



UNSW
SYDNEY

School of Mathematics and Statistics
The University of New South Wales
Kensington Campus
New South Wales 2052 (Australia)
26 August 2019

ОТЗЫВ

члена диссертационного совета на диссертацию

Аббасова Меджида Ольхан оглы

на тему: «Экзостеры и Коэкзостеры в Недифференцируемой Оптимизации»,
представленную на соискание ученой степени доктора наук по
специальности 01.01.09 - дискретная математика и математическая
кибернетика.

Эта прекрасно оформленная и иллюстрированная работа посвящена теме экзостеров и некоторым их приложениям, разработанным автором.

Экзостеры являются одним из наиболее элегантных и в то же время конструктивных обобщений субдифференциалов, предложенных для изучения условий оптимальности негладких функций и построения обобщённых численных методов. Экзостеры были изначально предложены В. Демьяновым и его соавтором А. Рубиновым в начале 90-х годов, а их исчисление разработано преимущественно научной группой В. Демьянова в Санкт-Петербурге. Экзостеры заинтересовали серьёзных математиков не только в России, но и за рубежом. Здесь стоит отметить работы В. Гороховика, Д. Паллашке, А. Удерцо, и их соавторов. К сожалению, исчисление обобщённых субдифференциалов – это область математики, на которой чрезвычайно негативно сказалась нынешняя ситуация в негладком анализе, спровоцированная личными интересами нескольких влиятельных математиков, агрессивно продвигавших свои работы, зачастую в ущерб математическим идеям и вопреки здравому смыслу. Из-за этих проблем исчисление экзостеров не приобрело пока той популярности в мировом сообществе, которой оно, безусловно, заслуживает. Так что при оценке актуальности этой работы стоит учитывать таким образом сложившийся мировой контекст и то, что в недалёком будущем барьеры для дальнейшего изучения и приложений экзостеров исчезнут в силу естественных причин.

На данный момент автор работы является мировым лидером в исчислении экзостеров и коэкзостеров. Им был получен ряд новых результатов, характеризующих условия оптимальности, в том числе в задаче с ограничениями, новые методы уменьшения размера экзостеров, а также разработаны численные методы, основанные на экзостерах и коэкзостерах. Математический аппарат, используемый автором, основывается на

09/2-310 am 26.08.2019

современных методах выпуклого анализа, при этом результаты, изложенные в работе, а также их доказательства, зачастую неожиданны, основаны на уникальных идеях автора, и демонстрируют глубокое понимание выпуклой геометрии и представлений функций и множеств через семейства выпуклых объектов.

Математический стиль автора, не только в этой работе, но и в его многочисленных публикациях, отличается превосходной техникой доказательств, сопровождающихся детальными объяснениями, примерами и иллюстрациями, подчёркивающими нетривиальные наблюдения и тонкости, связанные с полученными результатами.

Наиболее интересные результаты автора, изложенные в работе, с моей точки зрения, укладываются в три основных темы.

Геометрические условия минимальности экзостеров и коэкзостеров, предложенные автором, имеют практическое значение, а также представляют из себя свежий взгляд на задачу по сравнению с существовавшими до этого методами. Экзостеры определены неединственным образом – это цена, которую приходится платить за их простоту использования и вычисления на практике. Из-за этой неединственности экзостер может «расти» в процессе вычислений, что негативно отражается на скорости и точности численных методов. Сокращение размера экзостеров – важно вследствие этого феномена. Следует отметить, что задача сокращения является крайне нетривиальной. В частности, известно (из работ Д. Паллашке и соавторов), что минимальный экзостер может быть неединственным, к тому же, существуют разные определения минимальности.

Условия экстремума в терминах экзостеров, обобщённых экзостеров и коэкзостеров, полученные автором, являются существенным вкладом в негладкий анализ и оптимизацию. Ценность этих результатов – в том, что они значительно расширяют возможности экзостеров, позволяя работать с широким классом функций и ограничений, и предлагают выбор альтернативных техник, подходящих для практического применения в различных приложениях. Автором были получены условия оптимальности в терминах обобщённых экзостеров, а также условия оптимальности с ограничениями через экзостеры и коэкзостеры. Это – серьёзная работа, требующая глубокого понимания геометрии и нестандартных подходов к доказательствам и формулировкам результатов.

Метод заряженных шариков позволяет строить проекцию точки на выпуклое гладкое множество итеративным способом. В этом методе прекрасно всё – идея, название, потенциальные приложения. Характерное свойство

современных оптимизационных задач – их огромная размерность. Для решения этих задач совершенно не годятся сложные методы, использующие матричные вычисления (например, метод внутренней точки, который до недавнего времени являлся де факто стандартом для решения выпуклых задач). По этой причине в последние годы методы, основанные на довольно-таки древних идеях градиентного спуска и проектировании на множество ограничений, пользуются большой популярностью. В то время как градиентный спуск обычно не представляет больших проблем, и может быть реализован оптимальным образом при помощи современных техник ускорения, задача проектирования на выпуклое множество, – это камень преткновения в практической реализации таких алгоритмов. Метод заряженных шариков – это ценная и своевременная идея, хотелось бы, чтобы она нашла широкое применение в контексте современных проективных методов.

Основные результаты, изложенные в диссертации, были опубликованы автором в научных изданиях на русском и английском языках. Статьи автора, опубликованные на английском языке, представлены в ведущих журналах в области негладкой оптимизации. В частности, журналы *Journal of Global Optimization* и *Journal of Optimization Theory and Applications* не только считаются престижными изданиями внутри математического сообщества, но также находятся в первом квартиле (Q1) по индексу Scimago, что является общепризнанной метрикой высокого качества издания. Я не обладаю достаточными знаниями о рейтингах и репутации российских журналов, поэтому воздержусь от такого рода комментариев о русскоязычных статьях.

Относительно слабых сторон работы, я бы хотела сделать два замечания, которые относятся скорее к изложению, чем к научным результатам. Во-первых, на мой взгляд, не очень понятна мотивация для изучения экзостеров. С момента появления экзостеров в начале 90х годов, то есть больше 25 лет тому назад, насколько я понимаю, не было найдено ни одного серьёзного приложения экзостеров и коэкзостеров к практическим задачам. Это оставляет впечатление о некоторой бесцельности исследований в этом направлении, с практической точки зрения. Во-вторых, за последние 10 лет было опубликовано несколько интересных работ на тему экзостеров, которые рассматривают задачи, очень близкие по тематике к теме данного исследования, а некоторые из них близки по стилю и методам к исследованиям автора (я имею в виду работы Мурзабековой, Гороховика и Трафимович, Даниилидиса, Петижана и Санг, Удерцо). Некоторые из этих работ процитированы и упомянуты вскользь, но, на мой взгляд, им должно было быть уделено больше внимания.

Эти замечания не умаляют достоинств работы, которая содержит новые интересные результаты, основана на публикациях автора в ведущих научных журналах, профессионально оформлена, и в целом производит очень положительное впечатление.

Диссертация Аббасова Меджида Ольхан оглы на тему: «Экзостеры и Коэкзостеры в Недифференцируемой Оптимизации» соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 01.09.2016 № 6821/1 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», соискатель Аббасова Меджида Ольхан оглы полностью заслуживает присуждения ученой степени доктора наук по специальности 01.01.09 - дискретная математика и математическая кибернетика. Пункт 11 указанного Порядка диссертантом не нарушен.

Член диссертационного совета
PhD (Applied Mathematics)
Senior Lecturer (UNSW Sydney)



Рощина Вера Алексеевна

26 августа 2019 года