Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

На правах рукописи

МАРКОВ НИКОЛАЙ СЕРГЕЕВИЧ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ СТРУКТУР С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Специальность: 01.02.04 — механика деформируемого твёрдого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
Чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., А.М. Кривцов

Санкт-Петербург — 2019

Оглавление

Введение **4**

1 Обзор методов решения задач механики для слоистых структур **10**

1.1 История развития методов решения задач для слоистых структур 10

1.2 Решение прикладных задач механики для слоистых структур. Гидроразрыв пласта 14

2 Построение функции Грина для слоистой среды **21**

2.1 Граничные интегральные уравнения для кусочно-однородной среды 21

2.2 Слоистая структура 24

2.3 Метод нахождения функции Грина для слоистой структуры . . . 26

2.4 Построение функция Грина для двумерного оператора Лапласа . 32

2.5 Точность нахождения функции Грина 38

2.6 Круговое отверстие в слоистой среде 45

2.7 Построение функции Грина для трехмерного оператора Ламе . . 52

2.8 Радиальная трещина под действием равномерного давления в трехмерной слоистой среде 58

2.9 Выводы 66

3 Модифицированная псевдотрехмерная модель распространения плоской трещины в слоистой среде **69**

3.1 Псевдотрехмерная модель трещины гидроразрыва пласта 69

3.2 Постановка задачи о псевдотрехмерной трещине в слоистой среде 70

3.3 Принцип соответствия 78

3.4 Начальные условия 80

3.5 Численные результаты 84

3.6 Выводы 87

Заключение **88**

Список литературы **90**

Введение

Актуальность темы

Исследование поведения и свойств слоистых структур с неоднородностями – одна из важнейших задач современной науки ввиду широкого распространения таких структур в окружающем мире. Слоистые структуры часто рассматриваются в задачах механики материалов, строительного инжиниринга, механики грунтов, добычи полезных ископаемых, электротехники, оптики, гидродинамики, а так же во многих других областях науки и техники. Для описания поведения таких структур используются как аналитические, так и численные методы. При численном моделировании слоистых структур чаще всего применяются метод конечных элементов, метод граничных элементов, а так же метод динамики частиц, активно развиваемый в последние годы. Методы конечных элементов и динамики частиц требуют наличия значительных вычислительных мощностей для моделирования процессов, происходящих в слоистых средах. На практике для решения прикладных задач, возникающих при исследовании слоистых структур с неоднородностями, чаще всего применяется метод граничных элементов. Использование метода граничных элементов возможно только в том случае, когда известна функция Грина для структуры без неоднородностей. В общем случае функция Грина слоистой среды может быть найдена только численно. Методы расчета функции Грина для слоистых структур, представленные в научной литературе, не содержат необходимой информации об особенностях их численной реализации. Более того, некоторые практически важные случаи, например, построение функции Грина слоистой структуры для двумерного оператора Лапласа, не представлены в литературе.

Одна из важнейших прикладных задач для слоистых структур включает моделирование роста трещины в упругой слоистой среде под действием внутреннего давления. Такая задача чаще всего возникает при моделировании процесса гидроразрыва пласта, активно применяемого в нефтегазовой промышленности. Учет слоистости в рамках данной задачи чаще всего осуществляется двумя способами. Первый способ состоит в расчете раскрытия трещины методом граничных элементов. В случае слоистой среды такой метод позволяет учесть как различие упругих свойств слоев, так и различие напряжений в слоях. Второй способ учитывает слоистость только через рассмотрение различных напряжений в слоях. В этом случае расчет раскрытия трещины осуществляется как методом граничных элементов с функцией Грина для однородной среды (планарная трехмерная модель трещины), так и с помощью приближенной аналитической формулы, полученной в приближении плоской деформации (псевдотрехмерная модель трещины). Такое упрощение позволяет сократить время численного расчета, но при этом уменьшается точность результатов.

В настоящей работе проводится апробация и обобщение метода нахождения функции Грина для слоистых структур, основанного на применении преобразования Фурье, для оператора Лапласа и трехмерного оператора Ламе, а также модификация псевдотрехмерной модели трещины гидроразрыва пласта для увеличения точности расчета геометрических параметров трещины. Применение метода граничных элементов и внедрение разработанного подхода в существующие модели, используемые для решения прикладных задач, дало возможность сравнить новые результаты, полученные в данной работе, с существующими решениями.

Методика исследований

Учет слоистости в зависимости от задачи осуществляется либо путем расчета функции Грина для слоистой среды, либо путем рассмотрения различных сжимающих напряжений в слоях. Построение функции Грина осуществляется с использованием метода прогонки и быстрого преобразования Фурье. Для учета неоднородностей используется метод граничных элементов. Проводится сравнение результатов численного расчета с известными решениями.

Цель работы

Цель данной работы состоит в расширении метода расчета функции Грина для слоистых структур с использованием преобразования Фурье на случай двумерного уравнения Лапласа и трехмерного уравнения Ламе, а также в разработке метода расчета скорости роста квазитрехмерной трещины гидроразрыва пласта в высоту в режиме доминирующей вязкости в слоистой среде.

Научная новизна

Новизну работы составляют следующие **положения, выносимые на защиту**:

1. Метод построения функции Грина для слоистых структур распространен на случай гармонических задач и трехмерных задач теории упругости. Разработан метод оценки точности вычисления функции Грина в зависимости от периода преобразования Фурье и числа точек его дискретизации.

2. Дано обобщение комплексного метода граничных элементов на задачи о слоистых структурах с неоднородностями для двумерного уравнения Лапласа. Решена задача о круговом отверстии под действием равномерного потока на контуре в слоистой структуре, состоящей из двух полуплоскостей. Получена зависимость отношения максимального и минимального значения потенциала на контуре отверстия от значений относительной проводимости полуплоскостей и расстояния от центра отверстия до границы.

3. Решена задача о радиальной трещине, перпендикулярной границам слоев, находящейся под действием равномерного внутреннего давления в бесконечной трехмерной трехслойной упругой среде. Установлены границы влияния значений упругих модулей полупространств на раскрытие трещины, полностью находящейся в центральном слое.

4. Разработан метод расчета скорости роста псевдотрехмерной трещины гидроразрыва пласта в высоту в режиме доминирующей вязкости в слоистой

среде. Проведено сравнение результатов расчета геометрии трещины, полученных с использованием разработанного метода, с известными численными решениями. Показано, что разработанный метод позволяет увеличить точность расчета геометрических характеристик трещины в слоистой среде.

Достоверность полученных результатов

Достоверность полученных результатов достигается использованием апробированных методик моделирования и проверяется сравнением с существующими численными и аналитическими решениями. Решение для кругового отверстия в частном случае полупространства с сильно проводящей границей с высокой точностью совпадает с известным аналитическим решением. Профили раскрытия и коэффициенты интенсивности напряжений вдоль периметра радиальной трещины под постоянным давлением в трехмерной упругой слоистой среде сходятся с аналогичными результатами, полученными с использованием альтернативных подходов. Сравнение геометрии трещины, полученной с использованием модифицированной псевдотрехмерной модели, с результатами трехмерного моделирования показало соответствие результатов.

Практическая значимость работы

Результаты данной работы могут быть использованы при изучении свойств слоистых материалов. Особую важность результаты работы имеют для задач, включающих моделирование операции гидроразрыва пласта в слоистой среде, так как представленные в работе подходы увеличат точность расчета геометрических параметров трещины в слоистой среде. Более точный расчет геометрии трещины позволит сократить финансовые риски, возникающие при проведении гидроразрыва пласта. Представленный способ расчета функции Грина для слоистых сред также применим для моделирования трещин с произвольной ориентацией в пространстве, что может быть использовано при моделировании процессов в среде с естественной трещиноватостью. Результаты работы применяются в ООО "Газпромнефть НТЦ"для планирования операции гидроразрыва пласта.

Результаты приведенные в главах 2, 3 настоящей диссертации получены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках соглашения о предоставлении субсидии № 075-15-2019-1406 от 19.06.2019 по теме: Разработка прикладных программных средств для планирования и контроля операции гидравлического разрыва пласта с целью повышения эффективности нефтегазодобычи. Уникальный идентификатор соглашения:RFMEFI57517X0146.

Апробация работы

Результаты работы докладывались на семинарах Института проблем машиноведения РАН (Санкт-Петербург), кафедры Теоретическая механика СПбПУ, научно-технического центра Газпромнефти, Технологического университета Жешува, а также на всероссийских и международных конференциях: Advanced Problems in Mechanics (г. Санкт-Петербург, 2017, 2018, 2019), Научно-техническая конференция молодых ученых (г. Санкт-Петербург, 2018, 2019), Нефтегазовое хозяйство (г. Санкт-Петербург, 2019), Coupled thermo-hydro-mechanical problems of fracture mechanics (г. Новосибирск, 2019), 4th Polish Congress of Mechanics and 23rd International Conference on Computer Methods in Mechanics (Краков, 2019).

Структура и объем работы

Работа состоит из введения, трех глав и заключения. Работа содержит 100 страниц, 27 рисунков, 4 таблицы, список литературы содержит 91 наименований.

Публикации по теме исследования

а) Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК:

1. Markov N. S., Linkov A. M. An Effective Method to Find Green's Functions for Layered Media / N. S. Markov, A. M. Linkov // Materials Physics and Mechanics. – 2017. – Т. 32. – №. 2. – С. 133-143.

2. Markov N. S., Linkov A. M. Correspondence principle for simulation hydraulic fractures by using pseudo 3D model / N. S. Markov, A. M. Linkov // Materials Physics and Mechanics. – 2018. – T. 40. – C. 181-186.

3. Markov N. S., Linkov A. M. Improved pseudo 3D model for hydraulic fractures under stress contrast / N. S. Markov, A. M. Linkov // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2019 (submitted).

б) Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ:

1. «Программа расчета скорости роста квазитрехмерной трещины ГРП в высоту в режиме доминирующей вязкости». Авторы: Марков Н.С., Линьков А.М. Правообладатель: ООО "Газпромнефть НТЦ". Свидетельство № 2019613238. Дата регистрации: 12.03.2019.

1 Обзор методов решения задач механики для слоистых структур

1.1 История развития методов решения задач для слоистых структур

Решение задач для системы слоев, содержащих трещины, поры, включения, полости и другие неоднородности, играет важную роль в задачах механики материалов, строительного инжиниринга, механики грунтов, добычи полезных ископаемых, электротехники, оптики, гидродинамики. Например, слоистость необходимо учитывать при моделировании операции гидроразрыва пласта (ГРП) [40], горнодобывющих работах [43], решении задач геомеханики [91], а так же в нанотехнологиях [36, 42] и других областях. На Рис. 1 представлен пример горной породы с четко различимыми слоями.

Рис. 1: Слоистая структура горной породы

Начало для изучения слоистых структур было заложено в 1903 году, когда впервые было получено общее решение для плоского упругого слоя [31]. Тремя годами позже было представлено решение для трехмерного упругого изотропного случая [28]. Следующим этапом стали работы, в которых рассматривалось либо два слоя, либо слой, граничащий с полупространством [1, 3]. Автор работы [1] также привел обобщение решения на случай нескольких слоев.

Дальнейшее развитие методов решения задач для слоистых структур связано с использованием двух важнейших особенностей слоистой структуры: условия плоских границ и возможностей рассмотрения слоистой структуры как системы типа цепочки.

Условие плоских границ между слоями позволяет использовать преобразование Фурье для упрощения постановки задачи. Начиная с 1960-х годов [7, 18, 19] данный подход был применен во множестве работ по слоистым средам [5, 6, 9, 12, 14, 20, 30, 52, 53, 55, 72, 73, 81, 90]. Применение преобразования Фурье позволяет свести решение системы дифференциальных уравнений к решению обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Вектор неизвестных в каждом слое имеет размерность $M = 1$ в случае гармонической задачи, размерность $M = 2$ и $M = 3$ для двумерного и трехмерного случая соответственно. Если рассматривается однородный слой, то общее решение системы ОДУ состоит из линейной комбинации двух линейно независимых решений, которые могут быть найдены с использованием классической теории решения ОДУ. Это общее решение содержит 2 вектора констант для каждого фиксированного значения частоты преобразования Фурье. Таким образом, число констант (спектральных коэффициентов) для каждого значения частоты в рассматриваемом слое равно $2M$, где M – размерность задачи. Получается, что для системы из n слоев (включая полупространства для полубесконечных областей) необходимо найти $2n$ векторов констант для каждого значения частоты с использованием $2n-2$ контактных условий на $n-1$ внутренних границах и 2 условий на внешних границах рассматриваемой слоистой структуры. Это приводит к линейной системе из $2Mn$ уравнений с $2Mn$ неизвестными.

Существует два основных подхода, позволяющих свести сложность численного решения к $O(2N^2n)$. Оба подхода основаны на использовании геометрической особенности рассматриваемой задачи: слои представляют собой систему типа цепочки. Таким образом, каждый слой имеет максимум два соседних слоя. Первый метод называется методом матричного переноса. Суть метода состоит в переносе всех неизвестных (смещений и усилий одновременно) на соседние границы [5, 9, 34, 84, 85]. В работе [65] показано, что данный метод физически некорректен и численно неустойчив при решении задач для слоистых материалов. Решение, полученное с помощью метода матричного переноса, становится неустойчивым уже для восьми слоев. При этом второй метод, известный как метод гибких матриц, не обладает данным недостатком [7, 18, 19, 65, 66]. Данный метод был обобщен с использованием разностных уравнений [52]. В работе [52] показано, что метод крайне устойчив и эффективен, если для решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов используется метод прогонки [8, 2]. Прогоночные коэффициенты для очень тонких слоев (низкие частоты) представлены независимо в работах [4] и [72]. Прогоночные коэффициенты для очень толстых слоев представлены в работе [4]. В работе учитывается тот факт, что амплитуды, соответствующие высоким частотам, быстро убывают с удалением от границы. Таким образом, для высоких частот контакт можно рассматривать как границу между двумя сцепленными полупространствами. Этот факт позволяет значительно сократить время расчета функции Грина для слоистой структуры. Метод, основанный на разностных уравнениях, систематично применялся для решения задач механики горных пород для слоистых структур [4, 11, 12, 52, 72, 73, 81].

. В 1994 году в работе [53] представлен общий метод нахождения функции Грина для слоистых структур. Одна из особенностей метода состоит в представлении решения в виде суммы двух независимых частей. Первая часть соответствует функции Грина для однородной бесконечной изотропной среды. Данное решение представимо в аналитическом виде и содержит сингулярность от точечного источника. Вторая часть представляет добавочную гладкую функцию. Подход к нахождению добавочной части подробно описан в работе [53]. Декомпозиция на сингулярную и гладкую составляющие позволяет существенно упростить численный расчет функции Грина для слоистой среды. Несмотря на полное описание метода нахождения функции Грина, данная работа не содержит информации об особенностях его численной реализации. Также в работе представлены только формулы построения функции Грина для плоских задач теории упругости.

Важнейшая особенность представленного в работе [53] метода построения функции Грина для слоистых структур состоит в применении прямого и обратного преобразования Фурье. Такой подход позволяет найти все функии, необходимые для решения задач о неоднородностях в слоистых средах. Существует альтернативный подход, основанный на применении преобразования Ханкеля [32, 71, 82]. Данный подход применен в классических работах [50] и [51]. В частных случаях такой подход может увеличить скорость расчетов [81], однако в общем применение преобразования Ханкеля приводит к усложнению исходной задачи и в некоторых случаях к увеличению времени расчета. Несмотря на это, ряд решений для частных случаев, полученных с использованием преобразования Ханкеля, могут выступать в качестве эталонных решений [48], [72].

Метод нахождения функции Грина слоистой среды, основанный на применении прямого и обратного преобразования Фурье, при численной реализации может быть улучшен, если использовать быстрое преобразование Фурье [25] вместо дискретного преобразования Фурье [17, 24]. Это позволяет заметно ускорить численный расчет функции Грина и соответствующих ядер граничных интегральных уравнений [63], необходимых для применения метода граничных элементов (МГЭ) [16, 23]. На данный момент, однако, особенности применения быстрого преобразования Фурье для нахождения функции Грина слоистой структуры в должной мере не представлены в литературе.

Отметим, что большая часть решений, представленных в работах по расчету функции Грина слоистой среды, получена для плоской трещины в слоистой среде. В основном это вызвано интересом нефтяных компаний к моделированию трещин в слоистой горной породе. Моделирование трещины гидроразрыва пласта в слоистой породе – одна из важнейших прикладных задач, возникающих при изучении слоистых структур. При этом в большинстве существующих моделей трещины гидроразрыва слоистость учитвыается с помощью приближенныъ методов. Это связано как со сложностью построения функции Грина для слоистых структур, так и с необходимостью проведения эффективных в вычислительном плане расчетов.

1.2 Решение прикладных задач механики для слоистых структур. Гидроразрыв пласта

Гидроразрыв пласта (ГРП) — метод, широко применяемый в газо- и нефтедобывающей промышленности для интенсификации добычи углеводородов из скважин за счет создания в пласте трещины, обеспечивающей приток добываемого флюида [21, 29].

Операция гидроразрыва состоит из нескольких этапов. На первом этапе в скважине путем перфорирования создается «зародыш» трещины — перфорация. Интервал скважины в области продуктивного пласта изолируют герметизаторами (пакерами) и между ними в скважину нагнетают вязкую жидкость. Рост давления жидкости приводит к дальнейшему развитию трещины. Затем, когда трещина продвигается на достаточное расстояние и при этом раскрывается, в нее закачивают специальный материал — проппант, предотвращающий закрытие трещины после сброса давления [11].

Как видно из описания методики, гидроразрыв пласта — сложный комплексный процесс, для описания которого необходимы знания и методы из разных областей науки (например, гидродинамики, геомеханики, механики разрушения и др.). Сложность модели, описывающей тот или иной эффект, связанный с ростом трещины ГРП, может быть различной в зависимости от степени детализации.

Необходимо отметить, что существенная особенность ГРП состоит в трудности контроля происходящих на большой глубине процессов, а также сложной геометрии горной породы, которая может содержать несколько десятков слоев с различными свойствами. Проведение экспериментов для исследования ГРП также затруднено в силу сложности интерпретации получаемых данных. Ограниченность исходной информации, неопределенность структуры и свойств пород на глубине добычи флюида, большой разброс величин, доступных для измерений – эти факторы составляют особенность проблемы. Это сказывается на методике его научного изучения и практического применения. Особое значение приобретают математические исследования и численное моделирование гидроразрыва [64]. Поэтому для лучшего понимания и контроля необходимы и широко применяются математические модели.

Разработка моделей гидроразрыва началась в 1950х годах. Одним из первых трудов в данной области стала работа [37]. Авторы данной работы рассматривали проблему гидроразрыва как задачу прикладной механики. Ими была успешно построена первая модель, позволившая дать ряд ответов на такие актуальные вопросы как: ориентация создаваемой трещины, причины прорыва в водоносный слой, а также получить приближенную оценку пластовых напряжений и объема трещины. Сравнение результатов, предсказанных моделью, с реальными данными показали, что построенная модель, хотя и не обеспечивает количественно точных результатов, дает некоторое представление о размерах получаемой трещины. Проделанная авторами работа создала основу для проектирования процедуры ГРП. Важно отметить, что данная работа рассматривала однородную, а не слоистую среду.

Авторы работы [39] подошли к проблеме оценки параметров трещины и выбора оптимальных параметров жидкости гидроразрыва со стороны течения жидкости. Идея заключается в применении фундаментального соотношения механики сплошных сред (глобального баланса массы) к жидкости гидроразрыва, закачиваемой в скважину: часть жидкости утекает в породу, а оставшаяся часть заполняет объем трещины. Построенная авторами модель применяется и по сей день (например, в коммерческом симуляторе MFrac).

Первой математической моделью, учитывающей взаимное влияние жидкости, закаченной в трещину, и деформирования горной породы, стала модель Христиановича и Желтова, предложенная в 1955 году [47]. Данная модель рассматривает условия плоской деформации в сечениях, ортогональных фронту трещины. В ней трещина моделируется плоским разрезом бесконечной высоты, находящимся в линейно-упругой среде. Обычно эта модель относится к начальной стадии распространения трещины. В дальнейшем эта модель была развита в статье [33] учетом утечки жидкости гидроразрыва в пласт. Данная одномерная модель получила название KGD. Эту модель можно рассматривать как первую модель роста трещины в слоистой среде.

Другая подобная модель была разработана Перкинсом, Керном и Нордгреном (PKN) [70, 77]. В ней предполагается, что трещина имеет конечную и постоянную высоту много меньшую ее длины. Вместе с этим предполагается, что условие плоской деформации выполняется в плоскостях, параллельных фронту трещины, а давление в каждом сечении постоянно. Эти два условия позволяют считать, что поперечные сечения раскрываются независимо друг от друга. Связь между раскрытиями в каждом сечении осуществляется через уравнение неразрывности и уравнение для описания течения жидкости. По сути, в модели PKN рассматривалась трехслойная слоистая структура, у которой границы крайних слоев были не проницаемыми. Подчеркнем, что модели PKN и KGD используют одно и то же уравнение упругости [69], которое связывает раскрытие трещины с давлением на ее берегах и напряжениями на бесконечности.

Отметим, что первые модели гидроразрыва пласта были разработаны почти одновременно с началом промышленного использования этой технологии, в 1950-1960 годах, когда модель слоистости только начинала создаваться. При этом необходимость практического решения задач приводила к тому, что ученые и инженеры стремились убрать из рассмотрения те параметры, которые оказывают малое влияние на результат.

В 1970-х выросла стоимость нефти и газа, что сделало экономически выгодным добычу из низкопроницаемых пластов. Гидроразрыв на скважинах в низкопроницаемых пластах требует существенно больших затрат, в силу особенностей структуры породы: в скважину закачивают больше жидкости и проппанта для создания трещины большего размера (например, объем закачиваемой жидкости вырос с единиц кубических метров до сотен [11]). Эти изменения в процедуре проведения гидроразрыва выявили недостатки в существовавших моделях и стали стимулом для новых исследований в области моделирования.

Существенным недостатком использовавшихся на тот момент моделей была невозможность учесть то, что пласт горной породы состоит из различных по физическим свойствам (и параметрам напряженно-деформированного состояния) горизонтальных слоев. Необходимость учета этого фактора обусловлена тем, что геометрия трещины существенно зависит от изменения как физических свойств, так и напряженно-деформированного состояния слоев.

Вклад в создание нового подхода внесли несколько работ [83, 88], в которых проводилось исследование роста трещины гидроразрыва в трехслойной среде и влияние различий в механических свойствах и напряженно-деформированном состоянии слоев на высоту трещины гидроразрыва в двумерной постановке.

Новым подходом стали численно реализованные псевдотрехмерные модели (P3D), в которых принимается ряд упрощений в представлении о геометрии трещины, переносе жидкости и деформировании горной породы. Первым описанием такой модели можно считать статью [80], опубликованную в 1986 году, однако их развитие продолжается до сих пор [27].

Наиболее продвинутой и популярной упрощенной моделью является псевдотрехмерная (P3D) модель, предложенная Settary & Cleary [80]. Более подробна эта модель разработана и представлена в работах [27, 56, 64, 78]. На данный момент P3D одна из наиболее применяемых моделей для моделирования гидроразрыва пласта.

В процессе развития появились две категории псевдотрехмерных моделей: ламповые и ячеистые. Ламповые модели основаны на представлении геометрии трещины ГРП двумя полуэллипсами, что позволяет моделировать рост длины, высоты и раскрытия трещины. Геометрия ячеистых псевдотрёхмерных моделей по своей сути близка к геометрии модели ПКН с той разницей, что трещина представляется разделённой по своей длине на отдельные ячейки, каждая из которых может иметь свою высоту и раскрытие.

Несмотря на существующие различия, псевдотрехмерные модели имеют между собой много общего: трещина распространяется в одной плоскости, течение жидкости, как правило, считается одномерным (это, к тому же, накладывает дополнительные ограничения на моделирование переноса проппанта из-за невозможности учета взаимного влияния движения жидкости и проппанта в вертикальном направлении), используются упрощенные соотношения, описывающие упругую реакцию породы. Одно из наиболее важных предположений — это предположение о том, что трещина распространяется в среде с однородными упругими характеристиками, получаемыми в результате осреднения упругих свойств всех слоев, в которых растет трещина. Это означает, что P3D модели принципиально не способны учесть все особенности роста трещины ГРП в слоистых средах. Вдобавок к вышеперечисленному, P3D модели оказываются численно неустойчивыми в некоторых важных для практики случаях.

Однако, эти модели получили широкое распространение по ряду причин. А именно, расширение области применения технологии ГРП, повлекшее увеличение сложности проводимых операций, привело к созданию и развитию компьютерных моделей. При этом сдерживающим развитие фактором стала ограниченность вычислительных ресурсов. Влияние этого фактора важно, потому что задача моделирования ГРП носит двойственный характер: с одной стороны, это сложная научная задача, с другой стороны это сложная инженерная задача. И, если в первом случае скорейшее получение результатов может уступать по важности точности результата, то во втором случае это противоречие не находит однозначного решения. Таким образом, P3D модель, которая оказалась не самой точной, не самой надежной, но относительно быстро работающей, смогла занять важное место в истории решения задач о гидроразрыве в слоистых средах.

Дальнейшее усовершенствование моделей гидроразрыва пласта было связано с усложнением представлений о геометрии трещины. Практически одновременно стали развиваться плоские трехмерные (PL3D) [13] и полные трехмерные модели (Full3D) [89].

Плоские трехмерные модели предполагают, что трещина распространяется в одной плоскости, течение жидкости считается двумерным, а для описания деформирования горной породы используются уравнения трехмерной теории упругости. Плоские трехмерные модели позволяют снять ряд ограничений, характерных для P3D моделей, однако оказываются существенно более затратными с точки зрения вычислительных ресурсов. Характерная особенность полных трехмерных моделей заключается в том, что они снимают ограничение на распространение трещины в одной плоскости. При решении задачи гидроразрыва в трехмерной постановке в отличие от псевдотрехмерной значительно возрастает сложность решения системы уравнений, описывающих процесс гидроразрыва. Это обусловлено по большей части нелинейностью входящих в нее операторов, необходимостью использовать гиперсингулярный интеграл для моделирования упругого поведения породы и необходимостью отслеживать подвижную границу [74]. Эти факторы не могут не сказываться на качестве и скорости работы моделей и симуляторов на их основе.

Важным направлением развития моделей гидроразрыва является увеличение быстродействия. Оно обусловлено тем, что интерпретация данных проведения ГРП в реальном времени требуется наличие симулятора, способного работать со скоростью, достаточной для расчетов в режиме реального времени для контроля гидроразрыва в полевых условиях. На данный момент достаточную скорость расчетов могут обеспечить только псевдотрехмерные модели, потому что как плоские трехмерные, так и полностью трехмерные модели требуют больших вычислительных ресурсов. Это же является одной из причин использования именно упрощенных моделей учета слоистости при моделировании процесса гидроразрыва пласта.

2 Построение функции Грина для слоистой среды

2.1 Граничные интегральные уравнения для кусочно-однородной среды

Рассмотрим произвольную однородную, конечную или бесконечную, область D^* с границей L_s и нормалью $\mathbf{n}$ (Рис. 2).

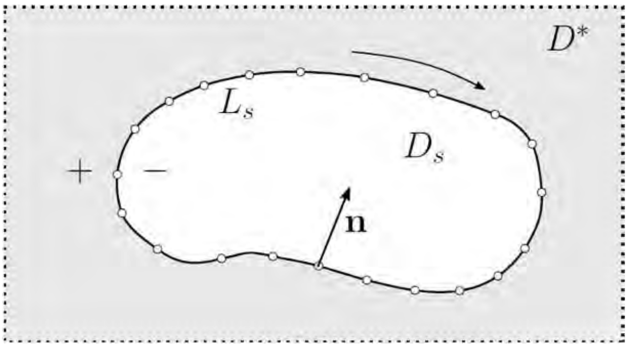

Рис. 2: Область поиска решения

Уравнение равновесия области D^* можно записать в виде

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор смещений, $\mathbf{L}$ – линейный дифференциальный оператор в частных производных [38]. В качестве $\mathbf{L}$ может выступать, например, оператор Лапласа или оператор Ламе.

Вектор усилий к произвольной площадке с нормалью $\mathbf{n}$ определяется соотношением

$$\mathbf{q_n} = \mathbf{T_n}\mathbf{u} \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{T_n}$ – оператор усилий, определяемый соотношением

$$(\mathbf{T_n}\mathbf{u})_l = C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}n_j \tag{3}$$

где C_{ijkl} — физические константы рассматриваемой области.

При решении краевой задачи методом граничных элементов ищется решение уравнения (1) при заданных граничных условиях на границе L_s. В качестве граничных условий может выступать заданное поле смещений

$$\mathbf{u} = \mathbf{f_1(x)}, \quad \mathbf{x} \in L_s \tag{4}$$

или усилий

$$\mathbf{q_n} = \mathbf{f_2(x)}, \quad \mathbf{x} \in L_s \tag{5}$$

или их линейная комбинация

$$\mathbf{Au} + \mathbf{Bq_n} = \mathbf{f_3(x)}, \quad \mathbf{x} \in L_s \tag{6}$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – заданные матрицы, а $\mathbf{f_3(x)}$ – заданный вектор в выбранной точке на границе.

Пусть в точке $\mathbf{y}$ области D^* расположен точечный источник единичной интенсивности, для которого известно фундаментальное решение $\mathbf{U(x,y)}$ (функция Грина), которое удовлетворяет уравнению:

$$\mathbf{LU(x,y)} = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{I} \tag{7}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, δ – дельта-функция Дирака. Фундаментальное решение используется для нахождения сингулярного и гиперсингулярного решения

$$\begin{aligned} \mathbf{T(x,y)} &= [\mathbf{T_{n(y)}U(x,y)}]^T \\ \mathbf{Q(x,y)} &= \mathbf{T_{n(x)}T(x,y)} \end{aligned} \tag{8}$$

Если в рассматриваемой слоистой структуре присутствуют только полости, то граничное интегральное уравнение может быть записано в виде

$$\frac{1}{2}\mathbf{\Delta u(x)} - \int_{L_s} \mathbf{U(x,y)q_n(y)}dL_s + \int_{L_s} \mathbf{T(x,y)\Delta u(y)}dL_s \quad x \in L_s \tag{9}$$

Гиперсингулярное граничное интегральное уравнение, подходящее для описания как полостей, так и трещин, имеет вид

$$[1 - \frac{1}{2}\kappa(\mathbf{x})]\mathbf{\Delta q_n(x)} - \int_{L_s} \kappa(\mathbf{y})[\mathbf{T(y,x)}]^T \mathbf{q_n(y)} dL_s + \\ + \int_{L_s} \mathbf{Q(x,y)\Delta u(y)} dL_s \quad x \in L_s \tag{10}$$

где $\kappa(\mathbf{x}) = 1$ если $\mathbf{x}$ принадлежит поверхности полости и $\kappa(\mathbf{x}) = 0$, если $\mathbf{x}$ принадлежит поверхности трещины.

Уравнения (9) и (10) применимы тогда, когда на границах между слоями нет разрывов. Однако в общем случае условия на границах могут быть произвольные. В случае кусочно-однородного материала с неоднородностями и произвольными условиями на контактах (Рис. 3) граничные интегральные уравнения могут быть записаны в специальном виде (11) и (12)

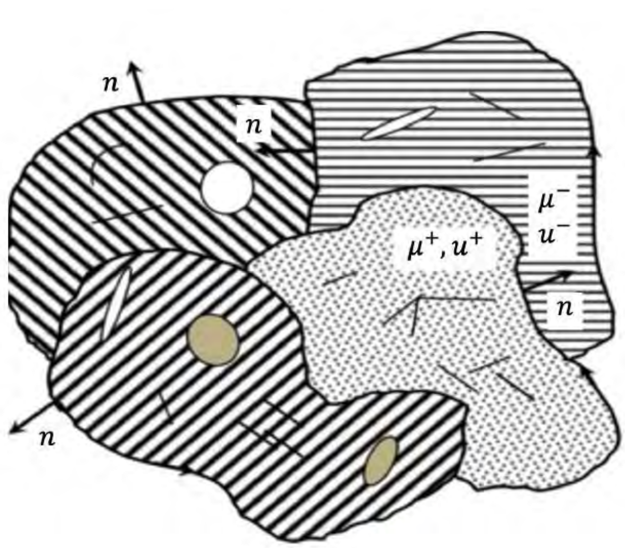

Рис. 3: Кусочно-однородный материал

$$\int_{L_s} \mu \mathbf{U(x,y)\Delta q_n(y)} dL_s - \int_{L_s} \mathbf{T(x,y)}[\mu^+ \mathbf{u^+(y)} - \mu^- \mathbf{u^-(y)}] dL_s = \\ = \frac{1}{2}[\mu^+ \mathbf{u^+(x)} + \mu^- \mathbf{u^-(x)}] \quad x \in L_s \tag{11}$$

$$\int_{L_s} \left[\frac{1}{2\mu^+} \mathbf{T}^+(\mathbf{y},\mathbf{x})^T \mathbf{q}_\mathbf{n}^+(\mathbf{y}) - \frac{1}{2\mu^-} \mathbf{T}^-(\mathbf{y},\mathbf{x})^T \mathbf{q}_\mathbf{n}^-(\mathbf{y}) \right] dL_s -$$
$$- \int_{L_s} \frac{1}{2\mu} \mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mathbf{\Delta u}(\mathbf{y}) dL_s = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\mu^+} \mathbf{q}_\mathbf{n}^+(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\mu^-} \mathbf{q}_\mathbf{n}^-(\mathbf{x}) \right] \tag{12}$$

где μ – модуль сдвига.

Таким образом, если известна функция Грина, удовлетворяющая заданным условиям на границах, задачу нахождения смещений и напряжений в рассматриваемой области можно свести к решение граничных интегральных уравнений. Возникает вопрос: как построить функцию Грина для кусочно-однородного материала?

2.2 Слоистая структура

Слоистая структура – частный случай кусочно-однородной среды. Задача нахождения функции Грина для такой кусочно-однородной среды может быть существенно упрощена, если использовать два предположения, основанные на геометрической особенности слоистой структуры.

- Слоистая структура представляет собой систему типа цепочки: каждый слой имеет не более двух соседних слоев;
- Границы слоев плоские и параллельные

Пусть имеется слоистая структура, состоящая из n слоев с плоскими параллельными границами. Предполагается, что в слоях структуры могут содержаться трещины, полости, поры и включения. Пронумеруем слои снизу вверх от 1 до n (Рис. 4).

Границы слоев пронумеруем от 0 до n. Оси x_2 и x_3 направим вдоль границ слоев в горизонтальной плоскости. Единичную нормаль к границам слоев направим вдоль оси x_1. Верхним индексом i будем обозначать значения, соответствующие i-ому слою или i-ому контакту. Нижним индексом t и b будем обозначать значения, соответствующие верхней и нижней границе соответственно.

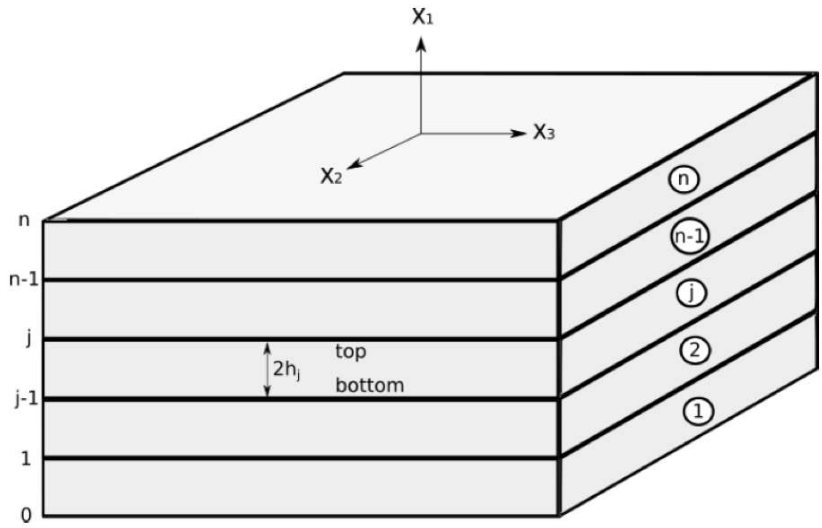

Рис. 4: Слоистая структура

В таких обозначениях вектор скачка перемещений определяется соотношением (13).

$$\Delta \mathbf{u^i} = \mathbf{u^i_t} - \mathbf{u^{i+1}_b} \tag{13}$$

Для системы из n слоев линейные дифференциальные уравнения равновесия могут быть записаны в виде:

$$\mathbf{L^i u} = \mathbf{0} \quad (i = 1, ..., n) \tag{14}$$

где $\mathbf{L^i}$ – линейный дифференциальный оператор в частных производных с физическими константами i-ого слоя.

Условие равновесия на границе раздела между слоями включает вектор усилий $\mathbf{q}$

$$\mathbf{q^i_t} = \mathbf{q^{i+1}_b} = \mathbf{q^i} \quad (i = 1, ..., n-1) \tag{15}$$

и линейную зависимость вектора скачка смещений $\mathbf{\Delta u}$ от вектора усилий

$$-\Delta \mathbf{u^i} = \mathbf{A^i_c q^i} \tag{16}$$

где $\mathbf{A_c^i}$ – квадратная матрица контактного взаимодействия на границе между i и $i+1$ слоем. Если рассматривается идеальный контакт, то полагается $\mathbf{A_c^i} = 0$ и $\Delta\mathbf{u^i} = 0$.

Если в рассматриваемой слоистой структуре присутствуют полости и/или трещины, то граничные условия имеют вид:

$$-\Delta\mathbf{u} = \mathbf{B_c q} + \Delta\mathbf{u_0} \tag{17}$$

где $\mathbf{B_c}$ – симметричная матрица и $\Delta\mathbf{u_0}$ – заданный скачок перемещений. Обращение уравнения (17) $\mathbf{q} = -\mathbf{B_c}^{-1}\Delta\mathbf{u_0} + \mathbf{q_0}$ где $\mathbf{q_0} = -\mathbf{B_c}^{-1}\Delta\mathbf{u_0}$ включает случай, когда заданы усилия $\mathbf{q_0}$. Частный случай заданных усилий возникает при $\mathbf{B_c}^{-1} = 0$, тогда

$$\mathbf{q} = \mathbf{q_0} \tag{18}$$

Основная задача состоит в нахождении решения уравнения (14) при выполнении контактных условий (15) и (16) и граничных условий (17) или (18). Для решения этой задачи необходимо найти функцию Грина для слоистой среды без неоднородностей.

2.3 Метод нахождения функции Грина для слоистой структуры

Рассмотрим метод нахождения функции Грина для слоистой среды. Впервые данный метод был представлен в работе [53].

Пусть в некоторой точке k-ого слоя, находится точечный источник единичной интенсивности (Рис. 5). Будем называть все слои выше (ниже) рассматриваемого слоя верхней (нижней) пачкой слоев. Тогда исходную слоистую структуру можно рассматривать как систему, состоящую из трех частей.

Рассмотрим бесконечную однородную изотропную среду с физическими параметрами k-ого слоя. В точку $\mathbf{y}$ этого слоя поместим точечный источник единичной интенсивности. Поле смещений, индуцированное этим источником, обо-

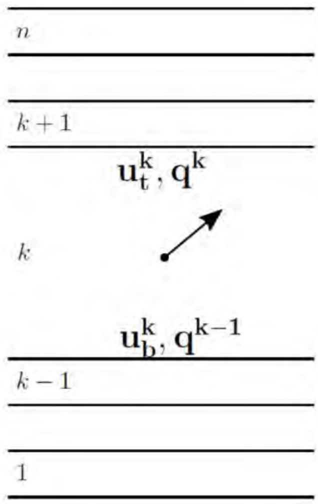

Рис. 5: Точечный источник в слоистой среде

значим $\mathbf{U_0(x,y)}$. В общем случае $\mathbf{U_0(x,y)}$ удовлетворяет уравнению равновесия только в k-ом слое. Введем в рассмотрение добавку $\mathbf{U_a(x,y)}$ такую, что

$$\mathbf{U(x,y)} = \mathbf{U_0(x,y)} + \mathbf{U_a(x,y)} \tag{19}$$

удовлетворяет уравнению равновесия для всех слоев, а так же граничным и контактным условиям. Таким образом, задача нахождения функции Грина сводится к задаче нахождения добавочной функции $\mathbf{U_a(x,y)}$, так как решение $\mathbf{U_0(x,y)}$ известно.

Отметим, что i-ый столбец матрицы $\mathbf{U(x,y)}$ есть вектор смещений, индуцированный точечным источником, действующим в направлении x_i. Зная $\mathbf{U_0(x,y)}$ в бесконечной области можно найти вектор смещений на верхней и нижней границе k-ого слоя. Обозначим эти смещения как $\mathbf{u_t^k}$ и $\mathbf{u_b^k}$ соответственно, а соответствующие вектора усилий как $\mathbf{q^k}$ и $\mathbf{q^{k-1}}$ (Рис. 6).

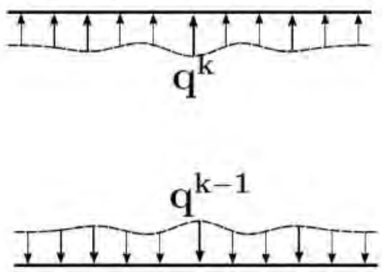

Рис. 6: Усилия на границах k-ого слоя

Приложим усилия $\mathbf{q^k}$ к нижней границе верхней пачки слоев. Предположим, что для такой системы найдено решение. Аналогично приложим усилия $\mathbf{q^{k-1}}$ и найдем решение для нижней пачки слоев (Рис. 7).

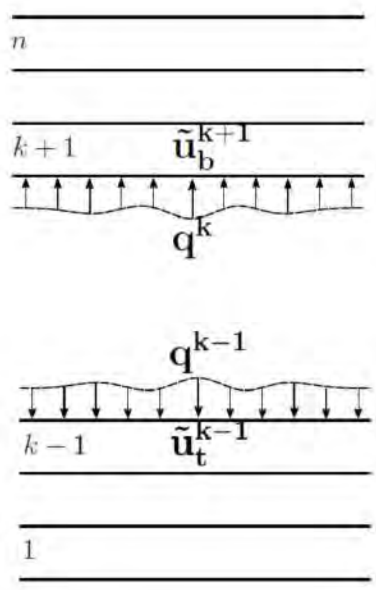

Рис. 7: Верхняя и нижняя пачка слоев под действием усилий, индуцированных точечным источником в k-ом слое

Обозначим найденное решение $\mathbf{u_*}$. Отметим, что $\mathbf{u_*}$ содержит в себе значения смещений на нижней границе $k+1$-ого слоя и верхней границе $k-1$-ого слоя. Обозначим эти смещения $\mathbf{\tilde{u}_b^{k+1}}$ и $\mathbf{\tilde{u}_t^{k-1}}$ соответсвенно. В общем случае $\mathbf{u_t^k} - \mathbf{\tilde{u}_b^{k+1}}$ и $\mathbf{u_b^k} - \mathbf{\tilde{u}_t^{k-1}}$ не удовлетворяют контактным условиям на верхней и нижней границе k-ого слоя. Устраним это несоответствие, записав соотношение

$$\begin{aligned} -\Delta\mathbf{u_d^k} &= \mathbf{A_c^k q^k} + \mathbf{\tilde{u}_b^{k+1}} - \mathbf{u_t^k} \\ -\Delta\mathbf{u_d^{k-1}} &= \mathbf{A_c^{k-1} q^{k-1}} + \mathbf{u_b^k} - \mathbf{\tilde{u}_t^{k-1}} \end{aligned} \tag{20}$$

Рассмотрим теперь задачу нахождения поля смещений в слоистой пачке при неоднородных условиях (21) на k-ой и $(k-1)$-ой границе

$$\begin{aligned} -\Delta\mathbf{u^k} &= \mathbf{A_c^k q^k} + \Delta\mathbf{u_d^k} \\ -\Delta\mathbf{u^{k-1}} &= \mathbf{A_c^{k-1} q^{k-1}} + \Delta\mathbf{u_d^{k-1}} \end{aligned} \tag{21}$$

и однородных условиях (16) на остальных границах. Обозначим полученное решение $\mathbf{\tilde{u}}$.

Проделаем аналогичную процедуру для всех столбцов матрицы $\mathbf{U_0(x,y)}$. Получим матрицы $\mathbf{U_*(x,y)}$ и $\mathbf{\tilde{U}(x,y)}$. Тогда добавочная матрица определяется соотношением

$$\mathbf{U_a(x,y)} = \mathbf{U^*(x,y)} + \mathbf{\tilde{U}(x,y)} \tag{22}$$

Окончательно функция Грина для слоистой структуры имеет вид:

$$\mathbf{U(x,y)} = \mathbf{U_0(x,y)} + \mathbf{U_*(x,y)} + \mathbf{\tilde{U}(x,y)} \tag{23}$$

где $\mathbf{U_0(x,y)} = 0$ вне k-ого слоя, где действует точечный источник, а внутри этого слоя выполнятся равенство $\mathbf{\tilde{U}(x,y)} = 0$. Таким образом, для нахождения функции Грина в слоистой среде необходимо решить три однотипные задачи:

- Для пачки $n-k$ верхних слоев под действием заданных усилий на нижней границе
- Для пачки $k-1$ нижних слоев под действием заданных усилий на верхней границе
- Для пачки n слоев при неоднородных условиях (21) на k-ой и $(k-1)$-ой границах и однородных условиях (16) на всех остальных границах.

Данные задачи решаются по одному общему алгоритму, основанному на применении преобразования Фурье и метода прогонки. Приведем детальное описание этого алгоритма.

Рассмотрим слоистую структуру, состоящую из m однородных слоев и находящуюся между двумя полупространствами. Будем нумеровать слои от $k+1$ до $k+m$, а их границы от k до $k+m$ (Рис. 8). Будем рассматривать задачу о нахождении поля смещений в слоистой пачке под действием усилий на нижней границе. Остальные две задачи решаются аналогично.

Применим к исходным уравнениям преобразование Фурье [15], [22], определяемое соотношением

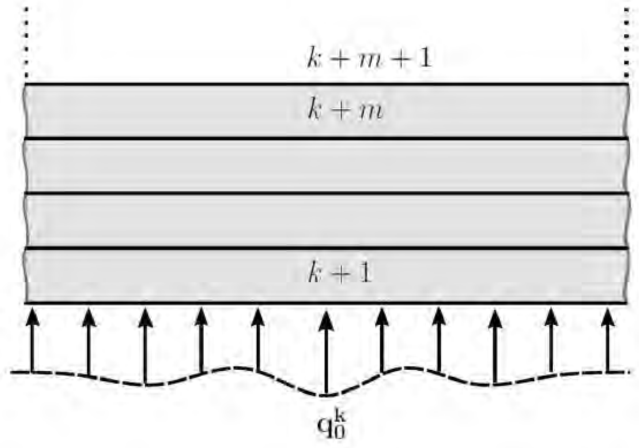

Рис. 8: Верхняя и нижняя пачка слоев под действием усилий на нижней границе

$$\tilde{f}(x_1, s_2, s_3) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3) e^{-2\pi i(s_2 x_2 + s_3 x_3)} dx_2 dx_3 \tag{24}$$

где $i = \sqrt{-1}$, s_2 и s_3 – частоты преобразования Фурье.

Преобразование Фурье позволяет установить связь между усилиями и смещениями в рассматриваемой области [6]. В частности, на границах справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{\tilde{u}_t} &= \mathbf{R_{tt}\tilde{q}_t} + \mathbf{R_{tb}\tilde{q}_b} \\ \mathbf{\tilde{u}_b} &= \mathbf{R_{bt}\tilde{q}_t} + \mathbf{R_{bb}\tilde{q}_b} \end{aligned} \tag{25}$$

где $\mathbf{R_{tt}}, \mathbf{R_{tb}}, \mathbf{R_{bt}}, \mathbf{R_{bb}}$ – известные квадратные матрицы. Записав (25) для каждого слоя получим соотношение для разрыва смещений на границе между слоями

$$\mathbf{\tilde{u}_b^i} - \mathbf{\tilde{u}_t^i} = \mathbf{R_{bt}^{i+1}\tilde{q}^{i+1}} + (\mathbf{R_{bb}^{i+1}} - \mathbf{R_{tt}^i})\mathbf{\tilde{q}^i} - \mathbf{R_{tb}^i\tilde{q}^{i-1}} \quad (i = k, ..., k+m) \tag{26}$$

Воспользуемся граничными условиями и запишем (26) в виде

$$\mathbf{A^i\tilde{q}^{i-1}} - \mathbf{C^i\tilde{q}^i} + \mathbf{B^i\tilde{q}^{i+1}} + \mathbf{F^i} = \mathbf{0} \quad (i = k, ..., k+m) \tag{27}$$

где $\mathbf{A^i} = -\mathbf{R_{tb}^i}$; $\mathbf{C^i} = -\mathbf{A_c} + \mathbf{R_{tt}^i} - \mathbf{R_{bb}^{i+1}}$; $\mathbf{B^i} = \mathbf{R_{bt}^{i+1}}$; $\mathbf{F^i} = -\Delta\mathbf{u_0^i}$

Усилия на $(k+m+1)$ и $(k-1)$ границах можно считать равными нулю, так как рассматриваются полупространства. Тогда можно записать

$$\mathbf{A^{k+m}\tilde{q}^{k+m-1}} - \mathbf{C^{k+m}\tilde{q}^{k+m}} + \mathbf{F^{k+m}} = \mathbf{0}$$
$$-\mathbf{C^{k}\tilde{q}^{k}} + \mathbf{B^{k}\tilde{q}^{k+1}} + \mathbf{F^{k}} = \mathbf{0} \tag{28}$$

Отметим, что в рассматриваемом случае заданных на k-ой границе усилий, имеем

$$\mathbf{C^{k}} = \mathbf{I}; \quad \mathbf{F^{k}} = \mathbf{\tilde{q}^{k}} \tag{29}$$

В случае, когда усилия задана на $(k+m)$-ой границе, имеем

$$\mathbf{F^{k+m}} = \mathbf{\tilde{q}^{k+m}} \tag{30}$$

Для решения системы уравнений (27) можно использовать эффективный и устойчивый метод прогонки, который позволяет получить решение для любого числа слоев. Метод прогонки состоит из двух этапов. На первом необходимо найти прогоночные матрицы $\mathbf{a^{i}}$ и прогоночные вектора $\mathbf{b^{i}}$.

$$\mathbf{a^{k+1}} = \left(\mathbf{C^{k}}\right)^{-1}\mathbf{B^{k}}; \quad \mathbf{b^{k+1}} = \left(\mathbf{C^{k}}\right)^{-1}\mathbf{F^{k}}$$
$$\mathbf{a^{i+1}} = \left(\mathbf{C^{i}} - \mathbf{A^{i}a^{i}}\right)^{-1}\mathbf{B^{i}} \qquad (i = k+1, ..., k+m-1) \tag{31}$$
$$\mathbf{b^{i+1}} = \left(\mathbf{C^{i}} - \mathbf{A^{i}a^{i}}\right)^{-1}\left(\mathbf{B^{i}} + \mathbf{A^{i}b^{i}}\right) \quad (i = k+1, ..., k+m)$$

На втором этапе найденные $\mathbf{a^{i}}$ и $\mathbf{b^{i}}$ используются для нахождения смещений и усилий на границах

$$\mathbf{\tilde{q}^{k+m}} = \mathbf{b^{k+m+1}}$$
$$\mathbf{\tilde{q}^{i-1}} = \mathbf{a^{i}\tilde{q}^{i}} + \mathbf{b^{i}} \qquad (i = k+m, ..., k+1)$$
$$\mathbf{\tilde{u}^{i}_{t}} = (\mathbf{R^{i}_{tt}} + \mathbf{R^{i}_{tb}a^{i}})\mathbf{\tilde{q}^{i}} + \mathbf{R_{tb}b^{i}} \qquad (i = k+m, ..., k+1) \tag{32}$$
$$\mathbf{\tilde{u}^{i}_{b}} = (\mathbf{R^{i}_{bt}} + \mathbf{R^{i}_{bb}a^{i}})\mathbf{\tilde{q}^{i}} + \mathbf{R_{bb}b^{i}} \quad (i = k+m, ..., k+1)$$

Для получения значений смещений в декартовой системе координат к найденным величинам необходимо применить обратное преобразование Фурье, определяемое соотношением

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(x_1, s_2, s_3)e^{2\pi i(s_2x_2+s_3x_3)}ds_2ds_3 \tag{33}$$

Подчеркнем, что данный алгоритм с незначительными модификациями используется для решения трех задач, возникающих при нахождении функции Грина для слоистой среды.

2.4 Построение функция Грина для двумерного оператора Лапласа

Рассмотрим алгоритм построение функции Грина для двумерного уравнения Лапласа [67]. Особый интерес представлят логарифмическая особенность фундаментального решения двумерного уравнения Лапласа, так как на бесконечности такое решение не стремится к нулю.

В декартовой системе координат двумерное уравнение Лапласа имеет вид:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \tag{34}$$

Тогда оператор для i-ого слоя можно записать как

$$L^i = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \tag{35}$$

Будем говорить об уравнении Лапласа в терминах потенциалов (u), потоков (q) и проницаемости G.

Потоки определяются соотношениями

$$\begin{aligned} q_1 &= G\frac{\partial u}{\partial x_1} \\ q_2 &= G\frac{\partial u}{\partial x_2} \end{aligned} \tag{36}$$

Потоки q_n в направлении нормали $\mathbf{n}$ рассчитываются по формуле

$$q_n = G\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \tag{37}$$

где производная смещений по нормали определяется соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(\mathbf{n}, \mathrm{x}_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(\mathbf{n}, \mathrm{x}_2) \tag{38}$$

Фундаментальное решение уравнения Лапласа имеет логарифмическую сингулярность и определяется соотношением

$$U_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi}\ln(r) \qquad (39)$$

где $r = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ – расстояние до точечного источника. Отметим, что решение (39) удовлетворяет уравнению (34) всюду, за исключением точки (y_1, y_2).

Потоки, соответствующие фундаментальному решению, вычисляются с помощью формулы (40):

$$q_i = -\frac{1}{2\pi}G\frac{(x_i-y_i)}{r} \qquad (40)$$

Для фундаментального решения выполняется важнейшее равенство

$$U_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) = U_0(\mathbf{y},\mathbf{x}) \qquad (41)$$

Отметим, что для решения (39) соотношение (41) очевидно, так как U_0 зависит только от расстояния r, в которое координаты источника и полевой точки входят симметрично. В более общем случае (41) есть следствие теоремы взаимности. Применительно к граничным интегральным уравнениям решения вида (39) служат ядрами потенциала простого слоя. Сингулярные решения, получаемые однократным дифференцированием по направлению n_x, заданному в полевой точке x, и умноженные на модуль сдвига G, служат ядрами для потенциала "нормальной производной". Сингулярные решения, получаемые однократным дифференцированием по направлению n_y, заданному в точке источника y, и умноженные на G, служат ядрами для потенциала двойного слоя. Особенность потенциала двойного слоя состоит в том, что в нем не содержится дифференцирования по полевой точке, поэтому это решение не нарушает однородность условий на границе, если таким условиям удовлетворяет исходное сингулярное решение. В связи с этим потенциал двойного слоя используется для представления самого решения, а не потоков. Сингулярные решения, получаемые дифференцированием потенциала двойного слоя по направлению n_x в полевой точке x, и умноженные на G, служат ядрами гиперсингулярного потенциала. По сути, это потоки, отвечающие сингулярному решению для потенциала двойного слоя [58].

Первым шагом для построения функции Грина двумерного оператора Лапласа будет применение преобразования Фурье к исходным уравнениям. Рассмотрим плоскость, перпендикулярную оси x_3. Тогда область поиска решения образуется базисными векторами x_1 и x_2. Так как ось x_1 перпендикулярна границам слоев, то преобразование Фурье возможно только в направлении x_2, так как в этом направлении свойства однородные.

Применим преобразование Фурье к уравнению Лапласа. Получим соотношение

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2} - s^2 \tilde{u} = 0 \tag{42}$$

Для нахождения функции Грина достаточно знать образ потоков в направлении оси x_1. По формуле (37) получаем

$$\tilde{q}^i = G_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \tag{43}$$

Далее, для краткости изложения, Фурье-образы потенциалов и потоков будем называть просто потенциалами и потоками. Удобно представить решение через сумму симметричной и антисимметричной части. Тогда справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \tilde{u}_s + \tilde{u}_a \\ \tilde{q} &= \tilde{q}_s + \tilde{q}_a \end{aligned} \tag{44}$$

Общее решение уравнения Лапласа имеет вид

$$\tilde{u} = c_1 \,\mathrm{sh}(\mathrm{sx_1}) + c_2 \,\mathrm{ch}(\mathrm{sx_1}) \tag{45}$$

Симметричная и антисимметричная часть потенциалов определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_s &= \tfrac{1}{2}\left(\tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(-x_1)\right)\\ \tilde{u}_a &= \tfrac{1}{2}\left(\tilde{u}(x_1) + \tilde{u}(-x_1)\right)\end{aligned} \tag{46}$$

Из (45) и (46) получаем

$$\begin{aligned}\tilde{u}_s &= c_1 \operatorname{sh}(\mathrm{sx}_1)\\ \tilde{u}_a &= c_2 \operatorname{ch}(\mathrm{sx}_1)\end{aligned} \tag{47}$$

Аналогично получаются соотношения для симметричной и антисимметричной части потоков:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_s &= c_2 \tfrac{Gs}{2} \operatorname{sh}(\mathrm{sx}_1)\\ \tilde{q}_a &= c_1 \tfrac{Gs}{2} \operatorname{ch}(\mathrm{sx}_1)\end{aligned} \tag{48}$$

Из соотношений (47) и (48) можно получить соотношения, связывающее значения симметричных частей потенциалов и потоков

$$\begin{aligned}\tilde{u}_s &= R_s \tilde{q}_s\\ \tilde{u}_a &= R_a \tilde{q}_a\end{aligned} \tag{49}$$

где

$$\begin{aligned}R_s &= \tfrac{2}{Gs} \operatorname{ch}(\mathrm{sx}_1)\\ R_a &= \tfrac{2}{Gs} \operatorname{th}(\mathrm{sx}_1)\end{aligned} \tag{50}$$

Воспользуемся соотношениями (25) и получим выражения для коэффициентов, связывающие потенциалы и потоки на границах

$$\begin{aligned}R_{tt} &= \frac{1}{2}\left(\tfrac{2}{Gs} \operatorname{ch}(\mathrm{sx}_1) + \tfrac{2}{Gs} \operatorname{th}(\mathrm{sx}_1)\right)\\ R_{tb} &= -\frac{1}{2}\left(\tfrac{2}{Gs} \operatorname{ch}(\mathrm{sx}_1) - \tfrac{2}{Gs} \operatorname{th}(\mathrm{sx}_1)\right)\\ R_{bt} &= \frac{1}{2}\left(\tfrac{2}{Gs} \operatorname{ch}(\mathrm{sx}_1) - \tfrac{2}{Gs} \operatorname{th}(\mathrm{sx}_1)\right)\\ R_{bb} &= -\frac{1}{2}\left(\tfrac{2}{Gs} \operatorname{ch}(\mathrm{sx}_1) + \tfrac{2}{Gs} \operatorname{th}(\mathrm{sx}_1)\right)\end{aligned} \tag{51}$$

Зная эти выражения по формулам (32) можно получить значения потенциалов и потоков на границах между слоями. Значения в произвольной точке внутри слоев могут быть рассчитаны по значениям потенциалов и потоков на границах этого слоя. Более того, для решения краевых задач достаточно рассчитать функцию Грина в точках, имеющих нулевую координату по осям x_2 и x_3. Действительно, так как рассматриваемая среда изотропна в направлениях x_2 и x_3, то решение для бесконечной области будет одно и то же в точках с одинаковой координатой x_1.

Найдем соотношения, связывающие потенциалы и потоки внутри слоя со значениями на границах. Для удобства произведем нормировку. Величины с размерностью длины будем нормировать на половину толщины k-ого слоя h_k, в котором находится точечный источник. Тогда $\hat{h}_i = h_i/h_k$. Проницаемость будем нормировать на проницаемость k-ого слоя $\hat{G}_i = G_i/G_k$. В дальнейшем будем полагать, что все используемые величины являются безразмерными и для удобства не будем вводить специальные обозначения.

Пусть решение на границах получено для источника, расположенного на оси x_1 в точке $(x_1^0, 0)$. Известно, что для получения значений функции Грина внутри слоев достаточно найти значение добавочной функции внутри этих слоев. Таким образом, для получения значений функции Грина внутри всех слоев достаточно знать значение добавочной функции на всех границах.

С учетом того, что $G_k = 1$ и половина толщины слоя $h_k = 1/2$, значения дополнительных потоков на верхней и нижней границе k-ого слоя определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{a,t} &= s(c_1 \operatorname{ch}(s/2) + c_2 \operatorname{sh}(s/2)) \\ \tilde{q}_{a,b} &= s(c_1 \operatorname{ch}(s/2) - c_2 \operatorname{sh}(s/2)) \end{aligned} \tag{52}$$

где

$$c_1 = \frac{\tilde{q}_{a,t} + \tilde{q}_{a,b}}{2s\ \mathrm{ch(s/2)}}$$
$$c_2 = \frac{\tilde{q}_{a,t} - \tilde{q}_{a,b}}{2s\ \mathrm{sh(s/2)}} \tag{53}$$

Тогда значения дополнительных потенциалов и потоков внутри k-ого слоя имеют вид

$$\tilde{u}_a = \frac{\tilde{q}_{a,t} + \tilde{q}_{a,b}}{2s\ \mathrm{ch(s/2)}}\,\mathrm{sh(sx_1)} + \frac{\tilde{q}_{a,t} - \tilde{q}_{a,b}}{2s\ \mathrm{sh(s/2)}}\,\mathrm{ch(sx_1)}$$
$$\tilde{q}_a = \frac{\tilde{q}_{a,t} + \tilde{q}_{a,b}}{2\,\mathrm{ch(s/2)}}\,\mathrm{ch(sx_1)} - \frac{\tilde{q}_{a,t} - \tilde{q}_{a,b}}{2s\ \mathrm{ch(s/2)}}\,\mathrm{sh(sx_1)} \tag{54}$$

В конечном итоге, значения потенциалов и потоков внутри k-ого слоя, соответствующие функции Грина для слоистой среды, могут быть представлены соотношениями

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \tilde{u}_a$$
$$\tilde{q} = \tilde{q}_0 + \tilde{q}_a \tag{55}$$

Важно отметить, что для получения реальных значений потенциалов и потоков, к полученным величинам необходимо применить обратное преобразование Фурье. Применительно к $\tilde{q}$ результатом обратного преобразования будут усилия q_1 . Значение q_2 можно получить путем обратного преобразования Фурье от $\tilde{q}_2$, величина которой определяется соотношением

$$\tilde{q}_2 = -is\tilde{u} \tag{56}$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Представленные выше соотношения позволяют найти функцию Грина для двумерного оператора Лапласа. Отметим, что формулы получены в предположении, что рассматриваемые слои имеют бесконечные размеры в направлении оси x_2, так как для получения связи потенциалов и потоков на границах применяется преобразование Фурье на бесконечном интервале. При численной реализации алгоритма используется дискретное преобразование Фурье [17], [24], которое возможно только на конечном интервале. При реализации изложенного в данной работе подхода к нахождению функции Грина можно воспользоваться быстрым преобразованием Фурье [25], которое позволяет уменьшить вычислительную сложность с N^2 до $N \log_2 N$ в двумерном случае и с N^3 до $N^2 \log_2 N$ в трехмерном, где N - число точек, на которое разбита рассматриваемая область в выбранном направлении. В трехмерном случае полагаем равномерное разбиение по направлениям x_2 и x_3. В общем случае, когда необходимо найти все ядра интегральных уравнений, для каждого положения точечного источника необходимо провести до 36 прямых и до 9 обратных преобразований Фурье. С учетом того, что количество точек, в которых расположен источник, может быть сколь угодно большим, использование быстрого преобразования Фурье может заметно увеличить скорость расчета функции Грина.

Выбор периода преобразования Фурье является одной из важнейших задач при численном расчете функции Грина, так как от значения периода зависит не только точность результатов, но и время расчета. Предложим универсальный подход определения параметров быстрого преобразования Фурье, при которых достигается заданная точность расчета функции Грина при минимальном времени расчета. Минимизация времени достигается путем выбора минимально возможного значения N.

2.5 Точность нахождения функции Грина

Рассмотрим слоистую структуру конечного размера $2A$ вдоль оси x_2 (Рис. 9). Координаты точек слоистой структуры вдоль границ принадлежат отрезку $[-A, A]$. Будем называть величину $2A$ периодом рассматриваемой задачи, а величину A – полупериодом. Зная решение для бесконечной однородной изотпропной среды мы можем найти потоки на $(k-1)$-ой и k-ой границе. Для того, чтобы воспользоваться представленным ранее алгоритмом, к найденным потокам необходимо применить преобразование Фурье. Отметим, что применение преобразования Фурье к исходной задаче изменяет граничные условия

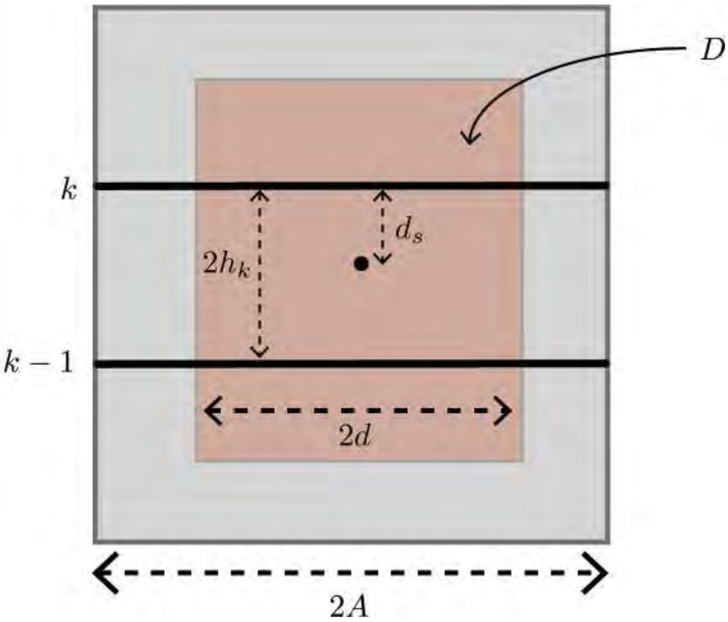

Рис. 9: Источник в k-ом слое

вдоль осей, параллельных границам слоев, на периодические. В таком случае возникает вопрос, почему в качестве U_0 используется решение для бесконечной однородной изотропной среды, а не соответствующее решение для периодической структуры. Важно отметить, что нас интересует точное решение не во всей периодической структуре, а лишь в некоторой области D. Основной характеристикой такой области является ее размер вдоль осей периодичности.

Рассмотрим проблему выбора периода. Введем в рассмотрение величину η

$$\eta = \frac{A}{d} \tag{57}$$

где d – половина ширины рассматриваемой области D. Величина η характеризует удаленность рассматриваемой области D от границ периодичности. По большому счету, можно свести проблему выбора периода A к вопросу выбора оптимального значения η.

Пусть область D – квадрат со стороной $2d$. Фундаментальное решение для периодической однородной изотропной среды [26] представимо в виде

$$U_p(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2\mathrm{A}}\mathrm{r}\right)\right) \tag{58}$$

Сравнение решения для бесконечной и периодической структуры представлено на Рис. 10.

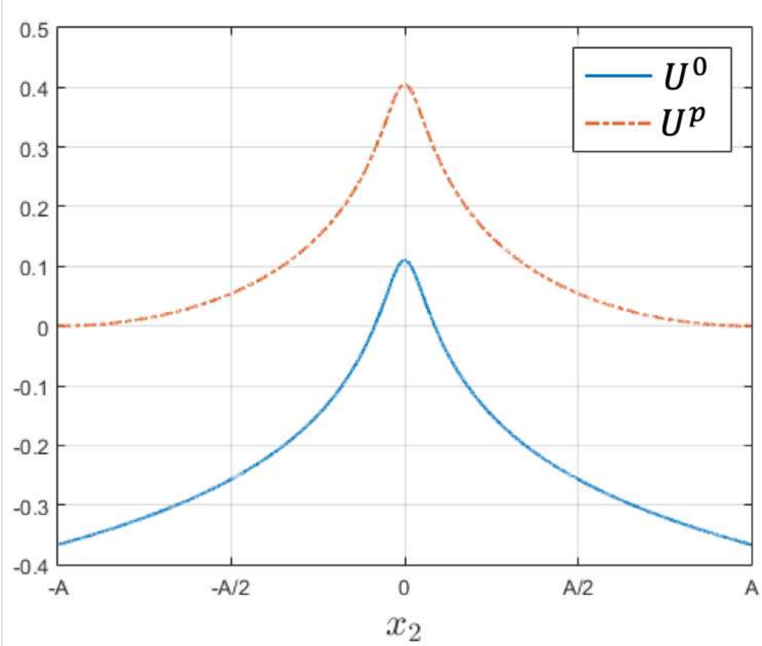

Рис. 10: Фундаментальное решение для периодической (красный пунктир) и бесконечной (синяя сплошная линия) структуры при $\eta = 20, x_1 = \frac{h_k}{2}$.

Важное различие между (58) и (39) состоит в том, что

$$U_p|_{x_2=-A} = U_p|_{x_2=A} = 0 \tag{59}$$

в то время как для фундаментального решения двумерного уравнения Лапласа на бесконечном интервале

$$U_0|_{x_2=-A} = U_0|_{x_2=A} \xrightarrow[A\to\infty]{} \infty \tag{60}$$

Докажем, что существует область D, в которой фундаментальное решение двумерного уравнения Лапласа U_0 может быть использовано вместо решения U_p. Для этого докажем, что существует такая область D, где оба решения отличаются на константу. Введем функцию $C(x_1, x_2)$ через соотношение (61)

$$C(x_1, x_2) = U_0 - U_p \tag{61}$$

где $(x_1, x_2) \in D$, и рассмотрим относительную разность

$$\hat{\zeta} = \frac{max_D|C(x_1, x_2)| - min_D|C(x_1, x_2)|}{max_D|C(x_1, x_2)|} \cdot 100\% \tag{62}$$

Отметим, что если $C(x_1, x_2) = const$, то $\hat{\zeta} \to 0$.

Построим зависимость $\hat{\zeta}(\eta)$. Из Рис. 11 видно, что $\hat{\zeta} \xrightarrow[\eta\to\infty]{} 0$. Данный результат подтверждает, что с увеличением периода граничные условия оказывают на рассматриваемую область меньшее влияние. Точность в 0.053% может быть достигнута уже при $\eta = 10$. Для большинства расчетов достаточно, чтобы выполнялось условие $\eta > 3$.

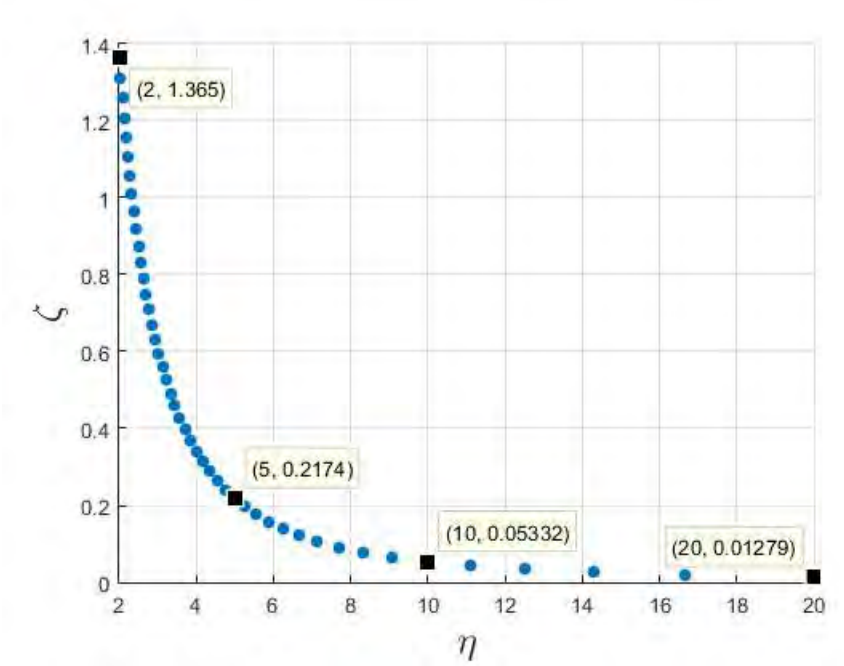

Рис. 11: Зависимость ζ от η

Одна из важнейших проблем, возникающих при построении функции Грина для слоистых структур, состоит в оценке точности полученного решения. Рассмотрим более подробно, как влияют параметры преобразования Фурье на точность результатов. Для этого проведем сравнение точности численных результатов с аналитическими решениями.

Задача 1. Рассмотрим две однородные полуплоскости, между которыми находится структура, состоящая из n однородных слоев. Точечный источник поместим в k-ый слой на расстоянии d от границы с $(k+1)$-ым слоем. Пусть все слои структуры имеют одинаковые свойства и идеальные контакты на границах. Такую структуру можно рассматривать как однородную изотропную среду. В качестве функции Грина такой задачи выступает (39).

Будем искать решение в квадратной области D. Точность нахождения функции Грина определяется как максимальная относительная ошибка в данной области

$$\hat{\zeta} = max_D \left[\frac{q_a^k}{q_0^k} \right] \cdot 100\% \qquad (63)$$

где q_a^k – дополнительный поток на k-ой границе, соответствующий добавочной функции $U_a(x, y)$, q_0^k – поток на k-ой границе, определяемый по функции Грина.

Из результатов, представленных в таблице (1) видно, что точность не зависит от числа слоев. При этом важно понимать, что это не исключает зависимость точности от размера области.

Таблица 1: Относительная погрешность (в %) в области D в зависимости от количества слоев n и η для однородной среды.

	$n = 3$	$n = 20$	$n = 40$
$\eta = 8$	0.58	0.58	0.58
$\eta = 16$	0.382	0.382	0.382
$\eta = 32$	0.131	0.131	0.131
$\eta = 64$	0.038	0.038	0.038

Погрешность, найденная для различных значений N и η , представлена в таблице (2). Значения η варьировалось от 8 до 64, а значения N от 128 до 1024.

Таблица 2: Относительная погрешность (в %) в области D в зависимости от N и η для однородной среды.

	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
$\eta = 8$	0.605	0.588	0.58	0.576
$\eta = 16$	0.402	0.388	0.382	0.379
$\eta = 32$	0.143	0.134	0.131	0.129
$\eta = 64$	0.104	0.04	0.038	0.037

Из таблицы 1 видно, что влияние периода на точность намного выше, чем влияние числа точек дискретизации. Более высокую точность результатов с увеличением значения η можно объяснить тем, что с увеличением периода $2A$ границы оказывают существенно меньшее влияние на рассматриваемую область.

Задача 2. Рассмотрим две полуплоскости с общей границей. Пусть нижняя полуплоскость имеет проводимость, равную единице, тогда как проводимость верхней полуплоскости устремим к нулю. Точечный источник поместим в нижнюю полуплоскость на расстоянии d от верхней границы. Представим каждую полуплоскость в виде слоистой структуры, состоящей из произвольного числа слоев с одинаковой толщиной и упругими свойствами. Необходимо найти добавку U_a для такой структуры.

Для слоистой структуры с непроницаемой верхней границей (Рис. 12) функция Грина может быть найдена методом изображений. Поместим симметрично относительно границы полуплоскости точечный источник той же интенсивности и на том же расстоянии от границы, что и исходный источник. Тогда функция Грина для полуплоскости с непроницаемой границей может быть найдена в виде

$$U = U_0 + U^* = -\frac{1}{2\pi}\ln(r) - \frac{1}{2\pi}\ln(r^*) \tag{64}$$

где r^* - расстояние до отраженного источника.

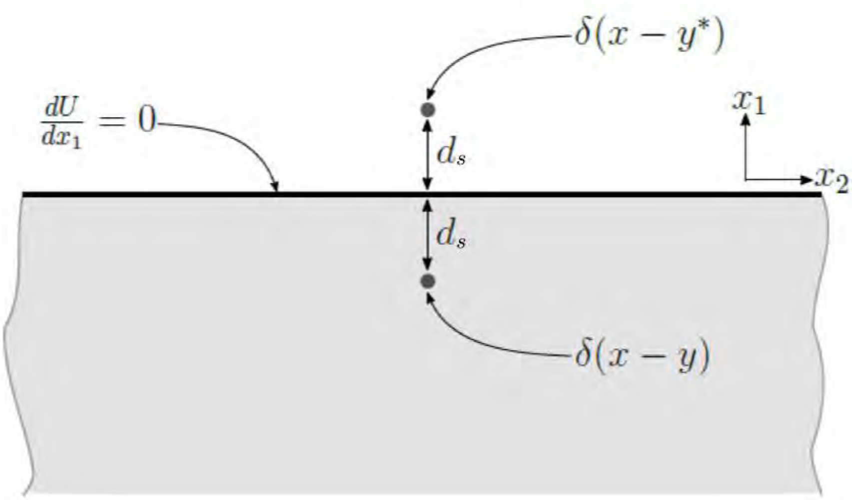

Рис. 12: Точечный источник в полупространстве

Функция Грина, найденная в результате численных расчетов, должна иметь добавку, значение которой близко к значению, которое порождает отраженный источник. Таким образом, относительная ошибка расчета функции Грина в области для D данного случая может быть рассчитана по формуле

$$\hat{\zeta} = max\left[\frac{q_a^k - q_k^*}{q_k^*}\right] \cdot 100\%, \quad x_2 \in D \tag{65}$$

где q_a^k – дополнительный поток на k-ой границе, q_k^* – поток, соответствующий отраженному источнику на k-ой границе.

Значения относительной погрешности $\hat{\zeta}$ в зависимости от N и η представлены в таблице 3.

Таблица 3: Относительная погрешность (в %)($\times 10^{-4}$) в области D в зависимости от N и η для полупространства с непроницаемой границей.

	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
$\eta = 8$	2.5755	2.575	2.5748	2.5747
$\eta = 16$	2.5703	2.57	2.5698	2.5697
$\eta = 32$	2.5637	2.5635	2.5633	2.5632
$\eta = 64$	2.562	2.561	2.561	2.5609

Из представленных в таблице 3 данных видно, что в данном случае относительная ошибка практически одинакова для всех пар значений N и η.

Задача 3. Рассмотрим две полуплоскости с общей границей. Пусть нижняя полуплоскость имеет проводимость, равную единице, тогда как проводимость верхней полуплоскости устремим к бесконечности. Точечный источник поместим в нижнюю полуплоскость. Как и в предыдущем случае представим каждую полуплоскость в виде слоистой структуры, состоящей из слоев с одинаковой толщиной с одинаковой проводимостью. Функция Грина для данной задачи также может быть посчитана методом изображений. Так как такую систему можно рассматривать как полуплоскость с сильно проводящей границей, то потенциал на верхней границе нижней полуплоскости полагаются равным нулю. Тогда функция Грина такой системы может быть найдена по формуле

$$U = U_0 + U^* = -\frac{1}{2\pi}\ln(r) + \frac{1}{2\pi}\ln(r^*) \qquad (66)$$

Для нахождения относительной ошибки в области D воспользуемся соотношением (65). Значения $\hat{\zeta}$ в зависимости от N и η для полупространства с сильно проводящей границей представлены в таблице 4.

Таблица 4: Относительная погрешность (в %) в области D в зависимости от N и η для полупространства с сильно проводящей границей.

	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
$\eta = 8$	1.212	1.177	1.16	1.152
$\eta = 16$	0.804	0.777	0.764	0.758
$\eta = 32$	0.286	0.269	0.261	0.257
$\eta = 64$	0.21	0.08	0.076	0.074

Из результатов, представленных в таблице 4 видно, что в случае сильно проводящей границы ошибка примерно в два раза больше, чем в случае однородной среды. В обоих случаях, для увеличения точности расчетов, оптимально увеличивать период, а не число точек дискретизации.

Анализ данных из таблиц 2, 3 и 4 показывает, что значения точности результатов, полученных для задачи об однородной среде, находятся между значениями, полученными для двух предельных случаев, рассмотренных в задачах 2 и 3. Отметим, что точность решения не является линейной функцией параметров N и η. При выборе параметров необходимо учитывать тот факт, что увеличение N приводит к существенному увеличению времени расчета. Отметим, что увеличение η при постоянном N может привести к потери точности.

2.6 Круговое отверстие в слоистой среде

Пусть в области D, принадлежащей одному из слоев, находится круговое отверстие, ограниченное замкнутым контуром L_s. Обозначим область внутри отверстия как D_s, а область вне отверстия D^*. Выберем направление обхода L_s так, чтобы область D^* оставалась слева. Нормаль $\mathbf{n}$ направим вправо от направления движения. Верхний индекс плюс (минус) отвечает значением области, для которой нормаль внешняя (внутренняя). Пусть на контуре L_s задан поток q_n^+. Необходимо найти потенциал в области D^*.

Воспользуемся теорией комплексных граничных интегральных уравнений (К-ГИУ) [26]. Для отверстия в бесконечной однородной имеем:

$$Re\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{L_s}\left[q_n^+\ln(\tau-z)ds+i\frac{\kappa^+U^+}{\tau-z}ds\right]\right\}=\begin{cases}\kappa Uz, & z\in D^*\\ \dfrac{1}{2}\kappa^+U^+, & z\in L_s\\ 0, & z\notin D^*+L_s\end{cases} \tag{67}$$

где τ, z – координаты точек в комплексной плоскости, $i=\sqrt{-1}$. Уравнение (67) можно обобщить на случай слоистой среды [67] в следующем виде

$$Re\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{L_s}\left[q_n^+U_*ds+U^+Q_*ds\right]\right\}=\begin{cases}\kappa Uz, & z\in D^*\\ \dfrac{1}{2}\kappa^+U^+, & z\in L_s\\ 0, & z\notin D^*+L_s\end{cases} \tag{68}$$

где

$$\begin{gathered}U_*=\ln(\tau-z)+U_a(\tau,z)\\ Q_*=i\frac{\kappa^+}{\tau-z}+Q_a(\tau,z)\end{gathered} \tag{69}$$

здесь $U_a(\tau,z)$, $Q_a(\tau,z)$ – дополнительные значения, которые вычисляются по представленному ранее алгоритму нахождения функции Грина.

Отметим, что уравнение (67) получено в предположении, что $\int_{L_s} q_n^+ds=0$. В случае, когда на границе отверстия задан поток, это условие в общем случае не выполняется. Это несоответствие можно устранить следующим образом. Найдем суммарный поток на контуре L_s

$$\int_{L_s} q_n^+ds=q_0 \tag{70}$$

Поместим точечный источник интенсивности q_0 в точку $y_0\in D_s$. Найдем потенциалы и потоки в области D^*+L_s, соответсвующие такому источнику для слоистой среды без неоднородностей. Также найдем добавочные потоки q_n^{a+} на контуре L_s. Отметим, что $\int_{L_s} q_n^{a+} ds = 0$. Решением уравнения (68) с заданным на контуре L_s потоком q_n^{a+} будут значения добавочных потенциалов в области D^*. Суммарное значение потенциалов от точечного источника и контура с самоуравновешенным потоком дают искомое значение потенциала в D^* от круговой полости.

Для нахождения решения уравнения (68) представим контур L_s в виде набора прямолинейных отрезков, каждый из которых может быть преобразован в отрезок $[-1, 1]$ с помощью линейного преобразования. Рассмотрим, например, отрезок $[a, b]$ в такой системе координат, в которой комплексная координата определяется как $z = x_2 + ix_1$. Тогда преобразование, приводящее исходный отрезок в отрезок $[-1, 1]$ с комплексной координатой $z' = x_2' + ix_1'$, имеет вид

$$z = \frac{a+b}{2} + \frac{|a+b|}{2} z' e^{i\alpha} \tag{71}$$

где α – угол отрезка с осью x_2.

Проведем на каждом отрезке аппроксимацию, используя полиномы Лагранжа

$$P_k(\tau') = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{\tau' - \tau_i'}{\tau_k' - \tau_i'} = \sum_{s=0}^{n-1} c_{ks} \tau'^s, \quad k = 1, ..., n \tag{72}$$

тогда функцию, определенную в точках рассматриваемого отрезка, можно представить в виде

$$f(\tau') = \sum_{k=1}^{n} f_k \sum_{s=0}^{n-1} c_{ks} \tau'^s, \quad k = 1, ..., n \tag{73}$$

где c_{ks} - известные постоянные. Для решения задачи о круговом отверстии в слоистой среде будем использовать аппроксимацию полиномами второго порядка ($n - 1 = 2$). При этом один из узлов поместим в центр элемента, а два других на расстоянии $1/3$ от его концов. Такой подход позволяет получить разбиение контура, близкое к равномерному (Рис. 13).

При такой постановке исходный интеграл может быть вычислен на базисных функциях с использованием рекуррентных формул. При этом использо-

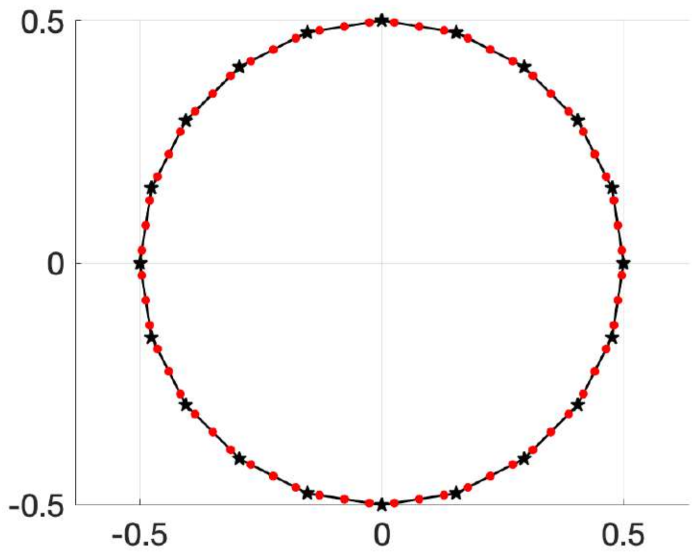

Рис. 13: Разбиение кругового отверстия на отрезки. Звездой ($\star$) обозначены границы отрезков, точки обозначают положение узлов.

вание (73) позволяет свести вычисление интегралов от регулярных функций к вычислению трех простых интегралов

$$\int_{-1}^{1} \tau^0 = 2, \quad \int_{-1}^{1} \tau^1 = 0, \quad \int_{-1}^{1} \tau^2 = 2/3 \tag{74}$$

Далее необходимо провести решение системы алгебраических уравнений уравнений, порядок который равен числу узлов на границе L_s. На последнем шаге вычисляем искомые значения потенциала в области D^*.

Рассмотрим две сцепленные полуплоскости. Будем обозначать значения, соответствующие нижней (верхней) полуплоскости нижним индексом l (u). Пусть круговое отверстие с радиусом R_c и потоком q_n^0 на границе L_s, для которого выполняется соотношение $\int_{L_s} q_n^0 ds = -1$, находится в нижней полуплоскости на расстоянии d_s от границы (Рис.14).

Введем в рассмотрение 2 точки, принадлежащие границе отверстия, в которых достигается минимальное и максимальное значение потенциала. Точка 1 – ближайшая к границе с верхней полуплоскостью, а точка 2 – наиболее удаленная от границы с верхней полуплоскостью точка отверстия. Будем обозначать

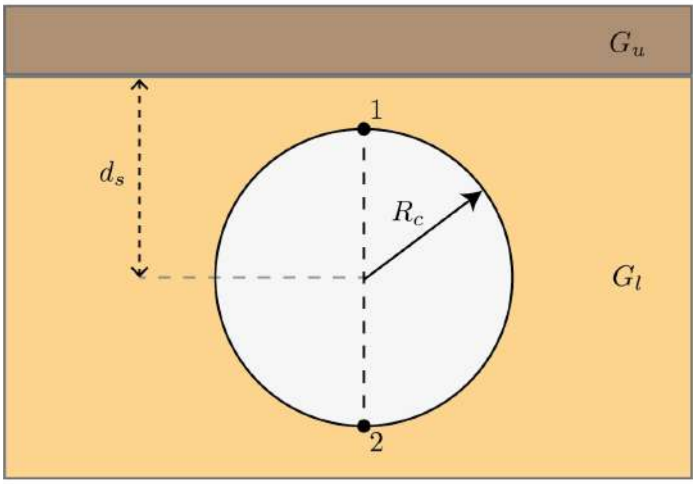

Рис. 14: Круговое отверстие в нижней полуплоскости

потенциал в точках 1 и 2 как u_1 и u_2 соответственно. Введем в рассмотрение величину u_r

$$u_r = u_1/u_2 \tag{75}$$

Рассмотрим предельные случаи. Пусть $G_u/G_l >> 1$. В этом случае потенциал в произвольной точке нижней полуплоскости может быть найден [49] по формуле

$$U(\alpha, \beta) = \frac{-1}{G_l \pi \operatorname{sh}(\alpha_0)} \left[\frac{\alpha}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} \frac{\exp(\text{-j}\alpha_0)}{\operatorname{ch}(\text{j}\alpha_0)} \operatorname{sh}(\text{j}\alpha) \cos(\text{j}\beta) \right] \tag{76}$$

Здесь $\operatorname{ch}(\alpha_0) = d_s/R_c$, α, β – биполярные координаты, связанные с декартовыми координатами через соотношения

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{d_s \operatorname{sh}(\alpha)}{\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(\beta_2)} \\ x_2 &= \tfrac{d_s \sin(\beta_2)}{\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(\beta_2)} \end{aligned} \tag{77}$$

где $\beta_2 = \pi - \beta$. Пользуясь соотношением (76), можно оценить точность решения, полученного с использованием метода граничных элементов. Будем использовать для расчетов следующие параметры: полудлина каждого слоя $A = 10d_s$, количество узлов на контуре отверстия $N_s = 60$, Количество узлов на границе между слоями $N = 128$, радиус отверстия $R_c \in [0.2, 0.8]d_s$.

Данные, представленные на Рис. 15, позволяют оценить границы влияния, которое оказывает отношение G_u/G_l на отношение максимального и минимального значения потенциала кругового отверстия. Сравнение с результатами, полученными с использованием формулы (76), позволяет заключить, что при заданных параметрах относительная погрешность расчетов не превышает 4%. Так как при оценке точности нахождения функции Грина было показано, что наименьшая точность расчета получается в случае, когда источник находится в полуплоскости с сильно проводящей границей, то погрешность ниже 4% гарантирована для всех представленных ниже случаев.

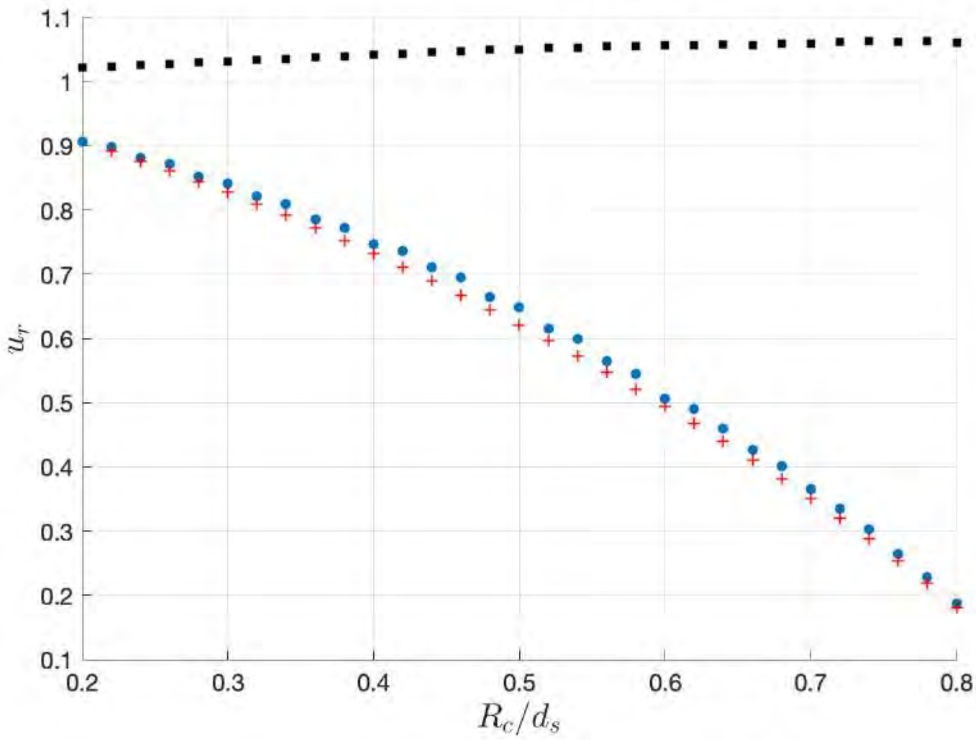

Рис. 15: Зависимость $u_r(R_c/d_s)$, полученная с использованием метода граничных элеметов ($G_u >> G_l$ (синие точки) и $G_u << G_l$ (красные кресты)), и с помощью формулы (76) (черные квадраты).

В случае сильно проводящей границы $G_u >> G_l$ отношение R_c/d_s оказывает более сильное влияние на результат, чем в случае непроницаемой границы $G_u << G_l$. В случае однородной среды $G_u/G_l = 1$ очевидно получаем $u_r = 1$.

Из представленных результатов видно, u_r в случае бесконечно проводящей границы для отверстия, центр которого находится на расстоянии $d_s = 1.25R_c$ от границы, в 5.5 раз отличается от значений для однородной среды. При приближении границы отверстия к границе между полуплоскостями эта разница увеличится еще больше.

Рассмотрим теперь, как влияет отношение G_u/G_l на зависимость $u_r(R_c/d_s)$ (Рис. 16).

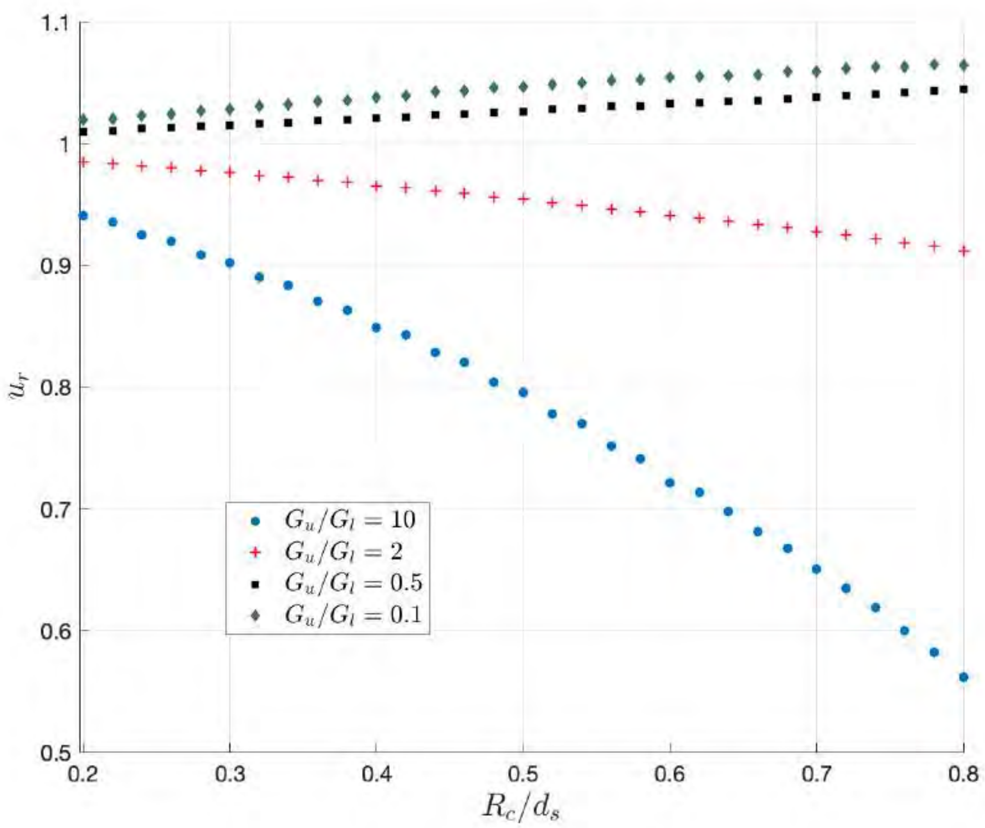

Рис. 16: Зависимость $u_r(R_c/d_s)$, для $G_u/G_l = 10$ (синие точки), $G_u/G_l = 2$ (красные кресты), $G_u/G_l = 0.5$ (черные квадраты), $G_u/G_l = 0.1$ (зеленые ромбы).

Результаты, полученные для случаев $G_u/G_l = 10$ и $G_u >> G_l$, для точки $R_c/d_s = 0.8$ различаются более чем в 3 раза, тогда как для случаев $G_u/G_l = 0.1$ и $G_u << G_l$ в этой же точке значения практически идентичны.

Рассмотрим пример расчета для кругового отверстия радиуса $R_c = 0.2d_s$, которое находится в бесконечной слоистой среде, состоящей из семи слоев. Значения толщин и проводимостей слоев обозначены на Рис. 17. Цветом обозначено значение потенциала в рассматриваемой области.

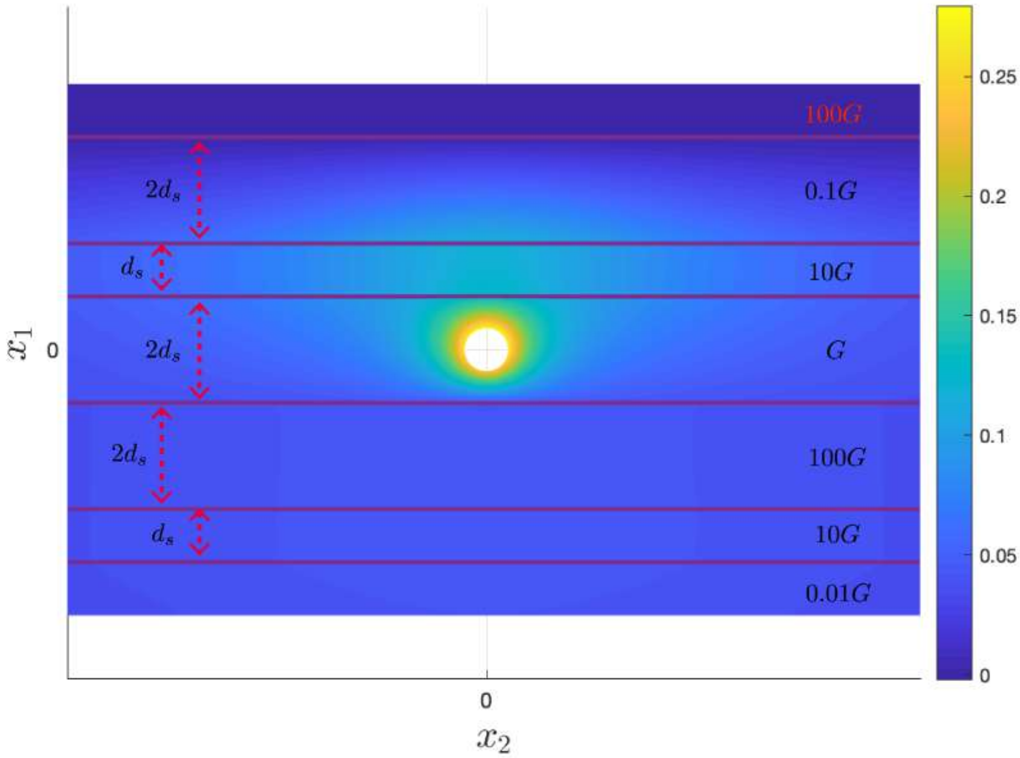

Рис. 17: Круговое отверстие в слоистой среде, состоящей из семи слоев.

Представленные результаты демонстрируют влияние слоистости на потенциал кругового отверстия, целиком находящегося в одном слое. В общем случае в слоистой структуре может содержаться сколь угодно много неоднородностей, которые могут находиться как в пределах одного слоя, так и в пределах нескольких слоев, то есть пересекать границы между слоями. Такие ситуации требуют специального исследования, хотя в некоторых частных случаях возникающими эффектами пренебрегают. Один из практически важных случаев – вертикальная трещина под действием внутреннего давления, ортогональная границам слоев.

2.7 Построение функции Грина для трехмерного оператора Ламе

Рассмотрим трехмерную слоистую структуру. Уравнение равновесия в каждом слое имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{78}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, определяемые соотношением

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{ij} \right) \tag{79}$$

где ν – коэффициент Пуассона. Компоненты тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ определяются формулой

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{80}$$

Оператор усилий для трехмерного уравнения Ламе определяется соотношением

$$(\mathbf{T_n u})_i = 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \mathbf{n_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{n_j} \right] \tag{81}$$

Применим к уравнению (78) двумерное преобразование Фурье (24) в направлениях x_2 и x_3. Представим усилия и смещения в виде суммы симметричной и антисимметричной части [54]. Получим

$$\begin{gathered} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_\mathbf{s} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_\mathbf{a} \\ \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{s} + \tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{a} \end{gathered} \tag{82}$$

где

$$\begin{gathered}
\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_\mathbf{s}(x_1) = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{11}(x_1) + \tilde{\sigma}_{11}(-x_1) \\ \tilde{\sigma}_{12}(x_1) - \tilde{\sigma}_{12}(-x_1) \\ \tilde{\sigma}_{13}(x_1) - \tilde{\sigma}_{13}(-x_1) \end{pmatrix} \\
\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_\mathbf{a}(x_1) = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{11}(x_1) - \tilde{\sigma}_{11}(-x_1) \\ \tilde{\sigma}_{12}(x_1) + \tilde{\sigma}_{12}(-x_1) \\ \tilde{\sigma}_{13}(x_1) + \tilde{\sigma}_{13}(-x_1) \end{pmatrix} \\
\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{s}(x_1) = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1(x_1) - \tilde{u}_1(-x_1) \\ \tilde{u}_2(x_1) + \tilde{u}_2(-x_1) \\ \tilde{u}_3(x_1) + \tilde{u}_3(-x_1) \end{pmatrix} \\
\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{a}(x_1) = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1(x_1) + \tilde{u}_1(-x_1) \\ \tilde{u}_2(x_1) - \tilde{u}_2(-x_1) \\ \tilde{u}_3(x_1) - \tilde{u}_3(-x_1) \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{83}$$

Выражения для симметричной и антисимметричной части представлены в работе [6]. Для вектора усилий имеем

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{s}} = \mathbf{D_s A_s}$$
$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{a}} = \mathbf{D_a A_a} \tag{84}$$

где $\mathbf{A_s}$, $\mathbf{A_a}$ – векторы констант для рассматриваемого слоя, а матрицы $\mathbf{D_s}$ и $\mathbf{D_a}$ определяются соотношениями

$$\mathbf{D_s} = \begin{bmatrix} \mathrm{chz}_1 - z_1 \,\mathrm{shz}_1 & is_2 x_1 \,\mathrm{shz}_1 & is_3 x_1 \,\mathrm{shz}_1 \\ -is_2 x_1 \,\mathrm{chz}_1 & -\mathrm{shz}_1 - (s_2^2/s) x_1 \,\mathrm{chz}_1 & -(s_2 s_3/s) x_1 \,\mathrm{chz}_1 \\ -is_3 x_1 \,\mathrm{chz}_1 & -(s_2 s_3/s) x_1 \,\mathrm{chz}_1 & -\mathrm{shz}_1 - (s_3^2/s) x_1 \,\mathrm{chz}_1 \end{bmatrix} \tag{85}$$

$$\mathbf{D_a} = \begin{bmatrix} shz_1 - z_1 \,\mathrm{chz}_1 & -is_2 x_1 \,\mathrm{chz}_1 & -is_3 x_1 \,\mathrm{chz}_1 \\ -is_2 x_1 \,\mathrm{shz}_1 & \mathrm{chz}_1 + (s_2^2/s) x_1 \,\mathrm{chz}_1 & (s_2 s_3/s) x_1 \,\mathrm{chz}_1 \\ -is_3 x_1 \,\mathrm{shz}_1 & (s_2 s_3/s) x_1 \,\mathrm{shz}_1 & \mathrm{chz}_1 + (s_3^2/s) x_1 \,\mathrm{shz}_1 \end{bmatrix} \tag{86}$$

где $s = \sqrt{s_2^2 + s_3^2}$, $z_1 = sx_1$.

Отметим, что константы $\mathbf{A_s}$ и $\mathbf{A_a}$ определяются для каждого слоя и зависят от граничных условий.

Аналогично уравнению (84) можем записать соотношения для симметричной и антисимметричной части вектора смещений

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}} = \tfrac{1+\nu}{Es} \mathbf{Q_s A_s}$$
$$\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} = \tfrac{1+\nu}{Es} \mathbf{Q_a A_a} \tag{87}$$

где

$$
\mathbf{Q_s} = \begin{bmatrix}
2(1-\nu)\,\mathrm{shz}_1 - z_1\,\mathrm{chz}_1 & -i(1-2\nu)(s_2/s)\,\mathrm{shz}_1 - is_2x_1\,\mathrm{chz}_1 & -i(1-2\nu)(s_3/s)\,\mathrm{shz}_1 - is_3x_1\,\mathrm{chz}_1 \\
-i(1-2\nu)(s_2/s)\,\mathrm{chz}_1 - is_2x_1\,\mathrm{shz}_1 & 2\nu(s_2^2/s^2)\,\mathrm{chz}_1 - (s_2/s)s_2x_1\,\mathrm{shz}_1 - 2\,\mathrm{chz}_1 & 2\nu(s_2s_3/s^2)\,\mathrm{chz}_1 - (s_2/s)s_3x_1\,\mathrm{shz}_1 \\
-i(1-2\nu)(s_3/s)\,\mathrm{chz}_1 - is_3x_1\,\mathrm{shz}_1 & 2\nu(s_2s_3/s^2)\,\mathrm{chz}_1 - (s_3/s)s_2x_1\,\mathrm{shz}_1 & 2\nu(s_2s_3/s^2)\,\mathrm{chz}_1 - (s_3/s)s_3x_1\,\mathrm{shz}_1
\end{bmatrix} \tag{88}
$$

$$
\mathbf{Q_a} = \begin{bmatrix}
2(1-\nu)\,\mathrm{chz}_1 - z_1\,\mathrm{shz}_1 & i(1-2\nu)(s_2/s)\,\mathrm{chz}_1 - is_2x_1\,\mathrm{shz}_1 & -i(1-2\nu)(s_3/s)\,\mathrm{chz}_1 - is_3x_1\,\mathrm{chz}_1 \\
-i(1-2\nu)(s_2/s)\,\mathrm{shz}_1 - is_2x_1\,\mathrm{chz}_1 & -2\nu(s_2^2/s^2)\,\mathrm{shz}_1 - (s_2^2/s)x_1\,\mathrm{chz}_1 + 2\,\mathrm{shz}_1 & 2\nu(s_2s_3/s^2)\,\mathrm{shz}_1 - (s_2/s)s_3x_1\,\mathrm{chz}_1 \\
-i(1-2\nu)(s_3/s)\,\mathrm{shz}_1 - is_3x_1\,\mathrm{chz}_1 & -2\nu(s_2s_3/s^2)\,\mathrm{shz}_1 - (s_3/s)s_2x_1\,\mathrm{chz}_1 & -2\nu(s_2s_3/s^2)\,\mathrm{shz}_1 - (s_3^2/s)x_1\,\mathrm{chz}_1 + 2\,\mathrm{shz}_1
\end{bmatrix} \tag{89}
$$

Введем в рассмотрение матрицы $\mathbf{R_s}$ и $\mathbf{R_a}$

$$
\mathbf{R_s} = \mathbf{Q_s}(\mathbf{D_s})^{-1}
$$
$$
\mathbf{R_a} = \mathbf{Q_a}(\mathbf{D_a})^{-1} \tag{90}
$$

и воспользуемся соотношениями

$$
\mathbf{R_{tt}} = (R_s + R_a)/2; \quad \mathbf{R_{tb}} = -(R_s - R_a)^*/2
$$
$$
\mathbf{R_{bt}} = (R_s - R_a)^{**}/2; \quad \mathbf{R_{bb}} = -(R_s + R_a)^{**}/2 \tag{91}
$$

где символ $(*)$ означает, что первый столбец соответствующей матрицы должен быть умножена на (-1), символ $(**)$ означает, что первая строка матрицы должна быть умножена на (-1), а символ $(***)$ обозначает умножение на -1 первой строки и первого столбца матрицы.

Окончательно, матрицы $\mathbf{R_{tt}}, \mathbf{R_{tb}}, \mathbf{R_{bt}}, \mathbf{R_{bb}}$ для трехмерного оператора Ламе, связывающие смещения и усилия в уравнении (25) для k-ого слоя, имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R^k_{tt}} = \tfrac{1+\nu^k}{E^k s}\begin{pmatrix} tt_{11} & tt_{12} & tt_{13} \\ -tt_{12} & tt_{22} & tt_{23} \\ -tt_{13} & tt_{23} & tt_{33} \end{pmatrix} \\
&\mathbf{R^k_{tb}} = \tfrac{1+\nu^k}{E^k s}\begin{pmatrix} tb_{11} & tb_{12} & tb_{13} \\ tb_{12} & tb_{22} & tb_{23} \\ tb_{13} & tb_{23} & tb_{33} \end{pmatrix} \\
&\mathbf{R^k_{bb}} = -(\mathbf{R^k_{tt}})^{***} \\
&\mathbf{R^k_{bt}} = -(\mathbf{R^k_{tb}})^{***}
\end{aligned}
\tag{92}
$$

где $z = sh^k$, $\triangle = \operatorname{th}^2 \mathrm{z} - z^2/\operatorname{ch}^4 \mathrm{z}_1$,

$tt_{11} = (\operatorname{thz} + \operatorname{th}^3 \mathrm{z} + z/\operatorname{ch}^4 \mathrm{z}_1)(1-\nu^k)/\triangle$,

$tt_{12} = is_2(1 - 2(\nu^k \operatorname{th}^2 \mathrm{z} - z^2/\operatorname{ch}^4 \mathrm{z}_1)/\triangle)/s$,

$tt_{13} = is_3(1 - 2(\nu^k \operatorname{th}^2 \mathrm{z} - z^2/\operatorname{ch}^4 \mathrm{z}_1)/\triangle)/s$,

$k_1 = [(\nu^k \operatorname{th}^2 \mathrm{z} - z^2/\operatorname{ch}^4 \mathrm{z}_1)(1 + \operatorname{th}^2 \mathrm{z}) + (1-\nu^k)z \ \operatorname{thz}\ ch^4 z]/(\triangle s^2 \operatorname{thz})$,

$tt_{22} = (1 + \operatorname{th}^2 \mathrm{z})/\operatorname{thz} - s_2^2 k_1$, $tt_{23} = -s_2 s_3 k_1$,

$tt_{33} = (1 + \operatorname{th}^2 \mathrm{z})/\operatorname{thz} - s_3^2 k_1$,

$tb_{11} = -[\operatorname{thz}/\operatorname{ch}^2 \mathrm{z} + z(1 + \operatorname{th}^2 \mathrm{z})/\operatorname{ch}^2 \mathrm{z}](1 - nu^k)/\triangle$,

$tb_{12} = is_2(1-\nu^k)(2h^k/\triangle)(\operatorname{thz}/\operatorname{ch}^2 \mathrm{z})$,

$tb_{13} = is_3(1-\nu^k)(2h^k/\triangle)(\operatorname{thz}/\operatorname{ch}^2 \mathrm{z})$,

$k_2 = [\nu^k \operatorname{th}^2 \mathrm{z} - z^2/\operatorname{ch}^2 \mathrm{z} + (1-\nu^k)z \ \operatorname{thz}(1 + \operatorname{th}^2 \mathrm{z})]/(\triangle s^2)$,

$tb_{22} = (-1 + s_2^2 k_2)/(\operatorname{thz} \operatorname{ch}^2 \mathrm{z})$, $tb_{23} = s_2 s_3 k_2/(\operatorname{thz}\ \operatorname{ch}^2 \mathrm{z})$,

$tb_{33} = (-1 + s_3^2 k_2)/(\operatorname{thz} \operatorname{ch}^2 \mathrm{z})$.

Алгоритм нахождения функции Грина для слоистых структур позволяет рассчитать значения усилий на границах между слоями. Найдем формулы для расчета всех компонент тензора напряжений в любой точке рассматриваемого слоя k. Как было отмечено ранее, решение удобно разбить на симметричную и антисимметричную составляющую. Тогда для трехмерной среды справедливы соотношения

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{s}}(\mathbf{h_k}) &= 1/2(\mathbf{\tilde{q}^k} + \mathbf{T}\mathbf{\tilde{q}^{k-1}}) \\
\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{a}}(\mathbf{h_k}) &= 1/2(\mathbf{\tilde{q}^k} - \mathbf{T}\mathbf{\tilde{q}^{k-1}})
\end{aligned}
\tag{93}
$$

где матрица $\mathbf{T}$ определяется соотношением

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{94}$$

Воспользуемся соотношениями (84) и (93) и найдем значения констант $\mathbf{A_s}$ и $\mathbf{A_a}$ в рассматриваемом слое. Получим

$$\begin{gathered} \mathbf{A_s} = [\mathbf{D_s(h_k)}]^{-1}\boldsymbol{\tilde{\sigma}}_\mathbf{s}\mathbf{(h_k)} \\ \mathbf{A_a} = [\mathbf{D_a(h_k)}]^{-1}\boldsymbol{\tilde{\sigma}}_\mathbf{a}\mathbf{(h_k)} \end{gathered} \tag{95}$$

Зная значения $\mathbf{A_s}$ и $\mathbf{A_a}$ можно получить значения $\boldsymbol{\tilde{\sigma}}_\mathbf{s}\mathbf{(x_1)}$ и $\boldsymbol{\tilde{\sigma}}_\mathbf{a}\mathbf{(x_1)}$ в любой точке x_1, принадлежащей рассматриваемому слою по формуле (84).Отметим, что формулы для расчета остальных компонент тензора напряжений, могут быть получены аналогично формулам (84). Действительно, рассмотрим вектор

$$\boldsymbol{\tilde{\sigma}}_\mathbf{in} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tilde{\sigma}}_\mathbf{22} \\ \boldsymbol{\tilde{\sigma}}_\mathbf{33} \\ \boldsymbol{\tilde{\sigma}}_\mathbf{23} \end{pmatrix} \tag{96}$$

и представим его в виде суммы симметричной $\boldsymbol{\tilde{\sigma}}_\mathbf{in,s}$ и антисимметричной $\boldsymbol{\tilde{\sigma}}_\mathbf{in,a}$ частей. Отметим, что остальные компоненты тензора напряжений также могут быть найдены. Аналогично (84) можем записать соотношения

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\tilde{\sigma}}_\mathbf{in,s} = 1/\operatorname{ch}(\mathrm{x_1 h_k})\, \mathbf{M_s(x_1)}[\mathbf{D_s(h_k)}]^{-1}\boldsymbol{\tilde{\sigma}}_\mathbf{s}\mathbf{(h_k)} \\ \boldsymbol{\tilde{\sigma}}_\mathbf{in,a} = 1/\operatorname{ch}(\mathrm{x_1 h_k})\, \mathbf{M_a(x_1)}[\mathbf{D_a(h_k)}]^{-1}\boldsymbol{\tilde{\sigma}}_\mathbf{a}\mathbf{(h_k)} \end{gathered} \tag{97}$$

где матрицы $\mathbf{M_s}$ и $\mathbf{M_a}$ имеют вид

$$\mathbf{M_s} = \begin{bmatrix} s_2^2/s^2 + 2\nu s_3^2/s^2 + z s_2^2/s^2 \,\mathrm{thz} \\ s_3^2/s^2 + 2\nu s_2^2/s^2 + z s_3^2/s^2 \,\mathrm{thz} \\ s_2 s_3/s^2[(1-2\nu) + z\,\mathrm{thz}] \end{bmatrix.$$

$$\begin{matrix} is_2/s(2[\nu s_2^2/s^2 - 1 - \nu] - s_2^2/s^2 z\,\mathrm{thz}) \\ -is_2/s[2\nu s_2^2/s^2 + s_3^2/s^2 z\,\mathrm{thz}] \\ -is_3/s([1 - 2\nu s_2^2/s^2] + s_2^2/s^2 z\,\mathrm{thz}) \end{matrix} \tag{98}$$

$$\left. \begin{matrix} -is_3/s[2\nu s_3^2/s^2 + s_2^2/s^2 z\,\mathrm{thz}] \\ is_3/s(2[\nu s_3^2/s^2 - 1 - \nu] - s_3^2/s^2 z\,\mathrm{thz}) \\ -is_2/s([1 - 2\nu s_3^2/s^2] + s_3^2/s^2 z\,\mathrm{thz}) \end{matrix} \right]$$

$$\mathbf{M_a} = \begin{bmatrix} [s_2^2/s^2 + 2\nu s_3^2/s^2]\,\mathrm{thz} + z s_2^2/s^2 \\ [s_3^2/s^2 + 2\nu s_2^2/s^2]\,\mathrm{thz} + z s_3^2/s^2 \\ s_2 s_3/s^2[(1-2\nu)\,\mathrm{thz} + z] \end{bmatrix.$$

$$\begin{matrix} is_2/s(2[\nu s_2^2/s^2 - 1 - \nu]\,\mathrm{thz} - s_2^2/s^2 z) \\ -is_2/s[2\nu s_2^2/s^2\,\mathrm{thz} + s_3^2/s^2 z] \\ -is_3/s([1 - 2\nu s_2^2/s^2]\,\mathrm{thz} + s_2^2/s^2 z) \end{matrix} \tag{99}$$

$$\left. \begin{matrix} -is_3/s[2\nu s_3^2/s^2\,\mathrm{thz} + s_2^2/s^2 z] \\ is_3/s(2[\nu s_3^2/s^2 - 1 - \nu]\,\mathrm{thz} - s_3^2/s^2 z \\ -is_2/s([1 - 2\nu s_3^2/s^2]\,\mathrm{thz} + s_3^2/s^2 z) \end{matrix} \right]$$

Таким образом, для трехмерного уравнения упругости представлены формулы, позволяющая рассчитать все компоненты тензора напряжения в любой точке слоистой структуры. По этим формулам могут быть рассчитаны все ядра граничных интегральных уравнений. Таким образом, представленный подход позволяет решать задачи для произвольных неоднородностей. Как и в случае двумерного уравнения Лапласа при численной реализации изложенного выше метода используется быстрое преобразование Фурье. Точности нахождения функции Грина определяется путем рассмотрения задачи 1 из предложенного ранее подхода к оценке точности.

2.8 Радиальная трещина под действием равномерного давления в трехмерной слоистой среде

Рассмотрим радиальную вертикальную трещину, которая находится в плоскости, перпендикулярной границам слоев рассматриваемой структуры. Пусть эта плоскость перпендикулярна оси x_3. Такая трещина рассматривается в планарной трехмерной модели трещины гидроразрыва пласта и имеет важнейшее прикладное значение. Отметим, что трещина может находится в нескольких слоях одновременно, пересекая границы слоев. Необходимо найти раскрытие w такой трещины под действием давления p, ортогонального поверхности трещины.

Для такой трещины граничное интегральное уравнение [56] может быть записано в виде

$$p(x_1, x_2) = \int_{L_s} C(x_1, x_2, y_1, y_2) w(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \tag{100}$$

где $C(x_1, x_2, y_1, y_2)$ - ядро, рассчитанное по функции Грина для слоистой структуры, $w(y_1, y_2)$ – раскрытие трещины. По сути, $C(x_1, x_2, y_1, y_2)$ представляет собой горизонтальные напряжения σ_{33} в точке (x_1, x_2), индуцированные точечным источником единичной интенсивности, действующим в точке (y_1, y_2) в направлении x_3. Отметим, что так как рассматривается трещина, то согласно теории граничных интегральный уравнений для нахождения решения необходимо знать сингулярное и гиперсингулярное ядро.

Приведем необходимые формулы для расчета функции $C(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Фундаментальное решение трехмерного уравнения Ламе имеет виде

$$U_{ik}^L = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu)\frac{\delta_{ik}}{R} + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{R^3} \right] \tag{101}$$

где $R = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$. Сингулярное и гиперсингулярное решение для бесконечной однородной изотропной среды определяются соотношениями (8). По представленному алгоритму нахождения функции Грина слоистой структуры необходимо найти усилия, соответсвующие точечному источнику. В рассматриваемом случае искомые усилия составляют первый столбец матрицы гиперсингулярного решения. Тогда компоненты вектора усилий в направлении нормали к поверхности слоев имеют следующий вид:

$$q_1 = -\frac{\mu}{4\pi(1-\nu)R^3} \left(2(1-\nu) - 3(1-2\nu)\frac{x_3^2}{R^2} - \frac{15x_1^2 x_2^2}{R^4} \right) \tag{102}$$

$$q_2 = -\frac{\mu}{4\pi(1-\nu)R^5}\left(3 - \frac{15x_2^2}{R^2}\right)x_1x_2 \tag{103}$$

$$q_3 = -\frac{\mu}{4\pi(1-\nu)R^5}\left(3(1-2\nu) - \frac{15x_2^2}{R^2}\right)x_1x_3 \tag{104}$$

Искомое ядро можно найти воспользовавшись изложенным ранее алгоритмом.

Рассмотрим радиальную трещину радиуса R_f под действием равномерного давления p в трехмерной слоистой среде, состоящей из двух сцепленных полупространств. Пусть трещина находится в нижнем полупространстве, причем центр трещины удален от границы раздела на расстояние $1.2R_f$ (Рис. 18).

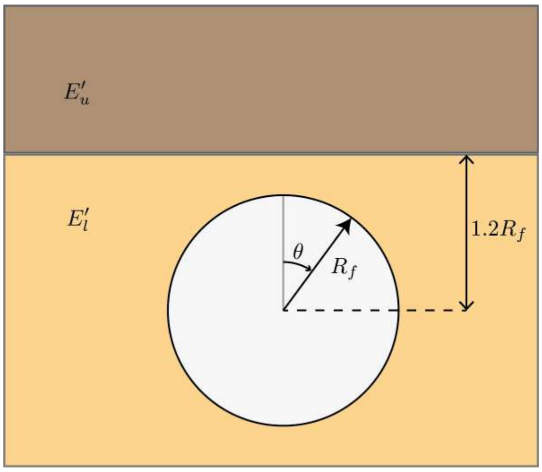

Рис. 18: Трещина в нижнем полупространстве

Будем обозначать значения, соответствующие верхнему и нижнему полупространству, нижним индексом u и l соответсвенно. Положим $\nu_u = \nu_l = 0.3$. Введем в рассмотрение плоский модуль Юнга, который определяется соотношением

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \tag{105}$$

и величину

$$\Gamma = \frac{E'_u}{E'_l} \tag{106}$$

Будем искать коэффициент интенсивности напряжений K_I вдоль периметра радиальной трещины, находящейся действием равномерного давления. Данный случай был впервые рассмотрен в работе [48]. Авторы работы [73] провели аналогичный эксперимент и отметили, что их результаты совпадают с результатами работы [50] с точностью до константы.

Для численного нахождения коэффициента интенсивности [41] воспользуемся формулой

$$K_I = \lim_{r_d \to 0} \frac{w(r_d)}{\sqrt{r_d}} \tag{107}$$

где r_d – расстояние от рассматриваемой точки до контура трещины.

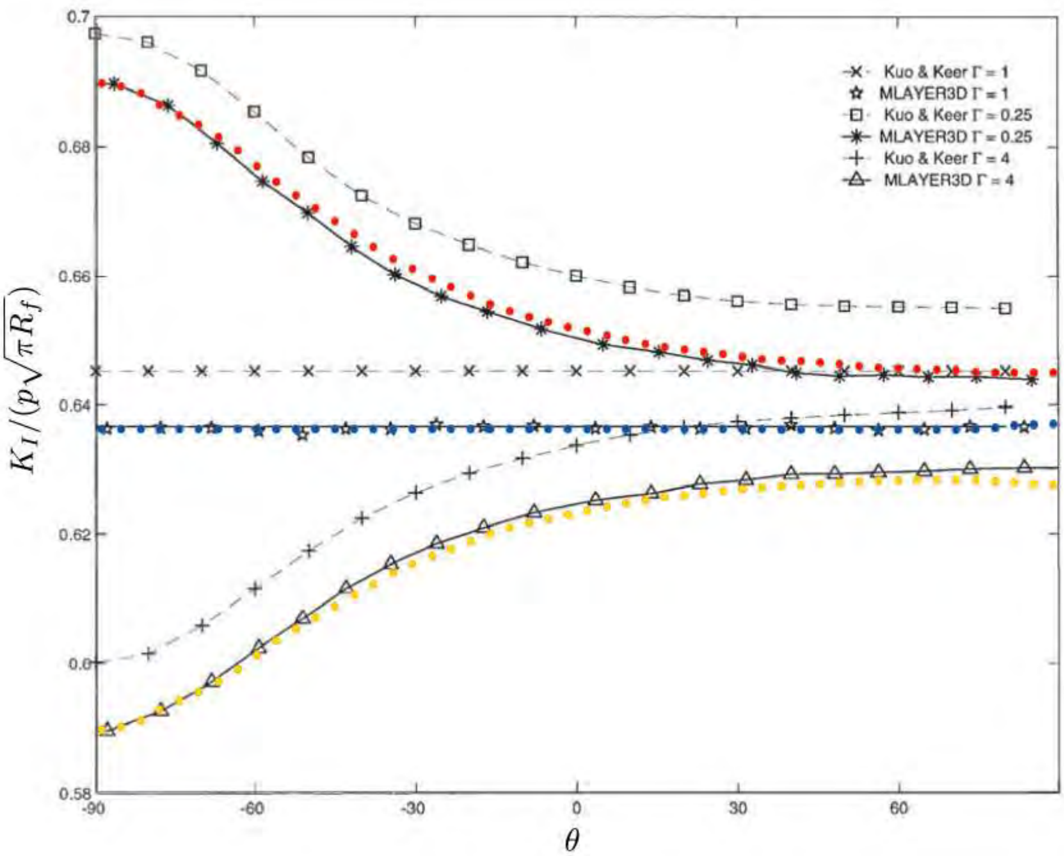

Рис. 19: Зависимость безразмерного коэффициента интенсивности напряжений вдоль периметра радиальной трещины радиуса R_f под действием равномерного давления p от угла θ. Результаты работы [73] обозначены как MLAYER3D, результаты работы [48] как Kuo & Keer. Результаты данной работы: красные точки ($\Gamma = 0.25$), синие точки ($\Gamma = 1$), желтые точки ($\Gamma = 4$).

Результаты расчета коэффициента интенсивности напряжений представлены (Рис. 19) в сравнении с результатами работ [48] и [73]. За основу взят график из работы [73].

Из Рис. 19 видно, что результаты, полученные с использованием представленного ранее подхода, с высокой точностью совпадают с результатами работы [73], но при этом отличаются от результатов, представленных в [48]. Количественное расхождение с результатами [48] объясняется опечаткой, о чем упоминается в [73]. При этом отметим, что качественно результаты совпадают.

Отметим, что расчет коэффициента интенсивности напряжений является весьма чувствительной к точности расчета операцией. В данной работе трещина модулировалась в виде набора квадратных элементов одинакового размера, в каждом из которых было задано одинаковое давление p. Количество таких элементов вдоль радиуса трещины в рассматриваемом случае $N_f = 20$ (Рис. 20).

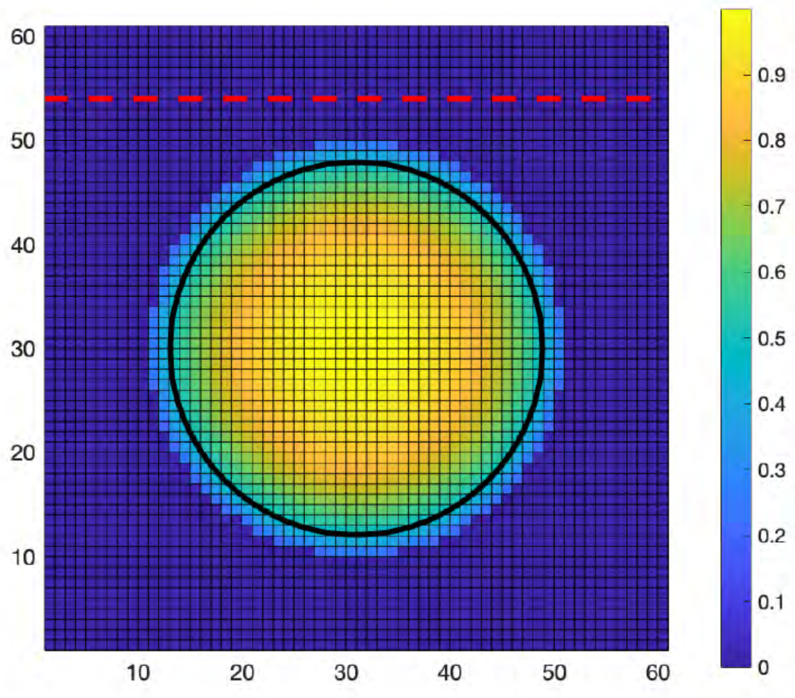

Рис. 20: Разбиение трещины на элементы. Цветом обозначено безразмерное раскрытие трещины. Черная линия расположена по периметру на расстоянии r_d от контура трещины. Красная пунктирная линия расположена на границе полупространств.

Отметим, что результаты, представленные в работе [73], получены для более мелкой сетки. Высокая точность результатов данной работы при более грубой сетке достигается благодаря расчету с высокой точностью ядра $C(x_1, x_2, y_1, y_2)$, что в свою очередь возможно благодаря выбору параметров расчета по представленному ранее подходу.

Рассмотрим теперь случай, когда трещина пересекает границу раздела двух сред. Возьмем два полупространства таких, что $\Gamma = E_u/E_l = 4$. Пусть центр трещины принадлежит границе между полупространствами. Решение такой задачи представлено в работах [48] и [73]. За основу взят график из работы [73]. Сравнение результатов представлено на Рис. 21.

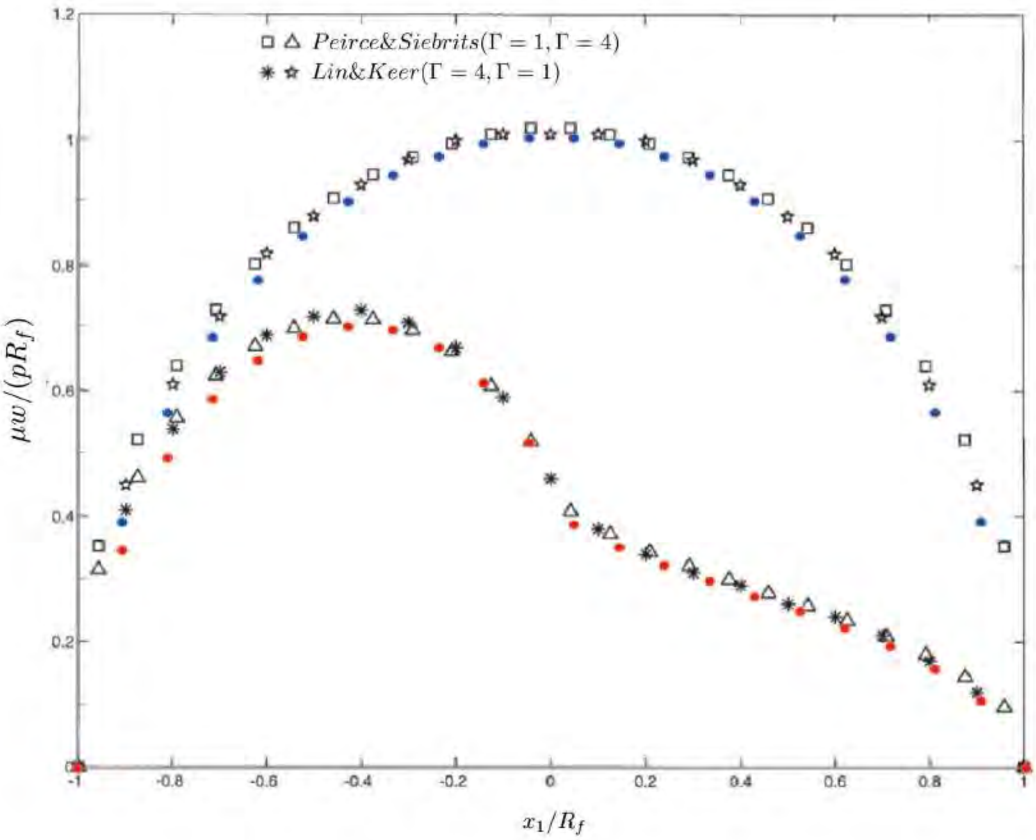

Рис. 21: Безразмерное раскрытие трещины радиуса R_f под действием равномерного давления p, пересекающей границу между двумя полупространствами. Результаты данной работы:красные точки ($\Gamma = 4$), синие точки ($\Gamma = 1$).

Из Рис. 21 видно, что результаты всех трех работ совпадают с высокой степенью точности. Отметим, что в работе [48] разбиение трещины на элементы бралось таким образом, что один из элементов попадал на границу между двумя слоями, тогда как в данной работе и в работе [73] граница между слоями совпадает с границами элементов.

Отметим, что результаты, представленные на Рис. 21, получены при условии, что сжимающие напряжения в слоях одинаковые. Однако в общем случае это не так. Например, при изучении свойств горной породы предполагается, что значения напряжений в слоях зависят от значений упругих свойств слоев. Таким образом, слои с различными значениями E' должны иметь и различные сжимающие напряжения. Несмотря на это, результаты, полученные для различных E' при одинаковых напряжениях, представляют интерес для изучения характера влияния разнородности упругих модулей на раскрытие трещины.

Рассмотрим случай, когда радиальная трещина под равномерным давлением находится в пределах одного слоя между двумя полупространствами с одинаковыми упругими свойствами (Рис. 22). Пусть толщина такого слоя равна $2R_f$, то есть контур трещины касается границ.

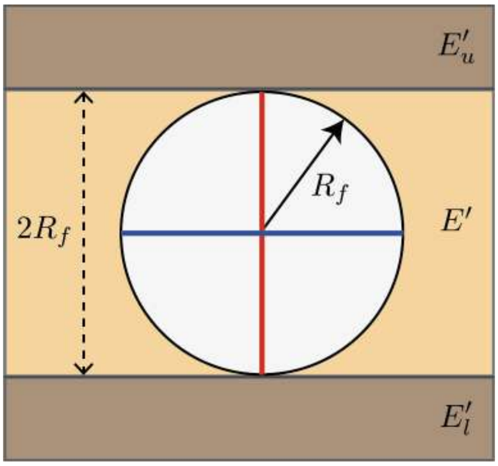

Рис. 22: Трещина между двумя полупространствами.

Будем вычислять раскрытие трещины в центральном сечении, параллельном границам (синий отрезок на Рис. 22) и в центральном сечении, перпендикулярном границам (красный отрезок на Рис. 22).

Пусть $E'_u = E'_l >> E'$. Результаты для данного случая представлены на Рис. 23.

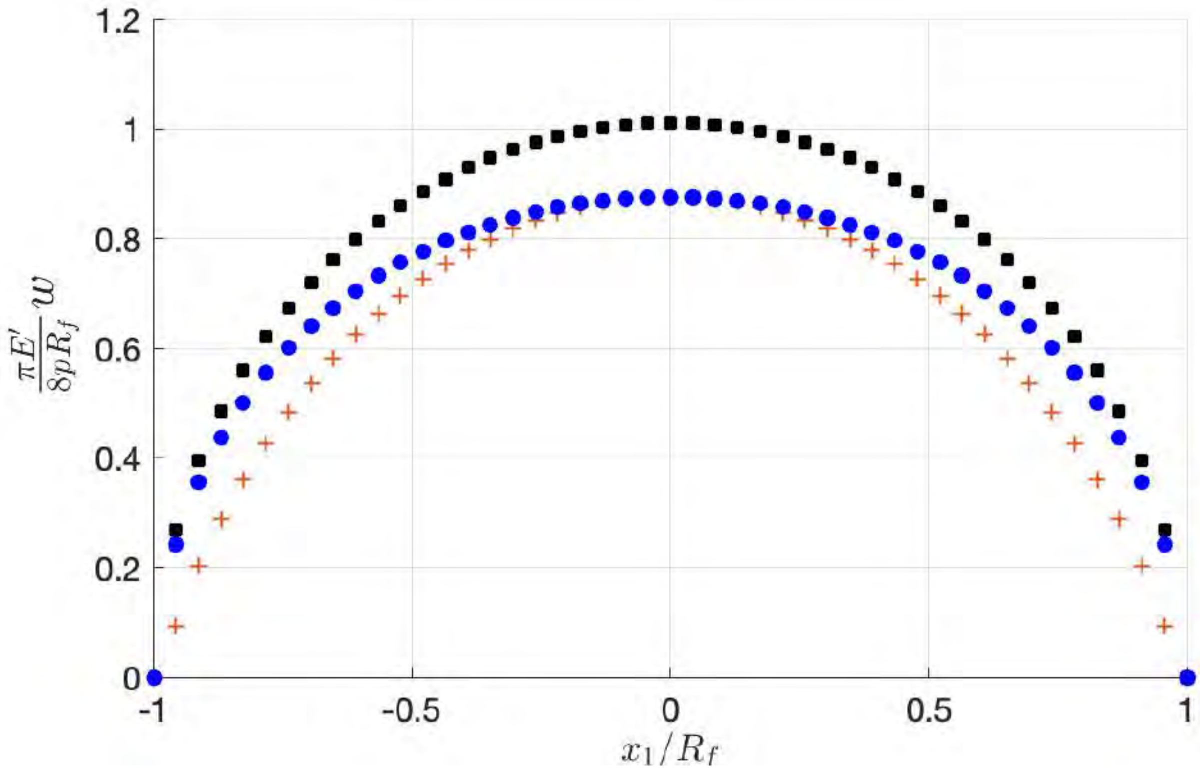

Рис. 23: Трещина между двумя полупространствами. Черными квадратами обозначено раскрытие трещины при $E'_u = E'_l = E'$, синими точками обозначено раскрытие трещины в центральном сечении, параллельном границам слоев, при $E'_u = E'_l = 1e6E'$, красными крестами обозначено раскрытие трещины в центральном сечении, перпендикулярном границам слоев, при $E'_u = E'_l = 1e6E'$.

Максимальное отклонение от решения для однородного случая наблюдается в середине трещины и составляет 15.5%. Отметим, что в вертикальном сечении различие с решением для однородной среды практически одинаково во всех точках, тогда как в горизонтальном сечении эта разница уменьшается при приближении к границе трещины.

Пусть $E'_u = E'_l << E'$. Результаты для данного случая представлены на Рис. 24.

Максимальное отклонение от решения для однородного случая наблюдается вблизи границ. Отклонение в центральной точке трещины составляет 17.8%, что близко к значению, полученному для случая $E'_u = E'_l >> E'$. Отметим, что как и в предыдущем случае, разница между раскрытием в вертикальном сече-

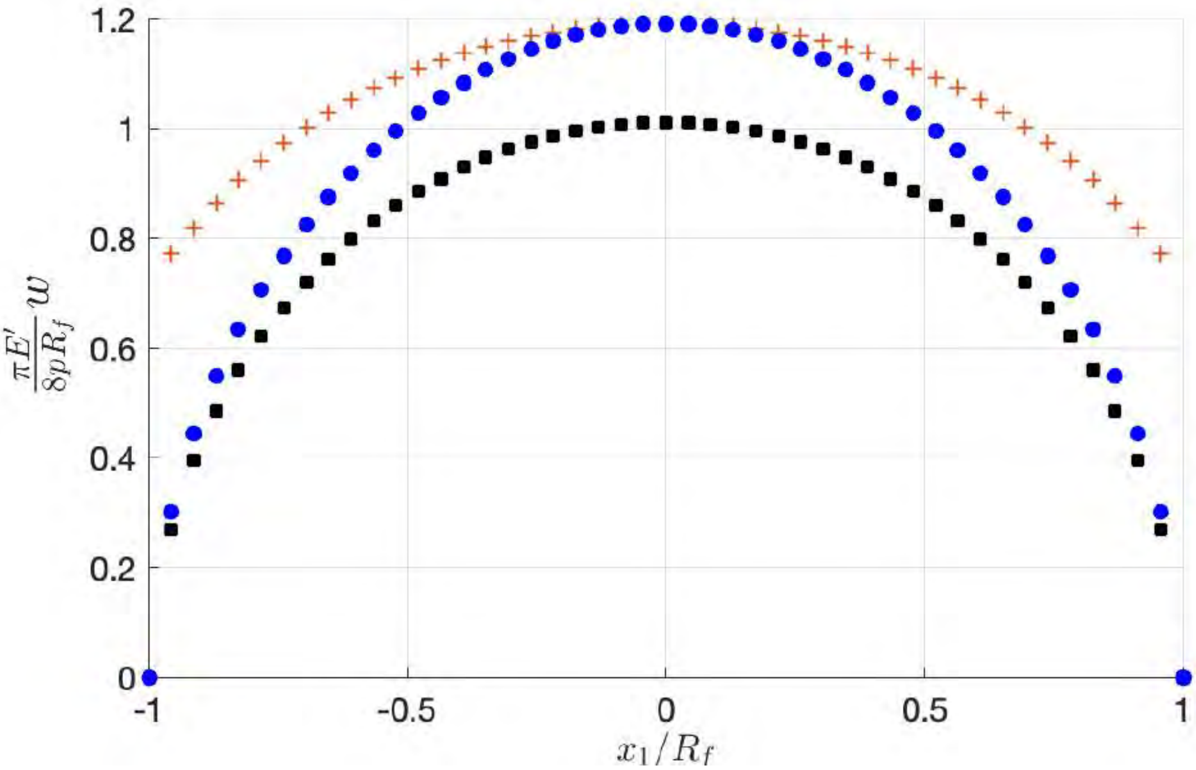

Рис. 24: Трещина между двумя полупространствами. Черными квадратами обозначено раскрытие трещины при $E'_u = E'_l = E'$, синими точками обозначено раскрытие трещины в центральном сечении, параллельном границам слоев, при $E'_u = E'_l = 1e-6E'$, красными крестами обозначено раскрытие трещины в центральном сечении, перпендикулярном границам слоев, при $E'_u = E'_l = 1e-6E'$.

нии и раскрытием в однородной среде практически одинакова во всех точках, тогда как в горизонтальном сечении эта разница уменьшается при приближении к границе трещины.

Рассмотренные случаи позволяют определить границы влияния относительной разницы упругих свойств слоев на раскрытие радиальной трещины, перпендикулярной границам слоев. Показано, что раскрытие трещины в слоистой среде может более чем в два раза отличаться от раскрытия такой же трещины в однородной среде. При этом данная оценка справедлива также для трещины под действием неравномерного давления.

2.9 Выводы

Полученные в данной главе результаты могут быть обобщены следующим образом.

- Представлен метод построения функции Грина слоистой среды для двумерного уравнения Лапласа. Представлен способ оценки точности разработанного метода. Показано, что увеличение периода $2A$ преобразования Фурье при фиксированном числе точек дискретизации N позволяет увеличить точность без увеличения времени расчета.

- Для двумерного уравнения Лапласа дано обобщение метода комплексных граничных интегральных уравнений на задачи для слоистых структур с неоднородностями. С помощью данного метода решена задача о круговом отверстии с заданным на контуре потоком в слоистой среде. Для частного случая кругового отверстия в полуплоскости с сильно проводящей границей проведено сравнение с аналитическим решением и показано, что погрешность расчетов не превышает 4%. Получена зависимость отношения максимального и минимального значения потенциала на контуре отверстия от значений относительной проводимости полуплоскостей и расстояния от центра отверстия до границы. Показано, что сильно проводящая граница оказывает большее влияние на потенциал отверстия, чем непроницаемая граница.

- Представлен метод построения функции Грина слоистой среды для трехмерного уравнения Ламе, позволяющий рассчитать все ядра граничных интегральных уравнений. Решена задача о радиальной трещине, перпендикулярной границам слоев, под действием постоянного давления. Для случая, когда такая трещина целиком находится в одном слое, расположенном между двумя полупространствами, определены границы влияния значений упругих модулей полупространств на раскрытие трещины. Показано, что разница упругих модулей слоев приводит к значительному отклонению коэффициента интенсивности напряжений вдоль периметра трещины от соответствующих значений для однородной среды в случаях, когда трещина не пересекает границы слоев. Сравнение с результатами, полученными с использованием альтернативных подходов, демонстрирует достоверность полученных в данной работе результатов.

3 Модифицированная псевдотрехмерная модель распространения плоской трещины в слоистой среде

3.1 Псевдотрехмерная модель трещины гидроразрыва пласта

Применение представленной в предыдущей главе модели слоистости для моделирования трещины предполагает использование метода граничных элементов. Однако ввиду вычислительных трудностей, трехмерное моделирование ГРП хотя и достигло некоторого прогресса [76], но все равно остается весьма сложной задачей. Это приводит к необходимости разработки упрощенной модели. Тенденция к внедрению простых моделей в быстрых симуляторах также вызвана неопределенностью структуры, свойств и напряжений породы.

Псевдотрехмерная модель трещины – одна из наиболее часто используемых моделей в коммерческих симуляторах. Модель P3D дополняет базовую модель PKN, в которой высота трещины полагается постоянной, правилом для определения роста трещины в высоту. На данный момент это сделано путем введения в рассмотрение фиктивного критического коэффициента интенсивности напряжений (КИН) [27]. Основные усилия направлены на поиск этой величины, также называемой фиктивной трещиностойкостью [27]. Простейший подход состоит в том, чтобы приравнять фиктивную трещиностойкость к трещиностойкости породы. Однако такой подход не согласуется с фактом, что часто трещина преимущественно распространяется в режиме доминирующей вязкости, а не в режиме доминирующей трещиностойкости [79]. Решение данной проблемы было представлено только для частного случая симметричной слоистой структуры с одним слоем, находящимся между полупространствами с одинаковым положительным контрастом напряжений и одинаковыми упругими свойствами [27]. Авторы получили полуэмпирическое уравнение, которое определяет фиктивную трещиностойкость и представили способ, который обеспечивает рост высоты в соответствии с трехмерным решением, найденным с использованием модели ILSA[75]. Возникает вопрос: как моделировать рост псевдотрехмерной трещины в высоту в режиме доминирующей вязкости в произвольном случае? Возникает и второй вопрос: при каких условиях любое расширение модели P3D становится неприменимым?

Данная глава призвана дать ответы на эти вопросы. Цель достигается путем пересмотра схемы P3D и объединения модели P3D с моделью KGD, модифицированной для учета произвольного контраста напряжений [35]. Предложен принцип соответствия, который устанавливает соответствие между двумя моделями в терминах физических величин, присутствующих в обеих моделях.

3.2 Постановка задачи о псевдотрехмерной трещине в слоистой среде

Основные предположения базовой модели P3D (Рис. 25) можно сформулировать следующим образом:

i размер (длина) трещины в направлении ее наибольшего роста заметно превышает ее размер (высоту) в ортогональном направлении, так что условия плоской деформации применимы в поперечных сечениях, параллельных фронту;

ii трещина распространяется в однородной упругой и изотропной среде с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν;

iii давление жидкости p, различно в поперечных сечениях, параллельных фронту трещины, и одинаково в каждом из этих сечений.

Поместим начало O декартовой системы координат xOz в середину продуктивного слоя, в котором производится закачка жидкости в пласт. Ось x направим в направлении наибольшего роста трещины. Будем называть это направление горизонтальным. Ось z направим перпиндикулярно границам слоев. Введем в рассмотрение координаты нижней $z_{*l}(x,t)$ и верхней $z_{*u}(x,t)$ вершины трещины в зависимости от времени t и положения точки трещины на оси x. Напряжение σ, закрывающее трещину, обычно изменяется в направлении z и предполагается положительным для сжимающих напряжений. В модели P3D напряжения

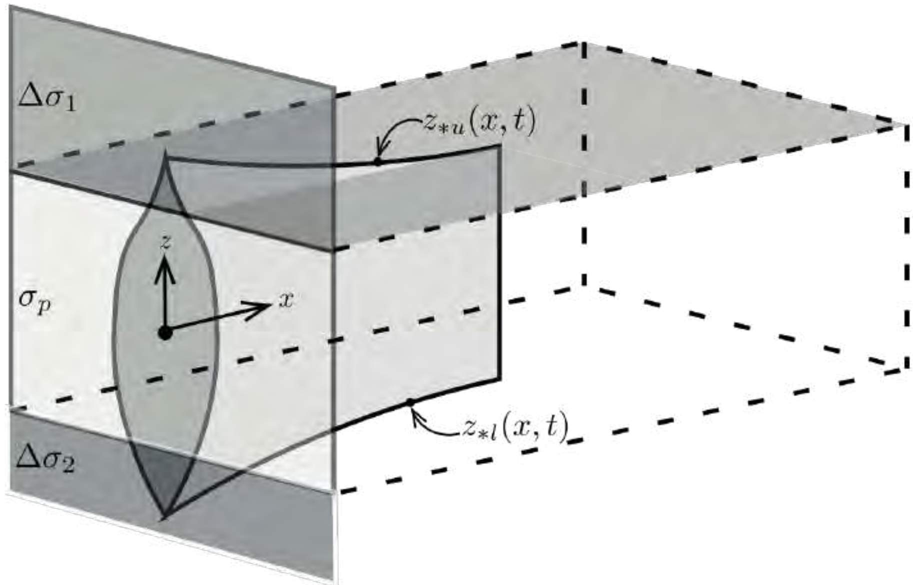

Рис. 25: Геометрия трещины P3D

задаются как ступенчатая функция с постоянным значением σ^j в каждом из слоев:

$$\sigma(z) = \sigma^j, \text{где } z^{j-1} < z < z^j, j = 1, \ldots, n \tag{108}$$

где n – суммарное число слоев, в которых может расти трещина; z^j – координата верхней границы j-ого слоя (z^{j-1} – координата нижней границы). Первый и последний слой являются полупространствами: $z^0 = -\infty$ и $z^n = \infty$. Номер продуктивного слоя будем обозначать j_p.

Из предположений (i) и (ii) следует, что в каждом поперечном сечении раскрытие трещины может быть выражено через давление и напряжения на бесконечности с помощью уравнений теории упругости. Для того, чтобы написать это уравнение для сечения x в простейшем виде, удобно использовать локальную систему координат $xO'z'$. Она получается из глобальной путем смещения в вертикальном направлении так, что в каждый рассматриваемый момент времени t центр O' находится в точке $z_0(x,t) = \frac{1}{2}(z_{*l} + z_{*u})$ интервала между нижней $z_{*l}(x,t)$ и верхней $z_{*u}(x,t)$ вершиной:

$$z' = z - z_0(x,t) \tag{109}$$

В локальной системе координат зависимость между раскрытием $w(z(z'))$ и разностью $p-\sigma(z)$ [69], имеет вид:

$$w(z(\zeta)) = \frac{4}{\pi E'} z_* \int_{-1}^{1} \Big[p\left(s(\eta)\right) - \sigma\left(s(\eta)\right)\Big] \operatorname{arcosh}\left|\frac{1-\zeta\eta}{\zeta-\eta}\right| \mathrm{d}\eta \tag{110}$$

С учетом (109), глобальные координаты z и s выражаются через нормированные локальные координаты $\zeta = z'/z_*$ и $\eta = s'/z_*$ с помощью соотношений

$$z = z_*\zeta + z_0(x,t), \quad s = z_*\eta + z_0(x,t) \tag{111}$$

где $z_*(x,t) = \frac{1}{2}\left(z_{*u} - z_{*l}\right)$ – текущая полувысота трещины в сечении x.

Уравнение течения жидкости содержит градиент давления жидкости, а не само давление. Это приводит к тому, что можно использовать давление p_{net}, определяемое как разность между давлением жидкости p и фиксированным значением σ_0 сжимающих напряжений в горной породе. В качестве σ_0 может быть использовано значение сжимающих напряжений в продуктивном слое σ_p. Таким образом $\sigma_0 = \sigma_p$, и в уравнении (110) и последующих уравнениях мы можем использовать чистое давление $p_{net}(x,t) = p(x,t) - \sigma_p$ вместо $p(x,t)$ и контраст напряжений $\Delta\sigma(z) = \sigma(z) - \sigma_p$ вместо абсолютных значений сжимающих напряжений $\sigma(z)$. Таким образом, с использованием уравнения (111), уравнение упругости (110) принимает вид:

$$w(z(\zeta)) = \frac{4}{\pi E'} z_* \int_{-1}^{1} \Big[p_{net}\left(s(\eta)\right) - \Delta\sigma\left(s(\eta)\right)\Big] \operatorname{arcosh}\left|\frac{1-\zeta\eta}{\zeta-\eta}\right| \mathrm{d}\eta \tag{112}$$

Предположение (iii) и кусочно-постоянное распределение (108) приводит к тому, что интеграл в (112) выражается аналитически через первообразную $G_w(\zeta,\eta) = (\eta-\zeta)\operatorname{arcosh}\left|\frac{1-\zeta\eta}{\zeta-\eta}\right| - \sqrt{1-\zeta^2}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\eta\right]$ функции $\operatorname{arcosh}\left|\frac{1-\zeta\eta}{\zeta-\eta}\right|$:

$$w(z(\zeta)) = \frac{4}{\pi E'} z_* \Big[\pi p_{net}(x)\sqrt{1-\zeta^2} - F_w(\Delta\sigma,\zeta)\Big] \tag{113}$$

где $F_w(\Delta\sigma,\zeta) = \sum_{j=j_l}^{j=j_u} \Delta\sigma^j \left[G_w(\zeta,\eta^j) - G_w(\zeta,\eta^{j-1})\right]$. Отметим, что суммирование проводится только по слоям, пересекающим трещину: $j_l = \min\left(j : z^j > z_{*l}\right)$, $j_u = \max(j : z^{j-1} < z_{*u})$, $\eta^j = [z^j - z_0(x,t)]/z_*(x,t)$.

Для раскрытия w_{av}, осреднённого по сечению, справедливо соотношение

$$w_{av} = \frac{1}{2z_*}\int_{z_{*l}}^{z_{*u}} w(z)dz = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} w\left(z(\zeta)\right)\mathrm{d}\zeta \tag{114}$$

Интегрирование (112) позволяет получить зависимость между чистым давлением и средним раскрытием:

$$w_{av} = \frac{2z_*}{E'}\left[\frac{\pi p_{net}}{2} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Delta\sigma\left(z(\zeta)\right)\sqrt{1-\zeta^2}\mathrm{d}\zeta\right] \tag{115}$$

Из этого следует

$$\frac{p_{net}}{E'} = \frac{1}{\pi}\frac{w_{av}}{z_*} + \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Delta\sigma\left(z(\zeta)\right)}{E'}\sqrt{1-\zeta^2}\mathrm{d}\zeta \tag{116}$$

Для кусочно-постоянных сжимающих напряжений (108), интегрирование в (116) приводит к зависимости между средним раскрытием w_{av} и контрастом напряжений $\Delta\sigma(z)$:

$$\frac{p_{net}}{E'} = \frac{1}{\pi}\frac{w_{av}}{z_*} + \frac{2}{\pi}\frac{\Delta\sigma^l}{E'}\Big[\frac{\pi}{4} + F_\sigma(\zeta^l)\Big] + \frac{2}{\pi}\sum_{j=j_l+1}^{j=j_u-1}\frac{\Delta\sigma^j}{E'}\Big[F_\sigma(\zeta^j) - F_\sigma(\zeta^{j-1})\Big] + \dots$$

$$\dots + \frac{2}{\pi}\frac{\Delta\sigma^u}{E'}\Big[\frac{\pi}{4} - F_\sigma(\zeta^u)\Big], \tag{117}$$

где j_l и j_u – номера слоев, в которых находится нижняя и верхняя вершина трещины соответственно, $\zeta^l(\zeta^u)$ – нормированная координата ζ верхней (нижней) границы слоя j_l (j_u); $\zeta^j = \Big[z^j - z_0(x,t)\Big]/z_*(x,t)$. Функция

$$F_\sigma(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta\sqrt{1-\zeta^2} + \arcsin\zeta\right) \tag{118}$$

представляет интеграл от $\sqrt{1-\zeta^2}$. Если трещина находится в пределах продуктивного слоя ($j_l = j_u = j_p$), то все слагаемые в правой части (117), содержащие контраст напряжений, обращаются в нуль. Ясно, что так как объем V жидкости в поперечном сечении равен $2z_* w_{av}$, то объем может быть использован как неизвестная вместо w_{av} и наоборот.

Отметим, что коэффициенты интенсивности для верхней K_I^u и нижней K_I^l вершины определяются соотношениями:

$$
\begin{aligned}
K_I^u &= \sqrt{\frac{z_*}{\pi}} \int_{-1}^{1} \Big[p_{net}\left(s(\eta)\right) - \Delta\sigma\left(s(\eta)\right)\Big] \sqrt{\frac{1+\zeta}{1-\zeta}} \mathrm{d}\zeta, \\
K_I^l &= \sqrt{\frac{z_*}{\pi}} \int_{-1}^{1} \Big[p_{net}\left(s(\eta)\right) - \Delta\sigma\left(s(\eta)\right)\Big] \sqrt{\frac{1-\zeta}{1+\zeta}} \mathrm{d}\zeta
\end{aligned} \tag{119}
$$

Так как первообразными $\sqrt{\frac{1+\zeta}{1-\zeta}}$ и $\sqrt{\frac{1-\zeta}{1+\zeta}}$ являются, соответственно, функции $F_K^u(\zeta) = \arcsin\zeta - \sqrt{1-\zeta^2}$ и $F_K^l(\zeta) = F_K^u(\zeta) + 2\sqrt{1-\zeta^2}$, то КИН (119) для постоянного чистого давления p_{net} и кусочно-однородного постоянного контраста напряжений $\Delta\sigma$ определяются соотношениями:

$$
\begin{aligned}
K_I^u = \sqrt{\pi z_*}\Big\{p_{net} - \frac{1}{\pi}\Delta\sigma^l \left[\frac{\pi}{2} + F_K^u(\zeta^l)\right] - \frac{1}{\pi}\sum_{j=j_l+1}^{j=j_u-1} \Delta\sigma^j \left[F_K^u(\zeta^j) - F_K^u(\zeta^{j-1})\right] - \\
- \frac{1}{\pi}\Delta\sigma^u \left[\frac{\pi}{2} - F_K^u(\zeta^u)\right]\Big\}
\end{aligned} \tag{120}
$$

$$
\begin{aligned}
K_I^l = K_I^u - 2\sqrt{\frac{z_*}{\pi}}\Big\{\Delta\sigma^l\sqrt{1-(\zeta^l)^2} + \sum_{j=j_l+1}^{j=j_u-1} \Delta\sigma^j \left[\sqrt{1-(\zeta^j)^2} - \sqrt{1-(\zeta^{j-1})^2}\right] - \\
- \Delta\sigma^u\sqrt{1-(\zeta^u)^2}\Big\}
\end{aligned} \tag{121}
$$

Аналогично (117), когда трещина находится внутри продуктивного слоя ($j_l = j_u = j_p$) все слагаемые в правой части (120), (121), содержащие контраст напряжений, равны нулю. Очевидно, что подстановка p_{net} в (120), (121) дает выражения коэффициентов интенсивности напряжений через текущее среднее значение раскрытия w_{av}, высоты трещины $2z_*$ и координат z_{*u} и z_{*l}. Тогда эти уравнения определяют фиктивную трещиностойкость для каждой вершины трещины. В симметричном случае имеем $z_{*u} = z_*$, $z_{*l} = -z_{*u}$, $K_I^l = K_I^u$. В этом случае КИН определяется только текущей высотой трещины и средним раскрытием. В свою очередь, в соответствующей задаче KGD, скорость определяется теми же величинами: текущей высотой трещины и средним раскрытием. Получается, что приравнивание средних раскрытий для одинаковых высот дает зависимость КИН от текущей скорости роста и высоты. Следовательно, при использовании среднего раскрытия и текущей высоты для определения вертикальной скорости роста трещины, введение фиктивной трещиностойкости является ненужным усложнением. Тем не менее, в случае, когда зависимость фиктивной трещиностойкости от скорости роста трещины может быть выражена приближенным аналитическим уравнением, решение уравнение для скорости может быть использовано для расчета роста трещины в высоту. Авторы работы [27] использовали этот подход для частного случая симметричной структуры с продуктивным слоем, находящимся между двумя полупространствами.

Запишем уравнения непрерывности и уравнения типа Пуазейля

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial (w v_x)}{\partial x} - q_l + Q_0(t)\delta(z)\delta(x) \tag{122}$$

$$v_x(x, z, t) = \left(-\frac{w^{n+1}}{\mu'}\frac{\partial p_{net}}{\partial x}\right)^{1/n} \tag{123}$$

где q_l – слагаемое, соответствующее утечкам, $Q_0(t)$ – заданный поток в точке инициации трещины $x = z = 0$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, v_x – скорость частиц в направлении x, $\mu' = 2[2(2n+1)/n]^n M$, n - индекс поведения жидкости, M – индекс консистенции жидкости. Для Ньютоновской жидкости $n = 1$, $M = \hat{\mu}$ – динамическая вязкость; тогда $\mu' = 12\hat{\mu}$. Отметим, что точечный источник, включающий $\delta(x)$, подразумевает, что трещина симметрична относительно оси z. Таким образом, поток, соответствующий правой (левой) части трещины равен $1/2Q_0(t)$. Это важно для расчетов, в которых учитывается симметрия задачи.

Интегрирование (122) и (123) по сечению от $z_{*l}(x,t)$ до $z_{*u}(x,t)$ и использование (114) позволяет получить соотношения:

$$\frac{\partial(2z_* w_{av})}{\partial t} = -\frac{\partial(2z_* w_{av} v_{av})}{\partial x} - Q_l + Q_0\delta(x) \tag{124}$$

$$v_{av}(x,t) = F_v(x,t)\left(-\frac{w_{av}^{n+1}}{\mu'}\frac{\partial p_{net}}{\partial x}\right)^{1/n} \tag{125}$$

где $Q_l = \frac{1}{2z_*}\int_{z_{*l}}^{z_{*u}} q_l \mathrm{d}z$ – суммарные утечки через поверхность в заданном сечении, v_{av} – средняя скорость частиц жидкости, определяемая сотношением $v_{av} = \frac{Q}{2z_*}$, где $Q = \int_{z_{*l}}^{z_{*u}} v_x w \mathrm{d}z$. Тогда справедливо соотношение

$$F_v(x,t) = \frac{(w^{2+1/n})_{av}}{w_{av}^{2+1/n}} \tag{126}$$

где $(w^{2+1/n})_{av} = \frac{1}{2z_*}\int_{z_{*l}}^{z_{*u}} w^{2+1/n}\mathrm{d}z$ – среднее значение величины $w^{2+1/n}$ по поперечному сечению.

Скорость распространения трещины $v_{*x}(t) = \frac{dx_*}{dt}$ в направлении оси x находится из уравнений

$$v_{*x}(t) = \lim_{x\to x_*} v_{av}(x,t) \tag{127}$$

где $x_*(t)$ - текущая позиция фронта трещины. С учетом (125), уравнения скорости имеют вид:

$$v_{*x}(t) = \frac{dx_*}{dt} = \frac{1}{t_n}\lim_{x\to x_*}\left[F_v(x,t)\left(-\frac{w_{av}}{E'}\frac{\partial p_{net}}{\partial x}\right)^{1/n}\right] \tag{128}$$

где $t_n = (\mu'/E')^{1/n}$ - единственный параметр, имеющий размерность времени.

На фронте трещины ее раскрытие равно нулю. Тогда чистое давление и второй член в правой части уравнения (116) также равны нулю. Это означает, что фронт всегда находится в продуктивном слое. Тогда $\lim_{x\to x_*} F_v = F_v(x_*,t)$. Исходя из этого вводится в рассмотрение асимптотический зонтик [59]:

$$w_{av} = C_w(t) r^{\alpha} \tag{129}$$

где $r = x_* - x$ – расстояние до фронта трещины, C_w – коэффициент интенсивности раскрытия, α – показатель, который необходимо определить.

Воспользуемся теперь фундаментальным предположением, которое всегда, хотя часто и неявно, используется при изучении распространения трещины гидроразрыва пласта: скорость распространения трещины конечна и не равна нулю. Подстановка (129) в (116) и в (128) позволяет определить, что v_{*x} удовлетворяет этим условиям только при $\alpha = 1/(n+2)$. Тогда уравнение скорости (128) принимает вид:

$$v_{*x}(t) = \frac{F_v(x_*, t)}{t_n} \left(\frac{1}{\pi z_*(n+2)} \right)^{1/n} C_w^{1+2/n} \tag{130}$$

Здесь C_w определяется через (129) как

$$C_w = w_{av}(r_i)/r_i^{\alpha} \tag{131}$$

где r_i - расстояние от фронта до точки сетки под асимптотическим зонтиком (129).

Осталось дополнить систему (124), (125), (130) уравнениями скорости роста трещины в высоту, определяющими положения $z_{*l}(x,t)$ и $z_{*u}(x,t)$ нижней и верхней вершин в каждом поперечном сечении, и начальными условиями.

Уравнения скорости роста трещины в высоту имеют вид

$$v_{zl}(x,t) = \frac{\mathrm{d}z_{*l}}{\mathrm{d}t} = f_{zl}(z_{*l}, z_{*u}, w_{av}) \tag{132}$$

$$v_{zu}(x,t) = \frac{\mathrm{d}z_{*u}}{\mathrm{d}t} = f_{zu}(z_{*l}, z_{*u}, w_{av}) \tag{133}$$

Начальные условия в момент времени t_0 задаются соотношением

$$x_*(t_0) = x_{*0}, w_{av}(x, t_0) = w_0(x), z_{*l}(t_0) = z_{*l0}, z_{*u}(t_0) = z_{*u0} \tag{134}$$

Задача состоит в решении уравнений (124), (125), ((130-133) при начальных условиях (134). Профиль раскрытия трещины w в уравнении (126) определяется уравнением (113). Чистое давление p_{net} в правой части (113) и (125) находится из уравнения (117). Функции $f_{zl}(z_{*l}, z_{*u}, w_{av}), f_{zu}(z_{*l}, z_{*u}, w_{av})$ в уравнениях скорости (132), (133) и значения $x_{*0}, w_0(x), z_{*l0}, z_{*u0}$ в начальных условиях (134) уточняются в следующих двух параграфах.

3.3 Принцип соответствия

Как было отмечено ранее, прямой подход к нахождению скоростей v_{zl}, v_{zu} вертикального роста через фиктивную трещиностойкость K_{IC} не имеет четкого обобщения на общий случай, а именно на произвольные режимы распространения и произвольные контрасты напряжений.

Представим общий подход расчета скорости роста трещины в высоту [68]. Примем во внимание, что модели KGD и P3D используют одно и то же уравнение упругости (112) для описания плоско-деформированного состояния. В модели P3D чистое давление является равномерным в поперечном сечении, что приводит к асимптотике вблизи кончика трещины, которая включает фиктивную трещиностойкость, но не включает скорость распространения трещины, которая не присутствует в асимптотическом уравнении. Напротив, в модели KGD чистое давление не является постоянным вдоль поперечного сечения и стремится к $-\infty$ около кончика трещины. Для этой модели асимптотическое поведение определяется асимптотическим зонтиком, который включает скорость распространения (за исключением предельного случая, когда потери как на вязкость, так и на утечки равны нулю).

Фактически, различие двух моделей касается только зон около кончика трещины, на которые влияет асимптотика, тогда как раскрытия в центральных частях трещин могут быть почти одинаковыми. Это позволяет ввести в рассмотрение принцип соответствия, который устанавливает связь между моделями P3D и KGD в терминах физических величин, присутствующих в обеих моделях. Полагаем, что две плоские трещины ГРП эквивалентны, если одинаковы положения их вершин и объемы жидкости выше (и ниже) точки инициации.

Если эти величины равны для двух трещин при одинаковых условиях, можно ожидать, что профили раскрытия в большинстве точек трещин будут близки. Тогда скорость роста трещины в высоту, отсутствующая в исходной модели P3D, может быть принята равной скорости в модели KGD, которая содержит скорость кончика в асимптотических уравнениях. Следовательно, в любом поперечном сечении модели P3D текущие положения кончика и текущие объемы выше (и ниже) точки впрыска однозначно определяют скорости распространения кончиков трещины через скорости в эквивалентной (в упомянутом смысле) модели KGD.

Моделирование трещины с использованием KGD модели позволяет получить зависимость z_{*l}, z_{*u}, w_{av}, v_{zl} и v_{zu} от скорости закачки q_{KGD} и времени t_{KGD}. Отметим, что значения q_{KGD} и t_{KGD} не имеют никакого отношения к скорости закачки Q_0 и времени t модели P3D. Следовательно, они должны быть исключены из рассмотрения. Это можно сделать, если использовать среднее раскрытие w_{av} и высоту трещины $2z_* = z_{*u} - z_{*l}$ в качестве аргументов, определяющих скорости роста v_{zl} и v_{zu}. В случае симметричного контраста напряжений, когда $z_{*l} = -z_{*u}$ и $v_{zl} = -v_{zu}$, приравнивание значений для модели P3D w_{av} и $2z_*$ к значениям w_{av} и $2z_*$ для KGD, найденных заранее для того же контраста напряжений, дает необходимые функции $f_{zl}(z_{*l}, z_{*u}, w_{av}) = -f_{zu}(z_{*l}, z_{*u}, w_{av})$ для уравнений скорости (132), (133). Точно так же в случаях высоких контрастов напряжений, когда $v_{zl} = 0$ или $v_{zu} = 0$, двух значений w_{av} и $2z_*$ достаточно, чтобы найти скорости v_{zl} или v_{zu} соответственно.

В общем случае, когда трещина не симметрична, величины w_{av} и $2z_*$ не определяют z_{*l}, z_{*u} и v_{zl}, v_{zu} однозначно. Следовательно, нужен дополнительный параметр. Принцип соответствия предполагает использование среднего раскрытия w_m, усредненного по наибольшей из двух частей поперечного сечения, одна из которых находится ниже, а другая выше точки инициации. Обозначим координату кончика такого сечения как z_m. Тогда раскрытие w_m, усредненное по интервалу $[0, z_m]$, равно

$$w_m = \pm\frac{1}{|z_m|}\int_0^{z_m} w(z)\mathrm{d}z \tag{135}$$

где верхний (нижний) знак берется, когда $z_{*u} > |z_{*l}|(z_{*u} < |z_{*l}|)$. В этом случае таблица, сгенерированная при предварительном решении задачи KGD, дополняется дополнительным столбцом, содержащим значения w_m, определяемые формулой (135). Соответственно, для модели P3D с тем же контрастом напряжений мы дополнительно используем значение w_m, чтобы однозначно определить v_{zl} и v_{zu} из таблицы данных, содержащих результаты расчета KGD модели. Таким образом однозначно определяются $f_{zl}(z_{*l}, z_{*u}, w_{av})$ и $f_{zu}(z_{*l}, z_{*u}, w_{av})$, используемые в уравнениях (132), (133).

Отметим, что нет необходимости численно решать задачу KGD до тех пор, пока высота трещины $h = 2z_*$ меньше высоты H продуктивного слоя. Из автомодельного решения задачи KGD для этого случая следует, что скорость роста высоты может быть найдена из уравнения

$$v_{*z} = \frac{\partial z_*}{\partial t} = \frac{n+1}{n+2}(2\xi_{*n}^2)^{1+2/n}\frac{w_{av}^{1+2/n}}{t_n z_*^{2/n}} \tag{136}$$

где ξ_{*n} является автомодельной половиной длины трещины для данного индекса поведения n. Значения $\xi_{*n} = \gamma_{m0}$ приведены в таблице 1 работы [10] для Ньютоновской жидкости ($n = 1$) $\xi_{*n} = 0.615$.

Уравнение (136) подразумевает, что высота поперечного сечения, соответствующего фронту трещины, не изменяется во времени, потому что v_{*z} равна нулю при $w_{av} = 0$. Уравнение (136) может использоваться для определения границ, когда какое-либо расширение модели P3D становится физически некорректным.

3.4 Начальные условия

Используя (136), можно доказать, что начальные условия, соответствующие нулевой начальной высоте ($2z_* = 0$), приводят к положительному градиенту давления, что в свою очередь приводит к физически несовместимому решению. Следовательно, начальная высота должна быть больше нуля: $z_{*u}(t_0) = -z_{*l}(t_0) = z_{*0} > 0$. Для $z_{*0} > 0$ с учетом асимптотики (129) уравнение (136) около фронта выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial z_*}{\partial t} = \frac{n+1}{n+2}(2\xi_{*n}^2 C_w)^{1+2/n}\frac{1}{t_n z_*^{2/n}} r^{1/n} \tag{137}$$

В частной производной $\partial z_*/\partial t|_{x=\mathrm{const}} = \partial z_*/\partial t|_{r=\mathrm{const}} + v_{*x}\partial z_*/\partial r$, конвективный член доминирует вблизи фронта, так как значение z_* постоянно на фронте. Тогда уравнение (137) может быть переписано в виде:

$$v_{*x}\frac{\partial z_*}{\partial r} = \frac{n+1}{n+2}(2\xi_{*n}^2 C_w)^{1+2/n}\frac{1}{t_n z_*^{2/n}} r^{1/n} \tag{138}$$

Решение (137) относительно $C_w^{1+2/n}$ и подстановка результата в (138) дает обыкновенное дифференциальное уравнение для z_* и r:

$$\frac{\mathrm{d}z_*}{\mathrm{d}r} = \frac{n+1}{n+2}(2\xi_{*n}^2)^{1+2/n}\frac{1}{F_v}\left[\pi(n+2)\right]^{1/n} r^{1/n} \tag{139}$$

Так как высота трещины не изменяется на ее фронте, то, $z_*|_{r=0} = z_{*0}$, и интегрирование (139) с этим условием позволяет получить соотношение

$$z_*^{1+1/n} - z_{*0}^{1+1/n} = \frac{n+1}{n+2}\left(2\xi_{*n}^2\right)^{1+2/n}\frac{1}{F_v}\left[\pi(n+2)\right]^{1/n} r^{1+1/n} \tag{140}$$

Для Ньютоновской жидкости ($n = 1, F_v = 12/\pi^2, \xi_{*n} = 0.615$), с точностью до порядка $(z_* - z_{*0})^2$, зависимость (140) становится равной

$$\frac{z_*}{z_{*0}} - 1 = 1.12\left(\frac{r}{z_{*0}}\right)^2 \tag{141}$$

Из уравнения (141) видно, высота быстро возрастает с увеличением расстояния до фронта. Это идет вразрез с положениями P3D модели о том, что высота трещины заметно меньше расстояния до фронта. Следовательно, из уравнения (141) следует, что любое расширение модели P3D неприменимо для однородного (с нулевым контрастом) поля напряжений. В случае отрицательных контрастов напряжений рост высоты еще более быстрый, что говорит о том, что модель неприменима и в этом случае.

Модель P3D может использоваться только для массива горных пород с достаточно сильными барьерами напряжения. Параметры, определяющие, какой барьер можно считать слабым, умеренным или сильным, приведены в работах [27], [35].

Разумно принять во внимание, что до тех пор, пока трещина не достигла границ продуктивного слоя, она распространяется как радиальная трещина под действием равномерного давления. Для моделирования такой трещины можно воспользоваться известным автомодельным решением [60] для задания физически приемлемых начальных условий. Автомодельное решение подразумевает, что трещина, инициированная ньютоновской жидкостью, имеет радиус $H/2$ в момент времени

$$t_H = \left(\frac{H/2}{\xi_n}\right)^{9/4} \frac{t_n^{1/4}}{Q_0^{3/4}} \tag{142}$$

где ξ_n – известная из осесимметричной задачи константа (для Ньютоновской жидкости, $\xi_n = 0.6978 \approx 0.7$). В начальное время t_0, меньшее, чем t_H, радиус равен $x_{*0} = r_0 = \xi_n Q_0^{1/3} t_0^{4/9} t_n^{-1/9}$. Общий объем V_0 жидкости в трещине в этот момент равен

$$V_0 = Q_0 t_0 = \int_{-x_{*0}}^{x_{*0}} S(x)\mathrm{d}x \tag{143}$$

где $S(x)$ – площадь вертикального сечения трещины, определяемая выражением

$$S(x) = \int_{-a}^{a} w_a(x, z, t_0)\mathrm{d}z \tag{144}$$

Здесь $a = \sqrt{x_{*0}^2 - x^2}$; w_a – раскрытие радиальной трещины.

Раскрытие w_a в (144) можно найти из автомодельного решения осесимметричной задачи, которое однозначно определяет объем V_0. Однако нет необходимости использовать точное решение по двум причинам. Во-первых, соответствие между осесимметричной и P3D-задачами довольно грубое. Во-вторых, влияние начальных условий быстро убывает со временем. В [27] выдвигалось предположение, что это упростит задачу, что было доказано аналитически [61] и численно [62]. Следовательно, можно использовать любое простейшее приближение, обеспечивающее нулевое раскрытие трещины на фронте и удовлетворяющее уравнению (143) глобального баланса объема. Например, эллиптическое распределение [27] w_a вдоль радиуса $r_0 = x_{*0}$ вполне удовлетворяет условиям: $w_a(x, z, t_0) = C_a\sqrt{a^2 - z^2} = C_a\sqrt{r_0^2 - (x^2 + z^2)}$, где константа C_a подбирается, чтобы удовлетворить балансу (143). Для такого раскрытия w_a, интегрирование в (144) дает $S(x) = \frac{\pi}{2}C_a(x_{*0}^2 - x^2)$, и из (143) следует, что $C_a = \frac{3}{2\pi}\frac{Q_0 t_0}{x_{*0}^3}$. Таким образом,

$$S(x) = \frac{3}{4}\frac{Q_0 t_0}{x_{*0}}\left[1 - \left(\frac{x}{x_{*0}}\right)^2\right] \tag{145}$$

Теперь возьмем начальную трещину в форме прямоугольника, симметричную относительно оси z, имеющую высоту продуктивного слоя $2z_{*0} = H = \text{const}$ и длину $2x_{*0}$. Тогда, чтобы иметь тот же объем V_0 жидкости в начальный момент времени t_0, ее раскрытие $w_0(x)$ должно быть равно $w_0(x) = S(x)/H$. Таким образом, используя (145), мы получаем начальное раскрытие, заданное как $w_0(x) = \frac{3}{4}\frac{Q_0 t_0}{x_{*0}H}\left[1 - \left(\frac{x}{x_{*0}}\right)^2\right]$. Ясно, что это раскрытие, будучи проинтегрированным по прямоугольной области, отвечает глобальному балансу жидкости (143) в момент времени t_0, что определяет x_{*0}. Подводя итог, начальные условия (134) для ньютоновской жидкости задаются как

$$x_{*0} = 0.7Q_0^{1/3}\left(\frac{1}{t_n}\right)^{1/9} t_0^{4/9},\ z_{*0} = H/2,\ w_0(x) = \frac{3}{4}\frac{Q_0 t_0}{x_{*0}H}\left[1 - \left(\frac{x}{x_{*0}}\right)^2\right] \tag{146}$$

где $t_0 \le t_H$ и $t_H = 0,47H^{9/4}t_n^{1/4}Q_0^{-3/4}$. Принимая во внимание, что $t_0 \ll t_H$, влияние начальных условий быстро затухает с ростом времени; решение практически не зависит от них при $t \gg t_0$, можем заметить, что даже довольно сильные возмущения в условиях (146) не влияют на конечные результаты. Это предполагает возможность использования начальных условий (146) и для неньютоновских жидкостей.

Задача моделирования псевдотрехмерной трещины в модифицированной постановке состоит из решения уравнений (124), (125), (130) - (133), где вертикальные скорости v_{zl} и v_{zu} определяются таблицей, подготовленной заранее, как было описано ранее в разделе 3.3. Правые части x_{*0}, z_{*0} и $w_0(x)$ в начальных условиях (134) определяются по формуле (146).

3.5 Численные результаты

Описанный метод численно реализован в средах Matlab и Python. Для заданной геометрии и контраста напряжений путем решения ряда расширенных задач KGD была подготовлена база данных для определения скоростей распространения трещины в зависимости от положения вершины и объема части трещины выше и ниже точки впрыска жидкости. Для этого был использован алгоритм, представленный в работе [35]. Подготовленная база данных многократно используется на втором этапе вычислений, когда моделируется рост P3D трещины в высоту.

Проведем сравнение с результатами, изложенными в работе [27]. Авторы данной работы подробно исследовали случай, когда продуктивный слой толщиной H расположен между полупространствами с одинаковым контрастом напряжений $\Delta\sigma$. Авторы использовали фиктивную трещиностойкость ΔK_{IC}, которая связана со скоростью распространения v_* приближенным уравнением. Коэффициенты аппроксимации были выбраны так, чтобы обеспечить наилучшее соответствие между профилями трещин, рассчитанными для модели KGD, и профилями, соответствующими модели с равномерно приложенным к трещине давлением. Чтобы исключить это давление из зависимости $\Delta K_{IC}(v_*)$, авторы предположили, что объемы трещин в обоих случаях одинаковы. Поэтому при рассмотрении частного случая авторы фактически использовали принцип соответствия. Наиболее подходящий выбор параметров аппроксимации обеспечило аналитическое уравнение $\Delta K_{IC}(v_*)$, которое связало фиктивную трещиностойкость со скоростью роста трещины в высоту.

Для симметричного случая, представленного в работе [27], расчеты показывают, что профили раскрытия трещин, полученные с использованием принципа соответствия, на самом деле неотличимы от аналогичных профилей, приведенных на рис. 3 работы [27] (рис. 26). Из этого следует, что введение фиктивной трещиностойкости является ненужным усложнением задачи. Более важным является совпадение результатов с результатами для трехмерной модели ILSA. Расчеты выполнены для исходных данных, приведенных в статье [27]: $H = 0.05$ м, $\mu' = 30.2$ Па·с (жидкость является Ньютоновской), $\nu = 0.4$, $E = 3.3$ ГПа, $Q_0 = 1.7$мм^3/с; $\Delta\sigma = 4.3$ МПа.

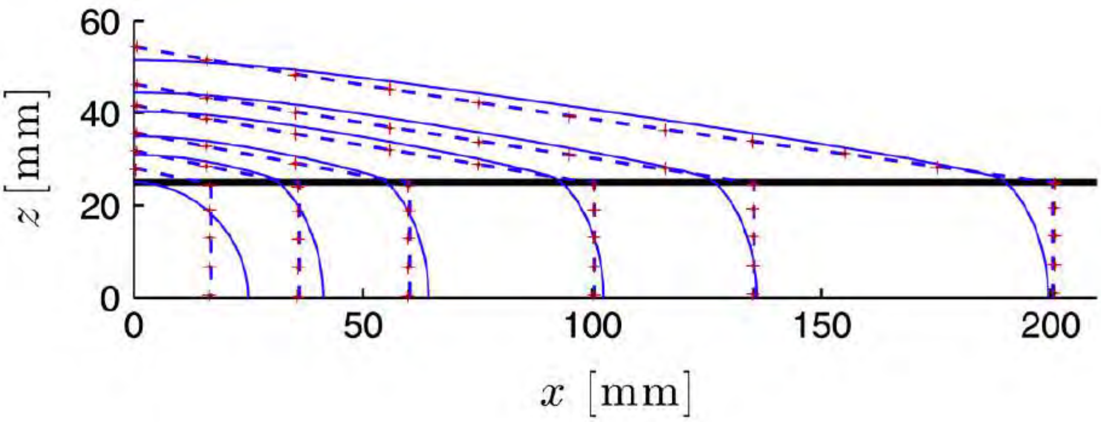

Рис. 26: Сравнение следов трещины, полученных с использованием принципа соответствия (красные кресты), с решением ILSA (сплошные линии) и результатами применения приближенного метода (пунктир), представленными в работе [27]

Из Рис. 26, видно, что результаты модифицированной P3D модели близки к результатам, полученным для трехмерной модели ILSA всюду, за исключением зоны рядом с фронтом, где модель P3D неприменима. При необходимости, соответствие в этой зоне может быть улучшено за счет учета нелокального упругого взаимодействия и искривления фронта.

Важное преимущество принципа соответствия перед методом, изложенным в [27], состоит в том, что принцип соответствия позволяет учитывать произвольные контрасты напряжений. Рассмотрим теперь пример, когда трещина распространяется в трехслойной среде с несимметричными барьерами напряжений. Для расчета возьмем следующие параметры: $H = 20$ м, $\mu' = 0.2$ Па·с (жидкость является Ньютоновской), $\nu = 0.23$, $E = 2.5$ ГПа, $Q_0 = 3.6$м^3/мин; $\Delta\sigma_1 = 5$ МПа, $\Delta\sigma_2 = 4$ МПа.

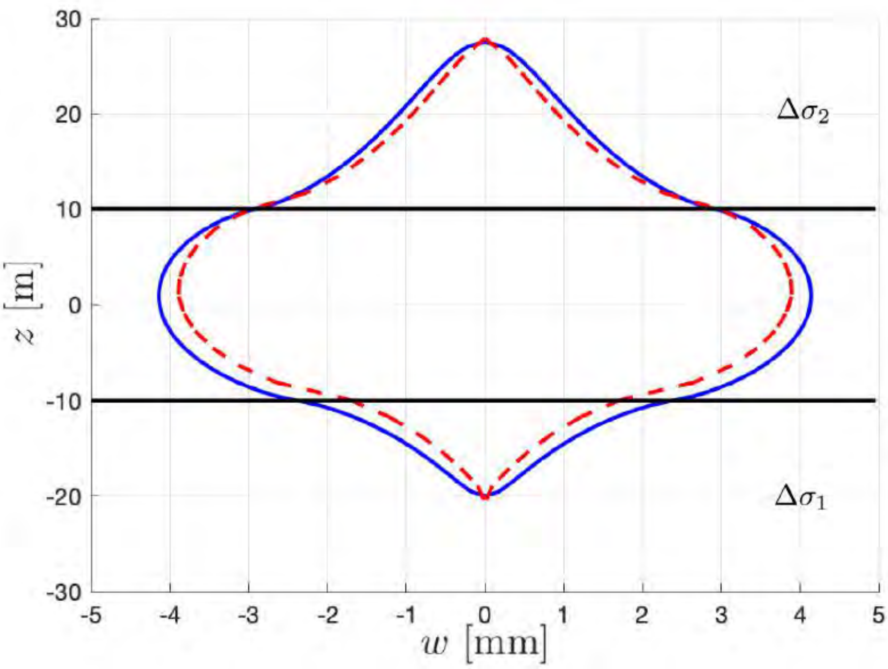

Рис. 27: Профиль раскрытия трещины, полученный с использованием модифицированной псевдотрехмерной модели (сплошная линия) и планарной трехмерной модели [86] (пунктирная линия).

На Рис. 27 представлено сравнение профиля раскрытия трещины, полученного на основе модифицированной модели(синяя сплошная линия) с профилем раскрытия для планарной трехмерной трещины [86] для момента времени $t = 439$с. Черные горизонтальные линии обозначают границы слоев. Видим, что значения высоты трещины совпадают с точностью более чем 0.5%.

На основании представленных результатов видно, что модифицированная псевдотрехмерная модель позволяет с высокой точностью рассчитывать рост псевдотрехмерной трещины в высоту в режиме доминирующей вязкости для произвольных значений контрастов напряжений в слоях.

3.6 Выводы

Результаты, полученные в данной главе, могут быть обобщены следующим образом.

- Разработан принцип соответствия, позволяющий увеличить точность расчета геометрии трещины в рамках псевдотрехмерной модели в пределах границ применимости оригинальной P3D модели. В отличие от альтернативных подходов, данный способ позволяет получить точное решение в слоистой среде с произвольными сжимающими напряжениями.

- Сравнение результатов, полученных с использованием модифицированной модели P3D, с доступными решениями для трехмерной модели показало, что модифицированная модель может надежно использоваться для моделирования плоских трещин в пределах границ применимости оригинальной псевдотрехмерной модели.

Заключение

i Метод построения функции Грина для слоистых структур распространен на случай гармонических задач и трехмерных задач теории упругости. Разработан метод оценки точности вычисления функции Грина в зависимости от периода преобразования Фурье и числа точек его дискретизации. Для двумерного уравнения Лапласа получено, что погрешность построения функции Грина не превосходит 0.8% при значении периода, в 16 раз превышающего размер области в которой ищется решение, и при числе точек дискретизации преобразования Фурье равном 128.

ii Для разработанной функции Грина дано обобщение комплексного метода граничных элементов на задачи о слоистых структурах с неоднородностями для двумерного уравнения Лапласа. Решена задача о круговом отверстии под действием равномерного потока на контуре в слоистой структуре, состоящей из двух полуплоскостей. Для частного случая кругового отверстия в полуплоскости с сильно проводящей границей проведено сравнение с аналитическим решением и показано, что погрешность расчетов не превышает 4%. Получена зависимость отношения максимального и минимального значения потенциала на контуре отверстия от значений относительной проводимости полуплоскостей и расстояния от центра отверстия до границы. Показано, что в случае сильно проводящей границы отношение радиуса отверстия к расстоянию от центра отверстия до границы оказывает большее влияние на потенциал отверстия, чем в случае непроницаемой границы.

iii Решена задача о радиальной трещине, перпендикулярной границам слоев, под действием постоянного давления в случае, когда трещина целиком находится в одном слое, расположенном между двумя полупространствами. В случае, когда такая трещина целиком находится в одном слое, расположенном между двумя полупространствами, определены границы влияния значений упругих модулей полупространств на раскрытие трещины. Показано, что разница упругих модулей слоев приводит к значительному отклонению коэффициента интенсивности напряжений вдоль периметра трещины от соответствующих значений для однородной среды в случаях, когда трещина не пересекает границы слоев. Сравнение с результатами, полученными с использованием альтернативных подходов, демонстрирует достоверность полученных результатов.

iv Разработан метод расчета скорости роста псевдотрехмерной трещины гидроразрыва пласта в высоту в режиме доминирующей вязкости в слоистой среде. Проведено сравнение результатов расчета геометрии трещины, полученных с использованием разработанного метода, с известными численными решениями, полученными с использованием трехмерных моделей. Показано, что разработанный метод позволяет увеличить точность расчета геометрических характеристик трещины в слоистой среде в псевдотрехмерной постановке.

Список литературы

[1] Альперин И. Г. Задача о бесконечно длинной балке на упругой полуплоскости / И. Г. Альперин // Прикладная математика и механика. – 1939. – Т. 2. – №. 3.

[2] Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы: введение в теорию / С. К. Годунов, В. С. Рябенький – "Наука, 1973.

[3] Жемочкин Б. Н. Плоская задача расчета бесконечно длинной балки на упругом основании / Б. Н. Жемочкин // Расчет балок на упругом полупространстве и полуплоскости. М.: Издание Военно-инженерной академии РККА. – 1937.

[4] Линьков А. М., Зубков В. В. Спектральный МГЭ и его приложения / А.М. Линьков, В.В. Зубков // Труды XIX Межд. Конференции BEM and FEM-2001, В.А. Постнов (ред.), т. 2, Санкт-Петербург, 2001, с. 236-241.

[5] Никишин В. С., Шапиро Г. С. Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред / В. С. Никишин, Г. С. Шапиро – Вычислительный центр АН СССР, 1970.

[6] Оболашвили Е. И. Преобразование Фурье и его применения в теории упругости / Е. И. Оболашвили – Мецниереба, 1979.

[7] Раппопорт Р. М. К вопросу о построении решений осесимметричной и плоской задач теории упругости многослойной среды / Р. М. Раппопорт // Изв. Всесоюзн. НИИ гидротехники им. БЕ Веденеева.–1963.–73.–С. – 1963. – С. 193-204.

[8] Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов / А. А. Самарский, А. В. Гулин - М.: Наука. – 1989.

[9] Шевляков Ю. А. Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред / Ю. А. Шевляков – Вища школа, 1977.

[10] Adachi J. I., Detournay E. Self-similar solution of a plane-strain fracture driven by a power-law fluid / J. I. Adachi, E. Detournay // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2002. – T. 26. – №. 6. – C. 579-604.

[11] Adachi J. et al. Computer simulation of hydraulic fractures / J. Adachi // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2007. – T. 44. – №. 5. – C. 739-757.

[12] Al Heib M., Linkov A. M., Zoubkov V. V. On numerical modeling of subsidence induced by mining / M. Al Heib, A. M. Linkov, V. V. Zoubkov // International symposium of the international society for rock mechanics (EUROCK 2001). – 2001.

[13] Barree R. D. A practical numerical simulator for three-dimensional fracture propagation in heterogeneous media / R. D. Barree // SPE Reservoir Simulation Symposium. – Society of Petroleum Engineers. – 1983. – C. 403-411.

[14] Benitez F. G., Lu L., Rosakis A. J. A boundary element formulation based on the three-dimensional elastostatic fundamental solution for the infinite layer: Part I—theoretical and numerical development / F. G. Benitez, L. Lu, A. J. Rosakis // International journal for numerical methods in engineering. – 1993. – T. 36. – №. 18. – C. 3097-3130.

[15] Bracewell R. N. The Fourier transform and its applications / R. N. Bracewell – New York : McGraw-Hill, 1986. – T. 31999.

[16] Brebbia C. A. The boundary element method in enginering practice / C. A. Brebbia // Engineering Analysis. – 1984. – T. 1. – C. 3-12.

[17] Brigham E. O. The discrete Fourier transform / E. O. Brigham // The fast Fourier transform and its applications. – 1988.

[18] Buffler H. Der Spannungszustand in einem geschichteten Korper bei axialsymmetrischer Belastung / H. Buffler // Ingenieur-Archiv 1961; 30(6):417– 430.

[19] Buffler H. Die Bestimmung des Spannungs und Verschiebungszustandes eines geschichteten Korpes mit Hilfe von Ubertragungsmatrizen / H. Buffler // Ingenieur-Archiv 1962; 31(1):229–240.

[20] Bufler H. Theory of elasticity of a multilayered medium / H. Bufler // Journal of Elasticity. – 1971. – T. 1. – №. 2. – C. 125-143.

[21] Bunger A. P., McLennan J., Jeffrey R. Effective and sustainable hydraulic fracturing / A. P. Bunger, J. McLennan, R. Jeffrey – 2013.

[22] Champeney D. C. A handbook of Fourier theorems / D. C. Champeney – Cambridge University Press, 1989.

[23] Crouch S. L., Starfield A. M., Rizzo F. J. Boundary element methods in solid mechanics / S. L. Crouch, A. M. Starfield, F. J. Rizzo – 1983.

[24] Cooley J., Lewis P., Welch P. The finite Fourier transform / J. Cooley, P. Lewis, P. Welch // IEEE Transactions on audio and electroacoustics. – 1969. – T. 17. – №. 2. – C. 77-85.

[25] Cooley J. W., Lewis P. A. W., Welch P. D. The fast Fourier transform and its applications / J. Cooley, P. Lewis, P. Welch // IEEE Transactions on Education. – 1969. – T. 12. – №. 1. – C. 27-34.

[26] Dobroskok A. A., Linkov A. M. Complex variable equations and the numerical solution of harmonic problems for piecewise-homogeneous media / A. A. Dobroskok, A. M. Linkov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2009. – T. 73. – №. 3. – C. 313-325.

[27] Dontsov E. V., Peirce A. P. An enhanced pseudo-3D model for hydraulic fracturing accounting for viscous height growth, non-local elasticity, and lateral

toughness / E. V. Dontsov, A. P. Peirce // Engineering Fracture Mechanics. – 2015. – T. 142. – C. 116-139.

[28] Dougall J. VIII. An Analytical Theory of the Equilibrium of an Isotropic Elastic Plate / J. VIII. Dougall // Earth and Environmental Science Transactions of The Royal Society of Edinburgh. – 1906. – T. 41. – №. 1. – C. 129-228.

[29] Economides M. J., Nolte K. G. Reservoir Stimulation / M. J. Economides, K. G. Nolte - Houston: Schlumberger Educational Services, 1989.

[30] Erdogan F., Gupta G. The stress analysis of multi-layered composites with a flaw / F. Erdogan, G. Gupta // International Journal of Solids and Structures. – 1971. – T. 7. – №. 1. – C. 39-61.

[31] Filon, L. N. G. IV. On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of Lond, with special reference to points of concentrated or discontinuous loading / L. N. G. IV. Filon // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. – 1903. – T. 201. – №. 331-345. – C. 63-155.

[32] Gaskill J. D. Linear systems, Fourier transforms, and optics / J. D. Gaskill – New York : Wiley, 1978. – T. 576.

[33] Geertsma J., De Klerk F. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures / J. Geertsma, F. De Klerk // Journal of Petroleum Technology. – 1969. – T. 21. – №. 12. – C. 1.571-1.581.

[34] Gilbert F., Backus G. E. Propagator matrices in elastic wave and vibration problems / F. Gilbert, G. E. Backus // Geophysics. – 1966. – T. 31. – №. 2. – C. 326-332.

[35] Gladkov I. O., Linkov A. M. Solution of a Plane Hydrofracture Problem with Stress Contrast / I. O. Gladkov, A. M. Linkov // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2018. – Т. 59. – №. 2. – С. 341-351.

[36] Grigoriev S. N. et al. Cutting tools made of layered composite ceramics with nano-scale multilayered coatings / S. N. Grigoriev // Procedia CIRP. – 2012. – Т. 1. – С. 301-306.

[37] Harrison E. et al. The mechanics of fracture induction and extension / E. Harrison // Petroleum Trans AIME – 1954. – Т. 201. – С. 252–263.

[38] Hormander L. Linear Partial Differential Operators: 4th Printing / L. Hormander – Springer, 1976.

[39] Howard G. C. and Fast C. R. Optimum fluid characteristics for fracture extension / G. C. Howard, C. R. Fast // Drilling and production practice. – American Petroleum Institute, 1957.

[40] Hubbert M. K., Willis D. G. Mechanics of hydraulic fracturing / M. K. Hubbert, D. G. Willis – 1972.

[41] Jaworski D., Linkov A., Rybarska-Rusinek L. On solving 3D elasticity problems for inhomogeneous region with cracks, pores and inclusions / D. Jaworski, A. Linkov, L. Rybarska-Rusinek // Computers and Geotechnics. – 2016. – Т. 71. – С. 295-309.

[42] Joshi S. Can nanotechnology improve the sustainability of biobased products? The case of layered silicate biopolymer nanocomposites / S. Joshi // Journal of Industrial Ecology. – 2008. – Т. 12. – №. 3. – С. 474-489.

[43] Journel A. G., Huijbregts C. J. Mining geostatistics / A. G. Journel, C. J. Huijbregts – London : Academic press, 1978. – Т. 600.

[44] Kennett B. L. N., Kerry N. J. Seismic waves in a stratified half space / B. L. N. Kennett, N. J. Kerry // Geophysical Journal International. – 1979. – Т. 57. – №. 3. – С. 557-583.

[45] Kennett B. L. N. Elastic wave propagation in stratified media / B. L. N. Kennett // Advances in applied mechanics. – Elsevier, 1981. – Т. 21. – С. 79-167.

[46] Kennett B. L. N. Lg waves and structural boundaries / B. L. N. Kennett // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1986. – Т. 76. – №. 4. – С. 1133-1141.

[47] Khristianovic S. A., Zheltov Y. P. Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids / S. A. Khristianovic, Y. P. Zheltov // Proc. 4th world petroleum congress, Rome. – 1955. – Т. 2. – С. 579-586.

[48] Kuo C. H., Keer L. M. Three-dimensional analysis of cracking in a multilayered composite / C. H. Kuo, L. M. Keer // Journal of Applied Mechanics. – 1995. – Т. 62. – №. 2. – С. 273-281.

[49] Lebedev N. N., Skalskaya I. P., Uflyand Y. S. Worked problems in applied mathematics / N. N. Lebedev, I. P. Skalskaya, Y. S. Uflyand – 1979.

[50] Lin W., Keer L. M. Analysis of a vertical crack in a multilayered medium / W. Lin, L. M. Keer // Journal of applied mechanics. – 1989. – Т. 56. – №. 1. – С. 63-69.

[51] Lin W., Keer L. M. Three-dimensional analysis of cracks in layered transversely isotropic media / W. Lin, L. M. Keer // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. – 1989. – Т. 424. – №. 1867. – С. 307-322.

[52] Linkov A., Filippov N. Difference equations approach to the analysis of layered systems / A. Linkov, N. Filippov // Meccanica. – 1992. – Т. 26. – №. 4. – С. 195-209.

[53] Linkov A. M., Linkova A. A., Savitski A. A. An effective method for multi-layered media with cracks and cavities / A. M. Linkov, A. A. Linkova, A. A. Savitski // International Journal of Damage Mechanics. – 1994. – T. 3. – №. 4. – C. 338-356.

[54] Linkov A. M. et al. A method to calculate stresses and deformations in 3D layered strata / A. M. Linkov // Advances in Rock Mechanics. – 1998. – C. 135-144.

[55] Linkov A. M., Zoubkov V.V., Sylla M., al Heib M. Spectral BEM for Multi-layered Media with Cracks or/and Openings / A. M. Linkov, V.V. Zoubkov, M. Sylla, M. al Heib // Proc. Symposium IABEM-2000. Brescia: Int. Association for Boundary Element Methods. – 2000. – C. 141-142.

[56] Linkov A. M. On efficient simulation of hydraulic fracturing in terms of particle velocity / A. M. Linkov // International Journal of Engineering Science. – 2012. – T. 52. – C. 77-88.

[57] Linkov A. M., G. Mishuris. Modified Formulation, ϵ-Regularization and the Efficient Solution of Hydraulic Fracture Problems / A. M. Linkov, G. S. Mishuris // ISRM International Conference for Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing. – International Society for Rock Mechanics and Rock Engineering, 2013.

[58] Linkov A. M. Boundary integral equations in elasticity theory / A. M. Linkov – Springer Science and Business Media, 2013. – T. 99.

[59] Linkov A. M. Universal asymptotic umbrella for hydraulic fracture modeling / A. M. Linkov // arXiv preprint arXiv:1404.4165. – 2014.

[60] Linkov A. M. Solution of axisymmetric hydraulic fracture problem for thinning fluids / A. M. Linkov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2016. – T. 80. – №. 2. – C. 149-155.

[61] Linkov A. On decaying influence of initial conditions in the problem of hydraulic fracturing / A. M. Linkov // Doklady Physics. – 2016. – T. 61. – №. 7.

[62] Linkov A. M. Numerical solution of plane hydrofracture problem in modified formulation under arbitrary initial conditions / A. M. Linkov // Journal of Mining Science. – 2016. – T. 52. – №. 2. – C. 265-273.

[63] Liu S., Wang Q. Studying contact stress fields caused by surface tractions with a discrete convolution and fast Fourier transform algorithm / S. Liu, Q. Wang // Journal of Tribology. – 2002. – T. 124. – №. 1. – C. 36-45.

[64] Mack M. G., Warpinski N. R. Mechanics of hydraulic fracturing / M. G. Mack, N. R. Warpinski // Reservoir stimulation. – 2000. – C. 6-1.

[65] Maier G., Novati G. On boundary element-transfer matrix analysis of layered elastic systems / G. Maier, G. Novati // Engineering analysis. – 1986. – T. 3. – №. 4. – C. 208-216.

[66] Maier G., Novati G. Boundary element elastic analysis of layered soils by a successive stiffness method / G. Maier, G. Novati // International journal for numerical and analytical methods in geomechanics. – 1987. – T. 11. – №. 5. – C. 435-447.

[67] Markov N. S., Linkov A. M. An Effective Method to Find Green's Functions for Layered Media / N. S. Markov, A. M. Linkov // Materials Physics and Mechanics. – 2017. – T. 32. – №. 2. – C. 133-143.

[68] Markov N. S., Linkov A. M. Correspondence principle for simulation hydraulic fractures by using pseudo 3D model / N. S. Markov, A. M. Linkov // Materials Physics and Mechanics. – 2018. – T. 40. – C. 181-186.

[69] Muskhelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity / N. I. Muskhelishvili // Noordhoff, Groningen. – 1963. – T. 17404.

[70] Nordgren R. P. et al. Propagation of a vertical hydraulic fracture / R. P. Nordgren //Society of Petroleum Engineers Journal. – 1972. – Т. 12. – №. 04. – С. 306-314.

[71] Offord A. C. On Hankel Transforms / A. C. Offord // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1935. – Т. 2. – №. 1. – С. 49-67.

[72] Peirce A. P., Siebrits E. The scaled flexibility matrix method for the efficient solution of boundary value problems in 2D and 3D layered elastic media / A. P. Peirce, E. Siebrits // Computer methods in applied mechanics and engineering. – 2001. – Т. 190. – №. 45. – С. 5935-5956.

[73] Peirce A. P., Siebrits E. Uniform asymptotic approximations for accurate modeling of cracks in layered elastic media / A. P. Peirce, E. Siebrits // International Journal of Fracture. – 2001. – Т. 110. – №. 3. – С. 205-239.

[74] Peirce A. P., Siebrits E. A dual multigrid preconditioner for efficient solution of hydraulically driven fracture problem / A. P. Peirce, E. Siebrits // International Journal of Numerical Methods and Engineering. – 2005. – Т. 65. – С. 1797-1823.

[75] Peirce A., Detournay E. An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures / A. Peirce, E. Detournay // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2008. – Т. 197. – №. 33-40. – С. 2858-2885.

[76] Peirce A. Implicit level set algorithms for modelling hydraulic fracture propagation / A. Peirce // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2016. – Т. 374. – №. 2078. – С. 20150423.

[77] Perkins Jr T. K., Kern L. R. Widths of Hydraulic Fractures. JPT: 937-49 / T. K. Perkins Jr, L. R. Kern // Trans., AIME. – 1961. – Т. 222.

[78] Rahman M. M., Rahman M. K. A review of hydraulic fracture models and development of an improved pseudo-3D model for stimulating tight oil/gas sand / M. M. Rahman, M. K. Rahman // Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects. – 2010. – T. 32. – №. 15. – C. 1416-1436.

[79] Savitski A. A., Detournay E. Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions / A. A. Savitski, E. Detournay // International journal of solids and structures. – 2002. – T. 39. – №. 26. – C. 6311-6337.

[80] Settari A., Cleary M. P. Development and testing of a pseudo-three-dimensional model of hydraulic fracture geometry / A. Settari, M. P. Cleary // SPE Production Engineering. – 1986. – T. 1. – №. 06. – C. 449-466.

[81] Siebrits E., Peirce A. P. An efficient multilayer planar 3D fracture growth algorithm using a fixed mesh approach / E. Siebrits, A. P. Peirce // International journal for numerical methods in engineering. – 2002. – T. 53. – №. 3. – C. 691-717.

[82] Siegman A. E. Quasi fast Hankel transform / A. E. Siegman // Optics Letters. – 1977. – T. 1. – №. 1. – C. 13-15.

[83] Simonson E. R. et al. Containment of massive hydraulic fractures / E. R. Simonson // Society of Petroleum Engineers Journal. – 1978. – T. 18. – № 01. – C. 27-32.

[84] Singh S. J. Static deformation of a multilayered half-space by internal sources / S. J. Singh // Journal of Geophysical Research. – 1970. – T. 75. – №. 17. – C. 3257-3263.

[85] Singh S. J. Static deformation of a transversely isotropic multilayered half-space by surface loads / S. J. Singh // Physics of the earth and Planetary Interiors. – 1986. – T. 42. – №. 4. – C. 263-273.

[86] Starobinskii E. B., Stepanov A. D. Adapting the explicit time integration scheme for modeling of the hydraulic fracturing within the Planar3D approach / E. B. Starobinskii, A. D. Stepanov // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2019. – T. 1236. – №. 1. – C. 012052.

[87] Thomson W. T. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium / W.T. Thomson // Journal of applied Physics. – 1950. – T. 21. – №. 2. – C. 89-93.

[88] Van Eekelen H. A. M. Hydraulic fracture geometry: fracture containment in layered formations / H. A. M. Van Eekelen // Society of Petroleum Engineers Journal. – 1982. – T. 22. – №. 03. – C. 341-349.

[89] Vandamme L., Curran J. H. A three-dimensional hydraulic fracturing simulator / L. Vandamme, J. H. Curran // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1989. – T. 28. – №. 4. – C. 909-927.

[90] Wardle L. J. Stress analysis of multi layered anisotropic elastic systems subject to rectangular loads / L. J. Wardle – 1980. – №. 33.

[91] Zienkiewicz O. C. et al. Computational geomechanics / O. C. Zienkiewicz – Chichester : Wiley, 1999. – C. 105-110.

Federal State Autonomous Educational Institution for Higher Education
"Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University"

MARKOV NIKOLAI SERGEEVICH

ON PROBLEMS OF MECHANICS FOR THE LAYERED STRUCTURES WITH INHOMOGENEITIES

Specialization: 01.02.04 — solid mechanics

Dissertation is submitted for the degree of candidate in physical and mathematical sciences

Scientific advisor
Corr. Member of RAS, D.Sc., A.M. Krivtsov

Saint Petersburg — 2019

Content

Introduction **104**

1 A review of methods for solving mechanics problems for layered structures **110**

1.1 The history of problem solving methods for layered structures development . . . 110

1.2 The solution of applied problems of mechanics for layered structures. Hydraulic fracturing . . . 114

2 The Green's function construction for the layered structure **120**

2.1 Boundary integral equations for a piecewise homogeneous medium . . . 120

2.2 Layered structure . . . 123

2.3 The algorithm for construction the Green's function for a layered structure . . . 125

2.4 Construction of the Green's function for the two-dimensional Laplace operator . . . 131

2.5 The accuracy of the Green's function construction . . . 137

2.6 Circular hole in a layered structure . . . 144

2.7 Construction of the Green's function for the three-dimensional Lame operator . . . 152

2.8 A radial crack under the uniform pressure in a three-dimensional layered structure . . . 157

2.9 Concluding remarks . . . 165

3 Modified pseudo-three-dimensional model of the fracture propagation in a layered medium **167**

3.1 Pseudo-three-dimensional fracture model . . . 167

3.2 Problem formulation for a pseudo-three-dimensional fracture in a layered medium . . . 168

3.3 The correspondence principle 175

3.4 Initial conditions 178

3.5 Numerical results 181

3.6 Concluding remarks 183

Conclusion **185**

References **187**

Introduction

Relevance of the topic

The study of the behaviour and properties of layered structures with inhomogeneities is one of the most important tasks of modern science in view of the wide distribution of such structures in the surrounding world. Layered structures are often considered in the problems of materials mechanics, civil engineering, soil mechanics, mining, electrical engineering, optics, hydrodynamics, as well as in many other areas of science and technology. Both analytical and numerical methods are used to describe the behavior of such structures. In numerical modeling, the finite element method, the boundary element method, and the particle dynamics method, which has been actively developed in recent years, are most often used. Finite element methods and particle dynamics require significant computational power to simulate processes occurring in layered media. In practice, to solve applied problems arising in the study of layered structures with inhomogeneities, the boundary element method is most often used. The boundary element method can be used only if the Green's function for a structure without inhomogeneities is known. In the general case, the Green's function of a layered medium can be found only numerically. The methods for calculating the Green's function for layered structures presented in the scientific literature do not contain the necessary information about the features of their numerical implementation. Moreover, some practically important cases, for example, the construction of the Green's function of a layered structure for the two-dimensional Laplace operator, are not presented in the literature.

One of the most important applied problems for layered structures involves modeling crack growth in an elastic layered medium under the influence of internal pressure. This problem most often arises when modeling the hydraulic fracturing process, which is actively used in the oil and gas industry. Accounting for layering is most often carried out in two ways in the framework of this task. The first method consists in calculating the fracture opening using the boundary element method. In the case of a layered medium, this method allows one to take into account both the difference in the elastic properties of the layers and the difference in the stresses in the layers. The second method takes into account layering only by considering various stresses in the layers. In this case, the fracture opening calculation is carried out both by the boundary element method with the Green function for a homogeneous medium (planar three-dimensional model of the fracture), and uses an approximate analytical formula obtained in the plane strain approximation (pseudo-three-dimensional model). This simplification reduces the time of numerical calculation, but the accuracy of the results decreases.

In this work, the method of finding the Green's function for layered structures based on the use of the Fourier transform for the Laplace operator and the three-dimensional Lame operator is tested and generalized, as well as the pseudo-three-dimensional model of a hydraulic fracturing is modified to increase the accuracy of calculating the geometric parameters of the fracture. The application of the boundary element method and the introduction of the developed approach into existing models used to solve applied problems made it possible to compare the new results obtained in this work with existing solutions.

Methods of research

The layered structure, depending on the problem, is taken into account either by calculating the Green's function for the layered medium, or by considering various compressive stresses in the layers. The construction of the Green's function is carried out using the sweep method and the fast Fourier transform. To account for inhomogeneities, the boundary element method is used. A comparison is made of the results of numerical calculation with known solutions.

The aim of the work

The aim of this work is to expand the method for calculating the Green's function for layered structures using the Fourier transform for the case of the two-dimensional Laplace equation and the three-dimensional Lame equation, as well as to develop a method for calculating the height growth of a quasi-three-dimensional hydraulic fracturing fracture in the dominated viscosity regime in a layered medium.

Scientific novelty

The novelty of the work consists in the following **provisions to be defended**:

1. The method of constructing the Green's function for layered structures is extended to the case of harmonic problems and three-dimensional problems of the elasticity theory. A method for evaluating the accuracy of calculating the Green's function depending on the period of the Fourier transform and the number of points of its discretization has been developed.

2. A generalization of the complex variables boundary element method to problems on layered structures with inhomogeneities for the two-dimensional Laplace equation is given. The problem of a circular hole under the influence of a uniform flux at the boundary in a layered structure consisting of two half-planes is solved. The dependence of the ratio of the maximum and minimum potential values on the hole contour on the relative conductivity of the half-planes and the distance from the center of the hole to the boundary is obtained.

3. The problem of a radial fracture perpendicular to the boundaries of the layers under the influence of uniform pressure in a in an infinite three-dimensional three-layer elastic medium is solved. The limits of the influence of the elastic moduli values of such half-spaces on the opening of a fracture, located entirely in the central layer, are established.

4. A method for calculating the speeds of the height growth of a pseudo-three-dimensional hydraulic fracture in the viscosity dominated regime in a layered medium has been developed. The results of calculating the geometry of the fractures obtained using the method developed are compared with known numerical solutions. It is shown that the developed method allows to increase the

accuracy of calculating the geometric characteristics of a fracture in a layered medium.

Reliability of the results

The reliability of the obtained results is achieved using tested modeling techniques and comparison with existing numerical and analytical solutions. The solution for a circular hole in the particular case of a half-space with a strongly conducting boundary coincides with high accuracy with the well-known analytical solution. Opening profiles and intensity coefficients along the perimeter of a radial crack under constant pressure in a three-dimensional elastic layered medium agree with similar results obtained using alternative approaches. Comparison of the geometry of the crack obtained using the modified pseudo-three-dimensional model with the results of three-dimensional modeling showed that the results are consistent.

Practical significance of the work

The results of this work can be used to study the properties of layered materials. Of particular importance are the results for problems involving modeling of hydraulic fracturing in a layered medium, since the approaches presented in this work increase the calculating accuracy of the geometric parameters of a fracture in a layered medium. A more accurate calculation of the geometry of the fracture will reduce the financial risks that arise during hydraulic fracturing. The presented method for calculating the Green's function for layered media is also applicable for modeling cracks with an arbitrary orientation in space, which can be used to model processes in a medium with natural fracturing. The results of the work are applied at LLC "Gazpromneft Science & Technology Centre" for planning the hydraulic fracturing operation.

The results given in chapters 2, 3 of this dissertation were obtained with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the agreement on the provision of subsidies No. 075-15-2019-1406 of 06/19/2019 on the topic: Development of applied software

tools for planning and controlling the operation hydraulic fracturing in order to increase the efficiency of oil and gas production. Unique identifier for the agreement: RFMEFI57517X0146.

Approbation of work

The results of the work were discussed at the seminars of the Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (St. Petersburg), the Department of Theoretical Mechanics of SPbPU, Gazprom Neft Science and Technology Center, the Technological University of Rzeszow, as well as at all-Russian and international conferences: Advanced Problems in Mechanics (St. Petersburg, 2017 , 2018, 2019), Scientific and Technical Conference of Young Scientists (St. Petersburg, 2018, 2019), Oil and Gas Industry (St. Petersburg, 2019), Coupled thermo-hydro-mechanical problems of fracture mechanics (Novosibirsk , 2019), 4th Polish Congress of Mechanics and 23rd International Conference on Computer Methods in Mechanics (Krakow, 2019).

Structure and scope of work

The work consists of introduction, three chapters and conclusion. The work has 97 pages, 27 figures, 4 tables, the bibliography contains 91 items.

Publications on the research topic

a) Publications included in the list of HAC:

1. Markov N. S., Linkov A. M. An Effective Method to Find Green's Functions for Layered Media / N. S. Markov, A. M. Linkov // Materials Physics and Mechanics. – 2017. – T. 32. – №. 2. – C. 133-143.

2. Markov N. S., Linkov A. M. Correspondence principle for simulation hydraulic fractures by using pseudo 3D model / N. S. Markov, A. M. Linkov // Materials Physics and Mechanics. – 2018. – T. 40. – C. 181-186.

3. Markov N. S., Linkov A. M. Improved pseudo 3D model for hydraulic fractures under stress contrast / N. S. Markov, A. M. Linkov // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2019 (submitted).

b) Certificate of registration of a computer program:

1. «The program for calculating the growth rate of a quasi-three-dimensional hydraulic fracture in height in the viscosity dominated regime ». Authors: Markov N.S., Linkov A.M. Copyright holder: LLC "Gazpromneft STC". Certificate No. 2019613238. Registration Date: 03/12/2019.

1 A review of methods for solving mechanics problems for layered structures

1.1 The history of problem solving methods for layered structures development

Solving problems for a system of layers containing cracks, pores, inclusions, cavities, and other inhomogeneities plays an important role in the problems of materials mechanics, civil engineering, soil mechanics, mining, electrical engineering, optics and hydrodynamics. For example, layering must be taken into account when simulating fracturing operations (hydraulic fracturing) [33], mining [36], solving geomechanics problems [91], as well as in nano-technologies [29, 35] and other areas. Fig. 1 shows an example of a rock with distinct layers.

Figure 1: Layered rock structure

The beginning for the study of layered structures was laid in 1903, when for the first time a general solution was obtained for a plane elastic layer [23]. Three years later, a solution was presented for the three-dimensional elastic isotropic case [20]. The next stage was the work in which either two layers were considered, or a layer bordering the half-space [4, 90]. The author of [4] also gave a generalization of the solution to the case of several layers.

Further development of methods for solving problems for layered structures involves the use of two most important features of the layered structure: the conditions of flat parallel boundaries and the possibility of considering the layered structure as a chain-type system.

The condition of flat parallel boundaries between the layers makes it possible to use the Fourier transform to simplify the statement of the problem. Since the 1960s, [10, 11, 74], this approach has been applied in many works on layered media [3, 6, 12, 22, 45, 46, 48, 64, 66, 68, 69, 79, 80, 89]. Application of the Fourier transform reduces the solution of the system of differential equations to the solution of ordinary differential equations of the second order. The vector of unknowns in each layer has the dimension $M = 1$ in the case of a harmonic problem, the dimensions $M = 2$ and $M = 3$ for the two-dimensional and three-dimensional cases, respectively. If a homogeneous layer is considered, then the general solution of the ODE system consists of a linear combination of two linearly independent solutions that can be found using the classical theory of ODE solutions. This general solution contains a 2 constant vector for each fixed value of the frequency of the Fourier transform. Thus, the number of constants (spectral coefficients) for each frequency in the layer under consideration is $2M$, where M is the dimension of the problem. It turns out that for a system of n layers (including half-spaces for semi-infinite regions), it is necessary to find $2n$ constant vectors for each frequency value using $2n - 2$ contact conditions on $n - 1$ internal boundaries and 2 conditions on external boundaries of the considered layered structure. This leads to a linear system of $2Mn$ equations with $2Mn$ unknowns.

There are two main approaches to reduce the complexity of the numerical solution to $O(2N^2n)$. Both approaches are based on the use of the geometric features of the considered problem: the layers are a chain-type system. Thus, each layer has a maximum of two adjacent layers. The first method is called the matrix transfer method. The essence of the method is to transfer all unknowns (displacements and forces simultaneously) to the neighboring boundaries [26, 64, 79, 83, 84]. The work [59] shows that this method is physically incorrect and numerically unstable when solving problems for layered materials. The solution obtained using the matrix transfer method becomes unstable for eight layers. Moreover, the second method, known as the flexible matrix method, does not have this disadvantage [10, 11, 59, 60, 74]. This method was generalized using the difference equations [45]. It was shown in [45] that the method is extremely stable and effective if the sweep [76, 28] method is used to solve the system of equations with a three-diagonal coefficient matrix. Running coefficients for very thin layers (low frequencies) are presented independently in [49] and [68]. Running coefficients for very thick layers are presented in [49]. The fact that the amplitudes corresponding to high frequencies quickly decrease with distance from the boundary is taken into account in the work. Thus, for high frequencies, contact can be considered as the boundary between two linked half-spaces. This fact can significantly reduce the calculation time of the Green's function for a layered structure. The method based on difference equations was systematically applied to solve rock mechanics problems for layered structures [2, 3, 45, 49, 68, 69, 80].

In 1994, [46] presented a general method for finding the Green's function for layered structures. One of the features of the method is the presentation of the solution as the sum of two independent parts. The first part corresponds to the Green function for a homogeneous infinite isotropic medium. This solution is representable in an analytical form and contains a singularity from a point source. The second part is an additional smooth function. The approach to finding the additional part is described in detail in [46]. Decomposition into singular and smooth components makes it possible to significantly simplify the numerical calculation of the Green's function for a layered medium. Despite the complete description of the method for finding the Green's function, this work does not contain information on the features of its numerical implementation. Also, only formulas for constructing the Green's function for plane problems of the theory of elasticity are presented in the paper.

The most important feature of the [46] method for constructing the Green's function for layered structures is the use of the direct and inverse Fourier transforms.

This approach allows one to find all the functions necessary for solving problems of inhomogeneities in layered media. There is an alternative approach based on the application of the Hankel transform [24, 67, 81]. This approach was applied in the classical works [43] and [44]. In special cases, this approach can increase the computational speed [80], however, in general, the use of the Hankel transform complicates the original problem and, in some cases, increases the computation time. Despite this, a number of solutions for special cases obtained using the Hankel transform can act as benchmark solutions [41], [68].

The method of finding the Green's function of a layered medium, based on the use of the direct and inverse Fourier transforms, can be improved in the numerical implementation by using the fast Fourier transform [17] instead of the discrete Fourier transform [9, 16]. This allows one to noticeably accelerate the numerical calculation of the Green's function and the corresponding kernels of the boundary integral equations [57], which are necessary for applying the boundary element method (BEM) [8, 15]. At the moment, however, the features of applying the fast Fourier transform to find the Green function of a layered structure are not adequately presented in the literature.

Note that most of the solutions presented in the works on calculating the Green function of a layered medium were obtained for a plane crack in a layered medium. This is mainly due to the interest of oil companies in modeling cracks in stratified rock. Modeling a fracture in a stratified rock is one of the most important applied problems arising in the study of layered structures. Moreover, in most existing models of hydraulic fractures, layering is taken into account using approximate methods. This is due both to the complexity of constructing the Green's function for layered structures, and to the need for computationally efficient calculations.

1.2 The solution of applied problems of mechanics for layered structures. Hydraulic fracturing

Hydraulic fracturing (HF) is a method widely used in the gas and oil industry to intensify the production of hydrocarbons from wells by creating a fracture in the reservoir that ensures the flow of produced fluid [13, 21].

Fracturing operation consists of several stages. At the first stage, a “nucleus” of a crack is created in the well by perforation. The interval of the well in the area of the reservoir is isolated with sealants (packers) and between them a viscous fluid is injected into the well. An increase in fluid pressure leads to further crack development. Then, when the crack moves a sufficient distance and at the same time opens, a special material is pumped into it - proppant, which prevents the crack from closing after pressure release [2].

As can be seen from the description of the technique, hydraulic fracturing is a complex complex process, the description of which requires knowledge and methods from different fields of science (for example, hydrodynamics, geomechanics, fracture mechanics, etc.). The complexity of the model describing a particular effect associated with the growth of a hydraulic fracture can be different depending on the degree of detalisation.

It should be noted that a significant feature of hydraulic fracturing is the difficulty in monitoring processes occurring at great depths, as well as the complex geometry of the rock, which may contain several dozens of layers with different properties. Conducting experiments for the study of hydraulic fracturing is also difficult due to the complexity of the interpretation of the obtained data. The limited initial information, the uncertainty in the structure and properties of rocks at the depth of fluid production, and the wide variation in the values available for measurements — these factors are a feature of the problem. This affects the methodology of its scientific study and practical application. Of particular importance are mathematical research and numerical simulation of hydraulic fracturing [58]. Therefore, for a better understanding and control, mathematical models are necessary and widely applied.

The development of fracturing models began in the 1950s. One of the first works in this area was the work [30]. The authors of this work considered the problem of hydraulic fracturing as a task of applied mechanics. They successfully built the first model, which made it possible to give a number of answers to such pressing questions as: the orientation of the created fracture, the reasons for the breakthrough into the aquifer, and also to obtain an approximate estimate of the reservoir stresses and the volume of the fracture. Comparison of the results predicted by the model with real data showed that the constructed model, although it does not provide quantitatively accurate results, gives some idea of the size of the resulting crack. The work done by the authors laid the foundation for the design of the hydraulic fracturing procedure. It is important to note that this work considered a homogeneous, rather than layered, medium.

The authors of [32] approached the problem of estimating the crack parameters and selecting the optimal parameters of the fracturing fluid from the side of the fluid flow. The idea is to apply the fundamental correlation of continuum mechanics (global mass balance) to the fracturing fluid pumped into the well: part of the fluid flows into the rock, and the rest fills the volume of the fracture. The model constructed by the authors is still used today (for example, in the commercial MFrac simulator).

The first mathematical model, which took into account the mutual influence of the fluid pumped into the crack and the deformation of the rock, was the model of Khristianovich and Zheltov, proposed in 1955 [40]. This model considers the conditions of plane deformation in sections orthogonal to the crack front. In it, a crack is modeled by a flat section of infinite height located in a linearly elastic medium. Usually this model refers to the initial stage of crack propagation. This model was further developed in the article [25] taking into account leakage of hydraulic fracturing fluid into the formation. This one-dimensional model is called KGD. This model can be considered as the first model of crack growth in a layered medium.

Another similar model was developed by Perkins, Kern and Nordgren (PKN) [65, 73]. It assumes that the crack has a finite and constant height much smaller than its length. At the same time, it is assumed that the condition of plane deformation is satisfied in planes parallel to the crack front, and the pressure in each section is constant. These two conditions allow one to assume that the cross sections open independently of each other. The relationship between the disclosures in each section is through the continuity equation and the equation for describing the fluid flow. In fact, in the PKN model, a three-layer layered structure was considered, in which the boundaries of the extreme layers were impermeable. We emphasize that the PKN and KGD models use the same equation of elasticity [63], which connects the crack opening with pressure on its banks and stresses at infinity.

Note that the first models of hydraulic fracturing were developed almost simultaneously with the beginning of the industrial use of this technology, in 1950-1960, when the layering model was just beginning to be created. At the same time, the need for practical solution of problems led to the fact that scientists and engineers sought to remove from consideration those parameters that have little effect on the result.

In the 1970s, the cost of oil and gas increased, making production from low-permeability formations economically viable. Hydraulic fracturing in wells in low-permeability formations requires significantly greater costs, due to the nature of the rock structure: more fluid and proppant are injected into the well to create a larger fracture (for example, the volume of injected fluid increased from units of cubic meters to hundreds [2]). These changes in the procedure for hydraulic fracturing revealed shortcomings in existing models and became an incentive for new research in the field of modeling.

A significant drawback of the models used at that time was the inability to take into account the fact that the rock formation consists of horizontal layers with different physical properties (and parameters of the stress-strain state). The need to take this factor into account is due to the fact that the geometry of the crack substantially depends on changes in both physical properties and the stress-strain state of the layers.

Several works [82, 87] contributed to the creation of the new approach, in which the growth of a hydraulic fracture in a three-layer medium and the effect of differences in the mechanical properties and stress-strain state of the layers on the hydraulic fracture height in a two-dimensional formulation were studied.

The numerically implemented pseudo-three-dimensional models (P3D), which take a number of simplifications in understanding the fracture geometry, fluid transport, and rock deformation, have become a new approach. The first description of such a model can be considered the article [78], published in 1986, but their development is still ongoing [19].

The most advanced and popular simplified model is the pseudo-three-dimensional (P3D) model proposed by Settary & Cleary [78]. This model is developed in more detail and presented in the works [19, 50, 58, 75]. At the moment, P3D is one of the most used models for modeling hydraulic fracturing.

In the process of development, two categories of pseudo-three-dimensional models appeared: tube and cell models. Tube models are based on the representation of the fracture geometry of the hydraulic fracture by two semi-ellipses, which allows modeling the growth of the length, height and opening of the fracture. The geometry of cellular pseudo-three-dimensional models is inherently close to the geometry of the PKN model with the difference that the crack appears to be divided along its length into separate cells, each of which can have its own height and opening.

Despite the existing differences, pseudo-three-dimensional models have much in common: the crack propagates in one plane, the fluid flow is usually considered one-dimensional (this, in addition, imposes additional restrictions on the proppant transfer modeling due to the impossibility of taking into account the mutual influence fluid and proppant movements in the vertical direction), simplified relations are used that describe the elastic reaction of the rock. One of the most important assumptions is the assumption that a crack propagates in a medium with uniform elastic characteristics obtained by averaging the elastic properties of all layers in which a crack grows. This means that P3D models are fundamentally incapable of taking into account all the features of hydraulic fracture growth in layered media. In addition to the above, P3D models are numerically unstable in some important field cases.

However, these models are widespread for a number of reasons. Namely, the expansion of the field of application of hydraulic fracturing technology, which led to an increase in the complexity of the operations, led to the creation and development of computer models. At the same time, the limitation of development was the limited computing resources. The influence of this factor is important because the task of hydraulic fracturing modeling is twofold: on the one hand, it is a difficult scientific task, on the other hand it is a difficult engineering task. And, if in the first case the earliest possible results can be inferior in importance to the accuracy of the result, then in the second case this contradiction does not find an unambiguous solution. Thus, the P3D model, which turned out to be not the most accurate, not the most reliable, but relatively fast working, was able to occupy an important place in the history of solving fracturing problems in layered media.

Further improvement of hydraulic fracturing models was associated with a complication of ideas about the geometry of the fracture. Almost simultaneously, flat three-dimensional (PL3D) [5] and full three-dimensional models (Full3D) [88] began to develop.

Flat three-dimensional models suggest that the crack propagates in one plane, the fluid flow is considered two-dimensional, and equations of the three-dimensional theory of elasticity are used to describe the deformation of the rock. Flat three-dimensional models make it possible to remove a number of restrictions characteristic of P3D models, however, they turn out to be significantly more expensive from the point of view of computing resources. A characteristic feature of full three-dimensional models is that they remove the restriction on the propagation of cracks in one plane. When solving the hydraulic fracturing problem in a three-dimensional formulation, in contrast to the pseudo-three-dimensional one, the complexity of solving the system of equations describing the hydraulic fracturing process significantly increases. This is mainly due to the nonlinearity of the operators included in it, the need to use the hypersingular integral to model the elastic behavior of the rock, and the need to track the moving boundary [70]. These factors cannot but affect the quality and speed of the models and simulators based on them.

An important direction in the development of fracturing models is an increase in speed. The interpretation of fracturing data in real time requires a simulator capable of working at a speed sufficient for real-time calculations to control hydraulic fracturing in the field. At the moment, only pseudo-three-dimensional models can provide a sufficient calculation speed, because both flat three-dimensional and fully three-dimensional models require large computational resources. This is one of the reasons for using precisely simplified models for taking into account stratification in modeling the hydraulic fracturing process.

2 The Green's function construction for the layered structure

2.1 Boundary integral equations for a piecewise homogeneous medium

Consider the arbitrary homogeneous, finite or infinite area D^* with the boundary L_s and normal vector $\mathbf{n}$ (Fig. 2).

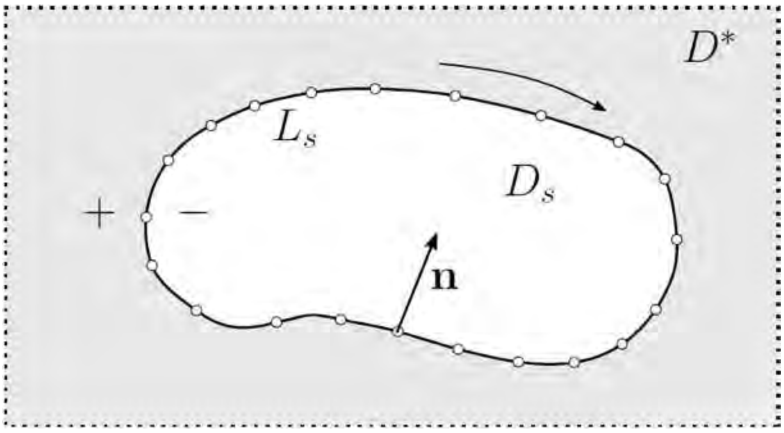

Figure 2: The solution area.

Equilibrium equation of area D^* can be written as

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{1}$$

where $\mathbf{u}$ is vector of displacements, $\mathbf{L}$ - linear partial differential operator [31]. $\mathbf{L}$ can represent, for example, Lame or Laplace operator.

The force vector applied to an arbitrary site with a normal $\mathbf{n}$ is defined by

$$\mathbf{q_n} = \mathbf{T_n}\mathbf{u} \tag{2}$$

where $\mathbf{T_n}$ is a traction operator, which is defined by

$$(\mathbf{T_n}\mathbf{u})_l = C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}n_j \tag{3}$$

where C_{ijkl} are the physical constants of the considered area.

When solving a boundary value problem using the boundary element method, the equation (1) is being solved for the given boundary conditions at the boundary L_s. The displacements

$$\mathbf{u} = \mathbf{f_1(x)}, \quad \mathbf{x} \in L_s \tag{4}$$

or traction

$$\mathbf{q_n} = \mathbf{f_2(x)}, \quad \mathbf{x} \in L_s \tag{5}$$

or their linear combination

$$\mathbf{Au} + \mathbf{Bq_n} = \mathbf{f_3(x)}, \quad \mathbf{x} \in L_s \tag{6}$$

where $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ are given matrixes, and $\mathbf{f_3(x)}$ given vector at the selected point at the boundary, can be taken as the boundary conditions.

Lets us consider that at the point $\mathbf{y}$ of the area D^* a point source of unit intensity is located, for which the fundamental solution $\mathbf{U(x,y)}$ (Green's function) is known. This solution fulfills the equation:

$$\mathbf{LU(x,y)} = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{I} \tag{7}$$

where $\mathbf{I}$ is a unit matrix; δ is the Dirac delta-function. The fundamental solution is used to find the singular and hypersingular solution

$$\begin{aligned} \mathbf{T(x,y)} &= [\mathbf{T_{n(y)}U(x,y)}]^T \\ \mathbf{Q(x,y)} &= \mathbf{T_{n(x)}T(x,y)} \end{aligned} \tag{8}$$

If only the cavities are present in the considered layered structure, then the boundary integral equation can be written in the form

$$\frac{1}{2}\mathbf{\Delta u(x)} - \int_{L_s} \mathbf{U(x,y)q_n(y)}dL_s + \int_{L_s} \mathbf{T(x,y)\Delta u(y)}dL_s \quad x \in L_s \tag{9}$$

The hypersingular boundary integral equation suitable for describing both cavities and cracks has the form

$$[1-\frac{1}{2}\kappa(\mathbf{x})]\mathbf{\Delta q_n}(\mathbf{x}) - \int_{L_s} \kappa(\mathbf{y})[\mathbf{T}(\mathbf{y},\mathbf{x})]^T \mathbf{q_n}(\mathbf{y}) dL_s + \\ + \int_{L_s} \mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{\Delta u}(\mathbf{y}) dL_s \quad x \in L_s \tag{10}$$

where $\kappa(\mathbf{x}) = 1$ if $\mathbf{x}$ belongs to the surface of the cavity and $\kappa(\mathbf{x}) = 0$, if $\mathbf{x}$ belongs to the surface of the crack.

The equations (9) and (10) are applicable when there are no discontinuities at the boundaries between layers. However, in the general case, the conditions at the boundaries can be arbitrary. In the case of a piecewise homogeneous material with inhomogeneities and arbitrary conditions at the contacts (Fig. 3) boundary integral equations can be written in a special form (11) and (12)

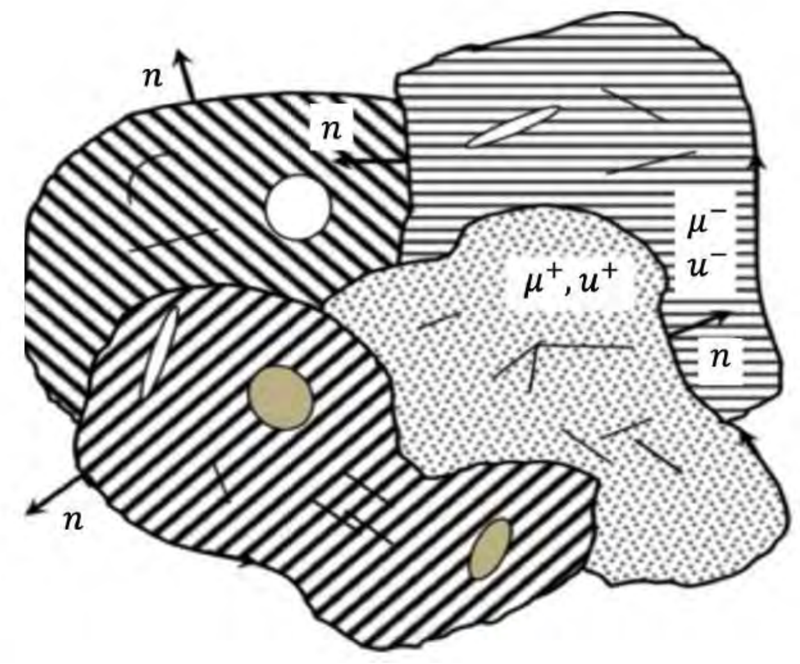

Figure 3: Piecewise homogeneous material.

$$\int_{L_s} \mu \mathbf{U}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{\Delta q_n}(\mathbf{y}) dL_s - \int_{L_s} \mathbf{T}(\mathbf{x},\mathbf{y})[\mu^+\mathbf{u}^+(\mathbf{y}) - \mu^-\mathbf{u}^-(\mathbf{y})] dL_s = \\ = \frac{1}{2}[\mu^+\mathbf{u}^+(\mathbf{x}) + \mu^-\mathbf{u}^-(\mathbf{x})] \quad x \in L_s \tag{11}$$

$$\int_{L_s}\left[\frac{1}{2\mu^+}\mathbf{T}^+(\mathbf{y},\mathbf{x})^T\mathbf{q}_\mathbf{n}^+(\mathbf{y})-\frac{1}{2\mu^-}\mathbf{T}^-(\mathbf{y},\mathbf{x})^T\mathbf{q}_\mathbf{n}^-(\mathbf{y})\right]dL_s-$$
$$-\int_{L_s}\frac{1}{2\mu}\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{\Delta u}(\mathbf{y})dL_s=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\mu^+}\mathbf{q}_\mathbf{n}^+(\mathbf{x})+\frac{1}{2\mu^-}\mathbf{q}_\mathbf{n}^-(\mathbf{x})\right] \tag{12}$$

where μ is the shear modulus.

Thus, if the Green's function that satisfies the given conditions at the boundaries is known, the problem of finding displacements and stresses in the considered region can be reduced to solving boundary integral equations. The question arises: how to construct the Green's function for a piecewise homogeneous material?

2.2 Layered structure

The layered structure is a special case of a piecewise homogeneous medium. The problem of finding the Green's function for such a piecewise homogeneous medium can be significantly simplified if we use two assumptions based on the geometric features of the layered structure.

- The layered structure is a chain type system: each layer has no more than two adjacent layers
- Layer boundaries are flat and parallel

Let there be a layered structure consisting of n layers with flat parallel boundaries. It is assumed that heterogeneities in the form of cracks, cavities, pores and inclusions can be contained in the layers of the structure. We number the layers from bottom to top from 1 to n (Pic. 4).

The boundaries of the layers are numbered from 0 to n. The axes x_2 and x_3 are directed along the boundaries of the layers in the horizontal plane. Let us direct the unit, normal to the boundaries of the layers, along the axis x_1. The superscript i denotes the values corresponding to the i-th layer or i-th contact. The subscript t and b denotes the values corresponding to the upper and lower bounds, respectively. In such notation, the displacement discontinuity vector is determined by the relation:

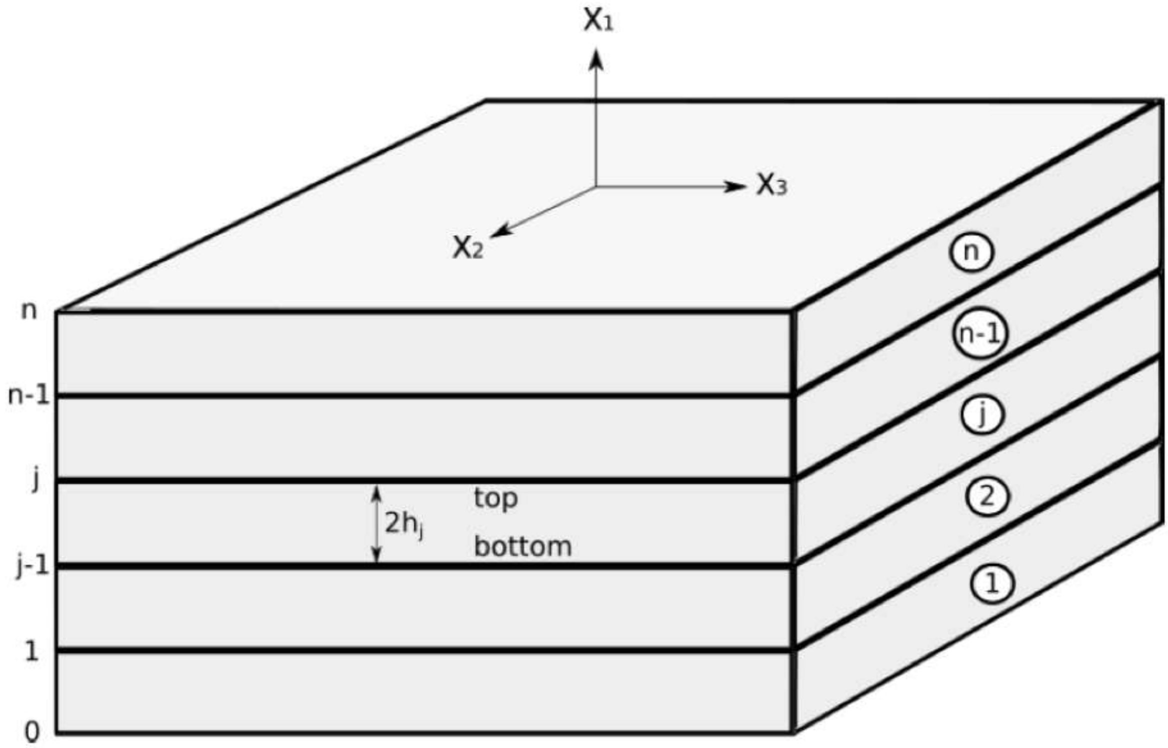

Figure 4: The layered structure.

$$\Delta \mathbf{u}^{\mathbf{i}} = \mathbf{u}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{t}} - \mathbf{u}^{\mathbf{i+1}}_{\mathbf{b}} \tag{13}$$

For a system of n layers, linear differential equilibrium equations can be written as:

$$\mathbf{L}^{\mathbf{i}}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (i = 1, ..., n) \tag{14}$$

where $\mathbf{L}^{\mathbf{i}}$ is a partial differential linear operator with physical constants of the i-th layer.

The equilibrium condition at the interface between the layers includes the traction vector $\mathbf{q}$

$$\mathbf{q}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{t}} = \mathbf{q}^{\mathbf{i+1}}_{\mathbf{b}} = \mathbf{q}^{\mathbf{i}} \quad (i = 1, ..., n-1) \tag{15}$$

and linear dependence of the displacements discontinuity vector $\Delta\mathbf{u}$ on traction vector

$$-\Delta \mathbf{u}^{\mathbf{i}} = \mathbf{A}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}\mathbf{q}^{\mathbf{i}} \tag{16}$$

where $\mathbf{A_c^i}$ is a the square matrix of contact interaction on the boundary between the i and $i+1$ layer. If perfect contact is considered then $\mathbf{A_c^i} = 0$ and $\Delta\mathbf{u^i} = 0$.

If in the considered layered structure has cavities and / or cracks, then the boundary conditions at the boundaries of these inhomogeneities have the form:

$$-\Delta\mathbf{u} = \mathbf{B_c}\mathbf{q} + \Delta\mathbf{u_0} \tag{17}$$

where $\mathbf{B_c}$ is a symmetric matrix and $\Delta\mathbf{u_0}$ is a given jump of potentials. Inversion of the equation (17) $\mathbf{q} = -\mathbf{B_c}^{-1}\Delta\mathbf{u_0} + \mathbf{q_0}$ where $\mathbf{q_0} = -\mathbf{B_c}^{-1}\Delta\mathbf{u_0}$ includes the case when fluxes are given $\mathbf{q_0}$. A special case of given fluxes arises when $\mathbf{B_c}^{-1} = 0$, so

$$\mathbf{q} = \mathbf{q_0} \tag{18}$$

The main task is to find a solution to the equation (14) when the contact conditions (15) and (16) and the boundary conditions (17) or (18) are fulfilled. To solve this problem, it is necessary to find the Green function for a layered medium without inhomogeneities.

2.3 The algorithm for construction the Green's function for a layered structure

Consider the algorithm for construction the Green's function for a layered medium. For the first time, this algorithm was presented in [46].

Let a point source of unit intensity be located at some point of the k-th layer (Fig. 5).

We call all the layers above (below) the considered layer the upper (lower) package of layers. Then the initial layered structure can be considered as a system consisting of three parts.

We consider an infinite homogeneous isotropic medium with physical parameters of the k -th layer. At the point $\mathbf{y}$ of this layer, we place a point source of unit intensity. The displacement field induced by this source is denoted by $\mathbf{U_0(x, y)}$. In

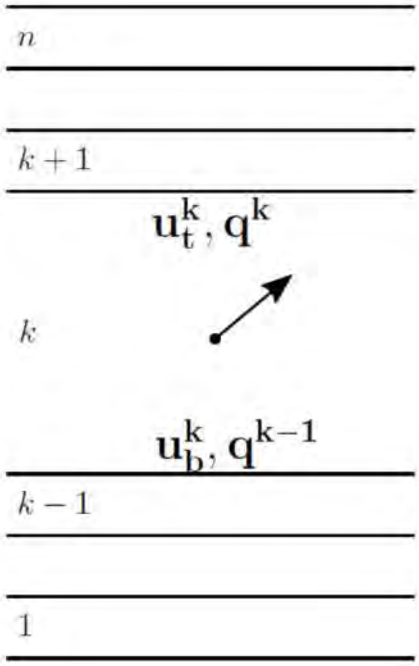

Figure 5: Point source in a layered medium.

the general case, $\mathbf{U_0(x,y)}$ satisfies the equilibrium equation only in the k-th layer. We introduce an addition $\mathbf{U_a(x,y)}$ such that

$$\mathbf{U(x,y)} = \mathbf{U_0(x,y)} + \mathbf{U_a(x,y)} \tag{19}$$

satisfies the equilibrium equation for all layers, as well as the boundary and contact conditions. Thus, the problem of finding the Green function is reduced to the problem of finding the additional function $\mathbf{U_a(x,y)}$, since the solution $\mathbf{U_0(x,y)}$ is known.

Note that the i-th column of the matrix $\mathbf{U(x,y)}$ is the displacement vector induced by a point source acting in the direction x_i. Knowing $\mathbf{U_0(x,y)}$ in an infinite region, one can find the displacement vector on the upper and lower boundary of the k -th layer. We denote these displacements as $\mathbf{u_t^k}$ and $\mathbf{u_b^k}$, respectively, and the corresponding traction vectors as $\mathbf{q^k}$ and $\mathbf{q^{k-1}}$ (Fig. 6).

We apply the traction $\mathbf{q^k}$ to the lower boundary of the upper package of layers. Suppose a solution is found for such a system. We apply the efforts $\mathbf{q^{k-1}}$ in a similar way and find a solution for the lower package of layers (Fig. 7).

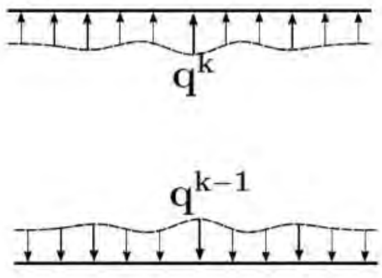

Figure 6: Tractions at the boundaries of k-th layer.

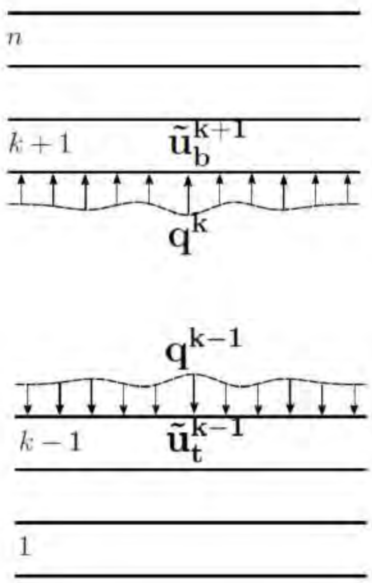

Figure 7: Upper and lower package of layers under the tractions induced by a point source in the k -th layer.

Denote the found solution $\mathbf{u}_*$. Note that $\mathbf{u}_*$ contains the values of the displacements at the lower boundary of $k+1$-th layer and upper boundary of $k-1$-th layer. We denote this displacements as $\mathbf{\tilde{u}_b^{k+1}}$ and $\mathbf{\tilde{u}_t^{k-1}}$ respectively. In general case $\mathbf{u_t^k} - \mathbf{\tilde{u}_b^{k+1}}$ and $\mathbf{u_b^k} - \mathbf{\tilde{u}_t^{k-1}}$ do not satisfy the contact conditions on the upper and lower boundary of the k-th layer. We eliminate this discrepancy by writing the relation

$$
\begin{aligned}
-\Delta \mathbf{u_d^k} &= \mathbf{A_c^k q^k} + \mathbf{\tilde{u}_b^{k+1}} - \mathbf{u_t^k} \\
-\Delta \mathbf{u_d^{k-1}} &= \mathbf{A_c^{k-1} q^{k-1}} + \mathbf{u_b^k} - \mathbf{\tilde{u}_t^{k-1}}
\end{aligned} \tag{20}
$$

Let us now consider the problem of finding the displacement field in a layered package under inhomogeneous conditions (21) at k-th and $(k-1)$-th boundary

$$
\begin{aligned}
-\Delta \mathbf{u^k} &= \mathbf{A_c^k q^k} + \Delta \mathbf{u_d^k} \\
-\Delta \mathbf{u^{k-1}} &= \mathbf{A_c^{k-1} q^{k-1}} + \Delta \mathbf{u_d^{k-1}}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

and homogeneous conditions (16)at the other boundaries. We denote the solution we get as $\tilde{\mathbf{u}}$.

We perform a similar procedure for all columns of the matrix $\mathbf{U_0(x,y)}$. We obtain the matrices $\mathbf{U_*(x,y)}$ and $\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{(x,y)}$. Then the additional matrix is determined by the relation

$$
\mathbf{U_a(x,y)} = \mathbf{U^*(x,y)} + \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{(x,y)} \tag{22}
$$

Finally, the Green function for a layered structure has the form:

$$
\mathbf{U(x,y)} = \mathbf{U_0(x,y)} + \mathbf{U_*(x,y)} + \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{(x,y)} \tag{23}
$$

where $\mathbf{U_0(x,y)} = 0$ out of k-th layer, where the point source acts, and the equality $\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{(x,y)} = 0$ is satisfied within this layer. Thus, to find the Green's function in a layered medium, one has to solve three problems of the same type:

- For the package of $n-k$ upper layers under the action of specified traction at the lower boundary
- For the package of $k-1$ lower layers under the action of specified traction at the upper boundary
- For a package of n layers at inhomogeneous conditions (21) at k-th and $(k-1)$-th boundaries and homogeneous conditions (16) at all other boundaries.

These problems are solved by one general algorithm based on the application of the Fourier transform and the sweep method. We give a detailed description of this algorithm.

Consider a layered structure consisting of m homogeneous layers and located between two half-spaces. We number the layers from $k+1$ to $k+m$, and their boundaries from k to $k+m$ (Fig. 8). We consider the problem of finding the displacement field in a layered package under the action of traction at the lower boundary. The remaining two problems are solved in a similar way.

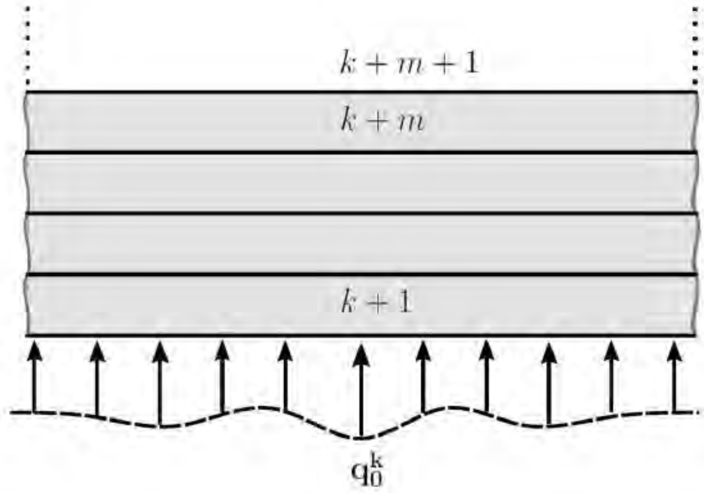

Figure 8: Upper and lower package of layers under the tractions at the lower boundary.

We apply the Fourier transform to the original equations [7], [14], which is defined by

$$\tilde{f}(x_1, s_2, s_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3) e^{-2\pi i(s_2 x_2 + s_3 x_3)} dx_2 dx_3 \tag{24}$$

where $i = \sqrt{-1}$, s_2 and s_3 are the Fourier transform frequencies.

The Fourier transform allows us to establish a relationship between the tractions and displacements in the considered region [66]. In particular, the relations

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}} &= \mathbf{R}_{\mathbf{tt}} \tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{t}} + \mathbf{R}_{\mathbf{tb}} \tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{b}} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}} &= \mathbf{R}_{\mathbf{bt}} \tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{t}} + \mathbf{R}_{\mathbf{bb}} \tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{b}} \end{aligned} \tag{25}$$

are valid, where $\mathbf{R}_{\mathbf{tt}}, \mathbf{R}_{\mathbf{tb}}, \mathbf{R}_{\mathbf{bt}}, \mathbf{R}_{\mathbf{bb}}$ are known square matrices. Having written (25) for each layer, we obtain the relation for the displacement gap at the boundary between the layers

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{i}} - \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{i}} = \mathbf{R}_{\mathbf{bt}}^{\mathbf{i+1}} \tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{i+1}} + (\mathbf{R}_{\mathbf{bb}}^{\mathbf{i+1}} - \mathbf{R}_{\mathbf{tt}}^{\mathbf{i}}) \tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{i}} - \mathbf{R}_{\mathbf{tb}}^{\mathbf{i}} \tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{i-1}} \quad (i = k, ..., k+m) \tag{26}$$

We use the boundary conditions and write (26) in the form

$$\mathbf{A^i}\tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{i-1}} - \mathbf{C^i}\tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{i}} + \mathbf{B^i}\tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{i+1}} + \mathbf{F^i} = \mathbf{0} \quad (i = k, ..., k+m) \tag{27}$$

where $\mathbf{A^i} = -\mathbf{R^i_{tb}}$; $\mathbf{C^i} = -\mathbf{A_c} + \mathbf{R^i_{tt}} - \mathbf{R^{i+1}_{bb}}$; $\mathbf{B^i} = \mathbf{R^{i+1}_{bt}}$; $\mathbf{F^i} = -\Delta\mathbf{u^i_0}$.

Tractions at $(k+m+1)$ and $(k-1)$ boundaries can be considered equal to zero, since half-spaces are considered. Then one can write

$$\begin{aligned} &\mathbf{A^{k+m}}\tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{k+m-1}} - \mathbf{C^{k+m}}\tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{k+m}} + \mathbf{F^{k+m}} = \mathbf{0} \\ &-\mathbf{C^k}\tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{k}} + \mathbf{B^k}\tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{k+1}} + \mathbf{F^k} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{28}$$

We note that in the considered of tractions, given on the k-th boundary, we have

$$\mathbf{C^k} = \mathbf{I}; \quad \mathbf{F^k} = \tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{k}} \tag{29}$$

In the case when the tractions are given on the $(k+m)$-th boundary, we have

$$\mathbf{F^{k+m}} = \tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{k+m}} \tag{30}$$

To solve the system of equations (27), one can use the efficient and stable sweep method, which allows to get a solution for any number of layers. The sweep method consists of two stages. The first step is to find the sweep matrices $\mathbf{a^i}$ and sweep vectors $\mathbf{b^i}$.

$$\begin{aligned} &\mathbf{a^{k+1}} = \left(\mathbf{C^k}\right)^{-1}\mathbf{B^k}; \quad \mathbf{b^{k+1}} = \left(\mathbf{C^k}\right)^{-1}\mathbf{F^k} \\ &\mathbf{a^{i+1}} = \left(\mathbf{C^i} - \mathbf{A^i a^i}\right)^{-1}\mathbf{B^i} \qquad (i = k+1, ..., k+m-1) \\ &\mathbf{b^{i+1}} = \left(\mathbf{C^i} - \mathbf{A^i a^i}\right)^{-1}\left(\mathbf{B^i} + \mathbf{A^i b^i}\right) \quad (i = k+1, ..., k+m) \end{aligned} \tag{31}$$

At the second step $\mathbf{a^i}$ and $\mathbf{b^i}$ which are already found are used to find displacements and traction at the boundaries

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{k+m}} = \mathbf{b^{k+m+1}} \\ &\tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{i-1}} = \mathbf{a^i}\tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{i}} + \mathbf{b^i} \qquad (i = k+m, ..., k+1) \\ &\tilde{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{t}} = (\mathbf{R^i_{tt}} + \mathbf{R^i_{tb}a^i})\tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{i}} + \mathbf{R_{tb}b^i} \quad (i = k+m, ..., k+1) \\ &\tilde{\mathbf{u}}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{b}} = (\mathbf{R^i_{bt}} + \mathbf{R^i_{bb}a^i})\tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{i}} + \mathbf{R_{bb}b^i} \quad (i = k+m, ..., k+1) \end{aligned} \tag{32}$$

To obtain the values of the displacements in the Cartesian coordinate system, it is necessary to apply the inverse Fourier transform defined by the relation

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x_1, s_2, s_3) e^{2\pi i(s_2 x_2 + s_3 x_3)} ds_2 ds_3 \tag{33}$$

We emphasize that the mentioned algorithm with minor modifications is used to solve the three problems that arise when obtaining the Green's function for the layered medium. Owing to two simplifications, the problem reduces to solving a system of equations by the sweep method.

2.4 Construction of the Green's function for the two-dimensional Laplace operator

Consider the algorithm for constructing the Green's function for the two-dimensional Laplace equation [61]. Of particular interest is the logarithmic feature of the fundamental solution of the two-dimensional Laplace equation, since such a solution does not tend to zero at infinity.

In the Cartesian coordinate system, the two-dimensional Laplace equation has the form:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \tag{34}$$

Then the operator for the i-th layer can be written as

$$L^i = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \tag{35}$$

We will talk about the Laplace equation in terms of potentials (u), fluxes (q) and permeability G.

The fluxes are defined by following expressions:

$$\begin{aligned} q_1 &= G\frac{\partial u}{\partial x_1} \\ q_2 &= G\frac{\partial u}{\partial x_2} \end{aligned} \tag{36}$$

The fluxes q_n in the direction of the normal $\mathbf{n}$ are calculated by the formula

$$q_n = G\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \tag{37}$$

where the normal derivative of the displacements is determined by the relation

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(\mathbf{n}, \mathrm{x}_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(\mathbf{n}, \mathrm{x}_2) \tag{38}$$

The fundamental solution of the Laplace equation has a logarithmic singularity and is determined by the relation

$$U_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi}\ln(r) \tag{39}$$

where $r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ is the distance to the point source. Note that the solution (39) satisfies the equation (34) everywhere, except for the point (y_1, y_2).

The fluxes corresponding to the fundamental solution are calculated using the formula (40):

$$q_i = -\frac{1}{2\pi}G\frac{(x_i - y_i)}{r} \tag{40}$$

For a fundamental solution, the most important equality is fulfilled:

$$U_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \tag{41}$$

Note that for the solution (39) the relation (41) is obvious, since U_0 depends only on the distance r, at which the coordinates of the source and the field point appear symmetrically. In the more general case (41) is a consequence of the reciprocity theorem. As applied to boundary integral equations, solutions of the form (39) serve as the kernels of the potential of a simple layer. Singular solutions obtained by a single differentiation in the direction n_x given at the field point x and multiplied by the shear modulus G serve as kernels for the "normal derivative" potential. Singular solutions obtained by a single differentiation in the direction n_y given at the source point y and multiplied by G serve as kernels for the double-layer potential. The peculiarity of the double layer potential is that it does not contain differentiation with respect to the field point; therefore, this solution does not violate the homogenity of conditions at the boundary if the initial singular solution satisfies such conditions. In this regard, the potential of the double layer is used to represent the solution itself, not the fluxes. The singular solutions obtained by differentiating the double layer potential in the direction n_x at the field point x and multiplied by G serve as kernels of the hypersingular potential. In fact, these are fluxes corresponding to the singular solution for the double-layer potential [52].

The first step in constructing the Green's function of the two-dimensional Laplace operator is to apply the Fourier transform to the original equations. Consider a plane perpendicular to the axis x_3. Then the solution searching area is formed by the basis vectors x_1 and x_2. Since the axis x_1 is perpendicular to the boundaries of the layers, the Fourier transform is possible only in the direction x_2, since the properties in this direction are homogeneous.

We apply the Fourier transform to the Laplace equation. We get the equation

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2} - s^2 \tilde{u} = 0 \tag{42}$$

To find the Green's function, it is enough to know the image of the fluxes in the direction of the axis x_1. By the formula (37) we obtain

$$\tilde{q}^i = G_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \tag{43}$$

Further, for brevity, the Fourier images of potentials and fluxes are called simply potentials and fluxes. It is convenient to imagine the solution through the sum of the symmetric and antisymmetric parts. Then for potentials and fluxes the following relations are valid:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \tilde{u}_s + \tilde{u}_a \\ \tilde{q} &= \tilde{q}_s + \tilde{q}_a \end{aligned} \tag{44}$$

The general solution of the Laplace equation has the form

$$\tilde{u} = c_1 \operatorname{sh}(\mathrm{sx}_1) + c_2 \operatorname{ch}(\mathrm{sx}_1) \tag{45}$$

The symmetric and antisymmetric part of the potentials are determined by the relations:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_s &= \tfrac{1}{2}\left(\tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(-x_1)\right)\\ \tilde{u}_a &= \tfrac{1}{2}\left(\tilde{u}(x_1) + \tilde{u}(-x_1)\right)\end{aligned} \tag{46}$$

From (45) and (46) we get

$$\begin{aligned}\tilde{u}_s &= c_1\,\mathrm{sh}(\mathrm{sx}_1)\\ \tilde{u}_a &= c_2\,\mathrm{ch}(\mathrm{sx}_1)\end{aligned} \tag{47}$$

Similarly, the relations for the symmetric and antisymmetric parts of the fluxes are obtained:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_s &= c_2\tfrac{Gs}{2}\,\mathrm{sh}(\mathrm{sx}_1)\\ \tilde{q}_a &= c_1\tfrac{Gs}{2}\,\mathrm{ch}(\mathrm{sx}_1)\end{aligned} \tag{48}$$

From the relations (47) and (48), one can obtain relations connecting the values of the symmetric parts of potentials and fluxes

$$\begin{aligned}\tilde{u}_s &= R_s\tilde{q}_s\\ \tilde{u}_a &= R_a\tilde{q}_a\end{aligned} \tag{49}$$

where

$$\begin{aligned}R_s &= \tfrac{2}{Gs}\,\mathrm{ch}(\mathrm{sx}_1)\\ R_a &= \tfrac{2}{Gs}\,\mathrm{th}(\mathrm{sx}_1)\end{aligned} \tag{50}$$

We use the relations (25) and obtain expressions for the coefficients connecting the potentials and fluxes at the boundaries

$$\begin{aligned}R_{tt} &= \frac{1}{2}\left(\tfrac{2}{Gs}\,\mathrm{ch}(\mathrm{sx}_1) + \tfrac{2}{Gs}\,\mathrm{th}(\mathrm{sx}_1)\right)\\ R_{tb} &= -\frac{1}{2}\left(\tfrac{2}{Gs}\,\mathrm{ch}(\mathrm{sx}_1) - \tfrac{2}{Gs}\,\mathrm{th}(\mathrm{sx}_1)\right)\\ R_{bt} &= \frac{1}{2}\left(\tfrac{2}{Gs}\,\mathrm{ch}(\mathrm{sx}_1) - \tfrac{2}{Gs}\,\mathrm{th}(\mathrm{sx}_1)\right)\\ R_{bb} &= -\frac{1}{2}\left(\tfrac{2}{Gs}\,\mathrm{ch}(\mathrm{sx}_1) + \tfrac{2}{Gs}\,\mathrm{th}(\mathrm{sx}_1)\right)\end{aligned} \tag{51}$$

Knowing these expressions from the formulas (32), one can obtain the values of potentials and fluxes at the boundaries between the layers. Values at an arbitrary point inside the layers can be calculated from the values of potentials and fluxes at the boundaries of this layer. Moreover, to solve boundary value problems, it is enough to calculate the Green's function at points having a zero coordinate along the x_2 and x_3 axes. Indeed, since the medium under consideration is isotropic in the directions x_2 and x_3, the solution for the infinite region will be the same at points with the same coordinate x_1.

We find the relations connecting the potentials and fluxes inside the layer with the values at the boundaries. For convenience, we normalize them. Values with the dimension of length are normalized to half the thickness of the k-th layer h_k in which the point source is located. Then $\hat{h}_i = h_i/h_k$. We normalize the permeability to the permeability of the k-th layer $\hat{G}_i = G_i/G_k$. Further we assume that all the quantities used are dimensionless. Thus, for convenience, we do not introduce special notation for dimensionless quantities.

Let a boundary solution be obtained for a point source of unit intensity located on the x_1 axis at the point $(x_1^0, 0)$. It is known that to obtain the values of the Green function inside the layers, it is enough to find the value of the additional function inside these layers. Thus, to obtain the values of the Green's function inside all layers, it is enough to know the value of the additional function at all of the boundaries.

Considering that $G_k = 1$ and half the layer thickness $h_k = 1/2$, the values of additional fluxes at the upper and lower boundaries of the k th layer are determined by the relations

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{a,t} &= s(c_1 \operatorname{ch}(\mathrm{s}/2) + c_2 \operatorname{sh}(\mathrm{s}/2)) \\ \tilde{q}_{a,b} &= s(c_1 \operatorname{ch}(\mathrm{s}/2) - c_2 \operatorname{sh}(\mathrm{s}/2)) \end{aligned} \tag{52}$$

where

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\tilde{q}_{a,t} + \tilde{q}_{a,b}}{2s\ \mathrm{ch(s/2)}} \\
c_2 &= \frac{\tilde{q}_{a,t} - \tilde{q}_{a,b}}{2s\ \mathrm{sh(s/2)}}
\end{aligned} \tag{53}
$$

Then the values of the additional potentials and fluxes inside the k-th layer have the form

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_a &= \frac{\tilde{q}_{a,t} + \tilde{q}_{a,b}}{2s\ \mathrm{ch(s/2)}}\, \mathrm{sh(sx_1)} + \frac{\tilde{q}_{a,t} - \tilde{q}_{a,b}}{2s\ \mathrm{sh(s/2)}}\, \mathrm{ch(sx_1)} \\
\tilde{q}_a &= \frac{\tilde{q}_{a,t} + \tilde{q}_{a,b}}{2\, \mathrm{ch(s/2)}}\, \mathrm{ch(sx_1)} - \frac{\tilde{q}_{a,t} - \tilde{q}_{a,b}}{2s\ \mathrm{ch(s/2)}}\, \mathrm{sh(sx_1)}
\end{aligned} \tag{54}
$$

Finally, the potentials and fluxes inside the k-th layer corresponding to the Green function for a layered medium can be represented by the relations

$$
\begin{aligned}
\tilde{u} &= \tilde{u}_0 + \tilde{u}_a \\
\tilde{q} &= \tilde{q}_0 + \tilde{q}_a
\end{aligned} \tag{55}
$$

It is important to note that in order to obtain real values of potentials and flows, it is necessary to apply the inverse Fourier transform to the obtained values. In the case of $\tilde{q}$, the result of the inverse transformation is q_1. The value q_2 can be obtained by the inverse Fourier transform of $\tilde{q}_2$, the value of which is determined by the relation

$$
\tilde{q}_2 = -is\tilde{u} \tag{56}
$$

where $i = \sqrt{-1}$.

The above relations allow to obtain the Green's function for the two-dimensional Laplace operator. Note that the formulas were obtained under the assumption that the considered layers have infinite dimensions in the direction of the x_2 axis, since the Fourier transform on an infinite interval is used to obtain the connection of potentials and fluxes at the boundaries. The numerical implementation of the algorithm uses the discrete Fourier transform [9], [16], which is possible only on a finite interval. In the numerical implementation of the approach to obtain the Green function described in this paragraph, one can use the fast Fourier transform [17], which allows to reduce the computational complexity from N^2 to $N \log_2 N$ in the two-dimensional case and from N^3 to $N^2 \log_2 N$ in three-dimensional, where N is the number of points of which the considered region is divided in the chosen direction. In the three-dimensional case, we assume a uniform partition in the directions x_2 and x_3. In the general case, when it is necessary to find all the kernels of the integral equations, for each position of the point source it is necessary to draw up to 36 direct and up to 9 inverse Fourier transforms. Given that the number of points at which the source is located can be arbitrarily large, the use of the fast Fourier transform can significantly increase the rate of the Green's function calculation.

The choice of the Fourier transform period is one of the most important problems in the numerical calculation of the Green's function, since not only the accuracy of the results, but also the calculation time depends on the value of the period. We propose a universal approach for determining the parameters of the fast Fourier transform at which the specified accuracy of the calculation of the Green's function is achieved with a minimum calculation time.

2.5 The accuracy of the Green's function construction

Consider a layered structure of finite size $2A$ along the axis x_2 (Fig. 9).

The coordinates of the points of the layered structure along the boundaries belong to the segment $[-A, A]$. We will call the quantity $2A$ the period of the considered problem, and the value A - the half-period. Knowing the solution for an infinite homogeneous isotropic medium, we can find fluxes at the $(k-1)$-th and k-th boundaries. In order to use the algorithm presented earlier, it is necessary to apply the Fourier transform to the found fluxes. Note that applying the Fourier transform to the original problem changes the boundary conditions along axes parallel to the boundaries of the layers to periodic ones. In this case, the question arises: why as U_0 the solution for an infinite homogeneous isotropic medium is used, and not the

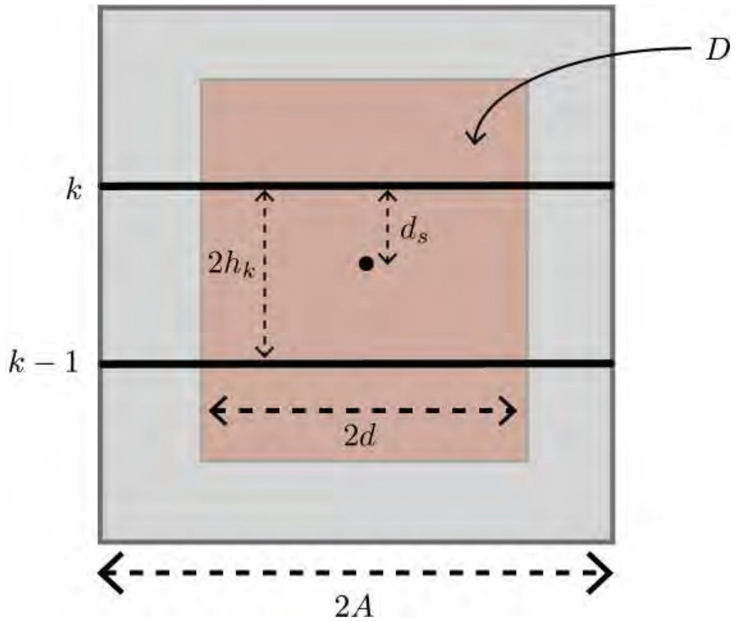

Figure 9: Source in k-th layer.

corresponding solution for a periodic structure. It is important to note that we are interested in the exact solution not in the entire periodic structure, but only in a certain region of D. The main characteristic of such a region is its size along the axes of periodicity.

Consider the problem of choosing a period. We introduce the quantity η

$$\eta = \frac{A}{d} \tag{57}$$

where d is a half of the considered area width D. Quantity η characterizes the remoteness of the area D from the boundaries of period. In general, we can reduce the problem of choosing the period A to the question of choosing the optimal value η.

Let the area D be the square with side $2d$. Fundamental solution for a periodic homogeneous isotropic medium [18] is representable in the form

$$U_p(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{2\mathrm{A}} \mathrm{r} \right) \right) \tag{58}$$

Comparison of solutions for infinite and periodic structures is presented in the Fig. 10.

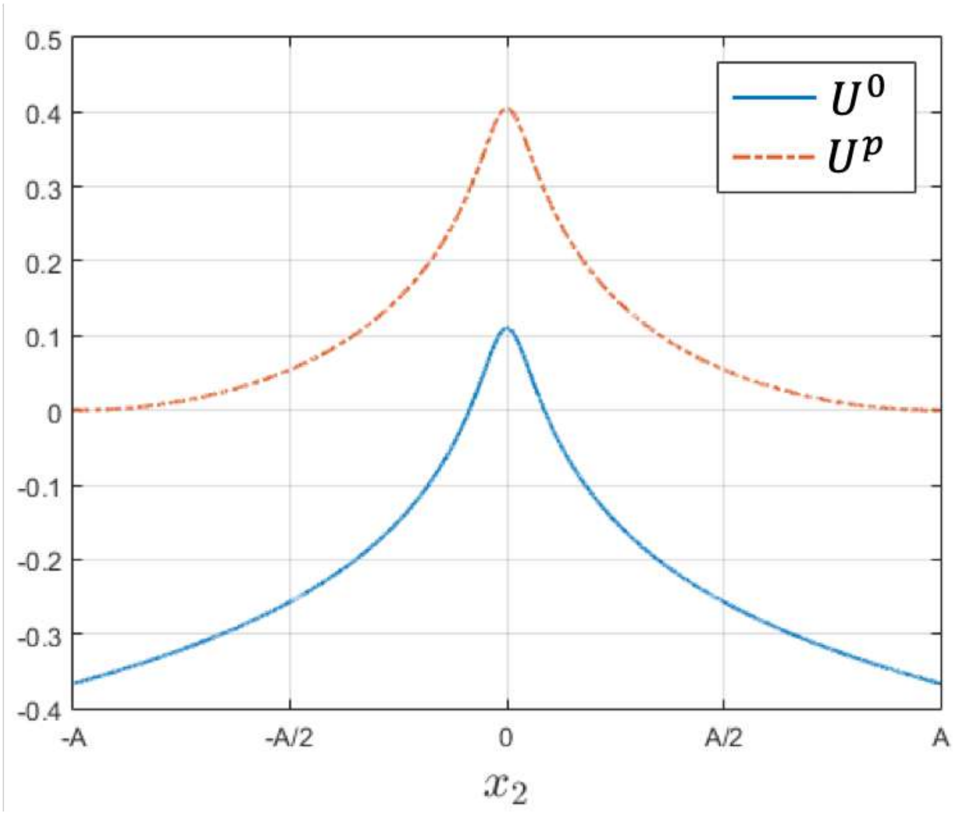

Figure 10: Fundamental solution for a periodic (red dotted line) and infinite (blue solid line) structure at $eta = 20, x_1 = \frac{h_k}{2}$.

Important difference between (58) and (39) is in the following:

$$U_p|_{x_2=-A} = U_p|_{x_2=A} = 0 \tag{59}$$

while for the fundamental solution of the two-dimensional Laplace equation on an infinite interval

$$U_0|_{x_2=-A} = U_0|_{x_2=A} \xrightarrow[A\to\infty]{} \infty \tag{60}$$

Let us prove that there exists a domain D in which the fundamental solution of the two-dimensional Laplace equation U_0 can be used instead of the solution U_p. To prove this, we prove that there exists a domain D where both solutions differ by a constant. We introduce the function $C(x_1, x_2)$ through the relation (61)

$$C(x_1, x_2) = U_0 - U_p \tag{61}$$

where $(x_1, x_2) \in D$, and consider the relative difference

$$\hat{\zeta} = \frac{max_D|C(x_1,x_2)| - min_D|C(x_1,x_2)|}{max_D|C(x_1,x_2)|} \cdot 100\% \tag{62}$$

Note that if $C(x_1, x_2) = const$, then $\hat{\zeta} \to 0$.

We build a dependency $\hat{\zeta}(\eta)$. From the Fig. 11 it is clearly seen that $\hat{\zeta} \xrightarrow[\eta\to\infty]{} 0$. This result confirms that with an increase in the period, the boundary conditions have a lesser effect on the region under consideration. Accuracy in 0.053% can be reached already at $eta = 10$. For most calculations, it is enough that the condition $eta > 3$ is satisfied.

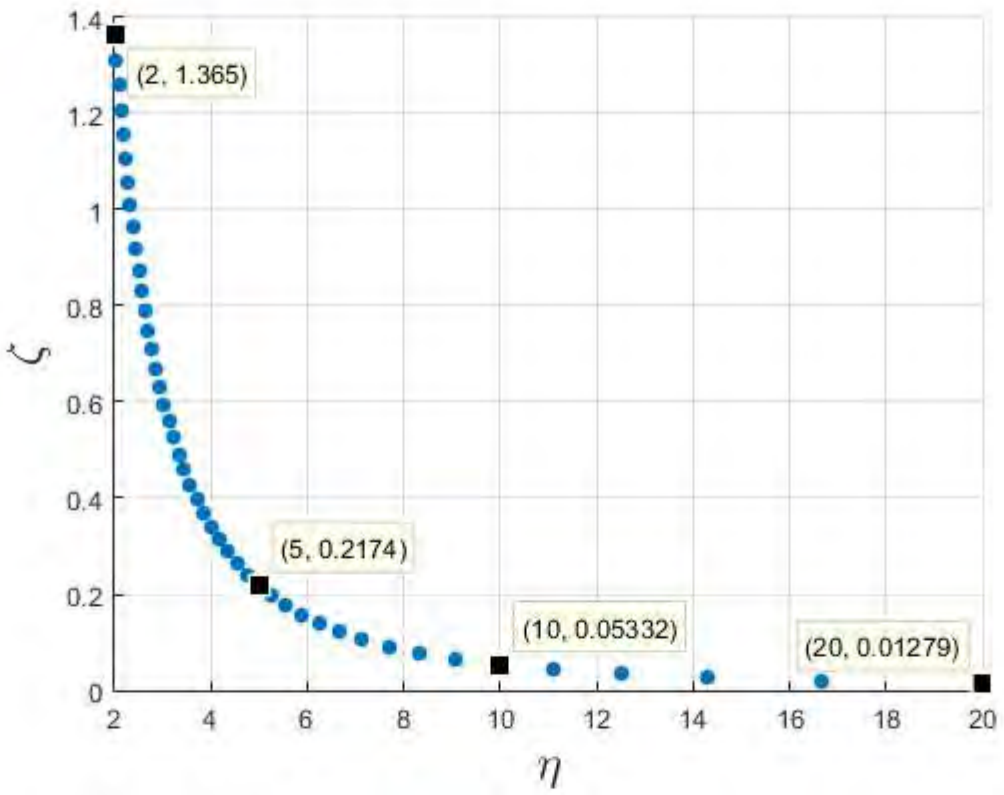

Figure 11: Dependence of ζ on η.

One of the most important problems arising in constructing the Green's function for layered structures is to evaluate the accuracy of the obtained solution. Let us consider in more detail how the parameters of the Fourier transform influence the accuracy of the results. To do this, we compare the accuracy of numerical results with analytical solutions.

Problem 1. We consider two homogeneous half-planes between which there is a structure consisting of n homogeneous layers. We place the point source in the k-th layer at a distance d from the boundary with the $(k+1)$-th layer. Let all layers of the structure have the same properties and ideal contacts at the boundaries. Such a structure can be considered as a homogeneous isotropic medium. The Green's function of such a problem is (39).

We look for a solution in a square area D. The accuracy of finding the Green's function is defined as the maximum relative error in this area

$$\hat{\zeta} = max_D \left[\frac{q_a^k}{q_0^k} \right] \cdot 100\% \tag{63}$$

where q_a^k is additional flux at k-th boundary, corresponding incremental function $U_a(x, y)$, q_0^k is the flux at k-th boundary, determined by the Green function.

From the results presented in the table (1) it can be seen that the accuracy does not depend on the number of layers. It is important to understand that this does not exclude the dependence of accuracy on the size of the region.

Table 1: Relative error (in %) in the region D depending on the number of layers n and η for a homogeneous medium.

	$n = 3$	$n = 20$	$n = 40$
$\eta = 8$	0.58	0.58	0.58
$\eta = 16$	0.382	0.382	0.382
$\eta = 32$	0.131	0.131	0.131
$\eta = 64$	0.038	0.038	0.038

The error found for various values of N and η is presented in the table (2). The values of η ranged from 8 to 64, and the values of N from 128 to $1,024$.

From the 1 table it can be seen that the influence of the period on the accuracy is much higher than the influence of the number of sampling points. The higher accuracy of the results with an increase in the value of η can be explained by the fact that, with an increase in the period $2A$, the boundaries have a significantly smaller effect on the region under consideration.

Table 2: Relative error (in %) in the region D depending on N and *eta* for a homogeneous medium.

	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
$\eta = 8$	0.605	0.588	0.58	0.576
$\eta = 16$	0.402	0.388	0.382	0.379
$\eta = 32$	0.143	0.134	0.131	0.129
$\eta = 64$	0.104	0.04	0.038	0.037

Problem 2. We consider two half-planes with a common boundary. Let the lower half-plane have a conductivity equal to unity, while the conductivity of the upper half-plane tends to zero. We place the point source in the lower half-plane at a distance of d from the upper boundary. We represent each half-plane as a layered structure consisting of an arbitrary number of layers with the same thickness and elastic properties. It is necessary to find the additive U_a for such a structure.

For a layered structure with an impenetrable upper boundary (Fig. 12), the Green function can be found by the method of images. We place symmetrically with respect to the half-plane boundary a point source of the same intensity and at the same distance from the boundary as the original source. Then the Green's function for a half-plane with an impenetrable boundary can be found in the form

$$U = U_0 + U^* = -\frac{1}{2\pi}\ln(r) - \frac{1}{2\pi}\ln(r^*) \tag{64}$$

where r^* is the distance to reflected source.

The Green function found as a result of numerical calculations should have an additive whose value is close to the value that the reflected source generates. Thus, the relative error in the calculation of the Green's function in the region for D in this case can be calculated by the formula

$$\hat{\zeta} = max\left[\frac{q_a^k - q_k^*}{q_k^*}\right] \cdot 100\%, \quad x_2 \in D \tag{65}$$

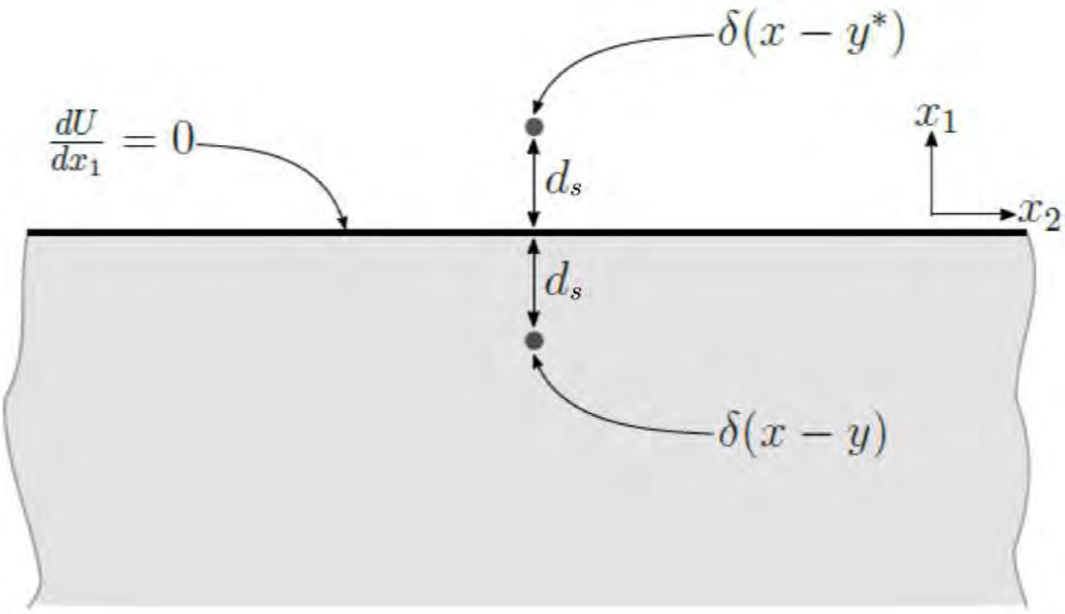

Figure 12: Point source in half-space.

where q_a^k is additional flux at k-th boundary, q_k^* is the flux corresponding to the reflected source at kth boundary.

Dependence of relative error values $\hat{\zeta}$ on N and η are presented in the table 3.

Table 3: Relative error (in %) ($\times 10^{-4}$) in the region D depending on N and η for a half-space with an impenetrable boundary.

	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
$\eta = 8$	2.5755	2.575	2.5748	2.5747
$\eta = 16$	2.5703	2.57	2.5698	2.5697
$\eta = 32$	2.5637	2.5635	2.5633	2.5632
$\eta = 64$	2.562	2.561	2.561	2.5609

From the presented data (3) one can see that in this case relative error is equal almost for every pair of values N and η.

Problem 3. We consider two half-planes with a common boundary. Let the lower half-plane have a conductivity equal to unity, while the conductivity of the upper half-plane will tend to infinity. We place the point source in the lower half-plane. As in the previous case, we represent each half-plane in the form of a layered structure consisting of layers with the same thickness and the same conductivity. The Green's function for this problem can also be calculated using the image method.

Since such a system can be considered as a half-plane with a strongly conducting boundary, the potential at the upper boundary of the lower half-plane is assumed to be zero. Then the Green's function of such a system can be found by the formula

$$U = U_0 + U^* = -\frac{1}{2\pi}\ln(r) + \frac{1}{2\pi}\ln(r^*) \tag{66}$$

To find the relative error in the region D, we use the relation (65). The values of $\hat{\zeta}$ depending on N and η for a half-space with a strongly conducting boundary are presented in the table 4.

Table 4: Relative error (in %) in the region D depending on N and η for a half-space with a strongly conducting boundary.

	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
$\eta = 8$	1.212	1.177	1.16	1.152
$\eta = 16$	0.804	0.777	0.764	0.758
$\eta = 32$	0.286	0.269	0.261	0.257
$\eta = 64$	0.21	0.08	0.076	0.074

The results presented in the table 4 show that in the case of a strongly conducting boundary, the error is approximately two times larger than in the case of a homogeneous medium. In both cases, to increase the accuracy of calculations, it is optimal to increase the period, and not the number of sampling points.

Analysis of the data from the tables 2, 3 and 4 shows that the accuracy values of the results obtained for the homogeneous medium problem are between the values obtained for the two limiting cases considered in the problems 2 and 3. Note that the accuracy of the solution is not a linear function of the parameters N and η. When choosing the parameters, it is necessary to take into account the fact that an increase in N leads to a significant increase in the calculation time. Note that an increase in η at a constant N can lead to a loss of accuracy.

2.6 Circular hole in a layered structure

Let the circular hole bounded by the closed contour L_s be located in the region D belonging to one of the layers. We denote the area inside the hole as D_s, and the area outside the hole D^*. We choose the direction of traversal L_s so that the region D^* remains on the left. The normal $\mathbf{n}$ is directed to the right of the direction of movement. The superscript plus (minus) corresponds to the value of the region for which the normal is external (internal). Let the flow q_n^+ be given on the circuit L_s. We need to find the potential in the region of D^*.

We use the theory of complex boundary integral equations [18]. For a hole in an infinite homogeneous, we have:

$$Re\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{L_s}\left[q_n^+\ln(\tau-z)ds+i\frac{\kappa^+U^+}{\tau-z}ds\right]\right\}=\begin{cases}\kappa Uz, & z\in D^*\\ \frac{1}{2}\kappa^+U^+, & z\in L_s\\ 0, & z\notin D^*+L_s\end{cases}\tag{67}$$

where τ, z are coordinates of points in the complex plane, $i=\sqrt{-1}$. Equation (67) can be generalized to the case of a layered medium [61] as follows

$$Re\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{L_s}\left[q_n^+U_*ds+U^+Q_*ds\right]\right\}=\begin{cases}\kappa Uz, & z\in D^*\\ \frac{1}{2}\kappa^+U^+, & z\in L_s\\ 0, & z\notin D^*+L_s\end{cases}\tag{68}$$

where

$$\begin{gathered}U_*=\ln(\tau-z)+U_a(\tau,z)\\ Q_*=i\frac{\kappa^+}{\tau-z}+Q_a(\tau,z)\end{gathered}\tag{69}$$

here $U_a(\tau,z)$, $Q_a(\tau,z)$ are additional values, which are calculated using the presented algorithm of Green's function obtaining.

Note that the equation (67) was obtained under the assumption that $\int_{L_s} q_n^+ds=0$. In the case when a flux is specified at the hole boundary, this condition is generally not satisfied. This discrepancy can be eliminated as follows. Find the total flux on the circuit L_s

$$\int_{L_s} q_n^+ds=q_0\tag{70}$$

We place the point source of intensity q_0 at the point $y_0 \in D_s$. We find potentials and fluxes in the region $D^* + L_s$ corresponding to such a source for a layered medium without inhomogeneities. We also find the additional fluxes q_n^{a+} on the contour L_s. Note that $\int_{L_s} q_n^{a+} ds = 0$. The solution of the equation (68) with the flux q_n^{a+} defined on the circuit L_s is the values of the additional potentials in the region D^*. The total value of the potentials from a point source and a circuit with a self-balanced flux gives the desired value of the potential in D^* from the circular cavity.

To find a solution of the equation (68), we represent the contour L_s as a set of straight-line segments, each of which can be transformed into the segment $[-1, 1]$ using a linear transformation. Consider, for example, the segment $[a, b]$ in such a coordinate system in which the complex coordinate is defined as $z = x_2 + ix_1$. Then the transformation leading the original segment to the segment $[-1, 1]$ with the complex coordinate $z' = x'_2 + ix'_1$ has the form

$$z = \frac{a+b}{2} + \frac{|a+b|}{2} z' e^{i\alpha} \tag{71}$$

where α is the angle of the segment with the axis x_2.

We carry out an approximation on each segment using Lagrange polynomials

$$P_k(\tau') = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{\tau' - \tau'_i}{\tau'_k - \tau'_i} = \sum_{s=0}^{n-1} c_{ks} \tau'^s, \quad k = 1, ..., n \tag{72}$$

then the function defined at the points of the segment under consideration can be represented as

$$f(\tau') = \sum_{k=1}^{n} f_k \sum_{s=0}^{n-1} c_{ks} \tau'^s, \quad k = 1, ..., n \tag{73}$$

where c_{ks} are known constants. To solve the problem of a circular hole in a layered medium, we use approximation by second-order polynomials ($n - 1 = 2$). In this case, one of the nodes will be placed in the center of the element, and the other two at a distance of $1/3$ from its ends. This approach allows one to obtain a contour partition close to uniform (Fig. 13).

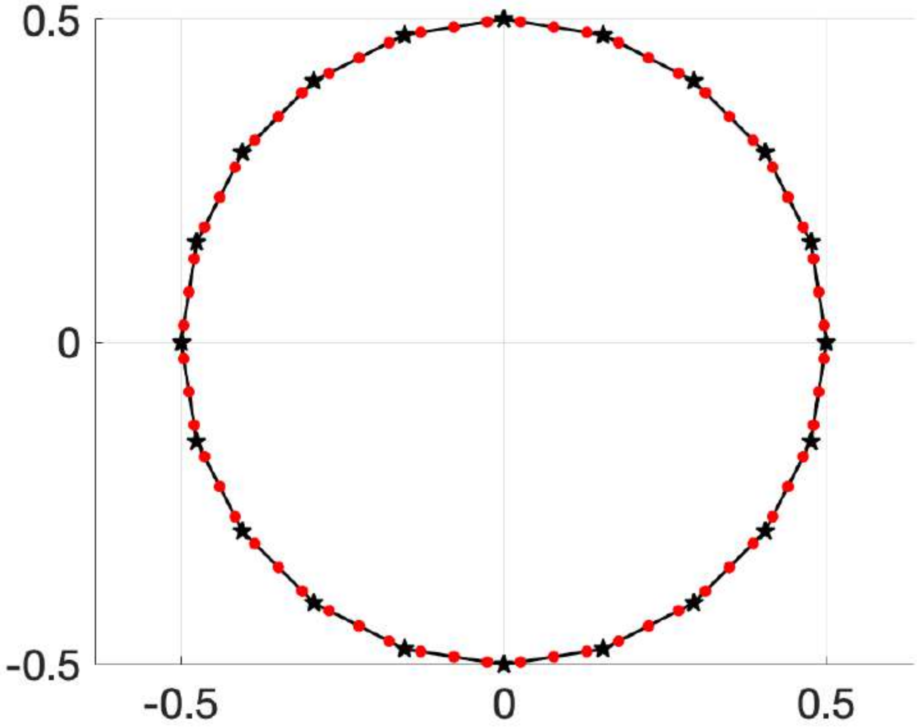

Figure 13: Splitting a circular hole into segments. The star (textbf $star$) denotes the boundaries of the segments, the dots indicate the position of the nodes.

With this formulation, the initial integral can be calculated on basis functions using recurrence formulas. Moreover, using (73) allows us to reduce the calculation of integrals of regular functions to the calculation of three simple integrals

$$\int_{-1}^{1} \tau^0 = 2, \quad \int_{-1}^{1} \tau^1 = 0, \quad \int_{-1}^{1} \tau^2 = 2/3 \tag{74}$$

Next we solve an algebraic system of equations, the order of which is equal to the number of nodes on the boundary of L_s. At the last step, we calculate the desired potential values in the region D^*.

Consider two binded half-planes. We denote the values corresponding to the lower (upper) half-plane by the lower index l (u). Let a circular hole of radius R_c and stream q_n^0 at the boundary L_s, for which the relation $\int_{L_s} q_n^0 ds = -1$, be located in the lower half-plane at a distance d_s from the boundary (Fig.14).

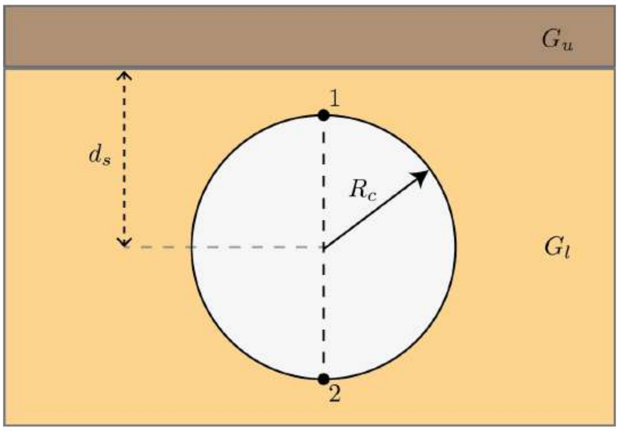

Figure 14: Circular hole in the lower half-plane.

We introduce 2 points belonging to the boundary of the cavity, where the point 1 is the closest point to the boundary with the upper half-plane, and the point 2 is the point of the cavity farthest from the boundary with the upper half-plane. We denote the potential values at the points 1 and 2 as u_1 and u_2 respectively. We introduce the quantity u_r defined by the relation

$$u_r = u_1/u_2 \tag{75}$$

Let $G_u/G_l >> 1$. In this case, the potential at an arbitrary point in the lower half-plane can be found [42] by the formula

$$U(\alpha, \beta) = \frac{-1}{G_l \pi \,\mathrm{sh}(\alpha_0)} \left[\frac{\alpha}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} \frac{\exp(\text{-j}\alpha_0)}{\mathrm{ch}(\text{j}\alpha_0)} \mathrm{sh}(\text{j}\alpha) \cos(\text{j}\beta) \right] \tag{76}$$

Here $\mathrm{ch}(\alpha_0) = d_s/R_c$, α, β are bipolar coordinates, related to Cartesian coordinates as follows:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{d_s \,\mathrm{sh}(\alpha)}{\mathrm{ch}(\alpha) - \cos(\beta_2)} \\ x_2 &= \frac{d_s \sin(\beta_2)}{\mathrm{ch}(\alpha) - \cos(\beta_2)} \end{aligned} \tag{77}$$

where $\beta_2 = \pi - \beta$. Using the relation (76) one can evaluate the accuracy of the solution obtained using the boundary element method. We use the following parameters for calculations: half-length of each layer $A = 10d_s$, number of nodes on the hole contour $N_s = 60$, number of nodes on the boundary between the layers $N = 128$, hole radius $R_c \in [0.01, 0.8]d_s$.

The data presented in the Fig. 15 allow us to estimate the boundaries of the influence that the ratio G_u/G_l has on the ratio of the maximum and minimum values of the potential of a circular hole. Comparison with the results obtained using the formula (76) allows us to conclude that, for given parameters, the relative calculation error does not exceed 4%. Since when assessing the accuracy of finding the Green's function, it was shown that the least calculation accuracy is obtained when the source is in a half-plane with a strongly conducting boundary, an error below 4% is guaranteed for all the cases presented below.

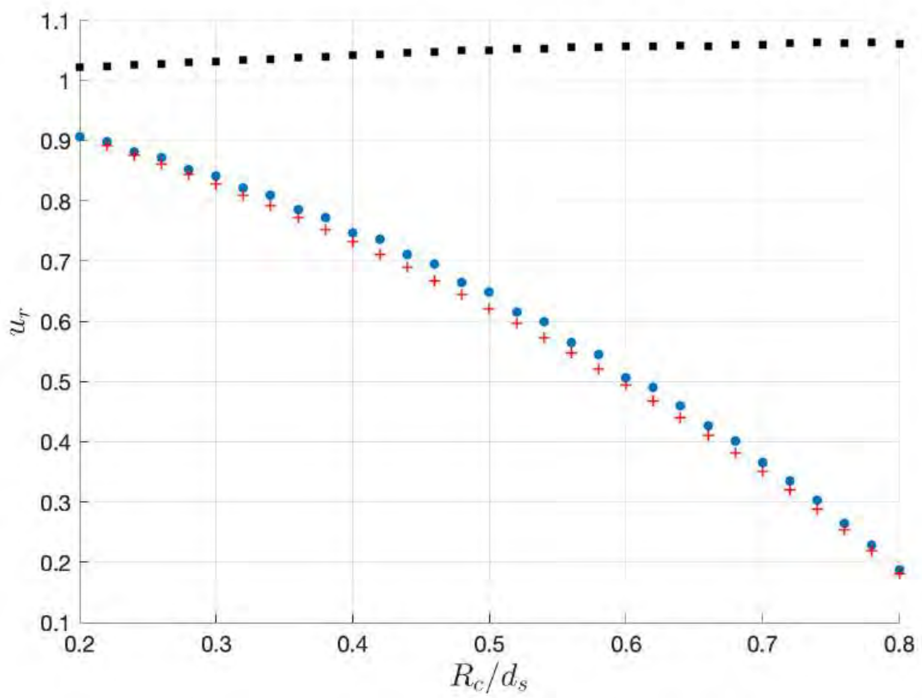

Figure 15: The $u_r(R_c/d_s)$ dependency obtained using the boundary element method ($G_u >> G_l$ (blue dots) and $G_u << G_l$ (red crosses)), and using the formula (76) (black squares).

In the case of a strongly conducting boundary $G_u >> G_l$, the ratio R_c/d_s has a stronger effect on the result than in the case of an impermeable boundary $G_u << G_l$. In the case of a homogeneous medium $G_u/G_l = 1$, we obviously get $u_r = 1$. From the presented results it is seen that u_r in the case of an infinitely conducting boundary for a hole whose center is at a distance $d_s = 1.25R_c$ from the boundary differs by 5.5 from the values for a homogeneous medium. As the boundary of the hole approaches the boundary between the half-planes, this difference will increase even more.

Now consider how the relation G_u/G_l affects the dependence $u_r(R_c/d_s)$. From the results presented in the Fig. 16 it can be seen that the results obtained for the cases $G_u/G_l = 10$ and $G_u >> G_l$ for the point $R_c/d_s = 0.8$ differ by more than 3 times whereas for the cases $G_u/G_l = 0.1$ and $G_u << G_l$ at the same point the values are almost identical.

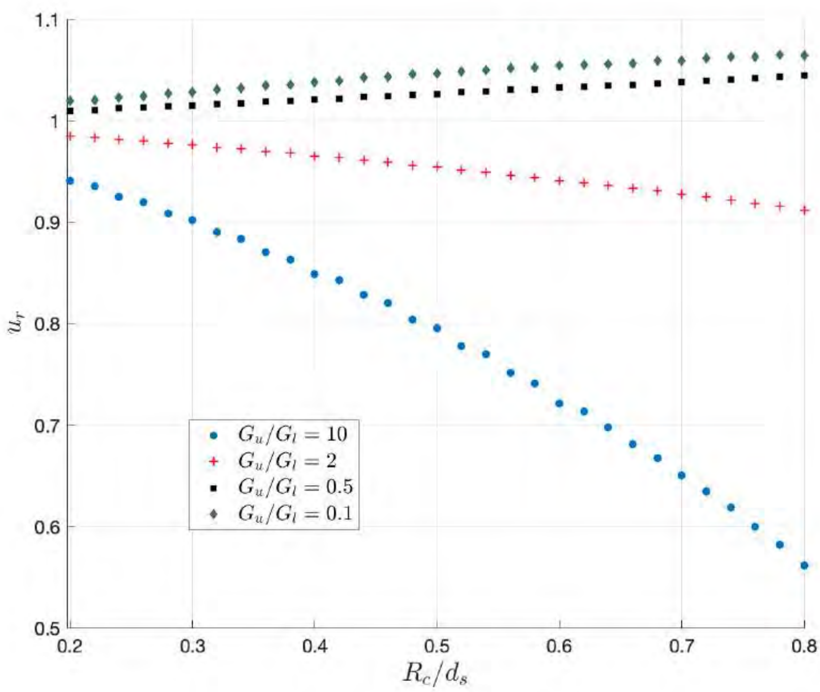

Figure 16: Dependence $u_r(R_c/d_s)$, for $G_u/G_l = 10$ (blue dots), $G_u/G_l = 2$ (red crosses), $G_u/G_l = 0.5$ (black squares), $G_u/G_l = 0.1$ (green diamonds).

Let us now consider an example of calculation for a circular hole of radius $R_c = 0.2d_s$, which is located in an infinite layered medium consisting of 7 layers. The thicknesses and conductivities of the layers are indicated in the Fig. 17. The color indicates the value of the potential in the area under consideration.

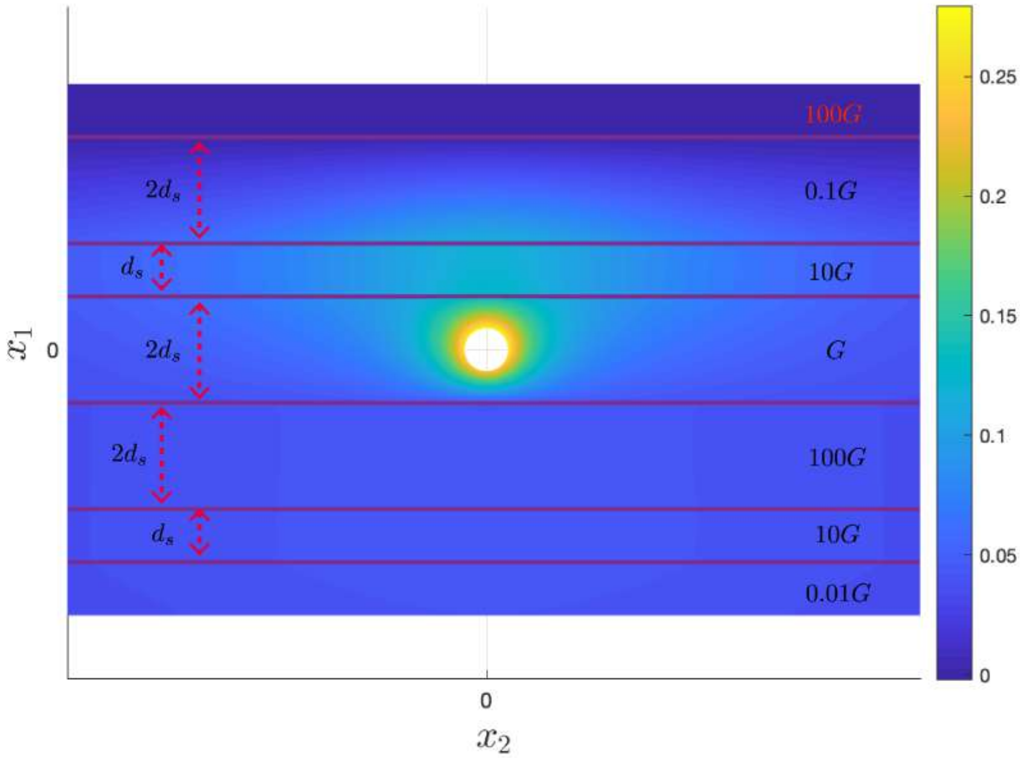

Figure 17: A circular hole in a layered medium consisting of 7 layers.

The presented results demonstrate the effect of layering on the potential of a circular hole entirely located in one layer. In the general case, a layered structure can contain arbitrarily many inhomogeneities, which can be both within a single layer and within several layers, that is, cross the boundaries between the layers. Such situations require special investigation, although in some special cases the emerging effects are neglected. One of the practically important cases is a vertical crack under the influence of internal pressure, orthogonal to the boundaries of the layers.

2.7 Construction of the Green's function for the three-dimensional Lame operator

Consider a three-dimensional layered structure. The equilibrium equation in each layer has the form:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{78}$$

where σ_{ij} are components of stress tensor, which is defined by the equation

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{ij} \right) \tag{79}$$

where ν is Poisson coefficient. Components of strain tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ are defined by

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{80}$$

The force operator for the three-dimensional Lame equation is determined by the relation

$$(\mathbf{T_n u})_i = 2\mu \left[\frac{\nu}{1 - 2\nu} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \mathbf{n_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{n_j} \right] \tag{81}$$

We apply the two-dimensional Fourier transform (24) in the directions x_2 and x_3 to the equation (78). We imagine the traction and displacements as the sum of the symmetric and antisymmetric parts [47]. Thus,

$$\begin{gathered} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{s}} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{a}} \\ \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}} + \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} \end{gathered} \tag{82}$$

where

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{s}}(x_1) &= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{11}(x_1) + \tilde{\sigma}_{11}(-x_1) \\ \tilde{\sigma}_{12}(x_1) - \tilde{\sigma}_{12}(-x_1) \\ \tilde{\sigma}_{13}(x_1) - \tilde{\sigma}_{13}(-x_1) \end{pmatrix} \\
\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{a}}(x_1) &= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{11}(x_1) - \tilde{\sigma}_{11}(-x_1) \\ \tilde{\sigma}_{12}(x_1) + \tilde{\sigma}_{12}(-x_1) \\ \tilde{\sigma}_{13}(x_1) + \tilde{\sigma}_{13}(-x_1) \end{pmatrix} \\
\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}(x_1) &= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{u}_1(x_1) - \tilde{u}_1(-x_1) \\ \tilde{u}_2(x_1) + \tilde{u}_2(-x_1) \\ \tilde{u}_3(x_1) + \tilde{u}_3(-x_1) \end{pmatrix} \\
\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}(x_1) &= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{u}_1(x_1) + \tilde{u}_1(-x_1) \\ \tilde{u}_2(x_1) - \tilde{u}_2(-x_1) \\ \tilde{u}_3(x_1) - \tilde{u}_3(-x_1) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{83}
$$

Expressions for the symmetric and antisymmetric parts are presented in [66]. For the traction vector, we have

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{s}} &= \mathbf{D}_{\mathbf{s}}\mathbf{A}_{\mathbf{s}} \\
\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{a}} &= \mathbf{D}_{\mathbf{a}}\mathbf{A}_{\mathbf{a}}
\end{aligned} \tag{84}
$$

where $\mathbf{A}_{\mathbf{s}}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{a}}$ are vectors of constants for the considered layer, and the matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{s}}$ и $\mathbf{D}_{\mathbf{a}}$ are defined by

$$
\mathbf{D}_{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}z_1 - z_1\,\mathrm{sh}z_1 & is_2x_1\,\mathrm{sh}z_1 & is_3x_1\,\mathrm{sh}z_1 \\ -is_2x_1\,\mathrm{ch}z_1 & -\mathrm{sh}z_1 - (s_2^2/s)x_1\,\mathrm{ch}z_1 & -(s_2s_3/s)x_1\,\mathrm{ch}z_1 \\ -is_3x_1\,\mathrm{ch}z_1 & -(s_2s_3/s)x_1\,\mathrm{ch}z_1 & -\mathrm{sh}z_1 - (s_3^2/s)x_1\,\mathrm{ch}z_1 \end{bmatrix} \tag{85}
$$

$$
\mathbf{D}_{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} shz_1 - z_1\,\mathrm{ch}z_1 & -is_2x_1\,\mathrm{ch}z_1 & -is_3x_1\,\mathrm{ch}z_1 \\ -is_2x_1\,\mathrm{sh}z_1 & \mathrm{ch}z_1 + (s_2^2/s)x_1\,\mathrm{ch}z_1 & (s_2s_3/s)x_1\,\mathrm{ch}z_1 \\ -is_3x_1\,\mathrm{sh}z_1 & (s_2s_3/s)x_1\,\mathrm{sh}z_1 & \mathrm{ch}z_1 + (s_3^2/s)x_1\,\mathrm{sh}z_1 \end{bmatrix} \tag{86}
$$

where $s = \sqrt{s_2^2 + s_3^2}$, $z_1 = sx_1$.

Note that constants $\mathbf{A}_{\mathbf{s}}$ and $\mathbf{A}_{\mathbf{a}}$ are determined for each layer and depend on the boundary conditions.

Similarly to the equation (84), we can write the relations for the symmetric and antisymmetric parts of the displacement vector

$$\begin{aligned}\mathbf{\tilde{u}_s} &= \tfrac{1+\nu}{Es}\mathbf{Q_s}\mathbf{A_s}\\ \mathbf{\tilde{u}_a} &= \tfrac{1+\nu}{Es}\mathbf{Q_a}\mathbf{A_a}\end{aligned} \tag{87}$$

where

$$\mathbf{Q_s} = \begin{bmatrix} 2(1-\nu)\,\mathrm{shz_1} - z_1\,\mathrm{chz_1} & -i(1-2\nu)(s_2/s)\,\mathrm{shz_1} - is_2x_1\,\mathrm{chz_1} & -i(1-2\nu)(s_3/s)\,\mathrm{shz_1} - is_3x_1\,\mathrm{chz_1} \\ -i(1-2\nu)(s_2/s)\,\mathrm{chz_1} - is_2x_1\,\mathrm{shz_1} & 2\nu(s_2^2/s^2)\,\mathrm{chz_1} - (s_2/s)s_2x_1\,\mathrm{shz_1} - 2\,\mathrm{chz_1} & 2\nu(s_2s_3/s^2)\,\mathrm{chz_1} - (s_2/s)s_3x_1\,\mathrm{shz_1} \\ -i(1-2\nu)(s_3/s)\,\mathrm{chz_1} - is_3x_1\,\mathrm{shz_1} & 2\nu(s_2s_3/s^2)\,\mathrm{chz_1} - (s_3/s)s_2x_1\,\mathrm{shz_1} & 2\nu(s_2s_3/s^2)\,\mathrm{chz_1} - (s_3/s)s_3x_1\,\mathrm{shz_1} \end{bmatrix} \tag{88}$$

$$\mathbf{Q_a} = \begin{bmatrix} 2(1-\nu)\,\mathrm{chz_1} - z_1\,\mathrm{shz_1} & i(1-2\nu)(s_2/s)\,\mathrm{chz_1} - is_2x_1\,\mathrm{shz_1} & -i(1-2\nu)(s_3/s)\,\mathrm{chz_1} - is_3x_1\,\mathrm{chz_1} \\ -i(1-2\nu)(s_2/s)\,\mathrm{shz_1} - is_2x_1\,\mathrm{chz_1} & -2\nu(s_2^2/s^2)\,\mathrm{shz_1} - (s_2^2/s)x_1\,\mathrm{chz_1} + 2\,\mathrm{shz_1} & 2\nu(s_2s_3/s^2)\,\mathrm{shz_1} - (s_2/s)s_3x_1\,\mathrm{chz_1} \\ -i(1-2\nu)(s_3/s)\,\mathrm{shz_1} - is_3x_1\,\mathrm{chz_1} & -2\nu(s_2s_3/s^2)\,\mathrm{shz_1} - (s_3/s)s_2x_1\,\mathrm{chz_1} & -2\nu(s_2s_3/s^2)\,\mathrm{shz_1} - (s_3^2/s)x_1\,\mathrm{chz_1} + 2\,\mathrm{shz_1} \end{bmatrix} \tag{89}$$

We introduce the matrices $\mathbf{R_s}$ and $\mathbf{R_a}$

$$\begin{aligned}\mathbf{R_s} &= \mathbf{Q_s}(\mathbf{D_s})^{-1}\\ \mathbf{R_a} &= \mathbf{Q_a}(\mathbf{D_a})^{-1}\end{aligned} \tag{90}$$

and use the relations

$$\begin{aligned}&\mathbf{R_{tt}} = (R_s + R_a)/2; \quad \mathbf{R_{tb}} = -(R_s - R_a)^*/2\\ &\mathbf{R_{bt}} = (R_s - R_a)^{**}/2; \quad \mathbf{R_{bb}} = -(R_s + R_a)^{**}/2\end{aligned} \tag{91}$$

where symbol $(*)$ means that the first column of the corresponding matrix must be multiplied by (-1), symbol $(**)$ means that the first row of the matrix must be multiplied by (-1), and symbol $(***)$ denotes multiplication by -1 of the first row and the first column of the matrix.

Finally, matrices $\mathbf{R_{tt}}, \mathbf{R_{tb}}, \mathbf{R_{bt}}, \mathbf{R_{bb}}$ for the three-dimensional Lame operator, which link displacements and tractions in the equation (25) for the k-th layer have the form

$$\begin{aligned}
\mathbf{R^k_{tt}} &= \tfrac{1+\nu^k}{E^k s}\begin{pmatrix} tt_{11} & tt_{12} & tt_{13} \\ -tt_{12} & tt_{22} & tt_{23} \\ -tt_{13} & tt_{23} & tt_{33} \end{pmatrix} \\
\mathbf{R^k_{tb}} &= \tfrac{1+\nu^k}{E^k s}\begin{pmatrix} tb_{11} & tb_{12} & tb_{13} \\ tb_{12} & tb_{22} & tb_{23} \\ tb_{13} & tb_{23} & tb_{33} \end{pmatrix} \\
\mathbf{R^k_{bb}} &= -(\mathbf{R^k_{tt}})^{***} \\
\\
\mathbf{R^k_{bt}} &= -(\mathbf{R^k_{tb}})^{***}
\end{aligned} \tag{92}$$

where $z = sh^k$, $\triangle = \operatorname{th}^2 z - z^2/\operatorname{ch}^4 z_1$, $tt_{11} = (\operatorname{th} z + \operatorname{th}^3 z + z/\operatorname{ch}^4 z_1)(1-\nu^k)/\triangle$,

$tt_{12} = is_2(1 - 2(\nu^k \operatorname{th}^2 z - z^2/\operatorname{ch}^4 z_1)/\triangle)/s$,

$tt_{13} = is_3(1 - 2(\nu^k \operatorname{th}^2 z - z^2/\operatorname{ch}^4 z_1)/\triangle)/s$,

$k_1 = [(\nu^k \operatorname{th}^2 z - z^2/\operatorname{ch}^4 z_1)(1 + \operatorname{th}^2 z) + (1-\nu^k)z \ \operatorname{th} z \ ch^4 z]/(\triangle s^2 \operatorname{th} z)$,

$tt_{22} = (1 + \operatorname{th}^2 z)/\operatorname{th} z - s_2^2 k_1$,

$tt_{23} = -s_2 s_3 k_1$, $tt_{33} = (1 + \operatorname{th}^2 z)/\operatorname{th} z - s_3^2 k_1$,

$tb_{11} = -[\operatorname{th} z/\operatorname{ch}^2 z + z(1+\operatorname{th}^2 z)/\operatorname{ch}^2 z](1 - nu^k)/\triangle$,

$tb_{12} = is_2(1-\nu^k)(2h^k/\triangle)(\operatorname{th} z/\operatorname{ch}^2 z)$,

$tb_{13} = is_3(1-\nu^k)(2h^k/\triangle)(\operatorname{th} z/\operatorname{ch}^2 z)$,

$k_2 = [\nu^k \operatorname{th}^2 z - z^2/\operatorname{ch}^2 z + (1-\nu^k)z \ \operatorname{th} z(1 + \operatorname{th}^2 z)]/(\triangle s^2)$,

$tb_{22} = (-1 + s_2^2 k_2)/(\operatorname{th} z \ \operatorname{ch}^2 z)$,

$tb_{23} = s_2 s_3 k_2/(\operatorname{th} z \ \operatorname{ch}^2 z)$, $tb_{33} = (-1 + s_3^2 k_2)/(\operatorname{th} z \ \operatorname{ch}^2 z)$.

The algorithm for finding the Green's function for layered structures allows us to calculate the values of forces at the boundaries between the layers. We find formulas for calculating all components of the stress tensor at any point in the considered layer k. As noted earlier, it is convenient to divide the solution into a symmetric and antisymmetric component. Then, for a three-dimensional medium, the following relations are true:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{s}}(\mathbf{h_k}) &= 1/2(\mathbf{\tilde{q}^k} + \mathbf{T}\mathbf{\tilde{q}^{k-1}}) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{a}}(\mathbf{h_k}) &= 1/2(\mathbf{\tilde{q}^k} - \mathbf{T}\mathbf{\tilde{q}^{k-1}})\end{aligned} \tag{93}$$

where matrix $\mathbf{T}$ is defined by

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{94}$$

We use relations (84) and (93) and find values of the constants $\mathbf{A_s}$ and $\mathbf{A_a}$ in the considered layer. We get:

$$\begin{aligned}\mathbf{A_s} &= [\mathbf{D_s}(\mathbf{h_k})]^{-1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{s}}(\mathbf{h_k}) \\ \mathbf{A_a} &= [\mathbf{D_a}(\mathbf{h_k})]^{-1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{a}}(\mathbf{h_k})\end{aligned} \tag{95}$$

Knowing the values of $\mathbf{A_s}$ and $\mathbf{A_a}$ one can obtain the values $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{s}}(\mathbf{x_1})$ and $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x_1})$ in every point of x_1, belonging to the considered layer by the formula (84). Note that the formulas for calculating the remaining components of the stress tensor can be obtained similarly to the formulas (84). Indeed, consider the vector

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{in}} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{22}} \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}} \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{23}} \end{pmatrix} \tag{96}$$

and present it as the sum of the symmetric $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{in,s}}$ and antisymmetric $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{in,a}}$ parts. Note that the remaining components of the stress tensor can also be found. Similarly to (84) we can write

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{in,s}} &= 1/\operatorname{ch}(\mathrm{x_1 h_k})\,\mathbf{M_s}(\mathbf{x_1})[\mathbf{D_s}(\mathbf{h_k})]^{-1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{s}}(\mathbf{h_k}) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{in,a}} &= 1/\operatorname{ch}(\mathrm{x_1 h_k})\,\mathbf{M_a}(\mathbf{x_1})[\mathbf{D_a}(\mathbf{h_k})]^{-1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{a}}(\mathbf{h_k})\end{aligned} \tag{97}$$

where matrices $\mathbf{M_s}$ и $\mathbf{M_a}$ have the form

$$\mathbf{M_s} = \begin{bmatrix} s_2^2/s^2 + 2\nu s_3^2/s^2 + z s_2^2/s^2 \;\text{thz} & is_2/s(2[\nu s_2^2/s^2 - 1 - \nu] - s_2^2/s^2 z \;\text{thz}) & -is_3/s[2\nu s_3^2/s^2 + s_2^2/s^2 z \;\text{thz}] \\ s_3^2/s^2 + 2\nu s_2^2/s^2 + z s_3^2/s^2 \;\text{thz} & -is_2/s[2\nu s_2^2/s^2 + s_3^2/s^2 z \;\text{thz}] & is_3/s(2[\nu s_3^2/s^2 - 1 - \nu] - s_3^2/s^2 z \;\text{thz}) \\ s_2 s_3/s^2[(1-2\nu) + z \; thz] & -is_3/s([1 - 2\nu s_2^2/s^2] + s_2^2/s^2 z \;\text{thz}) & -is_2/s([1 - 2\nu s_3^2/s^2] + s_3^2/s^2 z \;\text{thz}) \end{bmatrix} \tag{98}$$

$$\mathbf{M_a} = \begin{bmatrix} [s_2^2/s^2 + 2\nu s_3^2/s^2]\,\text{thz} + z s_2^2/s^2 & is_2/s(2[\nu s_2^2/s^2 - 1 - \nu]\,\text{thz} - s_2^2/s^2 z) & -is_3/s[2\nu s_3^2/s^2\,\text{thz} + s_2^2/s^2 z] \\ [s_3^2/s^2 + 2\nu s_2^2/s^2]\,\text{thz} + z s_3^2/s^2 & -is_2/s[2\nu s_2^2/s^2\,\text{thz} + s_3^2/s^2 z] & is_3/s(2[\nu s_3^2/s^2 - 1 - \nu]\,\text{thz} - s_3^2/s^2 z \\ s_2 s_3/s^2[(1-2\nu)\,\text{thz} + z] & -is_3/s([1 - 2\nu s_2^2/s^2]\,\text{thz} + s_2^2/s^2 z) & -is_2/s([1 - 2\nu s_3^2/s^2]\,\text{thz} + s_3^2/s^2 z) \end{bmatrix} \tag{99}$$

Thus, for the three-dimensional equation of elasticity formulae are presented. They allow one to calculate all the components of the stress tensor at any point of the layered structure. Using these formulae, all kernels of boundary integral equations can be calculated. Thus, the presented approach allows us to solve problems for arbitrary inhomogeneities. As in the case of the two-dimensional Laplace equation, the numerical implementation of the method described above uses the fast Fourier transform. The accuracy of finding the Green's function is determined by considering Problem 1 from the previously proposed approach to assessing accuracy.

2.8 A radial crack under the uniform pressure in a three-dimensional layered structure

Let us consider a radial vertical crack in a plane perpendicular to the boundaries of the layers of the considered structure. Let this plane be perpendicular to the axis x_3. Such a fracture is considered in a planar three-dimensional model of a hydraulic fracture and has the most important applied value. Note that a crack can appear in several layers simultaneously, crossing the boundaries of the layers. It is necessary to find the opening w of such a crack under the action of pressure p, orthogonal to the surface of the crack.

For such a crack, the boundary integral equation [50] can be written as

$$p(x_1, x_2) = \int_{L_s} C(x_1, x_2, y_1, y_2) w(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \tag{100}$$

where $C(x_1, x_2, y_1, y_2)$ is the core calculated by the Green's function for the layered structure, $w(y_1, y_2)$ is the crack opening. In fact, $C(x_1, x_2, y_1, y_2)$ represents the horizontal stresses σ_{33} at the point (x_1, x_2), induced by a point source of unit intensity acting at the point (y_1, y_2) in the direction of x_3. Note that since a crack is considered in order to find a solution, according to the theory of boundary integral equations it is necessary to know the singular and hypersingular kernel.

We give the necessary formulas for calculating the function $C(x_1, x_2, y_1, y_2)$. The fundamental solution of the three-dimensional Lame equation has the form

$$U_{ik}^{L} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu)\frac{\delta_{ik}}{R} + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{R^3} \right] \tag{101}$$

where $R = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$. The singular and hypersingular solution for an infinite homogeneous isotropic medium are determined by the relations (8). According to the presented algorithm for finding the Green's function of a layered structure, it is necessary to find the tractions corresponding to a point source. In the considered case, the required tractions constitute the first column of the matrix of the hypersingular solution. Then the components of the force vector in the direction normal to the surface of the layers have the following form:

$$q_1 = -\frac{\mu}{4\pi(1-\nu)R^3} \left(2(1-\nu) - 3(1-2\nu)\frac{x_3^2}{R^2} - \frac{15x_1^2 x_2^2}{R^4} \right) \tag{102}$$

$$q_2 = -\frac{\mu}{4\pi(1-\nu)R^5} \left(3 - \frac{15x_2^2}{R^2} \right) x_1 x_2 \tag{103}$$

$$q_3 = -\frac{\mu}{4\pi(1-\nu)R^5}\left(3(1-2\nu) - \frac{15x_2^2}{R^2}\right)x_1x_3 \tag{104}$$

The desired kernel can be found using the algorithm described above.

Consider a radial crack of radius R_f under uniform pressure p in a three-dimensional layered medium consisting of two linked half-spaces (penny shaped crack). Let the crack be in the lower half-space, with the center of the crack removed from the interface at the distance $1.2R_f$ (Fig. 18).

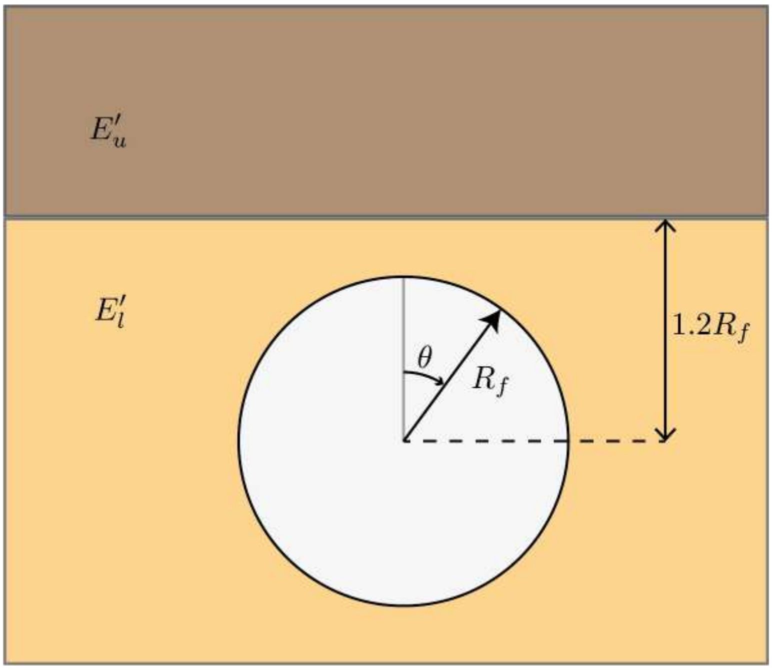

Figure 18: Crack in the lower half-space.

We denote the values corresponding to the upper and lower half-spaces by the subscript u and l, respectively. Put $\nu_u = \nu_l = 0.3$. We introduce into consideration a plain-strain Young's modulus, which is determined by the relation

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \tag{105}$$

and value

$$\Gamma = \frac{E'_u}{E'_l} \tag{106}$$

We seek the stress intensity factor (SIF) K_I along the perimeter of the penny shaped crack by the action of uniform pressure. This case was first considered in [41]. The authors of [69] conducted a similar experiment and noted that their results coincide with the results of [43] accurate to a constant.

To obtain the SIF numerically [34] we use the relation

$$K_I = \lim_{r_d \to 0} \frac{w(r_d)}{\sqrt{r_d}} \tag{107}$$

where r_d is a distance from the considered point to the contour of the crack. The results of calculating the SIF are presented (Fig. 19) in comparison with the results of [41] and [69]. As a basis a result from [69] was taken.

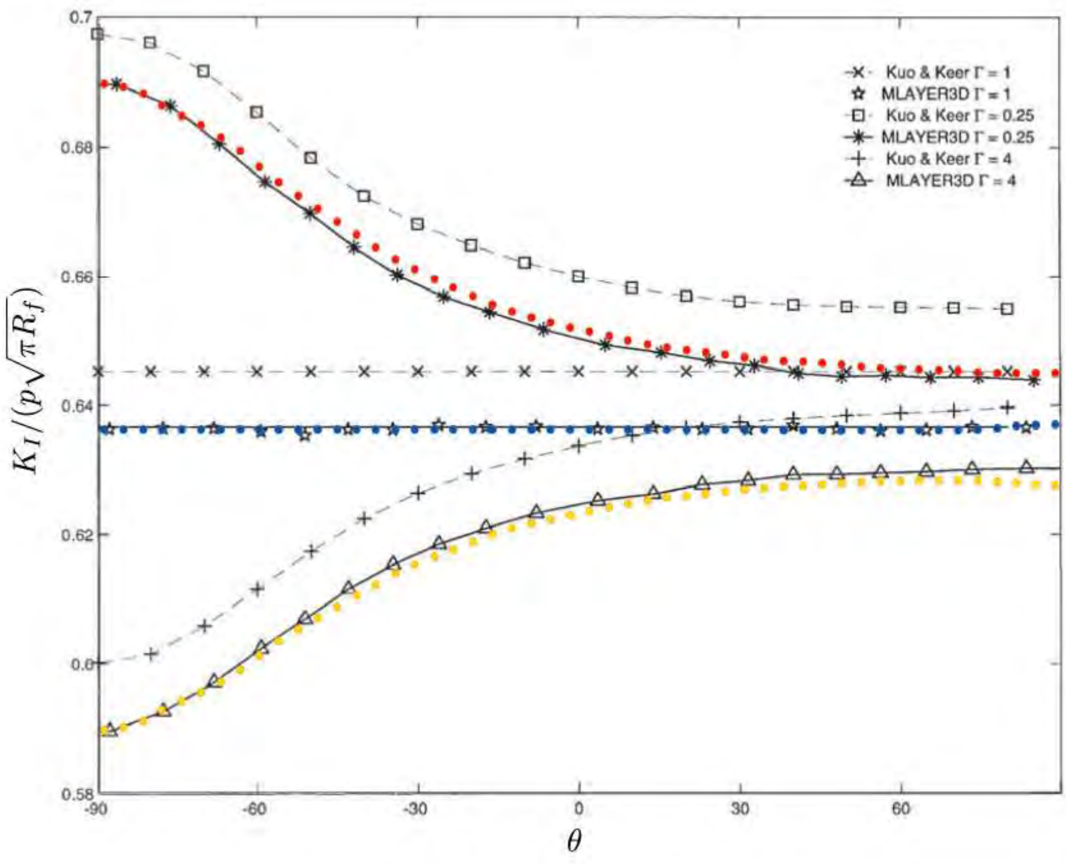

Figure 19: Dependence of the dimensionless SIF along the perimeter of a penny shaped crack on the angle *theta*. The results of [69] are marked as MLAYER3D, the results of [41] as Kuo & Keer. Results of this work: red dots (*Gamma* = 0.25), blue dots (*Gamma* = 1), yellow dots (*Gamma* = 4).

From the Fig. 19 it can be seen that the results obtained using the approach presented above coincide with the results of [69] with high accuracy, but differ from the results presented in [41]. The quantitative discrepancy with the results of [41] is due to a typo, as mentioned in [69]. At the same time, we note that the results coincide qualitatively.

Note that the calculation of the SIF is very sensitive to the accuracy of the calculation operation. In this work, the crack was modelled in the form of a set of square elements of the same size, in each of which the same pressure p was set. The number of such elements along the radius of the crack in the considered case $N_f = 20$ (Fig. 20).

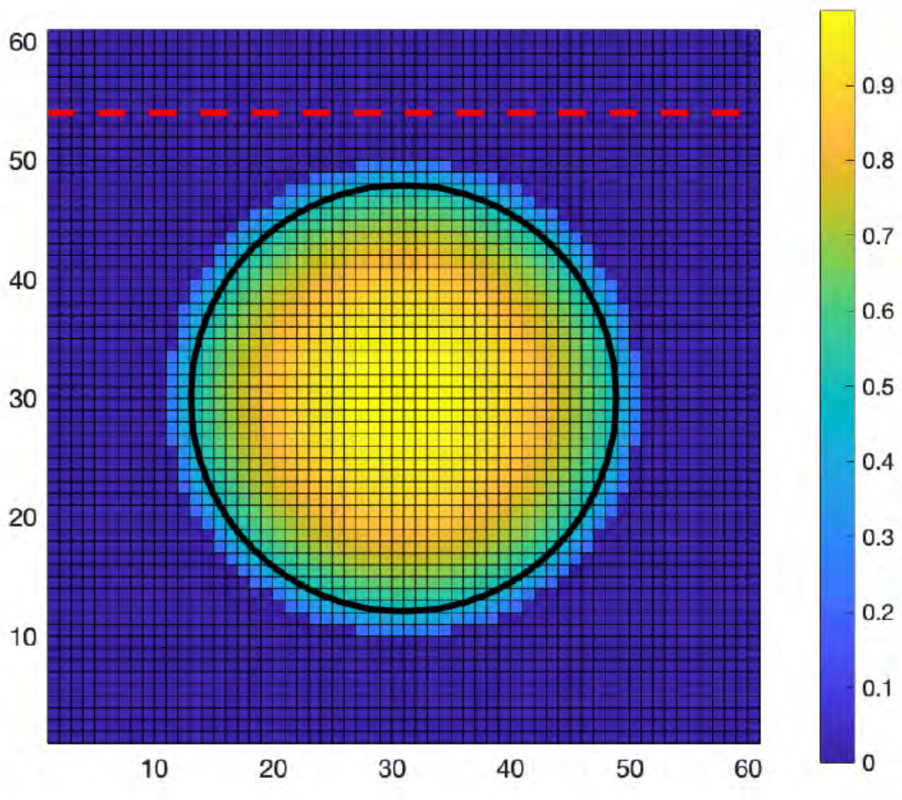

Figure 20: Discretization of a crack. Color indicates dimensionless crack opening. The black line is located around the perimeter at a distance of r_d from the crack contour. The red dotted line is located at the boundary of half-spaces.

Note that the results presented in [69] were obtained for a finer mesh. High accuracy of the results in this work with a coarser grid is achieved by calculating the core $C(x_1, x_2, y_1, y_2)$ with high accuracy, which in turn is possible due to the choice of calculation parameters according to the previously presented approach.

Let us now consider the case when a crack crosses the interface between two media. We take two half-spaces such that $\Gamma = E_u/E_l = 4$. Let the center of the crack belong to the boundary between half-spaces. The solution to this problem is presented in [41] and [69]. As a basis a result from [69] was taken. A comparison of the results is shown in the Fig. 21.

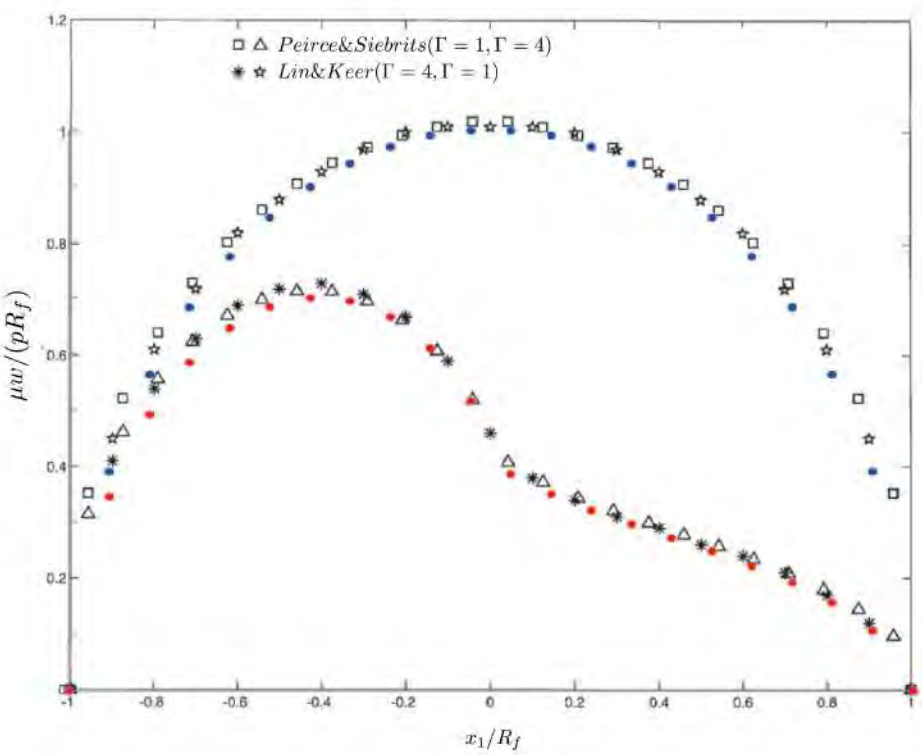

Figure 21: The dimensionless opening of a penny shaped crack crossing the boundary between two half-spaces. The results of this work: red dots ($\Gamma = 4$), blue dots ($\Gamma = 1$).

From the Fig. 21 it can be seen that the results of all three works coincide with a high degree of accuracy. At the same time, it is important to note that in [41] the breaking of the crack into elements was framed in such a way that one of the elements fell on the boundary between the two layers, while in this work and in [69] the boundary between the layers coincides with borders of elements. Moreover, as can be seen from the presented results, the difference in the partition does not affect the accuracy in any way.

Note that the results presented in the Fig. 21 are obtained under the condition that the compressive stresses in the layers are the equal within every layer. However, in the general case it is not so. For example, when studying rock properties, it is assumed that the stress values in the layers depend on the elastic properties of the layers. Thus, layers with different values of E' should also have different compressive stresses. Despite this, the results obtained for different E' at the equal stresses are of interest for studying the nature of the heterogeneity effect of elastic moduli on crack opening.

Now we consider the case when a penny shaped crack is within the one layer between two half-spaces with the same elastic properties (Fig. 22). Let the thickness of such a layer be $2R_f$, which means that the contour of the crack touches the boundaries.

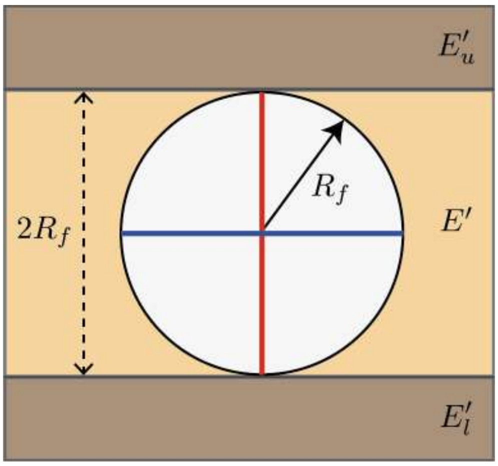

Figure 22: The crack between two half-spaces.

We calculate the crack opening in the central section parallel to the boundaries (blue segment in the Fig. 22) and in the central section perpendicular to the boundaries (red segment in the Fig. 22).

Let $E'_u = E'_l >> E'$. The results for this case are presented at the Fig. 23.

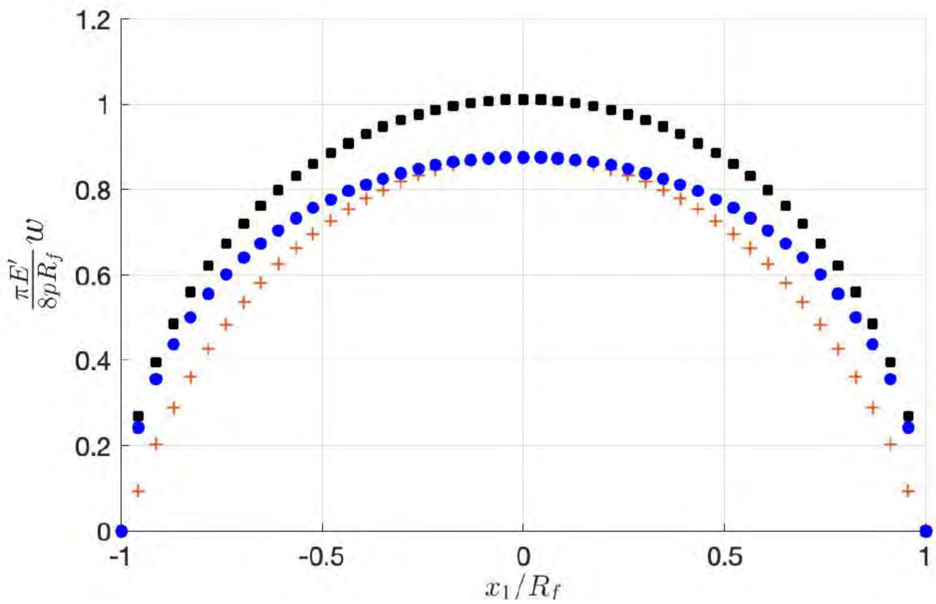

Figure 23: A crack between two half-spaces. The black squares indicate the crack opening at $E'_u = E'_l = E'$, the blue dots indicate the crack opening at the central section parallel to the layer boundaries at $E'_u = E'_l == 1e6E'$, the red crosses indicate the opening of the crack in the central section perpendicular to the boundaries of the layers at $E'_u = E'_l = 1e6E'$.

The maximum deviation from the solution for the homogeneous case is observed in the middle of the crack and is 15.5%. Note that in the vertical section the difference with the solution for a homogeneous medium is almost the same at all points, while in the horizontal section this difference decreases when approaching the crack boundary.

Let $E'_u = E'_l << E'$. The results for this case are presented at the Fig. 24.

The maximum deviation from the solution for the homogeneous case is observed near the boundaries. The deviation at the center point of the crack is 17.8%, which is close to the value obtained for the case $E'_u = E'_l >> E'$. Note that, as in the previous case, the difference between the opening in the vertical section and the opening in a homogeneous medium is almost the same at all points, while in the horizontal section this difference decreases when approaching the crack boundary.

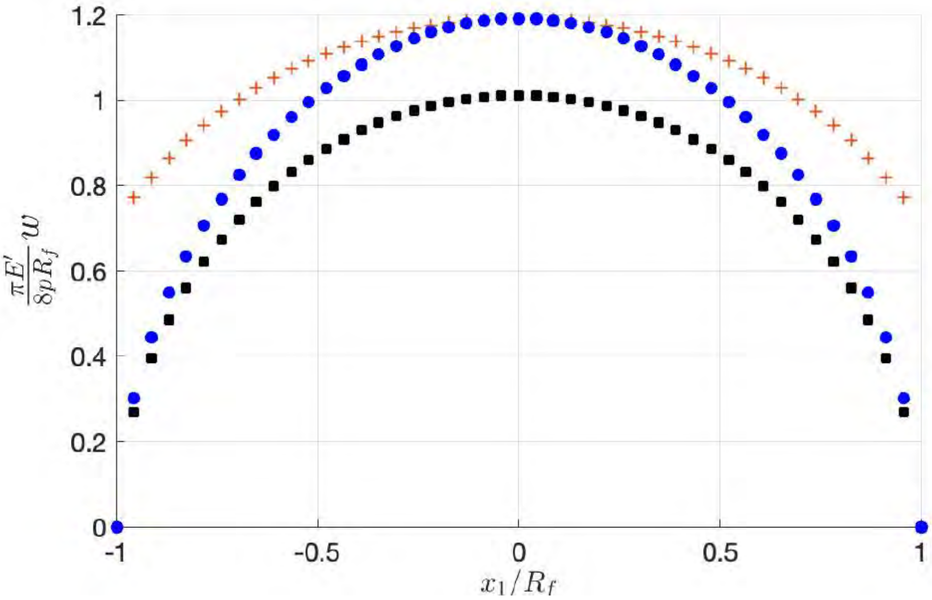

Figure 24: A crack between two half-spaces. The black squares indicate the crack opening at $E'_u = E'_l = E'$, the blue dots indicate the crack opening at the central section parallel to the layer boundaries at $E'_u = E'_l = 1e-6E'$, the red crosses indicate the opening of the crack in the central section perpendicular to the boundaries of the layers at $E'_u = E'_l = 1e-6E'$.

The considered cases make it possible to determine the influence boundaries of the relative difference in the elastic properties of the layers on the opening of a radial crack perpendicular to the boundaries of the layers. It is shown that the opening of a crack in a layered medium can differ for more than two times from the opening of the same crack in a homogeneous medium. Moreover, this estimate is also valid for a crack under the influence of uneven pressure.

2.9 Concluding remarks

The results obtained in this chapter can be generalized as follows.

- A method for constructing the Green's function for the two-dimensional Laplace equation is presented. A method for evaluating the accuracy of constructing the Green's function for a layered medium is presented. It is shown that an increase in the period of the $2A$ Fourier transform for a fixed number of sampling points N allows one to increase the accuracy without increasing the calculation time.

- For the two-dimensional Laplace equation, a generalization of the method of complex boundary integral equations to problems for layered structures with inhomogeneities is given. Using this method, the problem of a circular hole with a given flux at the boundary in a layered medium is solved. For a special case of a circular hole in a half-plane with a strongly conducting boundary, a comparison is made with the analytical solution and it is shown that the relative error does not exceed 4%. The dependence of the ratio of the maximum and minimum potential values on the hole contour on the relative conductivity of the half-planes and the distance from the center of the hole to the boundary is obtained. It is shown that a strongly conducting boundary has a greater effect on the hole potential than an impermeable boundary.

- A method for constructing the Green's function for the three-dimensional Lame equation is presented, which allows one to calculate all the kernels of boundary integral equations. The problem of a radial crack perpendicular to the boundaries of the layers under the influence of constant pressure is solved. In the case when such a crack is entirely located in one layer located between two half-spaces, the boundaries of the influence of the half-spaces elastic properties on the opening of the crack are determined. It is shown that the difference in the elastic moduli of the layers leads to a significant deviation of the stress intensity factor along the crack perimeter from the corresponding values for a homogeneous medium in cases where the crack does not cross the boundaries of the layers. Comparison with the results obtained using alternative approaches demonstrate high accuracy of calculations.

3 Modified pseudo-three-dimensional model of the fracture propagation in a layered medium

3.1 Pseudo-three-dimensional fracture model

The use of the model presented in the previous chapter for modeling fractures involves the use of the boundary element method. However, due to computational difficulties, three-dimensional fracturing modeling, although it has made some progress [72], still remains a very difficult task. This leads to the need to develop a simplified model. The trend towards the introduction of simple models in fast simulators is also caused by the uncertainty of the structure, properties and stresses of the rock.

The pseudo-three-dimensional model of a fracture is one of the most commonly used models in commercial simulations. The P3D model complements the original PKN model, which assumes the fracture height constant, with a rule to define the height growth. To the date, this has been made by introducing an apparent critical stress intensity factor (SIF) [19]. Consequently, efforts have been focused on looking for ways to properly assign an apparent critical SIF, called also the apparent toughness [19]. The simplest approach consists of setting the apparent toughness equal to the actual critical SIF of a rock. However, this choice disagrees with the fact that often a fracture propagates in the viscosity rather than toughness dominated regime [77]. The solution to this problem was presented only for the particular case of a symmetric layered structure with one layer located between half-spaces with the same positive stress contrast and the same elastic properties [19]. The authors obtained a semi-empirical equation that determines the apparent toughness and presented a method that provides height growth in accordance with the three-dimensional solution found using the ILSA [71] model. The question arises: how to consistently assign the height growth in an arbitrary case? A second question arises: under what conditions does any extension of the P3D model become inapplicable?

par This chapter is intended to provide answers to these questions. The goal is achieved by revising the P3D circuit and combining the P3D model with the KGD model, modified to take into account arbitrary voltage contrast [27]. A correspondence principle is proposed that establishes a correspondence between two models in terms of the physical quantities present in both models.

3.2 Problem formulation for a pseudo-three-dimensional fracture in a layered medium

The key assumptions of the P3D model (Рис. 25) are:

i the size (length) of a fracture in the direction of the major fracture propagation notably exceeds its size (height) in the orthogonal direction, so that plane-strain conditions are applicable in cross-sections parallel to the front;

ii a medium is homogeneous elastic and isotropic with the elasticity modulus E and the Poisson ratio ν;

iii the actual (physical) fluid pressure p, being various in various cross-sections parallel to the front, is uniform in a given cross section

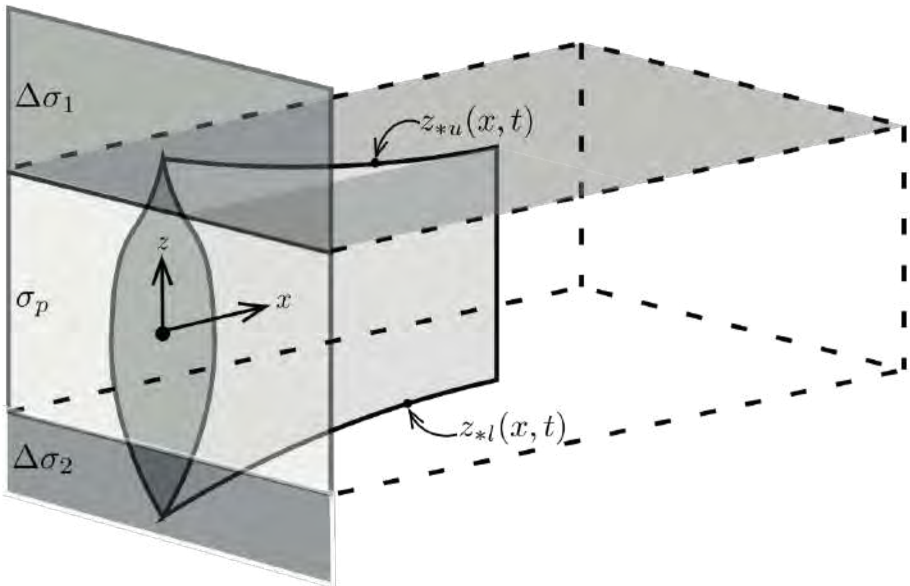

Figure 25: Scheme for the P3D model.

The origin O of the global Cartesian system xOz is placed in the middle of the productive layer, in which the fluid is injected into the reservoir. The x axis is located along the middle of the layer in the direction of major fracture propagation. For certainty, this direction is assumed horizontal. The axis z is directed perpendicular to the boundaries of the layers. We introduce the coordinates of the lower $z_{*l}(x,t)$ and the upper $z_{*u}(x,t)$ of the fracture tip depending on the time t and the position of the fracture point on the x axis. The stress σ closing the fracture usually changes in the direction of z and is assumed to be positive for compressive in-situ stresses. In the P3D model, stresses are specified as a step function with a constant value of σ^j in each of the layers:

$$\sigma(z) = \sigma^j, \text{где } z^{j-1} < z < z^j, j = 1, \ldots, n \tag{108}$$

where n is the total number of layers in which a fracture can grow; z^j is the coordinate of the upper boundary of the jth layer (z^{j-1} is the coordinate of the lower boundary). The first and last layer are half-spaces: $z^0 = -\infty$ and $z^n = \infty$. The number of the productive layer will be denoted by j_p.

The assumptions (i) and (ii) yield that for a cross section, its opening is expressed explicitly via the pressure and in-situ stresses by an equation of the elasticity theory. To write the latter in the simplest form for a cross-section x, it is convenient to use the local coordinate system $xO'z'$. It is obtained from the global system by such translation in the vertical direction that at each time instant t the origin O' is at the center $z_0(x,t) = \frac{1}{2}(z_{*l} + z_{*u})$ of the interval between the lower $z_{*l}(x,t)$ and upper $z_{*u}(x,t)$ tips:

$$z' = z - z_0(x,t) \tag{109}$$

In the local system, the dependence between the fracture opening $w(z(z'))$ and the difference $p - \sigma(z)$ [63] has a form:

$$w(z(\zeta)) = \frac{4}{\pi E'} z_* \int_{-1}^{1} \Big[p\left(s(\eta)\right) - \sigma\left(s(\eta)\right)\Big] \operatorname{arcosh}\left|\frac{1-\zeta\eta}{\zeta-\eta}\right| \mathrm{d}\eta \tag{110}$$

In view of (109), the global coordinates z и s are expressed via the normalized local coordinates $\zeta = z'/z_*$ и $\eta = s'/z_*$ as

$$z = z_* \zeta + z_0(x,t), \quad s = z_* \eta + z_0(x,t) \tag{111}$$

where $z_*(x,t) = \frac{1}{2}(z_{*u} - z_{*l})$ is the current half-height of a cross section x.

The equations for fluid flow contain gradient of the fluid pressure rather than the pressure itself. This suggests using the net-pressurep_{net}, defined as the difference between the actual fluid pressure p and a fixed value σ_0 of the confining rock pressure. The value σ_p of compressive stresses in the pay layer can be used as $sigma_0$. Then $\sigma_0 = \sigma_p$, and in (110) and following equations, we may use the net-pressure $p_{net}(x,t) = p(x,t) - \sigma_p$ instead of $p(x,t)$ and the stress contrast $\Delta\sigma(z) = \sigma(z) - \sigma_p$ instead of $\sigma(z)$. Then with using (111), the elasticity equation (110) becomes:

$$w(z(\zeta)) = \frac{4}{\pi E'} z_* \int_{-1}^{1} \Big[p_{net}\left(s(\eta)\right) - \Delta\sigma\left(s(\eta)\right) \Big] \operatorname{arcosh} \left| \frac{1 - \zeta\eta}{\zeta - \eta} \right| \mathrm{d}\eta \tag{112}$$

The assumption (*iii*) and piece-wise constant distribution (108) yield that integral in (112) is evaluated analytically via the anti-derivative $G_w(\zeta,\eta) = (\eta - \zeta) \operatorname{arcosh}\left|\frac{1-\zeta\eta}{\zeta-\eta}\right| - \sqrt{1-\zeta^2}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\eta\right]$ of the function $\operatorname{arcosh}\left|\frac{1-\zeta\eta}{\zeta-\eta}\right|$:

$$w(z(\zeta)) = \frac{4}{\pi E'} z_* \left[\pi p_{net}(x)\sqrt{1-\zeta^2} - F_w(\Delta\sigma,\zeta) \right] \tag{113}$$

where $F_w(\Delta\sigma,\zeta) = \sum_{j=j_l}^{j=j_u} \Delta\sigma^j \left[G_w(\zeta,\eta^j) - G_w(\zeta,\eta^{j-1})\right]$. Note that the summation is carried out only over the layers crossing the crack: $j_l = \min\left(j : z^j > z_{*l}\right)$, $j_u = \max(j : z^{j-1} < z_{*u})$, $\eta^j = [z^j - z_0(x,t)]/z_*(x,t)$.

For the expansion of w_{av} averaged over the cross section, we have the relation

$$w_{av} = \frac{1}{2z_*} \int_{z_{*l}}^{z_{*u}} w(z) dz = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} w\left(z(\zeta)\right) \mathrm{d}\zeta \tag{114}$$

Integration (112) allows to get the dependence between net-pressure and average opening:

$$w_{av} = \frac{2z_*}{E'} \left[\frac{\pi p_{net}}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \Delta\sigma\left(z(\zeta)\right) \sqrt{1-\zeta^2} \mathrm{d}\zeta \right] \tag{115}$$

Therefore

$$\frac{p_{net}}{E'} = \frac{1}{\pi}\frac{w_{av}}{z_*} + \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Delta\sigma\left(z(\zeta)\right)}{E'}\sqrt{1-\zeta^2}\mathrm{d}\zeta \tag{116}$$

For piece-wise constant confining pressure (108), integration in (116) пyields the final dependence of the net-pressure on the average opening w_{av} and the stress contrast $\Delta\sigma(z)$:

$$\frac{p_{net}}{E'} = \frac{1}{\pi}\frac{w_{av}}{z_*} + \frac{2}{\pi}\frac{\Delta\sigma^l}{E'}\Big[\frac{\pi}{4} + F_\sigma(\zeta^l)\Big] + \frac{2}{\pi}\sum_{j=j_l+1}^{j=j_u-1}\frac{\Delta\sigma^j}{E'}\Big[F_\sigma(\zeta^j) - F_\sigma(\zeta^{j-1})\Big] + \dots$$
$$\dots + \frac{2}{\pi}\frac{\Delta\sigma^u}{E'}\Big[\frac{\pi}{4} - F_\sigma(\zeta^u)\Big], \tag{117}$$

where j_l and j_u is, respectively, the number of the layer containing the lower and upper tip, $\zeta^l(\zeta^u)$ is the normalized coordinate ζ of the upper (lower) boundary of the layer j_l (j_u); $\zeta^j = \Big[z^j - z_0(x,t)\Big]/z_*(x,t)$. The function

$$F_\sigma(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta\sqrt{1-\zeta^2} + \arcsin\zeta\right) \tag{118}$$

is anti-derivative of $\sqrt{1-\zeta^2}$. When a fracture is within the pay layer $(j_l = j_u = j_p)$, all the addends on the right hand side of (117), containing stress contrast, are set zero. It is clear that since the volume V of the fluid in the cross section is $2z_*w_{av}$, the volume can be used as unknown instead of w_{av} and vice versa.

Note that the stress intensity factors (SIFs), generated by the net-pressure and stress contrasts, at the upper K_I^u and lower K_I^l tips are given by equations:

$$K_I^u = \sqrt{\frac{z_*}{\pi}}\int_{-1}^{1}\Big[p_{net}\left(s(\eta)\right) - \Delta\sigma\left(s(\eta)\right)\Big]\sqrt{\frac{1+\zeta}{1-\zeta}}\mathrm{d}\zeta,$$
$$K_I^l = \sqrt{\frac{z_*}{\pi}}\int_{-1}^{1}\Big[p_{net}\left(s(\eta)\right) - \Delta\sigma\left(s(\eta)\right)\Big]\sqrt{\frac{1-\zeta}{1+\zeta}}\mathrm{d}\zeta \tag{119}$$

Since the antiderivatives $\sqrt{\frac{1+\zeta}{1-\zeta}}$ and $\sqrt{\frac{1-\zeta}{1+\zeta}}$ are, respectively, functions $F_K^u(\zeta) = \arcsin\zeta - \sqrt{1-\zeta^2}$ and $F_K^l(\zeta) = F_K^u(\zeta) + 2\sqrt{1-\zeta^2}$, the SIFs (119) дfor constant net-pressure p_{net} and piece-wise constant stress contrast $\Delta\sigma$ are:

$$K_I^u = \sqrt{\pi z_*}\Big\{p_{net} - \frac{1}{\pi}\Delta\sigma^l\left[\frac{\pi}{2} + F_K^u(\zeta^l)\right] - \frac{1}{\pi}\sum_{j=j_l+1}^{j=j_u-1}\Delta\sigma^j\left[F_K^u(\zeta^j) - F_K^u(\zeta^{j-1})\right] -$$
$$-\frac{1}{\pi}\Delta\sigma^u\left[\frac{\pi}{2} - F_K^u(\zeta^u)\right]\Big\} \quad (120)$$

$$K_I^l = K_I^u - 2\sqrt{\frac{z_*}{\pi}}\Big\{\Delta\sigma^l\sqrt{1-(\zeta^l)^2} + \sum_{j=j_l+1}^{j=j_u-1}\Delta\sigma^j\left[\sqrt{1-(\zeta^j)^2} - \sqrt{1-(\zeta^{j-1})^2}\right] -$$
$$-\Delta\sigma^u\sqrt{1-(\zeta^u)^2}\Big\} \quad (121)$$

Similar to (117), when a fracture is within the pay layer ($j_l = j_u = j_p$), all the addends on the right hand side of (120), (121), containing stress contrast, are zero. Clearly, substitution p_{net} in (120), (121) gives expressions of the SIFs via current average opening w_{av}, fracture height $2z_*$ and the coordinates z_{*u} и z_{*l}. Therefore, these equations define an apparent fracture toughness for each tip. For a symmetric case, we have $z_{*u} = z_*$, $z_{*l} = -z_{*u}$, $K_I^l = K_I^u$. In this case, the SIF is defined by merely the current fracture height and the average opening. In its turn, in the corresponding KGD problem, the speed is defined by merely the same quantities: the current fracture height and the average opening. Hence, equating the average openings for the same heights yields a dependence of the SIF (the apparent toughness) on the current speed and the height. Therefore, when using the average opening and the current height to find the current vertical speed, the introduction of the apparent SIF is unneeded complication. Still, when the dependence of the SIF on the speed may be expressed by an approximate analytical equation, then solving the equation in the speed becomes available to trace the height growth. The authors [19] have employed this path for the particular case of the symmetric scheme of a pay layer between two half-spaces

The continuity and Poiseuille-type equations are, respectively,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial(wv_x)}{\partial x} - q_l + Q_0(t)\delta(z)\delta(x) \quad (122)$$

$$v_x(x,z,t) = \left(-\frac{w^{n+1}}{\mu'}\frac{\partial p_{net}}{\partial x}\right)^{1/n} \tag{123}$$

where q_l is the term accounting for leak-off, $Q_0(t)$ is a given pumping rate at the source point $x = z = 0$, $\delta(x)$ is the Dirac's delta function, v_x -is the particle velocity in the x direction, $\mu' = 2[2(2n+1)/n]^n M$, n is the fluid behavior index, M is its consistency index. For a Newtonian fluid $n = 1$, $M = \hat{\mu}$ is the dynamic viscosity; then $\mu' = 12\hat{\mu}$. Note that the pointed fluid source, including the delta-function $\delta(x)$, presumes that the scheme is symmetric about the z-axis. Hence, the influx, corresponding to the right (left) part of the fracture, is $1/2Q_0(t)$. This is of essence for calculations employing the symmetry of the problem

Integration (122) and (123) over a cross section from $z_{*l}(x,t)$ to $z_{*u}(x,t)$ and using (114) yield, respectively,

$$\frac{\partial(2z_* w_{av})}{\partial t} = -\frac{\partial(2z_* w_{av} v_{av})}{\partial x} - Q_l + Q_0\delta(x) \tag{124}$$

$$v_{av}(x,t) = F_v(x,t)\left(-\frac{w_{av}^{n+1}}{\mu'}\frac{\partial p_{net}}{\partial x}\right)^{1/n} \tag{125}$$

where $Q_l = \frac{1}{2z_*}\int_{z_{*l}}^{z_{*u}} q_l \mathrm{d}z$ is the total leak-off through the surface of a cross-section,, v_{av} is the average particle velocity defined as the ratio $v_{av} = \frac{Q}{2z_*}$, where $Q = \int_{z_{*l}}^{z_{*u}} v_x w \mathrm{d}z$. Then

$$F_v(x,t) = \frac{(w^{2+1/n})_{av}}{w_{av}^{2+1/n}} \tag{126}$$

where $(w^{2+1/n})_{av} = \frac{1}{2z_*}\int_{z_{*l}}^{z_{*u}} w^{2+1/n}\mathrm{d}z$ is the average value of $w^{2+1/n}$ over a cross-section.

The fracture propagation speed $v_{*x}(t) = \frac{dx_*}{dt}$ in the x direction is found from the speed equation

$$v_{*x}(t) = \lim_{x \to x_*} v_{av}(x,t) \tag{127}$$

where $x_*(t)$ is the current position of the fracture front. In view of (125), the speed equations are:

$$v_{*x}(t) = \frac{dx_*}{dt} = \frac{1}{t_n} \lim_{x \to x_*} \left[F_v(x,t) \left(-\frac{w_{av}}{E'} \frac{\partial p_{net}}{\partial x} \right)^{1/n} \right] \tag{128}$$

where $t_n = (\mu'/E')^{1/n}$ is the only parameter with the time dimension.

At the front, the opening is zero, then the net-pressure and the second term on the right hand side of (116) are zero, as well. This implies that the front is always within the pay-layer. Then $\lim_{x \to x_*} F_v = F_v(x_*, t)$. These conclusions suggest employing the asymptotic umbrella [53]:

$$w_{av} = C_w(t) r^\alpha \tag{129}$$

where $r = x_* - x$ is the distance to the front, C_w – is the opening intensity factor, α is the exponent to be found.

Apply now the fundamental suggestion, which is always, while often implicitly, used when studying HF propagation: the propagation speed of a HF is finite and non-zero. Substitution (129) into (116) and the latter into (128) yields that v_{*x} meets these conditions only when $\alpha = 1/(n+2)$. Then the speed equation (128) becomes :

$$v_{*x}(t) = \frac{F_v(x_*, t)}{t_n} \left(\frac{1}{\pi z_*(n+2)} \right)^{1/n} C_w^{1+2/n} \tag{130}$$

Here C_w defined via (129) as

$$C_w = w_{av}(r_i)/r_i^\alpha \tag{131}$$

where r_i is the distance from the front to a point of the mesh under the asymptotic umbrella (129).

It remains to complement the system (124), (125), (130) with speed equations for the height growth, defining positions $z_{*l}(x,t)$ and $z_{*u}(x,t)$ of the lower and upper tips in each cross-section, and initial conditions.

The speed equations for vertical fracture growth of the lower and upper tips are

$$v_{zl}(x,t) = \frac{\mathrm{d}z_{*l}}{\mathrm{d}t} = f_{zl}(z_{*l}, z_{*u}, w_{av}) \tag{132}$$

$$v_{zu}(x,t) = \frac{\mathrm{d}z_{*u}}{\mathrm{d}t} = f_{zu}(z_{*l}, z_{*u}, w_{av}) \tag{133}$$

The initial conditions are assigned at an initial moment t_0. They are

$$x_*(t_0) = x_{*0}, w_{av}(x,t_0) = w_0(x), z_{*l}(t_0) = z_{*l0}, z_{*u}(t_0) = z_{*u0} \tag{134}$$

The problem is to solve the equations (124), (125), ((130 - 133) under the initial conditions (134). Crack opening profile w in the equation (126) is determined by the equation (113). The net pressure p_{net} on the right side (113) and (125) is found from the equation (117). Functions $f_{zl}(z_{*l}, z_{*u}, w_{av})$, $f_{zu}(z_{*l}, z_{*u}, w_{av})$ in the velocity equations (132), (133) and the values $x_{*0}, w_0(x), z_{*l0}, z_{*u0}$ in the initial conditions (134) are specified in the next two sections.

3.3 The correspondence principle

As mentioned in Introduction, the straight-forward approach to find the speeds v_{zl}, v_{zu} of the vertical growth via an apparent toughness K_{IC} has no clear extension to arbitrary propagation regimes and arbitrary stress contrasts.

Let us present a general approach to assign the speeds of the height growth [62]. Note that the KGD and P3D models use the same equation of elasticity (112) to describe a plane-deformed state. In the P3D model, the net-pressure is uniform in cross section, which leads to asymptotics near the tip of the fracture, which includes apparent toughness, but does not include the propagation speed of the fracture, which is not present in the asymptotic equation. In contrast, in the KGD model, the net pressure is not constant along the cross section and tends to $-\infty$ near the tip of the fracture. For this model, the asymptotic behavior is determined by the asymptotic umbrella, which includes the propagation speed (except for the limiting case when both the viscosity and leak-off losses are zero).

In fact, the difference concerns with merely near-tip zones influenced by the asymptotics, while the openings of the central parts of fractures may be almost the same. This suggests employing the next correspondence principle, which establishes a correspondence between the P3D and KGD models in terms of physical quantities present in the both models. We assume two plane-strain hydraulic fractures under the same conditions to be equivalent, when they have the same: (i) tip positions, and fluid volumes above (and below) the injection point. When having these quantities equal for two straight fractures under the same conditions, one may expect that the profiles of the opening on major parts of fractures will be close, as well. Then the tip speed, not present in the original P3D model, may be taken equal to that of the KGD model, which as mentioned, includes the tip speed in its asymptotic equations. Hence, in any cross-section of the P3D model, the current tip positions and the current volumes above (and below) the injection point uniquely define the tip propagation speeds via the speeds in the equivalent (in the mentioned sense) KGD model.

Modeling a fracture using the KGD model allows us to obtain the dependence of z_{*l}, z_{*u}, w_{av}, v_{zl} and v_{zu} on pumping rate q_{KGD} and time t_{KGD}. Note that the values of q_{KGD} and t_{KGD} have nothing to do with the pumping rate Q_0 and the time t of the P3D model. Therefore, they should be excluded. This can be done by using the average opening w_{av} and the fracture height $2z_* = z_{*u} - z_{*l}$ as arguments that determine the growth rates of v_{zl} and v_{zu}. In the case of a symmetrical stress contrast, when $z_{*l} = -z_{*u}$ and $v_{zl} = -v_{zu}$, the values are equalized for the model P3D w_{av} and $2z_*$ to the values w_{av} and $2z_*$ for KGD, found in advance for the same stress contrast, gives the necessary functions $f_{zl}(z_{*l}, z_{*u}, w_{av}) = -f_{zu}(z_{*l}, z_{*u}, w_{av})$ for the speed equations (132), (133) . Similarly, in cases of high stress contrasts when $v_{zl} = 0$ or $v_{zu} = 0$, two values of w_{av} and $2z_*$ are enough to find the speeds v_{zl} or v_{zu} respectively.

In the general case, when the fracture is not symmetric, the values w_{av} and $2z_*$ do not determine z_{*l}, z_{*u} and v_{zl}, v_{zu} definitely. Therefore, an additional parameter is needed. The correspondence principle suggest the use of the average opening w_m averaged over the largest of the two parts of the cross section, one of which is lower and the other above the initiation point. We denote the coordinate of the tip of such a section as z_m. Then the expansion w_m averaged over the interval $[0, z_m]$ is equal to

$$w_m = \pm\frac{1}{|z_m|}\int_0^{z_m} w(z)\mathrm{d}z \tag{135}$$

where the upper (lower) sign is taken when $z_{*u} > |z_{*l}|(z_{*u} < |z_{*l}|)$. In this case, the table generated during the preliminary solution of the KGD problem is supplemented by an additional column containing the values of w_m defined by the formula (135). Accordingly, for the P3D model with the same voltage contrast, we additionally use the value w_m to uniquely determine v_{zl} and v_{zu} from the data table containing the results of the calculation of the KGD model. Thus, $f_{zl}(z_{*l}, z_{*u}, w_{av})$ and $f_{zu}(z_{*l}, z_{*u}, w_{av})$, which are used in the equations (132), (133), are uniquely determined.

Note that it is not necessary to solve the KGD problem numerically until the fracture height $h = 2z_*$ is less than the height H of the pay layer. From the self-similar solution of the KGD problem for this case, it follows that the speed of height growth can be found from the equation

$$v_{*z} = \frac{\partial z_*}{\partial t} = \frac{n+1}{n+2}(2\xi_{*n}^2)^{1+2/n}\frac{w_{av}^{1+2/n}}{t_n z_*^{2/n}} \tag{136}$$

where ξ_{*n} is the self-similar half fracture length for a given behavior index n. The values $\xi_{*n} = \gamma_{m0}$ are given in table 1 of [1] for Newtonian fluid ($n = 1$) $\xi_{*n} = 0.615$.

The equation (136) implies that the height of the cross section corresponding to the fracture front does not change in time, because v_{*z} is equal to zero at $w_{av} = 0$. The equation (136) can be used to determine the boundaries when any extension of the P3D model becomes physically incorrect.

3.4 Initial conditions

Using (136), it can be proved that the initial conditions corresponding to the zero initial height ($2z_* = 0$) lead to a positive pressure gradient, which in turn leads to a physically incompatible solution. Therefore, the initial height must be greater than zero: $z_{*u}(t_0) = -z_{*l}(t_0) = z_{*0} > 0$. For $z_{*0} > 0$, taking into account the asymptotic behavior (129), the equation (136) near the front is:

$$\frac{\partial z_*}{\partial t} = \frac{n+1}{n+2}(2\xi_{*n}^2 C_w)^{1+2/n}\frac{1}{t_n z_*^{2/n}} r^{1/n} \tag{137}$$

In the partial derivative $\partial z_*/\partial t|_{x=\text{const}} = \partial z_*/\partial t|_{r=\text{const}} + v_{*x}\partial z_*/\partial r$, the convective term dominates near the front, since the value of z_* is constant at the front. Then the equation (137) can be rewritten as:

$$v_{*x}\frac{\partial z_*}{\partial r} = \frac{n+1}{n+2}(2\xi_{*n}^2 C_w)^{1+2/n}\frac{1}{t_n z_*^{2/n}} r^{1/n} \tag{138}$$

The solution (137) regarding $C_w^{1+2/n}$ and substituting the result in (138) gives the ordinary differential equation for z_* and r:

$$\frac{\mathrm{d}z_*}{\mathrm{d}r} = \frac{n+1}{n+2}(2\xi_{*n}^2)^{1+2/n}\frac{1}{F_v}\left[\pi(n+2)\right]^{1/n} r^{1/n} \tag{139}$$

Since the height of the fracture does not change at its front, so $z_*|_{r=0} = z_{*0}$, and integration (139) with this condition allows us to obtain the relation

$$z_*^{1+1/n} - z_{*0}^{1+1/n} = \frac{n+1}{n+2}\left(2\xi_{*n}^2\right)^{1+2/n}\frac{1}{F_v}\left[\pi(n+2)\right]^{1/n} r^{1+1/n} \tag{140}$$

For Newtonian fluid ($n = 1, F_v = 12/\ pi^2,\ xi_{*n} = 0.615$), up to the order $(z_* - z_{*0})^2$, the dependency (140) becomes equal

$$\frac{z_*}{z_{*0}} - 1 = 1.12\left(\frac{r}{z_{*0}}\right)^2 \tag{141}$$

From the equation (141) it can be seen that the height increases rapidly with increasing distance to the front. This contradicts the provisions of the P3D model that the fracture height is noticeably less than the distance to the front. Therefore, from the equation (141) it follows that any extension of the P3D model is not applicable for a uniform (with zero contrast) stress field. In the case of negative stress contrasts, the height increase is even faster, which suggests that the model is not applicable in this case either.

P3D model can only be used for a rock mass with sufficiently strong stress barriers. The parameters that determine which barrier can be considered weak, moderate, or strong are given in [19, 27].

It is reasonable to take into account that as long as the fracture has not reached the boundaries of the pay layer, it propagates as a radial crack under the action of uniform pressure. To simulate such a crack, one can use the well-known self-similar solution [54] to specify physically acceptable initial conditions. A self-similar solution implies that a crack initiated by a Newtonian fluid has a radius of $H/2$ at time

$$t_H = \left(\frac{H/2}{\xi_n}\right)^{9/4} \frac{t_n^{1/4}}{Q_0^{3/4}} \tag{142}$$

where ξ_n is the constant known from the axisymmetric problem (for Newtonian fluid, $\xi_n = 0.6978 \approx 0.7$). At the initial time t_0, less than t_H, the radius is $x_{*0} = r_0 = \xi_n Q_0^{1/3} t_0^{4/9} t_n^{-1/9}$. The total volume V_0 of fluid in the fracture at this moment is

$$V_0 = Q_0 t_0 = \int_{-x_{*0}}^{x_{*0}} S(x)\mathrm{d}x \tag{143}$$

where $S(x)$ is the area of the vertical section of the fracture defined by the expression

$$S(x) = \int_{-a}^{a} w_a(x, z, t_0)\mathrm{d}z \tag{144}$$

Here $a = \sqrt{x_{*0}^2 - x^2}$; w_a is an opening of a radial crack.

The opening w_a in (144) can be found from a self-similar solution to the axisymmetric problem, which uniquely determines the volume of V_0. However, there is no need to use the exact solution for two reasons. Firstly, the correspondence between axisymmetric and P3D problems is rather crude. Secondly, the influence of the initial conditions rapidly decreases with time. In [19] it was suggested that this would simplify the task, which was proved analytically by [55] and numerically [56]. Therefore, you can use any simple approximation that provides zero crack opening at the front and satisfies the equation (143) of the global volume balance. For example, the elliptic distribution [19] w_a along the radius $r_0 = x_{*0}$ completely satisfies the conditions: $w_a(x, z, t_0) = C_a\sqrt{a^2 - z^2} = C_a\sqrt{r_0^2 - (x^2 + z^2)}$, where the constant C_a is chosen to satisfy the balance (143). For such an expansion of w_a, integration into (144) gives $S(x) = \frac{\pi}{2}C_a(x_{*0}^2 - x^2)$, and from (143) it follows that $C_a = \frac{3}{2\ pi}\frac{Q_0 t_0}{x_{*0}^3}$. In this way

$$S(x) = \frac{3}{4}\frac{Q_0 t_0}{x_{*0}}\left[1 - \left(\frac{x}{x_{*0}}\right)^2\right] \tag{145}$$

Now we take an initial fracture in the shape of a rectangle symmetrical about the z axis, with a pay layer height of $2z_{*0} = H = \text{const}$ and a length of $2x_{*0}$. Then, in order to have the same volume V_0 of liquid at the initial instant of time t_0, its opening $w_0(x)$ must be equal to $w_0(x) = S(x)/H$. Thus, using (145), we get the initial opening defined as $w_0(x) = \frac{3}{4}\frac{Q_0 t_0}{x_{*0}H}\left[1 - \left(\frac{x}{x_{*0}}\right)^2\right]$. It is clear that this opening, being integrated over a rectangular region, corresponds to the global fluid balance (143) at time t_0, which determines x_{*0}. To summarize, the initial conditions (134) for a Newtonian fluid are given as

$$x_{*0} = 0.7Q_0^{1/3}\left(\frac{1}{t_n}\right)^{1/9} t_0^{4/9},\ z_{*0} = H/2,\ w_0(x) = \frac{3}{4}\frac{Q_0 t_0}{x_{*0}H}\left[1 - \left(\frac{x}{x_{*0}}\right)^2\right] \tag{146}$$

where $t_0 \leq t_H$ and $t_H = 0.47H^{9/4}t_n^{1/4}Q_0^{-3/4}$. Taking into account that $t_0 \ll t_H$, the influence of the initial conditions decays rapidly with increasing time; the solution is practically independent of them for $t \gg t_0$, we can notice that even quite strong perturbations under the conditions (146) do not affect the final results. This suggests the possibility of using the initial conditions (146) for non-Newtonian fluids.

The problem of modeling a pseudo-three-dimensional fracture in a modified formulation consists of solutions of the equations (124), (125), (130) - (133), where the vertical velocities are v_{zl} and v_{zu} are prepared in advance, as described earlier. The right-hand sides of x_{*0}, z_{*0} and $w_0(x)$ in the initial conditions (134) by the formula (146).

3.5 Numerical results

The described method is numerically implemented in Matlab and Python. For a given geometry and stress contrast, by solving a number of advanced KGD problems, a database was prepared to determine the fracture propagation speeds depending on the position of the tip and the volume of the crack part above and below the fluid injection point. For this, the algorithm presented in [27] was used. The prepared database is repeatedly used in the second stage of calculations, when the growth of P3D fractures in height is simulated.

Let us compare with the results presented in [19]. The authors of this work investigated in detail the case when a pay layer with a thickness of H is located between half-spaces with the same stress contrast $\Delta\sigma$. The authors used an apparent toughness ΔK_{IC}, which is related to the propagation speed v_* by an approximate equation. The approximation coefficients were chosen so as to ensure the best fit between the crack profiles calculated for the KGD model and the profiles corresponding to the model with pressure uniformly applied to the crack. To exclude this pressure from the dependence $\Delta K_{IC}(v_*)$, the authors suggested that the crack volumes are the same in both cases. Therefore, when considering a particular case, the authors actually used the principle of correspondence. The most suitable choice of approximation parameters was provided by the analytical equation $\Delta K_{IC}(v_*)$, which connected the apparent toughness with the fracture vertical speed.

For the symmetric case presented in [19], the results show that the fracture opening profiles obtained using the correspondence principle are actually indistinguishable from the similar profiles shown in Fig. 3 of [19] (Fig. 26). From this it follows that the introduction of apparent toughness is an unnecessary complication. More important is the agreement of the results with the results for the three-dimensional

ILSA model. The calculations were performed for the initial data given in the article [19]: $H = 0.05$ m, $\mu' = 30.2$ Pa $\cdot$ s (the fluid is Newtonian), $\nu = 0.4$, $E = 3.3$ GPa, $Q_0 = 1.7\text{mm}^3/\text{c}$; $\Delta\sigma = 4.3$ MPa.

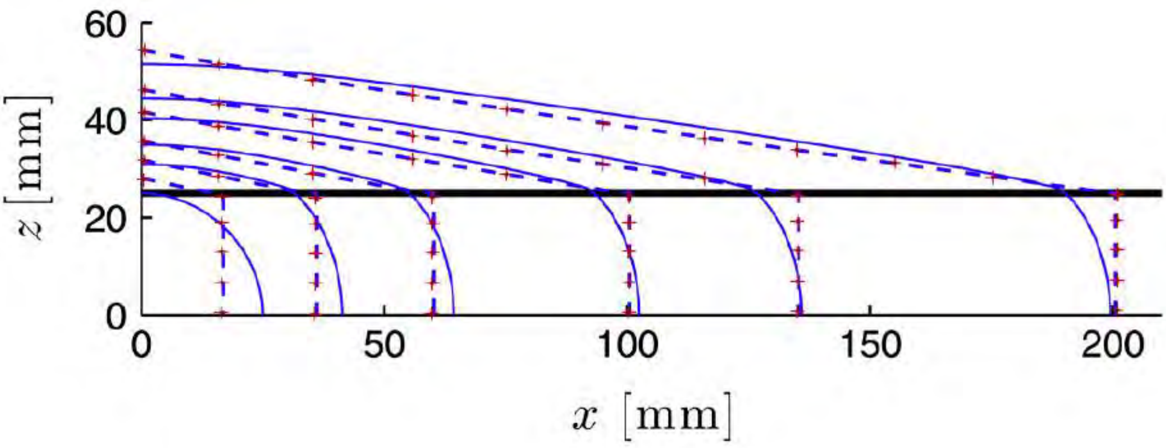

Figure 26: Comparison of the footprints obtained by using the correspondence principle (dots) with the ILSA solution (solid lines), presented in [19].

From the Fig. 26, it can be seen that the results of the modified P3D model are close to the results obtained for the three-dimensional ILSA model everywhere, except for the area near the front where the P3D model is not applicable. If necessary, the correspondence in this zone can be improved by taking into account the nonlocal elastic interaction and the curvature of the front.

An important advantage of the correspondence principle over the method described in [19] is that the correspondence principle allows one to take into account arbitrary voltage contrasts. Let us now consider an example when a crack propagates in a three-layer medium with asymmetric stress barriers. For calculation, we take the following parameters: $H = 20$ m, $\mu' = 0.2$ Pa $\cdot$ s (the fluid is Newtonian), $\nu = 0.23$, $E = 2.5$ GPa, $Q_0 = 3.6\text{m}^3/\text{min}$; $\Delta\sigma_1 = 5$ MPa, $\Delta\sigma_2 = 4$ MPa.

The Fig. 27 compares the fracture opening profile obtained on the basis of a modified model (flat blue line) with the opening profile for a planar three-dimensional crack [85] for time $t = 439$ s. Black horizontal lines indicate layer boundaries. We see that the values of the crack height coincide with an accuracy of more than 0.5%.

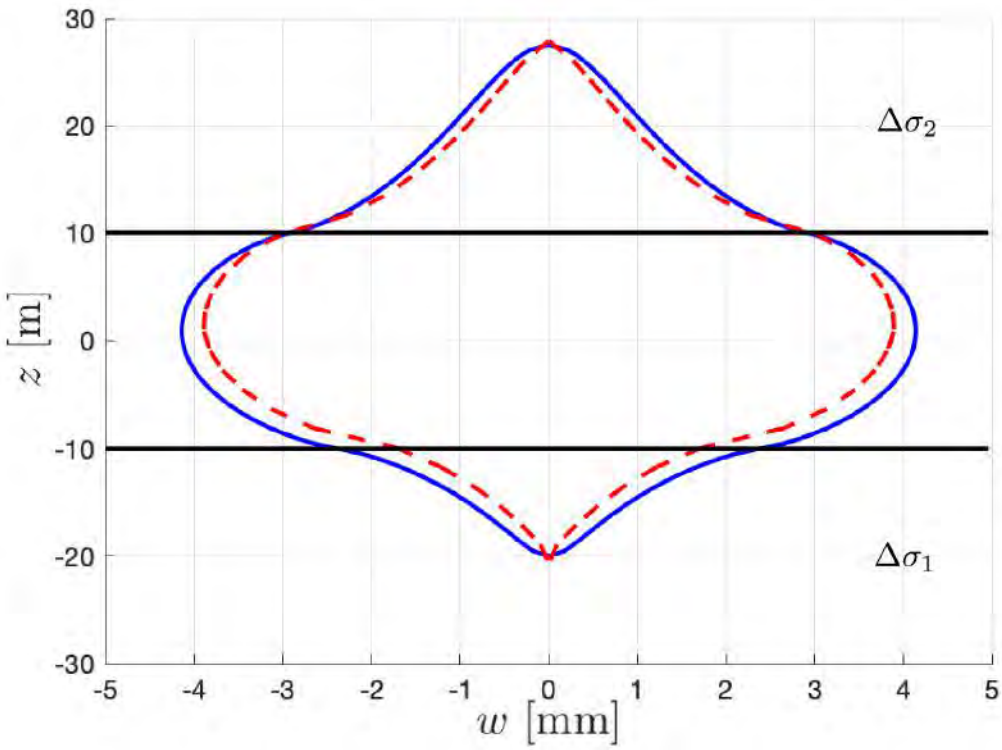

Figure 27: Fracture opening profile obtained using the modified pseudo-three-dimensional model (solid line) and the planar three-dimensional model [85] (dashed line).

Based on the presented numerical results, it can be seen that the modified pseudo-three-dimensional model allows one to calculate with high accuracy the growth of a pseudo-three-dimensional fracture in height in the dominant viscosity regime for arbitrary values of stress contrasts in the layers.

3.6 Concluding remarks

The results obtained in this chapter can be generalized as follows.

- A correspondence principle has been developed that allows increasing the accuracy of crack geometry calculation within the framework of the pseudo-three-dimensional model within the limits of applicability of the original P3D model. Unlike alternative approaches, this method allows you to get the exact solution in a layered medium with arbitrary compressive stresses.

- A comparison of the results obtained using the modified P3D model with the available solutions for the three-dimensional model showed that the modified model can be reliably used to model plane cracks within the limits of applicability of the original pseudo-three-dimensional model.

Conclusion

i The method of constructing the Green's function for layered structures is extended to the case of harmonic problems and three-dimensional problems of the theory of elasticity. A method has been developed for evaluating the accuracy of calculating the Green's function depending on the period of the Fourier transform and the number of points of its discretization. For the two-dimensional Laplace equation, it was found that the error in constructing the Green's function does not exceed 0.8% for a period 16 times the size of the region in which the solution is sought, and for the number of sampling points of the Fourier transform equal to 128.

ii For the developed Green's function, a generalization of the complex method of boundary elements to problems on layered structures with inhomogeneities for the two-dimensional Laplace equation is given. The problem of a circular hole under the action of a uniform flow on a contour in a layered structure consisting of two half-planes is solved. For a special case of a circular hole in a half-plane with a strongly conducting boundary, a comparison is made with the analytical solution and it is shown that the calculation error does not exceed 4%. The dependence of the ratio of the maximum and minimum values of the potential on the hole contour from the values of the relative conductivity of the half-planes and the distance from the center of the hole to the boundary is obtained. It is shown that in the case of a strongly conducting boundary, the ratio of the radius of the hole to the distance from the center of the hole to the boundary has a greater effect on the potential of the hole than in the case of an impermeable boundary.

iii The problem of a radial fracture perpendicular to the boundaries of the layers under the influence of constant pressure is solved in the case when the fracture is entirely in one layer located between two half-spaces. In the case when such a fracture is entirely located in one layer located between two half-spaces, the boundaries of the influence of the elastic moduli of half-spaces on the fracture opening are determined. It is shown that the difference in the elastic moduli of the layers leads to a significant deviation of the stress intensity factor along the fracture perimeter from the corresponding values for a homogeneous medium in cases where the crack does not intersect the boundaries of the layers. Comparison with the results obtained using alternative approaches demonstrates the reliability of the results.

iv method for calculating the speeds of the height growth of a pseudo-three-dimensional hydraulic fracture in the viscosity dominated regime in a layered medium has been developed. The results of calculating the geometry of the fractures obtained using the developed method are compared with the known numerical solutions obtained using three-dimensional models. It is shown that the developed method allows one to increase the accuracy of calculating the geometric characteristics of a fracture in a layered medium in a pseudo-three-dimensional formulation.

References

[1] Adachi J. I., Detournay E. Self-similar solution of a plane-strain fracture driven by a power-law fluid / J. I. Adachi, E. Detournay // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2002. – T. 26. – №. 6. – C. 579-604.

[2] Adachi J. et al. Computer simulation of hydraulic fractures / J. Adachi // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2007. – T. 44. – №. 5. – C. 739-757.

[3] Al Heib M., Linkov A. M., Zoubkov V. V. On numerical modeling of subsidence induced by mining / M. Al Heib, A. M. Linkov, V. V. Zoubkov // International symposium of the international society for rock mechanics (EUROCK 2001). – 2001.

[4] Alperin I. G. The problem of an infinitely long beam on an elastic half-plane / I. G. Alperin // Applied Mathematics and Mechanics. - 1939. - T. 2. - No. 3 (in Russian).

[5] Barree R. D. A practical numerical simulator for three-dimensional fracture propagation in heterogeneous media / R. D. Barree // SPE Reservoir Simulation Symposium. – Society of Petroleum Engineers. – 1983. – C. 403-411.

[6] Benitez F. G., Lu L., Rosakis A. J. A boundary element formulation based on the three-dimensional elastostatic fundamental solution for the infinite layer: Part I—theoretical and numerical development / F. G. Benitez, L. Lu, A. J. Rosakis // International journal for numerical methods in engineering. – 1993. – T. 36. – №. 18. – C. 3097-3130.

[7] Bracewell R. N. The Fourier transform and its applications / R. N. Bracewell – New York : McGraw-Hill, 1986. – T. 31999.

[8] Brebbia C. A. The boundary element method in enginering practice / C. A. Brebbia // Engineering Analysis. – 1984. – T. 1. – C. 3-12.

[9] Brigham E. O. The discrete Fourier transform / E. O. Brigham // The fast Fourier transform and its applications. – 1988.

[10] Buffler H. Der Spannungszustand in einem geschichteten Korper bei axialsymmetrischer Belastung / H. Buffler // Ingenieur-Archiv 1961; 30(6):417– 430.

[11] Buffler H. Die Bestimmung des Spannungs und Verschiebungszustandes eines geschichteten Korpes mit Hilfe von Ubertragungsmatrizen / H. Buffler // Ingenieur-Archiv 1962; 31(1):229–240.

[12] Bufler H. Theory of elasticity of a multilayered medium / H. Bufler // Journal of Elasticity. – 1971. – T. 1. – №. 2. – C. 125-143.

[13] Bunger A. P., McLennan J., Jeffrey R. Effective and sustainable hydraulic fracturing / A. P. Bunger, J. McLennan, R. Jeffrey – 2013.

[14] Champeney D. C. A handbook of Fourier theorems / D. C. Champeney – Cambridge University Press, 1989.

[15] Crouch S. L., Starfield A. M., Rizzo F. J. Boundary element methods in solid mechanics / S. L. Crouch, A. M. Starfield, F. J. Rizzo – 1983.

[16] Cooley J., Lewis P., Welch P. The finite Fourier transform / J. Cooley, P. Lewis, P. Welch // IEEE Transactions on audio and electroacoustics. – 1969. – T. 17. – №. 2. – C. 77-85.

[17] Cooley J. W., Lewis P. A. W., Welch P. D. The fast Fourier transform and its applications / J. Cooley, P. Lewis, P. Welch // IEEE Transactions on Education. – 1969. – T. 12. – №. 1. – C. 27-34.

[18] Dobroskok A. A., Linkov A. M. Complex variable equations and the numerical solution of harmonic problems for piecewise-homogeneous media / A. A.

Dobroskok, A. M. Linkov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2009. – T. 73. – №. 3. – C. 313-325.

[19] Dontsov E. V., Peirce A. P. An enhanced pseudo-3D model for hydraulic fracturing accounting for viscous height growth, non-local elasticity, and lateral toughness / E. V. Dontsov, A. P. Peirce // Engineering Fracture Mechanics. – 2015. – T. 142. – C. 116-139.

[20] Dougall J. VIII. An Analytical Theory of the Equilibrium of an Isotropic Elastic Plate / J. VIII. Dougall // Earth and Environmental Science Transactions of The Royal Society of Edinburgh. – 1906. – T. 41. – №. 1. – C. 129-228.

[21] Economides M. J., Nolte K. G. Reservoir Stimulation / M. J. Economides, K. G. Nolte - Houston: Schlumberger Educational Services, 1989.

[22] Erdogan F., Gupta G. The stress analysis of multi-layered composites with a flaw / F. Erdogan, G. Gupta // International Journal of Solids and Structures. – 1971. – T. 7. – №. 1. – C. 39-61.

[23] Filon, L. N. G. IV. On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of Lond, with special reference to points of concentrated or discontinuous loading / L. N. G. IV. Filon // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. – 1903. – T. 201. – №. 331-345. – C. 63-155.

[24] Gaskill J. D. Linear systems, Fourier transforms, and optics / J. D. Gaskill – New York : Wiley, 1978. – T. 576.

[25] Geertsma J., De Klerk F. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures / J. Geertsma, F. De Klerk // Journal of Petroleum Technology. – 1969. – T. 21. – №. 12. – C. 1.571-1.581.

[26] Gilbert F., Backus G. E. Propagator matrices in elastic wave and vibration problems / F. Gilbert, G. E. Backus // Geophysics. – 1966. – T. 31. – №. 2. – C. 326-332.

[27] Gladkov I. O., Linkov A. M. Solution of a Plane Hydrofracture Problem with Stress Contrast / I. O. Gladkov, A. M. Linkov // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2018. – T. 59. – №. 2. – C. 341-351.

[28] Godunov S. K., Ryabenky V. S. Difference schemes: introduction to the theory / S. K. Godunov, V. S. Ryabenky - "Science," 1973 (in Russian).

[29] Grigoriev S. N. et al. Cutting tools made of layered composite ceramics with nano-scale multilayered coatings / S. N. Grigoriev // Procedia CIRP. – 2012. – T. 1. – C. 301-306.

[30] Harrison E. et al. The mechanics of fracture induction and extension / E. Harrison // Petroleum Trans AIME – 1954. – T. 201. – C. 252–263.

[31] Hormander L. Linear Partial Differential Operators: 4th Printing / L. Hormander – Springer, 1976.

[32] Howard G. C. and Fast C. R. Optimum fluid characteristics for fracture extension / G. C. Howard, C. R. Fast // Drilling and production practice. – American Petroleum Institute, 1957.

[33] Hubbert M. K., Willis D. G. Mechanics of hydraulic fracturing / M. K. Hubbert, D. G. Willis – 1972.

[34] Jaworski D., Linkov A., Rybarska-Rusinek L. On solving 3D elasticity problems for inhomogeneous region with cracks, pores and inclusions / D. Jaworski, A. Linkov, L. Rybarska-Rusinek // Computers and Geotechnics. – 2016. – T. 71. – C. 295-309.

[35] Joshi S. Can nanotechnology improve the sustainability of biobased products? The case of layered silicate biopolymer nanocomposites / S. Joshi // Journal of Industrial Ecology. – 2008. – T. 12. – №. 3. – C. 474-489.

[36] Journel A. G., Huijbregts C. J. Mining geostatistics / A. G. Journel, C. J. Huijbregts – London : Academic press, 1978. – T. 600.

[37] Kennett B. L. N., Kerry N. J. Seismic waves in a stratified half space / B. L. N. Kennett, N. J. Kerry // Geophysical Journal International. – 1979. – T. 57. – №. 3. – C. 557-583.

[38] Kennett B. L. N. Elastic wave propagation in stratified media / B. L. N. Kennett // Advances in applied mechanics. – Elsevier, 1981. – T. 21. – C. 79-167.

[39] Kennett B. L. N. Lg waves and structural boundaries / B. L. N. Kennett // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1986. – T. 76. – №. 4. – C. 1133-1141.

[40] Khristianovic S. A., Zheltov Y. P. Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids / S. A. Khristianovic, Y. P. Zheltov // Proc. 4th world petroleum congress, Rome. – 1955. – T. 2. – C. 579-586.

[41] Kuo C. H., Keer L. M. Three-dimensional analysis of cracking in a multilayered composite / C. H. Kuo, L. M. Keer // Journal of Applied Mechanics. – 1995. – T. 62. – №. 2. – C. 273-281.

[42] Lebedev N. N., Skalskaya I. P., Uflyand Y. S. Worked problems in applied mathematics / N. N. Lebedev, I. P. Skalskaya, Y. S. Uflyand – 1979.

[43] Lin W., Keer L. M. Analysis of a vertical crack in a multilayered medium / W. Lin, L. M. Keer // Journal of applied mechanics. – 1989. – T. 56. – №. 1. – C. 63-69.

[44] Lin W., Keer L. M. Three-dimensional analysis of cracks in layered transversely isotropic media / W. Lin, L. M. Keer // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. – 1989. – Т. 424. – №. 1867. – С. 307-322.

[45] Linkov A., Filippov N. Difference equations approach to the analysis of layered systems / A. Linkov, N. Filippov // Meccanica. – 1992. – Т. 26. – №. 4. – С. 195-209.

[46] Linkov A. M., Linkova A. A., Savitski A. A. An effective method for multi-layered media with cracks and cavities / A. M. Linkov, A. A. Linkova, A. A. Savitski // International Journal of Damage Mechanics. – 1994. – Т. 3. – №. 4. – С. 338-356.

[47] Linkov A. M. et al. A method to calculate stresses and deformations in 3D layered strata / A. M. Linkov // Advances in Rock Mechanics. – 1998. – С. 135-144.

[48] Linkov A. M., Zoubkov V.V., Sylla M., al Heib M. Spectral BEM for Multi-layered Media with Cracks or/and Openings / A. M. Linkov, V.V. Zoubkov, M. Sylla, M. al Heib // Proc. Symposium IABEM-2000. Brescia: Int. Association for Boundary Element Methods. – 2000. – С. 141-142.

[49] Linkov A. M., Zubkov V. V. Spectral BEM and its applications / A.M. Linkov, V.V. Zubkov // Transactions of XIX Int. Conferences BEM and FEM-2001, V.A. Postnov (ed.), Vol. 2, St. Petersburg, 2001, p. 236-241 (in Russian).

[50] Linkov A. M. On efficient simulation of hydraulic fracturing in terms of particle velocity / A. M. Linkov // International Journal of Engineering Science. – 2012. – Т. 52. – С. 77-88.

[51] Linkov A. M., G. Mishuris. Modified Formulation, ϵ-Regularization and the Efficient Solution of Hydraulic Fracture Problems / A. M. Linkov, G. S. Mishuris // ISRM International Conference for Effective and Sustainable Hydraulic

Fracturing. – International Society for Rock Mechanics and Rock Engineering, 2013.

[52] Linkov A. M. Boundary integral equations in elasticity theory / A. M. Linkov – Springer Science and Business Media, 2013. – T. 99.

[53] Linkov A. M. Universal asymptotic umbrella for hydraulic fracture modeling / A. M. Linkov // arXiv preprint arXiv:1404.4165. – 2014.

[54] Linkov A. M. Solution of axisymmetric hydraulic fracture problem for thinning fluids / A. M. Linkov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2016. – T. 80. – №. 2. – C. 149-155.

[55] Linkov A. On decaying influence of initial conditions in the problem of hydraulic fracturing / A. M. Linkov // Doklady Physics. – 2016. – T. 61. – №. 7.

[56] Linkov A. M. Numerical solution of plane hydrofracture problem in modified formulation under arbitrary initial conditions / A. M. Linkov // Journal of Mining Science. – 2016. – T. 52. – №. 2. – C. 265-273.

[57] Liu S., Wang Q. Studying contact stress fields caused by surface tractions with a discrete convolution and fast Fourier transform algorithm / S. Liu, Q. Wang // Journal of Tribology. – 2002. – T. 124. – №. 1. – C. 36-45.

[58] Mack M. G., Warpinski N. R. Mechanics of hydraulic fracturing / M. G. Mack, N. R. Warpinski // Reservoir stimulation. – 2000. – C. 6-1.

[59] Maier G., Novati G. On boundary element-transfer matrix analysis of layered elastic systems / G. Maier, G. Novati // Engineering analysis. – 1986. – T. 3. – №. 4. – C. 208-216.

[60] Maier G., Novati G. Boundary element elastic analysis of layered soils by a successive stiffness method / G. Maier, G. Novati // International journal for

numerical and analytical methods in geomechanics. – 1987. – T. 11. – №. 5. – C. 435-447.

[61] Markov N. S., Linkov A. M. An Effective Method to Find Green's Functions for Layered Media / N. S. Markov, A. M. Linkov // Materials Physics and Mechanics. – 2017. – T. 32. – №. 2. – C. 133-143.

[62] Markov N. S., Linkov A. M. Correspondence principle for simulation hydraulic fractures by using pseudo 3D model / N. S. Markov, A. M. Linkov // Materials Physics and Mechanics. – 2018. – T. 40. – C. 181-186.

[63] Muskhelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity / N. I. Muskhelishvili // Noordhoff, Groningen. – 1963. – T. 17404.

[64] Nikishin V. S., Shapiro G. S. Spatial problems of the theory of elasticity for multilayer media / V. S. Nikishin, G. S. Shapiro - Computing Center, USSR Academy of Sciences, 1970 (in Russian).

[65] Nordgren R. P. et al. Propagation of a vertical hydraulic fracture / R. P. Nordgren //Society of Petroleum Engineers Journal. – 1972. – T. 12. – №. 04. – C. 306-314.

[66] Obolashvili E.I. Fourier transform and its application in the theory of elasticity / E.I. Obolashvili - Metsniereba, 1979 (in Russian).

[67] Offord A. C. On Hankel Transforms / A. C. Offord // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1935. – T. 2. – №. 1. – C. 49-67.

[68] Peirce A. P., Siebrits E. The scaled flexibility matrix method for the efficient solution of boundary value problems in 2D and 3D layered elastic media / A. P. Peirce, E. Siebrits // Computer methods in applied mechanics and engineering. – 2001. – T. 190. – №. 45. – C. 5935-5956.

[69] Peirce A. P., Siebrits E. Uniform asymptotic approximations for accurate modeling of cracks in layered elastic media / A. P. Peirce, E. Siebrits // International Journal of Fracture. – 2001. – T. 110. – №. 3. – C. 205-239.

[70] Peirce A. P., Siebrits E. A dual multigrid preconditioner for efficient solution of hydraulically driven fracture problem / A. P. Peirce, E. Siebrits // International Journal of Numerical Methods and Engineering. – 2005. – T. 65. – C. 1797-1823.

[71] Peirce A., Detournay E. An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures / A. Peirce, E. Detournay // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2008. – T. 197. – №. 33-40. – C. 2858-2885.

[72] Peirce A. Implicit level set algorithms for modelling hydraulic fracture propagation / A. Peirce // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2016. – T. 374. – №. 2078. – C. 20150423.

[73] Perkins Jr T. K., Kern L. R. Widths of Hydraulic Fractures. JPT: 937-49 / T. K. Perkins Jr, L. R. Kern // Trans., AIME. – 1961. – T. 222.

[74] Rappoport R. M. On the question of constructing solutions to axisymmetric and planar problems in the theory of elasticity of a multilayer medium / R. M. Rappoport // Izv. All-Union Research Institute of Hydraulic Engineering named after BE Vedeneeva. – 1963. – 73. – C. - 1963.- S. 193-204 (in Russian).

[75] Rahman M. M., Rahman M. K. A review of hydraulic fracture models and development of an improved pseudo-3D model for stimulating tight oil/gas sand / M. M. Rahman, M. K. Rahman // Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects. – 2010. – T. 32. – №. 15. – C. 1416-1436.

[76] Samarsky A. A., Gulin A. V. Numerical Methods: A Textbook for High Schools / A. A. Samarsky, A. V. Gulin - M.: Science. - 1989 (in Russian).

[77] Savitski A. A., Detournay E. Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions / A. A. Savitski, E. Detournay // International journal of solids and structures. – 2002. – T. 39. – №. 26. – C. 6311-6337.

[78] Settari A., Cleary M. P. Development and testing of a pseudo-three-dimensional model of hydraulic fracture geometry / A. Settari, M. P. Cleary // SPE Production Engineering. – 1986. – T. 1. – №. 06. – C. 449-466.

[79] Shevlyakov Yu. A. Matrix algorithms in the theory of elasticity of inhomogeneous media / Yu. A. Shevlyakov - Vishcha school, 1977 (in Russian).

[80] Siebrits E., Peirce A. P. An efficient multilayer planar 3D fracture growth algorithm using a fixed mesh approach / E. Siebrits, A. P. Peirce // International journal for numerical methods in engineering. – 2002. – T. 53. – №. 3. – C. 691-717.

[81] Siegman A. E. Quasi fast Hankel transform / A. E. Siegman // Optics Letters. – 1977. – T. 1. – №. 1. – C. 13-15.

[82] Simonson E. R. et al. Containment of massive hydraulic fractures / E. R. Simonson // Society of Petroleum Engineers Journal. – 1978. – T. 18. – № 01. – C. 27-32.

[83] Singh S. J. Static deformation of a multilayered half-space by internal sources / S. J. Singh // Journal of Geophysical Research. – 1970. – T. 75. – №. 17. – C. 3257-3263.

[84] Singh S. J. Static deformation of a transversely isotropic multilayered half-space by surface loads / S. J. Singh // Physics of the earth and Planetary Interiors. – 1986. – T. 42. – №. 4. – C. 263-273.

[85] Starobinskii E. B., Stepanov A. D. Adapting the explicit time integration scheme for modeling of the hydraulic fracturing within the Planar3D approach / E. B. Starobinskii, A. D. Stepanov // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2019. – T. 1236. – №. 1. – C. 012052.

[86] Thomson W. T. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium / W.T. Thomson // Journal of applied Physics. – 1950. – T. 21. – №. 2. – C. 89-93.

[87] Van Eekelen H. A. M. Hydraulic fracture geometry: fracture containment in layered formations / H. A. M. Van Eekelen // Society of Petroleum Engineers Journal. – 1982. – T. 22. – №. 03. – C. 341-349.

[88] Vandamme L., Curran J. H. A three-dimensional hydraulic fracturing simulator / L. Vandamme, J. H. Curran // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1989. – T. 28. – №. 4. – C. 909-927.

[89] Wardle L. J. Stress analysis of multi layered anisotropic elastic systems subject to rectangular loads / L. J. Wardle – 1980. – №. 33.

[90] Zhemochkin B. N. The flat problem of calculating an infinitely long beam on an elastic foundation / B. N. Zhemochkin // Calculation of beams on an elastic half-space and half-plane. M .: Edition of the Military Engineering Academy of the Red Army. - 1937 (in Russian).

[91] Zienkiewicz O. C. et al. Computational geomechanics / O. C. Zienkiewicz – Chichester : Wiley, 1999. – C. 105-110.