(\mathcal{P})$.

Our aim is to somehow "get rid" of the constraint $x \in M$ in the problem $(\mathcal{P})$ with the use of an auxiliary function $F(\cdot)$. Namely, we want to construct an auxiliary function $F(\cdot)$ such that globally optimal solutions of the problem $(\mathcal{P})$ can be easily recovered from points of global minimum of $F(\cdot)$ on the set A. To be more precise, our aim is to develop a general theory of such auxiliary functions. It should be underlined that only the constraint $x \in M$ is incorporated into an auxiliary function $F(\cdot)$, while the constraint $x \in A$ must be taken into account explicitly. Often, the set A represents "simple" constrains such as bound or linear ones.

Let Λ be a nonempty set of parameters that are denoted by λ, and let $c > 0$ be *the penalty parameter*. Hereinafter, we suppose that a function $F \colon X \times \Lambda \times (0, +\infty) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $F = F(x, \lambda, c)$, is given. A connection between this function and the problem $(\mathcal{P})$ is specified below.

The function F can be, for instance, a penalty function with Λ being the empty set or an augmented Lagrangian function with λ being a Lagrange multiplier. However, in order not to restrict ourselves to any specific case, we simply call $F(x, \lambda, c)$ *a separating function*[1] for the problem $(\mathcal{P})$.

Points of global minimum of the function $F(x, \lambda, c)$ can be connected with globally optimal solutions of the problem $(\mathcal{P})$ in several different ways. In the section we consider the simplest case when one minimizes the function $F(x, \lambda, c)$ with respect to x and views λ as a tuning parameter. Let us introduce the formal definition of exactness of the function $F(x, \lambda, c)$ in this case.

Definition 4.1.1. The separating function $F(x, \lambda, c)$ is said to be *globally parametrically exact*, if there exist $\lambda_* \in \Lambda$ and $c_* > 0$ such that for any $c \geq c_*$ one has $\operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c) = \Omega_*$. The greatest lower bound of all such $c_* > 0$ is called *the least exact penalty parameter* of the function $F(x, \lambda_*, c)$, and is denoted by $c_*(\lambda_*)$, while λ_* is called *an exact tuning parameter*.

Thus, if $F(x, \lambda, c)$ is globally parametrically exact and an exact tuning parameter λ_* is known, then one can choose sufficiently large $c > 0$ and minimize the function $F(\cdot, \lambda_*, c)$ over the set A in order to find globally optimal solutions of the problem $(\mathcal{P})$. In other words, if the function $F(x, \lambda, c)$ is globally exact, then one can remove the constraint $x \in M$ with the use of the function $F(x, \lambda, c)$ without loosing any information about globally optimal solutions of the problem $(\mathcal{P})$.

4.1.1 The Localization Principle in the Parametric Form

Our main goal is to demonstrate that the study of the global parametric exactness of the separating function $F(x, \lambda, c)$ can be easily reduced to the study of a local behaviour of $F(x, \lambda, c)$ near globally optimal solutions of the problem $(\mathcal{P})$. This reduction procedure is called *the localization principle*.

At first, let us describe a desired local behaviour of the function $F(x, \lambda, c)$ near optimal solutions.

[1]This term comes from a well-known interpretation of exact penalty and augmented Lagrangian functions as nonlinear functions separating some sets in the so-called image space of the problem $(\mathcal{P})$. See, e.g. [196].

Definition 4.1.2. Let x_* be a locally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$. The separating function $F(x, \lambda, c)$ is called *locally parametrically exact* at x_*, if there exist $\lambda_* \in \Lambda$, $c_* > 0$ and a neighbourhood U of x_* such that for any $c \geq c_*$ and $x \in U \cap A$ one has $F(x, \lambda_*, c) \geq F(x_*, \lambda_*, c)$. The greatest lower bound of all such $c_* > 0$ is called *the least exact penalty parameter* of the function $F(x, \lambda_*, c)$ at x_*, and is denoted by $c_*(x_*, \lambda_*)$, while λ_* is called *an exact tuning parameter* at x_*.

Thus, $F(x, \lambda, c)$ is locally parametrically exact at a point x_* with an exact tuning parameter λ_*, if there exists $c_* > 0$ such that x_* is a local (uniformly with respect to $c \in [c_*, +\infty)$) minimizer of the function $F(\cdot, \lambda_*, c)$ on the set A. Observe also that if the function $F(x, \lambda, c)$ is nondecreasing in c, then $F(x, \lambda, c)$ is locally parametrically exact at x_* with an exact tuning parameter λ_*, if there exists c_* such that x_* is a local minimizer of $F(\cdot, \lambda_*, c_*)$ on A.

Recall that $c > 0$ in $F(x, \lambda, c)$ is called *the penalty parameter*; however, a connection of the parameter c with penalization is unclear from the definition of the function $F(x, \lambda, c)$. We need the following definition in order to clarify this connection.

Definition 4.1.3. Let $\lambda_* \in \Lambda$ be fixed. One says that $F(x, \lambda, c)$ is a *penalty-type* separating function for $\lambda = \lambda_*$, if there exists $c_0 > 0$ such that for any increasing unbounded sequence $\{c_n\} \subset [c_0, +\infty)$ and for any sequence $x_n \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c_n)$, $n \in \mathbb{N}$, all limit points of the sequence $\{x_n\}$ are globally optimal solutions of the problem $(\mathcal{P})$.

Roughly speaking, $F(x, \lambda, c)$ is a penalty-type separating function for $\lambda = \lambda_*$, if global minimizers of $F(\cdot, \lambda_*, c)$ on the set A tend to globally optimal solutions of the problem $(\mathcal{P})$ as $c \to +\infty$. Thus, if the separating function $F(x, \lambda, c)$ is of penalty-type, then c plays the role of the penalty parameter, since the increase of c forces global minimizers of $F(\cdot, \lambda_*, c)$ to get closer to the feasible set of the problem $(\mathcal{P})$.

Note that if the function $F(\cdot, \lambda_*, c)$ does not attain a global minimum on the set A for any c greater than some $c_0 > 0$, then, formally, $F(x, \lambda, c)$ is a penalty-type separating function for $\lambda = \lambda_*$. Similarly, if all sequences $\{x_n\}$, such that $x_n \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c_n)$, $n \in \mathbb{N}$ and $c_n \to +\infty$ as $n \to \infty$, do not have cluster points, then $F(x, \lambda, c)$ is a penalty-type separating function for $\lambda = \lambda_*$, as well. Therefore we need an additional definition that allows one to exclude such pathological behaviour of the function $F(x, \lambda, c)$ as $c \to \infty$.

Definition 4.1.4. Let $\lambda_* \in \Lambda$ be fixed. The separating function $F(x, \lambda, c)$ is said to be *non-degenerate* for $\lambda = \lambda_*$, if there exist $c_0 > 0$ and $R > 0$ such that for any $c \geq c_0$ the function $F(\cdot, \lambda_*, c)$ attains a global minimum on the set A, and there exists $x(c) \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c)$ such that $\|x(c)\| \leq R$.

Roughly speaking, the non-degeneracy condition does not allow global minimizers of $F(\cdot, \lambda_*, c)$ on the set A to escape to infinity as $c \to \infty$. Note that if the set A is bounded, then $F(x, \lambda, c)$ is non-degenerate for $\lambda = \lambda_*$, if the function $F(\cdot, \lambda_*, c)$ attains a global minimum on the set A for any c large enough.

Now, we are ready to formulate and prove the localization principle. Recall that $\Omega = M \cap A$ is the feasible set of the problem $(\mathcal{P})$. Denote by $\Omega_* = \operatorname*{arg\,min}_{x \in \Omega} f(x)$ the set of globally optimal solutions of this problem.

Theorem 4.1.1 (Localization Principle in the Parametric Form I)**.** *Suppose that the validity of the condition*

$$\Omega_* \cap \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c) \neq \emptyset \tag{4.1}$$

for some $\lambda_* \in \Lambda$ and $c > 0$ implies that $F(x, \lambda, c)$ is globally parametrically exact with the exact tuning parameter λ_*. Let also Ω be closed, and f be l.s.c. on Ω. Then the separating function $F(x, \lambda, c)$ is globally parametrically exact if and only if there exists $\lambda_* \in \Lambda$ such that the function $F(x, \lambda, c)$ is of penalty-type and non-degenerate for $\lambda = \lambda_*$, and locally parametrically exact with the exact tuning parameter λ_* at every globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$.

Proof. Suppose that $F(x, \lambda, c)$ is globally parametrically exact with an exact tuning parameter λ_*. Then for any $c > c_*(\lambda_*)$ one has $\operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c) = \Omega_*$. In other words, for any $c > c_*(\lambda_*)$ every globally optimal solution x_* of the problem $(\mathcal{P})$ is a global (and hence local uniformly with respect to $c \in (c_*(\lambda_*), +\infty)$) minimizer of $F(\cdot, \lambda_*, c)$ on the set A. Thus, $F(x, \lambda, c)$ is locally parametrically exact with the exact tuning parameter λ_* at every globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$.

Fix arbitrary $x_* \in \Omega_*$. Then for any $c > c(\lambda_*)$ the point x_* is a global minimizer of $F(\cdot, \lambda_*, c)$, which implies that $F(x, \lambda, c)$ is non-degenerate for $\lambda = \lambda_*$. Furthermore, if a sequence $\{x_n\} \subset A$ is such that $x_n \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c_n)$ for all $n \in N$, where $c_n \to +\infty$ as $n \to \infty$, then due to the global exactness of F one has that for all n large enough the point x_n coincides with one of the globally optimal solutions of $(\mathcal{P})$, which implies that $x_n \in \Omega$, and $f(x_n) = \min_{x \in \Omega} f(x)$. Hence applying the facts that Ω is closed and f is l.s.c. on Ω one can easily verify that a cluster point of the sequence $\{x_n\}$, if exists, is a globally optimal solution of $(\mathcal{P})$. Thus, $F(x, \lambda, c)$ is a penalty-type separating function for $\lambda = \lambda_*$.

Let us prove the converse statement. Our aim is to verify that there exist $c > 0$ and $x_* \in \Omega_*$ such that

$$\inf_{x \in A} F(x, \lambda_*, c) = F(x_*, \lambda_*, c). \tag{4.2}$$

Then taking into account the fact that (4.2) is obviously equivalent to (4.1) one obtains that the separating function $F(x, \lambda, c)$ is globally parametrically exact. Arguing by reductio ad absurdum, suppose that (4.2) is not valid. Then, in particular, for any $n \in \mathbb{N}$ one has

$$\inf_{x \in A} F(x, \lambda_*, n) < F(x_*, \lambda_*, n) \quad \forall x_* \in \Omega_*. \tag{4.3}$$

By our assumption the function $F(x, \lambda, c)$ is non-degenerate for $\lambda = \lambda_*$, which implies that there exist $n_0 \in \mathbb{N}$ and $R > 0$ such that for any $n \geq n_0$ there exists a global minimizer $x_n \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, n)$ with $\|x_n\| \leq R$.

Recall that X is a finite dimensional normed space. Therefore there exists a subsequence $\{x_{n_k}\}$ converging to some x_*. Consequently, applying the fact that $F(x, \lambda, c)$ is a penalty-type separating function for $\lambda = \lambda_*$ one obtains that $x_* \in \Omega_*$. By our assumption $F(x, \lambda, c)$ is locally parametrically exact at x_* with the exact tuning parameter λ_*. Therefore there exist $c_0 > 0$ and a neighbourhood U of x_* such that for any $c \geq c_0$ one has

$$F(x, \lambda_*, c) \geq F(x_*, \lambda_*, c) \quad \forall x \in U \cap A. \tag{4.4}$$

Since the subsequence $\{x_{n_k}\}$ converges to x_*, there exists k_0 such that for any $k \geq k_0$ one has $x_{n_k} \in U$. Moreover, one can suppose that $n_k \geq c_0$ for all $k \geq k_0$. Hence with the use of (4.4) one obtains that $F(x_{n_k}, \lambda_*, n_k) \geq F(x_*, \lambda_*, n_k)$, which contradicts (4.3) and the fact that $x_{n_k} \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, n_k)$. Thus, $F(x, \lambda, c)$ is globally parametrically exact. □

Remark 4.1.1. Condition (4.1) simply means that in order to prove the global parametric exactness of $F(x, \lambda, c)$ it is sufficient to check that at least one globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$ is a point of global minimum of the function $F(\cdot, \lambda_*, c)$ instead of verifying that the sets $\operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c)$ and Ω_* actually coincide. It should be pointed out that in most particular cases the validity of condition (4.1) is equivalent to global parametric exactness without any additional assumptions.

The theorem above can be vaguely formulated as follows. The separating function $F(x, \lambda, c)$ is globally parametrically exact, if it is of penalty-type, non-degenerate and locally exact at every globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$. Thus, under natural assumptions the function $F(x, \lambda, c)$ is globally exact, if it is exact near globally optimal solutions of the original problem. That is why Theorem 4.1.1 is called *the localization principle*. Let us reformulate the localization principle in a form that is slightly more convenient for applications.

Theorem 4.1.2 (Localization Principle in the Parametric Form II)**.** *Suppose that the validity of condition* (4.1) *for some* $\lambda_* \in \Lambda$ *and* $c > 0$ *implies that* $F(x, \lambda, c)$ *is globally parametrically exact with the exact tuning parameter* λ_**. Let also the sets* A *and* Ω *be closed, the objective function* f *be l.s.c. on* Ω*, and the function* $F(\cdot, \lambda, c)$ *be l.s.c. on* A *for all* $\lambda \in \Lambda$ *and* $c > 0$*. Then the separating* *function* $F(x, \lambda, c)$ *is globally parametrically exact if and only if there exists* $\lambda_* \in \Lambda$ *such that the function* $F(x, \lambda, c)$ *is of penalty-type for* $\lambda = \lambda_*$*, locally parametrically exact at every globally optimal solution of the problem* $(\mathcal{P})$ *with the exact tuning parameter* λ_**, and there exist* $c_0 > 0$*,* $x_* \in \Omega_*$ *and a bounded set* $K \subset A$ *such that*

$$S(c, x_*) := \Big\{ x \in A \mid F(x, \lambda_*, c) < F(x_*, \lambda_*, c) \Big\} \subset K \quad \forall c \geq c_0. \tag{4.5}$$

Proof. Suppose that $F(x, \lambda, c)$ is globally parametrically exact with the exact tuning parameter λ_*. Then, as it was proved in Theorem 4.1.1, $F(x, \lambda, c)$ is a penalty-type separating function for $\lambda = \lambda_*$, and $F(x, \lambda, c)$ is locally parametrically exact with the exact tuning parameter λ_* at every $x_* \in \Omega_*$. Furthermore, from the definition of global exactness it follows that $S(c, x_*) = \emptyset$ for all $c > c_*(\lambda_*)$ and $x_* \in \Omega_*$, which implies that (4.5) is satisfied for all $c_0 > c_*(\lambda_*)$, $x_* \in \Omega_*$ and any bounded set K.

Let us prove the converse statement. By our assumption there exist $c_0 > 0$ and $x_* \in \Omega_*$ such that for all $c \geq c_0$ the sublevel set $S(c, x_*)$ is contained in a bounded set K and, thus, is bounded. Therefore taking into account the facts that the function $F(\cdot, \lambda_*, c)$ is l.s.c. on A, and the set A is closed one obtains that $F(\cdot, \lambda_*, c)$ attains a global minimum on the set A at a point $x(c) \in K$ (if $S(c, x_*) = \emptyset$ for some $c \geq c_0$, then $x(c) = x_*$). From the boundedness of K it follows that that there exists $R > 0$ such that $\|x(c)\| \leq R$ for all $c \geq c_0$, which implies that $F(x, \lambda, c)$ is non-degenerate for $\lambda = \lambda_*$. Consequently, applying Theorem 4.1.1 one obtains the desired result. □

In some particular cases (see Section 4.1.3 below) it might be important to know that only globally optimal solutions of the problem $(\mathcal{P})$ coincide with the points of global minimum of $F(\cdot, \lambda, c)$ on A, but also optimal values of these problems coincide. Let us show how one can incorporate the assumption on the value of $\inf_{x \in A} F(x, \lambda_*, c)$ into the localization principle.

Definition 4.1.5. The separating function $F(x, \lambda, c)$ is said to be *strictly globally parametrically exact*, if $F(x, \lambda, c)$ is globally parametrically exact, and there exists $c_0 > 0$ such that $\inf_{x \in A} F(x, \lambda_*, c) = f_*$ for all $c \geq c_0$, where λ_* is an exact tuning parameter, and $f_* = \inf_{x \in \Omega} f(x)$ is the optimal value of the problem $(\mathcal{P})$. Any such exact tuning parameter is called *strictly exact*.

Arguing in a similar way to the proofs of Theorems 4.1.1 and 4.1.2 one can easily extend the localization principle in the parametric form to the case of strict global exactness. Here we present only an extension of Theorem 4.1.1.

Theorem 4.1.3 (Strengthened Localization Principle in the Parametric Form)**.** *Suppose that the validity of the conditions*

$$\Omega_* \cap \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, \lambda_*, c) \neq \emptyset, \quad \min_{x \in A} F(x, \lambda_*, c) = f_*$$

for some $\lambda_* \in \Lambda$ *and* $c > 0$ *implies that* $F(x, \lambda, c)$ *is strictly globally parametrically exact with* λ_* *being a strictly exact tuning parameter. Let also* Ω *be closed, and* f *be l.s.c. on* Ω*. Then the separating function* $F(x, \lambda, c)$ *is strictly globally parametrically exact if and only if there exists* $\lambda_* \in \Lambda$ *such that the function* $F(x, \lambda, c)$ *is of penalty-type and non-degenerate for* $\lambda = \lambda_*$*, locally parametrically exact at every globally optimal solution of the problem* $(\mathcal{P})$ *with the exact tuning parameter* λ_**, and there exists* $c_0 > 0$ *such that* $F(x_*, \lambda_*, c) = f_*$ *for all* $x_* \in \Omega_*$ *and* $c \geq c_0$*.*

In two following sections we consider applications of the localization principle in the parametric form to linear penalty functions and Rockafellar-Wets' augmented Lagrangians. Applications of this principle to nonlinear exact penalty functions [356, 357] and Fletcher's continuously differentiable exact penalty functions [64, 120, 124, 126, 177, 178, 189, 215, 293] can be found in the author's paper [146].

4.1.2 Linear Exact Penalty Functions

We start with the simplest case when the function $F(x, \lambda, c)$ is affine with respect to the penalty parameter c and does not depend on any additional parameters. Suppose that a function $\varphi \colon X \to [0, +\infty]$ such that $\varphi(x) = 0$ if and only if $x \in M$ is given. In particular, if $M = \{x \in X \mid G(x) \in K\}$ for some mapping $G \colon X \to Y$, where Y is a metric space and $K \subset Y$ is a closed set, then one can put $\varphi(x) = \operatorname{dist}(G(x), K)$. Define $F(x, c) = f(x) + c\varphi(x)$. The function $F(x, c)$ is called *a linear penalty function* for the problem $(\mathcal{P})$. This function is the simplest example of a separating function for the problem $(\mathcal{P}$. Since $F(x, c)$ does not depend on an additional parameter λ, to formally include it into the theory of parametrically exact separating functions one has to define Λ to be a one-point set, say $\Lambda = \{-1\}$, introduce a new separating function $\widehat{F}(x, -1, c) \equiv F(x, c)$, and consider the separating function $\widehat{F}(x, \lambda, c)$ instead of the penalty function $F(x, c)$. However, since this transformation is purely formal, we omit it for the sake of shortness. Moreover, since in the case of penalty functions the parameter λ is absent, it is natural to omit the term "parametric", and say that $F(x, c)$ is globally/locally exact.

With the use of the localization principle one can easily obtain necessary and sufficient optimality conditions for the global exactness of the penalty function $F(x, c)$. Before we formulate these, let us note that $F(x_*, c) = f_*$ for any globally optimal solution x_* of the problem $(\mathcal{P})$ and for all $c > 0$. Therefore, in particular, the linear penalty function $F(x, c)$ is globally parametrically exact if and only if it is strictly globally parametrically exact.

Theorem 4.1.4 (Localization Principle for Linear Penalty Functions)**.** *Let* A *and* Ω *be closed, and let* f *and* φ *be l.s.c. on* A*. Then the linear penalty function* $F(x, c)$ *is globally exact if and* *only if $F(x, c)$ is locally exact at every globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$ and there exists $c_0 > 0$ such that the set $\{x \in A \mid F(x, c_0) < f_*\}$ is bounded.*

Proof. Note that $F(x_*, c) = f(x_*) = f_*$ for any $x_* \in \Omega_*$ and $c > 0$. Therefore

$$\Omega_* \cap \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, c) \neq \emptyset \implies \Omega_* \subset \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, c).$$

Note also that if $x \notin M$, then either $F(x, c)$ is strictly increasing in c or $F(x, c) = +\infty$ for all $c > 0$. On the other hand, if $x \in M$, then $F(x, c) = f(x)$. Consequently, if for some $c_0 > 0$ one has $\Omega_* \subset \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, c)$, then for any $c > c_0$ one has $\Omega_* = \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, c)$. Thus, the validity of the condition $\Omega_* \cap \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, c) \neq \emptyset$ for some $c > 0$ implies the global exactness of $F(x, c)$.

Our aim, now, is to verify that F is a penalty-type separating function. Then applying Theorem 4.1.2 one obtains the desired result.

Indeed, let $\{c_n\} \subset (0, +\infty)$ be an increasing unbounded sequence, $x_n \in \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} F(x, c)$ for all $n \in \mathbb{N}$, and let x_* be a cluster point of the sequence $\{x_n\}$. By [138, Prp. 3.5] one has $\varphi(x_n) \to 0$ as $n \to \infty$. Hence taking into account the facts that A is closed and φ is l.s.c. on A one gets that $x_* \in A$ and $\varphi(x_*) = 0$. Therefore x_* is a feasible point of the problem $(\mathcal{P})$.

As it was noted above, for any $y_* \in \Omega_*$ one has $F(y_*, c) = f(y_*)$ for all $c > 0$. Hence taking into account the definition of x_n and the fact that the function φ is non-negative one gets that $f(x_n) \leq f(y_*)$ for all $n \in \mathbb{N}$. Consequently, with the use of the lower semicontinuity of f one obtains that $f(x_*) \leq f(y_*)$, which implies that x_* is a globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$. Thus, $F(x, c)$ is a penalty-type separating function. $\square$

Corollary 4.1.1. *Let A and Ω be closed, and let f and φ be l.s.c. on A. Suppose also that one of the following conditions is satisfied:*

1. *the set $\{x \in A \mid f(x) < f_*\}$ is bounded;*

2. *there exist $c_0 > 0$ and $\delta > 0$ such that the function $F(\cdot, c_0)$ is bounded from below on A and the set $\{x \in A \mid f(x) < f_*, \ \varphi(x) < \delta\}$ is bounded;*

3. *the set $\{x \in A \mid F(x, c_0) \leq f(x_0)\}$ is bounded for some $c_0 > 0$ and a feasible point x_0 of the problem $(\mathcal{P})$;*

4. *the function f is coercive on the set A, i.e. $f(x_n) \to +\infty$ as $n \to \infty$ for any sequence $\{x_n\} \subset A$ such that $\|x_n\| \to +\infty$ as $n \to \infty$;*

5. *there exists $c_0 > 0$ such that the function $F(\cdot, c_0)$ is coercive on the set A;*

6. *the function* φ *is coercive on the set* A *and there exists* $c_0 > 0$ *such that the function* $F(\cdot, c_0)$ *is bounded from below on* A.

Then $F(x, c)$ *is globally exact if and only if it is locally exact at every globally optimal solution of the problem* $(\mathcal{P})$.

Proof. One can easily verify that if one of the above assumptions is satisfied, then the sublevel set $\{x \in A \mid F(x, c_0) < f_*\}$ is bounded for some $c_0 > 0$. Then applying the localization principle for linear penalty functions one obtains the desired result. $\square$

For the sake of completeness, let us also formulate well-known sufficient conditions for the local exactness of the function F (see, e.g. [138, Theorem 2.4 and Proposition 2.7]).

Theorem 4.1.5. *Let* x_* *be a locally optimal solution of the problem* $(\mathcal{P})$, *and* f *be Hölder continuous with exponent* $\alpha \in (0, 1]$ *in a neighbourhood of* x_*. *Suppose also that there exist* $\tau > 0$ *and* $r > 0$ *such that* $\varphi(x) \geq \tau\big[\operatorname{dist}(x, \Omega)\big]^\alpha$ *for all* $x \in A \cap B(x_*, r)$. *Then the linear penalty function* $F(x, c)$ *is locally exact at* x_*.

4.1.3 Rockafellar-Wets' Augmented Lagrangians

Let us given an example of a separating function that depends on an additional parameter λ. Namely, let us apply the general theory of parametrically exact separating functions to the augmented Lagrangian function introduced by Rockafellar and Wets in [352] (see also [227, 228, 364, 429]).

Let P be a topological vector space of parameters. Recall that a function $\Phi \colon X \times P \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ is called *a dualizing parameterization function* for f, if $\Phi(x, 0) = f(x)$ for any feasible point of the problem $(\mathcal{P})$. A function $\sigma \colon P \to [0, +\infty]$ such that $\sigma(0) = 0$ and $\sigma(p) > 0$ for all $p \neq 0$ is called *an augmenting function*. Let, finally, Λ be a vector space of *multipliers*, and let the pair (Λ, P) be equipped with a bilinear coupling function $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \Lambda \times P \to \mathbb{R}$.

Following the ideas of Rockafellar and Wets [352], define the augmented Lagrangian function

$$\mathscr{L}(x, \lambda, c) = \inf_{p \in P} \Big(\Phi(x, p) - \langle \lambda, p \rangle + c\sigma(p) \Big), \tag{4.6}$$

We suppose that $\mathscr{L}(x, \lambda, c) > -\infty$ for all $x \in X$, $\lambda \in \Lambda$ and $c > 0$. Let us obtain simple necessary and sufficient conditions for the strict global parametric exactness of the augmented Lagrangian function $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ with the use of the localization principle. These conditions were first obtained by the author in [142].

Remark 4.1.2. It is worth mentioning that in the context of the theory of augmented Lagrangian functions, a vector $\lambda_* \in \Lambda$ is a strictly exact tuning parameter of the function $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ if and only if λ_* *supports an exact penalty representation of the problem* $(\mathcal{P})$ (see [352, Def. 11.60]). Furthermore, if the infimum in (4.6) is attained for all x, λ and c, then the strict global parametric exactness of the augmented Lagrangian function $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ is equivalent to the existence of *an augmented Lagrange multiplier* (see [352, Thrm. 11.61] and [142, Prp. 4 and Crlr. 1]). Furthermore, in this case λ_* is a strictly exact tuning parameter if and only if it is an augmented Lagrange multiplier.

Recall that the augmenting function σ is said *to have a valley at zero*, if for any neighbourhood $U \subset P$ of zero there exists $\delta > 0$ such that $\sigma(p) \geq \delta$ for any $p \in P \setminus U$. The assumption that the augmenting function σ has a valley at zero is widely used in the literature on augmented Lagrangian functions (see, e.g., [49, 427–429]).

Theorem 4.1.6 (Localization Principle for Augmented Lagrangian Functions)**.** *Suppose that the sets A and Ω are closed, the functions f and $\mathscr{L}(\cdot, \lambda, c)$ are l.s.c. on A for all $\lambda \in \Lambda$ and $c > 0$, and the function Φ is l.s.c. on $A \times \{0\}$. Suppose also that the function σ has a valley at zero and there exists $r > 0$ such that for all $c \geq r$, $x \in A$, and $\lambda \in \Lambda$ the following condition holds true:*

$$\operatorname*{arg\,min}_{p \in P} \Big(\Phi(x, p) - \langle \lambda, p \rangle + c\sigma(p) \Big) \neq \emptyset,$$

i.e. the infimum in (4.6) *is attained. Then the augmented Lagrangian function $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ is strictly globally parametrically exact with strictly exact tuning parameter λ_* if and only if there exists $c_0 > 0$ such that the function $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ is locally parametrically exact at every globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$ with exact tuning parameter λ_*, $\mathscr{L}(x_*, \lambda_*, c) = f_*$ for all $x_* \in \Omega_*$ and $c \geq c_0$, and the set $\Big\{ x \in A \;\Big|\; \mathscr{L}(x, \lambda_*, c_0) < f_* \Big\}$ is bounded.*

Proof. By [142, Proposition 4 and Corollary 1] from the validity of the condition

$$\Omega_* \cap \operatorname*{arg\,min}_{x \in A} \mathscr{L}(x, \lambda_*, c) \neq \emptyset, \quad \min_{x \in A} \mathscr{L}(x, \lambda_*, c) = f_*$$

for some $\lambda_* \in \Lambda$ and $c > 0$ it follows that the function $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ is strictly globally parametrically exact with strictly exact tuning parameter λ_*. Furthermore, under the assumptions of the theorem the function $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ is a penalty-type separating function for all $\lambda \in \Lambda$ by [142, Proposition 8]. Therefore, by applying Theorem 4.1.3 one obtains the required result. $\square$

Remark 4.1.3. Local parametric exactness of the augmented Lagrangian $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ is usually proved with the use of sufficient optimality conditions. See, e.g. [378, Theorem 2.1], [429, Proposition 3.1], [423, Theorem 2.3], etc.

Let us give a simple example illustrating Theorem 4.1.6. Other applications of this theorem as well as a much more detailed theoretical analysis of the augmented Lagrangian $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ in the infinite dimensional case can be found in the author's paper [142].

Let $X = \mathbb{R}^d$. Consider the mathematical programming problem of the form:

$$\min\ f(x) \quad \text{subject to} \quad g_i(x) \le 0, \quad i \in I, \quad g_j(x) = 0, \quad j \in J. \tag{4.7}$$

Here $g_s \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $s \in I \cup J$ are given functions, $I = \{1, \ldots, m_1\}$, $J = \{m_1 + 1, \ldots, m_2\}$. Put $A = \mathbb{R}^d$ and denote by M the feasible set of problem (4.7). Then this problem coincides with the problem $(\mathcal{P})$.

Let $\Lambda = P = \mathbb{R}^{m_2}$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be the inner product in $\mathbb{R}^s$. Define $\sigma(p) = \|p\|^2/2$. Clearly, this function σ has a valley at zero. Put $\Phi(x, p) = f(x)$, if $g_i(x) + p_i \le 0$ for all $i \in I$ and $g_j(x) + p_j = 0$ for all $j \in J$, and let $\Phi(x, p) = +\infty$ otherwise. Then, as one can readily verify, for all $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}^{m_2}$ and $c > 0$ one has:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(x, \lambda, c) = f(x) &+ \sum_{i=1}^{m_1} \left(\lambda^{(i)} \max\left\{ g_i(x), -\frac{\lambda^{(i)}}{c} \right\} + \frac{c}{2} \max\left\{ g_i(x), -\frac{\lambda^{(i)}}{c} \right\}^2 \right) \\ &+ \sum_{j=m_1+1}^{m_2} \left(\lambda^{(j)} g_j(x) + \frac{c}{2} g_j(x)^2 \right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

This augmented Lagrangian function was first introduced by Hestenes [218] and Powell [339] and thoroughly analysed in [39, 350, 351].

Let us obtain simple sufficient conditions for the local parametric exactness of $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ in the case when the functions f and g_s are $C^{1,1}$ functions, that is, they are continuously differentiable and their first order partial derivatives are locally Lipschitz continuous. Denote by $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{s=1}^{m_2} \lambda^{(s)} g_s(x)$ the standard Lagrangian for problem (4.7).

Fix a feasible point x_*. One say that f and g_s are $C^{1,1}$ *functions* at x_*, if these functions are differentiable in a neighbourhood of x_* and their gradients are Lipschitz continuous in a neighbourhood of this point. By Rademacher's theorem for a.e. x from a neighbourhood of x_* there exist all second order partial derivatives of f and g_s at x. Recall that if a function h is $C^{1,1}$ at x_*, then *the generalized Hessian matrix* $\partial^2 h(x_*)$ of h at x_* is defined as the convex hull of the set of all those matrices M for which there exists a sequence $\{x_n\}$ such that $x_n \to x_*$ and $\nabla^2 h(x_n) \to M$ as $n \to \infty$ (see, e.g., [224,264]). One can verify that $\partial^2 h(x_*)$ is a nonempty compact convex set of symmetric matrices.

Let (x_*, λ_*) be a KTT pair satisfying the strict complementary condition, i.e. $\lambda_*^{(i)} > 0$ for any $i \in I(x_*) = \{i \in I \mid g_i(x_*) = 0\}$. We say that the pair (x_*, λ_*) satisfies the *generalized* second order sufficient optimality condition if each $M \in \partial^2_{xx} L(x_*, \lambda_*)$ is positive definite on the subspace

$\{v \in \mathbb{R}^d \mid \langle \nabla g_s(x_*), v\rangle = 0,\ s \in I(x_*) \cup J\}$ (see [264]). Here $\partial^2_{xx} L(x_*, \lambda_*)$ is the generalized Hessian matrix of the function $L(\cdot, \lambda_*)$ at x_*.

Theorem 4.1.7. *Let x_* be a locally optimal solution of the problem (4.7), and the functions f_0 and g_s, $s \in I \cup J$, be $C^{1,1}$ at the point x_*. Suppose that a KKT pair (x_*, λ_*) satisfies the strict complementary condition and the generalized second order sufficient optimality condition. Then the augmented Lagrangian $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ is locally parametrically exact at x_* with the exact tuning parameter λ_*.*

Proof. Since the functions g_s are continuous at x_* and the strict complementary condition holds true, by the definition of $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ (see (4.8)) there exists a neighbourhood U of x_* such that

$$\mathscr{L}(x, \lambda_*, c) = L(x_*, \lambda_*) + \frac{c}{2} \sum_{s \in I(x_*) \cup J} g_s(x)^2 \quad \forall x \in U \quad \forall c > 0.$$

Consequently, applying the sum rule for generalized Hessian matrices [224, Theorem 2.2] one obtains that the set $\partial^2_{xx} \mathscr{L}(x_*, \lambda_*, c)$ is contained in the set $H(x_*, \lambda_*, c) = \partial^2_{xx} L(x_*, \lambda_*) + c \sum_{s \in I(x_*) \cup J} \nabla g_s(x_*) \nabla g_s(x_*)^T$. Taking into account the fact that the generalized second order sufficient optimality condition holds true, one can easily verify that there exists $c_0 > 0$ such that for any $c \geq c_0$ all matrices $M \in H(x_*, \lambda_*, c)$ are positive definite. Hence applying the second-order sufficient optimality condition for $C^{1,1}$ functions [264, Thrm. 1] one obtains that x_* is a point of local minimum of the function $\mathscr{L}(\cdot, \lambda_*, c)$ for all $c \geq c_0$ (uniformly with respect to $c \in [c_0, +\infty)$, since the function $\mathscr{L}(\cdot, \lambda_*, c)$ is nondecreasing in c). Thus, the function $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ is locally parametrically exact at x_* with exact tuning parameter λ_*. □

Now we can apply Theorem 4.1.6 in order to obtain simple sufficient conditions for the strict global parameteric exactness of the Hestenes-Powell augmented Lagrangian.

Theorem 4.1.8. *Let f be l.s.c., and g_s, $s \in I \cup J$, be continuous. Suppose that the functions f and g_s, $s \in I \cup J$, are $C^{1,1}$ functions at every point $x_* \in \Omega_*$ and there exists a Lagrange multiplier $\lambda_* \in \mathbb{R}^{m_2}$ such that for any $x_* \in \Omega_*$ the pair (x_*, λ_*) is a KKT point satisfying the strict complementarity and the generalized second order sufficient optimality conditions. Then the augmented Lagrangian $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ is globally parametrically exact with the exact tuning parameter λ_* if and only if there exists $c_0 > 0$ such that the set $\{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathscr{L}(x, \lambda_*, c_0) < f_*\}$ is bounded. In particular, it is sufficient to suppose that the function $f(\cdot) + c_0 \sum_{i \in I} \max\{0, g_i(x)\}^2 + c_0 \sum_{j \in J} g_j(x)^2$ is coercive.*

Proof. By theorem 4.1.7 the function $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ is locally parametrically exact at every point $x_* \in \Omega_*$ with exact tuning parameter λ_*. One can readily check that under the assumptions of the theorem all assumptions of Theorem 4.1.6 holds true. Therefore by applying Theorem 4.1.6 we arrive at the require result. □

Remark 4.1.4. One can easily check that for the augmented Lagrangian $\mathscr{L}(x, \lambda, c)$ to be globally parametrically exact with exact tuning parameter λ_* it is *necessary* that for all $x_* \in \Omega_*$ the pair (x_*, λ_*) satisfies KKT optimality conditions and natural second order *necessary* optimality conditions in terms of the generalized Hessian.

4.2 Extended Exactness of Separating Functions

Recall that we study separating functions $F(x, \lambda, c)$ for the problem

$$\min\ f(x) \quad \text{subject to} \quad x \in M, \quad x \in A. \tag{$\mathcal{P}$}$$

In the previous sections we studied the concept of parametric exactness of the function $F(x, \lambda, c)$. The idea behind this concept consists in fixing a parameter $\lambda \in \Lambda$ and considering the problem of minimizing the function $F(\cdot, \lambda, c)$ over the set A. If globally optimal solution of this problem coincide with globally optimal solutions of the problem $(\mathcal{P})$, then the separating function $F(x, \lambda, c)$ is called globally parametrically exact, while λ is called an exact tuning parameter. However, in some cases this approach becomes inapplicable, since it does not specify how one can find an exact tuning parameter λ.

To overcome the difficulties connected with finding an exact tuning parameter one can utilise a different approach to the definition of exactness of the function $F(x, \lambda, c)$. Namely, one can consider λ not as a parameter, but as an additional variable, and introduce the *extended* problem

$$\min_{x,\lambda}\ F(x, \lambda, c) \quad \text{subject to} \quad (x, \lambda) \in A \times \Lambda, \tag{4.9}$$

consisting in minimizing $F(x, \lambda, c)$ in x and λ simultaneous. If for every point of global minimum (x_*, λ_*) of the extended problem the point x_* is a globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$, then the separating function $F(x, \lambda, c)$ is called *extendedly* exact.

4.2.1 The Localization Principle in the Extended Form

In order to obtain necessary and sufficient conditions for the global extended exactness of the function $F(x, \lambda, c)$ we need to make two assumptions on the set of parameters Λ. Firstly, hereinafter, we suppose that Λ is a closed subset of a finite dimensional normed space. This assumption is needed in order to ensure that every bounded sequence of parameters $\{\lambda_n\}$ has a convergent subsequence whose limit point belongs to Λ.

The second assumption that we make concerns the nature of globally optimal solutions of the extended problem (4.9). Namely, we suppose that one chooses which parameters λ_* must correspond to globally optimal solutions (x_*, λ_*) of the extended problem (4.9) in the case when the separating function $F(x, \lambda, c)$ is globally extendedly exact. We suppose that the choice of parameter λ_* is formulated in the form of the equality constraint $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$ with a prespecified function $\eta(x, \lambda)$.

Let us give a precise formulation of this assumption. Suppose that a function $\eta \colon X \times \Lambda \to \mathbb{R}$ is given. We also suppose that for any globally optimal solution x_* of the problem $(\mathcal{P})$ there exists $\lambda_* \in \Lambda$ such that $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$.

Definition 4.2.1. The separating function $F(x, \lambda, c)$ is called *globally extendedly exact* (with respect to the function η), if there exists $c_0 > 0$ such that for any $c \geq c_0$ the following two conditions are valid:

1. if (x_*, λ_*) is a globally optimal solution of the extended problem (4.9), then $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$, and x_* is a globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$;
2. for any globally optimal solution x_* of the problem $(\mathcal{P})$ and for any $\lambda_* \in \Lambda$ such that $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$ the pair (x_*, λ_*) is a globally optimal solution of the problem (4.9),

The greatest lower bounded of all such c_0 is denoted by c^*_{ext}, and is called *the least exact penalty parameter* of the separating function $F(x, \lambda, c)$.

Let us note that the additional assumption $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$ naturally appears in all particular examples of globally extendedly exact separating function (see examples below). In particular, if $F(x, \lambda, c)$ is an augmented Lagrangian function with λ being a Lagrange multiplier, then it is natural to require that global minimizers (x_*, λ_*) of the extended problem are exactly KKT-points corresponding to globally optimal solutions x_* of the problem $(\mathcal{P})$. The assumption that (x_*, λ_*) is a KKT-point can be easily expressed in the form of the equality $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$ with a suitable function η.

The localization principle in the parametric form can be easily generalized to the case of extended exactness of separating function. Firstly, we need to reformulate the definitions from Section 4.1.1 to the case of extended exactness.

Definition 4.2.2. Let x_* be a locally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$. The separating function $F(x, \lambda, c)$ is called *locally extendedly exact* at the point x_*, if for any $\lambda_* \in \Lambda$ such that $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$

there exist $c_0 > 0$ and a neighbourhood U of the point (x_*, λ_*) such that

$$F(x, \lambda, c) \geq F(x_*, \lambda_*, c) \quad \forall (x, \lambda) \in U \cap (A \times \Lambda) \quad \forall c \geq c_0.$$

The greatest lower bound of all such c_0 is denoted by $c^*_{ext}(x_*, \lambda_*)$, and is called *the least exact penalty parameter* of $F(x, \lambda, c)$ at (x_*, λ_*).

Definition 4.2.3. The function function $F(x, \lambda, c)$ is called a *penalty-type* separating function, if there exists $c_0 > 0$ such that for any increasing unbounded sequence $\{c_n\} \subset [c_0, +\infty)$, for any sequence $(x_n, \lambda_n) \in \operatorname*{arg\,min}_{(x,\lambda) \in A \times \Lambda} F(x, \lambda, c_n)$, $n \in \mathbb{N}$, and for any limit point (x_*, λ_*) of the sequence $\{(x_n, \lambda_n)\}$ the point x_* is a globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$ and $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$.

Definition 4.2.4. The separating function $F(x, \lambda, c)$ is said to be *non-degenerate*, if there exist $c_0 > 0$ and $R > 0$ such that for any $c \geq c_0$ there exists $(x(c), \lambda(c)) \in \operatorname*{arg\,min}_{(x,\lambda) \in A \times \Lambda} F(x, \lambda, c)$ with $\|x(c)\| + \|\lambda(c))\| \leq R$.

Recall that Ω_* is the set of globally optimal solutions of the problem $(\mathcal{P})$. Arguing in the same way as in the proofs of Theorems 4.1.1 and 4.1.2 one can easily prove the localization principle for extendedly exact separating functions. A detailed proof of this result can be found in the author's paper [147].

Theorem 4.2.1 (Localization Principle in the Extended Form I)**.** *Let Λ be a closed subset of a finite dimensional normed space, the function $F(\cdot, \cdot, c)$ be l.s.c. on $A \times \Lambda$ for all $c > 0$, and the sets A and $\{(x, \lambda) \in \Omega_* \times \Lambda \mid \eta(x, \lambda) = 0\}$ be closed. Suppose also that from the validity of the conditions*

$$\eta(x_*, \lambda_*) = 0, \quad (x_*, \lambda_*) \in \operatorname*{arg\,min}_{(x,\lambda) \in A \times \Lambda} F(x, \lambda, c)$$

for some $x_* \in \Omega_*$, $\lambda_* \in \Lambda$, and $c > 0$ it follows that the separating function $F(x, \lambda, c)$ is globally extendedly exact. Then for the separating function $F(x, \lambda, c)$ to be globally extendedly exact it is necessary and sufficient that the following conditions hold true:

1. *for all $x_* \in \Omega_*$ there exists $\lambda_* \in \Lambda$ such that $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$;*

2. *$F(x, \lambda, c)$ is a penalty-type separating function;*

3. *$F(x, \lambda, c)$ is locally exact at every globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$;*

4. *either $F(x, \lambda, c)$ is non-degenerate or there exist $c_0 > 0$, $x_* \in \Omega_*$, $\lambda_* \in \Lambda$, and a bounded set K such that $\eta(x_*, \lambda_*) = 0$ and*

$$S_c(x_*, \lambda_*) := \Big\{ (x, \lambda) \in A \times \Lambda \Bigm| F(x, \lambda, c) < F(x_*, \lambda_*, c) \Big\} \subseteq K \quad \forall c \geq c_0.$$

Remark 4.2.1. It is easily seen that the set $\{(x,\lambda) \in \Omega_* \times \Lambda \mid \eta(x,\lambda) = 0\}$ is closed, in particular, if the set Ω is closed, the function f is l.s.c. on Ω, and the function η is continuous on $\Omega \times \Lambda$.

4.2.2 Singular Exact Penalty Functions

Let us apply the localization principle in the extended from to a simple modification of the exact penalty function proposed by Huyer and Neumaier in [229]. We call this penalty functions *singular*. A detailed theoretical analysis of this function was presented in [139–141, 404]. For applications of this penalty function to various optimal control problems see [249, 283, 285].

Let the set M have the form $M = \{x \in X \mid 0 \in G(x)\}$, where $G \colon X \rightrightarrows Y$ is a given set-valued mapping with closed values and Y is a normed space (not necessarily finite dimensional). Let also $\Lambda = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. In order to distinguish points of the set Λ from Lagrange multipliers, in this subsection we denote them as p.

Fix arbitrary $w \in Y$, and choose nondecreasing functions $\phi \colon [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ and $\omega \colon \mathbb{R}_+ \to [0, +\infty]$ such that $\phi(t) = 0$ if and only if $t = 0$ and $\omega(t) = 0$ if and only if $t = 0$. Define the singular penalty function

$$F(x,p,c) = \begin{cases} f(x) + \dfrac{c}{p}\phi\Big(\operatorname{dist}^2\big(0, G(x) - pw\big)\Big) + c\omega(p), & \text{if } p > 0, \\ f(x), & \text{if } p = 0,\ x \in \Omega, \\ +\infty, & \text{if } p = 0,\ x \notin \Omega. \end{cases}$$

Note that $F(x,0,c) = f(x)$, if x is feasible, and $F(x,0,c) = +\infty$, otherwise. Consequently, the problem of minimizing the function $F(x,0,c)$ over the set A is equivalent to the problem $(\mathcal{P})$. Furthermore, one can verify that under very mild additional assumptions $F(x,p,c) \to F(x,0,c)$ as $p \to +0$ for any $x \in X$ and $c > 0$. In addition, if the functions f, ϕ and ω are continuously differentiable on their domains, and the multifunction G is actually single-valued and Fréchet differentiable, then the singular penalty function $F(x,p,c)$ is continuously differentiable at every point $(x,p) \in \operatorname{dom} F(\cdot,\cdot,c)$ such that $p > 0$. Thus, for any $p > 0$ the function $F(x,p,c)$ can be viewed as a continuously differentiable approximation of the function $F(x,0,c)$. Finally, let us note that the vector w is added into the definition of $F(x,p,c)$ in order for this penalty function to resemble the Hestenes-Powell-Rockafellar augmented Lagrangian function (see [229] for more details). In the the author's paper [140], some results on the way a choice of w affects the value of the least exact penalty parameter of the function $F(x,p,c))$ were obtained.

Under some natural assumptions the singular penalty function $F(x,p,c)$ is globally extendedly exact with respect to the function $\eta(x,p) = p$, that is, for any sufficiently large c the function

$(x, p) \mapsto F(x, p, c)$ attains a global minimum on $A \times \mathbb{R}_+$ and a pair (x_*, p_*) is the point of global minimum of $F(x, p, c)$ on this set if and only if $p_* = 0$ and x_* is a globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$.

Theorem 4.2.2 (Localization Principle for Singula Penalty Functions)**.** *Let A be closed, f be l.s.c. on A, ϕ and ω be l.s.c., and G be outer semicontinuous on A. Then the singular penalty function $F(x, p, c)$ is globally extendedly exact if and only if it is locally extendedly exact at every globally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$ and there exists $c_0 > 0$ such that the set $\{(x, p) \in A \times \mathbb{R}_+ \mid F(x, p, c_0) < f_*\}$ is bounded.*

Remark 4.2.2. A detailed proof of the previous theorem is given in [147]. Let us also note that the local exactness of the penalty function $F(x, p, c)$ can be proved under the same assumptions as in Theorem 4.1.5. For a detailed analysis of singular penalty functions in the infinite dimensional case see the author's papers [139–141]. In particular, in [140] it was shown that under some assumptions on the functions ϕ and ω the singular penalty function $F(x, p, c)$ is globally extendedly exact if and only if the standard nonsmooth penalty function $\Phi(x, c) = f(x) + c \operatorname{dist}(0, G(x))$ is exact. Furthermore, there is a simple relation between the least exact penalty parameters of these functions.

4.2.3 Exact Augmented Lagrangians

Let us apply the localization principle in the extended form to an *exact* augmented Lagrangian function. The first exact augmented Lagrangian function was introduced by Di Pillo and Grippo in [122], and later on was improved and thoroughly investigated by many researchers [122, 123, 127–131, 188, 292, 300]. A general theory of exact augmented Lagrangian functions for cone constrained optimization problems was developed by the author in [145].

In this section we study a *continuously differentiable* exact augmented Lagrangian for nonlinear semidefinite programming problems and obtain simple necessary and sufficient conditions for its global exactness with the use of the localization principle. This exact augmented Lagrangian was first introduced by the author in [145]. In this paper the author also introduced a new exact augmented Lagrangian for nonlinear second order cone programming problems and new types of exact augmented Lagrangians for mathematical programming problems.

Let $X = A = \mathbb{R}^d$, and $M = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |G(x) \preceq 0, \ h(x) = 0\}$, where $G \colon X \to \mathbb{S}^l$ and $h \colon X \to \mathbb{R}^s$ are given functions, $\mathbb{S}^l$ is the set of all $l \times l$ real symmetric matrices, and the relation $G(x) \preceq 0$ means that the matrix $G(x)$ is negative semidefinite. We suppose that the space $\mathbb{S}^l$ is equipped with the Frobenius norm $\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{Tr}(A^2)}$. Note that this norm corresponds to the inner product $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB)$. In this case the problem $(\mathcal{P})$ is a nonlinear semidefinite programming problem of the form

$$\min f(x) \quad \text{subject to} \quad G(x) \preceq 0, \quad h(x) = 0. \tag{4.10}$$

Suppose that the functions f, G and h are continuously differentiable. For any $\lambda \in \mathbb{S}^l$ and $\mu \in \mathbb{R}^s$ denote by $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \mathrm{Tr}(\lambda G(x)) + \langle \mu, h(x)\rangle$ the standard Lagrangian function for the nonlinear semidefinite programming problem. For the sake of shortness we will sometimes denote $\nu = (\lambda, \mu)$.

Our aim is to introduce a continuously differentiable augmented Lagrangian function $\mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c)$ for the problem $(\mathcal{P})$ that is globally extendedly exact with respect to a function $\eta(x, \lambda, \mu)$ such that $\eta(x_*, \lambda_*, \mu_*) = 0$ for some $x_* \in \Omega_*$ if and only if (x_*, λ_*, μ_*) is a KKT-point of the problem $(\mathcal{P})$. In this case one obtains that the augmented Lagrangian function $\mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c)$ is globally extendedly exact if and only if its points of global minimum are exactly KKT-points of the problem $(\mathcal{P})$ corresponding to globally optimal solutions of this problem.

Define

$$\eta(x, \lambda, \mu) = \left\|\nabla_x L(x, \lambda, \mu)\right\|^2 + \mathrm{Tr}(\lambda^2 G(x)^2). \tag{4.11}$$

In order to ensure that $\eta(x_*, \lambda_*, \mu_*) = 0$ if and only if (x_*, λ_*, μ_*) is a KKT-point of the problem $(\mathcal{P})$ we need to utilize a proper constraint qualification.

Let x_* be a locally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$. Recall that the point x_* is called *nondegenerate* [42, Def. 4.70], if

$$\begin{bmatrix} DG(x_*) \\ \nabla h(x_*) \end{bmatrix} \mathbb{R}^d + \begin{bmatrix} \operatorname{lin} T_{\mathbb{S}^l_-}\big(G(x_*)\big) \\ \{0\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{S}^l \\ \mathbb{R}^s \end{bmatrix},$$

where $DG(x_*)$ is the Fréchet derivative of $G(\cdot)$ at the point x_*, “lin” stands for the lineality subspace of a convex cone, i.e. the largest linear space contained in this cone, and $T_{\mathbb{S}^l_-}(G(x_*))$ is the contingent cone to the cone of $l \times l$ negative semidefinite matrices $\mathbb{S}^l_-$ at the point $G(x_*)$. The nondegeneracy condition can be rewritten as a linear independence-type condition (see [42, Prp. 5.71]).

Let us note that the nondegenracy condition guarantees that there exists a *unique* Lagrange multiplier at x_* [42, Prp. 4.75], and that $\eta(x_*, \lambda_*, \mu_*) = 0$ if and only if (x_*, λ_*, μ_*) is a KKT-point of the problem $(\mathcal{P})$. Furthermore, it ensures that the matrix $D^2_{\nu\nu}\eta(x_*, \nu_*)$, where $\nu_* = (\lambda_*, \mu_*)$, is positive definite [145, Lemma 4].

Let us introduce an augmented Lagrangian function for nonlinear semidefinite programming problems. Choose $\alpha > 0$ and $\varkappa \geq 1$, and define

$$p(x, \lambda) = \frac{a(x)}{1 + \mathrm{Tr}(\lambda^2)}, \quad q(x, \mu) = \frac{b(x)}{1 + \|\mu\|^2},$$

where

$$a(x) = \alpha - \operatorname{Tr}\left([G(x)]_+^2\right)^{\varkappa}, \quad b(x) = \alpha - \|h(x)\|^2,$$

and $[\cdot]_+$ is the projection of a matrix onto the cone of $l \times l$ positive semidefinite matrices. Denote $\Omega_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a(x) > 0, \ b(x) > 0\}$, and define

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c) = f(x) + \frac{1}{2cp(x,\lambda)} \Big(\operatorname{Tr}\left([cG(x) + p(x,\lambda)\lambda]_+^2\right) - p(x,\lambda)^2 \operatorname{Tr}(\lambda^2) \Big) \\ + \langle \mu, h(x) \rangle + \frac{c}{2q(x,\mu)} \|h(x)\|^2 + \eta(x, \lambda, \mu), \quad (4.12) \end{aligned}$$

if $x \in \Omega_\alpha$, and $\mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c) = +\infty$, otherwise. It is easy to see that the function $\mathscr{L}(\cdot, c)$ is lower semicontinuous for all $c > 0$. Furthermore, one can verify that $\mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c)$ is continuously differentiable on its effective domain, provided the functions f, G and h are twice continuously differentiable.

With the use of the localization principle in the extended form one can show that under some natural assumption the exact augmented Lagrangian (4.12) is globally extendedly exact with respect to the function (4.11). In this case, the global exactness means that for any sufficiently large $c > 0$ a triplet (x_*, λ_*, μ_*) is a point of global minimum of $\mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c)$ on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^\ell \times \mathbb{R}^s$ if and only if x_* is a globally optimal solution of problem (4.10) and the triplet (x_*, λ_*, μ_*) satisfies the KKT optimality conditions. In other words, by solving the problem of *unconstrained* minimization of the augmented Lagrangian $\mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c)$ in (x, λ, μ) one can find globally optimal solutions of the original problem and corresponding Lagrange multipliers.

Theorem 4.2.3 (Localization Principle for Exact Augmented Lagrangian Functions)**.** *Let the functions f, G, and h be continuously differentiable. Suppose also that every globally optimal solution of problem* (4.10) *is nondegenerate. Then the augmented Lagrangian function $\mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c)$ is globally extendedly exact if and only if it is locally extendedly exact at every globally optimal solution of problem* (4.10) *and the set $\{(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^d \times \Lambda \mid \mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c_0) < f_*\}$ is bounded for some $c_0 > 0$.*

A detailed proof of this theorem is given in the author's paper [145].

Remark 4.2.3. One can verify that the augmented Lagrangian $\mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c)$ is locally extendedly exact at a locally optimal solution x_* of problem (4.10), if the point x_* is nondegenerate and a second order sufficient optimality conditions holds true at this point (see [145]). Let us also note that the set $\{(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^d \times \Lambda \mid \mathscr{L}(x, \lambda, \mu, c_0) < f_*\}$ from Theorem 4.2.3 is bounded for some $c_0 > 0$, e.g. if there exists $\gamma > 0$ such that the set $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < f_* + \gamma, \ a(x) > 0, \ b(x) > 0\}$ is bounded (see [145]).

4.3 Exact Penalty Functions in Infinite Dimensional Spaces

In the previous sections we studied necessary and sufficient conditions for the global exactness of penalty and augmented Lagrangian functions based on the localization principle. However, this principle holds true only in the finite dimensional case (see examples in the author's papers [138, 142]). In order to prove the global exactness of a penalty function in the infinite dimensional case one has to impose much more restrictive assumptions on constraints and the objective function than in the localization principle. A general theory of exact penalty function for infinite dimensional optimization problems was developed by the author in [138, 141, 151, 155]. In this section we will prove one of the central results of this theory and present an application of this result to an optimal control problem for linear evolution equations.

4.3.1 Completely Exact Penalty Functions

In this section we study the following optimization problem:

$$\min_{x \in X} f(x) \quad \text{subject to} \quad x \in M, \quad x \in A. \tag{$\mathcal{P}$}$$

Here $f \colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is a given function, while $M, A \subset X$ are given sets such that $M \cap A \neq \emptyset$. Below we suppose that X is an arbitrary metric space with metric d.

Consider linear penalty function for the problem $(\mathcal{P})$. To this end, suppose that a function $\varphi \colon X \to [0, +\infty]$ such that $\varphi(x) = 0$ if and only if $x \in M$ is given and introduce the penalty function $F(x, c) = f(x) + c\varphi(x)$. Below we will also use the notation $F_c(x)$.

Introduce the following auxiliary penalized problem:

$$\min_{x \in X} F_c(x) \quad \text{subject to} \quad x \in A. \tag{4.13}$$

Recall that the function F_c is called *globally exact*, if there exists $c_* \geq 0$ such that for all $c \geq c_*$ globally optimal solutions of problem (4.13) coincide with globally optimal solutions of the original problem $(\mathcal{P})$. If the penalty function F_c is globally exact, then the optimal values of problems (4.13) and $(\mathcal{P})$ coincide as well, since $F_c(x) = f(x)$ for all $x \in \Omega = M \cap A$.

Since traditional optimization methods can often find only local minimizers or even only stationary (critical) points of an optimization problem, from the practical point of view it is important to ensure that not only globally, but also localy optimal solutions/stationary points of problems (4.13) and $(\mathcal{P})$ coincide. It turns out that in the infinite dimensional case sufficient conditions for the global exactness of the penalty function F_c also guarantee the coincidence of locally optimal solutions/stationary points of these problems. To formulate these conditions, we require auxiliary definitions of *the rate of steepest descent* [82, 85, 87, 399] and *inf-stationary point* [82, 85, 87] of a function defined on a metric space.

Let $K \subset X$ be a nonempty set and $f(x) < +\infty$ for some $x \in K$. The quantity

$$f_K^{\downarrow}(x) = \liminf_{y \to x, y \in K} \frac{f(y) - f(x)}{d(y, x)}$$

is called the rate of steepest descent of f on K at the point x. If x is an isolate point of the set K, then by definition $f_K^{\downarrow}(x) = +\infty$. Note that the rate of steepest descent of f at x is closely related to the so-called *strong slope* $|\nabla f|(x)$ of f at x, first introduced in [69]. See [20, 141, 270] for some calculus rules for strong slope/rate of steepest descent, and the ways one can estimate them in various particular cases.

A point $x \in K$ is called an *inf-stationary point* of f on K, if $f_K^{\downarrow}(x) \geq 0$. Observe that the inequality $f_K^{\downarrow}(x) \geq 0$ is a necessary optimality conditions for the problem of minimizing f over K. In the case when X is a normed space, K is a convex set, and the function f is Fréchet differentiable at x, the inequality $f_K^{\downarrow}(x) \geq 0$ is reduced to the standard optimality condition: $f'(x)[y - x] \geq 0$ for all $y \in K$, where $f'(x)$ is the Fréchet derivative of f at x.

Now we can formulate sufficient conditions for the global exactness of the penalty function F_c in the infinite dimensional case. For all $c \geq 0$ and $\gamma \in \mathbb{R}$ denote $S_c(\gamma) = \{x \in A \mid F_c(x) < \gamma\}$. Recall that $\Omega = M \cap A$ and for any $\delta > 0$ denote $\Omega_\delta = \{x \in A \mid \varphi(x) < \delta\}$.

Theorem 4.3.1. *Let X be a complete metric space, A be closed, the functions f and φ be l.s.c. on A, and the function the function φ be condinuous at every point of Ω. Suppose also that there exist $\gamma > f_* = \inf_{x \in \Omega} f(x)$, $c_0 > 0$, and $\delta > 0$ such that*

1. *f is Lipschitz continuous on an open set V containing the set $S_{c_0}(\gamma) \cap \Omega_\delta$;*
2. *there exists $a > 0$ such that $\varphi_A^{\downarrow}(x) \leq -a$ for all $x \in S_{c_0}(\gamma) \cap (\Omega_\delta \setminus \Omega)$;*
3. *F_{c_0} is bounded below on A.*

Then there exists $c_* \geq 0$ such that for any $c \geq c_*$ the following statements hold true:

1. *the optimal values of the problems $(\mathcal{P})$ and (4.13) coincide;*
2. *globally optimal solutions of the problems $(\mathcal{P})$ and (4.13) coincide;*
3. *$x_* \in S_c(\gamma)$ is a locally optimal solution of the penalised problem (4.13) if and only if x_* is a locally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$;*

4. $x_* \in S_c(\gamma)$ is an inf-stationary point of F_c on A if and only if $x_* \in \Omega$, and it is an inf-stationary point of f on Ω.

If the penalty function F_c satisfies the four statements of the theorem above, then it is said to be *completely exact* on the set $S_c(\gamma)$. Roughly speaking, if F_c is completely exact, then the problem of minimizing this function over the set A is completely equivalent to the problem $(\mathcal{P})$ in the sense that optimal values, locally/globally optimal solutions, and stationary points of these problems coincide.

Remark 4.3.1. Thereom 4.3.1 is a modification of [85, Theorem 3.4.1]. Note that Theorem 4.3.1 significantly strengthens [85, Theorem 3.4.1], since we do *not* assume that the penalty function attains a global minimum for any sufficiently large c, suppose that the function f is Lipschitz continuous and the inequality $\varphi^{\downarrow}_A(x) \le -a$ is satisfied on a strictly smaller set than in [85], and prove that the penalty function is not only globally exact, as in [85, Theorem 3.4.1], but also completely exact in the sense that the corresponding sets of locally optimal solutions/inf-stationary points coincide.

We split the proof of Theorem 4.3.1 into four parts, each of which corresponds to one of the four statements of this theorem.

Proof of Statement 1. Arguing by reductio ad absurdum, suppose that the optimal values of the problems $(\mathcal{P})$ and (4.13) do not coincide for any $c \ge 0$ (note that if they coincide for some $c_* \ge 0$, then they coincide for all $c \ge c_*$ due to the fact that $F_c(x)$ is nondecreasing in c). Recall that the penalty term φ is nonnegative and $\varphi(x) = 0$ if and only if $x \in M$. Consequently,

$$F_c(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega = M \cap A, \tag{4.14}$$

which implies that $\inf_{x \in A} F_c(x) < f_* = \inf_{x \in \Omega} f(x)$ for any $c \ge 0$ (note also that $\inf_{x \in A} F_c(x) > -\infty$ for any $c \ge c_0$ due to the fact that F_c is nondecreasing in c). Hence, in particular, for any $n \in \mathbb{N}$ there exists $x_n \in A$ such that $F_n(x_n) < f_*$. Define $\varepsilon_n = F_n(x_n) - \inf_{x \in A} F_n(x) + 1/n$. By applying Ekeland's variational principle [167] one obtains that for any $n \in \mathbb{N}$, $n \ge c_0$, and $t > 0$ there exists $y_n \in A$ such that $F_n(y_n) \le F_n(x_n)$, and the following inequalities hold true:

$$d(y_n, x_n) \le t, \quad F_n(y) - F_n(y_n) > -\frac{\varepsilon_n}{t} d(y, y_n) \quad \forall y \in A \setminus \{y_n\}.$$

Setting $t = \varepsilon_n$, dividing the last inequality by $d(y, y_n)$, and passing to the limit inferior as $y \to y_n$, $y \in A$ one gets that

$$(F_n)^{\downarrow}_A(y_n) \ge -1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \colon n \ge c_0 \tag{4.15}$$

(note that if y_n is an isolated point of A, then by definition $(F_n)^{\downarrow}_A(y_n) = +\infty$). From the facts that $F_n(y_n) \le F_n(x_n) < f_* < c$ and $F_n(x) = f(x)$ for any $x \in \Omega$ it follows that $y_n \in S_n(c)$

and $y_n \notin \Omega$ for any $n \in \mathbb{N}$. Observe also that for any $n \geq c_0$, $m \in \mathbb{N}$, and $x \in A$ such that $x \notin \Omega_\delta = \{x \in A \mid \varphi(x) < \delta\}$ one has

$$F_{n+m}(x) = f(x) + (n+m)\varphi(x) = F_n(x) + m\varphi(x) \geq \inf_{x \in A} F_{c_0}(x) + m\delta.$$

Consequently, for any sufficiently large n one has $F_n(x) \geq f_*$, provided $x \in A \setminus \Omega_\delta$, which implies that there exists $n_0 \geq c_0$ such that $y_n \in \Omega_\delta$ for all $n \geq n_0$.

Thus, $y_n \in S_{c_0}(\gamma) \cap (\Omega_\delta \setminus \Omega)$ for any $n \geq n_0$ (here we used the fact that $S_n(c) \subseteq S_{c_0}(\gamma)$ for any $n \geq c_0$, since F_c is nondecreasing in c). Therefore, $\varphi^{\downarrow}_A(y_n) \leq -a$ for all $n \geq n_0$. By the definition of the rate of steepest descent for any $n \geq n_0$ there exists a sequence $\{y_n^k\} \subset A$, $k \in \mathbb{N}$, converging to y_n such that $\varphi(y_n^k) - \varphi(y_n) \leq -0.5ad(y_n^k, y_n)$ for all $k \in \mathbb{N}$. Hence taking into account the fact that the function f is Lipschitz continuous on an open set containing the set $S_{c_0}(\gamma) \cap \Omega_\delta$ with a Lipschitz constant $L \geq 0$ one obtains that for any $n \geq n_0$ there exists $k(n) \in \mathbb{N}$ such that for all $k \geq k(n)$ one has

$$\begin{aligned} F_n(y_n^k) - F_n(y_n) &= f(y_n^k) - f(y_n) + n\big(\varphi(y_n^k) - \varphi(y_n)\big) \\ &\leq Ld(y_n^k, y_n) - \frac{na}{2} d(y_n^k, y_n) = \Big(L - \frac{na}{2}\Big) d(y_n^k, y_n). \end{aligned}$$

Dividing this inequality by $d(y_n^k, y_n)$, and passing to the limit inferior as $k \to +\infty$ one obtains that $(F_n)^{\downarrow}_A(y_n) \leq L - 0.5na < -1$ for any sufficiently large n, which contradicts (4.15). □

Proof of Statement 2. By the first part of the theorem there exists $c_* \geq 0$ such that for any $c \geq c_*$ one has $\inf_{x \in A} F_c(x) = f_* = \inf_{x \in \Omega} f(x)$. Hence by applying (4.14) one gets that $\operatorname{arg\,min}_{x \in \Omega} f(x) \subseteq \operatorname{arg\,min}_{x \in A} F_c(x)$ for all $c \geq c_*$. On ther other hand, if $x \in A \setminus \Omega$, then $\varphi(x) > 0$, and for any $c > c_*$ one has $F_c(x) > F_{c_*}(x) \geq f_*$. Therefore, for any $c > c_*$ one has $\operatorname{arg\,min}_{x \in A} F_c(x) \subset \Omega$, which with the use of (4.14) implies that $\operatorname{arg\,min}_{x \in \Omega} f(x) = \operatorname{arg\,min}_{x \in A} F_c(x)$. □

To prove the last two statement of the theorem, we will need some local estimates of the functions f and φ, whose proofs can be found in the author's paper [155].

Lemma 4.3.1. *Let all assumptions of Theorem 4.3.1 be valid. Then for all $x_0 \in S_{c_0}(\gamma) \cap \Omega$ there exists $r > 0$ such that $\varphi(x) \geq a \operatorname{dist}(x, \Omega)$ for all $x \in B(x_0, r) \cap A$.*

Lemma 4.3.2. *Let all assumptions of Theorem 4.3.1 be valid and let L be a Lipschitz constant of f on the set V. Suppose also that $x_* \in S_{c_0}(\gamma) \cap \Omega$ is an inf-stationary points of the function f on Ω. Then for any $L' > L$ there exists $r > 0$ such that $f(x) - f(x_*) \geq -L' \operatorname{dist}(x, \Omega) - (L' - L)d(x, x_*)$ for all $x \in B(x_*, r)$. Moreover, if x_* is a locally optimal solution of the problem $(\mathcal{P})$, then one can set $L' = L$.*

Proof of Statement 3. At first, note that without loss of generality one can suppose that $\delta = +\infty$. Indeed, denote $\eta = \inf_{x \in A} F_{c_0}(x) > -\infty$. Then for any $x \in A \backslash \Omega_\delta$ and $c > \widehat{c} := c_0 + (c - \eta)/\delta$ one has

$$F_c(x) = F_{c_0}(x) + (c - c_0)\varphi(x) \geq \eta + (c - c_0)\delta \geq c,$$

which implies that $S_c(\gamma) \subseteq S_{c_0}(\gamma) \cap \Omega_\delta$ for any $c > \widehat{c}$. Thus, increasing if necessary c_0 one can suppose that $\delta = +\infty$, i.e. one can replace $S_{c_0}(\gamma) \cap \Omega_\delta$ with $S_{c_0}(\gamma)$. Note also that

$$S_c(\gamma) \subseteq S_{c_0}(\gamma) \quad \forall c \geq c_0 \tag{4.16}$$

by virtue of the fact that F_c is non-decreasing in c.

Let $L > 0$ be a Lipschitz constant of f on an open set V containing the set $S_{c_0}(\gamma)$. By our assumption for any $x \in S_{c_0}(\gamma) \setminus \Omega$ one has $\varphi_A^{\downarrow}(x) \leq -a$. Hence by the definition of the rate of steepest descent there exists a sequence $\{x_n\} \subset A$ converging to x and such that

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\varphi(x_n) - \varphi(x)}{d(x_n, x)} \leq -a.$$

One can obviously suppose that $\{x_n\} \subset V$. Therefore for any $c > 0$ one has

$$\begin{aligned}(F_c)_A^{\downarrow}(x) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{F_c(x_n) - F_c(x)}{d(x_n, x)} &= \liminf_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x) + c(\varphi(x_n) - \varphi(x))}{d(x_n, x)} \\ &\leq L + c \liminf_{n \to \infty} \frac{\varphi(x_n) - \varphi(x)}{d(x_n, x)} \leq L - ca,\end{aligned}$$

which along with (4.16) implies that

$$(F_c)_A^{\downarrow}(x) < 0 \quad \forall x \in S_c(\gamma) \setminus \Omega \quad \forall c > \max\left\{\frac{L}{a}, c_0\right\}. \tag{4.17}$$

Fix $c > \max\{c_0, L/a\}$. Let $x_* \in S_c(\gamma)$ be a point of local minimum of the penalised problem (4.13). Then, as it is easy to check, $(F_c)_A^{\downarrow}(x) \geq 0$, which with the use of (4.17) implies that $x_* \in \Omega$. Hence taking into account the fact that $F_c(x) = f(x)$ for any $x \in \Omega$ one obtains that x_* is a point of local minimum of the problem $(\mathcal{P})$.

Let now $x_* \in S_c(\gamma)$ be a point of local minimum of the problem $(\mathcal{P})$. Then by applying Lemmas 4.3.1 and 4.3.2 one gets that there exists $r > 0$ such that for any $c \geq L/a$ and $x \in B(x_*, r) \cap A$ one has

$$F_c(x) - F_c(x_*) = f(x) - f(x_*) + c(\varphi(x) - \varphi(x_*)) \geq -L \operatorname{dist}(x, \Omega) + ca \operatorname{dist}(x, \Omega) \geq 0,$$

i.e. x_* is a point of local minimum of the penalised problem (4.13). □

Proof of Statement 4. Fix $c > \max\{L/a, c_0\}$. Let $x_* \in S_c(\gamma)$ be an inf-stationary point of F_c on A. Then by (4.17) one has $x_* \in \Omega$. Hence taking into account the fact that $F_c(x) = f(x)$ for any $x \in \Omega$ one can easily check that x_* is an inf-stationary point of f on Ω.

Let now $x_* \in S_c(\gamma) \cap \Omega$ be an inf-stationary point of the function f on Ω. Note that one can suppose that x_* is not an isolated point of the set A, since otherwise $(F_c)^{\downarrow}_A(x_*) = +\infty$, i.e. x_* is obviously an inf-stationary point of F_c on A.

By the definition of the rate of steepest descent there exists a sequence $\{x_n\} \subset A$ converging to x_* such that

$$(F_c)^{\downarrow}_A(x_*) = \lim_{n\to\infty} \frac{F_c(x_n) - F_c(x_*)}{d(x_n, x_*)}.$$

If there exists a subsequence $\{x_{n_k}\} \subset \Omega$, then taking into account the fact that $\varphi(x) = 0$ for all $x \in \Omega$ one gets that

$$(F_c)^{\downarrow}_A(x_*) = \lim_{k\to\infty} \frac{F_c(x_{n_k}) - F_c(x_*)}{d(x_{n_k}, x_*)} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_{n_k}) - f(x_*)}{d(x_{n_k}, x_*)} \ge f^{\downarrow}_{\Omega}(x_*) \ge 0.$$

Thus, one can suppose that $\{x_n\} \subset A \setminus \Omega$ and, moreover, $F_c(x_n) < c$ for all $n \in \mathbb{N}$, since otherwise there exists a subsequence $\{x_{n_k}\}$ such that

$$F_c(x_{n_k}) \ge c > F_c(x_*),$$

which obviously implies that $(F_c)^{\downarrow}_A(x_*) \ge 0$. Thus, $\{x_n\} \subset S_{c_0}(\gamma) \setminus \Omega$.

Choose $L' \in (L, ca)$. With the use of Lemmas 4.3.1 and 4.3.2 one obtains that

$$\begin{aligned} F_c(x_n) - F_c(x_*) &= f(x_n) - f(x_*) + c\big(\varphi(x_n) - \varphi(x_*)\big) \\ &\ge -L' \operatorname{dist}(x_n, \Omega) - (L' - L) d(x_n, x_*) + ca \operatorname{dist}(x_n, \Omega) \ge -(L' - L) d(x_n, x_*) \end{aligned}$$

for any sufficiently large n. Dividing this inequality by $d(x_n, x_*)$, and passing to the limit as $n \to \infty$ one gets that $(F_c)^{\downarrow}_A(x_*) \ge -(L' - L)$, which implies that $(F_c)^{\downarrow}_A(x_*) \ge 0$ due to the fact that $L' \in (L, ca)$ was chosen arbitrarily. Thus, x_* is an inf-stationary point of F_c on A, and the proof is complete. □

4.3.2 Exact Penalty Functions for Optimal Control Problems for Linear Evolution Equations

Let us apply Theorem 4.3.1 to an optimal control problem for linear evolution equations. Applications of this theorem to many other optimal control problems, including problems with pointwise state constraints, can be found in the author's papers [151, 155].

In this section we use standard definitions and results on control problems for infinite dimensional systems that can be found, e.g. in monograph [386].

Let $\mathscr{H}$ and $\mathscr{U}$ be complex Hilbert spaces, $\mathbb{T}$ be a strongly continuous semigroup on $\mathscr{H}$ with generator $\mathcal{A} \colon \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathscr{H}$, and let $\mathcal{B}$ be an admissible control operator for $\mathbb{T}$ (see [386, Def. 4.2.1]).

Consider the following fixed-endpoint optimal control problem:

$$\begin{aligned} &\min_{(x,u)} \mathcal{I}(x,u) = \int_0^T \theta(x(t), u(t), t)\, dt \\ &\text{subject to } \dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t), \quad t \in [0,T], \quad u \in U, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Here $\theta\colon \mathscr{H} \times \mathscr{U} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ is a given function, $T > 0$ and $x_0, x_T \in \mathscr{H}$ are fixed, and U is a closed convex subset of the space $L^2((0,T);\mathscr{U})$ consisting of all those measurable functions $u\colon (0,T) \to \mathscr{U}$ for which $\|u\|_{L^2((0,T);\mathscr{U})} = \int_0^T \|u(t)\|_{\mathscr{U}}^2 dt < +\infty$.

Let us introduce a penalty function for problem (4.18). As in the previous section, we only penalise the terminal constraint $x(T) = x_T$. For any $t \ge 0$ let $G_t u = \int_0^t \mathbb{T}_{t-\sigma}\mathcal{B}u(\sigma)\, d\sigma$ be the input map corresponding to $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. By [386, Proposition 4.2.2], G_t is a bounded linear operator from $L^2((0,T);\mathscr{U})$ to $\mathscr{H}$. Furthermore, by applying [386, Proposition 4.2.5] one obtains that for any $u \in L^2((0,T);\mathscr{U})$ the initial value problem

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t), \quad x(0) = x_0 \tag{4.19}$$

has a unique solution $x \in C([0,T];\mathscr{H})$ given by

$$x(t) = \mathbb{T}_t x_0 + G_t u \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.20}$$

Define $X = C([0,T];\mathscr{H}) \times L^2((0,T);\mathscr{U})$, $M = \{(x,u) \in X \mid x(T) = x_T\}$, and

$$A = \Big\{ (x,u) \in X \Bigm| x(0) = x_0,\ u \in U, \text{ and (4.20) holds true} \Big\}.$$

Then problem (4.18) can be rewritten as the problem of minimizing $\mathcal{I}(x,u)$ subject to $(x,u) \in M \cap A$. Introduce the penalty term $\varphi(x,u) = \|x(T) - x_T\|_{\mathscr{H}}$. Then $M = \{(x,u) \in X \mid \varphi(x,u) = 0\}$, and one can consider the penalised problem of minimizing the penalty function $F_c(x,u) = \mathcal{I}(x,u) + c\varphi(x,u)$ subject to $(x,u) \in A$, which is a free-endpoint problem of the form:

$$\begin{aligned} &\min_{(x,u)} F_c(x,u) = \mathcal{I}(x,u) + c\varphi(x,u) = \int_0^T \theta(x(t), u(t), t)\, dt + c\|x(T) - x_T\|_{\mathscr{H}} \\ &\text{subject to } \dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t), \quad t \in [0,T], \quad u \in U, \quad x(0) = x_0. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Denote by $\mathcal{R}(x_0, T)$ the set that is reachable in time T, i.e. the set of all those $\xi \in \mathscr{H}$ for which there exists $u \in U$ such that $x(T) = \xi$, where $x(\cdot)$ is defined in (4.20). Observe that by definition $\mathcal{R}(x_0,T) = G_T(U) + \mathbb{T}_T x_0$, which implies that the reachable set $\mathcal{R}(x_0,T)$ is convex due to the convexity of the set U.

Let us utilise Theorem 4.3.1 to obtain simple sufficient conditions for the complete exactness of the penalty function $F_c(x,u)$ ensuring that for any sufficiently large c the free end-point problem

(4.21) is completely equivalent to the fixed end-point problem (4.18). A natural sufficient condition for the complete exactness of $F_c(x, u)$ is formulated in terms of the *relative interior* of the reachable set $\mathcal{R}(x_0, T)$. Recall that the relative interior of a convex subset C of a Banach space Y, denoted $\operatorname{ri} C$, is the interior of C relative to the *closed* affine hull of C. The relative interior of a convex subset of a finite dimensional space is always nonempty, but this statement is no longer true in infinite dimensional spaces (see [45, 46]).

Theorem 4.3.2. *Let the following assumptions be valid:*

1. *θ is continuous, and for any $R > 0$ there exist $C_R > 0$ and an a.e. nonnegative function $\omega_R \in L^1(0, T)$ such that $|\theta(x, u, t)| \le C_R \|u\|^2_{\mathscr{U}} + \omega_R(t)$ for all $x \in \mathscr{H}$, $u \in \mathscr{U}$, and $t \in (0, T)$ such that $\|x\|_{\mathscr{H}} \le R$;*

2. *either the set U is bounded in $L^2((0, T), \mathscr{U})$ or there exist $C_1 > 0$ and $\omega \in L^1(0, T)$ such that $\theta(x, u, t) \ge C_1 \|u\|^2_{\mathscr{U}} + \omega(t)$ for all $x \in \mathscr{H}$, $u \in \mathscr{U}$, and $t \in [0, T]$;*

3. *θ is differentiable in x and u, the functions $\nabla_x \theta$ and $\nabla_u \theta$ are continuous, and for any $R > 0$ there exist $C_R > 0$, and a.e. nonnegative functions $\omega_R \in L^1(0, T)$ and $\eta_R \in L^2(0, T)$ such that*
$$\|\nabla_x \theta(x, u, t)\|_{\mathscr{H}} \le C_R \|u\|^2_{\mathscr{U}} + \omega_R(t), \quad \|\nabla_u \theta(x, u, t)\|_{\mathscr{U}} \le C_R \|u\|_{\mathscr{U}} + \eta_R(t)$$
for all $x \in \mathscr{H}$, $u \in \mathscr{U}$, and $t \in (0, T)$ such that $\|x\|_{\mathscr{H}} \le R$;

4. *there exists a globally optimal solution of problem* (4.18)*, the relative interior of $\mathcal{R}(x_0, T)$ is nonempty, and $x_T \in \operatorname{ri} \mathcal{R}(x_0, T)$.*

Then for all $\gamma \in \mathbb{R}$ there exists $c_*(\gamma) \ge 0$ such that for any $c \ge c_*(\gamma)$ the penalty function F_c for problem (4.18) *is completely exact on the set $S_c(\gamma)$.*

Proof. Our aim is to apply Theorem 4.3.1. It is easily seen that assumption 1 ensures that the functional $\mathcal{I}(x, u)$ is correctly defined and finite for any $(x, u) \in X$. In turn, from assumption 2 it follows that for any $c \in \mathbb{R}$ and $c \ge 0$ there exists $K > 0$ such that $\|u\|_{L^2((0,T);\mathscr{U})} \le K$ for any $(x, u) \in S_c(\gamma)$, and the penalty function F_c is bounded below on A for all $c \ge 0$ (if U is bounded, then this fact follows from assumption 1). Hence taking into account (4.20), and the facts that $\|G_t\| \le \|G_T\|$ for any $t \le T$ (see [386, formula (4.2.5)]), and $\|\mathbb{T}_t\| \le M_\omega e^{\omega t}$ for all $t \ge 0$ and for some $\omega \in \mathbb{R}$ and $M_\omega \ge 1$ by [386, Proposition 2.1.2] one obtains that $\|x\|_{C([0,T];\mathscr{H})} \le M_\omega \max_{t \in [0,T]} e^{\omega t} \|x_0\| + \|G_T\| K$, i.e. the set $S_c(\gamma)$ is bounded in X for any $c \ge 0$ and $c \in \mathbb{R}$.

Observe that the penalty term φ is continuous on X, since by the reverse triangle inequality one has

$$|\varphi(x,u) - \varphi(y,v)| = \big|\|x(T) - x_T\|_{\mathscr{H}} - \|y(T) - x_T\|_{\mathscr{H}}\big| \le \|x(T) - y(T)\|_{\mathscr{H}} \le \|x - y\|_{C([0,T];\mathscr{H})}$$

for all $(x,u), (y,v) \in X$. Furthermore from (4.20), the closedness of the set U, and the fact that G_t continuously maps $L^2((0,T);\mathscr{U})$ to $\mathscr{H}$ by [386, Proposition 4.2.2] it follows that the set A is closed.

With the use of assumption 3 one can check that the functional $\mathcal{I}$ is Lipschitz continuous on bounded subsets of X (see the proof of [151, Theorem 8]). In particular, the functional $\mathcal{I}$ is Lipschitz continuous on any bounded open set V containing the sublevel set $S_c(\gamma)$. Such set V exists, since the set $S_c(\gamma)$ is bounded.

Thus, it remains to show that for all $c \ge 0$ and $\gamma > \inf_{(x,u)\in\Omega} \mathcal{I}(x,u)$ there exists $a > 0$ such that $\varphi_A^{\downarrow}(x,u) \le -a$ for all $(x,u) \in S_c(\gamma) \setminus \Omega$, where $\Omega = M \cap A$. Fix any such c, γ, and $(x,u) \in S_c(\gamma)$, and choose any $(\widehat{x}, \widehat{u}) \in \Omega$. Note that $x(T) \ne x_T$, since $(x,u) \notin \Omega$. Define

$$\Delta x = \frac{1}{\sigma}(\widehat{x} - x), \quad \Delta u = \frac{1}{\sigma}(\widehat{u} - u), \quad \sigma := \|\widehat{x} - x\|_{C([0,T];\mathscr{H})} + \|\widehat{u} - u\|_{L^2((0,T);\mathscr{U})} > 0.$$

Then $\|(\Delta x, \Delta u)\|_X = \|\Delta x\|_{C([0,T];\mathscr{H})} + \|\Delta u\|_{L^2((0,T);\mathscr{U})} = 1$. Due to the linearity of the system and the convexity of the set U, for any $\alpha \in [0,\sigma]$ one has $(x + \alpha\Delta x, u + \alpha\Delta x) \in A$, $(x + \alpha\Delta x)(T) = x(T) + \alpha\sigma^{-1}(x_T - x(T))$, since $\widehat{x}(T) = x_T$ by definition. Hence

$$\begin{aligned}\varphi_A^{\downarrow}(x,u) &\le \lim_{\alpha\to+0} \frac{\varphi(x + \alpha\Delta x, u + \alpha\Delta u) - \varphi(x,u)}{\alpha\|(\Delta x, \Delta u)\|_X} \\ &= \lim_{\alpha\to+0} \frac{(1 - \alpha\sigma^{-1})\|x(T) - x_T\|_{\mathscr{H}} - \|x(T) - x_T\|_{\mathscr{H}}}{\alpha} = -\frac{1}{\sigma}\|x(T) - x_T\|_{\mathscr{H}}.\end{aligned}$$

Therefore, it remains to check that there exists $C > 0$ such that for any $(x,u) \in S_c(\gamma) \setminus \Omega$ one can find $(\widehat{x}, \widehat{u}) \in \Omega$ satisfying the inequality

$$\|x - \widehat{x}\|_{C([0,T];\mathscr{H})} + \|u - \widehat{u}\|_{L^2((0,T);\mathscr{U})} \le C\|x(T) - x_T\|_{\mathscr{H}}.$$

Then $\varphi_A^{\downarrow}(x,u) \le -1/C$ for any such (x,u), and the proof is complete.

From (4.20) and the inequality $\|G_t\| \le \|G_T\|$, $t \in [0,T]$ (see [386, formula (4.2.5)]), it follows that for any $(x,u) \in A$ and $(\widehat{x}, \widehat{u}) \in A$ one has $\|x - \widehat{x}\|_{C([0,T];\mathscr{H})} \le \|G_T\|\|u - \widehat{u}\|_{L^2((0,T);\mathscr{U})}$. Consequently, it is sufficient to check that there exists $C > 0$ such that for any $(x,u) \in S_c(\gamma) \setminus \Omega$ one can find $(\widehat{x}, \widehat{u}) \in \Omega$ satisfying the inequality

$$\|u - \widehat{u}\|_{L^2((0,T);\mathscr{U})} \le C\|x(T) - x_T\|_{\mathscr{H}}. \tag{4.22}$$

To this end, fix any $(x_*, u_*) \in \Omega$, and denote by $\mathcal{E}\colon \operatorname{cl}\operatorname{span}(U - u_*) \to \operatorname{cl}\operatorname{span} G_T(U - u_*)$ the mapping such that $\mathcal{E}(u) = G_T(u)$ for any $u \in \operatorname{cl}\operatorname{span}(U - u_*)$. Note that the linear operator $\mathcal{E}$ is correctly defined, since the operator G_T maps $\operatorname{cl}\operatorname{span}(U - u_*)$ to $\operatorname{cl}\operatorname{span} G_T(U - u_*)$. Indeed, by definition $G_T(\operatorname{span}(U - u_*)) \subseteq \operatorname{cl}\operatorname{span} G_T(U - u_*)$. If $u_0 \in \operatorname{cl}\operatorname{span} U$, then there exists a sequence $\{u_n\} \subset \operatorname{span}(U - u_*)$ converging to u_0. Due to the continuity of G_T the sequence $\{G_T u_n\}$ converges to $G_T u_0$, which yields $G_T u_0 \in \operatorname{cl}\operatorname{span} G_T(U - u_*)$.

Observe that $\mathcal{E}$ is a bounded linear operator between Banach spaces, since the operator G_T is bounded. Furthermore, by (4.20) for any $u \in U$ one has $G_T(u - u_*) = x(T) - x_T$, which implies that $\mathcal{E}(U - u_*) = G_T(U - u_*) = \mathcal{R}(x_0, T) - x_T$. Therefore, by assumption 4 one has $0 \in \operatorname{int} \mathcal{E}(U - u_*)$, since the closed affine hull of $\mathcal{R}(x_0, T)$ coincides with $\operatorname{cl}\operatorname{span} G_T(U - u_*) + x_T$ due to the fact that $0 \in G_T(U - u_*)$. Hence by the nonlocal version of Robinson-Ursescu's theorem (see Theorems 1 and 2 in Robinson's original paper [345]) there exists $\kappa > 0$ such that

$$\operatorname{dist}\big(u - u_*, \mathcal{E}^{-1}(0) \cap (U - u_*)\big) \le \kappa\big(1 + \|u - u_*\|_{L^2((0,T);\mathscr{H})}\big)\big\|\mathcal{E}(u - u_*)\big\|_{\mathscr{H}} \quad \forall u \in U. \tag{4.23}$$

Fix any $(x, u) \in S_c(\gamma) \setminus \Omega$ (i.e. $x(T) \neq x_T$). Then taking into account the fact that $\mathcal{E}(u - u_*) = x(T) - x_T$ and utilising inequality (4.23) one obtains that there exists $v \in U - u_*$ such that $\mathcal{E}(v) = 0$ and

$$\|u - u_* - v\|_{L^2((0,T);\mathscr{H})} \le 2\kappa\big(1 + \|u - u_*\|_{L^2((0,T);\mathscr{H})}\big)\big\|x(T) - x_T\big\|_{\mathscr{H}}. \tag{4.24}$$

Define $\widehat{u} = u_* + v \in U$, and let $\widehat{x}$ be the corresponding solution of (4.19). Then $\widehat{x}(T) - x_T = \mathcal{E}(\widehat{u} - u_*) = \mathcal{E}(v) = 0$, i.e. $(\widehat{x}, \widehat{u}) \in \Omega$. Note that $C := \sup_{(x,u) \in S_c(\gamma)} 2\kappa(1 + \|u - u_*\|_{L^2((0,T);\mathscr{H})}) < +\infty$ due to the boundedness of the set $S_c(\gamma)$. Consequently, by (4.24) one for any $(x, u) \in S_c(\gamma) \setminus \Omega$ there exists $(\widehat{x}, \widehat{u}) \in \Omega$ such that $\|u - \widehat{u}\|_{L^2((0,T);\mathscr{H})} \le C\|x(T) - x_T\|_{\mathscr{H}}$, i.e. (4.22) holds true, and the proof is complete. □

Remark 4.3.2. Let us note that for the validity of the assumption $x_T \in \operatorname{ri} \mathcal{R}(x_0, T)$ in the case $\operatorname{Im}(G_T) = \mathscr{H}$ it is sufficient to suppose that x_T belongs to the interior of $\mathcal{R}(x_0, T)$, while in the case $U = L^2((0,T); \mathscr{U})$ this assumption is satisfied if and only if the image of the input map G_T is closed.

Remark 4.3.3. Recall that system (4.19) is called *exactly controllable* using L^2-controls in time T, if for any initial state $x_0 \in \mathscr{H}$ and for any final state $x_T \in \mathscr{H}$ there exists $u \in L^2((0,T), \mathscr{U})$ such that for the corresponding solution x of (4.19) one has $x(T) = x_T$. It is easily seen that this system is exactly controllable using L^2-controls in time T if and only if the input map G_T is surjective, i.e. $\operatorname{Im}(G_T) = \mathscr{H}$. Thus, in particular, in Theorem 4.3.2 it is sufficient to suppose that system

(4.19) is exactly controllable and $x_T \in \operatorname{int} \mathcal{R}(x_0, T)$. If, in addition, $\operatorname{int} U \neq \emptyset$, then it is sufficient to suppose that system (4.19) is exactly controllable and there exists a feasible point (x_*, u_*) of problem (4.18) such that $u_* \in \operatorname{int} U$.

The exactness of the penalty function F_c for problem (4.18) with $\theta(x, u, t) = \|u\|_{\mathscr{U}}^2/2$ and no constraints on the control inputs (i.e. $U = L^2((0,T); \mathscr{U})$) was proved by Gugat and Zuazua [212] under the assumption that system (4.19) is exactly controllable, and the control u from the definition of exact controllability satisfies the inequality

$$\|u\|_{L^2((0,T);\mathscr{U})} \leq C\big(\|x_0\| + \|x_T\|\big) \tag{4.25}$$

for some $C > 0$ independent of x_0 and x_T. Note that our Theorem 4.3.2 significantly generalises and strengthens [212, Theorem 1], since we consider a more general objective function and convex constraints on the control inputs, impose a less restrictive assumption on the input map G_T (instead of exact controllability it is sufficient to suppose that $\operatorname{Im}(G_T)$ is closed), and demonstrate that inequality (4.25) is, in fact, redundant.

Chapter 5

Applications to Control Theory

This chapter is devoted to applications of nonsmooth analysis and speed-gradient algorithms to various control problems. We study nonsmooth extensions of speed-gradient algorithms and consider their applications to the stabilization of the Brockett integrator and synchronization of two Duffing oscillators. We also study a boundary energy control problem for a semilinear Klein-Gordon model and a boundary energy control problem for the sine-Gordon model in the case when only boundary measurements are available. The main results of this chapter were published in [156–163].

5.1 Nonsmooth Speed Gradient Algorithms

This section is devoted to the study of extensions of speed-gradient algorithms, developed by prof. A.L. Fradkov [13, 181–184], to the case of nonsmooth controlled systems and nonsmooth goal functions. We consider several versions of nonsmooth speed-gradient algorithms, obtain sufficient conditions for the achievement of the control goal and consider several applications of the theoretical results to particular control problems.

5.1.1 Finite and Differential Nonsmooth Speed Gradient Algorithms

Consider the controlled system

$$\dot{x} = F(x, u, t), \quad t \geq 0, \tag{5.1}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the vector of the system state, and $u \in \mathbb{R}^m$ is the control. We assume that the function $F \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ satisfies the Carathéodory condition, i.e. the mapping $(u, x) \to F(x, u, t)$ is continuous for almost all $t \geq 0$, and the mapping $t \to F(x, u, t)$ is measurable for all $x \in \mathbb{R}^n$ and $u \in \mathbb{R}^m$. Unless otherwise stated, a solution of (5.1), even in the case of a discontinuous control law, is understood to be a locally absolutely continuous function satisfying (5.1) for almost all t in its domain.

Denote $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ and suppose that a nonnegative *goal function* $Q\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $Q = Q(x,t)$, is given. We pose the following control problem: find a control law $u(\cdot)$, which ensures the control objective

$$\lim_{t\to\infty} Q(x(t), t)) = 0.$$

Thus, our goal is to stabilize system (5.1) with respect to the goal function Q. This control goal encompasses many well-known classes of control problems, such as partial stabilization, energy control, synchronization, identification, etc., as particular cases (see [13, 181–184] for more details).

To design a control algorithm suppose that the function Q is locally Lipschitz continuous and Hadamard directionally differentiable, i.e. for all $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ and $(h,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ there exists the finite limit

$$Q'(x,t;h,s) = \lim_{[h',s',\alpha]\to[h,s,+0]} \frac{Q(x + \alpha h', t + \alpha s') - Q(x,t)}{\alpha}$$

(in the case $t = 0$ one needs to suppose that $s \geq 0$). Choose a convex in u function $\omega(x,u,t)$ defined on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+$ and such that

$$Q'(x,t;F(x,u,t),1) \leq \omega(x,u,t) \quad \forall (x,u,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+. \tag{5.2}$$

In particular, if F is affine in u, and $p(x,t;\cdot)$ is an upper convex approximation of the function $Q'(x,t;\cdot)$, then one can define $\omega(x,u,t) = p(x,t;F(x,u,t),1)$.

Remark 5.1.1. Let us explain the motivation behind the definition of $\omega(x,u,t)$. In the smooth case [13, 181, 183], one defines

$$\omega(x,u,t) = \frac{d}{dt}Q(x,t) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)^T F(x,u,t) + \frac{\partial Q}{\partial t}(x,t), \tag{5.3}$$

and utilizes this function in order to design the speed-gradient algorithms. It should be noted that in order to proves the convergence of the Speed-Gradient algorithms one must assume that the function (5.3) is convex in u. In order to extend this idea to the nonsmooth case, suppose that $x(t)$ is a solution of (5.1). Then applying the chain rule for directional derivatives (see, e.g., [111, Theorem I.3.3]) one obtains that

$$\frac{d}{dt}Q(x(t),t) = Q'(x(t),t;\dot{x}(t),1),$$

where $Q'(x(t),t;\dot{x}(t),t)$ is the directional derivative of Q at the point $(x(t),t)$ at the direction $(\dot{x}(t),1)$. Replacing $\dot{x}(t)$ by the right-hand side of (5.1) one gets the same expression as in (5.2).

However, in order to retain the convexity of $\omega(x, u, t)$ in u (that is crucial for convergence analysis) in many examples one must replace the equality sign in (5.3) by the inequality sign.

Being inspired by the definition of speed-gradient algorithms in the case when both Q and F are continuously differentiable [13, 181, 183, 184], consider the following control law:

$$\dot{u} \in -\Gamma \partial_u \omega(x, u, t). \tag{5.4}$$

Here Γ is a positive definite gain matrix and $\partial_u \omega(x, u, t)$ is the subdifferential of the convex function $u \mapsto \omega(x, u, t)$ at (x, u, t) in the sense of convex analysis. We call control law (5.4) *the nonsmooth speed-gradient algorithm in differential form.* We will also consider the nonsmooth speed gradient algorithm in *finite form*

$$u \in u_0 - \Gamma \partial_u \omega(x, u, t), \tag{5.5}$$

where u_0 is an initial value of the control variable u. Finally, one can consider the more general algorithm

$$u = u_0 + \gamma \psi(x, u, t), \tag{5.6}$$

where $\gamma > 0$ is a control gain and the function function ψ satisfies the *acute angle* (or *pseudogradient*) condition: for any $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, and $t \geq 0$ there exists $v \in \partial_u \omega(x, u, t)$ such that $v^T \psi(x, u, t) \leq 0$. Control law (5.6) is a generalization of the so-called speed-pseudogradient algorithms [183]. Therefore it is natural to call it the *speed-pseudosubgradient algorithm.*

Remark 5.1.2. It should be noted that (5.6) is an *equation* with respect to the control variable u; in other words, (5.6) defines the control law $u = u(x, t, \gamma)$ *implicitly.* Therefore, in order to implement the algorithm of the form (5.6) one should be able to solve this equation, i.e. one should be able either to obtain an explicit expression for $u(x, t, \gamma)$ or to efficiently solve this equation numerically. It should be noted that in many applications either the function ψ does not depend on u or a solution of (5.6) can be easily found analytically.

Observe also that from the definition of subdifferential it follows that the generalized equation (5.5) can be rewritten as follows:

$$\omega(x, v, t) - \omega(x, u, t) \geq (-\Gamma^{-1} u + \Gamma^{-1} u_0)^T (v - u) \quad \forall v \in \mathbb{R}^m$$

or, equivalently,

$$(Mu + q)^T (v - u) + \omega(x, v, t) - \omega(x, u, t) \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^m \tag{5.7}$$

where $M = \Gamma^{-1}$ and $q = -\Gamma^{-1} u_0$. Note that (5.7) is a linear variational inequality with respect to u. Thus, one can apply known results on the existence of solutions of linear variational inequalities in order to prove that controller (5.5) is correctly defined. In particular, it is easy to check that the variational inequality (5.7) satisfies all assumptions of part (a) of Corollary 3 in [9], which implies that for any $x \in \mathbb{R}^n$, $u_0 \in \mathbb{R}^m$, and $t \geq 0$ there exists at least one u satisfying (5.5).

Let us analyse the performance of the control system with the proposed control algorithms. At first, we study the nonsmooth speed-gradient algorithm in differential form. The theorem below is a generalization of the corresponding result in the smooth case (cf. [183, Section 3.2]). We consider the algorithm in differential form first. Denote by $\mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ the space of all locally integrable functions $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Recall also that $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| \leq r\}$, where $|\cdot|$ is the Euclidean norm.

Theorem 5.1.1. *Let the following assumptions be valid:*

1. *the function F satisfies the Carathéodory condition, and for any $r > 0$ there exists a Lebesgue integrable function $m_r > 0$ such that $|F(x,u,t)| \leq m_r$ for all $t \geq 0$, $|x| \leq r$, and $|u| \leq r$;*

2. *the set-valued mapping $(x,u) \to \partial_u \omega(x,u,t)$ is outer semicontinuous for a.e. $t \geq 0$, the set-valued mapping $t \to \partial_u \omega(x,u,t)$ is measurable for any x and u, and for any $r > 0$ there exists an a.e. nonnegative function $s_r \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ such that $|v| \leq s_r(t)$ for all $v \in \partial_u \omega(x,u,t)$, $t \geq 0$, $|x| \leq r$, and $|u| \leq r$;*

3. *the function $Q(x,t)$ is nonnegative, radially unbounded, i.e. $\inf_{t \geq 0} Q(x,t) \to +\infty$ as $|x| \to \infty$, and uniformly continuous on any set of the form $\{(x,t) \colon |x| \leq r, t \geq 0\}$;*

4. *there exists $u_* \in \mathbb{R}^m$ and a continuous scalar function $\rho \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ such that $\rho(x, Q(x,t)) = 0$ if and only if $Q(x,t) = 0$ and $\omega(x,u_*,t) \leq -\rho(x, Q(x,t))$ for all $t \geq 0$ and $x \in \mathbb{R}^n$.*

Then for any $x(0) \in \mathbb{R}^n$ and $u(0) \in \mathbb{R}^m$ all solutions $(x(t), u(t))$ of (5.1), (5.4) are defined and bounded on $\mathbb{R}_+$, and

$$\lim_{t \to \infty} Q(x(t), t)) = 0. \tag{5.8}$$

Proof. Note that assumptions 1 and 2 ensure the existence of a solution $(x(t), u(t))$ of the system (5.1), (5.4) with arbitrary initial data $(x(0), u(0))$ at least on some finite time interval $[0, t_0)$, and $|x(t)| + |u(t)| \to +\infty$ as $t \to t_0$, if t_0 is finite. Moreover, every solution of differential inclusion (5.1), (5.4) (there might be infinitely many such solutions) is either defined on $\mathbb{R}_+$ or on some finite interval $[0, t_0)$, and in the letter case $|x(t)| + |u(t)| \to +\infty$ as $t \to t_0$ (see [176, Theorem 2.7.5 and 2.7.6]). Fix any such solution $(x(t), u(t))$ and suppose that it is defined on some interval $[0, t_0)$, $t_0 \in (0, +\infty]$.

Introduce the Lyapunov function

$$V(x,u,t) = Q(x,t) + (u-u_*)^T\Gamma^{-1}(u-u_*)/2, \tag{5.9}$$

and denote $V_0(t) = V(x(t),u(t),t)$. The function Q is Hadamard directionally differentiable, and the functions $x(t)$, $u(t)$ are differentiable for a.e. $t \in [0,t_0)$, as solutions of a differential inclusion. Therefore by the chain rule for directional derivatives [111, Theorem I.3.3] for a.e. $t \in [0,t_0)$ there exists the right-hand side derivative $D_+V_0(t)$ of the function V_0 that has the form

$$D_+V_0(t) = V_0'(t;1) = Q'(x(t),t;\dot{x}(t),1) + (u(t)-u_*)^T\Gamma^{-1}\dot{u}(t).$$

Taking into account (5.1) one gets that for a.e. $t \in [0,t_0)$

$$D_+V_0(t) = Q'(x(t),t;F(x(t),u(t),t),1) - (u(t)-u_*)^T v(t),$$

where $v(t) = -\Gamma^{-1}\dot{u}(t)$. By the definition of $u(t)$ (see (5.4)) one has $v(t) \in \partial_u\omega(x(t),u(t),t)$ for a.e. $t \in [0,t_0)$. Hence applying the convexity of ω in u and assumption 4 one obtains that for a.e. $t \in [0,t_0)$

$$D_+V_0(t) \le \omega(x(t),u(t),t) - (u(t)-u_*)^T v(t) \le \omega(x(t),u_*,t) \le -\rho(x(t),Q(x(t),t)) \le 0. \tag{5.10}$$

Note that $V_0(t)$ is absolutely continuous as the sum of the absolutely continuous function $(u(t)-u_*)^T\Gamma^{-1}(u(t)-u_*)/2$ and the composition of the locally Lipschitz continuous function $Q(\cdot)$ and the absolutely continuous mapping $(x(t),t)$. Hence and from (5.10) one gets that the function $V_0(t) = V(x(t),u(t),t)$ is nonincreasing. It implies the boundedness of $V(x(t),u(t),t)$, and $Q(x(t),t)$ that, in turn, means the boundedness of $x(t)$ (due to the radial unboundedness of $Q(x,t)$) and $u(t)$ (see (5.9)). Consequently, all solutions of (5.1)-(5.4) exist and bounded on $\mathbb{R}_+$. Thus, it remains to show that (5.8) holds true.

Recall that $V_0(t)$ is absolutely continuous, while $\rho(x(t),Q(x(t),t))$ is continuous as the composition of continuous functions. Therefore from (5.10) it follows that

$$\int_0^t \rho(x(\tau),Q(x(\tau),\tau))\,d\tau \le V_0(0) - V_0(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Consequently, applying the fact that V_0 is nonincreasing one obtains that

$$\int_0^\infty \rho(x(t),Q(x(t),t))\,dt < +\infty. \tag{5.11}$$

Note that by definition one has $x(t)-x(s) = \int_s^t F(x(\tau),u(\tau),\tau)\,d\tau$ for any $s,t \in \mathbb{R}_+$. Hence taking into account the boundedness of $x(t)$ and $u(t)$ on $\mathbb{R}_+$, and assumption 1 one gets that there exists $m_r > 0$ such that $|x(t)-x(s)| \le \int_s^t m_r d\tau = m_r|t-s|$ for all $t,s \in \mathbb{R}_+$. Thus, the function $x(t)$ is uniformly continuous on $\mathbb{R}_+$. Consequently, taking into account assumptions 3 and 4 one obtains that the function $\rho(x(t), Q(x(t), t))$ is uniformly continuous on $\mathbb{R}_+$ as well. Hence with the use of the Barbalat lemma (see, e.g. [183, Lemma 2.2]) one gets that $\rho(x(t), Q(x(t), t)) \to 0$ as $t \to \infty$.

Let us verify that $Q(x(t), t) \to 0$ as $t \to \infty$. Indeed, arguing by reductio ad absurdum suppose that there exists $\varepsilon > 0$ and an increasing unbounded sequence $\{t_k\} \subset \mathbb{R}_+$ such that $Q(x(t_k), t_k) \geq \varepsilon$ for all $k \in \mathbb{N}$. Since $x(t)$ is bounded on $\mathbb{R}_+$, applying assumption 3 one gets that there exists $r > 0$ and $c > 0$ such that $|x(t)| \leq r$ and $Q(x(t), t) \leq c$ for all $t \in \mathbb{R}_+$. Define

$$\rho_0 = \inf \big\{\rho(x, s) \mid |x| \leq r, \ s \in [\varepsilon, c]\big\}.$$

Assumption 4 implies that $\rho_0 > 0$. Furthermore, by the definition of the sequence $\{t_k\}$ one has $\rho\big(x(t_k), Q(x(t_k), t_k)\big) \geq \rho_0$ for all $k \in \mathbb{N}$, which contradicts the fact that $\rho(x(t), Q(x(t), t)) \to 0$ as $t \to \infty$. Thus, $Q(x(t), t) \to 0$ as $t \to \infty$, and the proof is complete. $\square$

Remark 5.1.3. In some particular cases, the multifunction $(x, u) \mapsto \partial_u \omega(x, u, t)$ might not be outer semicontinuous, which makes the theorem above inapplicable. In this case, one can consider a slightly relaxed version of the nonsmooth speed-gradient algorithm in differential form. Namely, let $\Phi(x, u, t)$ be a compact convex valued multifunction such that $\Phi(x, \cdot, t) = \partial_u \omega(x, \cdot, t)$ for any $x \in \mathbb{R}^n$ and $t \in \mathbb{R}_+$ with $Q(x, t) > 0$. Then define a control law as follows

$$\dot{u} \in -\Gamma \Phi(x, u, t). \tag{5.12}$$

Suppose that all assumptions of Theorem 5.1.1 are satisfied with $\partial_u \omega(x, u, t)$ being replaced by $\Phi(x, u, t)$. Then one can verify that for all $x(0) \in \mathbb{R}^n$ and $u(0) \in \mathbb{R}^m$, and for any solution $(x(t), u(t))$ of (5.1), (5.12) either $(x(t), u(t))$ is defined and bounded on $\mathbb{R}_+$, and $\lim_{t\to\infty} Q(x(t), t)) = 0$ or the control goal is achieved in finite time, i.e. there exists $T > 0$ such that $(x(t), u(t))$ is defined on $[0, T]$ and $Q(x(T), T) = 0$.

Indeed, the validity of assumptions 1 and 2 ensures the existence of a solution $(x(t), u(t))$ of (5.1), (5.12) with arbitrary initial data $(x(0), u(0))$ that is defined on a maximal interval of existence $[0, T_{\max})$. If $Q(x(t), t) > 0$ for all $t \in [0, T_{\max})$, then taking into account the fact that $\Phi(x(t), u(t), t) = \partial_u \omega(x(t), u(t), t)$ for all $t \in [0, T_{\max})$ and repeating the proof of the theorem above one can verify that $T_{\max} = +\infty$, the solution $(x(t), u(t))$ is bounded and $Q(x(t), t) \to 0$ as $t \to +\infty$. On the other hand, if there exists $T \in [0, T_{\max})$ such that $Q(x(T), T) = 0$, then it exactly means that the control goal is achieved in finite time.

Note that the achievement of the control goal in finite time does not necessarily mean that $Q(x(t), t) = 0$ for all $t \geq T$ or $\lim_{t\to\infty} Q(x(t), t) = 0$. However, under some additional assumptions on the function $\Phi(x,u,t)$, one can guarantee that in the case of finite time convergence the relaxed control goal $\liminf_{t\to\infty} Q(x(t),t) = 0$ is achieved.

Clearly, the most restrictive assumption of Theorem 5.1.1 is assumption 4. This assumption can be roughly interpreted as the assumption on the existence of an "ideal" value u_* of u for which the control objective is achieved. Note that in applications usually one cannot define $u \equiv u_*$, since the "ideal" value u_* is unknown. Let us illustrate this statement by a simple example.

Example 5.1.1 (Nonlinear plant identification)**.** Consider a pendulum described by the second-order differential equation

$$\ddot{y} = a\sin(y) + bf(t),$$

where y is a generalized coordinate, $f(t)$ is a measurable external force, and a, b are unknown parameters. Introduce the model of the from

$$\ddot{y}_m = d_1(y - y_m) + d_2(\dot{y} - \dot{y}_m) + a_m\sin(y) + b_m f(t),$$

where $d_1, d_2 > 0$ are introduced to ensure stability. Define $x_1 = y - y_m$, $x_2 = \dot{y} - \dot{y}_m$, $u_1 = a_m$ and $u_2 = b_m$. Then

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -d_1x_1 - d_2x_2 + (a - u_1)\sin(y) + (b - u_2)f(t). \end{cases} \tag{5.13}$$

Introduce the nonsmooth goal function $Q(x) = \sqrt{x^T Hx}$, where H is positive definite. Let us apply the nonsmooth speed-gradient algorithm in differential form to the problem under consideration. For any $x \neq 0$ define

$$\omega(x,u) = Q'\big(x; F(x,u)\big) = \frac{1}{2Q(x)}\Big(x^T HAx + x^T A^T Hx \\ + 2(h_{12}x_1 + h_{22}x_2)(a - u_1)\sin(y) + 2(h_{12}x_1 + h_{22}x_2)(b - u_2)f(t)\Big),$$

where $F(x,u)$ is the right-hand side of (5.13), and $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -d_1 & -d_2 \end{smallmatrix}\right)$. If $x = 0$, then set

$$\omega(0,u) = Q'\big(0; F(0,u)\big) = \sqrt{F(0,u)^T HF(0,u)} = \sqrt{h_{22}} \cdot \big|(a - u_1)\sin(y) + (b - u_2)f(t)\big|.$$

One can check that the set-valued mapping $(x,u) \to \partial_u\omega(x,u,t)$ is not outer semicontinuous. That is why we utilise a relaxed version of the nonsmooth speed-gradient algorithm in differential form (see Remark 5.1.3). Namely, define the control law as follows:

$$\dot{u}_1 \in \begin{cases} \{(h_{12}x_1 + h_{22}x_2)\sin(y)/Q(x)\}, & \text{if } x \neq 0, \\ \operatorname{co}\{-K\sin(y), K\sin(y)\}, & \text{if } x = 0, \end{cases} \qquad K := \max_{|x|=1} \frac{h_{12}x_1 + h_{22}x_2}{Q(x)}, \tag{5.14}$$

$$\dot{u}_2 \in \begin{cases} \{(h_{12}x_1 + h_{22}x_2)f(t)/Q(x)\}, & \text{if } x \neq 0, \\ \operatorname{co}\{-Kf(t), Kf(t)\}, & \text{if } x = 0. \end{cases} \tag{5.15}$$

Let us apply Theorem 5.1.1 and Remark 5.1.3. Clearly, assumptions 1 and 3 of this theorem are valid. Moreover, one can easily verify that the right-hand sides of (5.14) and (5.15) are outer semicontinuous and bounded. Therefore it remains to show the existence of u_*.

Observe that A is stable. Therefore one can choose H as a solution of the Lyapunov equation $HA + A^T H = -R$, where R is a positive definite matrix. Define $u_* = (a, b)^T$. Then $\omega(0, u_*) = 0$ and for any $x \neq 0$ one has

$$\omega(x, u_*) = -\frac{1}{2Q(x)} x^T Rx \leq -\rho_0 Q(x), \quad \rho_0 = \frac{\lambda_{min}(R)}{2\lambda_{max}(H)},$$

where $\lambda_{min}(R)$ is the minimal eigenvalue of R and $\lambda_{max}(H)$ is the maximal eigenvalue of H. Hence assumption 4 of Theorem 5.1.1 is valid with $\rho(s) \equiv \rho_0 s$. Thus, all assumptions of Theorem 5.1.1 are valid, and either $Q(x(t)) \to 0$ as $t \to \infty$ or there exists $T > 0$ such that $Q(x(T), T) = 0$, which implies that either $|y(t) - y_m(t)| \to 0$ and $|\dot{y}(t) - \dot{y}_m(t)| \to 0$ as $t \to \infty$ or $y(T) = y_m(T)$ and $\dot{y}(T) = \dot{y}_m(T)$ for some $T > 0$. Furthermore, one can verify that under some additional assumptions $u_1(t) \to a$ and $u_2(t) \to b$ as $t \to \infty$ (see [183, Section 3.3]). Note that the ideal control law $u \equiv u_*$ is unrealizable, since it depends on the unknown parameters a and b.

Let us also consider speed-pseudosubgradient algorithm (5.6).

Theorem 5.1.2. *Let the following assumptions be valid:*

1. *for any $\gamma > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ and $t \geq 0$ there exists a solution $u = \kappa(x, u_0, t, \gamma)$ of equation* (5.6), *and the function κ is locally bounded in x uniformly in t;*

2. *a solution of the system* (5.1), (5.6) *exists for all $t \geq 0$, $x(0) \in \mathbb{R}^n$, and $u_0 \in \mathbb{R}^m$;*

3. *the function $Q(x, t)$ is nonnegative and radially unbounded;*

4. *there exist a locally bounded uniformly in t function $u_* \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ and a continuous scalar function $\rho \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ such that $\rho(s) = 0$ if and only if $s = 0$ and for all $x \in \mathbb{R}^n$ and $t \in \mathbb{R}_+$ one has $\omega(x, u_*(x, t), t) \leq -\rho(Q(x, t))$;*

5. *there exists $\beta > 0$ such that for any $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ and $t \geq 0$ the inequality*

$$v^T \psi(x, u, t) \leq -\beta |v| \tag{5.16}$$

holds true for some $v \in \partial_u \omega(x, u, t)$.

Then for any $x(0) \in \mathbb{R}^n$ and $u_0 \in \mathbb{R}^m$ there exists $\overline{\gamma} > 0$ such that any solution $(x(t), u(t))$ of (5.1), (5.6) *is bounded and*

$$\lim_{t \to \infty} Q(x(t), t)) = 0 \tag{5.17}$$

for all $\gamma > \overline{\gamma}$.

Proof. Define the Lyapunov function $V(x,t) = Q(x,t)$ and denote $V_0(t) = V(x(t),t)$, where $(x(\cdot),u(\cdot))$ is a solution of the system (5.1), (5.6). Then for a.e. $t \in \mathbb{R}_+$ there exists the right-hand side derivative of the function V_0 that has the from

$$D_+V_0(t) = Q'(x(t),t;\dot{x}(t),1) = Q'(x(t),t;F(x(t),u,t),1) \le \omega(x(t),u,t).$$

Applying the convexity of ω in u, and assumptions 4 and 5 one gets that

$$\begin{aligned} D_+V_0(t) &\le \omega(x(t),u_*(x(t),t),t) + \big[u_0 - u_*(x(t),t) + \gamma\psi(x(t),u,t)\big]^T v \\ &\le -\rho(Q(x(t),t)) + \big[|u_0 - u_*(x(t),t)| - \gamma\beta\big]|v| \end{aligned} \tag{5.18}$$

for any $v \in \partial_u\omega(x(t),u,t)$ such that (5.16) holds true. Note that assumption 5 guarantees that there exists at least one such v.

Denote $\Omega_0 = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid Q(x,t) < V_0(0) + 1\big\}$. Taking into account the radial unboundedness of Q and the local boundedness uniformly in t of $u_*(x,t)$ one obtains that $d = \sup_{(x,t)\in\Omega_0} |u_0 - u_*(x,t)| < +\infty$. Define $\overline{\gamma} = d/\beta$. Let us show that for any $\gamma > \overline{\gamma}$ one has $(x(t),t) \in \Omega_0$ for all $t \in \mathbb{R}_+$. Indeed, let $\gamma > d/\beta$, and suppose that there exists $t_0 > 0$ such that $(x(t_0),t_0) \notin \Omega_0$ or, equivalently, $V_0(t_0) = Q(x(t_0),t_0) \ge V_0(0) + 1$. Define $\tau = \inf\big\{t > 0 \mid V_0(t) \ge V_0(0) + 1\big\}$. Observe that $\tau > 0$, since V_0 is continuous. Therefore $(x(t),t) \in \Omega_0$ for any $t \in [0,\tau)$ and taking into account (5.18) one gets that $D_+V_0(t) \le -\rho(Q(x(t),t)) \le 0$ for all $t \in [0,\tau)$. Hence the function V_0 is nonincreasing on $[0,\tau)$ and $V_0(\tau) \le V_0(0)$, which contradicts the definition of τ.

Thus, for any $\gamma > \overline{\gamma}$ one has $(x(t),t) \in \Omega_0$ for all $t \in \mathbb{R}_+$. Therefore from (5.18) it follows that

$$D_+V_0(t) \le -\rho(Q(x(t),t)) \le 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \gamma > \overline{\gamma}. \tag{5.19}$$

Consequently, the function $V_0(t) = Q(x(t),t)$ is nonincreasing. Hence the solution $(x(\cdot),u(\cdot))$ is bounded due to the radial unboundedness of Q and local boundedness in x uniformly in t of $u = \kappa(x,u_0,t,\gamma)$.

Choose an arbitrary $\Delta > 0$, and define $T_\Delta = \{t \ge 0 \colon Q(x(t),t) \ge \Delta\}$. Note that T_Δ is a connected set, i.e. it has the form $T_\Delta = [0,t_1]$ for some $t_1 > 0$ (or $t_1 = +\infty$), since $V_0(t) = Q(x(t),t)$ is nonincreasing. By definition one has $D_+V_0(t) \le -\rho(\Delta) < 0$ for all $t \in T_\Delta$. Therefore $\sup T_\Delta \le V_0(0)/\rho(\Delta) < +\infty$ and

$$V_0(t) = Q(x(t),t) < \Delta \quad \forall t > \sup T_\Delta$$

by the fact that $V_0(t)$ is nonincreasing. Since $\Delta > 0$ is arbitrary, (5.17) hold true. $\square$

One can significantly strengthen the previous theorem in the case when the function ω is linear in u. Namely, suppose that $\omega(x,u,t) = g(x,t)^T u$ for some function $g(x,t)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m$. Note that by definition $g(x,t) = \nabla_u \omega(x,u,t)$, where $\nabla_u \omega(x,u,t)$ is the gradient of the function $u \mapsto \omega(x,u,t)$.

Remark 5.1.4. The function ω of the form $\omega(x,u,t) = g(x,t)^T u$ exists, in particular, if the right-hand side of system (5.1) is linear in u (i.e. $F(x,u,t) \equiv f(x,t)u$ for some function f), the goal function Q does not depent on t and is Hadamard superdifferentiable, i.e. Hadamard directionally differentiable and for any $x \in \mathbb{R}^n$ its directional derivative has the form $Q'(x,h) = \min_{v \in \overline{\partial} Q(x)} \langle v, h \rangle$ for some compact convex set $\overline{\partial} Q(x)$ called *the Hadamard superdifferential* of Q at x. In this case one can define $\omega(x,u,t) = v(x)^T f(x,t)u$ for any selection $v(\cdot)$ of the multifunction $\overline{\partial} Q(\cdot)$ (see inequality (5.2) from the definition of ω).

When the function ω has the form $\omega(x,u,t) = g(x,t)^T u$ the speed-gradient algorithm in finite form takes can be written as follows: $u = -\Gamma g(x,t)$, where Γ is a positive definite gain matrix. In turn, the speed-pseudosubgradietn algorithm takes the form

$$u = \gamma \psi(x,u,t) \tag{5.20}$$

where $\gamma > 0$ is a scalar gain, and the vector function ψ satisfies the acute angle condition: $g(x,t)^T \psi(x,u,t) \leq 0$ for any $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ and $t \in \mathbb{R}_+$. Note that if one takes a control Lyapunov function $V(x)$ of the system (5.1) as the goal function $Q(x,t)$, then the control law (5.20) is a feedback of steepest descent type for V (see [59]).

Let us obtain sufficient conditions for the achievement of the control goal.

Theorem 5.1.3. *Let $C \subset \mathbb{R}^n$ be a given set and the following assumptions be valid:*

1. *for any $\gamma > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ and $t \geq 0$ there exists a solution $u = \kappa(x,t,\gamma)$ of equation* (5.20)*, and the function κ is locally bounded in x uniformly in t;*

2. *an absolutely continuous solution of the system* (5.1), (5.20) *exists for all $t \geq 0$ and $x(0) \in \mathbb{R}^n \setminus C$, and $x(t) \notin C$ for any $t \in \mathbb{R}_+$;*

3. *the function $Q(x,t)$ is directionally differentiable, locally Lipschitz continuous, and radially unbounded;*

4. *for any $\Delta > 0$ and $r > 0$ there exists $a > 0$ such that $|g(x,t)| \geq a$ for all $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$ and $t \in \mathbb{R}_+$ such that $Q(x,t) \geq \Delta$ and $|x| \leq r$;*

5. *there exists a continuous function* $\rho\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *such that* $\rho(s) = 0$ *if and only if* $s = 0$, *and* $g(x,t)^T\psi(x,u,t) \le -\rho(|g(x,t)|)$ *for all* $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ *and* $t \in \mathbb{R}_+$.

Then for any $x(0) \in \mathbb{R}^n \setminus C$ *and* $\gamma > 0$ *a solution of* (5.1), (5.20) *is bounded on* $\mathbb{R}_+$ *and* $\lim_{t\to\infty} Q(x(t),t)) = 0$.

Proof. Let $x(t)$ be a solution of the system (5.1), (5.20). Introduce the Lyapunov function $V(x,t) = Q(x,t)$, and define $V_0(t) = V(x(t),t)$. The function Q is Hadamard directionally differentiable, and the function $x(t)$ is a.e. differentiable, as a solution of a differential equation. Therefore by the chain rule for directional derivatives (Theorem I.3.3, [111]) for a.e. $t \in \mathbb{R}_+$ there exists the right-hand side derivative $D_+V_0(t)$ of the function V_0 that has the form

$$D_+V_0(t) = Q'(x(t),t;F(x(t),u,t),1) \le \omega(x(t),u,t).$$

Applying assumption 5 and the fact that $\omega(x,u,t) = g(x,t)^Tu$ one obtains that

$$D_+V_0(t) \le \gamma g(x,t)^T\psi(x,u,t) \le -\gamma\rho(|g(x,t)|) \le 0. \tag{5.21}$$

Note that the function V_0 is absolutely continuous as the composition of the locally Lipschitz continuous function $Q(x,t)$ and the absolutely continuous function $x(t)$. Hence taking into account (5.21) one gets that the function $V_0(t)$ is nonincreasing, which implies the boundedness of $x(t)$ due to the radial unboundedness of Q, and the boundedness of the control u due to the local boundedness in x uniformly in t of the function $u = \kappa(x,t,\gamma)$.

Choose an arbitrary $\Delta > 0$, and denote $T_\Delta = \{t \ge 0\colon Q(x(t),t) \ge \Delta\}$. Observe that the set T_Δ is connected due to the fact that the function $V_0(t) = Q(x(t),t)$ is nonincreasing. From assumption 4 it follows that there exists $a > 0$ such that $|g(x,t)| > a$ for all $t \in T_\Delta$. Hence with the use of (5.21) one gets that $D_+V_0(t) \le -\gamma\rho(a) < 0$ for any $t \in T_\Delta$. Consequently, $\sup T_\Delta \le V_0(0)/\gamma\rho(a)$, and $V_0(t) = Q(x(t),t) < \Delta$ for all $t > \sup T_\Delta$. Hence with the use of the fact that $\Delta > 0$ is arbitrary one can conclude that $\lim_{t\to\infty} Q(x(t),t)) = 0$. □

Remark 5.1.5. Let all assumptions of the theorem above be valid and suppose that the function $\psi(x,u,t)$ is bounded for any $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ and $t \in \mathbb{R}_+$. Then the control goal $\lim_{t\to\infty} Q(x(t),t)) = 0$ can be achieved for an arbitrarily small control input. Indeed, by choosing sufficiently small $\gamma > 0$, one can obtain that the inequality $|u| = \gamma|\psi(x,u,t)| < \varepsilon$ holds true for an arbitrarily small prespecified $\varepsilon > 0$.

The following lemma allows one to slightly improve Theorem 5.1.3.

Lemma 5.1.1. *Let assumptions 1–3 of Theorem 5.1.3 hold true and let* $g(x,t)^T\psi(x,u,t) \le 0$ *for all* $u \in \mathbb{R}^m$ *and for any* $x \in \mathbb{R}^n$ *and* $t \in \mathbb{R}_+$ *such that* $Q(x,t) > 0$. *Suppose also that* $x(t)$ *is a solution of the system* (5.1), (5.20) *with* $x(0) \in \mathbb{R}^n \setminus C$ *such that* $Q(x(T),T) = 0$ *for some* $T \ge 0$. *Then* $Q(x(t),t) = 0$ *for all* $t \ge T$.

Proof. Arguing by reductio ad absurdum, suppose that $Q(x(t_0),t_0) > 0$ for some $t_0 > T$. Denote $\tau = \sup\{t \in [T,t_0] \colon Q(x(t),t) = 0\}$. Then $T \le \tau < t_0$, $Q(x(\tau),\tau) = 0$ and for any $t \in (\tau,t_0]$ one has $Q(x(t),t) > 0$. Hence for a.e. $t \in (\tau,t_0]$ one has

$$D_+V_0(t) = Q'(x(t),t;F(x(t),u,t),1) \le \omega(x(t),u,t) := \gamma g(x,t)^T\psi(x,u,t) \le 0,$$

where $V_0(t) = Q(x(t),t)$. Consequently, the function V_0 is nonincreasing on $[\tau,t_0]$. Therefore $Q(x(t_0),t_0) \le Q(x(\tau),\tau) = 0$, which contradicts the definition of t_0. □

Remark 5.1.6. From the lemma above it follows that Theorem 5.1.3 holds true in the case when the inequality

$$Q'(x,t;F(x,u,t),1) \le \omega(x,u,t) \quad \forall u \in \mathbb{R}^m$$

(see (5.2)) is satisfied only for all $x \in \mathbb{R}^n$ and $t \in \mathbb{R}_+$ such that $Q(x,t) > 0$. Indeed, if $Q(x(t),t) > 0$ for all $t \in \mathbb{R}_+$, then arguing in the same way as in the proof of Theorem 5.1.3 one obtains that $Q(x(t),t) \to 0$ as $t \to \infty$. On the other hand, if $Q(x(T),T) = 0$ for some $T \ge 0$, then arguing in the same way as in the proof of the previous lemma one gets that $Q(x(t),t) = 0$ for all $t \ge T$, which implies the desired result.

5.1.2 Stabilization of the Brockett Integrator

Let us apply nonsmooth speed gradient algorithms to the problem of finding an arbitrarily small stabilizing feedback control for the Brockett integrator

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad \dot{x}_3 = x_1u_2 - x_2u_1. \tag{5.22}$$

Since there is no continuous feedback control that stabilizes this system [47], the standard speed-gradient algorithms cannot be applied in this case. That is why we utilise the nonsmooth version of speed-gradient algorithm in finite form discussed in the previous section.

We impose the additional constraint on control $u_1^2 + u_2^2 \le \varepsilon$, where $\varepsilon > 0$ is arbitrary. Being inspired with the ideas of Clarke [59], introduce the goal function $Q(x)$ as follows

$$Q(x) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - |x_3|\right)^2 + x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2|x_3|\sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Note that the function Q is radially unbounded and $Q(x) = 0$ if and only if $x = 0$. Moreover, it was shown in [59] that Q is a control Lyapunov function for the Brockett integrator.

Let us utilise algorithm (5.20). For the sake of convenience, denote $\sigma(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. The function Q is locally Lipschitz continuous and Hadamard directionally differentiable. Its directional derivative has the form

$$Q'(x; h) = 2x_1h_1 + 2x_2h_2 + 4x_3h_3 - 2|x_3|\frac{(x_1h_1 + x_2h_2)}{\sigma(x)} - 2\operatorname{sign}(x_3)\sigma(x)h_3$$

in the case $x_3 \neq 0$ and $\sigma(x) \neq 0$, and

$$Q'(x, h) = \begin{cases} 2x_2h_1 + 2x_2h_2 - 2|h_3|\sigma(x), & \text{if } x_3 = 0, \\ 4x_3h_3 - 2|x_3|\sqrt{h_1^2 + h_2^2}, & \text{if } \sigma(x) = 0. \end{cases}$$

Let $x_3 \neq 0$ and $\sigma(x) \neq 0$. Then the function $Q'(x; \cdot)$ is linear, i.e. Q is differentiable. Therefore in this case define

$$\begin{aligned} \omega(x, u) = Q'(x)^T F(x, u) = 2x_1u_1 + 2x_2u_2 + 4x_3(x_1u_2 - x_2u_1) \\ - 2|x_3|(x_1u_1 + x_2u_2)/\sigma(x) - 2\operatorname{sign}(x_3)\sigma(x)(x_1u_2 - x_2u_1), \end{aligned}$$

where $F(x, u)$ is the right-hand side of (5.22).

Let now $x_3 = 0$. Then Q is Hadamard superdifferentiable, and its superdifferential has the form

$$\overline{\partial} Q(x) = \operatorname{co}\{(2x_1, 2x_2, 2\sigma(x))^T, (2x_1, 2x_2, -2\sigma(x))^T\},$$

where “co” stands for the convex hull. Note that $(2x_1, 2x_2, 0) \in \overline{\partial} Q(x)$, and define

$$\omega(x, u) = (2x_1, 2x_2, 0)^T F(x, u) = 2x_1u_1 + 2x_2u_2 \geq Q'(x; F(x, u)). \tag{5.23}$$

Finally, let $\sigma(x) = 0$. Then Q is also Hadamard superdifferentiable and

$$\overline{\partial} Q(x) = \big\{(-2|x_3|v_1, -2|x_3|v_2, 4x_3)^T \colon |(v_1, v_2)| \leq 1\big\}.$$

Therefore, choose $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ such that $|v| = 1$, and define

$$\omega(x, u) = (-2|x_3|v_1, -2|x_3|v_2, 4x_3)^T F(x, u) = -2|x_3|(v_1u_1 + v_2u_2) \geq Q'(x; F(x, u)) \tag{5.24}$$

(recall that $\sigma(x) = 0$, i.e. $x_1 = x_2 = 0$). Note that the choice of v can depend on x_3, i.e. one can choose $v = v(x_3)$.

Define the control law as follows:

$$u(x) = \gamma\psi(x), \quad \psi(x) = -|\nabla_u \omega(x, u)|^{-1} \nabla_u \omega(x, u). \tag{5.25}$$

Then

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = 0, \\ -\gamma\sigma(x)^{-1}(x_1, x_2)^T, & \text{if } x_3 = 0, \sigma(x) \neq 0 \\ \gamma v(x_3), & \text{if } \sigma(x) = 0, x_3 \neq 0. \\ -\gamma|\nabla_u\omega(x,u)|^{-1}\nabla_u\omega(x,u), & \text{if } \sigma(x) \neq 0, x_3 \neq 0, \end{cases} \tag{5.26}$$

where $\nabla_u\omega(x,u) = (\partial\omega/\partial u_1, \partial\omega/\partial u_2)$ and

$$\frac{\partial\omega}{\partial u_1}(x,u) = 2x_1 - 4x_2x_3 - 2\frac{|x_3|x_1}{\sigma(x)} + 2\,\mathrm{sign}(x_3)x_2\sigma(x) \tag{5.27}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial u_2}(x,u) = 2x_2 + 4x_1x_3 - 2\frac{|x_3|x_2}{\sigma(x)} - 2\,\mathrm{sign}(x_3)x_1\sigma(x). \tag{5.28}$$

in the case $\sigma(x) \neq 0$ and $x_3 \neq 0$.

Let us show that $|\nabla_u\omega(x,u)| \neq 0$ for any x such that $\sigma(x) \neq 0$ and $x_3 \neq 0$. Indeed, multiplying by $\sigma(x)$ in (5.27) one gets that for any x such that $x_1 \neq 0$ and $x_3 \neq 0$ the following holds true

$$\sigma(x)\frac{\partial\omega}{\partial u_1}(x,u) = 2\,\mathrm{sign}(x_3)x_2\sigma^2(x) + (2x_1 - 4x_2x_3)\sigma(x) - 2|x_3|x_1 \neq 0,$$

since the discriminant of the quadratic equation

$$l(s) = 2\,\mathrm{sign}(x_3)x_2s^2 + (2x_1 - 4x_2x_3)s - 2|x_3|x_1 = 0$$

has the form $D = 4x_1^2 + 16x_2^2x_3^2 > 0$. Analogously, $\partial\omega/\partial u_2 \neq 0$ for all x such that $x_2 \neq 0$ and $x_3 \neq 0$. Thus, $|\nabla_u\omega(x,u)| \neq 0$ for any $x \in \mathbb{R}^3$ such that $x_3 \neq 0$ and $\sigma(x) \neq 0$. Hence the control law (5.26) is correctly defined.

Remark 5.1.7. Note that the state feedback (5.26) is not upper semicontinuous as a set-valued mapping. Hence it does not fall into the class of discontinuous state feedbacks analysed in [360] that do not stabilize Brockett integrator.

It is easily seen that control law (5.26) satisfies the following inequality:

$$Q'(x; F(x,u(x))) \leq \omega(x,u(x)) = -\gamma|\nabla_u\omega(x,u(x))| \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3. \tag{5.29}$$

Therefore the zero solution of the closed-loop system (5.22), (5.26) is stable. Thus, it remains to prove that $|x(t)| \to 0$ as $t \to +\infty$ or, equivalently, $Q(x(t)) \to 0$ as $t \to +\infty$. Our aim is to prove this results with the use of Theorem 5.1.3. Namely, let us check that the assumptions of this theorem are satisfied with $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \sigma(x) = 0, x_3 \neq 0\}$, i.e. the for any initial values not lying on the x_3-axis one has $|x(t)| \to 0$. Then one can conclude that control law (5.26) solves the control problem under consideration for a.e. initial data. Moreover, observe that for $\gamma = \sqrt{\varepsilon}$ one has $|u(x)|^2 = \gamma^2 = \varepsilon$ for all $x \in \mathbb{R}^3$ (see (5.26)), that is, the proposed control law satisfies the constraint $u_1(x)^2 + u_2(x)^2 \leq \varepsilon$.

Let us check that all assumptions of Theorem 5.1.3 are satisfied. Indeed, assumptions 1 and 3 of this theorem obviously hold true. Furthermore, since $\psi(x) = -|\nabla_u \omega(x,u)|^{-1} \nabla_u \omega(x,u)$, assumption 5 of the theorem is satisfied with $\rho(s) \equiv s$.

Proposition 5.1.1. *Assumption 4 of Theorem 5.1.3 is satisfied in the example under consideration.*

Proof. Introduce a set-valued mapping $G \colon \mathbb{R}^3 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$. Define $G(x) = \nabla_u \omega(x,u)$ if $\sigma(x) \neq 0$ and $x_3 \neq 0$,

$$G(x) = \Big\{ (2x_1, 2x_2)^T, (2x_1 + 2x_2\sigma(x), 2x_2 - 2x_1\sigma(x))^T, (2x_1 - 2x_2\sigma(x), 2x_2 + 2x_1\sigma(x))^T \Big\}$$

if $x_3 = 0$, and $G(x) = \{-2|x_3|w \colon |w| = 1\}$, if $\sigma(x) = 0$. By definition (see (5.23) and (5.24)), one has $\nabla_u \omega(x,u) \in G(x)$ for any x. Furthermore, it is easy check that $0 \in G(x)$ if and only if $x = 0$.

As it was mentioned above, in the case $\sigma(x) \neq 0$ and $x_3 \neq 0$, the set of limit points of $\nabla_u \omega(x,u)$ (see (5.27) and (5.28)) as $\sigma(x) \to 0$ is the circle of radius $2|x_3|$ centred at the origin. Note also that in the same case the set of limit points of $\nabla_u \omega(x,u)$ as $x_3 \to 0$ consists of two points:

$$(2x_1 + 2x_2\sigma(x), 2x_2 - 2x_1\sigma(x))^T, \quad (2x_1 - 2x_2\sigma(x), 2x_2 + 2x_1\sigma(x))^T.$$

Thus, in the case when $\sigma(x) = 0$ or $x_3 = 0$ the set $G(x)$ consists of $\nabla_u \omega(x,u)$ and all limit points of $\nabla_u \omega(y,u)$ as $y \to x$. Therefore it is easy to verify that the set-valued mapping G is upper semicontinuous, i.e. for any x and any open set V such that $G(x) \subset V$ there exists $\delta > 0$ such that for any y with $|y - x| < \delta$ one has $G(y) \subset V$.

Arguing by reductio ad absurdum, suppose that assumption 4 does not hold true. Then there exists $\Delta > 0$, $r > 0$, and a sequence $\{x^{(n)}\}$ such that

$$Q(x^{(n)}) \geq \Delta, \quad |x^{(n)}| \leq r, \quad |\nabla_u \omega(x^{(n)}, u)| \leq \frac{1}{n}.$$

Consequently, there exists a subsequence, which we denote again by $\{x^{(n)}\}$, converging to some x_*. Observe that $Q(x_*) \geq \Delta$ and $x_* \neq 0$ due to the facts that the function Q is continuous and $Q(x) = 0$ if and only if $x = 0$, which implies $0 \notin G(x_*)$. Hence applying the upper semicontinuity of the set-valued mapping G one gets that there exists $a > 0$ and $\delta > 0$ such that $\inf_{y \in G(x)} |y| > a$ for all $x \in B(x_*, \delta)$. Therefore for all sufficiently large n one has $\inf_{y \in G(x^{(n)})} |y| > a$, which contradicts the fact that $|\nabla_u \omega(x^{(n)}, u)| \to 0$ as $n \to \infty$, since $\nabla_u \omega(x^{(n)}, u) \in G(x^{(n)})$ for all n. $\square$

It remains to check that assumption 2 of Theorem 5.1.3 holds true, i.e. to verify that the closed-loop system (5.22), (5.26) has a solution for any initial data $x(0) \in \mathbb{R}^n \setminus C$ and $x(t) \notin C$ for all $t \in \mathbb{R}_+$. Below we prove a stronger assertion, which implies, in particular, that for any $x(0) \notin C$ control law (5.26) is continuous along trajectories of the closed-loop system for all $t \geq 0$ such that $x(t) \neq 0$.

Proposition 5.1.2. *Suppose that $\sigma(x(0)) \neq 0$. Then a solution $x(t)$ of the closed-loop system (5.22), (5.26) is defined on $\mathbb{R}_+$ and $x(t) \notin C$ for all $t \geq 0$. Furthermore, either the function $u(x(\cdot))$ is continuous on $\mathbb{R}_+$ and $x(t) \to 0$ as $t \to +\infty$ or there exists $t_0 < +\infty$ such that $x(t) \to 0$ as $t \to t_0$ and the function $u(x(\cdot))$ is continuous on $\mathbb{R}_+ \setminus \{t_0\}$.*

Proof. Let $x_3(0) = 0$. Then the closed-loop system takes the form

$$\dot{x}_1 = -\gamma x_1/\sigma(x), \quad \dot{x}_2 = -\gamma x_2/\sigma(x), \quad \dot{x}_3 = 0.$$

Hence, obviously, a solution of this system exists on $\mathbb{R}_+$, $x_3(t) = 0$ for any $t \in \mathbb{R}_+$, $x(t) \to 0$ as $t \to \sigma(x(0))/\gamma$, and the function $u(x(\cdot))$ is continuous on $\mathbb{R}_+ \setminus \{\sigma(x(0))/\gamma\}$.

Suppose now that $x_3(0) \neq 0$. Then the closed-loop system takes the form

$$\dot{x}_1 = -\gamma \frac{1}{|\nabla_u \omega(x,u)|} \frac{\partial \omega}{\partial u_1}(x,u), \quad \dot{x}_2 = -\gamma \frac{1}{|\nabla_u \omega(x,u)|} \frac{\partial \omega}{\partial u_2}(x,u), \tag{5.30}$$

$$\dot{x}_3 = -\gamma \frac{1}{|\nabla_u \omega(x,u)|} \left(x_1 \frac{\partial \omega}{\partial u_2}(x,u) - x_2 \frac{\partial \omega}{\partial u_1}(x,u) \right), \tag{5.31}$$

where $\nabla_u \omega(x,u)$ has the form (5.27), (5.28). Clearly, a continuously differentiable solution $x(t)$ of the system (5.30), (5.31) exists at least on some finite time interval. Denote by $[0, t_0)$ the maximal interval of existence of this solution. Note that $x(t)$ is bounded on $[0, t_0)$ by virtue of the facts that Q is radially unbounded, and by the definition of the control law (5.25) one has

$$\frac{d}{dt} Q(x(t), t) \leq -\gamma |\nabla_u \omega(x,u)| < 0 \quad \forall t \in [0, t_0).$$

Therefore, either $t_0 = +\infty$ and, thus, $x(t)$ is a continuously differentiable solution of the closed-loop system that is defined and bounded on $\mathbb{R}_+$, and the control does not switch or at least one of the functions $x_3(t)$ and $\sigma(x(t))$ tends to zero as $t \to t_0$.

Let us show that $x_3(t) \to 0$ as $t \to t_0$ if and only if $\sigma(x(t)) \to 0$ as $t \to t_0$. In other words, $t_0 < +\infty$ if and only if the trajectory $x(t)$ reaches the origin at $t = t_0$. In this case then function $\widehat{x}(t) = x(t)$ for $t \in [0, t_0)$ and $\widehat{x}(t) = 0$ for $[t_0, +\infty)$ is an absolution continuous solution of the closed-loop system, and the function $u(x(t))$ is continuous on $\mathbb{R}_+ \setminus \{t_0\}$.

Let $x_3(0) > 0$ and suppose that $x_3(t) \to 0$ as $t \to t_0$. The cases when $x_3(0) < 0$ or $\sigma(x(t)) \to 0$ as $t \to t_0$ can be considered in the same way.

It is clear that $x_3(t) > 0$ for all $t \in [0, t_0)$. Choose $\varepsilon > 0$. Then there exists $\delta > 0$ such that $0 < x_3(t) < \varepsilon/2$ for any $t \in [t_0 - \delta, t_0)$. Observe that for the closed-loop system one has

$$\dot{x}_3 = -\frac{2\gamma\sigma^2(x)}{|\nabla_u \omega(x,u)|}(2x_3 - \sigma(x)), \quad \frac{d}{dt}\sigma(x) = -\frac{2\gamma}{|\nabla_u \omega(x,u)|}(\sigma(x) - x_3). \tag{5.32}$$

Therefore there exists $s \in [t_0 - \delta, t_0)$ such that $\sigma(s) < \varepsilon$, because otherwise from (5.32) it follows that $\dot{x}_3(t) > 0$ on $[t_0 - \delta, t_0)$ or, equivalently, the function x_3 is strictly increasing on $[t_0 - \delta, t_0)$, which contradicts the fact that $x_3(t) \to 0$ as $t \to t_0$.

Let us check that $\sigma(x(t)) < \varepsilon$ for any $t \in [s, t_0)$. Arguing by reductio ad absurdum, suppose that there exists $\bar{t} \in (s, t_0)$ such that $\sigma(x(\bar{t})) \geq \varepsilon$. Denote

$$\tau = \inf \big\{ t \in (s, t_0) \colon \sigma(x(t)) = \varepsilon \big\}.$$

Clearly, $\tau > s$, $\sigma(x(\tau)) = \varepsilon$ and for any $t \in [s, \tau)$ one has $\sigma(x(t)) < \varepsilon$. Hence due to the continuity of $\sigma(x(t))$ there exists $\xi \in [s, \tau)$ such that $\varepsilon/2 < \sigma(x(t)) < \varepsilon$ for all $t \in (\xi, \tau)$. Therefore with the use of (5.32) one gets that $\dot{\sigma}(x(t)) < 0$ on (ξ, τ), which implies that $\sigma(x(t))$ is strictly decreasing on (ξ, τ) and, thus, $\sigma(x(\tau)) < \varepsilon$, which contradicts the definition of τ. Hence $\sigma(x(t)) < \varepsilon$ for any $t \in [s, t_0)$, which implies that $\sigma(x(t)) \to 0$ as $t \to t_0$, since $\varepsilon > 0$ is arbitrary. $\square$

Thus, all assumptions of Theorem 5.1.3 are satisfied and one can conclude that control law (5.26) solves the stabilization problem for the Brockett integrator under the assumption that the initial point $x(0)$ does not lie on the x_3-axis. Moreover, the control law $u(\cdot)$ defined in (5.26) is *continuous* along solutions of the closed-loop system, except perhaps a time instant $t_0 \in \mathbb{R}_+$ at which the trajectory reaches the origin. Note that this result does not contradict the Brockett theorem, since the feedback $x \mapsto u(x)$ is discontinuous; only the composition $t \mapsto u(x(t))$ is continuous.

Remark 5.1.8. In the case when $x(0)$ lies on the x_3-axis, according to (5.26) one defines $u(x(0)) = \gamma v$ for any vector $v \in \mathbb{R}^2$ with $|v| = 1$. The equation of the closed-loop system at this point takes the form

$$\dot{x}_1 = \gamma v_1, \quad \dot{x}_2 = \gamma v_2, \quad \dot{x}_3 = 0.$$

Roughly speaking, the control "pushes the trajectory off" the x_3-axis and then switches. However, the existence of an absolutely continuous solution in this case requires a nontrivial justification. Instead, one can redefined control law (5.26) as $u(x) = \{\gamma v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| = 1\}$ in the case $\sigma(x) = 0$, $x_3 \neq 0$ (the control becomes multivalued). Then applying standard existence theorems for differential inclusions (see, e.g. [17, 176]) one can verify that for all $x(0) \in \mathbb{R}^3$ an absolutely continuous solution of the closed-loop system is defined and bounded on $\mathbb{R}_+$ and $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

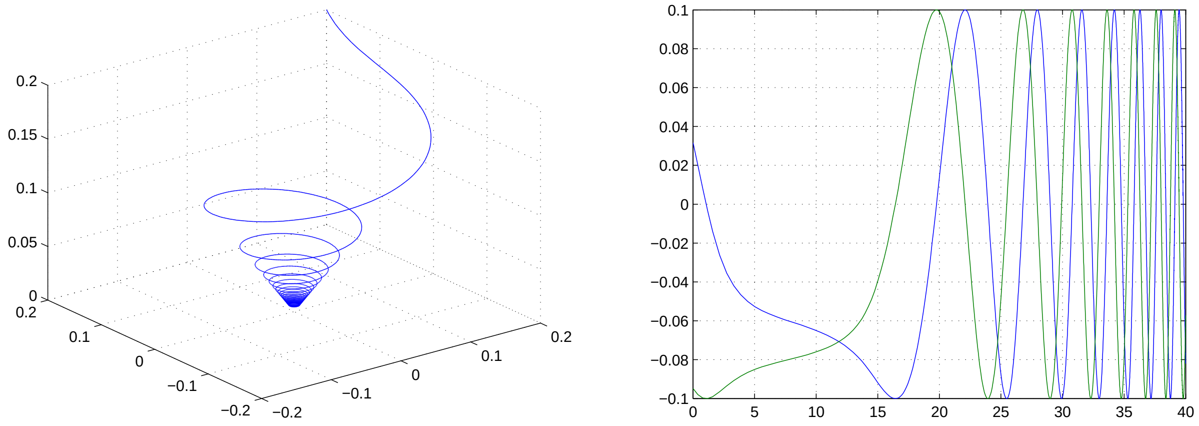


Figure 5.1: A trajectory of the closed-loop system (5.22), (5.26) (left plot) and plots of $u_1(x(t))$ and $u_2(x(t))$ (right plot).

Simulation of the closed-loop system with the following parameters was performed: $\gamma = 0.1$ and $x(0) = (0.2, 0.2, 0.2)$. Simulation results demonstrate convergence of the trajectory to the origin and the boundedness of the control variables by parameter γ (see Fig. 5.1).

5.1.3 Finite-Differential Nonsmooth Speed-Gradient Algorithms

In this section we study a version of nonsmooth speed-gradient algorithms that can be viewed as a combination of these algorithms in finite and differential form. In the smooth case this algorithm was first proposed by prof. A.L. Fradkov [182] (see also [13]).

Consider, as in the previous sections, a nonlinear controlled system of the form:

$$\dot{x} = F(x, u, t), \quad t \geq 0, \tag{5.33}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the system state and $u \in \mathbb{R}^m$ is the input. Suppose, as earlier, that a nonnegative *goal function* $Q\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $Q = Q(x,t)$ is given, where $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. We pose the control problem to find a control law $u(\cdot)$ that ensures the control objective $\lim\limits_{t\to\infty} Q(x(t), t)) = 0$.

Suppose that the function Q is Hadamard directionally differentiable and locally Lipschitz continuous. Let also a convex in u function $\omega\colon\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\omega = \omega(x, u, t)$, such that

$$Q'\big(x, t; F(x, u, t), 1\big) \leq \omega(x, u, t) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \geq 0.$$

be given. Following the definition of finite-differential speed-gradient algorithm in the smooth case [13, 182] we define

$$\frac{d(u + \gamma\psi(x, u, t))}{dt} \in -\Gamma \partial_u \omega(x, u, t), \quad t \geq 0, \tag{5.34}$$

where $\psi(x,u,t)$ is a locally Lipschitz continuous function satisfying the acute angle condition: for any $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, and $t \geq 0$ one has

$$\eta^T \psi(x,u,t) \geq 0 \quad \forall \eta \in \partial_u \omega(x,u,t). \tag{5.35}$$

The control law (5.34) is a combination of nonsmooth speed-gradient algorithms in finite and differential forms. That is why we call it *the finite-differential nonsmooth speed-gradient algorithm*.

Let us study the performance of system (5.33) with control law (5.34). At first, we discuss the existence of an absolutely continuous solution of this system, i.e. the existence of locally absolutely continuous functions $x(t)$ and $u(t)$ that are defined on $\mathbb{R}_+$ and satisfy (5.33) and (5.34) for a.e. $t \geq 0$. The existence of such solutions can be proved under various assumptions on the multifunctions $F(x,u,t)$ and $\partial_u \omega(x,u,t)$, and the function $\psi(x,u,t)$. Here we present only the simplest result of this type that can be applied in the case when the right-hand side of system (5.33) is single-valued and affine in control, and the function $Q(x,t)$ is smooth.

Theorem 5.1.4. *Let the function $\psi(x,u,t)$ do not depend on u and let*

$$F(x,u,t) = f(x,t) + g(x,t)u, \quad \omega(x,u,t) = \eta(x,t)^T u + \theta(x,t)$$

for some functions $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, $g\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $\eta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$, and $\theta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Suppose also that the following assumptions are valid:

1. *the functions $t \mapsto f(x,t)$, $t \mapsto g(x,t)$, and $t \mapsto \eta(x,t)$ are measurable for any $x \in \mathbb{R}^n$;*

2. *for any $r > 0$ one can find an a.e. nonnegative function $m_r \in L^1_{loc}[0,+\infty)$ such that $|f(x,t)| \leq m_r(t)$, $|g(x,t)| \leq m_r(t)$, and $|\eta(x,t)| \leq m_r(t)$ for a.e. $t \in \mathbb{R}_+$ and all $x \in B(0,r)$;*

3. *for any $r > 0$ there exists an a.e. nonnegative function $L_r \in L^1_{loc}[0,+\infty)$ such that for a.e. $t \in \mathbb{R}_+$ and for all $x_1, x_2 \in B(0,r)$ one has*

$$|f(x_1,t) - f(x_2,t)| \leq L_r(t)|x_1 - x_2|, \quad |g(x_1,t) - g(x_2,t)| \leq L_r(t)|x_1 - x_2|,$$
$$|\eta(x_1,t) - \eta(x_2,t)| \leq L_r(t)|x_1 - x_2|;$$

4. *the function $\psi(x,t)$ is locally Lipschitz continuous.*

Then for any initial conditions $(x(0),u(0))$ there exists a unique locally absolutely continuous solution $(x(t),u(t))$ of system (5.33), (5.34) that is defined on its maximal interval of existence $[0,T_{\max})$, and $T_{\max} = +\infty$, if the solution is bounded.

Proof. Formally integrating (5.34) from 0 to t one obtains

$$u(t) = u(0) + \gamma\psi(x(0), 0) - \gamma\psi(x(t), t) - \Gamma \int_0^t \eta(x(\tau), \tau)\, d\tau. \tag{5.36}$$

Hence the state equation for the closed-loop system has the form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + g(x(t), t)\Big(u(0) + \gamma\psi(x(0), 0) - \gamma\psi(x(t), t) - \Gamma \int_0^t \eta(x(\tau), \tau)\, d\tau\Big). \tag{5.37}$$

If we prove that for any initial condition $x(0)$ there exists a unique locally absolutely continuous solution $x(t)$ of (5.37) that is defined on its maximal interval of existence $[0, T_{\max})$, and $T_{\max} = +\infty$ in the case when $x(t)$ is bounded, then defining $u(t)$ as in (5.36), and taking into account the fact that $\psi(x, t)$ is locally Lipschitz continuous one obtains the required result.

Equation (5.37) is an integrodifferential equation of the form

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t), t) + g_0(x(t), t) \int_0^t \eta(x(\tau), \tau) d\tau \tag{5.38}$$

with functions f_0 and g_0 satisfying the same assumptions as the functions f and g, respectively. Introduce a new variable y, and consider the following system of ordinary differential equations:

$$\dot{x} = f_0(x, t) + g_0(x, t)y, \quad \dot{y} = \eta(x, t) \tag{5.39}$$

Clearly, $(x(t), y(t))$ with $y(0) = 0$ is a solution of this system if and only if $x(t)$ is a solution of (5.38), and $y(t) = \int_0^t \eta(x(\tau), \tau)d\tau$. Now, applying the standard existence theorem to (5.39) one obtains the required result. □

The following theorem contains sufficient conditions for the achievement of the control goal with the use of control law (5.34).

Theorem 5.1.5. *Let the following assumption be valid:*

1. *for any initial conditions $(x(0), u(0))$ a locally absolutely continuous solution $(x(t), u(t))$ of system (5.33), (5.34) exists at least on some finite time interval; furthermore, all locally absolutely continuous solutions of this system starting at $(x(0), u(0))$ are defined on their maximal interval of existence $[0, T_{\max})$, and $T_{\max} = +\infty$, if the corresponding solution is bounded;*

2. *for any $r > 0$ there exists $m_r > 0$ such that $|F(x, u, t)| \leq m_r$ holds true for all $|x| \leq r$, $|u| \leq r$, and for a.e. $t \geq 0$;*

3. *the function $\psi(x, u, t)$ is locally Lipschitz continuous, bounded on any set of the form $\{(x, u, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \mid |x| \leq r\}$, and satisfies the acute angle condition (5.35);*

4. *the function $Q(x,t)$ is nonnegative, locally Lipschitz continuous, directionally differentiable, radially unbounded, and uniformly continuous on any set of the form $\{(x,t)\colon |x| \le r, t \ge 0\}$;*
5. *there exist $u_* \in \mathbb{R}^m$ and a continuous scalar function $\rho\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ such that $\rho(s) = 0$ if and only if $s = 0$, and the inequality $\omega(x, u_*, t) \le -\rho\big(Q(x,t)\big)$ holds for any $t \ge 0$ and $x \in \mathbb{R}^n$.*

Then for any initial conditions $(x(0), u(0))$, and for all $\gamma > 0$ and positive definite matrix Γ all solutions of system (5.33), (5.34) are defined and bounded on $\mathbb{R}_+$, and the control goal $\lim_{t\to+\infty} Q(x(t),t) = 0$ is achieved.

Proof. Let $(x(t), u(t))$ be a solution of (5.33), (5.34) starting at $(x(0), u(0))$ and defined on the maximal interval of existence $[0, T_{\max})$. Introduce the function

$$V(t) = Q(x(t),t) + \frac{1}{2}\big(u(t) - u_* + \gamma\psi(x(t),u(t),t)\big)^T \Gamma^{-1} \big(u(t) - u_* + \gamma\psi(x(t),u(t),t)\big). \quad (5.40)$$

Note that the function $V(t)$ is nonnegative, since $Q(x,t)$ is nonnegative and Γ is positive definite.

By the chain rule for directional derivatives [111, Theorem I.3.3] and the definition of $\omega(x,u,t)$ for a.e. $t \in [0, T_{\max})$ there exists the right-hand side derivative $D_+V(t)$, and

$$D_+V(t) \le \omega(x(t),u(t),t) + \big(u(t) - u_* + \gamma\psi(x(t),u(t),t)\big)^T \Gamma^{-1} \frac{d}{dt}\big(u(t) + \gamma\psi(x(t),u(t),t)\big).$$

Denote $w(t) = d(u(t) + \gamma\psi(x(t),u(t),t))/dt$. Then by (5.34) for a.e. $t \in [0, T_{\max})$ there exists $\eta(t) \in \partial_u \omega(x(t),u(t),t)$ such that $w(t) = -\Gamma\eta(t)$. Therefore taking into account the acute angle condition (5.35) one obtains that $D_+V(t) \le \omega(x(t),u(t),t) - \big(u(t) - u_*\big)^T \eta(t)$. Hence with the use of the definition of subdifferential (recall that for a.e. t one has $\eta(t) \in \partial_u \omega(x(t),u(t),t)$) and assumption 5 one gets that

$$D_+V(t) \le \omega(x(t),u_*,t) \le -\rho\big(Q(x(t),t)\big) \quad \text{for a.e. } t \in [0, T_{\max}). \quad (5.41)$$

Observe that from the facts that both Q and ψ are locally Lipschitz continuous, and the functions $x(t)$ and $u(t)$ are locally absolutely continuous it follows that the function $V(t)$ is locally absolutely continuous. Hence and from (5.41) one obtains that the function $V(t)$ is non-increasing and

$$V(t) - V(0) \le -\int_0^t \rho\big(Q(x(t),t)\big)\, dt \le 0 \quad \forall t \in [0, T_{\max}), \quad (5.42)$$

which implies that $V(t)$ is bounded, since, as was noted above, $V(t)$ is nonnegative. Consequently, applying the radial unboundedness of $Q(x,t)$ one obtains that $x(t)$ is bounded (see (5.40)), which by assumption 3 implies that the function $\psi(x(t),u(t),t)$ is bounded. Then, in view of (5.40), from the boundedness of $Q(x(t),t)$ and $V(t)$, and the positive definitness of Γ one gets that $u(t)$ is bounded. Thus, the solution $(x(t), u(t))$ is bounded on $[0, T_{\max})$. Consequently, by assumption 1 the solution $(x(t), u(t))$ is defined and bounded on $\mathbb{R}_+$.

Let us prove that the control goal is achieved. Thanks to the nonnegativity of $V(t)$ inequality (5.42) implies that $\int_0^{+\infty} \rho(Q(x(t),t))\,dt < +\infty$. From assumption 2 and the boundedness of $(x(t),u(t))$ it follows that $\dot{x} \in L^\infty[0,+\infty)$ (i.e. $\dot{x}(t)$ is essentially bounded on $\mathbb{R}_+$), which implies that $x(t)$ is uniformly continuous on $\mathbb{R}_+$. Hence taking into account the fact that ρ is continuous and $Q(x,t)$ is uniformly continuous on any set of the form $\{(x,t)\colon |x| \le r, t \ge 0\}$ one obtains that the function $t \mapsto \rho(Q(x(t),t))$ is uniformly continuous on $\mathbb{R}_+$. Consequently, by Barbalat's lemma (see, e.g. [261, Lemma 8.2]) one gets that $\rho(Q(x(t),t)) \to 0$ as $t \to +\infty$. Now, by applying the facts that ρ is continuous, $\rho(s) = 0$ if and only if $s = 0$, and $Q(x(t),t)$ is bounded one can easily check that $Q(x(t),t) \to 0$ as $t \to +\infty$, which completes the proof. □

Remark 5.1.9. Clearly, assumption 5 is the most restrictive assumption of the theorem above. Observe that it can be somewhat weakened as follows. Suppose that there exist $u_* \in \mathbb{R}^m$ and a continuous function $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ such that $\omega(x,u_*,t) \le -\rho(x)$ for all $x \in \mathbb{R}^n$ and $t \ge 0$. Then arguing in the same way as in the proof of the theorem above one can verify that for any initial conditions $(x(0),u(0))$, and for all $\gamma > 0$ and positive definite Γ all solutions of system (5.33), (5.34) are defined and bounded on $\mathbb{R}_+$, and $\rho(x(t)) \to 0$ as $t \to +\infty$. Utilizing some standard results for differential equations/inclusions (such as the Barbashin-Krasovskii-LaSalle invariance principle) and peculiarities of a particular problem under consideration, sometimes one can prove that the convergence of $\rho(x(t))$ to zero implies that $Q(x(t),t)$ converges to zero as well.

Remark 5.1.10. Under some additional assumptions one can extend the theorem above to the case when the function $\psi(x,u,t)$ is set-valued. For example, suppose that Q is continuously differentiable, $\psi(x,u,t)$ is *set-valued* and does not depend on u, and the mapping $F(x,u,t)$ is single-valued and affine in control, i.e. it has the form $F(x,u,t) = f(x,t) + g(x,t)u$. Note that in this case $\nabla_u \omega(x,u,t) = g(x,t)^T \nabla_x Q(x,t)$. Formally integrating (5.34) one can define the finite-differential nonsmooth Speed-Gradient algorithm as follows:

$$u(t) \in u(0) - \gamma\psi(x(t),t) - \Gamma \int_0^t g(x(\tau),\tau)^T \nabla_x Q(x(\tau),\tau)\,d\tau. \tag{5.43}$$

Arguing in a similar way to the proof of Theorem 5.1.4 one can easily prove an existence theorem for system (5.33), (5.43). Furthermore, Theorem 5.1.5 can also be extended to this case. Namely, define the Lyapunov function

$$\begin{aligned} V(t) = Q(x(t),t) + \frac{1}{2}\Big(u(0) - u_* - \Gamma \int_0^t g(x(\tau),\tau)^T \nabla_x Q(x(\tau),\tau)\,d\tau\Big)^T \\ \times \Gamma^{-1}\Big(u(0) - u_* - \Gamma \int_0^t g(x(\tau),\tau)^T \nabla_x Q(x(\tau),\tau)\,d\tau\Big). \end{aligned}$$

Applying the chain rule for directional derivatives and taking into account (5.43) one obtains that there exists a selection $\eta(t)$ of the multifunction $\psi(x(t),t)$ such that

$$D_+V(t) \le \omega(x(t),u(t),t) - \big(u(t) - u_* + \gamma\eta(t)\big)^T \nabla_u \omega(x(t),u(t),t).$$

Then arguing in the same way as in the proof of Theorem 5.1.5, and applying the acute angle condition ($\eta^T \nabla_u \omega(x,u,t) \ge 0$ for all $\eta \in \psi(x,t)$) one can verify that $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(x(t),t) = 0$.

5.1.4 Synchronization of Two Duffing Oscillators

Let us apply the finite-differential Speed-Gradient algorithm to the problem of the leader-follower synchronization of two forced Duffing's systems (cf. [184]). Recall that the Duffing equation is given by

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = q\cos(\omega_0 t).$$

As is well known, the Duffing equation exhibits several types of dynamic behaviour depending on values of the parameters. In particular, if $\delta = 0.4$, $\alpha = -1.1$, $\beta = 1$, and $\omega_0 = 1.8$, then for $q = 1.8$ the behaviour of this system is chaotic, while for $q = 0.62$ the behaviour is periodic (see [53]). Our aim is to steer a chaotic trajectory of the Duffing equation to a periodic trajectory of a reference model. We shall formulate and solve this problem as the leader-follower synchronization problem [411].

Consider the controlled system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 - \beta x_1^3 - \delta x_2 + q\cos(\omega_0 t) + u, \end{cases} \qquad x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \tag{5.44}$$

where u is the input and the parameter q is unknown. Introduce the reference model that differs from (5.44) only by the value of the parameter q:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1m} = x_{2m} \\ \dot{x}_{2m} = -\alpha x_{1m} - \beta x_{1m}^3 - \delta x_{2m} + q_m\cos(\omega_0 t), \end{cases} \qquad x_{1m}(0) = x_{1m}^0, \quad x_{2m}(0) = x_{2m}^0 \tag{5.45}$$

We pose the following control problem. Find a control law $u(\cdot)$ that ensures the control objective

$$|x_1(t) - x_{1m}(t)| \to 0, \quad |x_2(t) - x_{2m}(t)| \to 0 \quad \text{as } t \to +\infty. \tag{5.46}$$

Observe that if the parameters q and q_m are chosen in such a way that the behaviour of system (5.44) is chaotic, while the behaviour of system (5.45) is periodic, then the control goal is, in essence, to change the behaviour of the Duffing equation from chaotic to periodic via adaptive control.

Define $e_1 = x_1 - x_{1m}$ and $e_2 = x_2 - x_{2m}$. Subtracting (5.45) from (5.44) one obtains the following error equations:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -\alpha e_1 - \beta e_1^3 - 3x_1 x_{1m} e_1 - \delta e_2 + (q - q_m)\cos(\omega_0 t) + u, \end{cases} \tag{5.47}$$

with intial conditions $e_1(0) = x_1^0 - x_{1m}^0$ and $e_2(0) = x_2^0 - x_{2m}^0$. To apply the finite-differential speed-gradient algorithm to the problem under consideration, suppose at first that the parameter q is known. Then one can define (cf. [53, 184]) the controller $u = -Ke_1 + 3x_1 x_{1m} e_1 + (q_m - q)\cos(\omega_0 t)$, where $K > 0$ is controller gain. For the Lyapunov function [53, 184]

$$V(e) = \frac{1}{2}\left((K + \alpha)e_1^2 + \frac{\beta}{2}e_1^4 + e_2^2\right)$$

one has

$$\dot{V}(e) = (K + \alpha)e_1 e_2 + \beta e_1^3 e_2 + e_2\big(-(K + \alpha)e_1 - \beta e_1^3 - \delta e_2\big) = -\delta e_2^2$$

which with the use of LaSalle's invariance principle implies that $e_1(t) \to 0$ and $e_2(t) \to 0$ as $t \to +\infty$, i.e. the control goal is achieved, provided $\alpha > -K$, $\beta \geq 0$, and $\delta > 0$.

Suppose now that the parameter q is unknown, and introduce the main loop controller

$$u = -Ke_1 + 3x_1 x_{1m} e_1 + \theta \cos(\omega_0 t), \tag{5.48}$$

where θ is a new control. Then the state equations take the form

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -(K + \alpha)e_1 - \beta e_1^3 - \delta e_2 + (\theta + q - q_m)\cos(\omega_0 t). \end{cases} \tag{5.49}$$

Let us utilise the finite-differential speed-gradient algorithm to define the adaptation law. To this end, we consider θ as the input of system (5.49) and introduce the smooth goal function $Q(e) = V(e)$. Define $\omega(e, \theta, t) = \dot{Q}(e) = -\delta e_2^2 + (\theta + q - q_m)e_2 \cos(\omega_0 t)$. Then with the use of the finite-differential Speed-Gradient algorithm with $\psi(e, \theta, t) = \nabla_\theta \omega(e, \theta, t) = e_2 \cos(\omega_0 t)$ one can define the following adaptation law

$$\frac{d\big(\theta + \gamma\psi(e, \theta, t)\big)}{dt} = -\Gamma \nabla_\theta \omega(e, \theta, t)$$

or, equivalently,

$$\theta(t) = \theta(0) - \gamma e_2(t)\cos(\omega_0 t) - \Gamma \int_0^t e_2(s)\cos(\omega_0 s)\, ds. \tag{5.50}$$

Note that this control law was first proposed in [184].

Let us apply Theorem 5.1.5 and Remark 5.1.9 to check whether control goal (5.46) for system (5.44) with main loop controller (5.48) and adaptation law (5.50) is achieved. Taking into

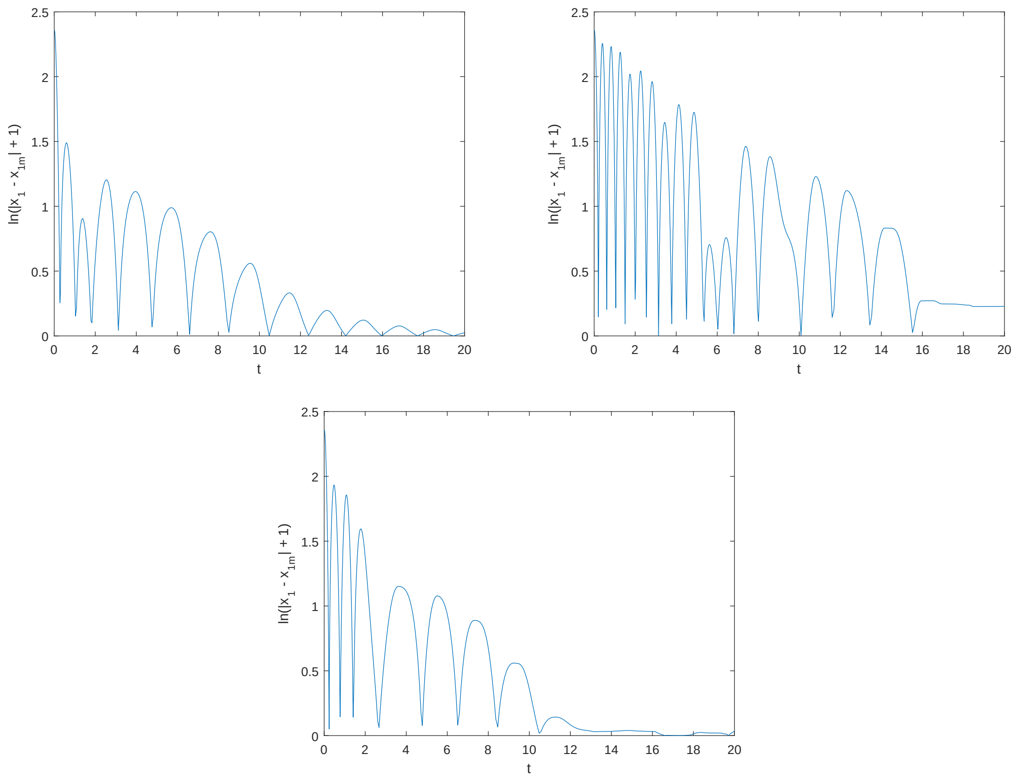


Figure 5.2: The plot of $|e_1(t)| = |x_1(t) - x_{1m}(t)|$ for the smooth algorithm (upper left plot), the nonsmooth algorithm (upper right plot), and the combined algorithm (lower plot).

account Theorem 5.1.4 one obtains that assumptions 1–4 of Theorem 5.1.5 are valid for system (5.49) with control law (5.50). Furthermore, for $\theta_* = q_m - q$ (observe that θ_* is an unknown parameter) one has $\omega(e, \theta_*, t) = -\delta e_2^2$, which with the use of Remark 5.1.9 implies that $e_2(t) \to 0$ as $t \to \infty$, provided $\alpha > -K$ and $\delta > 0$. We will demonstrate convergese of $e_1(t)$ to zero via numerical simulation (see Fig. 5.2).

One can also define the nonsmooth adaptation law

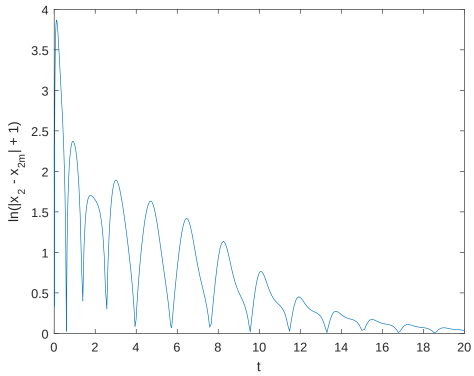
$$\theta(t) \in \theta(0) - \gamma \operatorname{Sign}\big(e_2(t)\cos(\omega_0 t)\big) - \Gamma \int_0^t e_2(s)\cos(\omega_0 s)\, ds, \tag{5.51}$$

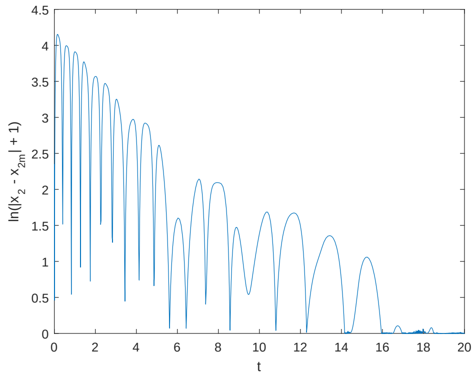
which corresponds to the case $\psi(e, \theta, t) = \operatorname{Sign}(\nabla_\theta \omega(e, \theta, t))$, and the combined algorithm

$$\theta(t) \in \theta(0) - \gamma \operatorname{Sign}\big(e_2(t)\cos(\omega_0 t)\big) - \gamma e_2(t)\cos(\omega_0 t) - \Gamma \int_0^t e_2(s)\cos(\omega_0 s)\, ds, \tag{5.52}$$

which corresponds to the case $\psi(e, \theta, t) = \operatorname{Sign}(\nabla_\theta \omega(e, \theta, t)) + \nabla_\theta \omega(e, \theta, t)$. Here $\operatorname{Sign}(s) = \operatorname{sign}(s)$, if $s \neq 0$, and $\operatorname{Sign}(0) = [-1, 1]$. Algorithms (5.51) and (5.52) are nonsmooth finite-differential Speed-Gradient algorithms with multivalued functions $\psi(e, \theta, t)$. Applying Remark 5.1.10 one can easily verify that in the case of adaptation laws (5.51) and (5.52) one also has $e_2(t) \to 0$ as $t \to \infty$.

Let us verify the performance of main loop controller (5.48) with either smooth adaptation law (5.50) or nonsmooth algorithm (5.51) or combined algorithm (5.52) via numerical simulation.





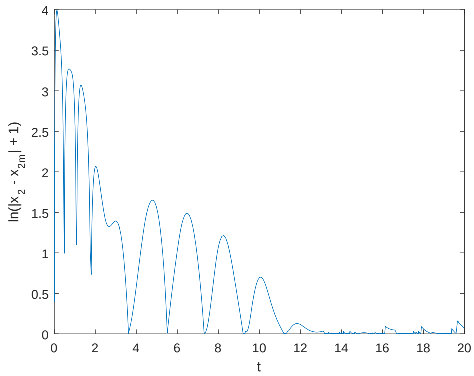


Figure 5.3: The plot of $|e_2(t)| = |x_2(t) - x_{2m}(t)|$ for the smooth algorithm (upper left plot), the nonsmooth algorithms (upper right plot), and the combined algorithm (lower plot).

The following parameters were used in the simulation: $\delta = 0.4$, $\alpha = -1.1$, $\beta = 1$, $\omega_0 = 1.8$, $q = 1.8$, and $q_m = 0.62$. Initial conditions were set to $(x_1(0), x_2(0)) = (10, 10)$, $(x_{1m}(0), x_{2m}(0)) = (0.5, 0.5)$, and $\theta(0) = 0$, while the controller gains were set to $K = 4$, $\Gamma = 2$, $\gamma = 5$ in the case of adaptation laws (5.50) and (5.51), and $\gamma = 2.5$ in the case of algorithm (5.52), so that the combined algorithm is half the sum of the smooth and nonsmooth adaptation laws. The simulation time was confined to 20 time units.

Simulation results are presented in Figures 5.2–5.4. The results demonstrate convergence of the error $|e_2| = |x_2 - x_{2m}|$ to zero for all proposed algorithms (Fig. 5.3), while the error $|e_1| = |x_1 - x_{1m}|$ vanishes only in the case of smooth and combined adaptation laws (Fig. 5.2). Thus, the smooth and combined algorithms allow one to synchronize a chaotic trajectory of the Duffing equation with a periodic one. Furthermore, observe that both errors e_1 and e_2 decay faster in the case of the combined adaptation law than in the case of smooth or nonsmooth algorithms. The error e_2 transient time, defined as the minimal time instant t_2^* such that $\{\forall t \geq t_2^* \colon |e_2(t)| \leq 0.05|e_2(0)|\}$, is approximately equal to 16 time units in the case of the smooth and nonsmooth algorithms, and $t_2^* \approx 11$ in the case of the combined algorithm. Similarly, the error e_1 transient time, defined as the minimal time instant t_1^* such that $\{\forall t \geq t_1^* \colon |e_1(t)| \leq 0.05|e_1(0)|\}$, is approximately equal to 15

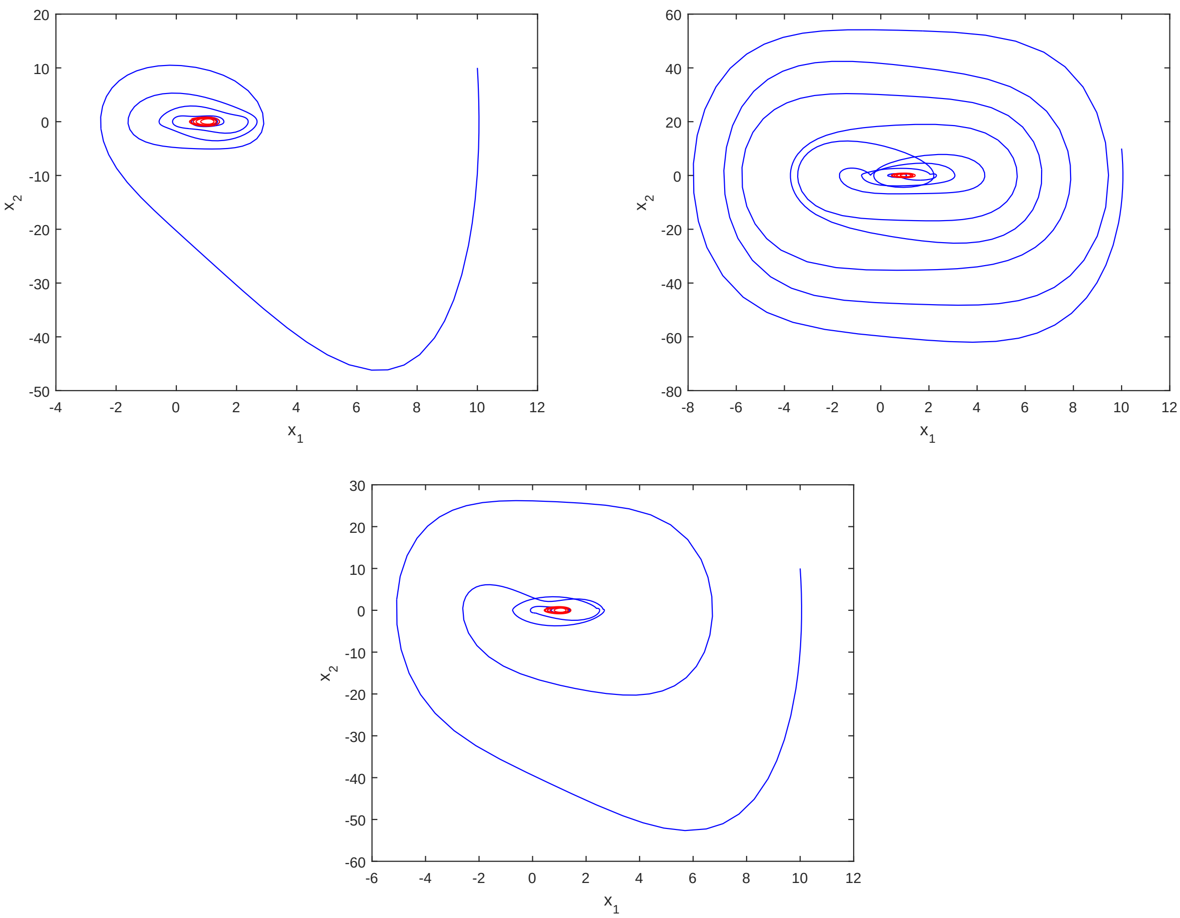


Figure 5.4: Synchronization of two Duffing oscillators with the use of the smooth algorithm (upper left plot), the nonsmooth algorithms (upper right plot), and the combined algorithm (lower plot).

time units in the case of the smooth algorithm and $t_1^* \approx 12$ in the case of the combined algorithm.

The trajectories of the closed-loop system and the reference model are shown in Fig. 5.4. Note that the boundedness of the "proportional term" $\operatorname{sign}(e_2 \cos(\omega_0 t))$ results in the fact that the nonsmooth adaptation law performs worse than the smooth one in the case when the error e_2 is large, i.e. it takes the nonsmooth algorithm more time than the smooth one to steer the trajectory of system (5.44) to a neighbourhood of the trajectory of reference model (5.45). On the other hand, when e_2 is small, the situation reverses, and the fact that $|\operatorname{sign}(e_2 \cos(\omega_0 t))| = 1$ whenever $e_2 \cos(\omega_0 t) \neq 0$ allows the nonsmooth algorithm to reduce the error e_2 faster than the smooth one. In turn, combined adaptation law (5.52) has advantages of both smooth and nonsmooth algorithms, which leads to its better overall performance.

5.2 Control Problems for Hyperbolic Equations

In this section we consider applications of smooth and nonsmooth speed-gradient algorithm to boundary energy control problems for one-dimensional semilinear Klein-Gordon equation and one-dimensional sine-Gordon equation.

5.2.1 Energy Control of a Semilinear Klein-Gordon Model

Consider the following initial boundary value problem for the one dimensional semilinear Klein-Gordon equation:

$$z_{tt}(t,x) - kz_{xx}(t,x) + \Pi'(z(t,x)) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0,1], \tag{5.53}$$

$$z(0,x) = z^0(x), \quad z_t(0,x) = z^1(x), \quad x \in [0,1], \tag{5.54}$$

$$z(t,0) = 0, \quad z_x(t,1) = u(t), \quad y(t) = \big(z_t(t,1), H(z(t))\big), \quad t \geq 0. \tag{5.55}$$

Here $\Pi \in C^1(\mathbb{R})$ is a nonnegative function, $k > 0$ is a given parameter, $u(t)$ is the input, $y(t)$ is the output (the measurements), $z^0, z^1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ are initial conditions, and

$$H(z) = \int_0^1 \left(\frac{z_t^2}{2} + k\frac{z_x^2}{2} + \Pi(z) \right) dx$$

is the Hamiltonian for equation (5.53). To indicate the dependence of $H(z)$ on t we will use the notation $H(z(t))$. It is easily seen that $H(z(t)) \equiv \text{const}$, if $u(t) \equiv 0$. Moreover, the function $H(z)$ is nonnegative and $H(z(t)) = 0$ if and only if $z(t) = 0$, since from the equality $H(z(t)) = 0$ it follows that $z_x(t) = 0$, which with the use of the boundary condition $z(t,0) = 0$ implies that $z(t) = 0$. Thus, the quantity $H(z(t))$ can be viewed as the *energy* of a solution $z(t,x)$ of equation (5.53) (or *systems' energy*) at the time t.

Consider the problem of reaching a prespecified energy level $H_* \geq 0$ in system (5.53)–(5.55), which consists in finding a control law $u(t)$, ensuring the achievement of the following control goal:

$$H(z(t)) \to H_* \text{ as } t \to +\infty. \tag{5.56}$$

Here $z(t)$ is a solution of the initial boundary value problem (5.53)–(5.55).

Let us design a required control law with the use of the speed-gradient algorithm. To this end, introduce the goal function $Q_1(z(t)) = \frac{1}{2}(H(z(t)) - H_*)^2$, $t \geq 0$. Formally differentiating this function along solution of (5.53)–(5.55) one gets that

$$\frac{d}{dt} Q_1(z(t)) = (H(z(t)) - H_*) \int_0^1 \Big(z_t z_{tt} + k z_x z_{xt} + \Pi'(z) z_t \Big)\, dx.$$

Replacing z_{tt} with $kz_{xx}(t,x) - \Pi'(z(t,x))$, integrating the term $z_x z_{xt}$ by parts, and applying the boundary condition $z(t,0) = 0$, one obtains the following expression for the derivative of the goal function $Q_1(z(t))$ along solutions of system (5.53)–(5.55):

$$\frac{d}{dt}Q_1(z(t)) = (H(z(t)) - H_*)ku(t)z_t(t,1).$$

With the use of the speed-gradient algorithm in finite form one can define

$$u(t) = -\gamma\frac{\partial}{\partial u}\frac{dQ_1(z)}{dt} = -\gamma(H(z(t)) - H_*)kz_t(t,1).$$

Here $\gamma > 0$ is a control gain. It is natural to consider the more general control law

$$u(t) = -\gamma\psi(H(z(t)) - H_*)z_t(t,1), \tag{5.57}$$

where $\psi\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function such that $\psi(0) = 0$ and $\psi(s)s > 0$ for all $s \neq 0$. We will also consider the discontinuous control law

$$u(t) = -\gamma\,\mathrm{sign}(H(z(t)) - H_*)z_t(t,1), \tag{5.58}$$

corresponding to the function $\psi(s) = \mathrm{sign}(s)$. This control law can be derived with the use of the nonsmooth speed-gradient algorithm in finite form with the nonsmooth goal function $Q_2(z(t)) = |H(z(t)) - H_*|$.

Remark 5.2.1. Since control law (5.58) is discontinuous, the question of how to define a solution of the closed-loop system (5.53)–(5.55), (5.58) arises. In this section we use the same definition of solution of a discontinuous infinite-dimensional system as in [316]. Furthermore, below we suppose that there exists a sufficiently regular (i.e. ensuring the correctness of all proofs) solution of all initial boundary value problems under consideration.

Note that for any solution of the closed-loop system (5.53)–(5.55), (5.57) (or (5.53)–(5.55), (5.58)) the following inequality holds true:

$$\frac{d}{dt}H(z(t)) = -\gamma k\psi(H(z(t)) - H_*)z_t^2(t,1) \quad \forall t \geq 0\colon H(z(t)) \neq H_*.$$

Therefore

$$\frac{d}{dt}H(z(t)) \begin{cases} \leq 0, & \text{if} \quad H(z(t)) > H_*, \\ \geq 0, & \text{if} \quad H(z(t)) < H_*. \end{cases} \tag{5.59}$$

Thus, if $H(z(t)) > H_*$, then the energy $H(z(t))$ is nonincreasing, while in the case $H(z(t)) < H_*$ the energy $H(z(t))$ is nondecreasing. Therefore $H(z(t)) \in \mathrm{co}\{H_*, H(z(0))\}$ for all $t \geq 0$. Let us obtain sufficient conditions for the achievement of the control goal (5.56).

Theorem 5.2.1. *Suppose that the function $\Pi \in C^2(\mathbb{R})$, Π is nonnegative, $\Pi'(0) = 0$ and there exists $\eta \geq 2$ such that $z\Pi'(z) \geq \eta\Pi(z)$ for all $z \in \mathbb{R}$. Suppose also that $H(z(0)) \neq 0$ (i.e the initial conditions are nonzero). Then for all $H_* \geq 0$, $\gamma > 0$, and $k > 0$ one has $H(z(t)) \to H_*$ as $t \to +\infty$, where z is a solution of (5.53)–(5.55), (5.57). Moreover, in the case of discontinuous control law (5.58) for all $H_* > 0$, $\gamma > 0$, and $k > 0$ there exists $T > 0$ such $H(z(t)) \to H_*$ as $t \to T$, where z is a solution of (5.53)–(5.55), (5.58).*

Proof. Let us consider control law (5.57) first. For all $\varepsilon > 0$ and $c > 0$ introduce the Lyapunov-like function $V(t) = H(z(t)) + \varepsilon\,\mathrm{sign}(H(z(t)) - H_*)g(t)$, where z is a solution of the initial-boundary value problem (5.53)–(5.55), (5.57), $g(t) = \int_0^1 xz_tz_x\,dx + c\int_0^1 zz_t\,dx$, $c > 0$, and $\mathrm{sign}(0) = 0$. Let us obtain some estimates of the function $V(t)$.

Since $z(t,0) = 0$ for any $t \geq 0$, for all $x \in [0,1]$ one has

$$|z(t,x)| = \left|\int_0^x z_x\,dx\right| \leq \int_0^1 |z_x|\,dx \leq \sqrt{\int_0^1 z_x^2\,dx}, \quad \int_0^1 z^2\,dx \leq \int_0^1 z_x^2\,dx. \tag{5.60}$$

Therefore

$$c\int_0^1 zz_t\,dx \leq \frac{c}{2}\int_0^1 z^2\,dx + \frac{c}{2}\int_0^1 z_t^2\,dx \leq \frac{c}{2}\int_0^1 \left(z_t^2 + z_x^2\right)dx \leq \max\left\{c, \frac{c}{k}\right\}H(z(t)).$$

Note also that

$$\left|\int_0^1 xz_tz_x\,dx\right| \leq \int_0^1 |z_tz_x|\,dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 z_t^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 z_x^2\,dx \leq \max\left\{1, \frac{1}{k}\right\}H(z(t)).$$

Define

$$K_0 = \max\left\{1, \frac{1}{k}\right\} + \max\left\{c, \frac{c}{k}\right\}.$$

Then

$$0 \leq (1 - \varepsilon K_0)H(z(t)) \leq V(t) \leq (1 + \varepsilon K_0)H(z(t)), \tag{5.61}$$

for all $t \geq 0$ and for any sufficiently small $\varepsilon > 0$.

As was noted above, $H(z(t)) \in \mathrm{co}\{H_*, H(z(0))\}$ for all $t \geq 0$ (see (5.59)). Therefore $\int_0^1 z_x^2\,dx \leq (2/k)\max\{H_*, H(z(0))\}$. Hence with the use of (5.60) one obtains that the function $z(t,x)$ is uniformly bounded for all $t \geq 0$ and $x \in [0,1]$. By our assumption $\Pi \in C^2(\mathbb{R})$ and $\Pi'(0) = 0$. Therefore there exists $L > 0$ such that

$$|\Pi'(z(t,x))| \leq L|z(t,x)| \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]. \tag{5.62}$$

For any $t \geq 0$ such that $H(z(t)) \neq H_*$ one has

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^1 xz_xz_t\,dx &= \int_0^1 xz_{tx}z_t\,dx + \int_0^1 xz_x(kz_{xx} - \Pi'(z))\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(z_t^2 + kz_x^2\right)dx + \frac{1}{2}\big(z_t^2(t,1) + kz_x^2(t,1)\big) + \int_0^1 \left(-\frac{d}{dx}\Big(x\Pi(z)\Big) + \Pi(z)\right)dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(z_t^2 + kz_x^2\right)dx + \frac{1}{2}\big(z_t^2(t,1) + kz_x^2(t,1)\big) + \int_0^1 \Pi(z)\,dx - \Pi(z(t,1)) \\
&\leq -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(z_t^2 + kz_x^2\right)dx + \int_0^1 \Pi(z)\,dx + \frac{1}{2}\big(z_t^2(t,1) + kz_x^2(t,1)\big), \quad (5.63)
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^1 zz_t\,dx &= \int_0^1 z_t^2\,dx + \int_0^1 z(kz_{xx} - \Pi'(z))\,dx \\
&= \int_0^1 z_t^2\,dx + kz(t,1)z_x(t,1) - k\int_0^1 z_x^2\,dx - \left(1 + \frac{k}{2L}\right)\int_0^1 z\Pi'(z)\,dx \\
&\quad + \frac{k}{2L}\int_0^1 z\Pi'(z)\,dx \leq \int_0^1 z_t^2\,dx + kz(t,1)z_x(t,1) - k\int_0^1 z_x^2\,dx \\
&\quad - \eta\left(1 + \frac{k}{2L}\right)\int_0^1 \Pi(z)\,dx + \frac{k}{2L}\int_0^1 z\Pi'(z)\,dx.
\end{aligned}
$$

Observe that

$$
|kz(t,1)z_x(t,1)| \leq \frac{k}{2}z^2(t,1) + \frac{k}{2}z_x^2(t,1) \leq \frac{k}{2}\int_0^1 z_x^2\,dx + \frac{k}{2}z_x^2(t,1).
$$

(see (5.60)). Hence one obtains that

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^1 zz_t\,dx &\leq \int_0^1 z_t^2\,dx - \frac{k}{2}\int_0^1 z_x^2\,dx \\
&\quad - \eta\left(1 + \frac{k}{2L}\right)\int_0^1 \Pi(z)\,dx + \frac{k}{2L}\int_0^1 z\Pi'(z)\,dx + \frac{k}{2}z_x^2(t,1).
\end{aligned}
$$

Then applying (5.62) and (5.60) one gets that

$$
\frac{d}{dt}\int_0^1 zz_t\,dx \leq \int_0^1 z_t^2\,dx - \eta\left(1 + \frac{k}{2L}\right)\int_0^1 \Pi(z)\,dx + \frac{k}{2}z_x^2(t,1). \quad (5.64)
$$

Recall that $\eta \geq 2$. Therefore $c\eta(1 + k/2L) > 1$ for some $c \in (0, 1/2)$. Hence taking into account (5.63) and (5.64) one obtains that

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}g(t) &\leq -\left(\frac{1}{2} - c\right)\int_0^1 z_t^2\,dx - \frac{k}{2}\int_0^1 z_x^2\,dx - \left(c\eta\Big(1 + \frac{k}{2L}\Big) - 1\right)\int_0^1 \Pi(z)\,dx \\
&\quad + \frac{k}{2}(1+c)z_x^2(t,1) + \frac{1}{2}z_t^2(t,1) \leq -C_0H(z(t)) + \frac{1}{2}z_t^2(t,1) + \frac{k}{2}(1+c)z_x^2(t,1),
\end{aligned}
$$

for any $t \geq 0$ such that $H(z(t)) \neq H_*$, where

$$
C_0 = \min\left\{1 - 2c, c\eta\Big(1 + \frac{k}{2L}\Big) - 1\right\} > 0.
$$

Therefore applying (5.61) one obtains that

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq -C_\varepsilon V(t) - \gamma k\psi(H(z(t)) - H_*)z_t^2(t,1) + \frac{\varepsilon}{2}z_t^2(t,1) + \frac{\varepsilon}{2}(1+c)k\gamma^2\psi(H(z(t)) - H_*)^2 z_t^2(t,1) \quad (5.65)$$

for any $t \geq 0$ such that $H(z(t)) > H_*$, and

$$\frac{d}{dt}V(t) \geq C_\varepsilon V(t) + \gamma k|\psi(H(z(t)) - H_*)|z_t^2(t,1) - \frac{\varepsilon}{2}z_t^2(t,1) - \frac{\varepsilon}{2}(1+c)k\gamma^2\psi(H(z(t)) - H_*)^2 z_t^2(t,1)$$

for any $t \geq 0$ such that $H(z(t)) < H_*$, where $C_\varepsilon = \varepsilon C_0/(1+\varepsilon K_0)$.

Suppose that $H(z(0)) > H_*$ (the case $0 < H(z(0)) < H_*$ is proved in the same way). Fix an arbitrary $\Delta \in (0, H(z(0)) - H_*)$. Clearly, there exists $T_\Delta \in (0, +\infty]$ such that $H(z(t)) > H_* + \Delta$ for all $t \in [0, T_\Delta)$ and $H(z(t)) \leq H_* + \Delta$ for all $t \in [T_\Delta, +\infty)$ (see (5.59)). Let us show that T_Δ is finite.

Arguing by reductio ad absurdum, suppose that $T_\Delta = +\infty$. Define

$$\psi_\Delta := \min\Big\{\psi(s) \Bigm| s \in \big[\Delta, H(z(0)) - H_*\big]\Big\} > 0, \quad \Psi_\Delta := \max\Big\{\psi(s) \Bigm| s \in \big[\Delta, H(z(0)) - H_*\big]\Big\} > 0.$$

Then $\Psi_\Delta \geq \psi(H(z(t)) - H_*) \geq \psi_\Delta$ for all $t \geq 0$. Hence with the use of (5.57) and (5.65) one obtains that

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq -C_\varepsilon V(t) - \gamma k\psi_\Delta z_t^2(t,1) + \frac{\varepsilon}{2}z_t^2(t,1) + +\frac{\varepsilon}{2}(1+c)k\gamma^2\Psi_\Delta^2 z_t^2(t,1)$$

for all $t \geq 0$. Consequently, for any sufficiently small $\varepsilon > 0$ and for all $t \geq 0$ one has $dV(t)/dt \leq -C_\varepsilon V(t)$, which implies that $V(t) \leq V(0)e^{-C_\varepsilon t}$ for all $t \geq 0$. Therefore $\lim_{t\to+\infty} V(t) = 0$ and $\lim_{t\to+\infty} H(z(t)) = 0$ due to inequalities (5.61), which contradicts the assumption that $T_\Delta = +\infty$, i.e. $H(z(t)) > H_* + \Delta > 0$ for all $t \geq 0$. Thus, $T_\Delta < +\infty$ and $H(z(t)) < H_* + \Delta$ for all $t > T_\Delta$. Note that $H(z(t)) \geq H_*$ for all $t \geq 0$ due to (5.59). Consequently, $H(z(t)) \to H_*$ as $t \to +\infty$, since $\Delta > 0$ was chosen arbitrarily.

Let us now consider control law (5.58). Suppose that the inequality $H(z(0)) > H_* > 0$ holds true. The case when $H(z(0)) < H_*$ is proved in the same way. Arguing by reductio ad absurdum, suppose that $H(z(t)) > H_*$ for all $t \geq 0$. Then applying inequality (5.65) one gets that

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq -C_\varepsilon V(t) - \gamma k z_t^2(t,1) + \frac{\varepsilon}{2}z_t^2(t,1) + \frac{\varepsilon}{2}(1+c)k\gamma^2 z_t^2(t,1) \quad \forall t \geq 0.$$

Therefore for any sufficiently small $\varepsilon > 0$ and for all $t \geq 0$ on has $\frac{dV(t)}{dt} \leq -C_\varepsilon V(t)$, which implies that $V(t) \leq V(0)e^{-C_\varepsilon t}$ for all $t \geq 0$. Hence with the use of (5.61) one gets

$$H(z(t)) \leq \frac{(1+\varepsilon K_0)}{1-\varepsilon K_0}H(z(0))e^{-C_\varepsilon t} \quad \forall t \geq 0.$$

Consequently, $H(z(t)) < H_*$ for any sufficiently large t, which contradicts our assumption. Thus, there exists $T > 0$ such that $H(z(t)) \to H_*$ as $t \to T$. $\square$

Remark 5.2.2. In the case when $H(z(0)) = 0$, i.e. when the initial conditions z^0 and z^1 are equal to zero one can apply any control law that would increase system's energy and then switch it to one of control laws (5.57) or (5.58). In particular, one can apply constant control law $u(t) \equiv u_0 \neq 0$ on an arbitrarily small time interval $[0, t_0]$ with $t_0 > 0$.

Remark 5.2.3. Let us point out particular examples of functions $\Pi(z)$ satisfying assumptions of Theorem 5.2.1. One can easily see that the assumptions of the theorem are satisfied for $\Pi(z) = \beta z^{2\kappa}$ with $\beta \geq 0$ and $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (the case $\beta = 0$ corresponds to the wave equation, while the case $\kappa = 1$ corresponds to the (linear) Klein-Gordon equation). With the use of Taylor's expansion one can check that Theorem 5.2.1 can also be applied to the hyperbolic sine-Gordon equation, i.e. in the case $\Pi(z) = \beta(\cosh(z) - 1)$, $\beta > 0$.

Note that Theorem 5.2.1 cannot be applied to the sine-Gordon equation, i.e. in the case $\Pi(z) = \beta(1 - \cos z)$, $\beta > 0$, since in this case one has $\liminf\limits_{z\to\infty} z\Pi'(z) = \liminf\limits_{z\to\infty} \Big(\beta z \sin z\Big) = -\infty$, while $\Pi(z) \geq 0$ for all $z \in \mathbb{R}$. Thus, inequality $z\Pi'(z) \geq \eta\Pi(z)$ does not hold true for any $\eta \geq 0$. Nevertheless, Theorem 5.2.1 can be extended to the case of the sine-Gordon equation.

Theorem 5.2.2. *Let* $\Pi(z) = \beta(1 - \cos(z))$ *and* $H(z(0)) \neq 0$. *Then for all* $H_* \geq 0$, $k > 0$, $0 \leq \beta < k\pi^2/4$, *and* $\gamma > 0$ *one has* $\lim\limits_{t\to+\infty} H(z(t)) = H_*$, *where* z *is a solution of* (5.53)–(5.55), (5.57). *Furthermore, in the case of nonsmooth control law* (5.58) *for all* $H_* > 0$, $k > 0$, $0 \leq \beta < k\pi^2/4$, *and* $\gamma > 0$ *there exists* $T > 0$ *such that* $H(z(t)) \to H_*$ *as* $t \to T$, *where* z *is a solution of* (5.53)–(5.55), (5.58).

A proof of this theorem similar to the proof of Theorem 5.2.1 and based on the use of the Lyapunov-like function

$$V(t) = H(z(t)) + \varepsilon\, \mathrm{sign}(H(z(t)) - H_*) \int_0^1 x z_t z_x \, dx, \quad \varepsilon > 0,$$

can be found in the joint papers of the author, A.L. Fradkov, and B.R. Andrievsky [161,162]. Let us note that this Lyapunov function for the sine-Gordon equation without the additional factor $\mathrm{sign}(H(z(t)) - H_*)$ was first proposed in the works of Kobayashi [265,266]. The Lyapunov function $V(t)$ for the semilinear Klein-Gordon equation used in the proof of Theorem 5.2.1 was also first proposed by Kobayashi [265].

The closed-loop energy control system (5.53)–(5.55), (5.57) with $\Pi(z) = \beta(1 - \cos z)$ (i.e. (5.53) is the sine-Gordon equation) was numerically studied by simulation. The following parameters were used in the simulation: $k = 0,12$, $\beta = 1$, $\gamma = 0,25$, and $H_* = 20$. Initial conditions were

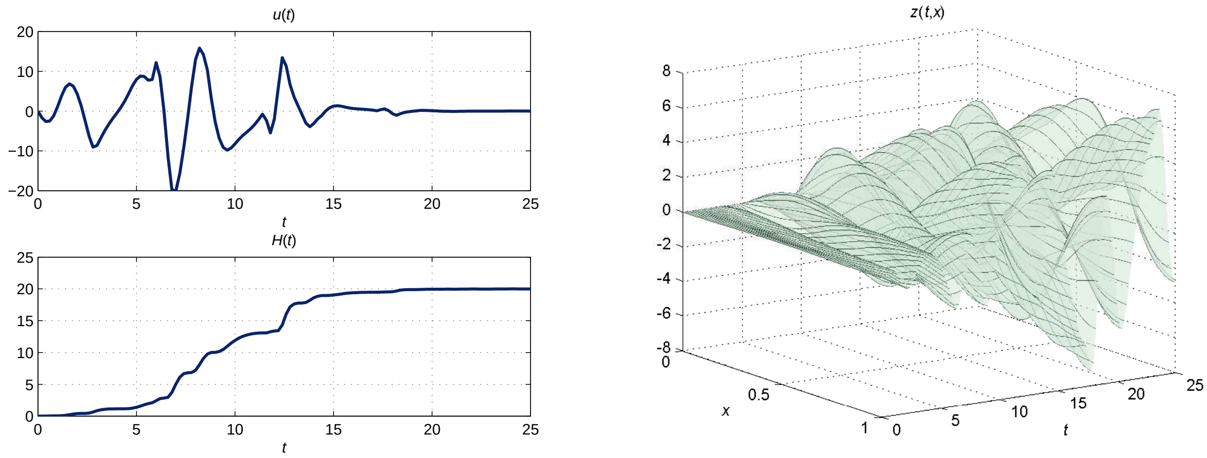


Figure 5.5: Energy control via smooth law (5.57) with $\psi(s) = s$. Plots of control $u(t)$ (upper left plot), energy $H(z(t))$ (lower left plot) and solution $z(t,x)$ (right plot).

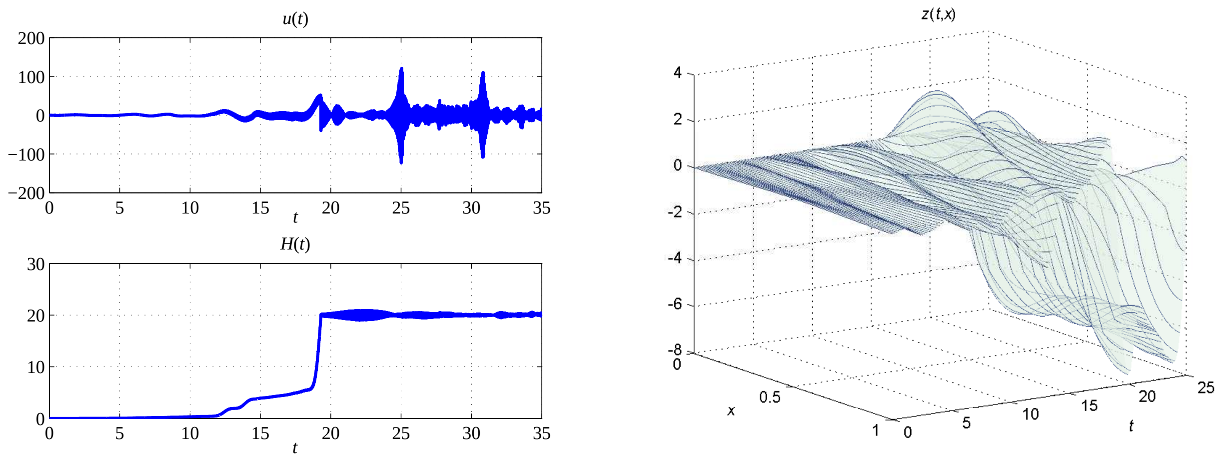


Figure 5.6: Energy control via nonsmooth law (5.58). Plots of control $u(t)$ (upper left plot), energy $H(z(t))$ (lower left plot) and solution $z(t,x)$ (right plot).

chosen as follows: $z^0(x) = 0,05\big(1 - \cos(2\pi x)\big)$ and $z^1(x) \equiv 0$. In this case $H(z(0)) \approx 0,0048 < H_*$. Smooth control law with $\psi(s) = s$ (Fig. 5.5) and nonsmooth control law with $\psi(s) = \mathrm{sign}(s)$ (Fig. 5.6) were considered. In both cases numerical modelling demonstrated that the desired energy level is achieved in finite time. In the case of the nonsmooth algorithm numerical simulation demonstrated chattering of both $u(t)$ and $H(z(t))$ caused by the discontinuity of the control law. The results of numerical simulation reported here were obtained by prof. B.R. Andrievsky.

Remark 5.2.4. The results of this section can be partially extended to the case of variable energy level $H_*(t)$. Namely, under some assumptions on system's parameters one can prove that for system (5.53)–(5.55) with a natural generalization of control law (5.57) of the form

$$u(t) = -\gamma\psi(H(z(t)) - H_*(t))z_t(t,1)$$

the following estimate of the tracking error holds true:

$$\big|H(z(t)) - H_*(t)\big| \leq \theta \sup_{s\geq\tau} \left|\frac{dH_*}{dt}(s)\right| \quad \forall t \geq \tau,$$

Here $\theta > 0$ is constant that does not depend on $H_*(t)$ and its derivative. Moreover, if $\frac{dH_*(t)}{dt} \to 0$ as $t \to +\infty$, then $|H(z(t)) - H_*(t)| \to 0$ as $t \to +\infty$. A detailed proof of these results can be found in the joint work of the author and prof. A.L. Fradkov [159].

5.2.2 Energy Control of the Sine-Gordon Model with Boundary Measurements

In the previous section we suppose that one can measure both the speed $z_t(t,1)$ at the right-hand side of the interval $[0,1]$ and system's energy $H(z(t))$. However, in physical systems modelled by the semilinear Klein-Gordon equation a direct measurement of the energy is often impossible. Therefore let us consider a different version of the problem posed in the previous section, in which we suppose that one can measure only $z_t(t,1)$, i.e. only boundary measurements are available. For the sake of shortness here we consider only the sine-Gordon equation, although the main results of this section can be extended to the case of more general semilinear hyperbolic systems.

Consider the following initial boundary value problem for the sine-Gordon equation:

$$z_{tt}(t,x) - kz_{xx}(t,x) + \beta \sin z(t,x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0,1], \tag{5.66}$$

$$z(0,x) = z^0(x), \quad z_t(0,x) = z^1(x), \quad x \in [0,1], \tag{5.67}$$

$$z(t,0) = 0, \quad z_x(t,1) = u(t), \quad y(t) = z_t(t,1), \quad t \geq 0. \tag{5.68}$$

Here $k > 0$ and $\beta > 0$ are given parameter, $u(t)$ is the input, $y(t)$ is the output (the measurements), and $z^0, z^1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ are given initial conditions. Denote by

$$H(z) = \int_0^1 \left(\frac{z_t^2}{2} + k\frac{z_x^2}{2} + \beta(1-\cos z)\right) dx$$

the Hamiltonian for the sine-Gordon equation. As in the previous section, we study the problem of reaching a desired energy level $H_* \geq 0$ in system (5.66)–(5.68), which consists in finding a control law $u(t)$ such that $H(z(t)) \to H_*$ as $t \to +\infty$, where z is a solution of (5.66)–(5.68).

In order to solve the problem under consideration we propose to use a Luenberger-type observer for the sine-Gordon equation of the form:

$$\widehat{z}_{tt}(t,x) - k\widehat{z}_{xx}(t,x) + \beta \sin \widehat{z}(t,x) = 0, \tag{5.69}$$

$$\widehat{z}(0,x) = \widehat{z}^0(x), \quad \widehat{z}_t(0,x) = \widehat{z}^1(x), \tag{5.70}$$

$$\widehat{z}(t,0) = 0, \quad \widehat{z}_x(t,1) = u(t) + \alpha\big(y(t) - \widehat{z}_t(t,1)\big), \tag{5.71}$$

Here $\widehat{z}^0, \widehat{z}^1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ are given initial conditions and $\alpha > 0$ is an observer gain. This observer was first proposed by E. Fridman in [185, 186]. In these papers, an analysis of the observer was reduced to a solvability of certain linear matrix inequalities. In contrast, our aim is to obtain explicit conditions on parameters of the system and the observer gain ensuring exponential decay of the observation error.

Remark 5.2.5. As in the previous section, we suppose that there exist sufficiently regular solutions of all initial boundary value problems under consideration, i.e. such solution for which all proofs below are valid. In particular, we suppose that the functions $t \mapsto H(z(t))$ and $t \mapsto H(\widehat{z}(t))$ are at least locally absolutely continuous.

Introduce the estimation error variable $e = z - \widehat{z}$, and consider the associated boundary value problem

$$e_{tt}(t,x) - ke_{xx}(t,x) + \beta\Big(\sin z(t,x) - \sin \widehat{z}(t,x)\Big) = 0, \tag{5.72}$$

$$e(0,x) = z^0(x) - \widehat{z}^0(x),\ e_t(0,x) = z^1(x) - \widehat{z}^1(x), \tag{5.73}$$

$$e(t,0) = 0, \quad e_x(t,1) = -\alpha e_t(t,1), \tag{5.74}$$

that is easily derived from (5.66)–(5.68) and (5.69)–(5.71). Denote by $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(e_t^2 + ke_x^2\Big)\,dx$ the weighted quadratic error. Our aim is to show that $E(t)$ decays exponentially, provided the parameters k, β, and α satisfy certain conditions.

Theorem 5.2.3. *Let parameters $k > 0$ and $\beta > 0$ of system (5.66)–(5.68) be such that:*

$$0 < \beta < \frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{2} k \approx 0,65k. \tag{5.75}$$

Then for all

$$\alpha \in \left(\frac{k - \sqrt{k^2 - k\eta(\beta,k)^2}}{k\eta(\beta,k)}, \frac{k + \sqrt{k^2 - k\eta(\beta,k)^2}}{k\eta(\beta,k)} \right), \tag{5.76}$$

where $\eta(\beta,k) = 2\beta/\sqrt{\pi^2 k - 4\pi\beta} > 0$, there exist $\delta > 0$ and $M > 0$ (depending only on k, β, and α) such that

$$E(t) \le ME(0)e^{-\delta t} \quad \forall t \ge 0. \tag{5.77}$$

Moreover, for any such $\alpha > 0$ and for all $t \ge 0$ one has

$$\int_0^1 e^2 dx \le \frac{2M}{k} E(0)e^{-\delta t}, \quad \max_{x\in[0,1]} |e(t,x)| \le \sqrt{\frac{2M}{k} E(0)} e^{-\delta t/2}. \tag{5.78}$$

Proof. For any $\varepsilon > 0$ introduce the Lyapunov function $V(t) = E(t) + \varepsilon \int_0^1 xe_te_x\,dx$ (see [266, Sect. 4] and [186, Sect. 2.2]). From the inequalities

$$\Big|\int_0^1 xe_te_x\,dx\Big| \le \int_0^1 |e_t||e_x|\,dx \le \frac{\mu}{2}\int_0^1 e_t^2\,dx + \frac{1}{2\mu}\int_0^1 e_x^2\,dx \le \max\left\{\mu, \frac{1}{k\mu}\right\} E(t),$$

with $\mu = 1/\sqrt{k}$ (which is optimal) it follows that for any $\varepsilon < \sqrt{k}$ one has

$$0 \le (1 - k_0\varepsilon)E(t) \le V(t) \le (1 + k_0\varepsilon)E(t), \tag{5.79}$$

and $(1 - k_0\varepsilon) > 0$, where $k_0 = 1/\sqrt{k}$. Thus, in particular, for any $0 < \varepsilon < \sqrt{k}$ one has $V(t) \ge 0$. Observe that

$$\frac{d}{dt}V(t) = \int_0^1 \Big(e_t e_{tt} + k e_x e_{tx}\Big)\,dx + \varepsilon \int_0^1 \Big(x(e_{tt}e_x + e_t e_{tx})\Big)\,dx. \tag{5.80}$$

Taking into account (5.72) and (5.74), and integrating by parts one obtains that

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_0^1 \Big(e_t e_{tt} + k e_x e_{tx}\Big)\,dx = \int_0^1 \Big(e_t\big(k e_{xx} - \beta \sin z + \beta \sin \widehat{z}\big) - k e_t e_{xx}\Big)\,dx$$
$$+ k e_x(t,1)e_t(t,1) - k e_x(t,0)e_t(t,0) = -\alpha k e_t(t,1)^2 + \beta \int_0^1 e_t\big(\sin\widehat{z} - \sin z\big)\,dx.$$

Applying the fact that the function $\sin(\cdot)$ is globally Lipschitz continuous with the Lipschitz constant $L = 1$ one gets that

$$\Big|\int_0^1 e_t\big(\sin\widehat{z} - \sin z\big)\,dx\Big| \le \frac{\mu}{2}\int_0^1 e_t^2\,dx + \frac{1}{2\mu}\int_0^1 e^2\,dx$$

for any $\mu > 0$. Hence with the use of Wirtinger's inequality (see, e.g. [216]) one obtains that

$$\frac{d}{dt}E(t) \le -\alpha k e_t(t,1)^2 + \frac{\beta\mu}{2}\int_0^1 e_t^2\,dx + \frac{2\beta}{\pi^2\mu}\int_0^1 e_x^2\,dx. \tag{5.81}$$

Now, let us consider the second term in (5.80). At first, integrating by parts one gets

$$\int_0^1 x e_t e_{tx}\,dx = \frac{1}{2}e_t(t,1)^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 e_t^2\,dx \tag{5.82}$$

At second, applying (5.72) and (5.74) one finds that

$$\int_0^1 x e_x e_{tt}\,dx = \int_0^1 x e_x\Big(k e_{xx} - \beta\sin z + \beta \sin\widehat{z}\Big)\,dx \le \frac{k}{2}\int_0^1 \Big(\frac{d}{dx}(x e_x^2) - e_x^2\Big)\,dx$$
$$+ \beta\int_0^1 x|e_x||e|\,dx \le -\frac{k}{2}\int_0^1 e_x^2\,dx + \frac{k}{2}e_x^2(t,1) + \frac{\beta\lambda}{2}\int_0^1 e_x^2\,dx + \frac{\beta}{2\lambda}\int_0^1 e^2\,dx$$
$$\le \Big(-\frac{k}{2} + \frac{\beta\lambda}{2} + \frac{2\beta}{\pi^2\lambda}\Big)\int_0^1 e_x^2\,dx + \frac{k}{2}\alpha^2 e_t^2(t,1). \tag{5.83}$$

for any $\lambda > 0$. Minimizing this expression with respect to λ one obtains that $\lambda^* = 2/\pi$ is optimal. Now, combining (5.80)–(5.83) one gets that for any $t \ge 0$ and $\mu > 0$ the following inequality holds true

$$\frac{d}{dt}V(t) \le \delta_1(\varepsilon,\mu)\int_0^1 e_t^2\,dx + \delta_2(\varepsilon,\mu)\int_0^1 e_x^2\,dx + \delta_3(\varepsilon,\alpha)e_t^2(t,1),$$

where

$$\delta_1(\varepsilon,\mu) = -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\beta\mu}{2}, \quad \delta_2(\varepsilon,\mu) = -\frac{\varepsilon k}{2} + \frac{2\beta}{\pi^2\mu} + \frac{2\varepsilon\beta}{\pi},$$
$$\delta_3(\varepsilon,\alpha) = -\alpha k + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon k}{2}\alpha^2.$$

Our aim is to show that under the assumptions of the theorem $\eta(\beta,k) < \sqrt{k}$, for any $\varepsilon > 0$ such that $\eta(\beta,k) < \varepsilon < \sqrt{k}$ one has $\delta_1(\varepsilon,\mu) < 0$ and $\delta_2(\varepsilon,\mu) < 0$ for some $\mu > 0$, and there exists $\alpha > 0$ such that $\delta_3(\varepsilon,\alpha) \leq 0$. Then for any such ε, μ and α one has

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq -\min\left\{2|\delta_1(\varepsilon,\mu)|, \frac{2|\delta_2(\varepsilon,\mu)|}{k}\right\} E(t).$$

Hence and from (5.79) it follows that $\dot{V}(t) \leq -\delta(\varepsilon,\mu)V(t)$, where

$$\delta(\varepsilon,\mu) = \min\left\{\frac{2|\delta_1(\varepsilon,\mu)|}{1+k_0\varepsilon}, \frac{2|\delta_2(\varepsilon,\mu)|}{k(1+k_0\varepsilon)}\right\} > 0,$$

which yeilds $V(t) \leq V(0)e^{-\delta(\varepsilon,\mu)t}$ for all $t \geq 0$. Consequently, applying (5.79) one obtains that

$$E(t) \leq \frac{1+k_0\varepsilon}{1-k_0\varepsilon}E(0)e^{-\delta(\varepsilon,\mu)t} \quad \forall t \geq 0, \tag{5.84}$$

which implies that (5.77) is valid. Taking into account the boundary condition $e(t,0) = 0$ (see (5.74)) one gets that $e(t,x) = \int_0^x e_x(t,\xi)\,d\xi$ for all $x \in [0,1]$ and $t \geq 0$. Therefore, for any $t \geq 0$ one has

$$\int_0^1 e^2 dx \leq \int_0^1 e_x^2 dx \leq \frac{2}{k}E(t), \quad \max_{x\in[0,1]} |e(t,x)| \leq \sqrt{\int_0^1 e_x^2\,dx} \leq \sqrt{\frac{2}{k}E(t)}.$$

Hence applying (5.77) one obtains that inequalities (5.78) hold true.

Thus, we need to check that $\eta(\beta,k) < \sqrt{k}$, for any $\varepsilon > 0$ such that $\eta(\beta,k) < \varepsilon < \sqrt{k}$ one has $\delta_1(\varepsilon,\mu) < 0$ and $\delta_2(\varepsilon,\mu) < 0$ for some $\mu > 0$, and $\delta_3(\varepsilon,\alpha) \leq 0$ for some $\alpha > 0$. Indeed, by the definition of $\eta(\beta,k)$ the inequality $\eta(\beta,k) < \sqrt{k}$ is satisfied for some $k > 0$ and $\beta > 0$ if and only if

$$4\beta^2 + 4\pi k\beta - \pi^2 k^2 < 0, \quad \pi^2 k - 4\pi\beta > 0.$$

Solving the quadratic inequality with respect to β one obtains that $\eta(\beta,k)$ is correctly defined, $k,\beta > 0$ and $\eta(\beta,k) < \sqrt{k}$ if and only if inequalities (5.75) are valid.

Let us now turn to the inequalities $\delta_1(\varepsilon,\mu) < 0$ and $\delta_2(\varepsilon,\mu) < 0$. It is easily seen that these inequalities are satisfied for some $\varepsilon \in (0,\sqrt{k})$ and $\mu > 0$ if and only if

$$-k + \frac{4\beta}{\pi} < 0, \quad \sqrt{k} > \varepsilon > \max\left\{\beta\mu, \frac{4\beta}{\mu\pi(\pi k - 4\beta)}\right\}.$$

Taking into account (5.75), and minimizing the last expression with respect to $\mu > 0$ one obtains that $\mu_* = 2/\sqrt{\pi^2 k - 4\pi\beta}$ is optimal, and $\delta_1(\varepsilon,\mu_*) < 0$ and $\delta_2(\varepsilon,\mu_*) < 0$ for some $\varepsilon \in (0,\sqrt{k})$ if and only if

$$\sqrt{k} > \varepsilon > \frac{2\beta}{\sqrt{\pi^2 k - 4\pi\beta}} = \eta(\beta,k).$$

Finally, it is easy to check that $\delta_3(\varepsilon,\alpha) \leq 0$, in particular, if $\alpha = 1/\varepsilon > 0$, provided $\varepsilon \in (0,\sqrt{k})$.

It remains to prove that one can choose the observer gain α as in (5.76). Indeed, solving the quadratic inequality $\delta_3(\varepsilon,\cdot) \le 0$ one gets that $\alpha \in (\alpha_-(\varepsilon), \alpha_+(\varepsilon))$, where

$$\alpha_\pm(\varepsilon) = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - \varepsilon^2 k}}{\varepsilon k} > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \sqrt{k}).$$

It is easy to check that $\alpha'_-(\varepsilon) > 0$, while $\alpha'_+(\varepsilon) < 0$ for any $\varepsilon \in (0, \sqrt{k})$, i.e. the interval $(\alpha_-(\varepsilon), \alpha_+(\varepsilon))$ continuously shrinks as ε increases. Therefore, for any α satisfying (5.76) there exists $\eta(\beta, k) < \varepsilon < \sqrt{k}$ such that $\alpha \in (\alpha_-(\varepsilon), \alpha_+(\varepsilon))$, i.e. $\delta_3(\varepsilon, \alpha) \le 0$, and the proof is complete. $\square$

Let us show that replacing the energy $H(z(t))$ in the control law $u(t) = -\gamma\psi(H(z(t)) - H_*)y(t)$ from the previous section with the estimate $H(\widehat{z}(t))$ obtained with the use of observer (5.69)–(5.71) one obtains a control law that solves the problem under consideration. To this end, let us first show that the energy of a solution of the closed-loop system remain bounded.

Lemma 5.2.1. *Let inequalities* (5.75) *be valid. Consider system* (5.66)–(5.68) *driven by the controller*

$$u(t) = -\gamma\psi\Big(H(\widehat{z}(t)) - H_*\Big)y(t), \tag{5.85}$$

and fed by observer (5.69)–(5.71). *Then for any $\alpha > 0$ satisfying* (5.76) *and for all $\gamma > 0$ there exists $H_{\max} > 0$ such that $H(z(t)) \le H_{\max}$ and $H(\widehat{z}(t)) \le H_{\max}$ for all $t \ge 0$.*

Proof. Denote by $\|\cdot\|$ the standard norm in $L_2(0,1)$, and let $(z(t), \widehat{z}(t))$ be a solution of boundary value problem (5.66)–(5.68), (5.69)–(5.71), (5.85). For any $t \ge 0$ one has

$$\|z_t(t)\| \le \|z_t(t) - \widehat{z}_t(t)\| + \|\widehat{z}_t(t)\| \le \sqrt{2E(t)} + \sqrt{2H(\widehat{z}(t))}.$$

Hence and from Theorem 5.2.3 it follows that there exist $M > 0$ and $\delta > 0$ such that for any $t \ge 0$ the following inequalities hold true:

$$\|z_t(t)\|^2 \le 4ME(0)e^{-\delta t} + 4H(\widehat{z}(t)), \quad \|z_x(t)\|^2 \le \frac{4}{k}ME(0)e^{-\delta t} + \frac{4}{k}H(\widehat{z}(t)).$$

Therefore for all $t \in [0, T_{\max})$ one has

$$H(z(t)) \le \frac{1}{2}\|z_t(t)\|^2 + \frac{k}{2}\|z_x(t)\|^2 + 2\beta \le C_1 + C_2 H(\widehat{z}(t)), \tag{5.86}$$

where $C_1 = 2\beta + 4ME(0)$ and $C_2 = 4$. Arguing in the same way one can easily verify that

$$H(\widehat{z}(t)) \le C_1 + C_2 H(z(t)) \quad \forall t \ge 0. \tag{5.87}$$

Let $t_0 \geq 0$ be arbitrary. If $H(\widehat{z}(t_0)) \leq H_*$, then $H(z(t_0)) \leq C_1 + C_2 H_*$ due to (5.86). Suppose, now, that $H(\widehat{z}(t_0)) > H_*$. If $H(\widehat{z}(t)) > H_*$ for all $t \in [0, t_0]$, then $H(z(t)) \leq H(z(0))$ for any $t \in [0, t_0]$ and $H(\widehat{z}(t_0)) \leq C_1 + C_2 H(z(0))$ due to (5.87) and the fact that for all $t \in [0, t_0)$ one has

$$\frac{d}{dt} H(z(t)) = -\gamma k \psi(H(\widehat{z}(t)) - H_*) z_t(t, 1)^2 \leq 0. \tag{5.88}$$

On the other hand, if $H(\widehat{z}(t_0)) > H_*$, but there exists $t \in [0, t_0]$ such that $H(\widehat{z}(t)) \leq H_*$, then denote $\tau = \sup\{t \in [0, t_0] \mid H(\widehat{z}(t)) = H_*\}$. For any $t \in (\tau, t_0]$ one has $H(\widehat{z}(t)) > H_*$. From (5.86), (5.88) and the definition of τ it follows that $H(z(t)) \leq H(z(\tau)) \leq C_1 + C_2 H_*$ for any $t \in (\tau, t_0]$, which with the use of (5.87) implies that

$$H(\widehat{z}(t_0)) \leq C_1 + C_2 H(z(t_0)) \leq C_1 + C_1 C_2 + C_2^2 H_*.$$

Since $t_0 \geq 0$ was chosen arbitrarily, one obtains that $H(z(t)) \leq H_{\max}$ and $H(\widehat{z}(t)) \leq H_{\max}$ for all $t \geq 0$, where $H_{\max} = \max\left\{H_*, H(z(0)), C_1 + C_2 H_*, C_1 + C_2 H(z(0)), C_1 + C_1 C_2 + C_2^2 H_*\right\}$. □

With the use of the previous lemma we can prove the exponential convergence of the estimate $H(\widehat{z}(t))$ to $H(z(t))$.

Corollary 5.2.1. *Let all assumptions of Lemma 5.2.1 be valid. Then for any $\alpha > 0$ satisfying* (5.76) *and for all $\gamma > 0$ there exist C and $\delta > 0$ such that*

$$\left|H(z(t)) - H(\widehat{z}(t))\right| \leq C\sqrt{E(0)} e^{-\delta t/2} \quad \forall t \geq 0. \tag{5.89}$$

Proof. By the definition of $H(z)$ for all $t \geq 0$ one has

$$\max\left\{\|z_t(t)\|, \|z_x(t)\|, \|\widehat{z}_t(t)\|, \|\widehat{z}_x(t)\|\right\} \leq C_1 := \sqrt{\max\left\{2, \frac{2}{k}\right\} H_{\max}},$$

where $H_{\max} > 0$ is defined in Lemma 5.2.1. Applying the fact that the function $f(s) = s^2/2$ is Lipschitz continuous on $[-C_1, C_1]$ with the Lipschitz constant $L = C_1$ one obtains that

$$\left|\frac{1}{2}\|z_t(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|\widehat{z}_t(t)\|^2\right| \leq C_1\sqrt{2E(t)}, \quad \left|\frac{k}{2}\|z_x(t)\|^2 - \frac{k}{2}\|\widehat{z}_x(t)\|^2\right| \leq kC_1\sqrt{\frac{2}{k}E(t)} \tag{5.90}$$

for all $t \geq 0$. Note that since $z(t, 0) = \widehat{z}(t, 0) = 0$, for any $x \in (0, 1)$ one has

$$|z(t, x) - \widehat{z}(t, x)| = \left|\int_0^x \left(z_x(t, y) - \widehat{z}_x(t, y)\right) dy\right| \leq \|z_x(t) - \widehat{z}_x(t)\|.$$

Hence and from the fact that the function $1 - \cos(\cdot)$ is Lipschitz continuous with the Lipschitz constant $L = 1$ it follows that

$$\left|\int_0^1 \left(\beta(1 - \cos z(t, x)) - \beta(1 - \cos \widehat{z}(t, x))\right) dx\right| \leq \beta \int_0^1 |z(t, x) - \widehat{z}(t, x)|\, dx \leq \beta\sqrt{\frac{2}{k}E(t)}.$$

Combining (5.90) and the inequality above one gets that $|H(z(t)) - H(\widehat{z}(t))| \leq C_2\sqrt{E(t)}$ for all $t \geq 0$ and some $C_2 > 0$. Now applying Theorem 5.2.3 we arrive at the required result. □

Now, we are ready to prove that control law (5.85) indeed solves the energy control problem posed in this section.

Theorem 5.2.4. *Let inequalities* (5.75) *be valid. Consider system* (5.66)–(5.68) *driven by the controller* (5.85), *and fed by observer* (5.69)–(5.71), *where* $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *is a continuous function such that* $\psi(0) = 0$ *and* $\psi(s)s > 0$ *for all* $s \neq 0$. *Suppose also that* $H(z(t)) > 0$ *for all* $t \geq 0$. *Then for all* $H_* > 0$, $\gamma > 0$, *and* $\alpha > 0$ *satisfying* (5.76) *one has* $H(z(t)) \to H_*$ *as* $t \to +\infty$.

Proof. It is easy to see that $H(z(t)) = 0$ if and only if $z(t, x) = 0$ for all $x \in (0, 1)$. Consequently, if $H(z(t_0)) = 0$ for some $t_0 \geq 0$, then $H(z(t)) = 0$ for all $t \geq t_0$ due to the fact that $z(t, x) \equiv 0$ is a solution of boundary value problem (5.66)–(5.68), (5.85) with an arbitrary function $\widehat{z}(t, x)$. Therefore, below we suppose that $H(z(t)) \neq 0$ for all $t \geq 0$.

For any $\varepsilon > 0$ introduce the Lyapunov function $V(t) = H(z(t)) + \varepsilon \operatorname{sign}(H(z(t)) - H_*)g(t)$, where $g(t) = \int_0^1 x z_t z_x \, dx$. With the use of the inequalities

$$\Big| \int_0^1 x z_t z_x \, dx \Big| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 z_t^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^1 z_x^2 \, dx,$$

one gets that

$$0 \leq (1 - \varepsilon k_0) H(z(t)) \leq V(t) \leq (1 + \varepsilon k_0) H(z(t)) \tag{5.91}$$

for all $t \geq 0$ and $\varepsilon < \min\{1, k\}$, where $k_0 = \max\{1, 1/k\}$.

Fix $t \geq 0$ such that $H(z(t)) \neq H_*$. Observe that

$$\frac{d}{dt} V(t) = -\gamma k \psi(H(\widehat{z}(t)) - H_*) z_t^2(t, 1) + \varepsilon \operatorname{sign}(H(z(t)) - H_*) \frac{d}{dt} g(t) \tag{5.92}$$

Furthermore, arguing in the same way as in [162, Appendix A] one can verify that

$$\frac{d}{dt} g(t) \leq -C_0 H(z(t)) + \frac{1}{2} z_t^2(t, 1) + \frac{k}{2} z_x^2(t, 1) \tag{5.93}$$

for some $C_0 > 0$.

Fix an arbitrary $\Delta > 0$. Let us verify, at first, that for any $T > 0$ there exists $t \geq T$ such that $|H(z(t)) - H_*| < \Delta$. Indeed, arguing by reductio ad absurdum, suppose that there exists $T > 0$ such that for any $t \geq T$ one has $|H(z(t)) - H_*| \geq \Delta$. Let us first consider the case when $H(z(t)) \geq H_* + \Delta$ for all $t \geq T$.

From Corollary 5.2.1 it follows that there exists $\tau \geq T$ such that $|H(z(t)) - H(\widehat{z}(t))| \leq \Delta/2$ for all $t \geq \tau$, which implies that $H(\widehat{z}(t)) \geq H_* + \Delta/2$ for all $t \geq \tau$. Define

$$\psi_\Delta = \min\left\{ \psi(s) \;\Big|\; s \in \left[\frac{\Delta}{2}, K\right] \right\} > 0, \quad \Psi_\Delta = \max\left\{ \psi(s) \;\Big|\; s \in \left[\frac{\Delta}{2}, K\right] \right\} < +\infty,$$

where $K > 0$ is such that $H(\widehat{z}(t)) \le H_* + K$ for all $t \ge 0$ (such K exists by Lemma 5.2.1). By the definitions of τ, ψ_Δ and Ψ_Δ one has $0 < \psi_\Delta \le \psi(H(\widehat{z}(t)) - H_*) \le \Psi_\Delta < +\infty$ for all $t \ge \tau$. Applying (5.93), (5.92) and the inequalities above one obtains that

$$\frac{d}{dt}V(t) \le -\varepsilon C_0 H(z(t)) - \gamma k \psi_\Delta z_t^2(t,1) + \frac{\varepsilon}{2} z_t^2(t,1) + \frac{\varepsilon k}{2}\gamma^2 \Psi_\Delta^2 z_t^2(t,1)$$

for any $t \ge \tau$. Choosing $\varepsilon > 0$ sufficiently small and taking into account (5.91) one gets that

$$\frac{d}{dt}V(t) \le -\varepsilon C_0 H(z(t)) \le -C_\varepsilon V(t) \quad \forall t \ge \tau,$$

where $C_\varepsilon = \varepsilon C_0/(1+\varepsilon k_0)$. Therefore for any $t \ge \tau$ one has $V(t) \le V(\tau)e^{-C_\varepsilon(t-\tau)}$, which due to (5.91) implies that

$$H(z(t)) \le \frac{V(\tau)}{1-\varepsilon k_0} e^{-C_\varepsilon(t-\tau)} \quad \forall t \ge \tau.$$

Thus, $H(z(t)) \to 0$ as $t \to \infty$, which contradicts our assumption that $H(z(t)) \ge H_* + \Delta$ for any $t \ge T$.

Suppose, now, that $H(z(t)) < H_* - \Delta$ for all $t \ge T$. Arguing in a similar way to the case $H(z(t)) > H_* + \Delta$, and applying (5.93) and (5.92) one can verify that for any sufficiently small $\varepsilon > 0$ there exist $\tau \ge T$ and $C_\varepsilon > 0$ such that $V(t) \ge V(\tau)e^{C_\varepsilon(t-\tau)}$ for any $t \ge \tau$. Hence with the use of (5.91) one gets that

$$H(z(t)) \ge \frac{1-\varepsilon k_0}{1+\varepsilon k_0} H(z(\tau)) e^{-C_\varepsilon t} \quad \forall t \ge \tau.$$

By our assumption $H(z(\tau)) > 0$. Consequently, $H(z(t)) \to +\infty$ as $t \to \infty$, which contradicts the assumption that $H(z(t)) < H_* - \Delta$ for all $t \ge T$. Thus, for any $T > 0$ there exists $t \ge T$ such that $|H(z(t)) - H_*| < \Delta$.

Let $\tau > 0$ be such that $|H(z(t)) - H(\widehat{z}(t))| \le \Delta/2$ for all $t \ge \tau$ (see Corollary 5.2.1). As we have just proved, there exists $t_0 \ge \tau$ such that $|H(z(t_0)) - H_*| < \Delta$. Let us verify that

$$\big|H(z(t)) - H_*\big| \le \Delta \quad \forall t \ge t_0. \tag{5.94}$$

Then one can conclude that $H(z(t)) \to H_*$ as $t \to \infty$. Arguing by reductio ad absurdum, suppose that there exists $T \ge t_0$ such that $|H(z(T)) - H_*| > \Delta$. Let us consider the case $H(z(T)) > H_* + \Delta$ first. Define $\theta = \sup\big\{t \in [t_0, T] \bigm| H(z(t)) = H_* + \Delta\big\}$. From the definitions of τ and θ it follows that $H(\widehat{z}(t)) \ge H_* + \Delta/2$ for any $t \in [\theta, T]$. Therefore

$$\frac{d}{dt}H(z(t)) = -\gamma k \psi\big(H(\widehat{z}(t)) - H_*\big) z_t^2(t,1) \le 0 \quad \forall t \in [\theta, T].$$

Consequently, $H(z(T)) \le H(z(\theta)) = H_* + \Delta$, which contradicts the definition of T.

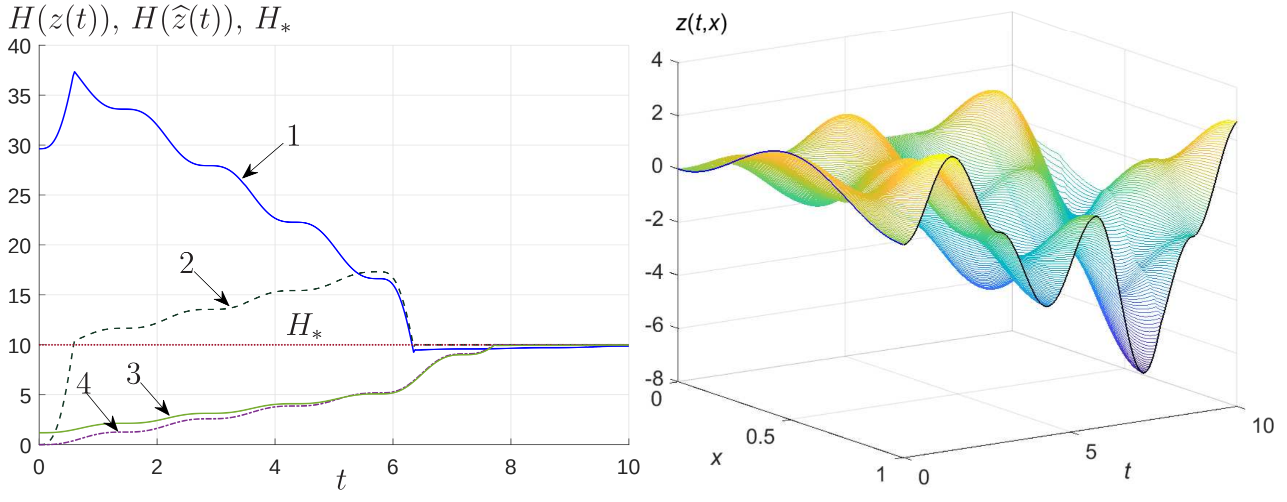


Figure 5.7: Plots of the energy $H(z(t))$ and the energy estimate $H(\widehat{z}(t))$ (left plot): 1) $H(z(t))$ in the case $A = 5$, 2) $H(\widehat{z}(t))$ in the case $A = 5$, 3) $H(z(t))$ in the case $A = 1$, 4) $H(\widehat{z}(t))$ in the case $A = 1$. Right plot: $z(t, x)$.

Suppose, now, that $H(z(T)) < H_* - \Delta$. Define $\theta = \sup\left\{t \in [t_0, T] \;\middle|\; H(z(t)) = H_* - \Delta\right\}$. Taking into account the definition of τ and the fact that $t_0 \geq \tau$ one gets that $H(\widehat{z}(t)) \leq H_* - \Delta/2$ for any $t \in [\theta, T]$, which implies that for all $t \in [\theta, T]$ one has

$$\frac{d}{dt}H(z(t)) = -\gamma k\psi\big(H(\widehat{z}(t)) - H_*\big)z_t^2(t, 1) \geq 0.$$

Therefore, $H(z(T)) \geq H(z(\theta)) = H_* - \Delta$, which contradicts the definition of T. Thus, (5.94) holds true, and $H(z(t)) \to H_*$ as $t \to \infty$ due to the fact that $\Delta > 0$ was chosen arbitrarily. $\square$

The closed-loop energy control system with plant model (5.66)–(5.68), observer (5.69)–(5.71), and controller (5.85) was numerically studied by simulation. The function ψ in (5.85) was chosen as the saturation function $\psi(s) = \mathrm{sat}(100s)$, where $\mathrm{sat}(s) = s$, if $|s| \leq 1$, and $\mathrm{sat}(s) = \mathrm{sign}(s)$ otherwise. The following parameters were used for the simulations: $k = 0.12$, $\beta = 0.02$, $H_* = 10$, $\alpha = 3$, $\gamma = 1$. Initial conditions (5.68) were set to: $z^0(x) = A\big(1 - \cos(2\pi x)\big)$, $z^1(x) = 0$, where the magnitude parameter A was set to either $A = 5$ or $A = 1$ in different simulation runs. Note that $H(z(0)) > H_*$ in the case $A = 5$ and $H(z(0)) < H_*$ in the case $A = 1$. For observer (5.69)–(5.71) zero initial conditions were taken. Simulation results are presented in Fig. 5.7. These results were obtained by prof. B.R. Andrievsky.

Conclusions

Let us give a brief summary of the main results of the dissertation and its structure. In the introduction, a literature review is presented, relevance of the research, as well as its theoretical and practical significance are discussed.

In the first chapter, global codifferentials of DC (Difference-of-Convex) functions are studied and necessary and sufficient global optimality conditions in terms of global codifferentials are obtained. Then a (local) codifferential calculus in Banach spaces is developed and various properties of codifferentiable and quasidifferentiable functions are analysed. In this chapter we also obtained sufficient conditions for the metric regularity of nonsmooth mappings in terms of quasidifferentials and presented a novel description of convex subcones of the contingent cone (Bouligand's tangent cone) to a set defined by quasidifferentiable equality and inequality constraints. These results are utilised to obtain new necessary optimality conditions for nonsmooth mathematical programming problems in terms of quasidifferentials. Finally, in the first chapter we also develop an abstract codifferential calculus for nonsmooth mappings between infinite dimensional spaces, present several particular examples of abstract codifferentiable functions that are commonly used in nonsmooth analysis, and obtain necessary optimality conditions in terms of abstract codifferentials.

The second chapter is devoted to nonsmooth problems of the calculus of variations. We obtain easily verifiable sufficient conditions for the codifferentiability of a nonsmooth integral functional defined on the Sobolev space and present explicit formulae for its quasidifferential and codifferential. Then we study optimality conditions for nonsmooth problems of the calculus of variations, including nonsmooth multidimensional problems of the calculus of variations, nonsmooth problems of Bolza with additional constraints at the boundary, and nonsmooth isoperimetric problems. In this chapter we also present several example demonstrating that optimality conditions in terms of codifferentials are often better than optimality conditions in terms of various subdifferentials.

The third chapter is devoted to the method of codifferentials descent for minimizing nonsmooth functions and its modifications. We present a new theoretical scheme of this method and prove its global convergence, as well as the convergence of a non-stationarity measure. We also describe a quadratic regularization of the method of codifferential descent for minimizing codifferentiable functions subject to convex constraints. Next, we study the method of hypodifferential descent for minimizing nonsmooth convex functions and obtain an upper estimate of the rate of convergence of this method. Finally, in this chapter we describe the method of global codifferential descent for minimizing piecewise affine functions and prove that this method converges to a point of global minimum of a nonconvex piecewise-affine function in a finite number of steps.

Global and local exactness of penalty and augmented Lagrangian functions is studied in Chapter 4. We develop a general principle, called the localization principle, for proving the global exactness of such functions for finite dimensional optimization problems. Then we apply this principle to an analysis of the global exactness of various merit functions, including linear exact penalty functions, Rockafellar-Wets augmented Lagrangian, singular exact penalty functions and Di Pillo-Grippo's exact augmented Lagrangians. In this chapter we also study exact penalty functions for infinite dimensional problems and prove a new theorem on the so-called complete exactness of such functions. This theorem is applied to an optimal control problem for linear evolution equations with terminal constraints.

Finally, nonsmooth generalizations of the speed gradient algorithm are studied in Chapter 5. We present several theorems on convergence of nonsmooth speed gradient algorithms and discuss their applications to the stabilization of the Brockett integrator and synchronization of two Duffing oscillators. In the second part of Chapter 5 we study boundary control problems for distributed systems described by a semilinear Klein-Gordon equation, including output feedback control problem in the case when only boundary measurements are available. Smooth and nonsmooth speed gradient algorithms for solving these problems are analysed and sufficient conditions for the achievement of the control goal are presented. In the case of the output feedback control problem the convergence of an observer for the sine-Gordon equation is analysed as well.

Future theoretical research on constructive nonsmooth analysis can be devoted to the study of extensions of optimality conditions in terms of quasidifferentials to various classes of nonsmooth cone constrained optimization problems (in particular, semi-infinite and nonlinear semidefinite problems) and nonsmooth optimal control problems, a comparative analysis of optimality conditions in terms of quasidifferentials and various subdifferentials, as well as sensitivity and stability analysis of nonsmooth optimization problems.

Future applied research can be devoted to a development of numerical methods for solving nonsmooth optimization problems with various types of nonconvex constraints and refinement of the method of codifferential descent for solving various particular classes of nonsmooth optimization problems. Another interesting applied problem consists in a detailed analysis of efficient numerical method for solving constrained optimization problems (including variational and optimal control problems) based on exact penalty functions and augmented Lagrangians that are studied in this dissertation. In particular, it is necessary to develop various automatic penalty adjustment rules, since the least exact penalty parameter is usually unknown and cannot be accurately estimated in advance.

Notation

DC function — a function that can be represented as the difference of two convex functions;

MFCQ — Mangasarian-Fromovitz constraint qualification;

MGCD — the method of global codifferential descent;

l.s.c. — lower semicontinuous;

u.s.c. — upper semicontinuous;

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ — the set of nonnegative real numbers;

$\overline{\mathbb{R}}$ — extended real line;

0_d — zero vector in $\mathbb{R}^d$;

$|\cdot|$ — the Euclidean norm $\mathbb{R}^d$;

$\tau_{\mathbb{R}}$ — the standard topology of the real line;

$\operatorname{cl} A$ — topological closure of A;

$\operatorname{cl}^* A$ — the closure of a subset A of the dual space in the weak* topology;

$\operatorname{int} A$ — topological interior of A;

$\operatorname{ri} A$ — relative interior of A;

$\operatorname{core} A$ — algebraic interior of A;

o-lim — order limit in a vector lattice;

$B(x, r)$ — closed ball with radius r and centre x;

$U(x, r)$ — open ball with radius r and centre x;

B_X — closed unit ball in a normed space X;

S_X — unit sphere in a normed space X;

$\operatorname{dist}(x, A)$ — distance between a point x and a set A;

$\rho_H(A, B)$ — the Hausdorff distance between sets A and B;

0_X — zero element of a linear space X;

X^* — topological dual space of a normed space X;

w^* — weak* topology on the dual space;

$\sigma(X^*, X)$ — weak* topology on the topological dual space of a normed space X;

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — inner product in a Hilbert space or the canonical duality pairing on $X^* \times X$ defined as $\langle x^*, x \rangle = x^*(x)$;

$\| \cdot \|$ — norm;

$\operatorname{Im} \mathcal{T}$ — the image of a linear map $\mathcal{T}$;

$\mathcal{T}^*$ — the adjoint operator a linear operator $\mathcal{T}$;

$\operatorname{co} A$ — convex hull of A;

$\operatorname{cone} A$ — convex conic hull of A;

$\operatorname{ext} A$ — the set of extreme points of a convex set A;

$\operatorname{span} A$ — linear span of A;

$\operatorname{lin} K$ — lineality space of a convex cone K (i.e. the largest subspace contained in K);

$s(A, v) = \sup\limits_{x^* \in A} \langle x^*, v \rangle$ — the support function of a subset A of the dual space;

$T_A(x)$ — contingent cone (Bouligand's tangent cone) to a set A at a point x;

$N_A(x)$ — normal cone to a convex set A at a point x;

$\mathbb{S}^\ell$ — the set of all real symmetric matrices of order ℓ;

$\operatorname{Tr}(A)$ — the trace of a matrix A;

$\det(A)$ — the determinant of a matrix A;

$\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{Tr}(A^2)}$ — the Frobenius norm of a matrix A;

$\lambda_{\max}(A)$ — the largest eigenvalues of a symmetric matrix A;

$\lambda_{\min}(A)$ — the smallest eigenvalue of a symmetric matrix A;

$A \preceq 0$ — matrix A is positive semidefinite;

$[\cdot]_+$ — the projection operator onto the cone of positive semidefinite matrices;

$\operatorname{dom} f$ — the effective domain of a function f;

$\operatorname{Graph} F$ — the graph of a set-valued mapping F;

$\arg\min\limits_{x \in C} f(x)$ — the set of points of global minimum of a function f on a set C;

S_f — affine support set of a convex function f;

f^* — the convex conjugate of f (Legendre-Fenchel transformation of f);

$\partial f(x)$ — subdifferential of a convex function f at a point x;

$\partial_x f(x, y)$ — subdifferential of a convex function $x \mapsto f(x, y)$;

$\partial_\varepsilon f(x)$ — ε-subdifferential of a convex function at x;

$D_+ V(t)$ — the right-hand side derivative of V at t;

$\nabla f(x)$ — gradient of f at x;

$\operatorname{div} f(x)$ — generalized divergence of a vector-valued function f at x;

$f'(x)$ — Gâteaux derivative of f at x;

$f'(x, v)$ — directional derivative of f at x in direction v;

$f^{\downarrow}(x)$ — the rate of steepest descent of f at x;

$f_A^{\downarrow}(x)$ — the rate of steepest descent of f on a set A at x;

$|\nabla f|(x)$ — strong slope of f at x;

$Df(x)$ — codifferential of f at x;

$\underline{d}f(x)$ — hypodifferential of f at x;

$\overline{d}f(x)$ — hyperdifferential of f at x;

$\underline{d}_{\nu}f(x)$ — truncated hypodifferential of f at x ($\nu \geq 0$);

$\overline{d}_{\mu}f(x)$ — truncated hyperdifferential of f at x ($\mu \geq 0$);

$D_x f(x, y)$ — codifferential of the function $x \mapsto f(x, y)$;

$\underline{d}_x f(x, y)$ — hypodifferential of the function $x \mapsto f(x, y)$;

$\overline{d}_x f(x, y)$ — hyperdifferential of the function $x \mapsto f(x, y)$;

$D_H f(x)$ — H-codifferential of f at x;

$\underline{d}_H f(x)$ — H-hypodifferential of f at x;

$\overline{d}_H f(x)$ — H-hyperdifferential of f at x;

$\underline{\partial}_H f(x)$ — H–subdifferential of f at x;

$\overline{\partial}_H f(x)$ — H–superdifferential of f at x;

$\mathscr{D}f(x)$ — quasidifferential of f at x;

$\underline{\partial}f(x)$ — subdifferential of a quasidifferentiable function f at x;

$\overline{\partial}f(x)$ — superdifferential of a quasidifferentiable function f at x;

$[\mathscr{D}f(x)]^+ = \underline{\partial}f(x) + \overline{\partial}f(x)$ — quasidifferential sum of a quasidifferentiable function f at x;

$\mathscr{D}F(x; y^*)$ — scalar quasidifferential of a vector-valued function F at x with respect to a linear form y^*;

$\underline{\partial}F(x; y^*)$ — scalar subdifferential of a scalarly quasidifferentiable vector-valued function F at x with respect to linear form y^*;

$\overline{\partial}F(x; y^*)$ — scalar superdifferential of a scalarly quasidifferentiable vector-valued function F at x with respect to linear form y^*;

$\partial_{Cl} f(x)$ — Clarke subdifferential of f at x;

$\partial_{MP} f(x)$ — Michel-Penot subdifferential of f at x;

$\partial^- f(x)$ — Dini subdifferential of f at x;

$\partial_a f(x)$ — approximate subdifferential of f at x;

$\partial_M f(x)$ — Mordukhovich subdifferential of f at x;

$\partial_{JL} f(x)$ — Jeyakumar-Luc subdifferential of f at x;

$\partial_p^{\infty} f(x)$ — limiting proximal subdifferential of f at x;

$\partial_F^{\infty} f(x)$ — limiting Fréchet subdifferential of f at x;

$E^* f(x)$ — upper exhauster of f at x;

$\partial^2 f(x)$ — generalized Hessian of a $C^{1,1}$ function f at x;

$\mathrm{L}^p(\Omega)$ — the space of all measurable functions for which the p-th power of the absolute value is Lebesgue integrable on Ω ($1 \le p < \infty$);

$\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ — the space of all measurable functions that are essentially bounded on Ω;

$\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ — the space of all measurable functions with values in $\mathbb{R}^m$ each component of which belongs to $\mathrm{L}^p(\Omega)$;

$\mathrm{L}^1_{loc}(\Omega)$ — the space of all measurable functions that are locally Lebesgue integrable on Ω;

$\mathrm{L}^2((0,T); X)$ — the space of all measurable functions $u\colon [0,T] \to X$ (here X is a normed space) for which $\int_0^T \|u(t)\|^2\, dt < +\infty$;

$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ — the Sobolev space ($1 \le p \le +\infty$);

$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ — the space of all measurable functions with values in $\mathbb{R}^m$ each component of which belongs to $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$;

$\mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbb{R}^m)$ — the space of all infinitely differentiable functions with values in $\mathbb{R}^m$ that have a compact support;

$\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbb{R}^m)$ — the closure of $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbb{R}^m)$ in the Sobolev space $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$;

$\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d}; \mathrm{div})$ — the space of all those functions $u \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^{m\times d})$ for which there exists the generalized divergence that belongs to $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$;

$C^{1,1}$ function — continuously differentiable function with locally Lipschitz continuous gradient;

$\mathcal{R}(x_0, T)$ — reachable set of a controlled system from a point x_0 in time T;

$\mathrm{sign}(x)$ — the sign of x;

$\mathrm{Sign}(\cdot)$ — set-valued version of the signum function $\mathrm{sign}(\cdot)$ ($\mathrm{Sign}(0) = [-1, 1]$ and $\mathrm{Sign}(x) = \mathrm{sign}(x)$ when $x \neq 0$);

$\mathrm{sat}(\cdot)$ — saturation function with values in $[-1, 1]$.

Bibliography

[1] Aban'kin, A.E. Unconstrained minimization of H-hyperdifferentiable functions / A.E. Aban'kin // Comput. Math. Math. Phys. — 1998. — Vol. 38. — No. 9. — pp. 1439–1446.

[2] Abbasov, M.E. Extremum conditions in terms of adjoint exhausters / M.E. Abbasov // Vestnik St.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr. — 2011. — No. 2. — pp. 3–8. [in Russian].

[3] Abbasov, M.E. Constrained optimality conditions in terms of proper and adjoint coexhausters / M.E. Abbasov // Vestnik St.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr. — 2019. — Vol. 15. — No. 2. — pp. 160–172. [in Russian].

[4] Abbasov, M.E. Optimality conditions for an exhausterable function on an exhausterable set / M.E. Abbasov // J. Glob. Optim. — 2020. — Vol. 76. — No. 1. — pp. 57–67.

[5] Abbasov, M.E. Extremum conditions for a nonsmooth function in terms of exhausters and coexhausters / M.E. Abbasov, V.F. Demyanov // Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.). — 2010. — Vol. 269. — Suppl. 1. — pp. 6–15.

[6] Abbasov, M.E., Demyanov V.F. Proper and adjoint exhauster in nonsmooth analysis: optimality conditions / M.E. Abbasov // J. Glob. Optim. — 2013. — Vol. 56. — No. 2. — pp. 569–585.

[7] Abbasov, M.E. Adjoint coexhausters in nonsmooth analysis and extremality conditions / M.E. Abbasov, V.F. Demyanov // J. Optim. Theory Appl. — 2013. — Vol. 156. — No. 3. — pp. 535–553.

[8] Adams, R.A. Sobolev Spaces / R.A. Adams. — New York: Academic Press, 1975. — 268 p.

[9] Addi, K. A qualitative mathematical analysis of a class of linear variational inequalities via semi-complementarity problem: applications in electronics / K. Addi, B. Brogliato, D. Goeleven // Math. Program. — 2011. — Vol. 126. — No. 1. — pp. 31–67.

[10] Alanis, A.Y. Inverse optimal control with speed gradient for a power electric system using a neural reduced model / A.Y. Alanis, E.A. Lastire, N. Arana-Daniel, C. Lopez-Franco // Mathematical Problems In Engineering. — 2014. — Vol. 2014. — Article ID: 514608. — pp. 1–21.

[11] Andramonov, M.Yu. The method of confidence neighbourhood for minimizing codifferentiable functions / M.Yu. Andramonov // Russ. Math. — 2004. — Vol. 48. — No. 1. — pp. 1–7.

[12] Andramonov, M.Yu. Implementation of analytical codifferentiation in Matlab / M.Yu. Andramonov, G.Sh. Tamasyan // Num. Meth. Prog. — 2007. — Vol. 8. — No. 1. — pp. 1–5. [in Russian]

[13] Andrievskij B.R. Velocity gradient algorithms in control and adaptation problems / B.R. Andrievskij, A.A. Stotskij, A.L. Fradkov // Autom. Remote Control. — 1988. — Vol. 49. — No. 12. — pp. 1533–1564.

[14] Angelov, T.A. On evaluation of codifferentials / T.A. Angelov // Num. Meth. Prog. — 2013. — Vol. 14. — No. 1. — pp. 113–122. [in Russian].

[15] Angelov, T.A. Representation of piecewise-affine functions as the difference of polyhedral / T.A. Angelov // Vestnik St.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr. — 2016. — No. 1. — pp. 4–18. [in Russian].

[16] Antczak, T. Optimality conditions in quasidifferentiable vector optimization / T. Antczak // J. Optim. Theory Appl. — 2016. — Vol. 171. — No. 2. — pp. 708–725.

[17] Aubin, J.–P. Differential Inclusions / J.-P. Aubin, A. Cellina. — Berlin: Springer–Verlag, 1984. — 364 p.

[18] Aubin, J.–P. Set–Valued Analysis / J.-P. Aubin, H. Frankowska. — Boston: Birkhauser, 1990. — 461 p.

[19] Auslender, A. Stability in mathematical programming with non-differentiable data / A. Auslender // SIAM J. Control Optim. — 1984. — Vol. 22. — No. 2. — pp. 239–254.

[20] Azé, D. A unified theory for metric regularity of multifunctions / D. Azé // J. Convex Anal. — 2006. — Vol. 13. — No. 2. — pp. 225–252.

[21] Bagriov, A.M. Numerical methods for minimizing quasidifferentiable functions: a survey and comparison / A.M. Bagirov // Quasidifferentiability and Related Topics / V.F. Demyanov, A.M. Rubinov. — Dordrecht, 2000. — pp. 33–71.

[22] Bagirov, A. A method for minimization of quasidifferentiable functions / A. Bagirov // Optim. Methods Softw. — 2002. — Vol. 17. — No. 1. — pp. 31-60.

[23] Numerical Nonsmooth Optimization / editors A.M. Bagirov, M. Gaudioso, N. Karmitsa, M.M. Mäkelä, S. Taheri. — Cham: Springer, 2020. — 715 p.

[24] Bagirov, A.M. Discrete gradient method: derivative-free method for nonsmooth optimization / A.M. Bagirov, B. Karasözen, M. Sezer // J. Optim. Theory Appl. — 2008. — Vol. 137. — No. 2. — pp. 317–334.

[25] Bagirov, A. Introduction to Nonsmooth Optimization / A. Bagirov, N. Karmitsa, M.M. Mäkelä. — Cham: Springer, 2014. — 390 p.

[26] Bagirov, A. M. Truncated codifferential method for nonsmooth convex optimization / A.M. Bagirov, A. Nazari Ganjehlou, J. Ugon, A.H. Tor // Pacific J. Optim. — 2010. — Vol. 6. — No. 3. — pp. 483–496.

[27] Bagirov, A.M. A multidimensional descent method for global optimization / A.M. Bagirov, A.M. Rubinov, J. Zhang // Optim. — 2009. — Vol. 58. — No. 5. pp. 611–625.

[28] Bagirov, A.M. Codifferential method for minimizing DC functions / A.M. Bagirov, J. Ugon // J. Glob. Optim. — 2011. — Vol. 50. — No. 1. — pp. 3–22.

[29] Baier, R. Directed subdifferentiable functions and the directed subdifferential without delta-convex structure / R. Baier, E. Farkhi, V. Roshchina // J. Optim. Theory Appl. — 2014. — Vol. 160. — No. 2. — pp. 391–414.

[30] Baier, R. From quasidifferentiable to directed subdifferentiable functions: exact calculus rules / R. Baier, E. Farkhi, V. Roshchina // J. Optim. Theory Appl. — 2016. — Vol. 171. — No. 2. — pp. 384–401.

[31] Basaeva, E.K. Quasidifferentials in K-spaces / E.K. Basaeva // Vladikavkaz. Mat. Zh. — 2003. — Vol. 5. — No. 3. — pp. 14–30. [in Russian]

[32] Basaeva, E.K. Necessary conditions for the extremum in vector quasi-differentiable programs / E.K. Basaeva // Vladikavkaz. Mat. Zh. — 2004. — Vol. 6. — No. 1. — pp. 13–25. [in Russian].

[33] Basaeva, E.K. Necessary conditions for an extremum in vector quasidifferentiable extremal problems / E.K. Basaeva // Vladikavkaz. Mat. Zh. — 2008. — Vol. 10. — No. 3. — pp. 3–10. [in Russian].

[34] Basaeva, E.K. Quasidifferentials in Kantorovich Spaces / E.K. Basaeva, A.G. Kusraev, S.S. Kutateladze // J. Optim. Theory Appl. — 2016. — Vol. 171. — No. 2. — pp. 365–383.

[35] Bellaassali, S. Contributions à l'optimisation multicretère: PhD thesis. Université de Bourgogne, Laboratoire Analyse Appliquée et Optimisation / S. Bellaassali. — Dijon, France, 2003. — 108 p.

[36] Bertsekas, D.P. Necessary and sufficient conditions for a penalty method to be exact / D.P. Bertsekas // Math. Program. — 1975. — Vol. 9. — No. 1. — pp. 87–99.

[37] Bigi, G. Outer approximation algorithms for canonical DC problems / G. Bigi, A. Frangioni, Q. Zhang // J. Glob. Optim. — 2010. — Vol. 46. — No. 2. — pp. 163–189.

[38] Bigi, G. Approximate optimality conditions and stopping criteria in canonical DC programming / G. Bigi, A. Frangioni, Q. Zhang // Optim. Methods Softw. — 2010. — Vol. 25. — No. 1. — pp. 19–27.

[39] Birgin, E.G. Practical Augmented Lagrangian Methods for Constrained Optimization / E.G. Birgin, J.M. Martinez. — Philadelphia: SIAM, 2014. — 234 p.

[40] Blanquero, R. On covering methods for D.C. optimization / R. Blanquero, E. Carrizosa // J. Glob. Optim. — 2000. — Vol. 18. — No. 3. — pp. 265–274.

[41] Bogachev, V.I. Measure Theory. Volume I / V.I. Bogachev. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. — 517 p.

[42] Bonnans, J.F. Perturbation Analysis of Optimization Problems / J.F. Bonnans, A. Shapiro. — New York: Springer, 2000. — 618 p.

[43] Borwein, J.M. Stability and regular points of inequality systems / J.M. Borwein // J. Optim. Theory Appl. — 1986. — Vol. 48. — No. 1. — pp. 9–52.

[44] Borwein, J.M. The differentiability of real functions on normed linear space using generalized subgradients / J.M. Borwein, S.P. Fitzpatrick, J.R. Giles // J. Math. Anal. Appl. — 1987. — Vol. 128. — No. 2. — pp. 512–534.

[45] Borwein, J. Notions of relative interior in Banach spaces / J. Borwein, R. Goebel // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 115. — No. 4. — pp. 2542–2553.

[46] Borwein, J.M. Partially finite convex programming, Part I: Quasi relative interiors and duality theory / J.M. Borwein, A.S. Lewis // Math. Program. — 1992. — Vol. 57. — No. 1–3. — pp. 15–48.

[47] Brockett, R.W. Asymptotic stability and feedback stabilization / R.W. Brockett // Differential Geometric Control Theory / R.W. Brockett, R.S. Millman, H.J. Sussmann. — Boston, 1983. — pp. 181–191.

[48] Burachik, R.S. Duality and exact penalization for general augmented Lagrangians / R.S. Burachik, A.N. Iusem A.N., J.G. Melo // J. Optim. Theory Appl. — 2010. — Vol. 147. — No. 1. — pp. 125–140.

[49] Burachik, R.S. Abstract convexity and augmented Lagrangians / R.S. Burachik, A. Rubinov // SIAM J. Optim. — 2007. — Vol. 18. — No. 2. — pp. 413–436.

[50] Burachik, R.S. Existence of augmented Lagrange multipliers for semi-infinite programming problems / R.S. Burachik, X.Q. Yang, Y.Y. Zhou // J. Optim. Theory Appl. — 2017. — Vol. 173. — No. 2. — pp. 471–503.

[51] Burke, J.V. An exact penalization viewpoint on constrained optimization / J.V. Burke // SIAM J. Control Optim. — 1991. — Vol. 29. — No. 4. — pp. 968–998.

[52] Burke, J.V. A robust gradient sampling algorithm for nonsmooth, nonconvex optimization / J.V. Burke, A.S. Lewis, M.L. Overton // SIAM J. Optim. — 2005. — Vol. 15. — No. 3. — pp. 751–779.

[53] Cheng, G. On feedback control of chaotic continuous-time systems / G. Cheng, X. Dong // IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundam. Theory Appl. — 1993. — Vol. 40. — No. 9. — pp. 591-601.

[54] Clarke, F.H. The Euler–Lagrange differential inclusion / F.H. Clarke // J. Differ. Equ. — 1975. — Vol. 19. — No. 1. — pp. 80–90.

[55] Clarke, F.H. The generalized problem of Bolza / F.H. Clarke // SIAM J. Control Optim. — 1976. — Vol. 14. — No. 4. — pp. 682–699.

[56] Clarke, F.H. The Erdmann condition and Hamiltonian inclusions in optimal control and the calculus of variations / F.H. Clarke // Canadian J. Math. — 1980. — Vol. 32. — No. 2. — pp. 494–509.

[57] Clarke, F.H. Optimization and Nonsmooth Analysis / F.H. Clarke. — Philadelphia: SIAM, 1990. — 320 p.

[58] Clarke, F. Necessary Conditions in Dynamic Optimization / F.H. Clarke. — Providence, Rhode Island: AMS, 2005. — 113 p.

[59] Clarke, F. Discontinuous feedback and nonlinear systems / F. Clarke // IFAC Proc. Vol. — 2010. — Vol. 43. — No. 14. — pp. 1–29.

[60] Clarke, F.H. The nonsmooth maximum principle / F.H. Clarke, M.R. de Pinho // Control and Cybernetics. — 2009. — Vol. 38. — No. 4A. — pp. 1151–1167.

[61] Clarke, F.H. Nonsmooth Analysis and Control Theory / F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski. — New York: Springer–Verlag, 1998. — 278 p.

[62] Cominetti, R. Metric regularity, tangent sets, and second-order optimality conditions / R. Cominetti // Appl. Math. Optim. — 1990. — Vol. 21. — No. 1. — pp. 265–287.

[63] Conn, A.R. Introduction to Derivative-Free Optimization / A.R. Conn, K. Scheinberg, L.N. Vicente. — Philadelphia: SIAM, 2009. — 276 p.

[64] Contaldi, G. A continuously differentiable exact penalty function for nonlinear programming problems with unbounded feasible set / G. Contaldi, G. Di Pillo, S. Lucidi // Oper. Res. Lett. — 1993. — Vol. 14. — No. 3. — pp. 153–161.

[65] Curtis, F.E. An adaptive gradient sampling algorithm for non-smooth optimization / F.E. Curtis, X. Que // Optim. Methods Softw. — 2013. — Vol. 28. — No. 6. — pp. 1302–1324.

[66] Dacorogna, B. Direct Methods in the Calculus of Variations / B. Dacorogna. — New York: Springer, 2008. — 634 p.

[67] Danskin, J.M. The theory of max-min, with applications / J.M. Danskin // SIAM J. Appl. Math. — 1966. — Vol. 14. — No. 4. — pp. 641–664.

[68] Danskin, J.M. The Theory of Max-Min and its Application to Weapons Allocation Problems / J.M. Danskin. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1967. — 138 p.

[69] De Giorgi, E. Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza / E. De Giorgi, A. Marino, M. Tosques // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisische, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Series 8. — 1980. — Vol. 68. — No. 3. — pp. 180-187.

[70] Demyanov, V.F. Towards minimization of the maximal deviation / V.F. Demyanov // Vestnik LGU. Series 1. — 1966. — Vol. 2. — No. 7. — pp. 21–27. [in Russian].

[71] Dem'yanov, V.F. On the solution of several minimax problems. I / V.F. Dem'yanov // Cybern. Syst. Anal. — 1966. — Vol. 2. — No. 6. — pp. 47–53.

[72] Demyanov, V.F. Minimax: directional differentiability / V.F. Demyanov. — Leningrad: Izd-vo LGU, 1974. — 112 p. [in Russian].

[73] Demyanov, V.F. On codifferentiabl functions / V.F. Demyanov // Vestnik LGU. Series 1. — 1988. — Vol. 2. — No. 8. — pp. 22–26. [in Russian].

[74] Dem'yanov, V.F. Codifferentiability and codifferentials of nonsmooth functions / V.F. Dem'yanov // Dokl. Math. — 1988. — Vol. 38. — No. 3. — pp. 631–634.

[75] Demyanov, V.F. Continuous generalized gradients for nonsmooth functions / V.F. Demyanov // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 304 / A. Kurzhanski, K. Neumann and D. Pallaschke. — Berlin, 1988. — pp. 24–27.

[76] Demyanov, V.F. Smoothness of nonsmooth functions / V.F. Demyanov // Nonsmooth Optimization and Related Topics / F.H. Clarke, V.F. Demyanov, F. Giannessi. — Boston, 1989. — pp. 79–88.

[77] Demyanov, V.F. Nonsmooth problems in calculus of variations / V.F. Demyanov // Advances in Optimization / W. Oettli, D. Pallaschke. — Berlin, Heidelberg, 1992. — pp. 227–238.

[78] Demyanov, V.F. Exact penalty functions in nonsmooth optimization problems / V.F. Demyanov // Vestnik St.-Petersburg Univ. Series 1. — 1994. — Vol. 4. — No. 22. — pp. 21–27. [in Russian].

[79] Demyanov, V.F. Fixed point theorem in nonsmooth analysis and its applications / V.F. Demyanov // Numer. Funct. Anal. Optim. — 1995. — Vol. 16. — No. 1–2. pp. 53–109.

[80] Demyanov, V.F. Exhausters of a positively homogeneous function / V.F. Demyanov // Optim. — 1999. — Vol. 45. — Nos. 1–4. — pp. 13–29.

[81] Demyanov, V.F. Exhausters and convexificators — new tools in nonsmooth analysis / V.F. Demyanov // Quasidifferentiability and Related Topics / V.F. Demyanov, A.M. Rubinov. — Dordrecht, 2000. — pp. 85–137.

[82] Demyanov, V.F. Conditions for an extremum in metric spaces / V.F. Demyanov // J. Glob. Optim. — 2000. — Vol. 17. — Nos. 1–4. — pp. 55–63.

[83] Demyanov, V.F. Constrained problems of calculus of variations via penalization technique / V.F. Demyanov // Equilibrium Problems and Variational Models / P. Daniele, F. Giannessi, A. Maugeri. — Boston, 2003. — pp. 79–108.

[84] Dem'yanov, V.F. Exact penalty functions and problems of variation calculus / V.F. Demyanov // Autom. Remote Control. — 2004. — Vol. 65. — No. 2. — pp. 280–290.

[85] Demyanov, V.F. Extremum conditions and the calculus of variations / V.F. Demyanov. — M.: Vysh. Shkola, 2005. — 335 p. [in Russian].

[86] Demyanov, V.F. An old problem and new tools / V.F. Demyanov // Optim. Methods Softw. — 2005. — Vol. 20. — No. 1. — pp. 53–70.

[87] Demyanov, V.F. Nonsmooth optimization / V.F. Demyanov // Nonlinear optimization / G. Di Pillo, F. Schoen. — Berlin, 2010. — pp. 55–163

[88] Demyanov, V.F. Proper exhausters and coexhausters in nonsmooth analysis / V.F. Demyanov // Optim. — 2012. — Vol. 61. — No. 11. — pp. 1347–1368.

[89] Demyanov, V.F. A method of truncated codifferential with application to some problems of cluster analysis / V.F. Demyanov, A.M. Bagirov, A.M. Rubinov // J. Glob. Optim. — 2002. — Vol. 23. — No. 1. — pp. 63–80.

[90] Demyanov, V.F. Exact penalization via Dini and Hadamard conditional derivatives / V.F. Demyanov, G. Di Pillo, F. Facchinei // Optim. Methods Softw. — 1998. — Vol. 9. — No. 1–3. — pp. 19–36.

[91] Quasidifferential Calculus / editors V.F. Demyanov, L.C.W. Dixon. — Berlin, Heidelberg: Springer, 1986. — 222 p.

[92] Demyanov, V.F. Codifferentiable functions in Banach spaces: methods and applications to the calculus of variations / V.F. Demyanov, M.V. Dolgopolik // Vestnik St.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr. — 2013. — No. 3. — pp. 48-67. [in Russian].

[93] Dem'yanov, V.F. Two-level optimization problems and penalty functions / V.F. Dem'yanov, F. Fakkinei // Russian Math. (Iz. VUZ). — 2003. — Vol. 47. — No. 12. — pp. 46–58.

[94] Demyanov, V.F. Variational problems with constraints involving higher-order derivatives / V.F. Demyanov, F. Giannessi // Equilibrium Problems and Variational Models / P. Daniele, F. Giannessi, A. Maugeri. — Boston, 2003. — pp. 109–134.

[95] Demyanov, V.F. Optimal control problems via exact penalty functions / V.F. Demyanov, F. Giannessi, V.V. Karelin // J. Glob. Optim. — 1998. — Vol. 12. — No. 3. — pp. 215–223.

[96] Demyanov, V.F. Optimal control problems and penalization / V.F. Demyanov, F. Giannessi, V.V. Karelin // Nonlinear Optimization and Related Topics / G. Di Pillo, F. Giannessi. — Boston, 2000. — pp. 67–78.

[97] Demyanov, V.F. On the penalization approach to optimal control problems / V.F. Demyanov, F. Giannessi, V. Karelin // IFAC Proc. Vol. — 2000. — Vol. 33. — No. 16. — pp. 71–74.

[98] Demyanov, V.F. Variational control problems with constraints via exact penalization / V.F. Demyanov, F. Giannessi, G.Sh. Tamasyan // Variational Analysis and Applications / F. Giannessi, A. Maugeri. — Boston, 2005. — pp. 301–342.

[99] Demyanov, V.F. Hunting for a smaller convex subdifferential / V.F. Demyanov, V. Jeyakumar // J. Glob. Optim. — 1997. — Vol. 10. — No. 3. — pp. 305–326.

[100] Dem'yanov, V.F. Introduction to Minimax / V.F. Dem'yanov, V.N. Malozemov. — New York: Dover Publications, 2014. — 307 p.

[101] Dem'yanov, V.F. An optimal control problem with non-smooth differential constraints / V.F. Dem'yanov, V.N. Nikulina, I.R. Shablinskaya // Differ. Uravn. — 1985. — Vol. 21. — No. 8. — pp. 1324–1330. [in Russian].

[102] Demyanov, V.F. Quasidifferentiable functions in optimal control / V.F. Demyanov, V.N. Nikulina, I.R. Shablinskaya // Quasidifferential Calculus / V.F. Demyanov, L.C.W. Dixon. — Berlin, 1986. — pp. 160–175.

[103] Dem'yanov, V.F. Minimization of a quasi-differentiable function in a quasi-differentiable set / V.F. Dem'yanov, L.N. Polyakova // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 1980. — Vol. 20. — No. 4. — pp. 34–43.

[104] Demyanov, V.F. On one generalization of the notion of subdifferential / V.F. Demyanov, L.N. Polyakova, A.M. Rubniov // All-Russian conference "Dynamic control": proceedings. — Sverdlovsk, 1979. — pp. 79–84. [in Russian].

[105] Demyanov, V.F. Constrained optimality conditions in terms of upper and lower exhausters / V.F. Demyanov, V.A. Roshchina // Appl. Comput. Math. — 2005. — Vol. 4. — No. 2. — pp. 25–35.

[106] Demyanov, V.F. Optimality conditions in terms of upper and lower exhausters / V.F. Demyanov, V.A. Roshchina // Optim. — 2006. — Vol. 55. — Nos. 5–6. — pp. 525–540.

[107] Demyanov, V.F. Exhausters, optimality conditions and related problems / V.F. Demyanov, V.A. Roshchina // J. Glob. Optim. — 2008. — Vol. 40. — Nos. 1–3. — pp. 71–85.

[108] Demyanov, V.F. Exhausters and subdifferentials in non-smooth analysis / V.F. Demyanov, V. Roshchina // Optim. — 2008. — Vol. 57. — No. 1. — pp. 41–56.

[109] Demyanov, V.F. On quasidifferentiable functionals / V.F. Demyanov, A.M. Rubinov // Sov. Math., Dokl. — 1980. — Vol. 21. — pp. 14–17.

[110] Demyanov, V.F. On quasidifferentiable mappings / V.F. Demyanov, A.M. Rubinov // Mathematische Operationforschung und Statistik, Series Optimization. — 1983. — Vol. 14. — No. 1. — pp. 3–21.

[111] Demyanov, V.F. Constructive Nonsmooth Analysis / V.F. Demyanov, A.M. Rubinov. — Frankfurt: Peter Lang, 1995. — 416 p.

[112] Quasidifferentiability and Related Topics / editors V.F. Demyanov, A.M. Rubinov. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. — 414 p.

[113] Demyanov, V.F. Exhausters, coexhausters and converters in nonsmooth analysis / V.F. Demyanov, J.A. Ryabova // Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2011. — Vol. 31. — No. 4. — pp. 1273–1292.

[114] Demyanov, V.F. Quasidifferentiability and nonsmooth modelling in mechanics, engineering and economics / V.F. Demyanov, G. Stavroulakis, L.N. Polyakova, P.D. Panagiotopoulos. — Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers, 1996. — 348 p.

[115] Demyanov, V.F. Exact penalty functions in isoperimetric problems / V.F. Demyanov, G.Sh. Tamasyan // Optim. — 2011. — Vol. 60. — No. 8. — pp. 1-25.

[116] Demyanov, V.F. Direct methods in the parametric moving boundary variational problem / V.F. Demyanov, G.Sh. Tamasyan // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2014. — Vol. 35. — No. 7–9. — pp. 934–961.

[117] Demyanov, V.F. Nondifferentiable Optimization / V.F. Demyanov, L.V. Vasiliev. — M.: Nauka, 1981. — 384 p. [in Russian].

[118] Di, S. Classical optimality conditions under weaker assumptions / S. Di // SIAM J. Optim. — 1996. — Vol. 6. — No. 1. — pp. 178–197.

[119] Di, S. Contingent cone to a set defined by equality and inequality constraints at a Fréchet differentiable point / S. Di, R. Poliquin // J. Optim. Theory Appl. — 1994. — Vol. 81. — No. 3. — pp. 469–478.

[120] Di Pillo, G. Exact penalty methods / G. Di Pillo // Algorithms for Continuous Optimization: the State of the Art / E. Spedicato. — Boston, 1994. — pp. 1–45.

[121] Di Pillo, G. Exact barrier function methods for Lipschitz programs / G. Di Pillo, F. Facchinei // Appl. Math. Optim. — 1995. — Vol. 32. — No. 1. — pp. 1–31.

[122] Di Pillo, G. A new class of augmented Lagrangians in nonlinear programming / G. Di Pillo, L. Grippo // SIAM J. Control Optim. — 1979. — Vol. 17. — No. 5. — pp. 618–628.

[123] Di Pillo, G. A new augmented Lagrangian function for inequality constraints in nonlinear programming problems / G. Di Pillo, L. Grippo // J. Optim. Theory Appl. — 1982. — Vol. 36. — No. 4. — pp. 495–519.

[124] Di Pillo, G. A continuously differentiable exact penalty function for nonlinear programming problems with inequality constraints / G. Di Pillo, L. Grippo // SIAM J. Control Optim. — 1985. — Vol. 23. — No. 1. — pp. 72–84.

[125] Di Pillo, G. On the exactness of a class of nondifferentiable penalty functions / G. Di Pillo, L. Grippo // J. Optim. Theory Appl. — 1988. — Vol. 57. — No. 3. — pp. 399–410.

[126] Di Pillo, G. Exact penalty functions in constrained optimization / G. Di Pillo, L. Grippo // SIAM J. Control Optim. — 1989. — Vol. 27. — No. 6. — pp. 1333-1360.

[127] Di Pillo, G. An exact penalty-Lagrangian approach for large-scale nonlinear programming / G. Di Pillo, G. Liuzzi, S. Lucidi // Optim. — 2011. — Vol. 60. — Nos. 1–2. — pp. 223–252.

[128] Di Pillo, G. An exact augmented Lagrangian function for nonlinear programming with two-sided constraints / G. Di Pillo, G. Liuzzi, S. Lucidi, L. Palagi // Comput. Optim. Appl. — 2003. — Vol. 25. — Nos. 1–3. — pp. 57–83.

[129] Di Pillo, G. On exact augmented Lagrangian functions in nonlinear programming / G. Di Pillo, S. Lucidi // Nonlinear Optimization and Applications / G. Di Pillo, F. Giannessi. — New York, 1996. — pp. 85–100.

[130] Di Pillo, G. An augmented Lagrangian function with improved exactness properties / G. Di Pillo, S. Lucidi // SIAM J. Optim. — 2001. — Vol. 12. — No. 2. — pp. 376–406.

[131] Di Pillo, G. An exact penalty-Lagrangian approach for a class of constrained optimization problems with bounded variables / G. Di Pillo, S. Lucidi, L. Palagi // Optim. — 1993. — Vol. 28. — No. 2. — pp. 129–148.

[132] Dolgopolik, M.V. Codifferential calculus in normed spaces / M.V. Dolgopolik // J. Math. Sci. — 2011. — Vol. 173. — No. 5. — pp. 441–462.

[133] Dolgopolik, M.V. Inhomogeneous convex approximations of nonsmooth functions / M.V. Dolgopolik // Russian Math. (Iz. VUZ). — 2012. — Vol. 56. — No. 12. — pp. 28–42.

[134] Dolgopolik, M.V. Nonsmooth problems of calculus of variations with a codifferentiable integrand / M.V. Dolgopolik // Constructive nonsmooth analysis and related topics: proceedings of the international conference. — St. Petersburg, 2012. — pp. 46–48.

[135] Dolgopolik M.V. Abstract codifferential calculus in normed spaces and its applications to nonsmooth optimization: Candidate Dissertation / M.V. Dolgopolik. — St. Petersburg, Russia, 2014. — 140 p. [in Russian]

[136] Dolgopolik, M.V. Nonsmooth problems of calculus of variations via codifferentiation / M.V. Dolgopolik // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. — 2014. — Vol. — 20. — No. 4. — pp. 1153–1180.

[137] Dolgopolik, M.V. Abstract convex approximations of nonsmooth functions / M.V. Dolgopolik // Optim. — 2014. — Vol. 64. — No. 7. — pp. 1439–1469.

[138] Dolgopolik, M.V. A unifying theory of exactness of linear penalty functions / M.V. Dolgopolik // Optim. — 2016. — Vol. 65. — No. 6. — pp. 1167–1202.

[139] Dolgopolik, M.V. Smooth exact penalty functions: a general approach / M.V. Dolgopolik // Optim. Lett. — 2016. — Vol. 10. — No. 3. — pp. 635–648.

[140] Dolgopolik, M.V. Smooth exact penalty functions II: a reduction to standard exact penalty functions / M.V. Dolgopolik // Optim. Lett. — 2016. — Vol. 10. — No. 7. — pp. 1541–1560.

[141] Dolgopolik, M.V. A unifying theory of exactness of linear penalty functions II: parametric exact penalty functions / M.V. Dolgopolik // Optim. — 2017. — Vol. 66. — No. 10. — pp. 1577–1622.

[142] Dolgopolik, M.V. Existence of augmented Lagrange multipliers: reduction to exact penalty function and localization principle // Math. Program. — 2017. — Vol. 166. — No. 1–2. — pp. 297–326.

[143] Dolgopolik, M. Convergence analysis of the method of codifferential descent / M. Dolgopolik // Proceedings of the international conference "Constructive nonsmooth analysis and related problems" dedicated to the memory of Professor V.F. Demyanov. Part II. — St. Petersburg, 2017. — pp. 17–21.

[144] Dolgopolik, M.V. A convergence analysis of the method of codifferential descent / M.V. Dolgopolik // Comput. Optim. Appl. — 2018. — Vol. 71. — No. 3. — pp. 879–913.

[145] Dolgopolik, M.V. Augmented Lagrangian functions for cone constrained optimization: the existence of global saddle points and exact penalty property / M.V. Dolgopolik // J. Glob. Optim. — 2018. — Vol. 71. — No. 2. — pp. 237–296.

[146] Dolgopolik, M.V. A unified approach to the global exactness of penalty and augmented Lagrangian functions I: parametric exactness / M.V. Dolgopolik // J. Optim. Theory Appl. — 2018. — Vol. 176. — No. 3. — pp. 728–744.

[147] Dolgopolik, M.V. A unified approach to the global exactness of penalty and augmented Lagrangian functions II: extended exactness / M.V. Dolgopolik // J. Optim. Theory Appl.. — 2018. — Vol. 176. — No. 3. — pp. 744–762.

[148] Dolgopolik, M.V. Method of codifferential descent for global d.c. optimization / M.V. Dolgopolik // Dynamical systems: stability, contro, optimization. Proceeding of the international

conference dedicate to the 100th anniversary of academic E.A. Barbashin. — Minsk, 2018. — pp. 14-15.

[149] Dolgopolik, M.V. The method of codifferential descent for convex and global piecewise affine optimization / M.V. Dolgopolik // Optim. Methods Softw. — 2020. — Vol. 35. — No. 6. — pp. 1191–1222.

[150] Dolgopolik, M.V. Metric regularity of quasidifferentiable mappings and optimality conditions for nonsmooth mathematical programming problems / M.V. Dolgopolik // Set-Valued and Variational Analysis. — 2020. — Vol. 28. — No. 3. — pp. 427–449.

[151] Dolgopolik, M.V. Exact penalty functions for optimal control problems II: exact penalization of terminal and pointwise state constraints / M.V. Dolgopolik // Optim. Control. Appl. Methods. — 2020. — Vol. 41. — No. 3. — pp. 898–947.

[152] Dolgopolik, M.V. New global optimality conditions for nonsmooth DC optimization problems / M.V. Dolgopolik // J. Glob. Optim. — 2020. — Vol. 76. — No. 1. — pp. 25–55.

[153] Dolgopolik, M.V. A new constraint qualification and sharp optimality conditions for nonsmooth mathematical programming problems in terms of quasidifferentials / M.V. Dolgopolik // SIAM J. Optim. — 2020. — Vol. 30. — No. 3. — pp. 2603–2627.

[154] Dolgopolik, M.V. Constrained nonsmooth problems of the calculus of variations / M.V. Dolgopolik // ESAIM: Control, Optimisation, and Calculus of Variations. — 2021. — Vol. 27. — Article number 79. — pp. 1–35.

[155] Dolgopolik, M.V. Exact penalty functions for optimal control problems I: main theorem and free-endpoint problems / M.V. Dolgopolik, A.V. Fominyh // Optim. Control. Appl. Methods. — 2019. — Vol. 40. — No. 6. — pp. 1018–1044.

[156] Dolgopolik, M.V. Nonsmooth speed-gradient algorithms / M.V. Dolgopolik, A.L. Fradkov // Proceedings of the European Control Conference (ECC 2015). — Austria, Linz, 2015. — pp. 998–1002.

[157] Dolgopolik, M.V. Speed-gradient control of the Brockett integrator / M.V. Dolgopolik, A.L. Fradkov // SIAM J. Control Optim. — 2016. — Vol. 54. — No. 4. — pp. 2116–2131.

[158] Dolgopolik, M.V. Nonsmooth and discontinuous speed-gradient algorithms / M.V. Dolgopolik, A.L. Fradkov // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. — 2017. — Vol. 25. — pp. 99–113.

[159] Dolgopolik, M.V. Energy tracking for the sine-Gordon equation with dissipation via boundary control / M.V. Dolgopolik, A.L. Fradkov // Proceedings of the 2018 European Control Conference (ECC 2018). — Cyprus, Limassol, 2018. — pp. 3025–3030.

[160] Dolgopolik, M.V. Finite-differential nonsmooth speed-gradient control: stability, passivity, robustness / M.V. Dolgopolik, A.L. Fradkov // SIAM J. Control Optim. — 2021. — Vol. 59. — No. 2. — pp. 1370–1392.

[161] Dolgopolik, M.V. Boundary energy control of the sine-Gordon equation / M.V. Dolgopolik, A.L. Fradkov, B.R. Andrievsky // IFAC-PapersOnLine. — 2016. — Vol. 49. — No. 14. — pp. 148–153.

[162] Dolgopolik, M.V. Boundary energy control of a system governed by the nonlinear Klein-Gordon equation / M.V. Dolgopolik, A.L. Fradkov, B. Andrievsky // Math. Control, Signals, Syst. — 2018. — Vol. 30. — No. 1. — Article number: 7. — pp. 1–21.

[163] Dolgopolik, M. Observer-based boundary control of the sine-Gordon model energy / M. Dolgopolik, A.L. Fradkov, B. Andrievsky // Automatica. — 2020. — Vol. 113. — Article ID: 108682. — pp. 1–9.

[164] Dunford N.J. Linear Operators, Part 1: General Theory / N.J. Dunford, J.T. Schwartz. — New York: Interscience Publishers, 1958. — 872 p.

[165] Dür, M. Necessary and sufficient global optimality conditions for convex maximization revisited / M. Dür, R. Horst, M. Locatelli // J. Math. Anal. Appl. — 1998. — Vol. 217. — No. 2. — pp. 637–649.

[166] Edwards, R.E. Functional Analysis: Theory and Applications / R.E. Edwards. — New York: Dover Publications, 1995. — 783 p.

[167] Ekeland, I. On the variational principle / I. Ekeland // J. Math. Anal. Appl. — 1974. — Vol. 47. — No. 2. — pp. 324–353.

[168] Ekeland, I. Convex Analysis and Variational Problems / I. Ekeland, R. Témam. — Philadelphia: SIAM, 1999. — 414 p.

[169] Eremin, I.I. The penalty method in convex programming / I.I. Eremin // Cybern Syst. Anal. — 1967. — Vol. 3. — no. 4. — pp. 53–56.

[170] Evans, J.P. Exact penalty functions in nonlinear programming / J.P. Evans, F.J. Gould, J.W. Tolle // Math. Program. — 1973. — Vol. 4. — No. 1. — pp. 72–97.

[171] Evtushenko, Yu.G. General lagrange-type functions in constrained global optimization Part I: auxiliary functions and optimality conditions / Yu.G. Evtushenko, A.M. Rubinov, V.G. Zhadan // Optim. Methods Softw. — 2001. — Vol. 16. — No. 1–4. — pp. 193–230.

[172] Evtushenko, Yu.G. General lagrange-type functions in constrained global optimization Part II: Exact auxiliary functions / Yu.G. Evtushenko, A.M. Rubinov, V.G. Zhadan // Optim. Methods Softw. — 2001. — Vol. 16. — No. 1–4. — pp. 231–256.

[173] Evtushenko, Yu. G. Exact auxiliary functions in optimization problems / Yu.G. Evtushenko, V.G. Zhadan // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 1990. — Vol. 30. — No. 1. — pp. 31–42.

[174] Evtushenko, Y.G. Exact auxiliary functions in non-convex optimization / Y.G. Evtushenko, V.G. Zhadan // Advances in Optimization / W. Oettli, D. Pallaschke. — Berlin, Heidelberg, 1992. — pp. 217–226.

[175] Ferrer, A. Improving the efficiency of DC global optimization methods by improving the DC representation of the objective function / A. Ferrer, J.E. Martínez-Legaz // J. Glob. Optim. — 2009. — Vol. 43. — No. 4. — pp. 513–531.

[176] Filippov, A.F. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides / A.F. Filippov. — Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, 1988. — 314 p.

[177] Fletcher, R. A class of methods for nonlinear programming with termination and convergence properties / R. Fletcher // Integer and nonlinear programming / J. Abadie. — Amsterdam, 1970. — pp. 157–173.

[178] Fletcher, R. An exact penalty function for nonlinear programming with inequalities / R. Fletcher // Math. Program. — 1973. — Vol. 5. — No. 1. — pp. 129–150.

[179] Folland, G.B. Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications / G.B. Folland. — New York: Interscience Publishers, 1984. — 364 p.

[180] Fominyh, A.V. Application of the hypodifferential descent method to the problem of constructing an optimal control / A.V. Fominyh, V.V. Karelin, L.N. Polyakova // Optim. Lett. — 2018. — Vol. 12. — No. 8. — pp. 1825–1839.

[181] Fradkov, A.L. Speed-gradient scheme and its application in adaptive control problems / A.L. Fradkov // Autom. Remote Control. — 1980. — Vol. 40. — No. 9. — pp. 1333–1342.

[182] Fradkov, A.L. Integordifferentiating velocity gradient algorithms / A.L. Fradkov // Sov. Phys., Dokl. — 1986. — Vol. 31. – pp. 97–98.

[183] Fradkov, A.L. Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems / A.L. Fradkov, I.V. Miroshnik, V.O. Nikiforov. — Dordrecht: Springer, 1999. — 518 p.

[184] Fradkov, A.L. Speed gradient control of chaotic continuous-time systems / A.L. Fradkov, A.Yu. Pogromsky // IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundam. Theory Appl. — 1996. — Vol. 43. — No. 11. — pp. 907-913.

[185] Fridman, E. Observers and initial state recovering for a class of hyperbolic systems via Lyapunov method / E. Fridman // Automatica. — 2013. — Vol. 49. — No. 7. — pp. 2250–2260.

[186] Fridman, E. New stability and exact observability conditions for semilinear wave equations / E. Fridman, M. Terushkin // Automatica. — 2016. — Vol. 63. — pp. 1–10.

[187] Fuduli, A. A splitting bundle approach for non-smooth non-convex minimization / A. Fuduli, M. Gaudioso, E.A. Nurminski // Optim. — 2015. — Vol. 64. — No. 5. — pp. 1131–1151.

[188] Fukuda, E.H. Exact augmented Lagrangian functions for nonlinear semidefinite programming / E.H. Fukuda, B.F. Lourenco // Comput. Optim. Appl. — 2018. — Vol. 71. — No. 2. — pp. 457–482.

[189] Fukuda, E.H. Differentiable exact penalty functions for nonlinear second-order cone programs / E.H. Fukuda, P.J.S. Silva, M. Fukushima // SIAM J. Optim. — 2012. — Vol. 22. — No. 4. — pp. 1607–1633.

[190] Gao, Y. Optimality conditions with Lagrange multipliers for inequality constrained quasidifferentiable optimization / Y. Gao // Quasidifferentiability and Related Topics / V.F. Demyanov, A.M. Rubinov. — Dordrecht, 2000. — pp. 151–162.

[191] Gao, Y. Demyanov difference of two sets and optimality conditions of Lagrange multiplier type for constrained quasidifferentiable optimization / Y. Gao // J. Optim. Theory Appl. — 2000. — Vol. 104. — No. 2. — pp. 377–394.

[192] Gao, Y. New Lagrange multipliers rule for constrained quasidifferentiable optimization / Y. Gao // Vietnam J. of Math. — 2002. — Vol. 30. — No. 1. — pp. 55–69.

[193] Gaudioso, M., Minimizing nonsmooth DC functions via successive DC piecewise-affine approximations / M. Gaudioso, G. Giallombardo, G. Miglionico, A.M. Bagirov // J. Glob. Optim. — 2018. — Vol. 71. — No. 1. — pp. 37–55.

[194] Gfrerer, H. First order and second order characterizations of metric subregularity and calmness of constraint set mappings / H. Gfrerer // SIAM J. Optim. — 2011. — Vol. 21. — No. 4. — pp. 1439–1474.

[195] Giannessi, F. A common understanding or a common misunderstanding? / F. Giannessi // Numer. Funct. Anal. Optim. — 1995. — Vol. 16. — Nos. 9–10. — pp. 1359–1363.

[196] Giannessi, F. Constrained Optimization and Image Space Analysis. Volume 1: Separation of Sets and Optimality Conditions. / F. Giannessi. — New York: Springer, 2005. — 395 p.

[197] Ginchev, I. Directional subdifferentials and optimality conditions / I. Ginchev, B.S. Mordukhovich // Positivity. — 2012. — Vol. 16. — No. 4. — pp. 707–737.

[198] Glover, B.M. On quasidifferentiable functions and non-differentiable programming / B.M. Glover // Optim. — 1992. — Vol. 24. — Nos. 3–4. — pp. 253–268.

[199] Glover, B.M. A Farkas lemma for difference sublinear systems and quasidifferentiable programming / B.M. Glover, V. Jeyakumar, W. Oettli // Math. Program. — 1994. — Vol. 63. — Nos. 1–3. — pp. 109–125.

[200] Gorokhovik, V.V. On quasidifferentiability of real-valued functions / V.V. Gorokhovik // Sov. Math. Dokl. — 1982. — Vol. 26. — pp. 491–494.

[201] Gorokhovik, V.V. Quasidifferentiability of real-valued functions and local extremum conditions / V.V. Gorokhovi // Sibirean Math. Zh. — 1984. — Vol. 25. — No. 3. — pp. 62–70. [in Russian].

[202] Gorokohovik, V.V. ε-Quasidifferentiability of real-valued functions and optimality conditions in extremal problems / V.V. Gorokohovik // Quasidifferential Calculus / V.F. Demyanov, L.C.W. Dixon. — Berlin, Heidelberg, 1986. — pp. 203–218.

[203] Gorokhovik, V.V. Convex and Nonconvex Problems of Vector Optimization / V.V. Gorokhovik. — Minsk: Navuka i Technika, 1990. — 239 p. [in Russian].

[204] Gorokhovik, V.V. Geometrical and analytical characteristic properties of piecewise affine mappings / V.V. Gorokohovik // arXiv: 1111.1389. — 2011. — pp. 1–12.

[205] Gorokhovik, V.V. First order optimality conditions in vector optimization problems with quasidifferentiable objective mapping and nontransitive preference / V.V. Gorokhovik // Dolk. AN Belarus. — 2013. — Vol. 47. — No. 6. — pp. 13–19. [in Russian].

[206] Gorokhovik, V.V. On the representation of upper semicontinuous functions defined on infinite-dimensional normed spaces as lower envelopes of families of convex functions / V.V. Gorokhovik // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. — 2017. — Vol. 23. — No. 1. — pp. 88–102. [in Russian].

[207] Gorokhovik, V.V. Minimal convex majorants of functions and Demyanov-Rubinov exhaustive super(sub)differentials / V.V. Gorokohovik // Optim. — 2019. — Vol. 68. — No. 10. — pp. 1933–1961.

[208] Gorokhovik, V.V. Characteristic properties of primal exhausters for various classes of positively homogeneous functions / V.V. Gorokhovik, M.A. Starovoitova // Tr. Inst. Mat. — 2011. — Vol. 19. — No. 2. — pp. 12–25. [in Russian].

[209] Gorokhovik, V.V. Polyhedral quasidifferentiability of real-valued functions / V.V. Gorokhovik, O.I. Zorko // Dokl. AN Belarus. — 1992. — Vol. 36. — No. 5. — pp. 393–397. [in Russian].

[210] Gorokohovik, V.V., Piecewise affine functions and polyhedral sets / V.V. Gorokohovik, O.I. Zorko // Optim. — 1994. — Vol. 31. — No. 3. — pp. 209–221.

[211] Gugat, M. Penalty techniques for state constrained optimal control problems with the wave equation / M. Gugat // SIAM J. Control Optim. — 2009. — Vol. 48. — No. 5. — pp. 3026–3051.

[212] Gugat, M. Exact penalization of terminal constraints for optimal control problems / M. Gugat, E. Zuazua // Optimal Control. Appl. Methods. — 2016. — Vol. 37. — No. 6. — pp. 1329–1354.

[213] Haarala, N. Globally convergent limited memory bundle method for large-scale nonsmooth optimization / N. Haarala, K. Miettinen, M. Mäkelä // Math. Program. — 2007. — Vol. 109. — No. 1. — pp. 181–205.

[214] Han, S.P. Exact penalty functions in nonlinear programming / S.P. Han, O.L. Mangasarian // Math. Program. — 1979. — Vol. 17. — No. 1. — pp. 251–269.

[215] Han, S.P. A dual differentiable exact penalty function / S.P. Han, O.L. Mangasarian // Math. Program. — 1983. — Vol. 25. — No. 3. — pp. 293–306.

[216] Hardy, G.H. Inequalities / G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya. — Cambridge: Cambridge University Press, 1952. — 324 p.

[217] Hare, W. A redistributed proximal bundle method for nonconvex optimization / W. Hare, C. Sagastizábal // SIAM J. Optim. — 2010. — Vol. 20. — No. 5. — pp. 2442–2473.

[218] Hestenes, M.R. Multiplier and gradient methods / M.R. Hestenes // J. Optim. Theory Appl. — 1969. — Vol. 4. — No. 5. — pp. 303–320.

[219] Hiriart-Urruty, J.-B. From convex optimization to nonconvex optimization. Necessary and sufficient conditions for global optimality / J.-B. Hiriart-Urruty // Nonsmooth Optimization and Related Topics / F.N. Clarke, V.F. Demyanov, F. Giannessi. — Boston, MA, 1989. — pp. 219–239.

[220] Hiriart-Urruty, J.-B. Conditions for global optimality / J.-B. Hiriart-Urruty // Handbook of Global Optimization / R. Horst, P.M. Pardalos. — Dordrecht, 1995. — pp. 1–26.

[221] Hiriart-Urruty, J.-B. Conditions for global optimality 2 / J.-B. Hiriart-Urruty // J. Global Optim. — 1998. — Vol. 13. — No. 4. — pp. 349–367.

[222] Hiriart–Urruty, J.-B. Convex Analysis and Minimization Algorithms. Volume I / J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal. — Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag, 1993. — 417 p.

[223] Hiriart–Urruty, J.-B. Convex Analysis and Minimization Algorithms. Volume II / J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal. — Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag, 1993. — 347 p.

[224] Hiriart-Urruty, J.-B. Generalized Hessian matrix and second-order optimality conditions for problems with $C^{1,1}$ data / J.-B. Hiriart-Urruty, J.-J. Strodiot, V. Hien Nguyen // Appl. Math. Optim. — 1984. — Vol. 11. — No. 1. — pp. 43–56.

[225] Horst, R. Introduction to Global Optimization / / R. Horst, P.M. Pardalos, N.V. Thoai. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. — 368 p.

[226] Horst, R. DC programming: overview / R. Horst, N.V. Thoai // J. Optim. Theory Appl. — 1999. — Vol. 103. — No. 1. — pp. 1–43.

[227] Huang, X.X. A unified augmented Lagrangian approach to duality and exact penalization / X.X. Huang, X.Q. Yang // Math. Oper. Res. — 2003. — Vol. 28. — No. 3. — pp. 533-552.

[228] Huang, X.X. Further study on augmented Lagrangian duality theory / X.X. Huang, X.Q. Yang // J. Glob. Optim. — 2005. — Vol. 31. — No. 2. — pp. 193–210.

[229] Huyer, W. A new exact penalty function / W. Huyer, A. Neumaier // SIAM J. Optim. — 2003. — Vol. 13. — No. 4. — pp. 1141–1158.

[230] Ioffe, A.D. Necessary and sufficient conditions for a local minimum. 1: a reduction theorem and first order conditions / A.D. Ioffe // SIAM J. Control Optim. — 1979. — Vol. 17. — No. 2. — pp. 245–250.

[231] Ioffe, A.D. Nonsmooth analysis: differential calculus of nondifferentiable functions / A.D. Ioffe // Trans. Amer. Math. Soc. — 1981. — Vol. 266. — No. 1. — pp. 1–55.

[232] Ioffe, A.D. Approximate subdifferentials and applications I: the finite dimensional theory / A.D. Ioffe // Trans. Amer. Math. Soc. — 1984. — Vol. 281. — No. 1. — pp. 389–416.

[233] Ioffe, A.D. Calculus of Dini subdifferentials of functions and contingent coderivatives of set-valued maps / A.D. Ioffe // Nonlinear Anal. — 1984. — Vol. 8. — No. 5. — pp. 517–539.

[234] Ioffe, A.D. Approximate subdifferentials and applications II / A.D. Ioffe // Mathematika. — 1986. — Vol. 33. — No. 1. — pp. 111–128.

[235] Ioffe, A.D. Approximate subdifferentials and applications 3: the metric theory / A.D. Ioffe // Mathematika. — 1989. — Vol. 36. — No. 1. — pp. 1–38.

[236] Ioffe, A. A Lagrange multiplier rule with small convex-valued subdifferentials for nonsmooth problems of mathematical programming involving equality and nonfunctional constraints / A. Ioffe // Math. Program. — 1993. — Vol. 58. — Nos. 1–3. — pp. 137–145.

[237] Ioffe A.D. Metric regularity and subdifferential calculus / A.D. Ioffe // Russian Math. Surveys. — 2000. — Vol. 55. — No. 3. — pp. 501–558.

[238] Ioffe, A.D. On the theory of subdifferentials / A.D. Ioffe // Advances in Nonlinear Analysis. — 2012. — Vol. 1. — No. 1. — pp. 47–120.

[239] Ioffe, A.D. On necessary conditions for a minimum / A.D. Ioffe // J. Math. Sci. — 2016. — Vol. 217. — No. 6. — pp. 751–772.

[240] Ioffe, A.D. Variational Analysis of Regular Mappings / A.D. Ioffe. — Cham: Springer International Publishing, 2017. — 516 pp.

[241] Ioffe A.D. On generalized Bolza problems and its application to dynamic optimization / A.D. Ioffe // J. Optim. Theory Appl. — 2019. — Vol. 182. — No. 1. — pp. 285–309.

[242] Ioffe, A.D. The Euler and Weierstrass conditions for nonsmooth variational problems / A.D. Ioffe, R.T. Rockafellar // Calc. Var. Partial Differ. Equ. — 1996. — Vol. 4. — No. 1. — pp. 59–87.

[243] Ioffe, A.D. Theory of Extremal Problems / A.D. Ioffe, V.M. Tihomirov. — Amsterdam: North-Holland, 1979. — 459 p.

[244] Ishizuka, Yo. Optimality conditions for quasidifferentiable programs with application to two–level optimization / Yo. Ishizuka // SIAM J. Control Optim. — 1988. — Vol. 26. — No. 6. — pp. 1388–1398.

[245] Jayswal, A. An exact l_1 penalty function method for multi-dimensional first-order PDE constrained control optimization problem / A. Jayswal, Preeti // Eur. J. Control. — 2020. — Vol. 52. — pp. 34–41.

[246] Jeyakumar, V. Characterizing global optimality for DC optimization problems under convex inequality constraints / V. Jeyakumar, B.M. Glover // J. Glob. Optim. — 1996. — Vol. 8. — No. 2. — pp. 171–187.

[247] Jeyakumar, V. Approximate Jacobian matrices for nonsmooth continuous maps and C^1-optimization / V. Jeyakumar, D.T. Luc // SIAM J. Control Optim. — 1998. — Vol. 36. — No. 5. — pp. 1815–1832.

[248] Jeyakumar, V. Nonsmooth calculus, minimality, and monotonicity of convexificators/ V. Jeyakumar, D.T. Luc // J. Optim. Theory Appl. — 1999. — Vol. 101. — No. 3. — pp. 599–621.

[249] Jiang, C. An exact penalty method for free terminal time optimal control problem with continuous inequality constraints / C. Jiang, Q. Lin, C. Yu, K.L. Teo, G.-R. Duan // J. Optim. Theory Appl. — 2012. — Vol. 154. — No. 1. — pp. 30–53.

[250] Joki, K. A proximal bundle method for nonsmooth DC optimization utilizing nonconvex cutting planes / K. Joki, A.M. Bagirov, N. Karmitsa, M. Mäkelä // J. Glob. Optim. — 2017. — Vol. 68. — No. 3. — pp. 501–535.

[251] Joki, K. Double bundle method for finding Clarke stationary points in nonsmooth DC programming / K. Joki, A.M. Bagirov, N. Karmitsa, M. Mäkelä, S. Taheri // SIAM J. Optim. — 2018. — Vol. 28. — No. 2. — pp. 1892–1919.

[252] Jordan, M.A. A speed-gradient adaptive control with state/disturbance observer for autonomous subaquatic vehicles / M.A. Jordan, J.L. Bustamante // Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. — San Diego, CA, 2006. — pp. 2008-2013.

[253] Jourani, A. Lagrangian and Hamiltonian necessary conditions for the generalized Bolza problem and applications / A. Jourani // J. Nonlinear Convex Anal. — 2009. — Vol. 10. — No. 3. — pp. 437–454.

[254] Jourani, A. Approximate subdifferential and metric regularity: the finite-dimensional case / A. Jourani, L. Thibault // Math. Program. — 1990. — Vol. 47. — Nos. 1–3. — pp. 203–218.

[255] Kan, C. Augmented Lagrangian duality for composite optimization problems / C. Kan, W. Song // J. Optim Theory Appl. — 2015. — Vol. 165. — No. 3. — pp. 763–784.

[256] Kan, C. Second-order conditions for existence of augmented Lagrange multipliers for eigenvalue composite optimization problems / C. Kan, W. Song // J. Glob. Optim. — 2015. — Vol. 63. — No. 1. — pp. 77–97.

[257] Kantorovich, L.V. Functional Analysis / L.V. Kantarovich, G.P. Akilov. — Oxford/London: Pergamon Press, 1982. — 604 p.

[258] Karelin, V.V. Penalty functions in a control problem / V.V. Karelin // Autom. Remote Control. — 2004. — Vol. 65. — No. 3. — pp. 483–492.

[259] Karmitsa, N. Comparing different nonsmooth minimization methods and software / N. Karmitsa, A. Bagirov, M. Mäkelä // Optim. Methods Softw. — 2012. — Vol. 27. — No. 1. — pp. 131–153.

[260] Keskar, N. A limited-memory quasi-Newton algorithm for bound-constrained non-smooth optimization / N. Keskar, A. Wächter // Optim. Methods Softw. — 2019. — Vol. 34. — No. 1. — pp. 150–171.

[261] Khalil, H.K. Nonlinear Systems / H.K. Khalil. — Prentice Hall: New Jersey, 2002. — 750 p.

[262] Kiwiel, K.C. Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization / K.C. Kiwiel. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1985. — 372 p.

[263] Kiwiel, K.C. A nonderivative version of the gradient sampling algorithm for nonsmooth nonconvex optimization / K.C. Kiwiel // SIAM J. Optim. — 2010. — Vol. 20. — No. 4. — pp. 1983–1994,

[264] Klatte, D. On second-order sufficient optimality conditions for $C^{1,1}$-optimization problems / D. Klatte, K. Tammer // Optim. — 1988. — Vol. 19. — No. 2. — pp. 169–179.

[265] Kobayashi, T. Adaptive stabilization of infinite-dimensional semilinear second-order systems / T. Kobayashi // IMA J. Math. Control Inf. — 2003. — Vol. 20. — No. 2. — pp. 137–152.

[266] Kobayashi, T. Adaptive stabilization of the sine-Gordon equation by boundary control / T. Kobayashi // Math. Methods Appl. Sci. — 2004. — Vol. 27. — No. 8. — pp. 957–970.

[267] Kolmanovsky, I.V. Speed-gradient approach to torque and air-to-fuel ratio control in DISC engines / I.V. Kolmanovsky, M. Druzhinina, J. Sun // IEEE Trans. Control Syst. Technol. — 2002. — Vol. 10. — No. 5. — pp. 671–678.

[268] Kripfgang, A. Piecewise affine functions as a difference of two convex functions / A. Kripfgang, R. Schulze // Optim. — 1987. — Vol. 18. — No. 1. — pp. 23–29.

[269] Kruger A.Ya. On Fréchet subdifferentials / A.Ya. Kruger // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 116. — No. 3. — pp. 3325–3358

[270] Kruger, A.Y. Error bounds and metric subregularity / A.Y. Kruger // Optim. — 2015. — Vol. 64. — No. 1. — pp. 49–79.

[271] Kumar, D. Computation of the epsilon-subdifferential of convex piecewise linear-quadratic functions in optimal worst-case times / D. Kumar, Y. Lucet // Set-Valued and Variational Analysis. — 2019. — Vol. 27. — No. 3. — pp. 623–641.

[272] Kuntz, L. A characterization of continuously codifferentiable functions and some consequences / L. Kuntz // Optim. — 1991. — Vol. 22. — No. 4. — pp. 539–547.

[273] Kuntz, L. A note on constraint qualifications in quasidifferentiable programming / L. Kuntz, S. Scholtes // Advances in Optimization / W. Oettli, D. Pallaschke. — Berlin, Heidelberg, 1992. — pp. 525–527.

[274] Kuntz, L. Constraint qualifications in quasidifferentiable optimization / L. Kuntz, S. Scholtes // Math. Program. — 1993. — Vol. 60. — Nos. 1–3. — pp. 339–347.

[275] Kusraev, A.G. Subdifferentials. Theory and Applications / A.G. Kusraev, S.S. Kutateladze. — Dordrecht: Springer, 1995. — 414 p.

[276] Kusraev, A.G. Subdifferentials. Theory and Applications. Part 2 / A.G. Kusraev, S.S. Kutateladze. — Novosibirsk: Izd-vo Inst. Math., 2003. — 421 p. [in Russian].

[277] Lasserre, J.B. An approach to optimal control problems via exact penalty functions / J.B. Lasserre // IFAC Proceedings Volumes. — 1981. — Vol. 14. — No. 2. — pp. 543–546.

[278] Le Thi, H.A. Exact penalty and error bounds in DC programming / H.A. Le Thi, T.P. Dinh, H. Van Ngai // J. Glob. Optim. — 2012. — Vol. 52. — No. 3. — pp. 509–532.

[279] Le Thi, H.A. DC programming and DCA: thirty years of development / H.A. Le Thi, T.P. Dinh // Math. Program. — 2018. — Vol. 169. — No. 1. — pp. 5–68.

[280] Leoni, G. A First Course in Sobolev spaces / G. Leoni. — Providence, RI: AMS, 2009. — 623 p.

[281] Lewis, A.S. Eigenvalue optimization / A.S. Lewis, M.L. Overton // Acta Numerica. — 1996. — Vol. 5. — No. 1. — pp. 149–190.

[282] Lewis, A.S. Nonsmooth optimization via quasi-Newton methods / A.S. Lewis, M.L. Overton // Math. Program. — 2013. — Vol. 141. — No. 1–2. — pp. 135–163.

[283] Li, B. An exact penalty function method for continuous inequality constrained optimal control problem / B. Li, C.J. Yu, K.L. Teo, G.R. Duan // J. Optim. Theory Appl. — 2011. — Vol. 151. — No. 2. — pp. 260–291.

[284] Li, J. A unified approach for constrained extremum problems: image space analysis / J. Li, S.Q. Feng, Z. Zhang // J. Optim. Theory Appl. — 2013. — Vol. 159. — No. 1. — pp. 69–92.

[285] Lin, Q. Optimal feedback control for dynamic systems with state constraints: an exact penalty approach / Q. Lin, R. Loxton, K.L. Teo, Y.H. Wu // Optim. Lett. — 2014. — Vol. 8. — No. 4. — pp. 1535–1551.

[286] Liu, Q. Zero duality and saddle points of a class of augmented Lagrangian functions in constrained non-convex optimization / Q. Liu, X. Yang // Optim. — 2008. — Vol. 57. — No. 5. — pp. 655–667.

[287] Loewen, P.D. Optimal Control via Nonsmooth Analysis / P.D. Loewen. — Providence, Rhode Island: AMS, 1993. — 153 p.

[288] Loewen, P.D. The adjoint arc in nonsmooth optimization / P.D. Loewen, R.T. Rockafellar // Trans. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 325. — No. 1. — pp. 39–72.

[289] Loewen, P.D. Optimal control of unbounded differential inclusions / P.D. Loewen, R.T. Rockafellar // SIAM J. Control Optim. — 1994. — Vol. 32. — No. 2. — pp. 442–470.

[290] Loewen, P.D. New necessary conditions for the generalized problem of Bolza / P.D. Loewen, R.T. Rockafellar // SIAM J. Control Optim. — 1996. — Vol. 34. — No. 5. — pp. 1496–1511.

[291] Loewen, P.D. Bolza problem with general time constraints / P.D. Loewen, R.T. Rockafellar // SIAM J. Control Optim. — 1997. — Vol. 35. — No. 6. — pp. 2050-2069.

[292] Lucidi, S. New results on a class of exact augmented Lagrangians / S. Lucidi // J. Optim. Theory Appl. — 1988. — Vol. 58. — No. 2. — pp. 259–282.

[293] Lucidi, S. New results on a continuously differentiable exact penalty function / S. Lucidi // SIAM J. Optim. — 1992. — Vol. 2. — No. 4. — pp. 558–574.

[294] Luderer, B. Does the special choice of quasidifferentials influence necessary minimum conditions? / B. Luderer // Advances in Optimization / W. Oettli, D. Pallaschke. — Berlin, Heidelberg, 1992. — pp. 256–266.

[295] Luderer, B. On Shapiro's results in quasidifferential calculus / B. Luderer, R. Rösiger // Math. Program. — 1990. — Vol. 46. — Nos. 1–3. — pp. 403–407.

[296] Luderer, B. On necessary minimum conditions in quasidifferential calculus: independence on the specific choice of quasidifferential / B. Luderer, R. Rösiger, U. Wurker // Optim. — 1991. — Vol. 22. — No. 5. — pp. 643–660.

[297] Luderer, B. A solution method for a special class of nondifferentiable unconstrained optimization problems / B. Luderer, J. Weigelt // Comput. Optim. Appl. — 2003. — Vol. 24. — No. 1. — pp. 83-93.

[298] Luenberger, D. Control problems with kinks / D. Luenberger // IEEE Trans. Autom. Control. — 1970. — Vol. 15. — No. 5. — pp. 570–575.

[299] Luo, H.Z. Separation approach for augmented Lagrangians in constrained nonconvex optimization / H.Z. Luo, G. Mastroeni, H.X. Wu // J. Optim. Theory Appl. — 2010. — Vol. 144. — No. 2. — pp. 275–290.

[300] Luo, H. Some results on augmented Lagrangians in constrained global optimization via image space analysis / H.Z. Luo, H. Wu, J. Liu // J. Optim. Theory Appl. — 2013. — Vol. 159. — No. 2. — pp. 360–385.

[301] Luo, H. On saddle points in semidefinite optimization via separation scheme/ H. Luo, H. Wu, J. Liu // J. Optim. Theory Appl. — 2015. — Vol. 165. — No. 1. — pp. 113–150.

[302] Mäkelä, M. Survey of bundle methods for nonsmooth optimization / M. Mäkelä // Optim. Methods Softw. — 2002. — Vol. 17. — No. 1. — pp. 1–29.

[303] Mäkelä, M.M. Nonsmooth Optimization. Analysis and Algorithms with Applications to Optimal Control / M.M. Mäkelä, P. Neittaanmäki. — Singapore: World Scientific, 1992. — 268 p.

[304] Mangasarian, O.L. Sufficiency of exact penalty minimization / O.L. Mangasarian // SIAM J. Contol Optim. — 1985. — Vol. 23. — No. 1. — pp. 30–37.

[305] Maratos, N. Exact Penalty Function Algorithms for Finite Dimensional and Control Optimization Problems: PhD thesis, University of London / N. Maratos. — London, UK, 1978. — 193 p.

[306] Mastroeni, G. Nonlinear separation in the image space with applications to penalty methods / G. Mastroeni // Appl. Anal. — 2012. — Vol. 91. — No. 10. — pp. 1901–1914.

[307] Mayne, D.Q. An exact penalty function algorithm for optimal control problems with control and terminal equality constraints, part 1 / D.Q. Mayne, E. Polak // J. Optim. Theory Appl. — 1980. — Vol. 32. — No. 2. — pp. 211–246.

[308] Mayne, D. An exact penalty function algorithm for control problems with state and control constraints / D. Mayne, E. Polak // IEEE Trans. Autom. Control. — 1987. — Vol. 32. — No. 5. — pp. 380–387.

[309] Michel, P. Calcul souls-différentiel pour les founctions Lipschitzienne et non Lipschitzienne / P. Michel, J.-P. Penot // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences — Series I — Mathematics. — 1984. — Vol. 298. — pp. 269–272.

[310] Michel, P. A generalized derivative for calm and stable functions / P. Michel, J.-P. Penot // Differ. Integral Equ. — 1992. — Vol. 5. — No. 2. — pp. 433–454.

[311] Mordukhovich, B.S. Discrete approximations and refined Euler-Lagrange conditions for nonconvex differential inclusions / B.S. Mordukhovich // SIAM J. Control Optim. — 1995. — Vol. 33. — No. 3. — pp. 882–915.

[312] Mordukhovich, B.Sh. Approximation Methods in Problems of Optimization and Control / B.Sh. Mordukhovich. — M.: Nauka, 1988. — 360 p. [in Russian].

[313] Mordukhovich, B.S. Variational Analysis and Generalized Differentiation I. Basic Theory / B.S. Mordukhovich. — Berlin, Heidelber: Springer, 2006. — 582 p.

[314] Mordukhovich, B.S. Variational Analysis and Generalized Differentiation II. Applications / B.S. Mordukhovich. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. — 612 p.

[315] Nesterov, Y. Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course / Y. Nesterov. — London: Kluwer Academic Publishers, 2004. — 236 p.

[316] Orlov, Yu. V. Discontinuous Systems: Lyapunov Analysis and Robust Synthesis Under Uncertainty Conditions / Yu.V. Orlov. — London: Springer, 2009. — 339 p.

[317] Orlov, I.V. Multidimensional variational functionals with subsmooth integrands / I.V. Orlov, A.V. Tsygankova // Eurasian Math. J. — 2015. — Vol. 6. — No. 3. — pp. 54–75.

[318] Outrata, J.V. On a class of nonsmooth optimal control problems / J.V. Outrata // Appl. Math. Optim. — 1983. — Vol. 10. — No. 1. — pp. 287–306.

[319] Outrata, J.V. On the usage of bundle methods in optimal control of nondifferentiable systems / J.V. Outrata // Trends in Mathematical Optimization / K.H. Hoffmann, J. Zowe, J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemarechal. — Basel, 1988. — pp. 233–245.

[320] Outrata, J.V. On some nondifferentiable problems in optimal control / J.V. Outrata, Z. Schindler // Nondifferentiable Optimization: Motivations and Applications / V.F. Demyanov, D. Pallaschke. Berlin, Heidelberg, 1985. — pp. 118–128.

[321] Pallaschke, D. On locally-Lipschitz quasi-differentiable functions in Banach spaces / D. Pallaschke, P. Recht, R. Urbański // Optim. — 1986. — Vol. 17. — No. 3. — pp. 287–295.

[322] Pallaschke, D. Foundations of Mathematical Optimization. Convex Analysis without Linearity / D. Pallaschke, S. Rolewicz. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. — 582 p.

[323] Penot, J.-P. On the convergence of descent algorithms / J.-P. Penot // Comput. Optim. Appl. — 2002. — Vol. 23. — No. 3. — pp. 279–284.

[324] Penot, J.-P. Calculus Without Derivatives / J.-P. Penot. — New York: Springer, 2013. — 544 p.

[325] Penot, J.-P. Multipliers and general Lagrangians / J.-P. Penot, A.M. Rubinov // Optim. — 2005. — Vol. 54. — Nos. 4–5. — pp. 443–467.

[326] Peressini, A.L. Ordered Topological Vector Spaces / A.L. Peressini. — New York: Harper & Row Publishers, 1967. —- 228 p.

[327] Pietrzykowski, T. An exact potential method for constrained maxima / T. Pietrzykowski // SIAM J. Numer. Anal. — 1969. — Vol. 6. — No. 2. — pp. 299–304.

[328] Polak, E. Optimization: Algorithms and Consistent Approximations / E. Polak. — New York: Springer-Verlag, 1997. — 802 p.

[329] Polovinkin, E.S. Multivalued Analysis and Differential Inclusions / E.S. Polovinkin. — M.: Fizmatlit, 2014. — 522 p. [in Russian].

[330] Polovinkin, E.S. Differential inclusions with unbounded right-hand side and necessary optimality conditions / E.S. Polovinkin // Proc. Steklov Inst. Math. — 2015. — Vol. 291. — pp. 237–252.

[331] Polovinkin, E.S. Polntyagin's direct method for optimization problems with differential inclusions / E.S. Polovinkin // Proc. Steklov Inst. Math. — 2019. — Vol. 304. — pp. 241–256.

[332] Polovinkin, E.S. Elements of convex and strongly convex analysis / E.S. Polovinkin, M.V. Balashov. — M.: Fizmatlit, 2007. — 440 p. [in Russian].

[333] Polyakova, L.N. Necessary extremum conditions for a quasidifferentiable function / L.N. Polyakova // Vestnik LGU. Series 1. — 1980. — No. 13. — pp. 57–62. [in Russian].

[334] Polyakova, L.N. Necessary extremum conditions for a quasidifferentiable function subject to a quasidifferentiable constraint / L.N. Polyakova // Vestnik LGU. Series 1. — 1982. — No. 7. — pp. 75–80. [in Russian].

[335] Polyakova, L.N. Sufficient conditions for a local extremum of a quasidifferentiable function subject to a quasidifferentiable constraint / L.N. Polyakova // Vestnik LGU. Series 1. — 1985. — No. 22. — pp. 26–30. [in Russian].

[336] Polyakova, L.N. On the minimization of a quasidifferentiable function subject to equality-type quasidifferentiable constraints / L.N. Polyakova // Quasidifferential Calculus / V.F. Demyanov, L.C.W. Dixon. — Berlin, 1986. — pp. 44–55.

[337] Polyakova, L.N. On the method of exact quasidifferentiable penalty function / L.N. Polyakova // Comput. Math. Math. Phys. — 2001. — Vol. 41. — No. 2. — pp. 205–218.

[338] Polyakova, L.N. On global unconstrained minimization of the difference of polyhedral functions / L.N. Polyakova // J. Glob. Optim. — 2011. — Vol. 50. — No. 2. — pp. 179–195.

[339] Powell, M.J.D. A method for nonlinear constraints in minimization problems / M.J.D. Powell // Optimization / R. Fletcher. — London, 1969. — pp. 283–298.

[340] Pschenichnyi, B.N. Necessary Conditions for an Extremum / B.N. Pschenichnyi. — New York: Marcel Dekker, 1971. — 248 p.

[341] Pshenichny, B.N. Convex Analysis and Extremal Problems / B.N. Pshenichny. — M.: Nauka, 1980. — 320 p. [in Russian].

[342] Pshenichny, B.N. Linearization Method / B.N. Pshenichny. — M.: Nauka, 1983. – 136 p. [in Russian].

[343] Pshenichny, B.N. Numerical Methods in Extremal Problems / B.N. Pshenichny, Yu. M. Danilin. — M.: Nauka, 1975. — 320 p. [in Russian].

[344] Rios, L.M. Derivative-free optimization: a review of algorithms and comparison of software implementations / L.M. Rios, N.V. Sahinidis // J. Glob. Optim. — 2013. — Vol. 56. — No. 3. — pp. 1247–1293.

[345] Robinson, S.M. Regularity and stability for convex multivalued functions / S.M. Robinson // Math. Oper. Res. — 1976. — Vol. 1. — No. 2. — pp. 130–143.

[346] Rockafellar, R.T. Convex Analysis / R.T. Rockafellar. — Princeton: Princeton University Press, 1970. — 451 p.

[347] Rockafellar, R.T. Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations / R.T. Rockafellar // J. Math. Anal. Appl. — 1970. — Vol. 32. — No. 1. — pp. 174–222.

[348] Rockafellar, R.T. Generalized Hamiltonian equations for convex problems of Lagrange / R.T. Rockafellar // Pacific J. Math. — 1970. — Vol. 33. — No. 2. — pp. 411–427.

[349] Rockafellar, R.T. Existence and duality theorems for convex problems of Bolza / R.T. Rockafellar // Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 159. — No. 1. — pp. 1–40.

[350] Rockafellar, R.T. Augmented Lagrange multiplier functions and duality in nonconvex programming / R.T. Rockafellar // SIAM J. Control. — 1974. — Vol. 12. — No. 2. — pp. 268–285.

[351] Rockafellar, R.T. Lagrange multipliers and optimality / R.T. Rockafellar // SIAM Review. — 1993. — Vol. 35. — No. 2. — pp. 183–238.

[352] Rockafellar, R.T. Variational Analysis / R.T. Rockafellar, R.J.B. Wets. — Berlin: Springer, 1998. — 734 p.

[353] Rosenberg, E. Exact penalty functions and stability in locally Lipschitz programming / E. Rosenberg // Math. Program. — 1984. — Vol. 30. — No. 3. — pp. 340–356.

[354] Rubinov, A.M. Sublinear operators and their applications / A.M. Rubinov // Russian Math. Surveys. — 1977 — Vol. 32. — No. 4. — pp. 115–175.

[355] Rubinov, A.M. Abstract Convexity and Global Optimization / A.M. Rubinov. — Boston: Springer, 2000. — 511 p.

[356] Rubinov, A.M. Lagrange-Type Functions in Constrained Non-Convex Optimization / A.M. Rubinov, X.Q. Yang. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. — 300 p.

[357] Rubinov, A.M. Penalty functions with a small penalty parameter / A.M. Rubinov, X.Q. Yang, A.M. Bagirov // Optim. Methods Softw. — 2002. — Vol. 17. — No. 5. — pp. 931–964.

[358] Rubinov, A.M. Continuous approximation of nonsmooth mappings / A.M. Rubinov, A. Zaffaroni / Progress in optimization: contributions from Australia / A. Eberhard, R. Hill, D. Ralph, B. Glover. — Dordrecht, 1999. — pp. 57–86.

[359] Rückmann, J.-J. Augmented Lagrangians in semi-infinite programming / J.-J. Rückmann, A. Shapiro // Math. Program. — 2009. — Vol. 116. — No. 1–2. — pp. 499–512.

[360] Ryan, E.P. On Brockett's condition for smooth stabilizability and its necessity in a context of nonsmooth feedback / E.P. Ryan // SIAM J. Control Optim. — 1994. — Vol. 32. — No. 6. — pp. 1597–1604.

[361] Schirotzek, W. Nonsmooth Analysis / W. Schirotzek. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. — 373 p.

[362] Shapiro, A. On optimality conditions in quasidifferentiable optimization / A. Shapiro // SIAM J. Control Optim. — 1984. — Vol. 22. — No. 4. — pp. 610–617.

[363] Shapiro, A. Quasidifferential calculus and first-order optimality conditions in nonsmooth optimization / A. Shapiro // Quasidifferential Calculus / V.F. Demyanov, L.C.W. Dixon. — Berlin, Heidelberg, 1986. — pp. 56–68.

[364] Shapiro, A. Some properties of the augmented Lagrangian in cone constrained optimization / A. Shapiro, J. Sun // Math. Oper. Res. — 2004. — Vol. 29. — No. 3. — pp. 479–491.

[365] Singer, I. Abstract Convex Analysis / I. Singer. — New York: Wiley–Interscience Publication, 1997. — 491 p.

[366] Singer, I. Duality for Nonconvex Approximation and Optimization / I. Singer. — New York: Springer, 2006. — 376 p.

[367] Smith, S. Exact penalty algorithm for optimal control problems with control and terminal constraints / S. Smith, D.Q. Mayne // Int. J. Control. — 1988. — Vol. 48. — No. 1. — pp. 257–271.

[368] Stingl, M. On the Solution of Nonlinear Semidefinite Programs by Augmented Lagrangian Methods: PhD thesis. Institute of Applied Mathematics II, Friedrech-Alexander University of Erlangen-Nuremberg / M. Stingl. — Erlangen, Germany, 2006. — 154 p.

[369] Song, C.-L. An optimality condition for quasidifferentiable programming with an abstract constraint / C.-L. Song, Z.-Q. Xia, L.-M. Zhang // Int. J. Pure Appl. Math. — 2006. — Vol. 27. — No. 3. — pp. 293–298

[370] Strekalovsky, A.S. Global optimality conditions for nonconvex optimization / A.S. Strekalovsky // J. Glob. Optim. — 1998. — Vol. 12. — No. 4. — pp. 415–434.

[371] Strekalovskii, A.S. Elements of nonconvex optimization / A.S. Strekalovskii. — Novosibirsk: Nauka, 2003. — 356 p. [in Russian].

[372] Strekalovskii, A.S. On the minimization of the difference of convex functions on a feasible set / A.S. Strekalovskii // Comput. Math. Math. Phys. — 2003. — Vol. 43. — No. 3. — pp. 380–390.

[373] Strekalovsky, A.S. On local search in d.c. optimization problems / A.S. Strekalovsky // Appl. Math. Comput. — 2015. — Vol. 255. — pp. 73–83.

[374] Strekalovsky, A.S. Global optimality conditions in nonconvex optimization / A.S. Strekalovsky // J. Optim. Theory Appl. — 2017. — Vol. 173. — No. 3. — pp. 770–792.

[375] Strekalovsky, A.S. Global optimality conditions and exact penalization / A.S. Strekalovsky // Optim. Lett. — 2019. — Vol. 13. — No. 3. — pp. 597–615.

[376] Strekalovskii, A.S. Global search in the optimal control problem with a terminal objective functional represented as the difference of two convex functions / A.S. Strekalovskii, M.V. Yanulevich // Comput. Math. Math. Phys. — 2008. — Vol. 48. — No. 7. — pp. 1119–1132.

[377] Strekalovsky, A.S. On global search in nonconvex optimal control problems / A.S. Strekalovsky, M.V. Yanulevich // J. Glob. Optim. — 2016. — Vol. 65. — No. 1. — pp. 119–135.

[378] Sun, X.L. On saddle points of augmented Lagrangians for constrained nonconvex optimization / X.L. Sun, D. Li, K.I.M. McKinnon // SIAM J. Optim. — 2005. — Vol. 15. — No. 4. — pp. 1128–1146.

[379] Sutti, C. Optimality conditions in quasidifferentiable mathematical programming / C. Sutti // J. Inf. Optim. Sci. — 1992. — Vol. 13. — No. 3. — pp. 375–381.

[380] Tamasyan, G.Sh. Finding the distance between the ellipsoids / G.Sh. Tamasyan, A.A. Chumakov // J. Appl. Industr. Math. — 2014. — Vol. 8. — No. 3. — pp. 400–410.

[381] Thera, M. Subdifferential calculus for convex operators / M. Thera // J. Math. Anal. Appl. — 1981. — Vol. 80. — No. 1. — pp. 78–91.

[382] Tor, A.H. Aggregate codifferential method for nonsmooth DC optimization / A.H. Tor, A. Bagirov, B. Karasözen // J. Comput. Appl. Math. — 2014. — Vol. 259, Part B. — pp. 851–867.

[383] Treiman, J.S. The linear nonconvex generalized gradient and Lagrange multipliers / J.S. Treiman // SIAM J. Optim. — 1995. — Vol. 5. — No. 3. — pp. 670–680.

[384] Treiman, J.S. Lagrange multipliers for nonconvex generalized gradients with equality, inequality, and set constraints / J.S. Treiman // SIAM J. Control Optim. — 1999. — Vol. 37. — No. 5. — pp. 1313–1329.

[385] Trudzik, L.I. Continuity properties of vector-valued convex functions / L.I. Trudzik // J. Australian Math Soc. — 1984. — Vol. 36. — No. 3. — pp. 404–415.

[386] Tucsnak M. Observation and Control for Operator Semigroups / M. Tucsnak, G. Weiss. — Basel: Birkhäuser, 2009. — 494 p.

[387] Tuy, H. Convex programs with an additional reverse convex constraint / H. Tuy // J. Optim. Theory Appl. — 1987. — Vol. 52. — No. 3. — pp. 463–486.

[388] Tuy, H. Global minimization of a difference of two convex functions / H. Tuy // Nonlinear Analysis and Optimization / B. Cornet, V.H. Nguyen, J.P. Vial. — Berlin, Heidelberg, 1987. — pp. 150–182.

[389] Tuy, H. Canonical DC programming problem: outer approximation methods revisited / H. Tuy // Oper. Res. Lett. — 1995. — Vol. 18. — No. 2. — pp. 99–106.

[390] Tuy, H. D.C. Optimization: Theory, Methods and Algorithms / H. Tuy // Handbook of Global Optimization / R. Horst, P.M. Pardalos. — Dordrecht, 1995. — pp. 149–216.

[391] Tuy, H. Convex Analysis and Global Optimization / H. Tuy. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. — 340 p.

[392] Tuy H. On some recent advances and applications of D.C. optimization / H. Tuy // Optimization / V.H. Nguyen, J.-J. Strodiot, P. Tossings. — Berlin, Heidelberg, 2000. — pp. 473–497.

[393] Tuy, H. On global optimality conditions and cutting plane algorithms / H. Tuy // J. Optim. Theory Appl. — 2003. — Vol. 118. — No. 1. — pp. 201–216.

[394] Uderzo, A. Convex approximators, convexificators and exhausters: applications to constrained extremum problem / A. Uderzo // Quasidifferentiability and related Topics / V.F. Demyanov, A.M. Rubinov. — Dordrecht, 2000. — pp. 297–327.

[395] Uderzo, A. Quasi-multiplier rules for quasidifferentiable extremum problems / A. Uderzo // Optim. — 2002. — Vol. 51. — No. 6. — pp. 761–795.

[396] Uderzo, A. Fréchet quasidifferential calculus with applications to metric regularity of continuous maps / A. Uderzo // Optim. — 2005. — Vol. 54. — Nos. 4–5. — pp. 469–493.

[397] Uderzo, A. Stability properties of quasidifferentiable systems / A. Uderzo // Vestnik St.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr. — 2006. — No. 3. — pp. 70–84. [in Russian].

[398] Uderzo, A. Convex difference criteria for the quantitative stability of parametric quasidifferentiable systems / A. Uderzo // Set-Valued Analysis. — 2007. — Vol. 15. — No. 1. — pp. 81–104.

[399] Uderzo, A. A strong metric subregularity analysis of nonsmooth mappings via steepest displacement rate / A. Uderzo // J. Optim. Theory Appl. — 2016. — Vol. 171. — No. 2. — pp. 573–599.

[400] Vinter, R.B. Optimal Control / R.B. Vinter. — Boston: Birkhäuser, 2000. — 527 p.

[401] Vinter, R. The extended Euler-Lagrange condition for nonconvex variational problems / R.B. Vinter, H. Zheng // SIAM J. Control Optim. — 1997. — Vol. 35. — No. 1. — pp. 56–77.

[402] Wang, C.-Y. Unified theory of augmented Lagrangian methods for constrained global optimization / C.-Y. Wang, D. Li // J. Glob. Optim. — 2009. — Vol. 44. — No. 3. — pp. 433–458.

[403] Wang, C. Global saddle points of nonlinear augmented Lagrangian functions / C. Wang, Q. Liu, B. Qu // J. Glob. Optim. — 2017. — Vol. 68. — No. 1. — pp. 125–146.

[404] Wang, C. A new class of exact penalty functions and penalty algorithms / C. Wang, C. Ma, J. Zhou // J. Glob. Optim. — 2014. — Vol. 58. — No. 1. — pp. 51–73.

[405] Wang, C.Y. Unified nonlinear Lagrangian approach to duality and optimal paths / C.Y. Wang, X.Q. Yang, X.M. Yang // J. Optim. Theory Appl. — 2007. — Vol. 135. — No. 1. — pp. 85–100.

[406] Wang, C.Y. Nonlinear augmented Lagrangian and duality theory / C.Y. Wang, X.Q. Yang, X.M. Yang // Math. Oper. Res. — 2012. — Vol. 38. — No. 4. — pp. 740–760.

[407] Wang, X. A sharp Lagrange multiplier rule for nonsmooth mathematical programming problems involving equality constraints / X. Wang, V. Jeyakumar // SIAM J. Optim. — 2000. — Vol. 10. — No. 4. — pp. 1136–1148.

[408] Wang, Z. Necessary minimum conditions and steepest descent directions in quasidifferentiable calculus: independence of the specific forms of quasidifferentials / Z. Wang, R. Mortensen // Optim. — 1994. — Vol. 31. — No. 3. — pp. 223–232.

[409] Ward, D.E. A constraint qualification in quasidifferentiable programming / D.E. Ward // Optim. — 1991. — Vol. 22. — No. 5. — pp. 661–668.

[410] Wong, K.H. An exact penalty function algorithm for time-lag control problems with control and terminal equality constraints / K.H. Wong, K.L. Teo // Comput. Math. Appl. — 1990. — Vol. 19. — No. 12. — pp. 79–94.

[411] Wu, C. A unified framework for synchronization and control of dynamical systems / C. Wu, L. Chua // Int. J. Bifurc. Chaos. — 1994. — Vol. 4. — No. 4. — pp. 979–998.

[412] Wu, H.X. Saddle points of general augmented Lagrangians for constrained nonconvex optimization / H.X. Wu, H.Z. Luo // J. Glob. Optim. — 2012. — Vol. 53. — No. 4. — pp. 683–697.

[413] Wu, H.X. Nonlinear separation approach for the augmented Lagrangian in nonlinear semidefinite programming / H.X. Wu, H.Z. Luo, J.F. Yang // J. Glob. Optim. — 2014. — Vol. 59. — No. 4. — pp. 695–727.

[414] Wu, Z.Y. An exact lower order penalty function and its smoothing in nonlinear programming / Z.Y. Wu, F.S. Bai, X.Q. Yang, L.S. Zhang // Optim. — 2004. — Vol. 53. — No. 1. — pp. 51–68.

[415] Xing, A.Q. Exact penalty function approach to constrained optimal control problems / A.Q. Xing, Z.H. Cheng, C.L. Wang, Y.Y. Yao // Optim. Control Appl. Methods. — 1989. — Vol. 10. — No. 2. — pp. 173–180.

[416] Zaffaroni, A. Codifferentiable mappings with applications to vector optimality / A. Zaffaroni // Pilska Studia Mathematica Bulgarica. — 1998. — Vol. 12. — No. 1. — pp. 255–266.

[417] Zaffaroni, A. Continuous approximations, codifferentiable functions and minimization methods / A. Zaffaroni // Quasidifferentiability and related Topics / V.F. Demyanov, A.M. Rubinov. — Dordrecht, 2000. — pp. 361–391.

[418] Zangwill, W.I. Nonlinear programming via penalty functions / W.I. Zangwill // Management Sci. — 1967. — Vol. 13. — No. 4. — pp. 344–358.

[419] Zaslavski, A.J. Optimization on Metric and Normed Spaces / A.J. Zaslavski. — New York: Springer, 2010. — 448 p.

[420] Zeidler, E. Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems / E. Zeidler. — New York: Springer-Verlag, 1986. — 932 p.

[421] Zeigler, G.M. Lectures on Polytopes / G.M. Zeigler. — New York: Springer Verlag, 1995. — 382 p.

[422] Zhang, Q. A new necessary and sufficient global optimality condition for canonical DC problems / Q. Zhang // J. Glob. Optim. — 2013. — Vol. 55. — No. 3. — pp. 559–577.

[423] Zhou, J. On the existence of saddle points for nonlinear second-order cone programming problems / J. Zhou, J.S. Cheng // J. Glob. Optim. — 2015. — Vol. 62. — No. 3. — pp. 459–480.

[424] Zhou, J. Saddle point and exact penalty representation for generalized proximal Lagrangians / J. Zhou, N. Xiu, C. Wang // J. Glob. Optim. — 2012. — Vol. 54. — No. 4. — pp. 669–687.

[425] Zhou, Y.Y. Some results about duality and exact penalization / Y.Y. Zhou, X.Q. Yang // J. Glob. Optim. — 2004. — Vol. 29. — No. 4. — pp. 497–509.

[426] Zhou, Y.Y. Augmented Lagrangian function, non-quadratic growth condition and exact penalization / Y.Y. Zhou, X.Q. Yang // Oper. Res. Lett. — 2006. — Vol. 34. — No. 2. — pp. 127–134.

[427] Zhou, Y.Y. Duality and penalization in optimization via an augmented Lagrangian function with applications / Y.Y. Zhou, X.Q. Yang // J. Optim. Theory Appl. — 2009. — Vol. 140. — No. 1. — pp. 171–188.

[428] Zhou, Y.Y. Augmented Lagrangian functions for constrained optimization problems / Y.Y. Zhou, X.Q. Yang // J. Glob. Optim. — 2012. — Vol. 52. — No. 1. — pp. 95–108

[429] Zhou, Y.Y. Existence of augmented Lagrange multipliers for cone constrained optimization problems / Y.Y. Zhou, J.C. Zhou, X.Q. Yang // J. Glob. Optim. — 2014. — Vol. 58. — No. 2. — pp. 243–260.

[430] Zhu, S.K. Unified duality theory for constrained extremum problems. Part I: image space analysis / S.K. Zhu, S.J. Li // J. Optim. Theory Appl. — 2014. — Vol. 161. — No. 3. — pp. 738–762.

[431] Zhu, S.K. Unified duality theory for constrained extremum problems. Part II: special duality schemes / S.K. Zhu, S.J. Li // J. Optim. Theory Appl. — 2014. — Vol. 161. — No. 3. — pp. 763–782.