

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ВИКУЛИНА Юлия Игоревна

ЭФФЕКТ ПОВЕРХНОСТНЫХ И МЕЖФАЗНЫХ
НАПРЯЖЕНИЙ В ДЕФОРМИРУЕМОМ ТЕЛЕ С ПЛОСКОЙ И
РЕЛЬЕФНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
профессор Греков М. А.

Санкт-Петербург
2014

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Полуплоскость с прямолинейной границей	17
1.1 Теория поверхностной упругости	17
1.2 Постановка задачи	20
1.3 Основные соотношения	22
1.4 Сведение задачи к интегральному уравнению	24
1.5 Решение интегрального уравнения при действии периодической нагрузки	28
1.6 Пример	30
1.7 Анализ влияния поверхностного напряжения на напряжённое состояние границы полуплоскости	33
Глава 2. Полуплоскость со слабо искривлённой границей	38
2.8 Постановка задачи	38
2.9 Основные соотношения	40
2.10 Метод возмущений	42
2.11 Сведение задачи к интегральному уравнению	45
2.12 Решение интегрального уравнения для периодической формы поверхности	48
2.13 Анализ влияния поверхностного напряжения на напряжённое состояние слабо искривлённой границы полуплоскости	49

Глава 3. Двухкомпонентная плоскость со слабо искривлённой межфазной границей	55
3.14 Постановка задачи.....	55
3.15 Основные соотношения	57
3.16 Метод возмущений	59
3.17 Сведение задачи к интегральному уравнению.....	63
3.18 Решение интегрального уравнения для периодической формы межфазной поверхности	67
3.19 Анализ влияния межфазного напряжения на напряжённое состояние границы раздела двух сред	71
Заключение	77
Список литературы	81

Введение

Поверхностные напряжения — одна из главных причин экстраординарных механических свойств наноструктур и наноматериалов. Понятие поверхностного напряжения впервые было введено Дж. Гиббсом [1], и в дальнейшем его теория использовалась и развивалась усилиями многих ученых [2, 3, 4, 5]. В представлениях Гиббса поверхностное напряжение есть непрерывная функция, которая определена на «математической поверхности» нулевой толщины. Появление поверхностных напряжений в твёрдых телах связано с различными условиями равновесия атомов внутри тела и вблизи его поверхности [6]. При этом появляется свободная поверхностная энергия, которая ведёт к появлению поверхностных напряжений. Сходная ситуация прослеживается и на межфазных поверхностях в двухкомпонентных материалах.

Развитие нанотехнологий и применение наноматериалов (наноплёнок, нанопроволок, нанотрубок, наночастиц и др.) привели к всесторонним исследованиям свойств этих материалов, а также свойств поверхностных и межфазных наноструктур. Основные достижения в этой области обозначены в обзоре J. Wang и др. [7].

Долгое время считалось, что учёт поверхностного напряжения имеет смысл лишь в задачах о деформации жидкостей и при анализе напряжённого состояния межфазной границы жидкость-жидкость [8]. Поэтому, как правило, в классической теории упругости влиянием поверхностных напряжений на состояние упругого тела пренебрегают, так как это влияние распространяется только на несколько приповерхностных слоёв атомов и на макромасштабах становится практически незначительным по сравнению с влиянием других нагрузок. Однако на субмикронных уровнях даже в твёрдых телах доминирующими становятся квантовые и поверхностные эффекты, которые оказывают значительное влияние на механические и электрические свойства наноматериала.

лов. Для материалов, характерные размеры которых находятся в нанометровом диапазоне, это влияние необходимо учитывать. Так, уже в 1953 г. С. Herring [9] утверждал, что для наноразмерных частиц поверхностные напряжения могут вызывать большие напряжения внутри материала и таким образом менять модули упругости материала в целом. В работе [10] С.С. Sun отмечает, что поверхностная упругость и жёсткость поверхности зависят от нескольких факторов, включая такие как кривизна поверхности, природа связей между атомами, а также отношение температуры образца к температуре плавления.

В XXI веке вслед за бурным развитием нанотехнологий и в связи с увеличением потребностей науки, значительно возрос интерес к эффектам, связанным с наличием поверхностных и межфазных напряжений в однородных и неоднородных наноматериалах. Появилось множество работ, в которых с помощью компьютерного моделирования наноструктурных материалов были получены важные фундаментальные результаты. Последние достижения в некоторых фундаментальных задачах теории упругости для неоднородных материалов с поверхностными и межфазными эффектами отражены в работе Н.Л. Duan [11]. Многочисленные теоретические исследования в рамках континуальной механики, основанные на использовании обобщённой теории упругости, которая включает классическую теорию для основного объёма материала и поверхностную теорию упругости для поверхностей и границ раздела, показали, что именно учёт поверхностных напряжений позволяет адекватно описать, например, размерный эффект, наблюдаемый в экспериментах над различными нанобъектами.

Теория Гёртина – Мёрдока, получившая бурное развитие в последние 15 лет, хорошо описывает влияние поверхностных напряжений на состояние идеально упругого тела на наномасштабных уровнях и позволяет аналитически объяснять свойства поверхности наноматериалов [12, 13, 14]. Для межфазных поверхностей в твёрдых телах рассматривается такой тип межфазных напряжений, при котором деформация является когерентной, то есть касательные напряжения в граничащих средах равны и на межфазной поверхности атомные связи не разрываются. М.Е. Гёртин и А.И. Мёрдок [12] представили поверхност-

ное напряжение как функцию градиента деформации.

Для математического описания состояния поверхности существуют два вида соотношений — определяющие соотношения поверхностной теории упругости и уравнения равновесия. Z.P. Huang и J. Wang [15] вывели определяющие соотношения для сверхупругой среды в конечных деформациях. Важно отметить, что при учёте поверхностных напряжений, в отличие от классической постановки, даже при малых деформациях тензор поверхностных напряжений Коши не совпадает с тензорами Пиола — Кирхгофа первого и второго рода из-за наличия остаточных поверхностных напряжений.

В определяющие соотношения обобщённой теории упругости, состоящей из классической — для объёма и поверхностной — для поверхности, помимо параметров Ламе для объёмного материала входят дополнительные упругие константы, характеризующие свойства поверхности. Так как эти константы имеют другую размерность по сравнению с параметрами Ламе, в решении появляются некоторые размерные параметры, которые неизбежно начинают влиять на напряжённое состояние тела и его механические свойства. В этом состоит главная особенность теории упругости при учёте поверхностных напряжений. J. Wang и др. в работе [16] показали, что зависимость от размерных параметров, вызванная эффектом поверхностных напряжений во многих задачах может быть сведена к простому закону подобия.

Второй вид фундаментальных уравнений для описания состояния поверхности — это уравнения равновесия поверхности, то есть баланса линейного момента и момента количества движения криволинейного элемента поверхности. Рассматривая равновесие приповерхностных слоёв для гладкой поверхности произвольной формы, М.Е. Гёртин и А.И. Мёрдок пришли к обобщённому закону Лапласа — Юнга [12]. В работе [17] обобщённый закон Лапласа — Юнга записан в произвольной криволинейной системе координат, включая сферическую и цилиндрическую.

Недавно Н. Altenbach и др. [18] сформулировали и доказали теоремы о существовании и единственности решения статической и динамической краевой и начальной задачи теории упругости при учёте поверхностных напряжений.

Слабая формулировка начальных и краевых задач в работе [18] послужила математической основой для появления новых численных методов решения указанных задач.

На малых масштабах эффект поверхностных и межфазных напряжений становится крайне важным для определения напряжённого состояния тонких плёнок и многослойных материалов. С уменьшением толщины слоёв до нескольких нанометров модули упругости многослойного материала могут существенно изменяться — как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения [19]. Существует множество исследований, посвящённых оценке упругих свойств, зависящих от размерных параметров наноструктурного материала при учёте поверхностных напряжений, например, [19] — [25].

В последние два десятилетия широкое развитие получило изучение механических свойств наноструктурных материалов с помощью компьютерного моделирования и проведения экспериментов. Такие структуры, как наночастицы, нанобалки, наноплёнки уже сегодня являются составными частями многих устройств, поэтому изучение влияния различных факторов, в частности поверхностных напряжений, на их физические свойства является крайне важным для совершенствования приборов, основанных на наноструктурных материалах, изобретения новых устройств, а также для получения новых материалов с желаемыми характеристиками.

Ещё в 1985 г. Я.С. Подстригач и Ю.З. Повстенко предсказали [21], что на наномасштабах существенно возрастает модуль Юнга материала цилиндрической формы по мере уменьшения диаметра образца. В 2004 г. появились и экспериментальные подтверждения. S. Cuenot и др. [22] и G.Y. Jing и др. [23] измерили упругие свойства нанотрубок из серебра с внешним диаметром от 20 до 140 нм посредством контактной атомно-силовой микроскопии и проанализировали результаты в рамках теории поверхностной упругости. В результате было обнаружено, что модуль Юнга действительно растёт с уменьшением диаметра нанотрубок. Причиной такого изменения считается эффект поверхностных напряжений, который также может включать в себя эффекты, связанные с внутренними поверхностными напряжениями, а также влияние оксидной плён-

ки и неровностей поверхности.

R.C. Cammarata [4] отмечает, что для твёрдого тела, один или несколько измерений которого составляют 10 нм или менее, поверхностные или межфазные напряжения могут становиться принципиальными факторами в определении равновесного состояния и поведения материала. R.E. Miller и V.B. Shenoy [24] с помощью компьютерного атомистического моделирования на примере нанотрубок и нанопластин из Al и Si исследовали зависимость упругих свойств от размера образца. Они сравнивали результаты теоретического анализа с данными, полученными в рамках компьютерного моделирования. Исследования показали, что теоретический анализ и атомистическое моделирование хорошо согласуются.

В.А. Еремеев и др. [25] проиллюстрировали размерный эффект, рассмотрев задачу об изгибе наноразмерной пластины при учёте поверхностного напряжения. В этой работе показано, что эффективная жёсткость пластины существенно изменяется при учёте поверхностных напряжений. В работе [26] предложена модель, в которой учитываются поверхностные напряжения и используется подход теории композиционных материалов, в рамках которого поверхностный слой рассматривается как слой конечной толщины, обладающий упругими свойствами, отличными от упругих свойств основного материала. На примере задачи о растяжении-сжатии линейно упругого прямолинейного стержня с цилиндрическими порами одинакового радиуса определена зависимость жёсткости стержня от размеров образца: чем меньше радиус пор, тем жёстче становится стержень, обладающий поверхностными напряжениями. Показано, что в зависимости от параметров задачи поверхностные напряжения могут привести к падению жёсткости стержня с последующим возрастанием либо к монотонному возрастанию.

В рамках теории упругости, учитывающей упругие свойства межфазной поверхности и действующие в ней остаточные напряжения, в работах [27, 28] изучено поведение краевой дислокации, расположенной снаружи эллиптической неоднородности, а также внутри ядра и оболочки нанотрубки, внедрённой в основной материал. Решение строится в виде рядов Фурье. Показано, что чем

меньше радиус кривизны межфазной поверхности между неоднородностью и основным материалом и чем ближе дислокация, тем сильнее проявляется эффект. Анализ различий решений в классической и межфазной постановке показал, что для поля напряжений существенную роль могут играть также положение дислокации, ориентация вектора Бюргерса, отношения между модулями упругости основного материала, неоднородности и межфазной поверхности. Эффект поверхностных напряжений проявляется при уменьшении характерных размеров задачи до наномасштабных.

Актуальность темы. Состояние поверхности во многих микроэлектронных и оптических устройствах имеет первостепенное значение, особенно на наноструктурном уровне. Не меньшее значение имеет состояние межзёренной границы в кристаллических материалах. На макроуровне, влияние слабого искривления внешней поверхности и поверхности раздела на напряжённо-деформированное состояние тела было рассмотрено в работах [29] — [34]. Однако на наномасштабном уровне, на котором особую роль начинают играть поверхностные напряжения, подобные исследования не проводились. Поэтому тема диссертации, в которой исследуется влияние поверхностных и межфазных напряжений на напряжённо-деформированное состояние внешней поверхности и интерфейса упругого тела с наномасштабным рельефом, а также эффект поверхностных напряжений, возникающих на плоской поверхности в результате изменения внешней нагрузки в нанометровом диапазоне, является актуальной.

Цель данной работы состоит в исследовании на наномасштабном уровне эффекта поверхностных напряжений в упругом теле с плоской и рельефной поверхностью, а также межфазных напряжений в двухкомпонентном теле с рельефной поверхностью.

Структура работы. Работа состоит из введения, трёх глав и заключения, содержит 85 страниц, 18 рисунков, 1 таблицу, список литературы содержит 50 наименований.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, приведён краткий исторический обзор по исследуемой тематике, сформулированы цели и задачи работы, изложена методика исследования, перечислены полученные в ра-

боте новые результаты, их практическая ценность и основные положения, выносимые на защиту. В конце введения приводится краткое содержание диссертации.

Глава 1 посвящена определению напряжённо-деформированного состояния упругого полупространства с плоской поверхностью в условиях плоской деформации при действии напряжений на бесконечности, поверхностных напряжений и внешней нагрузки в нанометровом диапазоне изменения. В основе решения задачи лежит классическая теория упругости и теория поверхностной упругости Гёртина — Мёрдока.

Граничные условия формулируются с помощью обобщённого закона Лапласа — Юнга и записываются в комплексном виде. Из определяющих соотношений поверхностной теории упругости, с учётом условия идеального контакта поверхности с основанием выводится уравнение, связывающее искомое поверхностное напряжение с деформацией объёмного материала на границе. С использованием представлений Мухелишвили и комплексных потенциалов Гурса — Колосова, исходная краевая задача сводится к задаче Римана — Гильберта. После подстановки в полученное уравнение напряжений, выраженных через комплексные потенциалы, с учётом формул Сохоцкого — Племяля, задача сводится к решению гиперсингулярного интегрального уравнения относительно производной поверхностного напряжения.

Для случая, когда на границе полуплоскости действуют периодические усилия, построено точное аналитическое решение интегрального уравнения в виде рядов Фурье. Для алюминиевого наноматериала получено распределение продольных и касательных напряжений вдоль границы полуплоскости, а также проиллюстрирован размерный эффект, который проявляется в зависимости напряжений от размерного параметра — периода изменения нагрузки. В результате обнаружено, что с уменьшением участка периода, на котором сосредоточена основная часть нагрузки, влияние поверхностных напряжений на напряжённое состояние тела становится более значительным.

Во **второй главе** приводится решение задачи определения напряжённо-деформированного состояния слабо искривлённой границы полупространства в

условиях плоской деформации при действии поверхностных напряжений, внешней нагрузки и напряжений на бесконечности.

Аналогично главе 1, граничные условия, полученные из обобщённого закона Лапласа — Юнга, записываются в комплексной форме в локальной прямоугольной системе координат. Для формулировки краевых условий используются комплексные потенциалы Гурса — Колосова. Согласно методу возмущений, комплексные потенциалы, поверхностное напряжение и внешняя нагрузка раскладываются в ряды по малому параметру. С учётом полученных разложений и формул Колосова — Мухелишвили исходная краевая задача сводится в каждом приближении к задаче Римана — Гильберта. Из условия идеального контакта искривлённой границы с основанием выводится соотношение, связывающее коэффициенты разложения поверхностного напряжения с решением задачи Римана — Гильберта. Использование формул Сохоцкого — Племяля приводит в каждом приближении к гиперсингулярному интегральному уравнению того же типа, что и в главе 1. Выведенные соотношения позволяют найти любое приближение, зная все предыдущие.

В первом приближении получено точное аналитическое решение интегрального уравнения для периодической формы поверхности в виде рядов Фурье. Приводятся численные результаты расчётов для алюминия при различной форме искривления поверхности и отсутствии внешней нагрузки на границе. Построены графики распределений окружных, касательных и нормальных напряжений в диапазоне одного периода. Графики зависимостей максимумов продольных и нормальных напряжений от периода искривления поверхности иллюстрируют размерный эффект. В конце главы проводится анализ влияния формы искривления на напряжённое состояние границы упругой полуплоскости при учёте поверхностных напряжений. Из полученных зависимостей следует, что чем меньше радиус кривизны искривления поверхности, тем сильнее проявляется влияние поверхностных напряжений.

В третьей главе решается задача определения напряжённо-деформированного состояния двухкомпонентного упругого пространства со слабо искривлённой поверхностью раздела в условиях плоской деформации при

наличии межфазных напряжений и действию напряжений на бесконечности. Полагается, что на межфазной границе отсутствуют разрывы перемещений, а скачок напряжений определяется через межфазное напряжение в соответствии с обобщённым законом Лапласа — Юнга.

Приводятся формулы Колосова — Мусхелишвили, с помощью которых краевые условия записаны через комплексные потенциалы Гурса — Колосова. Как и в главе 2, следуя методу возмущений, комплексные потенциалы и поверхностное напряжение разлагаются в ряд по малому параметру, а их значения на границе — в ряд Тейлора. В результате исходные краевые условия сводятся к двум задачам Римана — Гильберта. Напряжения, выраженные через комплексные потенциалы, подставляются в определяющие соотношения поверхностной теории упругости. С помощью формул Сохоцкого — Племеля построена последовательность гиперсингулярных интегральных уравнений того же типа, что и для первых двух задач. Приводятся выражения для правых частей этого уравнения в любом приближении.

На основе того же способа решения интегрального уравнения, что и в главе 2, для периодической формы межфазной поверхности в первом приближении получены явные выражения для всех коэффициентов разложения, то есть получено точное решение в виде ряда Фурье. Построены графики распределений окружных, касательных и нормальных напряжений для различных форм искривления поверхности. Получены графики зависимости максимумов напряжений от периода искривления поверхности для различных форм искривлений, различных отношений модулей сдвига нижней и верхней области, а также для различных значений биупругой постоянной M . Проведённый анализ позволил выявить размерный эффект, проявляющийся в зависимости напряжённого состояния от периода искривления формы межфазной поверхности, и показал, что чем более острые впадины имеет межфазная поверхность, а также чем больше отличаются модули упругости материалов, тем сильнее проявляется влияние межфазных напряжений.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

Методы исследования. При выполнении диссертационной работы ис-

пользовались различные аналитические методы: методы теории аналитических функций, методы математической физики, метод возмущений границы раздела. Численные результаты и графические построения получены при помощи системы компьютерной алгебры MAPLE.

Научная новизна:

- разработан новый подход к решению ряда краевых двумерных задач, постановка которых основана на определяющих соотношениях объёмной и поверхностной теорий упругости. Метод аналитического решения рассмотренных задач состоит в построении однотипных гиперсингулярных интегральных уравнений;
- впервые получено точное решение задачи о деформации упругой полуплоскости при действии произвольной периодической внешней нагрузки и поверхностного напряжения;
- разработан метод возмущений при решении двумерных задач для упругих областей с наноразмерным рельефом внешней или межфазной поверхности. Построен алгоритм нахождения любого приближения и метод точного решения полученного для каждого приближения однотипного гиперсингулярного интегрального уравнения в случае периодического искривления поверхности;
- проанализирован размерный эффект, который связан с наличием поверхностных напряжений и проявляется в зависимости напряжённого состояния от периода изменения нагрузки, а также от периода искривления поверхности и интерфейса.

Научная и практическая ценность. Предложенный в работе метод решения задач с поверхностными и межфазными напряжениями, приводящий к решению гиперсингулярного интегрального уравнения, может быть распространён на многие аналогичные двумерные задачи, например, задачи для плёночного упругого покрытия при учёте поверхностных напряжений на внешней поверхности и межфазных — на интерфейсе. Результаты данной работы позволяют дать теоретическое объяснение уникальных механических свойств наноматериалов.

териалов и наноструктур. Эти результаты могут быть использованы для оценки работоспособности оптических и электронных устройств, поверхности которых имеют дефекты нанометрового размера. Обнаруженные эффекты, связанные с учётом поверхностных напряжений, представляются существенными для дальнейшего развития физической мезомеханики, одним из направлений которой является описание процессов, происходящих при переходе от мезомасштабных уровней к нанометровым. Найденные решения можно также использовать для оценки точности и достоверности результатов, полученных численными методами и с помощью компьютерного моделирования.

Результаты, выносимые на защиту:

- решение задачи определения напряжённо-деформированного состояния упругого полупространства с плоской поверхностью в условиях плоской деформации при действии поверхностных напряжений, возникших в результате изменения поверхностной нагрузки в нанометровом диапазоне, и напряжений на бесконечности;
- решение задачи определения напряжённо-деформированного состояния упругого полупространства с нанометровым рельефом поверхности в условиях плоской деформации при действии поверхностных напряжений, внешней нагрузки и напряжений на бесконечности;
- решение задачи определения напряжённо-деформированного состояния двухкомпонентного упругого пространства с нанометровым рельефом поверхности раздела в условиях плоской деформации при наличии межфазных напряжений и действии напряжений на бесконечности;
- исследование влияния поверхностных и межфазных напряжений на напряжённое состояние внешней границы и границы раздела двух упругих сред в зависимости от геометрических и физических параметров задачи.

Достоверность результатов обеспечивается корректностью постановки задач и математических методов, использованных в решении рассмотренных задач. Полученные в работе результаты качественно согласуются с результатами решений аналогичных задач наномеханики, рассмотренных разными авторами

при исследовании эффекта поверхностных напряжений. Существование выявленного размерного эффекта было установлено в ряде экспериментальных и теоретических работ.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 10 работ, в том числе 2 статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК. Список публикаций приведён в конце автореферата.

В совместных исследованиях Грекову М. А. принадлежит постановка задачи, общая схема решений и консультации по различным вопросам, связанным с решением задач. Костырко С. А. принадлежит постановка соответствующих задач и обсуждение путей реализации решений. Викулиной Ю. И. принадлежит реализация предложенного научным руководителем метода, получение решения для рассмотренных задач в явном виде, составление компьютерных программ, графические представления полученных результатов и их анализ.

Апробация результатов исследования. Результаты работы докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры вычислительных методов механики деформируемого твёрдого тела, на научном семинаре кафедры математики Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна, а также на 8 научных конференциях:

- CPS'10 – XLI международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (Санкт-Петербург, 2010) опубликована статья;
- CPS'11 – XLII международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (Санкт-Петербург, 2011) – опубликована статья;
- Международная конференция по механике «Шестые Поляховские чтения» (Санкт-Петербург, 2012) – опубликованы тезисы;
- CPS'12 – XLIII международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (Санкт-Петербург, 2012) – опубликована статья;

- ESMC-2012 – международная конференция по механике «The 8th European Solid Mechanics Conference» (Грац, Австрия, 2012) – опубликованы тезисы;
- CPS'13 – XLIV международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (Санкт-Петербург, 2013) – опубликована статья;
- Международная научная конференция «Современные проблемы механики деформируемого твёрдого тела, дифференциальных и интегральных уравнений» (Одесса, Украина, 2013) – опубликованы тезисы;
- XXI Петербургские чтения по проблемам прочности (Санкт-Петербург, 2014) – тезисы в печати.

Глава 1. Полуплоскость с прямолинейной границей

В данной главе приводится аналитическое решение задачи о напряжённо-деформированном состоянии полуплоскости под действием внешней периодической нагрузки с учётом поверхностного напряжения. Для постановки краевой задачи используется обобщённый закон Лапласа — Юнга. С использованием линейризованных соотношений теории поверхностной упругости Гёртина — Мёрдока, а также представлений Мухелишвили и комплексных потенциалов Гурса — Колосова, задача в общем случае сводится к решению гиперсингулярного интегрального уравнения относительно неизвестной производной поверхностного напряжения с особенностью второго порядка. Для произвольной периодической нагрузки аналитическое решение этого уравнения получено в виде ряда Фурье.

§ 1.1 Теория поверхностной упругости

В данном параграфе приводятся общие соотношения объёмной и поверхностной теории упругости, на основе которых строятся решения задач, рассмотренных в данной работе. Формулируется обобщённый закон Лапласа — Юнга.

В последние годы получила развитие теория упругости с учётом поверхностных напряжений, в рамках которой тело на наномасштабах всё ещё представляется непрерывно распределённым веществом. С точки зрения механики

в этой теории рассматривается деформируемое тело, к границе которого приклеена упругая мембрана [14]. Таким образом, модель сводится к наличию на поверхности тела оболочки-мембраны, для описания которой используется континуальный подход.

Наряду с уравнениями классической теории упругости приведем уравнения, описывающие напряжённо-деформированное состояние поверхности. Соотношения объёмной теории упругости имеют вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\mathbf{I} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.1)$$

$$W = W(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \frac{1}{2}\lambda \operatorname{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon} + \mu\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \equiv \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (1.3)$$

где W — плотность потенциальной энергии деформации в объёме, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформаций, λ, μ — постоянные Ламе, ∇ — пространственный оператор градиента, $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})$ — след тензора второго ранга. Значком T снабжаются сопряжённые тензоры, отличающиеся от исходных перестановкой ортов в диаде (или, что то же, перестановкой индексов в компонентах тензора).

Соотношения поверхностной теории упругости имеют вид: [12, 14]

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^s} = \boldsymbol{\sigma}_0^s \mathbf{A} + \lambda^s \mathbf{A} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^s + 2\mu^s \boldsymbol{\varepsilon}^s, \quad (1.4)$$

$$U = U(\boldsymbol{\varepsilon}^s) \equiv \boldsymbol{\sigma}_0^s \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^s + \frac{1}{2}\lambda^s \operatorname{tr}^2 \boldsymbol{\varepsilon}^s + \mu^s \boldsymbol{\varepsilon}^s \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^s, \quad (1.5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^s = \boldsymbol{\varepsilon}^s(\mathbf{u}) \equiv \frac{1}{2} ((\nabla^s \mathbf{u}^s) \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla^s \mathbf{u}^s)^T), \quad (1.6)$$

где U — плотность потенциальной энергии деформации в поверхности, $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ — поверхностный тензор деформаций, \mathbf{u}^s — вектор перемещений, $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$, \mathbf{I} — трехмерный единичный тензор, \mathbf{n} — вектор внешней нормали к поверхности, λ^s, μ^s — модули поверхностной упругости, аналогичные постоянным Ламе λ, μ для объёмной изотропной упругости, $\nabla^s = \nabla - \mathbf{n}\partial/\partial n$ — поверхностный оператор градиента, ∇ — оператор Гамильтона; $\boldsymbol{\sigma}_0^s$ — остаточное поверхностное напряжение. Тензор $\boldsymbol{\sigma}^s$ — тензор поверхностных напряжений, который может

быть рассмотрен как действующий в поверхности тела тензор усилий, которому соответствует тензор деформаций поверхности $\boldsymbol{\varepsilon}^s$.

Введение такой системы уравнений (1.1) — (1.6), связывающей поверхностное и объёмное напряжённо-деформированное состояние, позволяет обнаружить и исследовать размерные эффекты, свойственные наноматериалам.

Для формулировки краевых условий используется вариационный метод. Функционал полной энергии для тела с поверхностными напряжениями имеет вид

$$J(\mathbf{u}) = E(\mathbf{u}) - A(\mathbf{u}), \quad (1.7)$$

где E, A — работа внутренних и внешних сил соответственно.

$$E(\mathbf{u}) = \int_V W(\boldsymbol{\varepsilon})dV + \int_{\Gamma} U(\boldsymbol{\varepsilon}^s)d\Gamma, \quad A(\mathbf{u}) = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}dV + \int_{\Gamma} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}d\Gamma,$$

где \mathbf{f}, \mathbf{p} — векторы внешних объёмных и поверхностных сил соответственно.

Из условия стационарности функционала полной энергии

$$\delta J(\mathbf{u}) = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} : \delta \mathbf{u} = 0,$$

следует уравнение равновесия:

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0, \quad (1.8)$$

и статические краевые условия (обобщённый закон Лапласа — Юнга) [11, 12, 35]:

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nabla^s \cdot \boldsymbol{\sigma}^s)|_{\Gamma} = \mathbf{p}. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) означает, что действие поверхностных напряжений заменяется действием соответствующих усилий $\mathbf{t}^s(z) = \nabla^s \cdot \boldsymbol{\sigma}^s$, определяемых действием оператора поверхностного градиента на тензор поверхностных напряжений [11, 36]

$$\begin{aligned} \nabla^s \cdot \boldsymbol{\sigma}^s = & - \left(\frac{\sigma_{11}^s}{R_1} + \frac{\sigma_{22}^s}{R_2} \right) \mathbf{n} + \frac{\mathbf{e}_1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} h_2 \sigma_{11}^s + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} h_1 \sigma_{21}^s + \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12}^s - \right. \\ & \left. - \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22}^s \right) + \frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_2} \left(- \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{11}^s + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} h_2 \sigma_{12}^s + \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{21}^s + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} h_1 \sigma_{22}^s \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — орты криволинейной системы координат α_1, α_2 ; h_1, h_2 — соответствующие метрические коэффициенты, R_1, R_2 — главные радиусы кривизны координатных линий, σ_{ij}^s — компоненты тензора поверхностных напряжений в координатной системе α_1, α_2 .

§ 1.2 Постановка задачи

Рассмотрим изотропное и однородное полупространство, плоская поверхность которого находится под действием внешней нагрузки, и примем в расчёт действие поверхностных напряжений на границе. Будем считать, что выполняются условия плоской деформации. Тогда можем перейти к рассмотрению полуплоскости с прямолинейной границей.

С помощью линеаризованных соотношений Гёртина — Мёрдока и обобщённого закона Лапласа — Юнга [11] сформулируем в общем виде краевую задачу о деформации полуплоскости $\Omega = \{z : \text{Im } z < 0, \text{Re } z \in \mathbb{R}^1\}$, с прямолинейной границей Γ (рис. 1.1) [37]:

$$\Gamma = \{z : \text{Im } z = 0, \text{Re } z \in \mathbb{R}^1\}, \quad z = x_1 + ix_2.$$

Считаем, что в общем случае на границе полуплоскости действует периодическая нагрузка

$$p(x_1) = p(x_1 + a), \quad \int_{x_1 - a/2}^{x_1 + a/2} p(t) dt = P, \quad P = P_1 + iP_2, \quad (2.1)$$

где функция $p(x_1)$ удовлетворяет условию Гёльдера всюду на Γ .

В комплексной записи в случае плоской задачи граничное условие (1.9) принимает вид

$$\sigma_{22}(z) - i\sigma_{12}(z) = -i(p_1(x_1) + ip_2(x_1)) - i(t_1^s(x_1) + it_2^s(x_1)), \quad z \in \Gamma, \quad (2.2)$$

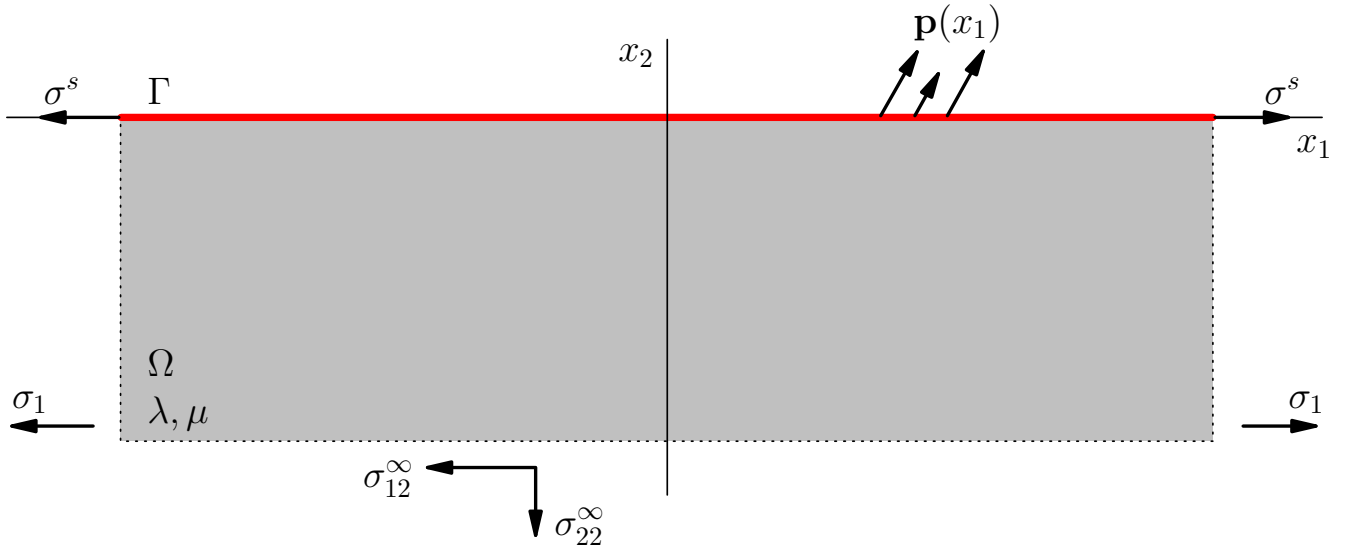


Рис. 1.1. Модель полуплоскости при действии внешних усилий $\mathbf{p}(x_1)$, действующих на границе

где p_1, p_2 — проекции вектора внешней нагрузки \mathbf{p} на оси декартовой прямоугольной системы координат (ДПСК) x_1, x_2 , а $t_1^s(x_1), t_2^s(x_1)$ — аналогичные проекции вектора усилий \mathbf{t}^s .

Полагаем, что на бесконечности выполнены следующие условия:

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} (\sigma_{22}(z) - i\sigma_{12}(z)) = -\frac{iP}{a}, \quad \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \sigma_{11}(z) = \sigma_1; \quad (2.3)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \omega(z) = \omega^\infty,$$

где σ_{ij} — компоненты напряжений в системе координат x_1x_2 ; а ω — угол поворота материальной частицы.

Для решения поставленной задачи сформулируем определяющие соотношения объёмной и поверхностной теории упругости.

§ 1.3 Основные соотношения

В данном разделе выводится уравнение, связывающее неизвестное поверхностное напряжение с окружной деформацией основного материала на границе из условия контакта поверхности с объёмом.

Преобразуем выражение (1.10) для рассматриваемого случая. Поскольку поверхность полупространства плоская, в соотношении (1.10) в качестве криволинейной системы координат α_1, n, α_2 возьмём ДПСК x_1, x_2, x_3 , то есть примем, что $\alpha_1 = x_1, n = x_2, \alpha_2 = x_3$. В этом случае для плоской поверхности $h_1 = h_2 = 1$ и $1/R_1 = 1/R_2 = 0$ [38]. Отсюда и из (1.10) вытекает, что вектор \mathbf{t}^s лежит в плоскости $x_2 = 0$, т. е. проекция $t_2^s = 0$.

В общем случае тензор поверхностных напряжений имеет вид:

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \sigma_{11}^s \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \sigma_{13}^s (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) + \sigma_{33}^s \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \quad (3.1)$$

Так как при плоской деформации компоненты тензоров объёмных и поверхностных деформаций удовлетворяют условиям $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$, $\varepsilon_{33}^s = \varepsilon_{13}^s = \varepsilon_{23}^s = 0$, то из законов упругости (1.1) и (1.4) следует, что $\sigma_{13} = 0$ и $\sigma_{13}^s = 0$, а σ_{33}^s не зависит от x_3 . Отсюда находим, что выражение (1.10) сводится к следующему:

$$\mathbf{t}^s(z) = \nabla^s \cdot \boldsymbol{\sigma}^s = t_1^s \mathbf{e}_1 = \frac{\partial \sigma_{11}^s}{\partial x_1} \mathbf{e}_1. \quad (3.2)$$

Подставляя полученное выражение в соотношение (2.2), приходим к граничному условию

$$\sigma_{22}(x_1) - i\sigma_{12}(x_1) = -ip(x_1) - i\sigma_{11}^{s'}(x_1), \quad z \in \Gamma, \quad (3.3)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, а σ_{11}^s — требующее определения поверхностное напряжение. Заметим, что уравнение (3.3) можно получить непосредственно путём составления баланса сил, действующих на элемент плоской дуги, что было сделано в работе [33].

Определяющие соотношения поверхностной [11, 12] и объёмной теории упругости (1.1), (1.4) при плоской деформации сводятся соответственно к сле-

дующим:

$$\sigma_{11}^s = \gamma_0 + (\lambda_s + 2\mu_s)\varepsilon_{11}^s, \quad \sigma_{33}^s = \gamma_0 + (\lambda_s + \gamma_0)\varepsilon_{11}^s, \quad (3.4)$$

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{11}, \quad (3.5)$$

$$\sigma_{21} = 2\mu\varepsilon_{21}, \quad \sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}), \quad (3.6)$$

где γ_0 — остаточное поверхностное напряжение в недеформированном состоянии; ε_{ij} — компоненты объёмной деформации; ε_{11}^s — компонента деформации поверхности.

Однако, в связи с тем, что поверхность в рамках модели рассматривается как оболочка, приклеенная к основанию, компонента деформации поверхности связана с компонентой деформации объёмного материала. Комплексный аналог вектора перемещений $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ имеет вид

$$u = u_1 + iu_2.$$

Условия непрерывности перемещений u_1, u_2 при переходе от объёма Ω к границе Γ запишем в виде

$$\lim_{z \rightarrow x_1 - i0} u_j(z) = u_j^s(x_1), \quad (3.7)$$

где u_j^s — перемещение точек границы Γ вдоль оси x_j . Тогда на основании соотношений (1.3) и (1.6) из условия непрерывности перемещений (3.7) вытекает условие непрерывности деформации ε_{11} [39]:

$$\lim_{z \rightarrow x_1} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^s. \quad (3.8)$$

Соотношения (3.4) — (3.8) приводят к уравнению, связывающему неизвестное поверхностное напряжение и соответствующую компоненту деформации основного материала на границе:

$$\sigma_{11}^s(x_1) = \gamma_0 + (2\mu^s + \lambda^s)\varepsilon_{11}(x_1). \quad (3.9)$$

Таким образом, приходим к решению задачи определения напряженно-деформированного состояния полуплоскости с прямолинейной границей, на которой действуют поверхностные напряжения σ_{11}^s , связанные с деформацией ε_{11} соотношением (3.9), при условиях на бесконечности (2.3).

§ 1.4 Сведение задачи к интегральному уравнению

В данном параграфе решение задачи сводится к решению гиперсингулярного интегрального уравнения с особенностью второго порядка относительно производной неизвестного поверхностного напряжения. Для его вывода используются комплексные потенциалы Гурса — Колосова, представления Мусхелишвили и метод сведения исходной краевой задачи к задаче Римана-Гильберта.

Согласно [40, 41], в условиях плоской деформации связь напряжений σ_{nn}, σ_{nt} в локальной ДПСК n, t и перемещений u_1, u_2 в точке z с потенциалами Гурса — Колосова Φ и Ψ выражается соотношениями:

$$\sigma_{nn}(z) + i\sigma_{nt}(z) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \left(z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \right) e^{-2i\alpha}, \quad (4.1)$$

$$2\mu \frac{d}{dz}(u_1(z) + iu_2(z)) = \varkappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \left(z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \right) e^{-2i\alpha}, \quad (4.2)$$

где α — угол наклона площадки с нормалью n к оси x_1 ; $\varkappa = 3 - 4\nu$; ν — коэффициент Пуассона. Производная в (4.2) берется в направлении оси t .

Введем функцию $\Upsilon(z)$, аналитическую в $C\overline{\Omega}$, где $\overline{\Omega}$ означает замыкание множества Ω , а $C\overline{\Omega}$ — дополнение множества $\overline{\Omega}$ до плоскости (рис. 1.2).

$$\Upsilon(z) = -\overline{\Phi(\bar{z})} - z\overline{\Phi'(\bar{z})} - \overline{\Psi(\bar{z})}, \quad \bar{z} \in \Omega. \quad (4.3)$$

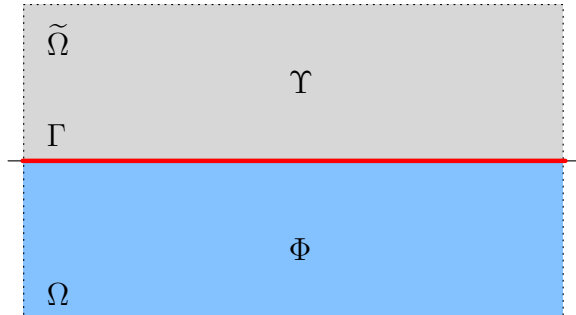


Рис. 1.2. Области определения голоморфных функций Φ и Υ

Считая, что $z \in \Omega$, а, следовательно, $\bar{z} \in C\bar{\Omega}$, выразим функцию $\Psi(z)$ через $\Phi(z)$ и $\Upsilon(z)$. Внесём полученное значение $\Psi(z)$ в соотношения (4.1) – (4.2) и получим выражения для компонент вектора напряжения σ_n и вектора перемещения \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} + i\sigma_{nt} = & \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \\ & - \left(\Upsilon(\bar{z}) + \overline{\Phi(z)} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \right) e^{-2i\alpha}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} -2\mu \frac{d}{dz} (u_1 + iu_2) = & -\kappa \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \\ & - \left(\Upsilon(\bar{z}) + \overline{\Phi(z)} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \right) e^{-2i\alpha}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

При выводе этих соотношений использованы закон упругости (1.1), уравнение неразрывности, уравнения равновесия (1.8), см. [40]. То есть выполняются все необходимые соотношения за исключением граничных условий.

Из (2.3), (4.1) и (4.2) следуют значения функций Φ и Υ на бесконечности

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \Phi(z) = \frac{\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty}{4} + \frac{2i\mu}{\kappa + 1} \omega^\infty = \frac{\sigma_1}{4} + \frac{P_2}{4a}, \quad (4.6)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \Upsilon(\bar{z}) = \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \Phi(z) - (\sigma_{22}^\infty - i\sigma_{12}^\infty) = \frac{\sigma_1}{4} + \frac{P_2}{4a} + \frac{iP}{a}. \quad (4.7)$$

Перейдём в (4.4) к пределу при стремлении z снизу к границе Γ , полагая $\alpha = 0$. С учётом граничных условий (3.3) получим

$$\Theta^+(x_1) - \Theta^-(x_1) = it_1^s(x_1) + ip(x_1), \quad (4.8)$$

где $\Theta^\pm(x_1) = \lim_{\text{Im } z \rightarrow \pm 0} \Theta(z)$ и

$$\Theta(z) = \begin{cases} \Upsilon(z), & \text{Im } z > 0, \\ \Phi(z), & \text{Im } z < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \Theta^+(x_1) = \lim_{\text{Im } z \rightarrow +0} \Upsilon(z) = \Upsilon^+(x_1), \\ \Theta^-(x_1) = \lim_{\text{Im } z \rightarrow -0} \Phi(z) = \Phi^-(x_1). \end{cases} \quad (4.9)$$

Таким образом, пришли к задаче Римана – Гильберта (4.8) о скачке голоморфной функции $\Theta(z)$ [40]. В силу условий (4.6) – (4.7) её решение можно

записать в виде

$$\Theta(z) = \Theta_u(z) + \Theta_k(z) + C, \quad (4.10)$$

$$\Theta_u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{it_s(t)}{z-t} dt, \quad \Theta_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ip(t)}{z-t} dt.$$

Функция Θ_u обозначает слагаемые, зависящие от неизвестного поверхностного напряжения, а функция Θ_k — от известных внешних усилий.

Выведем уравнение для нахождения функции t_1^s . Полагая $\alpha = \pi/2$ в (4.4) и $\alpha = 0$ в (4.4) и (4.5), на границе Γ получим

$$\sigma_{11}(x_1) + i\sigma_{12}(x_1) = \Phi^-(x_1) + 2\overline{\Phi^-(x_1)} + \Upsilon^+(x_1), \quad (4.11)$$

$$\sigma_{22}(x_1) - i\sigma_{12}(x_1) = \Phi^-(x_1) - \Upsilon^+(x_1), \quad (4.12)$$

$$-2\mu \frac{du}{dx_1} = -\varkappa\Phi^-(x_1) - \Upsilon^+(x_1). \quad (4.13)$$

Отсюда

$$\varepsilon_{11} = \left. \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|_{\Gamma} = \frac{1}{2\mu} \operatorname{Re} \{ \varkappa\Phi^- + \Upsilon^+ \}. \quad (4.14)$$

Подставив полученное соотношение (4.14) в уравнение (3.9), приходим к выражению

$$\sigma_{11}^s = \gamma_0 + M \operatorname{Re} \{ \varkappa\Phi^- + \Upsilon^+ \}, \quad M = \frac{2\mu^s + \lambda^s}{2\mu}. \quad (4.15)$$

После дифференцирования (4.15), с учётом (3.2) получим:

$$t_1^s(x_1) = \frac{\partial \sigma_{11}^s}{\partial x_1} = M \operatorname{Re} \{ \varkappa\Phi'^-(x_1) + \Upsilon'^+(x_1) \}. \quad (4.16)$$

Подставляя в уравнение (4.16) представления (4.9) и (4.10), приходим к уравнению относительно неизвестной функции t_1^s :

$$t_1^s(x_1) - M \operatorname{Re} (\varkappa\Theta_u'^-(x_1) + \Theta_u'^+(x_1)) = M \operatorname{Re} (\varkappa\Theta_k'^-(x_1) + \Theta_k'^+(x_1)). \quad (4.17)$$

Покажем, что уравнение (4.17), является интегральным уравнением. Заметим, прежде всего, что, согласно [40], для интеграла типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt \quad (4.18)$$

граничные значения определяются формулами Сохоцкого – Племеля:

$$F^+(t_0) = \frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t - t_0} dt, \quad (4.19)$$

$$F^-(t_0) = -\frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t - t_0} dt, \quad (4.20)$$

где в правых частях интегралы понимаются в смысле главных значений по Коши, а функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера.

Применим формулы Сохоцкого – Племеля к функции $\Theta(x_1)$ в (4.10):

$$\begin{aligned} \Theta^\pm(x_1) &= \pm \frac{1}{2}it_1^s(x_1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{it_1^s(x_1)}{t - x_1} dt \pm \\ &\pm \frac{1}{2}ip(x_1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ip(x_1)}{t - x_1} dt + C. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Подставим (4.21) в (4.17). Полагая, что неизвестная функция $t_1^s(x_1)$ достаточно гладкая, в полученном уравнении можем продифференцировать под знаком интеграла [42]. Тогда с учётом обозначений (3.2) приходим к интегродифференциальному гиперсингулярному уравнению относительно функции $\sigma_{11}^{s'}$ с особенностью второго порядка:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{s'}(x_1) - \frac{M(\varkappa + 1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_{11}^{s'}(t)}{(t - x_1)^2} dt = \\ = \frac{M(\varkappa - 1)}{2} p_2'(x_1) + \frac{M(\varkappa + 1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_1(t)}{(t - x_1)^2} dt. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Это уравнение получено без использования условий периодичности функции $p(x_1)$ и, следовательно, оно справедливо для любой нагрузки. В случае непериодической нагрузки функция p должна исчезать на бесконечности и удовлетворять необходимым условиям существования интеграла в правой части уравнения (4.22) в смысле конечной части по Адамару [42].

Важно отметить, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (4.22), имеет только нулевое решение. В противном случае, при отсутствии внешних усилий существовало бы поверхностное напряжение σ_{11}^s , отличное от константы, что для бесконечной плоской поверхности нереально. По этой причине, если производная функции t^s удовлетворяет условию Гёльдера, то уравнение (4.22) всегда имеет единственное решение при любой непрерывной правой части [42].

§ 1.5 Решение интегрального уравнения при действии периодической нагрузки

Найдём решение интегрального уравнения в случае действия на границе Γ самоуравновешенной периодической нагрузки $p(x)$, т. е. при $P = 0$. Рассмотрим частный случай, когда касательные усилия p_1 описываются нечётной функцией, а нормальные p_2 — чётной. Тогда функцию p можно разложить в следующий ряд Фурье

$$p(x) = p_1(x) + ip_2(x) = \sum_{k=0}^n (C_k \sin b_k x + iD_k \cos b_k x), \quad (5.1)$$

где

$$C_k = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} p_1(x) \sin b_k x dx, \quad D_k = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} p_2(x) \cos b_k x dx, \quad b_k = \frac{2\pi k}{a}.$$

Здесь и далее вместо x_1 используем обозначение $x \equiv x_1$.

Вещественную функцию σ_{11}^s также ищем в виде ряда Фурье:

$$\sigma_{11}^s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos b_k x + B_k \sin b_k x. \quad (5.2)$$

Неизвестные коэффициенты A_k, B_k можно найти из уравнения (4.22), подставив в него выражения (5.1) и (5.2) и взяв соответствующие интегралы. Однако проще найти эти коэффициенты другим путём.

Для интегралов типа Коши (4.18) в случае периодической функции справедливы утверждения [41]:

1. Если функция $f(z)$ голоморфна в нижней полуплоскости Ω , включая бесконечно удалённую точку, непрерывная в $\Omega \cup \Gamma$, периодическая по переменной $\operatorname{Re} z$ и $\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow -\infty} f(z) = a = \text{const}$, $|a| < \infty$. Тогда

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} a/2, & \operatorname{Im} z > 0, \\ -f(z) + a/2, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

2. Если функция $f(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости $\bar{\Omega}$, включая бесконечно удалённую точку, непрерывная в $\bar{\Omega} \cup \Gamma$, периодическая по переменной $\operatorname{Re} z$ и $\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow -\infty} f(z) = a = \text{const}$, $|a| < \infty$. Тогда

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f(z) - a/2, & \operatorname{Im} z > 0, \\ -a/2, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Подставляя разложения (5.1), (5.2) в решение краевой задачи (4.10), с учётом (5.3) и (5.4) приходим к следующему выражению для комплексного потенциала Θ :

$$\Theta(z) = C + \sum_{k=0}^{\infty} \begin{cases} \frac{1}{2}(C_k - D_k - b_k A_k + i b_k B_k) e^{i b_k z}, & \operatorname{Im} z > 0, \\ \frac{1}{2}(C_k + D_k - b_k A_k - i b_k B_k) e^{-i b_k z}, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Подставим выражения (5.5) в уравнение (4.15) с учётом обозначений (4.9) и, приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем решение:

$$\begin{aligned} A_0 &= \gamma_0 + M(\varkappa + 1) \frac{\sigma_1}{4}, \\ A_k &= \frac{M(C_k(\varkappa + 1) + D_k(\varkappa - 1))}{2 + M b_k(\varkappa + 1)}, \quad k \geq 1, \\ B_k &= 0, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Таким образом, найдены аналитические выражения для всех коэффициентов ряда Фурье (5.2) искомой функции $\sigma_{11}^{s'}$, то есть получено точное решение инте-

грального уравнения (4.22) в виде ряда Фурье:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^s(x) &= \tau_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos b_k x, \\ \tau_0 &= \gamma_0 + M(\varkappa + 1) \frac{\sigma_1}{4}.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Величина τ_0 есть не что иное, как поверхностное напряжение, отвечающее однородному напряжённо-деформированному состоянию тела с плоской границей. Из (5.7) видим, что $\tau_0 = \gamma_0$ при отсутствии в теле напряжений ($\sigma_1 = 0$, $p = 0$). Поскольку в этом случае поверхность не может находиться в напряжённом состоянии, то $\gamma_0 = 0$. Таким образом, в данной задаче остаточное поверхностное напряжение равно нулю. Очевидно, причиной этому является тот факт, что граница тела — незамкнутая поверхность.

Далее получим выражения для касательных σ_{12} и продольных σ_{11} напряжений на границе Γ . Подставив полученные выражения для комплексных потенциалов (5.5) в соотношения (4.11) и в (4.12), получим:

$$\sigma_{11}(x)|_{x_2=0} = \sum_{k=1}^{\infty} (2C_k + D_k - 2b_k A_k) \cos b_k x + \sigma_1,\tag{5.8}$$

$$\sigma_{12}(x)|_{x_2=0} = \sum_{k=1}^{\infty} (C_k - b_k A_k) \sin b_k x,\tag{5.9}$$

$$\sigma_{22}(x)|_{x_2=0} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos b_k x.\tag{5.10}$$

§ 1.6 Пример

В данном разделе полученное в предыдущих параграфах решение задачи применяется к частному случаю, когда нагрузка, действующая на границе

полуплоскости, определяется одним из равенств

$$p_1(x, y) = q_1 \frac{\operatorname{Im} f(x, y)}{\max |\operatorname{Im} f(x, y)|}, \quad p_2(x, y) = q_2 \frac{\operatorname{Re} f(x, y)}{\max |\operatorname{Re} f(x, y)|}, \quad (6.1)$$

где

$$f(x, y) = -\operatorname{sh}^{-2} \left(y + \frac{i\pi x}{a} \right), \quad (6.2)$$

q_1, q_2 — постоянные величины, равные максимумам абсолютных значений соответствующих усилий; параметр y определяет форму соответствующих кривых. Функция $p_1(x)$ является нечётной, а $p_2(x)$ — чётной.

Мнимая часть $p_1(x, y)$ комплекснозначной функции $f(x, y)$ описывает действие внешних касательных нагрузок на границе Γ , а вещественная часть $p_2(x, y)$ — действие внешних нормальных нагрузок. Графики функций (6.1) при различных значениях параметра формы y изображены на рис. 1.3. Видно, что с уменьшением параметра формы y нагрузка становится более локализованной, другими словами, при малых значениях параметра y можно моделировать действие периодической нагрузки, сосредоточенной на участках границы, малых по сравнению с периодом.

Из (6.1) следует, что

$$\lim_{y \rightarrow \infty} p_1(x, y) = q_1 \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} p_2(x, y) = q_2 \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right). \quad (6.3)$$

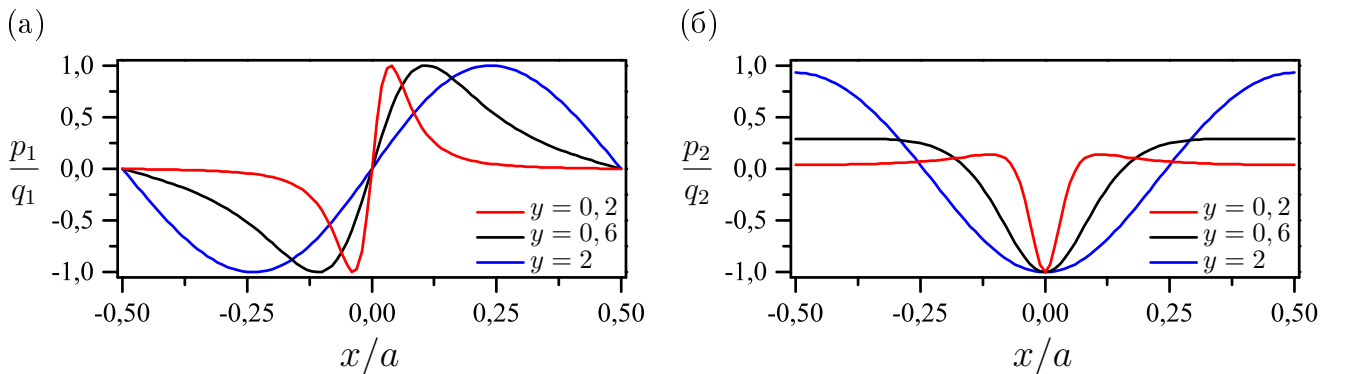


Рис. 1.3. Приведённая касательная (а) и нормальная (б) нагрузка на границе полуплоскости

Аппроксимируя с заданной точностью каждую из функций (6.1) отрезком соответствующего ряда Фурье (5.1), можно получить с той же точностью

численные результаты решения поставленной задачи. В качестве критерия точности примем критерий равенства радиусов кривизны во впадине, согласно которому относительная разность радиусов кривизны функций p_j и их приближённых выражений на интервале положительного изменения этих функций не превышает заданного значения ε :

$$\frac{|g''_{approx}(x_0, y) - g''(x_0, y)|}{|g''(x_0, y)|} < \varepsilon. \quad (6.4)$$

где g_{approx} — отрезок ряда, аппроксимирующий некоторую функцию g . Для функции $p_1(x, y)$ точка $x_0 = a/2$, а для $p_2(x, y)$ точка x_0 является корнем уравнения $p_2(x, y) = 0$ на промежутке $x \in [0, a/2]$.

Табл. 1. Зависимость числа членов ряда Фурье от точности аппроксимации и параметра y для функции $p_2(x, y)$

Относительная точность		1%	0,1%	0,01%
N	$y = 2$	2	3	4
	$y = 0,6$	8	11	13
	$y = 0,2$	25	33	40

Для вычисления коэффициентов разложения C_k, D_k , а также определения количества удерживаемых членов ряда N написана программа в кроссплатформенной системе компьютерной алгебры MAPLE. Вычисления показывают, что для достижения заданной точности количество удерживаемых членов соответствующих рядов зависит от значения параметра y , определяющего вид нагрузки. Чем меньше это значение, тем больше членов ряда требуется удерживать. Величина y была взята равной 2; 0,6; 0,2. Результаты расчётов приведены в таблице 1. Видно, что с увеличением параметра y , то есть с увеличением радиуса кривизны $p_2(x_1)$ в точках экстремума, количество членов ряда Фурье, необходимых для достижения заданной точности, уменьшается. Связь между относительной точностью приближения и параметром y для мнимой части

функции $f(x, y)$ такая же, как и для вещественной. В дальнейших расчётах при аппроксимации функций удерживается 50 членов ряда Фурье.

§ 1.7 Анализ влияния поверхностного напряжения на напряжённое состояние границы полуплоскости

По формулам (5.1), (5.6) и (5.8) — (5.10) были вычислены напряжения на границе полуплоскости при различных значениях геометрических параметров задачи без учёта ($M = 0$) и с учётом ($M \neq 0$) поверхностного напряжения σ_{11}^s . Нагрузка задавалась функциями (6.1) при $y = 2; 0,6; 0,2$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Графики построены для алюминия. Зависящий от поверхностных и объёмных модулей упругости параметр M , согласно работе [11], для алюминия равен $0,113$ нм.

На рис. 1.4, 1.5 изображены графики распределения напряжений на границе полуплоскости в диапазоне одного периода, равного 1 нм. Чёрными линиями обозначены графики напряжений, рассчитанных с учётом поверхностных напряжений, красными линиями — без учёта. Амплитуды продольных напряжений, а также касательных напряжений при действии касательной нагрузки уменьшаются при учёте поверхностных напряжений. В результате изменение этих напряжений становится более гладким, чем это предсказывает решение задачи в традиционной постановке. При этом эффект влияния поверхностных напряжений проявляется сильнее с уменьшением параметра формы y , а значит, с уменьшением площади, на которой действует основная часть нагрузки. То есть, чем больше нагрузка локализована, тем изменение значительнее.

Примечательно, что при действии нормальной нагрузки имеет место эффект появления касательных напряжений на границе (рис. 1.5). Этот факт вытекает непосредственно из граничных условий (3.3), из которых следует, что если поверхностные напряжения отличны от константы, то касательные

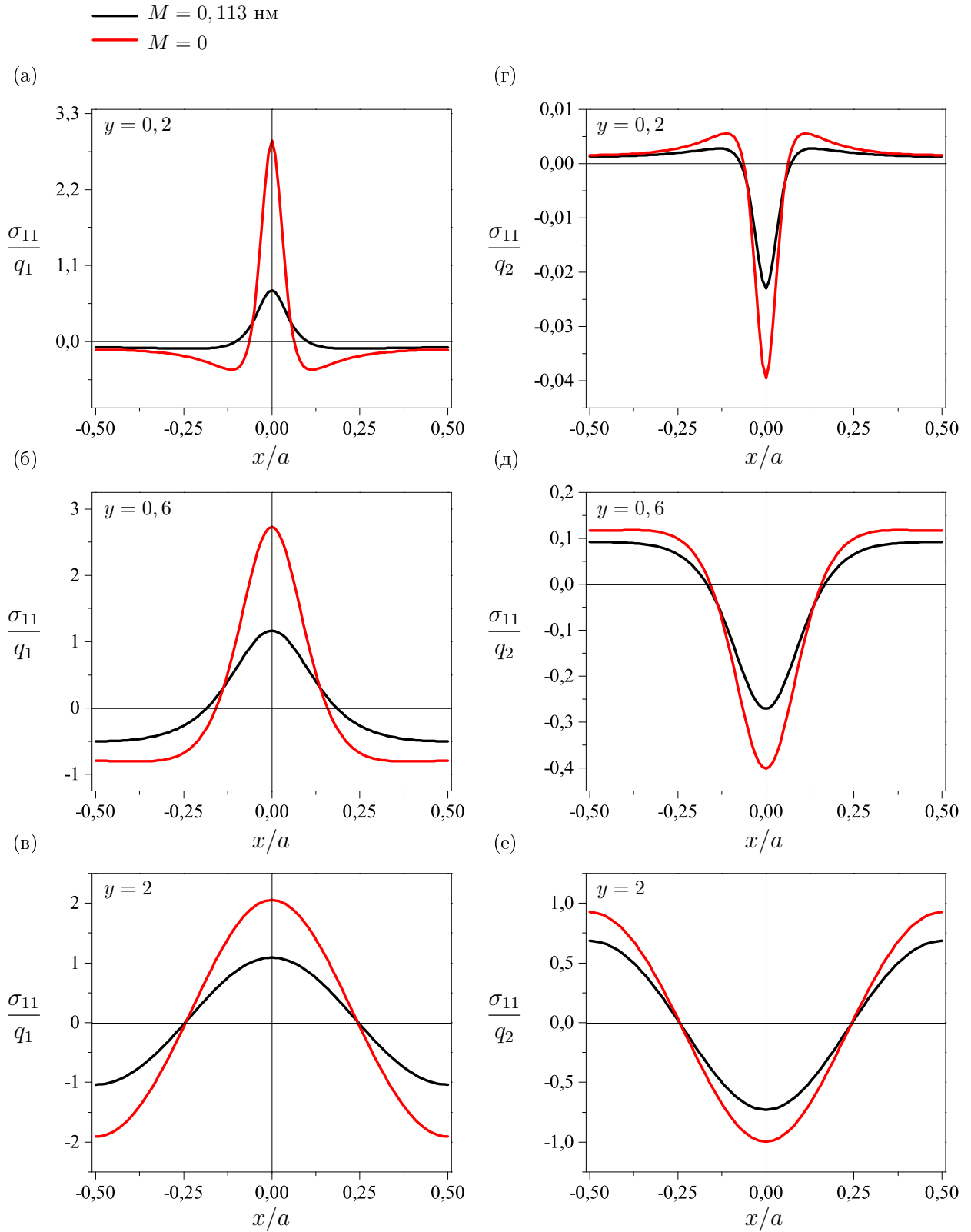


Рис. 1.4. Распределение продольных напряжений в диапазоне одного периода при действии касательной (а — в) и нормальной (г — е) нагрузки

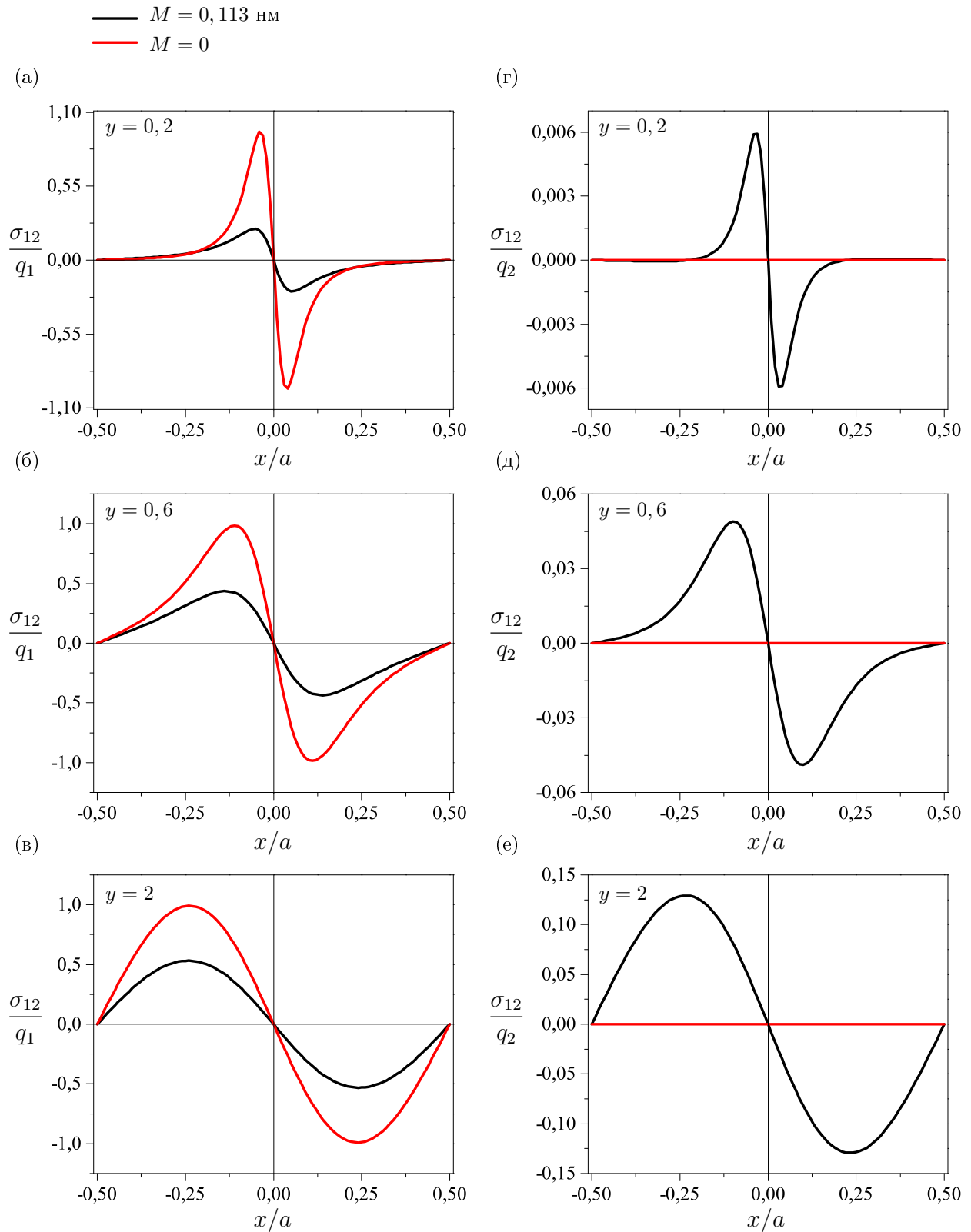


Рис. 1.5. Распределение касательных напряжений в диапазоне одного периода при действии касательной (а — в) и нормальной (г — е) нагрузки

напряжения всегда будут на границе полуплоскости независимо от вида приложенной нагрузки. Однако, как известно, в классическом решении задачи касательное напряжение равно нулю при действии нормальной нагрузки. Появившиеся при действии нормальной нагрузки касательные напряжения достигают 15% от величины q_2 . С уменьшением площади, по которой распределена нагрузка, данный эффект становится менее существенным.

На рис. 1.6, 1.7 приведены графики зависимостей максимальных значений модулей продольных и касательных напряжений от периода нагрузки a . Синие, чёрные и красные линии обозначают соответственно напряжения, рассчитанные при параметре формы y равном 2; 0,6; 0,2. Эти зависимости демонстрируют так называемый размерный эффект, который был отмечен во многих работах (см., например, [14, 35, 43, 44]) и проявляется на наноструктурном уровне при учёте поверхностных напряжений.

Из рис. 1.6, 1.7 видно, что наиболее заметное влияние периода нагрузки на напряжения находится в пределах изменения a примерно от 1 до 30 нм. При $a > 100$ нм размерный эффект практически исчезает, и напряжённо-деформированное состояние тела не зависит от поверхностных напряжений.

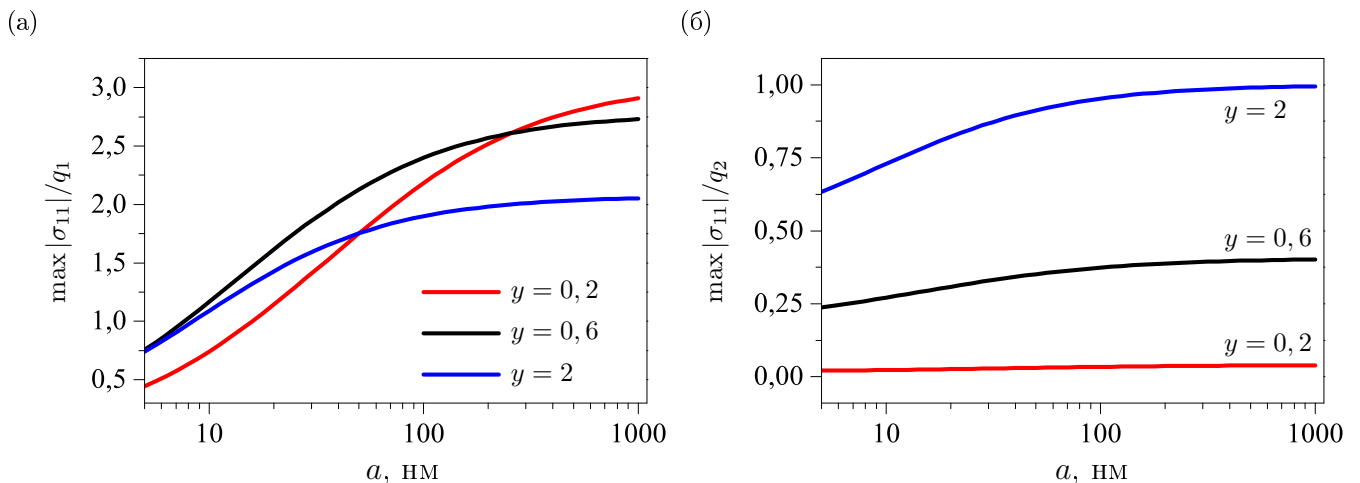


Рис. 1.6. Зависимость максимумов продольных напряжений от периода действия касательной (а) и нормальной (б) нагрузки

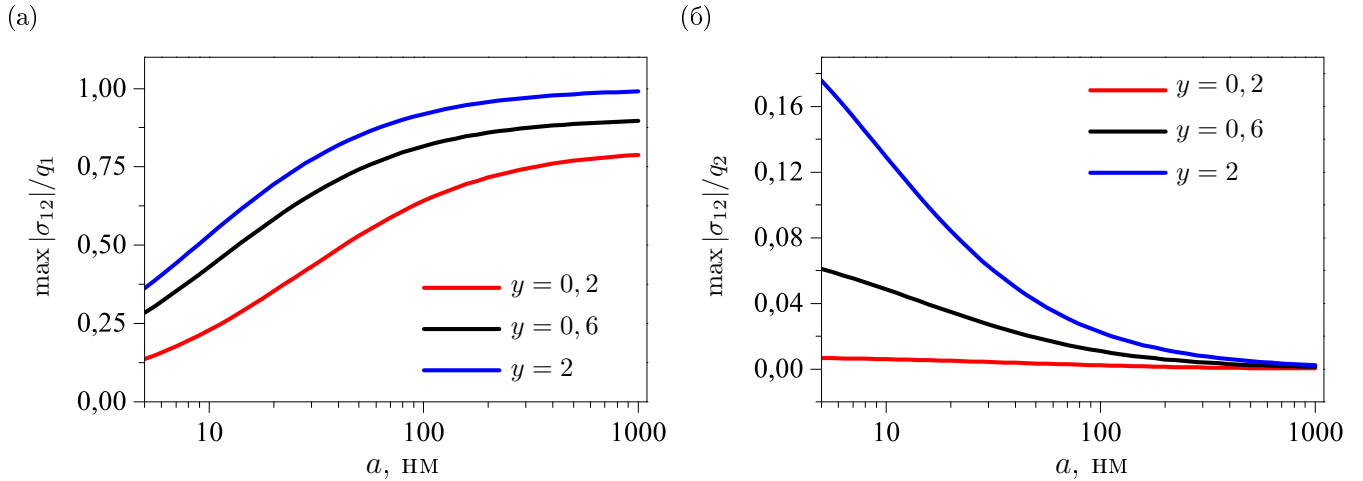


Рис. 1.7. Зависимость максимумов касательных напряжений от периода действия касательной (а) и нормальной (б) нагрузки

В конце главы приведем основные результаты, вытекающие из полученных зависимостей. Эффект поверхностных напряжений, возникших в результате изменения поверхностной нагрузки, действующей в нанометровом диапазоне на границе полуплоскости, проявляется в следующем:

- при действии касательных усилий амплитуда продольных и касательных напряжений на границе уменьшается,
- при действии нормальных усилий амплитуда продольных напряжений на границе уменьшается, а также возникают касательные напряжения,
- чем более резкое изменение нагрузки, тем сильнее проявляется эффект поверхностных напряжений,
- влиянием поверхностных напряжений можно пренебречь, если период $a > 100$ нм.

Глава 2. Полуплоскость со слабо искривлённой границей

За исключением идеальных (бездефектных) кристаллов, поверхности реальных тел редко бывают идеально гладкими и плоскими. Эксперименты показывают, что обычно поверхность оказывается рифлёной или шероховатой даже тогда, когда она считается плоской [45, 46]. Целью данной главы является исследование эффекта воздействия поверхностного напряжения на напряжённое состояние слабо искривлённой границы и последующий анализ влияния формы поверхности на напряжённое состояние тела.

§ 2.8 Постановка задачи

Рассмотрим упругую среду, занимающую полупространство, поверхность которого близка к плоской форме и обладает упругими свойствами, отличными от аналогичных свойств объёма. Предполагаем, что среда находится в условиях плоской деформации под действием внешних сил и дополнительных поверхностных напряжений σ^s . Это позволяет перейти к формулировке соответствующей двумерной задачи теории упругости для полубесконечной области Ω [47]

$$\Omega = \{z : \operatorname{Im} z < \varepsilon f(x_1), \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}^1\}$$

в плоскости комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$. Граница Γ области Ω определяется равенством

$$\zeta = x_1 + i\varepsilon f(x_1). \tag{8.1}$$

Здесь $f(x_1)$ — непрерывно дифференцируемая периодическая функция с периодом a , удовлетворяющая условиям $\max |f(x_1)| = a$, $|f'(x_1)| < 1/\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Таким образом, максимальное отклонение точек поверхности от плоскости $x_2 = 0$ равно εa .

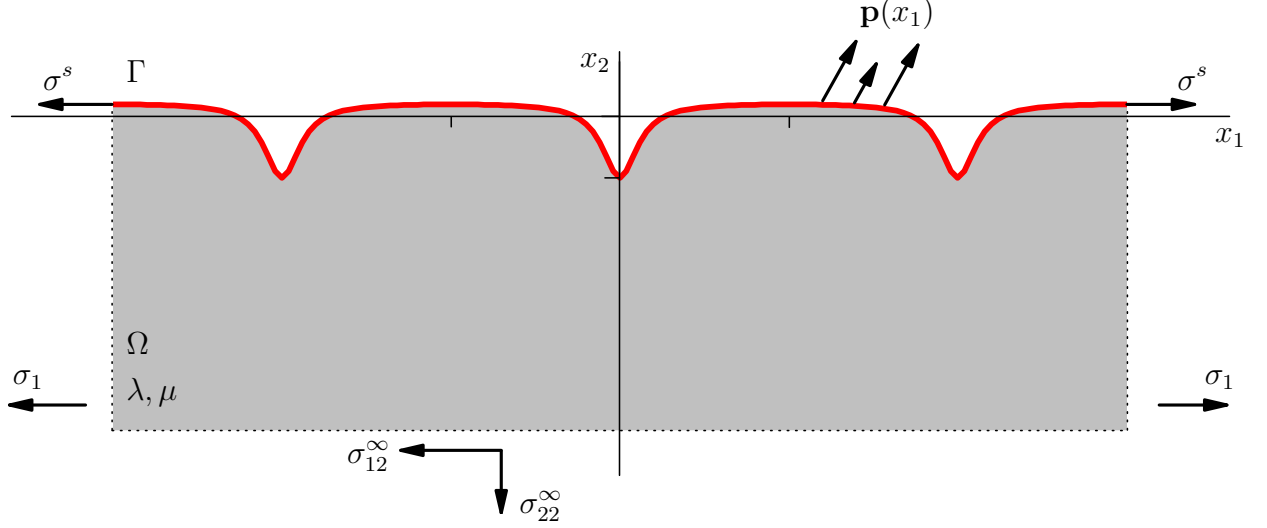


Рис. 2.8. Двумерная модель упругого тела со слабо искривлённой границей

Согласно обобщённому закону Лапласа — Юнга [12], граничное условие в случае плоской деформации [33] имеет вид

$$\sigma_n(\zeta) = \frac{\sigma_{tt}^s}{r} - i \frac{1}{h} \frac{d\sigma_{tt}^s}{dx_1} + p(\zeta) \equiv t^s(\zeta) + p(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad (8.2)$$

где $\sigma_n = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt}$; $p(\zeta) = p_n(\zeta) + ip_t(\zeta)$; σ_{nn}, σ_{nt} — нормальное и касательное напряжения в локальной декартовой прямоугольной системе координат n, t с центром в точке z (в уравнении (8.2) ось n перпендикулярна Γ); p_n, p_t — проекции вектора внешней нагрузки на соответствующие оси координат n, t ; σ^s — поверхностное напряжение; радиус кривизны r кривой Γ и метрический коэффициент h (коэффициент Ламе) определяются формулами [38]

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon f'(x_1))^2}}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon f''(x_1)}{\left(1 + (\varepsilon f'(x_1))^2\right)^{3/2}}. \quad (8.3)$$

Считаем, что функция p удовлетворяет условию Гёльдера всюду на Γ и

$$p(\zeta) = p(\zeta + a), \quad \int_{\zeta - a/2}^{\zeta + a/2} p(\tau) d\tau = -iP, \quad P = P_1 + iP_2. \quad (8.4)$$

Условия на бесконечности имеют вид

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} (\sigma_{22} - i\sigma_{12}) = -\frac{iP}{a}, \quad \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \sigma_{11} = \sigma_1, \quad \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \omega = \omega^\infty. \quad (8.5)$$

§ 2.9 Основные соотношения для случая искривлённой границы

Определяющие соотношения поверхностной и объёмной теории упругости в локальной системе координат n, t запишем в виде [12, 11]:

$$\sigma^s = \gamma_0 + (\lambda_s + 2\mu_s)\varepsilon_{tt}^s, \quad \sigma_{33}^s = \gamma_0 + (\lambda_s + \gamma_0)\varepsilon_{tt}^s, \quad (9.1)$$

$$\sigma_{nn} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{nn} + \lambda\varepsilon_{tt}, \quad \sigma_{tt} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{tt} + \lambda\varepsilon_{nn}, \quad (9.2)$$

$$\sigma_{nt} = 2\mu\varepsilon_{nt}, \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{tt} + \sigma_{nn}). \quad (9.3)$$

Для нахождения напряжённо-деформированного состояния тела воспользуемся единой формулой, аналогичной соотношениям (4.4) – (4.5), позволяющей выразить напряжения и перемещения через комплексные потенциалы Гурса – Колосова [41]:

$$G(z) = \eta\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \left(z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \right) e^{-2i\alpha}, \quad z \in \Omega, \quad (9.4)$$

$$G(z) = \begin{cases} \sigma(z), & \eta = 1, \\ -2\mu \frac{du}{dz}, & \eta = -\kappa. \end{cases} \quad (9.5)$$

Так же как и в первой главе, введём новую функцию Υ

$$\Upsilon(z) = -\overline{\Phi(\bar{z})} - z\overline{\Phi'(\bar{z})} - \overline{\Psi(\bar{z})}, \quad z \in \tilde{\Omega}. \quad (9.6)$$

Тогда при $z \in \Omega$ соотношение (9.4) преобразуется к виду

$$G(z) = \eta\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \left(\Upsilon(\bar{z}) + \overline{\Phi(\bar{z})} - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \right) e^{-2i\alpha}, \quad (9.7)$$

где α – угол между осями t и x_1 , отсчитываемый от оси x_1 против часовой стрелки; черта сверху означает комплексное сопряжение.

Заметим, что функция $\Phi(z)$ голоморфна в области Ω , а $\Upsilon(z)$ — в области $\tilde{\Omega} = \{z : \bar{z} \in \Omega\}$ с границей $\tilde{\Gamma} = \{\zeta : \zeta = x_1 - i\varepsilon f(x_1)\}$ (рис. 2.9). При этом область $\tilde{\Omega}$ и граница $\tilde{\Gamma}$ являются зеркальным отражением соответственно области Ω и границы Γ относительно прямой $x_2 = 0$.

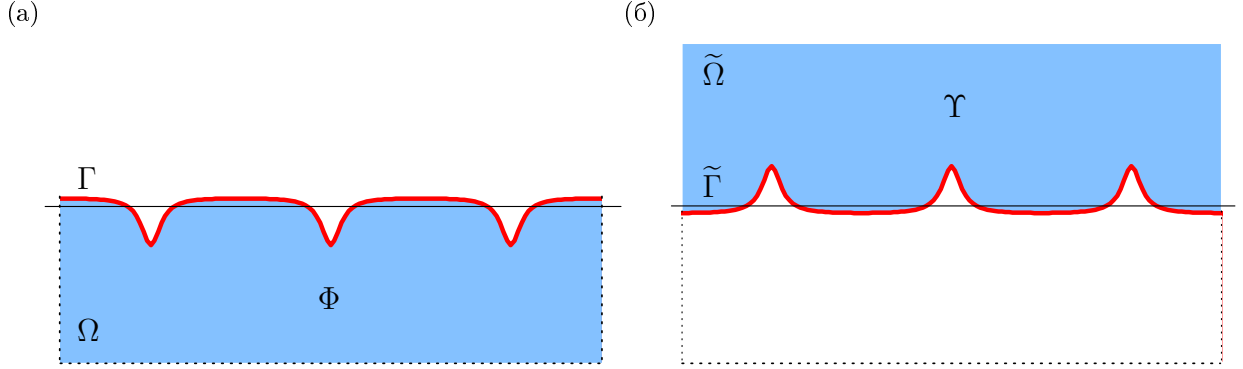


Рис. 2.9. Области определения голоморфных функций Φ (а) и Υ (б)

Перейдём в (9.7) к пределу при $z \rightarrow \zeta \in \Gamma$, направив ось t по касательной к Γ — в соотношении (9.8) и по нормали — в (9.9). Угол α соответственно примет значения α_0 и $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_0\right)$, где α_0 — угол наклона касательной к Γ , а значит, $\operatorname{tg} \alpha_0 = \varepsilon f'(x_1)$. В результате получим два условия, которым должны удовлетворять предельные значения комплексных потенциалов Φ и Υ

$$\begin{aligned} \sigma_{nm}(\zeta) + i\sigma_{nt}(\zeta) &= \Phi^-(\zeta) + \overline{\Phi^-(\zeta)} - \\ &- \left(\Upsilon^+(\bar{\zeta}) + \overline{\Phi^-(\zeta)} - 2i\varepsilon f(x_1)\overline{\Phi'^-(\zeta)} \right) e^{-2i\alpha_0}, \end{aligned} \quad (9.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{tt}(\zeta) - i\sigma_{nt}(\zeta) &= \Phi^-(\zeta) + \overline{\Phi^-(\zeta)} + \\ &+ \left(\Upsilon^+(\bar{\zeta}) + \overline{\Phi^-(\zeta)} - 2i\varepsilon f(x_1)\overline{\Phi'^-(\zeta)} \right) e^{-2i\alpha_0}, \end{aligned} \quad (9.9)$$

где

$$\zeta \in \Gamma, \quad \Phi^-(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta - i0} \Phi(z), \quad \Upsilon^+(\bar{\zeta}) = \lim_{z \rightarrow \bar{\zeta} + i0} \Upsilon^+(z).$$

При выводе равенств (9.8) — (9.9) учтено, что $e^{-2i(\alpha_0 - \pi/2)} = -e^{-2i\alpha_0}$, а также $(\zeta - \bar{\zeta}) = 2i\varepsilon f(x_1)$.

С учётом граничного условия (8.2) из (9.8) получим краевое условие

$$t^s(\zeta) + p(\zeta) = \Phi^-(\zeta) + \overline{\Phi^-(\zeta)} - \left(\Upsilon^+(\bar{\zeta}) + \overline{\Phi^-(\zeta)} - 2i\varepsilon f(x_1) \overline{\Phi^{-'}(\zeta)} \right) e^{-2i\alpha_0}. \quad (9.10)$$

§ 2.10 Метод возмущений

Следуя методу возмущений [31], разложим в ряд левую и правую части уравнения (9.8), для этого представим функции Φ , Υ и σ^s в виде степенных рядов по малому параметру ε :

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Phi_n(z), \quad \Upsilon(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Upsilon_n(z), \quad \sigma_{tt}^s(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sigma_n^s(\zeta). \quad (10.1)$$

Затем предельные значения функций Φ_n , Υ_n , и функции p , σ_n^s на Γ разложим в соответствующие ряды Тейлора в окрестности прямой $\text{Im } \zeta = 0$:

$$\Phi_n^-(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\varepsilon f(x_1))^m}{m!} \Phi_n^{-(m)}(x_1), \quad (10.2)$$

$$p(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\varepsilon f(x_1))^m}{m!} p^{(m)}(x_1), \quad (10.3)$$

$$\Upsilon_n^+(\bar{\zeta}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\varepsilon f(x_1))^m}{m!} \Upsilon_n^{+(m)}(x_1), \quad (10.4)$$

$$\sigma_n^s(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\varepsilon f(x_1))^m}{m!} \sigma_n^{s(m)}(x_1). \quad (10.5)$$

Радиус кривизны границы r и метрический коэффициент h определяются соотношениями (8.3) через функцию, описывающую форму поверхности, следовательно, их тоже можно выразить в виде рядов. Для этого воспользуемся

равенством [48]:

$$(1+x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (10.6)$$

Ряд (10.6) абсолютно сходится при $|x| < 1$, если q не является ни натуральным числом, ни нулём. Так как $|\varepsilon f'(x_1)| < 1$, то на основании (10.6) коэффициенты (8.3) можем записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{n! 2^n} (\varepsilon f'(x_1))^{2n}, \\ \frac{1}{r} &= \varepsilon f''(x_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!!}{n! 2^n} (\varepsilon f'(x_1))^{2n}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Здесь выражение вида $n!!$ означает произведение всех натуральных чисел в отрезке $[1; n]$, имеющих ту же чётность, что и n , т. е.

$$n!! = n(n-2)(n-4)\dots$$

Для удобства введём коэффициенты R_n и H_n , которые определим равенствами

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} R_n(x_1), \quad \frac{1}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} H_n(x_1), \quad (10.8)$$

где

$$R_{2n+1} = \frac{(-1)^n (2n+1)!(2n+1)!!}{n! 2^n} (f'(x_1))^{2n} f''(x_1), \quad R_{2n} = 0, \quad (10.9)$$

$$H_{2n} = \frac{(-1)^n (2n)!(2n-1)!!}{n! 2^n} (f'(x_1))^{2n}, \quad H_{2n+1} = 0, \quad (10.10)$$

при $n = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, для нулевого, первого и второго приближений имеем:

$$R_0 = 0, \quad R_1 = f''(x_1), \quad R_2 = 0, \quad (10.11)$$

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 0, \quad H_2 = -f'^2(x_1).$$

Кроме того, примем во внимание соотношение

$$\frac{1}{1+i\varepsilon f'(x_1)} = \sum_{m=0}^{\infty} (-i\varepsilon f'(x_1))^m \quad (10.12)$$

и представим множитель $e^{-2i\alpha}$ в виде:

$$e^{-2i\alpha} = 1 - \frac{2i\varepsilon f'(x_1)}{1 + i\varepsilon f'(x_1)} = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-i\varepsilon f'(x_1))^m. \quad (10.13)$$

Учитывая разложения в ряды (10.1) — (10.5), а также представления (10.9) и (10.10), запишем функцию t^s в виде соответствующего ряда

$$t^s(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left(T_n^s(x_1) + H_0 \sigma_n^{s'} \right) = \quad (10.14)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{n!(if)^l}{l!(n-l)!} (C_{k-l,l}^1 - iC_{k-l,l}^2) + H_0 \sigma_n^{s'} \right), \quad (10.15)$$

где

$$C_{k,l}^1 = \sum_{m=0}^n \frac{n! R_m(x_1)}{m!(n-m)!} \sigma_{n-m}^{s(l)}(x_1), \quad C_{k,l}^2 = \sum_{m=0}^n \frac{n! H_m(x_1)}{m!(n-m)!} \sigma_{n-m}^{s(l+1)}(x_1),$$

при этом T_n^s зависит только от предыдущих приближений.

Подставляя в правую часть условия (9.8) разложения (10.1) — (10.5), (10.13), а в левую — представление функции t^s (10.14) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε^n , приходим в n -ом приближении ($n = 0, 1, \dots$) к краевой задаче Римана — Гильберта

$$\Theta_n^+(x_1) - \Theta_n^-(x_1) = i\sigma_n^{s'}(x_1) - p_n(x_1) + F_n(x_1), \quad (10.16)$$

где F_n — известная функция, зависящая при $n > 0$ от всех предыдущих приближений, а

$$\Theta_n(z) = \begin{cases} \Upsilon_n(z), & \text{Im } z > 0, \\ \Phi_n(z), & \text{Im } z < 0. \end{cases} \quad (10.17)$$

В частности,

$$F_0(x_1) = 0,$$

$$F_1(x_1) = -f(x_1)\sigma_0^{s''}(x_1) - f''(x_1)\sigma_0^s(x_1) - if(x_1)\left(\Phi_0'^-(x_1) + \Upsilon_0^+(x_1) + 2\overline{\Phi_0'^-(x_1)}\right) + 2if'(x_1)\left(\overline{\Phi_0^-(x_1)} + \Upsilon_0^+(x_1)\right) - p_0(x_1).$$

В общем виде, согласно [49], получим:

$$\begin{aligned}
 F_n(x_1) = & -T_n^s + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{m!} \left[\frac{(if)^k}{k!} \left(\Phi_m^{(k)-}(x_1) - (-1)^k \Upsilon_m^{(k)+}(x_1) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2(-1)^k k \overline{\Phi_m^{(k)-}(x_1)} \right) - 2(-1)^k \sum_{j=1}^k \frac{(if)^{k-j}}{(k-j)!} (if)^j \left(\Upsilon_m^{(k-j)+}(x_1) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (2k - 2j + 1) \overline{\Phi_m^{(k-j)-}(x_1)} \right) \right] - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{m!} \frac{(if)^k}{k!} p_m^{(k)}(x_1),
 \end{aligned} \tag{10.18}$$

где $n > 0, k = n - m$.

Решение задачи (10.16) запишется в виде

$$\begin{aligned}
 \Theta_n(z) = \Theta_{nu}(z) + \Theta_{nk}(z), \quad \Theta_{nu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\sigma_n^{s'}(t)}{t-z} dt, \\
 \Theta_{nk}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_n(t)}{t-z} dt.
 \end{aligned} \tag{10.19}$$

§ 2.11 Сведение задачи к интегральному уравнению

В данном параграфе решение задачи сводится к решению последовательности гиперсингулярных интегральных уравнений с особенностью второго порядка относительно производной неизвестного поверхностного напряжения, по форме аналогичных уравнению, полученному в главе 1.

Для нахождения неизвестного поверхностного напряжения будем использовать определяющие уравнения поверхностной теории упругости (9.1), считая, что выполняется условие идеального контакта поверхности с объёмом. Как и в главе 1, из условий непрерывности перемещений

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} u(z) = u^s, \tag{11.1}$$

где u^s – перемещение точек границы Γ вдоль оси t , следует равенство:

$$\sigma_{tt}^s = \gamma_0 + (\lambda_s + 2\mu_s)\varepsilon_{tt}. \tag{11.2}$$

Компоненту окружной деформации ε_{tt} выразим через компоненты напряжений σ_{nn} и σ_{tt} , используя соотношения (9.2):

$$\varepsilon_{tt} = \frac{\lambda\sigma_{nn} - (\lambda + 2\mu)\sigma_{tt}}{\lambda^2 - (\lambda + 2\mu)^2}. \quad (11.3)$$

С учётом соотношений (9.8), (9.9) из (11.3) получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{tt}(\zeta) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\lambda + \mu} \Phi^-(\zeta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\mu} \left(\Upsilon^+(\bar{\zeta}) + \overline{\Phi^-(\zeta)} - (\zeta - \bar{\zeta}) \overline{\Phi'^-(\zeta)} \right) e^{-2i\alpha_0} \right\}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Подставляя выражение (11.4) в уравнение (11.2) и принимая во внимание разложения (10.1) — (10.5), придём к последовательности уравнений

$$\sigma_n^s(x_1) = V_n(x_1) + M \operatorname{Re} [\varkappa \Phi_n^-(x_1) + \Upsilon_n^+(x_1)], \quad M = \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{2\mu}, \quad (11.5)$$

где функции V_n зависят только от предыдущих приближений и вычисляются следующим образом:

$$V_0(x_1) = \gamma_0, \quad (11.6)$$

$$\begin{aligned} V_1(x_1) = M \operatorname{Re} \left\{ i f(x_1) \left(\frac{2\mu}{\lambda + \mu} \Phi_0'^-(x_1) - \varkappa \overline{\Phi_0'^-(x_1)} - \Upsilon_0'^+(x_1) - 2 \overline{\Phi_0'^-(x_1)} \right) - \right. \\ \left. - 2i f'(x_1) \left(\overline{\Phi_0^-(x_1)} + \Upsilon_0^+(x_1) \right) \right\} - i f(x_1) \sigma_0^{s'}(x_1), \end{aligned} \quad (11.7)$$

$$\begin{aligned}
 V_n(x_1) = & M \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=1}^n \frac{n!}{q!} \left[\frac{(if(x_1))^m}{m!} \left((-1)^m \varkappa \overline{\Phi_q^{-(m)}}(x_1) + (-1)^m \Upsilon_q^{+(m)}(x_1) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \Phi_q^{-(m)}(x_1) + 2m(-1)^m \overline{\Phi_q^{-(m)}}(x_1) \right) + 2 \sum_{j=1}^m \frac{(if(x_1))^{m-j}}{(m-j)!} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times (if'(x_1))^j (-1)^m \left(\overline{\Phi_q^{-(m-j)}}(x_1) + \Upsilon_q^{+(m-j)}(x_1) \right) \right] + 4 \sum_{m=2}^n \frac{n!}{q!} \times \right. \\
 & \left. \times \sum_{j=2}^m \frac{(if(x_1))^{m-j+1}}{(m-j)!} (if'(x_1))^{j-1} (-1)^m \overline{\Phi_q^{-(m-j+1)}}(x_1) \right\} - \\
 & - \sum_{m=1}^n \frac{n!}{q!} \frac{(if(x_1))^m}{m!} \sigma_q^{s(m)}(x_1), \quad n \geq 2. \tag{11.8}
 \end{aligned}$$

При выводе соотношений (11.7) – (11.8) учитывалось равенство, справедливое в условиях плоской деформации:

$$\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = \varkappa.$$

Используя формулы Сохоцкого – Племяля (4.19) – (4.20) в уравнении (11.5), получим гиперсингулярное интегральное уравнение

$$\begin{aligned}
 \sigma_n^{s'}(x_1) - \frac{M(\varkappa + 1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_n^{s'}(t)}{(t - x_1)^2} dt = & V_n'(x_1) + \\
 & + \operatorname{Re} \left\{ \frac{M(1 - \varkappa)}{2} F_n'(x_1) - \frac{M(1 + \varkappa)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_n(t)}{(t - x_1)^2} dt \right\}. \tag{11.9}
 \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение (11.9) по типу совпадает с уравнением (4.22), полученным в первой главе. Эти уравнения отличаются только правыми частями. Кроме того, как и уравнение (4.22), уравнение (11.9) получено без использования свойства периодичности функций $f(x_1)$, $p(x_1)$, т. е. оно справедливо для любой формы поверхности и любой внешней нагрузки. В случае непериодической нагрузки функция p должна исчезать на бесконечности, и её производные должны удовлетворять условию Гёльдера на границе Γ .

§ 2.12 Решение интегрального уравнения для периодической формы поверхности

В данном параграфе в первом приближении строится решение уравнения (11.9) и задачи в целом при отсутствии внешней нагрузки.

Нулевому приближению отвечает задача о полуплоскости с прямолинейной границей в однородном поле напряжений $\sigma_{11} = \sigma_1$, $\sigma_{22} = 0$. На основании соотношений (9.1)—(9.2) находим

$$\sigma_0^{s'} = \gamma_0 + M(\varkappa + 1)\frac{\sigma_1}{4}, \quad (12.1)$$

где ν — коэффициент Пуассона объёмного материала.

Учитывая периодичность задачи, как и в главе 1, решение уравнения (11.9) при $n = 1$ будем искать в виде ряда Фурье

$$\sigma_1^{s'}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin b_k x + B_k \cos b_k x, \quad b_k = 2\pi k/a. \quad (12.2)$$

Считая, что функция, описывающая форму поверхности, является чётной, представим её в виде ряда Фурье по косинусам:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos b_k x, \quad b_k = 2\pi k/a. \quad (12.3)$$

Для получения явных выражений неизвестных коэффициентов A_k , B_k воспользуемся методом, описанным в разделе §1.5 первой главы. Подставив разложения (12.2) и (12.3) в решение краевой задачи (10.19) с учётом свойств интегралов типа Коши, выразим комплексные потенциалы через коэффициенты разложений в ряды Фурье. Затем полученные выражения подставим в уравнение (11.5) и, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, придём к равенствам:

$$A_k = \frac{MC_k a b_k^2 (\sigma_1(\varkappa + 1) + b_k \sigma_0^s(\varkappa - 1))}{2 + M b_k(\varkappa + 1)}, \quad B_k = 0, \quad k \geq 0.$$

Таким образом, в первом приближении получено точное аналитическое решение интегрального уравнения (11.9) для периодической формы поверхности

в виде рядов Фурье

$$\sigma_{11}^s(x) = \gamma_0 + M(\nu + 1) \frac{\sigma_1}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{b_k} \cos b_k x. \quad (12.4)$$

§ 2.13 Эфффект поверхностного напряжения при различных формах поверхности

В данном разделе в целях получения численных результатов полученное в предыдущих параграфах решение задачи рассматривается применительно к частному случаю, когда форма границы задана специальной функцией (13.1), и на тело не действует внешняя нагрузка.

$$f(x, y) = \frac{a}{d} \left[\operatorname{Im} \left\{ \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi x}{a} - iy \right) \right\} - 1 \right], \quad d = \operatorname{Im} \{ \operatorname{ctg} (iy) \}. \quad (13.1)$$

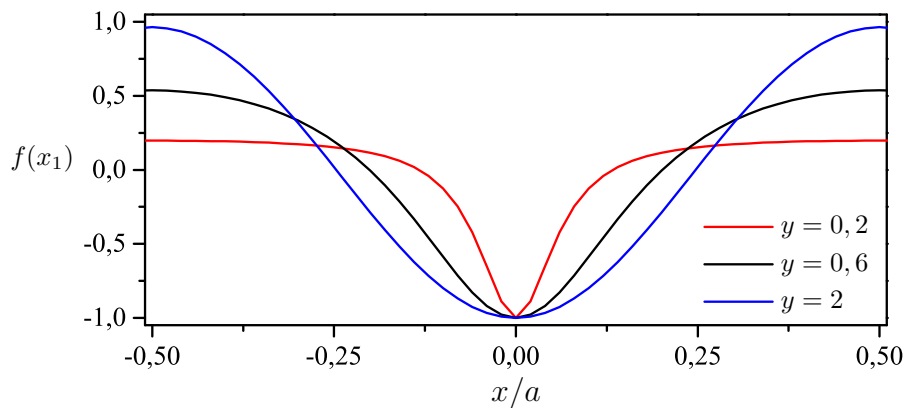


Рис. 2.10. Формы поверхности в пределах одного периода

Выбор такой функции обусловлен возможностью описать с помощью неё различные формы поверхности: варьируя значения параметра y , можно получить различные формы кривых — от локализованных выступов и выемок до поверхностей, описываемых косинусоидальной функцией.

При достаточно больших значениях параметра y функция $f(x, y)$ описы-

вает волнистую поверхность

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x_1) = -a \cos \frac{2\pi x_1}{a}, \quad (13.2)$$

а при малых значениях y с её помощью можно описать периодически расположенные достаточно острые локальные выступы или выемки. Функция $f(x, y)$ является чётной. На рис. 2.10 приведены формы поверхности при различных значениях параметра y , который определяет форму кривых.

Аналогично главе 1, функция $f(x, y)$ аппроксимируется отрезком ряда Фурье. Критерий точности определяется по формуле (6.4).

Для вычисления напряжений и получения графических результатов использовалась система компьютерной алгебры MAPLE. На рис. 2.11, 2.12 изображены графики распределения окружных, касательных и нормальных напряжений в диапазоне одного периода, равного 5 нм. Для проведения расчётов были взяты следующие значения постоянных: коэффициент $M = 0,113$ нм; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; малый параметр $\varepsilon = 0,1$; остаточное напряжение γ_0 принято равным нулю. На графиках красным цветом обозначены напряжения, рассчитанные без учёта поверхностных напряжений, чёрным — с учётом. Во всех случаях графики напряжений сглаживаются при учёте поверхностных напряжений. При этом, чем более острые впадины имеет полуплоскость, тем значительнее становится уменьшение амплитуды напряжений с учётом поверхностных напряжений — тем сильнее проявляется эффект поверхностных напряжений.

На рис. 2.13 приведены графики зависимостей максимальных значений модулей окружных (а — б) и нормальных (в — г) напряжений от периода a искривления поверхности. На рис. 2.13а и 2.13в графики построены для различных параметров формы рельефа поверхности y . Красные, чёрные и синие линии обозначают соответственно напряжения, рассчитанные при $y = 0,2; 0,6; 2$. Эти зависимости демонстрируют размерный эффект, который в данном случае проявляется в зависимости напряжений от периода искривления поверхности. Из рисунка 2.13 видно, что наиболее заметное влияние периода искривления на напряжения находится в пределах изменения a до 100 нм. При $a > 100$ нм эффект поверхностных напряжений становится незначительным и

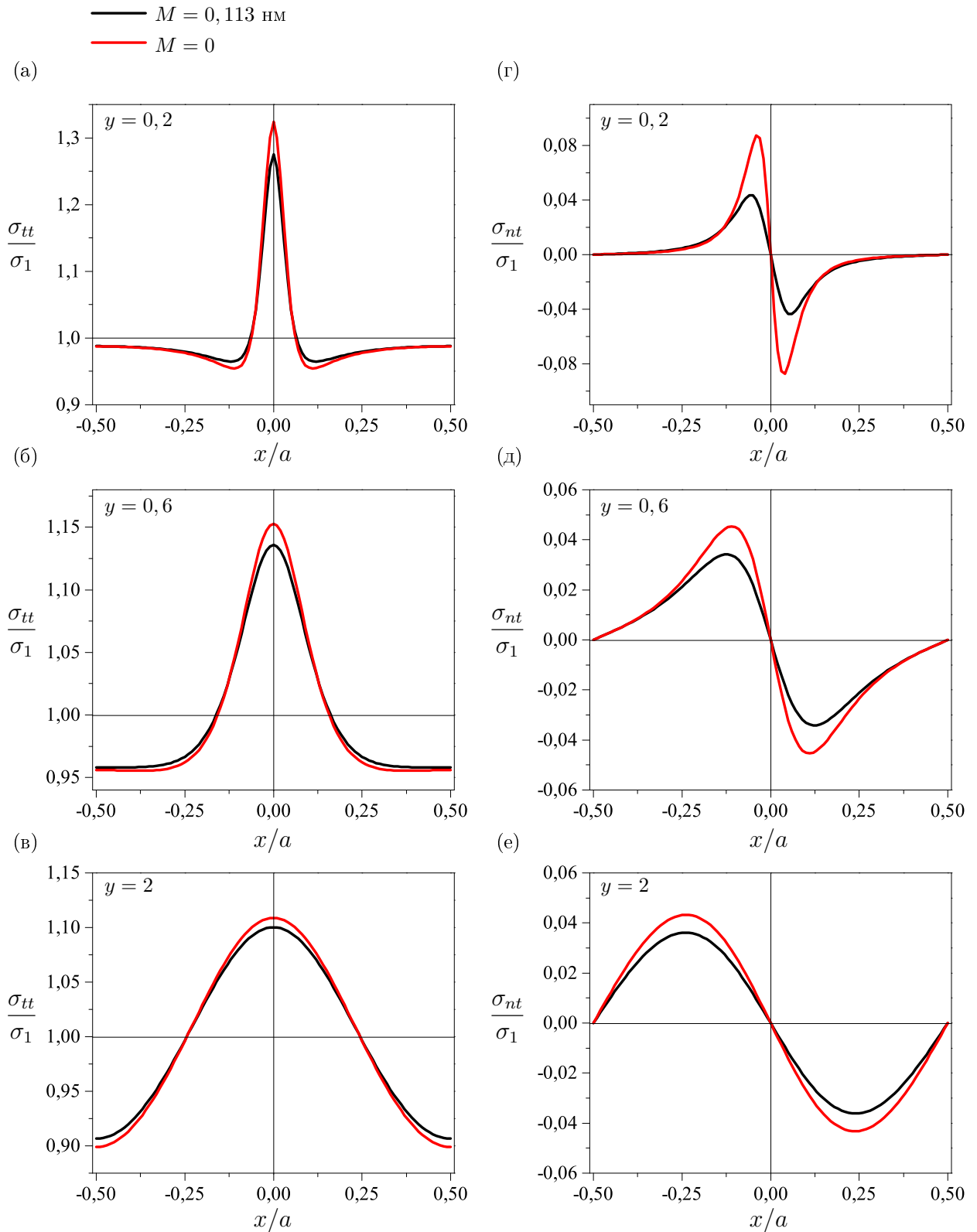


Рис. 2.11. Распределение окружных (а — в) и касательных (г — е) напряжений в пределах одного периода

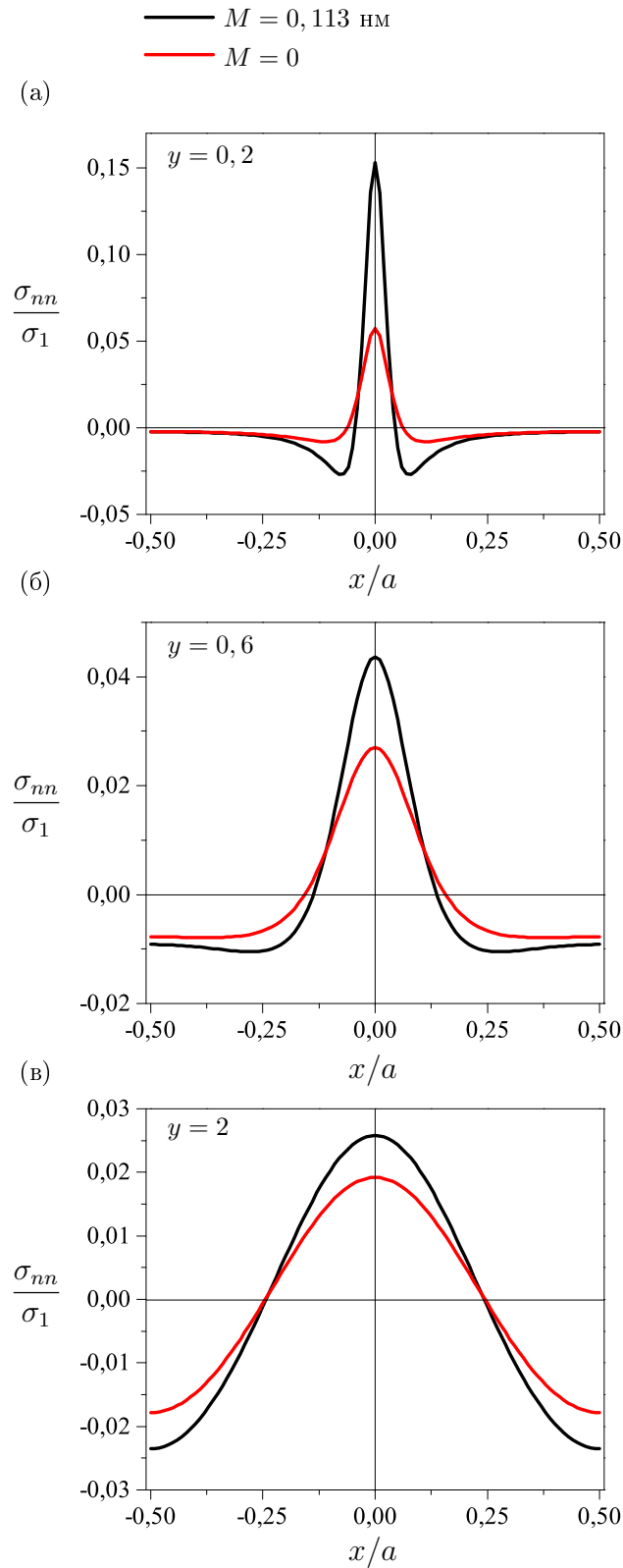


Рис. 2.12. Распределение нормальных напряжений в пределах одного периода

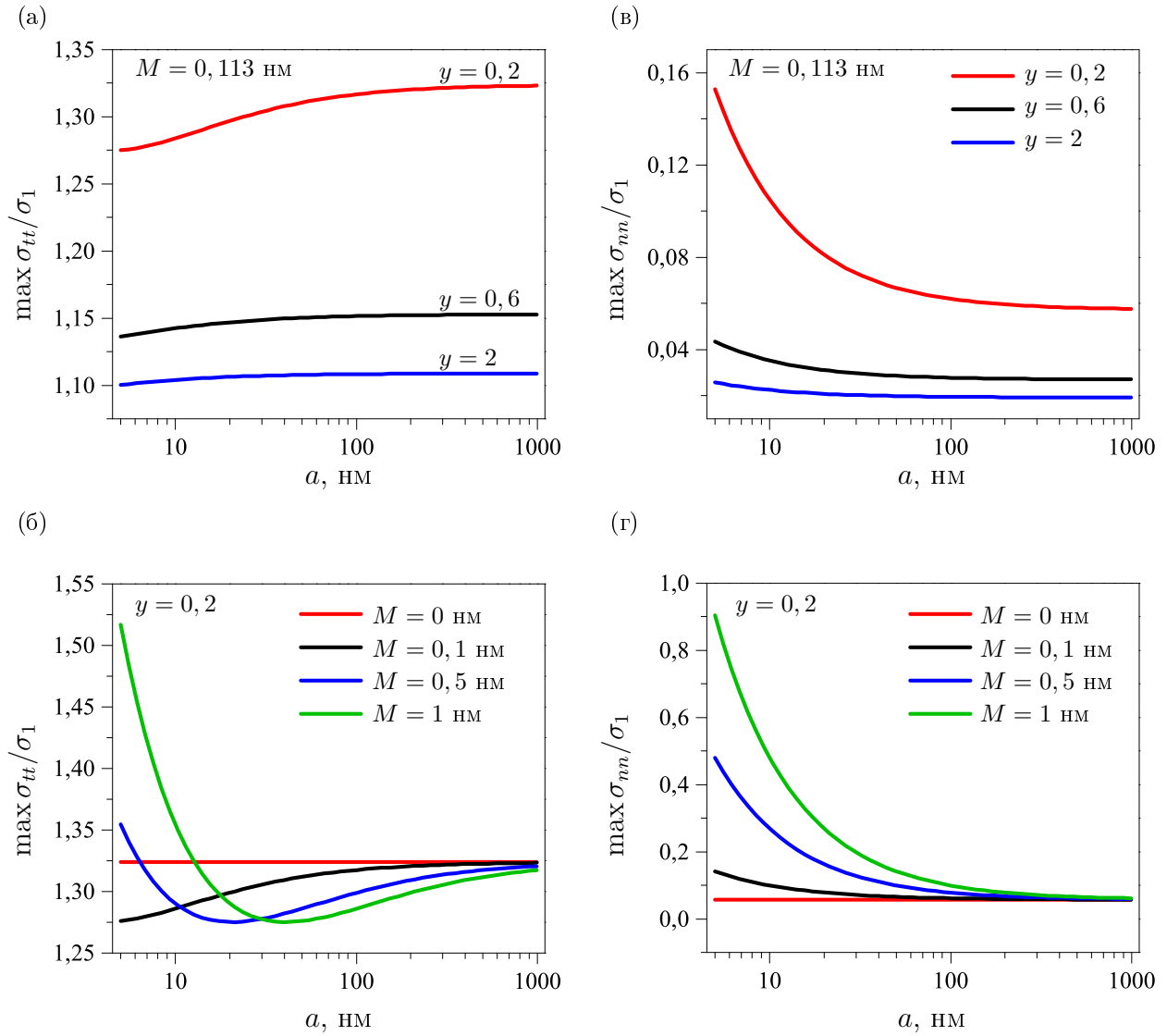


Рис. 2.13. Зависимость максимумов окружных (а — б) и нормальных (в — г) напряжений от периода искривления поверхности

напряжённно-деформированное состояние тела практически не зависит от поверхностных напряжений.

Все приведённые выше графики были построены при том же значении параметра $M = 0,113$ нм, что и в главе 1. С целью выяснения влияния параметра M на размерный эффект были проведены вычисления для гипотетического сочетания упругих свойств поверхности и полуплоскости при $M = 0,5$ нм и $M = 1$ нм. Результаты вычислений приведены на рис. 2.13б и 2.13г вместе с кривыми, соответствующими значениям $M = 0,1$ нм и $M = 0$. Красные, чёрные, синие и зелёные линии соответственно обозначают напряжения, рассчитанные при $M = 0; 0,1; 0,5; 1$ нм. Решение, полученное при $M = 0$ эквивалентно классическому решению, не учитывающему поверхностное напряжение.

Из рис. 2.13б следует, что увеличение параметра M приводит к немонотонной зависимости окружного напряжения от периода искривления поверхности. Более того, в отличие от реального значения $M = 0,113$ нм, с уменьшением периода искривления a приблизительно от значения 20 нм окружное напряжение возрастает при $M = 0,5$ нм и от значения 40 нм — при $M = 1$ нм. На рис. 2.13е показано, что с увеличением параметра M эффект поверхностных напряжений проявляется сильнее.

В конце главы приведём основные результаты, вытекающие из полученных зависимостей. Эффект поверхностных напряжений, действующих на слабо искривлённой в нанометровом диапазоне границе упругого полупространства, проявляется в следующем:

- размерный эффект — зависимость напряжённого состояния от периода искривления поверхности;
- влияние формы поверхности: чем меньше радиус кривизны, тем сильнее проявляется влияние поверхностных напряжений;
- поверхностное напряжение перестаёт влиять на напряжённое состояние наноматериала при $a > 100$ нм.

Глава 3. Двухкомпонентная плоскость со слабо искривлённой межфазной границей

В гетероэпитаксиальных структурах существуют межфазные поверхности, обладающие упругими свойствами, отличающимися от упругих свойств контактирующих материалов. Кроме того, в реальных телах форма межфазной поверхности, так же как и внешней, может иметь неровности. Межфазные напряжения неизбежно оказывают влияние на механические свойства неоднородных материалов — эффективные модули упругости, определяющие соотношения и пр. [7, 50].

В данной главе исследуется влияние межфазных напряжений на напряжённое состояние слабо искривлённой границы раздела двух упругих сред. В рамках рассматриваемого подхода перемещения непрерывны при переходе через межфазную поверхность, а скачок напряжений связан с существованием межфазных напряжений. Проводится анализ влияния формы искривления поверхности и физических параметров на напряжённое состояние границы раздела сред.

§ 3.14 Постановка задачи

Рассмотрим упругое тело, состоящее из двух полупространств со слабо искривлённой межфазной поверхностью. Считаем, что тело находится в условиях плоской деформации. Тогда можем перейти к постановке соответствующей

двумерной задачи для двухкомпонентной плоскости со слабо искривлённой границей раздела (рис. 3.14). Пусть упругие свойства нижней полуплоскости Ω_1 отличаются от упругих свойств верхней Ω_2 , а на границе раздела Γ действует межфазное напряжение σ^s [11, 35, 43]. Граница Γ определяется равенством

$$\Gamma = \{z : z = \zeta \equiv x_1 + i\varepsilon f(x_1)\},$$

где $\varepsilon \ll 1$, а функция $f(x_1)$ — непрерывная, периодическая и ограниченная, то есть

$$f(x_1) = f(x_1 + a), \quad |f(x_1)| \leq a, \quad |f'(x_1)| \leq M = \text{const},$$

где a — период.

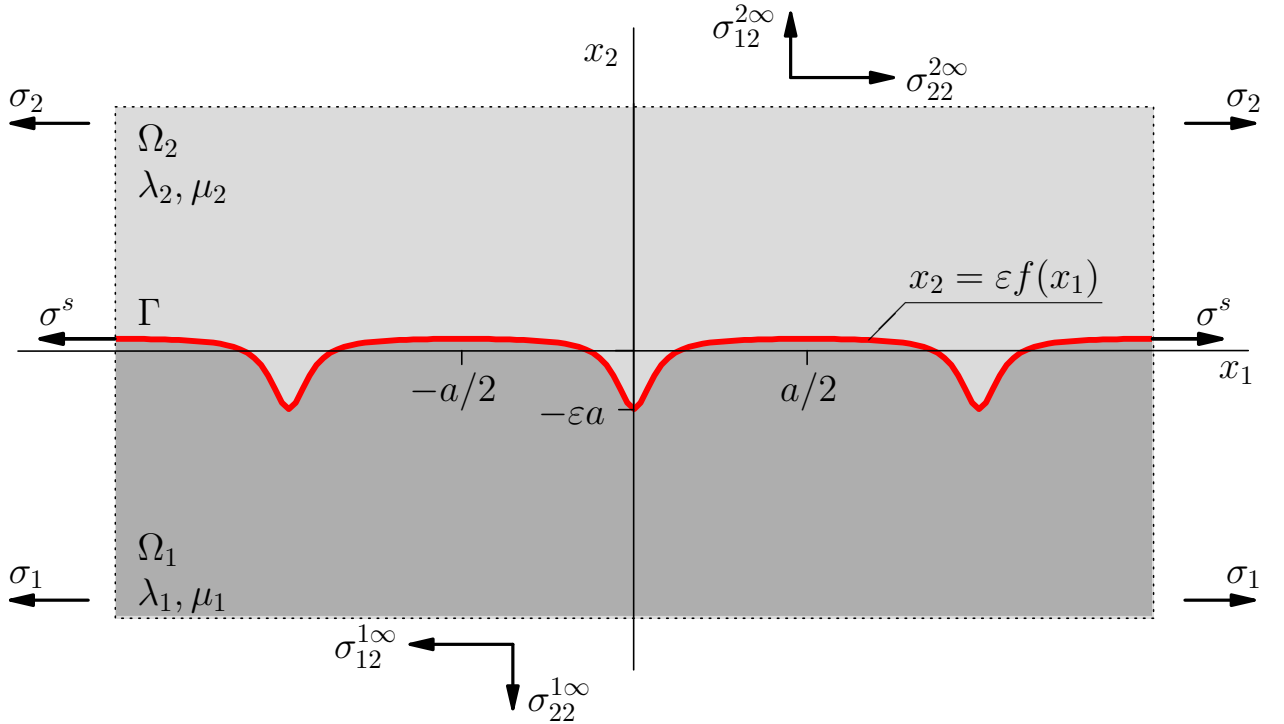


Рис. 3.14. Двумерная модель упругого двухкомпонентного тела со слабо искривлённой границей

На межфазной границе Γ отсутствуют разрывы перемещений, а скачок напряжений σ^k ($k = 1, 2$) будем определять через межфазное напряжение σ^s , используя обобщённый закон Лапласа — Юнга. Условия контакта имеют вид:

$$u^+(\zeta) = u^-(\zeta), \quad \sigma^+(\zeta) - \sigma^-(\zeta) = \Delta\sigma(\zeta) = \frac{\sigma^s}{r} - i \frac{1}{h} \frac{d\sigma^s}{dx_1} \equiv t^s(\zeta), \quad (14.1)$$

где радиус кривизны границы r и метрический коэффициент h определяются равенствами (8.3) аналогично главе 2. Из первого условия в (14.1) следует, что

$$u^{+'}(\zeta) - u^{-'}(\zeta) = \Delta u'(\zeta) = 0, \quad (14.2)$$

штрих означает производную по аргументу. На бесконечности выполнены условия:

$$\lim_{|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty} \sigma_{ij}^k(z) = \sigma_{ij}^{k\infty}, \quad \lim_{|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty} \omega_k(z) = \omega_k^\infty, \quad z \in \Omega_k. \quad (14.3)$$

§ 3.15 Основные соотношения

Вектор напряжений и вектор перемещений связаны с комплексными потенциалами Гурса — Колосова следующими соотношениями, аналогичными равенствам (9.4) — (9.5) [41]:

$$G(z) = \eta_k \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} + \left(z \overline{\Phi'_k(z)} + \overline{\Psi_k(z)} \right) e^{-2i\alpha}, \quad z \in \Omega_k, \quad (15.1)$$

$$G(z) = \begin{cases} \sigma(z), & \eta_k = 1, \\ -2\mu_k \frac{du^k}{dz}, & \eta_k = -\varkappa_k. \end{cases} \quad (15.2)$$

Так же как и в главе 2, вводятся новые функции Υ_k , голоморфные в областях $\tilde{\Omega}_k = \{z : \bar{z} \in \Omega_k\}$ с границей $\tilde{\Gamma} = \{z : z = \bar{\zeta} = x_1 - i\varepsilon f(x_1), \zeta \in \Gamma\}$ (рис. 3.15) следующим равенством:

$$\Upsilon_k(z) = -\overline{\Phi_k(\bar{z})} - z \overline{\Phi'_k(\bar{z})} - \overline{\Psi_k(\bar{z})}, \quad z \in \tilde{\Omega}_k. \quad (15.3)$$

Граница $\tilde{\Gamma}$ и области $\tilde{\Omega}_k$ являются зеркальными отражениями соответственно границы Γ и областей Ω_k относительно прямой $x_2 = 0$. Тогда при $z \in \Omega_k$ с учётом (15.3) соотношение (15.1) преобразуется к виду

$$G(z) = \eta_k \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} - \left(\Upsilon_k(\bar{z}) + \overline{\Phi_k(z)} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_k(z)} \right) e^{-2i\alpha}. \quad (15.4)$$

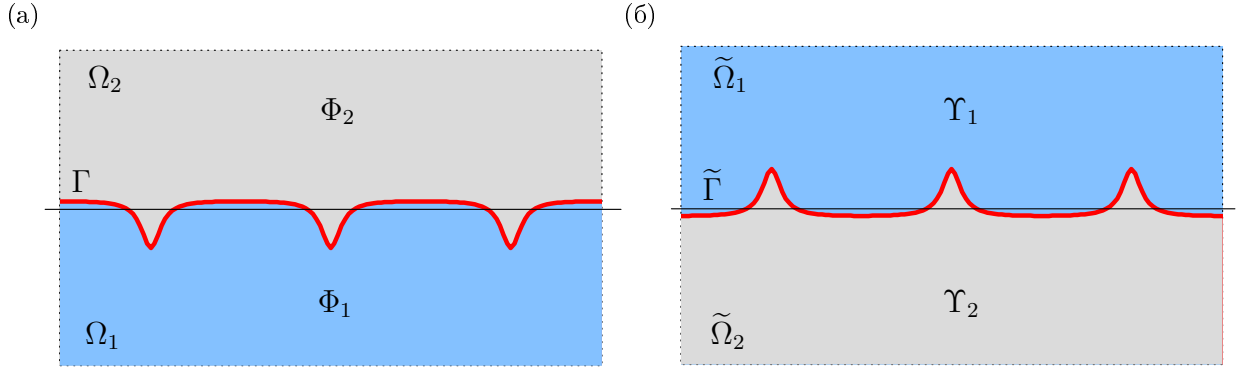


Рис. 3.15. Области определения голоморфных функций Φ_k (а) и Υ_k (б)

Перейдём в равенстве (15.4) к пределу при $z \rightarrow \zeta \pm i0$, считая, что $\alpha \rightarrow \alpha_0$, где α_0 — угол между положительным направлением касательной к границе Γ и осью x_1 . Тогда условия (14.1) приводят к соответствующим двум условиям, которым должны удовлетворять комплексные потенциалы Φ_k, Υ_k :

$$\begin{aligned}
 & (\Phi_2 + \Upsilon_1)^+ - (\Phi_1 + \Upsilon_2)^- + 2i\varepsilon f(x_1) \left(\overline{\Phi_2^{+'}} - \overline{\Phi_1^{-'}} \right) + \\
 & \quad + \frac{2i\varepsilon f'(x_1)}{1 + i\varepsilon f'(x_1)} \left((\overline{\Phi_2} - \Upsilon_1)^+ - (\overline{\Phi_1} - \Upsilon_2)^- + \right. \\
 & \quad \left. + 2i\varepsilon f(x_1) \left(\overline{\Phi_1^{-'}} - \overline{\Phi_2^{+'}} \right) \right) = \Delta\sigma(\zeta) = t^s(\zeta), \quad (15.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\mu_1 \varkappa_2 \Phi_2 - \mu_2 \Upsilon_1)^+ - (\mu_2 \varkappa_1 \Phi_1 - \mu_1 \Upsilon_2)^- + 2i\varepsilon f(x_1) \left(\mu_2 \overline{\Phi_1^{-'}} - \mu_1 \overline{\Phi_2^{+'}} \right) + \\
 & \quad + \frac{2i\varepsilon f'(x_1)}{1 + i\varepsilon f'(x_1)} \left[(\mu_2 \Upsilon_1 - \mu_1 \overline{\Phi_2})^+ - (\mu_1 \Upsilon_2 - \mu_2 \overline{\Phi_1})^- + \right. \\
 & \quad \left. + 2i\varepsilon f(x_1) \left(\mu_1 \overline{\Phi_2^{+'}} - \mu_2 \overline{\Phi_1^{-'}} \right) \right] = 2\mu_1 \mu_2 \Delta u'(\zeta) = 0, \quad (15.6)
 \end{aligned}$$

где граничные значения комплексных потенциалов определены следующим образом:

$$\Phi_k^\pm = \lim_{z \rightarrow \zeta \pm i0} \Phi_k(z), \quad \Upsilon_k^\pm = \lim_{\bar{z} \rightarrow \bar{\zeta} \pm i0} \Upsilon_k(\bar{z}), \quad \zeta \in \Gamma, \quad k = 1, 2.$$

§ 3.16 Метод возмущений

Ввиду того, что функция, описывающая форму границы раздела сред, зависит от малого параметра ε , то аналогично главе 2, комплексные потенциалы Φ_k , Υ_k и функцию межфазного напряжения σ^s можно представить в виде степенных рядов по ε :

$$\begin{aligned}\Phi_k^\pm(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Phi_{kn}^\pm(z), & \Upsilon_k^\pm(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Upsilon_{kn}^\pm(z), \\ \sigma^s(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sigma_n^s(\zeta).\end{aligned}\tag{16.1}$$

Граничные значения функций Φ_{kn} на Γ и Υ_{kn} на $\tilde{\Gamma}$, а также функцию σ_n^s разложим в соответствующие ряды Тейлора в окрестности прямой $x_2 = 0$, рассматривая вещественную переменную x_1 как параметр:

$$\begin{aligned}\Phi_{kn}^\pm(\zeta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\varepsilon f(x_1))^m}{m!} \Phi_{kn}^{(m)\pm}(x_1), \\ \Upsilon_{kn}^\pm(\zeta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\varepsilon f(x_1))^m}{m!} \Upsilon_{kn}^{(m)\pm}(x_1), \\ \sigma_n^s(\zeta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\varepsilon f(x_1))^m}{m!} \sigma_n^{s(m)}(x_1).\end{aligned}\tag{16.2}$$

Учитывая полученное в главе 2 соотношение для коэффициентов r и h (10.14) и выражение (10.13), для условия (15.5) получим

$$\begin{aligned}& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\varepsilon f(x_1))^m}{m!} \left[\left((-1)^m \Upsilon_{1n}^{(m)} + \Phi_{2n}^{(m)} \right)^+ - \right. \\ & \left. - \left(\Phi_{1n}^{(m)} + (-1)^m \Upsilon_{2n}^{(m)} \right)^- + 2i\varepsilon f(x_1) (-1)^m \left(\overline{\Phi_{2n}^{(m+1)+}} - \overline{\Phi_{1n}^{(m+1)-}} \right) + \right. \\ & \left. + 2i\varepsilon f'(x_1) (-1)^m \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\varepsilon f'(x_1))^l}{l!} \left(\left(\overline{\Phi_{2n}^{(m)}} - \Upsilon_{1n}^{(m)} \right)^+ + \left(\Upsilon_{2n}^{(m)} - \overline{\Phi_{1n}^{(m)}} \right)^- - \right. \\ & \left. - 2i\varepsilon f(x_1) \left(\overline{\Phi_{2n}^{(m+1)+}} - \overline{\Phi_{1n}^{(m+1)-}} \right) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left(T_n^s(x_1) + H_0 \tau'_n \right).\end{aligned}\tag{16.3}$$

Для следующего условия (15.6), подставляя разложения (16.1) – (16.2), получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\varepsilon f(x_1))^m}{m!} \left\{ \left(\mu_1 \varkappa_2 \Phi_{2n}^{(m)}(x_1) - \mu_2 (-1)^m \Upsilon_{1n}^{(m)}(x_1) \right)^+ - \right. \\
& - \left(\mu_2 \varkappa_1 \Phi_{1n}^{(m)}(x_1) - \mu_1 (-1)^m \Upsilon_{2n}^{(m)}(x_1) \right)^- + 2i\varepsilon f(x_1) (-1)^m \left(\overline{\mu_2 \Phi_{1n}^{(m+1)-}(x_1)} - \right. \\
& \left. \left. - \overline{\mu_1 \Phi_{2n}^{(m+1)+}(x_1)} \right) + 2i\varepsilon f'(x_1) (-1)^m \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\varepsilon f'(x_1))^l}{l!} \times \right. \\
& \times \left[\left(\mu_2 \Upsilon_{1n}^{(m)}(x_1) - \mu_1 \overline{\Phi_{2n}^{(m)}(x_1)} \right)^+ - \left(\mu_1 \Upsilon_{2n}^{(m)}(x_1) - \mu_2 \overline{\Phi_{1n}^{(m)}(x_1)} \right)^- + \right. \\
& \left. \left. + 2i\varepsilon f(x_1) \left(\overline{\mu_1 \Phi_{2n}^{+'}(x_1)} - \overline{\mu_2 \Phi_{1n}^{-'}(x_1)} \right) \right] \right\} = 0. \tag{16.4}
\end{aligned}$$

Приравнявая в (16.3) коэффициенты при одинаковых степенях ε^n ($n = 0, 1, \dots$), приходим к бесконечной последовательности краевых задач Римана – Гильберта [32]:

$$\begin{aligned}
& \left(\Upsilon_{1n}(x_1) + \Phi_{2n}(x_1) \right)^+ - \left(\Phi_{1n}(x_1) + \Upsilon_{2n}(x_1) \right)^- = \\
& = F_{1n} + i\sigma_n^{s'}(x_1) - T_n^s, \tag{16.5}
\end{aligned}$$

где

$$T_0^s = R_0 \sigma_0^s(x_1) = 0,$$

$$\begin{aligned}
T_1^s &= if(x_1)R_0\sigma_0^{s'}(x_1) + R_0\sigma_1^s(x_1) + R_1\sigma_0^s(x_1) + f(x_1)H_0\sigma_0^{s''}(x_1) - \\
& - iH_1\sigma_0^{s'}(x_1) = f''(x_1)\sigma_0^s(x_1) + f(x_1)\sigma_0^{s''}(x_1), \tag{16.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_n^s &= \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!} \sum_{m=0}^{n-j-1} \frac{1}{m!(q-j)!} (if(x_1))^{q-j} \times \\
& \times \left(R_j \sigma_m^{s(q-j)}(x_1) - iH_j \sigma_m^{s(q-j+1)}(x_1) \right), \quad n \geq 2. \tag{16.7}
\end{aligned}$$

Функции F_{1n} зависят от комплексных потенциалов, полученных в предыдущем приближении [32]:

$$F_{10} = 0,$$

$$\begin{aligned} F_{11} = & -2if'(x_1) \left(\left(\overline{\Phi_{20}(x_1)} - \Upsilon_{10}(x_1) \right)^+ + \left(\Upsilon_{20}(x_1) - \overline{\Phi_{10}(x_1)} \right)^- \right) - \\ & -2if(x_1) \left(\overline{\Phi'_{20}{}^+(x_1)} - \overline{\Phi'_{10}{}^-(x_1)} \right) - \\ & -if(x_1) \left[\left(\Phi'_{20}(x_1) - \Upsilon'_{10}(x_1) \right)^+ - \left(\Phi'_{10}(x_1) - \Upsilon'_{20}(x_1) \right)^- \right], \end{aligned} \quad (16.8)$$

$$\begin{aligned} F_{1n} = & -\sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{m!} \left\{ \frac{(if(x_1))^q}{q!} \left[\left((-1)^q \Upsilon_{1m}^{(q)}(x_1) + \Phi_{2m}^{(q)}(x_1) \right)^+ - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\Phi_{1m}^{(q)}(x_1) + (-1)^q \Upsilon_{2m}^{(q)}(x_1) \right)^- - 2(-1)^{q-1} q \left(\overline{\Phi_{1m}^{(q)-}(x_1)} - \overline{\Phi_{2m}^{(q)+}(x_1)} \right) \right] - \right. \\ & \left. - 2(-1)^{q-1} \sum_{j=1}^q \frac{(if(x_1))^{q-j}}{(q-j)!} (if'(x_1))^j \times \right. \\ & \times \left[\left(\Upsilon_{1m}^{(q-j)}(x_1) - (2q-2j+1) \overline{\Phi_{2m}^{(q-j)}(x_1)} \right)^+ + \right. \\ & \left. \left. + \left((2q-2j+1) \overline{\Phi_{1m}^{(q-j)}(x_1)} - \Upsilon_{2m}^{(q-j)}(x_1) \right)^- \right] \right\}, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (16.9)$$

Аналогично, приравнивая коэффициенты при степенях ε^n в соотношении (16.4), приходим к последовательности краевых условий:

$$\left(\mu_2 \Upsilon_{1n}(x_1) - \mu_1 \varkappa_2 \Phi_{2n}(x_1) \right)^+ - \left(\mu_1 \Upsilon_{2n}(x_1) - \mu_2 \varkappa_1 \Phi_{1n}(x_1) \right)^- = F_{2n}, \quad (16.10)$$

где, согласно [32],

$$F_{20} = 0,$$

$$\begin{aligned}
F_{21} = & -2i\varepsilon f'(x_1) \left[\left(\mu_2 \Upsilon_{10}(x_1) - \mu_1 \overline{\Phi_{20}(x_1)} \right)^+ - \left(\mu_1 \Upsilon_{20}(x_1) - \mu_2 \overline{\Phi_{10}(x_1)} \right)^- \right] + \\
& + i\varepsilon f(x_1) \left[\left(\mu_1 \varkappa_2 \Phi'_{20}(x_1) + \mu_2 \Upsilon'_{10}(x_1) \right)^+ - \left(\mu_2 \varkappa_1 \Phi'_{10}(x_1) + \mu_1 \Upsilon'_{20}(x_1) \right)^- - \right. \\
& \left. - 2 \left(\mu_2 \overline{\Phi'_{10}(x_1)} - \mu_1 \overline{\Phi'_{20}(x_1)} \right) \right], \tag{16.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2n} = & - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{m!} \left\{ \frac{(if(x_1))^q}{q!} \left[\left((-1)^q \mu_2 \Upsilon_{1m}^{(q)}(x_1) - \mu_1 \varkappa_2 \Phi_{2m}^{(q)}(x_1) \right)^+ - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(-\mu_2 \varkappa_1 \Phi_{1m}^{(q)}(x_1) + (-1)^q \mu_1 \Upsilon_{2m}^{(q)}(x_1) \right)^- - 2(-1)^{q-1} q \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left(\mu_2 \overline{\Phi_{1m}^{(q)-}(x_1)} - \mu_1 \overline{\Phi_{2m}^{(q)+}(x_1)} \right) \right] - 2(-1)^{q-1} \sum_{j=1}^q \frac{(if(x_1))^{q-j}}{(q-j)!} \times \right. \\
& \left. \times (if'(x_1))^j \left[\left(\mu_2 \Upsilon_{1m}^{(q-j)}(x_1) - \mu_1 (2q - 2j + 1) \overline{\Phi_{2m}^{(q-j)}(x_1)} \right)^+ + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\mu_2 (2q - 2j + 1) \overline{\Phi_{1m}^{(q-j)}(x_1)} - \mu_1 \Upsilon_{2m}^{(q-j)}(x_1) \right)^- \right] \right\}, \quad n \geq 2. \tag{16.12}
\end{aligned}$$

Решение задачи (16.5), (16.10), согласно [41], имеет вид:

$$\begin{cases} \Upsilon_{1n}(z) = \frac{\mu_1 \varkappa_2 I_n(z) + J_n(z)}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} + a_{1n}^2, & \text{Im } z > 0, \\ \Phi_{1n}(z) = \frac{\mu_1 I_n(z) - J_n(z)}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1} + a_{1n}^1, & \text{Im } z < 0, \\ \Phi_{2n}(z) = -\Phi_{1n}(z) + I_n(z) + C_n, & \text{Im } z > 0, \\ \Upsilon_{2n}(z) = -\Upsilon_{1n}(z) + I_n(z) + C_n, & \text{Im } z < 0, \end{cases} \tag{16.13}$$

где

$$\begin{aligned}
I_n(z) = I_{nk} + I_{nu}, \quad I_{nk} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_{1n}(t) - T_n^s(t)}{t - z} dt, \\
I_{nu} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\sigma_n^{s'}(t)}{t - z} dt, \quad J_n(z) = J_{nk}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_{2n}(t)}{t - z} dt, \tag{16.14}
\end{aligned}$$

$$a_{10}^j = a_1^j, \quad C_0 = a_1^j + a_2^j, \quad a_{1n}^j = C_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (-1)^j \operatorname{Im} z > 0.$$

Здесь I_{nk}, J_{nk} обозначают слагаемые в функциях I_n и J_n , зависящие только от известных компонент, полученных в предыдущих приближениях, а I_{nu} выражает зависимость от искомой функции $\sigma_n^{s'}$. В соответствии с равенствами (16.13) — (16.14) получим представление комплексных потенциалов через сумму известных и неизвестных частей.

$$\begin{aligned} \Upsilon_{1n}(z) &= \Upsilon_{1nk}(z) + \Upsilon_{1nu}(z), & \Upsilon_{2n}(z) &= \Upsilon_{2nk}(z) + \Upsilon_{2nu}(z), \\ \Phi_{1n}(z) &= \Phi_{1nk}(z) + \Phi_{1nu}(z), & \Phi_{2n}(z) &= \Phi_{2nk}(z) + \Phi_{2nu}(z). \end{aligned} \tag{16.15}$$

§ 3.17 Сведение задачи к интегральному уравнению

В данном параграфе решение задачи сводится к решению интегрального уравнения с помощью метода, аналогичного описанному в §11 главы 2. Во-первых, из условия непрерывности перемещений при переходе от объёмов Ω_1 и Ω_2 к границе Γ получим условие непрерывности деформации ε_{tt}

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \varepsilon_{tt}^k = \varepsilon_{tt}^s, \quad k = 1, 2. \tag{17.1}$$

Условие (17.1) и определяющее соотношение поверхностной теории упругости (9.1), вытекающее из теории Гёртина — Мёрдока приводят к уравнению, связывающему искомое межфазное напряжение σ_{tt}^s с компонентой объёмной деформации:

$$\sigma_{tt}^s = \gamma_0 + (\lambda_s + 2\mu_s)\varepsilon_{tt}^1. \tag{17.2}$$

Определяющие соотношения, аналогичные равенствам (9.2), запишем для напряжений, действующих в области Ω_1 :

$$\sigma_{nn}^1 = (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_{nn}^1 + \lambda_1\varepsilon_{tt}^1, \quad \sigma_{tt}^1 = (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_{tt}^1 + \lambda_1\varepsilon_{nn}^1. \tag{17.3}$$

Из соотношения (17.3), так же как и в главе 2, выразим компоненту окружной деформации ε_{tt}^1 через компоненты напряжений σ_{nn}^1 и σ_{tt}^1 :

$$\varepsilon_{tt}^1 = \frac{\lambda_1 \sigma_{nn}^1 - (\lambda_1 + 2\mu_1) \sigma_{tt}^1}{\lambda_1^2 - (\lambda_1 + 2\mu_1)^2}. \quad (17.4)$$

Переходя в равенстве (15.4) к пределу при $z \rightarrow \zeta \pm i0$, считая, что $\alpha \rightarrow \alpha_0$ и $\alpha \rightarrow \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$, получим соотношения, аналогичные равенствам (9.8) и (9.9). Подставив выражения для напряжений σ_{nn} и σ_{tt} в равенство (17.4), приходим к следующей зависимости окружной деформации от граничных значений комплексных потенциалов

$$\begin{aligned} \varepsilon_{tt}^1(\zeta) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\lambda_1 + \mu_1} \Phi_1^-(\zeta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\mu_1} \left(\Upsilon_1^+(\bar{\zeta}) + \overline{\Phi_1^-(\zeta)} - (\zeta - \bar{\zeta}) \overline{\Phi_1^{-\prime}(\zeta)} \right) e^{-2i\alpha_0} \right\}. \end{aligned} \quad (17.5)$$

Подставляя равенство (17.5) в определяющее соотношение (17.2) и учитывая разложения функций по малому параметру (16.1) – (16.2), придём к последовательности уравнений, сходной с последовательностью (11.5)

$$\tau_n(x_1) - M \operatorname{Re} \left[\varkappa_1 \Phi_{1n}^-(x_1) + \Upsilon_{1n}^+(x_1) \right] = V_n(x_1), \quad M = \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{2\mu_1}, \quad (17.6)$$

где функции V_n зависят только от предыдущих приближений и вычисляются следующим образом:

$$V_0(x_1) = \gamma_0, \quad (17.7)$$

$$\begin{aligned} V_1(x_1) = M \operatorname{Re} \left\{ i f(x_1) \left(\frac{2\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \Phi_{10}^{\prime-}(x_1) - \varkappa_1 \overline{\Phi_{10}^{\prime-}(x_1)} - \Upsilon_0^{\prime+}(x_1) - 2 \overline{\Phi_0^{\prime-}(x_1)} \right) - \right. \\ \left. - 2i f'(x_1) \left(\overline{\Phi_0^-(x_1)} + \Upsilon_0^+(x_1) \right) \right\} - i f(x_1) \sigma_0^{s\prime}(x_1), \end{aligned} \quad (17.8)$$

$$\begin{aligned}
V_n(x_1) = M \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=1}^n \frac{n!}{q!} \left[\frac{(if(x_1))^m}{m!} \left((-1)^m \overline{\varkappa \Phi_q^{-(m)}(x_1)} + (-1)^m \Upsilon_q^{+(m)}(x_1) + \right. \right. \right. \\
+ \left. \frac{\mu}{\lambda + \mu} \Phi_q^{-(m)}(x_1) + 2m(-1)^m \overline{\Phi_q^{-(m)}(x_1)} \right) + \\
+ 2 \sum_{j=1}^m \frac{(if(x_1))^{m-j}}{(m-j)!} (if'(x_1))^j (-1)^m \left(\overline{\Phi_q^{-(m-j)}(x_1)} + \Upsilon_q^{+(m-j)}(x_1) \right) \Big] + \\
+ 4 \sum_{m=2}^n \frac{n!}{q!} \sum_{j=2}^m \frac{(if(x_1))^{m-j+1}}{(m-j)!} (if'(x_1))^{j-1} (-1)^m \overline{\Phi_q^{-(m-j+1)}(x_1)} \Big\} - \\
- \sum_{m=1}^n \frac{n!}{q!} \frac{(if(x_1))^m}{m!} \sigma_q^{s(m)}(x_1), \quad n \geq 2. \tag{17.9}
\end{aligned}$$

После дифференцирования получим:

$$\sigma_n^{s'} - M \operatorname{Re} \{ \varkappa_1 \Phi'_{1n} + \Upsilon'_{1n} \} = V'_n. \tag{17.10}$$

С учётом представлений (16.15) уравнение (17.10) принимает вид

$$\sigma_n^{s'} - M \operatorname{Re} \{ \varkappa_1 \Phi'_{1nu} + \Upsilon'_{1nu} \} = M \operatorname{Re} \{ \varkappa_1 \Phi'_{1nk} + \Upsilon'_{1nk} \} + V'_n, \tag{17.11}$$

где в левой части содержатся функции, зависящие от производной неизвестного межфазного напряжения, а в правой части — известные функции. Аналогично главе 2 покажем, что полученное уравнение является гиперсингулярным интегральным уравнением.

Используя формулы Сохоцкого — Племяля (4.19) — (4.20), приходим к

равенствам

$$\begin{aligned}
 \Upsilon'_{1nu}(x_1) &= \frac{\varkappa_2 \mu_1}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} \left[\frac{1}{2} i \sigma_n^{s''} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i \sigma_n^{s'}(t)}{(t-x_1)^2} dt \right], \\
 \Phi'_{1nu}(x_1) &= \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1} \left[-\frac{1}{2} i \sigma_n^{s''} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i \sigma_n^{s'}(t)}{(t-x_1)^2} dt \right], \\
 \Upsilon'_{1nk}(x_1) &= \frac{1}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} \left[\frac{1}{2} F'_{2n}(x_1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_{2n}(t)}{(t-x_1)^2} dt \right] + \\
 &+ \frac{\varkappa_2 \mu_1}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} \left[\frac{1}{2} (F'_{1n}(x_1) - T_n^{s'}(x_1)) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F_{1n}(t) - T_n^s(t))}{(t-x_1)^2} dt \right], \\
 \Phi'_{1nk}(x_1) &= \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1} \left[\frac{1}{2} F'_{2n}(x_1) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_{2n}(t)}{(t-x_1)^2} dt \right] + \\
 &+ \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1} \left[-\frac{1}{2} (F'_{1n}(x_1) - T_n^{s'}(x_1)) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F_{1n}(t) - T_n^s(t))}{(t-x_1)^2} dt \right].
 \end{aligned} \tag{17.12}$$

Подставляя соотношения (17.12) в уравнение (17.11), получим бесконечную последовательность гиперсингулярных интегральных уравнений относительно производной неизвестного межфазного напряжения $\sigma_n^{s'}$

$$\begin{aligned}
 \sigma_n^{s'}(x_1) - MK_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_n^{s'}(t)}{(t-x_1)^2} dt = \\
 = M \operatorname{Re} \left\{ \frac{K_2}{2} [F'_{1n}(x_1) - T_n^{s'}(x_1)] + \frac{K_1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_{1n}(t) - T_n^s}{(t-x_1)^2} dt + \right. \\
 \left. + \frac{K_3}{2} F'_{2n}(x_1) + \frac{K_4}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_{2n}(t)}{(t-x_1)^2} dt \right\} + V'_n, \tag{17.13}
 \end{aligned}$$

где K_i ($i = \overline{1,4}$) зависят от модулей упругости нижней и верхней областей:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\varkappa_2 \mu_1}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} + \frac{\varkappa_1 \mu_1}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1}, & K_2 &= \frac{\varkappa_2 \mu_1}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} - \frac{\varkappa_1 \mu_1}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1}, \\ K_3 &= \frac{1}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} + \frac{\varkappa_1}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1}, & K_4 &= \frac{1}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} - \frac{\varkappa_1}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1}. \end{aligned} \quad (17.14)$$

Нужно отметить, что уравнение (17.13) по типу совпадает с уравнениями (4.22) и (11.9), полученными в первой и второй главе. Эти уравнения отличаются только правыми частями. Кроме того, как и уравнения (4.22) и (11.9), уравнение (17.13) получено без использования свойства периодичности функции $f(x_1)$, т. е. оно справедливо для любой формы поверхности.

§ 3.18 Решение интегрального уравнения для периодической межфазной поверхности

Предположим, что на бесконечности действуют продольные напряжения $\sigma_{11}^{1\infty} \equiv \sigma_1$ и $\sigma_{11}^{2\infty} \equiv \sigma_2$. Тогда из условия идеального контакта следует, что они связаны соотношением [41]

$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{\mu_2(\varkappa_1 + 1)}{\mu_1(\varkappa_2 + 1)}. \quad (18.1)$$

Остальные компоненты вектора напряжений и угол поворота на бесконечности примем равными нулю.

Основываясь на способе решения интегрального уравнения, описанном в §5 первой главы и в §12 главы 2, получим решение задачи в первом приближении. Для этого искомую функцию межфазного напряжения представим в виде ряда Фурье

$$\sigma_n^s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_{nk} \cos b_k x + B_{nk} \sin b_k x), \quad (18.2)$$

где $b_k = 2\pi k/a$, здесь и далее обозначено $x \equiv x_1$. Функцию, описывающую форму границы, как и в первых двух главах, примем чётной и также разложим

в ряд:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos b_k x. \quad (18.3)$$

18.1 Нулевое приближение

Согласно (16.13) – (16.14), решение задач Римана – Гильберта (16.5) и (16.10) в нулевом приближении имеет вид:

$$\begin{cases} \Upsilon_{10}(z) = \frac{\mu_1 \varkappa_2}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} I_0(z) + \frac{\sigma_1}{4}, & \text{Im } z > 0, \\ \Phi_{10}(z) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1} I_0(z) + \frac{\sigma_1}{4}, & \text{Im } z < 0, \end{cases} \quad (18.4)$$

где

$$\begin{aligned} J_0(z) &= 0, & I_0(z) &= I_{0k} + I_{0u}, \\ I_{0k} &= 0, & I_{0u} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\sigma_0^{s'}(t)}{t-z} dt = \\ & & &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i \sum_{k=0}^{\infty} b_k (-A_{0k} \sin b_k x + B_{0k} \cos b_k x)}{t-z} dt. \end{aligned} \quad (18.5)$$

Используя свойства интегралов типа Коши, в частности, формулы (5.3) и (5.4), выразим комплексные потенциалы через коэффициенты разложения A_{0k}, B_{0k}, C_k :

$$\begin{cases} \Upsilon_{10}(z) = \frac{\mu_1 \varkappa_2}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{2} (-A_{0k} + iB_{0k}) e^{ib_k z} + \frac{\sigma_1}{4}, & \text{Im } z > 0, \\ \Phi_{10}(z) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{2} (-A_{0k} - iB_{0k}) e^{-ib_k z} + \frac{\sigma_1}{4}, & \text{Im } z < 0. \end{cases} \quad (18.6)$$

Подставим полученные выражения (18.6) в уравнение для нахождения неизвестного межфазного напряжения (17.6) в нулевом приближении:

$$\sigma_0^s - M \operatorname{Re} \{ \varkappa_1 \Phi_{10} + \Upsilon_{10} \} = \gamma_0, \quad (18.7)$$

откуда, приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках, получим, что

$$A_{00} = M(\varkappa_1 + 1) \frac{\sigma_1}{4}, \quad (18.8)$$

$$A_{0k} = 0, \quad k \geq 1; \quad B_{0k} = 0, \quad k \geq 0. \quad (18.9)$$

С учётом полученного решения из (18.2) находим выражение для межфазного напряжения в нулевом приближении:

$$\sigma_0^s = M(\varkappa_1 + 1) \frac{\sigma_1}{4}, \quad (18.10)$$

а из (18.6) получим комплексные потенциалы:

$$\Upsilon_{10}(z) = \Phi_{10}(z) = \frac{\sigma_1}{4}, \quad \Upsilon_{20}(z) = \Phi_{20}(z) = \frac{\sigma_2}{4}. \quad (18.11)$$

18.2 Первое приближение

Далее получим значение межфазного напряжения в первом приближении. Для этого рассмотрим задачи Римана — Гильберта (16.5) и (16.10) в первом приближении. Подставим полученные в нулевом приближении выражения для комплексных потенциалов (18.11) в соотношения (16.8) и (16.11):

$$\begin{aligned} (\Upsilon_{11} + \Phi_{21})^+ - (\Phi_{11} + \Upsilon_{21})^- &= \\ &= i\sigma_1^{s'} - f''(x_1)\sigma_0^s - 2if'(x_1)\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1), \end{aligned} \quad (18.12)$$

$$\begin{aligned} (\mu_2\Upsilon_{11} - \mu_1\varkappa_2\Phi_{21})^+ - (\mu_1\Upsilon_{21} - \mu_2\varkappa_1\Phi_{11})^- &= \\ &= -2if'(x_1)\frac{1}{2}(\mu_2\sigma_1 - \mu_1\sigma_2). \end{aligned} \quad (18.13)$$

Решением задач Римана — Гильберта (18.12) и (18.13) будут соотношения (16.13), в которых, согласно равенствам (16.14), функции I_1 и J_1 примут значения:

$$I_1(z) = \begin{cases} \frac{b}{2} [C_k(\sigma_2 - \sigma_1 + \sigma_0^s b) + (-A_{1k} + iB_{1k})] e^{ibz}, & \text{Im } z > 0, \\ \frac{b}{2} [C_k(\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_0^s b) + (-A_{1k} - iB_{1k})] e^{-ibz}, & \text{Im } z < 0, \end{cases} \quad (18.14)$$

$$J_1(z) = \begin{cases} -C_k \frac{b}{2} [\mu_2\sigma_1 - \mu_1\sigma_2] e^{ibz}, & \text{Im } z > 0, \\ -C_k \frac{b}{2} [\mu_2\sigma_1 - \mu_1\sigma_2] e^{-ibz}, & \text{Im } z < 0. \end{cases} \quad (18.15)$$

Подставляя полученные в нулевом приближении комплексные потенциалы (18.11) в уравнение (17.6) при $n = 1$ с правой частью (17.8), получим:

$$\sigma_1^s - M \operatorname{Re} \{ \varkappa_1 \Phi_{11} + \Upsilon_{11} \} = -if(x_1) \sigma_0^{s'}. \quad (18.16)$$

Полученные с учётом соотношений (18.14) и (18.15) комплексные потенциалы (16.13) подставим в уравнение (18.16). Приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках, придём к соотношениям:

$$A_{1k} = \frac{MbC_k(K_5\sigma_1 + K_2\sigma_0^s b)}{2 + MbK_1}, \quad B_{1k} = 0, \quad k \geq 0, \quad (18.17)$$

где зависящие от модулей упругости постоянные K_2, K_1 определяются равенствами (17.14), а K_5 — по формуле:

$$K_5 = \frac{\varkappa_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 + \mu_2\varkappa_1} + \frac{\mu_1(\varkappa_1 + 1 - \varkappa_2) - \mu_2}{\mu_2 + \mu_1\varkappa_2}. \quad (18.18)$$

Окончательно получим, что межфазное напряжение в первом приближении равно

$$\begin{aligned} \sigma^s(\zeta) &= \sigma_0^s(x_1) + i\varepsilon f(x_1) \sigma_0^{s'}(x_1) + \varepsilon \sigma_1^s(x_1) = \\ &= M(\varkappa_1 + 1) \frac{\sigma_1}{4} + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k} \cos b_k x. \end{aligned} \quad (18.19)$$

Получив значения неизвестных коэффициентов, определим напряжённое состояние двухкомпонентной плоскости с криволинейной межфазной границей в первом приближении. Аналогично равенствам (9.8) — (9.9), выражения компонент напряжений запишутся в виде:

$$\sigma_{nn}^k = \operatorname{Re} \left\{ 2\Phi_k(\zeta) - \left(\Upsilon_k(\bar{\zeta}) + \overline{\Phi_k(\zeta)} - (\zeta - \bar{\zeta}) \overline{\Phi_k'(\zeta)} \right) e^{-2i\alpha_0} \right\}, \quad (18.20)$$

$$\sigma_{nt}^k = \operatorname{Im} \left\{ - \left(\Upsilon_k(\bar{\zeta}) + \overline{\Phi_k(\zeta)} - (z - \bar{\zeta}) \overline{\Phi_k'(\zeta)} \right) e^{-2i\alpha_0} \right\}, \quad (18.21)$$

$$\sigma_{tt}^k = \operatorname{Re} \left\{ 2\Phi_k(\zeta) + \left(\Upsilon_k(\bar{\zeta}) + \overline{\Phi_k(\zeta)} - (\zeta - \bar{\zeta}) \overline{\Phi_k'(\zeta)} \right) e^{-2i\alpha_0} \right\}, \quad (18.22)$$

где $k = 1$ для напряжений, действующих в области Ω_1 и $k = 2$ — для напряжений, действующих в области Ω_2 .

Подставив разложения (16.1) — (16.2), а также принимая во внимание найденные значения (18.11), получим выражения для напряжений в первом приближении:

$$\sigma_{nn}^k = \operatorname{Re} \{ \varepsilon \Phi_{k1}(x_1) - \varepsilon \Upsilon_{k1}(x_1) \}, \quad (18.23)$$

$$\sigma_{nt}^k = \operatorname{Im} \{ \varepsilon \Phi_{k1}(x_1) - \varepsilon \Upsilon_{k1}(x_1) + i \varepsilon f'(x_1) \sigma_k \}, \quad (18.24)$$

$$\sigma_{tt}^k = \operatorname{Re} \{ 3 \varepsilon \Phi_{k1}(x_1) + \varepsilon \Upsilon_{k1} + \sigma_k \}, \quad (18.25)$$

где σ_k — продольные напряжения, действующие на бесконечности в нижней (при $k = 1$) и верхней (при $k = 2$) области. Получить численные выражения можно, подставив соотношения (18.14) и (18.15) в выражения для комплексных потенциалов (16.13), а затем воспользовавшись полученными результатами (18.23) — (18.25).

§ 3.19 Анализ влияния межфазного напряжения на напряжённое состояние границы раздела

Для описания формы искривления межфазной поверхности возьмем функцию (13.1) из главы 2:

$$f(x, y) = \frac{a}{d} \left[\operatorname{Im} \left\{ \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi x}{a} - iy \right) \right\} - 1 \right], \quad d = \operatorname{Im} \{ \operatorname{ctg} (iy) \}. \quad (19.1)$$

Рассмотрим влияние различных параметров на напряжённое состояние двухкомпонентной плоскости со слабо искривлённой межфазной границей. Будем считать, что коэффициенты Пуассона обоих материалов равны $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

Для вычисления напряжений и получения графических результатов использовалась система компьютерной алгебры MAPLE. На рис. 3.16 — 3.17 изображены графики распределения окружных, касательных и нормальных напряжений в диапазоне одного периода, равного 5 нм. Для проведения расчётов,

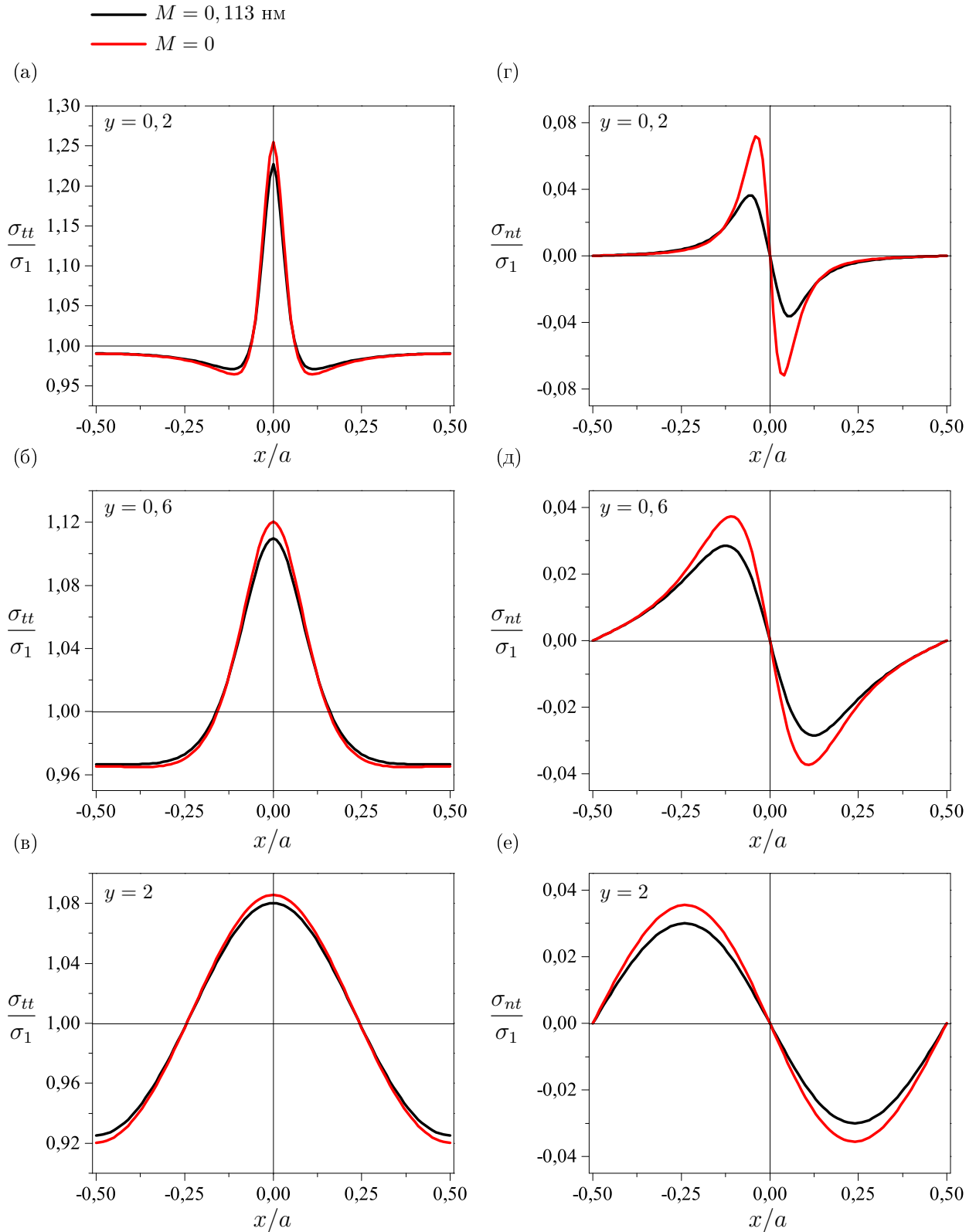


Рис. 3.16. Распределение окружных (а — в) и касательных (г — е) напряжений вдоль межфазной границы в пределах одного периода

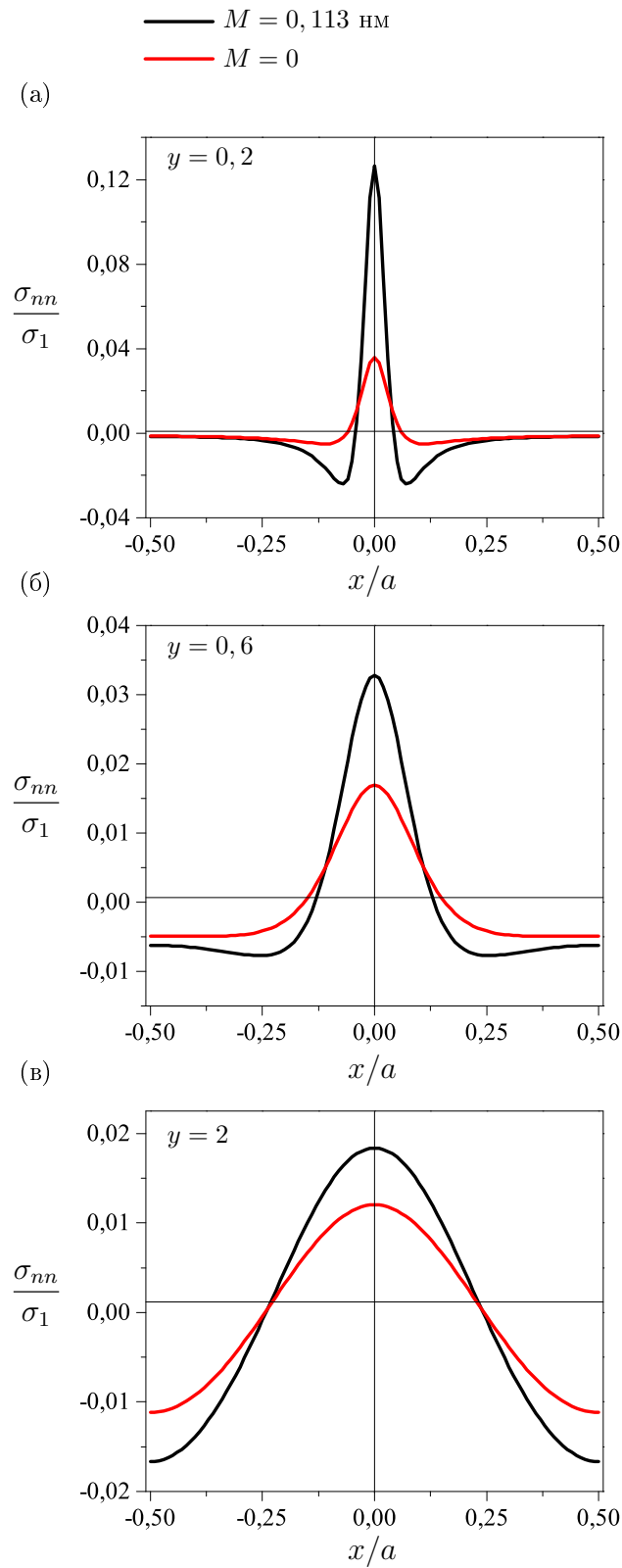


Рис. 3.17. Распределение нормальных напряжений вдоль межфазной границы в пределах одного периода

как и в главе 2, коэффициент $M = 0,113$ нм. Остаточное напряжение γ_0 принято равным нулю. На графиках красным цветом обозначены напряжения, рассчитанные без учёта межфазных напряжений, чёрными — с учётом. Графики окружных и касательных напряжений сглаживаются при учёте межфазных напряжений. На рис. 3.17 проиллюстрирован эффект роста нормальных напряжений. При этом, чем меньше радиус кривизны во впадинах на межфазной поверхности, тем сильнее проявляется эффект межфазных напряжений.

На рис. 3.18 приведены графики зависимостей максимальных значений окружных (а — в) и нормальных (г — е) напряжений от периода a искривления межфазной поверхности. На рис. 3.18а и 3.18г графики построены для различных параметров формы рельефа поверхности y . Красные, чёрные и синие линии обозначают напряжения, рассчитанные при $y = 0, 2; 0, 6; 2$ соответственно. На рис. 3.18б и 3.18д приведены напряжения при различных отношениях модулей сдвига нижней и верхней области. Красные, чёрные, синие и зелёные линии обозначают напряжения, рассчитанные при отношении μ_2/μ_1 , равном $0; 0, 1; 0, 3; 0, 5$ соответственно. Показано, что с уменьшением радиуса кривизны впадины в более жёстком материале, а также с уменьшением отношения μ_2/μ_1 размерный эффект межфазных напряжений проявляется сильнее.

Как и в главе 2, с целью выяснения влияния параметра M на размерный эффект были проведены вычисления для гипотетического сочетания упругих свойств межфазной поверхности и нижней полуплоскости при $M = 0, 5$ нм и $M = 1$ нм. Результаты вычислений приведены на рис. 3.18в и 3.18е вместе с кривыми, соответствующими значениям $M = 0, 1$ нм и $M = 0$. Красные, чёрные, синие и зелёные линии обозначают напряжения, рассчитанные при $M = 0; 0, 1; 0, 5; 1$ нм соответственно. Решение, полученное при $M = 0$ эквивалентно классическому решению, не учитывающему межфазное напряжение.

Из рис. 3.18в следует, что увеличение параметра M приводит к немонотонной зависимости окружного напряжения от периода искривления межфазной поверхности. Более того, в отличие от реального значения $M = 0,113$ нм, с уменьшением периода искривления a приблизительно от значения 20 нм

В расчётах принято: $\nu = 0,3$, $\sigma_1 = 1$ МПа, $\varepsilon = 0,1$

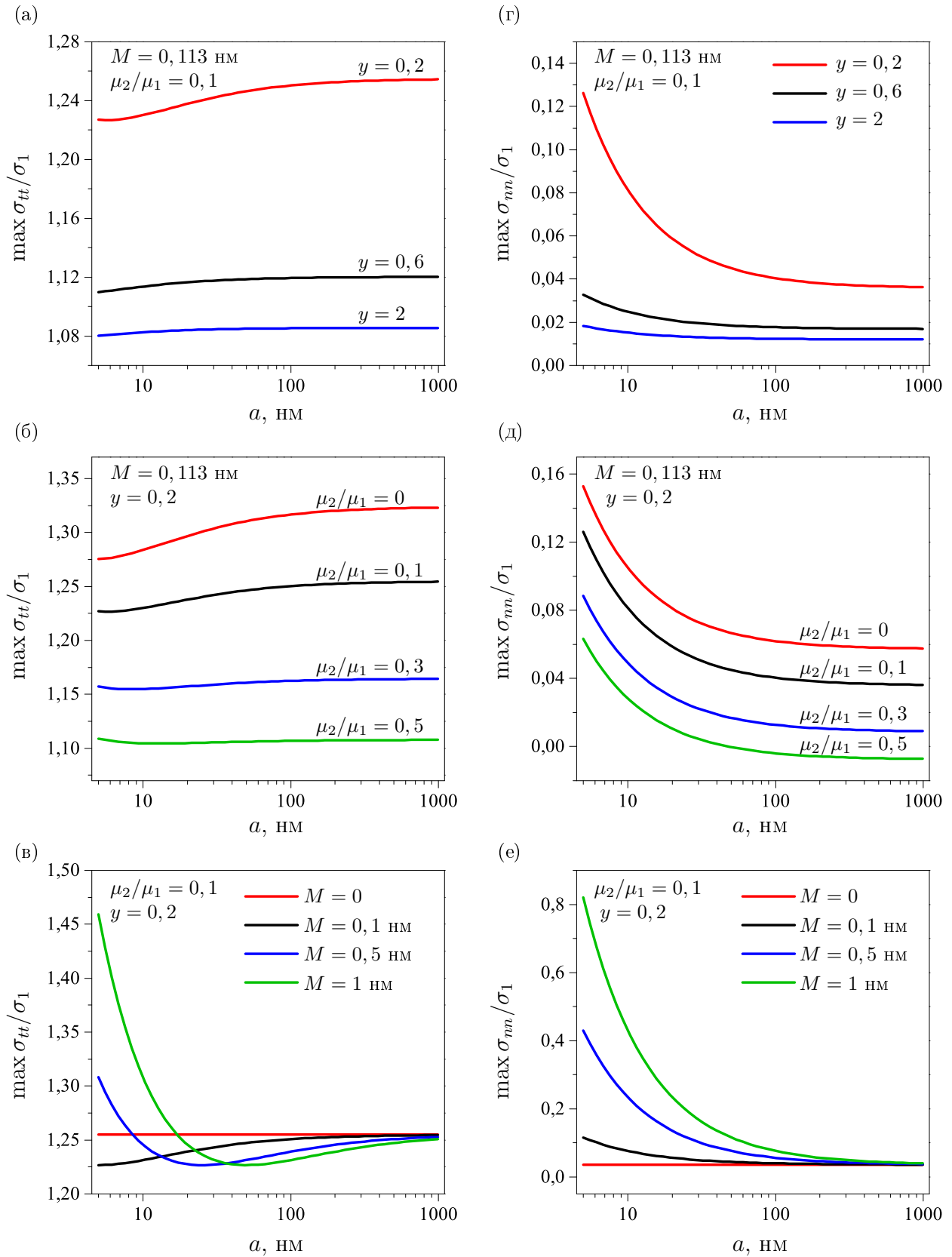


Рис. 3.18. Зависимость максимумов окружных (а — в) и нормальных (г — е) напряжений от периода

окружное напряжение возрастает при $M = 0,5$ нм и от значения 40 нм — при $M = 1$ нм. На рис. 3.18е показано, что с увеличением параметра M эффект межфазных напряжений проявляется сильнее.

Из графиков на рисунке 3.18 видно, что наиболее заметное влияние периода на напряжения находится в пределах изменения a до 100 нм. При $a > 100$ нм эффект межфазных напряжений становится незначительным и напряжённо-деформированное состояние тела перестаёт зависеть от межфазных напряжений.

Из полученных зависимостей вытекает, что эффект межфазных напряжений, действующих на слабо искривлённой в нанометровом диапазоне межфазной границе упругого двухкомпонентного пространства проявляется в следующем:

- размерный эффект — зависимость напряжённого состояния от периода искривлённой формы межфазной поверхности;
- влияние формы поверхности: чем более острые впадины имеет межфазная поверхность, тем сильнее проявляется влияние межфазных напряжений;
- влияние упругих параметров материалов: чем больше отличаются модули упругости материалов, тем сильнее проявляется влияние межфазных напряжений у дна впадины в более жёстком материале;
- межфазное напряжение перестаёт влиять на напряжённое состояние наноматериала при $a > 100$ нм.

Заключение

В работе получены следующие результаты:

- Решены задачи определения напряжённо-деформированного состояния полуплоскости с прямолинейной и со слабо искривлённой границей при действии поверхностных напряжений, а также двухкомпонентной плоскости со слабо искривлённой межфазной границей, на которой действуют межфазные напряжения.
- В общем случае построены однотипные гиперсингулярные интегральные уравнения, к которым сведено решение всех трёх задач.
- Для случая периодических усилий, действующих на прямолинейной границе полуплоскости, построено точное решение интегрального уравнения в виде рядов Фурье.
- В случае слабо искривлённой границы полуплоскости и слабо искривлённой межфазной границы при помощи метода возмущений выведены соотношения, которые позволяют найти решение в любом приближении. Для периодической формы границ в первом приближении найдено точное решение соответствующего интегрального уравнения в виде рядов Фурье.
- Обнаружен размерный эффект — зависимость напряжённого состояния от периода изменения нагрузки в первой задаче и периода искривления формы соответствующей поверхности во второй и третьей задачах.
- Проанализирована степень влияния поверхностных напряжений на напряжённое состояние границы в зависимости от характера изменения внешних усилий в первой задаче, а также от формы искривления поверхности во второй и третьей задачах. В результате выявлен следующий эффект:

чем более резкое изменение нагрузки или чем меньше радиус кривизны искривления границы, тем сильнее проявляется влияние поверхностных напряжений.

- Рассмотрено влияние относительной жёсткости материалов на напряжённое состояние тела при учёте поверхностных и межфазных напряжений и обнаружено, что чем больше отличаются модули упругости материалов, тем сильнее проявляется эффект поверхностных напряжений.
- Установлено, что во всех рассмотренных случаях влиянием поверхностных и межфазных напряжений можно пренебречь, если период $a > 100$ нм.

Публикации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК РФ:

1. Викулина Ю. И., Греков М. А., Костырко С. А. Модель пленочного покрытия со слабо искривленной поверхностью // Известия РАН. Серия: Механика твердого тела, 2010. No 6. С. 16–28.
2. Викулина Ю. И., Греков М. А. Напряженное состояние плоской поверхности упругого тела нанометрового размера при периодическом силовом воздействии // Вестник С-Петербур. ун-та. Серия 1: Математика, механика, астрономия, 2012. №4. С. 72–80.

Статьи в других изданиях:

3. Викулина Ю. И. Влияние формы поверхности на напряженное состояние тела нанометрового размера // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2013. С. 165–170.
4. Grekov M. A., Vikulina Yu. I. Effect of a type of loading on stresses at a planar boundary of a nanomaterial. // Surface Effects in Solid Mechanics. Advanced Structured Materials 30, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. Vol. 30. P. 69–79.
5. Викулина Ю. И., Греков М. А., Костырко С. А. Напряженно-деформированное состояние упругого тела со слабо искривленной поверхностью при учете поверхностного напряжения // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов. Санкт-Петербург, 2012. С. 112–118.

6. Викулина Ю. И., Греков М. А. Напряженное состояние полуплоскости при учете поверхностного напряжения // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов. Санкт-Петербург, 2011. С. 109–114.
7. Костырко С. А., Викулина Ю. И. Напряженное состояние поверхностного слоя переменной толщины // Труды ХLI международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость». Санкт-Петербург, 2010. С. 176–182.

Тезисы докладов на конференциях:

8. Викулина Ю. И., Греков М. А., Костырко С. А. Влияние дефектов поверхности нанометрового размера на напряженное состояние упругого тела // Тезисы докладов Международной научной конференции «Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений», Одесса, 23–26 августа 2013 г. Одесса: «Астропринт» 2013. С. 38.
9. Викулина Ю. И., Греков М. А. Напряженное состояние плоской поверхности наноматериала при периодическом силовом воздействии // Шестые Поляховские чтения. Тезисы докладов Международной научной конференции по механике, Санкт-Петербург, 31 января — 3 февраля 2012 г. Москва, 2012. С. 304.
10. Grekov M. A., Vikulina Yu. I. Effect of a type of loading on the surface stress at a plane boundary of a solid // ESMC-2012 — 8th European Solid Mechanics Conference: Book of Abstracts / G. A. Holzapfel and R. W. Ogden (Eds), Graz, Austria; July, 2012. / [CD] / GS-MP. Graz, Austria, 2012.

Список литературы

1. *Губбс Дж. В.* Термодинамические работы. М.: ГИТТЛ, 1950. 492 с.
2. *Shuttleworth R.* The surface tension of solids // Proceedings of the Physical society A, 1950. Vol. 63. P. 444–457.
3. *Murr L. E.* Interfacial Phenomena in Metals and Alloys. London: Addison-Wesley, 1975.
4. *Cammarata R. C.* Surface and interface stresses effects in thin films // Progress in Surface Science, 1994. Vol. 46. P. 1–38.
5. *Rusanov A. I.* Surface themodynamics revisited // Surface Science Reports, 2005. Vol. 58. P. 111–239.
6. *Ansari R., Sahmani S.* Surface stress effects on the free vibration behavior of nanoplates // Int. Journal of Engineering Science, 2011. Vol. 49. P. 1204–1215.
7. *Wang J., Huang Zh., Duan H., Yu Sh., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T.* Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials // Acta Mechanica Solida Sinica. 2011. Vol. 24. No. 1. P. 52–82.
8. *Гохштейн А. Я.* Поверхностное натяжение твёрдых тел и адсорбция. М.: Наука, 1976. 400 с.
9. *Herring C.* The use of classical macroscopic concepts in surface energy problems // In: Structure and Properties of Solid Surfaces (Gomer R. and Smith C.S. eds.), Chicago: The University of Chicago Press, 1953. P. 5–81.
10. *Sun C. Q.* Thermo-mechanical behavior of low-dimensional systems: The local bond average approach // Progress in Materials Science, 2009. Vol. 54. P. 179–307.

11. *Duan H. L., Wang J., Karimhaloo B.L.* Theory of elasticity at the nanoscale // Advances in Applied Mechanics, 2009. № 42. P. 1–68.
12. *Gurtin M. E., Murdoch A. I.* A continuum theory of elastic material surfaces // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1975. Vol. 57. № 4. P. 291–323.
13. *Gurtin M. E., Murdoch A. I.* Surface stress in solids // International Journal of Solids and Structures, 1978. Vol. 14. P. 431–440.
14. *Альтенбах Х., Еремеев В.А., Морозов Н.Ф.* Об уравнениях линейной теории оболочек при учете поверхностных напряжений // Известия РАН. Серия: Механика твердого тела, 2010. № 3. С. 30–44.
15. *Huang Z.P., Wang J.* A theory of hyperelasticity of multi-phase media with surface/interface energy effect. // Acta Mechanica, 2006. Vol. 182. P. 195–210.
16. *Wang J., Duan H.L., Huang Z.P., Karimhaloo B.L.* A scaling law for properties of nano-structured materials // Proceedings of the Royal Society, 2006. Vol. A462. P. 1355–1363.
17. *Duan H.L.* Interface effect in mechanics of heterogeneous materials. PhD Thesis, Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, 2005.
18. *Altenbach H., Eremeev V.A., Lebedev L.P.* On the existence of solution in linear elasticity with surface stresses // ZAMM, 2010. V. 90. № 3. P. 231–240.
19. *Cammarata R.C., Sieradzki K.* Effect of surface stress on the elastic moduli of thin films and superlattices // Physical Review Letters, 1989. Vol. 62. P. 2005–2008.
20. *Streitz F.H., Cammarata R.C., Sieradzki K.* Surface-stress effects on elastic properties. // Physical Review B, 1994. Vol. 49. P. 10699–10716.
21. *Подстригач Я. С., Повстенко Ю. З.* Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах. Киев: Наукова думка, 1985. 200 с.

22. *Cuenot S., Fretigny C., Demoustier-Champagne S., Nysten B.* Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy // *Physical Review B*, 2004. Vol. 69. P. 165410–165413.
23. *Jing G.Y., Duan H.L., Sun X.M., Zhang Z.S., Xu J., Li Y.D., Wang J., Yu D.P.* Surface effects on elastic properties of silver nanowires: Contact atomic-force microscopy // *Physical Review B*, 2006. Vol. 73. Art. 235409.
24. *Miller R.E., Shenoy V.B.* Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // *Nanotechnology*, 2000. Vol. 11. P. 139–147.
25. *Еремеев В.А., Альтенбах Х., Морозов Н.Ф.* О влиянии поверхностного натяжения на эффективную жесткость наноразмерных пластин // *Доклады академии наук*, 2009. Т. 424. № 5. С. 618–620.
26. *Еремеев В.А., Морозов Н.Ф.* Об эффективной жесткости нанопористого стержня // *Доклады академии наук*, 2010. Т. 432. № 4, с. 473–476.
27. *Shodja H.M., Ahmadzadeh-Bakhshayesh H., Gutkin M.Yu.* Size-dependent interaction of an edge dislocation with an elliptical nano-inhomogeneity incorporating interface effects // *International Journal of Solids and Structures*, 2012. Vol. 49. P. 759–770.
28. *Gutkin M.Yu., Enzevae C., Shodja H.M.* Interface effects on elastic behavior of an edge dislocation in a core-shell nanowire embedded to an infinite matrix // *International Journal of Solids and Structures*, 2013. Vol. 50. P. 1177–1186.
29. *Gao H.* A boundary perturbation analysis for elastic inclusions and interfaces // *International Journal of Solids and Structures*, 1991. Vol. 28. No. 6. P. 703–725.
30. *Gao H.* Stress concentration at slightly undulating surfaces // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1991. V. 39. № 4. P. 443–458.
31. *Греков М. А., Макаров С. Н.* Концентрация напряжений у слабо искривленного участка поверхности упругого тела // *Изв. РАН. Сер.: Механика тв. тела*, 2004. № 6. С. 53–61.

32. Греков М. А. Метод возмущений в задаче о деформации двухкомпонентного композита со слабо искривленной границей раздела // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1: Математика, Механика, Астрономия, 2004. Вып. 1. С. 81–88.
33. Греков М.А., Костырко С.А. Потеря устойчивости плоской формы пленочного покрытия при поверхностной диффузии // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления, 2007. Вып. 1. С. 46–54.
34. Греков М.А., Костырко С.А. Плёночное покрытие на шероховатой поверхности упругого тела // Прикладная математика и механика, 2013. Т. 77. № 1. С. 113–128.
35. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б. Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // Физическая мезомеханика, 2010. Т. 13. № 5. С. 127–138.
36. Zubov L.M. Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1982. 143 с.
37. Викулина Ю. И., Греков М. А. Напряжённое состояние плоской поверхности упругого тела нанометрового размера при периодическом силовом воздействии // Вестник С-Петербур. ун-та. Серия 1: Математика, механика, астрономия, 2012. №4. С. 72–80.
38. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
39. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, Ленингр. отделение, 1986. 336 с.
40. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
41. Греков М.А. Сингулярная плоская задача теории упругости. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2001. 192 с.

42. *Линьков А.М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. Спб.: Наука, 1999. 328 с.
43. *Tian L., Rajapakse R.K.N.D.* Elastic field of an isotropic matrix with a nanoscale elliptical inhomogeneity // International Journal of Solids and Structures, 2007. V. 44. № 24. P. 7988–8005.
44. *Grekov M., Morozov N.* Surface effects and problems of nanomechanics // J. of Ningbo University, 2012. Vol. 25. No. 1. P. 60–63.
45. *Smetanin M, Viswanath R.N., Kramer D., Beckmann D., Koch T., Kibler L.A., Kolb D.M., Weissmuller J.* Surface stress-charge response of a (111)-textured gold electrode under conditions of weak ion adsorption // Langmuir, 2008. Vol. 24. P. 8561–8567.
46. *Andrews A.M., Speck J.S., Romanov A.E., Bobeth M., Pompe W.* Modeling cross-hatch surface morphology in growing mismatched layers // Journal of Applied Physics, 2002. V. 91. No. 4. P. 1933–1943.
47. *Викулина Ю. И.* Влияние формы поверхности на напряжённое состояние тела нанометрового размера // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. Спб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2013. С. 165–170.
48. *Градштейн И. С. Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (4-е изд.). М.: Наука, 1963. 1100 с.
49. *Викулина Ю. И., Греков М. А., Костырко С. А.* Модель пленочного покрытия со слабо искривленной поверхностью // Изв. РАН. Сер.: Механика тв. тела, 2010. № 6. С. 16–28.
50. *Nix W.D., Gao H.J.* An atomistic interpretation of interface stress // Scripta Materialia, 1998. Vol. 39. P. 1653–1661.