

ОТЗЫВ

члена диссертационного совета на диссертацию

Аббасова Меджида Эльхан оглы на тему:

«Экзостеры и коэксостеры в недифференцируемой оптимизации»,

представленную на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

по специальности 01.01.09 – Дискретная математика и математическая
кибернетика

Актуальность темы исследования, его практическая и теоретическая значимость

В теории негладкого анализа, одно из центральных мест занимает понятие субдифференциала. Оно позволяет эффективно работать с классом выпуклых функций. Для работы с более широким классом негладких функций предлагаются различные подходы. Среди них стоит особо выделить конструктивный подход (то есть легко используемый при реализации и применении методов и алгоритмов), разрабатываемый в Санкт-Петербургском Государственном Университете научной школой В.Ф. Демьянова. Данный подход базируется на понятии экзостеров и коэксостеров, являющихся семействами выпуклых компактов, позволяющими представлять приращение исследуемой функции в окрестности рассматриваемой точки в виде максимина либо минимакса линейных и аффинных функций.

Теория экзостеров и коэксостеров — новая, недавно появившаяся ветвь негладкого анализа. Особую направленность диссертации составляет построение теории экзостеров и коэксостеров, обоснование и развитие ее основных положений. Исследования в данном направлении, изложению результатов которых и посвящена настоящая диссертационная работа, безусловно являются актуальными и исключительно важными как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка обозначений, списка литературы и приложений.

Основные результаты, полученные в работе, их научная новизна

В **Главе 1**, посвященной теории экзостеров, получены условия экстремума в терминах обобщенных экзостеров, доказана теорема существования

Вх. № 09/2 - 283 от 06.08.2019

обобщенных экзостеров. Проведен сравнительный анализ применения экзостеров и квазидифференциалов для решения задач недифференцируемой оптимизации; выведены условия экстремума с ограничениями экзостерной функции на экзостерном множестве; описаны новые условия минимальности экзостеров, а также представлена техника сужения этих семейств. Указанные результаты изложены в следующих основных публикациях автора:

- Generalized exhausters: Existence, construction, optimality conditions // *Journal of Industrial and Management Optimization (JIMO)*. American Institute of Mathematical Sciences, 2015. Volume 11, Number 1, 217 - 230.
- Условия экстремума в терминах обобщенных несобственных экзостеров // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10 Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2013. 3. 3-8.
- Comparison Between Quasidifferentials and Exhausters // *Journal of Optimization Theory and Applications*. Springer US, 2017. Vol. 175(1). 59–75.
- Geometric conditions of reduction of exhausters // *Journal of Global Optimization*. 2018. DOI 10.1007/s10898-018-0683-5.

В **Главе 2**, посвященной теории коэксостеров, представлены условия экстремума с ограничениями в терминах коэксостеров; описаны новые условия минимальности коэксостеров; разработано исчисление коэксостеров второго порядка; для подкласса функций максимума разработан метод минимизации второго порядка, основанный на коэксостерах второго порядка. К наиболее важным публикациям, в которых отражаются данные результаты можно отнести следующие статьи соискателя:

- Условия экстремума с ограничениями в терминах собственных и несобственных коэксостеров // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2019. 15(2). 160-172.
- Сокращение и минимальность коэксостеров // *Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия*. 2018. 51(1). 3-12.
- Исчисление коэксостеров второго порядка // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2018. Т. 14. Вып. 4. 276–285.
- Second-Order Minimization Method for Nonsmooth Functions Allowing Convex Quadratic Approximations of the Augment // *Journal of Optimization Theory and Applications*. Springer US, 2016. 171(2). 666-674.

Стоит отметить, что первые две главы также существенным образом используют результаты, представленные автором в более ранних публикациях:

- М. Э. Аббасов, В. Ф. Демьянов Условия экстремума негладкой функции в терминах экзостеров и коэкзостеров // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. 15, № 4. 10-19.
- М. Э. Аббасов Условия экстремума в терминах несобственных экзостеров // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10 Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. 2. 3-8.
- М. Э. Аббасов Нахождение стационарных точек функций, допускающих неоднородные аппроксимации приращения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10 Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2012. 1. 3-8.
- M. E. Abbasov, V. F. Demyanov Proper and adjoint exhausters in nonsmooth analysis: optimality conditions // Journal of Global Optimization. Springer US, 2013. Volume 56, Issue 2. 569-585.
- M. E. Abbasov, V. F. Demyanov Adjoint Coexhausters in Nonsmooth Analysis and Extremality Conditions // Journal of Optimization Theory and Applications. Springer US, 2013. Volume 156, Issue 3. 535-553.

В Главе 3 описывается Метод Заряженных Шариков, разработанный соискателем для решения вспомогательных задач, возникающих в недифференцируемой оптимизации, а также важных проблем вычислительной геометрии, таких как поиск минимального расстояния между двумя множествами с гладкой границей, поиск минимального расстояния между двумя гладкими кривыми в трехмерном пространстве. Здесь также предложены новые эвристические вероятностные алгоритмы решения важной подзадачи, возникающей в недифференцируемой оптимизации, а именно задачи поиска ортогональной проекции точки на множество. Указанные алгоритмы могут быть применены и для поиска начального приближения при применении Метод Заряженных Шариков.

В качестве важнейших публикаций, в которых представлены результаты данной главы, можно указать следующие:

- М.Э. Аббасов Метод заряженных шариков для решения некоторых задач вычислительной геометрии // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. 359-369.
- Majid Abbasov and Vladimir Bure Randomized heuristic algorithms for orthogonal projection of a point onto a set // Communications in Statistics - Simulation and Computation. 2018. DOI:10.1080/03610918.2018.1469764.

Теоретическая значимость диссертационной работы состоит в построении и развитии основных положений теории экзостеров и коэкзостеров, нахождении условия экстремума в терминах обобщенных экзостеров, доказательстве теоремы существования обобщенных экзостеров, формулировке условия экстремума с ограничениями экзостерной функции на

экзостерном множестве, разработке исчисления коэкзостеров второго порядка.

Достоверность, степень обоснованности и новизна

Все полученные в диссертационной работе основные результаты и оптимизационные методы являются достоверными и обоснованными, что подтверждается:

- корректностью проведенных математических выкладок, строгостью доказательств полученных теорем,
- результатами численных экспериментов,
- достаточным количеством публикаций в рецензируемых изданиях, рекомендуемых ВАК, а также в высокорейтинговых рецензируемых англоязычных математических журналах, индексируемых в наукометрических базах Web of Science и Scopus,
- поддержкой проектов по теме данного исследования, руководителем и участником которых является (являлся) соискатель, со стороны экспертов Российского Научного Фонда (РНФ), а также Российского Фонда Фундаментальных Исследований (РФФИ),
- апробацией результатов на крупных научных международных и всероссийских конференциях и семинарах, на которых были представлены и обсуждались с ведущими мировыми и российскими экспертами в данной области доклады соискателя настоящей диссертационной работы.

Все теоретические результаты продемонстрированы на примерах и использованы в численных экспериментах. Все полученные в работе основные результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Замечания

1. Для полноты изложения параграфа 1.2 на стр. 20 следовало бы отметить, например, в форме замечания, что в случае, если функций $F_1(x)$, $F_2(x)$ квазидифференцируемы, верхний экзостер для функции $H_1(g)$, а также нижний экзостер для функции $H_2(g)$ могут быть получены с помощью квазидифференциалов.
2. Описание правила умножения бикоэкзостера на число (стр. 133) можно было опустить, так как оно аналогично правилу умножения биэкзостера на число, описанному на стр. 18.


3. На стр. 106 для иллюстрации преимуществ предлагаемых в диссертации геометрических условий минимальности экзостеров над ранее разработанными для решения проблемы подходами, читателю предлагается обратиться к примеру 1.7.4, который описан на стр. 86. Отсылка к материалу, расположенному на 20 страниц ранее, усложняет работу читателя. Данный пример необходимо было привести непосредственно на стр. 106.

Сделанные замечания не влияют на общее благоприятное впечатление от представленной диссертационной работы, являющейся законченным научным исследованием, выполненным на высоком математическом уровне.

Диссертация Аббасова Меджида Эльхан оглы на тему: «Экзостеры и коэкзостеры в недифференцируемой оптимизации» соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 01.09.2016 № 6821/1 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», а ее автор Аббасов Меджид Эльхан оглы заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика. Пункт 11 указанного Порядка диссертантом не нарушен.

27 июня 2019 г.

Член диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор Федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Санкт-Петербургский
государственный университет»


В.В. Захаров