

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Ложкин Алексей

**Задача надежного размещения хабов в условиях
неопределенности в спросе и выручке**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д.т.н., проф.

Буре Владимир Мансурович

Санкт-Петербург – 2020

Содержание

Введение	4
Глава 1. Обзор литературы	13
1.1. Задача о размещении хабов	13
1.2. Разложение Бендерса	15
1.3. Задача размещения хабов в условиях неопределенности	16
1.4. Задача размещения хабов с целевой функцией максимизации прибыли	18
Глава 2. Оценка устойчивости сети хабов в условиях неопределенности в спросе	20
2.1. Математическая постановка UMArHLP	20
2.2. Статистическая процедура подготовки данных	22
2.3. Оценка робастности количества хабов, критерий выбора надежной сети	24
2.4. Численный эксперимент	26
Глава 3. Робастное размещение хабов в условиях неопределенности: минимизация отклонений затрат	29
3.1. Стохастическая постановка задачи UMANLP	29
3.2. Концепция робастности решения UMANLP	30
3.3. Линейная постановка задачи	32
3.4. Разложение Бендерса	34
3.5. Ускоренный алгоритм разложения Бендерса	38
3.6. Численный эксперимент	41
Глава 4. Задача размещения хабов, основанная на максимизации прибыли в условиях неопределенности спроса и выручки	48

4.1. Детерминированная постановка задачи	48
4.2. Задача UMANLP в условиях неопределенности спроса	52
4.3. Задача UMANLP в условиях неопределенности спроса и выручки	55
4.4. Разложение Бендерса	57
4.5. Парето-оптимальные сечения решения задачи	62
4.6. Максимальные недоминируемые сечения для решения задачи . .	64
4.7. Гибридная стратегия множественных сечений решения задачи .	66
4.8. Численный эксперимент	67
Заключение	84
Словарь терминов	87
Список литературы	88
Список иллюстративного материала	96
Список таблиц	97
Приложение А. Алгоритмы Бендерса решения задачи StHLPAD	98
А.1. Основной алгоритм Бендерса	98
А.2. Ускоренный алгоритм Бендерса	100

Введение

Актуальность темы исследования. Диссертационная работа посвящена исследованию задачи определения надежной конфигурации сети в условиях неопределенности спроса и выручки. Такие задачи возникают в телекоммуникационных и транспортных системах, где необходимо определить наиболее эффективную схему маршрутизации сигналов, товаров или услуг между отправителем и получателем, с целью сокращения общих затрат на построение и обслуживание сети.

Одними из важнейших элементов сети, являются хабы, обладающие функциями консолидации и распределения транспортных потоков. Их наличие дает возможность замены прямых пар соединений между объектами «отправитель» и «получатель» на меньшее количество непрямых соединений между узлами сети. Преимуществом использования такого рода объектов является сокращение затрат за счет эффекта масштаба. Таким образом, в задачу построения эффективной и устойчивой сети входит определение оптимального количества хабов и построения непрямых маршрутов от отправителя к получателю через центры консолидации и перераспределения, минимизирующие общие затраты сети, включающие в себя, как затраты на открытие хаба, так и на обслуживание транспортных плеч.

Кроме того, выбранная конфигурация должна быть устойчива к изменению трафика, поскольку ее выбор является стратегическим решением и фиксируется на долгосрочный период. Таким образом, для построения надежного и устойчивого расположения хабов и схем маршрутизации, требуется учитывать вариативность в исходных данных, описывающих такие переменные составляющие, как спрос, транспортные затраты, выручка и др. То есть найти компромисс между общими затратами и ожидаемыми потерями, сохраняя эффективность сети. Этой проблематике было посвящено множество исследований за последние два десятка лет, направленных на изучение различного рода источников

неопределенности и способов их моделирования в задаче надежного размещения хабов. Можно выделить подходы для построения надежной сети, которые основываются на таких концепциях как рассмотрение ожидаемого сценария, наихудшего сценария, введение функций оценки рисков и ее минимизация.

Основным новым направлением в этой области является максимизация прибыли сети, где кроме построения сети с минимальными затратами, необходимо выделить наиболее выгодные направления и объем спроса к обслуживанию. Существует несколько работ, адресованных этой тематике, опубликованных в течении последних нескольких лет.

Задача имеет прикладную ценность в индустрии, где требуется понимание как теоретических основ, так и практический результат от оптимизации. В основном, для решения используются методы теории исследования операций такие как квадратичное и линейное программирование, мета-эвристические подходы, имитационные алгоритмы, методы декомпозиции задачи. Эти методы начинали использоваться для нахождения оптимального решения в задаче размещения хабов с момента их появления. Важно отметить, что для прикладных задач, помимо нахождения оптимального решения, также определяющее значение имеет и скорость его нахождения.

Цель диссертационной работы заключается в построении и исследовании свойств математических моделей проектирования надежных сетей хабов с целевыми функциями минимизации затрат и максимизации прибыли и разработке алгоритмов решения поставленных задач.

Достижение поставленной цели требует решения следующих **задач**:

1. Разработать подход к оценке надежности сети хабов, критерий статистической устойчивости числа хабов и построить алгоритм расчета статистических показателей сети.
2. Построить математическую модель для задачи размещения хабов в условиях неопределенности спроса, где критерием надежности является ми-

нимизация дисперсии транспортных затрат сети в компромиссе с общими затратами сети.

3. Построить математическую модель для задачи размещения хабов с целевой функцией максимизации прибыли в условиях неопределенности спроса и выручки. Разработать критерий надежности по отношению к случайному спросу и выручке.
4. Разработка точных математических алгоритмов решения поставленных задач.
5. Разработка комплекса программ, реализующего предложенные алгоритмы решения задач, экспериментальная проверка эффективности предложенных алгоритмов.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Разработана новая статистическая процедура оценки устойчивости сети хабов, основанная на имитационном моделировании, в задаче размещения в условиях неопределенности в спросе.
2. Поставлена новая нелинейная задача размещения хабов в условиях неопределенности в спросе. Предложена эквивалентная формулировка задачи смешанного целочисленного линейного программирования с целевой функцией минимизации общих затрат сети и ожидаемой абсолютной дисперсией транспортных затрат.
3. Поставлена новая нелинейная задача размещения хабов с целевой функцией максимизации прибыли в условиях неопределенности спроса и выручки. Предложена эквивалентная формулировка задачи смешанного целочисленного линейного программирования с целевой функцией максимизации ожидаемой прибыли, минимизации ожидаемых потерь и абсолютного отклонения выручки.

4. Разработаны алгоритмы решения поставленных задач, основанные на методах декомпозиции Бендерса в комбинации с использованием различного рода сечений: Парето-оптимальных, максимальных недоминируемых и гибридных.

Теоретическую и практическую значимость настоящего исследования составляют математические модели построения надежной сети хабов в условиях неопределенности спроса и выручки для двух случаев целевых функций: минимизации затрат и максимизации прибыли, — а также алгоритмы решения этих задач. Были разработаны следующие программы:

1. Программа оценки статистической устойчивости количества хабов в сети. Программа прошла государственную регистрацию в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам.
2. Программа поиска решений задачи надежного размещения хабов в условиях неопределенности спроса с целевой функцией минимизации общих ожидаемых затрат сети и ожидаемого абсолютного отклонения транспортных затрат. Программа прошла государственную регистрацию в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам.
3. Программа поиска решений задачи надежного размещения хабов в условиях неопределенности спроса и выручки с целевой функцией максимизации ожидаемой прибыли, минимизацией функции потерь и ожидаемого абсолютного отклонения выручки.

Методология и методы исследования, используемые в диссертации, включают в себя методы из теории оптимизации, теории рисков, теории стохастического программирования и теории управления прибылью как подраздела теории исследования операций.

Положения, выносимые на защиту:

1. Статистическая процедура оценки надежности сети хабов в условиях неопределенности в спросе (п. 2 Паспорта специальности 05.13.18).
2. Математическая модель надежного размещения хабов в условиях неопределенности спроса с целевой функцией минимизации ожидаемых затрат и ожидаемых отклонений транспортных затрат (п. 2 Паспорта специальности 05.13.18).
3. Математическая модель надежного размещения хабов в условиях неопределенности спроса и выручки с целевой функцией максимизации прибыли (п. 2 Паспорта специальности 05.13.18).
4. Эффективные алгоритмы решения поставленных задач надежного размещения хабов в условиях неопределенности (п. 4 Паспорта специальности 05.13.18).
5. Комплексы программ для проведения численных экспериментов по моделированию надежных сетей хабов и по оценке эффективности работы предложенных алгоритмов (п. 5 Паспорта специальности 05.13.18).

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

1. 20th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis, May 26 — 29, 2015, Sigulda, Latvia;
2. III Международная конференция «Устойчивость и процессы управления», посвященная 85-летию со дня рождения профессора, чл.-корр. РАН В. И. Зубова, 5 — 9 октября 2015 г., г. Санкт-Петербург;
3. XLIX Международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость», 2 — 5 апреля 2018 г., г. Санкт-Петербург;

4. XIV Международная научная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого), 30 мая — 1 июня 2018 г., г. Москва;
5. I Международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость», 8 — 12 апреля 2019 г., г. Санкт-Петербург.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах: из них 4 тезисы докладов [1—4], 2 статьи в сборниках трудов конференции [5, 6], 1 статья в трудах конференции, индексируемых в библиографических базах данных Scopus и Web of Science [7], 3 статьи в журналах, индексируемых в базах Scopus и Web of Science [8—10]. Получено свидетельство о государственной регистрации 2 программ для ЭВМ [11, 12].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором. Все программы ЭВМ написаны автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, четырех глав, заключения, словаря терминов, списка литературы, списка иллюстративного материала, списка таблиц и приложения. Полный объем диссертации составляет 101 страницу, включая 3 рисунка, 13 таблиц и 1 приложение. Библиография включает 70 наименований на 8 страницах.

Краткое содержание. Во введении отражена актуальность работы, сформулированы цель и задачи исследования, обоснованы научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, сформулированы положения, выносимые на защиту.

В первой главе приведен обзор литературы по теме исследования, описаны

основные направления теории размещения хабов и ее задачи, методы решения поставленных задач, обсуждены тенденции развития и перспективные направления.

Во второй главе приводится статистическая процедура оценки надежности количества хабов в сети в условиях неопределенности в спросе, предлагается критерий выбора наиболее устойчивой сети хабов, основанный на методе оценки риска портфеля Value at Risk.

Процедура состоит из двух этапов: подготовка статистической выборки оптимальных сетей хабов, полученных на случайных генерациях спроса, и оценка статистических показателей устойчивости количества хабов. Для увеличения количества элементов в статистической выборке, повышающих ее информативность, применяется метод bootstrap с целью исследования статистик распределения показателей сменяемости сети хабов: среднее значение и среднеквадратичное отклонение частот сменяемости сети хабов. Вводится понятие частоты сменяемости сети хабов, отражающее степень отличия сетей в зависимости от случайных изменений в спросе. Выборочные значения статистик предлагается использовать для вычисления Value at Risk с уровнем доверия α , что будет соответствовать значению частоты сменяемости количества хабов, которая не будет превышена с вероятностью $1 - \alpha$. Критерием выбора наиболее надежного количества хабов является Value at Risk с минимальным значением.

Рассмотренный метод предназначен для оценки надежности сети хабов, предоставляет возможность для оценки среднего значения и дисперсии общих затрат, следуя принципам алгоритма Sample Average Approximation.

В третьей главе предложена нелинейная и эквивалентная линейная математическая постановка задачи надежного размещения хабов с целевой функцией минимизации затрат и ожидаемых абсолютных отклонений транспортных затрат в условиях неопределенности спроса. Разработанная целевая функция модели размещения хабов обеспечивает минимизацию ожидаемых отклонений транспортных затрат сети в разрезе сценария спроса в компромиссе с мини-

мизацией ожидаемых затрат сети. Предполагается, что сеть хабов является надежной, если отклонения транспортных затрат в разрезе сценариев спроса являются минимальными. Степень важности надежности в сравнении с ожидаемыми общими затратами регулируется весовым коэффициентом.

Разработаны два алгоритма решения поставленной задачи: классический алгоритм разложения Бендерса и алгоритм разложения Бендерса с Парето-оптимальными сечениями оптимальности. Представлены результаты численного эксперимента на известных данных из библиотеки Исследования операций Civil Aeronautic Board и Australian Post, обсуждены результаты производительности предложенных алгоритмов в сравнении со стандартными методами решения задач смешанного целочисленного программирования.

В четвертой главе рассмотрены математические модели надежного размещения хабов с целевой функцией максимизации ожидаемой прибыли, минимизации ожидаемых потерь и ожидаемых отклонений функции выручки в условиях неопределенности в спросе и выручке. Предложены нелинейные и линейные постановки задач для трех случаев: неопределенность в спросе и детерминированной выручке, неопределенность в спросе и выручке и минимизация отклонений общей ожидаемой выручки, неопределенность в спросе и выручке и минимизация отклонений выручки по направлениям. Критерий надежности, примененный в описанных постановках, широко применяется в задачах теории управления прибылью, но в теории размещения объектов ранее не рассматривался.

Разработаны четыре алгоритма решения поставленной задачи: классический алгоритм разложения Бендерса, алгоритм разложения Бендерса с Парето-оптимальными сечениями оптимальности, алгоритм разложения Бендерса с максимальными недоменируемыми сечениями оптимальности и гибридный алгоритм разложения Бендерса с различного рода усиленными сечениями. Представлены результаты численного эксперимента на известных данных из библиотеки Исследования операций Civil Aeronautic Board и Australian Post,

обсуждены результаты производительности предложенных алгоритмов в сравнении со стандартными методами решения задач смешанного целочисленного программирования.

В заключении подведены итоги исследования и сформулированы основные выводы.

Глава 1

Обзор литературы

В этой главе автором диссертации проведена классификация и обзор литературы по задаче о размещении хабов. В частности, в Разделе 1.1 представлен обзор постановок и вариаций математических формулировок задачи. В Раздел 1.2 включен обзор работ, где для решения задачи размещения хабов использовался метод разложения Бендерса. В Разделе 1.3 рассмотрены работы, в которых исследуются различные источники неопределенности.

1.1. Задача о размещении хабов

Исследование сетей имеет непосредственное влияние на такие отрасли индустрии, как перевозка пассажиров и грузов наземным/морским/авиа транспортом, почтовые доставки, телекоммуникационное обслуживание и др. Такие сети часто содержат большое количество пар отправитель–получатель (О–П) для обслуживания, где прямые соединения между узлами сети не всегда возможны ввиду географических, экономических или технических ограничений. Введение сети хабов (англ. hub) призвано значительно сократить количество связей в сети и уменьшить размерность задачи через консолидацию, перегруз или распределение потоков в сети. Сокращение затрат достигается в результате маршрутизации потоков сети через один или более хабы. Задача размещения хабов состоит в назначении набора узлов сети хабами и построении связей между направлениями О–П и хабами оптимальным образом.

Основополагающими работами в области размещения хабов принято считать публикации О’Kelly [13, 14], где представлена первая математическая формулировка задачи в виде задачи квадратичного программирования. В дальнейшем теория получила множество вариаций задачи: введение в рассмотрение пропускной способности хабов, добавление в целевую функцию стоимости от-

крытия хаба в узловой точке, одинарная или множественная привязка узловых точек к хамам, фиксация количества хабов в сети и другие модификации. Вариативность формулировок обусловлена спецификой областей применения: авиа-перевозки пассажиров, почтовые доставки, доставка сборных грузов, операторы мобильной связи, компьютерная связь, системы быстрого транзита и др.

Обзор моделей и областей применения задачи размещения хабов представлен в работе [15], где представлены теоретические результаты за 20 лет существования задачи размещения хабов. Кроме того, обзоры литературы [16] и [17] содержат классификацию задач размещения хабов по постановке задачи и по методам решения задач.

В работе исследуется задача размещения хабов с возможностью привязки узловой точки к нескольким хамам, в зависимости от направления О–П и неограниченной пропускной способности хабов (англ. Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location problem, UMANLP) в условия неопределенности спроса.

UMANLP впервые была сформулирована в [18], где количество хабов p фиксировано (UMApHLP). В дальнейшем указанная модель была сформулирована в виде задачи целочисленного программирования [19] и [20], где переменные содержат 4 индекса. В работе [21] предлагается альтернативная формулировка с агрегированием потоков, что снижает количество индексов у переменных до трех. Некоторые точные и эвристические подходы, повышающие эффективность решения задачи UMApHLP, рассмотрены в работах [21–23]. Результаты исследования аналогичной UMApHLP задачи — UMANLP, где количество хабов не фиксировано, представлены в работах [19, 21, 24–30]. Алгоритмы и методы повышения эффективности решения UMApHLP могут быть применены и к UMANLP, что остается справедливым и в обратную сторону.

1.2. Разложение Бендерса

Подходы к решению задачи УМАНЛР в постановке задачи линейного программирования являются отдельной областью исследования. В литературе широко применяется подход разложения Бендерса [31] (англ. Benders Decomposition, BD) к решению задач УМАНЛР, который демонстрирует значительное повышение эффективности в решении проблемы. Первой работой в которой представлено применение разложения Бендерса к решению задачи УМАНЛР является [32]. Авторы [32] представили три варианта алгоритма разложения УМАНЛР: классический метод BD, основанный на генерации одного сечения на каждой итерации; алгоритм BD с множественным сечением, где для каждого направления О–П создается собственное сечение Бендерса; ϵ -оптимальные сечения, где субоптимальное решение используется для вычисления сечений.

Contreras и др. в работе [30] представили улучшенное BD с использованием процедуры выбора Парето-оптимальных сечений и эвристических алгоритмов. Кроме того, в работе [33] предложены дополнительные эвристики для улучшения BD применительно к задаче размещения хабов, где хабы представляются неполным графом. Кол-во сечений BD на каждой итерации представляется множеством вариантов, выбор недоминируемых сечений или Парето-оптимальных позволяет сократить количество итераций за счет качества сечений. Построение улучшенных сечений можно осуществлять посредством специальных точек, называемых Magnanti and Wong points [34], которые могут быть использованы, согласно [35], для нахождения Парето-оптимальных сечений BD. Разложение Бендерса используется и в других вариациях задачи размещения хабов, например, [33, 36–39].

1.3. Задача размещения хабов в условиях неопределенности

В настоящей работе рассматривается мало исследованная область задач размещения хабов — решение задачи в условиях неопределенности и нахождение робастного решения. Существуют различные источники неопределенности: в спросе, во времени операций, в стоимости, в пропускной способности плеча/ребра и хабов и др. Сеть авиаперевозок, где пропускная способность хаба моделируется с помощью модели из теории систем массового обслуживания $M/D/c$, рассмотрена в работе [40]. Таким образом, моделируется условие, что ограничение на очередь не будет превышено с определенной вероятностью. В дальнейшем это условие преобразуется в ограничение пропускной способности хаба.

Рассмотрение неопределенности в спросе в задаче размещения хабов применительно к грузовым авиаперевозкам и маршрутизации рейсов представлено в работе [41]. Авторы предлагают двухшаговую линейную стохастическую постановку задачи, где на первом шаге предлагается решать задачу размещения хабов и определения их количества, а на втором шаге решать задачу маршрутизации потоков через хабы для различных сценариев спроса. Проведен сравнительный анализ между детерминированным случаем спроса (для каждого сценария в отдельности с дальнейшим усреднением результатов) и предложенной стохастической постановкой; результат показал, что внедрение неопределенности в модель приводит к лучшим результатам.

Sim и др. в своем исследовании [42] рассмотрели стохастическую задачу размещения хабов с неопределенностью во времени движения между узлами сети, которая моделируется нормальным распределением. В математическую постановку добавлено ограничение по обеспечению уровня сервиса.

Результаты исследования стохастической постановки UMANLP с неопределенностью в спросе и в транспортных затратах представлены в [43]. Авторы

работы показали, что стохастичность спроса может быть сформулирована в виде детерминированной задачи целочисленного линейного программирования, где случайная величина заменена на ожидаемое значение. В случае с неопределенностью в транспортных затратах аналогичная замена некорректна; для решения стохастической задачи представлен метод SAA (англ. Sample Average Approximation).

В работе Alumur и др. [44] рассматривают два источника неопределенности в задаче о размещении хабов с неограниченной пропускной способностью хабов: неопределенность в спросе и неопределенность в стоимости открытия хаба. Авторы работы предполагают, что информация о распределении вероятностей стоимости установки хабов отсутствует, и предлагают постановку минимакса для моделирования проблемы. Неопределенность в спросе предлагается моделировать в виде задачи стохастического линейного программирования. Для одновременного учета обоих источников неопределенности предлагается объединенная минимаксная стохастическая формулировка задачи.

Shahabi и Unnikrishnan [45] исследуют задачу UMANLP в условиях неопределенности в спросе, где неопределенность моделируется эллипсоидом. Авторами работы предложена целочисленная квадратичная постановка задачи и ее ослабленная линейная вариация. По результатам эксперимента авторы заключили, что большое кол-во хабов в сети уменьшает влияние неопределенности в спросе на функцию затрат.

Робастная постановка UMAPHLP с неопределенностью в спросе, определяемой многогранником, предложена в [46]. В работе рассматриваются два случая представления неопределенности: *hose* и гибридная. Модель *hose* предполагает, что существует только верхнее ограничение на суммарный исходящий и входящий потоки узла сети, в то время как гибридная модель подразумевает как верхнее, так и нижнее ограничение суммарного спроса. Авторы применили концепцию минимакса для моделирования робастности, основанную на минимизации функции затрат. Предложено два алгоритма решения задачи, основанных

на ВД. Расширение постановки на случай задачи СМАрНLP, где кол-во хабов фиксировано и их пропускная способность ограничена.

Исследование Zetin и др. неопределенности в спросе и в транспортных издержках в задаче UМАрНLP представлено в [47], где вводится «бюджет» неопределенности с целью управления уровнем консерватизма в математической постановке. Авторами работы разработан алгоритм ветвей и сечений для решения сформулированной задачи.

В работе [39] представлена робастная UМАНLP с учетом неопределенности в спросе и в транспортных издержках, где сеть хабов не является полной. Предложен алгоритм решения задачи, основанный на ВД.

Одной из последних работ в области робастного размещения хабов является [48], где рассматривается неопределенность в спросе, представленная в виде многогранника. Вводятся три варианта моделирования неопределенности, а для решения используется мета-эвристический метод — поиск с запретом.

1.4. Задача размещения хабов с целевой функцией максимизации прибыли

В литературе не так много исследований, посвященных задачам размещения хабов с целевой функцией максимизации прибыли. Одно из ключевых отличий данной задачи от классической постановки — это возможность обслуживать только часть спроса.

Одним из ответвлений данного направления задач размещения хабов является рассмотрение нескольких конкурирующих фирм, которые соперничают за обслуживание спроса, так как принятые решения сказывается на прибыли. Рассматриваются различные целевые функции: например, функция максимизации захваченного спроса, максимизация общей прибыли. Примеры работ, рассматривающие конкурентное размещение хабов [49—52]. Кроме того, существует несколько исследований в теоретико-игровой постановке конкурентного раз-

мещения хабов [53, 54].

В текущем исследовании рассматривается только одна фирма без конкурентной среды, цель которой — максимизировать свою прибыль.

В работе [55] вводится постановка задачи размещения хабов с целевой функцией максимизации прибыли. Задача состоит в том, чтобы определить местоположение хабов, решить, какие ребра активировать, выбрать направления для обслуживания и маршрутизации потоков сети с целью максимизации общей прибыли. Авторы рассматривают возможность связи одного узла с несколькими хабами и предполагают, что маршрут пролегает через один или два хаба, т. е. маршрут проходит максимум через три ребра. Точный алгоритм решения поставленной задачи авторы описывают в [56]. Они использовали метод множителей Лагранжа в алгоритме ветвей и границ для решения поставленной задачи.

Исследование [57] рассматривает все возможные постановки связи узловая точка–хаб: множественная привязка, привязка к одному или к r хамам, — в задаче размещения хабов с целевой функцией максимизации прибыли. Также в работе рассматривается случай, когда допускаются прямые соединения между О–П. Кроме того, по мнению автора настоящей диссертации, единственной работой, которая рассматривает неопределенность в задаче размещения хабов с целевой функцией максимизации прибыли, является [58].

Глава 2

Оценка устойчивости сети хабов в условиях неопределенности в спросе

В настоящей главе рассматривается эвристический подход к оценке надежности сети, который основан на процедурах статистического моделирования. В Разделе 2.1 вводится математическая постановка UMAPHLP в виде задачи линейного программирования. Раздел 2.2 содержит описание алгоритма возмущения и подготовки данных. В Разделе 2.3 представлены оценка уровня устойчивости сети хабов и критерий выбора количества хабов. Результаты численного эксперимента на реальных данных представлены в Разделе 2.4.

2.1. Математическая постановка UMAPHLP

В данном разделе автором диссертации описывается математическая постановка задачи размещения хабов с неограниченной пропускной способностью хабов и возможностью связывать узел сети с несколькими хабами одновременно. Основные предположения: сеть хабов представляет собой полный граф; прямые соединения между узлами сети, не являющимися хабами, запрещены; весь исходящий поток должен быть обслужен; консолидация, перегруз разрешены только на хабах. Существует несколько формулировок задачи UMAPHLP для детерминированного случая, в текущей работе для демонстрации оценки надежного количества хабов p используется формулировка задачи из [59] с фиксированным количеством хабов p и с четырьмя индексами у переменных, но результаты настоящей работы не ограничиваются указанной моделью и могут быть распространены на другие постановки HLP (англ. Hub Location Problem).

В формулировании задачи используются следующие обозначения: $N = \{1, \dots, n\}$ — набор узлов сети, множество потенциальных хабов $K \subset N$, рас-

стояние между $i, j \in N$ обозначено как d_{ij} , a_k — стоимость установки хаба в узле сети $k \in K$; стоимости перегруза, консолидации и распределения единицы потока на единицу расстояния обозначены как α , χ и δ соответственно; w_{ij} — поток, направленный от отправителя $i \in N$ к получателю $j \in N$ (спрос на направление). Так как потоки должны проходить, как минимум, через один хаб, а использование более двух хабов является избыточным, то стоимость перемещения единицы потока по маршруту представляется как $c_{ijkm} = \chi d_{ik} + \alpha d_{km} + \delta d_{mj}$, где $i, j \in N$ это О–П, а $k, m \in K$ — хабы в маршруте, p — количество хабов, которое необходимо выбрать. В такой постановке задача всегда имеет решение.

Математическая постановка базовой задачи НЛР следующая:

$$\min \sum_{k \in K} a_k y_k + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm} \quad (2.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{m \in K, m \neq k} x_{ijmk} + \sum_{m \in K} x_{ijkm} \leq w_{ij} y_k, \quad i, j \in N, k \in K, \quad (2.2)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{m \in K} x_{ijkm} = w_{ij}, \quad i, j \in N, \quad (2.3)$$

$$\sum_{k \in K} y_k = p, \quad (2.4)$$

$$x_{ijkm} \geq 0, \quad i, j \in N, k, m \in K, \quad (2.5)$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \quad k \in K, \quad (2.6)$$

где y_k — бинарная переменная, принимающая значение 1, если $k \in K$ выбран в качестве хаба, 0 — в противном случае, а вещественная переменная x_{ijkm} соответствует потоку из $i \in N$ в $j \in N$ через хабы $k, m \in K$.

Целевая функция (2.1) представляет собой общие затраты сети для минимизации. Неравенства (2.2) обеспечивают маршрутизацию потоков только через выбранные хабы, а ограничения (2.3) гарантируют, что весь исходящий поток будет доставлен получателю, уравнение (2.4) обеспечивает выполнение выбора p хабов.

Постановка задачи (2.1) — (2.6) используется как основа для описания процедуры оценки устойчивости сети хабов в условиях неопределенности в спросе в задаче HLP. Обозначим (2.1) — (2.6) как функцию $G(W, p)$, зависящую от матрицы спроса W и количества хабов p , где значения функции — это вектор оптимальных хабов к размещению $G(W, p) = (y_1, \dots, y_{|K|})$, а остальные параметры модели (2.1) — (2.6) фиксированы.

2.2. Статистическая процедура подготовки данных

В настоящем разделе приведен алгоритм оценки устойчивости/надежности количества хабов p в задаче UMAPHLP в условиях неопределенности в спросе, основанный на процедурах статистического моделирования. Предлагаемый алгоритм не зависит от способа задания неопределенности в спросе (дискретный набор сценариев, непрерывное распределение и др.), так как основан на статистических симуляциях.

Пусть неопределенность спроса моделируется случайным непрерывным многомерным распределением $F_\xi(X)$, где ξ — случайная матрица, размерность которой совпадает с размерностью матрицы спроса W . Обозначим W^r — результатом генерации случайным образом матрицы спроса из распределения $F_\xi(X)$, где $r \in \{1, \dots, R\}$ — это номер итерации, а R — количество итераций.

В Разделе 2.1 введена функция $G(W, p)$, которая принимает значения вектора оптимальных хабов к размещению на основе матрицы спроса W и количества хабов p . Пусть имеем две матрицы спроса из различных итераций W^{r_1} и W^{r_2} , тогда $G(W^{r_1}, p)$ и $G(W^{r_2}, p)$ — это два решения задачи размещения хабов

при одинаковых ограничениях, но разных матрицах спроса.

Определение 2.1: Сеть хабов $G(W, p)$ называется устойчивой и робастной к неопределенности в спросе, заданной распределением случайной матрицы $F_\xi(X)$, если $G(W^{r_1}, p) = G(W^{r_2}, p) \quad \forall W^{r_1}, W^{r_2}$.

Определение устойчивости сети хабов является также основным предположением в оценке уровня устойчивости. Алгоритм оценки устойчивости сети хабов, представленный ниже, основан на множественном повторении вычисления значений функции $G(W^r, p)$ для $r \in \{1, \dots, R\}$, $p \in \{p_{\min}, \dots, p_{\max}\}$ и сравнении сетей хабов в разрезе каждого p на случайном подмножестве возможных матриц спроса $\{W^r\}_{r=1}^R$. Использование случайного подмножества всех возможных матриц спроса не является новым в задаче о размещении хабов, схожую процедуру использует метод SAA (англ. Sample Average Approximation), например, в [43, 58].

Определение 2.2: Сеть хабов $G(W, p)$ называется статистически устойчивой к неопределенности в спросе, заданной набором сценариев $\{W^r\}_{r=1}^R$, если $G(W^{r_1}, p) = G(W^{r_2}, p) \quad \forall W^{r_1}, W^{r_2} \in \{W^r\}_{r=1}^R$.

Определение статистической устойчивости сети хабов является грубым, так как наличие, по крайней мере, одного случая расхождения сетей хабов на разных итерациях фиксированного p приводит к неустойчивости сети. Поэтому вводится понятие уровня устойчивости:

Определение 2.3: Уровень устойчивости сети хабов — это средний показатель схожести сети хабов на множестве $\{W^r\}_{r=1}^R$.

Вычисление уровня устойчивости сети хабов подразумевает решение задач оптимизации $G(W^r, p)$ для $r \in \{1, \dots, R\}$, выбор функции сравнения результатов и процедуры усреднения результатов в единый показатель.

Введем функцию сравнения сетей хабов с одинаковым p :

$$d(G(W^{r_1}, p), G(W^{r_2}, p)) = \sum_{k \in K} (y_k^{r_1} \neq y_k^{r_2}). \quad (2.7)$$

В работе предлагается следующий алгоритм оценки уровня устойчивости сети хабов. Пусть $p \in \{p_{\min}, \dots, p_{\max}\}$ — это набор рассматриваемых значений количества хабов в сети, тогда алгоритм имеет следующий вид:

Инициализация: $W, p_{\min}, p_{\max}, \{T_p = \emptyset\}_{p=p_{\min}}^{p_{\max}}$

Функции: $G(W, p), d(G(W^{r_1}, p), G(W^{r_2}, p))$

Для p из $\{p_{\min}, \dots, p_{\max}\}$ **выполнять**

Для r из $\{1, \dots, R\}$ **выполнять**

Генерация W^r

Оптимизация $G(W^r, p)$

Для r_1, r_2 из $\{1, \dots, R\}$ **выполнять**

$$t_{pr_1r_2} = d(G(W^{r_1}, p), G(W^{r_2}, p))$$

$$T_p = T_p \cup \{t_{pr_1r_2}\}$$

$$\nu_p = \frac{1}{R^2 - R} \sum_{t \in T_p} t$$

Для l из $\{1, \dots, L\}$ **выполнять**

Генерация множеств T_p^l случайным

выбором $R^2 - R$ элементов с повторением из T_p

$$\nu_p^l = \frac{1}{R^2 - R} \sum_{t \in T_p^l} t$$

В алгоритме L обозначает количество итераций bootstrap. В результате работы алгоритма получим частоты сменяемости хабов в оптимальной сети ν_p^l . Статистические характеристики сменяемости для $\forall p \in \{p_{\min}, \dots, p_{\max}\}$ вычисляются по формулам: $N_p = \frac{\nu_p + \sum_{l=1}^L \nu_p^l}{L+1}$ — выборочный средний уровень сменяемости p -хабов, $S_p^2 = \frac{(\nu_p - N_p)^2 + \sum_{l=1}^L (\nu_p^l - N_p)^2}{L}$ — выборочная несмещенная дисперсия.

2.3. Оценка робастности количества хабов, критерий выбора надежной сети

Оценку уровня устойчивости сети хабов предлагается проводить на основе критерия Value at Risk (VaR) [60] из теории рисков.

Рассмотрим случайную величину η — уровень сменяемости сети хабов с функцией распределения $F_\eta(z)$. Тогда VaR случайной величины η для уровня доверия $\alpha \in (0, 1)$ — это наибольшее число v , такое, что $P(\eta > v) = \alpha$, т. е. значение VaR для случайного уровня сменяемости η — это величина, которую η не превысит с вероятностью $1 - \alpha$.

Применительно к оценке уровня устойчивости сети хабов VaR используется в качестве индекса сменяемости хабов, который не будет превышен с уровнем доверия $1 - \alpha$.

Моделирование функции распределения вероятностей $F_{\eta_p}(z)$ для каждого значения количества хабов p предлагается проводить на основе множества $\{\nu_p^l\}_{l=1}^L$ и выборочных статистик N_p и S_p^2 .

Пусть η_p — случайная величина уровня сменяемости ν_p с функцией распределения вероятностей $F_{\eta_p}(z)$ для количества хабов p . Тогда уровень устойчивости предлагается вычислять следующим образом:

$$VaR_p = \sup\{z \in R : F_{\eta_p}(z) \leq 1 - \alpha\},$$

в свою очередь, формальное описание критерия устойчивого количества хабов запишется в виде:

$$p_{stab} = \arg \min_{p \in [p_{min}, p_{max}]} (\sup\{z \in R : F_{\eta_p}(z) \leq 1 - \alpha\}),$$

то есть наиболее устойчивой является то количество хабов, уровень устойчивости которого с вероятностью $(1 - \alpha)$ не будет превышен, является наименьшим на множестве $[p_{min}, p_{max}]$. Здесь R — обозначение множества вещественных чисел.

Рассмотрим пример для случая, когда η_p имеют нормальное распределение, тогда значение VaR находится из следующего выражения:

$$P(z > N_p + u_\alpha S_p) = \alpha, \quad (2.8)$$

где в качестве параметров нормального распределения используются замещенные параметры (статистические оценки, в случае отсутствия параметров генеральной совокупности), u_α — односторонняя α -квантиль стандартного нормального распределения. Рассмотрим следующие преобразования выражения (2.8):

$$P(z > N_p + u_\alpha S_p) = 1 - P(z \leq N_p + u_\alpha S_p) = \alpha,$$

$$P(z \leq N_p + u_\alpha S_p) = 1 - \alpha,$$

$$P(z \leq N_p - u_{1-\alpha} S_p) = 1 - \alpha.$$

С учетом нормальности распределения уровней устойчивости критерий выбора можно переформулировать следующим образом:

$$p_{stab} = \arg \min_{p \in [p_{min}, p_{max}]} (N_p - u_{1-\alpha} S_p), \quad (2.9)$$

а значение VaR_p или уровень устойчивости определяется как:

$$VaR_p = N_p - u_{1-\alpha} S_p. \quad (2.10)$$

Предложенный в настоящем разделе критерий выбора устойчивого количества хабов оценивает уровень устойчивости сети хабов с уровнем доверия $1 - \alpha$ и предлагает выбирать значение с наименьшим VaR . Значение VaR в описанном критерии называется индексом устойчивости. Для оценки рисков изменения уровня устойчивости η_k возможно использовать другие оценки из теории рисков: CVaR [61], EVaR [62], DaR, CDaR.

2.4. Численный эксперимент

В численном эксперименте рассматривается задача нахождения устойчивой сети хабов в формулировке UMAPHLP (2.1) — (2.6). Для решения задачи линейного и целочисленного программирования (2.1)—(2.6) использовался про-

граммный продукт GUROBI Optimizer 7.0.1¹. Вычисления производились на машине Intel Core i5 2.7GHz с 8GB ОЗУ.

Данные для исследования, предоставленные логистической компанией ООО «Деловые Линии», содержат 178 грузоприемочных пунктов по территории РФ, множество K содержит 10 объектов, которые потенциально могут быть хабами. Расстояния в часах между объектами сети рассчитаны (без учета пробок) с использованием программного пакета Google Maps Distance Matrix API².

В эксперименте $p_{\min} = 6$, $p_{\max} = 9$, $R = 40$, $L = 1000$, $\alpha = 0.05$ в общей сложности было решено 164 задачи смешанного программирования (англ. Mixed Indeger Programming (MIP)), содержащих 17 890 вещественных переменных, 1 790 бинарных переменных и 21 539 ограничений.

Возмущение спроса производилось путем генерации случайных величин из усеченного нормального распределения.

В Таблице 2.1 представлены частоты сменяемости ν для каждого p до применения процедуры bootstrap.

p	6	7	8	9
ν	0.875	0.0	0.1	0.625

Таблица 2.1. Частоты сменяемости хабов

p	6	7	8	9
\bar{N}	0.87435	0.0	0.10428	0.62343
S^2	0.00265	0.0	0.00245	0.00556
VaR	0.791	0.0	0.014	0.504

Таблица 2.2. Индексы устойчивости VaR

¹ <http://www.gurobi.com/>

² <https://developers.google.com/maps/documentation/distance-matrix/>

В Таблице 2.2 представлены выборочные средние и дисперсии уровней сменяемости для каждого p и значение риска смены хабов (2.10). Наиболее устойчивым количеством хабов является $p = 7$, при котором сеть хабов является постоянной и не изменяется от возмущений в спросе. При $p = 8$ сеть хабов также является устойчивой, потому что значение VaR близко к 0 и на порядок меньше, чем у $p = 6$ и $p = 9$. Высокий уровень смены хабов в зависимости от возмущений в спросе связан с наличием конкурентных хабов, которые вследствие колебаний в спросе могут быть выгоднее в определенных ситуациях.

Отметим, что полученные результаты не учитывают разность в целевых функциях, а оценивают вероятности изменения оптимальной сети. Использование критерия целесообразно в условиях существующей сети с целью разработки стратегии по изменению сети на более устойчивую.

Глава 3

Робастное размещение хабов в условиях неопределенности: минимизация отклонений затрат

В настоящем разделе диссертационной работы формулируется стохастическая постановка UMANLP с неопределенностью в спросе в Разделе 3.1. Робастная концепция задачи UMANLP и постановка задачи приведены в Разделе 3.2, а альтернативная линейная формулировка задачи представлена в Разделе 3.3. В Разделах 3.4 и 3.5 представлены основной и улучшенный алгоритмы разложения Бендерса. Результаты численного эксперимента на САВ и АР данных представлены в Разделе 3.6.

3.1. Стохастическая постановка задачи UMANLP

В Разделе 2.1 введены основные обозначения и уравнения для математического описания задачи UMANLP (2.1) – (2.3), (2.5), (2.6), которые будут использоваться в настоящей главе. В настоящем разделе будет рассмотрена стохастическая постановка задачи, где спрос не является детерминированным.

Моделирование неопределенности в спросе осуществляется посредством набора сценариев $S = \{1, \dots, f\}$, где f — это количество рассматриваемых сценариев. Каждый сценарий отражает возможный спрос в сети с заранее заданной вероятностью p_s для $s \in S$, где w_{ij}^s — это величина спроса по сценарию s , с отправителем $i \in N$ и пунктом конечного назначения $j \in N$.

Представление неопределенности через набор сценариев с соответствующими вероятностями призван подчеркнуть наиболее реалистичные ситуации по мнению экспертов, которые оказывают наибольшее влияние на процесс принятия решений. Нормированные веса степени влияния сценариев характеризуют

ются вероятностями их появления, при этом предполагается, что $\sum_{s \in S} p_s = 1$.

Введем дополнительную вещественную переменную x_{ijkm}^s — поток направленный из $i \in N$ в $j \in N$ через хабы $k, m \in K$ по сценарию $s \in S$, тогда стохастическая постановка задачи имеет вид:

$$\min \sum_{k \in K} a_k y_k + \sum_{s \in S} p_s \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s \quad (3.1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{m \in K, m \neq k} x_{ijmk}^s + \sum_{m \in K} x_{ijkm}^s \leq w_{ij}^s y_k \quad i, j \in N, k \in K, s \in S \quad (3.2)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{m \in K} x_{ijkm}^s = w_{ij}^s \quad i, j \in N, s \in S \quad (3.3)$$

$$x_{ijkm}^s \geq 0 \quad i, j \in N, k, m \in K, s \in S \quad (3.4)$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \quad k \in K, \quad (3.5)$$

Целевая функция (3.1) состоит из затрат на установку хабов и математического ожидания транспортных затрат, которые должны быть минимизированы на множестве сценариев S . Ограничения (3.2) и (3.3) соответствуют детерминированному случаю Раздела 2.1 ограничениям (2.2) и (2.3) для каждого сценария $s \in S$. Стохастическая постановка задачи (3.1) – (3.5) будет использоваться в качестве референтной модели.

3.2. Концепция робастности решения UMANLP

Особенность формулировки задачи настоящего раздела заключается в представлении неопределенности в математической форме, где надежность построения сети позиционируется следующим образом: суммарные транспортные расходы для каждого сценария спроса должны стремиться быть равными и ми-

нимальными в той степени, в которой затраты на установку хаба позволяют минимизировать суммарные ожидаемые затраты.

Ключевым моментом предлагаемой постановки задачи является компромисс между минимизацией транспортных расходов и минимизацией их отклонений в разрезе сценариев. Результирующая сеть хабов для различных сценариев спроса количественно определяет самую низкую надежную верхнюю границу транспортных расходов. В дальнейшей обработке результата при фиксированном размещении хабов есть возможность снизить затраты путем изменения связей узловых точек с хабами в разрезе фиксированного сценария (тактический или оперативный уровень планирования). Построение связей откладывается на более поздние уровни планирования, когда сценарий спроса становится определенным. Расположение хабов в предлагаемой робастной формулировке снижает колебания транспортных расходов в зависимости от сценария спроса и обеспечивает надежное решение. Насколько известно автору, подход к выравниванию транспортных расходов в рамках сценариев в задаче размещения хаба не рассматривался ранее.

Введенная постановка задачи усредняет взвешенные абсолютные отклонения между ожидаемыми транспортными затратами и затратами по каждому сценарию, тем самым обеспечивая устойчивость к ожидаемым изменениям спроса. Таким образом, постановка задачи робастного размещения хабов в случае UMANLP сформулирована следующим образом:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k \in K} a_k y_k + \sum_{s \in S} p_s \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s \\ & + \lambda \sum_{s \in S} p_s \left| \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s - \sum_{s' \in S} p_{s'} \left(\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^{s'} \right) \right| \end{aligned} \quad (3.6)$$

при ограничениях: (3.2) – (3.5)

В работе предлагается модель стохастического программирования, в которой надежное расположение хабов остается «близким» к оптимальному для каждого сценария $s \in S$. В работе принято следующее сокращение наименова-

ния задачи — StHLPAD (англ. Stochastic Hub Location Problem with Absolute deviation).

Первое слагаемое в (3.6) представляет затраты на установку хабов, второе слагаемое в целевой функции — математическое ожидание транспортных затрат, третье слагаемое — взвешенное среднее абсолютного отклонения транспортных затрат по сценарию от общих ожидаемых транспортных затрат. Параметр λ можно рассматривать как фактор компромисса между ожидаемыми транспортными затратами и разбросом затрат.

3.3. Линейная постановка задачи

Предложенная формулировка задачи робастного размещения хабов (3.2) – (3.6) содержит функцию модуля в целевой функции, следовательно, задача относится к классу задач нелинейного программирования. Введем в рассмотрение альтернативную линейную постановку задачи:

$$\mathbf{min} \quad \sum_{k \in K} a_k y_k + \sum_{s \in S} p_s \left[\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s + 2\lambda z^s \right] \quad (3.7)$$

при ограничениях (3.2)–(3.5)

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s - \\ & \sum_{s' \in S} p_{s'} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^{s'} + z^s \geq 0 \quad \forall s \in S \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$z^s \geq 0, \forall s \in S, \quad (3.9)$$

где z^s является вспомогательной неотрицательной вещественной переменной преобразования абсолютного значения выражения в набор линейных уравнений для каждого сценария $s \in S$.

Целевая функция (3.7) в совокупности с ограничениями (3.8) и (3.9) эквивалентна выражению (3.6).

Теорема 3.3.1: Постановки задач (3.2) – (3.5), (3.7) и (3.2) – (3.6) являются эквивалентными.

Доказательство. Покажем, что (3.7), (3.8) и (3.9) эквивалентны (3.6). Не нарушая общности, уберем одинаковые слагаемые из (3.7) и (3.6), кроме того, добавим к (3.7) следующее слагаемое:

$$\lambda \sum_{s \in S} p_s \left(\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s - \sum_{s' \in S} p_{s'} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^{s'} \right). \quad (3.10)$$

Данная процедура добавления является оправданной, так как в силу $\sum_{s \in S} p_s = 1$ слагаемое (3.10) равно 0.

Необходимо показать, что

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \sum_{s \in S} p_s \left(\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s - \right. \\ & \left. \sum_{s' \in S} p_{s'} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^{s'} + 2z^s \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

при ограничениях: (3.8), (3.9), является равносильной задаче

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \sum_{s \in S} p_s \left| \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s - \right. \\ & \left. \sum_{s' \in S} p_{s'} \left(\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^{s'} \right) \right| \end{aligned} \quad (3.12)$$

Покажем, что тождество справедливо для соответствующих фиксированных по $s \in S$ слагаемых.

Коэффициент при переменной z^s в целевой функции (3.11) является положительным, поэтому процесс минимизации будет стремиться присвоить минимальное возможное значение переменной. Отметим, что с учетом ограничений (3.8), (3.9) наименьшее возможное значение

$$z_{\min}^s = \min(0, \sum_{s' \in S} p_{s'} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^{s'} - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s). \quad (3.13)$$

Если выполняется

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s - \sum_{s' \in S} p_{s'} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^{s'} \geq 0, \quad (3.14)$$

тогда исходя из (3.8) и (3.9) оптимальное значение переменной z^s будет равно 0, так как является допустимым и наименьшим.

Если неравенство (3.14) не выполняется, тогда наименьшее значение $z^s > 0$, а целевая функция (3.11) для фиксированного сценария $s \in S$ примет противоположный знак. Таким образом, указанная постановка реализует функцию модуля разности. Не нарушая общности, полученный результат можно распространить на сумму сценариев.

Получили, что линейная постановка (3.8), (3.9), (3.11) эквивалентна задаче нелинейного программирования (3.12). **Доказано.**

Заметим, что задача (3.2) – (3.5), (3.7) – (3.9) может быть решена стандартными методами линейного программирования, в то время как методы решения задачи нелинейного программирования уступают по производительности и предсказуемости сходимости к решению.

Предложенная постановка робастного размещения хабов StHLPAD отличается от стохастической постановки, представленной в Разделе 3.1 на $|S|$ переменных и $|2S|$ ограничений.

В последующих двух разделах будут рассмотрены подходы к решению поставленной задачи линейного программирования (3.2) – (3.5), (3.7) – (3.9).

3.4. Разложение Бендерса

В Разделе 1.2 обзора литературы приведены способы решения задач размещения хабов с использованием разложения Бендерса. Алгоритм разложения в базовой его формулировке был предложен Бендерсом в 1962 году [31]. Основным принципом работы алгоритма является разбиение задачи на МР (англ. Master Problem) и SP (англ. Slave Problem). Метод применяется к задачам с матрицей коэффициентов ограничений ступенчатого вида.

Модель, предложенная в предыдущем разделе (3.2) – (3.5), (3.7) – (3.9) может быть представлена в виде двухшаговой задачи оптимизации, где на первом шаге рассматриваются целочисленные переменные (размещение хабов y_k), а значения вещественных переменных находятся на втором шаге (потоки x_{ijkm} , отклонения затрат z^s). Постановка задачи в двушаговой форме будет иметь вид:

$$\min \sum_{k \in K} a_k y_k + M \quad (3.15)$$

при ограничениях (3.5),

$$M \geq Q(y), \quad (3.16)$$

$$M \geq 0, \quad (3.17)$$

где ограничение (3.16) не является неравенством в явном виде, а представляет оптимизационную задачу. В свою очередь, $Q(y)$ — задача оптимизации второго шага имеющая вид:

$$\min \sum_{s \in S} p_s \left[\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s + 2\lambda z^s \right] \quad (3.18)$$

при ограничениях (3.2) – (3.4), (3.8) – (3.9)

Основной идеей разложения является ослабление ограничения (3.16) и его замена на сечения, которые будут добавляться на итерациях в процессе решения задачи. Различают два вида сечений в алгоритме разложения Бендерса: оптимальные сечения, которые оценивают оптимальное значение целевой функции задачи второго шага; сечения допустимости, которые «удаляют» допустимые значения переменных на первом шаге, приводят к несовместности задачи на втором шаге. В терминологии Бендерса задача первого шага называется МР, задача второго шага — SP.

В нашем случае, если в МР не будет выбран ни один хаб, то SP не будет иметь решения на основании следующих предположений: весь спрос должен

быть обслужен, и нет прямых соединений между О–П. Добавление вспомогательного уравнения в МР позволит исключить данную ситуацию:

$$\sum_{k \in K} y_k \geq 1. \quad (3.19)$$

После добавления в МР неравенства (3.19) необходимость в сечениях допустимости отпадает.

Прежде чем показать процедуру генерации сечений, сформулируем двойственную задачу DSP (англ. Dual Slave Problem, DSP) для некоторого фиксированного решения задачи МР ($y = y^{(h)}$):

$$\max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^s - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^s w_{ij}^s y_k^{(h)} \quad (3.20)$$

при ограничениях

$$e_s \leq 2\lambda p_s \quad s \in S, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} c_{ijkm} e_s - p_s c_{ijkm} \sum_{s \in S} e_s + v_{ij}^s - u_{ijk}^s - u_{ijm}^s \\ \leq c_{ijkm} p_s \quad i, j \in N, k \neq m, k, m \in K, s \in S, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$c_{ijkk} e_s - p_s c_{ijkk} \sum_{s \in S} e_s + v_{ij}^s - u_{ijk}^s \leq c_{ijkk} p_s \quad i, j \in N, k \in K, s \in S, \quad (3.23)$$

$$e_s \geq 0 \quad s \in S, \quad (3.24)$$

$$v_{ij}^s \in R \quad i, j \in N, s \in S, \quad (3.25)$$

$$u_{ijk}^s \geq 0 \quad i, j \in N, k \in K, s \in S, \quad (3.26)$$

где двойственные переменные u_{ijk}^s, v_{ij}^s, e^s , соответствующие ограничениям (3.2), (3.3), (3.8). Пусть $M^{(h)}$ — значение целевой функции (3.20) при ограничениях (3.21) – (3.26) на итерации h , а M^* — искомое оптимальное значение задачи DSP, то есть выполняется $M^{(h)} \leq M^*$ для всех итераций h , исходя из теоремы двойственности. Пусть U — множество всех экстремальных точек многогранника, образованного ограничениями (3.21) – (3.26), тогда задача DSP может быть переформулирована следующим образом:

$$\min_{M \geq 0} \{M : M \geq M^{(h)}, \forall (u^{(h)}, v^{(h)}, e^{(h)}) \in U\},$$

где $(u^{(h)}, v^{(h)}, e^{(h)})$ — вектор двойственных переменных (точка, принадлежащая многограннику U) и

$$M^{(h)} = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^{s(h)} - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^{s(h)} w_{ij}^s y_k. \quad (3.27)$$

Введенная выше постановка DSP с использованием экстремальных точек многогранника образованного ограничениями DSP позволяет заменить правую часть ограничения (3.16) на (3.27), что приводит к следующей постановке МР:

$$\min \sum_{k \in K} a_k y_k + M \quad (3.28)$$

при ограничениях:

$$M \geq \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^{s(h)} - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^{s(h)} w_{ij}^s y_k, \quad (u^{(h)}, v^{(h)}, e^{(h)}) \in U, \quad (3.29)$$

$$M \geq 0, \quad (3.30)$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \quad k \in K. \quad (3.31)$$

Отметим, что новая постановка задачи содержит большое количество ограничений типа (3.29), но не все эти ограничения необходимы для достижения оптимального значения целевой функции (3.28), что используется в разложении Бендерса. Добавление ограничений типа (3.29) в итеративном подходе позволяет рассматривать подмножество $U^{(h)} \subset U$, которое расширяется экстремальными значениями DSP путем решения задачи (3.20) – (3.26) на каждой итерации h . Рассмотрение подмножества $U^{(h)}$ вместо U приводит к ослаблению постановки МР, уравнения (3.28) называются сечениями Бендерса и представляют нижнюю границу оптимального решения МР.

Процедура организации итераций состоит из следующих этапов: решение задачи МР и получение значений $y^{(h)}$, решение задачи DSP^(h) и получение значений $u_{ijk}^{s(v)}$, $v_{ij}^{s(v)}$, $e^{s(v)}$, добавление новой точки в $U^{(h)}$, генерация сечения Бендерса. Отметим, что верхняя граница МР на итерации h получается путем сложения оптимального значения целевой функции DSP^(h) и суммарных затрат на открытие хаба из МР^(h). Схема, описывающая алгоритм разложения Бендерса задачи (3.2) – (3.5), (3.7) – (3.9) представлена в Приложении А.1.

3.5. Ускоренный алгоритм разложения Бендерса

Производительность разложения Бендерса по количеству итераций и процессорному времени зависит от качества сечений. Многие исследователи находятся в поиске способа к генерации дополнительных усиливающих сечений или «обдуманного» выбора оптимальных решений DSP для получения наименьшего количества итераций h , то есть минимального количества итераций для завершения процедуры оптимизации задачи. Первым методом ускорения разложения принято считать исследование Magnanti и Wong'a [34], в котором предложена процедура генерации Парето-оптимальных (ПО) сечений для усиления сечений оптимальности Бендерса. Построение ПО сечений основывается на использовании точек, лежащих внутри выпуклой оболочки многогранника, образованного

допустимыми значениями переменных задачи МР. Процедура поиска таких точек и их обновление на итерациях составляет основную проблему ПО сечений в практическом смысле.

Paradakos [35] отмечает, что подход Magnanti и Wong может приводить к потере эффективности поиска решения вследствие одновременной оптимизации DSP и нахождения ПО сечений. Автором работы предлагается альтернативный алгоритм нахождения ПО сечений, где задачи DSP и нахождение недоминируемого сечения в смысле Парето-оптимальности разделены на две независимые подзадачи. Кроме того, автор показывает, что вместо точек из выпуклой оболочки допустимых решений МР можно использовать так называемые точки Magnanti и Wong, которые представляются в виде выпуклой комбинации точек выпуклой оболочки МР и допустимого решения МР. В дальнейшем будет использован подход из [35] для получения Парето-оптимальных сечений.

Пусть $y^{(h)}$ — оптимальное решение МР на итерации h , а $U^{(h)}$ — множество всех экстремальных точек задачи DSP для $y = y^{(h)}$, тогда условие недоминируемого решения $u_{ijk}^{s*}, v_{ij}^{s*}, e^{s*}$ задачи DSP будет определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^{s*} - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^{s*} w_{ij}^s y_k^{(h)} \\ & \leq \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^s - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^s w_{ij}^s y_k^{(h)}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\forall (u^{(h)}, v^{(h)}, e^{(h)}) \in U^{(h)}.$$

Авторы работы [34] показали, что недоминируемое решение задачи DSP можно получить посредством точек из выпуклой оболочки МР. Пусть \hat{y} — внутренняя точка выпуклой оболочки $Conv(Y)$ множества допустимых значений МР, последнее обозначено за Y . В работе [34] доказано, что, если сечение выбрано таким образом, что соответствующие значения двойственных переменных составляет максимум DSP с фиксированными значениями переменных МР $y = \hat{y}$ из $Conv(Y)$ на множестве $U^{(h)}$, то такое сечение является недоминируемым

для любого допустимого решения DSP, то есть необходимо решить следующую задачу:

$$\mathbf{max} \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^s - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^s w_{ij}^s \hat{y}_k \quad (3.33)$$

при ограничениях (3.21) – (3.26)

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^s - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^s w_{ij}^s y_k^{(h)} = \phi_{DSP}(e, u, v). \quad (3.34)$$

где переменные определены на множестве экстремальных точек DSP с $y = y^{(h)}$, то есть $(u, v, e) \in U^{(h)}$. Значение $\phi_{DSP}(e, u, v)$ соответствует оптимальному значению (3.20) DSP на итерации h . Такая альтернатива задаче DSP приводит к сокращению количества итераций, но может привести к потере эффективности по скорости решения. Также на каждой итерации необходимы новые \hat{y} , поиск которых в практическом смысле вызывает затруднения.

Одним из вариантов решения указанных проблем используется в настоящей диссертации. Следуя алгоритму из [35], задачу (3.21) – (3.26), (3.33), (3.34) разделим на 2 последовательные несвязанные подзадачи, где одной из них является DSP вида (3.20) – (3.26), а вторая задача — (3.21) – (3.26) и (3.33).

Каждая из приведенных подзадач может быть использована для генерации сечения: стандартного сечения оптимальности Бендерса и ПО сечения. Решение двух задач для генерации пары сечений на каждой итерации было предложено в [34]. Но Papadakos в [35] доказал, что при обновлении точек \hat{y} на каждой итерации алгоритма достаточно решать задачу (3.21) – (3.26), (3.33) без рассмотрения ограничения (3.34), что привело к значительному упрощению процедуры нахождения ПО сечений. Процедура получения значения точек Magnanti и Wong, которые можно использовать в качестве \hat{y} , описана в [35]:

$$\hat{y}_k^{(h+1)} = (1 - \gamma)\hat{y}_k^{(h)} + \gamma y_k^{(h)} \quad k \in K, \quad (3.35)$$

где $0 < \gamma < 1$. Эмпирически получено, что при $\gamma = 1/2$ получаются лучшие результаты [35, 63]. В работе [33] предложена идея нахождения первой точки из выпуклой оболочки МР, которая адаптирована к поставленной задаче в следующем утверждении:

Утверждение 3.4.1: Точка $\hat{y}_k^{(0)} = 1/2 \quad k \in K$ является точкой Magnanti и Wong.

Доказательство. Рассмотрим $|K|+1$ решений задачи МР: $|K|$ решений соответствуют размещению одного единственного хаба в сети, и одно решение соответствует размещению всех $|K|$ хабов в сети. Введем выпуклую комбинацию решений со следующими коэффициентам: $1/(2|K|-2)$ — у решений с одним хабом, и $1/2 - 1/(2|K|-2)$ — при решении с $|K|$ хабами. Таким образом получаем, что $\hat{y}_k^{(0)} = 1/2$ принадлежит $Conv(Y)$. **Доказано.**

Схема ускоренного алгоритма, основанного на ПО сечениях, представлена в Приложении А.2.

3.6. Численный эксперимент

В ходе компьютерного эксперимента реализованы компьютерные программы, соответствующие моделям и алгоритмам, представленным в Разделах 3.1 – 3.5 и в Приложении А. Построение задач линейного и нелинейного программирования и решение задач осуществлялись с использованием программного продукта GUROBI Optimizer 8.0.1¹ на машине 4.2 GHz, 64GB ОЗУ в среде Linux. Программная реализация алгоритмов и математических моделей разрабатывалась на верхнеуровневом языке программирования Python 3.6 с использованием редактора PyCharm IDE.

Вычисления проводились на широко известных в HLP данных из Operation Research Library [64], рассматривались два набора данных: Civil Aeronautic Board (СAB, см. Рис. 3.1) и Australian Post (AP). В наборе данных SAB пред-

¹ <http://www.gurobi.com/>

ставлены 25 узловых точек сети, соответствующих городам США, с каждой точкой сети ассоциирован спрос пассажиров авиакомпаний по всем направлениям в сети и аппроксимированное евклидово расстояние между точками сети d_{ij} . Набор данных AP содержит аналогичные параметры: 200 узловых точек австралийской почты, — но в расчетах будет использоваться усеченный набор данных, содержащий 40 объектов сети.

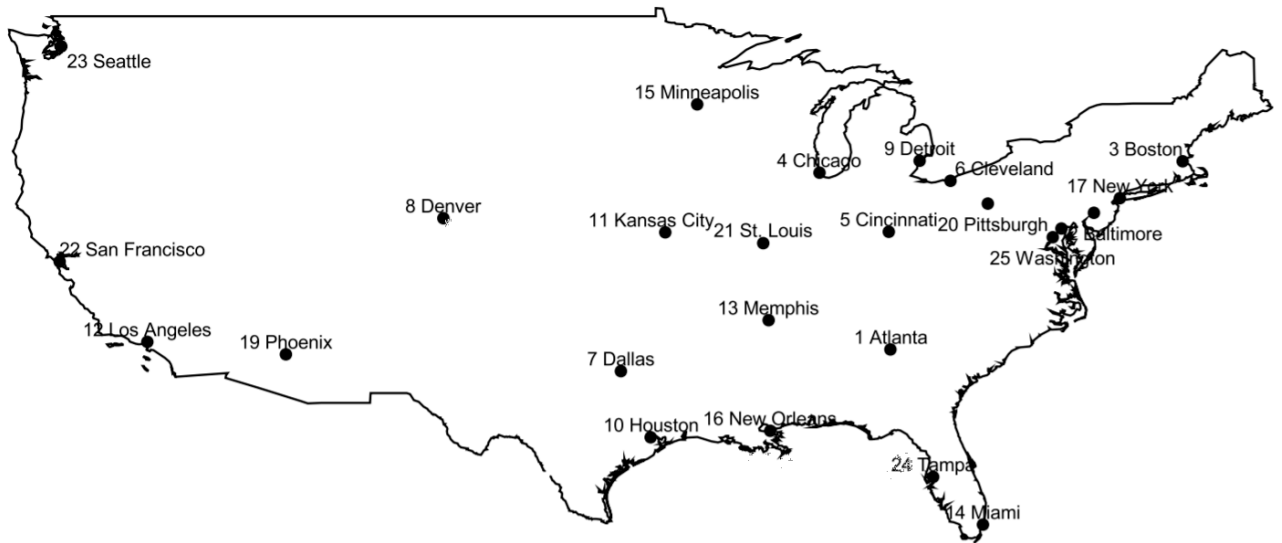


Рис. 3.1. Расположение узловых точек набора данных САВ

В процессе подготовки данных САВ и AP производилась нормализация спроса, т. е. суммарный спрос по всем направлениям равняется 1. В данных САВ отсутствует информация об открытии хаба в узловой точке, следуя процедуре восполнения данных из [44], стоимость открытия хабов может быть представлена следующим образом: $a_k = 15 \log \sum_{j \in N} w_{kj}$, $k \in K$. Набор потенциальных хабов в сети K содержит все точки сети, 25 и 40 для САВ и AP соответственно, т. е. любая узловая точка потенциально может являться хабом.

В постановке StHLPAD рассматривается неопределенность в спросе, моделируемая набором сценариев с соответствующими вероятностями реализации сценария. Процедура генерации сценариев заимствована из работы [44], где величина спроса по направлению выбирается из интервала $[0.01w_{ij}, 10w_{ij}]$. Указанный интервал разделен на две части: $[0.01w_{ij}, 5w_{ij}]$ и $[5w_{ij}, 10w_{ij}]$, где спрос

для i, j и каждого сценария s получается путем случайного выбора значения с вероятностью $2/3$ из первой половины интервала и с вероятностью $1/3$ из второй половины. Данная процедура используется в целях устранения симметричности данных в сценариях. Количество сгенерированных сценариев для САВ и АР соответственно — 5 и 3. Рассматриваются два типа распределения вероятностей реализации сценариев: в первом случае сценарии распределены равномерно с одинаковыми вероятностями, во втором случае рассматриваются убывающие вероятности, а именно: $[1/3, 1/4, 1/6, 1/6, 1/12]$ и $[1/2, 1/3, 1/6]$ распределение вероятностей для САВ и АР соответственно.

В литературе в экспериментах на САВ и АР данных рассматриваются четыре различных значения α (коэффициент дисконтирования стоимости транспортировки потоков между хабами): 0.2, 0.4, 0.6 и 0.8, — а фактор компромисса $\lambda \in \{0.5, 5\}$.

Название кейсов кодируются следующим образом: САВ $10\alpha.d$ и АР $10\alpha.d$, где САВ и АР наборы данных, 10α — коэффициент дисконтирования, умноженный на 10, а $d \in \{U, C\}$ — метка распределения вероятностей реализации сценариев, где U — равномерное распределение вероятностей и C — убывающие вероятности.

Код	Время (сек.)	Хабы	Obj.	Код	Время (сек.)	Хабы	Obj.
САВ2.U	11.87	4, 7, 12, 17, 24	963.85	АР2.U	145.64	0, 13, 32	196344.12
САВ4.U	10.71	4, 12, 18, 24	1104.25	АР4.U	130.4	0, 13, 32	203471.52
САВ6.U	8.59	12, 18, 21	1216.76	АР6.U	181.31	13,18	209540.29
САВ8.U	7.61	12, 18, 21	1288.86	АР8.U	110.51	18,21	211718.21
САВ2.C	11.54	4, 7, 12, 17, 24	961.38	АР2.C	152.5	0, 13, 32	196847.98
САВ4.C	10.53	4, 12, 18, 24	1099.1	АР4.C	137.22	0, 13, 32	203949.18
САВ6.C	10.08	12, 18, 21	1209.69	АР6.C	118.92	13,18	209330.98
САВ8.C	8.16	12, 18, 21	1280.01	АР8.C	113.73	13,18	211965.67

Таблица 3.1. Результаты расчета для классической стохастической постановки

В Таблицах 3.1 и 3.2 столбцы «Время (сек.)» содержат значения процессорного времени, затраченного на решение соответствующих задач методами

линейного программирования (симплекс метод, метод ветвей и границ и др. методы, встроенные в Gurobi Optimizer), поле «Хабы» обозначает списки узлов сети, выбранных в качестве хабов, «Obj.» — значение целевой функции после оптимизации. В Таблице 3.2 также имеется поле λ , соответствующее уровню компромисса между отклонениями затрат от ожидаемого решения и ожидаемых затрат.

В Таблице 3.1 представлены результаты эксперимента для стохастической постановки задачи, описанной в Разделе 3.1, Таблица 3.2 сформирована на основе вычислительного эксперимента для линейной модели StHLPAD, сформулированной в Разделе 3.3, где поле «Obj. Stoch.» перечисляет значения целевой функции (3.7) за вычетом штрафа отклонений (без слагаемого $2\lambda z^s$). Данный показатель введен в рассмотрение для возможности сравнения значений целевых функций 3.1 и 3.2 и оценки степени влияния абсолютного отклонения затрат на решение.

Заметим, что оптимальные значения целевых функций «Obj.» из Таблицы 3.1 и «Obj. Stoch.» из Таблицы 3.2 в случае $\lambda = 0.5$ имеют одинаковые значения для соответствующих запусков, кроме того, результирующие сети хабов являются идентичными. Такой результат связан с незначительным весом абсолютного отклонения затрат в целевой функции в сравнении с ожидаемыми затратами, для набора данных САВ слагаемое составляет в среднем 0.7%, а для случая АР — в среднем 0.3% от значения целевой функции. В случае, когда $\lambda = 5$ сеть хабов для $\alpha \in \{0.6, 0.8\}$ в Таблице 3.2 отличается от результатов в Таблице 3.1, что демонстрирует влияние слагаемого абсолютного отклонения затрат на построение сети хабов, подчеркнем, что значения целевых функций в Таблицах 3.1 и 3.2 отличаются в случае $\lambda = 5$ (сравниваются «Obj.» и «Obj. Stoch.» соответственно). Затраты (установка хабов и ожидаемые транспортные затраты) для StHLPAD увеличились на 2% для САВ и на 0.6% для АР в сравнении с аналогичными затратами для постановки задачи из Раздела 3.1.

Значение абсолютного отклонения транспортных затрат рассчитываются

Код	$\lambda = 0.5$				$\lambda = 5$			
	Время (сек.)	Хабы	Obj.	Obj. St.	Время (сек.)	Хабы	Obj.	Obj.St.
СAB2.U	70.29	4, 7, 12, 17, 24	968.21	963.85	328.29	4, 7, 12, 17, 24	985.66	985.66
СAB4.U	103.25	4, 12, 18, 24	1111.27	1104.25	479.26	4, 12, 18, 24	1137.43	1137.43
СAB6.U	121.17	12, 18, 21	1225.72	1216.76	357.11	2, 12, 21	1252.59	1252.59
СAB8.U	67.5	12, 18, 21	1301.26	1288.86	177.95	2, 12, 21	1333.38	1333.38
СAB2.C	110.73	4, 7, 12, 17, 24	963.72	961.38	825.26	4, 7, 12, 17, 24	981.77	962.34
СAB4.C	85.28	4, 12, 18, 24	1103.47	1099.1	687.6	4, 12, 18, 24	1132.22	1106.18
СAB6.C	94.85	12, 18, 21	1215.9	1209.69	299.59	2, 12, 21	1248.29	1226.8
СAB8.C	84.53	12, 18, 21	1288.72	1280.01	190.36	2, 12, 21	1328.65	1304.98
AP2.U	2653.99	0, 13, 32	196967.07	196344.1	2856.97	0, 13, 32	197498.4	197498.44
AP4.U	2204.88	0, 13, 32	204086.93	203471.5	2203.47	0, 13, 32	204491.3	204491.28
AP6.U	3485.79	13, 18	210190.79	209540.8	3966.33	0, 13, 32	210609.5	210609.5
AP8.U	3010.51	18, 21	212330.64	211718.3	2640.76	18, 21	213555.4	213555.39
AP2.C	1787.33	0, 13, 32	197243.43	196848	2119.67	0, 13, 32	197498.4	197498.44
AP4.C	2135.83	0, 13, 32	204336.5	203949.2	2484.31	0, 13, 32	204491.3	204491.28
AP6.C	1992.08	13, 18	209911.09	209331	3013.88	0, 13, 32	210609.5	210609.5
AP8.C	2092.54	13, 18	212538.74	211965.7	2686.95	18, 21	213555.4	213555.39

Таблица 3.2. Результаты расчета для линейной STHLRAD

по формуле «Obj.» минус «Obj. Stoch.», используя столбцы из Таблицы 3.2. Эта разница не равна 0 для всех случаев при $\lambda = 0.5$, т. к. единица транспортных затрат перевешивает штраф за единицу отклонения затрат. По этой причине решения для $\lambda = 0.5$ получились одинаковыми. В свою очередь, для 75% случаев слагаемое абсолютного отклонения равняется 0 при $\lambda = 5$, это означает, что в разрезе каждого сценария транспортные расходы равны между собой и является ожидаемым результатом предложенной в Разделе 3.2 концепции робастной сети хабов.

Заметим, что неравномерное распределение вероятностей у сценариев (маркированные буквой «С») для САВ при $\lambda = 5$ привело к тому, что абсолютные отклонения не равны 0. Здесь сценарии с наибольшей вероятностью имеют больший вес в целевой функции и превышают вес отклонений, в то время как сценарии с меньшей вероятностью имеют вес меньше. В случае с АР ситуация не повторилась, так как транспортные затраты по направлениям выше, чем в САВ.

Параметр λ является степенью влияния абсолютного отклонения транспортных затрат, который для $\lambda = 0$ приводит к базовой стохастической постановке из Раздела 3.1. Большое значение параметра λ в сравнении с транспортными затратами и затратами на установку хабов повышает степень влияния штрафа отклонений затрат в целевой функции; как следствие, оптимизация ожидаемых затрат сети у затрат по открытию хабов становятся второстепенными.

Вторая часть эксперимента акцентирует внимание на производительности алгоритмов решения задачи StHLPAD: решение задачи стандартными программными пакетами (Gurobi Optimizer), разложение Бендерса (Приложение А.1) и ускоренное разложение Бендерса (Приложение А.2). В Таблице 3.3 представлены результаты вычисления для «Классические сечения» и «Парето-оптимальные сечения», поле «Время (сек.)» — процессорное время решения задачи указанным алгоритмом, а «Iter.» — количество итерации, совершенных для по-

Код	$\lambda = 0.5$				$\lambda = 5$			
	Классические сечения		ПО сечения		Классические сечения		ПО сечения	
	Время (сек.)	Iter.	Время (сек.)	Iter.	Время (сек.)	Iter.	Время (сек.)	Iter.
САВ2.U	478.51	60	870.57	15	678.45	79	1487.25	19
САВ4.U	453.76	59	751.36	14	651.6	78	1184	18
САВ6.U	348.98	46	606.07	12	299.27	37	1046.96	16
САВ8.U	194.54	26	493.36	10	220.78	28	1124.77	17
САВ2.C	518.76	65	663.1	13	673.29	80	661.46	11
САВ4.C	394.64	51	404.51	9	538.03	64	673.48	12
САВ6.C	297.59	38	456.79	11	394.59	46	667.1	11
САВ8.C	169.89	22	328.26	9	210.95	26	406.11	8
АР2.U	421.28	9	4023.44	6	471.67	11	7785.86	6
АР4.U	421.64	9	4645.4	7	526.32	13	6177.96	7
АР6.U	430.88	10	5852.66	8	529.69	13	7009.95	8
АР8.U	372.83	9	4726.91	6	532.58	14	7096.61	8
АР2.C	391.73	8	3845.97	6	377.36	9	6329.79	7
АР4.C	423.15	9	4311.91	7	466	11	7166.34	7
АР6.C	373.26	9	3994.22	6	468.1	11	7018.26	8
АР8.C	263.94	7	3405.2	6	412.6	11	6704.89	8

Таблица 3.3. Производительность алгоритмов Бендерса

лучения оптимального решения. Из Таблицы 3.3 видно, что обычные сечения Бендерса оказались быстрее ПО сечений по «Время (сек.)», исключение составляет САВ2.C. С другой стороны, ПО сечения предназначены для повышения качества сечений, что можем видеть в Таблице 3.3: примерно в 4 раза меньше сечений на данных САВ и в 1.5 раза меньше сечений для набора данных АР. Это демонстрирует нам, что растет сложность вычисления сечений, если качество сечений растет. Кроме того, получили, что скорость решения задачи обычными сечениями Бендерса оказалась в 4 раза медленнее, чем у Gurobi Optimizer на данных САВ (Таблица 3.1), но в 6.3 раза быстрее на данных АР. В литературе утверждается, что данные САВ являются «простыми» в плане оценки и сравнения производительности алгоритмов, содержат недостаточное количество точек сети, поэтому мы делаем основной акцент на АР данных.

Глава 4

Задача размещения хабов, основанная на максимизации прибыли в условиях неопределенности спроса и выручки

В настоящей главе поставлена стохастическая задача размещения хабов с целевой функцией максимизации ожидаемой прибыли в условиях неопределенности спроса и выручки. Основное допущение в сравнении с классическими ограничениями задачи размещения хабов — обслуживание всего спроса не является обязательным. В Разделе 4.1 сформулирован детерминированный случай задачи с функцией максимизации прибыли, который является альтернативой постановок, рассмотренных в литературе. Нелинейная и эквивалентная линейная постановка задачи размещения хабов в условиях неопределенности в спросе рассмотрены в Разделе 4.2, аналогичные постановки задач в условиях неопределенности спроса и выручки представлены в Разделе 4.3. В Разделах 4.4 – 4.7 рассмотрены подходы разложения Бендерса задачи Раздела 4.3 с применением различного рода усиления сечений: Парето-оптимальных, максимальных недоминируемых и гибридных. Результаты численного эксперимента на данных CAB и AP из ORLibrary представлены в Разделе 4.8.

4.1. Детерминированная постановка задачи

Пусть $G = \{N, A\}$ — полный граф, где N — набор узловых точек, A — множество всех ребер графа, а $H \subseteq N$ — множество потенциальных хабов для выбора. Направления спроса представляется в виде множества K , где $\forall k \in K$ определяет триплет $(o(k), d(k), W_k)$, где отправитель и получатель $o(k), d(k) \in N$ соответственно, а объем спроса W_k направлен из $o(k)$ в $d(k)$.

Для каждого $k \in K$ расстояние между $o(k)$ и $d(k)$ определяется как d_k ,

c_{ij} — стоимость транспортировки единицы потока на единицу расстояния из узловой точки $i \in N$ в $j \in N$. Маршрутизация потока возможна через минимум один и не более, чем два хаба, использование более двух хабов в литературе признано неэффективным. Поэтому транспортные затраты за единицу потока будут агрегированы следующим образом: $F_{ijk} = c_{o(k)i}d_{o(k)i} + \alpha c_{ij}d_{ij} + c_{jd(k)}d_{jd(k)}$ для маршрута из $o(k)$ в $d(k)$ через хабы i и j , где α — уровень скидки на транспортировку между хабами. Фиксированные стоимости открытия хабов обозначены f_i для $i \in N$.

Классической постановкой задачи о размещении хабов является задача минимизации общих затрат, что составляет отличие от задач максимизации прибыли, где задача состоит в максимизации целевого показателя прибыли. Пусть R_k — выручка за обслуживание единицы потока k , где спрос считается обслуженным, если он доставлен из $o(k)$ до конечного пункта $d(k)$.

Далее автором настоящей диссертации вводится задача смешанного целочисленного программирования для UMANLP с целевой функцией максимизации прибыли. Пусть бинарная переменная y_i для каждого $i \in H$, где y_i равен 1, если i -ая узловая точка выбрана стать хабом, 0 в противном случае, вещественная переменная x_{ijk} обозначает поток $k \in K$, направленный через хабы $i \in H$ и $j \in H$. Мы вводим вещественную переменную z_k для $k \in K$, которая обозначает объем выгодного к обслуживанию спроса, т. е. необязательно весь спрос должен быть обслужен (основное отличие от классической постановки). Существует несколько формулировок задачи UMANLP, основанных на максимизации прибыли (см. Раздел 1.4). Ниже приведена постановка задачи, разработанная автором настоящей диссертации:

$$\max \sum_{k \in K} R_k z_k - \sum_{i \in H} f_i y_i - \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} \quad (4.1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j \in H, j \neq i} x_{jik} + \sum_{j \in H} x_{ijk} \leq z_k y_i \quad i \in H, k \in K, \quad (4.2)$$

$$\sum_{i \in H} \sum_{j \in H} x_{ijk} = z_k \quad k \in K, \quad (4.3)$$

$$z_k \leq W_k, \quad k \in K, \quad (4.4)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad i, j \in H, k \in K, \quad (4.5)$$

$$z_k \geq 0 \quad k \in K, \quad (4.6)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad i \in H. \quad (4.7)$$

Целевая функция (4.1) представляет функцию прибыли для максимизации. Первое слагаемое целевой функции выражает общую выручку за удовлетворение выгодного объема спроса. Второе и третье слагаемое представляют общие затраты: затраты на открытие хабов и транспортные затраты соответственно.

Нелинейное неравенство (4.2) обеспечивает маршрутизацию потоков через выбранные хабы. Ограничение (4.3) — объем маршрутизированного потока равен объему удовлетворенного спроса, так называемое, уравнение баланса. Ограничение (4.4) обеспечивает выполнение условия: обслуженный объем не может превышать спроса. Ограничения (4.5) – (4.7) являются ограничениями неотрицательности и бинарности соответствующих переменных.

Ограничение (4.2) является модификацией классического условия баланса в НЛР и совместно с (4.4) является эквивалентом ограничению удовлетворения спроса, представленным в работе [57]. Расхождение в формулировке этих

ограничений с [57] связано с дальнейшим использованием переменных z_k . Если для [57] важно обслуживание направления (обслуживается или не обслуживается объем целиком), то в описанной в следующей главе робастной постановке задачи важным является объем спроса, который будет удовлетворен.

В описании ограничений отмечено, что предложенная формулировка задачи является нелинейной, это возникает из-за введения в рассмотрение возможности обслуживать часть объема спроса по направлению. В случае, когда пропускная способность хабов неограниченна, это ограничение выполняет функцию переключателя, где выгодные направления удовлетворяются полностью (спрос для $k \in K$ обслуживается для всего объема W_k) и невыгодные направления не обслуживаются вообще. В случае ограниченной пропускной способности хабов или в случае рассмотрения дискретных единиц в модели (объем полуприцепа транспортного средства, количество мест в самолете и др.), тогда ограничение (4.2) выполняет более широкий спектр функций, чем функция переключателя.

Эквивалентная линейная формулировка ограничения (4.2) может быть получена путем введения вспомогательной вещественной неотрицательной переменной u_{ik} и дополнительных трех ограничений, как показано в [65]:

$$\sum_{j \in H, j \neq i} x_{jik} + \sum_{j \in H} x_{ijk} \leq u_{ik} \quad i \in H, k \in K, \quad (4.8)$$

$$u_{ik} \leq y_i W_k, \quad i \in H, k \in K, \quad (4.9)$$

$$u_{ik} \leq z_k, \quad i \in H, k \in K, \quad (4.10)$$

$$u_{ik} \geq z_k - (1 - y_i) W_k, \quad i \in H, k \in K, \quad (4.11)$$

$$u_{ik} \geq 0, \quad i \in H, k \in K. \quad (4.12)$$

Таким образом, задача (4.1), (4.3) – (4.12) является линейной формулировкой задачи UMANLP с целевой функцией максимизации прибыли, где только выгодный объем спроса удовлетворяется. Представленная математическая модель является основой для описания робастной UMANLP с прибылью в условиях неопределенности спроса и выручки, которая описана в следующих разделах.

4.2. Задача UMANLP в условиях неопределенности спроса

Неопределенность в спросе, как и в Главе 3, моделируется посредством дискретного набора сценариев S , где каждому сценарию присвоена вероятность реализации p_s , обозначение спроса по сценарию — W_{ks} для $k \in K$. Отметим, что рассматриваются наиболее вероятные сценарии и для указанного набора сценариев имеет место быть условие интегральности: $\sum_{s \in S} p_s = 1$.

Введение возможности выбора объема спроса к обслуживанию создает следующую проблему: в случае двух сценариев для одного направления k обслуживание спроса выгодно по первому сценарию и не выгодно по второму. Какой объем спроса удовлетворить? Автором вводятся понятия: робастный спрос к обслуживанию, обозначенный z_k (смысловое значение переменной отличается от введенного в предыдущем разделе), и ожидаемые потери от неудовлетворенного спроса или от предложения, превышающего спрос. Робастный спрос — это наиболее выгодный ожидаемый объем спроса, который определяется из следующей формулировки робастной постановки UMANLP в условиях неопределенности спроса:

$$\max \sum_{k \in K} R_k z_k - \sum_{i \in H} f_i y_i - \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} - \sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_k |z_k - W_{ks}| \quad (4.13)$$

при ограничениях (4.2), (4.3), (4.5) – (4.7),

$$z_k \leq \max_{s \in S} W_{ks}, \quad k \in K. \quad (4.14)$$

Первое слагаемое целевой функции (4.13) представляет выручку от обслуживания робастного спроса. Это слагаемое не гарантирует, что поток z_k будет меньше W_{ks} для любого сценария $s \in S$, но предложение, превышающее спрос штрафуются последним слагаемым (4.13). Кроме того, неудовлетворенный спрос для каждого слагаемого $s \in S$ штрафуются тем же слагаемым. В общем случае сумма $\sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_k |z_k - W_{ks}|$ представляет оценку ожидания выручки, которая не будет получена (ожидаемые потери) в целях получения надежной и оптимальной сети хабов для всех сценариев, где λ_k — потенциальная прибыль за единицу потока направления k .

Отличие между λ_k и R_k заключается в том, что λ_k включает дополнительные факторы, такие как: уровень сервиса, покрытие сети, — которые не влияют на выручку R_k напрямую. Предполагается выполнение следующего условия: $R_k \leq \lambda_k$. Заметим, что λ_k для различных сценариев $s_1, s_2 \in S$ может отличаться и дополнительный индекс s может быть добавлен к λ_k , что будет продемонстрировано в постановке задачи UMANLP в условиях неопределенности в спросе и выручке в следующем разделе.

Задача (4.2) – (4.3), (4.5) – (4.7), (4.13) – (4.14) содержит нелинейные функции: функцию абсолютного значения, произведение бинарной и вещественной переменной в выражениях (4.13) и (4.2) соответственно. Введение слагаемого ожидаемых потерь: $\sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_k |z_k - W_{ks}|$ в целевой функции (4.14) можно преобразовать к линейному виду, используя аналогичную процедуру из Раздела 3.3, где необходимо ввести дополнительную вспомогательную вещественную неотрицательную переменную σ_{ks} для $k \in K$ и $s \in S$ и 2 дополнительных неравенства. Алгоритм преобразования произведения двух переменных аналогичен описанному в Разделе 4.1. Тогда эквивалентная линейная постановка задачи

будет иметь вид:

$$\max \sum_{k \in K} R_k z_k - \sum_{i \in H} f_i y_i - \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} - \sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_k (z_k - W_{ks} + 2\sigma_{ks}) \quad (4.15)$$

при ограничениях (4.3), (4.5) – (4.7), (4.8), (4.10), (4.12),

$$z_k + \sigma_{ks} \geq W_{ks}, \quad k \in K, s \in S, \quad (4.16)$$

$$u_{ik} \leq y_i \max_{s \in S} W_{ks}, \quad i \in H, k \in K, \quad (4.17)$$

$$u_{ik} \geq z_k - (1 - y_i) \max_{s \in S} W_{ks}, \quad i \in H, k \in K, \quad (4.18)$$

$$\sigma_{ks} \geq 0, \quad k \in K, s \in S. \quad (4.19)$$

К постановке задачи, описанной выше, есть несколько комментариев: 1) Ограничения (4.14) удалены из модели, потому что ограничения (4.10), (4.17) и (4.18) обеспечивают выполнение данного условия; 2) Константа

$$\sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_k W_{ks}$$

в целевой функции (4.15) может быть убрана из рассмотрения, потому что постоянная величина в целевой функции не влияет на процесс оптимизации. Обозначим поставленную задачу StUMHLPR (англ. Stochastic Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location Problem with Revenue).

Введенная постановка задачи заключается в минимизации потери выручки в условиях обслуживания неопределенного спроса в той мере, пока ожидаемая прибыль остается максимальной. Ожидание выручки выражено через произведение робастного спроса на выручку за единицу потока, что не является прямым выражением математического ожидания выручки, а является оптимальным и надежным значением выручки к отклонениям в разрезе сценариев.

4.3. Задача UMANLP в условиях неопределенности спроса и выручки

Неопределенность в спросе широко исследована в НЛР за последние двадцать лет, в то время как введение подходов из теории управления прибылью в НЛР рассматривается последние несколько лет. Существующие постановки задач НЛР с учетом выручки рассматривают фиксированный уровень выручки по направлению. Насколько известно автору, в литературе предложена только одна стохастическая постановка задачи с неопределенностью в выручке [58]. Кроме того, спрос связан с выручкой, как следствие, для каждого сценария $s \in S$ выручка R_{ks} и λ_{ks} для $k \in K$. Различные источники неопределенности (экономические факторы, конкуренты, ценообразование и др.) делают значение выручки неопределенной величиной. Это позволяет эксперту, принимающему решение, устанавливать различные цены, что является причиной изменения спроса. Эти предпосылки являются отличительными от существующих исследований, где прибыль является фиксированной величиной.

В теории управления прибылью важно максимизировать прибыль и минимизировать ожидаемые отклонения выручки. Первое условие гарантирует эффективность, второе — минимизацию рисков. Предлагается следующая постановка задачи StUMANLPAD в условиях неопределенности выручки и спроса (англ. Stochastic Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location problem with Absolute Deviation with Revenue, StUMANLPADR):

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} p_s R_{ks} z_k - \mu \sum_{s \in S} p_s \left| \sum_{k \in K} R_{ks} z_k - \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s R_{ks} z_k \right| \\ & - \sum_{i \in H} f_i y_i - \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} - \sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_{ks} |z_k - W_{ks}| \end{aligned} \quad (4.20)$$

при ограничениях (4.2), (4.3), (4.5) – (4.7), (4.14).

Первое и последнее слагаемые целевой функции (4.20) выражают ожидаемую выручку и ожидаемые потери выручки, второе слагаемое (4.20) является

новым членом в сравнении с (4.13). Эта сумма выражает абсолютное отклонение выручки, где μ является параметром компромисса между выручкой по каждому сценарию и ожидаемой выручкой по всем сценариям $s \in S$. Определение робастного решения в теории управления прибылью, введенное в [66], является актуальным в нашем случае:

Определение 4.1 (Solution robustness): решение называется *робастным по отношению к оптимальности*, если оно остается «близким» к оптимальному для любого сценария $s \in S$.

Второе слагаемое (4.20) является мерой робастности (надежности) решения, где оптимальное решение представляется в виде ожидаемой выручки.

Введенное определение робастного решения может быть усилено, где абсолютные отклонения выручки рассматриваются в разрезе направлений $k \in K$:

$$\mu \sum_{s \in S} p_s \left| \sum_{k \in K} R_{ks} z_k - \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s R_{ks} z_k \right| \leq \mu \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s |R_{ks} - \sum_{s \in S} p_s R_{ks}| z_k, \quad (4.21)$$

здесь правая часть неравенства (4.21) является линейной, что следует из свойств функции абсолютного значения. Усиленная постановка задачи формулируется как

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} p_s R_{ks} z_k - \mu \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s |R_{ks} - \sum_{s \in S} p_s R_{ks}| z_k \\ & - \sum_{i \in H} f_i y_i - \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} - \sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_{ks} |z_k - W_{ks}| \end{aligned} \quad (4.22)$$

при ограничениях (4.2), (4.3), (4.5) – (4.7), (4.14).

Процедура преобразования нелинейной целевой функции к эквивалентной задаче линейного программирования не отличается от метода, описанного в Разделе 3.3. Введем вспомогательную вещественную неотрицательную переменную τ_s для $s \in S$ для устранения нелинейности в целевой функции. Тогда эквивалентная линейная задача для (4.2), (4.3), (4.5) – (4.7), (4.14), (4.20), будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s R_{ks} z_k - 2\mu \sum_{s \in S} p_s \tau_s - \sum_{i \in H} f_i y_i \\
& - \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} - \sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_{ks} (z_k - W_{ks} + 2\sigma_{ks})
\end{aligned} \tag{4.23}$$

при ограничениях (4.3), (4.5) – (4.7), (4.8), (4.10), (4.12), (4.16) – (4.19),

$$\sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s R_{ks} z_k - \sum_{k \in K} R_{ks} z_k - \tau_s \leq 0, \quad s \in S, \tag{4.24}$$

$$\tau_s \geq 0, \quad s \in S. \tag{4.25}$$

Постановка усиленной задачи (4.2), (4.3), (4.5) – (4.7), (4.14), (4.22) будет эквивалентна следующей линейной постановке:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s R_{ks} z_k - \mu \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s |R_{ks} - \sum_{s \in S} p_s R_{ks}| z_k - \sum_{i \in H} f_i y_i \\
& - \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} - \sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_{ks} (z_k - W_{ks} + 2\sigma_{ks})
\end{aligned} \tag{4.26}$$

при ограничениях (4.3), (4.5) – (4.7), (4.8), (4.10), (4.12), (4.16) – (4.19).

4.4. Разложение Бендерса

В настоящем разделе рассматриваются подходы к решению сформулированных выше задач посредством методов разложения. Отметим, что поставленные в Главе 4 задачи являются линейными программами L-формы (англ. L-shape linear programs) [67], что позволяет применить широко используемый в НЛР подход разложения Бендерса. Задачи могут быть представлены в виде двухшаговой задачи оптимизации: 1. Задача размещения хабов, обозначенная МР; 2. Задача построения связей между хабами и узловыми точками и определение объемов спроса к обслуживанию SP в терминах алгоритма Бендерса.

Постановка задачи (4.3), (4.5) – (4.7), (4.8), (4.10), (4.12), (4.16) – (4.19), (4.23) – (4.25) является более общей в сравнении с остальными постановками из Раздела 4.3, поэтому алгоритм разложения Бендерса будет представлен для данной задачи целочисленного линейного программирования. Кроме того, в литературе разложение Бендерса в НЛР представлено для задач минимизации, поэтому далее задача максимизации прибыли будет изменена на эквивалентную задачу минимизации. Оптимизационная модель предполагает первый шаг, содержащий задачу с целочисленными переменными (переменные установки хабов), и второй шаг, содержащий вещественные переменные (обслуженный объем спроса, штраф за неудовлетворенный спрос, ожидаемые отклонения выручки). Неопределенность в выручке и в спросе относится ко второму шагу.

Задача SP является линейной и не содержит целочисленных переменных. Пусть на итерации h значения целочисленных переменных из MP обозначены $y_i^{(h)}$, тогда задача SP имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} p_s (\lambda_{ks} - R_{ks}) z_k + \sum_{i \in H} f_i y_i^{(h)} \\ & + \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} + \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} 2p_s \sigma_{ks} + 2\mu \sum_{s \in S} p_s \tau_s \end{aligned} \quad (4.27)$$

при ограничениях (4.3), (4.5) – (4.7), (4.8), (4.10), (4.12), (4.16), (4.19), (4.24), (4.25),

$$u_{ik} \leq y_i^{(h)} \max_{s \in S} W_{ks}, \quad i \in H, k \in K, \quad (4.28)$$

$$u_{ik} \geq z_k - (1 - y_i^{(h)}) \max_{s \in S} W_{ks}, \quad i \in H, k \in K. \quad (4.29)$$

Определим двойственную задачу к SP, т. е. DSP, где двойственные переменные $v_k, e_{ik}, b_{ik}, q_{ks}, g_s, t_{ik}, a_{ik}$ соответствуют ограничениям: (4.3), (4.8), (4.10), (4.16), (4.24), (4.28), (4.29). С учетом введенных обозначений задача DSP формулируется следующим образом:

$$\max \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} W_{ks} q_{ks} + \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} ((a_{ik} - t_{ik}) y^{(h)} - a_{ik}) \max_{s \in S} W_{ks} \quad (4.30)$$

при ограничениях

$$v_k - e_{ik} - e_{jk} \leq F_{ijk}, \quad i, j \in H, k \in K, i \neq j, \quad (4.31)$$

$$v_k - e_{ik} \leq F_{iik}, \quad i \in H, k \in K, \quad (4.32)$$

$$q_{ks} \leq 2p_s \lambda_k, \quad k \in K, s \in S, \quad (4.33)$$

$$\sum_{i \in K} (b_{ik} - a_{ik}) - v_k + \sum_{s \in S} q_{ks} + \sum_{s \in S} R_{ks} (g_s - |S| p_s g_s) \leq \sum_{s \in S} p_s (\lambda_{ks} - R_{ks}), \quad k \in K, \quad (4.34)$$

$$e_{ik} - b_{ik} + a_{ik} - t_{ik} \leq 0, \quad i \in H, k \in K, \quad (4.35)$$

$$g_s \leq 2p_s \mu, \quad s \in S, \quad (4.36)$$

$$e_{ik}, b_{ik}, a_{ik}, t_{ik} \geq 0, \quad i \in H, k \in K, \quad (4.37)$$

$$q_{ks} \geq 0, \quad k \in K, s \in S, \quad (4.38)$$

$$g_s \geq 0, \quad s \in S, \quad (4.39)$$

$$v_k \in \mathbb{R}, \quad k \in K. \quad (4.40)$$

Как показано в Разделе 3.4, алгоритм разложения состоит из процедуры ослабления задачи второго шага, путем замены на множество сечений, добавляемых в МР на протяжении итераций. Разложение Бендерса использует два

типа сечений: сечения оптимальности и сечения допустимости. Первый тип сечений используется для оценки целевой функции SP (задачи второго шага), а второй тип сечений — для устранения несовместности SP на протяжении итераций Бендерса. В нашем случае, второй тип сечений не требуется, так как задача SP всегда будет иметь решение.

Определим сечение оптимальности, которое соответствует оценке границы целевой функции задачи SP в MP:

$$\eta + \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} (t_{ik}^{(h)} - a_{ik}^{(h)}) y_i \max_{s \in S} W_{ks} \geq \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} W_{ks} q_{ks} - \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} a_{ik}^{(h)} \max_{s \in S} W_{ks}, \quad (4.41)$$

где η — вещественная неотрицательная переменная, соответствующая минимальному значению (4.30) на итерации h . Значения целевых функций (4.30) по итерациям представляет неубывающую последовательность.

В итоге, задача MP может быть сформулирована следующим образом:

$$\min \sum_{i \in H} f_i y_i + \eta \quad (4.42)$$

при ограничениях (4.41),

$$\sum_{i \in H} y_i \geq 1, \quad (4.43)$$

$$\eta \geq 0. \quad (4.44)$$

В формулировке MP содержится дополнительное ограничение (4.43). В классической постановке NLP, где весь спрос должен быть удовлетворен, данное ограничение используется для исключения случаев несовместности SP. Если в MP не выбран ни один хаб, то потоковые переменные x_{ijk} будут равны нулю, что противоречит условию обслуживания всего спроса (SP несовместная). Однако в нашей постановке допускается полное неудовлетворение спроса, и ограничение (4.43) является необязательным. Но есть ряд причин, по которым данное ограничение приведет к ускорению алгоритма разложения: с одной

стороны, предполагаем, что невыгодные сети хабов не будут рассматриваться, с другой стороны, данное ограничение сокращает количество итераций Бендерса, как минимум, на одну единицу.

Схема классического алгоритма Бендерса проиллюстрирована на Алгоритме 1, где $\phi_{MP}(y, \eta)$ и $\phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q, g)$ — это оптимальные значения целевых функций MP и DSP соответственно на итерации h . Отметим, что финальные значения UB или LB (когда UB=LB) соответствует оптимальному значению целевой функции (4.23), в то время как $\phi_{SP}(v, e, t, b, a, q, g)$ является значением целевой функции без учета стоимости открытия хабов.

Алгоритм 1: Основной алгоритм Бендерса решения задачи

UB \leftarrow $+\infty$, LB \leftarrow 0, $h \leftarrow$ 0

до тех пор, пока $UB \neq LB$ **выполнять**

Решение MP (4.42)–(4.44)

LB \leftarrow $\phi_{MP}(y, \eta)$

Решение SP (4.30)–(4.40)

Добавление сечения (4.41) в MP

если $\phi_{SP}(v, e, t, b, a, q) + \sum_{k \in K} a_k y_k < UB$ **тогда**

| UB = $\phi_{SP}(v, e, t, b, a, q) + \sum_{k \in K} a_k y_k$

иначе

| Ничего

конец

$h \leftarrow h + 1$

конец

В следующих разделах будут представлены различные стратегии генерации сечений и способы их ускорения. Будут рассмотрены такие подходы к ускорению сечений как: Парето-оптимальные сечения, максимальные недоминируемые сечения и множественные сечения.

4.5. Парето-оптимальные сечения решения задачи

В Разделе 3.5 рассмотрены базовые принципы формирования Парето-оптимальных сечений. Как и в Разделе 3.5, в настоящем разделе будет рассматриваться подход [35] к генерации Парето-оптимальных сечений. Так как исследование [35] основано на [34], то сформулируем процедуру генерации ПО сечений по [34]. Пусть y^* — начальная точка, лежащая в $Conv(Y)$, а оптимальное значение целевой функции задачи (4.30) – (4.40) обозначим $\phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q, g)$. В процедуре [34] есть возможность на каждой итерации h добавлять два сечения: обычное сечение Бендерса и ПО сечение, — потому что алгоритм Magnanti и Wong [34] значения переменных задачи DSP рассчитываются на вспомогательной стадии. Построение ПО сечений основано на решении следующей задачи:

$$\max \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} W_{ks} q_{ks} + \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} ((a_{ik} - t_{ik}) y_i^* - a_{ik}) \max_{s \in S} W_{ks} \quad (4.45)$$

при ограничениях (4.31)-(4.40),

$$\sum_{k \in K} \sum_{s \in S} W_{ks} q_{ks} + \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} ((a_{ik} - t_{ik}) y_i^* - a_{ik}) \max_{s \in S} W_{ks} = \phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q, g). \quad (4.46)$$

Сформулирована задача расчета ПО сечений повышает скорость сходимости алгоритма Бендерса. Однако использование ограничения (4.46) приводит к вычислительной неустойчивости. В своей работе Papadakos [35] предлагает использовать различные точки MW (Magnanti Wong) на каждой итерации и убрать ограничение (4.46) из рассмотрения, что по-прежнему будет генерировать ПО сечения. Автором предлагается процедура определения точек MW на каждой итерации посредством использования выпуклой комбинации точки MW и допустимого решения задачи МР:

$$y_i^{*(h+1)} = (1 - \gamma) y_i^{*(h)} + \gamma y_i^{(h)} \quad i \in H, \quad (4.47)$$

где $y_i^{(h)}$ — оптимальное значение переменной задачи МР на итерации h , $y_i^{*(h)}$ — значение точки MW на предыдущем шаге, $0 < \gamma < 1$ (следуя [33, 35], наилуч-

шее эмпирическое значение $\gamma = 1/2$). Однако остается вопрос инициализации первой точки MW $y^{*(0)}$. Как показано в [33], $y_i^{*(0)} = 1/2 \quad \forall i \in H$ является внутренней точкой выпуклой оболочки многогранника, образованного ограничениями задачи МР. Это значение представляется в виде выпуклой комбинации $|H|$ допустимых решений задачи МР, где каждое решение соответствует одному выбранному хабу, и одно допустимое решение, где установлены все возможные хабы. Сумма этих допустимых решений с соответствующими коэффициентами $1/(2|H|-2)$ и $(1/2 - 1/(2|H|-2))$ дают $y_i^{*(0)} = 1/2$.

Схема алгоритма Papadakos [35] по ускорению разложения Бендерса представлена на Алгоритм 2.

Алгоритм 2: Разложение Бендерса решения задачи с ПО сечениями

$UB \leftarrow +\infty, LB \leftarrow 0, h \leftarrow 0, \gamma, y^{*(0)}$

до тех пор, пока $UB \neq LB$ выполнять

Решение DSP (4.45), (4.31)-(4.40)

Добавление сечения (4.41) в МР

Решение МР (4.42)-(4.44)

$LB \leftarrow \phi_{MP}(y, \eta)$

Обновление точки MW (3.35)

Решение DSP (4.30)-(4.40)

Добавление сечения (4.41) в МР

если $\phi_{SP}(v, e, t, b, a, q) + \sum_{k \in K} a_k y_k < UB$ тогда

| $UB = \phi_{SP}(v, e, t, b, a, q) + \sum_{k \in K} a_k y_k$

иначе

| Ничего

конец

$h \leftarrow h + 1$

конец

4.6. Максимальные недоминируемые сечения для решения задачи

Альтернативный подход к ускорению разложения Бендерса предложен Sherali и Lunday в работе [68]. Метод основан на рассмотрении максимальных недоминируемых сечений. Построение сечений осуществляется посредством решения многокритериальной задачи, которая является альтернативой DSP. Авторы показали, что незначительные возмущения коэффициентов в целевой функции DSP в определенных случаях позволяет получать недоминируемые сечения. Такая процедура позволяет получать усиленные сечения без рассмотрения вспомогательных задач (например, постановка Magnanti и Wong [34] Парето-оптимальных сечений требует решения дополнительной задачи (4.31) – (4.40), (4.45), (4.46) на каждой итерации).

Идея предложенного алгоритма заключается в объединении двух задач из подхода Magnanti и Wong: (4.30) – (4.40) и (4.31) – (4.40), (4.45), (4.46). Указанные задачи имеют две целевые функции (4.30) и (4.45) при одинаковых ограничениях (4.31) – (4.40), где ограничение (4.46) при объединении задач становится избыточным. Sherali и Lunday [68] показали, что целевые функции с соответствующими весовыми коэффициентами могут быть суммированы для получения единого критерия оптимизации:

$$\begin{aligned} \max \quad & (1 + \beta) \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} W_{ks} q_{ks} + \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} ((a_{ik} - t_{ik}) y^{(h)} - a_{ik}) \max_{s \in S} W_{ks} \\ & + \beta \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} ((a_{ik} - t_{ik}) y_i^* - a_{ik}) \max_{s \in S} W_{ks}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

где β — весовой коэффициент, y^* — точка из выпуклой оболочки МР.

Алгоритм 3: Недоминируемые сечения в разложении Бендерса

$UB \leftarrow +\infty, LB \leftarrow 0, h \leftarrow 0$

Инициализация последовательности $\{\beta^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$

до тех пор, пока $UB \neq LB$ выполнять

Решение МР (4.42)–(4.44)

$LB \leftarrow \phi_{MP}(y, \eta)$

Решение DSP (4.31)–(4.40), (4.48)

Добавление сечения (4.41) в МР

если $\phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q) + \sum_{k \in K} a_k y_k < UB$ тогда

 | $UB = \phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q) + \sum_{k \in K} a_k y_k$

иначе

 | Ничего

конец

$h \leftarrow h + 1$

конец

В работе Oliver и др. [69] рассмотрен подход к выбору коэффициента β . Авторами получено, что использование фиксированного значения для β приводит к неэффективной оценке транспортных затрат, получаемых из задачи DSP, на итерациях. По этой причине авторы предлагают обновлять значения параметра на каждой итерации, что повышает качество получаемых сечений в сравнении с использованием целевой функции (4.48) с постоянным β . Для обеспечения сходимости вводятся следующие требования к последовательности: $\{\beta^{(h)}\}_{h=1}^{\infty}$: $\sum_{h=1}^{\infty} \beta^{(h)} \rightarrow \infty$ и $\beta^{(h)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$. Удовлетворение введенных требований обеспечивает выполнение следующего условия:

$$\begin{aligned} & \lim_{\beta \rightarrow 0} (1 + \beta) \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} W_{ks} q_{ks} + \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} ((a_{ik} - t_{ik})y - a_{ik}) \max_{s \in S} W_{ks} \\ & + \beta \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} ((a_{ik} - t_{ik})y_i^* - a_{ik}) \max_{s \in S} W_{ks} = \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} W_{ks} q_{ks} \\ & + \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} ((a_{ik} - t_{ik})y - a_{ik}) \max_{s \in S} W_{ks}. \end{aligned}$$

(4.49)

Схема алгоритма совпадает с Алгоритмом 5 представлена на Алгоритме 3, отличием является целевая функция DSP, где для построения недоминируемых максимальных сечений используется выражение (4.48). В дополнение к схеме разложения требуется процедура обновления коэффициента β . Пример последовательности $\{\beta^{(h)}\}_{h=1}^{\infty}$ — гармонический ряд и его вариации.

4.7. Гибридная стратегия множественных сечений решения задачи

В настоящем разделе предложен гибридный подход разложения задачи StUMANLPADR, где на каждой итерации генерируются Парето-оптимальные сечения, следуя схеме построения Papadakos [35], и максимальные недоминируемые сечения из Раздела 4.6 одновременно. Новый метод использует два «сильных» сечения на каждой итерации алгоритма, что, по мнению автора настоящей диссертации, позволит сократить общее количество итераций.

Два типа сечений в гибридной модели разложения используют точки из выпуклой оболочки МР: для получения большего эффекта от сечений следует использовать две различные начальные точки. В противном случае, получаемые сечения могут накладываться, что приведет к потере эффективности от использования двух усиленных сечений. Кроме того, точки MW и процедура их обновления на каждой итерации могут быть использованы в получении максимальных недоминируемых сечений, что не приведет к снижению скорости сходимости алгоритма.

Схема гибридного множественного сечения в разложении Бендерса показана на Алгоритме 4, где $y^{*(0)}$ и $y^{**(0)}$ — начальные значения точек из выпуклой оболочки МР для Парето-оптимальных и максимальных недоминируемых сечений соответственно, так же, как параметры γ^* и γ^{**} для схемы обновления точек MW (3.35). Отметим, что $\phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q)$ — значение целевой функции

DSP (4.30), извлеченное из (4.48), описание алгоритма представлено ниже:

Алгоритм 4: Гибридный алгоритм разложения Бендерса решения задачи StUMANLPADR

$UB \leftarrow +\infty, LB \leftarrow 0, h \leftarrow 0, \gamma^*, \gamma^{**}, y^{*(0)}, y^{**(0)}, \beta^0$

Инициализация последовательности $\{\beta^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$

до тех пор, пока $UB \neq LB$ выполнять

Решение DSP (4.45), (4.31)-(4.40)

Добавление сечения (4.41) в МР

Решение МР (4.42)-(4.44)

$LB \leftarrow \phi_{MP}(y, \eta)$

Обновление точек MW^* и MW^{**} (3.35)

Решение DSP (4.31)-(4.40), (4.48)

Добавление сечения (4.41) в МР

если $\phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q) + \sum_{k \in K} a_k y_k < UB$ тогда

| $UB = \phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q) + \sum_{k \in K} a_k y_k$

иначе

| Ничего

конец

$h \leftarrow h + 1$

конец

4.8. Численный эксперимент

В ходе компьютерного эксперимента реализованы компьютерные программы, соответствующие моделям и алгоритмам, представленным в Разделах 4.1 – 4.7, а именно: задача линейного программирования надежного размещения хабов в условиях неопределенности спроса (4.3), (4.5) – (4.8), (4.10), (4.12), (4.15) – (4.19), в условиях неопределенности спроса и выручки (4.3), (4.5) – (4.8), (4.10), (4.12), (4.16) – (4.19), (4.23) – (4.25) и Алгоритмы 1 – 4 решения поставленных задач. Построение задач линейного программирования, решение задач осу-

ществлялись с использованием программного продукта IBM ILOG CPLEX 12.9¹ на машине 3.5 GHz, 32GB ОЗУ в среде Linux. Программная реализация алгоритмов и математических моделей разрабатывалась на верхнеуровневом языке программирования Python 3.6 с использованием редактора PyCharm IDE.

Сравнение результатов, полученных на основе предложенных моделей робастного размещения хабов, проводилось для различных параметров. Для анализа использовались наборы данных САВ (англ. U.S. Civil Aeronautics Board, см. Рис. 3.1) и АР (англ. Australian Post), широко известных в литературе по исследованию операций [64].

Алгоритмы подготовки данных представлены в Разделе 4.8.1 и Разделе 4.8.3. В Разделе 4.8.2 обсуждаются результаты полученных решений на наборе данных САВ, в то время как в Разделе 4.8.4 описаны результаты на данных АР.

4.8.1. Алгоритм подготовки данных САВ

Прежде чем приступить к эксперименту, входные данные нормируются и вычисляются стоимости открытия хабов на основе набора данных САВ. Генерируются десять сценариев для построения робастного решения задачи размещения хабов. Далее представлены основные этапы подготовки данных САВ к эксперименту.

Пусть спрос из точки $o(k)$ в точку $d(k)$ для любого сценария s выбирается случайным образом из интервала $[0.01W_k, 10W_k]$. Здесь W_k — это объем спроса, представленный в наборе данных САВ.

С целью устранения симметрии относительно среднего по сценариям в наборе значений W_{ks} , значения W_{kS} выбираются случайным образом из интервала $[0.1W_k, 5W_k]$ с вероятностью $2/3$ и из интервала $[5W_k, 10W_k]$ с вероятностью $1/3$, как показано в работе [44]. Вероятность появления каждого из десяти сценариев выбрана равной 0.1, т. е. вероятности равны между собой.

¹ <https://www.ibm.com/analytics/cplex-optimizer>

Далее полученные объемы спроса W_{ks} нормируются таким образом, что объем спроса по направлению лежит в интервале $[0, 1]$ и общая сумма спроса по всем направлениям в разрезе фиксированного сценария s равна 1.

Стоимость открытия хаба рассчитывается по формуле

$$f_{o(k)} = 15 \log \sum_{d(k) \in N} W_k$$

для каждого потенциального хаба. Стоимости консолидации и распределения за единицу потока — $\chi = 1$ и $\delta = 1$, коэффициент дисконтирования — $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.

Величина выручки в САВ не представлена, поэтому используется следующая процедура генерации выручки по направлениям: $R_{ks} = \xi \frac{c_k}{W_k}$, где $\xi \sim U(25, 000; 30, 000)$. Такой подход расчета выручки используется в работе [70], который зависит от расстояния между отправителем и получателем и от объема спроса по направлению.

В наборе данных САВ предоставлена информация по 25 узлам сети. В проводимом эксперименте рассматриваются все точки сети, где каждая точка потенциально может быть выбрана в качестве хаба.

4.8.2. Результаты для набора данных САВ

В рамках эксперимента разработаны программы для трех постановок задач УМАНЛР в условиях неопределенности в спросе и выручки. Две математические модели сформулированы в Разделе 4.3, дополнительно в целях проведения сравнительного анализа реализована стохастическая модель УМАНЛР с целевой функцией максимизации ожидаемой прибыли:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s R_{ks} z_k - \sum_{i \in H} f_i y_i - \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} \\ & - \sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} R_{ks} \max(0, z_k - W_{ks}) \end{aligned} \quad (4.50)$$

При ограничениях (4.3), (4.5) – (4.8), (4.10), (4.12)

Целевая функция (4.50) соответствует ожидаемой выручке за вычетом стоимости открытия хабов и транспортных затрат. Заметим, что транспортные затраты рассчитываются для робастного потока z_k (уровень удовлетворенного спроса) вместо ожидаемых транспортных затрат по сценариям. Математическая постановка (4.3), (4.5) – (4.8), (4.10), (4.12), (4.50) обозначим как НЛР с ожидаемой прибылью.

С целью сравнения результатов эксперимента между различными постановками задач введем следующие показатели: ожидаемая прибыль рассчитывается подстановкой соответствующих оптимальных значений переменных в выражение целевой функции (4.50), которое обозначено «Revenue». Рассматриваются два случая абсолютных отклонений выручки: общие отклонения выручки в разрезе сценария и отклонения выручки в разрезе направлений, — где используются формулы «Abs. Dev.» = $\sum_{s \in S} p_s |\sum_{k \in K} R_{ks} z_k - \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s R_{ks} z_k|$ и «Dir. Dev.» = $\sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s |R_{ks} - \sum_{s \in S} p_s R_{ks}| z_k$ соответственно. Ожидаемые потери выручки оцениваются на основе формулы «Lose» = $\sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} R_{ks} |z_k - W_{ks}|$, которая отражает выручку за необслуженный и обслуженный с избытком спрос, т. е. ожидаемая выручка, которая не будет получена. Условия минимизации слагаемого ожидаемых потерь и слагаемого абсолютных отклонений включены в целевые функции задач, описанных в Разделе 4.3, для получения надежного решения.

Отметим, что введенные показатели не зависят от параметров μ и λ для возможности сравнения различных случаев и различных постановок задач. Более того, случаи с большим значением «Revenue» лучше, а для «Abs. Dev.», «Dir. Dev.» и «Lose» — наоборот.

В Таблице 4.1 представлены численные результаты для задачи НЛР с ожидаемой прибылью. Столбец «Hubs» содержит номера узлов сети, выбранных в качестве хабов, и столбец «Sat.» характеризует процент удовлетворенности спроса по отношению к максимальному спросу по направлению в сценариях. Описанное значение столбцов таблицы сохраняется для всех таблиц настоящей

α	Hubs	Sat.	Profit	Lose	Abs. Dev.	Dir. Dev.
0.2	2,12,13	26.3	951.5	1661.5	15.9	121.7
0.4	5,8	20.5	874.3	1577.2	14.0	108.3
0.6	21	17.5	849.4	1552.1	12.9	99.6
0.8	21	17.5	849.3	1551.8	12.8	99.6

Таблица 4.1. Результаты эксперимента на наборе данных САВ для НЛР с ожидаемой прибылью

го раздела.

Таблица 4.2 и Таблица 4.3 содержат результаты, полученные на данных САВ на основе модели робастного размещения хабов и усиленной версии модели, введенных в Разделе 4.3. В Таблицах представлены результаты для « λ » и « μ » из множеств $\{1, 1.5, 2\}$ и $\{0, 1, 5\}$ соответственно и $\lambda_{ks} = \lambda R_{ks}$. Процессорное время затраченное на получения оптимального решения представлено в столбце «Time (sec)».

Прежде всего, обратим внимание на все случаи в Таблице 4.2 и Таблице 4.3, где $\lambda = 1$. Значения «Lose» для этих случаев в сравнении с Таблицей 4.1 для соответствующих значений α на примерно 17% больше, что кажется неправильным, исходя из предположений робастных постановок задач. Это произошло по причине того, что целевые функции (4.23) и (4.26) содержат в выражении выручку за переобслуживание, а необслуженный спрос исключен из выручки. Поэтому более выгодным является обслуживание большего объема спроса, чем ожидаемый объем (уровень удовлетворенности спроса в Таблице 4.2 и Таблице 4.3 превышает этот показатель из Таблицы 4.1 в 2 раза), т. к. ожидаемая выручка и ожидаемые потери растут одинаково. Таким образом, исключение значения слагаемого $\sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} R_{ks} \max(0, z_k - W_{ks})$ из «Lose» приведет к тому, что показатель «Lose» у робастных постановок будет ниже, чем у НЛР с ожидаемой прибылью. Этот эксперимент подтверждает, что параметр λ должен быть больше 1, в противном случае — все выгодные направления будут удовлетворены полностью.

α	λ	μ	Hubs	Sat.	Profit	Lose	Abs. Dev.	Dir. Dev.	Time (sec)
0.2	1	0	2,4,7,12,24	50.5	844.8	1941.6	19.6	155.3	366.6
0.2	1	1	2,12,21,24	46.8	865.4	1887.1	18.7	151.5	521.6
0.2	1	5	2,12,21,24	45.9	869.9	1846.9	17.4	148.9	734.6
0.2	1.5	0	2,12,21,24	39.7	870.8	1346.4	15.5	119.7	961.0
0.2	1.5	1	2,12,21,24	39.5	867.9	1331.3	14.9	118.3	829.1
0.2	1.5	5	2,12,21	37.4	871.9	1280.5	13.1	113.0	967.0
0.2	2	0	2,12,21	36.4	840.1	1147.7	13.4	103.7	895.1
0.2	2	1	2,12,21	36.2	840.1	1145.0	13.2	103.3	1015.0
0.2	2	5	2,12,21	36.0	838.2	1136.8	12.6	102.3	1221.9
0.4	1	0	2,12,21	41.4	761.6	1795.7	18.5	143.7	466.6
0.4	1	1	2,12,21	41.3	762.1	1792.9	17.9	143.4	469.1
0.4	1	5	2,12,21	40.8	765.9	1756.5	16.3	140.9	555.9
0.4	1.5	0	2,12,21	36.3	767.5	1273.3	14.5	112.4	606.5
0.4	1.5	1	2,12,21	36.1	768.2	1267.0	14.0	111.8	607.1
0.4	1.5	5	2,12,21	35.6	766.7	1250.0	12.7	109.9	554.3
0.4	2	0	2,12,21	35.6	734.7	1137.5	13.2	102.3	788.2
0.4	2	1	2,12,21	35.3	735.2	1134.6	13.0	101.8	697.2
0.4	2	5	2,12,21	34.9	737.0	1129.6	12.3	100.8	697.4
0.6	1	0	8,13,20	36.9	728.5	1772.8	17.5	138.0	287.1
0.6	1	1	8,13,20	36.8	729.8	1770.9	17.2	137.8	349.8
0.6	1	5	5,8	33.8	755.9	1683.4	14.8	131.0	374.9
0.6	1.5	0	5,8	30.9	750.5	1278.5	13.6	107.6	574.3
0.6	1.5	1	5,8	30.8	750.8	1275.3	13.3	107.4	483.6
0.6	1.5	5	5,8	30.4	749.5	1256.4	11.9	105.5	478.2
0.6	2	0	5,8	29.8	720.4	1146.3	12.2	97.8	570.4
0.6	2	1	5,8	29.6	723.6	1145.3	12.0	97.4	522.1
0.6	2	5	5,8	29.3	725.5	1140.5	11.4	96.4	601.2
0.8	1	0	5,8	34.5	722.4	1740.0	17.4	134.6	157.6
0.8	1	1	5,8	34.3	724.9	1727.4	16.7	133.8	187.3
0.8	1	5	5,8	33.6	730.7	1673.3	14.8	130.2	207.8
0.8	1.5	0	5,8	30.8	725.9	1273.7	13.6	107.2	304.7
0.8	1.5	1	5,8	30.6	726.7	1261.0	13.2	106.3	264.5
0.8	1.5	5	5,8	30.1	727.3	1244.8	12.0	104.4	286.8
0.8	2	0	5,8	29.3	707.7	1145.4	12.2	97.0	252.5
0.8	2	1	5,8	29.3	706.8	1144.0	12.0	96.8	276.5
0.8	2	5	5,8	29.3	702.8	1138.1	11.4	96.1	319.7

Таблица 4.2. Результаты эксперимента на наборе данных САВ для робастной постановки задачи размещения хабов

В случаях $\lambda = 1.5$ и $\lambda = 2$ видно, что значения параметра «Lose», полученные по результатам оптимизации робастных задач более чем на 25% ниже в сравнении с НЛР с ожидаемой прибылью для соответствующих уровней α , кроме того, это различие растет с увеличением параметра μ . С другой стороны, значения показателя «Profit», получаемого по результатам решения задач робастного размещения хабов, ниже на 8-18% в зависимости от α и μ . Такое поведение показателей приводит к ожидаемому результату: уменьшение «Lose» влечет снижение выручки («Profit»). Показатель «Lose» отражает потенциальную прибыль, которая не будет получена. В стратегическом планировании минимизация потерь в прибыли взаимосвязана с расширением сети, что соответствует увеличению степени покрытия спроса и связано с улучшением уровня сервиса. Это можно наблюдать в столбце «Sat.» Таблицы 4.1, Таблицы 4.2 и Таблицы 4.3, где постановка НЛР с ожидаемой прибылью имеет уровень удовлетворенности спроса ниже, чем у робастных формулировок задачи в 1.4–2 раза, чем выше уровень α , тем сильнее различие.

Ожидаемые отклонения выручки и ожидаемые отклонения выручки по направлениям имеют небольшой вес в целевых функциях робастных постановок в сравнении с «Profit» и «Lose», такой результат получился в связи с низкой волатильностью выручки по направлениям в сценариях и невысокой удовлетворенностью спроса. Поэтому значительных отличий в сравниваемых постановках по этим показателям нет. Однако можно обнаружить зависимость показателя «Sat.» от параметра μ , где удовлетворенность спроса «Sat.», «Abs. Dev.» и «Dir. Dev.» уменьшается при увеличении μ . Это можно интерпретировать как то, что низкий уровень обслуживания приводит к более устойчивой выручке, потому что расширяется поле для выбора и появляется возможность выбора наиболее устойчивых направлений.

Наборы оптимальных хабов к размещению, полученные по результатам оптимизации задачи НЛР с ожидаемой прибылью и робастных постановок, различаются для всех значений α . Это показывает, что робастная сеть хабов реша-

ет дополнительную задачу — минимизацию отклонений выручки и ожидаемых потерь выручки — и приводит к новому решению.

α	λ	μ	Hubs	Sat.	Profit	Lose	Abs. Dev.	Dir. Dev.	Time (sec)
0.2	1	1	2,12,21,24	45.3	875.7	1832.8	18.7	148.1	605.2
0.2	1	5	2,12,21	36.9	906.0	1444.0	15.4	122.0	837.5
0.2	1.5	1	2,12,21	37.1	867.0	1244.2	14.3	111.1	913.8
0.2	1.5	5	2,12,21	33.9	858.3	1149.6	12.9	101.6	816.8
0.2	2	1	2,12,21	35.9	838.2	1136.2	13.2	102.4	788.6
0.2	2	5	2,12,21	33.4	808.4	1059.4	11.9	93.0	888.1
0.4	1	1	2,12,21	39.8	777.0	1731.3	17.9	139.3	519.4
0.4	1	5	2,12,21	33.2	817.0	1409.0	14.6	116.4	661.3
0.4	1.5	1	2,12,21	35.3	761.5	1210.8	13.6	107.3	526.9
0.4	1.5	5	2,12,21	32.0	765.8	1144.6	12.5	99.6	634.2
0.4	2	1	2,12,21	35.0	733.2	1125.0	12.9	100.7	797.9
0.4	2	5	2,12,21	32.0	718.0	1057.5	11.6	91.5	926.8
0.6	1	1	5,8	33.5	762.1	1689.1	16.9	131.2	388.3
0.6	1	5	5,8	28.2	798.4	1400.2	13.9	110.9	409.8
0.6	1.5	1	5,8	30.2	742.4	1218.6	12.9	103.2	551.8
0.6	1.5	5	5,8	27.3	754.1	1156.8	11.9	95.2	484.9
0.6	2	1	5,8	29.0	727.2	1132.4	12.1	95.5	516.5
0.6	2	5	5,8	27.2	708.6	1076.1	11.3	88.2	499.7
0.8	1	1	5,8	33.1	739.7	1656.3	16.6	129.0	214.1
0.8	1	5	5,8	27.8	777.7	1385.3	13.7	109.4	237.1
0.8	1.5	1	5,8	30.0	722.1	1212.1	12.7	102.4	235.5
0.8	1.5	5	5,8	27.1	733.7	1154.6	11.9	94.8	375.1
0.8	2	1	5,8	29.0	705.2	1132.3	12.1	95.5	266.3
0.8	2	5	5,8	27.1	689.3	1076.1	11.2	87.9	277.3

Таблица 4.3. Результаты эксперимента на наборе данных САВ для усиленной робастной постановки задачи размещения хабов

Результаты робастной постановки задачи и усиленной робастной постановки задачи отличаются по способу представления отклонений прибыли в целевых функциях. В Таблице 4.2 и Таблице 4.3 видно, что для усиленной модели показатели «Abs. Dev.», «Dir. Dev.», «Sat.» ниже в сравнении с обычной робастной моделью (Таблица 4.2). Наборы хабов различаются в следующих случаях: $\alpha = 0.2, \lambda = 1, \mu = 5$; $\alpha = 0.2, \lambda = 1.5, \mu = 1$ и $\alpha = 0.6, \lambda = 1, \mu = 1$. В

усиленной модели слагаемое абсолютных отклонений имеет большее влияние на значение целевой функции примерно в 10 раз в сравнении с обычной робастной моделью. Но это слагаемое остается на порядок меньше слагаемого «Lose». Если нет значимых отличий в результатах между робастными моделями, то усиленная модель является предпочтительнее с точки зрения линейности слагаемых целевой функции, т. к. слагаемое абсолютных отклонений выручки по направлениям является линейным.

В Таблице 4.4 представлены качественные показатели производительности алгоритмов разложения Бендерса для различных типов сечений из Разделов 4.4 – 4.7 на наборе данных САВ. В эксперименте установлен предел на количество итераций равный 1 500, общее время расчета не ограничено, т. е. получаемые решения являются оптимальными. Реализована только одна схема обновления точек MW для всех рассматриваемых алгоритмов: $y_i^{*(0)} = 1/2 \quad \forall i \in H$ и $\gamma = 1/2$. Кроме того, ряд $\{\frac{1}{\sqrt{h}}\}_{h=1}^{\infty}$ используется для генерации максимальных недоминируемых сечений, где h — это номер итерации. Столбцы таблицы «BD», «PO», «MN» и «Гибрид» соответствуют Алгоритму 5, Алгоритму 2, алгоритму разложения Бендерса с максимальными недоминируемыми сечениями и Алгоритму 4. Столбец «Iter.» — количество итераций, затраченных на получение оптимального решения, или максимальное количество итераций, если оптимальное решение не найдено. Сумма времени, затраченная на решение линейных задач на каждой итерации, представлена в столбце «Time (sec)».

В литературе отмечается, что данные САВ содержат маленький набор данных и построенные задачи решаются достаточно быстро, чтобы проводить исследование производительности для сравнения со стандартными программными пакетами. Однако получены интересные результаты, с точки зрения сходимости алгоритмов, для сравнения их между собой. Из Таблицы 4.4 видно, что Алгоритм 4 использует наименьшее количество итераций в большинстве случаев на данных САВ. В нескольких случаях Алгоритм 4 уступает алгоритму «MN» по количеству итераций, что означает, что использование двух усиленных

α	λ	μ	BD		PO		MN		Гибрид	
			Iter.	Time (sec)	Iter.	Time (sec)	Iter.	Time (sec)	Iter.	Time (sec)
0.2	1.0	0	Iter	4279.0	788	5550.0	583	3105.0	466	4573.0
0.2	1.0	1	Iter	5323.0	765	4406.0	601	4223.0	473	5364.0
0.2	1.0	5	Iter	5351.0	808	5594.0	617	5022.0	517	8182.0
0.2	1.5	0	Iter	4016.0	1301	10240.0	976	5806.0	311	2844.0
0.2	1.5	1	Iter	4419.0	1283	7912.0	979	6103.0	307	3030.0
0.2	1.5	5	Iter	4323.0	1214	6564.0	925	5650.0	244	2335.0
0.2	2.0	0	Iter	4043.0	1386	9551.0	577	3024.0	176	1584.0
0.2	2.0	1	Iter	4385.0	1308	10141.0	557	3467.0	173	2279.0
0.2	2.0	5	Iter	4422.0	1292	10731.0	434	3462.0	149	1944.0
0.4	1.0	0	Iter	4160.0	466	2327.0	416	2955.0	305	3551.0
0.4	1.0	1	Iter	4617.0	441	2536.0	406	3042.0	324	3943.0
0.4	1.0	5	Iter	4281.0	487	2882.0	355	2368.0	338	3822.0
0.4	1.5	0	1262	2213.0	655	2610.0	154	769.0	36	355.0
0.4	1.5	1	1172	2062.0	628	2424.0	150	781.0	96	926.0
0.4	1.5	5	1164	2274.0	623	2623.0	127	678.0	31	300.0
0.4	2.0	0	1099	1819.0	670	2615.0	114	629.0	62	564.0
0.4	2.0	1	1098	2078.0	688	2929.0	105	544.0	65	628.0
0.4	2.0	5	1081	2069.0	667	2534.0	102	572.0	33	326.0
0.6	1.0	0	1023	1472.0	231	637.0	37	160.0	49	362.0
0.6	1.0	1	794	1178.0	219	713.0	36	157.0	45	346.0
0.6	1.0	5	789	1129.0	224	897.0	35	185.0	17	194.0
0.6	1.5	0	821	1008.0	365	1281.0	32	237.0	23	234.0
0.6	1.5	1	731	1022.0	367	1674.0	32	181.0	24	226.0
0.6	1.5	5	703	1001.0	351	1608.0	29	143.0	19	243.0
0.6	2.0	0	883	1081.0	494	2243.0	27	145.0	16	165.0
0.6	2.0	1	810	1126.0	474	2278.0	27	166.0	18	224.0
0.6	2.0	5	773	1091.0	439	2180.0	27	177.0	8	115.0
0.8	1.0	0	372	359.0	70	258.0	8	29.0	9	101.0
0.8	1.0	1	278	253.0	74	297.0	8	35.0	9	93.0
0.8	1.0	5	304	343.0	80	397.0	8	46.0	10	157.0
0.8	1.5	0	358	350.0	127	485.0	6	25.0	8	69.0
0.8	1.5	1	289	310.0	119	488.0	6	35.0	8	63.0
0.8	1.5	5	285	249.0	126	498.0	6	26.0	7	90.0
0.8	2.0	0	364	333.0	143	527.0	7	43.0	7	47.0
0.8	2.0	1	321	302.0	142	608.0	7	31.0	7	49.0
0.8	2.0	5	308	288.0	143	654.0	6	27.0	7	55.0

Таблица 4.4. Производительность алгоритмов Бендарса на наборе данных САВ

сечений может ухудшать сходимость алгоритма. Рассматривая количество итераций и затраченное процессорное время, алгоритм «MN» показывает лучшие результаты для всех рассмотренных случаев в сравнении с алгоритмами «PO» и «BD». В ходе анализа производительности по времени алгоритмов «MN» и «Гибрид» было выяснено, что первый из них показывает лучший результат в большинстве случаев.

Алгоритмы Бендерса (Таблица 4.4) превосходят стандартный программный пакет решения задач линейной оптимизации CPLEX (Таблица 4.2), где, начиная со случая $\alpha = 0.4$, $\lambda = 1.5$ and $\mu = 0$, алгоритмы разложения близки к CPLEX или показывают лучший результат в 2/3 случаях.

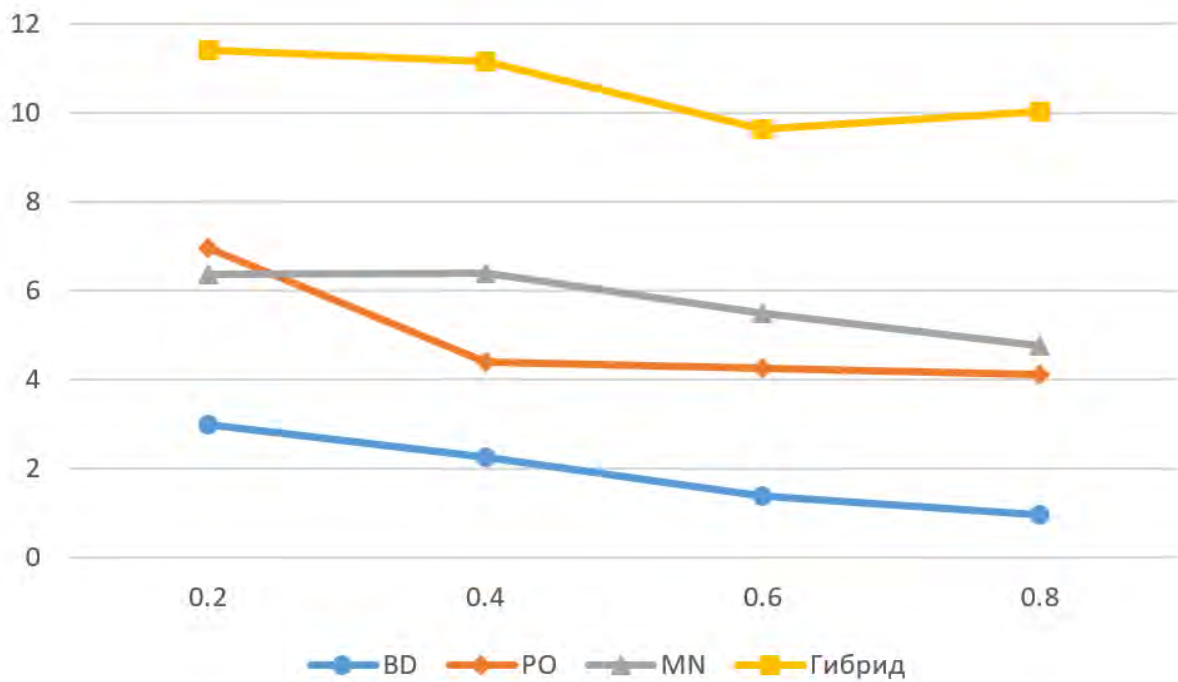


Рис. 4.1. Среднее время затраченное на итерацию алгоритмами разложения Бендерса в зависимости от α на наборе данных САВ

На Рис. 4.1 изображен график зависимости среднего времени, затраченного на итерацию Бендерса для различных алгоритмов разложения в зависимости от фактора дисконтирования α . Представленные результаты получены путем агрегации результатов Таблицы 4.4. Базовые сечения Бендерса превосходят

остальные алгоритмы по затраченному времени на итерацию, в то время как алгоритм генерации двух усиленных сечений «Гибрид» для $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.6\}$ затрачивает на итерацию в среднем меньше времени, чем сумма средних значений для «РО» и «MN» в отдельности. Результаты для «РО» и «MN» близки, но количество итераций отличается значительно (см. Таблицу 4.4), где «MN» является более эффективным в сравнении с «РО».

4.8.3. Алгоритм подготовки данных AP

Набор данных AP содержит информацию о 200 приемных пунктах почтового сервиса Australian Post, представленную в библиотеке исследования операций [64], для проведения эксперимента были выбраны первые 40 точек. Рассматриваются 5 сценариев, которые получены путем случайной генерации на основе имеющихся данных AP.

В отличие от САВ набор данных AP содержит информацию по стоимости открытия хаба для двух случаев: L (Loose) и T (Tight), — для анализа будет использоваться последний. Кроме того, указанный набор данных предназначен для задачи HLP с ограниченной пропускной способностью хабов, поэтому рассматриваются множество $\alpha \in \{4, 8, 12, 16\}$, $\chi = 40$ и $\delta = 60$ с целью адаптировать данные к задаче UMANLP.

Процедура генерации выручки по направлениям схожа с представленной в Разделе 4.8.1, $R_{ks} = \xi \frac{c_k}{W_k}$, где $\xi \sim U(40; 50)$. Объем спроса $W_{ks} \sim U(\frac{1}{2}W_k; \frac{3}{2}W_k)$ получается в результате случайной генерации из равномерного распределения.

4.8.4. Результаты для набора данных AP

Численное исследование на данных AP проведено для робастных постановок UMANLP с прибылью и постановки HLP с ожидаемой прибылью, введенную в Разделе 4.8.2. Название столбцов в Таблице 4.5, Таблице 4.6 и Таблице 4.7 имеют аналогичную интерпретацию с таблицами из Раздела 4.8.2.

α	Hubs	Sat.	Profit	Lose	Abs. Dev.	Dir. Dev.
4.0	0,7,15,18,23,32,34,37	68.3	8,127,585.4	2,720,334.6	16,879.8	553,476.0
8.0	0,7,13,18,21,32,37	62.7	8,064,907.3	2,716,823.5	16,709.8	550,360.2
12.0	0,7,13,18,21,32	59.4	8,012,708.2	2,705,160.4	16,704.7	547,048.4
16.0	0,7,13,18,21,32	55.3	7,966,119.4	2,723,387.4	17,041.1	544,885.1

Таблица 4.5. Результаты эксперимента на наборе данных AP для HLP с ожидаемой прибылью

Из Таблицы 4.5 и Таблицы 4.6 видно, что оптимальные наборы хабов для двух постановок не отличаются при $\alpha \in \{4, 16\}$, в то время как удовлетворенность спроса для робастной постановки выше на 8–12%. Как это было отмечено в Разделе 4.8.2 для результатов эксперимента на наборе данных CAB, ожидаемые потери при $\lambda = 1$ для робастных моделей больше для большинства случаев в сравнении с HLP с ожидаемой прибылью, что вызывает противоречие в предположениях робастных постановках задач. Аналогичная ситуация возникала в экспериментах на данных CAB, здесь будет уместно схожее объяснение.

Столбец «Abs. Dev.» в Таблице 4.6 отражает более значимые результаты в сравнении с экспериментом на данных CAB, т. к. при $\mu = 5$ значение слагаемого отклонения прибыли в 1.5–5 раз меньше в сравнении с другими значениями слагаемых целевой функции для разных наборов параметров в текущей Таблице или в Таблице 4.5, или в Таблице 4.7. Это подтверждает выполнение предположения робастных постановок задач: отклонения прибыли должны быть минимизированы в той мере, в какой позволяет максимизация прибыли. Отметим, что результаты усиленной робастной модели не показали значительных отличий в сравнении с обычной робастной постановкой по «Dir. Dev.», это видно из Таблицы 4.7 и Таблицы 4.6, однако есть значимые отличия по «Abs. Dev.». Наборы параметров, где $\mu = 5$ явно демонстрируют отличия между обычной робастной моделью и усиленной постановкой. Отметим, что усиленная робастная модель содержит на одно нелинейное слагаемое меньше в сравнении с обычной робастной постановкой, но затраченное время на оптимизацию задачи в большинстве случаев больше. Аналогичное заключение можно сделать для результатов на

α	λ	μ	Hubs	Sat.	Profit	Lose	Abs. Dev.	Dir. Dev.	Time (sec)
4.0	1	0	0,7,15,18,23,32,34,37	76.8	8,115,017.6	2,724,860.2	17,206.6	556,916.2	757.0
4.0	1	1	0,7,15,18,23,32,34,37	77.2	8,113,698.7	2,723,406.6	17,096.7	556,934.1	616.5
4.0	1	5	0,7,15,18,23,32,34,37	76.8	8,113,191.4	2,716,307.1	16,303.8	556,145.2	624.4
4.0	1.5	0	0,7,15,18,23,32,34,37	74.4	8,110,093.4	2,656,447.9	17,477.4	551,279.0	851.4
4.0	1.5	1	0,7,15,18,23,32,34,37	76.5	8,106,528.8	2,640,409.5	15,698.6	549,773.7	712.0
4.0	1.5	5	0,7,15,18,23,32,34,37	73.3	8,047,561.0	2,463,417.1	3,481.6	534,909.4	1086.1
4.0	2	0	0,7,15,18,23,32,34,37	72.7	7,852,384.0	1,853,940.4	13,308.8	487,730.9	963.6
4.0	2	1	0,7,15,18,23,32,34,37	72.6	7,852,502.5	1,853,847.2	13,277.5	487,696.6	1127.8
4.0	2	5	0,7,15,18,23,32,34,37	71.5	7,867,276.5	1,893,576.5	9,693.3	491,488.9	1244.6
8.0	1	0	0,7,15,18,23,32,34,37	75.5	8,046,368.0	2,725,413.7	17,160.5	556,580.8	550.5
8.0	1	1	0,7,15,18,23,32,34,37	75.4	8,046,474.1	2,725,526.8	17,021.1	556,526.9	744.0
8.0	1	5	0,7,15,18,23,32,34,37	74.9	8,046,091.7	2,716,918.8	16,074.5	555,596.4	622.0
8.0	1.5	0	0,7,15,18,21,23,32,37	73.0	8,036,202.6	2,628,947.5	17,149.4	548,932.0	996.2
8.0	1.5	1	0,7,15,18,21,23,32,37	73.1	8,033,742.7	2,618,906.8	15,205.8	547,706.6	705.1
8.0	1.5	5	0,7,15,18,21,23,32,37	73.6	7,978,805.6	2,457,642.4	3,383.9	534,181.7	820.8
8.0	2	0	0,7,13,18,21,32,37	70.3	7,792,102.7	1,852,551.2	13,329.2	487,111.4	1324.4
8.0	2	1	0,7,13,18,21,32,37	70.0	7,792,630.7	1,851,760.7	13,183.1	486,923.0	1083.4
8.0	2	5	0,7,13,18,21,32,37	69.9	7,804,751.2	1,889,325.1	9,660.1	490,591.8	1156.0
12.0	1	0	0,7,15,18,23,32,34,37	73.5	7,981,619.1	2,724,580.7	17,054.9	556,110.4	757.5
12.0	1	1	0,7,15,18,23,32,34,37	73.4	7,981,580.5	2,724,082.4	16,887.7	556,054.5	717.7
12.0	1	5	0,7,15,18,21,23,32,37	72.7	7,980,887.6	2,714,939.8	15,756.5	554,978.3	798.4
12.0	1.5	0	0,7,13,18,21,32,37	70.5	7,972,146.5	2,604,794.3	17,255.4	546,336.9	1329.4
12.0	1.5	1	0,7,13,18,21,32,37	70.3	7,969,555.9	2,593,001.3	15,295.8	545,160.5	1157.0
12.0	1.5	5	0,7,13,18,21,32,37	70.5	7,916,817.8	2,445,887.5	3,227.6	532,650.3	1332.5
12.0	2	0	0,7,13,18,21,32,37	69.4	7,735,336.5	1,852,403.7	13,182.6	486,784.0	1578.5
12.0	2	1	0,7,13,18,21,32,37	69.4	7,735,915.0	1,852,272.8	13,120.9	486,726.9	1805.6
12.0	2	5	0,7,13,18,21,32,37	68.8	7,748,993.2	1,888,069.4	9,753.9	490,096.9	2011.8
16.0	1	0	0,7,13,18,21,32	70.2	7,934,482.1	2,710,673.8	17,325.9	554,326.1	898.7
16.0	1	1	0,7,13,18,21,32	70.0	7,935,670.3	2,709,758.6	17,111.1	554,016.5	825.1
16.0	1	5	0,7,13,18,21,32	69.6	7,934,238.1	2,700,555.5	15,364.2	553,043.8	686.3
16.0	1.5	0	0,7,13,18,21,32	67.9	7,930,932.8	2,594,165.3	17,152.0	544,437.0	1266.6
16.0	1.5	1	0,7,13,18,21,32	67.0	7,928,520.4	2,587,105.8	15,163.4	543,628.7	1346.9
16.0	1.5	5	0,7,13,18,21,32	67.9	7,877,021.7	2,432,978.7	3,350.2	530,446.1	1807.7
16.0	2	0	0,7,13,18,21,32	66.6	7,696,993.3	1,854,047.9	13,088.2	485,973.7	1448.9
16.0	2	1	0,7,13,18,21,32	66.8	7,696,046.4	1,853,956.0	12,892.5	485,936.8	1443.8
16.0	2	5	0,7,13,18,21,32	67.5	7,708,788.3	1,889,713.0	9,644.1	489,533.4	1309.4

Таблица 4.6. Результаты эксперимента на наборе данных AP для робастной постановки задачи размещения хабов

данных САВ.

α	λ	μ	Hubs	Sat.	Profit	Lose	Abs. Dev.	Dir. Dev.	Time (sec)
4.0	1	1	0,7,15,18,23,32,34,37	76.3	8,116,748.5	2,722,065.6	17,177.2	556,558.2	717.4
4.0	1	5	0,7,15,18,23,32,34,37	72.5	8,109,965.7	2,647,786.6	17,061.3	547,971.4	653.4
4.0	1.5	1	0,7,15,18,23,32,34,37	72.5	8,078,102.2	2,527,643.1	17,914.9	539,000.0	969.2
4.0	1.5	5	0,7,15,18,23,32,34,37	68.5	7,869,594.6	1,878,431.6	13,192.9	487,310.4	870.2
4.0	2	1	0,7,15,18,23,32,34,37	71.3	7,854,171.1	1,853,890.5	13,205.7	487,514.6	1019.5
4.0	2	5	0,7,13,18,32,34,37	67.9	7,859,306.6	1,851,410.9	13,294.0	486,076.1	1037.0
8.0	1	1	0,7,15,18,23,32,34,37	75.0	8,048,175.4	2,721,504.2	17,148.6	556,118.8	826.5
8.0	1	5	0,7,15,18,21,23,32,37	70.5	8,041,585.0	2,636,035.6	17,195.2	546,474.5	741.8
8.0	1.5	1	0,7,15,18,21,23,32,37	70.5	8,006,119.0	2,500,943.1	17,607.4	536,300.9	1196.8
8.0	1.5	5	0,7,13,18,21,32,37	66.7	7,809,387.5	1,875,524.7	13,074.3	486,477.9	1068.5
8.0	2	1	0,7,13,18,21,32,37	69.5	7,794,574.8	1,851,783.0	13,247.0	486,687.9	1018.1
8.0	2	5	0,7,13,18,21,32,37	67.0	7,798,379.8	1,850,275.9	12,976.6	485,653.0	1529.0
12.0	1	1	0,7,15,18,21,23,32,37	72.4	7,984,976.4	2,717,823.5	17,006.2	555,324.5	657.2
12.0	1	5	0,7,13,18,21,32	65.5	7,986,903.1	2,611,052.0	17,273.2	542,749.2	873.8
12.0	1.5	1	0,7,13,18,21,32	67.0	7,945,603.6	2,470,089.6	17,304.5	532,879.9	1075.5
12.0	1.5	5	0,7,13,18,21,32	63.7	7,762,272.4	1,880,143.6	12,898.3	485,681.7	1549.7
12.0	2	1	0,7,13,18,21,32,37	68.8	7,738,028.5	1,851,913.9	13,280.2	486,401.7	1377.2
12.0	2	5	0,7,13,18,21,32	64.1	7,747,738.5	1,850,848.0	12,933.5	484,561.2	1369.8
16.0	1	1	0,7,13,18,21,32	69.8	7,939,422.5	2,701,559.4	17,031.3	553,159.9	705.9
16.0	1	5	0,7,13,18,21,32	66.2	7,937,670.1	2,602,472.9	17,275.0	541,856.0	894.6
16.0	1.5	1	0,7,13,18,21,32	66.1	7,899,430.6	2,465,552.0	17,272.7	532,143.1	1515.9
16.0	1.5	5	0,7,13,18,21,32	63.3	7,715,782.6	1,879,289.7	12,852.3	485,491.9	1575.0
16.0	2	1	0,7,13,18,21,32	66.1	7,698,780.7	1,854,222.4	13,045.9	485,784.0	1122.3
16.0	2	5	0,7,13,18,21,32	63.8	7,700,924.8	1,849,728.7	13,091.5	484,214.1	2115.6

Таблица 4.7. Результаты эксперимента на наборе данных AP для усиленной робастной постановки задачи размещения хабов

В Таблице 4.8 представлены результаты исследования производительности алгоритмов Бендерса для различных типов сечений из Разделов 4.4 – 4.7 на данных AP. Для 27 из 36 рассмотренных случаев алгоритмы разложения задачи показали результат лучше, чем CPLEX (см. Таблицу 4.6 столбец «Time (sec)»), по времени, затраченному на решение задачи. Алгоритмы «PO», «MN» и «Гибрид» достигают оптимальное решение за меньшее количество итераций, чем «BD», но «BD» получает оптимальное решение быстрее, чем остальные

алгоритмы разложения.

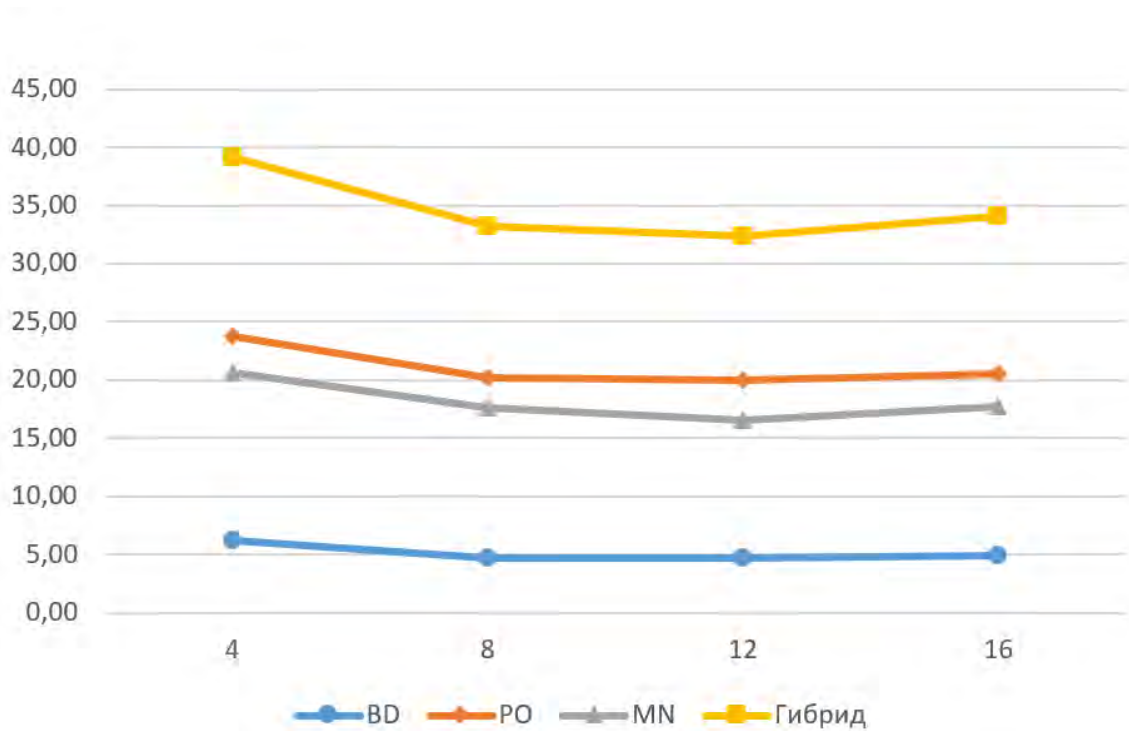


Рис. 4.2. Среднее время, затраченное на итерацию алгоритмами разложения Бендерса в зависимости от α на наборе данных AP

Рис. 4.2 отражает среднее время, затраченное на итерацию Бендерса для различных типов сечений в зависимости от параметра α на наборе данных AP. Результаты сформированы на основе Таблицы 4.8. Базовый алгоритм разложения Бендерса превосходит все другие алгоритмы по времени, затраченному на итерации. Алгоритмы «PO» и «MN» близки по среднему времени на итерации, но количество итераций различается (см. Таблицу 4.4), где «PO» является более эффективным в большинстве случаев в сравнении с алгоритмом «MN». Полученный результат является противоположным тому, что представлен в Разделе 4.8.2 для данных САВ.

α	λ	μ	BD		PO		MN		Гибрид	
			Iter.	Time (sec)	Iter.	Time (sec)	Iter.	Time (sec)	Iter.	Time (sec)
4.0	1.0	0	101	622.0	18	373.0	20	329.0	16	532.0
4.0	1.0	1	96	597.0	16	394.0	23	464.0	18	712.0
4.0	1.0	5	109	674.0	18	400.0	23	451.0	18	729.0
4.0	1.5	0	139	856.0	46	1067.0	64	1517.0	39	1531.0
4.0	1.5	1	145	908.0	47	1172.0	70	1674.0	46	1888.0
4.0	1.5	5	139	895.0	42	1334.0	72	1976.0	43	2273.0
4.0	2.0	0	210	1399.0	89	2213.0	131	2558.0	78	2980.0
4.0	2.0	1	214	1463.0	87	1936.0	126	2167.0	77	2737.0
4.0	2.0	5	211	1103.0	87	1783.0	128	2396.0	77	2745.0
8.0	1.0	0	113	478.0	20	316.0	23	437.0	23	569.0
8.0	1.0	1	117	521.0	20	388.0	27	490.0	22	688.0
8.0	1.0	5	132	588.0	26	565.0	32	644.0	24	664.0
8.0	1.5	0	186	803.0	64	1262.0	91	1608.0	54	1774.0
8.0	1.5	1	173	786.0	66	1268.0	87	1665.0	63	2201.0
8.0	1.5	5	184	865.0	66	1494.0	100	2144.0	60	2480.0
8.0	2.0	0	253	1207.0	111	2128.0	152	2523.0	91	2739.0
8.0	2.0	1	260	1332.0	116	2402.0	157	2496.0	104	3369.0
8.0	2.0	5	266	1393.0	117	2450.0	167	2683.0	93	3236.0
12.0	1.0	0	146	609.0	38	642.0	35	464.0	26	664.0
12.0	1.0	1	152	671.0	27	483.0	39	695.0	29	897.0
12.0	1.0	5	162	723.0	35	688.0	45	773.0	33	959.0
12.0	1.5	0	235	1018.0	85	1635.0	126	1988.0	86	2641.0
12.0	1.5	1	204	917.0	96	1894.0	125	2198.0	79	2649.0
12.0	1.5	5	221	1038.0	87	1960.0	118	2390.0	79	3104.0
12.0	2.0	0	287	1389.0	129	2558.0	160	2462.0	113	3484.0
12.0	2.0	1	297	1512.0	138	2779.0	178	2779.0	121	3868.0
12.0	2.0	5	298	1539.0	133	2745.0	165	2675.0	111	3661.0
16.0	1.0	0	164	681.0	29	426.0	42	655.0	26	744.0
16.0	1.0	1	158	680.0	29	552.0	41	715.0	29	966.0
16.0	1.0	5	164	719.0	36	700.0	42	694.0	26	911.0
16.0	1.5	0	186	893.0	60	1269.0	85	1602.0	49	1615.0
16.0	1.5	1	177	976.0	67	1446.0	91	1760.0	53	1923.0
16.0	1.5	5	168	987.0	62	1519.0	92	1906.0	53	2142.0
16.0	2.0	0	259	1205.0	104	2023.0	131	2167.0	81	2653.0
16.0	2.0	1	251	1257.0	94	1807.0	125	2048.0	82	2579.0
16.0	2.0	5	238	1193.0	92	2014.0	130	2291.0	86	3001.0

Таблица 4.8. Производительность алгоритмов Бендарса на наборе данных AP

Заключение

Диссертация посвящена задаче надежного размещения хабов. При проведении исследования были сформулированы математические постановки рассматриваемой задачи с целевыми функциями минимизации затрат и максимизации прибыли, где критериями надежности являются минимизация абсолютных отклонений затрат, прибыли и ожидаемых потерь в выручке.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Разработана новая статистическая процедура оценки надежности сети хабов для фиксированного количества хабов в сети, основанная на критерии Value at Risk из теории рисков.
2. Построены новые математические модели задачи надежного размещения хабов с целевыми функциями совместной оптимизации суммарных затрат сети или суммарной прибыли сети в компромиссе с ожидаемыми отклонениями транспортных затрат или ожидаемыми отклонениями выручки и ожидаемыми потерями в выручке соответственно.
3. Разработаны алгоритмы решения поставленных оптимизационных задач, основанные на разложении Бендерса с применением различного рода усиления сечений: парето-оптимальных, недоминируемых, гибридных.
4. Осуществлена программная реализация статистической процедуры оценки надежности сети хабов, поставленных оптимизационных задач и алгоритмов их решения.

Предложенные в работе математические модели могут быть практически применены к моделированию надежных транспортных или телекоммуникационных сетей по таким направлениям как почтовая доставка, доставка сборных грузов, авиаперевозки, размещение пунктов экстренного реагирования и др.

Особый интерес представляют целевые функции совместной оптимизации ключевых показателей сети типа затрат или прибыли в компромиссе с отклонениями этих показателей как степени надежности решения.

В рамках диссертационной работы были проведены численные эксперименты на данных CAB и AP из ORLibrary. Результаты оптимизации предложенных моделей сравнивались со стохастической постановкой задачи, где предложенные модели получили более надежные решения по введенным критериям. Кроме того, предложенные алгоритмы решения поставленных оптимизационных задач более чем в 75% случаях получали оптимальное решение быстрее стандартных коммерческих программных пакетов CPLEX и GUROBI Optimizer.

Перспективными направлениями дальнейшего исследования, по мнению автора, являются рассмотрение непрерывной модели представления неопределенности выручки и спроса в задачах надежного размещения хабов, разработка точных и эвристических алгоритмов решения поставленных задач в случае «больших» сетей, рассмотрение концепции надежности решения в других задачах размещения хабов.

Благодарность

Автор выражает благодарность своему научному руководителю — профессору, д. т. н. В. М. Буре за помощь, оказанную при написании диссертации; канд. физ.-мат. наук М. Б. Красильникову за консультации по рассматриваемой проблематике; жене, А. В. Бояркиной, за вдохновение и всестороннюю поддержку в написании настоящей диссертации.

Словарь терминов

HLP — задача размещения хабов (англ. Hub Location Problem).

UMAHLP — задача размещения хабов с неограниченной пропускной способностью хабов и множественной привязкой узла сети к хамам (англ. Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location Problem).

UMApHLP — задача размещения хабов с неограниченной пропускной способностью хабов и множественной привязкой узла сети к хамам, где необходимо выбрать p хабов (англ. Uncapacitated Multiple Allocation p -Hub Location Problem).

СМАpHLP — задача размещения хабов с ограниченной пропускной способностью хабов и множественной привязкой узла сети к хамам, где необходимо выбрать p хабов (англ. Capacitated Multiple Allocation p -Hub Location Problem).

О–П — отправитель–получатель.

BD — алгоритм декомпозиции Бендерса задачи математического программирования (англ. Benders Decomposition).

ПО сечения — Парето оптимальные сечения в разложении Бендерса.

MP — подзадача в алгоритме разложения Бендерса (англ. Master Problem).

SP — подзадача в алгоритме разложения Бендерса (англ. Slave Problem).

DSP — двойственная задача к подзадаче SP в алгоритме разложения Бендерса (англ. Dual Slave Problem).

Conv(X) — выпуклая оболочка множества X .

StHLPAD — стохастическая постановка задачи размещения хабов с абсолютным отклонением транспортных затрат (англ. Stochastic Hub Location Problem with Absolute deviation).

Список литературы

1. *Lozkins A., Bure Vladimir M.* The criterion for comparing risks of samples from different distributions // The XLIX annual international conference on Control Processes and Stability (CPS'18). Abstracts. — St. Petersburg: Publishing House Fedorova G.V., 2018. — С. 92.
2. *Ложкинс А., Буре В. М.* Эмпирический подход оценки устойчивости методов кластеризации // Материалы III международной конференции «Устойчивость и процессы управления», посвященная 85-летию со дня рождения профессора, чл.-корр. РАН В. И. Зубова / под ред. А. Жабко, Л. Петросян. — СПб: Издательский Дом Федоровой Г.В., 2015. — С. 431—433.
3. *Ложкинс А., Буре В. М.* Выбор распределительных центров в задаче о размещении объектов на основе процедур статистического моделирования // Материалы XIV международной научной конференции "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления"(конференция Пятницкого) 30 мая — 1 июня 2018г., Москва / под ред. В. Тхай. — М.: ИПУ РАН, 2018. — С. 264—267.
4. *Lozkins A.* Robust hub location problem // The L annual international conference on Control Processes and Stability (CPS'19). Abstracts. — St. Petersburg: Publishing House Fedorova G.V., 2019. — С. 87.
5. *Ложкинс А., Буре В.* Критерий сравнения выборок из различных генеральных совокупностей // Процессы управления и устойчивость. — СПб: Издательский Дом Федоровой Г.В., 2018. — С. 475—479.
6. *Ложкинс А.* Задача робастного размещения хабов // Процессы управления и устойчивость. — СПб: Издательский Дом Федоровой Г.В., 2019. — С. 440—444.

7. *Lozkins A., Bure V. M.* The method of clusters stability assessing // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of VI Zubov (SCP). — IEEE. 2015. — С. 479—482.
8. *Lozkins A., Bure V. M.* Single hub location-allocation problem under robustness clustering concept // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. — 2017. — Т. 13, № 4. — С. 398—406.
9. *Lozkins A.* The distribution centres choice in the facility location problem on the basis of statistical modeling procedures // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2018. — Т. 14, № 4. — С. 346—351.
10. *Lozkins A., Krasilnikov M., Bure V.* Robust uncapacitated multiple allocation hub location problem under demand uncertainty: minimization of cost deviations // Journal of Industrial Engineering International. — 2019. — Т. 15, № 1. — С. 199—207. — DOI: [10.1007/s40092-019-00329-9](https://doi.org/10.1007/s40092-019-00329-9).
11. *Ложкинс А., Буре В. М.* Программа для определения устойчивого количества распределительных центров. — 2018. — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No.2018665042 от 29.11.2018.
12. *Ложкинс А.* Программа для моделирования робастной сети хабов в условиях неопределенности спроса. — 2019. — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No.2019612304 от 21.03.2019.
13. *O'Kelly M. E.* Activity levels at hub facilities in interacting networks // Geographical Analysis. — 1986. — Т. 18, № 4. — С. 343—356.
14. *O'Kelly M. E.* A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities // European journal of operational research. — 1987. — Т. 32, № 3. — С. 393—404.

15. *Campbell J. F., O'Kelly M. E.* Twenty-five years of hub location research // *Transportation Science*. — 2012. — Т. 46, № 2. — С. 153—169.
16. Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications / R. Z. Farahani [и др.] // *Computers & Industrial Engineering*. — 2013. — Т. 64, № 4. — С. 1096—1109.
17. *Contreras I.* Hub location problems // *Location science*. — Springer, 2015. — С. 311—344.
18. *Campbell J. F.* Location and allocation for distribution systems with transshipments and transportation economies of scale // *Annals of operations research*. — 1992. — Т. 40, № 1. — С. 77—99.
19. *Campbell J. F.* Integer programming formulations of discrete hub location problems // *European Journal of Operational Research*. — 1994. — Т. 72, № 2. — С. 387—405.
20. *Skorin-Kapov D., Skorin-Kapov J., O'Kelly M.* Tight linear programming relaxations of uncapacitated p-hub median problems // *European journal of operational research*. — 1996. — Т. 94, № 3. — С. 582—593.
21. *Ernst A. T., Krishnamoorthy M.* Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem // *European Journal of Operational Research*. — 1998. — Т. 104, № 1. — С. 100—112.
22. *Campbell J. F.* Hub location and the p-hub median problem // *Operations research*. — 1996. — Т. 44, № 6. — С. 923—935.
23. *Ernst A. T., Krishnamoorthy M.* An exact solution approach based on shortest-paths for p-hub median problems // *INFORMS Journal on Computing*. — 1998. — Т. 10, № 2. — С. 149—162.
24. *Klincewicz J. G.* A dual algorithm for the uncapacitated hub location problem // *Location Science*. — 1996. — Т. 4, № 3. — С. 173—184.

25. *Mayer G., Wagner B.* HubLocator: an exact solution method for the multiple allocation hub location problem // Computers & Operations Research. — 2002. — Т. 29, № 6. — С. 715—739.
26. Preprocessing and cutting for multiple allocation hub location problems / N. Boland [и др.] // European Journal of Operational Research. — 2004. — Т. 155, № 3. — С. 638—653.
27. Adapting polyhedral properties from facility to hub location problems / H. W. Hamacher [и др.] // Discrete Applied Mathematics. — 2004. — Т. 145, № 1. — С. 104—116.
28. *Marin A.* Uncapacitated Euclidean hub location: Strengthened formulation, new facets and a relax-and-cut algorithm // Journal of Global Optimization. — 2005. — Т. 33, № 3. — С. 393—422.
29. *Cánovas L., Garcia S., Marin A.* Solving the uncapacitated multiple allocation hub location problem by means of a dual-ascent technique // European Journal of Operational Research. — 2007. — Т. 179, № 3. — С. 990—1007.
30. *Contreras I., Cordeau J.-F., Laporte G.* Benders decomposition for large-scale uncapacitated hub location // Operations research. — 2011. — Т. 59, № 6. — С. 1477—1490.
31. *Benders J. F.* Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems // Numerische mathematik. — 1962. — Т. 4, № 1. — С. 238—252.
32. *Camargo R. S. de, Miranda Jr G., Luna H. P.* Benders decomposition for the uncapacitated multiple allocation hub location problem // Computers & Operations Research. — 2008. — Т. 35, № 4. — С. 1047—1064.
33. *Sá E. M. de, Camargo R. S. de, Miranda G. de.* An improved Benders decomposition algorithm for the tree of hubs location problem // European Journal of Operational Research. — 2013. — Т. 226, № 2. — С. 185—202.

34. *Magnanti T. L., Wong R. T.* Accelerating Benders decomposition: Algorithmic enhancement and model selection criteria // *Operations research*. — 1981. — Т. 29, № 3. — С. 464—484.
35. *Papadakos N.* Practical enhancements to the Magnanti–Wong method // *Operations Research Letters*. — 2008. — Т. 36, № 4. — С. 444—449.
36. *Camargo R. S. de, Miranda Jr G. de, Luna H. P. L.* Benders decomposition for hub location problems with economies of scale // *Transportation Science*. — 2009. — Т. 43, № 1. — С. 86—97.
37. *Camargo R. S. de, Miranda G.* Single allocation hub location problem under congestion: Network owner and user perspectives // *Expert Systems with Applications*. — 2012. — Т. 39, № 3. — С. 3385—3391.
38. Formulations and decomposition methods for the incomplete hub location network design problem with and without hop-constraints / R. S. de Camargo [и др.] // *Applied Mathematical Modelling*. — 2017. — Т. 51. — С. 274—301.
39. *Sá E. M. de, Morabito R., Camargo R. S. de.* Benders decomposition applied to a robust multiple allocation incomplete hub location problem // *Computers & Operations Research*. — 2018. — Т. 89. — С. 31—50.
40. *Marianov V., Serra D.* Location models for airline hubs behaving as M/D/c queues // *Computers & Operations Research*. — 2003. — Т. 30, № 7. — С. 983—1003.
41. *Yang T.-H.* Stochastic air freight hub location and flight routes planning // *Applied Mathematical Modelling*. — 2009. — Т. 33, № 12. — С. 4424—4430.
42. *Sim T., Lowe T. J., Thomas B. W.* The stochastic p-hub center problem with service-level constraints // *Computers & Operations Research*. — 2009. — Т. 36, № 12. — С. 3166—3177.

43. *Contreras I., Cordeau J.-F., Laporte G.* Stochastic uncapacitated hub location // *European Journal of Operational Research*. — 2011. — Т. 212, № 3. — С. 518—528.
44. *Alumur S. A., Nickel S., Saldanha-da-Gama F.* Hub location under uncertainty // *Transportation Research Part B: Methodological*. — 2012. — Т. 46, № 4. — С. 529—543.
45. *Shahabi M., Unnikrishnan A.* Robust hub network design problem // *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. — 2014. — Т. 70. — С. 356—373.
46. *Meraklı M., Yaman H.* Robust intermodal hub location under polyhedral demand uncertainty // *Transportation Research Part B: Methodological*. — 2016. — Т. 86. — С. 66—85.
47. Robust uncapacitated hub location / С. А. Zetina [и др.] // *Transportation Research Part B: Methodological*. — 2017. — Т. 106. — С. 393—410.
48. *Ghaffarinasab N.* An efficient matheuristic for the robust multiple allocation p-hub median problem under polyhedral demand uncertainty // *Computers & Operations Research*. — 2018. — Т. 97. — С. 31—47.
49. *Eiselt H. A., Marianov V.* A conditional p-hub location problem with attraction functions // *Computers & Operations Research*. — 2009. — Т. 36, № 12. — С. 3128—3135.
50. *Gelareh S., Nickel S., Pisinger D.* Liner shipping hub network design in a competitive environment // *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. — 2010. — Т. 46, № 6. — С. 991—1004.
51. *Lüer-Villagra A., Marianov V.* A competitive hub location and pricing problem // *European Journal of Operational Research*. — 2013. — Т. 231, № 3. — С. 734—744.

52. *Marianov V., Serra D., ReVelle C.* Location of hubs in a competitive environment // *European Journal of Operational Research*. — 1999. — Т. 114, № 2. — С. 363—371.
53. A Stackelberg hub arc location model for a competitive environment / M. Sasaki [и др.] // *Computers & Operations Research*. — 2014. — Т. 47. — С. 27—41.
54. *Sasaki M., Fukushima M.* Stackelberg hub location problem // *Journal of the Operations Research Society of Japan*. — 2001. — Т. 44, № 4. — С. 390—402.
55. *Alibeyg A., Contreras I., Fernández E.* Hub network design problems with profits // *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. — 2016. — Т. 96. — С. 40—59.
56. *Alibeyg A., Contreras I., Fernández E.* Exact solution of hub network design problems with profits // *European Journal of Operational Research*. — 2018. — Т. 266, № 1. — С. 57—71.
57. *Taherkhani G., Alumur S. A.* Profit maximizing hub location problems // *Omega*. — 2019. — Т. 86. — С. 1—15.
58. *Taherkhani G., Alumur S. A., Hosseini S. M.* Benders decomposition for profit maximizing hub location problems with capacity allocation. — 2019.
59. *Hamacher H. W. et al.* Adapting polyhedral properties from facility to hub location problems // *Discrete Applied Mathematics*. — 2004. — Т. 145, № 1. — С. 104—116.
60. *Artzner P. et al.* Coherent measures of risk // *Mathematical finance*. — 1999. — Т. 9, № 3. — С. 203—228.
61. *Rockafellar R. T. et al.* Optimization of conditional value-at-risk // *Journal of risk*. — 2000. — Т. 2. — С. 21—42.

62. *Ahmadi-Javid A.* Entropic value-at-risk: A new coherent risk measure // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2012. — T. 155, № 3. — C. 1105—1123.
63. *Mercier A., Cordeau J.-F., Soumis F.* A computational study of Benders decomposition for the integrated aircraft routing and crew scheduling problem // Computers & Operations Research. — 2005. — T. 32, № 6. — C. 1451—1476.
64. *Beasley J. E.* OR-Library: distributing test problems by electronic mail // Journal of the operational research society. — 1990. — T. 41, № 11. — C. 1069—1072.
65. *Bisschop J.* AIMMS optimization modeling. — Lulu. com, 2006.
66. *Lai K.-K., Ng W.-L.* A stochastic approach to hotel revenue optimization // Computers & Operations Research. — 2005. — T. 32, № 5. — C. 1059—1072.
67. *Van Slyke R. M., Wets R.* L-shaped linear programs with applications to optimal control and stochastic programming // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1969. — T. 17, № 4. — C. 638—663.
68. *Sherali H. D., Lunday B. J.* On generating maximal nondominated Benders cuts // Annals of Operations Research. — 2013. — T. 210, № 1. — C. 57—72.
69. *Oliveira F., Grossmann I. E., Hamacher S.* Accelerating Benders stochastic decomposition for the optimization under uncertainty of the petroleum product supply chain // Computers & Operations Research. — 2014. — T. 49. — C. 47—58.
70. *Taherkhani G.* Hub Location Problems with Profit Considerations. — 2019.

Список иллюстративного материала

3.1	Расположение узловых точек набора данных САВ	42
4.1	Среднее время затраченное на итерацию алгоритмами разложения Бендерса в зависимости от α на наборе данных САВ	77
4.2	Среднее время, затраченное на итерацию алгоритмами разложения Бендерса в зависимости от α на наборе данных АР	82

Список таблиц

2.1	Частоты сменяемости хабов	27
2.2	Индексы устойчивости VaR	27
3.1	Результаты расчета для классической стохастической постановки	43
3.2	Результаты расчета для линейной STHLPAD	45
3.3	Производительность алгоритмов Бендерса	47
4.1	Результаты эксперимента на наборе данных CAB для НЛР с ожидаемой прибылью	71
4.2	Результаты эксперимента на наборе данных CAB для робастной постановки задачи размещения хабов	72
4.3	Результаты эксперимента на наборе данных CAB для усиленной робастной постановки задачи размещения хабов	74
4.4	Производительность алгоритмов Бендарса на наборе данных CAB	76
4.5	Результаты эксперимента на наборе данных AP для НЛР с ожидаемой прибылью	79
4.6	Результаты эксперимента на наборе данных AP для робастной постановки задачи размещения хабов	80
4.7	Результаты эксперимента на наборе данных AP для усиленной робастной постановки задачи размещения хабов	81
4.8	Производительность алгоритмов Бендарса на наборе данных AP .	83

Приложение А

Алгоритмы Бендерса решения задачи StHLPAD

А.1. Основной алгоритм Бендерса

Формулировка задачи StHLPAD, обозначения и основные предположения представлены в Главе 3. В настоящем приложении описывается алгоритм разложения Бендерса поставленной задачи, полное изложение которого представлено в Разделе 3.4.

Постановка задачи МР:

$$\mathbf{min} \quad \sum_{k \in K} a_k y_k + \eta \quad (\text{A.1})$$

при ограничениях:

$$\eta + \sum_{s \in S} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} u_{ijk}^{sh} w_{ij}^s y_k \geq \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^{sh}, \quad (\text{A.2})$$

$$\sum_{k \in K} y_k \geq 1 \quad (\text{A.3})$$

$$y_k \in \{0, 1\} \quad k \in K \quad (\text{A.4})$$

$$\eta \geq 0 \quad (\text{A.5})$$

Постановка задачи DSP:

$$\mathbf{max} \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^s - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^s w_{ij}^s y_k^h \quad (\text{A.6})$$

при ограничениях:

$$e_s \leq 2\lambda p_s \quad s \in S \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned}
c_{ijkm}e_s - p_s c_{ijkm} \sum_{s \in S} e_s + v_{ij}^s - u_{ijk}^s - u_{ijm}^s \\
\leq c_{ijkm}p_s \quad i, j \in N, k \neq m, k, m \in K, s \in S
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$c_{ijkk}e_s - p_s c_{ijkk} \sum_{s \in S} e_s + v_{ij}^s - u_{ijk}^s \leq c_{ijkk}p_s \quad i, j \in N, k \in K, s \in S \tag{A.9}$$

$$e_s \geq 0 \quad s \in S \tag{A.10}$$

$$v_{ij}^s \in R \quad i, j \in N, s \in S \tag{A.11}$$

$$u_{ijk}^s \geq 0 \quad i, j \in N, k \in K, s \in S \tag{A.12}$$

Алгоритм разложения Бендерса задачи StHLPAD описан ниже, где $\phi_{MP}(y, \eta)$ и $\phi_{DSP}(e, u, v)$ — оптимальные значения целевых функций задачи MP и задачи DSP.

Алгоритм 5: Алгоритм разложения Бендерса задачи StHLPAD

UB \leftarrow $+\infty$, LB \leftarrow 0, $h \leftarrow$ 0

до тех пор, пока $UB \neq LB$ **выполнять**

Решение MP (A.1)–(A.5)

LB \leftarrow $\phi_{MP}(y, \eta)$

Решение DSP (A.6)–(A.12)

Добавление сечения (A.2) в MP

если $\phi_{DSP}(e, u, v) + \sum_{k \in K} a_k y_k < UB$ **тогда**

 | UB = $\phi_{DSP}(e, u, v) + \sum_{k \in K} a_k y_k$

иначе

 | Ничего

конец

$h \leftarrow h + 1$

конец

A.2. Ускоренный алгоритм Бендерса

В настоящем разделе представлено описание ускоренного алгоритма разложения Бендерса, основанного на Парето-оптимальных сечениях, теоретическое обоснование алгоритма изложено в Разделе 3.5.

Введем вспомогательную задачу для нахождения Парето-оптимального сечения:

$$\mathbf{max} \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^s - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^s w_{ij}^s \hat{y}_k^{(h)} \quad (\text{A.13})$$

при ограничениях:

$$e_s \leq 2\lambda p_s \quad s \in S \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} c_{ijkm} e_s - p_s c_{ijkm} \sum_{s \in S} e_s + v_{ij}^s - u_{ijk}^s - u_{ijm}^s \\ \leq c_{ijkm} p_s \quad i, j \in N, k \neq m, k, m \in K, s \in S \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$c_{ijkk} e_s - p_s c_{ijkk} \sum_{s \in S} e_s + v_{ij}^s - u_{ijk}^s \leq c_{ijkk} p_s \quad i, j \in N, k \in K, s \in S \quad (\text{A.16})$$

$$e_s \geq 0 \quad s \in S \quad (\text{A.17})$$

$$v_{ij}^s \in R \quad i, j \in N, s \in S \quad (\text{A.18})$$

$$u_{ijk}^s \geq 0 \quad i, j \in N, k \in K, s \in S \quad (\text{A.19})$$

Алгоритм 6: Ускоренное разложение Бендерса задачи StHLPAD

$$UB \leftarrow +\infty, LB \leftarrow 0, h \leftarrow 0, \gamma, \hat{y}^{(0)}$$

до тех пор, пока $UB \neq LB$ выполнять

Решение DSP (A.13)–(A.19)

Добавление сечения (A.2) в МР

Решение МР (A.1)–(A.5)

$LB \leftarrow \phi_{MP}(y, \eta)$

Решение DSP (A.6)–(A.12)

Добавление сечения (A.2) в МР

Обновление точек Magnanti и Wong (3.35)

если $\phi_{DSP}(e, u, v) + \sum_{k \in K} a_k y_k < UB$ тогда

| $UB = \phi_{DSP}(e, u, v) + \sum_{k \in K} a_k y_k$

иначе

| Ничего

конец

$h \leftarrow h + 1$

конец

Saint Petersburg State University

As Manuscript

Lozkins Aleksejs

Robust hub location problem under demand and revenue uncertainties

05.13.18 – Mathematical modeling, numerical methods and program complexes

Candidate of physical and mathematical sciences

Translation from Russian

Scientific Supervisor

Professor, Doctor of Engineering Sciences

V. M. Bure

Saint Petersburg – 2020

Table of contents

Introduction	105
Chapter 1. Literature review	113
1.1. The hub location problem	113
1.2. Benders decomposition	114
1.3. Hub location problem under uncertainty	115
1.4. Hub location problem with profits	117
Chapter 2. The hub network reliability estimation under demand uncertainty	119
2.1. Mathematical formulation of UMApHLP	119
2.2. The data preparation procedure	121
2.3. The hub number robustness measure, the reliability criterion	123
2.4. Computational study	125
Chapter 3. Robust uncapacitated multiple allocation hub location problem under demand uncertainty: minimization of cost deviations	128
3.1. Stochastic formulation of UMAHLP	128
3.2. Robust concept of UMAHLP	129
3.3. Linear formulation of the problem	131
3.4. Benders decomposition	133
3.5. Accelerated Benders decomposition algorithm	137
3.6. Computational study	139
Chapter 4. The hub location problem based on the profit maximization under demand and revenue uncertainty	146
4.1. Deterministic problem formulation	146

4.2.	Robust formulation of UMAHLP with deterministic revenue and uncertain demand	149
4.3.	Robust formulation of UMAHLP with revenue and demand uncertainties	152
4.4.	Benders decomposition	154
4.5.	Pareto-optimal cuts in Benders decomposition	158
4.6.	Maximal non-dominated Benders algorithm	160
4.7.	Hybrid multiple cuts generation strategy	162
4.8.	Computational study	163
	Conclusion	179
	Glossary	182
	Bibliography	183
	List of Figures	191
	List of Tables	192
	Appendix A. The Benders algorithms of StHLPAD solution	193
A.1.	Basic Benders decomposition algorithm	193
A.2.	Accelerated Benders algorithm	195

Introduction

Research relevance. The dissertation is devoted to the study a reliable hub network design problem in the uncertainty condition of demand and revenue. The problem arises in the telecommunication and transportation systems, where it is necessary to determine the most effective routing scheme for signals, commodities or services between the origin and the destination, in order to reduce the overall cost of constructing and maintaining the network.

One of the most important elements of the network are hubs that have the traffic flows consolidation and distribution functions. Their presence makes it possible to replace the direct connection pairs between the "origin" and "destination" nodes with a smaller number of indirect connections between network nodes. The advantage of using these types of objects is to reduce costs due to economies of scale. Thus, the task of construction an effective and robust network is to determine the optimal number of hubs and construct indirect routes from the origin to the destination nodes through consolidation and distribution centers that minimize the overall network costs, including both the hub opening cost and servicing transportation arcs.

In addition, the selected network configuration must be resistant to traffic changes, since its selection is a strategic decision and is fixed for a long-term period. Thus, in order to design a reliable and stable hub network and routing schemes, it is necessary to take into account the variability in the initial data: demand, transport costs, revenue and etc. That is, to find a compromise between total costs and expected losses, while maintaining the efficiency of the network. A lot of studies has been devoted to this problem over the past two decades, aimed to studying various sources of uncertainty and ways to model them in the reliable hub location problem. There are several approaches for construction a reliable network that are based on concepts such as considering the expected scenario, the worst-case scenario, introduction the risk assessment functions and its minimizing problems.

The main new field in this area is to maximize the network's profits, where in addition to network construction with minimal costs, it is necessary to identify the most profitable directions and the volumes of demand to be satisfied. There are several papers which addresses this problem that have been published over the past few years .

The problem has an applications in the industry, where is required the understanding of the theoretical foundations and the practical result of optimization. Basically, methods of operation research and mathematical programming theories such as quadratic and linear programming, meta-heuristic approaches, simulation algorithms and problem decomposition methods are used to solve the problem. These methods were used to find the optimal solution to the hub location problem since the moment they appeared. It is important to note, that the solution finding time minimization is also crucial.

Aim of the dissertation consists of the development and research the properties of mathematical models for robust hub network design with costs minimization and profit maximization objective functions, the development of exact solution algorithms for the proposed problems formulations.

It was necessary to fulfill the following **objectives** to achieve the aim in view:

1. To develop the hub network robustness measure, the statistical criterion of hub number stability and the algorithm of network statistics calculation.
2. To develop the new mathematical model for hub location problem under demand uncertainty, where the robustness criterion consists of the transportation costs deviation minimization in trade-off with common network costs minimization.
3. To develop the new mathematical model for hub location problem with objective function of profit maximization under demand and revenue uncertainties. Develop a reliability criterion for the fluctuations in the demand and in the revenue.

4. To develop the exact mathematical algorithms of proposed problems solution.
5. To develop a software packages that implement the proposed algorithms to solve problems, the proposed algorithms experimental verification for the effectiveness.

Scientific novelty includes the following points:

1. The new statistical procedure of hub network's stability estimation based on the simulation modeling is developed for the location problem under demand uncertainty.
2. The new non-linear formulation of the robust hub location problem under demand uncertainty is developed. The equivalent mixed integer linear program formulation of the proposed problem is developed, where the objective function consists of the network costs and the expected absolute deviation of transportation costs term to be minimized.
3. The new non-linear formulation of the robust hub location problem with profit maximization objective under demand and revenue uncertainties is developed. The equivalent mixed integer linear program formulation of the proposed problem is developed, where the objective consists of the the network's expected profit maximization, expected revenue lose and expected absolute revenue deviation minimization.
4. The proposed problems solution algorithms based on Benders decomposition in combination with different strengthened cuts selection strategies are developed, such Pareto-optimal, maximal nondominant and hybrid cuts generation strategies.

Theoretical and practical significance of the work consists of the new mathematical models for the robust hub network design under demand and revenue uncertainties, where two cases of objective functions are considered: total network

costs minimization and expected profit maximization, — and exact mathematical algorithms to solve these problems. The following programs are developed:

1. The software package for the statistical stability of hub number in the network estimation. The program has passed the state registration in the Federal service for intellectual property, patents and trademarks.
2. The software package of solution the optimization problem of robust hub location problem under demand uncertainty with objective function of expected costs and expected transportation costs absolute deviation minimization. The program has passed the state registration in the Federal service for intellectual property, patents and trademarks.
3. The software package of solution the optimization problem of robust hub location problem under demand and revenue uncertainties with objective function of network profit maximization, expected revenue lose and expected revenue absolute deviation minimization.

Methods and methodology, used in the dissertation, include methods from the optimization theory, risk theory, stochastic programming theory and revenue management theory as a part of operations research.

Thesis statements to be defended:

1. The statistical procedure of hub network reliability estimation under demand uncertainty (item 2 of the specialization 05.13.18).
2. Mathematical formulation of the robust hub location under demand uncertainty with objective function of expected costs and expected transportation costs deviations minimization (item 2 of the specialization 05.13.18).
3. Mathematical formulation of the robust hub location under demand and revenue uncertainty with objective function of profits maximization (item 2 of the specialization 05.13.18).

4. The effective exact algorithms to solve proposed robust hub location problems under uncertainties (item 4 of the specialization 05.13.18).
5. Software packages for conducting numerical experiments on modeling reliable hub networks and evaluating the effectiveness of the proposed algorithms (item 5 of the specialization 05.13.18).

Reliability and aprobaton. The main results of the dissertation were presented at the following conferences:

1. 20th International Conference on "Mathematical Modelling and Analysis", May 26–29, 2015, Sigulda, Latvia;
2. III International Conference "Stability and Control Processes" in memory of V. I. Zubov, 5–9 October 2015, Saint Petersburg, Russia;
3. XLIX Annual International Conference on "Control Processes and Stability", 2–5 April 2018, Petersburg, Russia;
4. XIV International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference), 30 May — 1 June 2018, Moscow, Russia;
5. L Annual International Conference on "Control Processes and Stability", 8–12 April 2019, Petersburg, Russia.

Publications. The main results on the topic of dissertation are presented in 10 printed works: 4 of which are the conference abstracts [1–4], 2 articles in the proceedings of the conference [5, 6], 1 article in proceeding of the conference indexed in the Scopus and Web of Science [7], 3 articles in journals indexed in Scopus and Web of Science [8–10]. Received a certificate of state registration of 2 computer programs [11, 12].

Personal contribution. The content of the dissertation and the main provisions submitted for defense reflect the personal contribution of the author to the

published works. Preparation for publication of the obtained results was carried out jointly with co-authors, and the contribution of the dissertation was decisive. All the results presented in the dissertation were obtained personally by the author.

Contents and structure of the dissertation. The thesis consists of introduction, literature review, four chapters, conclusion, glossary, bibliography, list of illustrations, list of tables, and appendices. The full volume of the dissertation is 95 pages, including 3 figures, 13 tables and 1 Appendix. The bibliography includes 70 titles on 8 pages.

Overview of the dissertation. The introduction reflects the relevance of the work, formulated the purpose and objectives of the study, justified the scientific novelty, the theoretical and practical significance of the work, formulated the provisions to be submitted for the thesis defense.

The first Chapter provides an overview of the literature on the topic of the study, describes the main directions of the theory of hub location and its problems, methods for problems solving, and discusses development trends and promising areas.

The second Chapter provides a statistical procedure for assessing the reliability of the number of hubs in the network under conditions of uncertainty in demand, and offers a criterion for selecting the most stable hub network based on the value at Risk — portfolio risk assessment method. The procedure consists of two stages: the statistical sample preparation of optimal hub networks obtained from random demand generation, and evaluation of statistical indices of the hub numbers stability. To increase the number of elements in a statistical sample, increasing its information content, bootstrap method is used to study the statistics of the distribution hub networks variability: the average value and standard deviation of the variety frequencies of the hub networks. The concept of the variety frequency of the hub network is introduced, which reflects the degree of difference between networks depending on random changes in demand. Sample statistics values are used for computing Value at Risk with confidence level α , which would correspond to a value of the variety

frequency of the number of hubs, which will not be exceeded with probability $1 - \alpha$. The criterion for choosing the most reliable number of hubs is Value at Risk with the minimum value.

This method is intended for assessing the reliability of the hub network and provides an opportunity to estimate the average value and variance of total costs, following the principles of the Sample Average Approximation algorithm.

In the third Chapter, the author proposes a nonlinear and equivalent linear mathematical formulation of the robust hub location problem with the objective function of total costs and expected absolute deviations of transportation costs minimization under demand uncertainty. The developed objective function of the hub location model provides minimization of the expected deviations of network transportation costs in the context of the demand scenario in a trade-off with minimization of expected network costs. It is assumed that the hub network is robust if transportation cost deviations in the context of demand scenarios are minimal. The degree of importance of robustness in comparison with the expected total costs is regulated by a weight factor.

Two algorithms for solving this problem are developed: the classical Benders decomposition algorithm and the Benders decomposition algorithm with Pareto-optimal optimality cut generation. The results of a numerical experiment based on well-known data the Civil Aeronautic Board and Australian Post presented in Operations Research Library, and the performance results of the proposed algorithms are discussed in comparison with standard methods for solving mixed integer programming problems.

In the fourth Chapter, the mathematical models of reliable hub location with the objective function of expected profit maximization, expected losses and expected deviations of the revenue minimization in conditions under demand and revenue uncertainties are considered. The non-linear and linear problems formulations are proposed for three cases: uncertain demand and deterministic revenue, uncertainty of both demand and revenue in total expected revenue deviations minimization

problem, revenue deviations minimization by directions. The robustness criterion used in the described formulations is widely studied in the problems of revenue management theory, but has not been previously considered in the location theory.

Four algorithms for solving this problems have been developed: the classical Benders decomposition algorithm, the Benders decomposition algorithm with Pareto-optimal optimality cuts, the Benders decomposition algorithm with maximal non-dominated optimality cuts, and the hybrid Benders decomposition algorithm with various types of strengthened cuts. The results of a computational experiment based on well-known data the Civil Aeronautic Board and Australian Post from Operations Research Library are presented, and the performance results of the proposed algorithms are discussed in comparison with standard methods for solving mixed integer programming problems.

The conclusion summarizes the results of the study and formulates the main findings.

Chapter 1

Literature review

In this Chapter, the author of the dissertation carried out a classification and review of the literature on the hub location problem. In particular, the Section 1.1 provides an overview of statements and variations of mathematical formulations of the problem. The Section 1.2 includes an overview of works where the Benders decomposition method was used to solve the hub location problem. The Section 1.3 discusses papers that explore various sources of uncertainty.

1.1. The hub location problem

The study of networks is of great importance for the such areas as freight and passenger transportation, telecommunication, postal services and rapid transit systems. The objects enumerated above can be presented as a set of nodes connected by edges. Meanwhile, a large amount of nodes are not connected with each other due to the physical limitations. That means that the several nodes have to be served using intermediate nodes with additional properties like consolidation and distribution possibility. The organization of special nodes as hubs, produces savings by consolidation and reduces the total operational cost to service processes. Hub location problem (HLP) is directed to determine hubs and network operation processes in a most efficient way.

The epoch of huge amount of works carrying out in HLP area has been started from the seminal works of O'Kelly [13, 14]. The initial stages of HLP theory are associated with problems formulation (p -hub median problems, capacitated/uncapacitated HLPs, single or multiple hubs location, allocation possibilities, etc.), general assumptions, introduction of rules (flows are allowed to go through hub facilities, hubs are facilities to be located, all commodities must be routed, discount factor, hubs network is a complete graph, etc.) which allow to classify networks design decisions.

The deep review of HLP progress is discussed by Campbell and O’Kelly [15], Farahani et. al. [16] and Contreras [17]. The latest works present modifications of the initial assumptions and characterize the new features intercalation adapted to real-world needs and problems complexity reduction. These approaches are based on achievements in discrete and computational mathematics.

The dissertation investigates the problem of hub location with the possibility of binding a node point to several hubs, depending on the direction of origin–destination O/D and unlimited capacity of hubs denoted Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location problem (UMAHLP) under demand uncertainty.

UMAHLP was first formulated in [18], where the number of p hubs is fixed (UMApHLP). In the future, this model was formulated as an integer programming problem [19] and [20], where the variables contain 4 indices. In [21] an alternative formulation with flows aggregation is proposed, which reduces the number of indices of variables to three. Some precise and heuristic approaches that improve the efficiency of solving the UMApHLP problem are considered in [21–23]. The results of the study the UMApHLP problem could be applied to the UMAHLP, where the number of hubs is not fixed, which are presented in the works [19, 21, 24–30]. Algorithms and methods to improve the efficiency of the UMApHLP solution can be applied to UMAHLP, which remains true in the opposite direction.

1.2. Benders decomposition

The solution approaches of UMAHLP in linear programming formulation are an additional area of problem research. There are wide range of applications the Benders decomposition [31] (BD) algorithm to solution the UMAHLP, which demonstrates a significant improvements in solving efficiency.

The first work presenting the application of the Benders decomposition to the solution of the UMAHLP problem is [32]. The authors of [32] discussed three types of the decomposition algorithms of UMAHLP: basic BD approach, where the one

cut is added on each Benders iteration; multiple cut generation, where the set of cuts corresponding to O/D are generated on each iteration; ϵ -optimal cuts, where sub-optimal solution of the auxiliary problem is used for cut generation.

Contreras et. al. [30] presented the BD improvements in application to UMAHLP, where the Pareto-optimal cuts and heuristics are developed. In addition, the work [33] proposes additional heuristics to improve BD in relation to the hub location problem, where hubs are represented by an incomplete graph. The number of BD cuts on each iteration is represented by a set of variants, the choice of non-dominant or Pareto-optimal cuts allows to reduce the number of iterations due to the quality of the cuts. The construction of improved cuts can be carried out by means of special points called Magnanti and Wong points [34], which can be used, according to [35] to find the Pareto-optimal BD cuts. The Benders decomposition is used in another variations of the hub location problem, for example, [33, 36–39].

1.3. Hub location problem under uncertainty

This dissertation considers the poorly known area of hub location problem — the network design under uncertainty and finding the robust solution. There exists different sources of uncertainties: in demand, in operations time, in costs, in capacity of the arcs and hubs and etc. The air transportation network, where hub capacities are modeled by M/D/c model from queuing theory is considered in [40]. Thus, the condition is simulated that the queue limit will not be exceeded with a certain probability. This condition is converted into a limitation of the hub capacity.

The demand uncertainty in the HLP in relation to air freight and flight routing is presented in [41]. The authors propose the two stage stochastic formulation of the problem, where in the first stage the hub location problem is solved and the second stage is the flow routing problem for different scenarios of demand. A comparative analysis was carried out between the deterministic case of the demand (for each scenario separately with further averaging of the results) and the proposed stochastic

formulation; the result showed that the introduction of uncertainty into the model leads to better results.

Sim et. al. [42] describes the stochastic HLP under travel time uncertainty, which is modeled by the normal distribution. The service level constraints are added into the mathematical formulation of the problem.

The investigation of stochastic UMAHLP under demand and transportation cost uncertainties is presented in [43]. The authors showed that the stochasticity of demand can be formulated as a deterministic problem of integer linear programming, where random variables are replaced by the mathematical expectation of the demand. The uncertainty in the transportation cost do not allows the similar replacements, therefore, the sample average approximation (SAA) algorithm is used to solve the stochastic problem.

In the work Alumur et. al. [44] the two sources of uncertainty for UMAHLP is considered: demand uncertainty and hub installation cost uncertainty. The authors assume that there is no information about the probability distribution of the hubs installation cost and propose a minmax regret formulation. The demand uncertainty is modeled as a stochastic linear problem. A combined minimax stochastic formulation of the problem is proposed for simultaneous consideration of both sources of uncertainty.

Shahabi and Unnikrishnan [45] study the UMAHLP under demand uncertainty, where the uncertainty is modeled by the ellipsoid. The authors propose an integer quadratic formulation of the problem and its relaxed linear formulation. Based on the results of the experiment, the authors concluded that a large number of hubs in the network reduces the impact of demand uncertainty on the cost function.

The robust formulation of UMAPHLP under demand uncertainty as the polyhedron (hose demand) is presented in [46]. There are considered two types of uncertainty representation: hose and hybrid. The hose model assumes that there is only an upper limit on the total outbound and inbound flows of a node, while the hybrid model implies both upper and lower limitation of total demand. The authors

applied the minimax concept to robust formulation based on cost function minimization. Two algorithms for solving the problem based on BD are applied. The result extension for the case of the CMApHLP problem, where the number of hubs is fixed and their bandwidth is limited, are discussed.

A study by Zetin et. al. of uncertainty in demand and transportation cost in the UMApHLP problem is presented in [47], where is introduced the "budget" of uncertainty in order to control the level of conservatism in the mathematical formulation. The authors developed an algorithm of branches and cuts to solve the formulated problem.

In [39] a robust UMAHLP is presented, taking into account uncertainty in demand and in transportation cost, where the hub network is not complete. An algorithm for solving the problem based on BD is proposed.

One of the latest work in the field of robust hub location is [48], where uncertainty in demand as polyhedron is considered. Three variants of uncertainty modeling are introduced and a metaheuristic method is used for the solution of the problem — tabu search.

1.4. Hub location problem with profits

There are not so many studies in the literature devoted to the HLP with the objective function of profit maximization. The feature of HLP with profits is the ability to serve the profitable directions O/D and the full demand satisfactory condition is eliminated.

The competitive HLP between several firms is one of the subareas of HLP, where firms compete for the demand.

Various objective functions are considered: for example, the function of maximizing the captured demand, maximizing the total profit. Examples of the works, which considers the competitive HLP are [49–52]. In addition, there are several studies of competitive HLP in the game theory terms [53, 54].

The current study considers only one firm without a competitive environment whose goal is to maximize profits. The paper [55] introduces the HLP with the objective function of profit maximization. The problem consist of the hubs location, decide which arcs to activate, choose directions for servicing and routing flows in order to maximize overall profits. The authors consider the possibility of connecting one node to several hubs and assume that the route runs through one or two hubs, i. e. the route passes through a maximum of three arcs. The authors describe the exact algorithm for solving the problem in [56]. They use the Lagrange multiplier method in the branch and bound algorithm to solve the problem.

The [57] study examines all possible node-to-hub connections in HLP with profits: multiple allocation, single allocation and r -allocation. The paper also considers the case when direct connections between O/D are allowed. In addition, according to the best author of this dissertation knowledge, the only work that addresses uncertainty in the problem of HLP with profits is [58].

Chapter 2

The hub network reliability estimation under demand uncertainty

This Chapter discusses a heuristic approach to evaluate the network reliability that is based on the statistical modeling procedures. The Section 2.1 introduces the mathematical formulation of UMApHLP as a linear programming problem. The Section 2.2 contains a description of the perturbation algorithm and data preparation procedure. The Section 2.3 provides an stability level measure of the hub network and a criterion for selecting the number of hubs. The results of the numerical experiment on real data are presented in the Section 2.4.

2.1. Mathematical formulation of UMApHLP

This section describes the formulation of uncapacitated multiple allocation hub location problem. The main assumptions for model construction is used: the hub network is a complete graph; the direct connection between non-hub nodes is prohibited; the demand should be satisfied; the consolidation, transshipment and distribution operations are allowed only on the hub units. There exists several formulations of UMApHLP for deterministic demand, the formulation [59] with four index variables is chosen as a basis for the hub network reliability estimation procedure. Note, that the results of this chapter are not limited to this model and can be extended to other formulations of HLP (Hub Location Problem).

The problem formulation uses the following notation: $N = \{1, \dots, n\}$ is a set of the network nodes, the set of potential hubs is denoted as $K \subset N$, the distance between $i, j \in N$ is d_{ij} , the a_k is hub installation cost at node $k \in K$; the transshipment, consolidation and distribution costs of one unit flow for a unit distance is denoted by α , χ and δ respectively; w_{ij} is a flow, направленный от

отправителя from the origin $i \in N$ to the destination $j \in N$ (demand by direction). The routes are constructed through at least one and at most two hubs, therefore, the unit flow transportation on the route could be stated as $c_{ijkm} = \chi d_{ik} + \alpha d_{km} + \delta d_{mj}$, where $i, j \in N$ is O-D and routed through hubs $k, m \in K$, the p is the number of hubs for obligate installation. In such formulation, the problem always has a solution.

The mathematical formulation of UMAPhLP is stated as follows:

$$\min \sum_{k \in K} a_k y_k + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm} \quad (2.1)$$

$$S.t. \quad \sum_{m \in K, m \neq k} x_{ijmk} + \sum_{m \in K} x_{ijkm} \leq w_{ij} y_k, \quad i, j \in N, k \in K, \quad (2.2)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{m \in K} x_{ijkm} = w_{ij}, \quad i, j \in N, \quad (2.3)$$

$$\sum_{k \in K} y_k = p, \quad (2.4)$$

$$x_{ijkm} \geq 0, \quad i, j \in N, k, m \in K, \quad (2.5)$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \quad k \in K, \quad (2.6)$$

where y_k is a binary variable, which is equals to 1 if node $k \in K$ is set to be a hub and 0 otherwise, the continuous variable x_{ijkm} is a flow from $i \in N$ to $j \in N$ routed through the hubs $k, m \in K$.

The objective function (2.1) represents the hub installation costs and transportation costs to be minimized. The inequalities (2.2) ensure the flow routing through selected hubs, the constraints (2.3) are demand satisfactory conditions, the constraint (2.4) enforces the p hubs selection.

The problem formulation (2.1) – (2.6) is used as a basis for description of the procedure for the hub network stability assessing under uncertainty in demand.

Let the problem (2.1) – (2.6) is denoted as $G(W, p)$, which depends on the demand matrix W and the amount of hubs p , where function value is a vector of optimal hubs to be located in the network $G(W, p) = (y_1, \dots, y_{|K|})$. Note, that the another parameters of the problem (2.1) – (2.6) are fixed.

2.2. The data preparation procedure

This section presents an algorithm for the reliability estimation of the number of p hubs in the UMApHLP problem under demand uncertainty, based on the statistical modeling procedures. The proposed algorithm does not depend on the method of specifying demand uncertainty (discrete set of scenarios, continuous distribution, etc.), as it is based on statistical simulations.

Let the demand uncertainty is modeled by the random distribution $F_\xi(X)$, where ξ is a random matrix, the dimension of which coincides with the dimension of the demand matrix W . W^r is the result of random generation of the demand matrix from $F_\xi(X)$, where $r \in \{1, \dots, R\}$ is the iteration number, the R the total amount of iterations.

In the Section 2.1 the function $G(W, p)$ is introduced, which takes the values of the vector of optimal hubs to placement based on the demand matrix W and number of hubs in the network p . Let W^{r_1} and W^{r_2} are the demand matrices from different iterations, when $G(W^{r_1}, p)$ and $G(W^{r_2}, p)$ are the two UMApHLP solutions under the same restrictions, but different demand matrices.

Definition 2.1: the hub network $G(W, p)$ is robust in respect to the demand uncertainty, which is modeled by random distribution $F_\xi(X)$, if $G(W^{r_1}, p) = G(W^{r_2}, p) \quad \forall W^{r_1}, W^{r_2}$.

The definition of robust hub network also is the main assumption in assessing the level of reliability. The algorithm for assessing the stability of the hub network is

based on the multiple calculation of the function values $G(W^r, p)$ for $r \in \{1, \dots, R\}$, $p \in \{p_{\min}, \dots, p_{\max}\}$ and comparison of hub networks for each p on a random subset of possible demand matrices $\{W^r\}_{r=1}^R$. The use of a random subset of all possible demand matrices is not new in the HLP, a similar procedure is used by the SAA method (Sample Average Approximation), for example in [43, 58].

Definition 2.2: the hub network $G(W, p)$ is statistically robust with respect to the demand uncertainty modeled by set of scenarios $\{W^r\}_{r=1}^R$ if $G(W^{r_1}, p) = G(W^{r_2}, p) \quad \forall W^{r_1}, W^{r_2} \in \{W^r\}_{r=1}^R$.

The statistically robust hub network definition is rough, Определение статистической устойчивости сети хабов является грубым, since the presence of at least one case of hub networks divergence at different iterations for a fixed p leads to instability of the network. Therefore, we introduce the concept of the robustness level:

Definition 2.3: the robustness level of the hub network is the mean of similarity between hub networks on a set $\{W^r\}_{r=1}^R$.

The hub network robustness level calculation assumes the solution of the optimization problems $G(W^r, p)$ for $r \in \{1, \dots, R\}$, the selection of the results comparison function and the procedure for averaging the results into a single index.

Let us introduce a function to compare hub networks with the same p :

$$d(G(W^{r_1}, p), G(W^{r_2}, p)) = \sum_{k \in K} (y_k^{r_1} \neq y_k^{r_2}) \quad (2.7)$$

In the current dissertation the following algorithm of hub network robustness measure. Let $p \in \{p_{\min}, \dots, p_{\max}\}$ is a set of hub numbers in the network to be considered, when the algorithm is stated as follows:

Initialization: $W, p_{\min}, p_{\max}, \{T_p = \emptyset\}_{p=p_{\min}}^{p_{\max}}$

Functions: $G(W, p), d(G(W^{r_1}, p), G(W^{r_2}, p))$

For p in $\{p_{\min}, \dots, p_{\max}\}$ **do**

For r in $\{1, \dots, R\}$ **do**

Generate W^r

Optimize $G(W^r, p)$

For r_1, r_2 in $\{1, \dots, R\}$ **do**

$$t_{pr_1r_2} = d(G(W^{r_1}, p), G(W^{r_2}, p))$$

$$T_p = T_p \cup \{t_{pr_1r_2}\}$$

$$\nu_p = \frac{1}{R^2 - R} \sum_{t \in T_p} t$$

For l in $\{1, \dots, L\}$ **do**

Generate set T_p^l by the choice

of $R^2 - R$ elements with repetition from T_p

$$\nu_p^l = \frac{1}{R^2 - R} \sum_{t \in T_p^l} t$$

The L denotes the number of iteration in bootstrap algorithm. The result of the algorithm is the variation frequencies in optimal networks ν_p^l . The statistics of the variations $\forall p \in \{p_{\min}, \dots, p_{\max}\}$ are calculated by formulas: $N_p = \frac{\nu_p + \sum_{l=1}^L \nu_p^l}{L+1}$ is the sample average value of variety level for p -hubs, $S_p^2 = \frac{(\nu_p - N_p)^2 + \sum_{l=1}^L (\nu_p^l - N_p)^2}{L}$ is unbiased sample variance.

2.3. The hub number robustness measure, the reliability criterion

It is proposed to estimate the level of robustness of the hub network on the basis of the Value at Risk (VaR) criterion [60] from risk theory.

Let η is a random value of the hub network variety frequency with distribution function $F_\eta(z)$. When VaR of η at level $\alpha \in (0, 1)$ is the greatest value v , such as $P(\eta > v) = \alpha$, i. e VaR of random variety frequency η is a value, which η will not exceed with the probability $1 - \alpha$.

In relation to the assessment of the robustness level for the hub network, VaR is used as a hub variety index, which will not be exceeded with the probability $1 - \alpha$.

The cumulative distribution function $F_{\eta_p}(z)$ construction for each hub number p is proposed on the basis of the set $\{\nu_p^l\}_{l=1}^L$ and sample statistics N_p and S_p^2 .

Let η_p the random value of variety level for ν_p with cumulative distribution function $F_{\eta_p}(z)$ for hub number p , then the robustness level is calculated by formula:

$$VaR_p = \sup\{z \in R : F_{\eta_p}(z) \leq 1 - \alpha\},$$

whereupon, the formal description of the criterion of a robust number of hubs will be stated in the following form:

$$p_{stab} = \arg \min_{p \in [p_{\min}, p_{\max}]} (\sup\{z \in R : F_{\eta_p}(z) \leq 1 - \alpha\}),$$

that is the most robust number of hubs has minimal value of the robustness level with probability $(1 - \alpha)$ on the interval $[p_{\min}, p_{\max}]$. Here, R is the real number set.

Let's consider the special case, where η_p is from normal distribution, then VaR is stated as:

$$P(z > N_p + u_\alpha S_p) = \alpha, \quad (2.8)$$

where the parameters of the normal distribution are substituted by sample parameters (statistical estimates, in the absence of parameters of the population), u_α is the α -quantile of the standard normal distribution. Consider the following sequence of (2.8) transformations:

$$P(z > N_p + u_\alpha S_p) = 1 - P(z \leq N_p + u_\alpha S_p) = \alpha,$$

$$P(z \leq N_p + u_\alpha S_p) = 1 - \alpha,$$

$$P(z \leq N_p - u_{1-\alpha} S_p) = 1 - \alpha.$$

Taking into account the normality of the distribution of robustness levels, the criterion can be reformulated as follows:

$$p_{stab} = \arg \min_{p \in [p_{\min}, p_{\max}]} (N_p - u_{1-\alpha} S_p), \quad (2.9)$$

where VaR_p value or robustness level is defined as:

$$VaR_p = N_p - u_{1-\alpha} S_p. \quad (2.10)$$

The criterion proposed in this section for choosing a robust number of hubs evaluates the robustness level of the hub network with a level $1 - \alpha$ and the lowest VaR value is associated with the best solution. The value of VaR in the described criterion is called the robustness index. To assess the risks of network changes on the level of robustness η_k it is possible to use other criteria from the risk theory: Var [61], EVaR [62], DaR, CDaR.

2.4. Computational study

The UMApHLP model (2.1) – (2.6) is considered as the hub location-allocation model. The GUROBI Optimizer 7.0.1¹ solver is applied for MIP to calculate the hub sets to be choose on each iteration with precision $GAP < 4 \%$ in time saving goal, the average models optimization time is 178 seconds. The results were obtained with Intel Core i5 2.7GHz processor and 8GB RAM.

The experiment was carried out on the dataset granted by Ltd. “Delovye linii”. The data consist of the set of terminals coordinates (178 terminals), the set of possible hub locations (10 potential hubs), the costs of hub construction and transportation costs depend on the direction. The distances between hubs and terminal-hubs were calculated in seconds (driving time by car without traffic jams consideration) using Google Maps Distance Matrix API².

In this example we have considered the hub quantities from 6 to 9 ($p_{min} = 6$, $p_{max} = 9$), the repetitions amount for each hubs quantity in the problem were equal to 40 (in total case there were $4 \cdot (40 + 1) = 164$ simulations), the MIP sizes on each iteration were 19 680 variables (17 890 continuous, 1 790 binary) and 21

¹ <http://www.gurobi.com/>

² <https://developers.google.com/maps/documentation/distance-matrix/>

539 constraints, during the presolve stage in optimization process were removed 90 continuous variables.

The flows perturbation were generated by Truncated Normal Distribution with the mean equal to 30 and standard deviation equal to 80 with the same distribution for each direction of flow.

The first part of the algorithm results are presented in the Table 2.1, where are presented the variety frequencies for each hub number p .

p	6	7	8	9
ν	0.875	0.0	0.1	0.625

Table 2.1. Variety frequencies for each hub number

p	6	7	8	9
\bar{N}	0.87435	0.0	0.10428	0.62343
S^2	0.00265	0.0	0.00245	0.00556
VaR	0.791	0.0	0.014	0.504

Table 2.2. Value at risk for each hub number

There are generations of samples in the second part of the algorithm where by using bootstrapping procedures there are produced the 999 variety frequencies for each hub number p . The variety frequencies are calculated by using random choice of 40 rows with repetition from T_p and the variety frequencies for ν_p^l are estimated. The \bar{N}_p , S_p^2 and value at risk VaR_p with $\alpha = 0.05$ for each sample are presented on the Table 2.2. The study case has an obvious result $p = 7$ where the network of hubs do not get the changes on perturbed data. This is assumed to be the best solution in the proposed concept. The hub number equals to 8 has close results to 0 and could be interpreted as robust. The considered ν_p have a large difference and there is no problem to choose the minimal, but in the cases when the ν_p is close to

each other the second criteria should be applied (for example minimal total costs or maximal revenue).

The results shows that the hub numbers 6 and 9 contains competitive hub locations in the network and the hub numbers 7 and 8 don't contains significant network changes amount. This can be interpreted as settlement of a dispute, where the competitive hub is added in the network or another hub addition resolve the competitive hub dispute.

Note that the results do not take into account the difference in the objective functions, but estimate the probability of changing the optimal network. The use of the criterion is appropriate in the conditions of the existing network in order to develop a strategy to change the network to a more robust one.

Chapter 3

Robust uncapacitated multiple allocation hub location problem under demand uncertainty: minimization of cost deviations

In this chapter of the dissertation the stochastic formulation of UMAHLP under demand uncertainty is stated in the Section 3.1. The robust conception of UMAHLP and mathematical problem formulation are in the Section 3.2 and an alternative linear problem formulation is described in the Section 3.3. In the Section 3.4 and the Section 3.5 basic and improved Benders decomposition algorithms are presented. The results of computational experiment on the CAB and AP data are illustrated in the Section 3.6.

3.1. Stochastic formulation of UMAHLP

The basic notation and equations of mathematical formulation of UMAHLP (2.1) – (2.3), (2.5), (2.6) are introduced in the Section 2.1, which will be used in current chapter of the work. This section describes the stochastic formulation of the problem under demand uncertainty.

The demand uncertainty is modeled by the set of scenarios $S = \{1, \dots, f\}$, where f is a number of considered scenarios. Each scenario reflects the possible demand in the network with corresponding probability p_s for $s \in S$, where w_{ij}^s is the demand volume under scenario s with origin $i \in N$ and destination $j \in N$.

Uncertainty representation via the set of scenarios with the certain realization probability is intended to emphasize the most realistic situations according to experts opinion, which have the greatest impact on the decision-making process. The normalized weights of the scenarios influence degree are characterized by the probabilities of their occurrence, and it is assumed, that $\sum_{s \in S} p_s = 1$.

Let denote the flow routed from origin $i \in N$ to destination node $j \in N$ via hubs $k, m \in K$ in scenario $s \in S$ as a continuous variable x_{ijkm}^s , then the stochastic problem of UMAHLP is stated as follows:

$$\mathbf{min} \quad \sum_{k \in K} a_k y_k + \sum_{s \in S} p_s \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s \quad (3.1)$$

$$S.t. \quad \sum_{m \in K, m \neq k} x_{ijmk}^s + \sum_{m \in K} x_{ijkm}^s \leq w_{ij}^s y_k \quad i, j \in N, k \in K, s \in S \quad (3.2)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{m \in K} x_{ijkm}^s = w_{ij}^s \quad i, j \in N, s \in S \quad (3.3)$$

$$x_{ijkm}^s \geq 0 \quad i, j \in N, k, m \in K, s \in S \quad (3.4)$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \quad k \in K, \quad (3.5)$$

The objective function (2.1) represents the total costs to be minimized: hub installation costs and expected transportation costs. Constraints (3.2) and (3.3) corresponds to deterministic case of the problem described in Section 2.1 to constraints (2.2) and (2.3) for each scenario $s \in S$. Finally, (3.4) and (3.5) are domain constraints. The stochastic formulation (3.1) – (3.5) is used as a referent model.

3.2. Robust concept of UMAHLP

In this section the methodological concept of a robust hub network design is described. The expected transportation costs do not make the influence on the hub robustness evaluation, since it is the "optimal mean" between scenarios. The main feature of new approach is an inclusion of the absolute deviation between expected solution and every scenario into the objective function of stochastic HLP. This addend serves as a measure of transportation cost equalization on scenario set.

The peculiarity of proposed concept is the trade-off between expected transportation costs minimization and their deviation minimization in the scenarios context. The resulting hub network quantifies the lowest reliable upper bound on transportation costs for different scenarios.

The hub network for different demand scenarios quantify the lowest reliable upper bound of transportation costs and provides an opportunity to reduce them by node-hub re-allocation on separate scenario and estimated hub network. The node-hub re-binding is postponed to the later planning levels when the demand scenario becomes clear. The hub location in proposed robust HLP formulation reduces the transportation costs fluctuations among the demand scenarios and provides the reliable solution. To the best of authors knowledge, the transportation costs equalization approach under the scenarios in hub location problem was not considered before.

The new robust HLP concept is based on the UMAHLP case with stochastic demand as uncertainty source. The introduced problem formulation averages the weighted absolute differences among considered scenarios and thereby assures the resistance to expected changes in the demand. Thus, hubs location result is substantial for strategic planning. Thereby, the stochastic formulation of the problem to find a robust solution is given as:

$$\begin{aligned}
\mathbf{min} \quad & \sum_{k \in K} a_k y_k + \sum_{s \in S} p_s \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s \\
& + \lambda \sum_{s \in S} p_s \left| \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s - \sum_{s' \in S} p_{s'} \left(\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^{s'} \right) \right|
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$S.t. \quad (3.2) - (3.5)$$

We propose the stochastic programming model where the robust hub location remains "close" to optimal for each scenario $s \in S$. The problem is abbreviated as StHLPAD that means Stochastic Hub Location Problem with Absolute Deviation.

The first term in (3.6) represents the hub setup costs, the second addend in the goal function is the expected transportation costs, the third addend is the weighted mean absolute deviation of the transportation costs. The parameter λ can be regarded as risk trade-off factor between expected costs and deviation.

3.3. Linear formulation of the problem

The proposed formulation of the robust hub location problem (3.2) – (3.6) contains absolute value function in objective, therefore, the problem belongs to the class of nonlinear programming problems. Let us introduce an alternative linear formulation of the problem:

$$\mathbf{min} \quad \sum_{k \in K} a_k y_k + \sum_{s \in S} p_s \left[\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s + 2\lambda z^s \right] \quad (3.7)$$

$$S.t. \quad (3.2) - (3.5)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s - \\ & \sum_{s' \in S} p_{s'} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^{s'} + z^s \geq 0 \quad \forall s \in S \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$z^s \geq 0, \forall s \in S, \quad (3.9)$$

where z^s is an absolute value linearization auxiliary non-negative continuous variable for any scenario $s \in S$.

The objective function (3.7) in conjunction with constraints (3.8) and (3.9) are equivalent to expression (3.6).

Theorem 3.3.1: Problem formulations (3.2) – (3.5), (3.7) and (3.2) – (3.6) are equivalent.

Proof. Let show, that (3.7), (3.8) and (3.9) are equivalent to (3.6). Without loss of generality, let remove equal addends from (3.7) and (3.6), besides, let add to (3.7) the following expression:

$$\lambda \sum_{s \in S} p_s \left(\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s - \sum_{s' \in S} p_{s'} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^{s'} \right). \quad (3.10)$$

This procedure of addition is justified, because of $\sum_{s \in S} p_s = 1$ what ensures equality of (3.10) to 0.

It must be shown that

$$\begin{aligned} \mathbf{min} \quad & \lambda \sum_{s \in S} p_s \left(\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s - \right. \\ & \left. \sum_{s' \in S} p_{s'} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^{s'} + 2z^s \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$S.t. \quad (3.8), (3.9),$$

is equivalent to the problem

$$\begin{aligned} \mathbf{min} \quad & \lambda \sum_{s \in S} p_s \left| \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s - \right. \\ & \left. \sum_{s' \in S} p_{s'} \left(\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^{s'} \right) \right|. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Let show that the identity holds for the corresponding terms fixed by $s \in S$.

The coefficient of variable z^s in the objective function (3.11) is positive, the minimization process will tends to assign the minimum possible value to the variable. Note, that subjection to constraints (3.8), (3.9) gives the minimal possible value

$$z_{\min}^s = \min(0, \sum_{s' \in S} p_{s'} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^{s'} - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s). \quad (3.13)$$

If the condition holds

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s - \sum_{s' \in S} p_{s'} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^{s'} \geq 0, \quad (3.14)$$

when from (3.8) and (3.9) the optimal value of variable z^s is equal to 0, since it is the admissible and smallest.

If the inequality (3.14) does not hold, when the smallest value of $z^s > 0$, but the objective function (3.11) for the fixed scenario $s \in S$ takes the opposite sign. Thus, this problem implements an absolute value function of the difference. Without loss of generality, the result can be extended to the sum of scenarios.

Got, that linear formulation (3.8), (3.9), (3.11) is equivalent to nonlinear problem (3.12). **Proven.**

Note, that problem (3.2) – (3.5), (3.7) – (3.9) can be solved by standard linear programming methods, while methods for solving the nonlinear programming problem are inferior in performance and predictability of convergence to the optimal solution.

Proposed formulation of robust hub location problem StHLPAD differs from stochastic formulation described in Section 3.1 for $|S|$ variables and $|2S|$ constraints.

The following two sections present the optimization approaches of the linear problem (3.2) – (3.5), (3.7) – (3.9) based on Benders decomposition algorithms.

3.4. Benders decomposition

The Section 1.2 of literature review describes the solution approaches of HLP based on Benders decomposition. The Benders decomposition method is the procedure of partitioning linear and nonlinear integer programming problems with a stair-case matrix structure introduced by Benders in 1962 [31]. The partitioning method relies on projections usage in combination with dual problem and relaxation stages. The new smaller subproblems as original problem splitting result are Slave Problem (SP) and Master Problem (MP).

The mathematical formulation proposed in previous section (3.2) – (3.5), (3.7) – (3.9) could be represented as two-stage optimization problem, where first stage problem considers integer variables (hub location variables y_k) and continuous variables belongs to second stage problem (flows x_{ijkm} , transportation costs deviation z^s). The formulation of two-stage HLP is stated as follows:

$$\mathbf{min} \quad \sum_{k \in K} a_k y_k + M \quad (3.15)$$

$$S.t. \quad (3.5)$$

$$M \geq Q(y), \quad (3.16)$$

$$M \geq 0, \quad (3.17)$$

where the constraint (3.16) is not an explicit inequality, but represents an second stage optimization problem. The mathematical formulation of $Q(y)$ is following:

$$\mathbf{min} \quad \sum_{s \in S} p_s \left[\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm}^s + 2\lambda z^s \right] \quad (3.18)$$

$$S.t. \quad (3.2) - (3.4), (3.8) - (3.9)$$

The main idea of the Benders decomposition is the constraint (3.16) relaxation and replacement by approximation called cut, which will be added during the iterations in the problem solution process. There are two types of cuts in the Benders decomposition algorithm: optimality cuts is generated to evaluate the optimal value of the objective function of the second stage problem; feasibility cuts is used to remove feasible variable values in the first stage problem, which makes the second stage model infeasible.

If optimal solution of MP do not takes any hubs, than SP problem will be infeasible due to following restriction: demand should be fully satisfied and the direct connection origin – destination are prohibited. The addition of auxiliary equation to MP eliminates such situation:

$$\sum_{k \in K} y_k \geq 1. \quad (3.19)$$

The inequality (3.19) addition to MP takes off the feasibility cuts necessity.

The Benders decomposition uses the dual problem of SP. Let us formulate the dual SP problem (DSP) for the fixed iteration and MP problem solution ($y = y^{(h)}$):

$$\mathbf{max} \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^s - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^s w_{ij}^s y_k^{(h)} \quad (3.20)$$

$$S.t. \quad e_s \leq 2\lambda p_s \quad s \in S \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} c_{ijkm} e_s - p_s c_{ijkm} \sum_{s \in S} e_s + v_{ij}^s - u_{ijk}^s - u_{ijm}^s \\ \leq c_{ijkm} p_s \quad i, j \in N, k \neq m, k, m \in K, s \in S \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$c_{ijkk} e_s - p_s c_{ijkk} \sum_{s \in S} e_s + v_{ij}^s - u_{ijk}^s \leq c_{ijkk} p_s \quad i, j \in N, k \in K, s \in S \quad (3.23)$$

$$e_s \geq 0 \quad s \in S \quad (3.24)$$

$$v_{ij}^s \in R \quad i, j \in N, s \in S \quad (3.25)$$

$$u_{ijk}^s \geq 0 \quad i, j \in N, k \in K, s \in S, \quad (3.26)$$

where dual variables u_{ijk}^s , v_{ij}^s , e^s are associated with constraints (3.2), (3.3), (3.8). Let $M^{(h)}$ is the optimal objective function value (3.20) under constraints (3.21) – (3.26) on the iteration h , but M^* is the final optimal objective function value of DSP, i. e. condition $M^{(h)} \leq M^*$ holds for each iteration h based on the duality theorem. Let U is a set of all extreme points which belongs to the polyhedron described by (3.21) – (3.26), when the DSP can be reformulated as follows:

$$\min_{M \geq 0} \{M : M \geq M^{(h)}, \forall (u^{(h)}, v^{(h)}, e^{(h)}) \in U\},$$

where $(u^{(h)}, v^{(h)}, e^{(h)})$ is a vector of dual variables values (point belongs to U) and

$$M^{(h)} = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^{s(h)} - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^{s(h)} w_{ij}^s y_k. \quad (3.27)$$

The introduced formulation of DSP on the basis of the extreme points of DSP feasibility polyhedron allows to replace the right part of the constraint (3.16) with (3.27), which leads to the following formulation of MP:

$$\min \sum_{k \in K} a_k y_k + M \quad (3.28)$$

$$S.t. \quad M \geq \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^{s(h)} - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^{s(h)} w_{ij}^s y_k, \quad (u^{(h)}, v^{(h)}, e^{(h)}) \in U \quad (3.29)$$

$$M \geq 0, \quad (3.30)$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \quad k \in K. \quad (3.31)$$

Note, that new formulation contains large amount of constraints (3.29), but not all of these constraints are necessary to achieve the optimal value of the objective function (3.28), this is used in Benders decomposition. The addition of the constraints (3.29) on iterations allows to consider the subset $U^{(h)} \subset U$, which is extended by optimal DSP values on iteration h by solving the problem (3.20)–(3.26). Considered subset $U^{(h)}$ instead U leads to a relaxation of the MP, equality (3.28) is called Benders cut and it represents the lower bound of the optimal solution of MP.

The iterations procedure consist of the following stages: solve MP and derive the $y^{(h)}$, solve the DSP^(h) and derive the $u_{ijk}^{s(v)}$, $v_{ij}^{s(v)}$, $e^{s(v)}$, add new point to $U^{(h)}$, Benders cut generation. Note, that upper bound of MP on iteration h is obtained by adding the optimal value of the objective function DSP^(h) and the total hub installation cost from MP^(h). The Benders decomposition scheme of the problem (3.2) – (3.5), (3.7) – (3.9) is presented in Appendix A.1.

3.5. Accelerated Benders decomposition algorithm

The Benders decomposition algorithm's efficiency depends on the number of iterations to reach the stop criterion, especially, it depends on the dual problem variables, i.e. the dual SP usually has several optimal solutions which derive the same optimal objective function. However, it has an effect on cuts quality and convergence. One of the first methods to accelerate the decomposition is the study of Magnanti and Wong [34], in which a procedure for generating Pareto-optimal (PO) cuts is proposed to enhance the Benders optimality cuts. The construction of PO cuts is based on the use of points lying inside the convex hull of the polyhedron formed by the admissible values of the variables of the MP problem. The procedure of finding such points and updating them on iterations are the main problem of PO cuts in a practical sense.

Papadakos [35] notes that the Magnanti and Wong approach can lead to a loss of solution search efficiency due to simultaneous optimization DSP and PO cuts finding. The author proposes an alternative algorithm for finding and construction PO cuts, where the DSP and finding a non-dominant cut in the sense of Pareto-optimality are divided into two independent subproblems. In addition, the author shows that instead of core points from the convex hull of admissible solutions MP, so-called Magnanti and Wong points can be used, which are represented as a convex combination of core points and admissible solution of MP. Hereinafter, the approach from [35] will be used to obtain Pareto-optimal cuts.

Let $y^{(h)}$ is the optimal solution of MP on iteration h and the $U^{(h)}$ is a set of all extreme points of DSP for $y = y^{(h)}$, then the condition for the non-dominated solution $u_{ijk}^{s*}, v_{ij}^{s*}, e^{s*}$ of DSP is following:

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^{s*} - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^{s*} w_{ij}^s y_k^{(h)} \\ & \leq \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^s - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^s w_{ij}^s y_k^{(h)}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\forall (u^{(h)}, v^{(h)}, e^{(h)}) \in U^{(h)}.$$

The authors of work [34] showed that the non-dominated solution of the DSP problem can be obtained by the means of points from the convex hull of MP. Let the interior point of the convex hull $Conv(Y)$ of MP is denoted as \hat{y} , where Y is a feasible solutions set of MP. In the work [34] there is proven, if the cut is constructed on the base of the optimal dual variables values of DSP on iteration with $y = \hat{y}$ from $Conv(Y)$, then such cut is non-dominant for each feasible solution of DSP. Thereby, the non-dominant cut generation can be regarded to the DSP with following objective function:

$$\max \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^s - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^s w_{ij}^s \hat{y}_k, \quad (3.33)$$

$$S.t. \quad (3.21) - (3.26)$$

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^s - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^s w_{ij}^s y_k^{(h)} = \phi_{DSP}(e, u, v). \quad (3.34)$$

where the variables belong to the extreme points set of DSP for fixed $y = y^{(h)}$, i. e. $(u, v, e) \in U^{(h)}$. The value $\phi_{DSP}(e, u, v)$ corresponds to the optimal value (3.20) of the DSP on iteration h . The alternative DSP formulation result in the strong cuts production, but can lead to loss of efficiency on solution convergence and processor time of problem optimization. Also, each iteration requires new \hat{y} , which in a practical sense is difficult to find.

One of the options for solving these problems is used in this dissertation. Following the algorithm from [35], the problem (3.21) – (3.26), (3.33), (3.34) is divided into 2 consecutive independent subproblems, where one of them is a DSP of the form (3.20) – (3.26) and the second problem is (3.21) – (3.26), (3.33).

Each of these subproblems can be used to generate a cuts: the standard Benders optimality cuts and the PO cuts. The solution of two problems for generating

a pair of cuts on each iteration was proposed in [34]. But Papadakos in [35] proved that points \hat{y} updating on each iteration of the algorithm allows to solve the problem (3.21) – (3.26), (3.33) without the constraint (3.34), which led to a significant simplification of the procedure for finding PO cuts. The procedure for obtaining the value of Magnanti and Wong points, which can be used as \hat{y} , is described in [35]:

$$\hat{y}_k^{(h+1)} = (1 - \gamma)\hat{y}_k^{(h)} + \gamma y_k^{(h)} \quad k \in K, \quad (3.35)$$

where $0 < \gamma < 1$. It is assumed to set $\gamma = 1/2$ as the best empirically obtained value by [35, 63]. In [33] is proposed the idea of finding the first core point from the convex hull of MP, which is adapted to the problem in the following statement:

Statement 3.4.1: The point $\hat{y}_k^{(0)} = 1/2$ for each $k \in K$ is the Magnanti and Wong point.

Proof. Let to consider the $|K|+1$ solutions of MP: $|K|$ solutions corresponds to location of one hub, and one of the solutions corresponds to all $|K|$ hubs location in the network. We introduce a convex combination of solutions with the following coefficients: $1/(2|K|-2)$ for solutions with one located hub, and $1/2 - 1/(2|K|-2)$ is coefficient for the solution of $|K|$ hub location. Thus, the $\hat{y}_k^{(0)} = 1/2$ belongs to $Conv(Y)$. **Proven.**

The scheme of accelerated algorithm of Benders decomposition based on PO is presented in Appendix A.2.

3.6. Computational study

Here, the extensive computational experiments are described in order to demonstrate the absolute deviation effects on the resulting solutions under demand uncertainty. In the computer experiment the corresponding computer programs to the models and algorithms presented in the Sections 3.1 – 3.5 and Appendix A.2 are implemented. The linear and nonlinear programming problems construction and

solutions for every instance were obtained with GUROBI Optimizer 8.0.1¹ on the server with 4.2 GHz and 64 GB of RAM under Linux environment. The algorithms and LP/MIP models are implemented on PyCharm IDE by using Python 3.6.

Calculations have been carried out using Civil Aeronautic Board (CAB, shown in Fig. 3.1) and Australian Post (AP) data sets from OR-Library [64]. The data in CAB refers to 25 US cities, where distances between cities approximated by the euclidean ones d_{ij} and the service demand between every pair of cities are provided. The AP dataset consist of the same parameters for 200 nodes of Australian post, where for the experiment 40 nodes are selected.

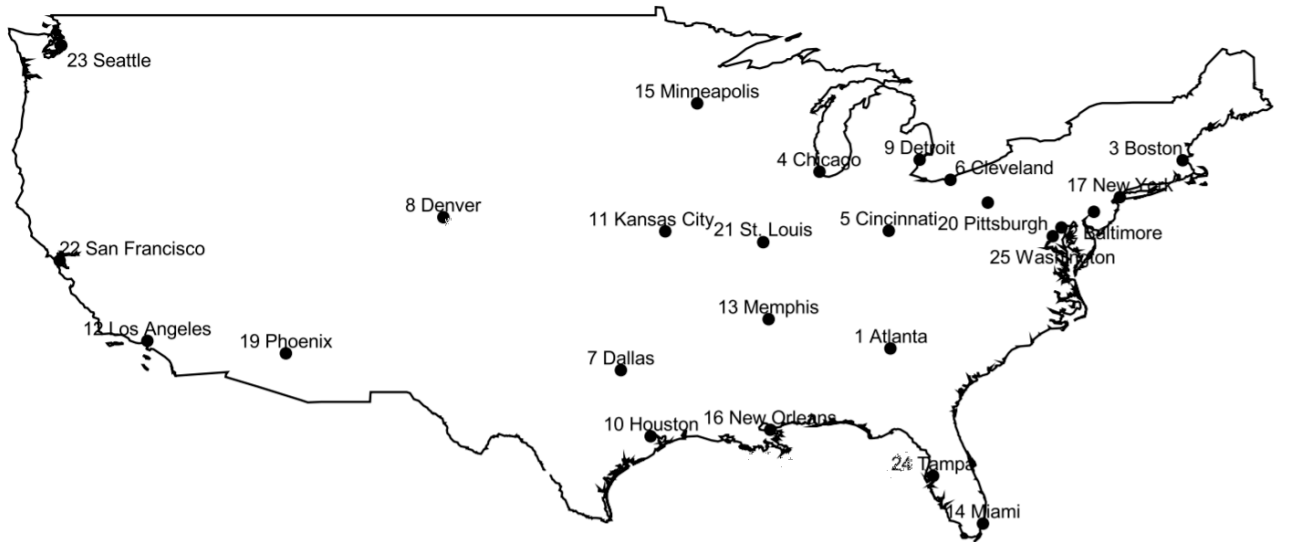


Figure 3.1. The CAB nodes location on the map

The demands are normalized for CAB and AP, i.e. total demand is equal to 1. Since the hub setup costs are omitted in CAB data set, the following procedure of [44] have been done to model missed data: $a_k = 15 \log \sum_{j \in N} w_{kj}$, $k \in K$. There are 25 and 40 nodes selected for analysis from CAB and AP data sets correspondingly, where all nodes are the candidates to be a hub.

The stochastic formulation, in current work notions, assumes the set of scenarios for the demands uncertainty with certain probabilities. The scenarios generation algorithm is associated with procedures from [44], where the demands are realized

¹ <http://www.gurobi.com/>

from the interval $[0.01w_{ij}, 10w_{ij}]$ for CAB and AP. The interval is divided into two parts: $[0.01w_{ij}, 5w_{ij}]$ and $[5w_{ij}, 10w_{ij}]$, where the demand for i, j and each scenario s takes a random value with probability $2/3$ from the first half and with probability $1/3$ from the second one. This procedure is introduced to avoid the symmetry in scenarios. The instances designation are CAB and AP for appropriate data set where 5 and 3 scenarios are generated correspondingly. We consider two types of scenario occurrence probabilities: uniform distribution and decreasing probabilities, i.e. $[1/3, 1/4, 1/6, 1/6, 1/12]$ and $[1/2, 1/3, 1/6]$ probability sets for CAB and AP accordingly. The four different discount factors α are traditionally considered in the literature: 0.2, 0.4, 0.6 и 0.8. The trade-off factor $\lambda \in \{0.5, 5\}$.

The names of the instances are coded as CAB $10\alpha.d$ and AP $10\alpha.d$, where 10α is α discount factor multiplying by 10 and $d \in \{U, C\}$, i.e. U uniform distribution, C decreasing probabilities.

Instance	Time (s)	Installed hubs	Obj.	Instance	Time (s)	Installed hubs	Obj.
CAB2.U	11.87	4, 7, 12, 17, 24	963.85	AP2.U	145.64	0, 13, 32	196344.12
CAB4.U	10.71	4, 12, 18, 24	1104.25	AP4.U	130.4	0, 13, 32	203471.52
CAB6.U	8.59	12, 18, 21	1216.76	AP6.U	181.31	13,18	209540.29
CAB8.U	7.61	12, 18, 21	1288.86	AP8.U	110.51	18,21	211718.21
CAB2.C	11.54	4, 7, 12, 17, 24	961.38	AP2.C	152.5	0, 13, 32	196847.98
CAB4.C	10.53	4, 12, 18, 24	1099.1	AP4.C	137.22	0, 13, 32	203949.18
CAB6.C	10.08	12, 18, 21	1209.69	AP6.C	118.92	13,18	209330.98
CAB8.C	8.16	12, 18, 21	1280.01	AP8.C	113.73	13,18	211965.67

Table 3.1. Calculation results for the classical stochastic formulation

In the Tables 3.1 and 3.2 the "Time (s)" columns list the processor time of solving the problem by the linear programming methods (simplex method, branch and bound algorithm and another methods build in Gurobi Optimizer), the "Installed hubs" list the numbers of hubs to be located and the "Obj." present the value of the objective function. The Table 3.2 also contains the results for each risk trade-off factor λ .

The Table 3.1 presents the computational results obtained by the stochastic

model described in Section 3.1. The Table 3.2 is derived from the experiments with the problem in Section 3.3. The "Obj. Stoch." in the Table 3.2 lists the values of the objective function without absolute deviation term with the purpose of the absolute deviation influence detection.

The objective function values "Obj." in the Table 3.1 and "Obj. Stoch." values for $\lambda = 0.5$ in Table 3.2 are equal as well as the installed hubs for the corresponding instances; it is due to small weight of absolute deviation term in the objective function, where for CAB instances it constitute 0.7% in average and for AP instances 0.3% from objective value. In case, when $\lambda = 5$ the hub locations for $\alpha \in \{0.6, 0.8\}$ in the Table 3.2 differs from the described one in the Table 3.1, the objectives in the Table 3.1 and "Obj. Stoch." differ from each other for all instances. The expected costs increase for 2% in the CAB instances and for 0.6% in the AP instances where the expected costs are the hub installation costs and the expected transportation costs.

The absolute deviation value is calculated by a formula "Obj." minus "Obj. Stoch." by using the columns in the Table 3.2. This difference for $\lambda = 0.5$ is not equal to 0 for all considered instances, however, the 75% of the instances have the absolute deviation value equal to zero for $\lambda = 5$. Evidently, the solutions correspond to the concept of robustness that was described in the Section 3.2 because the zero absolute deviation means the same objective value for each scenario separately.

The 25% of the instances with non-zero absolute deviation are the decreasingly distributed scenario cases (marked by "C") and the scenarios with higher probability have the stronger influence on the solution than the lower one. In the case of AP, the situation is not repeated, as the transportation costs by the directions are higher than in CAB.

The trade-off factor λ is a control parameter of expected absolute deviation term influence, which in zero case reduces the proposed in the Section 3.1 problem to basic stochastic formulation. The large λ values in comparison with transportation and hub setup costs increase absolute deviation term impact on the objective

Instance	$\lambda = 0.5$				$\lambda = 5$			
	Time (s)	Hubs	Obj.	Obj.Stoch.	Time (s)	Hubs	Obj.	Obj.Stoch.
CAB2.U	70.29	4, 7, 12, 17, 24	968.21	963.85	328.29	4, 7, 12, 17, 24	985.66	985.66
CAB4.U	103.25	4, 12, 18, 24	1111.27	1104.25	479.26	4, 12, 18, 24	1137.43	1137.43
CAB6.U	121.17	12, 18, 21	1225.72	1216.76	357.11	2, 12, 21	1252.59	1252.59
CAB8.U	67.5	12, 18, 21	1301.26	1288.86	177.95	2, 12, 21	1333.38	1333.38
CAB2.C	110.73	4, 7, 12, 17, 24	963.72	961.38	825.26	4, 7, 12, 17, 24	981.77	962.34
CAB4.C	85.28	4, 12, 18, 24	1103.47	1099.1	687.6	4, 12, 18, 24	1132.22	1106.18
CAB6.C	94.85	12, 18, 21	1215.9	1209.69	299.59	2, 12, 21	1248.29	1226.8
CAB8.C	84.53	12, 18, 21	1288.72	1280.01	190.36	2, 12, 21	1328.65	1304.98
AP2.U	2653.99	0, 13, 32	196967.07	196344.1	2856.97	0, 13, 32	197498.4	197498.44
AP4.U	2204.88	0, 13, 32	204086.93	203471.5	2203.47	0, 13, 32	204491.3	204491.28
AP6.U	3485.79	13, 18	210190.79	209540.8	3966.33	0, 13, 32	210609.5	210609.5
AP8.U	3010.51	18, 21	212330.64	211718.3	2640.76	18, 21	213555.4	213555.39
AP2.C	1787.33	0, 13, 32	197243.43	196848	2119.67	0, 13, 32	197498.4	197498.44
AP4.C	2135.83	0, 13, 32	204336.5	203949.2	2484.31	0, 13, 32	204491.3	204491.28
AP6.C	1992.08	13, 18	209911.09	209331	3013.88	0, 13, 32	210609.5	210609.5
AP8.C	2092.54	13, 18	212538.74	211965.7	2686.95	18, 21	213555.4	213555.39

Table 3.2. Calculation results for linear STHLPAD

function, as a consequence, the optimization of setup and transportation costs will be relegated to the background.

Instance	$\lambda = 0.5$				$\lambda = 5$			
	Standard		PO cuts		Standard		PO cuts	
	Benders cuts				Benders cuts			
	Time (s)	Iter.	Time (s)	Iter.	Time (s)	Iter.	Time (s)	Iter.
CAB2.U	478.51	60	870.57	15	678.45	79	1487.25	19
CAB4.U	453.76	59	751.36	14	651.6	78	1184	18
CAB6.U	348.98	46	606.07	12	299.27	37	1046.96	16
CAB8.U	194.54	26	493.36	10	220.78	28	1124.77	17
CAB2.C	518.76	65	663.1	13	673.29	80	661.46	11
CAB4.C	394.64	51	404.51	9	538.03	64	673.48	12
CAB6.C	297.59	38	456.79	11	394.59	46	667.1	11
CAB8.C	169.89	22	328.26	9	210.95	26	406.11	8
AP2.U	421.28	9	4023.44	6	471.67	11	7785.86	6
AP4.U	421.64	9	4645.4	7	526.32	13	6177.96	7
AP6.U	430.88	10	5852.66	8	529.69	13	7009.95	8
AP8.U	372.83	9	4726.91	6	532.58	14	7096.61	8
AP2.C	391.73	8	3845.97	6	377.36	9	6329.79	7
AP4.C	423.15	9	4311.91	7	466	11	7166.34	7
AP6.C	373.26	9	3994.22	6	468.1	11	7018.26	8
AP8.C	263.94	7	3405.2	6	412.6	11	6704.89	8

Table 3.3. The performance of the Benders algorithms

The second part of the experiments focuses on the algorithms in the Appendix A performance. In the Table 3.3 the computational results of Standard Benders cuts and Pareto-optimal cuts on the instances introduced above are obtained. The classical Benders decomposition shows the best results for all instances except CAB2.C in comparison with the improved Benders cuts (Pareto-optimal cuts) by processor time measure. From the other side, the Pareto-optimal cuts are designed to reduce the number of cuts: about 4 times less cuts in CAB and about 1.5 times less in the AP instances. It demonstrates us the cuts complexity grow if the cuts quality increases. Additionally, the "Time (s)" of Standard Benders cuts algorithm (in Table 3.3) and GUROBI Optimizer with basic parameters (in Table 3.2) vary by instances:

GUROBI Optimizer about 4 times faster on CAB and 6.3 times more slowly in average on AP in comparison with classical Benders cuts. This effect manifests itself because CAB data set generates HLP which is easier to solve as compared with AP data set.

Chapter 4

The hub location problem based on the profit maximization under demand and revenue uncertainty

This Chapter sets the stochastic hub location problem with the objective function of expected profit maximization in the conditions of demand and revenue uncertainties. The main assumption in comparison with the classical limitations of the hub location problem is the the ability to service only part of the all demands. In The Section 4.1 a deterministic case of a problem with a profit maximization function is formulated, which is an alternative formulation to considered in the literature. A non-linear and equivalent linear formulation of the hub location problem under uncertainty in demand is discussed in the Section 4.2, similar formulations of the problem under uncertainty in demand and revenue are presented in the Section 4.3. In the Sections 4.4 – 4.7, approaches to the Benders decomposition of the problem introduced in the Section 4.3 are considered using various optimality cuts: classical Benders optimality cuts, Pareto-optimal, maximal non-dominant and hybrid cuts. The results of a computational study on CAB and AP data from OR Library are presented in the Section 4.8.

4.1. Deterministic problem formulation

Let $G = \{N, A\}$ be a complete graph, where N is the set of nodes, A is the set of all edges in the network, and $H \subseteq N$ is the set of possible hub nodes for installation. The demand orientation is represented by the set K , where $\forall k \in K$ defines the triplet $(o(k), d(k), W_k)$ with origin and destination $o(k), d(k) \in N$ respectively, and flow W_k oriented from $o(k)$ to $d(k)$.

For $k \in K$ the distance between $o(k)$ and $d(k)$ is defined as d_k , the c_{ij} is the

cost per unit flow per unit distance from $i \in N$ to $j \in N$. The flow is routed via at least one hub unit and at most two hubs, the more than two hubs in the route is not efficient as stated in HLP formulation. Therefore, transportation costs per unit flow $F_{ijk} = c_{o(k)i}d_{o(k)i} + \alpha c_{ij}d_{ij} + c_{jd(k)}d_{jd(k)}$ on the route from $o(k)$ to $d(k)$ via hubs i and j , where α is a discount factor for inter hub transshipment. The fixed hub setup costs is denoted f_i for $i \in N$.

The classical formulation of HLP is the cost minimization problem, what makes the difference from the models with revenue, where the maximization task is considered. In revenue formulations the additional entity R_k is introduced, signifying the revenue from serving the unit flow k , where the flow is served if it is routed from $o(k)$ and gets the final destination $d(k)$.

We next present the MIP deterministic formulation of uncapacitated multiple allocation hub location problem with profit maximization objective function. The hub installation indicator is the binary variable y_i for each $i \in H$, where y_i is equal to 1 if i th node is selected as a hub, 0 otherwise, the continuous variable x_{ijk} denotes the flow $k \in K$ routed via hubs $i \in H$ and $j \in H$. We introduce the continuous variable z_k for $k \in K$ that represents the commodities taken to be shipped on the basis of profitability. There are several formulations of the UMAHLP problem based on profit maximization (shown in Section 1.4). The UMAHLP with profits is formulated as follows:

$$\max \sum_{k \in K} R_k z_k - \sum_{i \in H} f_i y_i - \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} \quad (4.1)$$

$$S.t. \quad \sum_{j \in H, j \neq i} x_{jik} + \sum_{j \in H} x_{ijk} \leq z_k y_i \quad i \in H, k \in K \quad (4.2)$$

$$\sum_{i \in H} \sum_{j \in H} x_{ijk} = z_k \quad k \in K \quad (4.3)$$

$$z_k \leq W_k, \quad k \in K \quad (4.4)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad i, j \in H, k \in K \quad (4.5)$$

$$z_k \geq 0 \quad k \in K \quad (4.6)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad i \in H \quad (4.7)$$

The objective (4.1) represents the profit function to be maximize. The first term value of the objective function constitutes the total revenue obtained from served part of profitable demand. The second and third addends represent hub setup costs and total transportation costs respectively.

Non-linear inequalities (4.2) ensure that flows are routed via through selected hubs. Constraints (4.3) state that routed flows correspond to satisfied demand, called flow balance equation. Constraints (4.4) enforce that the satisfied demand is less than possible demand. Constraints (4.5)–(4.7) are variable non-negativity and binary variables type restrictions.

The constraints (4.2) is a modifications of original flow balance constraints and with (4.4) are equivalent to demand satisfaction constraint introduced in [57]. The distinction with [57] in the same restrictions formulation is appeared due to the specific robust HLP formulation with profits described below. If for the it is important to serve the direction (whether the volume is served fully or not), then in the robust problem formulation described in the next section, the volume of demand that will be satisfied is important.

As mentioned in constraint description the proposed formulation contains non-linearity, this arises due to possibility to choose the demand part to satisfy. In case than hubs capacities are unlimited this constraints performs the function of a switch, where profitable demand is satisfied fully (e.i. origin/destination pairs' $k \in K$ demand W_k is served) and unprofitable directions are not served at all. In capacitated HLP formulation or in formulation with discrete flow units consideration (trucks

volume, aircraft seats amount and etc.) constraints (4.2) performs a wider function than a simple switch.

The equivalent linear formulation of the constraints (4.2) can be achieved by introduction of auxiliary continuous non-negative variables u_{ik} and set of constraints as provided in [65]:

$$\sum_{j \in H, j \neq i} x_{jik} + \sum_{j \in H} x_{ijk} \leq u_{ik} \quad i \in H, k \in K \quad (4.8)$$

$$u_{ik} \leq y_i W_k, \quad i \in H, k \in K; \quad (4.9)$$

$$u_{ik} \leq z_k, \quad i \in H, k \in K; \quad (4.10)$$

$$u_{ik} \geq z_k - (1 - y_i)W_k, \quad i \in H, k \in K; \quad (4.11)$$

$$u_{ik} \geq 0, \quad i \in H, k \in K \quad (4.12)$$

The (4.1), (4.3) – (4.12) is linear formulation of UMAHLP with profits, where only profitable demand is satisfied. The proposed mathematical model is the base for the robust UMAHLP with profits under demand uncertainty described below.

4.2. Robust formulation of UMAHLP with deterministic revenue and uncertain demand

The problem deals with demand uncertainty in profit maximization formulation of UMAHLP. The demand ambiguity is modeled by discrete set of scenarios S , where each scenario has the probability p_s of occurrence, as a consequence, the flows W_{ks} gets the additional index. It should be noted, that there are considered most possible scenarios and the probabilities are divided among these scenarios, i.e. $\sum_{s \in S} p_s = 1$ is scenario occurrence integrality restriction.

The introduced possibility to select the directions to satisfy generates the following problem: for two different scenarios the same direction k is profitable to first scenario and is unprofitable for the second one. What is the volume of demand to satisfy? We introduce the robust demand to be served denoted by z_k in previous paragraph (the variables meaning differs from described in previous section) and the expected loses from unsatisfied or extra satisfied demand. The robust UMAHLP with profits is formulated as follows:

$$\max \sum_{k \in K} R_k z_k - \sum_{i \in H} f_i y_i - \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} - \sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_k |z_k - W_{ks}| \quad (4.13)$$

при ограничениях: (4.2), (4.3), (4.5) – (4.7)

$$z_k \leq \max_{s \in S} W_{ks}, \quad k \in K. \quad (4.14)$$

The first addend in objective (4.13) represents the revenue from robust demand satisfaction. This term doesn't guarantee that the flow z_k is less than corresponding demand W_{ks} for each scenario $s \in S$, but extra flow is penalized in the last term of (4.13). Besides that, the unsatisfied demand for each scenario $s \in S$ is penalized in a same term. In general, the $\sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_k |z_k - W_{ks}|$ represents the estimated expected revenue that will not be received from behind optimality reasons, i. e. the expected revenue loses, where λ_k is the potential revenue per unit flow k .

The difference between λ_k and R_k is that the λ_k includes additional factors such service level, network coverage, which don't makes the influence on revenue R_k , we assume the following condition holds: $R_k \leq \lambda_k$. It should be noted, that λ_k for different scenarios $s_1, s_2 \in S$ may differs and the addition index s can be added as shown in Section 4.3. The value of z_k for $k \in K$ is the robust flow for set of scenarios S which is used as milestone for robust decision making process.

The problem (4.2) – (4.3), (4.5) – (4.7), (4.13) – (4.14) contains non-linear functions: absolute value function, binary and continuous variables product in (4.13) and

(4.2) respectively. The expected loses term: $\sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_k |z_k - W_{ks}|$ in the objective function (4.14) can be reformulated in linear form using the similar procedure from Section 3.3, where additional auxiliary non-negative continuous variables σ_{ks} for $k \in K$ and $s \in S$ and two types of additional inequalities should be introduced. The algorithm of variables product elimination coincides with used one in Section 4.1. The equivalent MIP formulation is stated as follows:

$$\max \quad \sum_{k \in K} R_k z_k - \sum_{i \in H} f_i y_i - \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} - \sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_k (z_k - W_{ks} + 2\sigma_{ks}) \quad (4.15)$$

$$S.t. \quad (4.3), (4.5) - (4.7), (4.8), (4.10), (4.12)$$

$$z_k + \sigma_{ks} \geq W_{ks}, \quad k \in K, s \in S; \quad (4.16)$$

$$u_{ik} \leq y_i \max_{s \in S} W_{ks}, \quad i \in H, k \in K; \quad (4.17)$$

$$u_{ik} \geq z_k - (1 - y_i) \max_{s \in S} W_{ks}, \quad i \in H, k \in K; \quad (4.18)$$

$$\sigma_{ks} \geq 0, \quad k \in K, s \in S; \quad (4.19)$$

There is some remarks for the formulation above: 1) Constraints (4.14) is removed from the model because of constraints (4.10), (4.17) and (4.18) together, ensure the fulfillment of this conditions; 2) The constant term $\sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_k W_{ks}$ in objective (4.15) can be removed from consideration, because the constant value in objective function do not make the influence on optimization process. Let denote the stated problem as StUMHLPR (англ. Stochastic Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location Problem with Revenue).

The introduced problem formulation consist of expected revenue loses minimization under demand uncertainty in a way to maximize the profit. The expected

revenue is presented as a product of robust demand and revenue per unit flow, which is not a traditional mathematical expectation of revenue, but is the optimal and reliable value of revenue to deviations of demand in the context of scenarios.

4.3. Robust formulation of UMAHLP with revenue and demand uncertainties

The uncertainty in demand is widely studied in HLP last twenty years, while the revenue management introduction into HLP takes last few years of researchers attention. As far as the author knows, only one stochastic formulation of the problem with uncertainty in revenue [58] is presented in the literature. The problem formulations of HLP with profit consider the demand satisfactory conditions based on the fixed revenue value for each direction. However, the demand is tightly linked to revenue, consequently, the each scenario $s \in S$ should be characterized by R_{ks} as well as λ_{ks} for $k \in K$. The different uncertainty sources (economic, competitors pricing,) make the revenue as an ambiguous value. This allows the decision-maker to set different pricing what is one of the reasons for the demand uncertainty. This assumption distinguishes our work in HLP from existing investigations, where revenue is deterministic.

In revenue management the important is to maximize profit and minimize revenue fluctuations. First one guarantee the efficiency, but the second one is the risk elimination condition, which is generated by uncertainty. The problem is denoted as Stochastic Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location problem with Absolute Deviation with Revenue (StUMAHLPADR), the formulation of the problem is stated as follows:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} p_s R_{ks} z_k - \mu \sum_{s \in S} p_s \left| \sum_{k \in K} R_{ks} z_k - \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s R_{ks} z_k \right| \\ & - \sum_{i \in H} f_i y_i - \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} - \sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_{ks} |z_k - W_{ks}| \end{aligned} \quad (4.20)$$

S.t. (4.2), (4.3), (4.5) – (4.7), (4.14).

The first and last addends of objective function (4.20) express the expected revenue and expected "loses", while the second addend of (4.20) is new in comparison with (4.13). This sum is absolute deviation of the revenue, where μ is the trade-off parameter between each scenario revenue and expectation of the revenue among all scenarios $s \in S$. The definition of robust solution in revenue management introduced in [66] is actual in current formulation:

Definition (Solution robustness): the *solution is robust* with respect to optimality if it remains "close" to optimal for any scenario $s \in S$.

The second term of (4.20) is the robustness measure of the solution, the optimal solution is presented as revenue expectation term.

The introduced robust solution definition may be strengthened, where absolute deviation of revenue is considered in context of direction $k \in K$:

$$\mu \sum_{s \in S} p_s \left| \sum_{k \in K} R_{ks} z_k - \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s R_{ks} z_k \right| \leq \mu \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s |R_{ks} - \sum_{s \in S} p_s R_{ks}| z_k, \quad (4.21)$$

where right part of inequality (4.21) is linear and follows from the absolute function properties. The strengthened stochastic formulation of the problem is stated as:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} p_s R_{ks} z_k - \mu \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s |R_{ks} - \sum_{s \in S} p_s R_{ks}| z_k \\ & - \sum_{i \in H} f_i y_i - \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} - \sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_{ks} |z_k - W_{ks}| \end{aligned} \quad (4.22)$$

S.t. (4.2), (4.3), (4.5) – (4.7), (4.14).

The procedure for converting a nonlinear objective function to an equivalent linear programming problem does not differ from the method described in the Section 3.3. We introduce the auxiliary continuous non-negative variable τ_s for $s \in S$ to eliminate non-linearity in the objective function.

The equivalent linear problem for (4.2),(4.3), (4.5) – (4.7), (4.14), (4.20) is following:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s R_{ks} z_k - 2\mu \sum_{s \in S} p_s \tau_s - \sum_{i \in H} f_i y_i \\ & - \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} - \sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_{ks} (z_k - W_{ks} + 2\sigma_{ks}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$S.t. \quad (4.3), (4.5) - (4.7), (4.8), (4.10), (4.12), (4.16) - (4.19)$$

$$\sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s R_{ks} z_k - \sum_{k \in K} R_{ks} z_k - \tau_s \leq 0, \quad s \in S \quad (4.24)$$

$$\tau_s \geq 0, \quad s \in S. \quad (4.25)$$

The problem (4.2),(4.3), (4.5)–(4.7), (4.14), (4.22) is equal to:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s R_{ks} z_k - \mu \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s |R_{ks} - \sum_{s \in S} p_s R_{ks}| z_k - \sum_{i \in H} f_i y_i \\ & - \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} - \sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} \lambda_{ks} (z_k - W_{ks} + 2\sigma_{ks}) \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$S.t. \quad (4.3), (4.5) - (4.7), (4.8), (4.10), (4.12), (4.16) - (4.19).$$

4.4. Benders decomposition

In this section the attention is drawn to problem complexity reduction via MIP decomposition approaches. It should be stressed, that all problems in Chapter 4 is L-shape linear programs [67] and allows the widely studied in HLP the Benders decomposition application. The formulated problems may be presented as two stage task: 1. Hub location problem is referred to Master Problem (MP); 2. Hub-node allocation problem and volumes to satisfy estimation is a Slave Problem (SP) in Bender's decomposition terms.

The formulation (4.3), (4.5) – (4.7), (4.8), (4.10), (4.12), (4.16) – (4.19), (4.23) – (4.25) is more general, therefore this model is used in decomposition algorithms description. Note that the commonly described the Benders decomposition approach in HLP is applied for costs minimization problems, here we transform the profit maximization problem to equivalent minimization problem as a tradition. The representation of the optimization model is defined as a first-stage problem with integer variables (hub locations) and the second-stage problem within continuous variables (served flow volumes, penalties for unsatisfied demand, revenue volatility penalty). The stochasticity of the revenue and demand lies fully in second-stage of the problem.

We start from SP description which is the second-stage of proposed problem formulation. Since the decomposition problem assumes the iterations, let set the integer variables of MP on iteration h to optimal values $y_i^{(h)}$ of MP. Thus the SP problem is formulated as follows:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} p_s (\lambda_{ks} - R_{ks}) z_k + \sum_{i \in H} f_i y_i^{(h)} \\ & + \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} + \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} 2p_s \sigma_{ks} + 2\mu \sum_{s \in S} p_s \tau_s \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$S.t. \quad (4.3), (4.5) - (4.7), (4.8), (4.10), (4.12), (4.16), (4.19), (4.24), (4.25)$$

$$u_{ik} \leq y_i^{(h)} \max_{s \in S} W_{ks}, \quad i \in H, k \in K; \quad (4.28)$$

$$u_{ik} \geq z_k - (1 - y_i^{(h)}) \max_{s \in S} W_{ks}, \quad i \in H, k \in K; \quad (4.29)$$

Let define the dual SP (DSP) where the dual variables is denote as v_k , e_{ik} , b_{ik} , q_{ks} , g_s , t_{ik} , a_{ik} associated with constraints (4.3), (4.8), (4.10), (4.16), (4.24), (4.28), (4.29) respectively. Taking into account the entered designations, the DSP is formulated as follows:

$$\max \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} W_{ks} q_{ks} + \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} ((a_{ik} - t_{ik}) y^{(h)} - a_{ik}) \max_{s \in S} W_{ks} \quad (4.30)$$

$$S.t. \quad v_k - e_{ik} - e_{jk} \leq F_{ijk}, \quad i, j \in H, k \in K, i \neq j \quad (4.31)$$

$$v_k - e_{ik} \leq F_{iik}, \quad i \in H, k \in K \quad (4.32)$$

$$q_{ks} \leq 2p_s \lambda_k, \quad k \in K, s \in S \quad (4.33)$$

$$\sum_{i \in K} (b_{ik} - a_{ik}) - v_k + \sum_{s \in S} q_{ks} + \sum_{s \in S} R_{ks} (g_s - |S| p_s g_s) \leq \sum_{s \in S} p_s (\lambda_{ks} - R_{ks}), \quad k \in K \quad (4.34)$$

$$e_{ik} - b_{ik} + a_{ik} - t_{ik} \leq 0, \quad i \in H, k \in K \quad (4.35)$$

$$g_s \leq 2p_s \mu, \quad s \in S \quad (4.36)$$

$$e_{ik}, b_{ik}, a_{ik}, t_{ik} \geq 0, \quad i \in H, k \in K \quad (4.37)$$

$$q_{ks} \geq 0, \quad k \in K, s \in S \quad (4.38)$$

$$g_s \geq 0, \quad s \in S \quad (4.39)$$

$$v_k \in \mathbb{R}, \quad k \in K. \quad (4.40)$$

As it is shown in the Section 3.4, the idea of the considered decomposition approach consist of the second-stage model relaxation and its replacement by a set of cuts added to MP during the iterations. The Benders decomposition deals with

two kinds of cuts: optimality and feasibility cuts. First ones are used to take into account the SP bounds. The second kind of cuts is generated to exclude the feasible set of solutions in MP which arise infeasibility or unboundedness of SP.

Let define the optimality cut, which represents the objective function's bound of SP in MP formulation:

$$\eta + \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} (t_{ik}^{(h)} - a_{ik}^{(h)}) y_i \max_{s \in S} W_{ks} \geq \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} W_{ks} q_{ks} - \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} a_{ik}^{(h)} \max_{s \in S} W_{ks}, \quad (4.41)$$

where η is continuous non-negative variable which corresponds to minimal value of (4.30) on iteration h . The objective function (4.30) during the sequence of iteration takes non-increasing values.

Finally, the MP problem can be formulated as follows:

$$\min \quad \sum_{i \in H} f_i y_i + \eta \quad (4.42)$$

$$S.t. \quad (4.41)$$

$$\sum_{i \in H} y_i \geq 1 \quad (4.43)$$

$$\eta \geq 0. \quad (4.44)$$

This formulation of MP contains additional constraint (4.43). In the traditional HLP tasks, where the all demand should be served, such constraint in Benders decomposition process represents the feasibility cut. Since, no hubs in the network, the flow variables becomes equal to zero which contradicts to all demand satisfactory condition (SP is infeasible). However, our formulation allows fully unsatisfied demand and constraint (4.43) is not obligatory. There is some reasons why constraint (4.43) is added: on the one side, we assume, that fully unprofitable networks will not be considered, from the other side, it reduces the number of iterations at least for one unit in solution process.

The basic Benders algorithm is illustrated on the Algorithm 1, where $\phi_{MP}(y, \eta)$ and $\phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q, g)$ are the MP and DSP objective functions optimal values on corresponding iteration h . Note that the final values of UB or LB (when UB=LB) represents the objective function (4.23) optimal value, while the $\phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q, g)$ on the final iteration is the objective function with out hub installation costs.

Algorithm 1: Basic Benders decomposition

```

UB  $\leftarrow$   $+\infty$ , LB  $\leftarrow$  0,  $h \leftarrow$  0

while  $UB \neq LB$  do
    Solve MP (4.42)–(4.44)
    LB  $\leftarrow$   $\phi_{MP}(y, \eta)$ 
    Solve DSP (4.30)–(4.40)
    Add cut (4.41) to MP
    if  $\phi_{SP}(v, e, t, b, a, q) + \sum_{k \in K} a_k y_k < UB$  then
        | UB =  $\phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q) + \sum_{k \in K} a_k y_k$ 
    else
        | Nothing
    end
     $h \leftarrow h + 1$ 
end

```

In the next few sections the cuts generation strategies and their accelerating is discussed. We focus on several approaches connected to cuts strengthening such as Pareto-optimal cuts (PO), maximal non-dominant cut (MN) and hybrid multiple "strong" cut generation strategy.

4.5. Pareto-optimal cuts in Benders decomposition

In the Section 3.5 the basic principles of Pareto-optimal cuts construction are considered. As it is presented in the Section 3.5, the approach from [35] for Pareto-optimal cuts generation is applied to this current chapter problem. The study [35] is based on the research [34], then the formulation of the procedure for generating PO cuts according to the research [34] is described. Let y^* is the initial core

point from $Conv(Y)$ and the optimal value of the problem (4.30) – (4.40) denoted $\phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q, g)$. There exists possibility to add two cuts on each iteration h : basic Benders cut and PO cut, because of the Magnanti and Wong algorithm [34] the DSP variable values for basic Benders cut are calculated on auxiliary stage. The PO cut construction is based on the following problem solution:

$$\max \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} W_{ks} q_{ks} + \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} ((a_{ik} - t_{ik}) y_i^* - a_{ik}) \max_{s \in S} W_{ks} \quad (4.45)$$

$$S.t. \quad (4.31) - (4.40)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{s \in S} W_{ks} q_{ks} + \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} ((a_{ik} - t_{ik}) y_i^* - a_{ik}) \max_{s \in S} W_{ks} = \phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q, g) \quad (4.46)$$

This formulation of PO cut calculation increases the convergence of the Benders decomposition approach. Nevertheless, because of constraint (4.46) the problem solution process is numerically unstable. Nevertheless, Papadakos [35] suggests to use the different MW points on each iteration and remove constraint (4.46) from consideration, the derived cuts will continue to be a Pareto-optimal. The MW points determination through the use of convex combination of core point and MP feasible solutions is following:

$$y_i^{*(h+1)} = (1 - \gamma) y_i^{*(h)} + \gamma y_i^{(h)} \quad i \in H, \quad (4.47)$$

where $y_i^{(h)}$ is optimal value of MP on iteration h and $y_i^{*(h)}$ is the MW point value on previous stage, $0 < \gamma < 1$ with best empirical value $1/2$. However, where remains the question with initialization of first core point $y^{*(0)}$. As shown in [33, 35], $y_i^{*(0)} = 1/2 \quad \forall i \in H$ is an interior core point of convex hull of MP. This value is presented as convex combination of $|H|$ feasible solutions of MP which corresponds to single hub location and one feasible solution where all hubs is selected. The $1/(2|H|-2)$ and $(1/2 - 1/(2|H|-2))$ are corresponding coefficients in sum of feasible solutions.

A scheme of the Papadakos algorithm [35] for Benders decomposition acceleration is given on Algorithm 2.

Algorithm 2: Pareto-optimal cut in Benders decomposition method

```

UB  $\leftarrow$   $+\infty$ , LB  $\leftarrow$  0,  $h \leftarrow$  0,  $\gamma, y^{*(0)}$ 
while  $UB \neq LB$  do
    Solve DSP (4.45), (4.31)-(4.40)
    Add cut (4.41) to MP
    Solve MP (4.42)-(4.44)
    LB  $\leftarrow$   $\phi_{MP}(y, \eta)$ 
    Update MW point (3.35)
    Solve DSP (4.30)-(4.40)
    Add cut (4.41) to MP
    if  $\phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q) + \sum_{k \in K} a_k y_k < UB$  then
        | UB =  $\phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q) + \sum_{k \in K} a_k y_k$ 
    else
        | Nothing
    end
     $h \leftarrow h + 1$ 
end

```

4.6. Maximal non-dominated Benders algorithm

An alternative way to Benders decomposition acceleration is discussed by Sherahli and Lunday [68]. The approach is based on the maximal non-dominant cuts generation. The selection of the cut is associated with the multi-objective problem solution which is the alternative of DSP. The authors demonstrated that an insignificant perturbation in the objective function of DSP coefficients contributes to the developing of the non-dominant cuts in certain cases. Such procedure allows to obtain the strengthened cut without using of auxiliary problems (in instant, in the formulation of Magnanti and Wong [34] for PO cuts generation the additional problem (4.31)–(4.40), (4.45), (4.46) should be solved on each iteration).

An idea of the proposed algorithm is to unite two problems from Magnanti and Wong' approach: (4.30)–(4.40) and (4.31)–(4.40), (4.45), (4.46). Actually, the problem has two objective functions (4.30) and (4.45) under constraints (4.31)–(4.40), where constraint (4.46) becomes useless. Sherali and Lunday [68] showed that the objective functions with corresponding weights could be summed to obtain an unique criteria for optimization:

$$\begin{aligned} \max \quad & (1 + \beta) \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} W_{ks} q_{ks} + \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} ((a_{ik} - t_{ik}) y^{(h)} - a_{ik}) \max_{s \in S} W_{ks} \\ & + \beta \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} ((a_{ik} - t_{ik}) y_i^* - a_{ik}) \max_{s \in S} W_{ks}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

where β is the small weight, the constant y^* is a core point.

Algorithm 3: Maximal non-dominant cut in Benders decomposition

method

UB \leftarrow $+\infty$, LB \leftarrow 0, $h \leftarrow$ 0

Initialization of the series $\{\beta^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$

while $UB \neq LB$ **do**

 Solve MP (4.42)–(4.44)

 LB \leftarrow $\phi_{MP}(y, \eta)$

 Solve DSP (4.31)–(4.40), (4.48)

 Add cut (4.41) to MP

if $\phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q) + \sum_{k \in K} a_k y_k < UB$ **then**

 | UB = $\phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q) + \sum_{k \in K} a_k y_k$

else

 | Nothing

end

$h \leftarrow h + 1$

end

In the work of Oliver et al. [69] an approach to weight β determination is considered. It is revealed by the authors that under condition of the fixed weight β on the iterations the solution of the problem does not represent effectively the approximation of DSP objective function value. For this reason the authors considered

the weight parameter updating during the iterations that improved the quality of evaluation of the DSP objective function's value in comparison with (4.48). There are the requirements for sequence of $\{\beta^{(h)}\}_{h=1}^{\infty}$ to provide with the convergence: $\sum_{h=1}^{\infty} \beta^{(h)} \rightarrow \infty$ and $\beta^{(h)} \rightarrow 0$ as $h \rightarrow \infty$. The fulfillment of these requirements ensures the following condition:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\beta \rightarrow 0} (1 + \beta) \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} W_{ks} q_{ks} + \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} ((a_{ik} - t_{ik})y - a_{ik}) \max_{s \in S} W_{ks} \\
& + \beta \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} ((a_{ik} - t_{ik})y_i^* - a_{ik}) \max_{s \in S} W_{ks} = \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} W_{ks} q_{ks} \\
& + \sum_{i \in H} \sum_{k \in K} ((a_{ik} - t_{ik})y - a_{ik}) \max_{s \in S} W_{ks}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

The scheme of the algorithm coincides with the Algorithm 5 and is shown in Algorithm 3, the difference is in the objective functions of DSP, where for non-dominant cut construction is used objective function (4.48). In addition to the decomposition scheme the procedure of β coefficients updating is required. As example, the harmonic series or its variations (general harmonic, hyperharmonic, random harmonic series and etc.) could be to model the $\{\beta^{(h)}\}_{h=1}^{\infty}$ series.

4.7. Hybrid multiple cuts generation strategy

From there, let us consider the hybrid decomposition model consisting of PO cuts generation in Papadakos [35] sense and maximal non-dominant cuts strategy from Section 4.6, simultaneously. This new method would allow to make two "strong" cuts on each iteration that according to the authors' mind should lead to the reducing of the iterations' total amount.

Both types of the cuts in the hybrid decomposition model use core points: to get more effective result from double "strong" cuts there should be used two different values of core points. The cuts may overlap each other otherwise, and the result from two strengthen cuts would be lost because of similarity. Besides, points

MW and the procedure of their updating on each iteration could be implemented for maximal non-dominant cuts' obtaining, that must not lead to the convergence reduction.

A hybrid multiple cut Benders decomposition scheme is shown on Algorithm 4, where $y^{*(0)}$ and $y^{**(0)}$ are initial core points for PO and maximal non-dominant cuts respectively, as the parameters γ^* and γ^{**} of MW point update scheme (3.35). Note that $\phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q)$ is the original DSP objective function (4.30) value which is extracted from (4.48), the algorithm is stated as follows:

Algorithm 4: Hybrid Benders decomposition method

$UB \leftarrow +\infty, LB \leftarrow 0, h \leftarrow 0, \gamma^*, \gamma^{**}, y^{*(0)}, y^{**(0)}, \beta^0$

Initialize the $\{\beta^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ series

while $UB \neq LB$ **do**

 Solve SP (4.45), (4.31)-(4.40)

 Add cut (4.41) to MP

 Solve MP (4.42)-(4.44)

$LB \leftarrow \phi_{MP}(y, \eta)$

 Update MW* and MW** points (3.35)

 Solve SP (4.31)-(4.40), (4.48)

 Add cut (4.41) to MP

if $\phi_{DSP}(v, e, t, b, a, q) + \sum_{k \in K} a_k y_k < UB$ **then**

 | $UB = \phi_{SP}(v, e, t, b, a, q) + \sum_{k \in K} a_k y_k$

else

 | Nothing

end

$h \leftarrow h + 1$

end

4.8. Computational study

During the computational study the computer programs corresponding to the models and algorithms from Sections 4.1 – 4.7 are implemented, among them: linear

problem of robust HLP under demand uncertainty (4.3), (4.5) – (4.8), (4.10), (4.12), (4.15) – (4.19), the HLP under demand and profit uncertainties (4.3), (4.5) – (4.8), (4.10), (4.12), (4.16) – (4.19), (4.23) – (4.25) and Algorithms 1 – 4 of problems decomposition. The linear problems construction and solutions was carried out using the solver IBM ILOG CPLEX 12.9¹ on the machine with 3.50 GHz, 32GB RAM under Linux environment. The program implementation of algorithms and mathematical models was developed on the programming language Python 3.7.4 using the PyCharm IDE.

Results compared in terms of hub location model results after different parameters set up in proposed models. To analyze the results the CAB (U.S. Civil Aeronautics Board, shown in Fig. 3.1) and the AP (Australian Post) are well-known in operations research literature datasets [64] were used as input data.

The data preprocessing algorithms are provided in the Section 4.8.1 and Section 4.8.3. In the Section 4.8.2 solutions of the proposed mathematical model with the CAB dataset discussed, while the Section 4.8.4 describes results on AP dataset.

4.8.1. CAB data preprocessing

Before computational experiments were performed the input data was normalized and set-up costs were calculated on the basis of CAB data. Ten different scenarios were built to find the solution of the robust hub location models. Let's look at the main step of this preparation.

Let the demand from node $o(k)$ to node $d(k)$ for each case s be randomly chosen from the interval $[0.01W_k, 10W_k]$. Here W_k are the demand values from the original CAB dataset.

To avoid the symmetry in the set of values W_{ks} around the mean in the scenarios the values W_k were chosen from the interval $[0.1W_k, 5W_k]$ with probability $2/3$ and from the interval $[5W_k, 10W_k]$ with probability $1/3$ as shown in [44]. The probability of occurrence of each of the ten scenarios is chosen to be 0.1, so the probabilities of

¹ <https://www.ibm.com/analytics/cplex-optimizer>

cases are equal.

Then all values W_{ks} are scaled so all of these values belong the interval $[0, 1]$ and total sum of these values for each scenario s is equal to 1.

We also took set-up costs $f_{o(k)} = 15 \log \sum_{d(k) \in N} W_k$ for each hub candidate. The collection and distribution costs per unit are set $\chi = 1$ and $\delta = 1$, the discount factor $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.

The revenue is generated by formula $R_{ks} = \xi \frac{c_k}{W_k}$, where $\xi \sim U(25, 000; 30, 000)$. Such technique of revenue calculation is presented in [70], which depends on the distance between O/D nodes and demand volume for the direction.

The 25 nodes of CAB dataset are considered, where all nodes are selected as hub candidates.

4.8.2. Results with CAB dataset

There are three mathematical formulations of the UMAHLP with revenue under demand and revenue uncertainties implemented. Two of them are presented in Section 4.3, additionally, for the comparative analysis the problem with expected profits maximization objective is taken for discussions:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s R_{ks} z_k - \sum_{i \in H} f_i y_i - \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} \sum_{k \in K} F_{ijk} x_{ijk} \\ & - \sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} R_{ks} \max(0, z_k - W_{ks}) \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$S.t. \quad (4.3), (4.5) - (4.8), (4.10), (4.12)$$

The objective function (4.50) corresponds to the expected revenue minus hub installation and transportation costs. Remark, the transportation costs are calculated for the robust flow z_k (the demand level to be served) instead of expected transportation costs. The model (4.3), (4.5) – (4.8), (4.10), (4.12), (4.50) is denoted as expected profit HLP.

The metrics of different models results comparison are following: expected profits value is calculated as expression in objective (4.50), i. e. the optimal variables values of the problems from the Section 4.3 are substituted into the (4.50) expression and the expected revenue value is denoted by "Revenue" in the tables. Two cases of absolute revenue deviation are calculated: total revenue deviations in the context of the scenario and revenue deviations in the context of the direction, where the calculation formulas are "Abs. Dev." = $\sum_{s \in S} p_s |\sum_{k \in K} R_{ks} z_k - \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s R_{ks} z_k|$ and "Dir. Dev." = $\sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_s |R_{ks} - \sum_{s \in S} p_s R_{ks}| z_k$, respectively. The expected loses is estimated as "Loses" = $\sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} R_{ks} |z_k - W_{ks}|$, this value represents the expected revenue which is not received due to unserved or extra served demand amount. The loses term and absolute deviation terms are included into the objective functions of the problems in Section 4.3 to be minimized with the aim of deriving the robust and reliable solution.

It should be stressed, that the metrics values do not depend on parameters μ and λ to the comparison capabilities of different instances and different problems formulations. Moreover, the instance with higher "Revenue" value is better than lower one, for "Abs. Dev.", "Dir. Dev." and "Loses" vice versa.

α	Hubs	Sat.	Profit	Lose	Abs. Dev.	Dir. Dev.
0.2	2,12,13	26.3	951.5	1661.5	15.9	121.7
0.4	5,8	20.5	874.3	1577.2	14.0	108.3
0.6	21	17.5	849.4	1552.1	12.9	99.6
0.8	21	17.5	849.3	1551.8	12.8	99.6

Table 4.1. The computation results with CAB data for expected revenue HLP

In the Table 4.1 the computation results for expected revenue HLP are shown. The column "Hubs" describes the optimal node numbers selected as a hubs and column "Sat." represents the percentage of served demand level in comparison with maximal demand by directions in scenarios. Such columns mean remain in the other tables.

The Table 4.2 and Table 4.3 contain the results derived on CAB data from

the robust HLP and its strengthened version introduced in Section 4.3. There are results for " λ " and " μ " from value sets $\{1, 1.5, 2\}$ and $\{0, 1, 5\}$, respectively, and $\lambda_{ks} = \lambda R_{ks}$. The processor time of solving the instance is presented in the column "Time (sec)".

The first thing we want to pay attention is the all instances in the Table 4.2 and Table 4.3 where $\lambda = 1$. The "Lose" value for this instances in comparison with the Table 4.1 for corresponding α 's are about 17% higher, what seems incorrect due to proposed stochastic models assumptions. This is because in the objective functions (4.23) and (4.26) the extra service is included in the revenue calculation term, but unserved volume is not. Therefore, it is more profitable to serve more than the expected volume of demand (the demand satisfactory in the Table 4.2 and Table 4.3 is about 2 times higher than in the Table 4.1), since the expected revenue term increases and the level of expected losses increases too by the same value, i. e. the term value $\sum_{s \in S} p_s \sum_{k \in K} R_{ks} \max(0, z_k - W_{ks})$ extraction from the "Lose" will lead to the lower values in proposed stochastic HLP in comparison with expected profit HLP. We come to that the parameter λ should be greater than 1, otherwise the all profitable directions will be satisfied for the high demand value.

For the cases then $\lambda = 1.5$ or $\lambda = 2$ we can see, that "Lose" derived by robust formulations more than 25% lower than for expected profit HLP for corresponding α 's and this difference increases with increase μ . On the other side, the "Profit" of robust formulations is lower for 8-18% depending on α and μ . That shows that "Lose" reduction causes decrease in "Profit", which is to be expected. The "Lose" value reflects the potential revenue that will not be received. In strategic planning of view the expected revenue lose minimization respects with network growth expectancy, which corresponds to demand coverage increase and is associated with service level. That is seen in column "Sat." of the Table 4.1, Table 4.2 and Table 4.3, where for expected revenue HLP formulation the demand satisfactory level is lower than for robust formulations for 1.4 to 2 times while α decreases.

The revenue expected absolute deviation and revenue deviation by directions

α	λ	μ	Hubs	Sat.	Profit	Lose	Abs. Dev.	Dir. Dev.	Time (sec)
0.2	1	0	2,4,7,12,24	50.5	844.8	1941.6	19.6	155.3	366.6
0.2	1	1	2,12,21,24	46.8	865.4	1887.1	18.7	151.5	521.6
0.2	1	5	2,12,21,24	45.9	869.9	1846.9	17.4	148.9	734.6
0.2	1.5	0	2,12,21,24	39.7	870.8	1346.4	15.5	119.7	961.0
0.2	1.5	1	2,12,21,24	39.5	867.9	1331.3	14.9	118.3	829.1
0.2	1.5	5	2,12,21	37.4	871.9	1280.5	13.1	113.0	967.0
0.2	2	0	2,12,21	36.4	840.1	1147.7	13.4	103.7	895.1
0.2	2	1	2,12,21	36.2	840.1	1145.0	13.2	103.3	1015.0
0.2	2	5	2,12,21	36.0	838.2	1136.8	12.6	102.3	1221.9
0.4	1	0	2,12,21	41.4	761.6	1795.7	18.5	143.7	466.6
0.4	1	1	2,12,21	41.3	762.1	1792.9	17.9	143.4	469.1
0.4	1	5	2,12,21	40.8	765.9	1756.5	16.3	140.9	555.9
0.4	1.5	0	2,12,21	36.3	767.5	1273.3	14.5	112.4	606.5
0.4	1.5	1	2,12,21	36.1	768.2	1267.0	14.0	111.8	607.1
0.4	1.5	5	2,12,21	35.6	766.7	1250.0	12.7	109.9	554.3
0.4	2	0	2,12,21	35.6	734.7	1137.5	13.2	102.3	788.2
0.4	2	1	2,12,21	35.3	735.2	1134.6	13.0	101.8	697.2
0.4	2	5	2,12,21	34.9	737.0	1129.6	12.3	100.8	697.4
0.6	1	0	8,13,20	36.9	728.5	1772.8	17.5	138.0	287.1
0.6	1	1	8,13,20	36.8	729.8	1770.9	17.2	137.8	349.8
0.6	1	5	5,8	33.8	755.9	1683.4	14.8	131.0	374.9
0.6	1.5	0	5,8	30.9	750.5	1278.5	13.6	107.6	574.3
0.6	1.5	1	5,8	30.8	750.8	1275.3	13.3	107.4	483.6
0.6	1.5	5	5,8	30.4	749.5	1256.4	11.9	105.5	478.2
0.6	2	0	5,8	29.8	720.4	1146.3	12.2	97.8	570.4
0.6	2	1	5,8	29.6	723.6	1145.3	12.0	97.4	522.1
0.6	2	5	5,8	29.3	725.5	1140.5	11.4	96.4	601.2
0.8	1	0	5,8	34.5	722.4	1740.0	17.4	134.6	157.6
0.8	1	1	5,8	34.3	724.9	1727.4	16.7	133.8	187.3
0.8	1	5	5,8	33.6	730.7	1673.3	14.8	130.2	207.8
0.8	1.5	0	5,8	30.8	725.9	1273.7	13.6	107.2	304.7
0.8	1.5	1	5,8	30.6	726.7	1261.0	13.2	106.3	264.5
0.8	1.5	5	5,8	30.1	727.3	1244.8	12.0	104.4	286.8
0.8	2	0	5,8	29.3	707.7	1145.4	12.2	97.0	252.5
0.8	2	1	5,8	29.3	706.8	1144.0	12.0	96.8	276.5
0.8	2	5	5,8	29.3	702.8	1138.1	11.4	96.1	319.7

Table 4.2. The computation results with CAB data for the robust formulation of HLP

have a low values in comparison with "Profit" and "Lose", this is due to low fluctuations of revenue by direction in scenarios and low demand satisfactory level. There are not significant improvements in the objective function value context. However, there is the dependence of "Sat." and parameter μ , where demand satisfaction "Sat.", "Abs. Dev." and "Dir. Dev" decrease while μ increase. This may be interpreted as low service level leads to stable revenue, because the most stable directions are selected.

The hubs' sets for expected revenue HLP and for robust formulations differ for all α values. That shows, that robust hub networks solve additional tasks: revenue deviation and expected revenue lose minimization, which lead to new decision.

The formulations of robust HLP and strengthened robust HLP differs on the revenue deviation representation in the objective function. From the Table 4.2 and the Table 4.3 we can see, that strengthened model solutions have a lower "Abs. Dev." and "Dir. Dev" as "Sat." in comparison with robust formulation (Table 4.2). The selected hubs differs on following instances: $\alpha = 0.2, \lambda = 1, \mu = 5$; $\alpha = 0.2, \lambda = 1.5, \mu = 1$ and $\alpha = 0.6, \lambda = 1, \mu = 1$. The strengthened robust formulation the revenue deviation term of objective function has the higher influence on the objective function value about 10 times in comparison with robust formulation, but still it is not comparable with "Lose" term. If there is no significant difference in the results, then strengthened model in mathematical context is simple because the revenue deviation by directions term does not contain non-linearity.

The Table 4.4 presents the performance of Benders algorithms for the different cut selection strategies from the Sections 4.4 – 4.7 on CAB data. The limit for iteration number is set to 1 500, the computation time is not limited. There is implemented only one MW points updating scheme for all algorithms: $y_i^{*(0)} = 1/2 \quad \forall i \in H$ and $\gamma = 1/2$. In addition, the series $\{\frac{1}{\sqrt{h}}\}_{h=1}^{\infty}$ is selected for the maximal non-dominant cut generation, where h is an iteration number. The columns "BD", "PO", "MN" and "Hybrid" corresponds to the Algorithm 5, Algorithm 2, maximal non-dominant cut strategy and Algorithm 4, respectively. The

α	λ	μ	Hubs	Sat.	Profit	Lose	Abs. Dev.	Dir. Dev.	Time (sec)
0.2	1	1	2,12,21,24	45.3	875.7	1832.8	18.7	148.1	605.2
0.2	1	5	2,12,21	36.9	906.0	1444.0	15.4	122.0	837.5
0.2	1.5	1	2,12,21	37.1	867.0	1244.2	14.3	111.1	913.8
0.2	1.5	5	2,12,21	33.9	858.3	1149.6	12.9	101.6	816.8
0.2	2	1	2,12,21	35.9	838.2	1136.2	13.2	102.4	788.6
0.2	2	5	2,12,21	33.4	808.4	1059.4	11.9	93.0	888.1
0.4	1	1	2,12,21	39.8	777.0	1731.3	17.9	139.3	519.4
0.4	1	5	2,12,21	33.2	817.0	1409.0	14.6	116.4	661.3
0.4	1.5	1	2,12,21	35.3	761.5	1210.8	13.6	107.3	526.9
0.4	1.5	5	2,12,21	32.0	765.8	1144.6	12.5	99.6	634.2
0.4	2	1	2,12,21	35.0	733.2	1125.0	12.9	100.7	797.9
0.4	2	5	2,12,21	32.0	718.0	1057.5	11.6	91.5	926.8
0.6	1	1	5,8	33.5	762.1	1689.1	16.9	131.2	388.3
0.6	1	5	5,8	28.2	798.4	1400.2	13.9	110.9	409.8
0.6	1.5	1	5,8	30.2	742.4	1218.6	12.9	103.2	551.8
0.6	1.5	5	5,8	27.3	754.1	1156.8	11.9	95.2	484.9
0.6	2	1	5,8	29.0	727.2	1132.4	12.1	95.5	516.5
0.6	2	5	5,8	27.2	708.6	1076.1	11.3	88.2	499.7
0.8	1	1	5,8	33.1	739.7	1656.3	16.6	129.0	214.1
0.8	1	5	5,8	27.8	777.7	1385.3	13.7	109.4	237.1
0.8	1.5	1	5,8	30.0	722.1	1212.1	12.7	102.4	235.5
0.8	1.5	5	5,8	27.1	733.7	1154.6	11.9	94.8	375.1
0.8	2	1	5,8	29.0	705.2	1132.3	12.1	95.5	266.3
0.8	2	5	5,8	27.1	689.3	1076.1	11.2	87.9	277.3

Table 4.3. The computation results with CAB data for the strengthened robust formulation of HLP

column "Iter." is the number of iteration to derive optimal solution or "Iter" if the iteration limit is exceeded. The sum of computation times of solving linear programs on each iteration is provided in column "Time (sec)".

It is recognized in the literature that the CAB data is too small and the problems constructed on this data is easy to solve with the aim of the performance investigation. However, we have obtained the interesting results from iteration number of view to discuss. From the Table 4.4 it is seen, that the Algorithm 4 realize the smallest number of iteration at most of the instances of CAB data. For the several

α	λ	μ	BD		PO		MN		Hybrid	
			Iter.	Time (sec)	Iter.	Time (sec)	Iter.	Time (sec)	Iter.	Time (sec)
0.2	1.0	0	Iter	4279.0	788	5550.0	583	3105.0	466	4573.0
0.2	1.0	1	Iter	5323.0	765	4406.0	601	4223.0	473	5364.0
0.2	1.0	5	Iter	5351.0	808	5594.0	617	5022.0	517	8182.0
0.2	1.5	0	Iter	4016.0	1301	10240.0	976	5806.0	311	2844.0
0.2	1.5	1	Iter	4419.0	1283	7912.0	979	6103.0	307	3030.0
0.2	1.5	5	Iter	4323.0	1214	6564.0	925	5650.0	244	2335.0
0.2	2.0	0	Iter	4043.0	1386	9551.0	577	3024.0	176	1584.0
0.2	2.0	1	Iter	4385.0	1308	10141.0	557	3467.0	173	2279.0
0.2	2.0	5	Iter	4422.0	1292	10731.0	434	3462.0	149	1944.0
0.4	1.0	0	Iter	4160.0	466	2327.0	416	2955.0	305	3551.0
0.4	1.0	1	Iter	4617.0	441	2536.0	406	3042.0	324	3943.0
0.4	1.0	5	Iter	4281.0	487	2882.0	355	2368.0	338	3822.0
0.4	1.5	0	1262	2213.0	655	2610.0	154	769.0	36	355.0
0.4	1.5	1	1172	2062.0	628	2424.0	150	781.0	96	926.0
0.4	1.5	5	1164	2274.0	623	2623.0	127	678.0	31	300.0
0.4	2.0	0	1099	1819.0	670	2615.0	114	629.0	62	564.0
0.4	2.0	1	1098	2078.0	688	2929.0	105	544.0	65	628.0
0.4	2.0	5	1081	2069.0	667	2534.0	102	572.0	33	326.0
0.6	1.0	0	1023	1472.0	231	637.0	37	160.0	49	362.0
0.6	1.0	1	794	1178.0	219	713.0	36	157.0	45	346.0
0.6	1.0	5	789	1129.0	224	897.0	35	185.0	17	194.0
0.6	1.5	0	821	1008.0	365	1281.0	32	237.0	23	234.0
0.6	1.5	1	731	1022.0	367	1674.0	32	181.0	24	226.0
0.6	1.5	5	703	1001.0	351	1608.0	29	143.0	19	243.0
0.6	2.0	0	883	1081.0	494	2243.0	27	145.0	16	165.0
0.6	2.0	1	810	1126.0	474	2278.0	27	166.0	18	224.0
0.6	2.0	5	773	1091.0	439	2180.0	27	177.0	8	115.0
0.8	1.0	0	372	359.0	70	258.0	8	29.0	9	101.0
0.8	1.0	1	278	253.0	74	297.0	8	35.0	9	93.0
0.8	1.0	5	304	343.0	80	397.0	8	46.0	10	157.0
0.8	1.5	0	358	350.0	127	485.0	6	25.0	8	69.0
0.8	1.5	1	289	310.0	119	488.0	6	35.0	8	63.0
0.8	1.5	5	285	249.0	126	498.0	6	26.0	7	90.0
0.8	2.0	0	364	333.0	143	527.0	7	43.0	7	47.0
0.8	2.0	1	321	302.0	142	608.0	7	31.0	7	49.0
0.8	2.0	5	308	288.0	143	654.0	6	27.0	7	55.0

Table 4.4. Benders algorithms performance on CAB data

cases the Algorithm 4 inferior to "MN" algorithm by the iteration number, which means that the simultaneous use of two strengthened cuts can interfere the convergence. Considering the iteration numbers and processor times for all instances the "MN" algorithm shows better results in comparison with "PO" and "BD" algorithm. Analysing the computation time of "MN" and "Hybrid", the first one dominates for the most instances.

There are outperform of the Benders algorithms (Table 4.4) in comparison with CPLEX solver (Table 4.2), where start from the instance $\alpha = 0.4$, $\lambda = 1.5$ and $\mu = 0$ the decomposition algorithms are close to the CPLEX solver or shows better results on the about 2/3 of instances.

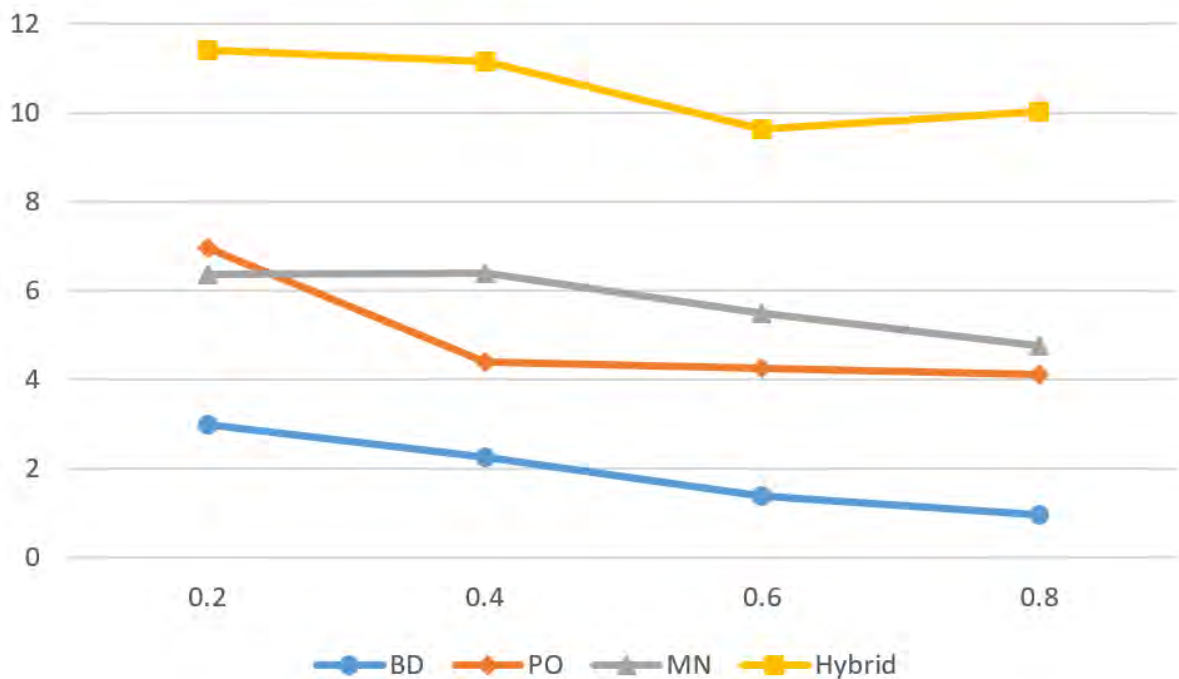


Figure 4.1. Average iteration time of Benders algorithms for different discount factors α on CAB data

The Figure 4.1 reflects the average time of Benders iteration for different cut generation strategies in dependence of α 's level. The presented results are aggregated and formed from the Table 4.4. The basic Benders cuts outperforms all another strategies by average iteration time, while "Hybrid" of two strengthened

cuts algorithm on cases $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.6\}$ outperform the sum of separate "PO" and "MN" results. The "PO" and "MN" iteration times are close, but the number of iteration (from the Table 4.4) differs significantly, where "MN" is more efficient than "PO".

4.8.3. AP data preprocessing

The AP dataset contains data of 200 postal service nodes of Australian Post from OR Library [64], while data for a first 40 nodes is selected for a present experiment. Five different scenarios were simulated to obtain numerical results.

In contrast with CAB data the AP contains the information of hub installation costs for two cases: L (Loose) and T (Tight), in analysis we use the last of them. Besides that, the data is intended for the capacitated hub location problem, therefore alphas set $\alpha \in \{4, 8, 12, 16\}$, $\chi = 40$ and $\delta = 60$ are selected to adopt the data for the uncapacitated HLP.

The revenue generation strategy is similar to presented in Section 4.8.1, $R_{ks} = \xi \frac{c_k}{W_k}$, where $\xi \sim U(40; 50)$. The demand value $W_{ks} \sim U(\frac{1}{2}W_k; \frac{3}{2}W_k)$ is generated from uniform distribution.

4.8.4. Results with AP dataset

α	Hubs	Sat.	Profit	Loose	Abs. Dev.	Dir. Dev.
4.0	0,7,15,18,23,32,34,37	68.3	8,127,585.4	2,720,334.6	16,879.8	553,476.0
8.0	0,7,13,18,21,32,37	62.7	8,064,907.3	2,716,823.5	16,709.8	550,360.2
12.0	0,7,13,18,21,32	59.4	8,012,708.2	2,705,160.4	16,704.7	547,048.4
16.0	0,7,13,18,21,32	55.3	7,966,119.4	2,723,387.4	17,041.1	544,885.1

Table 4.5. The computation results with AP data for expected revenue HLP

The computation study on AP data is carried out for mathematical models of robust UMAHLP with revenue and stochastic formulation introduced in the Section 4.8.2. The column names in Table 4.5, the Table 4.6 and the Table 4.7 have the same interpretation as in the tables from the Section 4.8.2.

α	λ	μ	Hubs	Sat.	Profit	Loose	Abs. Dev.	Dir. Dev.	Time (sec)
4.0	1	0	0,7,15,18,23,32,34,37	76.8	8,115,017.6	2,724,860.2	17,206.6	556,916.2	757.0
4.0	1	1	0,7,15,18,23,32,34,37	77.2	8,113,698.7	2,723,406.6	17,096.7	556,934.1	616.5
4.0	1	5	0,7,15,18,23,32,34,37	76.8	8,113,191.4	2,716,307.1	16,303.8	556,145.2	624.4
4.0	1.5	0	0,7,15,18,23,32,34,37	74.4	8,110,093.4	2,656,447.9	17,477.4	551,279.0	851.4
4.0	1.5	1	0,7,15,18,23,32,34,37	76.5	8,106,528.8	2,640,409.5	15,698.6	549,773.7	712.0
4.0	1.5	5	0,7,15,18,23,32,34,37	73.3	8,047,561.0	2,463,417.1	3,481.6	534,909.4	1086.1
4.0	2	0	0,7,15,18,23,32,34,37	72.7	7,852,384.0	1,853,940.4	13,308.8	487,730.9	963.6
4.0	2	1	0,7,15,18,23,32,34,37	72.6	7,852,502.5	1,853,847.2	13,277.5	487,696.6	1127.8
4.0	2	5	0,7,15,18,23,32,34,37	71.5	7,867,276.5	1,893,576.5	9,693.3	491,488.9	1244.6
8.0	1	0	0,7,15,18,23,32,34,37	75.5	8,046,368.0	2,725,413.7	17,160.5	556,580.8	550.5
8.0	1	1	0,7,15,18,23,32,34,37	75.4	8,046,474.1	2,725,526.8	17,021.1	556,526.9	744.0
8.0	1	5	0,7,15,18,23,32,34,37	74.9	8,046,091.7	2,716,918.8	16,074.5	555,596.4	622.0
8.0	1.5	0	0,7,15,18,21,23,32,37	73.0	8,036,202.6	2,628,947.5	17,149.4	548,932.0	996.2
8.0	1.5	1	0,7,15,18,21,23,32,37	73.1	8,033,742.7	2,618,906.8	15,205.8	547,706.6	705.1
8.0	1.5	5	0,7,15,18,21,23,32,37	73.6	7,978,805.6	2,457,642.4	3,383.9	534,181.7	820.8
8.0	2	0	0,7,13,18,21,32,37	70.3	7,792,102.7	1,852,551.2	13,329.2	487,111.4	1324.4
8.0	2	1	0,7,13,18,21,32,37	70.0	7,792,630.7	1,851,760.7	13,183.1	486,923.0	1083.4
8.0	2	5	0,7,13,18,21,32,37	69.9	7,804,751.2	1,889,325.1	9,660.1	490,591.8	1156.0
12.0	1	0	0,7,15,18,23,32,34,37	73.5	7,981,619.1	2,724,580.7	17,054.9	556,110.4	757.5
12.0	1	1	0,7,15,18,23,32,34,37	73.4	7,981,580.5	2,724,082.4	16,887.7	556,054.5	717.7
12.0	1	5	0,7,15,18,21,23,32,37	72.7	7,980,887.6	2,714,939.8	15,756.5	554,978.3	798.4
12.0	1.5	0	0,7,13,18,21,32,37	70.5	7,972,146.5	2,604,794.3	17,255.4	546,336.9	1329.4
12.0	1.5	1	0,7,13,18,21,32,37	70.3	7,969,555.9	2,593,001.3	15,295.8	545,160.5	1157.0
12.0	1.5	5	0,7,13,18,21,32,37	70.5	7,916,817.8	2,445,887.5	3,227.6	532,650.3	1332.5
12.0	2	0	0,7,13,18,21,32,37	69.4	7,735,336.5	1,852,403.7	13,182.6	486,784.0	1578.5
12.0	2	1	0,7,13,18,21,32,37	69.4	7,735,915.0	1,852,272.8	13,120.9	486,726.9	1805.6
12.0	2	5	0,7,13,18,21,32,37	68.8	7,748,993.2	1,888,069.4	9,753.9	490,096.9	2011.8
16.0	1	0	0,7,13,18,21,32	70.2	7,934,482.1	2,710,673.8	17,325.9	554,326.1	898.7
16.0	1	1	0,7,13,18,21,32	70.0	7,935,670.3	2,709,758.6	17,111.1	554,016.5	825.1
16.0	1	5	0,7,13,18,21,32	69.6	7,934,238.1	2,700,555.5	15,364.2	553,043.8	686.3
16.0	1.5	0	0,7,13,18,21,32	67.9	7,930,932.8	2,594,165.3	17,152.0	544,437.0	1266.6
16.0	1.5	1	0,7,13,18,21,32	67.0	7,928,520.4	2,587,105.8	15,163.4	543,628.7	1346.9
16.0	1.5	5	0,7,13,18,21,32	67.9	7,877,021.7	2,432,978.7	3,350.2	530,446.1	1807.7
16.0	2	0	0,7,13,18,21,32	66.6	7,696,993.3	1,854,047.9	13,088.2	485,973.7	1448.9
16.0	2	1	0,7,13,18,21,32	66.8	7,696,046.4	1,853,956.0	12,892.5	485,936.8	1443.8
16.0	2	5	0,7,13,18,21,32	67.5	7,708,788.3	1,889,713.0	9,644.1	489,533.4	1309.4

Table 4.6. The computation results with AP data for the robust formulation of HLP

In the Table 4.5 and the Table 4.6 it is seen, that optimal hub numbers do not differs for $\alpha \in \{4, 16\}$, while the demand satisfaction for the robust formulation is higher for 8–12 percents. As it is explicitly discussed in the Section 4.8.2, the expected loses for $\lambda = 1$ derived by the robust model are higher for a most cases, while the robust formulation is positioning as loses minimization model. The same situation and its justification can be applied from experiments on CAB data.

α	λ	μ	Hubs	Sat.	Profit	Loose	Abs. Dev.	Dir. Dev.	Time (sec)
4.0	1	1	0,7,15,18,23,32,34,37	76.3	8,116,748.5	2,722,065.6	17,177.2	556,558.2	717.4
4.0	1	5	0,7,15,18,23,32,34,37	72.5	8,109,965.7	2,647,786.6	17,061.3	547,971.4	653.4
4.0	1.5	1	0,7,15,18,23,32,34,37	72.5	8,078,102.2	2,527,643.1	17,914.9	539,000.0	969.2
4.0	1.5	5	0,7,15,18,23,32,34,37	68.5	7,869,594.6	1,878,431.6	13,192.9	487,310.4	870.2
4.0	2	1	0,7,15,18,23,32,34,37	71.3	7,854,171.1	1,853,890.5	13,205.7	487,514.6	1019.5
4.0	2	5	0,7,13,18,32,34,37	67.9	7,859,306.6	1,851,410.9	13,294.0	486,076.1	1037.0
8.0	1	1	0,7,15,18,23,32,34,37	75.0	8,048,175.4	2,721,504.2	17,148.6	556,118.8	826.5
8.0	1	5	0,7,15,18,21,23,32,37	70.5	8,041,585.0	2,636,035.6	17,195.2	546,474.5	741.8
8.0	1.5	1	0,7,15,18,21,23,32,37	70.5	8,006,119.0	2,500,943.1	17,607.4	536,300.9	1196.8
8.0	1.5	5	0,7,13,18,21,32,37	66.7	7,809,387.5	1,875,524.7	13,074.3	486,477.9	1068.5
8.0	2	1	0,7,13,18,21,32,37	69.5	7,794,574.8	1,851,783.0	13,247.0	486,687.9	1018.1
8.0	2	5	0,7,13,18,21,32,37	67.0	7,798,379.8	1,850,275.9	12,976.6	485,653.0	1529.0
12.0	1	1	0,7,15,18,21,23,32,37	72.4	7,984,976.4	2,717,823.5	17,006.2	555,324.5	657.2
12.0	1	5	0,7,13,18,21,32	65.5	7,986,903.1	2,611,052.0	17,273.2	542,749.2	873.8
12.0	1.5	1	0,7,13,18,21,32	67.0	7,945,603.6	2,470,089.6	17,304.5	532,879.9	1075.5
12.0	1.5	5	0,7,13,18,21,32	63.7	7,762,272.4	1,880,143.6	12,898.3	485,681.7	1549.7
12.0	2	1	0,7,13,18,21,32,37	68.8	7,738,028.5	1,851,913.9	13,280.2	486,401.7	1377.2
12.0	2	5	0,7,13,18,21,32	64.1	7,747,738.5	1,850,848.0	12,933.5	484,561.2	1369.8
16.0	1	1	0,7,13,18,21,32	69.8	7,939,422.5	2,701,559.4	17,031.3	553,159.9	705.9
16.0	1	5	0,7,13,18,21,32	66.2	7,937,670.1	2,602,472.9	17,275.0	541,856.0	894.6
16.0	1.5	1	0,7,13,18,21,32	66.1	7,899,430.6	2,465,552.0	17,272.7	532,143.1	1515.9
16.0	1.5	5	0,7,13,18,21,32	63.3	7,715,782.6	1,879,289.7	12,852.3	485,491.9	1575.0
16.0	2	1	0,7,13,18,21,32	66.1	7,698,780.7	1,854,222.4	13,045.9	485,784.0	1122.3
16.0	2	5	0,7,13,18,21,32	63.8	7,700,924.8	1,849,728.7	13,091.5	484,214.1	2115.6

Table 4.7. The computation results with AP data for the strengthened robust formulation of HLP

The "Abs. Dev." in the Table 4.6 shows the stronger results than CAB data, since, on instances $\mu = 5$ the revenue deviation is 1.5–5 times lower in comparison with other instances in this table or with Table 4.5 and the Table 4.7. That approve

α	λ	μ	BD		PO		MN		Hybrid	
			Iter.	Time (sec)	Iter.	Time (sec)	Iter.	Time (sec)	Iter.	Time (sec)
4.0	1.0	0	101	622.0	18	373.0	20	329.0	16	532.0
4.0	1.0	1	96	597.0	16	394.0	23	464.0	18	712.0
4.0	1.0	5	109	674.0	18	400.0	23	451.0	18	729.0
4.0	1.5	0	139	856.0	46	1067.0	64	1517.0	39	1531.0
4.0	1.5	1	145	908.0	47	1172.0	70	1674.0	46	1888.0
4.0	1.5	5	139	895.0	42	1334.0	72	1976.0	43	2273.0
4.0	2.0	0	210	1399.0	89	2213.0	131	2558.0	78	2980.0
4.0	2.0	1	214	1463.0	87	1936.0	126	2167.0	77	2737.0
4.0	2.0	5	211	1103.0	87	1783.0	128	2396.0	77	2745.0
8.0	1.0	0	113	478.0	20	316.0	23	437.0	23	569.0
8.0	1.0	1	117	521.0	20	388.0	27	490.0	22	688.0
8.0	1.0	5	132	588.0	26	565.0	32	644.0	24	664.0
8.0	1.5	0	186	803.0	64	1262.0	91	1608.0	54	1774.0
8.0	1.5	1	173	786.0	66	1268.0	87	1665.0	63	2201.0
8.0	1.5	5	184	865.0	66	1494.0	100	2144.0	60	2480.0
8.0	2.0	0	253	1207.0	111	2128.0	152	2523.0	91	2739.0
8.0	2.0	1	260	1332.0	116	2402.0	157	2496.0	104	3369.0
8.0	2.0	5	266	1393.0	117	2450.0	167	2683.0	93	3236.0
12.0	1.0	0	146	609.0	38	642.0	35	464.0	26	664.0
12.0	1.0	1	152	671.0	27	483.0	39	695.0	29	897.0
12.0	1.0	5	162	723.0	35	688.0	45	773.0	33	959.0
12.0	1.5	0	235	1018.0	85	1635.0	126	1988.0	86	2641.0
12.0	1.5	1	204	917.0	96	1894.0	125	2198.0	79	2649.0
12.0	1.5	5	221	1038.0	87	1960.0	118	2390.0	79	3104.0
12.0	2.0	0	287	1389.0	129	2558.0	160	2462.0	113	3484.0
12.0	2.0	1	297	1512.0	138	2779.0	178	2779.0	121	3868.0
12.0	2.0	5	298	1539.0	133	2745.0	165	2675.0	111	3661.0
16.0	1.0	0	164	681.0	29	426.0	42	655.0	26	744.0
16.0	1.0	1	158	680.0	29	552.0	41	715.0	29	966.0
16.0	1.0	5	164	719.0	36	700.0	42	694.0	26	911.0
16.0	1.5	0	186	893.0	60	1269.0	85	1602.0	49	1615.0
16.0	1.5	1	177	976.0	67	1446.0	91	1760.0	53	1923.0
16.0	1.5	5	168	987.0	62	1519.0	92	1906.0	53	2142.0
16.0	2.0	0	259	1205.0	104	2023.0	131	2167.0	81	2653.0
16.0	2.0	1	251	1257.0	94	1807.0	125	2048.0	82	2579.0
16.0	2.0	5	238	1193.0	92	2014.0	130	2291.0	86	3001.0

Table 4.8. Benders algorithms performance on AP data

the assumption of the robust formulation: the revenue deviation should to be minimized in trade-off with profit maximization. In contrast, the strengthened formulation of robust HLP do not shows the significantly better results in comparison with robust model by "Dir. Dev.", that may be found in the Table 4.7 and Table 4.6, but there are important differences on "Abs. Dev." column. The instance with $\mu = 5$ shows the principle distinction between robust and strengthened robust formulations. Note, that strengthened robust model contains for a one non-linear term in objective less in comparison with standard robust model, but the computation times are greater for a most cases. That may be stated for a CAB data as well.

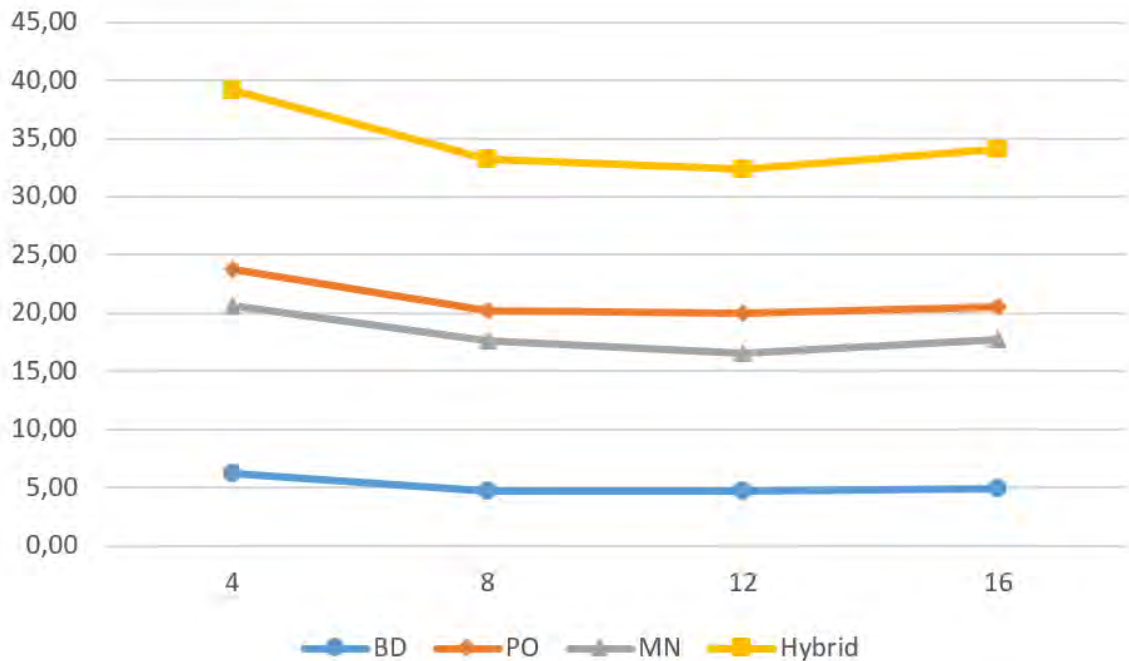


Figure 4.2. Average iteration time of Benders algorithms for different discount factors α on AP data

The Table 4.8 presents the performance of Benders algorithms for the different cut selection strategies from the Sections 4.4 – 4.7 on AP data. There are 27 from 36 instances where decomposition algorithms outperform the CPLEX solver (see, Table 4.6 column "Time (sec)") by computation times. Despite having the straightened cuts in "PO", "MN" and "Hybrid" algorithms the basic "BD" got the best scores

by processor time, while the improved algorithms derive the optimal results in fewer iterations.

The Figure 4.2 reflects the average time of Benders iteration for different cut generation strategies in dependence of α 's level on AP data. The presented results are aggregated and formed from the Table 4.8. The basic Benders cuts outperforms all another strategies by average iteration time. The "PO" and "MN" iteration times are close, but the number of iteration (from the Table 4.4) differs, where "PO" is more efficient at most cases than "MN". That is opposite to the results on CAB data.

Conclusion

The dissertation is devoted to the reliable hub location problem. During the research the mathematical formulations of the problem considering the objective functions of the costs minimization or profits maximization, where the reliability criteria are to minimize absolute deviations of costs, profits and expected losses in revenue are presented.

The main results of the work are as follows:

1. A new statistical procedure for the reliability level assessing of the hub network for a fixed number of hubs based on the Value at Risk criteria is developed.
2. New mathematical models of reliable hub location problem are constructed with objective functions of simultaneous optimization of total network costs or total network profit in a trade-off with expected deviations of transport costs or expected deviations of revenue and expected losses in revenue respectively.
3. There are developed algorithms to solve optimization problems based on Benders decomposition with the use of various cuts strengthening: Pareto-optimal cuts, non-dominated cuts and a hybrid multi-cut strategy.
4. The software implementation of the statistical procedure for assessing the reliability of the hub network, optimization problems and algorithms for their solution is carried out.

The mathematical models proposed in this work may be applied to the modeling of reliable transport or telecommunication networks in such areas as postal delivery, Less-Than-Truck delivery, air transportation, emergency systems and etc.

Of a particular interest are the objective functions of simultaneous optimization of main network indicators such as costs or profits in a trade-off with deviations of these indicators as the solution reliability measure.

As a part of the dissertation work a computational study were performed on CAB and AP datasets from OR Library. The optimization results of the proposed models were compared with the stochastic problem formulation, where the proposed models received more reliable solutions based on the introduced criteria. In addition, the developed algorithms to solve the optimization problems in more than 75% of considered cases received the optimal solution faster than standard commercial software packages CPLEX and GUROBI Optimizer.

The future research possibilities are the continuous models of uncertainties representation in the proposed problem formulations, developing of exact or heuristic solution algorithms to solve real-sized instances, introduction of proposed robustness concept into the capacitated hub location problem.

Acknowledgements

The author expresses gratitude to his supervisor Prof. Vladimir Bure for the help provided in the writing of this dissertation; to his college Mikhail Krasilnikov, Ph. D., for consultations on the subject under consideration; to the author's wife, Boiarkina Anastasiia, for inspiration and comprehensive support in the writing of this thesis.

Glossary

HLP — Hub Location Problem.

UMAHLP — Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location Problem.

UMApHLP — Uncapacitated Multiple Allocation p -Hub Location Problem.

CMApHLP — Capacitated Multiple Allocation p -Hub Location Problem.

O–D — Origin–Destination.

BD — Benders Decomposition algorithm.

PO cuts — Pareto Optimal cuts in Benders decomposition.

MP — Master Problem in Benders decomposition.

SP — Slave Problem in Benders decomposition.

DSP — Dual Slave Problem.

Conv(X) — Convex hull of X .

StHLPAD — Stochastic Hub Location Problem with Absolute Deviation.

Bibliography

1. *Lozkins A., Bure Vladimir M.* The criterion for comparing risks of samples from different distributions // The XLIX annual international conference on Control Processes and Stability (CPS'18). Abstracts. — St. Petersburg: Publishing House Fedorova G.V., 2018. — P. 92.
2. *Lozkins A., Bure V. M.* Empiricheskiy podhod ocenki ustoychivosti metodov klasterizatsii [The empirical approach of clustering methods stability assessing] // III international conference stability and control processes dedicated to the 85th anniversary of professor Vladimir I. Zubov. — St. Petersburg: Publishing House Fedorova G.V., 2015. — P. 431–433. — (in Russian).
3. *Lozkins A., Bure V. M.* Vibor raspredelitelnykh centrov v zadache o razmeschenii obyektov na osnovanii procedur statisticheskovo modelirovaniya // XIV International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference) May 30 - June 1, 2018 / ed. by V. Thai. — Moscow: ICS RAS, 2018. — P. 264–267. — (in Russian).
4. *Lozkins A.* Robust hub location problem // The L annual international conference on Control Processes and Stability (CPS'19). Abstracts. — St. Petersburg: Publishing House Fedorova G.V., 2019. — P. 87.
5. *Lozkins A., Bure V. M.* The criterion for comparing risks of samples from different distributions // Control processes and stability. — St. Petersburg: Publishing house Federova G. V., 2018. — P. 475–479. — (in Russian).
6. *Lozkins A.* Robust hub location problem // Control processes and stability. — St. Petersburg: Publishing house Federova G. V., 2019. — P. 440–444. — (in Russian).
7. *Lozkins A., Bure V. M.* The method of clusters stability assessing // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of VI Zubov (SCP). — IEEE. 2015. — P. 479–482.

8. *Lozkins A., Bure V. M.* Single hub location-allocation problem under robustness clustering concept // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. — 2017. — Vol. 13, no. 4. — P. 398–406.
9. *Lozkins A.* The distribution centres choice in the facility location problem on the basis of statistical modeling procedures // Vestnik SanktPeterburgskogo Universiteta. Seriya 10: Prikladnaya Matematika, Informatika, Protsessy Upravleniya. — 2018. — Vol. 14, no. 4. — P. 346–351.
10. *Lozkins A., Krasilnikov M., Bure V.* Robust uncapacitated multiple allocation hub location problem under demand uncertainty: minimization of cost deviations // Journal of Industrial Engineering International. — 2019. — Vol. 15, no. 1. — P. 199–207. — DOI: [10.1007/s40092-019-00329-9](https://doi.org/10.1007/s40092-019-00329-9).
11. *Lozkins A., Bure V. M.* Programma dlya opredeleniya ustoychivogo kolichestva raspredelitel'nykh centrov [The program for stable number of warehouses determination]. — 2018. — Svidetelystvo o gosudarstvennoy registracii programm dlya EVM No.2018665042 ot 29.11.2018 (in Russian).
12. *Lozkins A.* Programma dlya modelirovaniya robustnoy seti habov v usloviyah neopredelennosti sprosa [The program for robust hub network modeling under demand uncertainty]. — 2019. — Svidetelystvo o gosudarstvennoy registracii programm dlya EVM No.2019612304 ot 21.03.2019, (in Russian).
13. *O'Kelly M. E.* Activity levels at hub facilities in interacting networks // Geographical Analysis. — 1986. — Vol. 18, no. 4. — P. 343–356.
14. *O'Kelly M. E.* A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities // European journal of operational research. — 1987. — Vol. 32, no. 3. — P. 393–404.
15. *Campbell J. F., O'Kelly M. E.* Twenty-five years of hub location research // Transportation Science. — 2012. — Vol. 46, no. 2. — P. 153–169.

16. Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications / R. Z. Farahani [et al.] // *Computers & Industrial Engineering*. — 2013. — Vol. 64, no. 4. — P. 1096–1109.
17. *Contreras I.* Hub location problems // *Location science*. — Springer, 2015. — P. 311–344.
18. *Campbell J. F.* Location and allocation for distribution systems with transshipments and transportation economies of scale // *Annals of operations research*. — 1992. — Vol. 40, no. 1. — P. 77–99.
19. *Campbell J. F.* Integer programming formulations of discrete hub location problems // *European Journal of Operational Research*. — 1994. — Vol. 72, no. 2. — P. 387–405.
20. *Skorin-Kapov D., Skorin-Kapov J., O’Kelly M.* Tight linear programming relaxations of uncapacitated p-hub median problems // *European journal of operational research*. — 1996. — Vol. 94, no. 3. — P. 582–593.
21. *Ernst A. T., Krishnamoorthy M.* Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem // *European Journal of Operational Research*. — 1998. — Vol. 104, no. 1. — P. 100–112.
22. *Campbell J. F.* Hub location and the p-hub median problem // *Operations research*. — 1996. — Vol. 44, no. 6. — P. 923–935.
23. *Ernst A. T., Krishnamoorthy M.* An exact solution approach based on shortest-paths for p-hub median problems // *INFORMS Journal on Computing*. — 1998. — Vol. 10, no. 2. — P. 149–162.
24. *Klincewicz J. G.* A dual algorithm for the uncapacitated hub location problem // *Location Science*. — 1996. — Vol. 4, no. 3. — P. 173–184.
25. *Mayer G., Wagner B.* HubLocator: an exact solution method for the multiple allocation hub location problem // *Computers & Operations Research*. — 2002. — Vol. 29, no. 6. — P. 715–739.

26. Preprocessing and cutting for multiple allocation hub location problems / N. Boland [et al.] // *European Journal of Operational Research*. — 2004. — Vol. 155, no. 3. — P. 638–653.
27. Adapting polyhedral properties from facility to hub location problems / H. W. Hamacher [et al.] // *Discrete Applied Mathematics*. — 2004. — Vol. 145, no. 1. — P. 104–116.
28. *Marín A.* Uncapacitated Euclidean hub location: Strengthened formulation, new facets and a relax-and-cut algorithm // *Journal of Global Optimization*. — 2005. — Vol. 33, no. 3. — P. 393–422.
29. *Cánovas L., García S., Marín A.* Solving the uncapacitated multiple allocation hub location problem by means of a dual-ascent technique // *European Journal of Operational Research*. — 2007. — Vol. 179, no. 3. — P. 990–1007.
30. *Contreras I., Cordeau J.-F., Laporte G.* Benders decomposition for large-scale uncapacitated hub location // *Operations research*. — 2011. — Vol. 59, no. 6. — P. 1477–1490.
31. *Benders J. F.* Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems // *Numerische mathematik*. — 1962. — Vol. 4, no. 1. — P. 238–252.
32. *Camargo R. S. de, Miranda Jr G., Luna H. P.* Benders decomposition for the uncapacitated multiple allocation hub location problem // *Computers & Operations Research*. — 2008. — Vol. 35, no. 4. — P. 1047–1064.
33. *Sá E. M. de, Camargo R. S. de, Miranda G. de.* An improved Benders decomposition algorithm for the tree of hubs location problem // *European Journal of Operational Research*. — 2013. — Vol. 226, no. 2. — P. 185–202.
34. *Magnanti T. L., Wong R. T.* Accelerating Benders decomposition: Algorithmic enhancement and model selection criteria // *Operations research*. — 1981. — Vol. 29, no. 3. — P. 464–484.

35. *Papadakos N.* Practical enhancements to the Magnanti–Wong method // *Operations Research Letters*. — 2008. — Vol. 36, no. 4. — P. 444–449.
36. *Camargo R. S. de, Miranda Jr G. de, Luna H. P. L.* Benders decomposition for hub location problems with economies of scale // *Transportation Science*. — 2009. — Vol. 43, no. 1. — P. 86–97.
37. *Camargo R. S. de, Miranda G.* Single allocation hub location problem under congestion: Network owner and user perspectives // *Expert Systems with Applications*. — 2012. — Vol. 39, no. 3. — P. 3385–3391.
38. Formulations and decomposition methods for the incomplete hub location network design problem with and without hop-constraints / *R. S. de Camargo [et al.]* // *Applied Mathematical Modelling*. — 2017. — Vol. 51. — P. 274–301.
39. *Sá E. M. de, Morabito R., Camargo R. S. de.* Benders decomposition applied to a robust multiple allocation incomplete hub location problem // *Computers & Operations Research*. — 2018. — Vol. 89. — P. 31–50.
40. *Marianov V., Serra D.* Location models for airline hubs behaving as M/D/c queues // *Computers & Operations Research*. — 2003. — Vol. 30, no. 7. — P. 983–1003.
41. *Yang T.-H.* Stochastic air freight hub location and flight routes planning // *Applied Mathematical Modelling*. — 2009. — Vol. 33, no. 12. — P. 4424–4430.
42. *Sim T., Lowe T. J., Thomas B. W.* The stochastic p-hub center problem with service-level constraints // *Computers & Operations Research*. — 2009. — Vol. 36, no. 12. — P. 3166–3177.
43. *Contreras I., Cordeau J.-F., Laporte G.* Stochastic uncapacitated hub location // *European Journal of Operational Research*. — 2011. — Vol. 212, no. 3. — P. 518–528.

44. *Alumur S. A., Nickel S., Saldanha-da-Gama F.* Hub location under uncertainty // *Transportation Research Part B: Methodological*. — 2012. — Vol. 46, no. 4. — P. 529–543.
45. *Shahabi M., Unnikrishnan A.* Robust hub network design problem // *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. — 2014. — Vol. 70. — P. 356–373.
46. *Meraklı M., Yaman H.* Robust intermodal hub location under polyhedral demand uncertainty // *Transportation Research Part B: Methodological*. — 2016. — Vol. 86. — P. 66–85.
47. Robust uncapacitated hub location / C. A. Zetina [et al.] // *Transportation Research Part B: Methodological*. — 2017. — Vol. 106. — P. 393–410.
48. *Ghaffarinasab N.* An efficient matheuristic for the robust multiple allocation p-hub median problem under polyhedral demand uncertainty // *Computers & Operations Research*. — 2018. — Vol. 97. — P. 31–47.
49. *Eiselt H. A., Marianov V.* A conditional p-hub location problem with attraction functions // *Computers & Operations Research*. — 2009. — Vol. 36, no. 12. — P. 3128–3135.
50. *Gelareh S., Nickel S., Pisinger D.* Liner shipping hub network design in a competitive environment // *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. — 2010. — Vol. 46, no. 6. — P. 991–1004.
51. *Lüer-Villagra A., Marianov V.* A competitive hub location and pricing problem // *European Journal of Operational Research*. — 2013. — Vol. 231, no. 3. — P. 734–744.
52. *Marianov V., Serra D., ReVelle C.* Location of hubs in a competitive environment // *European Journal of Operational Research*. — 1999. — Vol. 114, no. 2. — P. 363–371.

53. A Stackelberg hub arc location model for a competitive environment / M. Sasaki [et al.] // *Computers & Operations Research*. — 2014. — Vol. 47. — P. 27–41.
54. *Sasaki M., Fukushima M.* Stackelberg hub location problem // *Journal of the Operations Research Society of Japan*. — 2001. — Vol. 44, no. 4. — P. 390–402.
55. *Alibeyg A., Contreras I., Fernández E.* Hub network design problems with profits // *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. — 2016. — Vol. 96. — P. 40–59.
56. *Alibeyg A., Contreras I., Fernández E.* Exact solution of hub network design problems with profits // *European Journal of Operational Research*. — 2018. — Vol. 266, no. 1. — P. 57–71.
57. *Taherkhani G., Alumur S. A.* Profit maximizing hub location problems // *Omega*. — 2019. — Vol. 86. — P. 1–15.
58. *Taherkhani G., Alumur S. A., Hosseini S. M.* Benders decomposition for profit maximizing hub location problems with capacity allocation. — 2019.
59. *Hamacher H. W. et al.* Adapting polyhedral properties from facility to hub location problems // *Discrete Applied Mathematics*. — 2004. — Vol. 145, no. 1. — P. 104–116.
60. *Artzner P. et al.* Coherent measures of risk // *Mathematical finance*. — 1999. — Vol. 9, no. 3. — P. 203–228.
61. *Rockafellar R. T. et al.* Optimization of conditional value-at-risk // *Journal of risk*. — 2000. — Vol. 2. — P. 21–42.
62. *Ahmadi-Javid A.* Entropic value-at-risk: A new coherent risk measure // *Journal of Optimization Theory and Applications*. — 2012. — Vol. 155, no. 3. — P. 1105–1123.

63. *Mercier A., Cordeau J.-F., Soumis F.* A computational study of Benders decomposition for the integrated aircraft routing and crew scheduling problem // *Computers & Operations Research*. — 2005. — Vol. 32, no. 6. — P. 1451–1476.
64. *Beasley J. E.* OR-Library: distributing test problems by electronic mail // *Journal of the operational research society*. — 1990. — Vol. 41, no. 11. — P. 1069–1072.
65. *Bisschop J.* AIMMS optimization modeling. — Lulu. com, 2006.
66. *Lai K.-K., Ng W.-L.* A stochastic approach to hotel revenue optimization // *Computers & Operations Research*. — 2005. — Vol. 32, no. 5. — P. 1059–1072.
67. *Van Slyke R. M., Wets R.* L-shaped linear programs with applications to optimal control and stochastic programming // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1969. — Vol. 17, no. 4. — P. 638–663.
68. *Sherali H. D., Lunday B. J.* On generating maximal nondominated Benders cuts // *Annals of Operations Research*. — 2013. — Vol. 210, no. 1. — P. 57–72.
69. *Oliveira F., Grossmann I. E., Hamacher S.* Accelerating Benders stochastic decomposition for the optimization under uncertainty of the petroleum product supply chain // *Computers & Operations Research*. — 2014. — Vol. 49. — P. 47–58.
70. *Taherkhani G.* Hub Location Problems with Profit Considerations. — 2019.

List of Figures

3.1	The CAB nodes location on the map	140
4.1	Average iteration time of Benders algorithms for different discount factors α on CAB data	172
4.2	Average iteration time of Benders algorithms for different discount factors α on AP data	177

List of Tables

2.1	Variety frequencies for each hub number	126
2.2	Value at risk for each hub number	126
3.1	Calculation results for the classical stochastic formulation	141
3.2	Calculation results for linear STHLPAD	143
3.3	The performance of the Benders algorithms	144
4.1	The computation results with CAB data for expected revenue HLP .	166
4.2	The computation results with CAB data for the robust formulation of HLP	168
4.3	The computation results with CAB data for the strengthened robust formulation of HLP	170
4.4	Benders algorithms performance on CAB data	171
4.5	The computation results with AP data for expected revenue HLP . .	173
4.6	The computation results with AP data for the robust formulation of HLP	174
4.7	The computation results with AP data for the strengthened robust formulation of HLP	175
4.8	Benders algorithms performance on AP data	176

Appendix A

The Benders algorithms of StHLPAD solution

A.1. Basic Benders decomposition algorithm

The formulation of the StHLPAD problem, notations and basic assumptions are presented in the Chapter 3. This appendix describes the Benders decomposition algorithm of the problem, where the theoretical description of justification is presented in Section 3.4.

The MP problem is stated as follows:

$$\mathbf{min} \quad \sum_{k \in K} a_k y_k + \eta \quad (\text{A.1})$$

$$S.t. \quad \eta + \sum_{s \in S} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} u_{ijk}^{sh} w_{ij}^s y_k \geq \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^{sh}, \quad (\text{A.2})$$

$$\sum_{k \in K} y_k \geq 1 \quad (\text{A.3})$$

$$y_k \in \{0, 1\} \quad k \in K \quad (\text{A.4})$$

$$\eta \geq 0 \quad (\text{A.5})$$

The DSP is formulated as:

$$\mathbf{max} \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^s - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^s w_{ij}^s y_k^h \quad (\text{A.6})$$

$$S.t. \quad e_s \leq 2\lambda p_s \quad s \in S \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned}
c_{ijkm}e_s - p_s c_{ijkm} \sum_{s \in S} e_s + v_{ij}^s - u_{ijk}^s - u_{ijm}^s \\
\leq c_{ijkm}p_s \quad i, j \in N, k \neq m, k, m \in K, s \in S
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$c_{ijkk}e_s - p_s c_{ijkk} \sum_{s \in S} e_s + v_{ij}^s - u_{ijk}^s \leq c_{ijkk}p_s \quad i, j \in N, k \in K, s \in S \tag{A.9}$$

$$e_s \geq 0 \quad s \in S \tag{A.10}$$

$$v_{ij}^s \in R \quad i, j \in N, s \in S \tag{A.11}$$

$$u_{ijk}^s \geq 0 \quad i, j \in N, k \in K, s \in S \tag{A.12}$$

The Benders algorithm scheme is presented below, where $\phi_{MP}(y, \eta)$ and $\phi_{DSP}(e, u, v)$ are the optimal values of objective function of MP and DSP problems, respectively.

Algorithm 5: A basic Benders decomposition algorithm for StHLPAD

UB \leftarrow $+\infty$, LB \leftarrow 0, $h \leftarrow$ 0

while $UB \neq LB$ **do**

 Solve MP (A.1)–(A.5)

 LB \leftarrow $\phi_{MP}(y, \eta)$

 Solve DSP (A.6)–(A.12)

 Add cut (A.2) to MP

if $\phi_{DSP}(e, u, v) + \sum_{k \in K} a_k y_k < UB$ **then**

 | UB = $\phi_{DSP}(e, u, v) + \sum_{k \in K} a_k y_k$

else

 | Nothing

end

$h \leftarrow h + 1$

end

A.2. Accelerated Benders algorithm

This section describes an accelerated Benders decomposition algorithm based on Pareto-optimal cuts generation, the theoretical justification of the algorithm is given in the Section 3.5.

We introduce an auxiliary problem for finding the Pareto-optimal cuts:

$$\mathbf{max} \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{ij}^s v_{ij}^s - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} u_{ijk}^s w_{ij}^s \hat{y}_k^{(h)} \quad (\text{A.13})$$

$$S.t. \quad e_s \leq 2\lambda p_s \quad s \in S \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} c_{ijkm} e_s - p_s c_{ijkm} \sum_{s \in S} e_s + v_{ij}^s - u_{ijk}^s - u_{ijm}^s \\ \leq c_{ijkm} p_s \quad i, j \in N, k \neq m, k, m \in K, s \in S \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$c_{ijkk} e_s - p_s c_{ijkk} \sum_{s \in S} e_s + v_{ij}^s - u_{ijk}^s \leq c_{ijkk} p_s \quad i, j \in N, k \in K, s \in S \quad (\text{A.16})$$

$$e_s \geq 0 \quad s \in S \quad (\text{A.17})$$

$$v_{ij}^s \in R \quad i, j \in N, s \in S \quad (\text{A.18})$$

$$u_{ijk}^s \geq 0 \quad i, j \in N, k \in K, s \in S \quad (\text{A.19})$$

Algorithm 6: An improved Benders decomposition for StHLPAD

$UB \leftarrow +\infty, LB \leftarrow 0, h \leftarrow 0, \gamma, \hat{y}^{(0)}$
while $UB \neq LB$ **do**
 Solve DSP (A.13)–(A.19)
 Add cut (A.2) to MP
 Solve MP (A.1)–(A.5)
 $LB \leftarrow \phi_{MP}(y, \eta)$
 Solve DSP (A.6)–(A.12)
 Add cut (A.2) to MP
 Update Magnanti and Wong point (3.35)
 if $\phi_{DSP}(e, u, v) + \sum_{k \in K} a_k y_k < UB$ **then**
 $UB = \phi_{DSP}(e, u, v) + \sum_{k \in K} a_k y_k$
 else
 Nothing
 end
 $h \leftarrow h + 1$
end
