

ОТЗЫВ

председателя диссертационного совета
на диссертацию **Аббасова Меджида Эльхан оглы** на тему:
«Экзостеры и коэкзостеры в недифференцируемой оптимизации»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

Негладкий анализ зародился в начале прошлого столетия и получил широкое развитие во второй половине двадцатого века. В настоящее время он находит многочисленные применения всюду, где встречаются негладкие функции. Поэтому **актуальность** исследований в данной области не вызывает сомнений. Особенно интересные применения получены в задачах оптимизации. Негладкий анализ имеет дело с функциями, которые являются недифференцируемыми в обычном смысле, и уходит корнями в выпуклый анализ. Именно для выпуклых функций было впервые введено понятие обобщенного градиента, или субградиента, и рассматривался субдифференциал как множество всех субградиентов. Эти понятия сыграли фундаментальную роль во многих задачах оптимизации, в которых используются выпуклые функции.

В.Ф. Демьянов внес существенный вклад в развитие негладкого анализа. Ему принадлежит множество оригинальных идей и результатов. В частности, В.Ф. Демьяновым и А.М. Рубиновым были введены понятия квазидифференцируемой функции и квазидифференциала. Квазидифференциал представляет собой пару выпуклых множеств (субдифференциал и супердифференциал). С помощью субдифференциалов выпуклых функций и квазидифференциалов квазидифференцируемых функций можно строить однородные аппроксимации приращения соответствующих функций и изучать их свойства. Поскольку субдифференциальное (квазидифференциальное) отображение не является непрерывным в метрике Хаусдорфа, эти объекты сложно применять к конструированию непрерывных методов оптимизации. Для преодоления этих трудностей В.Ф. Демьянов ввел в рассмотрение понятие кодифференцируемой функции и кодифференциала. Кодифференциал также представляет собой пару выпуклых множеств (гиподифференциал и гипердифференциал). С помощью кодифференциала строятся неоднородные аппроксимации, которые в случае непрерывности кодифференциального отображения могут быть использованы в построении конструктивных численных методов.

Развитие идей в этой области с целью охвата большего класса функций привело к появлению экзостеров и коэкзостеров — новых понятий в негладком анализе.

Для произвольных дифференцируемых по направлениям функций Б.Н. Пшеничный ввел понятия верхних выпуклых и нижних вогнутых аппроксимаций, а А.М. Рубинов - понятия исчерпывающих семейств верхних выпуклых и нижних вогнутых аппроксимаций. Соответствующие двойственные объекты – верхний и нижний экзостеры (введенные В.Ф. Демьяновым и А.М. Рубиновым) – позволили описать условия экстремума таких функций, найти направления наискорейшего спуска и подъема и построить численные методы. С помощью экзостеров строятся однородные аппроксимации приращения

Вх № 09/2 - 284 от 06.08.2014

функций. Экзостеры представляют собой семейства выпуклых компактов. Как и субдифференциальное отображение, экзостерные отображения являются разрывными. В.Ф. Демьяновым были введены понятия верхнего и нижнего коэкзостеров (это семейства выпуклых компактов в пространстве на единицу большей размерности). С помощью коэкзостеров строятся неоднородные аппроксимации приращения функций. В случае непрерывности коэкзостерного отображения можно строить эффективные методы для решения экстремальных задач. Поэтому настоящее диссертационное исследование, в котором развивается описанный аппарат, а также исследуются актуальные проблемы, с ним связанные, представляет непосредственный **теоретический и практический** интерес.

Перечислим новые результаты, полученные в данной диссертационной работе.

- Исследованы обобщенные экзостеры, для них доказана теорема существования, носящая конструктивный характер, в терминах этих объектов описаны условия экстремума.
- Выполнено сравнение применения экзостеров и квазидифференциалов для решения задач недифференцируемой оптимизации, показано, что при решении оптимизационных задач даже для квазидифференцируемых функций лучше использовать экзостеры, а не квазидифференциалы (любая квазидифференцируемая функция имеет экзостеры, обратное же неверно).
- Выведены условия экстремума с ограничениями в терминах экзостеров и коэкзостеров.
- Предложены геометрические условия минимальности экзостеров и коэкзостеров и техника сокращения этих семейств. Приведены примеры, в которых данная методика позволяет сокращать указанные семейства, а имевшиеся до этого подходы — нет.
- Разработано исчисление коэкзостеров второго порядка. Для подкласса функций максимума разработан метод минимизации второго порядка, основанный на коэкзостерах второго порядка.
- Построен Метод Заряженных Шариков, а также несколько простых в реализации эвристических вероятностных алгоритмов для решения вспомогательных задач, возникающих при реализации алгоритмов недифференцируемой оптимизации. Разработанные методы могут применяться и для решения некоторых важных задач вычислительной геометрии.

Все указанные результаты были доложены на международных и всероссийских конференциях, опубликованы в иностранных и российских рецензируемых журналах, в том числе, входящих в первый квартиль (Q1) по импакт-фактору JCR. О **достоверности** полученных результатов свидетельствуют строгие доказательства всех сформулированных математических утверждений. Диссертационная работа логически структурирована, содержит достаточное количество примеров, поясняющих полученные результаты. Однако к ней есть некоторые **замечания**.

1. Следовало больше внимания уделить историческому обзору, дополнив и расширив соответствующую часть введения.

2. Так как квазидифференциалы определяются неоднозначно, в теоремах исчисления этих объектов в пункте 1.4.4 фразы «функция f квазидифференцируема в точке x_0 и [формула]» лучше заменить на «функция f квазидифференцируема в точке x_0 и допускает квазидифференциал вида [формула]».
3. Текст можно было немного сократить, если останавливаться подробно лишь на условиях минимума в терминах экзостеров и коэкзостеров, давая пояснение о том, что условия максимума могут быть получены аналогично.
4. В работе имеются опечатки и несколько пунктуационных ошибок.

Приведенные замечания не снижают научной и практической ценности данного исследования. Настоящая работа вносит существенный вклад в развитие теории негладкого анализа.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертационная работа на тему: «Экзостеры и коэкзостеры в недифференцируемой оптимизации» соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 01.09.2016 № 6821/1 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», а ее автор – **Аббасов Меджид Эльхан оглы** заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика. Пункт 11 указанного Порядка диссертантом не нарушен.

Председатель диссертационного совета
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор с возложенными обязанностями
заведующего Кафедрой математической теории
моделирования систем управления
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»



Л.Н. Полякова

3 июля 2019 г.

Полякова Людмила Николаевна
198504 Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский просп., 35.
Тел.: +7 (812) 428-44-68
E-mail: l.polyakova@spbu.ru