

## Отзыв

члена диссертационного совета на диссертацию  
Аббасова Меджида Эльхан оглы на тему:  
«Экзостеры и коэкзостеры в недифференцируемой оптимизации»,  
представленную на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук  
по специальности 01.01.09 – Дискретная математика и математическая  
кибернетика

Бурное развитие методов недифференцируемой оптимизации началось в середине XX века с введением понятия субдифференциала для выпуклой функции. Дальнейшие исследования привели к появлению различных обобщений этого понятия (одним из наиболее известных из которых является субдифференциал Кларка), позволивших охватить большой класс негладких функций. Научной школой В.Ф. Демьянова и А.М. Рубинова были предложены новые идеи по данному направлению. В результате развития этих идей появились экзостеры и коэкзостеры — инструменты негладкого анализа, с помощью которых удается исследовать экстремальные свойства недифференцируемых функций. Диссертационная работа М.Э. Аббасова посвящена развитию теории экзостеров и коэкзостеров. Учитывая, что количество задач недифференцируемой оптимизации, возникающих в самой математике, а также в различных приложениях постоянно растет, исследования в данной области, которым посвящена настоящая работа, являются актуальными и имеют высокую теоретическую и практическую значимость.

Отметим наиболее важные результаты диссертационной работы.

В первой главе исследуются собственно экзостеры. Это семейства выпуклых компактов, позволяющие представлять главную часть приращения функции в виде  $\max \min$  ( $\sup \inf$ ) либо  $\min \max$  ( $\inf \sup$ ) линейных функций. Для любой квазидифференцируемой функции можно построить экзостер, но не любая функция, имеющая экзостер, является квазидифференцируемой. Диссертантом проведен сравнительный анализ применения экзостеров и квазидифференциалов для решения задач недифференцируемой оптимизации. Показано, что использование экзостеров для оптимизации квазидифференцируемых функций, приводит к меньшим или таким же вычислительным затратам, по сравнению с использованием квазидифференциалов. В этой же главе получены условия экстремума в терминах обобщенных экзостеров, доказана теорема их существования. Выведенные условия минимальности экзостеров, а также описанная техника сокращения этих семейств, допускают наглядную геометрическую интерпретацию и позволяют добиться сокращения семейств в некоторых случаях, когда существовавшие до этого методы оказываются бессильными. В этой же главе разработаны условия экстремума для функции, имеющей экзостер, и заданной на множестве, которое определяется с помощью другой функции, также имеющей экзостер.

Вторая глава посвящена коэкзостерам. Они представляют собой семейства выпуклых компактов в пространстве на единицу большей размерности, чем размерность

рассматриваемой задачи, и позволяют представлять главную часть приращения функции в виде максимина либо минимакса аффинных функций. Здесь описаны новые условия минимальности коэкозостеров, а также техника сокращения этих семейств; выведены условия экстремума с ограничениями в терминах коэкозостеров; разработано исчисление коэкозостеров второго порядка; для подкласса функций максимума разработан метод минимизации второго порядка, основанный на коэкозостерах второго порядка.

В заключительной, третьей главе предлагаются новые алгоритмы для решения вспомогательных задач, с которыми приходится сталкиваться при реализации многих методов недифференцируемой оптимизации. Метод Заряженных Шариков, относящийся к так называемому классу методов установления, так же как и разработанные в диссертации эвристические вероятностные алгоритмы, могут использоваться для решения задачи ортогонального проектирования точки на множество. Причем, область применимости вероятностных алгоритмов существенно шире, чем таковая для Метод Заряженных Шариков, поскольку для их реализации достаточно лишь иметь возможность проверки принадлежности множеству произвольной точки.

Все перечисленные результаты являются новыми; они опубликованы в ведущих российских и зарубежных рецензируемых научных журналах, докладывались на конференциях и семинарах. Текст работы удовлетворительно читается, все выдвигаемые научные положения строго обоснованы, выкладки и преобразования реализованы корректно. Стоит особо отметить, что проекты, посвященные данной тематике, руководителем которых является диссертант, прошли экспертизу и были поддержаны экспертами Российского Научного Фонда (РНФ) (проект №18-71-00006 «Построение и исследование методов решения актуальных задач негладкого анализа и дифференциальных включений»), а также Российского Фонда Фундаментальных Исследований (РФФИ) (проект № 18-31-00014 «Разработка современных методов недифференцируемой оптимизации и их приложения»).

Диссертационное исследование выполнено на высоком математическом уровне. Однако работа не лишена недостатков.

1. В работе не обозначена позиция диссертационных результатов относительно текущего уровня мировой науки в данном направлении. Подавляющее большинство цитируемых работ - книги второй половины XX века; публикаций позднее 2010 г. (исключая научную школу самого диссертанта) - считанные единицы.
2. В табл. 3.9 (стр. 231) некорректно представлены результаты измерения времени вычислений. Отсутствует обоснование правил округления до шестого знака после запятой, что видится достаточно странным в силу того, что такие масштабы точности сопоставимы с временем работы системных процессов, параллельно использующих ресурсы компьютера (фактически - "шумом" операционной системы); т.е. результат эксперимента теряет статистическую значимость.
3. Глобальный минимум (максимум) всегда является также и локальным минимумом (максимумом), поэтому в формулировке теорем 1.4.3, 1.4.4 стоило ограничиться упоминанием лишь локального экстремума.

4. Обозначение  $\text{int}$ , появляющееся впервые на стр. 27, нигде ранее не расшифровывается. Из текста ясно, что оно означает внутренность (от английского interior) множества, однако для упрощения работы читателя, следовало в работе хотя бы раз дать пояснения по этому поводу.

Несмотря на сделанные замечания, диссертация является законченным научным трудом и заслуживает высокой оценки. В ней представлены новые теоретические положения, разработаны новые методы и алгоритмы, что в совокупности дает возможность трактовать данное исследование как существенное научное продвижение в области недифференцируемой оптимизации и негладкого анализа.

Диссертация Аббасова Меджида Эльхан оглы на тему: «Экзостеры и коэкзостеры в недифференцируемой оптимизации» соответствует основным требованиям, установленным Приказом от 01.09.2016 № 6821/1 «О порядке присуждения ученых степеней в Санкт-Петербургском государственном университете», соискатель Аббасов Меджид Эльхан оглы заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика. Пункт 11 указанного Порядка диссертантом не нарушен.

Член диссертационного совета  
доктор технических наук

А.В. Бухановский

Санкт-Петербургский национальный  
исследовательский университет информационных  
технологий, механики и оптики

27 августа 2019 г.



Подпись: Бухановский А.В.  
Инициалы: А.В.

Инициалы: А.В.  
Подпись: Бухановский А.В.